

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika- ja informaatikaõpetaja õppekava

Kerttu Talts

**Ruumilise mõtlemise toetamine
matemaatikaõpetuses Känguru ülesannete ja
metoodilise materjali abil**

Magistritöö (15 EAP)

Juhendajad:
Tiina Kraav, PhD
Raili Vilt, MSc

Ruumilise mõtlemise toetamine matemaatikaõpetuses Känguru ülesannete ja metoodilise materjali abil

Lühikokkuvõte:

Ruumiline mõtlemine on matemaatilise mõtlemise ja probleemilahenduse oluline osa, kuid matemaatikaülesannetes sisalduvad ruumilised mõtlemisprotsessid ei pruugi olla õpetajale alati otseselt nähtavad. Magistritöö eesmärk oli koostada õpetajale suunatud metoodiline materjal ruumilist mõtlemist sisaldavate Känguru matemaatikavõistluse ülesannete kasutamiseks matemaatikaõpetuses. Selleks analüüsiti aastatel 2020–2025 avaldatud 1008 Känguru ülesannet kuues vanuserühmas. Ruumilist mõtlemist sisaldavad ülesanded kategoriseeriti Hawes ja Ansari (2020) käsitlusele tuginedes viide kategooriasse: mõtteline pööramine, mõtteline kokkupanek, mõtteline lõikamine, mehaaniline kujutlusvõime ja mõtteline paberi voltimine. Kategooriaid kohandati vastavalt Känguru ülesannete kontekstile ning mitut ruumilise mõtlemise protsessi sisaldava ülesande puhul määrati domineeriv protsess. Kadett vanuserühma ülesannetele koostati detailsem metoodiline materjal, milles määrati võimalikud probleemilahendusstrateegiad ja lahenduse võtmetähelepanekud ning koostati õpetajale abiküsimused ja vihjed. Lahendusstrateegiate koostamisel lähtuti Pólya (1945/2001) probleemilahenduskäsitlusest ning juhendmaterjali puhul õpilase järkjärgulise suunamise põhimõtetest. Valminud materjal võimaldab õpetajal valida ülesandeid nende ruumilise mõtlemise protsessi järgi ning toetab ülesannete ettevalmistamist ja õpilaste probleemilahenduse juhendamist. Materjali mõju õpilaste ruumilisele mõtlemisele ega strateegiakasutusele käesolevas töös empiiriliselt ei hinnatud.

Võtmesõnad: ruumiline mõtlemine, matemaatikaõpetus, probleemilahendus, Känguru matemaatikavõistlus, metoodiline materjal

CERCS kood: S270 Pedagoogika ja didaktika

Supporting Spatial Thinking in Mathematics Education through Kangaroo Mathematics Competition Problems and Teacher Support Materials

Abstract:

Spatial thinking is an important component of mathematical thinking and problem solving, yet the spatial process involved in mathematics tasks may not always be immediately apparent to teachers. The aim of this master's thesis was to develop teacher-oriented methodological material for using Kangaroo mathematics competition problems involving spatial thinking in mathematics education. A total of 1008 Kangaroo problems published between 2020 to 2025 across six age groups were analyzed. Problems involving spatial thinking were categorized into five categories based on Hawes and Ansari (2020): mental rotation, mental composition, mental cutting, mechanical visualization and mental paper folding. The categories were adapted to the context of Kangaroo problems and when a problem involved several spatial processes, the dominant process was identified. More detailed methodological material was developed for the Cadet age group. For these problems, possible problem-solving strategies were created. They were based on Pólya's (1945/2001) problem-solving framework, while the guidance material followed principles of gradual scaffolding. The resulting material enables teachers to select problems according to the spatial thinking process involved and supports lesson preparation and the guidance of students' problem solving. The effects of the material on students' spatial thinking or strategy use were not empirically evaluated in this study.

