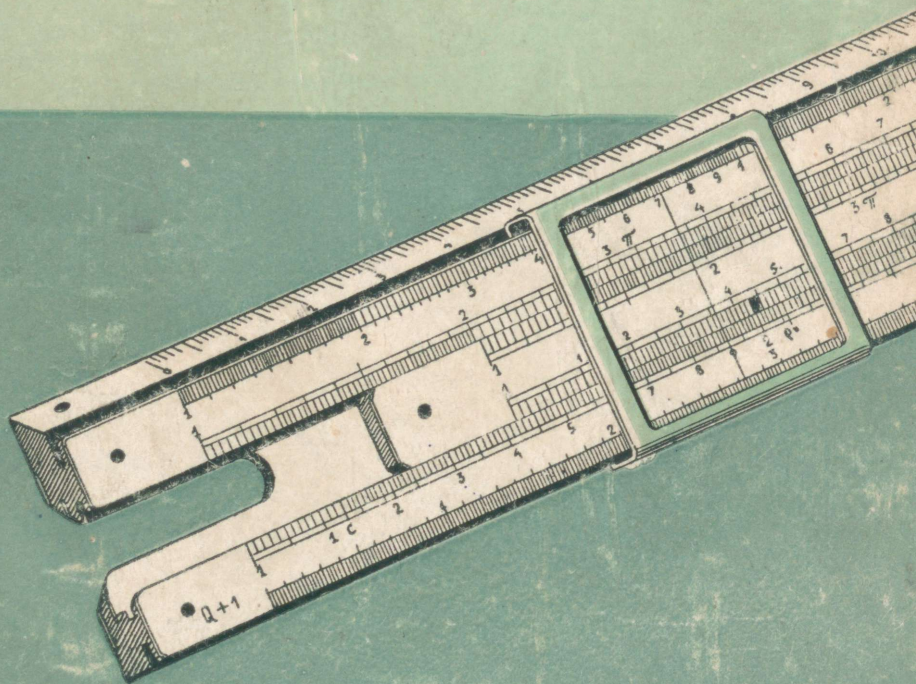


ALBERT BORKVELL

Arvutuslükati

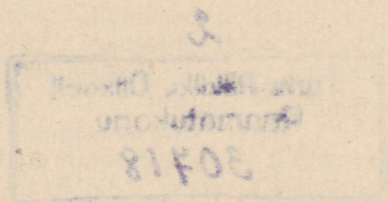
TEORIA
JA KÄSITSEMINE



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

ALBERT BORKVELL

ARVUTUSLÜKATI TEOORIA JA KÄSITSEMINE



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1956

EESSÕNA

Käesolev käsiraamat on eelmises trükis (1950. a.) ilmunud samanimelise käsiraamatu ümbertöötatud ja täiendatud väljaanne, mille eesmärgiks on juhatuse ja juhiste andmine hariliku logaritmilise arvutuslükati kasutamiseks ja käsitlemiseks.

Käesoleva käsiraamatu tarvitaja ärgu kasutagu seda ainult läbilugemiseks ja selles esinevate juhiste päheõppimiseks, vaid ühtlasi põhjalikuks läbitöötamiseks koos arvutuslükatiga, sest siin teooria ja praktika moodustavad orgaanilise terviku.

Selleks, et omandada tarvilikku oskust ja vilumust arvutuslükati käsitlemiseks, tuleb raamatus esinevate võtete ja juhiste kohaselt arvutuslükatiga tingimata läbi arvutada raamatus esinevad näited ja harjutused, kusjuures raamatu vastavates paragrahvides on esile tõstetud peamiselt niisuguste avaldiste arvutused, mida saab teostada arvutuslükati keele ühe asetusega. Raamatus esinevate näidete tulemused ja harjutusülesannete vastused on märgitud niisuguse täpsusega, mida on võimalik saavutada tavalise 25 cm pikkuse arvutuslükatiga, kusjuures nii täpsete kui ka ligikaudsete (võimaliku täpsusega) tulemuste puhul esineb raamatus igal pool võrdusmärk (=).

Käesolev raamat on määratud peale üldise tarvitamise ka käsiraamatuks kõikides Eesti NSV kesk- ja kõrgemates õppeasutustes, kus matemaatiliste, tehniliste ja statistiliste arvutuste puhul tuleb kasutada arvutuslükatit. Nõukogude Liidu teaduse ja tehnika arengu kiire tempo juures tuleks meil igati levitada praktiliste arvutuste läbiviimist arvutuslükati abil, sest arvutuslükati tundmine ja selle kasutamine hõlbustab ja kiirendab igasugust arvutamistööd, viies selle miinimumini.

O'gu käesolev raamat vahendiks eesrindlike meetodite juurutamiseks arvutuste läbiviimisel nii koolis kui ka tegelikus elus, säästes sellega töötava inimese aega ja vaeva ning tõstes ühtlasi tööviljakust.

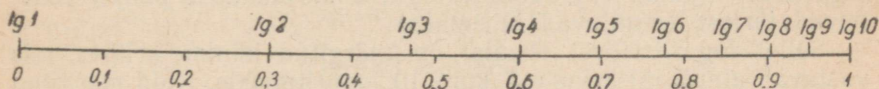
Autor.

§ 1. LOGARITMILISED SKAALAD.

1. Arvutuslükati konstruktsioonist arusaamise ja käsitsemisviisiga tutvumise otstarbel selgitame kõigepealt, mida kujutab endast logaritmiline skaala ehk astmik. Selleks võtame mingisuguse pikkusühiku, mille alguspunkti tähistame arvuga 0 ja lõpppunkti arvuga 1, ning jaotame selle pikkusühiku võrdseteks osadeks — edaspidise konstruktsiooni piltlikkuse mõttes näiteks arvudele

0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1

vastavate punktidega või kriipsudega kümneks võrdseks osaks (joon. 1, alumine jaotus). Niimoodi saame neile arvudele vasta-



Joon. 1.

vate kriipsude ekvidistantsete ehk võrdsete jaotistega skaala, mida nimetame ühtlaseks skaalaks, mille lõigud — alates alguspunktist kuni märgitud kriipsudeni — on võrdelised tähendatud arvudega.

Võttes täisarvude 1 kuni 10 logaritmid

$\lg 1 = 0,00000$	$\lg 6 = 0,77815$
$\lg 2 = 0,30103$	$\lg 7 = 0,84510$
$\lg 3 = 0,47712$	$\lg 8 = 0,90309$
$\lg 4 = 0,60206$	$\lg 9 = 0,95424$
$\lg 5 = 0,69897$	$\lg 10 = 1,00000$

näeme, et nende arvude logaritmid väärtusi võime kanda valitud kujutus- ehk pikkusühikule, alates $\lg 1 = 0$ ja lõpetades $\lg 10 = 1$. Märkides sellele pikkusühikule saadud logaritmid väärtusi vastavalt kriipsudega, saame skaala, mille lõigud skaala algusest kuni märgitud kriipsudeni (punktideni) on võrdelised arvude

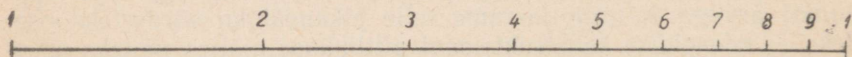
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

logaritmidega (joon. 1, ülemine jaotus). Säärast logaritmiliste lõikudega skaalat nimetatakse logaritmiliseks skaalaks. Logaritmilise skaala ehitamisel kasutatud kujutusühikut, s. o. lõiku $\lg 1$ kuni $\lg 10$, nimetatakse ka logaritmiliseks ühikuks.

Et logaritmilisel skaalal ei esineks liiga palju tähiseid, selleks jäetakse sümbol «lg» igal pool ära, mille järele (nagu hiljem selgub) polegi tarvidust. Kahekohalise arvu 10 asemel logaritmilisel skaalal märgitakse harilikult ühekohaline arv 1. Nii jäävad ainult arvud (joon. 2):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1.

Need arvud joonisel määravad ära nende arvude logaritmide väärtusi pikkusmõõdus, s. o. logaritmilistes lõikudes — skaala algusest kuni arvudele vastavate kriipsudeni.



Joon. 2.

Logaritmilise skaala jaotised, s. o. järjestikuste arvudega märgitud kriipsude (punktide) vahed, ei ole võrdsed, vaid lähenedes logaritmilise ühiku lõpp-punktile logaritmide omaduse põhjal vähenevad järjest (muutuvad lühemaks).

Sellel logaritmilisel skaalal on märgitud kümme kriipsu, mis vastavad ainult täisarvude 1 kuni 10 logaritmidele. Kuid märgitud kriipsudevahelised jaotised võime jagada veel omakorda kümneks osaks, vastavalt logaritmidele

$$\lg 1,1 = 0,04139$$

$$\lg 1,2 = 0,07918$$

$$\lg 1,3 = 0,11394$$

$$\lg 9,8 = 0,99123$$

$$\lg 9,9 = 0,99564.$$

Nii saame logaritmilise skaala üheksakümne jaotisega (joon. 3), mis samuti logaritmide omaduse põhjal vasakult paremale lugedes järk-järgult lühenevad.



Joon. 3.

Logaritmilisel skaalal 1 ja 2 vahel märgitud väiksemad numbrid

tähendavad logaritmide

$\lg 1,1$; $\lg 1,2$; $\lg 1,3$; $\lg 1,4$; $\lg 1,5$; $\lg 1,6$; $\lg 1,7$; $\lg 1,8$; $\lg 1,9$
vastavaid väärtusi, seepärast loeme neid

1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9.

Kriipsud 2 ja 3 vahel (numbrid on skaalal märkimata) tähendavad

2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9.

Säärased jaotised järgnevad kuni 10-ni. Need on logaritmilise skaala kümnendik-jaotised.

Numbritega märkimata kümnendik-jaotiste puhul 2-st kuni 3-ni, 3-st kuni 4-ni jne., 9-st kuni 10-ni on viiendate jaotiste kriipsud teistest kriipsudest vähe pikemad, et oleks kergem nende märkimisel ja lugemisel orienteeruda.

Analoogilise jaotuse võime teha edasi, kus nüüd kümnendike vahed, s. o. 1 ja 1,1 vahe, 1,1 ja 1,2 vahe jne. võime jaotada igaühe omakorda kümneks osaks vastavalt logaritmidele

$$\lg 1,01 = 0,00432$$

$$\lg 1,02 = 0,00860$$

$$\lg 1,03 = 0,01284$$

$$\lg 1,04 = 0,01708$$

$$\lg 1,05 = 0,02132$$

$$\lg 1,06 = 0,02556$$

$$\lg 1,07 = 0,02980$$

$$\lg 1,08 = 0,03404$$

$$\lg 1,09 = 0,03828$$

$$\lg 1,10 = 0,04252$$

$$\lg 1,11 = 0,04676$$

$$\lg 1,12 = 0,05100$$

$$\lg 1,13 = 0,05524$$

$$\lg 1,14 = 0,05948$$

$$\lg 1,15 = 0,06372$$

$$\lg 1,16 = 0,06796$$

$$\lg 1,17 = 0,07220$$

$$\lg 1,18 = 0,07644$$

$$\lg 1,19 = 0,08068$$

$$\lg 1,20 = 0,08492$$

Need oleksid logaritmilise skaala sajandik-jaotised. Kui ruum logaritmilisel skaalal lubaks, võiks võtta veelgi peenemaid jaotisi. Tavaliste arvutuslükatite logaritmilise skaala suurimaks pikkuseks on 25 cm, seepärast on tuhandik-jaotisi neil juba raske märkida. Seepärast esinevad täielikult ainult kümnendik-jaotised ja osaliselt sajandik-jaotised. Harilikku 25 cm pikkusega logaritmilist skaalat näeme joonisel I (raamatu lõpus lisalehel). Sajandik-jaotised esinevad siin täielikult 1-st kuni 2-ni, kusjuures sajandik-jaotiste viiendad kriipsud 1 ja 1,1, 1,1 ja 1,2 jne. kuni 1,9 ja 2 vahel on kriipsude lugemise ja märkimise hõlbustamiseks tehtud teistest kriipsudest vähe pikemad. Edasi tuleksid 2-st paremale poole sajandik-jaotised liiga tihedad, seepärast märgitakse sellel logaritmilisel skaalal 2-st kuni 4-ni sajandik-jaotised kahekaupa, s. o.

2,02; 2,04; 2,06; ... ; 3,98; 4,00;

ja 4-st kuni 10-ni viiekaupa, s. o.

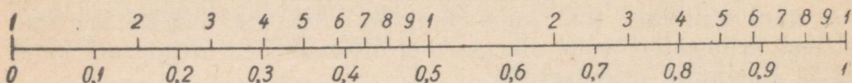
4,05; 4,10; 4,15; ... ; 9,95; 10,00,

kus kümnendik-jaotiste kriipsud on nii kahe kui ka viie kaupa märgitud sajandik-jaotiste kriipsudest vähe pikemad.

Seda logaritmilist skaalat, mille pikkus tavalistel arvutuslükatitel on 25 cm, nimetame arvutuslükati põhiskaalaks. Põhiskaala sisaldab ühe logaritmilise ühiku.

Kui märkida mingit kriipsu 25 cm pikkusega põhiskaalal tähega a , siis selle kriipsu kaugus skaala algusest on $25 \cdot \lg a$ cm ehk $250 \cdot \lg a$ mm, kus arvu 250 nimetatakse põhiskaala mooduliks. Näiteks kriips arvu 2,84 tähisena asetseb põhiskaala algusest $250 \cdot \lg 2,84 = 113,3$ mm kaugusel.

2. Kui vähendada logaritmilise skaala kujutus- ehk pikkusühikut kaks korda, siis võime eespool kirjeldatud põhiskaala pikkusesse mahutada uue logaritmilise skaala, mis sisaldab kaks ühepikkust logaritmilist ühikut. Nimetame neist vasakpoolse esimeseks ja parempoolse teiseks logaritmiliseks ühikuks (joon. 4).



Joon. 4.

Kaks korda vähendatud mõõtkavas ehk mastaabis võetud logaritmilisel ühikul on jaotised kaks korda lühemad põhiskaala logaritmilise ühiku vastavatest jaotistest. Et

$$\frac{\lg 2}{2} = \frac{0,30103}{2} = 0,15052$$

$$\frac{\lg 3}{2} = \frac{0,47712}{2} = 0,23856$$

$$\frac{\lg 4}{2} = \frac{0,60206}{2} = 0,30103$$

$$\frac{\lg 5}{2} = \frac{0,69897}{2} = 0,34949$$

$$\frac{\lg 6}{2} = \frac{0,77815}{2} = 0,38908$$

$$\frac{\lg 7}{2} = \frac{0,84510}{2} = 0,42255$$

$$\frac{\lg 8}{2} = \frac{0,90309}{2} = 0,45155$$

$$\frac{\lg 9}{2} = \frac{0,95424}{2} = 0,47712$$

$$\frac{\lg 10}{2} = \frac{1,00000}{2} = 0,50000,$$

siis niisugustes pikkustes logaritmilised lõigud esinevad valitud mõõtühiku puhul esimesel logaritmilisel ühikul. Teisel logaritmilisel ühikul lõppevate logaritmiliste lõikude pikkused, mida loeme esimese logaritmilise ühiku algusest, on siis

$$\begin{aligned}
0,50000 + 0,15052 &= 0,65052 \\
0,50000 + 0,23856 &= 0,73856 \\
0,50000 + 0,30103 &= 0,80103 \\
0,50000 + 0,34949 &= 0,84949 \\
0,50000 + 0,38908 &= 0,88908 \\
0,50000 + 0,42255 &= 0,92255 \\
0,50000 + 0,45155 &= 0,95155 \\
0,50000 + 0,47712 &= 0,97712 \\
0,50000 + 0,50000 &= 1,00000,
\end{aligned}$$

mis vastavad

$$\begin{aligned}
\frac{\lg 20}{2} &= \frac{1,30103}{2} = 0,65052 \\
\frac{\lg 30}{2} &= \frac{1,47712}{2} = 0,73856 \\
\frac{\lg 40}{2} &= \frac{1,60206}{2} = 0,80103 \\
\frac{\lg 50}{2} &= \frac{1,69897}{2} = 0,84949 \\
\frac{\lg 60}{2} &= \frac{1,77815}{2} = 0,88908 \\
\frac{\lg 70}{2} &= \frac{1,84510}{2} = 0,92255 \\
\frac{\lg 80}{2} &= \frac{1,90309}{2} = 0,95155 \\
\frac{\lg 90}{2} &= \frac{1,95424}{2} = 0,97712 \\
\frac{\lg 100}{2} &= \frac{2,00000}{2} = 1,00000.
\end{aligned}$$

Sellest arvutusest näeme: kui esimesel logaritmilisel ühikul esinevad jaotuskriipsud vastavad arvudele

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

siis teisel logaritmilisel ühikul vastavad samadele jaotuskriipsudele arvud

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

Seega esinevad neil kahel logaritmilisel ühikul kõik arvud 1-st kuni 100-ni. Sellel (kahe logaritmilise ühikuga) skaalal on lihtsuse mõttes tavaliselt ära märgitud ainult ühekohalised arvud

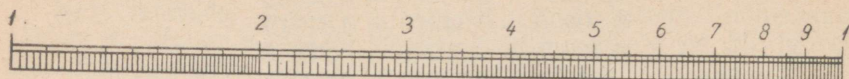
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1,

mis tähendavad aga

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

Mõne arvutuslükati teisel logaritmilisel ühikul on siiski mär-

gitud kahekohalised arvud ja 100 või teise logaritmilise ühiku algul on 10 ja lõpul 100 (joon. VIII, raamatu lõpus lisalehel).



Joon. 5.

Et harilike arvutuslükatite põhiskaalad on 25 cm pikad ja kahe logaritmilise ühikuga skaala iga üksik logaritmiline ühik on kaks korda lühem põhiskaala logaritmisest ühikust, siis pole võimalik kahe ühikuga skaalal märkida sajandik-jaotisi sama kriipsude arvuga, nagu ühe logaritmilise ühikuga skaalal. 25 cm pikkusel kahe logaritmilise ühikuga skaala esimesel logaritmilisel ühikul esinevad kõik kümnendik-jaotised (joon. 5). Sajandik-jaotised esinevad 1-st kuni 2-ni kahekaupa, s. o.

1,02; 1,04; 1,06; ... ; 1,98; 2,00

ja 2-st kuni 5-ni viiekaupa:

2,05; 2,10; 2,15; ... ; 4,95; 5,00.

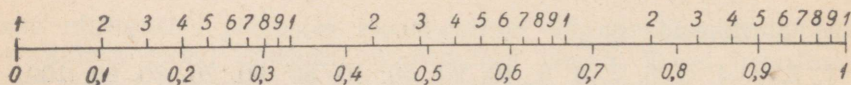
Edasi ei ole 5-st kuni 10-ni sajandik-jaotisi enam märgitud.

Analoogilised eelmistega on jaotised teisel logaritmilisel ühikul, s. o. 10-st kuni 100-ni. Joonis 5 kujutab nii esimest kui ka teist logaritmilist ühikut.

Kriips, mis esimesel logaritmilisel ühikul tähistab arvu 1,1, tähendab teisel logaritmilisel ühikul arvu 11; kriips, mis esimesel logaritmilisel ühikul tähistab arvu 1,2, tähendab teisel logaritmilisel ühikul arvu 12, jne.; esimese logaritmilise ühiku lõppkriipsule 10 vastab teisel logaritmilisel ühikul lõppkriips 100.

Kui tähistada 25 cm pikkusega kahe logaritmilise ühikuga skaalal mingit kriipsu tähega a , siis selle kriipsu kaugus skaala algusest on $\frac{25}{2} \lg a \text{ cm} = 125 \cdot \lg a \text{ mm}$, kus arv 125 on selle skaala moodul. Näiteks kriips arvu 59,0 tähisena asetseb selle skaala algusest $125 \cdot \lg 59,0 = 220,4 \text{ mm}$ kaugusel.

3. Kui vähendame logaritmilise skaala kujutus- ehk pikkus-ühikut kolm korda, siis võime eespool kirjeldatud põhiskaala pikkusesse mahutada logaritmilise skaala kolme ühepikkuse logaritmilise ühikuga, s. o. esimese, teise ja kolmanda logaritmilise ühikuga (joon. 6). Kolm korda vähendatud mastaabis võetud loga-



Joon. 6.

ritmilisel ühikul on jaotised kolm korda lühemad põhiskaala logaritmilise ühiku vastavatest jaotistest.

Esimesel logaritmilisel ühikul esinevad siin valitud mõõtühiku puhul logaritmilised lõigud järgmistes pikkustes

$$\frac{\lg 2}{3} = \frac{0,30103}{3} = 0,10034$$

$$\frac{\lg 3}{3} = \frac{0,47712}{3} = 0,15904$$

$$\frac{\lg 4}{3} = \frac{0,60206}{3} = 0,20069$$

$$\frac{\lg 5}{3} = \frac{0,69897}{3} = 0,23299$$

$$\frac{\lg 6}{3} = \frac{0,77815}{3} = 0,25938$$

$$\frac{\lg 7}{3} = \frac{0,84510}{3} = 0,28170$$

$$\frac{\lg 8}{3} = \frac{0,90309}{3} = 0,30103$$

$$\frac{\lg 9}{3} = \frac{0,95424}{3} = 0,31808$$

$$\frac{\lg 10}{3} = \frac{1,00000}{3} = 0,33333.$$

Teisel logaritmilisel ühikul lõppevate logaritmiliste lõikude pikkused, mida loeme esimese logaritmilise ühiku algusest, on siin

$$0,33333 + 0,10034 = 0,43367$$

$$0,33333 + 0,15904 = 0,49237$$

$$0,33333 + 0,20069 = 0,53402$$

$$0,33333 + 0,23299 = 0,56632$$

$$0,33333 + 0,25938 = 0,59271$$

$$0,33333 + 0,28170 = 0,61503$$

$$0,33333 + 0,30103 = 0,63436$$

$$0,33333 + 0,31808 = 0,65141$$

$$0,33333 + 0,33333 = 0,66667,$$

mis vastavad

$$\frac{\lg 20}{3} = \frac{1,30103}{3} = 0,43367$$

$$\frac{\lg 30}{3} = \frac{1,47712}{3} = 0,49237$$

$$\frac{\lg 40}{3} = \frac{1,60206}{3} = 0,53402$$

$$\frac{\lg 50}{3} = \frac{1,69897}{3} = 0,56632$$

$$\frac{\lg 60}{3} = \frac{1,77815}{3} = 0,59271$$

$$\frac{\lg 70}{3} = \frac{1,84510}{3} = 0,61503$$

$$\frac{\lg 80}{3} = \frac{1,90309}{3} = 0,63436$$

$$\frac{\lg 90}{3} = \frac{1,95424}{3} = 0,65141$$

$$\frac{\lg 100}{3} = \frac{2,00000}{3} = 0,66667.$$

Kolmandal logaritmilisel ühikul lõppevate logaritmiliste lõikude pikkused, mida loeme esimese logaritmilise ühiku algusest, on siis

$$0,66667 + 0,10034 = 0,76701$$

$$0,66667 + 0,15904 = 0,82571$$

$$0,66667 + 0,20069 = 0,86736$$

$$0,66667 + 0,23279 = 0,89966$$

$$0,66667 + 0,25938 = 0,92605$$

$$0,66667 + 0,28170 = 0,94837$$

$$0,66667 + 0,30103 = 0,96770$$

$$0,66667 + 0,31808 = 0,98475$$

$$0,66667 + 0,33333 = 1,00000,$$

mis vastavad

$$\frac{\lg 200}{3} = \frac{2,30103}{3} = 0,76701$$

$$\frac{\lg 300}{3} = \frac{2,47712}{3} = 0,82571$$

$$\frac{\lg 400}{3} = \frac{2,60206}{3} = 0,86736$$

$$\frac{\lg 500}{3} = \frac{2,69897}{3} = 0,89966$$

$$\frac{\lg 600}{3} = \frac{2,77815}{3} = 0,92605$$

$$\frac{\lg 700}{3} = \frac{2,84510}{3} = 0,94837$$

$$\frac{\lg 800}{3} = \frac{2,90309}{3} = 0,96770$$

$$\frac{\lg 900}{3} = \frac{2,95424}{3} = 0,98475$$

$$\frac{\lg 1000}{3} = \frac{3,00000}{3} = 1,00000.$$

Sellest arvutusest nähtub nüüd, et kui esimesel logaritmilisel ühikul esinevad jaotuskriipsud vastavad arvudele 1-st kuni 10-ni, siis teisel logaritmilisel ühikul vastavad samadele jaotuskriipsu-

dele arvud 10-st kuni 100-ni ja kolmandal logaritmilisel ühikul vastavad samadele jaotuskriipsudele arvud 100-st kuni 1000-ni. Seega esinevad neil kolmel logaritmilisel ühikul kõik arvud 1-st kuni 1000-ni. Ruumi kokkuhoiu ja lihtsuse mõttes on märgitud selle skaala igal kolmel logaritmilisel ühikul ainult ühekohalised arvud (joon. IV, skaala lükati ülemisel äärel).

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1.

25 cm pikkusele kolme logaritmilise ühikuga skaala iga logaritmilise ühiku jaotised on analoogilised kahe logaritmilise ühikuga skaala logaritmiliste ühikute jaotisega, s. o. esimesel logaritmilisel ühikul esinevad kõik kümnendik-jaotised ning sajandik-jaotised 1-st kuni 2-ni kahekaupa ja 2-st kuni 5-ni viiekaupa, kusjuures teisel logaritmilisel ühikul 10-st kuni 100-ni ja kolmandal logaritmilisel ühikul 100-st kuni 1000-ni on jaotised analoogilised eel-
mistega, s. o. esimese logaritmilise ühiku jaotisega (joon. IV).

Kriips, mis esimesel logaritmilisel ühikul tähistab arvu 2,4, tähendab teisel logaritmilisel ühikul arvu 24 ja kolmandal logaritmilisel ühikul arvu 240.

Kui tähistada 25 cm pikkusega kolme logaritmilise ühikuga skaalal mingit kriipsu tähega a , siis selle kriipsu kaugus skaala algusest on $\frac{25}{3} \lg a \text{ cm} = \frac{250}{3} \lg a \text{ mm}$, kus arv $\frac{250}{3}$ on selle skaala mooduliks. Näiteks kriips arvu 146 tähisena asetseb kolme logaritmilise ühikuga skaala algusest $\frac{250}{3} \lg 146 = 180,1 \text{ mm}$ kaugusel.

§ 2. ARVUTUSLÜKATI KONSTRUKTSIOON JA KORRASHOID.

Eespool kirjeldatud logaritmilisi skaalasid esineb igal arvutuslükatil vähemalt neli (joon. II, raamatu lõpus): kaks ühesugust alumist skaalat ühe logaritmilise ühikuga ja kaks ühesugust ülemist skaalat kahe logaritmilise ühikuga. Arvutuslükati teiste skaalade kirjelduse ja seletuse esitame edaspidi.

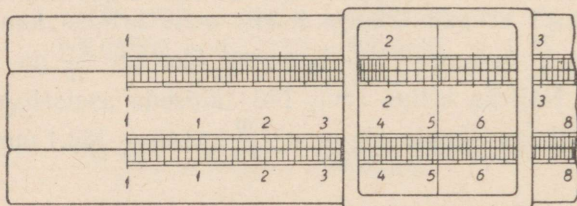
Tähistame need neli skaalat järjekorras ülalt allapoole lugedes tähtedega A, B, C ja D. A ja B on ülemised skaalad — kahe logaritmilise ühikuga; C ja D — alumised skaalad — ühe logaritmilise ühikuga. Nimetame neid A-skaalaks, B-skaalaks, C-skaalaks ja D-skaalaks. A- ja B-skaala sisaldavad C- ja D-skaala üldpikkuses kaks ühepikkust logaritmilist ühikut. A- ja B-skaala erinevad C- ja D-skaalast ainult mastaabilt: C- ja D-skaala logaritmilised ühikud on kaks korda suuremas mastaabis kui A- ja B-skaala logaritmilised ühikud.

A- ja B-skaala alguskriipsud, mida tähistame vastavalt A-1 ja B-1, asetsevad kohakuti D- ja C-skaala alguskriipsudega D-1 ja C-1; A- ja B-skaala lõppkriipsud, mida tähistame vastavalt

A-100 ja B-100, asetsevad kohakuti D- ja C-skaala lõppkriipsudega D-10 ja C-10.

Need neli logaritmilist skaalat (A-, B-, C- ja D-skaala) esinevad arvutuslükati kahel osal: põhiosal ehk korpusel ja keelel. Arvutuslükati põhiosal esinevad A- ja D-skaala, arvutuslükati keelel — B- ja C-skaala. Arvutuslükati keelt võime liigutada edasi-tagasi põhiosa suhtes, kus esinevad A- ja D-skaala. A- ja B-skaala moodustavad arvutuslükati ülemise jaotuse, C- ja D-skaala — alumise jaotuse. Ülemisel jaotusel on pikkus A-1-st kuni A-10-ni ja B-1-st kuni B-10-ni sama, mis pikkus A-10-st kuni A-100-ni ja B-10-st kuni B-100-ni, ning kogu pikkus ülemisel jaotusel A-1-st kuni A-100-ni ja B-1-st kuni B-100-ni on sama, mis alumine jaotus C-1-st kuni C-10-ni ja D-1-st kuni D-10-ni.

Arvude lugemiseks skaaladel, nende ülesotsimiseks, äramärgimiseks ja alumiste skaalade (C ja D) pealt ülemineamiseks skaaladele A ja B ning ümberpöörduvalt, tarvitatakse arvutuslükati juures veel kolmandat osa — märkijat (mida nimetatakse ka sil-laks või aknakeseks)¹. See on valmistatud klaasist või läbipaist-



Joon. 7.

vast plastmassist ning varustatud kriipsuga, mida nimetame skaalade kriipsudest eraldamiseks «niidiks» (joon. 7). Klaas on kinnitatud alumiiniumist raami, mis ühendab märkijat arvutuslükatiga nõnda, et märkijat võib vabalt piki skaalaid edasi-tagasi liigutada. Niit klaasil on skaaladel olevate jaotiste ja kriipsude otsimiseks, märkimiseks ja lugemiseks ning sidepidajaks alumiste ja ülemiste skaalade vahel.

Kui märkija klaasil esineb kolm niiti (millest jutt on edaspidi), siis tegutseme alguses keskmise niidiga, et niidi ümbrusse sattuvad jaotised oleksid paremini nähtavad ja kergemini loetavad.

Mõnede arvutuslükatite iures kasutatakse skaalade jaotiste täpsemaks märkimiseks ja lugemiseks märkija tavalise klaasi asemel suurendavat klaasi — silindrilist luupi, mis on asetatud mär-

¹ Venelased nimetavad märkijat «бегунок», prantslased «courseur», inglased «cursor» ehk «runner», ameeriklased «indicator», sakslased «Läufer».

kija alumiiniumist raami ja varustatud keskel niidiga (musta kriipsuga).

Arvutuslükatid on valmistatud kas papist, puidust või metallist. Puidust arvutuslükatid on kaetud pealt valge tselluloidiga, millele on kantud logaritmiliste skaalade tumedad kriipsud. Tselluloidiga on nad kaetud selleks, et skaalad oleksid puhtad ja selged, kergesti loetavad ja ei määrduks. Et temperatuuri ja niiskuse mõju ei segaks arvutuslükati kasutamist, s. o. et arvutuslükati keel ei hakkaks arvutuslükati põhiosa vahel logisema ega paisuks ka kinni, selleks valmistatakse arvutuslükati põhiosa kahest osast. Üks osa A-skaalaga ja teine osa D-skaalaga ühendatakse metallplaadiga (või plaatidega) nõnda, et arvutuslükati põhiosa oleks ette- ja tahapoole paindub. Seega ei tekita temperatuuri muutus arvutuslükati keele edasi-tagasi lükkamisel erilist takistust. Kuid siiski ei ole soovitatav arvutuslükatit hoida väga kaua palava päikese käes või jälle liiga niiskes kohas, sest tselluloidiga kaetud osa võib rikneda.

Arvutuslükatiga töötamisel, kui keel on ühele või teisele poole välja lükatud, ei tohi lükati põhiosa «tühja» poolt liiga tugevasti suruda.

Arvutuslükati keelt tuleb liigutada võimalikult nii, et sõrmed ei puudutaks keele servi, vaid ainult keele tselluloidiga kaetud külgi, muidu kandub sõrmede higi keele puidust servadele ja mõjub aja jooksul takistavalt keele sujuvale liikumisele.

Uue arvutuslükati keele servi on soovitatav määrida talgiga. Üldiselt võib raskelt liikuva keele servi puhastada villase lapiga ning määrida talgiga või parafiiniga.

Arvutuslükati tselluloidiga kaetud määrdunud osi tuleb puhastada kas pehme kustutuskummiga või viinas niisutatud lapiga. Tselluloidiga kaetud osi ei tohi puhastada bensiiniga, puupiiritusega ega ka veega, sest bensiin hävitab kriipsud, puupiiritus lahustab tselluloidi ja vesi võib paisutada lükati puidust osi.

Arvutuslükat tuleb pärast tarvitamist panna tema jaoks määratud tuppe, kusjuures märkija tuleb jätta tupe ülemisse ossa (tupe kaane alla), sest märkijat tupe põhja vajutades võib märkija klaas lükati taskus või portfellis kandmisel muljumise tagajärjel puruneda.

Arvutuslükati ostmisel tuleb tingimata kontrollida: kui A-skaala alguskriips, s. o. A-1, paigutada kohakuti B-skaala alguskriipsuga B-1, et siis ka A-skaala lõppkriips, s. o. A-100, oleks kohakuti B-skaala lõppkriipsuga B-100. Samuti ka C- ja D-skaala kohakuti asetsevate alguskriipsude C-1 ja D-1 puhul peavad skaalade lõppkriipsud C-10 ja D-10 asetsema kohakuti. Kuid peale selle peavad A- ja B-skaalal ning C- ja D-skaalal kõik vahepealsed vastavad kriipsud olema kohakuti.

Märkija korrasoleku kontrollimisel tuleb vaadata, et märkija ei logiseks ja selle ülemise serva all olev vedru oleks korras ning

keele edasi-tagasi lükkamisel märkija ei nihkuks paigast. Samuti tuleb jälgida, et niit kataks A- ja D-skaalal näiteks vastavaid kriipse $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{16}{4}$ jne.

Nagu juba eelmises §-s nimetasime, on tavalise arvutuslükati põhiskaala pikkus 25 cm. On ka lühemaid arvutuslükateid (tas-kus kandmiseks): põhiskaalade pikkusega 16 cm ja 12,5 cm, kuid nende abil ei ole võimalik leida arvutamisel nii suurt täpsust kui eelmise abil. Veel suurema täpsuse saamiseks tarvitatakse arvutus-lükatit, mille põhiskaala on 50 cm. See on nn. b ü r o o - l ü k a t. Õppeotstarbeks valmistatakse arvutuslükateid, millede skaala pik-kus on 1—2 m.

Peale käesolevas raamatus kirjeldatava hariliku arvutuslükati valmistatakse veel teisi arvutuslükateid, s p e t s i a l l ü k a t e i d, mida kasutatakse mitmesugustes tehnikaharudes ja mis on määratud keemikutele, elektrikutele, suurtükiväelastele, majandustead-lastele jt.

Allpool järgnev hariliku arvutuslükati käsitlemisviisi selgitused ei olene arvutuslükati pikkusest: käsitlemisviisi selgitused on ühesugused igasuguse pikkusega arvutuslükatitele.

§ 3. ARVUDE MÄRKIMINE JA LUGEMINE.

1. Enne kui hakata töötama arvutuslükatiga, tuleb kõigepealt õppida skaaladel olevate jaotiste lugemist, s. o. kriipsude ja nende vaheliste jaotiste tähendust, mis teeb alguses mõnelegi suuri raskusi. Tuleb panna rõhku sellele, et skaaladel olevad jaotised võe-taks ja loetakse õieti ja võimalikult täpselt, sest kõik vead arvutus-lükatiga töötamisel tekivad enamasti arvude ebaõigest lugemisest ja märkimisest skaaladel. Arvutuslükati kasutaja esmaseks ja peami-seks tingimuseks on skaalade ja nendel esinevate jaotiste põhjalik tundmine.

Nagu nägime, esinevad C- ja D-skaalal sajandik-jaotised täie-likult 1-st kuni 2-ni; edasi 2-st kuni 4-ni — kahekaupa, ja 4-st lõpuni — viiekaupa. Järelikult, kui skaala alguskriipsu lugeda 1-ks, siis kriipsud ühe ja kahe vahel määravad ära iga arvu kahe küm-nendkohaga, mille täisosa on 1. Kriipsud 2 ja 4 vahel määravad ära arve vahemikus 2-st kuni 4-ni kahe kümnendkohaga, millede teine kümnendkoht on paarisarv. 2-le järgnev kriips tähendab seega 2,02, teine kriips — 2,04, kolmas kriips — 2,06 jne. Et märkida nii-diga arvu 2,03, selleks tuleb niit paigutada kriipsude 2,02 ja 2,04 vahelise jaotise keskkoha.

Logaritmilise jaotuse printsiibi järgi peaksime niidi paigutama õieti mitte nende keskkoha, vaid keskkohast vähe paremale poole, kuid me arvestame siin sajandik-jaotisi, mis on väga kitsad, ja seepärast ei teki olulist viga, kui võtame nende keskkoha. Arves-tades viiekohalisi logaritme näeme, et

$$\lg 2,02 = 0,30535$$

$$\lg 2,03 = 0,30750$$

$$\lg 2,04 = 0,30963$$

ja nende vahed

$$0,30750 - 0,30535 = 0,00215$$

$$0,30963 - 0,30750 = 0,00213$$

on praktiliselt võrdsed (lahkumine vahedes on ligikaudu ainult 1%).

Kui A- ja B-skaala alguskriipsu lugeda 1-ks, siis säärane käsitlusviis oleks ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 1-st kuni 2-ni teise kümnendkoha märkimisel või teisel logaritmilisel ühikul 10-st kuni 20-ni esimese kümnendkoha märkimisel.

Kriipsud 4 ja 10 vahel C- ja D-skaalal määravad arve vahemikus 4-st kuni 10-ni kahe kümnendkohaga, mis lõpevad numbriga 5 või 0. 4-le järgnev esimene kriips tähendab 4,05, teine kriips — 4,10, kolmas kriips — 4,15 jne. kuni 9,95, mis on C- ja D-skaalal eelviimane kriips. Et märkida niidiga C- või D-skaalal näiteks arvu 4,27, selleks tuleb kriipsude 4,25 ja 4,30 vahe silma järgi jaotada viieks võrdseks osaks ja paigutada niit nõnda, et niidist vasakule (kuni 4,25) oleks kaks osa ja niidist paremale (kuni 4,30) oleks kolm osa. Otsitav koht tuleb seega võtta niidiga silma järgi. Säärane käsitsemisviis oleks ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 2-st kuni 5-ni teise kümnendkoha märkimisel või teisel logaritmilisel ühikul 20-st kuni 50-ni esimese kümnendkoha märkimisel.

Kolmandaid kümnendkohti (tuhandik-jaotisi) C- ja D-skaalal on võimalik niidiga otsida ainult arvude (või kriipsude) 1 ja 2 vahel. Siin tuleb iga kõrvuti oleva kahe kriipsu vahe silma järgi jaotada kümneks võrdseks osaks ja vastav osa niidiga ära märkida antud arvu kolmanda kümnendkoha järgi. Selliselt tuleb toimida ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 5 ja 10 vahel asuva arvu teise kümnendkoha määramisel või teisel logaritmilisel ühikul 50 ja 100 vahel asuva arvu esimese kümnendkoha määramisel.

Ühekohalise täisosaga arvude neljandaid kümnendkohti arvutuslükati skaaladel niidiga märkida või, ümberpöörduvalt, niidi kohalt lugeda pole võimalik.

Et silma järgi ühel või teisel skaalal niidiga kahe kriipsu vahelise arvu kümnendkoha otsimisel ja märkimisel mitte eksida, tuleb kõigepealt kindlaks määrata, milliseid arve kujutavad niidist vasak- ja parempoolsed lähimad kriipsud, ning ühtlasi vaadata mitmeks osaks tuleb jaotada nende kriipsude vahe: kas kaheks, viieks või kümneks osaks. Säärane otsitava arvu kümnendkoha määramine ei ole muud kui lineaarne interpoolimine ehk *i n t e r p o o l i m i n e* silma järgi.

H a r j u t u s i. Märkida niidiga D-skaalal järgmised arvud, mis on tähistatud kriipsuga:

3; 3,2; 3,7; 8,9; 2,4; 2,6; 9,1; 9,9; 1,4; 1,1; 1,45; 1,52; 1,87; 1,99; 1,15; 1,23; 1,06; 1,01; 1,09; 1,59; 2,46; 2,82; 3,34; 3,72; 2,04; 3,06; 3,02; 4,25; 4,05; 7,75; 9,95.

Märkida niidiga D-skaalal järgmised arvud, millede kujutistes kriipsud puuduvad:

2,25; 3,33; 3,07; 2,01; 4,42; 4,74; 5,81; 6,03; 6,13; 9,09; 1,255; 1,845; 1,115; 1,035; 1,005; 1,123; 1,714; 1,468; 1,333; 1,991; 1,099.

Kui arvus, millel on ühekohaline täisosa, on rohkem kui kaks kümnendkohta, siis tuleb arvestada kolmandat kümnendkohta niidiga võttes — kui võimalik — ainult silma järgi. Näiteks: niidiga märkides võime C- või D-skaalal arvude 1,642 ja 1,643 vahel vahet teha, kuid arvude 8,672 ja 8,673 vahel pole enam võimalik seda teha. Järgmised kümnendkohad (alates neljandast kümnendkohast) ei saa tulla enam arvestamisele. Need võiksid arvestamisele tulla, nagu pärastpoole näeme, ainult siis, kui arvu täisosa on 0. See pärast, kui esinevad näiteks arvud 1,87425, 1,23687 ja 9,66247, siis tuleb neid ü m a r d a d a ja nimelt: esimest ja teist arvu arvudeks 1,874 ja 1,237 ning viimast arvu arvuks 9,66. Neid arve on juba võimalik D-skaalal niidiga märkida. A- ja B-skaalal saab ära märkida umbes neidsamu arve, kuid nende skaalade kaks korda lühema logaritmilise ühiku tõttu on ka täpsus kaks korda väiksem.

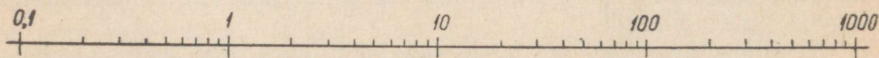
Arvu $\pi = 3,1416$ jaoks on harilikult A- ja B- ning C- ja D-skaalal eri kriips (joon. II ja IV raamatu lõpus).

Harjutusi. Märkida niidiga järgmised arvud D-skaalal: 2,462; 2,433; 5,658; 8,888; 4,012; 4,006; 1,1234; 1,8765; 1,0659; 1,0407; 1,0032; 1,0008.

Märkida niidiga järgmised arvud A-skaalal:

4; 60; 64; 71; 3,7; 9,9; 1,3; 1,28; 1 08; 2,15; 6,55; 7,77; 82,5; 34,5; 36,4; 30,3; 18,4; 10; 8; 10,5; 10,1; 6,248; 5 081; 8,802; 44,22; 40,57; 40,08; 1,123; 1,014; 1,007; 2,003; 2,032; 2,6751.

2. Kuna A-skaalal esimene logaritmiline ühik 1-st kuni 10-ni on samade jaotistega nagu sellele järgnev teine logaritmiline ühik 10-st kuni 100-ni, siis on samade jaotistega ka teisele logaritmi-



Joon. 8.

lisele ühikule järgnev kolmas logaritmiline ühik 100-st kuni 1000-ni, kolmandale logaritmilisele ühikule järgnev neljas logaritmiline ühik 1000-st kuni 10 000-ni jne. Samuti on samade jaotistega ka esimesele logaritmilisele ühikule eelnev logaritmiline ühik 0,1-st kuni 1-ni ning sellele omakorda eelnev logaritmiline ühik 0,01-st

kuni 0,1-ni (joon. 8). Mitme logaritmilise ühikuga skaala on seega perioodiline. See logaritmilise skaala perioodsuse omadus võimaldab, nagu pärastpoole näeme, igasuguste kümnendmurdude korrutamise, jagamise, logaritmime ja antilogaritmime üle kanda ainult ühe logaritmilise ühikuga skaalale ja nimelt põhiskaalale, mille tõttu võime näiteks arvu 4 tähistavat kriipsu põhiskaalal niisama hästi lugeda kas arvudeks 40, 400, 4000 jne. või arvudeks 0,4; 0,04; 0,004 jne., sest

$$\begin{array}{ll} \lg 40 = \lg 4 + 1 & \lg 0,4 = \lg 4 - 1 \\ \lg 400 = \lg 4 + 2 & \lg 0,04 = \lg 4 - 2 \\ \lg 4000 = \lg 4 + 3 & \lg 0,004 = \lg 4 - 3 \end{array}$$

kus kõik logaritmid erinevad üksteisest ainult täisosadega, kuid kõigi nende logaritmid murdosad on võrdsed, millest nähtub ühtlasi logaritmilise skaala perioodsus. Seega kriips numbriga 4 tähendab üldiselt arvu $4 \cdot 10^k$, kus $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Järelikult iga kriips põhiskaalal (samuti ülemise skaala esimesel ja teisel logaritmilisel ühikul) tähendab mitte üht kindlat arvu, vaid kõiki arve, mis saadakse tema korrutamisel kümne astmega. Kõigil neil arvudel on ikka ühed ja samad tüvenumbrid, kuid erinevus on ainult koma asukohas.

Ainult sel juhul, kui skaala alguskriips oleks fikseeritud, siis omaks iga järgnev kriips skaalal kindlat tähendust. Kui näiteks D-skaalal alguskriipsu lugeda 1-ks, siis skaala numbrite 1 ja 2 vahel asuvate väikeste numbrite 6 ja 7 vaheline keskmine pikem kriips tähendab 1,65; kui alguskriipsu lugeda 10-ks, siis loeme tähendatud kriipsu 16,5-ks; kui alguskriipsu lugeda 100-ks, siis loeme 165; kui alguskriipsu lugeda 1000-ks, siis loeme 1650; kui alguskriipsu lugeda 0,1-ks, siis loeme 0,165 jne. Kui aga skaala alguskriips ei ole fikseeritud, siis tuleb skaalal arvu märkimiseks lugeda järjestikku ainult tema tüvenumbrid 1—6—5, s. o. üks — kuus — viis, mida märgime D-skaalal (ja samuti ka C-skaalal) võetava kriipsu puhul järgmiselt: D-165 (ja C-165).

Kui märkida näiteks põhiskaalal arv 35,6, siis loeme: kolm—viis—kuus, s. o. D-356, kus 3 on esimene tüvenumber, 5 on teine tüvenumber ja 6 on kolmas tüvenumber; kui märkida põhiskaalal arv 0,0723, siis loeme: seitse — kaks — kolm, s. o. D-723, kus 7 on esimene tüvenumber, 2 on teine tüvenumber ja 3 on kolmas tüvenumber; kui märkida põhiskaalal arv 108 500, siis loeme: üks — null — kaheksa — viis, s. o. D-1085, kus 1 on esimene tüvenumber, 0 on teine tüvenumber, 8 on kolmas tüvenumber ja 5 on neljas (ning viimane) tüvenumber. Arvu 35,6 kolmanda tüvenumbri jaoks on põhiskaalal kriips, kuid arvu 0,0723 kolmanda tüvenumbri jaoks on arv 108 500 neljanda tüvenumbri jaoks puuduvad kriipsud. Kahel viimasel juhul tuleb silma järgi interpoolida, s. o. märkija niiti viimaste tüvenumbrite märkimisel paigutada silma

järgi: esimesel juhul — 720 ja 725 tähendavate kriipsude vahele, milline kriipsude vahe tuleb silma järgi jaotada viieks osaks ja märkida niidiga vasakpoolsest kriipsust paremale poole kolm osa; teisel juhul — 1080 ja 1090 tähendavate kriipsude vahele, jaotades selle kriipsude vahe silma järgi kümneks osaks ja paigutades niidi kriipsude vahe keskkoha, s. o. viis osa vasakpoolsest kriipsust paremale poole.

Niisugust silma järgi interpoolimist ehk silma järgi niidi paigutamist kahe naabruses oleva kriipsu vahel tuleb arvutuslükatiga töötamisel kasutada väga tihti.

Et märkida põhiskaalal näiteks arvu 46,798, selleks tuleb arv ümardada nii, et esineks ainult kolm tüvenumbrit, s. o. 46,8 (neli — kuus — kaheksa), s. o. D-468, mida saame skaalal märkida. Samuti arvu 626 835 märkimiseks skaalal võtame kolme tüvenumbriga ümardatud arvu 627 000 (kuus — kaks — seitse), s. o. D-627, mida saame skaalal märkida. Tüvenumbriga 1 algavat arvu saame põhiskaalal märkida nelja tüvenumbriga arvuna. Näiteks arvu 0,0120623 asemel tuleb skaalal märkimiseks võtta nelja numbriga ümardatud arv 0,01206, s. o. D-1206.

C- ja D-skaalal on alati võimalik märkida ja lugeda arvu kolm ja mõnikord neli (1 ja 2 vahel) tüvenumbrit; kuid A- ja B-skaalal saab märkida ja lugeda mitte rohkem kui kolm tüvenumbrit, kusjuures esimesel logaritmilisel ühikul 5 ja 10 vahel ning teisel logaritmilisel ühikul 50 ja 100 vahel on märgitava ja loetava arvu kolmas tüvenumber isegi kahtlane.

Tehniliste arvutuste puhul arvutuslükatiga töötades on enamail juhtudel lükatiga saavutatav täpsus küllaldane.

Eespool-öeldust selgub, et arvu märkimine skaalal toimub koma ja arvu lõpul asetsevaid nulle arvestamata, s. o. arvu kolme või (C- ja D-skaalal 1 ja 2 vahel) nelja tüvenumbri järgi.

Hariutusi: Märkida niidiga D-skaalal järgmised arvud: 273; 67,5; 0,466; 0,0769; 50,1; 125,5; 10,05; 31 200; 52 085; 36,789; 9,2593; 0,08008.

3. Arvude suurusjärgu määramiseks ja tähistamiseks kasutatakse võtet, mille rakendamiseks jaotatakse arvud kolme liiki: arvud, millel on a) positiivne suurusjärk, b) negatiivne suurusjärk ja c) suurusjärk, mis on võrdne nulliga.

Need suurusjärgud määratakse järgmiselt:

a) Arvudel, mis on ≥ 1 , loetakse täisosa numbrite arvu positiivseks suurusjärguks. Näiteks: arvu 13,45 suurusjärk on + 2 ja arvu 5300 suurusjärk on + 4.

b) Arvudel, mis on $< 0,1$, loetakse komast paremal pool järgemööda (kuni esimese tüve-

numbrini) esinevate nullide arvu negatiivseks suurusjärguks. Näiteks arvu 0,000204 suurusjärg on -3.

c) Arvudel, mis on $\geq 0,1$ ja < 1 , on suurusjärg võrdne nulliga. Näiteks arvu 0,42 suurusjärg on 0.

Nii loeme, et näiteks arvude

346 000	suurusjärg on	+ 6
172,06	„ „	+ 3
5,15	„ „	+ 1
0,18	„ „	0
0,064	„ „	- 1
0,000051	„ „	- 4.

Kui võrrelda arvude suurusjärku nende arvude logaritmide täisosadega, siis näeme, et iga arvu suurusjärg on ühe võrra suurem kui selle arvu logaritmi täisosa.

Harjutusi: Märkida alljärgnevate arvude suurusjärg:

3,16; 42,5; 0,04; 0,806; 300; 4,01; 0,001; 30,00.

Kui on teada arvu järjestikused tüvenumbrid ja arvu suurusjärg, siis on ka arv määratud. Näiteks, kui arvu järjestikused tüvenumbrid on 4 — 6 — 5 ja suurusjärg on + 2, siis arv on 46,5; kui suurusjärg on + 4, siis arv on 4650, ja kui suurusjärg on - 2, siis esineb arv 0,00465.

Et märkida ja lugeda arvu arvutuslükati abil, peab teadma ta asukohta skaalal ja ühtlasi ka suurusjärku.

4. Kui märkida niidiga näiteks D-skaalal (mooduliga 250 mm) mingi arv x , siis seda arvu tähistava koha kaugus s skaala algusest on

$$s = 250 \cdot \lg x,$$

kus s on mõõdetud millimeetrites. Kuid niidi asetusega arvu märkimisel teeme me alati mingisuguse vea, mida võivad põhjustada kas silma järgi interpoolimine, skaala ebatäpsed jaotised, jämedad kriipsud jne. Tähistame selle vea sümboliga Δs ja nimetame seda märkimisveaks. Märkimisviga Δs kujutab kas positiivset või negatiivset kõrvalekaldumist õigest kaugusest s ja võib kõikuda harilikult 0,05 mm ja 0,20 mm vahel, olenedes muidugi arvutuslükati konstruktsioonist ja arvutuslükati kasutaja vilumusest, kusjuures keskmiseks märkimisveaks loeme 0,1 mm, s. o. $\Delta s = 0,1$ mm.

Märkimisviga Δs põhjustab omakorda lugemivea, s. o. skaalalt loetava arvu vea, mida tähistame Δx -ga. See tähendab, et kui s -le vastab x , siis $(s + \Delta s)$ -le vastab $x + \Delta x$, ning seega

$$s + \Delta s = 250 \cdot \lg(x + \Delta x),$$

millest märkimisviga

$$\begin{aligned}\Delta s &= 250 \cdot \lg(x + \Delta x) - 250 \cdot \lg x = \\ &= 250 \cdot \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = 250 \cdot \frac{\Delta x}{x} \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}},\end{aligned}$$

kus $\frac{\Delta x}{x}$ on relatiivseks lugemiveaks. Et saadud avaldises $\frac{\Delta x}{x}$ on väga väike suurus ja järelikult selle pöördväärtus $\frac{x}{\Delta x}$ on küllalt suur, siis võime lugeda¹, et

$$\lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \approx \lg e \approx 0,4343,$$

millest

$$\lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \approx 0,4343 \cdot \frac{\Delta x}{x},$$

kus arvu 0,4343 nimetatakse kümnendlogaritmide mooduliks.

Katselisel teel — kasutades logaritmide tabelleid — näeme, et kui $\frac{\Delta x}{x}$ absoluutväärtus ei ületa arvu 0,015, siis viimase valemi järgi võime alati saada 1-le lähedase arvu logaritmi murdosa neli õiget numbrit koma järel.

Valemist

$$\Delta s = 250 \cdot \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

tuleneb ühtlasi logaritmilise skaala järgmine omadus: kui märkimisviga Δs lugeda konstantseks suuruseks ja muuta x -i väärtust, siis muutub ka Δx , kuid suhte $\frac{\Delta x}{x}$ väärtus jääb endiseks. Seega konstantsele märkimisveale vastab konstantne relatiivne lugemiviga. Järelikult võime öelda, et arvutuslükatil relatiivne lugemiviga on skaala ulatuses konstantne.

Arvestades, et arvude märkimist D-skaalal (ja samuti C-skaalal) võime teostada 0,1 mm täpsusega, s. o. $\Delta s = 0,1$ mm, siis saame valemi

$$\Delta s \approx 250 \cdot 0,4343 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

järgi, et lugemiviga Δx annab tulemusele relatiivse vea

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0,1}{250 \cdot 0,4343} = 0,00092 \approx 0,001 = 0,1\%,$$

¹ Matemaatilise analüüsi eelkursuses tõestatakse, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \approx 2,7183,$$

kus arv e on naturaalogaritmide alus.

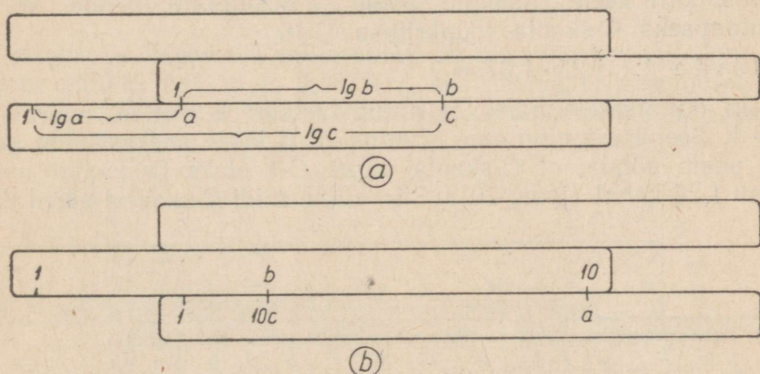
millest nähtub, et lugemiviga võib D-skaalal (ja samuti C-skaalal) ulatuda kuni 0,1%-ni, kusjuures pole muidugi arvestatud arvude ümardamisest tekkivaid vigu. Konstantse relatiivse lugemivea puhul on aga absoluutne lugemiviga muutuv, ja nimelt, ta kasvab skaala algusest skaala lõpu poole luges.

Kui D- ja C-skaalal relatiivne lugemiviga võib ulatuda kuni 0,1%-ni, siis A- ja B-skaalal, millede mooduliks on 125 mm, on ta kaks korda suurem ja võib seega ulatuda kuni 0,2%-ni, ning kolme logaritmilise ühikuga skaalal, mille mooduliks on $\frac{250}{3}$ mm, on ta kolm korda suurem ja võib ulatuda kuni 0,3%-ni.

§ 4. KORRUTAMINE.