Keywords: spatial thinking, mathematics education, problem solving, Kangaroo mathematics competition, teacher materials

CERCS classification: S270 Pedagogy and didactics

Sisukord

Sissejuhatus.....	5
1. Teoreetiline ülevaade	7
1.1. Ruumiline mõtlemine matemaatikas.....	7
1.2. Ruumilise mõtlemise klassifikatsioon	8
1.3. Ruumilise mõtlemise olulisus matemaatikas	10
1.4. Ruumilise mõtlemise toetamine matemaatikaõpetuses	11
1.5. Lahendusstrateegiad.....	13
1.6. Õpilase probleemilahenduse juhendamine	16
2. Metoodika	20
2.1. Analüüsitav materjal ja ülesannete valik	20
2.2. Känguru ülesannete analüüsimine ja kategoriseerimine.....	21
2.3. Kadett vanuserühma metoodilise materjali koostamine	24
2.3.1. Probleemilahendusstrateegia määramine.....	24
2.3.2. Lahenduse võtmetähelepanekute määramine	27
2.3.3. Õpetaja abiküsimuste ja vihjete koostamine.....	28
2.4. Metoodilise materjali struktuur.....	29
3. Tulemused ja arutelu.....	31
3.1. Loodud metoodiline materjal.....	31
3.2. Materjali kasutamine.....	34
3.3. Materjali puudused ja kitsaskohad.....	35
Kokkuvõte.....	38
Viited.....	40
Lisad.....	45
Lisa 1. Kaasapandud fail Känguru ülesanded 2020-2025	45
Lisa 2. Kaasapandud fail vanuserühma kadett ülesanded 2020-2025	46

Sissejuhatus

Matemaatikaõpetuse eesmärk ei ole üksnes arvutusoskuse kujundamine, vaid ka õpilaste loogilise mõtlemise, probleemilahendusoskuse ja ruumilise mõtlemise arendamine. Ruumiline mõtlemine hõlmab oskust luua, säilitada, tõlgendada ja muuta ruumilisi esitusi ning kasutada neid probleemide lahendamisel. Kuigi selle roll on kõige ilmsem geomeetrias, kasutatakse ruumilist mõtlemist ka paljudes teistes matemaatika valdkondades, näiteks arvuliste suuruste mõistmistel arvjoonel, mõõtmisel, diagrammide ja graafikute tõlgendamisel ning erinevate matemaatiliste seoste kujutamisel. Seetõttu käsitletakse ruumilist mõtlemist matemaatilise mõtlemise ja probleemilahendusega tihedalt seotud oskusena. (Gilligan-Lee *et al.*, 2022; Hawes & Ansari, 2020)

Ruumilise mõtlemise ja matemaatiliste oskuste vahelisi seoseid on leitud eri vanuses õppijate juures ning ruumiliselt mõtlemise võimekus on seotud ka hilisemate STEM-valdkonna haridus- ja karjääritulemustega (Gilligan *et al.*, 2017; Wai *et al.*, 2009). Matemaatikaõpetuse seisukohalt on seetõttu vaja mõista, millistes ülesannetes ruumiline mõtlemine lahendusprotsessis olulist rolli omab ning kuidas saab õpetaja selle rakendamisel õpilasi teadlikult toetada. Ülesande ruumiline komponent ei ole alati välise esitusviisi põhjal ilmne, sest visuaalne kujund ei muuda ülesannet automaatselt ruumilise mõtlemise ülesandeks ning ruumilist mõtlemist võib nõuda ka peamiselt tekstina esitatud ülesanne. (Burte *et al.*, 2020)

Eesti põhikooli matemaatika ainekavas on ühe eesmärgina nimetatud õpilase valmisolekut mõista ja kirjeldada loogilisi, kvantitatiivseid ja ruumilisi seoseid, kuid ruumilist mõtlemist ei ole eraldi oskusvaldkonnana kirjeldatud (Põhikooli riiklik õppekava, 2025). Ka rahvusvahelises kirjanduses on osutatud sellele, et matemaatilise õpisisu ja konkreetsete ruumiliste oskuste seosed võivad jääda õpetajale kaudseks. Nende seoste selgem esiletoomine võib aidata õpetajal ruumilist mõtlemist sisaldavaid ülesandeid teadlikumalt märgata ja valida ning kavandada teadlikult õpilase toetamist. Sellest tuleneb vajadus õpetajale suunatud materjali järele, mis ei koonda üksnes sobivaid ülesandeid, vaid aitab ka kirjeldada, millist ruumilist mõtlemist nende lahendamine eeldab ja kuidas saab õpilast lahendusprotsessis aidata. (Burte *et al.*, 2020; Pinilla, 2024)

Ühe võimaluse ruumilise mõtlemise rakendamiseks matemaatikaõpetuses pakuvad probleemülesanded. Käesolevas töös kasutatakse selleks rahvusvahelise Känguru matemaatikavõistluse ülesandeid, milles esineb lisaks arvutamisele kujundite, mustrite, asukohtade, liikumiste ja erinevate visuaalsete seoste analüüsimist ning mitmesuguseid

probleemilahendusstrateegiaid. Ruumilist mõtlemist sisalduvate ülesannete tulemusi on seostatud ka teiste mittestandardsete probleemülesannete lahendamise edukusega (Applebaum, 2017).

Tartu Ülikooli teaduskooli Känguru võistluse arhiivis on ülesanded avaldatud aasta ja vanuserühma järgi ning materjal on PDF-vormingus, mistõttu ei ole üksikute ülesannete kiire leidmine, kopeerimine ja kohandamine ainetundides kasutamiseks piisavalt mugav. Käesolevas töös koondatakse valitud ülesanded redigeeritavasse tabelipõhisesse materjali, mis võimaldab õpetajal neid lihtsamini leida, valida ja ainetunnis kasutada.

Käesoleva töö lähteprobleem on praktiline: ruumilist mõtlemist sisaldavad matemaatika-ülesanded ei ole õpetajale tingimata sellistena äratuntavad ning ülesande olemasolu iseenesest ei anna õpetajale veel teavet selle kohta, millist ruumilist mõtlemisprotsessi lahendamine eeldab, millised lahendusviisid võivad olla sobivad või kuidas õpilast takerdumise korral toetada. Seetõttu ühendatakse käesolevas töös ülesannete ruumilise sisu analüüs nende lahendusstrateegiate ja õpetajapoolse juhendmaterjaliga.

Magistritöö eesmärk on koostada õpetajale suunatud metoodiline materjal ruumilist mõtlemist sisaldavate Känguru ülesannete kasutamiseks matemaatikaõpetuses. Eesmärgi saavutamiseks analüüsiti aastatel 2020–2025 avaldatud Känguru matemaatikavõistluse ülesandeid kuues kooliõpilaste vanuserühmas: pre-ekolier, ekolier, benjamin, kadett, juunior ja student.

Töö eesmärgist lähtuvad järgmised uurimisküsimused:

1. Kuidas jaotuvad aastatel 2020–2025 avaldatud Känguru ruumilist mõtlemist sisaldavad ülesanded käesolevas töös kasutatud ruumilise mõtlemise kategooriate vahel?
2. Kuidas saab kadett vanuserühma ruumilise mõtlemise ülesandeid täiendada probleemilahendusstrateegiate, võtmetähelepanekute, abiküsimuste ja vihjetega, et toetada õpetajat nende kasutamisel matemaatikaõpetuses?

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis käsitletakse ruumilist mõtlemist matemaatikas, selle klassifikatsiooni, olulisust ja arendamist ning probleemilahendusstrateegiaid ja õpilase juhendamist. Teises peatükis kirjeldatakse ülesannete valimist, kategoriseerimist ja metoodilise materjali koostamist. Kolmandas peatükis esitatakse töö tulemused, materjali kasutusvõimalused ja töö piirangud. Lisades esitatakse kategoriseeritud Känguru ülesannete tabelid ja kadett vanuserühmale koostatud detailsem metoodiline materjal.