Arvutuslūkati abil kahe arvu a ja b korrutise c leidmist tuleb teostada kahe logaritmilise skaalaga, millel vastavad lugemid on võrdelised. Korrutise c leidmiseks tuleb nende skaalade abil liita arvude a ja b logaritmidele vastavad lõigud (pikkused), sest et

$$\lg c = \lg ab = \lg a + \lg b.$$



Joon. 9.

Kui näiteks tegurid a ja b on ühekohalise täisosaga arvud, siis märgime niidiga D-skaalal arvu a asukoha ja toome C-skaala alguskriipsu C-1 niidi alla ning viime siis niidi C-skaalal arvu b tähendava kriipsu peale s. o. C- b peale, mille järel loeme C- b kohalt D-skaalal arvude a ja b korrutise c (joon. 9, a), mis kujutab joonisel esitatud arvudele a ja b vastavate logaritmiliste lõikude summat.

Kui aga ühekohaliste arvude a ja b korrutamisel arvutuslūkati keelt paremale poole välja nihutades C- b satub väljapoole

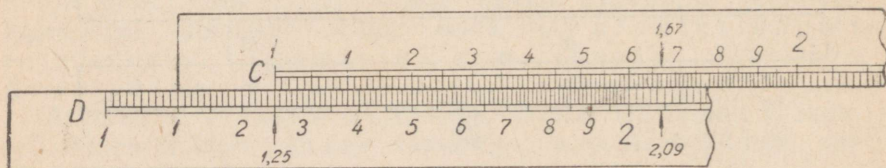
D-skaala piirkonda, siis peaks D-skaalast paremal pool asuma veel üks logaritmiline ühik, millel oleksid jaotised 10-st kuni 100-ni ja mis võimaldaks siis otsitava korrutise leidmise. Sel juhul näeksime, et skaala perioodsuse tõttu C-1-le ja C-10-le vastaks D-skaalal üks ja sama jaotusarv (nagu see esineb A- ja B-skaalal). Niisugusel korral arvude a ja b korrutamisel C- ja D-skaala abil nihutame arvutuslükati keele vasakule poole, nii et C-skaala parempoolne ots C-10 tuleks D- a kohale. Siis viime niidi C- b -ga kohakuti ja loeme nüüd D-skaalal niidi alt arvu c (joon. 9, b), mis arvude a ja b korrutisena tuleb 10 korda suurendada, sest logaritmilise ühiku 10-st kuni 100-ni asemel on võetud logaritmiline ühik 1-st kuni 10-ni.

Arvude korrutamisel arvutuslükati abil tuleb arvestada seda, et arvutuslükat võimaldab saada arvutustulemusi kolme ja osalt nelja õige tüvenumbriga, seepärast saadakse otsitav korrutis enamasti ligikaudne — teatava täpsusega.

1. Vaatleme alguses ühekohalise täisosaga arvude (millede suurusjärk on $+1$) korrutamist, mille puhul kahe arvu korrutise suurusjärk võib olla $+1$ või $+2$. Kui kahe arvu korrutise suurusjärk on $+1$, siis lükkame arvutuslükati keele paremale poole ja kasutame nende arvude korrutamiseks C-skaala alguskriipsu C-1, kui aga kahe arvu korrutise suurusjärk on $+2$, siis lükkame arvutuslükati keele vasakule poole ja kasutame nende arvude korrutamiseks C-skaala lõppkriipsu C-10.

Näide 1. $1,25 \cdot 1,67 = ?$

Siin on otseselt näha, et antud arvude korrutise suurusjärk on $+1$. Seepärast nihutame arvutuslükati keele keskasendist paremale poole nõnda, et C-skaala algus C-1 oleks D-skaalal asuva kriipsu 1,25 kohal (joon. 10). Siis viime niidi C-skaalal oleva arvu



Joon. 10.

1,67 peale ja vaatame, missugune arv esineb samal kohal D-skaalal niidi all. Näeme, et D-skaalal niidi alt võime ligikaudu lugeda arvu 2,09. See on otsitav ligikaudne korrutis. Seega oleme liitnud $\lg 1,25 + \lg 1,67$, mis on sama mis $\lg(1,25 \cdot 1,67)$. Tähendab,

$$1,25 \cdot 1,67 = 2,09.$$

Analoogiliselt võiksime nende arvude korrutamist teostada ka arvutuslükati ülemiste skaaladega: asetame B-skaala alguse B-1

A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul oleva arvu 1,25 kohale ja viime niidi B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul oleva arvuga 1,67 kohakuti. Niidi all A-skaalal leiame nende ligikaudse korrutise 2,09. Siin on aga kaks korda lühema logaritmilise ühiku ja seega ühtlasi lühemate jaotiste tõttu korrutise kolmandat numbrit raskem määrata kui alumisel skaalal, sest A- ja B-skaalal teostatud arvutustes tekkiv relatiivne viga esineb kaks korda suuremana kui C- ja D-skaalal teostatud arvutustes. Seepärast on üldiselt soovitatav suurema täpsuse saamiseks arvude korrutamist teostada arvutuslükati alumisel poolel, s. o. C- ja D-skaalaga. A- ja B-skaalat, nagu hiljem selgub, kasutame peamiselt seoses teiste skaaladega.

Vaatame, kui suur viga tekib käsitletud näite puhul arvutuslükati tarvitamisel. Täpne korrutis on 2,0875. Kui arvutamise täpne resultaat on x ja arvutuslükati abil saadud resultaat a , siis absoluutne viga, mida tähistame Δx -ga, on

$$\Delta x = a - x = 2,09 - 2,0875 = 0,0025,$$

ja relatiivne viga

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{a - x}{x} = \frac{0,0025}{2,0875} = 0,0012 = 0,12\%.$$

Siit näeme, et käesoleva näite puhul on viga võrdlemisi väike. Kui võtame näiteks 2,09 m ja 2,0875 m, siis näeme, et absoluutne viga on ainult 2,5 mm, mis võrreldes üle kahemeetrise pikkusega on väike suurus.

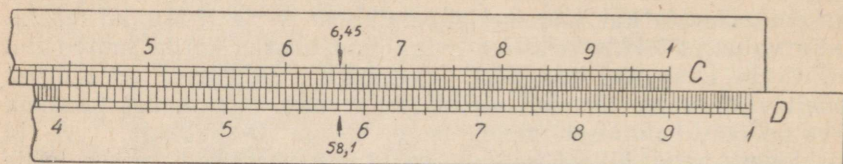
Hariutusi.

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1) $2 \cdot 3 = ?$ | 12) $2,72 \cdot 3,4 = ?$ |
| 2) $2,5 \cdot 2 = ?$ | 13) $8,02 \cdot 1,2 = ?$ |
| 3) $3,4 \cdot 2 = ?$ | 14) $1,07 \cdot 4,4 = ?$ |
| 4) $2,3 \cdot 4 = ?$ | 15) $2,548 \cdot 3,1 = ?$ |
| 5) $3,6 \cdot 1,2 = ?$ | 16) $3,025 \cdot 1,6 = ?$ |
| 6) $5,8 \cdot 1,3 = ?$ | 17) $2,13 \cdot 2,07 = ?$ |
| 7) $1,1 \cdot 7,7 = ?$ | 18) $4,07 \cdot 1,06 = ?$ |
| 8) $1,54 \cdot 5 = ?$ | 19) $5,123 \cdot 1,24 = ?$ |
| 9) $2,06 \cdot 3 = ?$ | 20) $6,723 \cdot 1,045 = ?$ |
| 10) $5,05 \cdot 1,8 = ?$ | 21) $2,505 \cdot 3,0521 = ?$ |
| 11) $3,33 \cdot 2,3 = ?$ | 22) $1,005 \cdot 4,7232 = ?$ |

[Vastused. 1) 6. 2) 5. 3) 6,8. 4) 9,2. 5) 4,32. 6) 7,54. 7) 8,47. 8) 7,70. 9) 6,18. 10) 9,09. 11) 7,66. 12) 9,25. 13) 9,62. 14) 4,71. 15) 7,90. 16) 4,84. 17) 4,41. 18) 4,31. 19) 6,35. 20) 7,03. 21) 7,65. 22) 4,75.]

Näide 2. $9 \cdot 6,45 = ?$

Selle näite puhul on otseselt näha, et korrutise suurusjärk on +2. Seepärast arvude 9 ja 6,45 korrutise saamiseks nihutame arvutuslükati keele vasakule poole nõnda, et C-skaala parempoolne ots C-10 tuleks D-9 kohale (joon. 11). Viime niidi C-645 peale,



Joon. 11.

kus nüüd võime D-skaalal niidi alt lugeda arvu 5,81, mis tuleb lugeda 10 korda suuremana, s. o. 58,1. Seega

$$9 \cdot 6,45 = 58,1.$$

Tähendab, kui arvutuslükati keel kahe ühekohalise täisosaga arvu korrutamisel tuleb lükata vasakule poole, siis tuleb D-skaalal võetav korrutis lugeda 10 korda suuremana.

Selles näites, kus meil oleks tegemist pikkusmõõduga sentimeetrites, oleks absoluutne viga 58,1 cm kohta ainult 0,5 mm, sest täpne resultaats $x = 58,05$ ja seega absoluutne viga

$$\Delta x = a - x = 58,1 - 58,05 = 0,05;$$

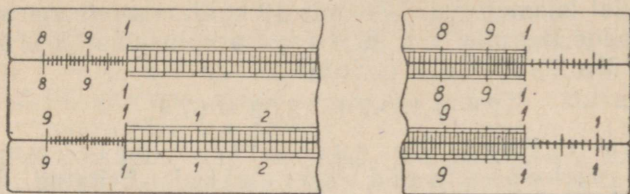
ning relatiivne viga oleks käesoleval juhul samuti väga väike, s. o.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{a-x}{x} = \frac{0,05}{58,05} = 0,0008 = 0,08\%.$$

Otsustamine, kummale poole lükata kahe ühekohalise täisosaga arvu korrutamisel arvutuslükati keelt, ei tekita raskust, sest juba tegurite täisosadele vaadates võime ette näha, kas korrutis on suurem või väiksem kümnest. Ainult mõnel üksikul juhul on seda raske ette näha, näiteks, kui võtame $3,14 \cdot 3,21$. Siin tuleb lihtsalt katsetada. Kui arvutuslükati keel korrutamisel jääb paremale, siis tuleb korrutiseks lugeda sama arv, mis esineb D-skaalal; jääb aga arvutuslükati keel korrutamisel vasakule, siis tuleb lugeda korrutiseks D-skaalal saadud arvust 10 korda suurem arv.

Mõnede arvutuslükatite C- ja D-skaalal on selleks otstarbeks, kui otsekohe ei saa öelda, kas korrutis on suurem või väiksem kümnest, C-1-st ja D-1-st vasakul ning C-10-st ja D-10-st paremal veel mõned jaotuskriipsud (joon. 12): C-1-st ja D-1-st vasakul on eelneva logaritmilise ühiku lõppkriipsud ning C-10-st ja D-10-st paremal järgmise logaritmilise ühiku alguskriipsud. Niisugusel korral kui korrutise suurusjärku ei saa otseselt ette näha, võimaldab nii parempoolne kui ka vasakpoolne arvutuslükati keele lüke

korrutise lugemise. Samuti võivad esineda A-1-st ja B-1-st vasakul A- ja B-skaala logaritmilise ühiku lõppkriipsud ning A-100-st ja B-100-st paremal A- ja B-skaala logaritmilise ühiku alguskriipsud (joon. 12).



Joon. 12

Teostades korrutamist $9 \cdot 6,45$ arvutuslükati ülemistel skaaladel (A- ja B-skaalaga), jääb arvutuslükati keel paremale ja otsitava korrutise leiame A-skaala teisel logaritmilisel ühikul. Kuid korrutise suurema täpsuse saamiseks on ikkagi soovitatav niisugust korrutamist teostada C- ja D-skaalaga.

Harjutusi.

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1) $3 \cdot 5 = ?$ | 10) $2,27 \cdot 5,42 = ?$ |
| 2) $3,4 \cdot 6 = ?$ | 11) $7,03 \cdot 4,85 = ?$ |
| 3) $8,3 \cdot 7 = ?$ | 12) $1,29 \cdot 8,55 = ?$ |
| 4) $5,4 \cdot 6,3 = ?$ | 13) $5,014 \cdot 7,6 = ?$ |
| 5) $7,3 \cdot 2,7 = ?$ | 14) $4,709 \cdot 6,7 = ?$ |
| 6) $9,8 \cdot 1,9 = ?$ | 15) $2,008 \cdot 5,52 = ?$ |
| 7) $4,25 \cdot 7,2 = ?$ | 16) $3,381 \cdot 8,37 = ?$ |
| 8) $6,06 \cdot 8,1 = ?$ | 17) $6,062 \cdot 1,885 = ?$ |
| 9) $1,74 \cdot 6,5 = ?$ | 18) $1,202 \cdot 8,756 = ?$ |

[Vastused. 1) 15. 2) 20,4. 3) 58,1. 4) 34,0. 5) 19,71. 6) 18,62. 7) 30,6. 8) 49,1. 9) 11,31. 10) 12,30. 11) 34,1. 12) 11,03. 13) 38,1. 14) 31,6. 15) 11,08. 16) 28,3. 17) 11,43. 18) 10,52.]

Näide 3. $2,6 \cdot 1,15 \cdot 7,46 \cdot 3,02 = ?$

Siin on neli tegurit, seega esineb siin kolmekordne korrutamine. Korrutame enne kaks tegurit, siis saadud korrutise kolmanda teguriga ja viimaks neljandaga. Seame C-1 D-26 kohale ja viime niidi C-115 peale. Niidi all D-skaalal on kahe esimese teguri korrutis, mis tuleb korrutada kolmanda teguriga 7,46. Esimest korrutist pole vaja D-skaalal lugeda. Jätame niidi paigale ja viime C-10 niidi alla (mitte C-1, sest, nagu näeme, on teine korrutis suurem kümnest; kui teine korrutis ei oleks suurem kümnest, siis tuleb muidugi niidi alla viia C-1). Siis viime niidi C-746 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on teine korruta-

tis (kahekohalise täisosaga, sest arvutuslükati keel läks vasakule). Ka seda korrutist pole tarvis lugeda. Jäägu niit jälle paigale ja viime C-1 niidi alla (nüüd C-1, sest nagu näha, on kolmas korrutis väiksem kümnest, kui lugeda eelmist korrutist 10 korda väiksemana). Lõpuks viime niidi C-302 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal leiame arvu 6,74, mis 10 korda suuremana ongi otsitav ligikaudne korrutis, s. o. 67,4 (sest arvutuslükati keel käis korutamisel üks kord vasakul). Seega

$$2,6 \cdot 1,15 \cdot 7,46 \cdot 3,02 = 67,4.$$

Mitme teguri korrumtamisel pole vajadust lugeda vahepealseid korrutisi. Esitatud korrutise võtte puhul tuleb tingimata meeles pidada, mitu korda korrumtamise käigus arvutuslükati keel käis vasakul; kui üks kord, siis tuleb D-skaalal esinev arv 10 korda suurendada, kui kaks korda, siis 100 korda suurendada jne.

Harjutusi.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $2,6 \cdot 3,3 \cdot 5 = ?$ | 6) $2,155 \cdot 4,025 \cdot 6,345 = ?$ |
| 2) $7,4 \cdot 2,4 \cdot 4,1 = ?$ | 7) $8,071 \cdot 1,251 \cdot 3,105 = ?$ |
| 3) $5,16 \cdot 4,3 \cdot 3,7 = ?$ | 8) $7,2 \cdot 3,15 \cdot 4,05 \cdot 5,3 = ?$ |
| 4) $3,62 \cdot 7,04 \cdot 1,9 = ?$ | 9) $9,1 \cdot 7,6 \cdot 2,68 \cdot 5,4 = ?$ |
| 5) $1,76 \cdot 2,37 \cdot 3,06 = ?$ | 10) $5,03 \cdot 1,755 \cdot 3,1416 \cdot 8,8 = ?$ |

11) Tellistest müüri pikkus on 4,85 m, kõrgus 2 64 m ja paksus 45 cm. Kui palju kaalub nimetatud müür, kui selle mahukaal on 1,89 t/m³?

[Vastused. 1) 42,9. 2) 72,8. 3) 82,1. 4) 48,4. 5) 12,76. 6) 55,0. 7) 31,4. 8) 487. 9) 1001. 10) 244. 11) 10,9 tonni.]

2. Eelmistes korrumtamise näidetes oli igal teguril ühekohaline täisosa, s. o. iga teguri suurusjärk oli +1. Kui nüüd arvestada tegurite suurusjärke ja nimelt nende suurusjärkude summat, siis võime tähele panna, et teises näites tegurite 9 ja 6,45 korrumtise suurusjärk on võrdne nende tegurite suurusjärkude summaga, kuid esimeses näites tegurite 1,25 ja 1,67 korrumtise suurusjärk on võrdne nende tegurite suurusjärkude summaga miinus üks.

Et üldiselt kaht mistahes suurusjärguga arvu korrumtada, selleks võtame mõlema arvu suurusjärgud ja liidame nad ning saadud suurusjärkude summat kasutame korrumtise suurusjärgu määramiseks järgmiselt:

a) läheb kahe arvu korrumtamisel arvutuslükati keel vasakule, s. o. kasutades korrumtamisel arvutuslükati keele lõppkriipsu C-10, on korrumtise suurusjärk võrdne tegurite suurusjärkude summaga;

b) läheb aga kahe arvu korrumtamisel arvutuslükati keel paremale, s. o. kasutades korru-

tamisel arvutuslükati keele alguskriipsu C-1, on korrutise suurusjärk võrdne tegurite suurusjärgude summaga miinus üks.

Selle juhise tõestamiseks võtame kaks arvu a ja b . Märgime $a = a_0 \cdot 10^k$ ja $b = b_0 \cdot 10^m$, kus a_0 ja b_0 on ühekohalise täisosaga kümnendmurrud, s. o. $1 \leq a_0 < 10$ ja $1 \leq b_0 < 10$, ning seega $1 \leq a_0 b_0 < 100$. Esimese arvu $a = a_0 \cdot 10^k$ suurusjärk on $k + 1$ ja teise arvu $b = b_0 \cdot 10^m$ suurusjärk on $m + 1$. Kui siinjuures $1 \leq a_0 b_0 < 10$, siis on $a_0 b_0$ suurusjärk $+1$ ja korrutise $ab = a_0 b_0 \cdot 10^{k+m}$ suurusjärk $k + m + 1 = (k + 1) + (m + 1) - 1$; kui aga $10 \leq a_0 b_0 < 100$, siis on $a_0 b_0$ suurusjärk $+2$ ja korrutise $ab = a_0 b_0 \cdot 10^{k+m}$ suurusjärk $k + m + 2 = (k + 1) + (m + 1)$, millega on ühtlasi tõestatud tähendatud juhise olemasolu.

Selle juhise kasutamise otstarbel esineb mõne arvutuslükati parempoolses otsas (joon. III ja IV) D-skaala lõpus tähis P -1 (Produit -1), mis tähendab, et kui korrutamisel arvutuslükati keel läheb paremale, siis tuleb korrutise suurusjärku vähendada ühe ühiku võrra.

Kolmandas näites korrutise $2,6 \cdot 1,15 \cdot 7,46 \cdot 3,02$ suurusjärk oli $+2$. Kuna siin tegurite suurusjärgude summa on $+4$ ja nende tegurite korrutamisel arvutuslükati keel käis kaks korda paremal pool, siis seega korrutise suurusjäak on: $+4 - 2 = +2$.

N ä i d e 4. $23,8 \cdot 0,00865 = ?$

Esimese teguri suurusjärk on $+2$ ja teise teguri suurusjärk on -2 . Nende summa on: $+2 + (-2) = 0$.

Et arvude korrutamisel arvutuslükatiga pole vaja lugeda vahepealseid korrutisi ja komade arvestamine korrutamise protsessis pole oluline, siis arvestame korrutamisel ainult tegurite tüvenumbreid, s. o. 2—3—8 (kaks — kolm — kaheksa) ja 8—6—5 (kaheksa — kuus — viis).

Siin tuleb C-10 paigutada D-238 kohale ja viia niit C-865 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal esinevad otsitava korrutise tüvenumbrid 2—0—6 (kaks — null — kuus). Et siin nende arvude korrutamisel arvutuslükati keel läheb vasakule, s. o. korrutamisel tarvitame C-skaala lõppkriipsu C-10, siis D-skaalalt võetava korrutise suurusjärk on null ning seega

$$23,8 \cdot 0,00865 = 0,206.$$

N ä i d e 5: $48,5 \cdot 0,0156 \cdot 0,0062 = ?$

Korrutamisel arvestame ainult tegurite tüvenumbreid 4—8—5, 1—5—6 ja 6—2. Neid tegureid järgemööda korrutades näeme, et esimese ja teise teguri korrutamisel tuleb C-1 paigutada D-485 kohale ja viia niit C-156 peale. Niidi all D-skaalal esineb nende kahe teguri korrutis, mida tuleb korrutada kolmanda teguriga. Et saadud korrutist korrutada kolmanda teguriga, selleks tuleb teha keele ülekannet: jättes niidi paigale, lükkame C-10

niidi alla. Siis viime niidi C-62 peale. Niidi all D-skaalal leiame otsitava korrutise tüvenumbritest koosneva arvu 469. Siin vahepealset korrutist polnud vaja lugeda ja komade arvestamine korrutamise protsessis polnud oluline. Lõppkorrutise suurusjärgu märkimiseks arvestame ainult tegurite suurusjärkude summat ja tähist $P - 1$. Et esimese teguri suurusjärg on $+2$, teise teguri suurusjärg -1 ja kolmanda teguri suurusjärg -2 , siis nende summa on: $+2 + (-1) + (-2) = -1$. Et korrutamisel arvutuslükati keel käis üks kord paremal pool, tuleb saadud summat vähendada ühe võrra, s. o. $-1 - 1 = -2$, millest järeldame, et otsitava korrutise suurusjärg on -2 . Tähenab,

$$48,5 \cdot 0,0156 \cdot 0,0062 = 0,00469.$$

Kui korrutamisel esineb rohkem kui kaks tegurit, siis tuleb korrutise suurusjärgu määramiseks tegurite suurusjärkude summat vähendada nii mitme ühiku võrra, kui mitu korda arvutuslükati keel korrutamisel käis paremal, s. o. $P - 1$ poolel.

3. Eespool käsitletud arvude korrutises koma asetuse ehk korrutise suurusjärgu määramise võttest tegurite suurusjärkude summa ja paremale poole teostatud keele lükete meelespidamise kaudu on aga praktilistes arvutustes viimasel ajal peaaegu loobutud. Kaasajal kasutatakse praktilisuse mõttes peamiselt korrutise koma asetuse ehk korrutise suurusjärgu määramiseks jämedalt ümardatud tegurite peastarvutamisel saadud korrutise suurusjärku. Jämedalt ümardatud tegurite korrutise suurusjärgu leidmine võimaldab antud arvude korrutise suurusjärgu kindlaksmääramise ja ühtlasi nende arvude korrutise hindamise. Jämedalt ümardatud tegurite korrutamise võtte suurusjärgu määramiseks on palju kiiremini läbiviidav kui korrutise suurusjärgu määramine eespool käsitletud meetodi abil. Sel puhul jääb ära tegurite suurusjärkude summa määramine ja paremale poole teostatud keele lükete meelespidamine. Seepärast ei esinegi paljudel uuematel arvutuslükatitel enam tähist $P - 1$.

Kasutades korrutise suurusjärgu määramiseks jämedalt ümardatud tegurite korrutamise viisi, võime näite 4 puhul näiteks arvude 23,8 ja 0,00865 asemel võtta ühe tüvenumbri arvud 20 ja 0,01. Viimaste arvude peast korrutamisel saame 0,2. Sellega on määratud korrutise suurusjärg. Kasutades arvutuslükatit saime korrutamise tulemusena teatavasti 0,206.

Korrutamisel võime tegureid ümardades (võrreldes lükatil saadud tulemusega) eksida mõne või ka mõnekümne protsendi võrra, kuid me ei saa naljalt eksida koma asetusega, s. o. korrutise suurusjärgu määramisega.

Kuid siiniuures tuleb märkida, et mõnikord esinevad raskused ja eksimused koma asetamisel ka niisuguste jämedalt ümardatud

arvude korrutamisel, kus mõni tegur on ühest väiksem ja meie ümardame ta kümnendmurruks, mille puhul peast korrutamisel võidakas korrutise suurusjärgu määramisel sageli eksida. Niisuguse eksimuse vältimiseks on suurusjärgu hindamist korrutamisel tihti praktilisem teostada nii, et ühest väiksemad arvud ümardame lihtmurdudeks ja teostame seega keerulisema korrutamise asemel lihtsa jagamise. See osutub tihti ajule palju vähem koormavaks ja väldib ühtlasi vigade tekkimist. Seega oleks juba korrutise $23,8 \cdot 0,00865$ suurusjärgu määramist parem toimetada ümardatud arvude kaudu järgmiselt: 20 jagada 100-ga, s. o.

$$\frac{20}{100} = 0,2.$$

Näites 5 toodud tegurite 48,5, 0,0156 ja 0,006 asemel võime võtta jämedalt ümardatud arvud 50, 0,02 ja 0,005, s. o.

$$50 \cdot \frac{2}{100} \cdot 0,005 = 0,005.$$

Selles näites esimese kahe ümardatud teguri korrutis on 1 ja kõigi kolme ümardatud teguri korrutis on seega 0,005. Sellega on jälle määratud korrutise suurusjärg. Nagu näha, on arvutuslükatiga saavutatud korrutis 0,00469 ligikaudselt saadud tulemusele (0,005) suhteliselt lähedane.

Suure vea vältimiseks püüame mitme arvu korrutamisel nende arvude jämedalt ümardamisel ühtede arvude suurendamisel teisi muidugi vähendada, või ümberpöörduvalt. Ühe sõnaga, me peame juba enne korrutise suurusjärgu määramist korrutatavate teguritega «tutvuma», millisteks jämedalt ümardatud teguriteks tuleb antud tegureid muuta, et peastarvutamisel esineks lihtsam ja ühtlasi kiirem tee korrutise suurusjärgu määramiseks. Selleks on soovitatav antud tegurid ümardada ühe tüvenumbriga arvudeks.

N ä i d e 6. $0,08 \cdot 26,8 \cdot 0,35 = ?$

Määrame korrutise suurusjärgu. Selleks ümardame tegurid ja võtame nende asemel vastavad jämedalt ümardatud arvud: 0,1; 20; 0,4. Peast arvutades saame:

$$\frac{1}{10} \cdot 20 \cdot \frac{4}{10} = 0,8,$$

millega on määratud ühtlasi otsitava korrutise suurusjärg.

Otsitava korrutise tüvenumbrite leidmiseks paigutame C-10 (mitte C-1, miks?) D-8 kohale ja viime niidi C-268 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on esimese kahe teguri korrutis, mida tuleb korrutada kolmanda teguriga. Selleks jätame niidi paigale ja lükkame C-1 (mitte C-10, miks?) niidi alla ja viime niidi C-35 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal esineb otsitava korrutise tüvenumbreid esitav arv 75. Et korrutise suurusjärg on 0, siis seega

$$0,08 \cdot 26,8 \cdot 0,35 = 0,75.$$

N ä i d e 7. $0,009 \cdot 0,06 \cdot 84 \cdot 73,5 = ?$

Korrutise suurusjärgu määramiseks võtame vastavad jämedalt ümardatud arvud: 0,01; 0,05; 80; 80. Nende korrutis peast arvutades on

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot 80 \cdot 80 = 3,2,$$

s. o. 8 korda 8 on 64, mille jagatis 100-ga on 0,64 ja viimase korrutis 5-ga on 3,2, millega ongi määratud otsitava korrutise suurusjärk.

Korrutise leidmiseks paigutame C-10 D-9 kohale ja viime niidi C-6 peale, jätame niidi paigale ja lükkame C-10 (miks?) niidi alla, edasi viime niidi C-84 peale ja lükkame veelkord C-10 (miks?) niidi alla, lõpuks viime niidi C-735 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme otsitava korrutise tüvenumbreid 3—3—3. Tähendab

$$0,009 \cdot 0,06 \cdot 84 \cdot 73,5 = 3,33.$$

Siin korrutasime järgemööda tegureid vasakult paremale luges, kuid üldiselt pole tegurite korrutamise järjekord oluline.

Nagu nägime, tuleb arvude korrutamisel kasutada nii C-skaala alguskriipsu C-1 kui ka C-skaala lõppkriipsu C-10, ja nimelt järgmiselt: kui jämedalt ümardatud ühe tüvenumbriga arvude tüvenumbrite korrutis on väiksem kui 10, siis tuleb kasutada C-skaala alguskriipsu C-1, kui nende tüvenumbrite korrutis on aga suurem kui 10, tuleb kasutada C-skaala lõppkriipsu C-10.

Kokkuvõttes võime tähendada, et arvude korrutamine toimub kahes järjus: esiteks, korrutise tüvenumbrite leidmine arvutuslükati abil, ja teiseks, korrutise suurusjärgu ehk koma asukoha kindlaks määramine jämedalt ümardatud tegurite peast korrutamise teel. Arvude korrutamist arvutuslükati abil teostame nende arvude tüvenumbritest koosnevate arvude korrutamise teel, kusjuures otsitava korrutise leidmiseks tuleb skaalalt lugeda tema tüvenumbrid. Koma asukoha määramiseks on muidugi kõige lihtsam ja ühtlasi kõige kiirem tee jämedalt ümardatud tegurite korrutise arvutamine peast kui tegureid ümardada nii, et igas teguris esineks ainult üks tüvenumber.

Harjutusi.

- | | |
|--------------------------|--|
| 1) $8,3 \cdot 33 = ?$ | 8) $31,6 \cdot 0,0081 = ?$ |
| 2) $0,42 \cdot 9 = ?$ | 9) $0,202 \cdot 7,08 = ?$ |
| 3) $0,56 \cdot 0,8 = ?$ | 10) $152,5 \cdot 0,0042 = ?$ |
| 4) $85,9 \cdot 113 = ?$ | 11) $26 \cdot 0,071 \cdot 4,6 = ?$ |
| 5) $34 \cdot 0,58 = ?$ | 12) $125 \cdot 37,1 \cdot 0,64 = ?$ |
| 6) $52 \cdot 0,016 = ?$ | 13) $46 \cdot 67 \cdot 0,6 \cdot 17,2 = ?$ |
| 7) $0,63 \cdot 0,57 = ?$ | 14) $0,0156 \cdot 0,42 \cdot 8,2 \cdot 15,6 = ?$ |

15) Arvutada neljakandilise männipuust prussi raskus, kui

prussi pikkus on 3,45 m, laius 41,6 cm ja paksus 28,8 cm. Männipuu erikaal on 0,62.

16) Kui palju kulub asfaldi 6 m laiuse tee katmiseks 1 km ulatuses, kui asfaldi kihi paksus on 1,4 cm? Asfaldi erikaal on 1,2.

Vastused. 1) 274. 2) 3,78. 3) 0,448. 4) 9710. 5) 19,72. 6) 0,832. 7) 0,359. 8) 0,256. 9) 1,430. 10) 0,640. 11) 8,49. 12) 2970. 13) 31800. 14) 0,838. 15) 256 kg. 16) 100,8 tonni.

4. Praktikas esineb tihti juhtumeid, kus ühe ja sama arvuga tuleb korrutada mitmesuguseid üksteisest erinevaid arve. Säärast korrutamist esitab valem $y = ax$, kus a on antud arv ning peale selle on antud rida x -i väärtusi, millede korrutamisel arvuga a leiame vastavad y -i väärtused. Niisugust seerialist korrutamist on eriti kasulik teostada arvutuslükati abil, kusjuures arvutuslükati keelt tuleb lükata kas ainult üks kord või vajaduse korral tuleks peale selle teha veel keele ülekanne. Kui näiteks on vaja leida y -i väärtusi valemi $y = 1,49 x$ järgi x väärtuste

1,05; 3,15; 5,25; 7,35; 8,45; 9,55

puhul, siis paigutame C-1 D-149 kohale ja viime niidi järk-järgult C-105, C-315 ja C-525 peale ja loeme ühtlasi järk-järgult niidi alt D-skaalal vastavad y -i väärtused

1,565; 4,69; 7,82.

Kuna aga järgneva kolme korrutise väärtused satuvad välja poole D-skaala piirkonda, siis tuleb nende korrutiste väärtuste leidmiseks teha keele ülekanne: paigutades niidi D-149 kohale ja lükates C-10 niidi alla, viime niidi nüüd järk-järgult C-735, C-845 ja C-955 peale ja loeme niidi alt kolm viimast y -i väärtust

10,95; 12,59; 14,23.

Seerialisel korrutamisel tuleb alati teha ainult ühekordne keele ülekanne. Kui näiteks x -i antud väärtused ei esineks mitte selles järjekorras nagu käesolevas näites, vaid segamini paisatult, siis valime neist x -i väärtustest need tegurid, millega saab üht ja sama antud arvu korrutada, kui C-1 on D-skaalal märgitud antud arvu kohal ja pärast seda teha keele ülekanne ülejäänud tegurite korrutamiseks antud arvuga.

Näide 8. Leida 24,6% arvudest: 135, 338, 564, 782, 1135, 3218.

Siin tuleb antud arvud korrutada arvuga 0,246, s. o. valemi $y = 0,246 x$ järgi. Selleks paigutame C-1 D-246 kohale, kus nüüd saame esimese kahe ja viimase kahe arvu korrutised arvuga 0,246 ära märkida ja lugeda D-skaalalt. Need on:

33,2; 83,1; 279; 792.

Kahe keskmise arvu korrutamiseks arvuga 0,246 teeme keele ülekande: lükame C-10 D-246 kohale ja viime niidi C-564 ja siis

C-782 peale, kus nüüd D-skaalal niidi alt loeme vastavalt arvud: 139; 192. Tähendab,

arvudest: 135; 338; 564; 782; 1135; 3218
24,6% on vastavalt: 33,2; 83,1; 139; 192; 279; 792.

Analoogiliselt seerialise korrutamise põhimõttele võime teostada polünoomi

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

väärtuse arvutamist antud x -i väärtuse puhul, kasutades selleks horneri skeemi võtet

$$f(x) = \{[(a_0x + a_1)x + a_2]x + \dots + a_{n-1}\}x + a_n,$$

mis nõuab polünoomi väärtuse arvutamiseks argumendi x etteantud väärtuse puhul korrutamist alati ainult ühe ja sama arvuga, kusjuures liitmist (ja lahutamist) võime teostada peast. Horneri võtte järgi polünoomi väärtuse arvutamisel arvutuslükatiga saavutame suurt aja kokkuhoidu, eriti veel siis kui polünoomi koefitsiendid ja etteantud argumendi väärtus on murdarvud. Kasutades näiteks kolmanda astme polünoomi

$$f(x) = 0,142x^3 - 0,052x^2 + 3,14x - 1,54$$

väärtuse leidmiseks, kui $x = 1,26$, horneri võtet

$$f(x) = [(0,142x - 0,052)x + 3,14]x - 1,54,$$

s. o.

$$f(1,26) = [(0,142 \cdot 1,26 - 0,052) \cdot 1,26 + 3,14] \cdot 1,26 - 1,54,$$

tuleb C-1 paigutada D-126 kohale ja teha seega ainult üks keeleasetus. Arvu 1,26 korrutamiseks arvuga 0,142 viime niidi C-142 peale ja loeme niidi alt D-skaalal 0,179, millest lahutame peast 0,052, saame 0,127. Viimast arvu korrutame samuti 1,26-ga, viies selleks niidi C-127 peale ja saades niidi all D-skaalal 0,16, millega liidame peast 3,14, saades 3,3. Edasi arvu 3,3 korrutamiseks 1,26-ga viime niidi C-33 peale ja loeme niidi alt D-skaalal 4,16, millest lahutame peast 1,54, saades 2,62. Seega

$$f(1,26) = 2,62.$$

Harjutusi.

1) Tööliste põhipalk oli 625 rbl. kuus. Eeskujuliku töö eest sai viiest töolisest kuu lõpul esimene tööline preemiat 5,8% kuupalgast, teine — 6,1%, kolmas — 7,2%, neljas — 10,8% ja viies — 11,5%. Kui suur oli nende töölise tegelik kuupalk?

[Vastused. 661,20 rbl.; 663,10 rbl.; 670,00 rbl.;
692,50 rbl.; 696,80 rbl.]

2) Arvutada horneri võtte abil polünoomi

$$f(x) = 1,5x^4 - 0,72x^2 + 3,8x - 4,62$$

väärtused $x = 1,2$ ja $x = 0,85$ puhul.

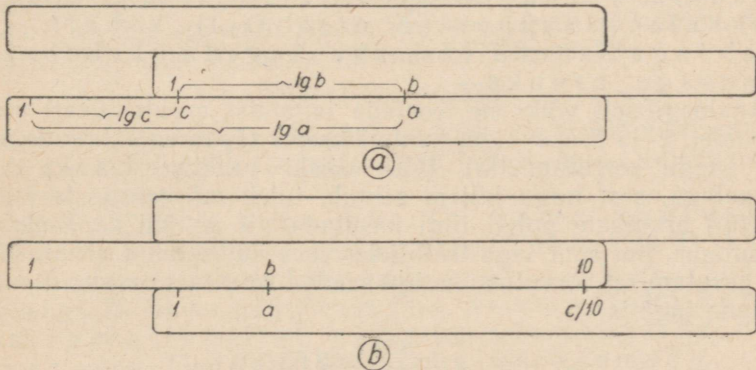
[Vastused. $f(1,2) = 0,9$; $f(0,85) = -1,13$.]

§ 5. JAGAMINE.

Et leida arvutuslükati abil kahe arvu a ja b jagatis c , selleks tuleb samuti nagu korrutamiselgi teostada jagamist kahe logaritmilise skaalaga, millel vastavad lugemid on võrdelised. Siin tuleb logaritmilistel skaaladel lahutada arvudele a ja b vastavad logaritmilised lõigud, sest

$$\lg c = \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

Jagatise c leidmiseks toome niidi D-skaalal jagatavale a vastava kriipsu peale ja lükkame keelega jagajale b vastava kriipsu, s. o. C- b , niidi alla. Arvutuslükati keel võib seejuures minna paremale (joon. 13, a) või vasakule (joon. 13, b) poole. Esimesel



Joon. 13.

juhul ühe ja sama suurusjärgudega a ja b puhul loeme C-1 kohalt D-skaalal otseselt jagatise c ühekohalise täisosaga. Teisel juhul ühe ja sama suurusjärgudega a ja b puhul loeme C-10 kohalt D-skaalal ühekohalise täisosaga arvu, mis tuleb 10 korda vähendada (sest kui loeksime otsitava jagatise C-1 kohalt, siis peaks veel esinema D-skaalale eelnev skaala 0,1-st kuni 1-ni).

Jagamisel pole vaja mõelda kummale poole arvutuslükati keelt nihutada, sest seda määrab juba jagatava ja jagaja vastastikune asend. Jagamisel satub D-skaala piirkonda alati kas C-1 või C-10,

mille kohalt D-skaalal loeme siis jagatise, kusjuures tuleb arvestada muidugi jagatise suurusjärku.

1. Vaatleme alguses jagamist, kus jagataval ja jagajal on üks ja sama suurusjärk. Sel juhul võib jagatise suurusjärk olla kas + 1 või 0.

Näide 1. $8,55 : 3,24 = ?$

Viime niidi D-855 peale ja toome C-324 arvutuslükati keelega niidi alla. Siis on D-skaalal C-skaala alguse C-1 kohal olev arv otsitav jagatis. C-1 kohal D-skaalal esineb 2,64. Seega

$$8,55 : 3,24 = 2,64$$

on otsitav jagatis kahe kümnendkohaga.

Sama tulemuse saame, kui võtame jagatava 8,55 C-skaalal ja jagaja 3,24 D-skaalal, kusjuures jagatis tuleb aga lugeda C-skaalal D-1 kohalt. Selleks viime niidi D-324 peale ja toome C-855 arvutuslükati keelega niidi alla, kusjuures nüüd jagatis 2,64 on C-skaalal D-1 kohal.

Tähendab, kui kahe ühe ja sama suurusjärguga arvu jagamisel jagatist loetakse D-skaalal C-skaala vasakpoolse otsa C-1 (või C-skaalal D-skaala vasakpoolse otsa D-1) kohalt, siis tuleb jagatist näitav arv lugeda ühekohalise täisosaga arvuks.

Analoogiliselt võiksime teostada jagamist arvutuslükati ülemisel poolel A- ja B-skaalaga, kuid väiksema täpsusega. Arvude jagamist (nagu korrutamistki) tuleb siiski praktiseerida ka A- ja B-skaalaga, sest nagu hiljem selgub, tuleb mitmesuguste kombineeritud arvutuste puhul tihti kasutada nii A- kui ka B-skaalat.

Vaatame, kui suur viga tekib käesoleva näite puhul arvutuslükatiga arvutamisel. Arvutuslükatiga saadud resultaat on siin $a = 2,64$ ja täpne jagatis

$$x = \frac{8,55}{3,24} = 2,63(8).$$

Absoluutne viga on siis

$$\Delta x = a - x = 2,64 - 2,63(8) = 0,00(1)$$

ja relatiivne viga

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0,00(1)}{2,63(8)} = 0,0004 = 0,04\%$$

millest nähtub, et viga on väga väike. Kui meil on tegemist näiteks meetritega, siis absoluutne viga on ligikaudu kõigest 1 mm, mis võrreldes üle 2,5-meetrise pikkusega on väga väike suurus.

Harjutusi.

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1) $6 : 2 = ?$ | 12) $4,07 : 1,82 = ?$ |
| 2) $10 : 7 = ?$ | 13) $2,66 : 2,44 = ?$ |
| 3) $6 : 4,8 = ?$ | 14) $3 : 1,235 = ?$ |
| 4) $7,4 : 5 = ?$ | 15) $5,565 : 3,2 = ?$ |
| 5) $3,8 : 2,9 = ?$ | 16) $2,074 : 1,45 = ?$ |
| 6) $5,3 : 3,9 = ?$ | 17) $3,368 : 1,83 = ?$ |
| 7) $9,8 : 6,7 = ?$ | 18) $7,07 : 2,468 = ?$ |
| 8) $2 : 1,14 = ?$ | 19) $8,18 : 4,024 = ?$ |
| 9) $5,45 : 4 = ?$ | 20) $2,876 : 2,345 = ?$ |
| 10) $8,35 : 5,6 = ?$ | 21) $6,008 : 1,005 = ?$ |
| 11) $7,2 : 2,04 = ?$ | 22) $4,602 : 3,028 = ?$ |

[Vastused. 1) 3. 2) 1,429. 3) 1,250. 4) 1,480. 5) 1,310. 6) 1,359. 7) 1,463. 8) 1,754. 9) 1,362. 10) 1,491. 11) 3,53. 12) 2,24. 13) 1,090. 14) 2,43. 15) 1,739. 16) 1,430. 17) 1,840. 18) 2,86. 19) 2,03. 20) 1,226. 21) 5,98. 22) 1,520.]

Näide 2. $2,06 : 5,83 = ?$

Siin toimetame samuti nagu eelmiseski näites: toome niidi D-206 peale ja lükkame C-583 niidi alla. Kuid siin langeb C-skaala algus D-skaala piirkonnast välja vasakule poole. Seepärast võtame jagatise D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 kohalt. Sealt leiame 3,53. See arv on 10 korda tõelisest jagatisest suurem. Seega tuleb saadud arvu 10 korda vähendada. Tähendab,

$$2,06 : 5,83 = 0,353.$$

Kui viiksime niidi D-583 peale ja tooksime C-206 niidi alla, siis tuleks jagatist lugeda C-skaalal D-10 kohalt, mida tuleks samuti 10 korda vähendada.

Tähendab, kui kahe ühe ja sama suurusjärguga arvu jagamisel jagatist loetakse D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 (või C-skaalal D-skaala parempoolse otsa D-10) kohalt, siis tuleb jagatist näitava ühekohalise täisosaga arv lugeda 10 korda väiksemana.

Viimases näites, kus meil on tegemist pikkusmõõduga meetrites, oleks absoluutne viga ($a = 0,353$ m kohta) ligikaudu ainult 0,34 mm, sest täpne resultaat

$$x = \frac{2,06}{5,83} = 0,35334 \dots$$

ja seega absoluutne viga

$$\Delta x = 0,35334 - 0,353 = 0,00034$$

ning relatiivne viga

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &= \frac{0,00034}{0,35334} = 0,00096 = \\ &= 0,096\% \approx 0,1\%. \end{aligned}$$

Harjutused.

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $2:6 = ?$ 0,333 | 10) $4,9:9,15 = ?$ |
| 2) $1:7 = ?$ 0,1429 | 11) $3,74:7,12 = ?$ |
| 3) $3,4:7 = ?$ | 12) $5,75:6,05 = ?$ |
| 4) $6:8,4 = ?$ | 13) $1,115:8 = ?$ |
| 5) $5,2:7,8 = ?$ | 14) $2,235:4,2 = ?$ |
| 6) $1,6:9,3 = ?$ | 15) $7,009:9,09 = ?$ |
| 7) $3:4,35 = ?$ | 16) $3,8:4,255 = ?$ |
| 8) $1,64:3 = ?$ | 17) $4,18:6,688 = ?$ |
| 9) $2,85:5,8 = ?$ | 18) $1,005:5,555 = ?$ |

[Vastused. 1) 0,333. 2) 0,1429. 3) 0,486. 4) 0,714. 5) 0,667. 6) 0,1720. 7) 0,690. 8) 0,547. 9) 0,491. 10) 0,536. 11) 0,525. 12) 0,950. 13) 0,1394. 14) 0,532. 15) 0,771. 16) 0,893. 17) 0,626. 18) 0,1809.]

2. Eelmistes jagamise näidetes oli jagatava ja jagaja suurusjärk +1. Kui siinjuures arvestada jagatava ja jagaja suurusjärke ja nimelt nende suurusjärkude vahet, siis võime tähele panna, et teises näites arvude 2,06 ja 5,83 jagatise suurusjärk on võrdne nende suurusjärkude vahega, kuid esimeses näites arvude 8,55 ja 3,24 jagatise suurusjärk on võrdne nende suurusjärkude vahega pluss üks. Järelikult võtame kahe arvu jagamiseks mõlema arvu suurusjärgud, lahutame jagatava suurusjärgust jagaja suurusjärgu ning saadud vahet kasutame jagatise suurusjärgu määramiseks järgmiselt:

a) kui jagatist loetakse D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 (või C-skaalal D-skaala parempoolse otsa D-10) kohalt, on jagatise suurusjärk võrdne jagatava ja jagaja suurusjärkude vahega;

b) kui jagatist loetakse aga D-skaalal C-skaala vasakpoolse otsa C-1 (või C-skaalal D-skaala vasakpoolse otsa D-1) kohalt, on jagatise suurusjärk võrdne jagatava ja jagaja suurusjärkude vahega pluss üks.

Seepärast neil arvutuslükatitel, millel D-skaala parempoolses otsas on märgitud tähis P-1, esineb D-skaala vasakpoolses otsas (joon. III ja IV) samuti ka tähis Q+1 (Quotient + 1), mis tähendab, et kui jagatist loetakse D-skaalal C-1 (või C-skaalal D-1) kohalt, tuleb jagatise suurusjärku ühe võrra suurendada.

Näide 3. $0,244:7,15 = ?$

Selles näites on jagatava suurusjärk 0 ja jagaja suurusjärk +1 ning nende vahe: $0 - (+1) = -1$. Jagades arvutuslükati abil näeme, et jagatis D-skaalal (või C-skaalal) tuleb lugeda C-10 (või

D-10) kohalt, kus esinevad jagatise tüvenumbrid 3 – 4 – 1. See pärast jääb jagatise suurusjärguks –1 ning seega

$$0,244 : 7,15 = 0,0341.$$

Märkus 1. Jagatise suurusjärgu määramise juhust kasutades tuleb meeles pidada, et säärase jagamise puhul nagu $10^k : a$, kus $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, tuleb jagatav 10^k võtta alati D-skaala (või C-skaala) vasakpoolse otsa D-1 (või C-1) kohalt, kuid mitte D-skaala (või C-skaala) parempoolse otsa D-10 (või C-10) kohalt, mille puhul jagatise suurusjärgu määramise juhust pole rakendatav.

Märkus 2. Juhul, kui kahe arvu jagamisel arvutuslükati abil saadav kolme tüvenumbriga jagatise täpsus pole küllaldane, vaid nõutakse näiteks vähemalt kuue tüvenumbrilise täpsusega vastust, siis — et ikkagi kasutada nende arvude jagamisel arvutuslükati osaliseltki — teostame jagamist paberil seni kui leiame jagatise esimesed kolm tüvenumbrit ja vastava (üldiselt kolmanda) jäägi ning siis jagame selle jäägi arvutuslükatil jagajaga, saades seega jagatise kolm järgnevat tüvenumbrit. Näiteks:

$$587 : 251 = 2,33 \text{ (kirjalikul arvutamisel saadud arv)}$$

502

850

753

970

753

$$\hline 217 : 251 = 0,865 \text{ (lükatil saadud arv).}$$

Järelikult, $587 : 251 = 2,33865$.

3. Praktelistes arvutustes on arvude jagatise suurusjärgu määramiseks samuti nagu korrutamise puhulgi kõige vähem mälu koorimav ja ühtlasi kõige kiiremini läbiviidav jämedalt ümardatud arvude rakendamiseviis. Jämedalt ümardatud arvude rakendamiseviis on eriti soodne ja kiiresti teostatav korrutamise ja jagamise kombineeritud arvutuste tulemuse suurusjärgu määramisel.

Rakendades jämedalt ümardatud andmete võtet, võime näites 1 toodud arvude 8,55 ja 3,24 asemel võtta vastavalt arvud 9 ja 3. Nende arvude jagatis on 3 ja seega on meil tegemist suurusjärguga +1. Lükatiga saadav tulemus, nagu nägime, oli 2,64.

Näites 2 toodud arvude 2,06 ja 5,83 asemel võtame 2 ja 6. Selle tehte ligikaudne vastus on $\frac{1}{3}$ ehk 0,333. Täpsema jagatise saab muidugi lükatiga; selle suurusjärg on igal juhul 0, s. o. 0,353.

Näites 3 on toodud arvud 0,244 ja 7,15. Nende asemel võtame 0,24 ja 8. Ilmselt on ligikaudne jagatis 0,03. Lükatiga saadud täpsem resultaat on teatavasti 0,0341.

Harjutusi.

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1) $0,9 : 6 = ?$ | 10) $0,05 : 7 = ?$ |
| 2) $8 : 13 = ?$ | 11) $0,06 : 4,8 = ?$ |
| 3) $0,3 : 2,6 = ?$ | 12) $0,075 : 5,9 = ?$ |
| 4) $1 : 17 = ?$ | 13) $0,0345 : 2,14 = ?$ |
| 5) $10 : 243 = ?$ | 14) $0,0712 : 54,6 = ?$ |
| 6) $3,7 : 24 = ?$ | 15) $0,0026 : 162,5 = ?$ |
| 7) $49,4 : 16,7 = ?$ | 16) $0,0466 : 0,75 = ?$ |
| 8) $0,6 : 72 = ?$ | 17) $0,1 : 0,0105 = ?$ |
| 9) $0,27 : 32,6 = ?$ | 18) $12,8 : 0,0825 = ?$ |

[Vastused. 1) 0,15. 2) 0,615. 3) 0,1154. 4) 0,0588. 5) 0,0412. 6) 0,1542. 7) 2,96. 8) 0,00833. 9) 0,00828. 10) 0,00714. 11) 0,01250. 12) 0,01271. 13) 0,01612. 14) 0,001304. 15) 0,00001600. 16) 0,0621. 17) 9,52. 18) 155,1.]

Näide 4.

$$\frac{9,6 \cdot 2,55}{4,32} = ?$$

Käesolevas näites tuleb 9,6 (või 2,55) enne jagada 4,32-ga ja siis korrutada 2,55-ga (või 9,6-ga). Kui teeksime enne korrutamise ja pärast jagamise, siis tuleks meil kaks korda lükata arvutuslükati keelt. Jagades enne ja korrutades pärast teeme arvutuslükati keelega ainult ühe lükke. (Mida vähem lükkeid, seda väiksem ka kõrvalekaldumine õigest resultaadist). Paigutame C-432 D-96 kohale, siis on jagatis D-skaalal C-1 kohal, mis tuleb korrutada 2,55-ga. Siin pole enam tarvis lükata arvutuslükati keelt, samuti ei ole vajadust viia niiti C-1 peale ega C-1 kohalt D-skaalalt lugeda jagatist, vaid viime niidi C-255 peale, kus nüüd D-skaalalt niidi alt loeme lõppresultaadi tüvenumbrid 5—6—7.

Lõppresultaadi suurusjärgu määramiseks ümardame arvud 9,6; 2,55; 4,32 vastavalt arvudeks 10, 2, 4, millede puhul peastarvutamisel saame

$$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5,$$

mis näitab, et suurusjärk on +1 ning seega

$$\frac{9,6 \cdot 2,55}{4,32} = 5,67.$$

Kui selle näite lõppresultaadi suurusjärgu määramiseks arvestaksime lugeja ja nimetaja suurusjärke, kus lugeja esimese kui ka teise teguri suurusjärk on +1 ning samuti nimetaja suurusjärk on +1, siis lõppresultaadi suurusjärk on seega

$$(+1) + (+1) - (+1) = +1.$$

Selles näites võis ka lõppresultaadi suurusjärgu (ilma arvutamiseta) otseselt antud arve vaadates kindlaks määrata.

Näide 5.

$$\frac{7,42 \cdot 5,02}{2,65} = ?$$

Siin on kohe näha, et lõppresultaadi suurusjärk on +2.

Toimides analoogiliselt eelmise näite lahendusviisile, paigutame C-265 D-742 kohale. Nüüd aga näeme, et pärast jagamist ei saa D-skaalal C-502 kohalt otseselt lõppresultaati välja lugeda, kuna see satub väljapoole D-skaala piirkonda. Siin teeme keele ülekande: paigutame niidi C-skaala alguskriipsu C-1 peale ja lükkame lükati keele nii, et niidi alla satuks C-skaala lõppkriips C-10. Siis võime D-skaalal C-502 kohalt lugeda tüvenumbrid 1—4—0—6. Järelikult

$$\frac{7,42 \cdot 5,02}{2,65} = 14,06.$$

Analoogiliste näidete puhul võib juhtuda, et arvutuslükati keele suhtes tuleb teha vastaspoole ülekanne, s. o. et C-skaala lõppkriips C-10 tuleb asendada C-skaala alguskriipsuga C-1.

Esineb meil lugejas ja nimetajas aga rohkem kui kaks tegurit, siis tuleb lugeja esimene tegur jagada nimetaja esimese teguriga ja korrutada lugeja teise teguriga; siis saadud resultaati jagada nimetaja teise teguriga ja korrutada lugeja kolmanda teguriga, siis jälle saadud resultaati jagada nimetaja kolmanda teguriga ja korrutada lugeja neljanda teguriga jne., kusjuures vahepealseid jagatise ja korrutise pole vaja lugeda. Lugeja ja nimetaja tegurite järjekord võib olla vabalt valitav. Tegurite järjekorra otstarbekohane valik võimaldab paljudel juhtudel vähendada keele ülekannete arvu, mille tagajärjel kiirendame ühtlasi arvutamise käiku.

Tähiste P - 1 ja Q + 1 kasutamise vähendamiseks tuleb tegurite järjekord valida nõnda, et nii korrutamisel kui ka jagamisel läheks arvutuslükati keel võimalikult ühe palju kordi ühele ja samale poole.

Näide 6.

$$\frac{22,6 \cdot 0,00042 \cdot 0,74 \cdot 3800}{135 \cdot 56,5 \cdot 0,095} = ? \quad 0,0368.$$

Jagades ja korrutades arvutuslükatiga järk-järgult antud tegurite tüvenumbritest koosnevat arvu, saame lõppresultaadina tüvenumbritest koosneva arvu 368, mille suurusjärgu määrame antud tegurite jämedalt ümardamise võttega järgmiselt:

$$\frac{20 \cdot 0,0004 \cdot 1 \cdot 4000}{100 \cdot 50 \cdot 0,1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{100 \cdot 5} = \frac{32}{500} = \frac{64}{1000} = 0,064,$$

mis näitab ühtlasi, et antud tegurite puhul lõppresultaadi suurusjärk on - 1. Seega

$$\frac{22,6 \cdot 0,00042 \cdot 0,74 \cdot 3800}{135 \cdot 56,5 \cdot 0,095} = 0,0368.$$

Sääraste ülesannete lahendamisel, kus korrutamine ja jagamine esinevad koos, võidame arvutuslükatiga arvutades väga palju aega.

4. Samuti on arvutuslükatiga kasulik teostada seerialist jagamist valemi $y = \frac{x}{a}$ järgi, kus mitmesuguseid x -i väärtusi tuleb jagada ühe ja sama arvuga a . Sel juhul märgime selle valemi järgmiselt: $y = \frac{1}{a} \cdot x$ ja paigutame nüüd C-a, D-1 või D-10 kohale ja loeme C-skaalal võetavate x -i väärtuste kohalt D-skaalal otsitavad y -i väärtused.

Näide 7. Linna elanike arv on 26415 inimest: 17276 eestlast, 7872 venelast, 818 lätlast, 317 juuti ja 132 teistest rahvustest. Missugune on linnas elavate rahvuste protsendiline vahekorrd?

Rahvuste protsendilise vahekorra määrab valem: $y = \frac{100x}{26415}$, kus $x = 17276, 7872, 818, 317$ ja 132 . Seega tuleb meil arvutada järgmised suurused:

$$\frac{100 \cdot 17276}{26415}, \quad \frac{100 \cdot 7872}{26415}, \quad \frac{100 \cdot 818}{26415}, \quad \frac{100 \cdot 317}{26415}, \quad \frac{100 \cdot 132}{26415}.$$

Teostades siin jagamist ja korrutamist C- ja D-skaalaga, tuleb arvutuslükati keelt nihutada kaks korda. Paigutame alguses C-26415 D-1 kohale ja loeme niidiga D-skaalalt järk-järgult C-7872, C-818 ja C-317 kohalt otsitavate protsentide tüvenumbrid 2—9—8, 3—1—1 ja 1—2—0. Paigutades siis C-26415 D-10 kohale, loeme D-skaalalt C-17276 ja C-132 kohalt 6—5—4 ja 5—0—0.

Jämedalt ümardatud tegurite võttega nähtub, et eespool esitatud kahe esimese murru suurusjärk on + 2, kahe järgneva murru suurusjärk on +1 ja viimase murru suurusjärk on 0. Seega

$$\begin{aligned} \frac{17276 \cdot 100}{26415} &= 65,4\% \text{ eestlasi} \\ \frac{7872 \cdot 100}{26415} &= 29,8\% \text{ venelasi} \\ \frac{818 \cdot 100}{26415} &= 3,1\% \text{ lätlasi} \\ \frac{317 \cdot 100}{26415} &= 1,2\% \text{ juute} \\ \frac{132 \cdot 100}{26415} &= 0,5\% \text{ teistest rahvustest} \\ \hline \text{Kokku} &= 100,0\%. \end{aligned}$$

Kui teostaksime esitatud näite puhul jagamist ja korrutamist A- ja B-skaalga, siis tuleks arvutuslükati keelt lükata ainult üks kord: paigutades B-26415 A-10 kohale ja lugedes niidiga A-skaalalt järk-järgult B-17276, B-7872, B-818, B-317 ja B-132 kohalt otsitavad arvud protsentides.

Harjutusi.

$$1) \frac{6,4 \cdot 3,2}{5,7} = ?$$

$$2) \frac{2,8 \cdot 8,9}{6,6} = ?$$

$$3) \frac{3,6 \cdot 7,2}{8,5} = ?$$

$$4) \frac{1,4 \cdot 2,6}{7,3} = ?$$

$$5) \frac{2,14 \cdot 3,45 \cdot 4,05}{1,82 \cdot 2,7} = ?$$

$$6) \frac{3,03 \cdot 5,24 \cdot 9,8}{7,6 \cdot 4,86} = ?$$

$$7) \frac{8,47 \cdot 5,13 \cdot 2,52}{9,05 \cdot 4,75} = ?$$

$$8) \frac{5,7 \cdot 7,8 \cdot 11,2}{9,7 \cdot 8,5} = ?$$

$$9) \frac{1,4 \cdot 1,06 \cdot 3,45}{2,02 \cdot 6,62} = ?$$

$$10) \frac{3,16 \cdot 7,34 \cdot 4,55}{15,3 \cdot 8,84} = ?$$

$$11) \frac{0,14 \cdot 52,7}{2,7} = ?$$

$$12) \frac{0,031 \cdot 7,16}{0,465} = ?$$

$$13) \frac{0,605 \cdot 24,3}{36,4} = ?$$

$$14) \frac{12,6 \cdot 514 \cdot 0,36}{44,2 \cdot 152} = ?$$

$$15) \frac{0,00547 \cdot 0,0336}{0,0000469} = ?$$

$$16) \frac{74,6 \cdot 0,043}{0,525} = ?$$

[Vastused. 1) 3,59. 2) 3,78. 3) 3,05. 4) 0,499. 5) 6,08. 6) 4,21. 7) 2,55. 8) 6,04. 9) 0,383. 10) 0,780. 11) 2,73. 12) 0,477. 13) 0,404. 14) 0,347. 15) 3,92. 16) 6,11.]

17) Mitu protsenti moodustab 260 rubla a) 4000 rublast, b) 650 rublast, c) 340 rublast, d) 200 rublast, e) 80 rublast?

[Vastused. a) 6,5%; b) 40%; c) 76,5%; d) 130%; e) 325%.]

§ 6. RUUDUD.

1. Arvutuslükati alumisel osal on logaritmiline skaala lg 1 kuni lg 10, ülemisel osal on logaritmiline skaala lg 1 kuni lg 100. Ülemise skaala logaritmilise ühiku pikkus on kaks korda lühem alumise skaala logaritmilise ühiku pikkusest. Arvutuslükati põhi-osal (samuti ka keelel) on alumine ja ülemine skaala paigutatud nii, et nende algused (A-1 ja D-1, samuti ka B-1 ja C-1) asetsevad kohakuti. Oletame, et alumise skaala mingile punktile vastab arv x . Selgitame, milline arv y vastab ülemise skaala punktile, mis asetseb alumise skaala nimetatud punktiga kohakuti.

On selge, et alumise skaala lõik 1-st x -ni ja ülemise skaala lõik 1-st y -ni on võrdsed (joon. 14). Kuna aga alumise skaala lõik 1-st x -ni on 25 cm pikkusega logaritmilisel skaalal $250 \cdot \lg x$ mm ja ülemise skaala lõik 125 $\cdot \lg y$ mm, siis

$$250 \cdot \lg x = 125 \cdot \lg y$$

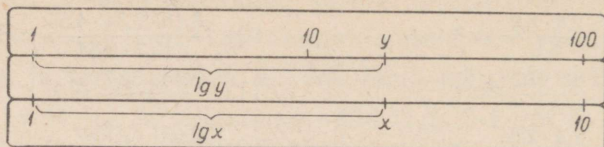
ehk

$$\lg y = 2 \cdot \lg x = \lg x^2,$$

millest

$$y = x^2,$$

mis näitab, et alumise skaala arvudele vastavad ülemisel skaalal nende arvude ruudud. Seepärast nimetatakse A-skaalat (ja samuti B-skaalalt) ka ruutskaalaks.



Joon. 14.

Arvu ruutu tõstmist teostatakse ainult niidiga. Et leida arvutuslükati abil mingi arvu ruut, tuleb see arv niidiga märkida põhiskaalal (D- või C-skaalal) ja lugeda ta ruut niidi alt ruutskaalal (A- või B-skaalal).

Arvude ruutu tõstmisel ei ole oluline, et arvutuslükati keele skaalad peaksid olema kohakuti arvutuslükati põhiosa skaaladega. Kui need skaalad ei ole kohakuti, vaid arvutuslükati keel on paremal või vasakul, siis tuleb astendamisel D-skaalalt üle minna A-skaalale ja C-skaalalt B-skaalale.

Ruudu suurusjärgu määramiseks kasutatakse harilikult astme aluse jämedat ümardamist.

Näide 1. $6,82^2 = ?$

Viime niidi alumisel skaalal 6,82 peale ja loeme niidi alt ülemise skaala teisel logaritmilisel ühikul selle ligikaudse ruudu, s. o. 46,5. Ülemisel skaalal saab siin praktiliselt lugeda ainult ühe kümnendkoha. Seega

$$6,82^2 = 46,5.$$

Niisuguste arvude ruutu tõstmisel, kus astme aluseks on ühekojalise täisosaga arv, loeme ruudu väärtuse otseselt ülemise skaala esimeselt või teiselt logaritmiliselt ühikult, s. o. ühe- või kahekojalise täisosaga ruudu väärtuse.

Harjutusi.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) $3^2 = ?$ | 9) $7,75^2 = ?$ |
| 2) $8^2 = ?$ | 10) $9,32^2 = ?$ |
| 3) $1,5^2 = ?$ | 11) $5,245^2 = ?$ |
| 4) $1,9^2 = ?$ | 12) $1,815^2 = ?$ |
| 5) $7,7^2 = ?$ | 13) $2,042^2 = ?$ |
| 6) $1,16^2 = ?$ | 14) $2,718^2 = ?$ |
| 7) $2,25^2 = ?$ | 15) $\pi^2 = ?$ |
| 8) $4,08^2 = ?$ | |

[Vastused. 1) 9. 2) 64. 3) 2,25. 4) 3,61. 5) 59,3. 6) 1,346. 7) 5,06. 8) 16,65. 9) 60,1. 10) 86,9. 11) 27,5. 12) 3,29. 13) 4,17. 14) 7,39. 15) 9,87.]

Näide 2. $38,5^2 = ?$

Astme aluse jämedalt ümardamise puhul ($40^2 = 1600$) näeme, et astme suurusjärk on $+4$. Viime niidi D-385 peale ja loeme niidi alt A-skaalal astme tüvenumbrid 1—4—8. Astme ligikaudne väärtus on seega

$$38,5^2 = 1480.$$

Nii käesoleval kui ka kõigil niisugustel juhtudel, kus astme alus ei ole ühekohalise täisosaga arv, võime selle arvu ruutu tõstmist teostada ka teisiti: lahutame astme aluse kaheks teguriks nõnda, et koma ümberpaigutamisel üks tegur oleks ühekohalise täisosaga ja teine tegur kujutaks siis vastavalt 10-ne astet. Sel juhul astendame arvutuslükatil ainult ühekohalise täisosaga arvu, mille astet korrutame 10-ne vastava astmega. Käesoleva näite puhul toimuks siis arvu 38,5 ruutu tõstmine järgmiselt:

$$38,5^2 = (3,85 \cdot 10)^2 = 3,85^2 \cdot 10^2 = 14,8 \cdot 100 = 1480.$$

Näide 3. $0,0152^2 = ?$

Kasutades siin astme suurusjärgu määramiseks jämedalt ümardamist astme aluse suhtes, s. o. $\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0,0001$, näeme, et astme suurusjärk on -3 . Viies niidi D-152 peale, loeme A-skaalal niidi alt astme tüvenumbrid 2—3—1. Tähenab

$$0,0152^2 = 0,000231.$$

Või arvutades teisiti — astme aluse kaheks teguriks lahutamise teel, kus üks tegur oleks ühekohalise täisosaga ja teine tegur kujutaks vastavat 10-ne astet, s. o.

$$0,0152^2 = (1,52 \cdot 10^{-2})^2 = 1,52^2 \cdot 10^{-4} = 2,31 \cdot \frac{1}{10000} = 0,000231.$$

Analoogiliselt § 4-s tõestatud arvude korrutamise juhisele võime näidata, et arvu ruutu tõstmisel võib astme suurusjärgu määramiseks kasutada ka järgmisi juhiseid:

a) kui arvu ruutu tõstmisel tuleb astme väärtust lugeda A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, on astme suurusjärk võrdne $2n - 1$, kus n on astme aluse suurusjärk;

b) kui arvu ruutu tõstmisel tuleb astme väärtust lugeda A-skaala teisel logaritmilisel ühikul, on astme suurusjärk võrdne $2n$.

Näide 4. $0,000218^2 = ?$

Paigutades niidi D-218 peale, näeme, et niidi all A-skaalal on astme tüvenumbrid 4—7—5, mis asuvad A-skaala esimesel loga-

ritmilisel ühikul. Et astme aluse suurusjärk on -3 , siis astme suurusjärk on seega

$$2(-3) - 1 = -7$$

ja aste

$$0,000218^2 = 0,0000000475.$$

Näide 5. $564,5^2 = ?$

Paigutades niidi D-5645 peale, näeme, et astme tüvenumbrid on A-skaala teisel logaritmilisel ühikul, s. o. 3—1—9. Astme aluse suurusjärk on $+3$ ja astme suurusjärk

$$2 \cdot (+3) = +6$$

ning seega aste

$$564,5^2 = 319000.$$

Harjutusi.

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) $0,2^2 = ?$ | 13) $15,2^2 = ?$ |
| 2) $0,6^2 = ?$ | 14) $40,8^2 = ?$ |
| 3) $0,9^2 = ?$ | 15) $55,5^2 = ?$ |
| 4) $0,1^2 = ?$ | 16) $91,9^2 = ?$ |
| 5) $12^2 = ?$ | 17) $0,05^2 = ?$ |
| 6) $25^2 = ?$ | 18) $0,014^2 = ?$ |
| 7) $73^2 = ?$ | 19) $0,326^2 = ?$ |
| 8) $69^2 = ?$ | 20) $0,0017^2 = ?$ |
| 9) $0,11^2 = ?$ | 21) $183^2 = ?$ |
| 10) $0,16^2 = ?$ | 22) $112,5^2 = ?$ |
| 11) $0,38^2 = ?$ | 23) $40,25^2 = ?$ |
| 12) $0,81^2 = ?$ | 24) $72,11^2 = ?$ |

[Vastused. 1) 0,04. 2) 0,36. 3) 0,81. 4) 0,01. 5) 144. 6) 625. 7) 5330. 8) 4760. 9) 0,01210. 10) 0,0256. 11) 0,1444. 12) 0,656. 13) 231. 14) 1665. 15) 3080. 16) 8450. 17) 0,00250. 18) 0,0001960. 19) 0,1063. 20) 0,00000289. 21) 33500. 22) 12660. 23) 1620. 24) 5200.]

2. Teades arvude korrutamist, jagamist ja astendamist (ruutu tõstmist), võime arvutuslükatiga teostada tähendatud tehetest koosnevate avaldiste kombineeritud arvutamist, mida saame läbi viia tunduvalt kiiremini kui seda saab teostada tavalisel arvutamisel pliitsiga paberil, ületades seejuures isegi keeruliste arvutusmasinate arvutamise kiiruse. Niisuguste avaldiste hulka kuuluvad näiteks

$$(a \cdot b)^2, \left(\frac{a}{b}\right)^2, \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2, a \cdot b^2, \frac{a^2}{b}, \frac{a}{b^2}, \frac{a \cdot b}{c^2},$$

mida saame arvutada lükati keele ühe asetusega, kasutades seejuures märkija niidi paigutamisel nii alumisi kui ka ülemisi skaalasiid. Avaldise $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2$ arvutamise puhul tuleb teha mõnikord ka keele ülekanne.

Näide 6. $(0,225 \cdot 3,19)^2 = ?$

Teostame sulgudes olevate tegurite korrutamist arvutuslükati alumisel jaotusel, viies C-1 D-225 kohale ja siis niidi C-319 peale, kusjuures nüüd loeme niidi alt A-skaalal korrutise ruudu tüvenumbrid 5—1—5. Antud avaldise suurusjärk on 0, sest tegureid jämedalt ümardades saame $\left(\frac{2}{10} \cdot 3\right)^2 = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} = 0,36$, ehk teisiti: kuna korrutise suurusjärk on 0, siis on ka astme suurusjärk 0, sest vastuse loeme A-skaala teisel logaritmilisel ühikul. Tähendab,

$$(0,225 \cdot 3,19)^2 = 0,515.$$

Harjutisi.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(2 \cdot 4)^2 = ?$ | 12) $(2,6 \cdot 8)^2 = ?$ |
| 2) $(3,6 \cdot 2)^2 = ?$ | 13) $(4,5 \cdot 3,2)^2 = ?$ |
| 3) $(1,3 \cdot 2,6)^2 = ?$ | 14) $(8,8 \cdot 2,15)^2 = ?$ |
| 4) $(1,7 \cdot 4,1)^2 = ?$ | 15) $(5,05 \cdot 6,75)^2 = ?$ |
| 5) $(2,7 \cdot 2,8)^2 = ?$ | 16) $(5,45 \cdot 3,32)^2 = ?$ |
| 6) $(1,52 \cdot 5,3)^2 = ?$ | 17) $(0,8 \cdot 5)^2 = ?$ |
| 7) $(2,05 \cdot 3,14)^2 = ?$ | 18) $(0,16 \cdot 2,8)^2 = ?$ |
| 8) $(6,25 \cdot 1,04)^2 = ?$ | 19) $(0,42 \cdot 71)^2 = ?$ |
| 9) $(4,5 \cdot 2,025)^2 = ?$ | 20) $(0,73 \cdot 12,5)^2 = ?$ |
| 10) $(1,015 \cdot 1,555)^2 = ?$ | 21) $(0,064 \cdot 42,6)^2 = ?$ |
| 11) $(3 \cdot 4)^2 = ?$ | 22) $(0,013 \cdot 902)^2 = ?$ |

[Vastused. 1) 64. 2) 51,8. 3) 11,42. 4) 48,6. 5) 57,2. 6) 64,9. 7) 41,4. 8) 42,2. 9) 83,0. 10) 2,49. 11) 144,0. 12) 433. 13) 207. 14) 358. 15) 1162. 16) 327. 17) 16. 18) 0,201. 19) 889. 20) 83,3. 21) 7,43. 22) 137,5.]

Näide 7.

$$\left(\frac{3,15}{0,534}\right)^2 = ?$$

Teostades jagamist arvutuslükati alumisel jaotusel, viime niidi D-315 peale ja C-534 niidi alla ning loeme B-100 kohalt A-skaalal jagatise ruudu tüvenumbrid 3—4—8. Kasutades lugeja ja nimetaja jämedalt ümardamist peast arvutamisel järgmiselt: $\left(\frac{3}{0,5}\right)^2 = \left(\frac{30}{5}\right)^2 = 6^2 = 36$, näeme, et antud avaldise suurusjärk on +2. Seega

$$\left(\frac{3,15}{0,534}\right)^2 = 34,8.$$

Näide 8.

$$\left(\frac{0,625 \cdot 48,8}{5,05}\right)^2 = ?$$

Teostame sulgavaldisel arvutamisel eelmises paragrahvis (näited 4 ja 5) käsitletud viisil: viime niidi D-625 peale ja C-505 niidi alla ning siis viime niidi C-488 peale, kus loeme niidi alt A-skaa-

lal sulgavaldise ruudu tüvenumbrid 3—6—5. Sulgavaldise ruudu suurusjärgu leiame seal esinevate arvude jämedalt ümardamise teel: $\left(\frac{0,6 \cdot 50}{5}\right)^2 = \left(\frac{6 \cdot 50}{10 \cdot 5}\right)^2 = 6^2 = 36$, millest nähtub, et suurusjärk on +2. Järelikult

$$\frac{0,625 \cdot 48,8^2}{5,05} = 36,5.$$

Harjutusi.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = ?$ | 8) $\left(\frac{5}{8,2}\right)^2 = ?$ | 15) $\left(\frac{30,5}{0,82}\right)^2 = ?$ |
| 2) $\left(\frac{5,2}{3}\right)^2 = ?$ | 9) $\left(\frac{6,3}{7,5}\right)^2 = ?$ | 16) $\left(\frac{0,175}{0,053}\right)^2 = ?$ |
| 3) $\left(\frac{7}{4,5}\right)^2 = ?$ | 10) $\left(\frac{1,44}{6,75}\right)^2 = ?$ | 17) $\left(\frac{2,65 \cdot 3,02}{1,83}\right)^2 = ?$ |
| 4) $\left(\frac{8,7}{5,6}\right)^2 = ?$ | 11) $\left(\frac{41,5}{27,2}\right)^2 = ?$ | 18) $\left(\frac{54,5 \cdot 4,62}{3,71}\right)^2 = ?$ |
| 5) $\left(\frac{2,16}{1,54}\right)^2 = ?$ | 12) $\left(\frac{0,83}{0,15}\right)^2 = ?$ | 19) $\left(\frac{0,815 \cdot 66,6}{0,91}\right)^2 = ?$ |
| 6) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = ?$ | 13) $\left(\frac{0,47}{0,023}\right)^2 = ?$ | 20) $\left(\frac{0,076 \cdot 76,4}{0,67}\right)^2 = ?$ |
| 7) $\left(\frac{2,9}{3}\right)^2 = ?$ | 14) $\left(\frac{0,33}{12,5}\right)^2 = ?$ | 21) $\left(\frac{0,054 \cdot 0,87}{0,176}\right)^2 = ?$ |

[Vastused. 1) 9. 2) 3,00. 3) 2,42. 4) 2,41. 5) 1,97. 6) 0,326. 7) 0,934. 8) 0,372. 9) 0,706. 10) 0,0455. 11) 2,33. 12) 30,6. 13) 417. 14) 0,000697. 15) 1380. 16) 10,9. 17) 19,2. 18) 4600. 19) 3550. 20) 75. 21) 0,00713.]

Kuna kombineeritud arvutuste puhul tuleb märkija niiti viia ülemisel jaotusel mõnikord esimese logaritmilise ühiku ja mõnikord teise logaritmilise ühiku kriipsu peale, siis kasutame märkimise otstarbeks järgmist tähistust: kui tahame arvu, mille tüvenumbrid on näiteks 4—3—5, niidiga märkida A- või B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, siis tähistame A-4'35 ja B-4'35; kui tahame aga niidiga märkida seda arvu A- või B-skaala teisel logaritmilisel ühikul, siis tähistame A-43'5 ja B-43'5. C- ja D-skaalal pole säärane vahetegemine vajalik, kuna need skaalad on ühe logaritmilise ühikuga.

Näide 9. $0,0415 \cdot 23,4^2 = ?$

Tõstame kõigepealt 23,4 ruutu: selleks viime C-1 D-234 kohale, kus $23,4^2$ on B-1 kohal A-skaalal. Arvutuslükati keelt nihutamata teostame korrutamist 0,0415-ga ülemisel jaotusel: viime niidi B-4'15 peale ja loeme A-skaalal niidi alt lõpptulemuse tüvenumbrid 2—2—7, kusjuures suurusjärgu leiame peastarvutamisel arvude

0,0415 ja 23,4 jämedalt ümardamise teel: $\frac{5}{100} \cdot 20^2 = \frac{5 \cdot 400}{100} = 20$, millest nähtub, et antud avaldise suurusjärg on +2. Järelikult

$$0,0415 \cdot 23,4^2 = 22,7.$$

Kui võtaksime sellele näitele analoogilise näite $0,0415 \cdot 85^2$, siis tuleks C-10 paigutada D-85 kohale, kus nüüd A-skaalal B-100 (või B-10) kohal esineb 85^2 , mille korrutise $0,0415$ -ga loeme A-skaalal kas A-4'15 või A-41'5 kohalt, kus esineb lõppresultaadi tüvenumber 3. Arvude $0,0415$ ja 85 jämedalt ümardamisel ($\frac{5}{100} \cdot 100^2 = 500$) nähtub, et antud avaldise suurusjärg on +3 ning seega

$$0,0415 \cdot 85^2 = 300.$$

Harjutusi.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $2,6^2 \cdot 3 = ?$ | 9) $5,06^2 \cdot 11,7 = ?$ |
| 2) $3,2^2 \cdot 1,5 = ?$ | 10) $2,47^2 \cdot 21,2 = ?$ |
| 3) $1,71^2 \cdot 8,15 = ?$ | 11) $0,16^2 \cdot 2,1 = ?$ |
| 4) $9,05^2 \cdot 7,2 = ?$ | 12) $0,47^2 \cdot 47,5 = ?$ |
| 5) $4,42^2 \cdot 3,38 = ?$ | 13) $0,85^2 \cdot 0,52 = ?$ |
| 6) $8,62^2 \cdot 3,65 = ?$ | 14) $0,062^2 \cdot 742 = ?$ |
| 7) $3,4^2 \cdot 0,6 = ?$ | 15) $0,918^2 \cdot 0,602 = ?$ |
| 8) $8,5^2 \cdot 0,7 = ?$ | 16) $0,855^2 \cdot 24,5 = ?$ |

[Vastused. 1) 20,3. 2) 15,4. 3) 23,8. 4) 590. 5) 66,0. 6) 271. 7) 6,94. 8) 50,6. 9) 300. 10) 129,3. 11) 0,0538. 12) 10,5. 13) 0,376. 14) 2,85. 15) 0,507. 16) 17,9.]

Näide 10.

$$\frac{0,0333^2}{0,62} = ?$$

Tõstame $0,0333$ ruutu ja teostame jagamist ülemisel jaotusel: viime niidi D-333 peale, kus nüüd niidi all A-skaalal on lugeja ruut, mis tuleb jagada $0,62$ -ga. Selleks lükkame niidi alla kas B-6'2 või B-62. Esimesel juhul loeme lõppresultaadi tüvenumbrid A-skaalal B-1 (või B-10) kohalt ja teisel juhul B-100 (või B-10) kohalt, kus esinevad 1—7—9. Antud avaldise suurusjärgu leiame arvude $0,0333$ ja $0,62$ jämedalt ümardamise teel:

$$\left(\frac{3}{100}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{10000} = 0,0015, \text{ mis ütleb, et suurusjärg on } -2, \text{ s. o.}$$

$$\frac{0,0333^2}{0,62} = 0,00179.$$

Suurema täpsuse saamiseks võime käesoleva näite esitada järgmisel kujul

$$\frac{0,0333^2}{0,62} = \frac{0,0333 \cdot 0,0333}{0,62}$$

ja teostada jagamist ja korrutamist D- ja C-skaalaga. Selleks paigutame C-62 D-333 kohale ja viime niidi C-333 peale, lugedes niidi alt D-skaalal korrutise tüvenumbrid 1—7—8—8. Seega eelmissel võrreldes täpsem vastus on 0,001788.

Harjutusi.

$$1) \frac{2,2^2}{3,1} = ?$$

$$5) \frac{4,08^2}{7,95} = ?$$

$$9) \frac{0,34^2}{0,86} = ?$$

$$2) \frac{8,3^2}{7,3} = ?$$

$$6) \frac{2,6^2}{14} = ?$$

$$10) \frac{12,2^2}{64,4} = ?$$

$$3) \frac{1,4^2}{5,6} = ?$$

$$7) \frac{3,45^2}{45,5} = ?$$

$$11) \frac{14,2^2}{21,5} = ?$$

$$4) \frac{2,38^2}{9,9} = ?$$

$$8) \frac{5,4^2}{0,72} = ?$$

$$12) \frac{0,0241^2}{0,0606} = ?$$

[Vastused. 1) 1,56. 2) 9,44. 3) 0,350. 4) 0,572. 5) 2,09. 6) 0,483. 7) 0,262. 8) 40,5. 9) 0,134. 10) 2,31. 11) 9,38. 12) 0,00958.]

Näide 11.

$$\frac{7,6}{5,65^2} = ?$$

Siin teostatakse jagamist samuti ülemisel jaotusel. Viime niidi A-76 peale ja C-565 niidi alla, siis $5,65^2$ on B-skaalal niidi all, mis kujutab ülemisel jaotusel jagamist. Jagatise tüvenumbrid loeme A-skaalal B-100 (või B-10) kohalt. B-100 (või B-10) kohal A-skaalal esinevad jagatise tüvenumbrid 2—3—8, kusjuures jagatise suurusjärgu saame arvude 7,6 ja 5,65 jämedalt ümardamise teel: $\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9} = 0,2\dots$, millest nähtub, et jagatise suurusjärk on 0. Seega

$$\frac{7,6}{5,65^2} = 0,238.$$

Näide 12.

$$\frac{2,45 \cdot 3,55}{1,23^2} = ?$$

Et selle avaldise väärtust leida keele ühe asetusega, selleks viime niidi A-2'45 peale ja C-123 niidi alla, kus nüüd niidi all B-skaalal on $1,23^2$ ja B-1 kohal A-skaalal on $2,45 : 1,23^2$, mille korrutamiseks $3,55$ -ga viime niidi B-3'55 peale ja loeme niidi alt A-skaalal lõppresultaadi tüvenumbrid 5—7—5. Antud avaldises esinevate arvutuste jämedalt ümardamise puhul nähtub, et suurusjärk on +1. Seega

$$\frac{2,45 \cdot 3,55}{1,23^2} = 5,75.$$

Esitades käesoleva näite üldkujul

$$x = \frac{a \cdot b}{c^2},$$

võime arvutuslükati keele ühe asetuse puhul selle avaldise arvutamise juhiseks esitada järgmise skeemi

$$(A-a) : (B-c^2) \cdot (B-b) \cdot (A-x) \cdot (C-c)$$

Harjutusi.

1) $\frac{8}{2,1^2} = ?$

6) $\frac{2,13}{8,65^2} = ?$

11) $\frac{0,55}{0,94^2} = ?$

2) $\frac{7,6}{1,5^2} = ?$

7) $\frac{56}{5,4^2} = ?$

12) $\frac{38,6}{13,7^2} = ?$

3) $\frac{3,8}{2,7^2} = ?$

8) $\frac{18,3}{1,975^2} = ?$

13) $\frac{5,15 \cdot 8,05}{2,7^2} = ?$

4) $\frac{1}{3,4^2} = ?$

9) $\frac{27,6}{6,15^2} = 2$

14) $\frac{0,414 \cdot 0,62}{0,38^2} = ?$

5) $\frac{5,45}{7,28^2} = ?$

10) $\frac{0,76}{2,24^2} = ?$

15) $\frac{73,5 \cdot 7,07}{9,15^2} = ?$

[Vastused. 1) 1,81. 2) 3,38. 3) 0,521. 4) 0,0865. 5) 0,103. 6) 0,0285. 7) 1,92. 8) 4,69. 9) 0,730. 10) 0,1515. 11) 0,622. 12) 0,206. 13) 5,69. 14) 1,78. 15) 6,2.]

§ 7. RUUTJUURED.

1. Eelmises paragrahvis nägime, et kui alumise skaala mingile kriipsule vastab arv x , siis sellega kohakuti olevale kriipsule ülemisel skaalal vastab arv y , mis kujutab arvu x -i ruutu; s. o. $y = x^2$. Kuna juurimine on vastupidine tehe astendamisele, siis järelikult $x = \sqrt{y}$, mis ütleb, et ülemisel skaalal võetud arvu y ruutjuure väärtus x asetseb y -ga kohakuti alumisel skaalal (joon. 14). Järelikult tuleb arvu ruutjuure leidmiseks märkida juuritav arv niidiga arvutuslükati ülemisel skaalal ja vastav ruutjuure väärtus lugeda niidi alt alumisel skaalal. Kui juuritav arv on ühekohalise täisosaga, siis märgime ta A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, kui juuritav arv on aga kahekohalise täisosaga, siis märgime ta A-skaala teisel logaritmilisel ühikul. Mõlemal juhul loeme nende ruutjuure D-skaalal niidi alt ühekohalise täisosaga arvuna.

Näide 1. $\sqrt{5,6} = ?$

Viime niidi A-5'6 peale ja loeme D-skaalal niidi alt ruutjuure väärtuse (kahe kümnendkohaga), s. o. 2,37. Tähenab,

$$\sqrt{5,6} = 2,37.$$

Näide 2. $\sqrt{59,2} = ?$

Viime niidi A-59'2 peale ja loeme D-skaalal niidi alt ruutjuure väärtuse, s. o.

$$\sqrt{59,2} = 7,69.$$

Harjutusi.

- | | | |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{7} = ?$ | 6) $\sqrt{16} = ?$ | 11) $\sqrt{18,05} = ?$ |
| 2) $\sqrt{6,3} = ?$ | 7) $\sqrt{55} = ?$ | 12) $\sqrt{99,2} = ?$ |
| 3) $\sqrt{3,75} = ?$ | 8) $\sqrt{42,8} = ?$ | 13) $\sqrt{10,08} = ?$ |
| 4) $\sqrt{1,37} = ?$ | 9) $\sqrt{13,1} = ?$ | 14) $\sqrt{40} = ?$ |
| 5) $\sqrt{8,46} = ?$ | 10) $\sqrt{30,3} = ?$ | 15) $\sqrt{10} = ?$ |

[Vastused. 1) 2,65. 2) 2,51. 3) 1,936. 4) 1,170. 5) 2,91. 6) 4,00. 7) 7,42. 8) 6,54. 9) 3,62. 10) 5,50. 11) 4,25. 12) 9,96. 13) 3,18. 14) 6,33. 15) 3,16.]

Eespool vaadeldud kahes näites ja harjutustes esinesid ühe- ja kahekohalise täisosaga juuritavad arvud, kus ruutjuurte väärtused lugesime D-skaalalt ühekohalise täisosaga arvudena. Nende ruutjuurte suurusjärk oli +1. Kui juuritava arvu suurusjärk oli +1, siis märkisime juuritava arvu niidiga A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, kui juuritava arvu suurusjärk oli aga +2, siis märkisime juuritava arvu niidiga A-skaala teisel logaritmilisel ühikul.

Eelmises paragrahvis nägime, et arvu ruutu tõstmisel oli A-skaala esimeselt logaritmiliselt ühikult loetava ruudu suurusjärk alati paaritu arv ja teiselt logaritmiliselt ühikult loetava ruudu suurusjärk paarisarv. Järelikult tuleb ruutjuure leidmisel toimida ümberpöörduvalt: paaritu suurusjärguga juuritavaid arve tuleb märkida A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul ja paaris suurusjärguga juuritavaid arve teisel logaritmilisel ühikul. Seejuures võime nüüd ruutjuure suurusjärgu määramiseks esitada järgmised juhised:

a) kui juuritava arvu suurusjärk on paaritu arv, siis tuleb juuritav arv võtta A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul ja juure suurusjärk on $\frac{n+1}{2}$, kus n on juuritava arvu suurusjärk;

b) kui juuritava arvu suurusjärk on paarisarv, siis tuleb juuritav arv võtta A-skaala teisel logaritmilisel ühikul ja juure suurusjärk on $\frac{n}{2}$.

Näide 3. $\sqrt{376} = ?$

Siin on juuritava arvu suurusjärk paaritu arv (+3). Ruutjuure suurusjärk on siis $\frac{3+1}{2} = +2$. Viime niidi A-skaalal esimese logaritmilise ühiku A-3'76 peale ja loeme niidi alt D-skaalal ruutjuure tüvenumbrid 1—9—4. Seega

$$\sqrt{376} = 19,4.$$

Näide 4. $\sqrt{0,00525} = ?$

Juuritava arvu suurusjärk on siin paarisarv (-2), siis ruutjuure suurusjärk on $\frac{-2}{2} = -1$. Viime niidi A-skaalal teise logaritmilise ühiku A-52'5 peale ja loeme niidi alt D-skaalal ruutjuure tüvenumbrid 7—2—5. Tähebänd

$$\sqrt{0,00525} = 0,0725.$$

Niisugustel juhtudel, kui juuritav arv ei ole ühe- ega kahekohalise täisosaga, võime ruutjuure leidmiseks juuritava arvu koma ümberpaigutamise teel lahutada ka kaheks teguriks nii, et üks tegur kujutaks 10-ne paarisastet ja ülejäänud teine tegur ühe- või kahekohalise täisosaga arvu. Sel juhul teostame arvutustlükatil ainult kas ühe- või kahekohalise täisosaga arvu juurimist, kusjuures selle arvu ruutjuur tuleb siis peastarvutamisel korrutada (või jagada) 10-ne vastava astmega. Kahe viimase näite puhul toimuks siis arvude 376 ja 0,00525 ruutjuurte leidmine järgmiselt:

$$\sqrt{376} = \sqrt{3,76 \cdot 10^2} = 10 \cdot \sqrt{3,76} = 10 \cdot 1,94 = 19,4$$

$$\sqrt{0,00525} = \sqrt{52,5 \cdot 10^{-4}} = 10^{-2} \cdot \sqrt{52,5} = \frac{7,25}{100} = 0,0725.$$

Esimesel juhul tuli ruutjuure $\sqrt{3,76}$ leidmiseks niit viia A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul A-3'76 peale, kuna juuritav arv oli ühekohalise täisosaga, teisel juhul tuli ruutjuure $\sqrt{52,5}$ leidmiseks niit viia aga A-skaala teisel logaritmilisel ühikul A-52'5 peale, sest juuritav arv oli kahekohalise täisosaga.

Harjutusi.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt{144} = ?$ | 5) $\sqrt{0,16} = ?$ | 9) $\sqrt{2468} = ?$ |
| 2) $\sqrt{137} = ?$ | 6) $\sqrt{0,43} = ?$ | 10) $\sqrt{2578} = ?$ |
| 3) $\sqrt{250} = ?$ | 7) $\sqrt{0,154} = ?$ | 11) $\sqrt{0,017} = ?$ |
| 4) $\sqrt{755} = ?$ | 8) $\sqrt{205,5} = ?$ | 12) $\sqrt{0,0742} = ?$ |

[Vastused. 1) 12,00. 2) 11,70. 3) 15,81. 4) 27,5. 5) 0,400.
6) 0,656 7) 0,392. 8) 14,34. 9) 49,7. 10) 50,8. 11) 0,1304.
12) 0,272.]

Ruutjuure leidmist ja selle suurusjärgu määramist võime teostada veel lihtsamalt ka nii, et jaotame juuritava arvu (kümnendmurr) komast ühele ja teisele poole kahe numbri kaupa rühmadeks, samuti nagu see toimub algebras ruutjuure arvutamisel. Kui seejuures esimene tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb ühest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv niidiga ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, kui aga esimene tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb kahest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul. Nii näiteks arvude 625; 3,042; 0,0248 ruutjuure arvutamisel tuleb nad niidiga märkida ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmadesse märgitult on need arvud: 6'25; 3,04'20; 0,02'48; kuid arvude 1352; 16,15; 0,00813 ruutjuure arvutamisel tuleb nad niidiga märkida ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on nad: 13'52; 16,15; 0,00'81'30. Selle võttega on lihtne määrata ruutjuure väärtuses koma asukoht: juuritava arvu iga rühm komast vasakul pool annab ruutjuure täisosas ühe numbri ja juuritava arvu iga rühm komast paremal pool annab ruutjuure murdosas ühe numbri. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on muidugi ruutjuure täisosa null ja koma järel esineb niimitu nulli, kuimitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kaks nulli.

Näide 5. $\sqrt{0,00052} = ?$

Jaotame siin juuritava arvu rühmadesse järgmiselt: $\sqrt{0,00'05'20}$ ja märgime niidiga A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul A-5'20, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme ruutjuure tüvenumbrid 2—2—8. Seega

$$\sqrt{0,00052} = 0,0228.$$

Harjutusi.

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt{180} = ?$ | 4) $\sqrt{830} = ?$ | 7) $\sqrt{0,00015} = ?$ |
| 2) $\sqrt{0,064} = ?$ | 5) $\sqrt{8300} = ?$ | 8) $\sqrt{71,188} = ?$ |
| 3) $\sqrt{0,0064} = ?$ | 6) $\sqrt{0,0083} = ?$ | 9) $\sqrt{1,0196} = ?$ |

[Vastused. 1) 13,4. 2) 0,253. 3) 0,08. 4) 28,8. 5) 91,1. 6) 0,0911. 7) 0,01224. 8) 8,44. 9) 1,01.]

Märkus. Juhul, kui arvu juurimisel (ruutjuure arvutamisel) arvutuslükati abil saadav kolme tüvenumbriga juure väärtus pole küllaldane, vaid nõutakse näiteks vähemalt viie tüvenumbri-lise täpsusega vastust, siis teostame juurimist paberil seni, kuni leiame juure väärtuse esimesed kolm tüvenumbrist ja vastava (üldiselt kolmanda) jäägi. Siis jagame selle jäägi arvutuslükatil kolme tüvenumbriga juure kahekordse väärtusega, saades seega juure väärtuse kaks järgnevat tüvenumbrist.

Näiteks:

$$\sqrt{88} = 9,38 \text{ (kirjalikul arvutamisel saadud arv)}$$

$$\begin{array}{r|l} 183 & 700 \\ 3 & 549 \\ \hline 1868 & 15100 \\ 8 & 14944 \end{array}$$

$$156 : 1876 = 0,0832 \text{ (lükatil saadud arv).}$$

Järelikult: $\sqrt{88} = 9,3808$.

2. Teades peale korrutamise, jagamise ja astendamise (ruutu tõstmise) ka arvude ruutjuure leidmise võtet, võime arvutuslükatiga märksa kiiremini kui muidu teostada neist tehetest koosnevate avaldiste kombineeritud arvutamist. Näiteks:

$$\sqrt{a \cdot b}, \sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}, a\sqrt{b}, \frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{c}}, a\sqrt{\frac{b}{c}}, \frac{a \cdot b}{\sqrt{c}},$$

millede arvutamist saame teostada arvutuslükati keele ühe asetusega, kusjuures avaldiste $\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}$, $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ ja $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ arvutamisel tuleb teha mõnikord ka keele ülekanne.

N ä i d e 6. $\sqrt{3,52 \cdot 606} = ?$

Siin tuleb korrutamist teostada arvutuslükati ülemisel jaotusel: viime B-1 A-3'52 kohale ja niidi B-6'06 peale, siis korrutise juur on niidi all D-skaalal. Saame

$$\sqrt{3,52 \cdot 6,06} = 4,62.$$

N ä i d e 7. Kui täisnurkse kolmnurga üks kaatet on a ja hüpotenuus on c , siis teise kaateti b väärtuse võime leida arvutuslükati abil sarnaselt näitega 6:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

Näiteks, kui $a = 11,6$ cm ja $c = 14,2$ cm, siis

$$b = \sqrt{(14,2 + 11,6)(14,2 - 11,6)} = \sqrt{25,8 \cdot 2,6} = 8,19 \text{ cm.}$$

Harjutusi.

1) $\sqrt{3 \cdot 6} = ?$

2) $\sqrt{4,7 \cdot 2,2} = ?$

3) $\sqrt{5,6 \cdot 3,7} = ?$

4) $\sqrt{8,2 \cdot 7,5} = ?$

5) $\sqrt{5,14 \cdot 4,9} = ?$

6) $\sqrt{6,15 \cdot 2,08} = ?$

7) $\sqrt{2,16 \cdot 7,56} = ?$

8) $\sqrt{12 \cdot 7} = ?$

9) $\sqrt{23,5 \cdot 3,6} = ?$

10) $\sqrt{66 \cdot 4,5} = ?$

11) $\sqrt{0,72 \cdot 5,5} = ?$

12) $\sqrt{0,33 \cdot 26,5} = ?$

13) $\sqrt{42 \cdot 72,5} = ?$

14) $\sqrt{85,9 \cdot 113} = ?$

15) $\sqrt{0,0021 \cdot 14,2} = ?$

16) $\sqrt{0,0535 \cdot 2,64} = ?$

[Vastused. 1) 4,24. 2) 3,22. 3) 4,55. 4) 7,84. 5) 5,02. 6) 3,58. 7) 4,04. 8) 9,17. 9) 9,20. 10) 17,2. 11) 1,99. 12) 2,96. 13) 55,2. 14) 98,5. 15) 0,173. 16) 0,376.]

Näide 8. $\sqrt{\frac{5}{12}} = ?$

Jagamist teostatakse arvutuslükati ülemisel jaotusel. Jagatis on A-skaalal B-100 kohal. Jagatise ruutjuure tüvenumbrid on siis D-skaalal 6—4—6. Juuritavat murdu jämedalt ümardades ($\sqrt{0,5} \approx 0,2$) näeme, et juure suurusjärk on 0. Seega

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = 0,646.$$

Näide 9. $\sqrt{\frac{0,505 \cdot 32,5}{0,098}} = ?$

Siin teostame juuritava avaldise arvutamist ülemisel jaotusel: viime niidi A-50'5 peale ja B-9'8 niidi alla; teeme keele ülekande ja viime niidi B-32'5 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal esinevad juure tüvenumbrid 1—2—9—3. Juuritava avaldise tegureid jämedalt ümardades ($\sqrt{\frac{0,5 \cdot 30}{0,1}} = \sqrt{150} \approx 12$) nähtub, et ruutjuure suurusjärk on +2. Seega

$$\sqrt{\frac{0,505 \cdot 32,5}{0,098}} = 12,93.$$

Harjutusi.

1) $\sqrt{\frac{28}{5}} = ?$

7) $\sqrt{\frac{8,6}{0,4}} = ?$

2) $\sqrt{\frac{14}{38}} = ?$

8) $\sqrt{\frac{81,5}{0,42}} = ?$

3) $\sqrt{\frac{9,8}{2,45}} = ?$

9) $\sqrt{\frac{0,67}{0,014}} = ?$

4) $\sqrt{\frac{17,2}{63,5}} = ?$

10) $\sqrt{\frac{5,9 \cdot 3,4}{4,75}} = ?$

5) $\sqrt{\frac{0,8}{4,7}} = ?$

11) $\sqrt{\frac{23,7 \cdot 0,55}{0,606}} = ?$

6) $\sqrt{\frac{0,56}{74,5}} = ?$

12) $\sqrt{\frac{0,41 \cdot 0,0815}{7,65}} = ?$

[Vastused. 1) 2,37. 2) 0,607. 3) 2. 4) 0,520. 5) 0,413. 6) 0,0867. 7) 4,64. 8) 13,93. 9) 6,92. 10) 2,06. 11) 4,64. 12) 0,066.]

Näide 10. $37\sqrt{0,0255} = ?$

Viime niidi A-2'55 peale ja C-1 niidi alla. Siis viime niidi C-37 peale ja loeme niidi alt D-skaalal korrutise tüvenumbrid 5—9—1, kusjuures tegurite jämedalt ümardamine ($40\sqrt{0,04}$) näitab, et korrutise suurusjärk on +1. Seega

$$37\sqrt{0,0255} = 5,91.$$

Näide 11. Kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b , siis hüpotenuusi c väärtuse saame arvutuslükati abil järgmiselt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Kui $a = 3,08$ cm ja $b = 2,16$ cm, siis

$$c = 3,08 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2,16}{3,08}\right)^2};$$

siin jagame kõige enne $\left(\frac{2,16}{3,08}\right)$ alumisel jaotusel, siis tõstame tulemuse ruutu ja liidame sellega 1, saadud juure väärtust juurime ja korrutame alumisel jaotusel 3,08-ga, saades 3,76. Seega

$$c = 3,76 \text{ cm.}$$

Harjutusi.

1) $3 \cdot \sqrt{7} = ?$

2) $4,4 \cdot \sqrt{5} = ?$

3) $5,05 \cdot \sqrt{3,7} = ?$

4) $7,2 \cdot \sqrt{8,2} = ?$

5) $3,32 \cdot \sqrt{7,34} = ?$

6) $7,21 \cdot \sqrt{4,92} = ?$

7) $7,21 \cdot \sqrt{49,2} = ?$

8) $0,3 \cdot \sqrt{3} = ?$

9) $0,8 \cdot \sqrt{12,5} = ?$

10) $7,5 \cdot \sqrt{0,5} = ?$

11) $1,74 \cdot \sqrt{0,149} = ?$

12) $36 \cdot \sqrt{38} = ?$

13) $56 \cdot \sqrt{0,71} = ?$

14) $0,29 \cdot \sqrt{0,12} = ?$

15) $0,051 \cdot \sqrt{11,1} = ?$

16) $0,88 \cdot \sqrt{0,464} = ?$

17) $5 \cdot \sqrt{55} = ?$

18) $5 \cdot \sqrt{5,5} = ?$

[Vastused. 1) 7,94. 2) 9,84. 3) 9,72. 4) 20,6. 5) 8,99. 6) 15,99. 7) 50,6. 8) 0,520. 9) 2,83. 10) 5,30. 11) 0,672. 12) 222. 13) 47,2. 14) 0,1005. 15) 0,170. 16) 0,599. 17) 37,1. 18) 11,73.]

Näide 12.

$$\frac{\sqrt{1150}}{23,2} = ?$$

Paigutame niidi A-11'5 peale ja siis niidi alla C-232, kus nüüd D-skaalal C-1 kohal on jagatise tüvenumbrid 1—4—6—2. Lugejat ja nimetajat jämedalt ümardades $\left(\frac{\sqrt{900}}{20} = \frac{3}{2} = 1,5\right)$ näeme, et jagatise suurusjärk on +1. Tähendab

$$\frac{\sqrt{1150}}{23,2} = 1,462.$$

Harjutusi.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{\sqrt{8}}{2} = ?$ | 9) $\frac{\sqrt{7,42}}{16,9} = ?$ |
| 2) $\frac{\sqrt{60}}{5,2} = ?$ | 10) $\frac{\sqrt{22}}{22} = ?$ |
| 3) $\frac{\sqrt{30}}{8,8} = ?$ | 11) $\frac{\sqrt{0,26}}{31} = ?$ |
| 4) $\frac{\sqrt{7,4}}{6,05} = ?$ | 12) $\frac{\sqrt{0,11}}{0,17} = ?$ |
| 5) $\frac{\sqrt{5}}{0,7} = ?$ | 13) $\frac{\sqrt{0,845}}{0,99} = ?$ |
| 6) $\frac{\sqrt{69,5}}{0,3} = ?$ | 14) $\frac{\sqrt{6}}{6} = ?$ |
| 7) $\frac{\sqrt{0,3}}{1,05} = ?$ | 15) $\frac{\sqrt{60}}{6} = ?$ |
| 8) $\frac{\sqrt{0,132}}{3,18} = ?$ | 16) $\frac{\sqrt{600}}{6} = ?$ |

[Vastused. 1) 1,414. 2) 1,490. 3) 0,622. 4) 0,450. 5) 3,19. 6) 27,8. 7) 0,522. 8) 0,1142. 9) 0,1612. 10) 0,213. 11) 0,01645. 12) 1,951. 13) 0,928. 14) 0,408. 15) 1,291. 16) 4,08.]

Näide 13. $\frac{28,4}{\sqrt{1,36}} = ?$

Viime niidi D-284 peale ja B-1'36 niidi alla. Saame jagatise alumisel jaotusel, kus C-1 kohal D-skaalal on jagatise tüvenumbriid 2—4—4.

Või viime niidi A-1'36 peale ja toome C-284 niidi alla ning loeme D-1 kohalt C-skaalal samad tüvenumbrid 2—4—4.

Lugejat ja nimetajat jämedalt ümardades $\left(\frac{25}{\sqrt{1}} = 25\right)$ saame jagatise suurusjärgu +2. Järelikult

$$\frac{28,4}{\sqrt{1,36}} = 24,4.$$

Harjutusi.

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\frac{6}{\sqrt{6}} = ?$ | 4) $\frac{2,62}{\sqrt{9,25}} = ?$ | 7) $\frac{0,2}{\sqrt{6}} = ?$ |
| 2) $\frac{8,5}{\sqrt{39}} = ?$ | 5) $\frac{1}{\sqrt{6}} = ?$ | 8) $\frac{0,8}{\sqrt{55,5}} = ?$ |
| 3) $\frac{5,07}{\sqrt{8,4}} = ?$ | 6) $\frac{1}{\sqrt{60}} = ?$ | 9) $\frac{8,6}{\sqrt{0,4}} = ?$ |

$$\begin{array}{lll}
 10) \frac{1}{\sqrt{0,7}} = ? & 13) \frac{10}{\sqrt{4,2}} = ? & 16) \frac{0,031}{\sqrt{0,075}} = ? \\
 11) \frac{1,18}{\sqrt{0,89}} = ? & 14) \frac{51,5}{\sqrt{0,18}} = ? & 17) \frac{80}{\sqrt{80}} = ? \\
 12) \frac{4,7}{\sqrt{17}} = ? & 15) \frac{0,34}{\sqrt{0,84}} = ? & 18) \frac{3}{\sqrt{1,5}} = ?
 \end{array}$$

[Vastused. 1) 2,45. 2) 1,361. 3) 1,749. 4) 0,862. 5) 0,408. 6) 0,1291. 7) 0,0816. 8) 0,1074. 9) 13,60. 10) 1,195. 11) 1,251. 12) 1,140. 13) 4,88. 14) 121,4. 15) 0,371. 16) 0,1132. 17) 8,94. 18) 2,45.]

Näide 14. $\frac{0,72\sqrt{0,085}}{1,63} = ?$

Viime niidi A-8'5 peale, mille ruutjuur on D-skaalal niidi all. Jagame ruutjuure väärtuse D-skaalal arvuga 1,63, viies selleks keelega C-163 niidi alla, kus nüüd jagatis on D-skaalal C-1 kohal. Selle jagatise korrutamisel arvuga 0,72 tuleb teha keele ülekanne ja viia siis niit C-72 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal esinevad lõppresultaadi tüvenumbrid 1—2—8—7. Tegurite jämedalt ümardamise teel $\left(\frac{0,7\sqrt{0,09}}{2} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{2} = \frac{0,21}{2} = 0,105\right)$ ilmneb, et suurusjärk on 0. Järelikult

$$\frac{0,72\sqrt{0,085}}{1,63} = 0,1287.$$

Näide 15. $0,0462\sqrt{\frac{34,6}{8,15}} = ?$

Juuritava murru arvutamist (lugeja jagamist nimetajaga) teostame ülemisel jaotusel, viies niidi A-34'6 peale ja B-8'15 niidi alla. D-skaalal C-1 kohal on ruutjuure väärtus, mille korrutamiseks arvuga 0,0462 viime niidi C-462 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme lõppsaaduste tüvenumbrid 9—5—2. Seejuures määrame suurusjärgu tegurite jämedalt ümardamise teel $(0,04\sqrt{\frac{36}{9}} = 0,04 \cdot 2 = 0,08)$. Seega

$$0,0462\sqrt{\frac{34,6}{8,15}} = 0,0952.$$

Näide 16. $\frac{2,48 \cdot 4,05}{\sqrt{3,06}} = ?$

Antud avaldise väärtuse leidmiseks arvutuslükati keele ühe asetusega viime niidi D-248 peale ja B-3'06 niidi alla, kus nüüd C-1 kohal D-skaalal on jagatise 2,48 : $\sqrt{3,06}$ väärtus, mille korrutamiseks 4,05-ga viime niidi C-405 peale ja loeme niidi alt D-skaa-

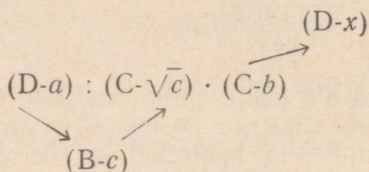
lal antud avaldise väärtuse tüvenumbrid 5—7—4. Suurusjärk on siin ilmselt +1. Tähendab,

$$\frac{2,48 \cdot 4,05}{\sqrt{3,06}} = 5,74.$$

Esitades viimase näite üldkujul

$$x = \frac{a \cdot b}{\sqrt{c}},$$

võime arvutuslükati keele ühe asetuse puhul selle avaldise arvutamise juhisenä esitada järgmise skeemi:



Harjutusi.

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{2\sqrt{7}}{1,91} = ?$ | 7) $0,568 \sqrt{\frac{268}{0,0143}} = ?$ |
| 2) $\frac{0,3\sqrt{51,5}}{8,65} = ?$ | 8) $755 \sqrt{\frac{0,00845}{0,000303}} = ?$ |
| 3) $\frac{3,85\sqrt{0,00263}}{0,552} = ?$ | 9) $\frac{8,05 \cdot 3,82}{\sqrt{15,6}} = ?$ |
| 4) $\frac{0,0041\sqrt{0,158}}{1,005} = ?$ | 10) $\frac{0,72 \cdot 5,65}{\sqrt{0,208}} = ?$ |
| 5) $3,18 \sqrt{\frac{6,85}{4,16}} = ?$ | 11) $\frac{362 \cdot 2,05}{\sqrt{615}} = ?$ |
| 6) $21,6 \sqrt{\frac{0,48}{52,1}} = ?$ | 12) $\frac{0,0303 \cdot 0,82}{\sqrt{0,00057}} = ?$ |

[Vastused. 1) 2,77. 2) 0,249. 3) 0,357. 4) 0,00162.
5) 4,08. 6) 0,208. 7) 77,7. 8) 3990. 9) 7,78. 10) 8,91.
11) 29,9. 12) 1,04.]

§ 8. KUUBID JA KUUPJUURED.

1. Arvude kuupide ja kuupjuurte nii otseseks leidmiseks kui ka arvude kuube ja kuupjuuri sisaldavate kombineeritud avaldiste arvutamiseks on arvutuslükatil peale A-, B-, C- ja D-skaala lükati ülemisel äärel veel viies skaala (joon. IV, raamatu lõpus lisalehel). Nimetame seda skaalat k u u p s k a a l a k s ehk lühidalt K - s k a a

1 a ks. K-skaalal on lükati põhiskaala pikkuses kolm ühepikkust logaritmilist ühikut, milliseid loeme järgemööda (vasakult paremale) esimeseks, teiseks ja kolmandaks logaritmiliseks ühikuks.

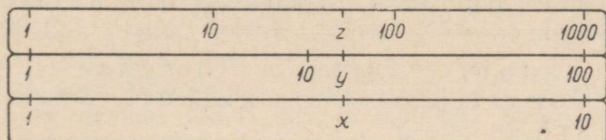
K-skaalal on märgitud numbrid

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1,

mis tähendavad aga

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,
200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000.

Seega esinevad K-skaalal kõik arvud 1-st 1000-ni, kui skaala alguskriipsu lugeda 1-ks. Mõne arvutuslükati K-skaalal on ainult logaritmiliste ühikute lõppudel märgitud vastavalt 10, 100 ja 1000, et selgemini piiritleda neid ühikuid, kuna mujal esinevad ühekohalised arvud.



Joon. 15.

Märgime põhiskaalal, ruutskaalal ja kuupskaalal niidiga võrdseid logaritmilised lõigud vastavalt 1-st kuni x -ni, 1-st kuni y -ni ja 1-st kuni z -ni (joon. 15). Siis

$$250 \cdot \lg x = \frac{250}{2} \lg y = \frac{250}{3} \lg z$$

ehk

$$\lg x = \lg \sqrt{y} = \lg \sqrt[3]{z}$$

ja

$$x = \sqrt{y} = \sqrt[3]{z},$$

millest saame neli võrdust

$$z = x^3, x = \sqrt[3]{z}, z = y\sqrt{y} = y^{\frac{3}{2}}, y = \sqrt{z^2} = z^{\frac{2}{3}}.$$

Saadud avaldiste arvutamiseks kasutame ainult märkija niiti.