1. Teoreetiline ülevaade

Teoreetilise ülevaate eesmärk on luua alus Känguru ülesannete analüüsimiseks ja õpetajale suunatud metoodilise materjali koostamiseks. Esmalt käsitletakse ruumilise mõtlemise mõistet ja selle erinevaid komponente ning seejärel ruumilise mõtlemise seoseid matemaatilise edukusega ja selle arendamise võimalusi matemaatikaõpetuses. Kuna käesolevas töös täiendatakse ülesandeid ka lahendusstrateegiate, abiküsimuste ja vihjetega, käsitletakse peatüki lõpus Pólya probleemilahendusraamistikku ning õpilase probleemilahenduse juhendamise põhimõtteid.

1.1. Ruumiline mõtlemine matemaatikas

Ruumiline mõtlemine (ingl keeles *spatial thinking*) on üldiselt defineeritud kui kognitiivsete protsesside kogum, mis hõlmab endas võimet tajuda, kujutada ette, analüüsida ja muuta ruumiliselt objektide asetust nii tasapinnaliselt kui ka ruumis. Sellist lähenemist kasutatakse probleemide lahendamiseks ja erinevate järelduste tegemiseks. (N. Newcombe, 2010; D. H. Uttal *et al.*, 2013)

Kuigi ruumilise mõtlemise tähtsuses valitseb teadlaste seas laialdane üksmeel, puudub siiani ühtne terminoloogia ja definitsioon. Kirjanduses kasutatakse sageli mõisteid *spatial thinking*, *spatial reasoning*, *spatial ability* ja *spatial skills*, kuid nende tähendus varieerub sõltuvalt uurimisvaldkonnast ja uurimuse eesmärgist (Harris, 2023). Kognitiivses psühholoogias kasutatakse sagedamini mõistet *spatial ability*, mis viitab indiviidi ruumilistele võimetele ning mida hinnatakse enamasti standardiseeritud psühhomeetriliste testidega, näiteks mõttelise pööramise (*mental rotation*) või ruumilise visualiseerimise ülesannetega (D. H. Uttal *et al.*, 2013). Matemaatikahariduse uurijad eelistavad seevastu mõisteid *spatial thinking* või *spatial reasoning*, rõhutades ruumiliste protsesside rolli matemaatiliste probleemide mõistmisel ja lahendamisel klassiruumi kontekstis (Harris, 2023).

Harris (2023) märgib, et erinev terminoloogia peegeldab laiemat erinevust kahe teadusvaldkonna uurimisviisides. Kognitiivne psühholoogia on traditsiooniliselt keskendunud üksikute ruumiliste oskuste uurimisele kontrollitud laboritingimustes, eesmärgiga mõista inimese tunnetusprotsesse. Matemaatikaharidus seevastu uurib ruumilist mõtlemist autentsetes õpisiuatsioonides ning keskendub sellele, kuidas ruumilised protsessid toetavad matemaatiliste mõistete kujunemist ja probleemide lahendamist klassiruumis. Autor rõhutab, et need kaks uurimistraditsiooni on ajalooliselt arenenud küll paralleelselt, kuid nendevaheline

teadmiste lõimumine on olnud piiratud, mistõttu ei ole laboriuuringute tulemused alati jõudnud matemaatikaõpetuse praktikasse. (Harris, 2023)

Varasemates uuringutes on käsitletud ruumilist võimekust sageli kui suhteliselt püsivat individuaalset omadust, mida mõõdeti erinevate psühhomeetriliste testidega. Tänapäevane käsitus on sellest märkimisväärselt laienenud. Uurimistulemused näitavad, et ruumiline mõtlemine ei ole üksainus üldine võime, vaid koosneb mitmest omavahel seotud, kuid siiski eristatavast oskusest (Harris, 2023; N. S. Newcombe *et al.*, 2019). Lisaks ei käsitleta ruumilist mõtlemist enam ainult oskusena, vaid ka protsessina, mille kaudu luuakse ja kasutatakse mentaalseid/mõttelisi mudeleid matemaatiliste probleemide lahendamisel (Hawes & Ansari, 2020). Matemaatikahariduse seisukohalt võimaldab selline käsitus pöörata tähelepanu mitte üksnes õppija ruumilisele võimekusele, vaid ka sellele, milliseid ruumilisi mõtlemisprotsesse konkreetne matemaatikaülesanne eeldab.