Viimasest neljast võrdusest nähtub nüüd, et kui esimesel juhul paigutada niit D-skaalal arvu x peale, siis selle kuubi loeme niidi alt K-skaalal; teisel juhul — vastupidiselt esimesele juhule, kui paigutada niit K-skaalal arvu z peale, siis selle kuupjuure loeme niidi alt D-skaalal; kolmandal juhul, kui paigutada niit

A-skaalal arvu y peale, siis selle $\frac{3}{2}$ -astme loeme niidi alt K-skaalal, ja neljandal juhul — vastupidiselt kolmandale juhule, kui paigutada niit K-skaalal arvu z peale, siis selle $\frac{2}{3}$ -astme loeme niidi alt A-skaalal. Näiteks:

$$1,63^3 = 4,33; \sqrt[3]{26,2} = 2,97;$$

$$5,6\sqrt{5,6} = 5,6^{\frac{3}{2}} = 13,25; \sqrt[3]{56^2} = 56^{\frac{2}{3}} = 14,6.$$

Esimesel juhul, s. o. arvude kuupi tõstmisel, võime kuubi suurusjärku määramiseks (kuubi aluse kolmekordse korrutamise põhimõttel) kasutada järgmisi juhiseid:

a) kui kuubi väärtust loetakse K-skaala esimeselt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi suurusjärk on $3n-2$, kus n on astme aluse suurusjärk;

b) kui kuubi väärtust loetakse K-skaala teiselt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi suurusjärk on $3n-1$;

c) kui kuubi väärtust loetakse K-skaala kolmandalt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi suurusjärk on $3n$.

Kuupskaalal märgitavat arvu, mille tüvenumbrid on näiteks 5—3—8, tähistame järgmiselt: kui see arv tuleb märkida esimesel logaritmilisel ühikul, siis tähistame K-5'38; kui teisel logaritmilisel ühikul, siis K-53'8; kui kolmandal logaritmilisel ühikul, siis K-538.

Näide 1. $0,00365^3 = ?$

Paigutades niidi D-365 peale, näeme, et niit on kuupskaalal K-48'6 kohal. Astme aluse suurusjärk on — 2. Seega astme suurusjärk on

$$3(-2) - 1 = -7$$

ja aste (K-skaalal niidi alt loetult)

$$0,00365^3 = 0,0000000486.$$

Kui astendatava arvu täisosa ei ole ühekohaline arv, siis võime selle arvu kuupi tõstmisel toimida ka järgmiselt: lahutame astme aluse kaheks teguriks nõnda, et koma ümberpaigutuse tagajärjel üks tegur oleks ühekohalise täisosaga ja teine tegur kujutaks siis vastavat 10-ne astet. Sel juhul astendame arvutuskäsitel ühekohalise täisosaga arvu, mille astet korrutame 10-ne

vastava astmega. Vaadeldud näite puhul toimuks siis arvu 0,00365 kuupi tõstmise järgmiselt:

$$\begin{aligned}0,00365^3 &= (3,65 \cdot 10^{-3})^3 = 3,65^3 \cdot 10^{-9} = \\ &= \frac{48,6}{1\,000\,000\,000} = 0,0000000486.\end{aligned}$$

Teisel juhul, s. o. arvude kuupjuurte arvutamisel, kuupjuure leidmiseks ja selle suurusjärgu määramiseks jaotame juuritava arvu (kümnendmurru) komast vasakule ja paremale poole kolme numbri kaupa rühmadeks. Kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma võib jääda seega kas üks, kaks või kolm tüvenumbrit. Jääb kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma üks tüvenumber, siis märgitakse juuritav arv niidiga kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul; jääb kaks tüvenumbrit, siis teisel logaritmilisel ühikul; jääb kolm tüvenumbrit, siis kolmandal logaritmilisel ühikul. Näiteks arvude 1234; 3,05 ja 0,00642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmadesse jaotatult on nad: 1'234; 3,050; 0,006'420; kuid arvude 12,34; 30,5 ja 0,0642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmadesse märgitult on nad: 12,340; 30,500; 0,064'200; ning arvude 123,4; 305 ja 0,000642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala kolmandal logaritmilisel ühikul, kuna nad rühmadesse märgitult on: 123,400; 305,000; 0,000'642. Kuupjuure väärtuses koma asukoha määramiseks annab juuritava arvu iga rühm komast vasakul pool kuupjuure täisosas ühe numbri ja juuritava arvu iga rühm komast paremal pool kuupjuure murdosas ühe numbri. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on kuupjuure täisosa null ja koma järel esineb niimitu nulli, kuimitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kolm nulli. Õeldust järeldub nüüd, et kuupjuure suurusjärgu võime kindlaks määrata juuritava arvu rühmade järgi, nagu see toimus ruutjuure suurusjärgu määramiselgi.

Näide 2. $\sqrt[3]{0,0385} = ?$

Jaotades juuritava arvu rühmadeks (0,038'500), näeme, et niit tuleb paigutada kuupskaalal K-38'5 peale, kusjuures kuupjuure suurusjärk (juuritava arvu rühmade järgi) on 0. Niidi alt D-skaalal loeme kuupjuure tüvenumbrid 3—3—8. Tähendab

$$\sqrt[3]{0,0385} = 0,338.$$

Neil juhtudel, kui juuritav arv ei ole ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, võime kuupjuure leidmiseks juuritava arvu koma ümberpaigutamisega lahutada ka kaheks teguriks nõnda, et üks tegur kujutaks 10-ne astet, mille astendaja on jagatav 3-ga ja

ülejäanud teine tegur kujutaks siis ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga arvu. Sel juhul teostame arvutuslükatil ainult ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga arvu juurimist, kusjuures selle arvu kuupjuur tuleb siis peastarvutamisel korrutada (või jagada) 10-ne vastava astmega. Selle võtte selgitamiseks esitame järgmised näited:

$$\sqrt[3]{3850} = \sqrt[3]{3,85 \cdot 10^3} = 10\sqrt[3]{3,85} = 10 \cdot 1,567 = 15,67$$

$$\sqrt[3]{38500} = \sqrt[3]{38,5 \cdot 10^3} = 10\sqrt[3]{38,5} = 10 \cdot 3,38 = 33,8$$

$$\sqrt[3]{385000} = \sqrt[3]{385 \cdot 10^3} = 10\sqrt[3]{385} = 10 \cdot 7,28 = 72,8$$

$$\sqrt[3]{0,385} = \sqrt[3]{385 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1}\sqrt[3]{385} = \frac{7,28}{10} = 0,728$$

$$\sqrt[3]{0,0385} = \sqrt[3]{38,5 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1}\sqrt[3]{38,5} = \frac{3,38}{10} = 0,338$$

$$\sqrt[3]{0,00385} = \sqrt[3]{3,85 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1}\sqrt[3]{3,85} = \frac{1,567}{10} = 0,1567.$$

Esimese ja viimase kuupjuure arvutamisel tuli niit viia K-3'85 peale, teise ja viienda kuupjuure arvutamisel tuli niit viia K-38'5 peale ning kolmanda ja neljanda kuupjuure arvutamisel tuli niit viia K-385 peale.

Peale eespool esitatud võtete võib kuupjuure suurusjärgu määramiseks kasutada ka järgmisi juhiseid:

a) kui juuritav arv võetakse K-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, siis juure suurusjärk on $\frac{n+2}{3}$, kus n on juuritava arvu suurusjärk;

b) kui juuritav arv võetakse K-skaala teisel logaritmilisel ühikul, siis juure suurusjärk on $\frac{n+1}{3}$;

c) kui juuritav arv võetakse K-skaala kolmandal logaritmilisel ühikul, siis juure suurusjärk on $\frac{n}{3}$.

Näide 3. $\sqrt[3]{2740000} = ?$

Juuritava arvu suurusjärk on +7. Juurimisel jääb niit K-skaala esimesele logaritmilisele ühikule (sest niit tuleb viia K-2'740'000 peale). Juure suurusjärk on siis

$$\frac{7+2}{3} = 3$$

ja juur (D-skaalal niidi alt loetult)

$$\sqrt[3]{2740000} = 140.$$

Näide 4. $0,172^{\frac{3}{2}} = ?$

Siin $0,172^{\frac{3}{2}} = 0,172\sqrt{0,172}$, kus meil on tegemist ruutjuurega. Juuritava arvu rühmadesse jaotamisel näeme, et kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma kuulub kaks numbrit, s. o. $\sqrt{0,17'20}$. Seega tuleb niit paigutada A-17'2 peale. Niidi alt K-skaalal loeme otsitava arvu tüvenumbrid 7—1—4. Suurusjärgu määrame siin tegurite jämedalt ümardamise teel ($0,2\sqrt{0,16} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$). Suurusjärk on seega -1 ning

$$0,172^{\frac{3}{2}} = 0,0714.$$

Näide 5. $0,172^{\frac{2}{3}} = ?$

Kuna siin $0,172^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{0,172})^2$, kus juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevas rühmas on kolm tüvenumbrit, siis tuleb niit paigutada K-172 peale ja lugeda niidi alt A-skaalal otsitava arvu tüvenumbrid 3—1—0. Otsitava arvu suurusjärgu määrame arvu $0,172$ jämedalt ümardamise kaudu ($(\sqrt[3]{0,2})^2 = \sqrt[3]{0,40} \approx 0,3$). Seega on suurusjärk 0 ja

$$0,172^{\frac{2}{3}} = 0,31.$$

Harjutusi.

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $2,6^3 = ?$ | 15) $\sqrt[3]{0,0012} = ?$ |
| 2) $0,4^3 = ?$ | 16) $\sqrt[3]{4,62} = ?$ |
| 3) $0,46^3 = ?$ | 17) $\sqrt[3]{0,106} = ?$ |
| 4) $15,6^3 = ?$ | 18) $3,2^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 5) $0,013^3 = ?$ | 19) $4,5^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 6) $0,0081^3 = ?$ | 20) $5,45^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 7) $\pi^3 = ?$ | 21) $8,4^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 8) $0,00033^3 = ?$ | 22) $10,6^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 9) $\sqrt[3]{5} = ?$ | 23) $0,71^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 10) $\sqrt[3]{50} = ?$ | 24) $2,5^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 11) $\sqrt[3]{500} = ?$ | 25) $8,15^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 12) $\sqrt[3]{5000} = ?$ | 26) $0,63^{\frac{3}{2}} = ?$ |
| 13) $\sqrt[3]{0,12} = ?$ | |
| 14) $\sqrt[3]{0,012} = ?$ | |

[Vastused. 1) 17,6. 2) 0,064. 3) 0,097. 4) 3800. 5) 0,0000022. 6) 0,00000053. 7) 31. 8) 0,000000000036. 9) 1,710. 10) 3,68. 11) 7,94. 12) 17,10. 13) 0,493. 14) 0,229. 15) 0,1063. 16) 1,667. 17) 0,473. 18) 5,72. 19) 9,55. 20) 12,7. 21) 24,3. 22) 34,5. 23) 0,598. 24) 1,842. 25) 4,05. 26) 0,735.]

Märkus. Mõnel arvutuslükatil on K-skaala paigutatud lükati alumisele servale ning sellel skaalal arvude märkimiseks ja lugemiseks on märkija alumisel serval kriips, mis on kohakuti märkija niidiga.

2. Nende arvutuslükatite abil, millel puudub K-skaala, võime arvude kuupe ja kuupjuuri leida alljärgnevates näidetes kirjeldatud võtete kohaselt. Kuid seejuures tuleb tähendada, et sel juhul arvude kuupi tõstmine ja eriti kuupjuure leidmine on palju rohkem aega nõudev, kui see on K-skaala kasutamise puhul.

Näide 6. $2,48^3 = ?$

Märgime siin

$$2,48^3 = 2,48^2 \cdot 2,48,$$

mille arvutamise võime teostada § 6-s p. 2 esitatud võttega: tõstame 2,48 ruutu ja korrutame saaduse 2,48-ga. Viime C-1 D-248 kohale ja niidi B-2'48 peale ning loeme A-skaalal niidi alt kuubi tüvenumbrid 1—5—2—5. Kuna kuubi suurusjärk arvu 2,48 jämedalt ümardamise võttega ($3^2 \cdot 2 = 18$) on +2, siis

$$2,48^3 = 15,25.$$

Harjutusi.

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| 1) $3^3 = ?$ | 5) $7,05^3 = ?$ | 9) $2,45^3 = ?$ |
| 2) $1,6^3 = ?$ | 6) $0,62^3 = ?$ | 10) $1,86^3 = ?$ |
| 3) $2,14^3 = ?$ | 7) $23,5^3 = ?$ | 11) $1,09^3 = ?$ |
| 4) $8,65^3 = ?$ | 8) $0,083^3 = ?$ | 12) $1,02^3 = ?$ |

[Vastused. 1) 27,0. 2) 4,10. 3) 9,80. 4) 647. 5) 350. 6) 0,238. 7) 13000. 8) 0,000572. 9) 14,7. 10) 6,43. 11) 1,295. 12) 1,061.]

Näide 7. $\sqrt[3]{5,55} = ?$

Viime niidi A-5'55 peale ja lükkame arvutuslükati keele niisugusele kohale, et niidi all B-skaalal ja C-1 kohal D-skaalal esineksid ühesugused arvud või ühesugused tüvenumbrid. Sel teel saame

$$\sqrt[3]{5,55} = 1,77.$$

Analoogilise võttega leiaksime, et

$$\sqrt[3]{55,5} = 3,81,$$

kui viime niidi A-55'5 peale ja lükkame arvutuslükati keele niisugusele kohale, et niidi all B-skaalal ja C-1 kohal D-skaalal oleksid ühesugused tüvenumbrid.

Kui tuleks leida $\sqrt[3]{555}$, siis viime jälle niidi A-5'55 peale ja lükkame arvutuslükati keele nõnda, et B-skaalal ja C-10 kohal D-skaalal oleksid ühesugused tüvenumbrid. Saame

$$\sqrt[3]{555} = 8,21.$$

Analoogiliselt viimasele arvutamisele leiaksime, et

$$\sqrt[3]{0,555} = 0,821.$$

Harjutusi.

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{8} = ?$ | 10) $\sqrt[3]{100} = ?$ |
| 2) $\sqrt[3]{3} = ?$ | 11) $\sqrt[3]{52,5} = ?$ |
| 3) $\sqrt[3]{18} = ?$ | 12) $\sqrt[3]{6,12} = ?$ |
| 4) $\sqrt[3]{21,5} = ?$ | 13) $\sqrt[3]{7,4} = ?$ |
| 5) $\sqrt[3]{\pi} = ?$ | 14) $\sqrt[3]{0,055} = ?$ |
| 6) $\sqrt[3]{6} = ?$ | 15) $\sqrt[3]{0,06} = ?$ |
| 7) $\sqrt[3]{60} = ?$ | 16) $\sqrt[3]{1225} = ?$ |
| 8) $\sqrt[3]{600} = ?$ | 17) $\sqrt[3]{0,0007} = ?$ |
| 9) $\sqrt[3]{6000} = ?$ | 18) $\sqrt[3]{0,0045} = ?$ |

[Vastused. 1) 2,00. 2) 1,442. 3) 2,62. 4) 2,78. 5) 1,464. 6) 1,817. 7) 3,91. 8) 8,43. 9) 18,17. 10) 4,64. 11) 3,74. 12) 1,829. 13) 1,949. 14) 0,380. 15) 0,391. 16) 10,70. 17) 0,0888. 18) 0,1651.]

3. Kasutades peale A-, B-, C- ja D-skaala ka K-skaalat, võime arvutuslükatiga teostada mitmesuguseid kombineeritud arvutusi. Märgime siinjuures mõned niisugused avaldised, mida saame arvutada arvutuslükati keele ühe asetusega, kusjuures mõnel erijuhul tuleb teha peale selle ka keele ülekanne. Niisugused avaldised oleksid näiteks:

$$(a \cdot b)^3, \left(\frac{a}{b}\right)^3, \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3, a\sqrt[3]{b}, \frac{\sqrt[3]{b}}{a}, \frac{a}{\sqrt[3]{b}}, a\sqrt[3]{b^2}, \frac{\sqrt[3]{b^2}}{a}, \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}},$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}, \frac{a\sqrt[3]{b}}{c}, a\sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c}}.$$

Siin tuleb kolme esimese avaldise $(a \cdot b)^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ ja $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3$ arvutamisel sulgudes esinevate arvude korrutamist ja jagamist teostada meile teadaoleva D- ja C-skaalaga ning siis korrutis või jagatis märkida niidiga D-skaalal ja niidi alt K-skaalal lugeda nende kuup.

Avaldiste $a\sqrt[3]{b}$ ja $\frac{\sqrt[3]{b}}{a}$ arvutamisel viime niidi kuupskaalal K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, mida esimesel juhul tuleb D- ja C-skaalal korrutada, teisel juhul aga jagada arvuga a .

Avaldise $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$ arvutamisel viime samuti niidi kuupskaalal K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, millega tuleb jagada arv a . Seni toimisime kahe arvu jagamisel ehk murru väärtuse leidmisel peamiselt nii, et märkisime murru lugeja D-skaalal ja nimetaja C-skaalal, s. o. D-skaalal märkisime niidiga jagatava ja siis paigutasime C-skaalal esineva jagaja keele lükkega jagatava kohale, lugedes jagatise D-skaalalt C-1 (või C-10) kohalt. Siin tuleb aga toimida ümberpöörduvalt: arvutuslükati kere skaala ja keele skaala tulevad vahetada, s. o. D-skaala tuleb võtta murru nimetaja skaalaks ja C-skaala murru lugeja skaalaks. Kuna käesoleva murdavaldise nimetaja esineb niidi all D-skaalal, siis murdavaldise väärtuse leidmiseks paigutame keele lükkega C-a niidi alla ja loeme nüüd D-1 (või D-10) kohalt C-skaalal otsitava väärtuse.

Avaldiste $a\sqrt[3]{b^2}$ ja $\frac{\sqrt[3]{b^2}}{a}$ arvutamisel viime niidi kuupskaalal K-b peale, kus nüüd niidi all A-skaalal on arvu $b \frac{2}{3}$ -aste, mida tuleb A- ja B-skaalal esimesel juhul korrutada, teisel juhul aga jagada arvuga a .

Avaldise $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ puhul tuleb toimida analoogiliselt kuuenda avaldise $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$ arvutamiskäiguga, kuid D- ja C-skaala asemel tuleb võtta A- ja B-skaala, kusjuures A-skaala tuleb lugeda nimetaja skaalaks ja B-skaala lugeja skaalaks.

Avaldiste $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$ ja $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ arvutamisel viime niidi K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, mida tuleb esimesel juhul korrutada, teisel juhul aga jagada $\sqrt[3]{a}$ -ga ning kolmandal juhul $\sqrt[3]{a}$ jagada arvu b kuupjuurega. Esimesel juhul pai-

gutame keele lükkega C-1 (või C-10) niidi alla, s. o. $\sqrt[3]{b}$ kohale, ja viime niidi B-a peale, kus nüüd niidi alt D-skaalalt loeme otsitava korrutise. Teisel ja kolmandal juhul paigutame keele lükkega B-a niidi alla, kusjuures teisel juhul loeme otsitava jagatise D-skaalal C-1 (või C-10) kohalt, kolmandal juhul aga loeme (vastupidiselt eelmisega) otsitava jagatise C-skaalal C-10 (või C-1) kohalt.

Avaldise $\frac{a\sqrt[3]{b}}{c}$ arvutamisel viime niidi K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, mida jagame D- ja C-skaalal enne arvuga c ja siis korrutame arvuga a .

Avaldise $a\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ arvutamisel viime niidi K-c peale, kus niidi all D-skaalal on arvu c kuupjuur, millega jagame arvu a , lükates selleks C-a niidi alla, kusjuures see jagatis on nüüd D-1 (või D-10) kohal C-skaalal (sest jagamisel on D- ja C-skaala ümber vahetatud). Edasi, jättes keele paigale, viime niidi K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, selle korrutise eelmise jagatisega, mis on C-skaalal D-1 (või D-10) kohal, loeme niidi alt C-skaalal.

Avaldise $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ arvutamisel viime niidi K-c peale, kus niidi all D-skaalal on arvu c kuupjuur, millega tuleb jagada \sqrt{a} . Lükates B-a niidi alla, on niidi all C-skaalal arvu a ruutjuur, mille jagatis arvu c kuupjuurega on D-1 (või D-10) kohal C-skaalal. Et seda jagatist korrutada arvu b kuupjuurega, selleks viime niidi K-b peale, kus niidi all D-skaalal on arvu b kuupjuur, mille korrutise eelmise jagatisega, mis on C-skaalal D-1 (või D-10) kohal, loeme niidi alt C-skaalal.

Kõigi nende ülalpool tähendatud avaldiste arvutamisel pole vaja lugeda vahepealseid resultaate. Nende suurusjärgu määramiseks on kõige lihtsam ja otstarbekohasem kasutada arvude jämedalt ümardamise võtet.

Arvutame siinjuures näidetena kuus viimast avaldist, milledes esinevad arvulised suurused.

Näide 8. $\sqrt{0,92} \cdot \sqrt[3]{23,5} = ?$

Viime niidi K-23'5 peale. Niidi all D-skaalal on arvu 23,5 kuupjuur, mida tuleb korrutada ruutjuurega $\sqrt{0,92}$. Selleks lükame C-10 niidi alla ja viime niidi B-92 peale, kus niidi alt D-skaalal loeme lõppresultaadi tüvenumbrid 2—7—5. Juuritavaid arve jämedalt ümardades ($\sqrt{1} \cdot \sqrt[3]{27} = 3$) näeme, et arvutatava korrutise suurusjärk on +1. Seega

$$\sqrt{0,92} \cdot \sqrt[3]{23,5} = 2,75.$$

Näide 9.

$$\frac{\sqrt[3]{0,0053}}{\sqrt{4,04}} = ?$$

Viime niidi K-5'3 peale, kus niidi all D-skaalal esineb kuupjuure väärtus, mida tuleb jagada ruutjuurega $\sqrt{4,04}$. Selleks paigutame B-4'04 keele lükkega niidi alla ja loeme C-10 kohalt D-skaalal otsitava jagatise tüvenumbrid 8—6—7. Kuna kuupjuure väärtus on 0,1 ja 0,2 vahel ning ruutjuure väärtus 2 ja 3 vahel, siis otsitava jagatise suurusjärk on seega -1. Järelikult

$$\frac{\sqrt[3]{0,0053}}{\sqrt{4,04}} = 0,0867.$$

Näide 10.

$$\frac{\sqrt{4,04}}{\sqrt[3]{0,0053}} = ?$$

Siin viime samuti nagu eelmiseski näites niidi K-5'3 peale, kus niidi all D-skaalal esineb kuupjuure väärtus, millega tuleb jagada $\sqrt{4,04}$. Selleks paigutame B-4'04 keele lükkega niidi alla ja loeme D-1 kohalt C-skaalal otsitava jagatise tüvenumbrid 1—1—5—3. Kuna siin lugeja väärtus peitub 2 ja 3 vahel ning nimetaja väärtus 0,1 ja 0,2 vahel, siis on nende jagatise suurusjärk +2. Järelikult

$$\frac{\sqrt{4,04}}{\sqrt[3]{0,0053}} = 11,53.$$

Näide 11.

$$\frac{504\sqrt[3]{0,00063}}{24,5} = ?$$

Viime niidi K-630 peale, kus niidi all D-skaalal on kuupjuure väärtus, mida (D- ja C-skaalal) jagame enne arvuga 24,5 ja siis korrutame arvuga 504. Korrutamisel tuleb teha keele ülekanne. Lõppresultaadi tüvenumbrid on 1—7—6—4. Tegureid jämedalt ümardades $\left(\frac{50 \cdot 0,08}{2} = 2\right)$ näeme, et suurusjärk on +1. Seega

$$\frac{504\sqrt[3]{0,00063}}{24,5} = 1,764.$$

Näide 12. 2,08 $\sqrt[3]{\frac{0,0082}{35,5}} = ?$

Siin viime niidi K-35'5 peale, kus niidi all D-skaalal esineva kuupjuure väärtusega tuleb jagada arv 2,08. Selleks lükkame C-208 niidi alla, kus D-10 kohal C-skaalal esineb nende jagatis, mida tuleb korrutada kuupjuurega $\sqrt[3]{0,0082}$. Selleks viime niidi K-8'2 peale, kus niidi all D-skaalal on arvu 0,0082 kuupjuur ja selle korrutise eelmise jagatisega loeme niidi alt C-skaalal, kus

esinevad tüvenumbrid 1—2—7—7. Antud avaldise suurusjärgu määrame tegurite jämedalt ümardamise teel: $2 \sqrt[3]{\frac{0,008}{40}} = 2 \sqrt[3]{0,0002} \approx 2 \cdot 0,06 = 0,12$. Tähendab

$$2,08 \sqrt[3]{\frac{0,0082}{35,5}} = 0,1277.$$

Näide 13. $\sqrt{60,5} \cdot \sqrt[3]{\frac{0,0035}{5,3}} = ?$

Viime niidi K-5'3 peale, kus niidi all D-skaalal on arvu 5,3 kuupjuure väärtus, millega jagame $\sqrt{60,5}$. Lükkame B-60'5 niidi alla, siis on C-skaalal niidi all arvu 60,5 ruutjuur, mille jagatis kuupjuurega $\sqrt[3]{5,3}$ on D-1 kohal C-skaalal. Et saadud jagatist korrutada kuupjuurega $\sqrt[3]{0,0035}$, selleks viime niidi K-3'5 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on selle kuupjuure väärtus, mille korrutis eelmise jagatisega on niidi all C-skaalal. Seal esinevad lõppresultaadi tüvenumbrid 6—7—7. Antud avaldise tegureid jämedalt ümardades ($\sqrt{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{0,005}{5}} = 8 \cdot \sqrt[3]{0,001} = 8 \cdot 0,1 = 0,8$), saame suurusjärgu 0. Seega

$$\sqrt{60,5} \cdot \sqrt[3]{\frac{0,0035}{5,3}} = 0,677.$$

Harjutusi.

- | | |
|--|--|
| 1) $(0,31 \cdot 5,15)^3 = ?$ | 11) $\frac{0,105}{\sqrt{10,5}} = ?$ |
| 2) $(64,5 \cdot 0,0422)^3 = ?$ | 12) $\frac{10,5}{\sqrt[3]{0,105}} = ?$ |
| 3) $\left(\frac{33,3}{38,5}\right)^3 = ?$ | 13) $3,65 \sqrt[3]{1,12^2} = ?$ |
| 4) $\left(\frac{0,802}{1,055}\right)^3 = ?$ | 14) $0,57 \sqrt[3]{0,91^2} = ?$ |
| 5) $\left(\frac{0,144 \cdot 20,6}{5,02}\right)^3 = ?$ | 15) $\frac{\sqrt{11,2^2}}{3,65} = ?$ |
| 6) $\left(\frac{73 \cdot 0,0069}{0,0904}\right)^3 = ?$ | 16) $\frac{\sqrt[3]{0,141^2}}{0,0426} = ?$ |
| 7) $6,4 \sqrt[3]{0,234} = ?$ | 17) $\frac{15,9}{\sqrt{0,093^2}} = ?$ |
| 8) $12,6 \sqrt[3]{0,0082} = ?$ | 18) $\frac{0,0707}{\sqrt[3]{0,00043^2}} = ?$ |
| 9) $\frac{\sqrt{14,7}}{0,555} = ?$ | |
| 10) $\frac{\sqrt[3]{0,0008}}{0,606} = ?$ | |

$$19) \sqrt{2,4} \cdot \sqrt[3]{5,5} = ?$$

$$20) \sqrt{0,42} \cdot \sqrt[3]{55} = ?$$

$$21) \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{14,4}} = ?$$

$$22) \frac{\sqrt[3]{0,08}}{\sqrt{3,18}} = ?$$

$$23) \frac{\sqrt{0,53}}{\sqrt[3]{12,5}} = ?$$

$$24) \frac{\sqrt[3]{13,6}}{\sqrt{0,81}} = ?$$

$$25) \frac{\sqrt[3]{3,05} \sqrt{5,6}}{1,11} = ?$$

$$26) \frac{0,152 \sqrt[3]{41,5}}{0,78} = ?$$

$$27) 3,82 \sqrt[3]{\frac{8,6}{6,7}} = ?$$

$$28) 0,453 \sqrt[3]{\frac{23,5}{3,42}} = ?$$

$$29) \sqrt{15,4} \cdot \sqrt[3]{\frac{63}{8,55}} = ?$$

$$30) \sqrt{0,138} \cdot \sqrt[3]{\frac{2,74}{1,52}} = ?$$

[Vastused. 1) 4,07. 2) 20,1. 3) 0,647. 4) 0,439. 5) 0,206.
6) 1,73. 7) 3,94. 8) 2,54. 9) 4,42. 10) 0,153. 11) 0,048. 12) 22,3.
13) 3,94. 14) 0,535. 15) 1,37. 16) 6,35. 17) 77,4. 18) 12,4. 19) 2,73.
20) 2,46. 21) 2,09. 22) 0,242. 23) 0,314. 24) 3,95. 25) 4,88.
26) 0,675. 27) 4,15. 28) 0,861. 29) 7,64. 30) 0,452.]

§ 9. GEOMEETRILISI ARVUTUSI.

1. Arvutuslükati abil võime leida kiiremini kui hariliku arvutamisega ringjoone pikkuse, ringi pindala ja pöördkehade (silinder, koonus, kera) pind- ning ruumala. Resultaatide leidmise kiirendamiseks tuleb vastavad geomeetrilised valemid ümber moodustada, väljendades viimaseid diameetri (mitte raadiuse) kaudu ning C- ja D-skaalal märgitud suuruse (joon. III ja IV)

$$c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,1284$$

või suuruse

$$c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = c\sqrt{10} = 3,568$$

kaudu.

Ringjoone pikkust, silindri, koonuse ja kera pindala on kohasem leida diameetri kaudu, sest ka igapäevases elus rakendatakse mõõtmistel mitte raadiust, vaid diameetrit. Seega, kui ringi või kera diameeter on d , silindri kõrgus on h ja koonuse moodustaja on l , siis

$$\text{ringjoone pikkus} = \pi d,$$

$$\text{silindri külgpindala} = \pi dh,$$

$$\text{koonuse külgpindala} = \pi d \frac{l}{2},$$

$$\text{kera pindala} = \pi d^2.$$

Ringi pindala valemi (πr^2) võime ümber moodustada järgmiselt:

$$\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \right)^2 = \left(\frac{d}{c} \right)^2.$$

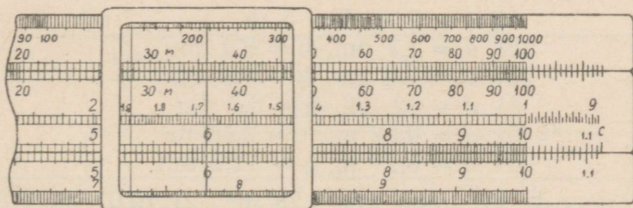
Näide 1. Leida ringi pindala, mille diameeter on 3 cm.

Paigutame C-skaalal oleva tähe c D-3 kohale ja loeme jagatise ruudu $\left(\frac{3}{c}\right)^2$ B-1 kohalt A-skaalal, s. o. 7,07. Samuti võime tähe c_1 paigutada D-3 kohale ja lugeda jagatise ruudu $\left(\frac{3}{c_1}\right)^2$ B-10 kohalt A-skaalal. Järelikult, kui ringi diameeter on 3 cm, siis pindala

$$S = 7,07 \text{ cm}^2.$$

Kui paigutame C-c D-1 kohale, siis A- ja C-skaala moodustavad diameetri ja ringi pindala suhtes vastastikuse tabeli: niidi all C-skaalal asuvad siis ringide diameetrid ja niidi all A-skaalal vastavad ringide pindalad.

Arvutuslükati märkija klaasil esineb tihti kolm niidi (joon. 16), millede kaugus üksteisest on $c = 1,128$. Seepärast, kui on antud ringi diameeter, siis ringi pindala leidmiseks pole tarvis nihutada arvutuslükati keelt, vaid teotseda ainult märkijaga. Kui ringi diameeter on näiteks 3, siis paigutame märkija teise (keskmise) niidi D-3 peale ja loeme $\left(\frac{3}{c}\right)^2$ väärtuse A-skaalal esimese niidi alt, s. o. 7,07; või paigutame märkija kolmanda niidi D-3 peale ja loeme otsitava pindala väärtuse A-skaalal teise niidi alt, mis annab sama tulemuse.



Joon. 16.

Kui aga ringi diameeter d on vahemikus $1 < d < c$, siis võime ringi pindala otsimisel märkijaga (ilma arvutuslükati keele lüketa) teotseda ainult siis, kui skaalade otstes on eespool (§ 4, p. 1) kirjeldatud lisakriipsud (joon. 12 ja V).

Harjutusi. Leida ringi pindala, kui ringi diameeter on: 2 cm; 8 cm; 4,2 cm; 45 cm; 0,34 dm; 0,085 m.

[Vastused. 3,14 cm²; 50,3 cm²; 13,85 cm²; 1590 cm³; 0,0908 dm²; 0,0567 m².]

Leida ringi diameetri pikkus, kui ringi pindala on: 8,2 cm²; 0,6 dm²; 0,036 m²; 63 cm².

[Vastused. 3,23 cm; 0,874 dm; 0,214 m; 8,96 cm.]

2. Silindri, koonuse ja kera ruumala leidmiseks kasutatakse arvutuslükatiga töötamisel järgmisi ümbermoodustatud valemeid:

$$\text{silindri ruumala} = \pi r^2 h = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot h,$$

$$\text{koonuse ruumala} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{h}{3},$$

$$\text{kera ruumala} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4r}{3} \pi r^2 = \frac{4d}{6} \left(\frac{d}{c}\right)^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{d}{1,5}.$$

Näide 2. Leida silindri ruumala, mille diameeter on 3,4 dm ja kõrgus 8,2 dm.

Paigutame C-c D-34 kohale ja lükkame niidi B-8'2 peale. Otsitav silindri ruumala väärtus on A-skaalal niidi all, s. o. 74,4 dm³.

Näide 3. Leida koonuse ruumala, mille põhja diameeter on 1,84 m ja kõrgus 3,9 m.

Siin võime võtta $\frac{h}{3} = 1,3$ ja teotseda sarnaselt eelmise näitega. Saame 3,46 m³.

Näide 4. Leida kera ruumala, mille raadius on 1,3 cm.

Kera diameeter on 2,6 cm. Paigutame C-c D-26 kohale; viime niidi B-1 peale ja lükkame B-1'5 niidi alla; lõpuks viime niidi B-2'6 peale ja loeme kera ruumala väärtuse A-skaalal niidi alt, s. o. 92,0 cm³.

Harjutusi. Leida silindri ja koonuse ruumala, kui

- 1) $d = 2$ m, $h = 6$ m
- 2) $d = 1,7$ dm, $h = 8,4$ dm
- 3) $d = 7,5$ cm, $h = 9,2$ cm
- 4) $d = 32$ cm, $h = 6,6$ dm
- 5) $d = 0,52$ m, $h = 0,46$ m
- 6) $d = 0,27$ m, $h = 12,6$ dm.

[Vastused. 1) 18,85 m³; 6,28 m³. 2) 19,07 dm³; 6,36 dm³. 3) 406 cm³; 135,4 cm³; 4) 53,1 dm³; 17,7 dm³; 5) 0,0977 m³; 0,0326 m³; 6) 72,1 dm³; 24,0 dm³.]

Leida kera ruumala, kui

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| 1) $d = 4$ dm | 4) $d = 24$ cm | 7) $d = 0,14$ m |
| 2) $d = 5,2$ dm | 5) $d = 38,5$ cm | 8) $r = 0,35$ m |
| 3) $d = 1,66$ dm | 6) $d = 562$ cm | 9) $r = 0,027$ m. |

[Vastused. 1) 33,8 dm³. 2) 73,6 dm³. 3) 2,39 dm³. 4) 7,24 dm³. 5) 29,9 dm³. 6) 93,0 m³. 7) 1,436 dm³. 8) 22,4 dm³. 9) 103,1 cm³.]

3. Kuna paljude geomeetriliste arvutuste puhul esineb sageli nii π pöördväärtus $\frac{1}{\pi}$ kui ka veerandväärtus $\frac{\pi}{4}$, siis on mõnede arvutuslükatite A- ja B-skaala teisel logaritmilisel ühikul pöördväärtus tähistatud tähega M (joon. 16 ja V), s. o.

$$M = \frac{1}{\pi} = 0,3183,$$

ja π veerandväärtus (ilma tähiseta) kriipsuna (joon. 16, IV ja V)

$$\frac{\pi}{4} = 0,7854.$$

Need väärtused on kantud A- ja B-skaala teisele logaritmilisele ühikule selleks, et nende väärtuste ruutjuure võtmine toimub A- või B-skaala teiselt logaritmiliselt ühikult.

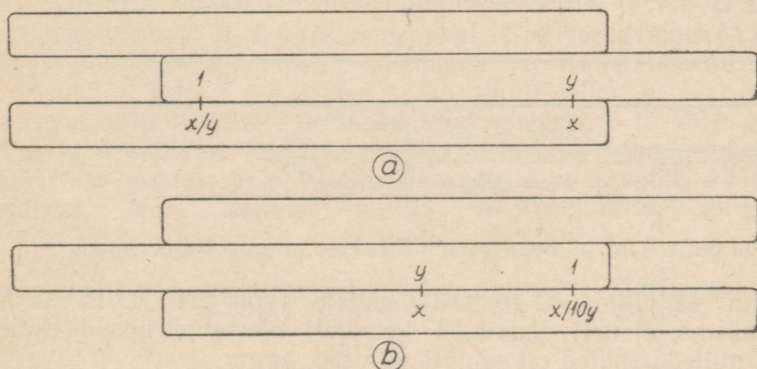
Peale nimetatud tähiste esineb mõnede arvutuslükatite C-skaalal ka ruutjuure tähis $\sqrt{\quad}$, mis tähendab

$$\sqrt{2g} = 4,429.$$

Selle arvuga tuleb sageli tegemist teha hüdroehituste arvutamisel.

§ 10. VÕRDED.

1. Arvude x ja y jagamist D- ja C-skaalaga näitavad joonised 17, a ja b , kus murru $\frac{x}{y}$ lugeja x on võetud D-skaalal ja nimetaja y on võetud C-skaalal. Kuna x ja y on mistahes arvud vastavalt D- ja C-skaalal, siis järeldub sellest, et neil skaaladel on kohakuti



Joon. 17.

seisvate arvude suhted võrdsed, vaatamata sellele, kas arvutuslükati keel on lükatud paremale või vasakule. Kui ühele või teisele poole lükatud keele puhul D- ja C-skaalal võtta näiteks

kaks kohakuti asetsevat arvupaari (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) , siis jooniselt 18 nähtub, et

$$\lg x_2 - \lg x_1 = \lg y_2 - \lg y_1,$$

millest saame kohakuti olevate arvude konstantse suhte

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

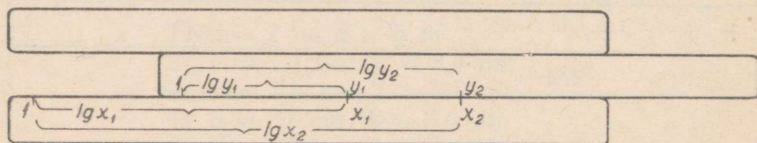
Sellest nähtub nüüd, et kui D-skaalal võtta ja märkida arvud x_1, x_2, \dots, x_n ja nendega kohakuti C-skaalal vastavalt arvud y_1, y_2, \dots, y_n , siis kujutavad nende suhted ikka konstantset suurst, s. o.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \text{konst.}$$

Kui paigutame näiteks C-1 D-14 kohale, siis näeme, et D- ja C-skaalal kohakuti olevad kriipsud esitavad arve, millede suhted on võrdsed, nagu

$$\frac{1,4}{1} = \frac{3,5}{2,5} = \frac{5,95}{4,25} = \frac{8,4}{6} = \frac{9,45}{6,75} = \frac{10}{7,14}.$$

Need suhted kujutavad võrdseid murdarve, kus murrukriipsuks võime lugeda D- ja C-skaala vahelist pilu, kusjuures D-skaalal esinevad murdude lugejad ja C-skaalal murdude nimetajad, või ümberpöörduvalt: paigutades C-14 D-1 kohale, saame samad suhted, kuid nüüd esinevad murdude lugejad C-skaalal ja nimetajad D-skaalal. Käesoleval juhul esitatud suhete ehk murdude suurusjärk (välja arvatud viimane äärmine suhe $\frac{10}{7,14}$) on võrdne lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahega + 1, sest siin tuleb arvestada tähist Q + 1.



Joon. 18.

Kui paigutame C-10 D-14 kohale (või C-14 D-10 kohale), siis näeme, et neil skaaladel kohakuti olevad kriipsud esitavad arve, millede suhted on samuti võrdsed, nagu

$$\frac{1,4}{10} = \frac{1,31}{9,36} = \frac{1,26}{9} = \frac{1,21}{8,64} = \frac{1,15}{8,22} = \frac{1}{7,14}.$$

Nende suhete ehk murdude suurusjärk (välja arvatud esimene äärmine suhe $\frac{1,4}{10}$) on võrdne lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahega.

Analoogiliselt võime teostada võrdsete suhete määramist A- ja B-skaalal, lugedes A-skaalal märgitud arvud murdude lugejaiks ja B-skaalal eelmistega kohakuti olevad arvud murdude nimetajaiks, või ümberpöörduvalt. Kuid siin tuleb leppida väiksema täpsusega.

Eespool-öeldu põhjal võime võrrete puhul esitada järgmise juhise: arvutuslükati keele ühe ja sama asendi puhul D- ja C-skaalal (või A- ja B-skaalal) kohakuti asetsevate mistahes arvude x ja y suurusjärkude vahe on ikka üks ja sama, välja arvatud ainult juhtum, millele on viidatud § 5-nda p. 2 märkuses, s. o. suhete $\frac{x}{10^k}$ ja $\frac{10^k}{y}$ puhul, kus $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, kusjuures nende suhete puhul x -i või y -i suurusjärk tuleb arvutada eraldi.

Antud juhise järgi ilmneb otseselt, et kui võrdsetes murdudes

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$$

lugejad x_1, x_2, \dots, x_n on ühe ja sama suurusjärguga arvud, siis on arvutuslükati keele ühe ja sama asendi puhul ka nimetajad y_1, y_2, \dots, y_n ühe ja sama suurusjärguga arvud, ja ümberpöörduvalt.

Kõiki ülesandeid, milledes esinevad võrded, saame lahendada arvutuslükati abil kiiresti ja lihtsalt, peamiselt keele ühe asetusga. Üksikuil juhtumeil tuleb teha ka keele ülekanne.

Võrrete arvutamine ei ole sisuliselt muud kui funktsiooni $y = \frac{a}{b} x$ nende väärtuste otsimine, mis vastavad x -i antud väärtustele konstantsete a ja b väärtuste puhul. See funktsioon kujutab võrdelist sõltuvust, kus tuleb rakendada seerialist korrutamist, millest oli jutt juba § 4-s. Vahe seisab ainult selles, et seal esines võrdetegur antud kindla suurusena, kuid siin esineb ta kahe antud arvu a ja b suhtena. Funktsiooni y väärtuse arvutamisel (antud x -i väärtuse puhul) pole vajadust arvude a ja b suhte väärtuse leidmiseks, vaid esitame antud funktsionaalse sõltuvuse $y = \frac{a}{b} x$ võrde kujul nõnda, et antud suurused a ja b moodustaksid võrde ühe osa ja otsitav y -i väärtus antud x -i väärtusega teise osa, s. o.

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}.$$

Paigutades nüüd D- a C- b kohale (või A- a B- b kohale), viime märkija niidi C- x (või B- x) peale ja loeme niidi alt D-skaalal (või A-skaalal) otsitava y -i väärtuse.

Kui lugeda C-skaalat murdude lugejate skaalaks ja D-skaalat nimetajate skaalaks, siis tuleks esitatud võrde puhul paigutada

C-a D-b kohale ja viia märkija niit D-x peale ning lugeda niidi alt C-skaalal otsitava y -i väärtus. Näiteks, kui esineb järgmine võrre

$$\frac{y}{0,000514} = \frac{1680}{0,0304},$$

siis paigutame C-168 D-304 kohale ja viime niidi D-514 peale, kus nüüd niidi all C-skaalal esinevad y -i tüvenumbrid 2—8—5. Kuna teise murru lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahe on +5, siis peab ka esimese murru lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahe olema +5, millest järeldub, et y -i suurusjärk on +2. Seega

$$y = 28,5.$$

N ä i d e 1. Leida x_1, x_2, x_3 ja x_4 , kui

$$\frac{1}{2,5} = \frac{x_1}{4,2} = \frac{x_2}{5,5} = \frac{x_3}{7,8} = \frac{x_4}{9,7}.$$

Loeme D-skaala lugejate skaalaks ja C-skaala nimetajate skaalaks. Paigutame C-25 D-1 kohale. Viime märkija niidi järkjärgult C-skaalal murdude nimetajate 4,2; 5,5; 7,8 ja 9,7 peale ning loeme igakord niidi alt D-skaalal vastavad murdude lugejad

$$x_1 = 1,680; x_2 = 2,20; x_3 = 3,12; x_4 = 3,88.$$

Kuna siin esimese murru lugeja ja kõigi murdude nimetajate suurusjärgud on +1, siis on ka otsitavate lugejate x_1, x_2, x_3 ja x_4 suurusjärgud +1.

N ä i d e 2. Leida x_1, x_2 ja x_3 , kui

$$\frac{x_1}{4,61} = \frac{x_2}{0,0208} = \frac{x_3}{136,5} = \frac{25,6}{18,3}.$$

Kuna siin viimase murru lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahe on 0, siis peab ka eelmiste murdude lugeja ja nimetaja suurusjärkude vahe olema 0. Seega on esimese murru lugeja suurusjärk +1, teise murru lugeja suurusjärk -1 ja kolmanda murru lugeja suurusmärk +3.

Paigutame C-183 ja D-256 kohale ja viime niidi järkjärgult C-461, C-208 ja C-1365 peale ning loeme igakord niidi alt D-skaalal otsitavad x_1, x_2 ja x_3 väärtused. Saame (arvestades leitud suurusjärke):

$$x_1 = 6,45; x_2 = 0,0291; x_3 = 191,0.$$

N ä i d e 3. Leida y_1, y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{22,2}{y_1} = \frac{30,8}{y_2} = \frac{58,5}{y_3} = 15,2.$$

Siin võime arvu 15,2 vaadelda kui murdu $\frac{15,2}{1}$, mille lugejaks on 15,2. Paigutades nüüd C-1 D-152 kohale, loeme niidiga D-skaalal esinevate murdude lugejate 22,2; 30,8 ja 58,5 kohalt C-skaalal murdude vastavad nimetajad, millede suurusjärgud on +1, s. o.

$$y_1 = 1,461; y_2 = 2,03; y_3 = 3,85.$$

N ä i d e 4. 4,35 kg kauba eest maksti 58 rbl. Arvutada esiteks, mitu kg seda kaupa saab osta 28 rbl. eest ja mitu kg 32 rbl. 50 kop. eest, ning teiseks, kuipalju maksab 13,2 kg ja 5,55 kg tähendatud kaupa.

Kuna kilogrammide arv x on võrdeline kauba eest makstava raha summaga y , siis saame seega otsitavate suuruste arvutamiseks esitada järgmiste suhete rea

$$\frac{4,35}{58} = \frac{x_1}{28} = \frac{x_2}{32,5} = \frac{13,2}{y_1} = \frac{5,55}{y_2}.$$

Kuna siin esimese murru lugeja ja nimetaja suurusjärgude vahe on -1 , siis peab ka järgnevate murdude lugeja ja nimetaja suurusjärgude vahe olema -1 . Järelikult on x_1 suurusjärg $+1$, x_2 suurusjärg $+1$, y_1 suurusjärg $+3$ ja y_2 suurusjärg $+1$.

Paigutame C-58 D-435 kohale. Esimese ja teise murru lugejate x_1 ja x_2 leidmiseks viime niidi C-28 peale ja siis C-325 peale, millede kohal niidi all D-skaalal esinevad esimese murru lugeja tüvenumbrid 2—1—0 ja teise murru lugeja tüvenumbrid 2—4—4. Kolmanda ja neljanda murru nimetajate y_1 ja y_2 leidmiseks viime niidi D-132 peale ja siis D-555 peale, millede kohal niidi all C-skaalal esinevad nimetajate y_1 ja y_2 vastavad tüvenumbrid 1—7—6 ja 7—4—0. Seega

$$x_1 = 2,10 \text{ kg}; x_2 = 2,44 \text{ kg}; y_1 = 176 \text{ rbl.}; y_2 = 74,0 \text{ rbl.}$$

N ä i d e 5. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{0,32}{1,88} = \frac{0,25}{y_1} = \frac{0,15}{y_2} = \frac{0,64}{y_3}.$$

Viime niidi D-32 peale ja toome C-188 niidi alla. Nimetajate y_1 ja y_3 väärtused leiame niidiga C-skaalal D-25 ja D-64 kohalt, s. o. $y_1 = 1,469$ ja $y_3 = 3,76$. Nimetaja y_2 leidmiseks tuleb teha keele ülekanne. Siis viime niidi D-15 peale, kus nüüd niidi all C-skaalal on y_2 väärtus, s. o. $y_2 = 0,881$. Seega

$$y_1 = 1,469; y_2 = 0,881; y_3 = 3,76.$$

Nagu esitatud näitest näha, tuleb võrrete arvutamise protsessis teha mõnikord ka keele ülekanne. Niisugusel juhul arvutame ja kirjutame üles kõik otsitavad suurused, mida saab leida enne keele üleviimist, ja alles siis viime keele teisele poole ülejäänud otsitavate suuruste leidmiseks.

H a r j u t u s i.

1) Leida x_1 , x_2 ja x_3 , kui

$$\frac{x_1}{14} = \frac{x_2}{32} = \frac{x_3}{51} = 0,105.$$

2) leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{0,82}{y_1} = \frac{0,63}{y_2} = \frac{0,47}{y_3} = 0,76.$$

3) Leida x_1, x_2, y_1 ja y_2 kui

$$\frac{x_1}{1,82} = \frac{x_2}{0,47} = \frac{18,5}{y_1} = \frac{3,88}{y_2} = 5,15.$$

4) Leida x_1, x_2, y_1 ja y_2 , kui

$$\frac{2,51}{0,18} = \frac{x_1}{4,14} = \frac{x_2}{0,07} = \frac{0,61}{y_1} = \frac{46,9}{y_2}.$$

[Vastused.

1) $x_1 = 1,470; x_2 = 3,36; x_3 = 5,36.$

2) $y_1 = 1,079; y_2 = 0,829; y_3 = 0,618.$

3) $x_1 = 9,37; x_2 = 2,42; y_1 = 3,59; y_2 = 0,753.$

4) $x_1 = 57,7; x_2 = 0,976; y_1 = 0,0437; y_2 = 3,36.]$

2. Edasi vaatleme suhteid, mida võimaldab C-skaala koos A- ja K-skaalaga. Tähistame A-skaala arve tähega z ja K-skaala arve tähega u . Kui D-skaala arvud x_1, x_2, \dots, x_n on A-skaala vastavate arvude z_1, z_2, \dots, z_n ruutjuured, s. o.

$$x_1 = \sqrt{z_1}, x_2 = \sqrt{z_2}, \dots, x_n = \sqrt{z_n},$$

ja K-skaala vastavate arvude u_1, u_2, \dots, u_n kuupjuured, s. o.

$$x_1 = \sqrt[3]{u_1}, x_2 = \sqrt[3]{u_2}, \dots, x_n = \sqrt[3]{u_n},$$

siis — asendades need D-skaala arvud võrdsete A-skaala arvude ruutjuurtega või K-skaala arvude kuupjuurtega — saame A-skaala arvude ruutjuurte ja K-skaala arvude kuupjuurte suhted C-skaala vastavate arvudega

$$\frac{\sqrt{z_1}}{y_1} = \frac{\sqrt{z_2}}{y_2} = \dots = \frac{\sqrt{z_n}}{y_n}$$
$$\frac{\sqrt[3]{u_1}}{y_1} = \frac{\sqrt[3]{u_2}}{y_2} = \dots = \frac{\sqrt[3]{u_n}}{y_n}.$$

Tõstes esimesed suhted ruutu ja teised suhted kuupi, saame esimesel juhul A-skaala arvude suhted C-skaala vastavate arvude ruutudega ja teisel juhul K-skaala arvude suhted C-skaala vastavate arvude kuupidega, s. o.

$$\frac{z_1}{y_1^2} = \frac{z_2}{y_2^2} = \dots = \frac{z_n}{y_n^2}$$
$$\frac{u_1}{y_1^3} = \frac{u_2}{y_2^3} = \dots = \frac{u_n}{y_n^3}.$$

Kasutades nii eelmisi kui ka viimaseid võrdeid, võime arvutuslühikati keele ühe lühkega leida arve, mis on võrdelised antud arvude ruut- või kuupjuurtega ning samuti antud arvude ruutude või kuupidega, ja ümberpöörduvalt. Otsitavate arvude suurusjärke on

siin kõige lihtsam määrata silma järgi, sest säärase proportsionaalsete arvutuste puhul ei tekita see erilisi raskusi.

Ka siin tuleb teha mõnikord keele ülekanne. Sel juhul tuleb enne märkida ja välja kirjutada kõik need resultaadid, mida on võimalik leida enne keele ülekannet ja siis teha keele ülekanne ning märkida ja välja kirjutada ülejäänud resultaadid.

Näide 6. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{\sqrt{5}}{3,6} = \frac{\sqrt{8}}{y_1} = \frac{\sqrt{13}}{y_2} = \frac{\sqrt{37}}{y_3}.$$

Viime niidi A-5 peale ja toome C-36 niidi alla, kus nüüd jagatis on C-10 kohal D-skaalal. Sama jagatise saame, kui viime niidi järkjärgult A-8, A-13 ja A-37 peale, kusjuures nende ruutjuured (kui jagatavad) on D-skaalal ja nende ruutjuurtega kohakuti C-skaalal on vastavad jagajad y_1 , y_2 ja y_3 , millede suurusjärk on +1, s. o.

$$y_1=4,55; \quad y_2=5,80; \quad y_3=9,79.$$

Näide 7. Leida a ja b , kui

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{1,12}{\sqrt{3,4}}.$$

Viime niidi K-3'4 peale ja toome C-112 niidi alla, mille jagatis on D-10 kohal C-skaalal. Sama jagatise saame, kui viime niidi järkjärgult K-8'8 ja K-26'5 peale, kusjuures nende kuupjuured (kui jagajad) on D-skaalal ja nende kuupjuurtega kohakuti C-skaalal on vastavad jagatavad a ja b , millede suurusjärk on +1, s. o.

$$a=1,538; \quad b=2,22.$$

Näide 8. Leida z_1 , z_2 ja z_3 , kui

$$\frac{2,02^2}{6,55} = \frac{1,63^2}{z_1} = \frac{1,53^2}{z_2} = \frac{1,13^2}{z_3}.$$

Viime niidi A-6'55 peale ja toome C-202 niidi alla, mille ruut on niidi all B-skaalal ja selle jagatis 6,55-ga on A-100 kohal B-skaalal. Sama jagatise saame, kui viime niidi järkjärgult C-163, C-153 ja C-113 peale, kusjuures nende ruudud (kui jagatavad) on B-skaalal ja nende ruutudega kohakuti A-skaalal on vastavad jagajad z_1 , z_2 ja z_3 , millede suurusjärk on +1, s. o.

$$z_1=4,26; \quad z_2=3,76; \quad z_3=2,05.$$

Näide 9. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{2,5}{2,6^3} = \frac{3,7}{y_1^3} = \frac{13,4}{y_2^3} = \frac{88}{y_3^3}.$$

Paigutame niidi K-2'5 peale ja viime C-26 niidi alla. Viime niidi järkjärgult K-3'7, K-13'4 ja K-88 peale ja loeme niidi alt C-skaalal vastavad y_1 , y_2 ja y_3 väärtused, s. o.

$$y_1=2,96; \quad y_2=4,55; \quad y_3=8,52.$$

Võttes aluseks nelja viimase näite arvutuskäiku, võime võrrete abil arvutuslükati keele ühe lükkega teostada samuti kombineeritud arvutusi, nagu näiteks avaldiste

$$x = a \left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad x = a \left(\frac{b}{c}\right)^3, \quad x = a \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad x = a \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \quad x = \sqrt{a} \sqrt[3]{\frac{b}{c}}$$

puhul, mida saame võrrete kujul esitada järgmiselt:

$$\frac{x}{b^2} = \frac{a}{c^2}, \quad \frac{x}{b^3} = \frac{a}{c^3}, \quad \frac{x}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{c}}, \quad \frac{x}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{c}}, \quad \frac{x}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{c}}$$

kusjuures viimase võrde puhul viime niidi K-c peale ja lükeme B-a niidi alla ning siis viime niidi K-b peale ja loeme niidi alt C-skaalal x-i väärtuse.

Harjutusi.

- 1) Leida z_1 , z_2 ja z_3 , kui

$$\frac{\sqrt{12}}{2,8} = \frac{\sqrt{z_1}}{4,2} = \frac{\sqrt{z_2}}{6,7} = \frac{\sqrt{z_3}}{7,9}$$

- 2) Leida u_1 , u_2 ja u_3 , kui

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{1,17} = \frac{\sqrt[3]{u_1}}{2,47} = \frac{\sqrt[3]{u_2}}{4,92} = \frac{\sqrt[3]{u_3}}{5,35}$$

- 3) Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{2,56}{y_1^2} = \frac{4,03}{y_2^2} = \frac{7,75}{y_3^2} = 1,84$$

- 4) Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{26}{y_1^3} = \frac{40}{y_2^3} = \frac{77}{y_3^3} = \frac{18}{2^3}$$

- 5) Leida y_1 , y_2 , y_3 , y_4 ja y_5 , kui

$$\frac{9}{6,35^2} = \frac{8}{y_1^2} = \frac{3}{y_2^2} = \frac{0,5}{y_3^2} = \frac{0,2}{y_4^2} = \frac{0,15}{y_5^2}$$

[Vastused.