Käesolevas magistritöös kasutatakse mõistet *ruumiline mõtlemine* laias tähenduses, hõlmates nii erinevaid ruumilisi oskusi kui ka nende rakendamist matemaatiliste probleemide lahendamisel. Ruumilist mõtlemist käsitletakse seega protsessina, mis hõlmab ruumiliste representatsioonide loomist, säilitamist, tõlgendamist ja muutmist probleemide lahendamise eesmärgil. (Hawes & Ansari, 2020; N. S. Newcombe, 2013)

Järgnevas alapeatükis käsitletakse lähemalt ruumilise mõtlemise peamisi komponente ning nende eristamise võimalusi.

1.2. Ruumilise mõtlemise klassifikatsioon

Ruumiline mõtlemine hõlmab erinevaid oskusi ja protsesse ning seetõttu on selle käsitlemisel oluline eristada ruumilise mõtlemise erinevaid komponente. Hawes ja Ansari (2020) esitavad ruumilise visualiseerimise mõõtmiseks kasutatavate ülesannete viis tüüpi: **mõtteline pööramine ruumis** (*3D mental rotation*), **mõtteline kokkupanek** (*mental composition*), **mõtteline lõikamine** (*mental cutting*), **mehaaniline kujutlusvõime** (*mechanical visualization*) ja **mõtteline paberi voltimine** (*mental paper folding*). Need ülesandetüübid eeldavad erinevaid ruumilise mõtlemise oskusi ja teisendamise protsesse.

Lohman (1996) defineerib ruumilist võimekust kui võimet luua, säilitada, meenutada ja teisendada hästi struktureeritud visuaalseid kujutisi. Ta rõhutab, et ruumiline võimekus ei ole üks konkreetne oskus, vaid üldnimetus mitmele erinevale ruumilisele võimekusele, millest

igauks keskendub visuaalsete kujutiste loomise, säilitamise, meenutamise ja teisendamise protsesside eri aspektile.

Mõtteline pööramine ruumis – tähendab ülesandeid, kus lahendaja peab mõttes kujutama ette objekti või kujundi orientatsiooni muutumist ning ära tunda sama objekti pärast selle mõttelist pööramist. Hawes ja Ansari (2020) esitavad ruumilise visualiseerimise mõõtmisviisi näitena kolmemõõtmeliste objektide mõttelise pööramise ülesande. Mõttelise pööramise uurimustes on kasutatud nii kahe- kui ka kolmemõõtmelisi objekte või kujundeid. Kuigi nende erinevuse üle on kirjanduses arutletud, ei ole mõtteline pööramine piiratud üksnes kolmemõõtmeliste objektidega. (Hawes & Ansari, 2020; Linn & Petersen, 1985)

Mõtteline kokkupanek – tähendab ülesandeid, kus lahendaja peab mõttes osadest terviku moodustama või otsustama, millised tükid sobivad etteantud kujundi kokkupanemiseks. Hawes ja Ansari (2020) esitatud *mentaal composition* ülesandetüübis tuleb valida etteantud osade hulgast kujundid, mida kombineerides on võimalik moodustada soovitud terviklik kujund. Mõtteline kokkupanek eeldab seega üksikosade ja moodustava terviku vaheliste ruumiliste seoste arvestamist ning tervikkujundi mentaalse visiooni loomist. Ka Mix ja Cheng (2012) käsitlevad ruumilise visualiseerimise osana objektide osadest keerukamate kujundite moodustamist.