- 1) $z_1 = 27,0$; $z_2 = 68,7$; $z_3 = 95,5$.
 2) $u_1 = 66$; $u_2 = 520$; $u_3 = 670$.
 3) $y_1 = 1,18$; $y_2 = 1,48$; $y_3 = 2,05$.
 4) $y_1 = 2,26$; $y_2 = 2,61$; $y_3 = 3,25$.
 5) $y_1 = 5,99$; $y_2 = 3,67$; $y_3 = 1,498$;
 $y_4 = 0,947$; $y_5 = 0,820$.]

§ 11. PÖÖRDSKAALA JA SELLE KASUTAMINE.

1. Arvutuslükatil esineb peale eespool-tähendatud (A, B, C, D, K) skaalade ka kuues, tavaliselt punane skaala, mis asub arvutuslükati keelel B-skaala ja C-skaala vahel (joon. V). See skaala on oma jaotuselt ja pikkuselt sama, mis C- või D-skaala, kuid logaritmilised jaotised esinevad ümberpööratud järjestuses — algavad paremalt poolt skaala otsast ja lähevad vasakule. Selle nn. p ö ö r d s k a a l a — mida nimetame lühidalt E-skaalaks — jaotisi tuleb lugeda samuti paremalt poolt vasakule, nagu näitavad ka skaalal märgitud numbrid. Siin E-1 asub C-10 kohal ja E-10 C-1 kohal.

Kui paigutame märkija niidi C-skaalal (või D-skaalal, kui see on kohakuti C-skaalaga) mingi arvu x peale, siis on niit E-skaalal ühtlasi mingi teise arvu y peal, mis on kohakuti arvuga x (joon. 19). Niisugusel korral on C-skaala osa 1-st kuni x -ni niisama pikk kui E-skaala osa 10-st kuni y -ni, mis ütleb, et

$$\lg x = \lg 10 - \lg y,$$

millest

$$x \cdot y = 10.$$

Sellest näeme, et C-skaala ja E-skaala moodustavad tabeli, mis võimaldab leida arvupaare, millede korrutis on võrdne kümnega, kusjuures tegurite x ja y suurusjärkude summa peab olema võrdne +2-ga. Iga niisugune arvupaar on kohakuti (niidi all) C- ja E-skaalal. Näiteks:

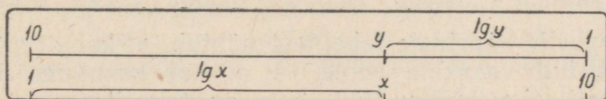
kui C-skaalal $x = 1,1 \quad 2,5 \quad 4 \quad 5 \quad 6,8 \quad 8,55,$
 siis E-skaalal $y = 9,1 \quad 4 \quad 2,5 \quad 2 \quad 1,47 \quad 1,17.$

või

kui C-skaalal $x = 0,11 \quad 0,25 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,68 \quad 0,855,$
 siis E-skaalal $y = 91 \quad 40 \quad 25 \quad 20 \quad 14,7 \quad 11,7$

jne. Nendes tabelites on kohakuti asetsevate arvude korrutis võrdne (või peaaegu võrdne) kümnega. Need arvud võivad olla ka negatiivsed, sest kahe negatiivse arvu korrutis on samuti positiivne.

Märkus. E-skaala puudumisel asendab seda C-skaala, kui vahetada arvutuslükati keele otsad ümber ja paigutada keel teistpidi nõnda, et A-1 oleks C-10 kohal ja C-1 oleks A-100 kohal. Sel juhul moodustavad D- ja C-skaala samasuguse tabeli, nagu D- ja E-skaala.



Joon. 19.

Kui kahe arvu x ja y korrutis ei ole 10, vaid mistahes arv a , siis selleks, et leida neid arvupaare, millede korrutis oleks võrdne

a-ga, lükkame arvutuslükati keelega E-1 D-*a* kohale (enne viime niidi D-*a* peale ja siis E-1 niidi alla). Lükkame niidi vasakule nõnda, et D-skaalal oleks niidi all mingi arv *x*, siis E-skaalal on niidi all mingi teine arv *y* (joon. 20, *a*). Nüüd näeme, et D-skaala osa *x*-st kuni *a*-ni on sama pikk kui E-skaala osa *y*-st kuni 1-ni, mis ütleb, et

$$\lg a - \lg x = \lg y,$$

millest

$$x \cdot y = a.$$

Nii moodustavad D-skaala ja E-skaala samuti tabeli, mis võimaldab leida arvupaare, millede korrutis on mistahes konstantne suurus *a*. See on pöördvõrdeliste suuruste tabel, mida esitab funktsioon $y = \frac{a}{x}$.

Erijuhul, kui $a = 1$, siis

$$x \cdot y = 1 \text{ ehk } y = \frac{1}{x},$$

mis ütleb, et E-skaalal esinevad arvud (võrreldes C-skaalal nendega kohakuti olevate arvudega) kujutavad 10 korda vähendatult C-skaala vastavate arvude pöördväärtusi. Seega moodustavad C- ja E-skaala pöördväärtuste tabeli. Järelikult korrutamine E-skaalal märgitud arvuga kujutab faktiliselt jagamist selle arvu pöördväärtusega, s. o. $x \cdot y = x : \frac{1}{y}$.

Näide 1. $x \cdot y = 5,8$.

Lükkame arvutuslükati keele vasakule ja paigutame (niidi abil) E-1 D-58 kohale. Siis võime D- ja E-skaalalt niidi abil järkjärgult lugeda vastavaid *x*-i ja *y*-i väärtusi. Näiteks:

kui D-skaalal $x = 1$	1,16	1,61	2,4	4,5	5,8,
siis E-skaalal $y = 5,80$	5,00	3,60	2,42	1,289	1.

Nii leiame *x*-i ja *y*-i väärtusi 1-st kuni 5,8-ni, s. o. kui $1 \leq x \leq 5,8$, siis $5,8 \geq y \geq 1$.

Analoogiliselt võime leida *x*-i või *y*-i väärtusi 10-st kuni 58-ni, 100-st kuni 580-ni jne., kui loeme ühe neist teguritest 10, 100 jne. korda suurendatult ning teise vastavalt 10, 100 jne. korda vähendatult, nagu näiteks:

kui D-skaalal $x = 10$	11,6	16,1	24	45	58,
siis E-skaalal $y = 0,580$	0,500	0,360	0,242	0,1289	0,1.

Nende tegurite väärtuste tabelitest nähtub, et kui arvutuslükati keel on lükatud vasakule poole, s. o. kui kasutame E-skaala (parempoolset) alguskriipsu E-1, siis on tegurite suurusjärgude summa ühe võrra suurem tegurite korrutise suurusjärgust.

Kui kahe arvu korrutise *a* puhul paigutaksime E-10 D-*a* kohale ja lükkaksime niidi paremale poole nõnda, et D-skaalal oleks niidi all mingi arv *x* ja sellega kohakuti E-skaalal mingi teine arv

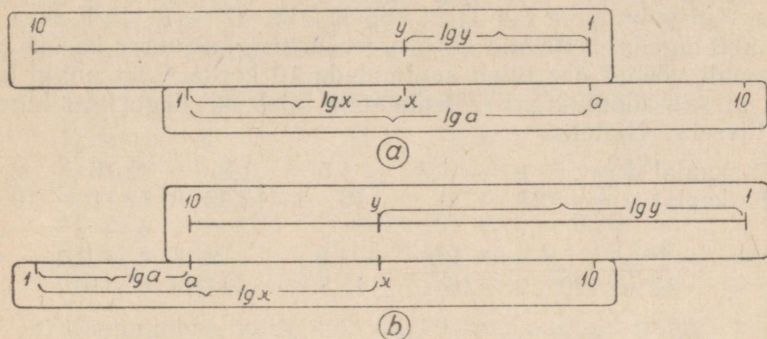
y (joon. 20, b), siis nähtub, et D-skaala osa a -st kuni x -ni on sama pikk kui E-skaala osa y -st kuni 10-ni ning seega

$$\lg x - \lg a = \lg 10 - \lg y,$$

millest

$$\frac{x \cdot y}{10} = a,$$

mis näitab, et üks teguritest — kas D-skaalal x või E-skaalal y — tuleb lugeda 10 korda vähendatult.



Joon. 20.

Tähendab, kui käesolevas näites tahame leida x -i või y -i väärtusi, mis on suuremad 5,8-st ja väiksemad 10-st, siis lükame arvutuslükati keele paremale poole ja paigutame E-10 D-58 kohale. Lugesdes nüüd niidi abil D- ja E-skaalalt vastavaid x -i ja y -i väärtusi, tuleb üks neist teguritest (kas D-skaalal või E-skaalal) lugeda 10 korda vähendatult. Näiteks:

kui D-skaalal $x = 6,3 \quad 6,9 \quad 7,95 \quad 8,35 \quad 9,5$
 siis E-skaalal $y = 0,920 \quad 0,840 \quad 0,729 \quad 0,695 \quad 0,610$

või

$x = 0,63 \quad 0,69 \quad 0,795 \quad 0,835 \quad 0,95,$
 $y = 9,20 \quad 8,40 \quad 7,29 \quad 6,95 \quad 6,10,$

kus esimesel juhul x -i ja y -i väärtused asuvad vahemikes $5,8 < x < 10$ ja $1 > y > 0,58$ ning teisel juhul $0,58 < x < 1$ ja $10 > y > 5,8$.

Samuti võime leida x -i ja y -i väärtusi 58-st kuni 100-ni, 580-st kuni 1000-ni jne., kui loeme ühe neist teguritest, näiteks x -i D-skaalal 10, 100. jne. korda suurendatult ning y -i E-skaalal vastavalt 100, 1000 jne. korda vähendatult, või ümberpöörduvalt, nagu näiteks:

kui D-skaalal $x = 63 \quad 69 \quad 79,5 \quad 83,5 \quad 95,$
 siis E-skaalal $y = 0,0920 \quad 0,0840 \quad 0,0729 \quad 0,0695 \quad 0,0610$

või

$x = 0,063 \quad 0,069 \quad 0,0795 \quad 0,0835 \quad 0,095,$
 $y = 92,0 \quad 84,0 \quad 72,9 \quad 69,5 \quad 61,0,$

kus esimesel juhul $58 < x < 100$ ja $0,1 > y > 0,058$ ning teisel juhul $0,058 < x < 0,1$ ja $100 > y > 58$.

Viimasest neljast tegurite väärtuste tabelist nähtub, et kui arvutslükati keel on lükatud vasakule, s. o. kui kasutame E-skaala (parempoolset) alguskriipsu E-1, siis on tegurite suurusjärkude summa võrdne tegurite korrutise suurusjärguga.

Näide 2. $x \cdot y = -24$.

Selles näites peab üks teguritest (kas x või y) olema negatiivne. Kui paigutame E-1 D-24 kohale, siis võime D- ja E-skaalalt niidi abil lugeda vastavaid x -i ja y -i väärtusi, kusjuures kas D- või E-skaalalt võetud arv tuleb suutendada 10 korda (sest antud korrutis on kahekohaline arv). Peale selle tuleb üks teguritest lugeda negatiivseks. Näiteks:

kui D-skaalal $x = 1 \quad 1,2 \quad 1,5 \quad 1,8 \quad 2,16 \quad 2,4$,
 siis E-skaalal $y = -24 \quad -20 \quad -16 \quad -13,33 \quad -11,11 \quad -10$
 või

$x = -1 \quad -1,2 \quad -1,5 \quad -1,8 \quad -2,16 \quad -2,4$,
 $y = 24 \quad 20 \quad 16 \quad 13,33 \quad 11,11 \quad 10$
 või

$x = 10 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 21,6 \quad 24$,
 $y = -2,4 \quad -2 \quad -1,6 \quad -1,333 \quad -1,111 \quad -1$
 või

$x = -10 \quad -12 \quad -15 \quad -18 \quad -21,6 \quad -24$,
 $y = 2,4 \quad 2 \quad 1,6 \quad 1,333 \quad 1,111 \quad 1$,

millest nähtub ühtlasi, et tegurite suurusjärkude summa on ikka ühe võrra suurem nende tegurite korrutise suurusjärgust.

Kui paigutame aga E-10 D-24 kohale, siis esinevad D- ja E-skaalal niidi all x -i ja y -i väärtused, millede suurusjärkude summa on võrdne antud korrutise suurusjärguga. Ainult üks teguritest tuleb lugeda negatiivseks. Näiteks:

kui D-skaalal $x = 3 \quad 4,5 \quad 6,8 \quad 9,25$,
 siis E-skaalal $y = -8 \quad -5,33 \quad -3,53 \quad -2,59$
 või

$x = -30 \quad -45 \quad -68 \quad -92,5$,
 $y = 0,8 \quad 0,533 \quad 0,353 \quad 0,259$

jne., milledest nähtub otseselt, et tegurite suurusjärkude summa on võrdne nende tegurite korrutise suurusjärguga.

Arvutuslükati keele ühe ja sama asendi puhul D- ja E-skaalal kohakuti asetsevate konstantse korrutisega mistahes arvude x ja y suurusjärkude summa on ikka üks ja sama.

Arvestades arvude korrutise suurusjärku juhust ja ka käesolevaid näiteid, võime konstantse korrutisega tegurites x ja y suurusjärkude suhtes üles seada järgmise juhise:

a) kui arvu a kahe teguri otsimisel arvutuslükati keel jääb vasakule, s. o. E-1 jääb D- a kohale, siis tegurite suurusjärkude summa on võrdne arvu a suurusjärguga pluss üks;

b) kui arvu a kahe teguri otsimisel arvutuslükati keel jääb paremale, s. o. E-10 jääb D- a kohale, siis tegurite suurusjärkude summa on võrdne arvu a suurusjärguga.

Tuleb meeles pidada, et konstantse korrutise puhul toimub tegurite x ja y leidmine D- ja E-skaala abil. Kui aga vaadelda A- ja E-skaalal kohakuti asetsevaid arve, siis sel juhul pole konstantse korrutise reegel kehtiv.

Harjutusi (arvude kaheks teguriks lahutamiseks).

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| 1) $x \cdot y = 4$ | 7) $x \cdot y = -15,2$ |
| 2) $x \cdot y = 6,5$ | 8) $x \cdot y = -242$ |
| 3) $x \cdot y = -5,34$ | 9) $x \cdot y = 0,7$ |
| 4) $x \cdot y = -1,53$ | 10) $x \cdot y = 0,36$ |
| 5) $x \cdot y = 23$ | 11) $x \cdot y = -0,159$ |
| 6) $x \cdot y = 60,6$ | 12) $x \cdot y = -0,045$ |

13) Õhupumbas, mille kolb on 29 cm kaugusel pumba põhjast, on rõhk 1,5 atmosfääri. Milline peaks olema rõhk Boyle-Mariotte'i seaduse järgi, kui kolb on pumba põhjast järgmistel kaugustel: a) 41 cm, b) 33 cm, c) 25 cm, d) 16 cm, e) 10 cm?

[Vastused: a) 1,061 at; b) 1,318 at; c) 1,740 at; d) 2,72 at; e) 4,35 at.]

14) 32 töolist taastasid spordiväljaku 550 tunniga. Mitme tunniga oleksid taastanud sama väljaku: a) 20 töolist, b) 30 töolist, c) 53 töolist, d) 88 töolist, e) 108 töolist?

[Vastused: a) 880 t; b) 587 t; c) 332 t; d) 200 t; e) 163 t.]

2. Analoogiliselt eelnevaga saame arvutuslükati keele ühe asetusega E-skaala abil arvutada x -i ja y -i väärtusi järgmistes avaldistes:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \cdot y &= \text{konst}, & x \cdot y^2 &= \text{konst}, \\ \sqrt[3]{x} \cdot y &= \text{konst}, & x \cdot y^3 &= \text{konst}, \end{aligned}$$

kusjuures x -i ja y -i suurusjärgud määrame kas eespool antud juhise kohaselt või lihtsalt silma järgi.

Kui siinjuures avaldise $\sqrt{x} \cdot y$ konstantne korrutis on negatiivne, siis võivad ainult y -i väärtused olla negatiivsed, ja kui avaldise $x \cdot y^2$ konstantne korrutis on negatiivne, siis võivad ainult x -i väärtused olla negatiivsed. Kahe viimase avaldise puhul, kui nende konstantne korrutis on negatiivne, võivad nii x -i kui ka y -i väärtused olla negatiivsed.

Et leida avaldises $\sqrt{x} \cdot y = a$, kus a on konstantne suurus, x -i ja y -i väärtusi, selleks paigutame E-1 (s. o. C-10) või E-10 (s. o. C-1) D- a kohale ja viime niidi A- x peale, kus nüüd eelmise

arvutuse kohaselt niidi all D-skaalal on \sqrt{x} väärtus ja E-skaalal y -i väärtus. Järelikult tuleb x -i ja y -i väärtusi niidiga märkida ja lugeda vastavalt A- ja E-skaalal.

Näide 3. $\sqrt{x} \cdot y = 15,6$.

Paigutame E-10 (s. o. C-1) D-156 kohale ja märgime niidiga A-skaalal x -le antavad väärtused ning loeme järk-järgult niidi alt E-skaalal vastavad y -i väärtused. Näiteks:

kui A-skaalal $x = 4 \quad 7,5 \quad 16,2 \quad 43 \quad 76$,
 siis E-skaalal $y = 7,8 \quad 5,7 \quad 3,88 \quad 2,38 \quad 1,79$.

Paigutades käesoleva näite puhul E-1 (s. o. C-10) D-156 kohale, saame näiteks:

kui A-skaalal $x = 1,22 \quad 1,94 \quad 2,05 \quad 2,35$,
 siis E-skaalal $y = 14,12 \quad 11,20 \quad 10,90 \quad 10,18$.

Kui $x \cdot y^2 = a$, siis teisendame selle võrduse eelmisega analoogiliseks võrduseks: $\sqrt{x} \cdot y = \sqrt{a}$. Siin paigutame x -i ja y -i väärtuspaaride leidmiseks E-1 või E-10 A- a kohale, kus nüüd C-10 või C-1 kohal D-skaalal on \sqrt{a} väärtus. Edasi toimime analoogiliselt eelmise näitega, märkides niidiga ja lugedes niidi alt A- ja E-skaalal x -i ja y -i väärtused.

Näide 4. $x \cdot y^2 = 80$.

Teisendades saame: $\sqrt{x} \cdot y = \sqrt{80}$. Paigutades E-1 A-80 kohale, on C-10 kohal D-skaalal $\sqrt{80}$ väärtus. Märgime niidiga A-skaalal x -le antavad väärtused ja loeme järk-järgult niidi alt E-skaalal vastavad y -i väärtused. Näiteks:

kui A-skaalal $x = 1,5 \quad 4,1 \quad 8,5 \quad 18,4 \quad 56,4$,
 siis E-skaalal $y = 7,31 \quad 4,42 \quad 3,07 \quad 2,08 \quad 1,19$.

Paigutades siin E-10 A-80 kohale, saame:

kui A-skaalal $x = 85 \quad 90 \quad 95 \quad 100$,
 siis E-skaalal $y = 0,970 \quad 0,943 \quad 0,918 \quad 0,894$.

Kui $\sqrt[3]{x} \cdot y = a$, siis paigutame E-1 või E-10 D- a kohale ja viime niidi K- x peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on $\sqrt[3]{x}$ väärtus ja E-skaalal y -i väärtus. Seega tuleb siin x -i ja y -i väärtusi niidiga märkida ja lugeda vastavalt K- ja E-skaalal.

Näide 5. $\sqrt[3]{x} \cdot y = 38,6$.

Paigutame E-10 D-386 kohale ja märgime niidiga K-skaalal x -le antavad väärtused ning loeme järk-järgult niidi alt E-skaalal vastavad y -i väärtused. Näiteks:

kui K-skaalal $x = 80 \quad 150 \quad 340 \quad 550$,
 siis E-skaalal $y = 8,96 \quad 7,26 \quad 5,53 \quad 4,71$.

Paigutades E-1 D-386 kohale, saame:

kui K-skaalal $x = 2 \quad 5 \quad 17 \quad 51$,
 siis E-skaalal $y = 30,6 \quad 22,6 \quad 15,5 \quad 10,4$.

Kui $x \cdot y^3 = a$, siis teisendame selle võrduse eelmisega sarnane-

vaks: $\sqrt[3]{x} \cdot y = \sqrt[3]{a}$. Paigutame siin E-1 või E-10 K-a kohale, kus nüüd C-10 või C-1 kohal D-skaalal on $\sqrt[3]{a}$ väärtus. Edasi tuleb toimida analoogiliselt eelmise näitega, võttes x -i väärtused K-skaalal ja y -i väärtused E-skaalal.

Näide 6. $x \cdot y^3 = 500$.

Selle võrduse teisendatud kuju on: $\sqrt[3]{x} \cdot y = \sqrt[3]{500}$, mille puhul tuleb E-1 või E-10 paigutada K-500 kohale. Paigutades näiteks E-10 K-500 kohale, saame:

kui K-skaalal $x = 3 \quad 30 \quad 300$,
siis E-skaalal $y = 5,50 \quad 2,56 \quad 1,19$.

Harjutusi (x -i ja y -i väärtuste leidmiseks).

1) $\sqrt{x} \cdot y = 4,8$

7) $\sqrt[3]{x} \cdot y = 3,25$

2) $\sqrt{x} \cdot y = 200$

8) $\sqrt[3]{x} \cdot y = 0,149$

3) $\sqrt{x} \cdot y = -0,62$

9) $\sqrt{x} \cdot y = -80,6$

4) $x \cdot y^2 = 72$

10) $x \cdot y^3 = 642$

5) $x \cdot y^2 = 0,058$

11) $x \cdot y^3 = 0,00842$

6) $x \cdot y^2 = -425$

12) $x \cdot y^3 = -0,0324$.

3. E-skaala kasutamine (nagu osaliselt juba nägime) võimaldab paljude kombineeritud arvutuste lihtsustamist ja ühtlasi ka arvutuste lõppresultaadi täpsustamist. E-skaalat kasutades saame arvutusi teostada vähema keele lükete arvuga kui seda võimaldavad arvutuslükati teised skaalad. Paljudel juhtudel saame arvutusi teostada ainult keele ühe asetusega. Mõnikord tuleb siiski teha ka keele ülekanne.

Siinjuures loetleme vaadeldud juhtudele lisaks mõningaid pöördskaala kasutamise võimalusi, mida saab mitmesuguste avalduste leidmiseks teostada peamiselt arvutuslükati keele ühe asetusega.

Näiteks kahe arvu a ja b korrutamise (nagu eespool juba nägime) võib asendada arvu a ja arvu b pöördväärtuse $\frac{1}{b}$ jagamisega: $a \cdot b = a : \frac{1}{b}$. Viies niidi D-a peale ja E-b niidi alla, loeme korrutise D-skaalal E-1 (s. o. C-10) või E-10 (s. o. C-1) kohalt. Korrutamine — E-skaalat kasutades — on ikkagi lihtsam kui korrutamine põhiskaaladega C ja D, sest siin pole tarvis arvestada ega mõelda, kummale poole arvestuslükati keel tuleb paigutada.

Võrdeid kujul $a \cdot b = c \cdot x$ saame — kasutades E-skaalat — samuti väga lihtsalt lahendada: paigutades E-b D-a kohale ja viies niidi D-c peale, loeme niidi alt E-skaalal x -i väärtuse, või paigutades E-a D-b kohale ja viies niidi E-c peale, loeme niidi alt D-skaalal x -i väärtuse. Sellest nähtub otseselt, et võrdeid on esi-

tatud kujul mugavam arvutada D- ja E-skaala abil, kuid võrdeid kujul $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ arvutame D- ja C-skaala abil.

Eriti kasulik on E-skaala kasutamine mitme teguri korrutamisel, sest siis tuleb teha vähem keele lükkeid kui tavalisel korrutamisel C- ja D-skaalaga. Keele iga üleliigne lüke pikendab arvutamise aega ja suurendab ühtlasi arvutuse lõppresultaadi kõrvalekaldumist õigest resultaadist.

Kolme teguri korrutamist $a \cdot b \cdot c$ saame teostada keele ühe asetusega, kui kaks tegurit korrutada D- ja E-skaalaga ja tulemus korrutada kolmanda teguriga D- ja C-skaalaga, sest $a \cdot b \cdot c = a : \frac{1}{b} \cdot c$. Selleks paigutame E-b D-a kohale ja viime niidi C-a peale, lugedes vastuse niidi alt D-skaalal. Mõnikord tuleb teha muidugi ka keele ülekanne.

N ä i d e 7. $0,66 \cdot 25,8 \cdot 4,37 = ?$

Kasutades E-skaalat, saame korrutamist teostada sääraselt, et arvutuslükati keelega teeme ainult ühe lükke. Paigutame E-66 D-258 kohale (mis on sama kui paigutada E-258 D-66 kohale) ja viime niidi C-437 peale, siis on niidi all D-skaalal korrutis, mille tüvenumbrid on 7—4—4. Korrutise suurusjärk on +2, sest tegureid jämedalt ümardades saame: $0,5 \cdot 20 \cdot 5 = 50$.

Seega

$$0,66 \cdot 25,8 \cdot 4,37 = 74,4.$$

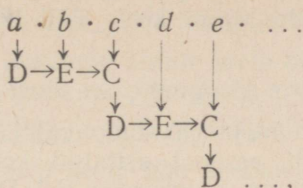
N ä i d e 8. $4,51 \cdot 0,0073 \cdot 58,2 = ?$

Paigutame E-451 D-73 kohale, kus nüüd peaksime viima niidi C-582 peale. Kuna aga siin C-582 langeb D-skaala piirkonnast välja, siis tuleb teha keele ülekanne: viime niidi C-1 peale ja lükame C-10 niidi alla. Nüüd saame D-skaalal C-582 kohalt lugeda korrutise tüvenumbrid 1—9—1—6. Korrutise suurusjärk on +1, sest tegureid jämedalt ümardades saame: $4 \cdot 0,01 \cdot 50 = 2$. Seega

$$4,51 \cdot 0,0073 \cdot 58,2 = 1,916.$$

Kui meil esineb aga rohkem kui kolm tegurit, siis tuleb kaks tegurit korrutada D- ja E-skaala abil ning saadud resultaat korrutada kolmanda teguriga tavalisel viisil (niidiga C-skaala kaudu), seejärel tuleb saadud resultaat korrutada neljanda teguriga E-skaala lükke abil ning see resultaat korrutada viienda teguriga tavalisel viisil (niidiga C-skaala kaudu) jne., kusjuures tegurite järjekord võib olla vabalt valitav. Tegurite korrutamise järjekorda tuleb püüda valida alati nii, et tegurite kolmikute (s. o. esimese kolme teguri, siis nende korrutise ning neljanda ja viienda teguri, siis edasi nende korrutise ning kuuenda ja seitsmenda teguri, jne.) igakordsel korrutamisel tuleks arvutuslükati keelt lükata ainult üks kord.

Tegurite kolmikute korrutamise järjekorra D-, E- ja C-skaalaga võime esitada skemaatiliselt järgmiselt:



kus lõppresultaadi loeme niidi alt D-skaalalt.

Näide 9. $725 \cdot 4,25 \cdot 0,63 \cdot 0,0137 \cdot 0,213 \cdot 30,8 \cdot 0,012 = ?$

Selleks, et iga kolmiku puhul teostada arvutuslükati keelega ainult üks lüke, tuleb käesoleva näite puhul valida tegurite järjekord. Siin võime esimeseks kolmikuks võtta näiteks esimese, teise ja neljanda teguri, teiseks kolmikuks võime võtta saadud korrutise koos kolmanda ja kuuenda teguriga ning kolmandaks kolmikuks viimase korrutise koos viienda ja seitsmenda teguriga. Tähenstatud järjekorras D-, E- ja C-skaalaga korrutades saame lõppresultaadi tüvenumbrid 2—0—9, kusjuures lõppresultaadi suurusjärgu määramiseks kasutame tegurite jämedalt ümardamise võtet. Käesoleva näite puhul võiksime antud tegurite asemel korrutada

$$800 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{10} \cdot 30 \cdot \frac{1}{100} = 1,92,$$

mis näitab, et korrutise suurusjärk on +1. Seega

$$725 \cdot 4,25 \cdot 0,63 \cdot 0,0137 \cdot 0,213 \cdot 30,8 \cdot 0,012 = 2,09.$$

Mitme teguri korrutamisel võime lõppresultaadi suurusjärgu määrata ka tegurite suurusjärkude summa ja kolmikute arvu kaudu järgmiselt: korrutise suurusjärk on võrdne tegurite suurusjärkude summaga, mis on vähenstatud kolmikute arvu võrra (kui kolmikute arvutamisel ei esine keele ülekannet). Nagu näiteks käesoleva näite puhul, kus tegurite suurusjärkude summa on

$$3 + 1 + 0 + (-1) + 0 + 2 + (-1) = +4$$

ning korrutamisel esineb kolm kolmikut, millede arvutamisel ei esine keele ülekandeid, siis lõppresultaadi suurusjärk on seega $4 - 3 = +1$.

Harjutusi.

Lahendada võrded:

- 1) $1,46 \cdot 3,15 = 2,75 \cdot x$; 2) $0,0435 \cdot 725 = 6,08 \cdot x$;
- 3) $5,65 \cdot x = 1,715 \cdot 0,915$.

Leida korrutised:

- 4) $0,151 \cdot 34,2 \cdot 6,66 = ?$
- 5) $4,65 \cdot 0,0111 \cdot 0,0585 = ?$
- 6) $8,32 \cdot 0,041 \cdot 16,4 \cdot 0,333 \cdot 5,23 = ?$
- 7) $123 \cdot 0,321 \cdot 2,35 \cdot 0,0842 \cdot 0,825 = ?$
- 8) $0,00178 \cdot 5,69 \cdot 0,0333 \cdot 4,44 \cdot 7,07 \cdot 222 \cdot 5 = ?$

[Vastused. 1) 1,67. 2) 5,19. 3) 2,78. 4) 34,4. 5) 0,00302. 6) 9,75. 7) 6,45. 8) 117,7.]

E-skaalat kasutades võime keele ühe lükkega arvutada samuti avaldisi

$$(a \cdot b \cdot c)^2, (a \cdot b \cdot c)^3, a \cdot b \cdot \sqrt{c}, a \cdot b \cdot \sqrt[3]{c}.$$

Ruutavaldise $(a \cdot b \cdot c)^2$ ja kuupavaldise $(a \cdot b \cdot c)^3$ väärtused leiame analoogiliselt eespool esitatud kolme teguriga avaldise $a \cdot b \cdot c$ leidmise võttega, paigutades E-b D-a kohale ja viies niidi C-c peale, siis on nende kolme teguri korrutis D-skaalal niidi all ning korrutise ruut on A-skaalal niidi all ja korrutise kuup K-skaalal niidi all.

Avaldisi $a \cdot b \cdot \sqrt{c}$ ja $a \cdot b \cdot \sqrt[3]{c}$ võime esitada järgmiselt: $\sqrt{c} : \frac{1}{b} \cdot a$ ja $\sqrt[3]{c} : \frac{1}{b} \cdot a$, millede arvutamiseks viime esimesel juhul niidi A-c peale ja teisel juhul K-c peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on \sqrt{c} või $\sqrt[3]{c}$ väärtus. Edasi toimime analoogiliselt eespool käsitletud kolme teguri korrutamise võttega, paigutades E-b niidi alla ja viies niidi C-a peale, on otsitava korrutise väärtus D-skaalal niidi all. Esitatud võttega (ühe keele lükkega) leiame näiteks, et

$$0,236 \cdot 5,15 \cdot \sqrt{0,082} = 0,348$$

ja

$$0,236 \cdot 5,15 \cdot \sqrt[3]{0,082} = 0,528,$$

kus korrutiste suurusjärk on 0, sest tegureid jämedalt ümardades näeme, et esimese kahe teguri korrutis on pisut üle ühe, ruutjuure väärtus on ligikaudu 0,3 ja kuupjuure väärtus ligikaudu 0,4.

Harjutusi.

1) $(0,212 \cdot 31,8 \cdot 0,82)^2 = ?$

2) $(4,7 \cdot 0,0612 \cdot 53,3)^3 = ?$

3) $0,715 \cdot 42,2 \cdot \sqrt{0,006} = ?$

4) $98,5 \cdot 0,372 \cdot \sqrt[3]{0,006} = ?$

[Vastused. 1) 30,6. 2) 3600. 3) 2,34. 4) 6,66.]

4. E-skaala kasulikkus ja mugavus seisab peamiselt selles, et me saame arvutuslükatit kasutada mitmesuguste pöördvõrdeliste suuruste tabelina, kusjuures paljudel juhtudel teeme ainult ühe keele lükke.

Kuna kahe arvu jagamine on sama mis jagatava korrutamine jagaja pöördväärtusega, s. o. $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$, siis seega jagamise võtte E-skaala abil tuleneb korrutamise võttest; D-skaalal võetava jagatava kohale paigutatakse C-1 või C-10 ja niit viiakse E-skaalal esineva jagaja peale

ning jagatis loetakse niidi alt D-skaalalt. Seda võtet on kasulik tarvitada eriti siis, kui tuleb üht ja sama arvu jagada mitmesuguste arvudega, s. o. funktsiooni $y = \frac{a}{x}$ -väärtuste leidmiseks, mille puhul teostame ainult keele ühe asetuse ja mõnikord ka keele ülekande. Kuid mitmesuguste arvude korrutamist ja jagamist ühe ja sama arvuga, s. o. funktsioonide $y = a \cdot x$ ja $y = \frac{x}{a}$ väärtuste leidmist, teostame keele ühe asetusega D- ja C-skaala abil sääraselt, nagu oleme seda juba eespool vaadelnud arvude korrutamisel ja jagamisel (§ 4, p. 4 ja § 5, p. 4).

Et leida näiteks funktsiooni $y = \frac{8,95}{x}$ väärtused, kui x -le anda järgmised väärtused: 2,12; 5,35; 9,63 ja 10,4, selleks paigutame C-10 D-895 kohale, mille puhul on võimalik niidiga märkida ja lugeda E-212, E-535 ja E-104 kohalt D-skaalal esimese, teise ja neljanda jagatise väärtused: 4,22; 1,67; 0,86. Kolmanda jagatise leidmiseks tuleb teha keele ülekanne, saades siis E-963 kohalt D-skaalal jagatise väärtuse 0,93.

Samuti saame keele ühe asetusega E-skaala abil arvutada avaldise

$$\frac{a}{b \cdot c}, \quad \frac{a}{b^2}, \quad \frac{a}{b \cdot \sqrt{c}}, \quad \frac{a}{b \cdot \sqrt[3]{c}}, \quad \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}$$

Avaldise $\frac{a}{b \cdot c}$ väärtuse leidmiseks arvutuslükati keele ühe asetusega esitame antud avaldise kujus $\frac{a \cdot \frac{1}{c}}{b}$, kus nüüd a jagame b -ga ja siis korrutame $\frac{1}{c}$ -ga, s. o. paigutame C- b D- a kohale ja viime niidi E- c peale ning loeme antud avaldise väärtuse niidi alt D-skaalal (või viime niidi D- c peale ja loeme antud avaldise väärtuse niidi alt E-skaalal). Või teisiti: paigutame (niidi abil) E- c D- b kohale ja viime niidi D- a peale ning loeme lõppresultaadi niidi alt C-skaalal.

Näide 10. $\frac{0,0714}{38,6 \cdot 0,0412} = ?$

Viime niidi D-714 peale ja C-386 niidi alla. Järgnevalt viime niidi E-412 peale ja loeme vastuse niidi alt D-skaalal. Seal esinevad vastuse tüvenumbrid 4—4—9. Vastuse suurusjärgu leiame arvude jämedalt ümardamise teel $\left(\frac{0,05}{40 \cdot 0,05} = \frac{1}{40} = 0,02 \dots\right)$. Suurusjärk on —1. Seega

$$\frac{0,0715}{38,6 \cdot 0,0412} = 0,0449.$$

Avaldise $\frac{a}{2}$ arvutamist võime teostada analoogiliselt eelnevaga E-skaala abil, et vältida ruutskaala kasutamist, mis annab väik-

sema täpsuse kui E-skaala. Selleks paigutame C-b D-a kohale ja viime niidi E-b peale, lugedes vastuse niidi alt D-skaalal.

Avaldiste $\frac{a}{b \cdot \sqrt{c}}$ ja $\frac{a}{b \cdot \sqrt[3]{c}}$ väärtuste leidmiseks viime niidi esime-

sel juhul A-c peale ja teisel juhul K-c peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on \sqrt{c} või $\sqrt[3]{c}$ väärtus, mille kohale paigutame keelega E-b ja viime niidi D-a peale, lugedes niidi alt C-skaalalt otsitava väärtuse. Selle võttega leiame näiteks, et

$$\frac{0,83}{2,17 \cdot \sqrt{0,00425}} = 5,86$$

ja

$$\frac{0,83}{2,17 \cdot \sqrt[3]{0,00425}} = 2,36,$$

kusjuures teise avaldise arvutamisel tuleb teha keele ülekanne. Tegureid jämedalt ümardades ($\frac{0,8}{2 \cdot 0,06} = 6, \dots; \frac{0,8}{2 \cdot 0,1} = 4$) selgub, et mõlema korrutise suurusjärk on +1.

Avaldist $\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}$ võime esitada $\frac{a}{b\sqrt{b}}$ kujul, mille arvutamist teostame eespool esineva avaldise $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ arvutamise kohaselt.

Kui üht ja sama arvu tuleb jagada enam kui kahe teguriga, siis tuleb see arv eespool esineva võtte kohaselt jagada enne kahe teguriga ja saadud resultaati jagada kahe järgneva teguriga jne., tehes seejuures igal niisugusel jagamisel keele ühe asetuse.

N ä i d e 11.

$$\frac{460}{0,543 \cdot 3,85 \cdot 1,42 \cdot 7,62} = ?$$

Paigutame (niidi abil) C-543 D-460 kohale ja viime niidi E-385 peale, siis esimene jagatis on D-skaalal niidi all. Edasi paigutame C-142 niidi alla ja viime niidi E-762 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal esinevad otsitava suuruse tüvenumbrid 2—0—3. Antud arve jämedalt ümardades ($\frac{500}{0,5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 10} = 25$) näeme, et lõppresultaadi suurusjärk on +2. Tähen-dab,

$$\frac{460}{0,543 \cdot 3,85 \cdot 1,42 \cdot 7,62} = 20,3.$$

H a r j u t u s i.

1) Leida funktsiooni $y = \frac{0,715}{x}$ väärtused, kui $x = 2,19; 0,485; 0,0517; 70,6; 0,808$.

2) $\frac{42,5}{124 \cdot 0,0645} = ?$

$$3) \frac{0,524}{0,805^2} = ?$$

$$4) \frac{28,3}{0,77 \cdot \sqrt{41,5}} = ?$$

$$5) \frac{187}{\frac{3}{2,09 \cdot \sqrt{0,0305}}} = ?$$

$$6) \frac{0,404}{\frac{3}{40,4 \cdot \sqrt{40,4}}} = ?$$

$$7) \frac{252}{0,216 \cdot 0,586 \cdot 3,05 \cdot 62,2} = ?$$

$$8) \frac{88,8}{4,65 \cdot 0,0123 \cdot 71,2 \cdot 8,05} = ?$$

$$9) \frac{0,884}{52,1 \cdot 0,713 \cdot 6,14 \cdot 0,0416} = ?$$

$$10) \frac{0,0505}{2,17 \cdot 0,615 \cdot 0,0314} = ?$$

[Vastused. 1) 0,326; 1,47; 13,8; 0,0101; 0,885. 2) 5,31.
3) 0,809. 4) 5,70. 5) 28,6. 6) 0,00291. 7) 10,5. 8) 2,71. 9) 0,0931.
10) 1,205.

§ 12. LOGARITMID.

1. Arvutuslükati korpuse alumisel äärel esineb veel seitsmes skaala (joon. IV), mis on arvude kümnendlogaritmide murdosade määramiseks. Nimetame seda skaalat *L-skaalaks*. L-skaala ei ole logaritmiliste jaotistega, vaid ekvidistantsete jaotistega skaala.

L-skaala on jaotatud kümneks võrdseks osaks, mis on tähistatud numbritega

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L-skaala vasakpoolse otsa alguskriips tähendab 0, parempoolse otsa lõppkriips tähendab 10. Numbrid 0 ja 10 enamasti L-skaalale kantud ei ole. Iga üksik osa on jaotatud kriipsudega veel kümneks võrdseks osaks ja need omakorda viieks võrdseks osaks. Nii on L-skaala jaotiste arv $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$. Kriipsud alates 0-kriipsust tähendavad

002, 004, 006, 008, 010, 012, ..., 998, 1000.

Kriipsudevahelised keskkohad on siis

001, 003, 005, 007, 009, 011, ..., 997, 999.

Seega võime L-skaalal märkida ja lugeda vähemalt kolm kohta (numbrit). Need on logaritmide murdosade kolm kohta. Sellest järeldub ühtlasi, et arvutuslükati L-skaala asendab täielikult kolmekohalisi logaritmilisi tabelleid. Logaritmitavad arvud on D-skaalal ja nende logaritmide murdosad L-skaalal. Logaritmide

täisosasid nende mitmekesisuse tõttu L-skaalal märgitud ei ole ega pole ka vajadust nende märkimiseks, sest teatavasti on logaritmi täisosa ühe võrra väiksem logaritmitava arvu (positiivsest või negatiivsest) suurusjärgust, ja ümberpöörduvalt: logaritmitava arvu suurusjärk on ühe võrra suurem logaritmi täisosast.

Näide 1. $\lg 2,68 = ?$

Logaritmi täisosa on siin 0. Meil on tarvis leida ainult logaritmi murdosa. Et leida $\lg 2,68$ murdosa, selleks viime märkija niidi D-268 peale ja loeme L-skaalal niidi alt vastava arvu. Näeme, et L-skaalal niidi all on 4—2—8, mis on otsitava logaritmi murdosa numbrid. Seega

$$\lg 2,68 = 0,428.$$

Näide 2. $\lg x = 1,554; x = ?$

Viime niidi L-554 peale ja loeme D-skaalal niidi alt otsitava logaritmitava arvu x . Seal on 3—5—8. Kuna antud logaritmi täisosa on 1, siis

$$x = 35,8.$$

Harjutusi:

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $\lg 5 = ?$ | 4) $\lg 5,15 = ?$ | 7) $\lg 0,164 = ?$ |
| 2) $\lg 17 = ?$ | 5) $\lg 1,24 = ?$ | 8) $\lg 0,204 = ?$ |
| 3) $\lg 3,8 = ?$ | 6) $\lg 62,5 = ?$ | 9) $\lg 0,084 = ?$ |

10) $\lg x = 0,244; x = ?$ 13) $\lg x = 1,045; x = ?$

11) $\lg x = 1,514; x = ?$ 14) $\lg x = \bar{1},081; x = ?$

12) $\lg x = 3,308; x = ?$ 15) $\lg x = 0,250; x = ?$

[Vastused: 1) 0,699. 2) 1,230. 3) 0,580. 4) 0,712.
5) 0,093. 6) 1,796. 7) $\bar{1},215$. 8) $\bar{1},310$. 9) $\bar{2},924$. 10) 1,754.
11) 32,7. 12) 2032. 13) 11,09. 14) 0,1205. 15) 1,778.]

Näide 3. $4,15^{2,62} = ?$

Siin tuleb logaritmid, korrutada ja antilogaritmid, s. o. leida numerus ($2,62 \cdot \lg 4,15$). Paigutame niidi D-415 kohale ja loeme selle logaritmi murdosa L-skaalal niidi alt. Seal on 6—1—8. Seega $\lg 4,15 = 0,618$. Selle arvu korrutame (D-skaalal) astendajaga 2,62, saame 1,619. See on astme logaritmi, mille murdosa kolme kohaga on 619. Viime niidi L-619 peale ja loeme D-skaalal niidi alt otsitava astme väärtuse, s. o. 41,6, sest astme logaritmi (1,619) täisosa on 1. Täheandab,

$$4,15^{2,62} = 41,6.$$

Näide 4. $0,017^{1,53} = ?$

Logaritmime, viies niidi D-17 peale; L-skaalal niidi all on 2—3—0, s. o.

$$1,53 \cdot \lg 0,017 = 1,53 \cdot \bar{2},230;$$

astme logaritmi saamiseks korrutame (D-skaalal) järgmiselt

$$1,53 \cdot \bar{2},23 = 1,53 \cdot (-1,77) = -2,71 = \bar{3},290;$$

astme leidmiseks paigutame niidi L-290 kohale, kus nüüd D-skaalal niidi all on 1—9—5. Kuna astme logaritmi täisosa on —3, siis seega

$$0,017^{1,53} = 0,00195.$$

Näide 5. $10^{0,064} = ?$

Niisuguse näite puhul, kus astme aluseks on 10, on astme logaritm võrdne astendajaga. Järelikult, viies siin otsekohe niidi L-064 peale, on D-skaalal niidi all astme väärtus 1,159, mille suurusjärk on +1, sest logaritmi täisosa on 0. Seega

$$10^{0,064} = 1,159.$$

Kui käesoleval juhul astendaja oleks negatiivne, siis teisen-dame seda nii, et täisosa oleks negatiivne ja murdosa positiivne, mille puhul viime niidi L-skaalal positiivse murdosa peale ja loeme niidi alt D-skaalal otsitava astme väärtuse. Näiteks

$$10^{-1,535} = 10^{\overline{2},465} = 0,0292,$$

või teisendades seda negatiivse astendajaga avaldist järgmiselt

$$10^{-1,535} = \frac{1}{10^{1,535}},$$

mille puhul leiame $10^{1,535}$ väärtuse, paigutades niidi L-535 peale, on niidi all D-skaalal astme $10^{1,535}$ väärtus ja E-skaalal selle pöördväärtus, mis on otsitavaks suuruseks. Siin muidugi D- ja E-skaala äärmised kriipsud (D-1 ja E-10 ning D-10 ja E-1) peavad olema kohakuti.

Analoogiliselt toimime ka, kui negatiivse astendajaga astme alus on 10-st erinev.

Mitmesuguste teiste avaldiste logaritmimeisel, nagu

$$\lg \sqrt{\frac{a}{b}}, \lg a\sqrt{b}, \lg a^2b, \text{ jne.}$$

toimime nii, et enne arvutame arvutuslükatil logaritmitava avaldise väärtuse ja siis võtame selle väärtuse logaritmi. Sellistel juhtudel (kui see on võimalik) katsume logaritmitava avaldise väärtuse leida nii, et see esineks D-skaalal, millelt saame (ilma D-skaalal esinevat väärtust lugemata) otseselt üle minna logaritmi murdosa lugemisele L-skaalal.

Harjutusi.

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $2^{2,4} = ?$ | 9) $0,4^{8,2} = ?$ |
| 2) $8^{1,5} = ?$ | 10) $0,5^{0,12} = ?$ |
| 3) $3,4^{1,2} = ?$ | 11) $0,093^{3,72} = ?$ |
| 4) $1,2^{4,75} = ?$ | 12) $0,65^{0,045} = ?$ |
| 5) $1,18^{7,05} = ?$ | 13) $10^{-3,27} = ?$ |
| 6) $2,67^{1,55} = ?$ | 14) $1,14^{-2,31} = ?$ |
| 7) $\pi^{2,12} = ?$ | 15) $0,51^{-0,72} = ?$ |
| 8) $21,4^{0,62} = ?$ | 16) $1,01^{-1,01} = ?$ |

[Vastused. 1) 5,28. 2) 22,6. 3) 4,34. 4) 2,38. 5) 3,21. 6) 4,58. 7) 11,32. 8) 6,68. 9) 0,000546. 10) 0,920. 11) 0,0001455. 12) 0,981. 13) 0,000537. 14) 0,739. 15) 1,624. 16) 0,990.]

2. Arvutuslükatiga arvude logaritmid arvutamist mistahes alusel teostame valemi

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$$

järgi, kus b on logaritmitavaks arvuks ja a on logaritmi aluseks. Sel juhul tuleb võtta kümnendlogaritmi $\lg b$ väärtus ja märkida see niidiga D-skaalal. Siis võtame kümnendlogaritmi $\lg a$ väärtuse ja viime selle C-skaalale ülekantult keele lükkega niidi alla ning loeme $\log_a b$ väärtuse (kui kümnendlogaritmid jagatise $\frac{\lg b}{\lg a}$) D-skaalal C-1 või C-10 kohalt.

Näide 6. $\log_8 12,3 = ?$

Märgime siin

$$\log_8 12,3 = \frac{\lg 12,3}{\lg 8}$$

Niidiga tegutsedes leiame $\lg 12,3 = 1,107$ ja $\lg 8 = 0,903$. Viime niidi D-1107 peale ja lükates C-903 niidi alla, on resultaat C-10 kohal D-skaalal, s. o.

$$\log_8 12,3 = \frac{1,107}{0,903} = 1,226.$$

Naturaallogaritmid leidmiseks kasutame valemit

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{0,4343} = 2,3026 \cdot \lg b,$$

kus 0,4343 nimetatakse kümnendlogaritmid mooduliks ja 2,3026 naturaalllogaritmid mooduliks. Neid arve kasutame arvutuslükatiga tegutsemisel lühendatult — 0,434 ja 2,3. Toodud valemi järgi tuleb leida arvu b kümnendlogaritm, kandes selle väärtuse niidiga üle D-skaalale, kus jagame teda mooduliga 0,434 või korratame mooduliga 2,3.

Näide 7. $\ln 0,0532 = ?$

Leiame (niidiga) kümnendlogaritmi

$$\lg 0,0532 = \bar{2},726 = -1,274,$$

mille korrutamisel mooduliga 2,3 saame (D-skaalalt loetult) naturaalllogaritmi väärtuse, s. o.

$$\ln 0,0532 = 2,3 \cdot (-1,274) = -2,93.$$

Harjutusi.

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $\log_2 5 = ?$ | 6) $\ln 6 = ?$ |
| 2) $\log_5 7,2 = ?$ | 7) $\ln 8,18 = ?$ |
| 3) $\log_9 43,5 = ?$ | 8) $\ln 12,6 = ?$ |
| 4) $\log_{12} 0,62 = ?$ | 9) $\ln 0,88 = ?$ |
| 5) $\log_3 0,0312 = ?$ | 10) $\ln 0,0035 = ?$ |

[Vastused. 1) 2,32. 2) 1,23. 3) 1,72. 4) —0,192. 5) —3,16. 6) 1,79. 7) 2,1. 8) 2,53. 9) —0,128. 10) —5,65.]

§ 13. TRIGONOMEETRILISED SKAALAD JA NENDE LUGEMINE.

1. Arvutuslükati keele tagaküljel asuvad trigonomeetrilised skaalad (joon. VI). Kaks äärmist skaalat keele tagaküljel (ülemisel ja alumisel keele äärel) on tähistatud tähtedega S ja T ning nendevaheline kolmas skaala tähisega S&T. Tegemist on trigonomeetriliste funktsioonide logaritmiliste skaaladega. S tähistab siinusskaalat piirides $5^{\circ}44'$ kuni 90° , T — tangensskaalat, mis hõlmab $5^{\circ}43'$ kuni 45° ning S&T on väikeste nurkade ühine siinus- ja tangensskaala piirides $34,4'$ kuni $5^{\circ}44'$. Nimetame esimest neist S-skaalaks, teist T-skaalaks ning kolmandat S&T-skaalaks.

Arvutuslükati keelt välja tõmmates, ümber pöörates ja kohakuti asetades A- ning D-skaalaga, näeme, et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala — vastu D-skaalat. Kõik need kolm trigonomeetrilist skaalat (S-, T- ja S&T-skaala) on seotud D-skaalaga, samuti nagu L-skaalagi, ainult selle vahega, et L-skaala on arvutuslükati korpusel, kuna trigonomeetrilised skaalad asetsevad arvutuslükati keelel.

S-skaala. Sellel skaalal alguskriipsust 10° -ni on jaotised märgitud $5'$ kaupa: esimene kriips alguskriipsu järel tähendab $5^{\circ}45'$ (skaalal nummerdamata), teine kriips — $5^{\circ}50'$ (nummerdamata), kolmas kriips — $5^{\circ}55'$ (nummerdamata), neljas kriips — 6° (skaalal nummerdatud). Edasi 6° -st alates kuni 10° -ni esinevad S-skaalal numbrid 7, 8, 9 ja 10, mis tähendavad: 7° , 8° , 9° ja 10° . Nende vahepealsed $5'$ kaupa märgitud jaotuskriipsud ei ole nummerdatud.

10° -st alates kuni 20° -ni on kantud S-skaalale kas numbrid

12, 14, 16, 18, 20

või numbrid

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,

mis tähendavad kraade. 20° -st edasi kuni skaala lõpuni esinevad numbrid

25, 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80

tähendavad samuti kraade. Nende kraadide vahepealseid ja 80° -le järgnevaid kraade ja minuteid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi või silma järgi interpoolimise teel. 10° -st kuni 20° -ni on märgitud S-skaalal jaotised $10'$ kaupa, 20° -st kuni 40° -ni — $20'$ kaupa, 40° -st kuni 60° -ni (või 70° -ni) — $30'$ kaupa, 60° -st (või 70° -st) kuni 80° -ni — 1° kaupa; 80° ja 90° vahel on harilikult kolm kriipsu, mis tähendavad 82° , 84° ja 86° (kuid mõnikord ka ainult kaks kriipsu või üldse puuduvad kriipsud). Nagu sellest nähtub, on tähendatud vahemikes jaotised isesugused, mis tuleneb sellest, et skaala jaotised paremale poole kulgedes on ikka rohkem ja rohkem kokku surutud.

Et õigesti märkida ja lugeda minuteid tähistavaid kraadidevahelisi kriipse, tuleb tähele panna, mitmeks osaks on jaotatud vaadeldav lõik: kas kaheteistkümneks, kuueks, kolmeks või kaheks osaks.

Kui S-skaala on kohakuti A- ja D-skaalaga, siis S-skaala alguskriipsu ehk (ligikaudu) $5^{\circ}44'$ kohal on D-skaalal arv 1 ja lõppkriipsu ehk 90° kohal on D-skaalal arv 10. Vahepealsetele S-skaala kraadidele ja minutitele vastavad arvud on nende kohal D-skaalal. D-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on ühtlasi S-skaalal esinevate vastavate kraadide ja minutite siinuse (loomulikud) väärtused, kui loeme neid 10 korda vähendatult. Seega tuleb D-skaala alguskriipsu lugeda 0,1-ks, sest siin $5^{\circ}44' = 0,0999 \approx 0,1$ ja D-skaala lõppkriipsu lugeda 1-ks, sest siin $90^{\circ} = 1$. Järelikult vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni tuleb D-skaalal esinevaid siinuse väärtusi lugeda arvudeks, millede suurusjärk on 0. Et leida arvutslükati abil vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni siinusfunktsiooni väärtusi, selleks märgime niidiga kraade ja minuteid S-skaalal ja vaatame, missugune arv — suurusjärguga 0 — on niidi all D-skaalal. Näiteks

$$\sin 27^{\circ}40' = 0,464.$$

See tähendab, et logaritmiline lõik S-skaala algusest kuni $27^{\circ}40'$ -ni on sama pikk kui logaritmiline lõik D-skaala algusest kuni 0,464-ni.

Olgu tähendatud, et samal kohal niidi all on L-skaalal selle loomuliku väärtuse logaritmi murdosa, mis on seega siinusfunktsiooni logaritmi murdosaks, kusjuures logaritmi täisosaks on — 1. Seega

$$\lg \sin 27^{\circ}40' = \bar{1},667.$$

Ümberpöörduvalt, siinuse väärtuse või logaritmi järgi võime leida vastava kraadide ja minutite arvu vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni, märkides niidiga siinusfunktsiooni väärtuse murdosa D-skaalal või logaritmi murdosa L-skaalal, ja vaadates, missugune kraadide ja minutite arv esineb loomuliku väärtuse või logaritmi murdosa kohal niidi all S-skaalal. Näiteks:

$$\begin{aligned} \text{kui } \sin \alpha &= 0,446, \text{ siis } \alpha = 26^{\circ}30'; \\ \text{kui } \lg \sin \beta &= \bar{1},598, \text{ siis } \beta = 23^{\circ}20'. \end{aligned}$$

Koosinuse väärtusi ja logaritme vahemikus 0° -st kuni $90^{\circ} - 5^{\circ}44' = 84^{\circ}16'$ -ni leiame samuti S-skaala abil, kusjuures tuleb üle minna koonusfunktsioonilt siinusfunktsioonile, kasutades selleks taandamisvalemit

$$\cos \alpha = \sin (90^{\circ} - \alpha).$$

T-skaala. Sellel skaalal esinevad kraadid ja minutid $5^{\circ}43'$ kuni 45° . Alguskriipsust kuni 20° -ni on T-skaala jaotised märgitud kriipsudega 5' kaupa. 20° -st kuni skaala lõpuni (s. o. 45° -ni) —

10' kaupa. Esimene kriips alguskriipsu järel tähendab 5°45', teine kriips — 5°50', kolmas kriips — 5°55', neljas kriips — 6° jne. T-skaalale on harilikult kantud järgmised numbrid:

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25,

30, 35, 40, 45,

mis tähendavad kraade. Nummerdatud kraadide vahepealseid kraade ja minuteid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi või silma järgi interpoolimise teel.