Mõtteline lõikamine – tähendab ülesandeid, kus lahendaja peab kolmemõõtmelisi objekte mõtteliselt lõikama või eraldama osadeks ning seejärel tuleb analüüsida nende omavahelisi seoseid või tunnuseid. Ülesandes ei pea toimuma sõnasõnaliselt lõikamist, vaid see kategooria väljendab oskust kujutada ette, kuidas ruumiline tervik jaguneb osadeks ja kuidas need osad paiknevad või seostuvad. (Hawes & Ansari, 2020; Lohman, 1996; Mix & Cheng, 2012)

Mehaaniline kujutlusvõime – selle all mõistetakse, kuidas ühe mehhaanilise süsteemi osa liikumine mõjutab teise osa liikumist, näiteks Hawes ja Ansari (2020) artiklis on selleks hammasrataste liikumise ülesanne. Lohmani (1996) käsitus aitab seda laiemalt põhjendada, sest ruumilise võimekuse ülesanded võivad nõuda nii kujutise säilitamist kui ka selle mõttelist muutmist. Mehaanilise kujutlusvõime puhul on oluline just muutuse või liikumise mõtteline jälgimine.

Mõtteline paberi voltimine – ruumilise visualiseerimise ülesanne, kus tuleb ette kujutada paberi voltimist, sellesse aukude tegemist ja paberi lahtivoltimise tulemust. Sellised ülesanded

eeldavad sageli mitme järjestikuse ruumilise teisenduse arvestamist. Paberi voltimise ülesandeid on kasutatud ka ruumilise võimekuse mõõtmisel. (Lohman, 1996)

1.3. Ruumilise mõtlemise olulisus matemaatikas

Ruumilise mõtlemise olulisus matemaatikas seisneb selles, et matemaatiline arutlemine ei toetu üksnes arvutamisele ja sümbolite kasutamisele, vaid ka kujutamisele, seoste nägemisele, objektide ja kujundite vaimsele muutmisele ning erinevate esitusviiside tõlgendamisele. Matemaatikas kasutatakse mitmesuguseid ruumilisi esitusviise: arvkiirt, koordinaatteljestikku, geomeetrilisi kujundeid, diagramme, graafikuid, tabelleid, skeeme ja mudeleid. Gilligan-Lee, Hawes ja Mix (2022) rõhutavad, et matemaatikaga tegelemine tähendab paratamatult ka ruumilise mõtlemise kasutamist, nagu näiteks Pythagorase teoreem, Descartes'i koordinaatsüsteem, arvkiir ja geomeetrilised printsiibid. Seetõttu ei saa ruumilist mõtlemist käsitleda matemaatikast eraldiseisva lisana, vaid ühe matemaatilise mõtlemise osana.

Ruumilise mõtlemise ja matemaatilise võimekuse seost on korduvalt näidatud eri vanuses õppijate puhul. Mix ja Cheng (2012) kirjeldavad, et inimesed, kes saavutavad paremaid tulemusi ruumilistes ülesannetes, saavutavad sageli paremaid tulemusi ka matemaatika-ülesannetes. Nende ülevaate järgi ilmneb see seos nii laste, noorukite kui ka täiskasvanute puhul ning puudutab erinevaid matemaatika valdkondi. Ruumiline võimekus võib toetada näiteks geomeetria mõistmist, probleemülesannete lahendamist, arvkiire kasutamist, ligikaudset arvutamist ning visuaalsete andmete tõlgendamist. Young, Levine ja Mix (2018) kirjeldavad samuti ruumiliste ja matemaatiliste oskuste vahelisi arengulisi seoseid. Seda toetab ka Gilligan, Flouri ja Farrani (2017) pikaajaline uuring, milles leiti, et 5- ja 7-aastaselt mõõdetud ruumilised oskused olid seotud 7-aastaste matemaatikatulemustega ka pärast soo, sotsiaalmajandusliku tausta, rahvuse ja verbaalse võimekuse arvestamist.

Ruumilise mõtlemise seosed matemaatikaga ei ole ainult geomeetrias. Matemaatikas kasutatakse arvude ja koguste mõistmiseks sageli ruumilisi esitusviise nagu arvkiirt, graafikuid ja diagramme. Mix ja Cheng (2012) toovad oma ülevaates esile seoseid ruumiliste oskuste ning matemaatikavaldkonna vahel, sealhulgas arvutaju ja probleemilahendusega. Seega ei ole ruumilise mõtlemise tähendus matemaatikas piiratud tasandiliste või ruumiliste kujundite käsitlemisega, vaid ulatub ka teistesse matemaatika valdkondadesse.

Ruumilise mõtlemise tähtsus ilmneb matemaatikaga seotud edasistes õpingutes ja STEM-valdkondades. Uttal ja Cohen (2012) käsitlevad ruumilisi oskusi kui võimalikku „väravat“ või

„barjääri“ loodusteaduste, tehnoloogia, inseneeria ja matemaatika valdkondadesse sisenemisel. Seda seost toetavad ka pikaajalised empiirilised uuringud. Wai, Lubinski ja Benbow (2009) analüüsisid ligikaudu 400 000 keskkooliõpilase andmeid ning leidsid, et noorukieas mõõdetud ruumiline võimekus oli seotud enam kui kümme aastat hiljem saavutatud STEM-valdkonna hariduslike ja ametialaste tulemustega. Ruumiline võimekus andis STEM-valdkonda kuulumise ennustamisel täiendavat informatsiooni ka pärast matemaatilise võimekuse ning sõnavara ja tekstimõistmisega seotud verbaalse võimekuse arvesse võtmist. Samuti suurenes kõrgema ruumilise võimekuse tasemega tõenäosus omandada kõrgem STEM-kraad.

Ruumilised oskused ei ole kõigil õppijatel samal tasemel. Sorby (2001) kirjeldab esimese aasta inseneeriaüliõpilaste näitel suuri individuaalseid erinevusi ruumilise mõtlemise oskustes. Matemaatikaõpetuse seisukohalt on sellised erinevused olulised, sest ruumilist mõtlemist nõudvate ülesannete jõukohasus võib sõltuda ka õppija varasematest kogemustest ja oskuste tasemest. Seetõttu ei pruugi sama ülesanne esitada kõigile õppijatele ühesugust kognitiivset väljakutset. Samas ei ole ruumilised oskused muutumatud, vaid neid on võimalik õppimise ja sihipärase harjutamise kaudu arendada, mida käsitletakse järgmises alapeatükis.

1.4. Ruumilise mõtlemise toetamine matemaatikaõpetuses

Ruumilised oskused ei ole muutumatud individuaalsed omadused. Neid on kogemuse, harjutamise ja õpetamise kaudu võimalik arendada. Uttal, Miller ja Newcombe (2012) leidsid ruumilise treeningu meta-analüüsis, et ruumiliste oskuste harjutamine parandas osalejate sooritust ning treeningu mõju võis kanduda üle ka teistele ruumilistele oskustele, mida otseselt ei harjutatud. Ruumiliste oskuste arendatavust näitavad ka hariduslikud sekkumised. Sorby (2001) ruumilise mõtlemise arendamise kursus parandas algselt nõrgemate ruumiliste oskustega inseneeriaüliõpilaste ruumilisi oskusi ja insenerigraafika tulemusi ning kursusel osalemine seostus selles õppijarühmas ka suurema õpingutes püsimisega. Need tulemused näitavad, et madalam ruumiliste oskuste algtase ei pea kujutama endast püsivat piirangut, kui õppijatele pakutakse sihipäraselt võimalust neid oskusi arendada.

Ruumiliste oskuste arendatavus ei tähenda siiski automaatselt, et ruumiline treening parandab ka matemaatilisi oskusi. Hawes *et al.* (2022) meta-analüüsis leiti ruumilise mõtlemise treeningul positiivne keskmine mõju nii ruumilistele oskustele (Hegesi $g = 0,49$) kui ka matemaatilisele sooritusele ($g = 0,28$). Matemaatikale ülekanduv mõju oli seega väiksem kui mõju ruumilistele oskustele ning varieerus uuringute vahel. See osutab, et ruumiliste tegevuste

matemaatiline kasu sõltub muu hulgas sellest, millist ruumilist oskust harjutatakse, millise matemaatilise sisuga tegevus seotakse ja kuidas õppetegevus üles ehitatakse.