Kui T-skaala on kohakuti D-skaalaga, siis näeme, et T-skaala alguskriipsu ehk (ligikaudu) 5°43' kohal on D-1 ja lõppkriipsu ehk 45° kohal on D-10. D-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on seega T-skaalal esinevate kraadide ja minutite (5°43'-st kuni 45°-ni) tangensi väärtused suurusjärguga 0, sest $\text{tg } 5^{\circ}45' = 0,1001 \approx 0,1$ ja $\text{tg } 45^{\circ} = 1$. T-skaalalt niidiga D-skaalale üle minnes saame tangensi väärtuse (0,1-st kuni 1-ni), ja T-skaalalt niidiga L-skaalale üle minnes saame tangensi logaritmi (−1-st kuni 0-ni). Ümberpöörduvalt: D-skaalalt või L-skaalalt niidiga T-skaalale üle minnes saame tangensi väärtusele või tangensi logaritmile vastava kraadide ja minutite arvu (5°43'-st kuni 45°-ni). Näiteks:

$$\text{tg } 25^{\circ} = 0,466; \text{ kui } \text{tg } \alpha = 0,633, \text{ siis } \alpha = 32^{\circ}20'.$$

$$\text{lg } \text{tg } 9^{\circ}10' = \bar{1},208; \text{ kui } \text{lg } \text{tg } \beta = \bar{1},776, \text{ siis } \beta = 30^{\circ}50'.$$

Kootangen'si väärtusi ja logaritme vahemikus 45°-st kuni 90° — 5°43' = 84°17'-ni leiame samuti T-skaala abil, kusjuures tuleb üle minna kootangensfunktsioonilt tangensfunktsioonile, kasutades selleks taandamisvalemit

$$\text{ctg } \alpha = \text{tg } (90^{\circ} - \alpha).$$

Kui tangensfunktsiooni puhul nurk α on suurem 45°-st ja ühtlasi väiksem kui 84°17' või kootangensfunktsiooni puhul nurk α on väiksem 45°-st ja ühtlasi suurem kui 5°43', siis rakendatakse nende funktsioonide arvutamisel trigonomeetria vastavaid põhivalemeid

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } (90^{\circ} - \alpha)} \text{ ja } \text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha},$$

mille rakendamist käsitleme järgnevas §-s.

S&T-skaala. Kui nurgad on väiksemad kui 5°44', siis ei saa S-skaala ega ka T-skaala abil leida nende nurkade siinuse ja tangensi väärtusi, sest tähendatud skaalad ei ole perioodilised. Väiksemate kui 5°44' nurkade siinuse ja tangensi väärtuste määramiseks esineb arvutuslükati keelel ühine siinuse ja tangensi skaala, s. o. S&T-skaala. Siinuse ja tangensi ühisel skaalal esinevad kraadid ja minutid (ligikaudu) 34,4' kuni 5°44', s. o. kraadide ja minutite arvuni, millest algab S-skaala. S&T-skaala abil võime leida nii siinuste kui ka tangensite väärtusi 34,4'-st kuni 5°44'-ni, sest väikeste nurkade (alla 5°44') siinuste ja tangensite väärtused

on praktiliselt võrdsed, ja nimelt: 34,4'-st kuni 2°30'-ni on siinuse ja tangensi väärtused võrdsed nelja kümnendkohaga ja 2°30'-st kuni 5°44'-ni on nad võrdsed kolme kümnendkohaga. Kasutades näiteks viiekohalisi logaritmide tabelleid, näeme, et

$$\begin{array}{ll} \sin 2^\circ = 0,03490, & \operatorname{tg} 2^\circ = 0,03492, \\ \sin 4^\circ 20' = 0,07556, & \operatorname{tg} 4^\circ 20' = 0,07578, \end{array}$$

millest nähtub, et

$$\begin{array}{l} \sin 2^\circ = \operatorname{tg} 2^\circ = 0,0349 \\ \sin 4^\circ 20' = \operatorname{tg} 4^\circ 20' = 0,076. \end{array}$$

Alguskriipsust kuni 3°-ni on S&T-skaala jaotised märgitud kriipsudega 1' kaupa (mõnikord on jaotuskriipsud alguskriipsust kuni 1°-ni märgitud ka 30'' kaupa), 3°-st kuni 5°-ni — 2' kaupa ja 5°-st kuni lõpuni (s. o. 5°44'-ni) — 5' kaupa. Esimene kriips alguskriipsu järel tähendab 35', teine kriips — 36', kolmas kriips — 37' jne.

S&T-skaalale on märgitud harilikult järgmised numbrid:

$$40, 50, 1, 130, 2, 230, 3, 330, 4, 430, 5, 530,$$

mis tähendavad

$$40', 50', 1^\circ, 1^\circ 30', 2^\circ, 2^\circ 30', 3^\circ, 3^\circ 30', 4^\circ, 4^\circ 30', 5^\circ, 5^\circ 30',$$

kusjuures mõnikord esinevad skaalal ka kraadide ja minutite tähised. Nende kraadide ja minutite vahepealseid minuteid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi või silma järgi interpoolimise teel.

Kui S&T-skaala on kohakuti A- ja D-skaalaga, siis S&T-skaala kraadidele ja minutitele vastavaid siinuse ja tangensi väärtusi loeme samuti D-skaalalt, lugedes neid suurusjärguga —1, sest $\sin 34,4' = \operatorname{tg} 34,4' = 0,01$ ja $\sin 5^\circ 44' = \operatorname{tg} 5^\circ 44' \approx 0,1$. S&T-skaalalt niidiga üle minnes D-skaalale, saame siinuse ja tangensi ühise väärtuse (0,01-st kuni 0,1-ni), ja S&T-skaalalt niidiga üle minnes L-skaalale, loeme L-skaalal niidi alt siinuse ja tangensi ühise logaritmi murdosa, kusjuures logaritmi täisosaks on —2. Paigutades niidi S&T-skaalal näiteks 1°13' peale, on D-skaalal niidi all 2—1—2 ja L-skaalal niidi all 3—2—~~7~~, mis tähendab, et

$$\sin 1^\circ 13' = \operatorname{tg} 1^\circ 13' = 0,0212$$

ja

$$\lg \sin 1^\circ 13' = \lg \operatorname{tg} 1^\circ 13' = \bar{2},327.$$

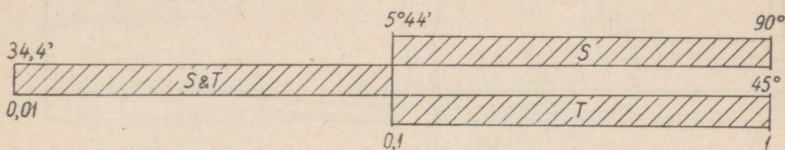
Ümberpöörduvalt, D-skaalalt või L-skaalalt niidiga üle minnes S&T-skaalale, saame siinuse ja tangensi ühisele väärtusele või logaritmile vastava kraadide ja minutite arvu (34,4'-st kuni 5°44'-ni).

Näiteks:

$$\begin{array}{l} \text{kui } \sin \alpha = 0,0445, \text{ siis } \alpha = 2^\circ 33'; \\ \text{kui } \lg \operatorname{tg} \beta = \bar{2},704, \text{ siis } \beta = 2^\circ 54', \end{array}$$

sest paigutades niidi D-skaalal —4—5 peale, on S&T-skaalal niidi all $2^{\circ}33'$, paigutades niidi L-skaalal 7—0—4 peale, on S&T-skaalal niidi all $2^{\circ}54'$.

2. Nagu eespool arvutamisel nägime, ei tähenda D-skaalal vaadeldav kriips ainult üht kindlat arvu, näiteks arvu a , vaid kõiki neid arve, kus a on korrutatud kümne astmega, s. o. arve $a \cdot 10^k$, kus $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Kuid nurkade siinuste ja tangensite väärtuste otsimisel D-skaalal võetakv kriips määrab ühe ja ainult ühe kindla väärtuse, mis peitub S- ja T-skaaladelt D-skaalale üle minnes 0,1 ja 1 vahel ning S&T-skaalalt D-skaalale üle minnes 0,01 ja 0,1 vahel. Seega kujutab S&T-skaala nagu S- ja T-skaalade pikendust vasakule poole (joon. 21).



Joon. 21.

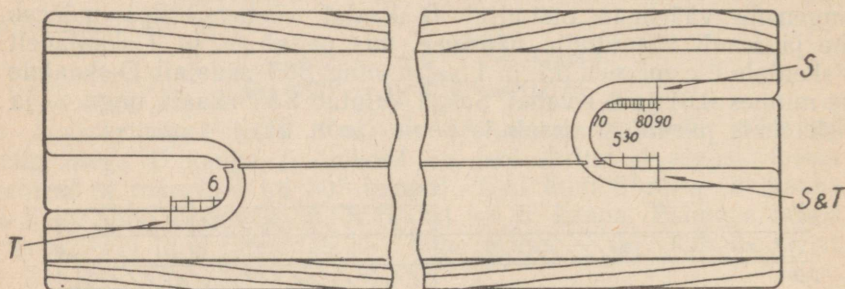
M ä r k u s. Et leida $34,4'$ -st väiksemate nurkade siinuse ja tangensi väärtusi, selleks peaks arvutuslükati keelele olema kantud veel neljas niisama pikk siinuse ja tangensi ühine skaala $3'26,5''$ -st kuni $34,4'$ -ni, mille alguskriips (s. o. $3'26,5''$) oleks (skaalaid kohakuti pannes) D-1 kohal ja lõppkriips (s. o. $34,4'$) — D-10 kohal, sest $\sin 3'26,5'' = \operatorname{tg} 3'26,5'' = 0,001$ ja $\sin 34,4' = \operatorname{tg} 34,4' = 0,01$, kus nüüd siinuste ja tangensite suurusjärk oleks selles vahemikus — 2. Kuna aga väiksemate nurkadega kui $34,4'$ tuleb väga harva tegemist teha, siis — et mitte liigselt koormata arvutuslükati keelt — ei kanta sinna tavaliselt rohkem trigonomeetrilisi skaalaid. Kuid, nagu pärastpoole näeme (§ 16), on arvutuslükati abil niisuguste väikeste nurkade siinuse ja tangensi väärtuste leidmine ikkagi võimalik.

3. Arvutuslükati abil trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste (tarbe korral nende logaritmid) leidmiseks pole keele ümberpööramiseks tegelikult vajadust. Asetame arvutuslükati keele algasendisse tagasi, nii et trigonomeetrilised skaalad jääksid allapoole. Pöörates arvutuslükati ümber, näeme lükati mõlemas otsas ovaalseid lõike ja lõigu servadel musti kriipse: paremal pool kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakul — tavaliselt üks kriips all (mõnikord kaks kriipsu — üks all ja teine ülal). Nimetame neid lõikude servadel esinevaid kriipse «i n d e k s i t e k s» (joon. 22).

Parempoolse otsa ülemine indeks on S-skaala kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks, vasakpoolse otsa alumine indeks on T-skaala kraadide ja minutite ning parempoolse otsa alumine indeks (ja vasakpoolse otsa ülemine indeks, kui see on olemas) — S&T-skaala kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks.

Nimetame neid indekseid vastavalt S - indeksiks, T - indeksiks ja S & T - indeksiks.

Trigonomeetriliste skaalade abil 'trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste või nende logaritmide leidmist ning ümberpöörduvalt, antud väärtustele või nende logaritmele vastavate kraadide ja minutite leidmist selgitavad alljärgnevad näited.



Joon. 22.

Näide 1. $\sin 21^{\circ}20' = ?$ $\lg \sin 21^{\circ}20' = ?$

Lükkame arvutuslükati keele paremale poole ja paigutame S-skaalal $21^{\circ}20'$ -le vastava jaotuskriipsu parempoolse lõigu S-indeksi kohale. Keerame arvutuslükati ümber ja loeme C-skaalal D-10 kohalt siinuse (loomuliku) väärtuse. Seal esineb siinuse väärtuse murdosa 364. Kuna siin siinuse väärtuse täisosa on 0, siis seega

$$\sin 21^{\circ}20' = 0,364.$$

Et leida $\lg \sin 21^{\circ}20'$ väärtust, tuleb S- $21^{\circ}20'$ samuti paigutada S-indeksi kohale ja C-skaalal D-10 kohalt lugeda siinuse väärtus 0,364. Viime nüüd niidi D-364 peale ja loeme niidi alt L-skaalal siinuse logaritmi murdosa 561. Seega

$$\lg \sin 21^{\circ}20' = \bar{1},561.$$

Näide 2. $\cos 54^{\circ}10' = ?$ $\lg \cos 54^{\circ}10' = ?$

Koosinusfunktsiooni väärtuse leidmiseks tuleb üle minna täiendusnurga siinusele, s. o.

$$\cos 54^{\circ}10' = \sin (90^{\circ} - 54^{\circ}10') = \sin 35^{\circ}50',$$

mille leiame eelmises näites kirjeldatud viisil. Seega

$$\cos 54^{\circ}10' = \sin 35^{\circ}50' = 0,585.$$

Selle koosinuse logaritmi leiame, kui viime niidi D-585 peale, mille kohal niidi all L-skaalal on logaritmi murdosa 767. Seega

$$\lg \cos 54^{\circ}10' = \lg \sin 35^{\circ}50' = \bar{1},767.$$

N ä i d e 3. $\sin \alpha = 0,219$; $\alpha = ?$

Paigutame C-219 D-10 kohale, pöörame arvutuslükati ümber ja loeme paremal pool ülal asuva S-indeksi kohalt S-skaalal kraadide ja minutite arvu $12^{\circ}40'$. Seega

$$\alpha = 12^{\circ}40'.$$

N ä i d e 4. $\cos \alpha = 0,256$; $\alpha = ?$

Kui paigutame C-256 D-10 kohale ja pöörame arvutuslükati ümber, siis näeme, et paremal pool ülal asuva S-indeksi kohal S-skaalal on $14^{\circ}50'$. Võttes täiendusnurga, saame

$$\alpha = 90^{\circ} - 14^{\circ}50' = 75^{\circ}10'.$$

Harjutusi.

- | | |
|------------------------------|--|
| 1) $\sin 10^{\circ} = ?$ | 13) $\sin 8^{\circ}25' = ?$ |
| 2) $\sin 55^{\circ} = ?$ | 14) $\sin 28^{\circ}15' = ?$ |
| 3) $\sin 80^{\circ} = ?$ | 15) $\sin 83^{\circ}15' = ?$ |
| 4) $\cos 75^{\circ} = ?$ | 16) $\cos 78^{\circ}23' = ?$ |
| 5) $\cos 83^{\circ} = ?$ | 17) $\cos 84^{\circ}07' = ?$ |
| 6) $\cos 14^{\circ} = ?$ | 18) $\cos 47^{\circ}38' = ?$ |
| 7) $\sin 16^{\circ}30' = ?$ | 19) $\sin \alpha = 0,142$; $\alpha = ?$ |
| 8) $\sin 42^{\circ}30' = ?$ | 20) $\sin \alpha = 0,315$; $\alpha = ?$ |
| 9) $\sin 68^{\circ}30' = ?$ | 21) $\sin \alpha = 0,475$; $\alpha = ?$ |
| 10) $\cos 72^{\circ}50' = ?$ | 22) $\cos \alpha = 0,670$; $\alpha = ?$ |
| 11) $\cos 23^{\circ}30' = ?$ | 23) $\cos \alpha = 0,245$; $\alpha = ?$ |
| 12) $\cos 51^{\circ}45' = ?$ | 24) $\cos \alpha = 0,158$; $\alpha = ?$ |

[Vastused. 1) 0,174. 2) 0,819. 3) 0,985. 4) 0,259. 5) 0,122. 6) 0,970. 7) 0,284. 8) 0,676. 9) 0,930. 10) 0,295. 11) 0,917. 12) 0,619. 13) 0,146. 14) 0,473. 15) 0,993. 16) 0,201. 17) 0,1025. 18) 0,674. 19) $8^{\circ}10'$. 20) $18^{\circ}22'$. 21) $28^{\circ}20'$. 22) $48^{\circ}00'$. 23) $75^{\circ}50'$. 24) $80^{\circ}55'$.]

N ä i d e 5. $\operatorname{tg} 22^{\circ}30' = ?$

Siin on kraavide arv väiksem 45° -st. Lükame arvutuslükati keele vasakule ja paigutame T- $22^{\circ}30'$ T-indeksi kohale. Pöörame lükati ümber ja loeme C-skaalal D-1 kohalt tangensi väärtuse. D-1 kohal C-skaalal on 4—1—4. Kuna siin tangensi väärtuse täisosa on 0, siis seega

$$\operatorname{tg} 22^{\circ}30' = 0,414.$$

N ä i d e 6. $\operatorname{ctg} 83^{\circ} = ?$

Kuna siin kraadide arv on suurem 45° -st, siis leiame selle koo-tangensi väärtuse täiendusnurga tangensi kaudu (eelmise näite kohaselt), s. o.

$$\operatorname{ctg} 83^{\circ} = \operatorname{tg} (90^{\circ} - 83^{\circ}) = \operatorname{tg} 7^{\circ} = 0,1228.$$

Näide 7. $\operatorname{tg} \alpha = 0,135$; $\alpha = ?$

Paigutame C-135 D-1 kohale, pöörame arvutuslükati ümber ja loeme T-indeksi kohalt T-skaalal kraadide ja minutite arvu, s. o.

$$\alpha = 7^{\circ}41'.$$

Harjutusi.

- | | |
|--|--|
| 1) $\operatorname{tg} 9^{\circ} = ?$ | 10) $\operatorname{ctg} 47^{\circ}30' = ?$ |
| 2) $\operatorname{tg} 15^{\circ} = ?$ | 11) $\operatorname{ctg} 63^{\circ}10' = ?$ |
| 3) $\operatorname{tg} 44^{\circ} = ?$ | 12) $\operatorname{ctg} 80^{\circ}45' = ?$ |
| 4) $\operatorname{ctg} 52^{\circ} = ?$ | 13) $\operatorname{tg} \alpha = 0,625$; $\alpha = ?$ |
| 5) $\operatorname{ctg} 77^{\circ} = ?$ | 14) $\operatorname{tg} \alpha = 0,805$; $\alpha = ?$ |
| 6) $\operatorname{ctg} 82^{\circ} = ?$ | 15) $\operatorname{tg} \alpha = 0,144$; $\alpha = ?$ |
| 7) $\operatorname{tg} 7^{\circ}45' = ?$ | 16) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,880$; $\alpha = ?$ |
| 8) $\operatorname{tg} 21^{\circ}20' = ?$ | 17) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,125$; $\alpha = ?$ |
| 9) $\operatorname{tg} 43^{\circ}15' = ?$ | 18) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,201$; $\alpha = ?$ |

[Vastused. 1) 0,1584. 2) 0,268. 3) 0,966. 4) 0,781. 5) 0,231. 6) 0,1405. 7) 0,1361. 8) 0,391. 9) 0,941. 10) 0,916. 11) 0,506. 12) 0,1629. 13) $32^{\circ}00'$. 14) $38^{\circ}50'$. 15) $8^{\circ}12'$. 16) $48^{\circ}40'$. 17) $82^{\circ}53'$. 18) $78^{\circ}38'$.]

Näide 8. $\sin 1^{\circ}15' = ?$

Kuna siin nurk on väiksem kui $5^{\circ}44'$, siis tuleb $1^{\circ}15'$ otsida S&T-skaalal. Lökkame arvutuslükati keele paremale ja paigutame S&T- $1^{\circ}15'$ S&T-indeksi kohale. Pöörame lükati ümber ja loeme C-skaalal D-10 kohalt selle siinuse väärtuse. D-10 kohal C-skaalal on 2—1—8. Kuna vahemikus $34,4'$ kuni $5^{\circ}44'$ siinuse väärtuse suurusjärg on —1, siis seega otsitav siinuse väärtus on 0,0218, s. o.

$$\sin 1^{\circ}15' = 0,0218.$$

Sama väärtuse omab ka $\operatorname{tg} 1^{\circ}15'$.

$\lg \sin 1^{\circ}15'$ või $\lg \operatorname{tg} 1^{\circ}15'$ leidmiseks viime niidi leitud loomuliku väärtuse, s. o. D-218, peale ja võtame niidi alt L-skaalal logaritmi murdosa 339, saame

$$\lg \sin 1^{\circ}15' = \lg \operatorname{tg} 1^{\circ}15' = \bar{2},339.$$

Näide 9. $\operatorname{tg} \alpha = 0,0515$; $\alpha = ?$

Paigutame C-515 D-10 kohale, pöörame arvutuslükati ümber ja loeme S&T-indeksi kohalt (miks?) S&T-skaalal kraadide ja minutite arvu, s. o.

$$\alpha = 2^{\circ}57'.$$

Harjutusi.

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin 3^{\circ}10' = ?$ | 9) $\cos 89^{\circ}21' = ?$ |
| 2) $\sin 3^{\circ}25' = ?$ | 10) $\operatorname{ctg} 86^{\circ}49' = ?$ |
| 3) $\sin 1^{\circ}55' = ?$ | 11) $\operatorname{ctg} 87^{\circ}54' = ?$ |
| 4) $\sin 0^{\circ}42' = ?$ | 12) $\operatorname{ctg} 89^{\circ}23' = ?$ |
| 5) $\operatorname{tg} 2^{\circ}05' = ?$ | 13) $\sin \alpha = 0,0445$; $\alpha = ?$ |
| 6) $\operatorname{tg} 2^{\circ}44' = ?$ | 14) $\operatorname{tg} \alpha = 0,0221$; $\alpha = ?$ |
| 7) $\operatorname{tg} 0^{\circ}54' = ?$ | 15) $\cos \alpha = 0,0712$; $\alpha = ?$ |
| 8) $\cos 88^{\circ}17' = ?$ | 16) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,0809$; $\alpha = ?$ |

[Vastused. 1) 0,0552. 2) 0,0596. 3) 0,0334. 4) 0,01222.
 5) 0,0364. 6) 0,0477. 7) 0,01571. 8) 0,0300. 9) 0,01135. 10) 0,0556.
 11) 0,0367. 12) 0,01076. 13) 2°33'. 14) 1°16'. 15) 85°55'.
 16) 85°22'.]

§ 14. TRIGONOMEETRILISI ARVUTUSI.

1. Eelmises paragrahvis vaatlesime ja tegime kindlaks, kuidas saab arvutuslükati abil määrata siinusfunktsiooni väärtusi ja nende logaritme vahemikus 34,4'-st kuni 90°-ni ning koosinusfunktsiooni väärtusi ja nende logaritme vahemikus 0°-st kuni 84°16'-ni, samuti tangensfunktsiooni väärtusi ja nende logaritme vahemikus 5°43'-st kuni 45°-ni ning kootangensfunktsiooni väärtusi ja nende logaritme vahemikus 45°-st kuni 84°17'-ni, samuti ka ümberpöörduvalt.

Käesolevas paragrahvis käsitleme (peamiselt näidete varal) tehteid arvude ja trigonomeetriliste funktsioonidega ning trigonomeetriliste funktsioonide sääraste väärtuste leidmist, mis pole otsest loetavad arvutuslükatilt ja mida saame teostada keele ühe lükkega.

Vaatleme kõigepealt avaldiste

$$a \cdot \sin \alpha \text{ ja } \frac{a}{\sin \alpha}$$

ning teiste trigonomeetriliste funktsioonidega analoogiliste avaldiste arvutamist. Samuti ka $\operatorname{tg} \alpha$ ja $\operatorname{ctg} \alpha$ väärtuste leidmist, kui tangensi puhul $\alpha > 45^\circ$ ja kootangensi puhul $\alpha < 45^\circ$.

Näide 1. $\frac{1}{\sin 15^\circ} = ?$

Kuna selles näites 15° asetseb 5°44' ja 90° vahel, siis paigutame S-15° arvutuslükati S-indeksi kohale. Pöörame lükati ümber ja loeme $\frac{1}{\sin 15^\circ}$ väärtuse (kui jagatise, mille suurusjärk on 1 - 0 = + 1) D-skaalal C-1 kohalt. Saame

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} = 3,86.$$

Märkus. Arvutuslükati abil esitatud võttega võime ühtlasi leida nurga seekansi ja kooskansi väärtusi, kasutades selleks valemeid

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{sc} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin(90^\circ - \alpha)}.$$

Näide 2. $\frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ} = ?$

Kuna siin 24° asetseb 5°43' ja 45° vahel, siis paigutame T-24° arvutuslükati T-indeksi kohale ja loeme (lükatit ümber keerates)

jagatise $\frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ}$ väärtuse D-skaalal C-10 kohalt, kusjuures jagatise suurusjärk on $1 - 0 = +1$. Seega

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ} = 2,25.$$

Näide 3. $\frac{1}{\sin 1^\circ 20'}$ = ?

Kuna siin $1^\circ 20'$ asetseb $34,4'$ ja $5^\circ 44'$ vahel, siis paigutame S&T- $1^\circ 20'$ arvutuslükati S&T-indeksi kohale. Lükatit ümber pöörates on C-1 kohal D-skaalal jagatise $\frac{1}{\sin 1^\circ 20'}$ väärtus, mille suurusjärk on $1 - (-1) = +2$, s. o.

$$\frac{1}{\sin 1^\circ 20'} = 42,9.$$

Analoogiliselt arvutades leiame, et ka

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ 20'} = 42,9.$$

Nende kolme näite arvutuskäigust ilmneb ühtlasi, et kui avaldise $\frac{1}{\sin \alpha}$ ja $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ arvutamise puhul kasutame vastavalt S- või T-skaalat, on vastuse suurusjärk $+1$, ja kui kasutame S&T-skaalat, on vastuse suurusjärk $+2$.

Harjutusi.

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{1}{\sin 43^\circ} = ?$ | 5) $\frac{1}{\operatorname{tg} 33^\circ 10'} = ?$ |
| 2) $\frac{1}{\sin 16^\circ 40'} = ?$ | 6) $\frac{1}{\operatorname{tg} 7^\circ 14'} = ?$ |
| 3) $\frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ} = ?$ | 7) $\frac{1}{\sin 51'} = ?$ |
| 4) $\frac{1}{\sin 8^\circ 42'} = ?$ | 8) $\frac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ 13'} = ?$ |

[Vastused. 1) 1,466. 2) 3,49. 3) 1,963. 4) 6,61. 5) 1,530. 6) 7,88. 7) 67,4. 8) 25,8.]

Näide 4. $\operatorname{tg} 64^\circ = ?$

Kui tangensfunktsiooni puhul nurk on suurem 45° -st (kuid ühtlasi väiksem kui $90^\circ - 34,4' = 89^\circ 25,6'$), siis kasutame tangensi väärtuse leidmiseks valemit

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}.$$

Tähendab, et leida $\operatorname{tg} 64^\circ$ väärtust, tuleb selle asemel võtta $\frac{1}{\operatorname{tg} 26^\circ}$ ja toimetada arvutamist eespool esineva näite 2 kohaselt. Saame

$$\operatorname{tg} 64^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 26^\circ} = 2,05.$$

Näide 5. $\text{tg } 88^{\circ}55' = ?$

Siin võtame

$$\text{tg } 88^{\circ}55' = \frac{1}{\text{tg } 1^{\circ}05'}$$

ja teostades arvutamist näite 3 kohaselt, saame:

$$\text{tg } 88^{\circ}55' = \frac{1}{\text{tg } 1^{\circ}05'} = 52,8.$$

Näide 6. $\text{ctg } 19^{\circ} = ?$

Kui kootangensfunktsiooni puhul nurk on väiksem 45° -st (kuid ühtlasi suurem kui $34,4'$), siis kasutame kootangensi väärtuse leidmiseks valemit

$$\text{ctg } a = \frac{1}{\text{tg } a}.$$

Järelikult võtame $\text{ctg } 19^{\circ}$ väärtuse leidmiseks selle asemel $\frac{1}{\text{tg } 19^{\circ}}$ ja teostame arvutamist näite 2 kohaselt. Saame:

$$\text{ctg } 19^{\circ} = \frac{1}{\text{tg } 19^{\circ}} = 2,90.$$

Näide 7. $\text{tg } a = 3,12; a = ?$

Kuna siin tangensi väärtuse suurusjärk on $+1$, siis paigutame C-10 D-312 kohale ja loeme T-indeksi kohalt $17^{\circ}45'$. Seega

$$a = 90^{\circ} - 17^{\circ}45' = 72^{\circ}15'.$$

Näide 8. $\text{tg } a = 31,2; a = ?$

Kuna siin tangensi väärtuse suurusjärk on $+2$, siis paigutame C-1 D-312 kohale ja loeme S&T-indeksi kohalt $1^{\circ}50'$. Seega

$$a = 90^{\circ} - 1^{\circ}50' = 88^{\circ}10'.$$

Harjutusi.

1) $\text{tg } 50^{\circ} = ?$

2) $\text{tg } 63^{\circ}40' = ?$

3) $\text{tg } 70^{\circ}15' = ?$

4) $\text{ctg } 15^{\circ} = ?$

5) $\text{ctg } 21^{\circ}40' = ?$

6) $\text{ctg } 42^{\circ}25' = ?$

7) $\text{tg } 87^{\circ}20' = ?$

8) $\text{ctg } 1^{\circ}55' = ?$

9) $\text{ctg } 0^{\circ}48' = ?$

10) $\text{tg } 89^{\circ}24' = ?$

11) $\text{tg } a = 1,56; a = ?$

12) $\text{tg } a = 7,77; a = ?$

13) $\text{tg } a = 16,35; a = ?$

14) $\text{tg } a = 57,3; a = ?$

15) $\text{ctg } a = 3,27; a = ?$

16) $\text{ctg } a = 0,328; a = ?$

[Vastused. 1) 1,192. 2) 2,02. 3) 2,79. 4) 3,73. 5) 2,52. 6) 1,095. 7) 21,5. 8) 29,9. 9) 71,6. 10) 95,5. 11) $57^{\circ}20'$. 12) $82^{\circ}40'$. 13) $86^{\circ}30'$. 14) 89° . 15) 17° . 16) $71^{\circ}50'$.]

Näide 9. $3,98 \cdot \sin 21^{\circ}40' = ?$

Paigutame S- $21^{\circ}40'$ S-indeksi kohale, siis on D-10 kohal C-skaalal siinuse väärtus, mille korrutamiseks arvuga 3,98 viime

niidi D-398 peale, kus nüüd niidi all C-skaalal on otsitav korrutis (suurusjärguga + 1), s. o.

$$3,98 \cdot \sin 21^{\circ}40' = 1,469.$$

Näide 10. $\frac{2,28}{\sin 2^{\circ}15'} = ?$

Paigutades S&T- $2^{\circ}15'$ S&T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\sin 2^{\circ}15'}$ väärtus (suurusjärguga + 2) D-skaalal C-1 kohal, mille korrutamiseks 2,28-ga viime niidi C-228 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalalt loeme korrutise tüvenumbrid 5—8—0. Seega

$$\frac{2,28}{\sin 2^{\circ}15'} = 58,0.$$

Näide 11. $0,505 \cdot \text{ctg } 72^{\circ}40' = ?$

Siin tuleb teisendada antud avaldist $0,505 \cdot \text{ctg } 72^{\circ}40' = 0,505 \cdot \text{tg } 17^{\circ}20'$. Paigutades nüüd T- $17^{\circ}20'$ T-indeksi kohale, on D-1 kohal C-skaalal tangensi väärtus (suurusjärguga 0), mille korrutamiseks arvuga 0,505 tuleb teha keele ülekanne (s. o. viia niit C-10 kohale ja C-1 niidi alla) ning siis viia niit D-505 peale, kus nüüd niidi alt C-skaalalt loeme arvu 0,1576, sest siin tuli korrutamisel arvestada tähist P-1. Tähendab,

$$0,505 \cdot \text{ctg } 72^{\circ}40' = 0,1576.$$

Näide 12. $\frac{60,5}{\text{tg } 38^{\circ}20'} = ?$

Paigutades T- $38^{\circ}20'$ T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\text{tg } 38^{\circ}20'}$ väärtus (suurusjärguga + 1) D-skaalal C-10 kohal, mille korrutamiseks 60,5-ga tuleb teha keele ülekanne ja siis viia niit C-605 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalalt loeme arvu 76,5, sest siin tuli korrutamisel arvestada tähist P-1. Tähendab,

$$\frac{60,5}{\text{tg } 38^{\circ}20'} = 76,5.$$

Harjutusi.

1) $0,16 \cdot \text{tg } 22^{\circ}20' = ?$

2) $52 \cdot \sin 1^{\circ}55' = ?$

3) $4,45 \cdot \text{ctg } 81^{\circ}15' = ?$

4) $\frac{10}{\sin 15^{\circ}15'} = ?$

5) $\frac{634}{\sin 71^{\circ}} = ?$

6) $\frac{109}{\text{tg } 18^{\circ}45'} = ?$

7) $\frac{3}{\cos 72^{\circ}} = ?$

8) $\frac{5}{\text{ctg } 75^{\circ}} = ?$

9) $\frac{0,101}{\text{tg } 1^{\circ}33'} = ?$

[Vastused. 1) 0,0657. 2) 0,1740. 3) 0,685. 4) 38,0. 5) 671. 6) 295. 7) 9,71. 8) 18,66. 9) 3,73.]

2. Arvude korrutamist ja jagamist trigonomeetriliste funktsioonidega võime teostada ka sääraselt, et keerame arvutuslükati keele

ümber, nii et S-skaala jääks vastu A-skaalat ja T-skaala jääks vastu D-skaalat. Sel juhul asendub nii korrutamisel kui ka jagamisel C-skaala kas S-skaalaga, T-skaalaga või S&T-skaalaga, millede kasutamiseks kujutame avaldisi

$$x = a \cdot \sin \alpha, \quad x = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad x = a \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad x = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$$

võrretena

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 90^\circ}, \quad \frac{x}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg} 45^\circ}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha},$$

sest $\sin 90^\circ = 1$ ja $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, kus nüüd nende avaldiste väärtused (x -id) leiame esitatud võrrete lahendamise teel. Näiteks eespool esinevate avaldiste (näited 9 ja 12)

$$x = 3,98 \cdot \sin 21^\circ 40' \quad \text{ja} \quad x = \frac{60,5}{\operatorname{tg} 38^\circ 20'}$$

väärtuste leidmiseks kujutame neid võrretena

$$\frac{x}{\sin 21^\circ 40'} = \frac{3,98}{\sin 90^\circ} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{60,5}{\operatorname{tg} 38^\circ 20'}$$

Esimese võrde puhul (kui arvutuslükati keel on ümber pööratud) paigutame S-90° D-398 kohale ja viime niidi S-21°40' peale, siis on x -i väärtus (suurusjärguga + 1) niidi all D-skaalal, s. o.

$$x = 1,469.$$

Teise võrde puhul viime niidi D-605 peale ja paigutame T-38°20' niidi alla, siis on x -i väärtus (suurusjärguga + 2) T-skaala parempoolse otsa (T-45°) kohal D-skaalal, s. o.

$$x = 76,5.$$

Siin esimese võrde puhul asendas C-skaalat S-skaala ja teise võrde puhul asendas C-skaalat T-skaala.

Harjutusi.

$$1) 1,46 \cdot \sin 56^\circ 30' = ?$$

$$2) 3,05 \cdot \cos 63^\circ 20' = ?$$

$$3) 1,46 \cdot \operatorname{tg} 56^\circ 30' = ?$$

$$4) \frac{1,25}{\sin 18^\circ 15'} = ?$$

$$5) \frac{51,4}{\sin 45^\circ 30'} = ?$$

$$6) \frac{13,9}{\operatorname{tg} 41^\circ} = ?$$

$$7) \frac{2,86}{\operatorname{tg} 40^\circ 32'} = ?$$

$$8) \frac{0,706}{\operatorname{tg} 29^\circ 05'} = ?$$

$$9) \frac{3,62}{\sin 3^\circ 11'} = ?$$

[Vastused. 1) 1,217. 2) 0,1369. 3) 0,0221. 4) 3,99. 5) 72,1. 6) 15,99. 7) 3,34. 8) 1,269. 9) 65,2.]

Näide 13. Leida nurgad α_1 , α_2 , α_3 ja α_4 , kui

$$\frac{\sin 15^\circ}{2,4} = \frac{\sin \alpha_1}{3,8} = \frac{\sin \alpha_2}{5,2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{7,4} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_4}{8,1}$$

Selle näite puhul kasutame S- ja T-skaalat, sest kõik nimetajad on ühe ja sama suurusjärguga ning 15° kuulub nii S- kui ka T-skaalale. Viime niidi D-24 peale ja lükkame S- 15° niidi alla. Edasi viime niidi järk-järgult D-38, D-52, D-74 ja D-81 peale ja loeme kahel esimesel juhul niidi alt S-skaalalt ning kahel viimasel juhul niidi alt T-skaalalt vastavad kraadide ja minutite väärtused, saades

$$a_1 = 24^\circ 10', \quad a_2 = 34^\circ 10', \quad a_3 = 38^\circ 35', \quad a_4 = 41^\circ 10'.$$

Kuna käesolevas näites olid kõik nimetajad ühe ja sama suurusjärguga ja antud 15° kuulus nii S- kui ka T-skaalale, siis pidid ka otsitavad kraadid ja minutid kuuluma vastavalt kas S- või T-skaalale. Kui aga võrretes

$$\frac{\sin \alpha_1}{a_1} = \frac{\sin \alpha_2}{a_2} = \dots = \frac{\sin \alpha_n}{a_n}$$

või

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{a_2} = \dots = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{a_n}$$

kõik nimetajad ei ole ühe ja sama suurusjärguga, vaid kahe isesuguse suurusjärguga, mis erinevad teineteisest ühe suurusjärgu võrra, siis suurema suurusjärguga nimetajatele vastavaid nurki tuleb otsida S- või T-skaalalt ning väiksema suurusjärguga nimetajatele vastavaid nurki S&T-skaalalt.

Näide 14. Leida nurgad $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ja β_5 , kui

$$\frac{0,32}{\operatorname{tg} 22^\circ} = \frac{0,26}{\operatorname{tg} \beta_1} = \frac{0,16}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{0,12}{\sin \beta_3} = \frac{0,058}{\operatorname{tg} \beta_4} = \frac{0,032}{\sin \beta_5}.$$

Kuna siin esimese, teise, kolmanda ja neljanda murru lugejad on ühe ja sama suurusjärguga (0) ja esimese murru nimetajas esinev 22° kuulub nii T- kui ka S-skaalale, siis tuleb β_1 ja β_2 otsida T-skaalalt ning β_3 otsida S-skaalalt. Kuid β_4 ja β_5 tuleb otsida S&T-skaalalt, sest viimase kahe murru lugejad on suurusjärguga -1 , s. o. ühe suurusjärgu võrra väiksemad kui eelmiste murdude lugejad. Tähendab, niit tuleb viia D-32 peale ja lükata T- 22° niidi alla; siis viime niidi järk-järgult D-26, D-16, D-12, D-58 ja D-32 peale ning loeme kahel esimesel juhul niidi alt T-skaalal $18^\circ 10'$ ja $11^\circ 25'$, kolmandal juhul loeme niidi alt S-skaalal $8^\circ 43'$ ja kahel viimasel juhul loeme niidi alt S&T-skaalal $4^\circ 12'$ ja $2^\circ 19'$. Seega

$$\beta_1 = 18^\circ 10', \quad \beta_2 = 11^\circ 25', \quad \beta_3 = 8^\circ 43', \quad \beta_4 = 4^\circ 12', \quad \beta_5 = 2^\circ 19'.$$

Harjutusi.

- 1) $\frac{\sin 30^\circ}{0,7} = \frac{\sin \alpha}{5}$; leida α .
- 2) $\frac{\sin 50^\circ}{3} = \frac{\sin \alpha_1}{2} = \frac{\sin \alpha_2}{0,5} = \frac{\sin \alpha_3}{0,12}$; leida α_1, α_2 ja α_3 .
- 3) $\frac{\operatorname{tg} 6^\circ 55'}{1,77} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{2,42} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{3,98} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{0,242}$; leida α_1, α_2 ja α_3 .

$$4) \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{21,8} = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{y_1} = \frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{y_2} = \frac{\operatorname{tg} 2^\circ}{y_3}; \text{ leida } y_1, y_2 \text{ ja } y_3.$$

$$5) \frac{56}{\sin \alpha} = \frac{8,1}{\operatorname{tg} 5^\circ}; \text{ leida } \alpha.$$

$$6) \frac{3,5}{\sin 15^\circ} = \frac{4,4}{\sin \beta_1} = \frac{5,6}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{6,1}{\cos \beta_3}; \text{ leida } \beta_1, \beta_2 \text{ ja } \beta_3.$$

[Vastused. 1) $\alpha = 20^\circ 55'$. 2) $\alpha_1 = 30^\circ 44'$, $\alpha_2 = 7^\circ 20'$, $\alpha_3 = 1^\circ 45'$. 3) $\alpha_1 = 9^\circ 25'$, $\alpha_2 = 15^\circ 18'$, $\alpha_3 = 57'$. 4) $y_1 = 16,05$, $y_2 = 9,48$, $y_3 = 2,09$. 5) $\alpha = 37^\circ 10'$. 6) $\beta_1 = 19^\circ$, $\beta_2 = 22^\circ 30'$, $\beta_3 = 63^\circ 10'$.]

3. Kui pöörame arvutuslükati keele ümber ja paigutame trigonomeetrilised skaalad tagurpidi ülespoole (esiküljele) nii, et S-skaala jääb vastu D-skaalat ja T-skaala jääb vastu A-skaalat, s. o. S-90° jääb kohakuti D-1-ga ja T-45° jääb kohakuti A-1-ga, siis S-, T- ja S&T-skaalad kujutavad pöördkskaalasid, millede abil saame arvutada suurusi, mis on pöördvõrdelised nurkade siinuste ja tangensitega. Sel juhul võimaldab D-skaala trigonomeetrilistel skaaladel esinevate nurkade siinuse ja tangensi pöördväärtuste leidmist.

Paigutades näiteks järk-järgult S- ja T-skaalal niidi 10°, 25° ja 40° peale, loeme niidi alt D-skaalal vastavad siinuse ja tangensi pöördväärtused

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} = 5,76; \quad \frac{1}{\sin 25^\circ} = 2,37; \quad \frac{1}{\sin 40^\circ} = 1,555;$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} = 5,66; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} = 2,14; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 1,191,$$

millede suurusjärk on +1, sest S- ja T-skaalal peituvad nurkade siinuse ja tangensi väärtused 0,1 ja 1 vahel.

Paigutades niidi S&T-skaalal näiteks 3° ja 2°30' peale, loeme niidi alt D-skaalal nende nurkade siinuse ja tangensi pöördväärtused, s. o.

$$\frac{1}{\sin 3^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 3^\circ} = 19,1; \quad \frac{1}{\sin 2^\circ 30'} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ 30'} = 22,9,$$

millede suurusjärk on +2, sest S&T-skaalal nurkade siinuse ja tangensi väärtused peituvad 0,01 ja 0,1 vahel.

Tähendatud võtet võime edukalt kasutada peamiselt siis, kui meil esineb mingi seerialine tehe trigonomeetriliste funktsioonidega, nagu näiteks ühe ja sama arvu jagamine mitmesuguste nurkade siinuste ja tangensitega, s. o. funktsioonide

$$y = \frac{a}{\sin x} \text{ ja } \frac{a}{\operatorname{tg} x}$$

väärtuste arvutamine konstantse a ja mitmesuguste x -i väärtuste puhul, kusjuures teeme ainult üks kord keele asetuse.

Kui siin näiteks $a = 2,46$ ja $x = 15^\circ$, 32° ja 44° , siis viime niidi D-246 peale ja lükkame S-90° (ehk T-45°) niidi alla. Edasi viime

niidi järk-järgult S-15°, S-32° ja S-44° peale ja loeme iga kord niidi alt D-skaalal otsitavad y -i väärtused, s. o.

$$\frac{2,46}{\sin 15^\circ} = 9,50; \quad \frac{2,46}{\sin 32^\circ} = 4,64; \quad \frac{2,46}{\sin 44^\circ} = 3,54.$$

Viies niidi T-15°, T-32° ja T-44° peale, saame analoogiliselt, et

$$\frac{2,46}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 9,12; \quad \frac{2,46}{\operatorname{tg} 32^\circ} = 3,94; \quad \frac{2,46}{\operatorname{tg} 44^\circ} = 2,55.$$

Kui näiteks $x = 1^\circ 40'$ ja $3^\circ 20'$, siis viime niidi S&T-1°40' ja S&T-3°20' peale ja loeme igakord niidi alt D-skaalal nende nurkade siinuse ja tangensi pöördväärtused, saades

$$\frac{2,46}{\sin 1^\circ 40'} = \frac{2,46}{\operatorname{tg} 1^\circ 40'} = 84,6; \quad \frac{2,46}{\sin 3^\circ 20'} = \frac{2,46}{\operatorname{tg} 3^\circ 20'} = 42,2.$$

Kui meil mingisuguses arvutamise protsessis tuleb tegemist teha ainult ühe trigonomeetrilise funktsiooniga, siis pole muidugi otstarbekohane kasutada esitatud võtet (aja kulu!).

4. Arvude korrutamist ja jagamist trigonomeetriliste funktsioonide ruutudega saame enamasti teostada samuti arvutuslükati keele ühe asetusega. Siin võime korrutamist ja jagamist teostada kas nii, et trigonomeetrilised skaalad jäävad allapoole (tagaküljele), või nii, et trigonomeetrilised skaalad jäävad ümberpööratult ülespoole (esiküljele). Viimasel juhul tuleb avaldasi

$$x = a \cdot \sin^2 \alpha, \quad x = \frac{a}{\sin^2 \alpha}, \quad x = a \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad x = \frac{a}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

esitada võrrete kujul

$$\frac{x}{\sin^2 \alpha} = \frac{a}{\sin^2 90^\circ}, \quad \frac{x}{\sin^2 90^\circ} = \frac{a}{\sin^2 \alpha}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg}^2 45^\circ}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{a}{\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

milledele anname arvutuslükatil arvutamiseks järgmised võrde-
kujud:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a}}{\sin 90^\circ}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{a}}{\sin \alpha}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{a}}{\operatorname{tg} 45^\circ}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{a}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Arvude korrutamisel ja jagamisel koosinus- ja kootangens-funktsioonide ruutudega tuleb need funktsioonid üle viia vastavalt siinus- ja tangensfunktsioonidele.

N ä i d e 15. $6,25 \cdot \sin^2 28^\circ 40' = ?$

I l a h e n d u s v i i s. Paigutame arvutuslükati keele nii, et trigonomeetrilised skaalad jääksid allapoole (tagaküljele). Lükates nüüd S-28°40' S-indeksi kohale, on siinuse ruudu väärtus B-skaalal A-100 kohal, mille korrutamiseks 6,25-ga viime niidi A-6'25 peale ja loeme niidi alt B-skaalal otsitava korrutise tüvenumbrid 1—4—4, kusjuures korrutise suurusjärk korrutamise juhiste kohaselt on +1. Seega.

$$6,25 \cdot \sin^2 28^\circ 40' = 1,44.$$

II lahendusviis. Pöörame arvutuslükati keele ümber, nii et trigonomeetrilised skaalad jääksid ülespoole (esiküljele). Kujutades käesolevat näidet võrdena

$$\frac{6,25}{\sin^2 90^\circ} = \frac{x}{\sin^2 28^\circ 40'}$$

ehk

$$\frac{\sqrt{6,25}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{x}}{\sin 28^\circ 40'}$$

paigutame S-90° A-6'25 kohale ja viime niidi S-28°40' peale, kus nüüd niidi all A-skaalal on otsitav x -i väärtus, s. o.

$$x = 1,44.$$

Näide 16.

$$\frac{0,325}{\text{tg}^2 17^\circ 10'} = ?$$

II lahendusviis. Paigutades T-17°10' T-indeksi kohale, on tangensi ruudu väärtus B-skaalal A-1 kohal, millega arvu 0,325 jagades viime niidi B-32'5 kohale ja loeme niidi alt A-skaalal tüvenumbrid 3—4—0, kusjuures jagatise suurusjärk jagamise juhiste kohaselt on +1. Seega

$$\frac{0,325}{\text{tg}^2 17^\circ 10'} = 3,40.$$

II lahendusviis. Kujutades esitatud näidet võrdena

$$\frac{0,325}{\text{tg}^2 17^\circ 10'} = \frac{x}{\text{tg}^2 45^\circ}$$

ehk

$$\frac{\sqrt{0,325}}{\text{tg}^2 17^\circ 10'} = \frac{\sqrt{x}}{\text{tg}^2 45^\circ}$$

viime ümberpööratud keele puhul niidi A-32'5 peale ja T-17°10' niidi alla ning loeme x -i väärtuse T-skaala vasakpoolse otsa (T-5°43') kohalt A-skaalal, s. o.

$$x = 3,40.$$

Harjutusi.

1) $1,72 \cdot \sin^2 31^\circ 20' = ?$

2) $0,415 \cdot \text{tg}^2 27^\circ 50' = ?$

3) $3,14 \cdot \sin^2 2^\circ 15' = ?$

4) $321 \cdot \text{tg}^2 52' = ?$

5) $11,8 \cdot \cos^2 54^\circ 30' = ?$

6) $222 \cdot \text{ctg}^2 78^\circ 40' = ?$

7) $\frac{0,325}{\sin^2 14^\circ 20'} = ?$

8) $\frac{1,96}{\text{tg}^2 22^\circ 15'} = ?$

9) $\frac{0,0208}{\sin^2 1^\circ 52'} = ?$

10) $\frac{0,121}{\cos^2 61^\circ 20'} = ?$

11) $\frac{0,755}{\text{ctg}^2 81^\circ 10'} = ?$

12) $\frac{43,2}{\text{ctg}^2 9^\circ 50'} = ?$

[Vastused. 1) 0,465. 2) 0,116. 3) 0,00484. 4) 0,0735. 5) 3,98. 6) 8,92. 7) 5,30. 8) 11,70. 9) 19,6. 10) 5,26. 11) 31,3. 12) 1,30.]

5. Arvude korrutamist ja jagamist trigonomeetriliste funktsioonide kuupidega, s. o. avaldisi

$$x = a \cdot \sin^3 \alpha, \quad x = \frac{a}{\sin^3 \alpha}, \quad x = a \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha, \quad x = \frac{a}{\operatorname{tg}^3 \alpha}$$

pole võimalik leida arvutuslükati keele ühe asetusega, vahepealseid resultaate lugemata ja ühelt skaalalt teisele skaalale üle kandmata, kui trigonomeetrilised skaalad jäävad allapoole (tagaküljele), sest kuupskaala on kinniskaala. Kui aga esitada need avaldised võrrete kujul

$$\frac{x}{\sin^3 \alpha} = \frac{a}{\sin^3 90^\circ}, \quad \frac{x}{\sin^3 90^\circ} = \frac{a}{\sin^3 \alpha}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg}^3 45^\circ}, \quad \frac{x}{\operatorname{tg}^3 45^\circ} = \frac{a}{\operatorname{tg}^3 \alpha},$$

milledele arvutuslükatiga arvutamiseks anname järgmised kujud

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sin 90^\circ}, \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sin \alpha}, \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\operatorname{tg} 45^\circ}, \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\operatorname{tg} \alpha},$$

siis on neid ümberpööratud keele puhul enamasti võimalik arvutada keele ühe asetusega.

Näide 17. $\frac{15,4}{\sin^3 38^\circ 40'} = ?$

Kujutame antud avaldise võrdena

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt[3]{15,4}}{\sin 38^\circ 40'}$$

ja paigutame arvutuslükati keele nii, et trigonomeetrilised skaalad jääksid ülespoole (esiküljele). Viime nüüd niidi K-15'4 peale ja S-38°40' niidi alla ning loeme x-i väärtuse S-90° kohalt K-skaalal, kus esinevad x-i tüvenumbrid 6—3—0. Võrdest nähtub otseselt, et x-i suurusjärk on +2 ning seega

$$x = \frac{15,4}{\sin^3 38^\circ 40'} = 63,0.$$

Näide 18. $\frac{0,42}{\operatorname{ctg}^3 2^\circ 45'} = ?$

Teisendame antud avaldist:

$$\frac{0,42}{\operatorname{ctg}^3 2^\circ 45'} = 0,42 \cdot \operatorname{tg}^3 2^\circ 45',$$

mille esitame võrdena

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{tg} 2^\circ 45'} = \frac{\sqrt[3]{0,42}}{\operatorname{tg} 45^\circ}.$$

Viime niidi K-420 peale ja paigutame T-45° niidi kohale. Siis viime niidi S&T-2°45' peale ja loeme x-i väärtuse niidi alt K-skaalalt,

kus esinevad x -i tüvenumbrid 4—6—5. Siin võib suurusjärgu määrata avaldise $0,42 \cdot \text{tg}^3 2^\circ 45'$ tegurite jämedalt ümardamise teel:

$$0,4 \cdot 0,05^3 = \frac{4 \cdot 5^3}{10 \cdot 1\,000\,000} = \frac{5}{100\,000} = 0,00005. \text{ Seega}$$

$$x = \frac{0,42}{\text{ctg}^3 2^\circ 45'} = 0,0000465.$$

Harjutusi.

1) $8,6 \cdot \sin^3 52^\circ 30' = ?$

2) $42,5 \cdot \cos^3 74^\circ 15' = ?$

3) $630 \cdot \text{tg}^3 1^\circ 55' = ?$

4) $0,73 \cdot \text{ctg}^3 2^\circ 20' = ?$

5) $\frac{3,7}{\sin^3 12^\circ 25'} = ?$

6) $\frac{0,58}{\cos^3 26^\circ 30'} = ?$

7) $\frac{0,0184}{\text{tg}^3 3^\circ 32'} = ?$

8) $\frac{94}{\text{ctg}^3 62^\circ 40'} = ?$

[Vastused. 1) 4,29. 2) 0,845. 3) 0,0236. 4) 10810. 5) 370. 6) 0,810. 7) 78,2. 8) 681.]

§ 15. KOLMNURKADE LAHENDAMINE.

1. Täisnurkse kolmnurga lahendamisel, s. o. kolmnurga otsitavate külgede ja nurkade leidmisel, võib esineda üldiselt neli juhtu, mida määravad kolmnurga antud elemendid:

- 1) üks kaatet ja hüpotenuus,
- 2) kaks kaatetit,
- 3) üks kaatet ja teravnurk,
- 4) hüpotenuus ja teravnurk.

Kolmnurkade lahendamist arvutuslükati abil selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 1. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet $a = 0,345$ dm ja hüpotenuus $c = 0,585$ dm. Leida kolmnurga nurgad α ja β ning teine kaatet b .

I lahendusviis. Kuna täisnurkses kolmnurgas kaateti ja hüpotenuusi suhe määrab sellele kaatetele vastasnurga siinuse, s. o.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{0,345}{0,585},$$

siis nurga α leidmiseks paigutame niidi D-585 peale ja viime C-345 niidi alla, kusjuures nüüd jagatis (suurusjärguga 0) on D-10 kohal C-skaalal, millele (arvutuslükatit ümber keerates) vastab S-indeksi kohal $36^\circ 08'$. Seega

$$\alpha = 36^\circ 08'$$

ja

$$\beta = 90^\circ - 36^\circ 08' = 53^\circ 52'.$$

Kuna täisnurkses kolmnurgas on kaatet võrdne hüpotenuusi ja vastasnurga siinuse korrutisega, siis teise kaateti b leiame valem

$$b = c \sin \beta = 0,585 \cdot \sin 53^\circ 52'$$

järgi. Paigutame S- $53^\circ 52'$ S-indeksi kohale, kus nüüd siinuse väärtus on C-skaalal D-10 kohal, mille korrutamiseks 0,585-ga viime niidi D-585 peale ja loeme niidi alt C-skaalal 4—7—2, kusjuures korrutamise juhiste kohaselt korrutise suurusjärk on 0. Seega

$$b = 0,472 \text{ dm.}$$

II lahendusviis. Keerame arvutuslükati keele ümber, nii et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala jääb vastu D-skaalat. Nurga α leidmiseks kasutame võrret

$$\frac{\sin \alpha}{0,345} = \frac{\sin 90^\circ}{0,585},$$

mille puhul paigutame niidi D-585 peale, lükkame S-skaala parempoolse otsa (S- 90°) niidi alla ja viime niidi D-345 peale, kus nüüd niidi all S-skaalal on nurga α väärtus, s. o.

$$\alpha = 36^\circ 08',$$

ning seega

$$\beta = 90^\circ - 36^\circ 08' = 53^\circ 52'.$$

Viies niidi edasi S- $53^\circ 52'$ peale, on teise kaateti b väärtus D-skaalal niidi all, s. o.

$$b = 0,472 \text{ dm.}$$

Märkus. Kui käesolevas näites oleks kaatet $a = 0,0345$ dm ja hüpotenuus $c = 0,585$ dm, siis $\sin \alpha$ loomulik väärtus oleks 10 korda väiksem kui $a = 0,345$ dm puhul, ning seega oleks ka suurusjärk -1 , mille puhul nurga α väärtus tuleb lugeda niidi alt S&T-skaalalt, s. o. $\alpha = 3^\circ 23'$, ning seega $\beta = 86^\circ 37'$. Viies nüüd niidi S- $86^\circ 37'$ peale, on niidi all D-skaalal $b = 0,583$ dm.

Näide 2. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on $a = 8,15$ cm ja $b = 13,65$ cm. Leida kolmnurga nurgad α ja β ning hüpotenuus c .

I lahendusviis. Täisnurkses kolmnurgas on nurga tangens võrdne vastaskaateti ja lähiskaateti suhtega, s. o.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \text{ ja } \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a},$$

milledest võtame selle nurga tangensi, mis on ühest väiksem, et otseselt leida nurk T-skaalalt (või S&T-skaalalt). Kuna siin a on väiksem b -st, siis võtame

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8,15}{13,65}.$$

Nurga α leidmiseks paigutame niidi D-1365 peale ja viime C-815 niidi alla, kus jagatis (suurusjärguga 0) on C-skaalal D-1 kohal, millele vastab T-indeksi kohal $30^\circ 50'$. Seega

$$\alpha = 30^\circ 50'.$$

ja

$$\beta = 90^\circ - 30^\circ 50' = 59^\circ 10'.$$

Hüpotenuusi c leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8,15}{\sin 30^\circ 50'}$$

järgi. Paigutades S-30°50' S-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\sin 30^\circ 50'}$ väärtus (suurusjärguga +1) D-skaalal C-1 kohal, kuhu asetame ka niidi; selle korrutamiseks 8,15-ga lükkame C-10 niidi kohale ja viime siis niidi C-815 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalalt loeme hüpotenuusi c väärtuse (suurusjärguga +2), s. o.

$$c = 15,90 \text{ cm.}$$

II lahendusviis. Ümberpööratud keele puhul (arvestades eelmises lahendusviisis esinevaid valemeid) kasutame nurga α leidmiseks võrret

$$\frac{\text{tg } \alpha}{8,15} = \frac{\text{tg } 45^\circ}{13,65},$$

mille puhul paigutame T-skaala vasakpoolse otsa (T-5°43') D-1365 kohale ja viime niidi D-815 peale, kus nüüd niidi alt T-skaalalt loeme nurga α väärtuse, s. o.

$$\alpha = 30^\circ 50',$$

ning seega

$$\beta = 90^\circ - 30^\circ 50' = 59^\circ 10'.$$

Hüpotenuusi c leidmiseks, kasutades võrret

$$\frac{c}{\sin 90^\circ} = \frac{8,15}{\sin 30^\circ 50'}$$

ja jättes niidi D-815 peale, toome S-30°50' niidi alla ja loeme c väärtuse (suurusjärguga +2) S-skaala vasakpoolse otsa (S-5°44') kohalt D-skaalalt, s. o.

$$c = 15,90 \text{ cm.}$$

Näide 3. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet $a = 34,2$ cm ja vastasnurk $\alpha = 37^\circ 30'$. Leida teine kaatet b ja hüpotenuus c .

Teine teravnurk on siin

$$\beta = 90^\circ - 37^\circ 30' = 52^\circ 30'.$$

I lahendusviis. Kaatet b on võrdne kaateti a ja nurga β tangensi korrutisega, s. o.

$$b = a \cdot \text{tg } \beta = 34,2 \cdot \text{tg } 52^\circ 30' = \frac{34,2}{\text{tg } 37^\circ 30'}.$$

Paigutades T-37°30' T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\text{tg } 37^\circ 30'}$ väärtus (suurusjärguga +1) D-skaalal C-10 kohal, mille korrutamiseks 34,2-ga viime niidi C-10 kohale ja C-1 niidi alla ning siis viime

niidi C-342 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalalt loeme 4—4—5, mis määrab kaateti b väärtuse (suurusjärguga +2), s. o.

$$b = 44,5 \text{ cm.}$$

Hüpotenuusi c leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{34,2}{\sin 37^{\circ}30'}$$

järgi analoogiliselt eelmises näites esineva käsitusviisi kohaselt, saades

$$c = 56,2 \text{ cm.}$$

II lahendusviis. Ümberpööratud keele puhul, kasutades võrret

$$\frac{b}{\operatorname{tg} 45^{\circ}} = \frac{34,2}{\operatorname{tg} 37^{\circ}30'}$$

viime niidi D-342 peale ja lükkame T-37°30' niidi alla, kus nüüd T-skaala parempoolse otsa (T-45°) kohal D-skaalal on kaateti b väärtus (suurusjärguga +2), s. o.

$$b = 44,5 \text{ cm.}$$

Hüpotenuusi c leidmiseks, kasutades võrret

$$\frac{c}{\sin 90^{\circ}} = \frac{34,2}{\sin 37^{\circ}30'}$$

ja jättes niidi D-342 peale, toome S-37°30' niidi alla ja loeme c väärtuse (suurusjärguga +2) S-skaala parempoolse otsa (S-90°) kohalt D-skaalalt, s. o.

$$c = 56,2 \text{ cm.}$$

Näide 4. Täisnurkses kolmnurgas hüpotenuus $c = 485$ mm ja nurk $\alpha = 70^{\circ}$. Leida kaatetid a ja b .

Nurk β on siin

$$\beta = 90^{\circ} - 70^{\circ} = 20^{\circ}.$$

I lahendusviis. Kaatetid a ja b leiame valemite

$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha = 485 \cdot \sin 70^{\circ}, \\ b &= c \sin \beta = 485 \cdot \sin 20^{\circ} \end{aligned}$$

järgi (eelmise §-i näite 9 kohaselt), paigutades esimesel juhul kaateti a leidmiseks S-70° S-indeksi kohale ja teisel juhul kaateti b leidmiseks S-20° S-indeksi kohale; mõlemal juhul viime siis niidi D-485 peale ja loeme niidi alt C-skaalalt esimesel juhul

$$a = 456 \text{ mm}$$

ja teisel juhul

$$b = 166 \text{ mm.}$$

II lahendusviis. Ümberpööratud keele puhul, kasutades võrrandeid

$$\frac{485}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 20^\circ},$$

saame mõlemad kaatetid leida arvutuslükati keele ühe asetusega. Selleks viime niidi D-485 peale ja lükkame S-skaala parempoolse otsa (S-90°) niidi alla. Siis viime niidi järgemööda S-70° ja S-20° peale ning loeme niidi alt vastavalt kaatetite a ja b väärtused, s. o.

$$a = 456 \text{ mm}, \quad b = 166 \text{ mm}.$$

Harjutusi. Täisnurkses kolmnurgas:

- | | | | | |
|----------------------------|--------------------------|---------|-------------|---------|
| 1) $a = 15,8 \text{ cm},$ | $c = 21,4 \text{ cm};$ | $a = ?$ | $\beta = ?$ | $b = ?$ |
| 2) $b = 0,525 \text{ dm},$ | $c = 0,765 \text{ dm};$ | $a = ?$ | $\beta = ?$ | $a = ?$ |
| 3) $a = 3,02 \text{ cm},$ | $b = 4,16 \text{ cm};$ | $a = ?$ | $\beta = ?$ | $c = ?$ |
| 4) $a = 8,05 \text{ cm},$ | $b = 6,65 \text{ cm};$ | $a = ?$ | $\beta = ?$ | $c = ?$ |
| 5) $a = 6,45 \text{ cm},$ | $\alpha = 33^\circ 30';$ | $b = ?$ | $c = ?$ | |
| 6) $b = 11,1 \text{ cm},$ | $\alpha = 43^\circ 50';$ | $a = ?$ | $c = ?$ | |
| 7) $c = 0,745 \text{ dm},$ | $\beta = 27^\circ 20';$ | $a = ?$ | $b = ?$ | |

[Vastused.

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1) $a = 47^\circ 35',$ | $\beta = 42^\circ 25',$ | $b = 14,43 \text{ cm}.$ |
| 2) $a = 46^\circ 40',$ | $\beta = 43^\circ 20',$ | $a = 0,556 \text{ dm}.$ |
| 3) $a = 35^\circ 59',$ | $\beta = 54^\circ 01',$ | $c = 5,14 \text{ cm}.$ |
| 4) $a = 50^\circ 27',$ | $\beta = 39^\circ 33',$ | $c = 10,44 \text{ cm}.$ |
| 5) $b = 9,74 \text{ cm},$ | $c = 11,68 \text{ cm}.$ | |
| 6) $a = 10,66 \text{ cm},$ | $c = 15,39 \text{ cm}.$ | |
| 7) $a = 0,662 \text{ dm},$ | $b = 0,342 \text{ dm}.]$ | |

2. Vaatleme üldkolmnurga lahendamist arvutuslükati abil, kui kolmnurga küljed on a , b ja c ning nende külgede vastasnurgad α , β ja γ . Üldkolmnurga lahendamisel saame üles seada samuti neli juhtu, mida määravad kolmnurga kolm antud elementi, millede hulgas on vähemalt üks külg, s. o.

- 1) üks külg ja kaks nurka,
- 2) kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk,
- 3) kaks külge ja nende vaheline nurk,
- 4) kolm külge.

Esimesel ja teisel juhul arvutuslükati abil kolmnurka lahendades kasutame siinusvalemit

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

kolmandal juhul tangensvalemit

$$\frac{a+b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

ja neljanda juhu puhul poolnurga tangensi valemit

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

kus p on kolmnurga pool perimeetrit, s. o.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Kolmnurkade lahendamiseks siinus- ja tangensivalemi (kui võrrete) abil pöörame arvutuslükati keele ümber, nii et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala vastu D-skaalat. Tähendatud valemite rakendamist kolmnurkade lahendamisel arvutuslükati abil selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 5. Kolmnurga üks külg $a = 17,1$ cm, $\beta = 45^\circ$ ja $\gamma = 60^\circ$. Leida a , b ja c .

Siin

$$a = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Küljed b ja c leiame siinusvalemi

$$\frac{17,1}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

järgi. Selleks viime niidi D-171 peale ja paigutame S-75° niidi alla; viime niidi S-45° peale, kus niidi all D-skaalal on 1—2—5—4, ja viies edasi niidi S-60° peale, on niidi all D-skaalal 1—5—3—6. Kuna käsitletavas siinusvalemis esimese osa lugeja suurusjärk on + 2 ja kõik nimetajad on ühe ja sama suurusjärguga, siis peavad ka b ja c suurusjärgud olema + 2, s. o.

$$b = 12,54 \text{ cm}, c = 15,36 \text{ cm}.$$

Näide 6. Kolmnurgas on antud: $a = 2,82$ cm, $b = 2,38$ cm ja $\alpha = 25^\circ 40'$. Leida c , β ja γ .

Siinusvalemi järgi

$$\frac{2,82}{\sin 25^\circ 40'} = \frac{2,38}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Viime niidi D-282 peale ja lükkame S-25°40' niidi alla: viies nüüd niidi D-238 peale, on nurga β väärtus S-skaalal niidi all 21°30'. Seega

$$\beta = 21^\circ 30'$$

ja järelikult

$$\gamma = 180^\circ - (25^\circ 40' + 21^\circ 30') = 132^\circ 50'$$

ning

$$\sin 132^\circ 50' = \sin (180^\circ - 132^\circ 50') = \sin 47^\circ 10'.$$

Viies nüüd niidi edasi S-47°10' peale, on niidi all D-skaalal 4—7—7. Kuna siinusvalemi esimese (ja ka teise) osa lugeja suurusjärk on + 1 ja nimetajatel on üks ja sama suurusjärk, siis on c suurusjärk + 1, s. o.

$$c = 4,77 \text{ cm}.$$

Näide 7. Kolmnurgas on antud: $a = 56,5$ cm, $b = 74,5$ cm ja $\alpha = 42^{\circ}30'$. Leida c , β ja γ .

Kuna siin antud nurga vastaskülge on lühem kui teine antud külge, siis seega on kolmnurgal kaks lahendit. Kasutades siinusvalemit

$$\frac{56,5}{\sin 42^{\circ}30'} = \frac{74,5}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

viime niidi D-565 peale ja lükkame S- $42^{\circ}30'$ niidi alla ning seejärel viime niidi D-745 peale, kus nüüd niidi all S-skaalal on 63° . Seega

$$\beta_1 = 63^{\circ}, \beta_2 = 180^{\circ} - 63^{\circ} = 117^{\circ}$$

ja

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 180^{\circ} - (42^{\circ}30' + 63^{\circ}) = 180^{\circ} - 105^{\circ}30' = 74^{\circ}30', \\ \gamma_2 &= 180^{\circ} - (42^{\circ}30' + 117^{\circ}) = 180^{\circ} - 159^{\circ}30' = 20^{\circ}30'. \end{aligned}$$

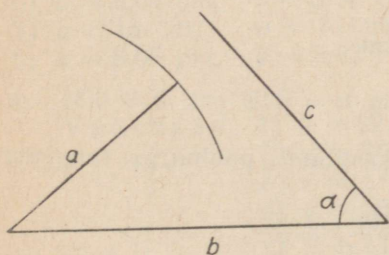
Külge c kaks väärtust leiame, kui viime niidi edasi S- $74^{\circ}30'$ peale ja siis S- $20^{\circ}30'$ peale, kus esimesel korral on niidi all 8—0—5 ja teisel korral 2—9—2. Siin on mõlema c suurusjärk + 2, s. o.

$$c_1 = 80,5 \text{ cm}, c_2 = 29,2 \text{ cm}.$$

Näide 8. Kolmnurgas on antud: $a = 3$ cm, $b = 5$ cm ja $\alpha = 50^{\circ}$. Leida c , β ja γ .

Kasutades siinusvalemit

$$\frac{3}{\sin 50^{\circ}} = \frac{5}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$



Joon. 23.

paigutame niidi D-3 kohale ja lükkame S- 50° niidi alla. Viies nüüd niidi D-5 peale, näeme, et niit satub väljapoole S-skaalat. Sellest järeldub, et kolmnurgal pole lahendit, nagu nähtub ka siinjuures toodud jooniselt 23, mis näitab, et külge a ei ulatu küljeni c .

Näide 9. Kolmnurgas on antud: $a = 11,5$ cm, $b = 15,3$ cm ja $\gamma = 111^{\circ}20'$. Leida c , α ja β .

Et siin on antud kaks külge a ja b , kus a on väiksem b -st, ja nendevaheline nurk γ , siis kasutame kolmnurga lahendamiseks tangensvalemit järgmiselt:

$$\frac{b+a}{\operatorname{tg} \frac{\beta+\alpha}{2}} = \frac{b-a}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\alpha}{2}},$$

s. o.

$$\frac{26,8}{\operatorname{tg} 34^{\circ}20'} = \frac{3,8}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\alpha}{2}},$$

sest

$$b + a = 15,3 + 11,5 = 26,8,$$

$$b - a = 15,3 - 11,5 = 3,8,$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 111^\circ 20'}{2} = 34^\circ 20'.$$

Paigutame niidi D-268 peale ja lükkame T-34°20' niidi alla. Viies niidi edasi D-38 peale, tuleb kraadide arv võtta niidi alt S&T-skaalalt (mitte T-skaalalt), sest tangensvalemis esimese murru lugeja (26,8) suurusjärg on +2 ja nimetaja suurusjärg 0, kuid teise murru lugeja (3,8) suurusjärg on +1, mille puhul nimetaja suurusjärg peab olema -1, millele (kui tangensi väärtusele) vastab kraadide ja minutite arv S&T-skaalal. Niidi all S&T-skaalal on 5°34'. Seega

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 5^\circ 34'.$$

Et aga

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 34^\circ 20',$$

siis kahest viimasest võrdusest (kui võrranditest kahe tundmatuga α ja β) leiame lahutamise ja liitmise teel, et

$$\alpha = 28^\circ 46', \quad \beta = 39^\circ 54'.$$

Kolmnurga külje c leiame siinusvalemi

$$\frac{11,5}{\sin 28^\circ 46'} = \frac{c}{\sin 111^\circ 20'} = \frac{c}{\sin 68^\circ 40'}$$

järgi näite 5 kohaselt; saame:

$$c = 22,3 \text{ cm.}$$

Näide 10. Kolmnurga küljed on $a = 7,12$ cm, $b = 6,34$ cm ja $c = 5,04$ cm. Leida α , β ja γ .

Selle kolmnurga lahendamiseks kasutame poolnurga tangensi valemit

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Kuna siin

$$p = \frac{7,12 + 6,34 + 5,04}{2} = 9,25,$$

$$p - a = 9,25 - 7,12 = 2,13,$$

$$p - b = 9,25 - 6,34 = 2,91,$$

$$p - c = 9,25 - 5,04 = 4,21,$$

siis

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2,91 \cdot 4,21}{9,25 \cdot 2,13}},$$

mille arvutamiseks paigutame arvutuslükati keele nõnda, et B-skaala jääks vastu A-skaalat ja C-skaala vastu D-skaalat. Teos-

tades juurealuse avaldise arvutamist lükati ülemisel jaotusel (s. o. A- ja B-skaalaga), saame juurealuse avaldise väärtuse A-skaalal (B-100 kohal) ja juure väärtuse D-skaalal (C-10 kohal), kus esineb 7—8—9. Tegureid jämedalt ümardades nähtub, et juure väärtuse suurusjärk on 0. Seega juure väärtus on 0,789. Paigutades C-789 D-1 kohale, on T-indeksi kohal T-skaalal $38^{\circ}15'$. Järelikult

$$a = 76^{\circ}30'.$$

Edasi leiame nurgad β ja γ siinusvalemi

$$\frac{7,12}{\sin 76^{\circ}30'} = \frac{6,34}{\sin \beta} = \frac{5,04}{\sin \gamma}$$

järgi. Selleks keerame arvutuslükati keele ümber, viime niidi D-712 peale ja paigutame S- $76^{\circ}30'$ niidi alla; siis loeme niidiga D-634 ja D-504 kohalt S-skaalal β ja γ väärtused, s. o.

$$\beta = 60^{\circ}, \quad \gamma = 43^{\circ}30'.$$

Harjutusi. Lahendada kolmnurk, kui

- | | | | |
|--------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| 1) $a = 26,3$ cm, | $a = 36^{\circ}20'$, | $\beta = 71^{\circ}40'$; | $b = ?$ $c = ?$ |
| 2) $b = 17,1$ cm, | $\beta = 43^{\circ}30'$, | $\gamma = 82^{\circ}$; | $a = ?$ $c = ?$ |
| 3) $a = 4,15$ dm, | $b = 5,05$ dm, | $\beta = 63^{\circ}30'$; | $a = ?$ $\gamma = ?$ $c = ?$ |
| 4) $b = 18,3$ cm, | $c = 15,6$ cm, | $\gamma = 33^{\circ}10'$; | $a = ?$ $\beta = ?$ $a = ?$ |
| 5) $a = 0,355$ dm, | $b = 0,555$ dm, | $\gamma = 133^{\circ}30'$; | $a = ?$ $\beta = ?$ $c = ?$ |
| 6) $b = 8,04$ cm, | $c = 3,36$ cm, | $a = 110^{\circ}50'$; | $\beta = ?$ $\gamma = ?$ $a = ?$ |
| 7) $a = 18$ cm, | $b = 16$ cm, | $c = 12$ cm; | $a = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$ |
| 8) $a = 8,05$ cm, | $b = 5,92$ cm, | $c = 4,37$ cm; | $a = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$ |

- [Vastused. 1) $b = 42,1$ cm, $c = 42,2$ cm.
 2) $a = 20,2$ cm, $c = 24,6$ cm.
 3) $a = 47^{\circ}20'$, $\gamma = 69^{\circ}10'$, $c = 5,27$ dm.
 4) $a = 106^{\circ}55'$, $\beta = 39^{\circ}55'$, $a = 27,3$ cm.
 5) $a = 17^{\circ}50'$, $\beta = 28^{\circ}40'$, $c = 0,841$ dm.
 6) $\beta = 50^{\circ}22'$, $\gamma = 18^{\circ}48'$, $a = 9,74$ cm.
 7) $a = 78^{\circ}30'$, $\beta = 60^{\circ}40'$, $\gamma = 40^{\circ}50'$.
 8) $a = 102^{\circ}$, $\beta = 46^{\circ}$, $\gamma = 32^{\circ}$.]

§ 16. TÄHISED: q° , q' , q'' , q_{\dots}

Arvutuslükati C- ja D-skaalal märgitud tähised q° , q' ja q'' tähendavad radiaani väärtusi kraadides, minutites ja sekundites (joon. IV ja V), s. o.

$$q^{\circ} = \frac{360}{2\pi} = 57,3^{\circ},$$

$$\varrho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3438',$$

$$\varrho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 206265'',$$

kus ϱ° suurusjärk on + 2, ϱ' suurusjärk + 4 ja ϱ'' suurusjärk + 6.

Kui mõnedel arvutuslükatitel puudub tähis ϱ° , siis kasutame selle asemel suurust

$$\frac{180}{\pi} = 57,3.$$

Tähis ϱ , tähendab samuti radiaani väärtust sekundites, kuid võetud sentesimaaljaotuses, kus täisnurk on jaotatud 100 kraadiks, iga kraad 100 minutiks ja iga minut 100 sekundiks. s. o.

$$\varrho_{,,} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2} = 636620'',$$

mille suurusjärk on + 6.

Nendest tähistest esinevad arvutuslükati C- ja D-skaalal (mõnikord ainult C-skaalal) peamiselt ϱ' ja ϱ'' ning neid kasutatakse:

a) nurga radiaanmõõdu või ringi kaare pikkuse leidmiseks, kui on antud vastav kesk- ja ringi raadius või diameeter, ning samuti

b) väikeste ($< 34,4'$) nurkade siinuse ja tangensi väärtuste leidmiseks.

Kui ringi kaare pikkus on s ja selle kaare või vastava kesk- ja ringi raadiused, minutite või sekundite arv on α , siis kaare pikkuse määrab valem

$$s = \frac{\alpha}{\varrho},$$

millest

$$\alpha = s \cdot \varrho,$$

kus α ja ϱ on mõlemad kraadides, minutites või sekundites.

Näide 1. Leida ringi kaare pikkus s , kui sellele vastav kesk- ja ringi raadius α sisaldab $18^\circ 30'$ (oletades, et ringi raadius $r = 1$).

Lükatiga arvutamiseks muudame kesk- ja ringi raadiused kraadideks, s. o. $18^\circ 30' = 18,5^\circ$, või minutiteks, s. o. $18^\circ 30' = 1110'$. Kui viime nüüd niidi näiteks D-1110 peale ja lükkame C- ϱ' niidi alla, siis on ka ühtlasi D-185 C- ϱ° kohal, kusjuures ringi kaare pikkuse määrab C-10 kohalt D-skaalal võetav arv 323, mis tuleb jagada 1000-ga, s. o.

$$s = \frac{18,5^\circ}{\varrho^\circ} = \frac{1110'}{\varrho'} = 0,323 \text{ (raadiuse pikkust),}$$

mis on ühtlasi nurga radiaanmõõduks.

Näide 2. Mitu kraadi ja minutit sisaldab nurk, mille radiaanmõõt on 0,158.

Paigutame C-1 D-158 kohale ja viime niidi C- ϱ° või C- ϱ' peale; siis loeme niidi alt D-skaalal esimesel juhul 905, s. o.

$$\alpha = 0,158 \cdot \varrho^\circ = 9,05^\circ,$$

ja teisel juhul 543, s. o.

$$\alpha = 0,158 \cdot \varrho' = 543'.$$

Seega

$$9,05^\circ = 543' = 9^\circ 3'.$$

Et meeles pidada, mismoodi kraadid, minutid ja sekundid üle viia radiaanmõõtu ja ümberpöörduvalt, selleks tuleb meeles pidada, et ϱ° , ϱ' ja ϱ'' on nimega arvud, kuid radiaanid on nimetud arvud. Seega nurga radiaanmõõdu (kui nimetu arvu) saamiseks tuleb kraadide, minutite või sekundite arv jagada vastavalt tähistega ϱ° , ϱ' või ϱ'' väärtustega, kuid ümberpöörduvalt, nurga kraadide, minutite või sekundite (kui nimega arvu) saamiseks tuleb nurga radiaanmõõt korrutada vastavalt tähistega ϱ° , ϱ' või ϱ'' väärtusega.

Nagu eespool (§ 13, p. 2, märkus) nägime, kui nurk α on väiksem 34,4'-st, siis S&T-skaala abil pole enam võimalik leida siinuse ja tangensi väärtusi. Niisuguste väikeste nurkade puhul kus s on kesknurgale α vastav ringi kaar, võime võtta

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = s = \frac{\alpha}{\varrho},$$

kus α ja ϱ on mõlemad minutites või sekundites.

Näide 3. $\sin 9' = ?$

Siin võime kirjutada ja jagades leida, et

$$\sin 9' = \frac{9'}{\varrho'} = 0,00262,$$

mis on antud nurga siinuse väärtuseks.

Näide 4. $\operatorname{tg} 46'' = ?$

Siin saame jagamisel tangensi väärtuse

$$\operatorname{tg} 46'' = \frac{46''}{\varrho''} = 0,000223.$$

Harjutusi. Määrata alljärgnevad nurgad radiaanmõõdus:

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|----------|----------------|-------------|
| 1) 40° | 4) $16^\circ 16'$ | 7) $52'$ | 10) $14' 20''$ | 13) $24''$ |
| 2) $62^\circ 40'$ | 5) $6^\circ 23'$ | 8) $20'$ | 11) $7' 16''$ | 14) $58''$ |
| 3) $84^\circ 20'$ | 6) $2^\circ 08'$ | 9) $8'$ | 12) $42''$ | 15) $6''$. |

[Vastused. 1) 0,698. 2) 1,094. 3) 1,472. 4) 0,214, 5) 0,1114. 6) 0,0373. 7) 0,01512. 8) 0,00582. 9) 0,00233. 10) 0,00417. 11) 0,00211. 12) 0,000204. 13) 0,0001164. 14) 0,000281. 15) 0,0000291.]

Leida nurk kraadides ja minutites, kui selle radiaanmõõt on:

- | | | |
|----------|---------|-------------|
| 1) 0,234 | 4) 1,56 | 7) 0,0885 |
| 2) 0,567 | 5) 2,72 | 8) 0,0424 |
| 3) 0,895 | 6) 3,89 | 9) 0,00555. |

- [Vastused. 1) $13^{\circ}24'$. 2) $32^{\circ}29'$. 3) $51^{\circ}17'$. 4) $89^{\circ}23'$.
5) $155^{\circ}51'$. 6) $222^{\circ}53'$. 7) $5^{\circ}04'$. 8) $2^{\circ}26'$. 9) $19'$.]

Leida järgmiste nurgafunktsioonide väärtused:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $\sin 25' = ?$ | 5) $\sin 32'' = ?$ |
| 2) $\operatorname{tg} 16'40'' = ?$ | 6) $\operatorname{tg} 8'' = ?$ |
| 3) $\sin 7'15'' = ?$ | 7) $\cos 89^{\circ}57' = ?$ |
| 4) $\operatorname{tg} 51'' = ?$ | 8) $\operatorname{ctg} 89^{\circ}58'18'' = ?$ |

- [Vastused. 1) 0,00728. 2) 0,00485. 3) 0,00211. 4) 0,000247.
5) 0,00015. 6) 0,0000388. 7) 0,000873. 8) 0,000495.]

§ 17. RUUTVÖRRANDI LAHENDAMINE.

1. Rakendades § 10-s käsitletud konstantse suuruse kaheks teguriks lahutamise võtet, võimaldavad D- ja E-skaala (või D-skaala ja ümberpööratud C-skaala) ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ehk

$$x^2 + px + q = 0,$$

kus $p = \frac{b}{a}$ ja $q = \frac{c}{a}$, reaallahendite leidmise. Viimase ruutvõrrandi lahendite korrutis on võrdne ruutvõrrandi vabaliikmega q , s. o.

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

ja lahendite summa on x -i koefitsient p vastandmargiga, s. o.

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Ruutvõrrandi lahendamiseks arvutuslükati abil teisendame esitatud ruutvõrrandi, jagades selle mõlemad pooled x -ga; seega saame

$$x + \frac{q}{x} = -p$$

ehk

$$x + \frac{q}{x} = s,$$

mida nimetame ruutvõrrandi normaalkujuks ehk lühidalt normaalkujuks, kus

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ ja } x_1 + x_2 = s,$$

mis võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed suurused.

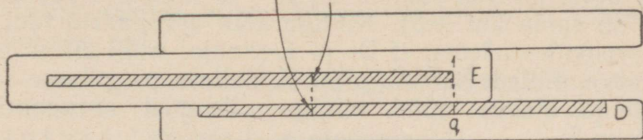
Selleks, et leida arvutuslükati abil ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

reaallahendid x_1 ja x_2 , muudame selle normaalvõrrandiks

$$x + \frac{q}{x} = s.$$

$$x + \frac{q}{x} = s$$



Joon. 24.

Paigutame E-1 või E-10 D-q kohale ja otsime D-skaalal niisugust arvu x , mille summa E-skaalal (x -ga kohakuti) oleva arvuga $\frac{q}{x}$ on s (joon. 24.)

Paigutades E-1 või E-10 D-q kohale, võime niidi abil lugeda (niidi alt) D- ja E-skaala arvupaare, mis kõik rahuldavad korrutist $x_1 \cdot x_2 = q$. Nendest arvupaaridest tuleb võtta ainult niisugune, mis rahuldab ruutvõrrandit. Selleks kasutame normaalvõrrandi lahendite teist omadust, s. o. $x_1 + x_2 = s$. Tähendab, kõikidest arvupaaridest tuleb võtta ainult see arvupaar, mille summa on s . Nii lejame üheaegselt ruutvõrrandi mõlemad lahendid x_1 ja x_2 .

N ä i d e 1. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 6x + 7 = 0$ lahendid. Ruutvõrrandi normaalkuju on

$$x + \frac{7}{x} = 6,$$

mille mõlemad lahendid on positiivsed, sest nende korrutis ja summa on mõlemad positiivsed, s. o.

$$x_1 \cdot x_2 = 7 \text{ ja } x_1 + x_2 = 6.$$

Paigutame E-1 D-7 kohale ja lükkame niidi niisugusele kohale, et D-skaalal ja E-skaalal niidi all olevate arvude summa oleks 6. Näiteks,

kui D-skaalal $x_1 = 4,3$	4,4	4,41	4,42	4,43,
siis E-skaalal $x_2 = 1,63$	1,59	1,587	1,585	1,58
ja summa $s = 5,93$	5,99	5,997	6,005	6,01.

Sellest tabelist näeme, et nendest arvupaaridest kõige täpsemad võrrandi lahendite väärtused on 4,41 ja 1,587. Seega võrrandi $x^2 - 6x + 7 = 0$ lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = 4,41 \text{ ja } x_2 = 1,59.$$

N ä i d e 2. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 5x + 3 = 0$ lahendid.
Selle ruutvõrrandi normaalkuju on

$$x + \frac{3}{x} = -5,$$

mille mõlemad lahendid on negatiivsed, sest nende korrutis on positiivne ja summa on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = 3$ ja $x_1 + x_2 = -5$. Paigutame E-1 D-3 kohale ja otsime niidiga D-skaalalt ja E-skaalalt arve, millede summa oleks -5 (mis arvutuslükati abil arvutades on sama kui $+5$). Niidiga kõik arvupaarid läbi otsides ja järele proovides näeme, et D- ja E-skaalal niidi all ei leidu niisuguseid arve, millede summa oleks 5 . Selleks paigutame siis E-10 D-3 kohale ja otsime nüüd niidiga niisugust arvupaari, mille summa oleks 5 :

kui D-skaalal $x_1 =$	$-4,25$	$-4,29$	$-4,30$	$-4,31$	$-4,32,$
siis E-skaalal $x_2 =$	$-0,705$	$-0,700$	$-0,698$	$-0,696$	$-0,695$
ja summa $s =$	$-4,955$	$-4,990$	$-4,998$	$-5,006$	$-5,015,$

millest näeme, et nendest arvupaaridest kõige täpsemad võrrandi lahendite väärtused on $-4,30$ ja $-0,698$. Seega võrrandi lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = -4,30 \text{ ja } x_2 = -0,70.$$

N ä i d e 3. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 3x - 8 = 0$ lahendid.
Selle ruutvõrrandi normaalkuju on

$$x - \frac{8}{x} = 3$$

ja selle lahendid on erinevate märkidega, sest lahendite korrutis on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = -8$. Kuna lahendite summa ($x_1 + x_2 = 3$) on positiivne, siis peab positiivse lahendi absoluutväärtus olema suurem negatiivse lahendi absoluutväärtusest. Paigutades siin E-1 D-8 kohale, otsime niidiga D-skaalal ja E-skaalal arve, millede summa oleks 3 , s. o.

kui D-skaalal $x_1 =$	$4,60$	$4,70$	$4,75,$
siis E-skaalal $x_2 =$	$-1,74$	$-1,70$	$-1,68$
ja summa $s =$	$2,66$	$3,00$	$3,07.$

Tähendab, antud ruutvõrrandi ligikaudsed lahendid on

$$x_1 = 4,70 \text{ ja } x_2 = -1,70.$$

N ä i d e 4. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 7x - 15 = 0$ lahendid.
Siin on normaalvõrrand

$$x - \frac{15}{x} = -7,$$

mille lahendid on samuti vastandmärkidega, sest lahendite korrutis on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = -15$, kuid positiivse lahendi abso-

luutväärtus on siin väiksem negatiivse lahendi absoluutväärtusest, sest lahendite summa ($x_1 + x_2 = -7$) on negatiivne. Paigutame käesoleval juhul E-10 D-15 kohale ja otsime niidiga D-skaalal ja E-skaalal arve, millede summa oleks -7 , s. o.

kui D-skaalal $x_1 =$	$-8,70$	$-8,71$	$-8,72$	$-8,73$	$-8,74$,
siis E-skaalal $x_2 =$	$1,725$	$1,721$	$1,72$	$1,72$	$1,718$

ja summa $s = -6,975 - 6,989 - 7,00 - 7,01 - 7,022$.

Sellest tabelist nähtub, et vaadeldava ruutvõrrandi lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = -8,72 \text{ ja } x_2 = 1,72.$$

Harjutusi. Lahendada ruutvõrrandid:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 2 = 0$ | 7) $x^2 - 1,2x - 1,2 = 0$ |
| 2) $x^2 - 5x + 2,8 = 0$ | 8) $x^2 - x - 2 = 0$ |
| 3) $x^2 - 7,7x + 6 = 0$ | 9) $x^2 - 12x - 5 = 0$ |
| 4) $x^2 + 9x + 4 = 0$ | 10) $x^2 + 6x - 3 = 0$ |
| 5) $x^2 + 8x + 2,9 = 0$ | 11) $x^2 + x - 2 = 0$ |
| 6) $x^2 + 4,2x + 3,2 = 0$ | 12) $x^2 + 3,6x - 2,72 = 0$. |

[Vastused. 1) 3,41; 0,59. 2) 4,36; 0,64. 3) 6,82; 0,88. 4) $-8,53$; $-0,47$. 5) $-7,62$; $-0,38$. 6) $-3,20$; $-1,00$. 7) 1,849; $-0,649$. 8) 2,00; $-1,00$. 9) 12,40; $-0,40$. 10) $-6,46$; 0,46. 11) $-2,00$; 1,00. 12) $-4,24$; 0,64.]

2. Eespool nägime, et ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite arvutamisel näidetes 1 ja 3 paigutasime E-1 D- q kohale ja otsisime ruutvõrrandi lahendite absoluutväärtusi vahemikes D-1 kuni D- q ja E-1 kuni E- q , kuid näidetes 2 ja 4 paigutasime E-10 D- q kohale ja otsisime ruutvõrrandi lahendite absoluutväärtusi vahemikes D- q kuni D-10 ja E- q kuni E-10, arvestades seejuures muidugi lahendite märke ja suurusjärke. Kumb E-skaala ots — kas E-1 või E-10 — paigutada D- q kohale, saame määrata katselisel teel normaalvõrrandi

$$x + \frac{q}{x} = s$$

kaudu.

Ruutvõrrandi üks või teine lahend peab alati sattuma D-skaala (või E-skaala) ühte positiivsesse või negatiivsesse vahemikku vahemikest

... (0,01; 0,1), (0,1; 1), (1; 10), (10; 100), 100; 1000), ...
või

... ($-0,01$; $-0,1$), ($-0,1$; -1), (-1 ; -10), (-10 ; -100), (-100 ; -1000) ... ehk lühidalt, vahemikku (10^k ; 10^{k+1}) või vahemikku (-10^k ; -10^{k+1}), kus $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.
Peale selle peab ruutvõrrandi üks lahend sattuma ühtlasi D-skaala

ühthe või teise osavahemikku, s. o. D-1 kuni D- q või D- q kuni D-10; teine lahend satub siis vastavalt E-skaala osavahemikku E-1 kuni E- q või E- q kuni E-10. Et näha millises D-skaala (või E-skaala) vahemikus asetseb ruutvõrrandi üks või teine lahend, selleks algame harilikult selle vahemiku uurimisest, milles asetseb arv q . Kui näiteks $q = -0,065$, siis asetseb q vahemikus $(-0,01; -0,1)$, sest

$$-0,01 > -0,065 > -0,1,$$

ja järelikult algame uurimist sellest vahemikust.

Et kindlaks määrata, millisesse vahemikku ja ühtlasi osavahe-
mikku satub ruutvõrrandi üks või teine lahend, selleks võtame
vaatluse alla alljärgneva ruutvõrrandi.

Näide 5. Leida D- ja E-skaalal osavahemikud, kus asetse-
vad ruutvõrrandi $x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$ lahendid.

Anneme ruutvõrrandile normaalkuju:

$$x + \frac{0,82}{x} = 16,45.$$

Selle ruutvõrrandi mõlemad lahendid on positiivsed, sest $q = 0,82$
ja $s = 16,45$ on positiivsed, ning seega peab üks lahend asetsema
D-skaala positiivses ja teine E-skaala positiivses vahemikus.

Esiteks teeme kindlaks, millisesse D-skaala vahemikku satub
selle ruutvõrrandi üks või teine lahend; kas..., $(0,01; 0,1)$,
 $(0,1; 1)$, $(1; 10)$ või $(10; 100)$ jne. Kuna selles võrrandis $q = 0,82$,
siis algame vahemikust, millesse kuulub q , s. o. vahemikust $(0,1; 1)$.
Paigutame selle vahemiku algväärtuse $x = 0,1$ ja lõppväärtuse
 $x = 1$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i ase-
mele, saame

$$0,1 + \frac{0,82}{0,1} = 8,3 \text{ ja } 1 + \frac{0,82}{1} = 1,82.$$

Kuna need mõlemad saadused on väiksemad kui normaalvõrrandi
parempoolne osa 16,45, siis ei saa ruutvõrrandi lahend asetsema
tähendatud vahemikus, sest selles vahemikus teevad ka kõik teised
 x -i väärtused normaalvõrrandi vasakpoolse osa väiksemaks kui
16,45. Järelikult ei ole vahemikus $(0,1; 1)$ antud ruutvõrrandil
lahendit. Kuna siin normaalvõrrandi vasakpoolne osa on $x = 1$ puhul
võrdne 1,82-ga ja $x = 0,1$ puhul 8,3-ga, mis on 16,45-le lähemal,
siis sellest järeldub, et ruutvõrrandi lahend peab asetsema vaa-
deldud vahemikust vasakul.

Võtame vaadeldud vahemikust vasakul pool oleva vahemiku
 $(0,01; 0,1)$ ja paigutame selle vahemiku algväärtuse $x = 0,01$ nor-
maalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,01 + \frac{0,82}{0,01} = 82,01,$$

millest nüüd nähtub, et antud ruutvõrrandi üks lahend peab pei-

tuma vahemikus (0,01; 0,1), sest $x = 0,1$ puhul normaalvõrrandi vasakpoolne osa oli 8,3 ning seega

$$82,01 > 16,45 > 8,3,$$

mis ütleb, et ruutvõrrandi üks lahend peab asetsema 0,01 ja 0,1 vahel, sest selles vahemikus x -i üks väärtus rahuldab antud võrrandit.

Et näha, kas see ruutvõrrandi lahend on nüüd D-skaala vasakpoolses osavahemikus (0,01; 0,082) või parempoolses osavahemikus (0,082; 0,1), selleks paigutame $x = 0,082$ normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele ja saame

$$0,082 + \frac{0,82}{0,082} = 10,082.$$

Sellest nähtub nüüd, et ruutvõrrandi üks lahend peab asetsema D-skaala vasakpoolses osavahemikus (0,01; 0,082), sest

$$82,01 > 16,45 > 10,082,$$

mille puhul antud ruutvõrrandi lahendite otsimiseks tuleb E-1 paigutada D-82 kohale.

Paigutades nüüd E-1 D-82 kohale, otsime niidiga D- ja E-skaalal arve, millede summa oleks 16,45, s. o.

kui D-skaalal $x_1 = 0,0505$	0,0503	0,05	0,0496,
siis E-skaalal $x_2 = 16,2$	16,3	16,4	16,5

ja summa $s = 16,2505$	16,3503	16,45	16,5496,
------------------------	---------	-------	----------

millest nähtub, et ruutvõrrandi $x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$ ligikaudsed lahendid on:

$$x_1 = 0,05 \text{ ja } x_2 = 16,4.$$

Ruutvõrrandi lahendi x_1 otsimisel D-skaala (või E-skaala) vahemikus (0,01; 0,1) leiame üheaegselt ka teise lahendi $x_2 = 16,4$, mis kuulub E-skaala (või D-skaala) vahemikku (10; 100) ja ühtlasi osavahemikku (10; 82). Kui oleksime alguses võtnud vahemiku (10; 100) ja paigutanud selle algväärtuse $x = 10$ ja lõppväärtuse $x = 100$ ning selle vahemiku osavahemike ühendusväärtuse $x = 82$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saaksime

$$10 + \frac{0,82}{10} = 10,082; \quad 100 + \frac{0,82}{100} = 100,0082; \quad 82 + \frac{0,82}{82} = 82,01,$$

mis näitab samuti, et teine lahend x_2 kuulub just vahemikku (10; 100) ja ühtlasi osavahemikku (10; 82), sest

$$10,082 < 16,45 < 82,01 < 100,0082.$$

Seega ruutvõrrandi

$$x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$$

üks lahend peitub D-skaala osavahemikus (0,01; 0,082) ja teine E-skaala osavahemikus (10; 82), või ümberpöörduvalt. Lahendite suurusjärku pole siin vaja eraldi arvutada, sest osavahemik määrab automaatselt ka selles peituva lahendi suurusjärgu.

Kui uuriksime käesoleva ruutvõrrandi lahendite otsimisel näiteks D-skaala vahemikku (0,1; 1) ja nimelt selle vahemiku parempoolset osavahemikku (0,82; 1), siis näeksime, et osavahemiku algväärtuse $x = 0,82$ ja lõppväärtuse $x = 1$ puhul on normaalvõrrandi vasakpoolsed osad võrdsed, s. o.

$$0,82 + \frac{0,82}{0,82} = 1,82 \text{ ja } 1 + \frac{0,82}{1} = 1,82,$$

kuid selle osavahemiku vahepealsete x -i väärtuste puhul on normaalvõrrandi vasakpoolsed osad ikkagi erinevad. Niisugust erandlikku osavahemikku nimetatakse kriitiliseks osavahemikuks. Kriitilise osavahemiku alg- ja lõppväärtuse puhul ei saa kindlaks määrata, kas selles osavahemikus peitub või ei peitu ruutvõrrandi üks või teine lahend. Selleks tuleb uurida vahepealseid väärtusi.

Kriitiliseks osavahemikuks on see osavahemik, mis sisaldab \sqrt{q} *. Kui q on negatiivne, siis kriitilist osavahemikku ei ole. Kui aga q on positiivne, siis esineb ikka ja alati kaks kriitilist osavahemikku — positiivne ja negatiivne — vastavalt arvudele $+\sqrt{q}$ ja $-\sqrt{q}$, kuid ruutvõrrandi lahend võib peituda ainult ühes kriitilises osavahemikus, sõltuvalt normaalvõrrandi parempoolse osa s märgist. Käesoleva ruutvõrrandi puhul on teiseks kriitiliseks osavahemikuks $(-0,82; -1)$, sest $\sqrt{q} = \sqrt{0,82} = \pm 0,905$, mis asub vahemikes

$$0,82 < 0,905 < 1 \text{ ja } -0,82 > -0,905 > -1.$$

Osavahemiku, millesse kuulub ruutvõrrandi

$$x + \frac{q}{x} = s$$

üks või teine lahend, kindlaksmääramiseks võime üles seada järgmise juhise:

* Märgime normaalvõrrandi vasakpoolse osa x -i funktsioonina, s. o.

$$f(x) = x + \frac{q}{x}.$$

Sellel funktsioonil on maksimum või miinimum, kui $x = \sqrt{q}$; sest võrrutades funktsiooni tuletise nulliga

$$f'(x) = 1 - \frac{q}{x^2} = 0,$$

saame viimasest võrdusest $x = \sqrt{q}$.

a) Kui osavahemiku algväärtuse x_0 ja lõppväärtuse x_n puhul

$$x_0 + \frac{q}{x_0} < s < x_n + \frac{q}{x_n}$$

või

$$x_0 + \frac{q}{x_0} > s > x_n + \frac{q}{x_n},$$

siis asetseb ruutvõrrandi lahend selles osavahemikus.

b) Kui aga

$$x_0 + \frac{q}{x_0} < s \text{ ja } x_n + \frac{q}{x_n} < s$$

või

$$x_0 + \frac{q}{x_0} > s \text{ ja } x_n + \frac{q}{x_n} > s,$$

siis ruutvõrrandil selles osavahemikus lahendit ei ole.

c) Kui

$$x_0 + \frac{q}{x_0} = x_n + \frac{q}{x_n},$$

siis on osavahemik kriitiline, mille puhul tuleb uurida vahepealseid $(x + \frac{q}{x})$ väärtusi, kusjuures $x = \sqrt{q}$ puhul $x + \frac{q}{x}$ omab kriitilises osavahemikus maksimaalset või minimaalset väärtust.

d) Juhul kui ruutvõrrandi lahend ei kuulu ühtegi osavahemikku, siis on need lahendid kompleksed (kompleksarvud).

Kõigest sellest arutusest nähtub, et ruutvõrrandi lahendite leidmine arvutuslükatiga toimub katselisel teel. Algajale näib see katseline tee rohkem aega ja tähelepanu nõudva toiminguna kui võrrandi lahendamine algebrast tuntud ruutvõrrandi valemi järgi. Juhul, kui tuleb lahendada palju ruutvõrrandeid, siis ilmneb pärast teatavat praktikat, et ruutvõrrandi lahendite leidmist arvutuslükati abil saame teostada siiski kiiremini kui tavalisel viisil valemitega arvutades, eriti siis, kui on tegemist sarja samatüübiliste võrranditega ja kui ruutvõrrandi koefitsiendid on murdarvulised.

Üksiku võrrandi lahendamisel võib arvutuslükatit eduga kasutada ka arvutamisel tavalise ruutvõrrandi valemi järgi, kui astendamise ja juurimine on selged.

Näide 6. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 42,222x - 1,182 = 0$ lahendid.

Anname võrrandile normaalkuju:

$$x - \frac{1,182}{x} = -42,222.$$

Siin kriitilist osavahemikku ei ole, sest $q = -1,182$ on negatiivne. Kuna s on ka negatiivne, siis on selle võrrandi üks lahend positiivne ja teine negatiivne, kusjuures viimase absoluutväärtus on positiivse lahendi absoluutväärtusest suurem. Et $q = -1,182$, siis uurime kõigepealt vahemikku $(-1; -10)$. Paigutame $x = -1$ ja $x = -10$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele ja saame

$$-1 + \frac{1,182}{1} = 0,182 \quad \text{ja} \quad -10 + \frac{1,182}{10} = -9,8818,$$

kus nüüd

$$0,182 > -9,8818 > -42,222,$$

mis ütleb, et tuleb siirduda järgneva vahemiku $(-10; -100)$ uurimisele. Paigutame nüüd $x = -100$ normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele ja saame

$$-100 + \frac{1,182}{100} = -99,98818.$$

Kuna nüüd $x = -10$ ja $x = -100$ puhul

$$-9,8818 > -42,222 > -99,98818,$$

siis kuulub ruutvõrrandi lahend vahemikku $(-10; -100)$. Osavahemiku leidmiseks paigutame $x = -11,82$ normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele ja saame

$$-11,82 + \frac{1,182}{11,82} = -11,72.$$

Kuna siin

$$-11,72 > -42,222 > -99,98818,$$

siis kuulub ruutvõrrandi lahend osavahemikku $(-11,82; -100)$, mille puhul lahendi otsimiseks tuleb E-10 paigutada D-1182 kohale. Arvutades näeme, et

kui D-skaalal $x_1 = -42,2$	$-42,25$	$-42,3$	$-42,4$,
siis E-skaalal $x_2 = 0,0281$	$0,028$	$0,028$	$0,0279$

$$\text{ja summa } s = -42,1719 \quad -42,222 \quad -42,272 \quad -42,3721,$$

millest nähtub, et ruutvõrrandi $x^2 + 42,222x - 1,182 = 0$ ligikaudsed lahendid on

$$x_1 = -42,25 \quad \text{ja} \quad x_2 = 0,028.$$

N ä i d e 7. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 1,52x + 0,54 = 0$ lahendid.

Selle võrrandi normaalkuju on

$$x + \frac{0,54}{x} = 1,52,$$

mille mõlemad lahendid on positiivsed. Siin võib suuruste $q = 0,54$ ja $s = 1,52$ järgi juba ette öelda, et antud ruutvõrrandi lahendid peaksid kuuluma vahemikku $(0,1; 1)$, milles asetseb ka q . Paigu-

tame $x = 0,1$, $x = 0,54$ ja $x = 1$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saades

$$0,1 + \frac{0,54}{0,1} = 5,5; 0,54 + \frac{0,54}{0,54} = 1,54; 1 + \frac{0,54}{1} = 1,54,$$

kus nüüd $(0,54; 1)$ on kriitiline osavahemik, mis sisaldab

$$\sqrt{q} = \sqrt{0,54} = 0,735.$$

Selles kriitilises osavahemikus peab peituma ruutvõrrandi lahend, sest igas teises osavahemikus on alati

$$x + \frac{0,54}{x} > 1,52,$$

kuid kriitilises osavahemikus $x = 0,735$ puhul

$$x + \frac{0,54}{x} = 0,735 + \frac{0,54}{0,735} = 1,485,$$

mis (kui funktsiooni $f(x) = x + \frac{0,54}{x}$ minimaalne väärtus) on väiksem 1,52-st.

Kuna $(0,54; 1)$ on D-skaala parempoolne osavahemik, siis paigutame E-10 D-54 kohale ja otsime ruutvõrrandi lahendit selles osavahemikus, s. o.

kui D-skaalal $x_1 = 0,565$	0,566	0,567,
siis E-skaalal $x_2 = 0,956$	0,954	0,952
ja summa $s = 1,521$	1,520	1,519,

millest näeme, et

$$x_1 = 0,566 \text{ ja } x_2 = 0,954.$$

Harjutusi. Lahendada ruutvõrrandid:

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 - 2,4x + 0,16 = 0$ | 9) $x^2 - 5,76x + 8,3 = 0$ |
| 2) $x^2 - 0,6x + 0,05 = 0$ | 10) $x^2 + 8,8x + 15,52 = 0$ |
| 3) $x^2 + 3,2x + 0,72 = 0$ | 11) $x^2 - 1,62x - 3,41 = 0$ |
| 4) $x^2 + 14x + 8,3 = 0$ | 12) $x^2 + 1,73x - 2,16 = 0$ |
| 5) $x^2 - 0,5x - 7,65 = 0$ | 13) $x^2 + 1,8x + 1,2 = 0$ |
| 6) $x^2 - 3,2x - 0,83 = 0$ | 14) $5x^2 - 5,1x + 0,8 = 0$ |
| 7) $x^2 + 4,5x - 22 = 0$ | 15) $7,2x^2 - 87,1x + 139,6 = 0$ |
| 8) $x^2 + 34x - 13 = 0$ | 16) $0,017x^2 + 2,53x + 85,7 = 0.$ |

[Vastused. 1) $x_1 = 0,069$; $x_2 = 2,331$. 2) $x_1 = 0,100$; $x_2 = 0,500$. 3) $x_1 = -0,244$; $x_2 = -2,956$. 4) $x_1 = -0,620$; $x_2 = -13,380$. 5) $x_1 = -2,53$; $x_2 = 3,03$. 6) $x_1 = -0,241$; $x_2 = 3,441$. 7) $x_1 = -7,45$; $x_2 = 2,95$. 8) $x_1 = -34,378$; $x_2 = 0,378$. 9) $x_1 = x_2 = 2,88$. 10) $x_1 = -6,36$; $x_2 = -2,44$. 11) $x_1 = 2,827$; $x_2 = -1,207$. 12) $x_1 = -2,570$; $x_2 = 0,840$. 13) lahendid on kompleksed. 14) $x_1 = 0,194$; $x_2 = 0,826$. 15) $x_1 = 10,20$; $x_2 = 1,90$. 16) $x_1 = -96,6$; $x_2 = -52,2$.]

§ 18. KUUPVÖRRANDI LAHENDAMINE.

1. Kui kuupvõrrand esineb kujul

$$x^3 + px + q = 0,$$

kus p ja q on reaalarvud, siis on arvutuslükati abil võimalik leida tema reaallahendeid, mis võivad olla üksteisest erinevad või võrdsed. Selleks jagame kuupvõrrandi mõlemad pooled x -ga ja esitame ta kujul

$$x^2 + \frac{q}{x} = -p$$

ehk

$$x^2 + \frac{q}{x} = s,$$

mida nimetame kuupvõrrandi normaalkujuks. Selle kuju järgi on x võrrandi lahend, kui x^2 ja $\frac{q}{x}$ summa on võrdne s -ga. Siin toimub suuruste x^2 ja $\frac{q}{x}$ valik samaselt nagu ruutvõrrandi puhulgi, üksnes selle vahega, et nüüd tuleb A-skaalal esinev arv x^2 liita E-skaalal (või ümberpööratud C-skaalal) esineva arvuga $\frac{q}{x}$, mis mõlemad on kohakuti D-skaalal esineva arvuga x (joon. 25). Liitmisel tuleb muidugi arvestada liidetavate märke ja suurusjärke.

Nii vahemiku kui ka osavahemiku valik toimub siin analoogiliselt toiminguga ruutvõrrandi lahendamise puhul, kusjuures kriitilisi osavahemikke võib olla ainult üks ja nimelt siis, kui see sisaldab arvu $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, kus q võib olla nii positiivne kui ka negatiivne.*

Kuupvõrrandi puhul tuleb nii vahemikku kui ka osavahemikku otsida iga lahendi jaoks eraldi. Kui kuupvõrrandi lahendite vahemike ja osavahemike otsimisel leidub ainult üks osavahemik, siis on kuupvõrrandil ka ainult üks reaallahend, kusjuures kaks teist lahendit on kompleksed.

* Kui märgime normaalvõrrandi vasakpoolse osa x -i funktsioonina, s. o.

$$f(x) = x^2 + \frac{q}{x},$$

siis on sellel funktsioonil maksimaalne või minimaalne väärtus, kui $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$; sest võrrutades funktsiooni tuletise nulliga

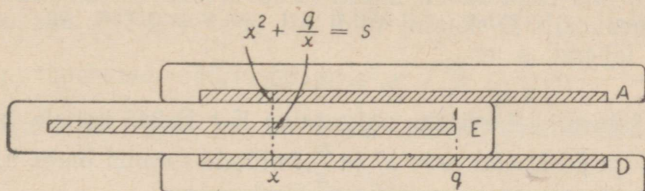
$$f'(x) = 2x - \frac{q}{x^2} = 0,$$

saame viimasest võrdusest $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Näide 1. Leida kuupvõrrandi $x^3 - 6,08x + 2,45 = 0$ lahendid. Selle kuupvõrrandi normaalkuju on

$$x^2 + \frac{2,45}{x} = 6,08,$$

kus $q = 2,45$ ja $s = 6,08$. Neid suurusi arvestades võime aimata, et kuupvõrrandi üks lahend peaks asetsema kas vahemikus $(0,1; 1)$



Joon. 25.

või vahemikus $(1; 10)$. Paigutame $x = 0,1$; $x = 1$ ja $x = 10$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,1^2 + \frac{2,45}{0,1} = 24,51; \quad 1^2 + \frac{2,45}{1} = 3,45;$$

$$10^2 + \frac{2,45}{10} = 100,245,$$

millest nähtub, et üks lahend peitub vahemikus $(0,1; 1)$ ja teine lahend vahemikus $(1; 10)$, sest ühelt poolt

$$24,51 > 6,08 > 2,45$$

ja teiselt poolt

$$2,45 < 6,08 < 100,245.$$

Esimese lahendi osavahemiku üks äärväärtus on $x = 0,245$ ja teise lahendi osavahemiku üks äärväärtus on $x = 2,45$. Asetades need x -i väärtused järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa, saame

$$0,245^2 + \frac{2,45}{0,245} = 10,06; \quad 2,45^2 + \frac{2,45}{2,45} = 7,$$

mis ütleb, et kuupvõrrandi üks lahend peitub D-skaala parempoolses osavahemikus $(0,245; 1)$ ja teine — D-skaala vasakpoolses osavahemikus $(1; 2,45)$, sest esimesel juhul

$$10,06 > 6,08 > 2,45$$

ja teisel juhul

$$2,45 < 6,08 < 7.$$

Esimese lahendi leidmiseks paigutame E-10 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja E-skaalalt arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa oleks 6,08, s. o.

kui A-skaalal $x^2 = 0,170$	0,171	0,172	0,173	0,174,
siis E-skaalal $\frac{q}{x} = 5,94$	5,93	5,91	5,89	5,87

$$\text{ja summa } s = 6,11 \quad 6,101 \quad 6,082 \quad 6,063 \quad 6,044,$$

millest nähtub, et $x^2 = 0,172$ ja $\frac{q}{x} = \frac{2,45}{x} = 5,91$ on kõige täpsemad väärtused, mis rahuldavad antud kuupvõrrandit. Kui nüüd niit on A-0,172 peal, siis D-skaalal niidi all on $x = 0,415$, mis on kuupvõrrandi lahend, s. o.

$$x_1 = 0,415.$$

Teise lahendi leidmiseks paigutame E-1 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja E-skaalal arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa oleks 6,08, s. o.

kui A-skaalal $x^2 = 4,95$	4,96	4,97	4,98	4,99	5,00,
siis E-skaalal $\frac{q}{x} = 1,101$	1,100	1,099	1,098	1,097	1,096

$$\text{ja summa } s = 6,051 \quad 6,060 \quad 6,069 \quad 6,078 \quad 6,087 \quad 6,096,$$

millest näeme, et kui $x^2 = 4,98$ ehk $\frac{q}{x} = 1,098$, siis $x = 2,23$, mis on antud kuupvõrrandi teine lahend, s. o.

$$x_2 = 2,23.$$

Katselisel teel võime näha, et antud kuupvõrrandi kolmas lahend ei satu ühtegi ülejäänud positiivsesse vahemikku ega ka osavahemikku. Seepärast tuleb kolmandat lahendit otsida mõnest negatiivsest vahemikust ja seega ühtlasi ka negatiivsest osavahemikust. Võtame neile osavahemikele, milles asetsesid leitud positiivsed lahendid, vastavad negatiivsed osavahemikud, s. o. $(-0,245; -1)$ ja $(-1; -2,45)$, ja katsetame neid, paigutades $x = -0,245$, $x = -1$ ja $x = -2,45$ järgemööda normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$(-0,245)^2 - \frac{2,45}{0,245} = -9,4; \quad (-1)^2 - \frac{2,45}{1} = -1,45;$$

$$(-2,45)^2 - \frac{2,45}{2,45} = 5,$$

kus nüüd

$$-9,4 < -1,45 < 5 < 6,08,$$

millest nähtub, et kuupvõrrandi kolmas lahend ei asetse neis vahemikes. Kuid viimaste võrratuste põhjal võime nüüd eeldada, et kolmas lahend peitub osavahemikus $(-2,45; -10)$. Nagu nähtub äärväärtuse $x = -10$ puhul, on normaalvõrrandi vasakpoolne osa

$$(-10)^2 - \frac{2,45}{10} = 99,755$$

ning seega

$$5 < 6,08 < 99,755.$$

Kolmanda lahendi leidmiseks paigutame E-10 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja E-skaalalt arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa (ehk õigemini vahe, sest x on negatiivne) oleks 6,08, s. o.

kui A-skaalal	$x^2 =$	7,00	7,01	7,02,
siis E-skaalal	$\frac{q}{x} =$	-0,926	-0,925	-0,924
ja summa $s =$		6,074	6,085	6,096,

kus kõige täpsemad väärtused on $x^2 = 7,01$ ja $\frac{q}{x} = \frac{2,45}{x} = -0,925$ ning seega $x = -2,65$, mis on antud kuupvõrrandi kolmas lahend, s. o.

$$x_3 = -2,65.$$

Seega kuupvõrrandi $x^3 - 6,08x + 2,45 = 0$ kolm reaallahendit on

$$x_1 = 0,415; x_2 = 2,23; x_3 = -2,65.$$

Eespooltoodust nähtub, et kuupvõrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahendite leidmine toimub analoogiliselt ruutvõrrandi lahendite leidmisega. Ruutvõrrandi puhul leidsime mõlemad lahendid korraga, kuid kuupvõrrandi puhul tuleb neid otsida eraldi.

Olgu siinjuures tähendatud, et kui arvutuslükatiga on leitud kuupvõrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

kaks lahendit, siis kolmanda võime leitud lahendite kaudu leida kuupvõrrandi lahendite ühest või teisest omadusest:

või
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

s. o.
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q,$$

või
$$x_3 = -(x_1 + x_2)$$

$$x_3 = -\frac{q}{x_1 x_2}.$$

Kui aga vaadeldava kuupvõrrandi kõik kolm lahendit on leitud arvutuslükatiga, siis võime tähendatud omadusi kasutada vastuste kontrollimiseks.

Harjutusi. Lahendada kuupvõrrandid:

- 1) $x^3 - 5x + 4 = 0$
- 2) $x^3 - 3,78x + 6,02 = 0$
- 3) $x^3 - 1,15x - 3,86 = 0$
- 4) $x^3 + 2,72x + 1,45 = 0$
- 5) $x^3 + 1,23x - 12,3 = 0$
- 6) $x^3 - 0,566x + 0,007 = 0$
- 7) $x^3 + 12,6x + 2,63 = 0.$

[Vastused. 1) $x_1 = 1,00$; $x_2 = 1,56$; $x_3 = -2,56$. 2) $x_1 = -2,49$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 3) $x_1 = 1,81$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 4) $x_1 = -0,490$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 5) $x_1 = 2,13$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 6) $x_1 = 0,746$; $x_2 = 0,0124$; $x_3 = -0,758$. 7) $x_1 = -0,208$; x_2 ja x_3 on kompleksed.]

2. Et leida arvutuslükati abil täieliku kuupvõrrandi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

reaallahendeid, selleks teisendame seda eespool esinevaks lihtsaks kujuks, asendusega

$$x = z - \frac{a}{3},$$

saades

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

ehk

$$z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0.$$

Tähistades

$$b - \frac{a^2}{3} = p, \quad \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q,$$

saame kuupvõrrandi lihtsustatud kuju

$$z^3 + pz + q = 0,$$

kus p ja q on reaalarvud. Leides arvutuslükati abil viimase võrrandi lahendid, saame algvõrrandi lahendid, kui lahutame viimase võrrandi lahenditest $\frac{a}{3}$.

N ä i d e 2. Leida kuupvõrrandi $x^3 + 2,52x^2 + 1,49x - 0,516 = 0$ lahendid.

Asendades

$$x = z - \frac{2,52}{3} = z - 0,84,$$

saame kuupvõrrandi lihtsustatud kuju

$$z^3 - 0,627z - 0,582 = 0,$$

sest

$$p = b - \frac{a^2}{3} = 1,49 - \frac{2,52^2}{3} = -0,627,$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2 \cdot 2,52^3}{27} - \frac{2,52 \cdot 1,49}{3} - 0,516 = -0,582.$$

Selle kuupvõrrandi normaalkuju on

$$z^2 - \frac{0,582}{z} = 0,627.$$

Katsetades nii positiivseid kui ka negatiivseid vahemikke, näeme, et selle normaalvõrrandi lahend võib asetteda ainult

vahemikus (1; 10) ja nimelt selle vahemiku vasakpoolses osavahe-
mikus (1; 5,82), sest

$$1^2 - \frac{0,582}{1} = 0,418 \text{ ja } 5,82^2 - \frac{0,582}{5,82} = 33,8,$$

mis näitab, et

$$0,418 < 0,627 < 33,8.$$

Paigutades E-1 D-582 kohale, leiame A- ja E-skaalalt, et

kui A-skaalal	$z^2 =$	1,160	1,165	1,170,
siis E-skaalal	$\frac{q}{z} =$	-0,540	-0,539	-0,538
ja summa s =		0,620	0,626	0,632,

kus nüüd nendest arvupaaridest kõige täpsemad väärtused on
 $z^2 = 1,165$ ja $\frac{q}{z} = -\frac{0,582}{z} = -0,539$ ning seega $z = 1,08$, mis on
kuupvõrrandi $z^3 - 0,627z - 0,582 = 0$ ainus reaallahend. Kuup-
võrrandi ülejäänud kaks lahendit on kompleksed, sest ei leidu
enam vahemikke, kus peaksid peituma ülejäänud lahendid.

Antud kuupvõrrandil

$$x^3 + 2,52x^2 + 1,49x - 0,516 = 0$$

on seega üks reaallahend ja nimelt

$$x = z - 0,84 = 1,08 - 0,84 = 0,24.$$

Harjutusi. Lahendada kuupvõrrandid:

- 1) $x^3 - 3x^2 - 3x + 10 = 0$
- 2) $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$
- 3) $x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0$
- 4) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
- 5) $x^3 + 0,5x^2 - 9,06x + 5,04 = 0$
- 6) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
- 7) $x^3 + 3,3x^2 - 3,9x - 2,542 = 0.$

[Vastused.

- 1) $x_1 = 2; x_2 = 2,79; x_3 = -1,79.$
- 2) $x_1 = 0,318; x_2$ ja x_3 on kompleksed.
- 3) $x_1 = 0,669; x_2 = -2,52; x_3 = -4,15.$
- 4) $x_1 = 1,84; x_2$ ja x_3 on kompleksed.
- 5) $x_1 = 0,600; x_2 = 2,40; x_3 = -3,50.$
- 6) $x_1 = 0,532; x_2 = -0,653; x_3 = -2,88.$
- 7) $x_1 = 1,283; x_2 = -0,483; x_3 = -4,10.]$

§ 19. PUNKTI KOORDINAATIDE JA KOMPLEKSARVUDE TEISENDAMINE.

1. Olgu tasapinnal punkti ristkoordinaadid x ja y , kus x on abstsissiks ja y ordinaadiks, ning sama punkti polaarkoordinaadid r ja φ , kus r on polaarkauguseks, mida loeme alati positiivseks, ja φ on polaarnurgaks, mis peitub vahemikus 0° -st kuni 360° -ni. Rist- ja polaarkoordinaatide seost määravaid valemeid

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi$$

võime kasutada arvutuslükatiga arvutamisel polaarkoordinaatidelt r ja φ üleminekuks ristkoordinaatidele x ja y .

Näide 1. Leida punkti ristkoordinaadid x ja y , kui punkti polaarkoordinaadid on $r = 4,45$ ja $\varphi = 38^\circ 30'$.

Esitatud valemite põhjal

$$\begin{aligned} x &= 4,45 \cdot \cos 38^\circ 30' = 4,45 \cdot \sin 51^\circ 30', \\ y &= 4,45 \cdot \sin 38^\circ 30', \end{aligned}$$

millede järgi (§ 14-s näite 9-nda või näitele 11 järgneva märkuse kohaselt) lükatiga arvutades leiame, et

$$x = 3,48 \text{ ja } y = 2,77.$$

Käesolevas näites esines meil I kvadranti nurk φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$), mille puhul ristkoordinaadid x ja y on positiivsed. Kui φ on II, III või IV kvadranti nurk, siis kasutame lükatiga arvutamisel esitatud valemeid taandatud kujul järgmiselt:

II kvadranti φ puhul ($90^\circ < \varphi < 180^\circ$)

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi = -r \cos (180^\circ - \varphi) = -r \sin (\varphi - 90^\circ), \\ y &= r \sin \varphi = r \sin (180^\circ - \varphi), \end{aligned}$$

kus x on negatiivne ja y positiivne;

III kvadranti φ puhul ($180^\circ < \varphi < 270^\circ$)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = -r \cos (\varphi - 180^\circ) = -r \sin (270^\circ - \varphi), \\ y &= r \sin \varphi = -r \sin (\varphi - 180^\circ), \end{aligned}$$

kus x ja y on mõlemad negatiivsed;

IV kvadranti φ puhul ($270^\circ < \varphi < 360^\circ$)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = r \cos (360^\circ - \varphi) = r \sin (\varphi - 270^\circ), \\ y &= r \sin \varphi = -r \sin (360^\circ - \varphi), \end{aligned}$$

kus x on positiivne ja y negatiivne. Seega kasutame lükatiga arvutamisel ülemineku valemeid polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele järgmiselt:

$$\begin{aligned} \text{I kvadrant} & \begin{cases} x = r \sin (90^\circ - \varphi) \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \\ \text{II kvadrant} & \begin{cases} x = -r \sin (\varphi - 90^\circ) \\ y = r \sin (180^\circ - \varphi), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III kvadrant} & \begin{cases} x = -r \sin(270^\circ - \varphi) \\ y = -r \sin(\varphi - 180^\circ) \end{cases} \\ \text{IV kvadrant} & \begin{cases} x = r \sin(\varphi - 270^\circ) \\ y = -r \sin(360^\circ - \varphi). \end{cases} \end{aligned}$$

Harjutusi. Leida punktide ristkoordinaadid x ja y , kui nende polaarkoordinaadid on:

- | | |
|---|---|
| 1) $r = 5,2$; $\varphi = 28^\circ 20'$ | 5) $r = 0,88$; $\varphi = 235^\circ 55'$ |
| 2) $r = 3,4$; $\varphi = 5^\circ 10'$ | 6) $r = 0,1234$; $\varphi = 267^\circ 40'$ |
| 3) $r = 2,64$; $\varphi = 116^\circ 10'$ | 7) $r = 9,85$; $\varphi = 300^\circ 30'$ |
| 4) $r = 16,3$; $\varphi = 176^\circ 20'$ | 8) $r = 71,2$; $\varphi = 358^\circ$. |

[Vastused. 1) $x = 4,58$; $y = 2,47$. 2) $x = 3,39$; $y = 0,306$. 3) $x = -1,164$; $y = 2,37$. 4) $x = -16,27$; $y = 1,042$. 5) $x = -0,493$; $y = -0,729$. 6) $x = -0,1233$; $y = -0,00502$. 7) $x = 5,00$; $y = -8,49$. 8) $x = 71,2$; $y = -2,48$.]

Sama võttega võime kompleksarvu trigonomeetrilise kuju $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

teisendada algebraliseks kujuks

$$x + yi,$$

kus samuti

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi,$$

kusjuures r on nüüd kompleksarvu mooduliks ja nurk φ kompleksarvu argumendiks (amplituudiks) ning x on kompleksarvu reaalsaks ja y imaginaarosa koefitsiendiks.

Näide 2. Anda kompleksarvule

$$21,2(\cos 274^\circ + i \sin 274^\circ)$$

algebraline kuju.

Siin on argument φ IV kvadranti nurk, mille puhul

$$\begin{aligned} x &= 21,2 \sin(274^\circ - 270^\circ) = 21,2 \cdot \sin 4^\circ, \\ y &= -21,2 \sin(360^\circ - 274^\circ) = -21,2 \cdot \sin 86^\circ. \end{aligned}$$

Reaalosa x leidmiseks paigutame S&T-4° S&T-indeksi kohale ja viime niidi D-212 peale ning loeme niidi alt C-skaalal x -i väärtuse 1,48. Imaginaarosa koefitsiendi y leidmiseks paigutame S-86° S-indeksi kohale ja viime niidi D-212 peale, kus nüüd niidi alt C-skaalal loeme y -i negatiivse väärtuse $-21,1$. Seega

$$21,2(\cos 274^\circ + i \sin 274^\circ) = 1,48 - 21,1i.$$

Harjutusi. Esitada kompleksarvud algebralisel kujul, kui nende trigonomeetrilised kujud on:

- | | |
|---|---|
| 1) $3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$, | 3) $0,666(\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$, |
| 2) $8,2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$, | 4) $12,9(\cos 340^\circ + i \sin 340^\circ)$. |

[Vastused. 1) $2,90 + 0,776i$. 3) $-0,228 - 0,626i$.
 2) $-7,10 + 4,10i$. 4) $12,12 - 4,41i$.]

2. Ümberpöördult, kui on antud punkti ristkoordinaadid x ja y , siis neilt üleminekuks polaarkoordinaatidele r ja φ esinevad järgmised valemid:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \text{ ja } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

millede kasutamine lükatiga arvutamisel on raskepärane, eriti siis, kui x -i absoluutväärtus on väiksem y -i absoluutväärtusest. Teist valemit kasutades tuleks seda muuta järgmiselt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ja polaarkaugus r leida § 7-s esineva näite 11-nda kohaselt. Kuid lükatiga arvutades tuleb neid valemid rakendada teisiti, leides enne abinurga $\alpha < 45^\circ$ kaudu polaarnurga φ ja siis viimase kaudu polaarkauguse r .

Kuna x ja y võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed ning seega võib nurk φ olla kas I, II, III või IV kvadrandi nurgaks, siis nurga φ väärtuse leidmiseks arvutuslükatiga rakendame järgmist abinurga α võtet;

a) kui $|x| \geq |y|$, siis leiame valemi

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$$

järgi nurga $\alpha \leq 45^\circ$, mille puhul

I kvadrantis:	$\varphi = \alpha,$
II	„ $\varphi = 180^\circ - \alpha,$
III	„ $\varphi = 180^\circ + \alpha,$
IV	„ $\varphi = 360^\circ - \alpha;$

b) kui $|x| < |y|$, siis leiame valemi

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{x}{y} \right|$$

järgi nurga $\alpha < 45^\circ$, mille puhul

I kvadrantis:	$\varphi = 90^\circ - \alpha,$
II	„ $\varphi = 90^\circ + \alpha,$
III	„ $\varphi = 270^\circ - \alpha,$
IV	„ $\varphi = 270^\circ + \alpha.$

Kui on leitud polaarnurk φ , siis kasutame polaarkauguse r leidmiseks valemit

$$r = \frac{y}{\sin \varphi},$$

mille arvutamisel taandame $\sin \varphi$ teravnurga siinuseks. Viimane

valem määrab iga kvadrandi puhul ikka ja alati polaarkauguse r positiivse väärtuse.

Näide 3. Leida punkti polaarkoordinaadid r ja φ , kui punkti ristkoordinaadid on $x = -0,382$ ja $y = 0,845$.

Siin on abstsiss x negatiivne ja ordinaat y positiivne ning seega on φ II kvadrantis. Kuna siin $|x| < |y|$, siis arvutame valemi

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{0,382}{0,845}$$

järgi nurga α . Paigutame (ümberpööratud keele) T-skaala parempoolse otsa (T-45°) D-845 kohale ja viime niidi D-382 peale ning loeme niidi alt T-skaalalt abinurga α väärtuse, s. o. $\alpha = 24^{\circ}20'$, kus nüüd polaarnurk

$$\varphi = 90^{\circ} + 24^{\circ}20' = 114^{\circ}20'.$$

Polaarkauguse r leiame valemi

$$r = \frac{0,845}{\sin 114^{\circ}20'} = \frac{0,845}{\cos 24^{\circ}20'} = \frac{0,845}{\sin 65^{\circ}40'}$$

järgi, saades (§ 14-s näite 10 või § 15-s näite 2 kohaselt)

$$r = 0,926.$$

Harjutusi. Leida punktide polaarkoordinaadid r ja φ , kui nende ristkoordinaadid on:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $x = 5,6; y = 3,2$ | 5) $x = -16,3; y = -12,4$ |
| 2) $x = 2,3; y = 6,5$ | 6) $x = -37,8; y = -61,3$ |
| 3) $x = -0,41; y = 0,37$ | 7) $x = 7,15; y = -3,46$ |
| 4) $x = -0,88; y = 0,99$ | 8) $x = 8,05; y = -11,35$ |

[Vastused: 1) $\varphi = 29^{\circ}45'; r = 6,45$. 2) $\varphi = 70^{\circ}30'; r = 6,89$. 3) $\varphi = 137^{\circ}55'; r = 0,552$. 4) $\varphi = 131^{\circ}40'; r = 1,325$. 5) $\varphi = 217^{\circ}15'; r = 20,5$. 6) $\varphi = 238^{\circ}20'; r = 72,0$. 7) $\varphi = 334^{\circ}10'; r = 7,94$. 8) $\varphi = 305^{\circ}20'; r = 13,92$.]

Kirjeldatud võttega võime samaselt iga kompleksarvu algebraalse kuju

$$x + yi$$

teisendada trigonomeetriliseks kujuks

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ja samuti ka eksponentsiaalkujuks

$$re^{i\varphi},$$

kus viimasel juhul tuleb φ esitada radiaanmõõdus.

Näide 4. Esitada kompleksarv $4,2 - 3,4i$ trigonomeetrilisel kujul.

Kuna siin kompleksarvu reaalosa on positiivne ja imaginaarosa

negatiivne, siis argument φ peab olema vahemikus 270° -st kuni 360° -ni. Et $|x| > |y|$, s. o. $4,2 > 3,4$, siis rakendame valemit

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{3,4}{4,2},$$

mille puhul paigutame T-skaala parempoolse otsa ($T-45^\circ$) D-42 kohale ja viime niidi D-34 peale ning loeme niidi alt T-skaalal abinurga α väärtuse, s. o. $\alpha = 39^\circ$, kus nüüd kompleksarvu argument

$$\varphi = 360^\circ - 39^\circ = 321^\circ.$$

Kompleksarvu mooduli r leiame valemi

$$r = \frac{-3,4}{\sin 321^\circ} = \frac{-3,4}{-\sin 39^\circ} = \frac{3,4}{\sin 39^\circ}$$

järgi, saades

$$r = 5,40,$$

ning seega

$$4,2 - 3,4i = 5,40 (\cos 321^\circ + i \sin 321^\circ).$$

H a r j u t u s i. Esitada kompleksarvud trigonomeetrilisel kujul, kui nende algebralised kujud on:

- | | |
|-------------------|---------------------|
| 1) $15 + 12i$ | 5) $-0,4 - 0,3i$ |
| 2) $2,3 + 5,7i$ | 6) $-7,3 - 15,2i$ |
| 3) $-40 + 30i$ | 7) $8,6 - 5,2i$ |
| 4) $-6,2 + 12,9i$ | 8) $0,18 - 0,75i$. |

[V a s t u s e d. 1) $19,21 (\cos 38^\circ 40' + i \sin 38^\circ 40')$

- 2) $6,15 (\cos 68^\circ + i \sin 68^\circ)$
 3) $50 (\cos 143^\circ 08' + i \sin 143^\circ 08')$
 4) $14,31 (\cos 115^\circ 40' + i \sin 115^\circ 40')$
 5) $0,50 (\cos 216^\circ 52' + i \sin 216^\circ 52')$
 6) $16,86 (\cos 244^\circ 20' + i \sin 244^\circ 20')$
 7) $10,05 (\cos 328^\circ 50' + i \sin 328^\circ 50')$
 8) $0,771 (\cos 283^\circ 30' + i \sin 283^\circ 30').$

N ä i d e 5. Esitada kompleksarv $8 + 5i$ eksponentsiaalkujus.

Siin määrame argumendi φ radiaanmõõdus. Kuna siin $|x| > |y|$, s. o. $8 > 5$, siis võime märkida, et

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8},$$

millest saame, et

$$\varphi = \alpha = 32^\circ,$$

mis on radiaanmõõdus

$$\frac{32^\circ}{\rho^\circ} = 0,559.$$

Kompleksarvu mooduli r leiame valemi

$$r = \frac{5}{\sin 32^\circ}$$

järgi, saades

$$r = 9,43.$$

Seega

$$9 + 5i = 9,43e^{0,559i}.$$

Harjutusi. Esitada kompleksarvud eksponentsiaalkujus, kuni nende algebraised kujud on:

$$\begin{array}{ll} 1) 5 + 8i & 3) -0,8 - 1,7i \\ 2) 1,6 - 3,4i & 4) -0,022 + 0,48i. \end{array}$$

[Vastused: 1) $9,43e^{1,012i}$. 2) $3,76e^{5,15i}$. 3) $1,879e^{4,27i}$.
4) $0,481e^{1,616i}$.]

§ 20. ÜHENDATUD S JA S&T-SKAALA NING L-PÖÖRDSKAALA.

1. Mõnel arvutuslükatil esineb keele tagaküljel ainult kaks trigonomeetrilist skaalat: ülal S-skaala ja all T-skaala. Säärasel arvutuslükatil on T-skaala samane eespool kirjeldatud T-skaalaga, kuid S-skaala hõlmab nurgad $34,4'$ -st kuni 90° -ni, nii et eespool kirjeldatud S- ja S&T-skaala on kujundatud üheks tervikuks, kusjuures skaala jaotised on kaks korda lühemad (joon. VII). Sellel ühendatud S- ja S&T-skaalal, mida neil arvutuslükatitel nimetatakse lühidalt S-skaalaks, on märgitud jaotised alguskriipsust kuni 10° -ni $5'$ kaupa, 10° -st 20° -ni — $10'$ kaupa, 20° -st kuni 40° -ni — $30'$ kaupa, 40° -st kuni 70° -ni — 1° kaupa, 70° -st kuni 80° -ni — 2° kaupa; 80° -le enam jaotisi ei järgne.

Arvutuslükati keelt ümberpööratult A- ja D-skaalaga kohakuti pannes näeme, et A-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on nüüd S-skaalal vastavate kraadide ja minutite siinuse väärtused, kui loeme neid 100 korda vähendatult. Seega tuleb A-skaala alguskriipsu lugeda 0,01-ks, sest $\sin 34,4' = 0,01$, ja lõppkriipsu lugeda 1-ks, sest $\sin 90^\circ = 1$. A-skaala keskmine kriips (kus on arv 10) tähendab 0,1 ja selle kohal S-skaalal on $5^\circ 44'$, sest $\sin 5^\circ 44' = 0,1$. Järelikult vahemikus $34,4'$ -st kuni $5^\circ 44'$ -ni tuleb A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul esinevaid siinuse väärtusi lugeda arvudeks, millede suurusjärk on -1 . Need arvud on ühtlasi ka ($34,4'$ -st kuni $5^\circ 43'$ -ni) tangensi väärtused. Edasi vahemikus $5^\circ 44'$ -st kuni 90° -ni tuleb A-skaala teisel logaritmilisel ühikul esinevaid siinuse väärtusi lugeda arvudeks, millede suurusjärk on 0.

Vahemikus $34,4'$ -st kuni 90° -ni leiduvate siinuse väärtuste leidmiseks märgime niidiga kraadide ja minutite arvu S-skaalal ja loeme niidi alt A-skaalal siinuse vastava väärtuse, kusjuures A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul võetud arv tuleb lugeda suurusjärguga -1 ja teisel logaritmilisel ühikul suurusjärguga 0.

Samuti, ümberpöördukt, võime leida siinuse väärtuse järgi vastava kraadide ja minutite arvu 34,4'-st kuni 90°-ni, märkides niidiga A-skaalal siinuse väärtuse ja vaadata, missugune kraadide ja minutite arv esineb selle kohal niidi all S-skaalal. Siinuse logaritmi leidmiseks tuleb aga siinuse väärtus A-skaalalt üle kanda D-skaalale ja siis sealt üle minna siinuse logaritmi võtmisele.

Sama S-skaala ja A-skaala esimese logaritmilise ühiku abil võime leida vahemikus 34,4'-st kuni 5°43'-ni tangensi (suurusjärguga —1) väärtusi ja ümberpöördukt, tangensi (suurusjärguga —1) väärtuste järgi võime leida vastava kraadide ja minutite arvu 34,4'-st kuni 5°43'-ni.

Arvutuslükati keelt algasendisse tagasi pöörates, nii et S- ja T-skaala jääksid allapoole, näeme, et siin on samuti lükati parempoolse (ja mõnikord ka vasakpoolse) ovaalse lõigu ülemise ääre kriipsud S-indeksiks ning vasakpoolse lõigu alumise ääre kriips on T-indeksiks.

Kui paigutame S-skaalal kraade ja minuteid tähendava kriipsu parempoolse S-indeksi kohale, siis tuleb siinuse väärtus lugeda B-skaalalt A-100 kohalt. Kui paigutame aga S-skaala kraade ja minuteid esitava kriipsu vasakpoolse S-indeksi (selle olemasolu puhul) kohale, siis tuleb siinuse väärtus lugeda B-skaalalt A-1 kohalt.

2. Kui S-skaala sisaldab nurki 34,4'-st kuni 90°-ni, siis on L-skaala harilikult arvutuslükati keele tagaküljel S-skaala ja T-skaala vahel (joon. VII). Sel juhul tuleb L-skaala jaotisi lugeda paremalt poolt vasakule, kusjuures nende jaotiste märkimiseks ja lugemiseks on parempoolse ovaalse lõigu alumine kriips, mis on nüüd L-indeksiks. Siin L-skaala parempoolse otsa kriips tähendab 0 ja vasakpoolse otsa kriips tähendab 10. L-skaala on seega L-pöördskaalaks. Logaritmitavad arvud esinevad siin samuti D-skaalal. Arvu logaritmi murdosa leidmiseks paigutame C-1 D-skaalal esineva logaritmitava arvu kohale ja (arvutuslükatit ümber pöörates) loeme otsitava logaritmi murdosa L-indeksi kohalt L-pöördskaalalt, ja ümberpöördukt.

L-pöördskaala koos S- ja T-skaalaga (joon. VII) esineb ka nende arvutuslükatite keele tagaküljel, millede esiküljel esinevad ainult A-, B-, C- ja D-skaala (joon. II ja III).

Harjutusülesandeid käesolevas paragrahvis kirjeldatud L-pöördskaala kui ka ühendatud S- ja S&T-skaala rakendamiseks võib võtta vastavalt § 12-st ja § 14-st.

§ 21. EKSPONENTSIAALSKAALAD.

1. Mõnel arvutuslükatil esineb koos A-, B-, C-, D- ja E-skaalaga lükati ülemisel ja alumisel äärel (K- ja L-skaala asemel) naturaalogaritmid aluse $e = 2,718$ astmete skaalad, s. o. skaalad eksponentfunktsiooni e^x väärtuste leidmiseks ja samuti ümberpöör-

dult, arvude naturaallogaritmide arvutamiseks. Nimetame neid skaalasid eksponentsiaalskaaladeks. Sel juhul on K-skaala paigutatud arvutuslükati alumisele servale ning sellel skaalal arvude märkimiseks ja lugemiseks on märkija alumisel serval (kohakuti märkija niidiga) kriips, mida nimetame K-indeksiiks. L-skaala esineb siis pöördskaalana lükati keele tagaküljel S- ja T-skaala vahel, samaselt nagu näitab joonis VII.

Eksponentsiaalskaaladel on märgitud e astmed $e^{0,0954} = 1,1$ (ülemise skaala vasakpoolne ots) kuni $e^{11,5} = 100000$ (alumise skaala parempoolne ots) (joon. VIII). Ülemisel eksponentsiaalskaalal esinevad põhiskaala logaritmilise ühiku ulatuses e astmed $e^{0,1} = 1,105$ kuni $e = 2,718$ ja alumisel eksponentsiaalskaalal e astmed $e = 2,718$ kuni $e^{10} = 22000$.

Ülemisel eksponentsiaalskaalal algavad jaotised vasakul pool skaala algust arvuga 1,1 (sest kooskõlastatult A- ja D-skaalaga loeme selle skaala alguseks $e^{0,1} = 1,105$). Edasi on skaalal märgitud arvud

1,12; 1,14; 1,16; ... ; 2,7; 2,8; 2,9; 3; 3,2,

kusjuures arvud 2,8 kuni 3,2 on väljaspool skaala lõppu ($e = 2,718$). Alumisel eksponentsiaalskaalal algavad jaotised vasakul pool skaala algust ($e = 2,718$) arvudega 2,5; 2,6; 2,7. Edasi järgnevad arvud

2,8; 2,9; 3; 3,5; 4; 4,5; ... ; 40; 50; 100;

ja sealt veel edasi

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10^3 ; 2, 3, 4, 5, 10^4 ; 2, 3, 4, 5, 10^5 ;

kus esimesed 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 tähendavad lühendatult

200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900;

10^3 -le järgnevad 2, 3, 4 ja 5 tähendavad

2000, 3000, 4000, 5000

ja 10^4 -le järgnevad 2, 3, 4 ja 5 tähendavad

20000, 30000, 40000, 50000,

kusjuures lõpparvud 3, 4, 5 ja 10^5 on väljaspool skaala lõppu ($e^{10} = 22000$).

Arvu e astendajaiks on D-skaala arvud. Arvu e mistahes astme leidmiseks paigutatakse märkija niid D-skaalal astendaja peale ja vastav e aste loetakse niidi kohalt lükati ühelt või teiselt eksponentsiaalskaalalt: kui D-skaalal võetav astendaja on suurusjärguga 0, s. o. 0,1-st kuni 1-ni, siis esineb e aste lükati ülemisel eksponentsiaalskaalal, ja kui D-skaalal võetav astendaja on suurusjärguga + 1, s. o. 1-st kuni 10-ni, siis esineb e aste lükati alumisel eksponentsiaalskaalal. Näiteks, kui paigutame niidi D-284 peale, siis on $e^{0,284}$ väärtus niidi kohal ülemisel eksponentsiaalskaalal, s. o. 1,328,

ja $e^{2,84}$ väärtus on niidi kohal alumisel eksponentsiaalskaalal, s. o. 17,1. Seega

$$e^{0,284} = 1,328 \text{ ja } e^{2,84} = 17,1.$$

Harjutusi.

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------|
| 1) $e^2 = ?$ | 5) $e^{1,111} = ?$ | 9) $e^{0,326} = ?$ |
| 2) $e^3 = ?$ | 6) $e^{9,65} = ?$ | 10) $\sqrt{e} = ?$ |
| 3) $e^{1,87} = ?$ | 7) $e^{0,139} = ?$ | 11) $e\sqrt{e} = ?$ |
| 4) $e^{7,4} = ?$ | 8) $e^{0,892} = ?$ | 12) $\sqrt[3]{e} = ?$ |

[Vastused. 1) 7,39. 2) 20,1. 3) 6,49. 4) 1630. 5) 3,04. 6) 15520. 7) 1,149. 8) 2,44. 9) 1,385. 10) 1,649. 11) 4,48. 12) 1,395.]

Kasutades eksponentsiaalskaalasid, saame arvutuslükati keele ühe asetusega arvutada näiteks järgmisi eksponentfunktsioone:

$$e^{kx}, e^{\frac{k}{x}}, e^{k\sqrt{x}}, e^{\sqrt[3]{kx}}, e^{\frac{k}{\sqrt{x}}}, e^{\frac{k}{\sqrt[3]{x}}},$$

mis väljendavad tihti rakendusmatemaatikas, füüsikas ja mitmesugustes tehnikaharudes esinevaid suuruste eksponentsiaalse muutumise seadusi. Siin antud konstantse k puhul võib x -le anda ainult niisuguseid väärtusi, et tähendatud funktsioonide astendajad sattuksid vahemikku 0,1-st kuni 11,5-ni. Nende funktsioonide väärtuste leidmiseks tuleb astendajate väärtused arvutada nii, et nad satuksid D-skaalale, et sealt niidi abil otseselt üle minna ühele või teisele eksponentsiaalskaalale.

Esimese kolme eksponentfunktsiooni e^{kx} , $e^{\frac{k}{x}}$ ja $e^{k\sqrt{x}}$ väärtuste leidmiseks tuleb C-1 või C-10 paigutada D- k kohale ja viia niit esimese funktsiooni puhul C-skaalal, teise funktsiooni puhul E-skaalal ja kolmanda funktsiooni puhul B-skaalal järk-järgult x -i väärtuste peale, kus nüüd (meile juba teadaolevate juhiste kohaselt) niidi all D-skaalal esinevad astendajate kx , $\frac{k}{x}$ ja $k\sqrt{x}$ väärtused ning niidi all ühel või teisel eksponentsiaalskaalal funktsioonide e^{kx} , $e^{\frac{k}{x}}$ ja $e^{k\sqrt{x}}$ otsitavad väärtused.

Kuna kuupskaala on kinnisskaala, siis eksponentfunktsiooni $e^{\sqrt[3]{kx}}$ väärtuste leidmiseks tuleb C- k paigutada D-1 või D-10 kohale ja viia märkija indeks (K-indeks) K- x peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on $\sqrt[3]{kx}$ väärtus ja selle korrutis antud arvuga k , s. o. $k\sqrt[3]{kx}$, on niidi all C-skaalal. Lugeses C-skaalal saadud $k\sqrt[3]{kx}$ väärtused ja kandes need niidiga üle D-skaalale, leiame niidi alt

ühelt või teiselt eksponentsiaalskaalalt funktsiooni $e^{k\sqrt[3]{x}}$ otsitavad väärtused.

EkspONENTfunktsioonide $e^{\sqrt{x}}$ ja $e^{\sqrt[3]{x}}$ väärtuste leidmiseks tuleb C-1 või C-10 paigutada D-k kohale ja viia niit esimese funktsiooni puhul A-skaalal ja teise funktsiooni puhul K-skaalal järg-järgult x-i väärtuste peale, kus siis niidi all E-skaalal esinevad astendajate $\frac{k}{\sqrt{x}}$ ja $\frac{k}{\sqrt[3]{x}}$ väärtused, mida tuleb niidiga üle kanda D-skaalale ning lugeda igakord niidi alt ühelt või teiselt eksponentsiaalskaalalt funktsioonide $e^{\sqrt{x}}$ ja $e^{\sqrt[3]{x}}$ vastavad väärtused.

Esitatud funktsioonide seerialisel arvutamisel tuleb teha mõnikord ka keele ülekanne.

Kui näiteks neis funktsioonides $k = 2,14$ ja x-i väärtused on: 0,25; 1,62; 5,05, siis esitatud juhiste kohaselt kontrollida alljärgnevaid väärtusi:

$$e^{2,14 \cdot 0,25} = 1,635; \quad e^{2,14 \cdot 1,62} = 32,0; \quad e^{2,14 \cdot 5,05} = 49000;$$

$$e^{\frac{2,14}{0,25}} = 5200; \quad e^{\frac{2,14}{1,62}} = 3,75; \quad e^{\frac{2,14}{5,05}} = 1,527;$$

$$e^{2,14\sqrt{0,25}} = 2,91; \quad e^{2,14\sqrt{1,62}} = 15,2; \quad e^{2,14\sqrt{5,05}} = 123;$$

$$e^{2,14\sqrt[3]{0,25}} = 3,85; \quad e^{2,14\sqrt[3]{1,62}} = 12,3; \quad e^{2,14\sqrt[3]{5,05}} = 39,5;$$

$$e^{\frac{2,14}{\sqrt{0,25}}} = 720; \quad e^{\frac{2,14}{\sqrt{1,62}}} = 5,38; \quad e^{\frac{2,14}{\sqrt{5,05}}} = 2,59;$$

$$e^{\frac{2,14}{\sqrt[3]{0,25}}} = 29,9; \quad e^{\frac{2,14}{\sqrt[3]{1,62}}} = 6,18; \quad e^{\frac{2,14}{\sqrt[3]{5,05}}} = 3,47.$$

2. Arvu x naturaallogaritm $\ln x$ väärtuse arvutamisel teame, et kui $\ln x = y$, siis $x = e^y$. Kuna eespool öeldu põhjal arv y loetakse D-skaalalt ja arv x ühelt või teiselt eksponentsiaalskaalalt, siis arvu x naturaallogaritm $\ln x$ väärtuse leidmiseks toimitakse eelmisele võttele vastupidiselt; märkija niit paigutatakse ühel või teisel eksponentsiaalskaalal logaritmitava arvu x peale ja naturaallogaritm väärtus loetakse D-skaalalt niidi alt. Siin logaritmitavad arvud 1,105 kuni 2,718 võetakse ülemiselt eksponentsiaalskaalalt ja nende naturaallogaritm loetakse niidi alt D-skaalal, võttes logaritmi täisosaks 0; logaritmitavad arvud 2,718 kuni 22000 võetakse alumiselt eksponentsiaalskaalalt ja nende naturaallogaritm loetakse niidi alt D-skaalalt ühekohalise täisosaga. Et leida näiteks $\ln 1,36$ ja $\ln 136$, selleks paigutame esimesel juhul niidi ülemisel

eksponentsiaalskaalal 1,36 peale (kriips on olemas) ja loeme niidi alt D-skaalalt 0,307, ning teisel juhul paigutame niidi alumisel eksponentsiaalskaalal 136 peale (kriips puudub) ja loeme niidi alt D-skaalalt 4,91. Tähendab,

$$\ln 1,36 = 0,307 \text{ ja } \ln 136 = 4,91.$$

Harjutusi.

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $\ln 1,26 = ?$ | 5) $\ln 2,2 = ?$ | 9) $\ln 120 = ?$ |
| 2) $\ln 1,475 = ?$ | 6) $\ln 4,05 = ?$ | 10) $\ln 360 = ?$ |
| 3) $\ln 1,115 = ?$ | 7) $\ln 18,5 = ?$ | 11) $\ln 1450 = ?$ |
| 4) $\ln 1,965 = ?$ | 8) $\ln 58 = ?$ | 12) $\ln 2450 = ?$ |

[Vastused. 1) 0,231. 2) 0,389. 3) 0,1088. 4) 0,675. 5) 0,788. 6) 1,399. 7) 2,92. 8) 4,06. 9) 4,79. 10) 5,89. 11) 7,28. 12) 7,80.]

Logaritmi pöördväärtuste $\frac{1}{\ln x}$ leidmiseks viime märkija niidi ühel või teisel eksponentsiaalskaalal järk-järgult x -i väärtuste peale ja loeme igakord niidi alt E-skaalal $\frac{1}{\ln x}$ väärtused. Siin peab E-skaala olema kohakuti D-skaalaga. Kui siinjuures x -i väärtused asetsevad 1,105 ja 2,718 vahel, mis märgitakse niidiga ülemisel eksponentsiaalskaalal, siis on niidi alt E-skaalalt loetavad $\frac{1}{\ln x}$ väärtused suurusjärguga $+1$; ja kui x -i väärtused asetsevad 2,718 ja 22000 vahel, mis märgitakse niidiga alumisel eksponentsiaalskaalal, siis on niidi alt E-skaalalt loetavad $\frac{1}{\ln x}$ väärtused suurusjärguga 0. Näiteks.

$$\frac{1}{\ln 1,36} = 3,25; \quad \frac{1}{\ln 136} = 0,204.$$

Eksponentsiaalskaalade abil on võimalik arvutada samuti $\ln^2 x$ ja $\ln^3 x$ väärtusi, tegutsedes seejuures ainult märkija niidiga. Et leida $\ln^2 x$ ja $\ln^3 x$ väärtused, selleks paigutame eksponentsiaalskaalal niidi arvu x peale ning loeme astendamise juhiste kohaselt $\ln^2 x$ väärtuse niidi alt A-skaalalt ja $\ln^3 x$ väärtuse niidi alt K-skaalalt. Näiteks $\ln^2 3,85$ ja $\ln^3 3,85$ puhul viime niidi alumisel eksponentsiaalskaalal arvu 3,85 peale, kus nüüd niidi all A-skaalal on 1—8—2 ja K-skaalal 2—4—5. Seega

$$\ln^2 3,85 = 1,82 \text{ ja } \ln^3 3,85 = 2,45.$$

Harjutusi.

- 1) Leida $\ln^2 x$ väärtused, kui $x = 1,27; 5,95; 10,5; 590$.
- 2) Leida $\ln^3 x$ väärtused, kui $x = 2,03; 7,75; 12,4; 465$.

[Vastused. 1) 0,314; 3,18; 5,52; 40,8.
2) 0,349; 8,61; 16,0; 234.]

EkspONENTSIAALSKAALASID kasutades saame arvutuslükati keele ühe asetusega arvutada järgmisi funktsioone

$$a \cdot \ln x, a \cdot \ln^2 x, \frac{a}{\ln x},$$

kus a on konstantne suurus.

Esimesel juhul, s. o. funktsiooni $a \cdot \ln x$ arvutamisel, paigutame C-a D-1 või D-10 kohale ja viime niidi eksponentsiaalskaalal järk-järgult x -i väärtuste peale ning loeme korrutamise juhiste kohaselt niidi alt C-skaalalt $a \cdot \ln x$ väärtused.

Funktsiooni $a \cdot \ln^2 x$ arvutamisel paigutame B-a A-1 või A-100 kohale ja viime niidi eksponentsiaalskaalal järk-järgult x -i väärtuste peale ning loeme korrutamise ja astendamise juhiste kohaselt niidi alt B-skaalalt $a \cdot \ln^2 x$ väärtused.

Funktsiooni $\frac{a}{\ln x}$ arvutamisel paigutame C-1 või C-10 D-a kohale ja viime niidi eksponentsiaalskaalal järk-järgult x -i väärtuste peale ning loeme jagamise juhiste kohaselt niidi alt E-skaalalt $\frac{a}{\ln x}$ väärtused.

Harjutusi.

- 1) Leida $3,64 \cdot \ln x$ väärtused, kui $x = 1,72; 4,04; 75; 850$.
- 2) Leida $0,62 \cdot \ln^2 x$ väärtused, kui $x = 2,05; 8,85; 62; 2500$.
- 3) Leida $\frac{0,093}{\ln x}$ väärtused, kui $x = 1,124; 15,5; 330; 1200$.

[Vastused.

- 1) 1,975; 5,08; 15,72; 24,6.
- 2) 0,32; 2,95; 10,6; 38,0.
- 3) 0,795; 0,0339; 0,016; 0,0131.]

EkspONENTFUNKTSIOONIDE a^x ja $a^{\frac{1}{x}}$ arvutamisel võtame nende naturaalloogaritmid, saame $x \cdot \ln a$ ja $\frac{\ln a}{x}$, millede puhul paigutame niidi eksponentsiaalskaalal arvu a peale ja lükkame C-1 või C-10 niidi alla. Esimesel juhul viime niidi C-skaalal järk-järgult x -i väärtuste peale, siis on niidi all D-skaalal $x \cdot \ln a$ väärtused ja järelikult eksponentsiaalskaalal a^x väärtused; teisel juhul viime niidi E-skaalal järk-järgult x -i väärtuste peale, siis on niidi all D-skaalal $\frac{\ln a}{x}$ väärtused ja järelikult eksponentsiaalskaalal $a^{\frac{1}{x}}$ väärtused. Näiteks, kui nendes funktsioonides $a = 2,4$ ja $x = 1,65; 4,16; 8,45$, siis paigutame niidi ülemisel eksponentsiaalskaalal arvu $2,4$ peale ja lükkame C-10 niidi alla. Kuna siin esimesel juhul korrutiste $1,65 \cdot \ln 2,4; 4,16 \cdot \ln 2,4$ ja $8,45 \cdot \ln 2,4$ suurusjärk on $+1$, siis — viies niidi järk-järgult C-165, C-416 ja C-845

peale — loeme niidi alt alumiselt eksponentsiaalskaalalt vastavad arvud 4,24; 38,1; 1630. Seega

$$2,4^{1,65} = 4,24; 2,4^{4,16} = 38,1; 2,4^{8,45} = 1630.$$

Kuna teisel juhul jagatiste $\frac{\ln 2,4}{1,65}$, $\frac{\ln 2,4}{4,16}$ ja $\frac{\ln 2,4}{8,45}$ suurusjärk on 0, siis — viies niidi järk-järgult E-165, E-416 ja E-845 peale — loeme niidi alt ülemiselt eksponentsiaalskaalalt vastavad arvud 1,72; 1,234; 1,109. Tähendab,

$$2,4^{\frac{1}{1,65}} = 1,72; 2,4^{\frac{1}{4,16}} = 1,234; 2,4^{\frac{1}{8,45}} = 1,109.$$

Harjutusi.

1) Leida funktsiooni $5,5^x$ väärtused, kui $x = 0,35; 2,08; 6,35$.

2) Leida funktsiooni $16,5^{\frac{1}{x}}$ väärtused, kui $x = 0,78; 1,43; 5,75$.

[Vastused.

1) 1,816; 34,7; 50000. 2) 36,5; 7,12; 1,632.]

Mistahes alusel $a > 1,1$ logaritmifunktsiooni $y = \log_a x$ arvutamiseks märgime selle kujul $x = a^y$, mida logaritmidest saame $\ln x = y \ln a$, millest $y = \frac{\ln x}{\ln a}$. Seega

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

mille järgi saame nüüd $\log_a x$ väärtusi leida logaritmitava arvu x ja logaritmaluse a naturaallogaritmide jagamise teel, tehes seejuures ainult keele ühe asetuse. Selleks viime niidi eksponentsiaalskaalal arvu a peale ja lükkame keelega C-1 või C-10 niidi alla. Edasi viime niidi eksponentsiaalskaalal järk-järgult x -i väärtuste peale ning loeme jagamise juhiste kohaselt niidi alt C-skaalalt jagatise $\frac{\ln x}{\ln a}$ väärtused. Näiteks, kui $a = 2$ ja $x = 3, 4$ ja 5 , siis

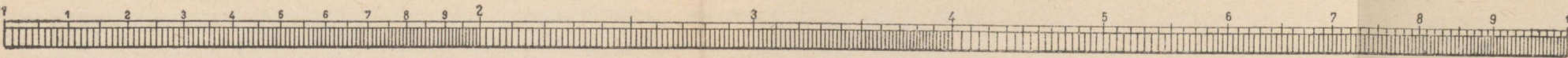
$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}, \quad \log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2}, \quad \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}.$$

Viies niidi ülemisel eksponentsiaalskaalal arvu 2 peale ja paigutades C-10 niidi alla, viime nüüd niidi alumisel eksponentsiaalskaalal järk-järgult arvude 3,4 ja 5 peale, loeme igakord niidi alt C-skaalalt otsitavad väärtused: 1,585; 2,00; 2,32. Seega

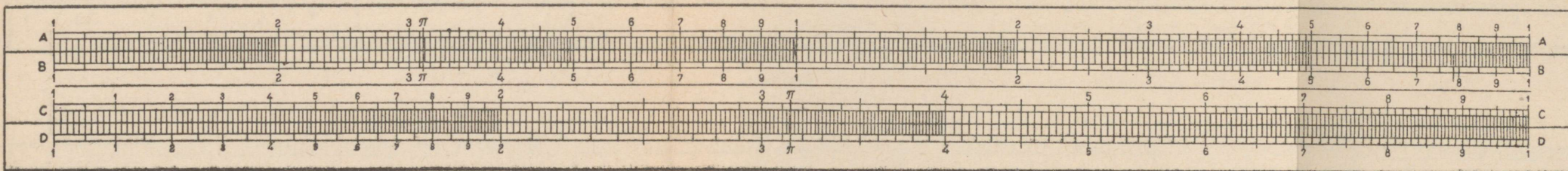
$$\log_2 3 = 1,585; \log_2 4 = 2,00; \log_2 5 = 2,32.$$

Harjutusi. Leida $\log_4 x$ väärtused, kui $x = 1,6; 2,2; 6,8; 44; 650; 1450$.

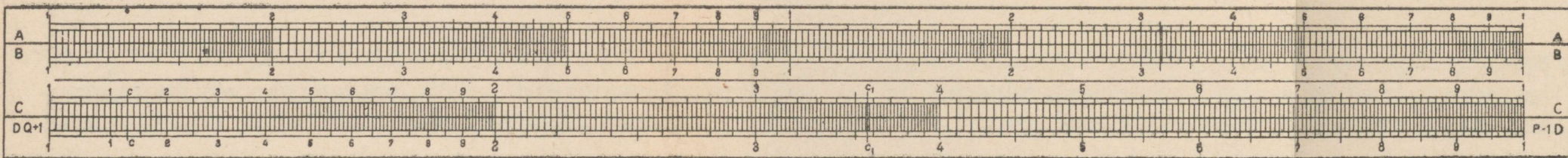
[Vastused. 0,339; 0,569; 1,383; 2,73; 4,67; 5,25.]



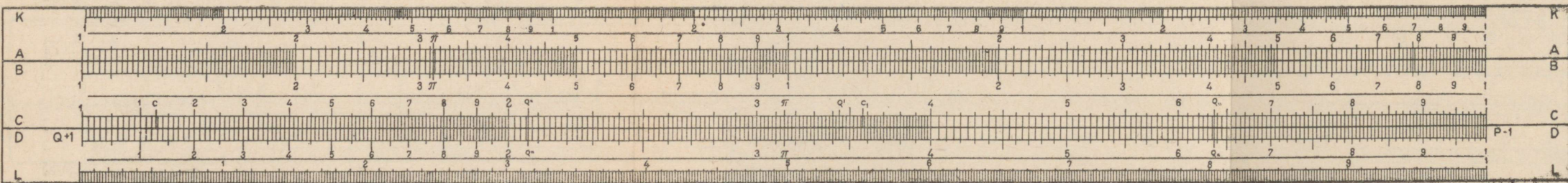
Joon. I



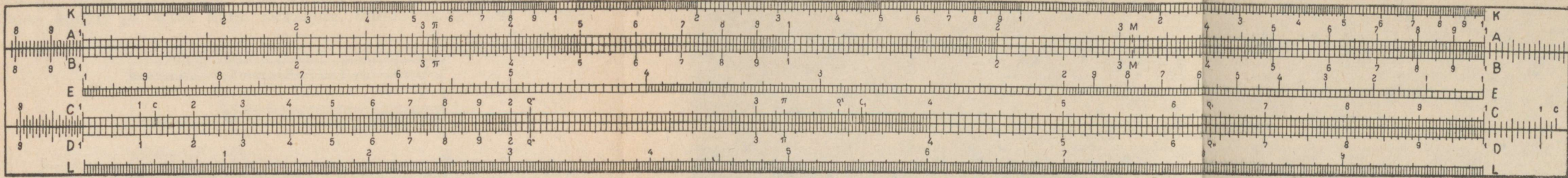
Joon. II



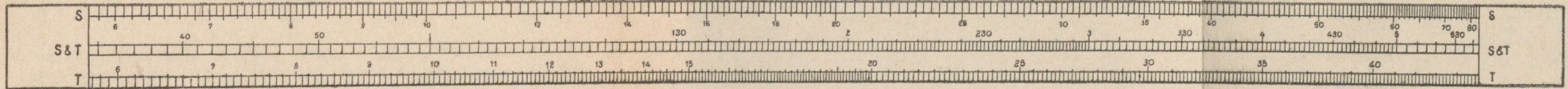
Joon. III



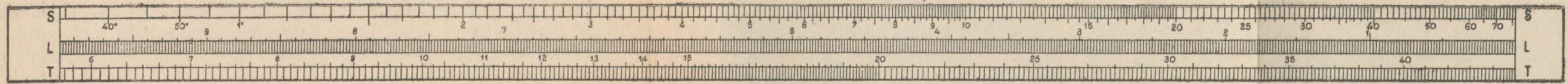
Joon. IV



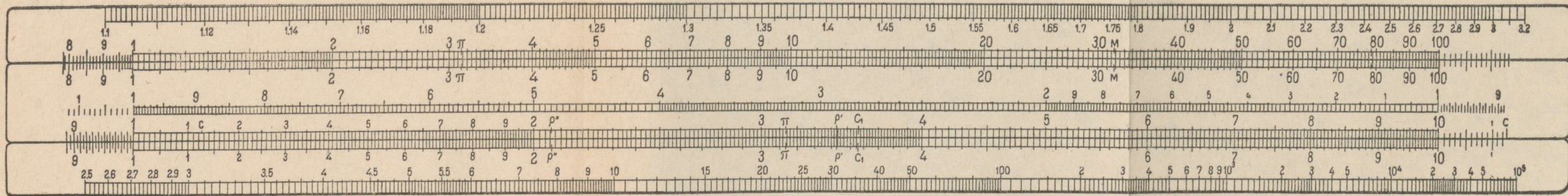
Joon.V



Joon.VI



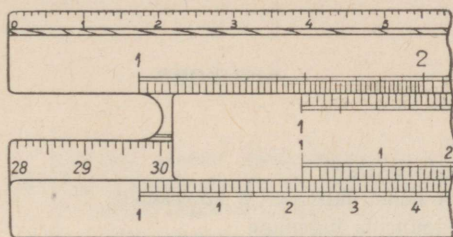
Joon.VII



Joon.VIII

§ 22. PIKKUSTE MÕOTMINE.

Arvutuslükati ülemisel (mõnikord ka alumisel) serval on pikkuste mõõtmiseks sentimeetiline jaotus, mis algab skaalade alguskriipsu kohalt ja läheb kuni skaalade lõpuni, s. o. kuni 25 cm.



Joon. 26.

Mõnede arvutuslükatite ülemisel serval algab sentimeetiline jaotus serva enese algusest ja läheb kuni serva lõpuni, kus on 28 cm, sest hariliku arvutuslükati üldpikkus on tavaliselt 28 cm. Edasi on selle sentimeeterjaotuse järg mõnikord arvutuslükati põhjal (keele all), kus järgnevad arvud 29, 30, 31, 32 jne. kuni parempoolse otsani, s. o. kuni 56 cm-ni (joon. 26). Sel juhul arvutuslükati keelt paremale poole lükates näeme, et pikkusmõõdu arvuline väärtus arvutuslükati põhiosa vasakpoolsest otsast kuni arvutuslükati keele parempoolse otsani on keele vasakpoolse otsa kohal arvutuslükati põhjas.

SISUKORD

Eessõna	3
§ 1. Logaritmilised skaalad	5
§ 2. Arvutuslükati konstruktsioon ja korrashoid	13
§ 3. Arvude märkimine ja lugemine	16
§ 4. Korrutamine	23
§ 5. Jagamine	35
§ 6. Ruudud	43
§ 7. Ruutjuured	51
§ 8. Kuubid ja kuupjuured	60
§ 9. Geomeetrilisi arvutusi	72
§ 10. Võrded	75
§ 11. Pöördskaala ja selle kasutamine	83
§ 12. Logaritmid	95
§ 13. Trigonomeetrilised skaalad ja nende lugemine	99
§ 14. Trigonomeetrilisi arvutusi	107
§ 15. Kolmnurkade lahendamine	117
§ 16. Tähised: q° , q' , q'' , q_{\bullet}	125
§ 17. Ruutvõrrandi lahendamine	128
§ 18. Kuupvõrrandi lahendamine	138
§ 19. Punkti koordinaatide ja kompleksarvude teisendamine	144
§ 20. Ühendatud S- ja S&T-skaala ning L-pöördskaala	149
§ 21. Eksponentsiaalskaalad	150
§ 22. Pikkuste mõõtmine	157

Борквель, Альберт Александрович
ТЕОРИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ
И ОБРАЩЕНИЕ С НЕЙ

На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярну маантс 10

•
Toimetaja H. Rehemaa
Tehniline toimetaja H. Kohu
Korrektor O. Sepp

Ladumisele antud 8. XII 1955. Trükkimisele
antud 13. II 1956. Paber 60×92, 1/16. Trüki-
poognaid 10+2 kleebist. Arvutuspoognaid
9,06. Trükiarv 8000. MB-00877. Tellimise
nr. 3393. Trükikoda «Tartu Kommunist»,
Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 5.65

Rbl. 5.65

A-20968

11

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00354558 1