Ruumilise mõtlemise ja matemaatika teadlikku seostamist on uuritud ka tavapärase klassiruumikontekstis. Lowrie *et al.* (2017) kümnenädalases ruumilise mõtlemise arendamise programmis paranesid sekkumisrühma õpilastel võrreldes kontrollrühmaga nii ruumilised oskused kui ka matemaatiline sooritus. Sarnaseid tulemusi said ka Farran *et al.* (2025), kelle kuuenädalases õpetaja läbiviidud LEGO-konstruksioonide programmis paranesid 6-7-aastaste laste ruumilise mõtlemise oskused ja matemaatikatumused võrreldes tavapärast õpet saanud kontrollrühmaga. Need uuringud näitavad, et ruumilisi tegevusi on võimalik lõimida tavapärasesse õpetusse, kuid nende tulemusi tuleb käsitleda konkreetse sekkumise, vanuserühma ja matemaatilise sisu kontekstis.

Ruumilise mõtlemise toetamiseks saab kasutada mitmesuguseid füüsilisi vahendeid ja visuaalseid tegevusi, näiteks klotsidega konstrueerimist, puslesid, kujundite pööramist ja voltimist, jooniseid ning mudeleid. Gilligan-Lee *et al.* (2023) leidsid, et füüsiliste esemete kasutamine ruumilise mõtlemise arendamisel toob kaasa suuremad ja järjepidavamad paranemised matemaatikatumustes, võrreldes sellega, kui ilma abivahenditeta ruumilise mõtlemise oskusi arendada. Ka varasemad uuringud osutavad oskuste arendamise viisi olulisusele, näiteks Levine *et al.* (2011) leidsid seose varase puslemängu ja hilisemate ruumilise teisendamise oskuste vahel ning Fisher *et al.* (2013) näitasid, et teadlik juhendatud mäng toetas geomeetriliste kujundite omaduste õppimist paremini kui otsene õpetamine. Seega ei ole oluline üksnes ruumilise mõtlemise arendamisel materjali olemasolu, vaid ka see, kuidas õppija sellega tegutseb ja kuidas õpetaja tegevust suunab.

Ruumilise mõtlemise arendamine ei tähenda ainult eraldi ruumiliste ülesannete lisamist matemaatikatundi, vaid ka matemaatikaülesannetes juba olemasolevate ruumiliste aspektide teadlikku esiletoomist. Burte *et al.* (2020) eristavad matemaatikaülesandeid selle järgi, kas ruumiline mõtlemine on lahendamisel vajalik, võimalik lahendusviis või vähese tähtsusega. Seetõttu on õpetaja jaoks oluline osata märgata mitte üksnes ülesande visuaalset vormi, vaid ka seda, millised ruumilisi esitusviise, seoseid ja teisendusi selle lahendamine tegelikult eeldab. Ülesannete süstemaatiline kategoriseerimine võib olla üks võimalus selliste ruumiliste protsesside nähtavamaks tegemiseks ning aidata õpetajal sobivaid ülesandeid teadlikumalt valida ja kasutada. (Burt *et al.*, 2020; Pinilla, 2024)

Ruumilise mõtlemise teadlik lõimimine matemaatikaõpetusse eeldab aga seda, et õpetajal endal oleksid vajalikud teadmised, oskused ja enesekindlus ruumiliste aspektide märkamiseks ning õpetamiseks. Harris (2023) toob välja, et eriti algkoolis võib õpetajatel puududa oskus ja enesekindlus ruumilise mõtlemise teadlikuks lõimimiseks ning seda võib soodustada ruumilise mõtlemise vähene esindatus õppekavas ja õpetajakoolituses. Sellisel juhul võivad matemaatikaõppes olemasolevad võimalused ruumilise mõtlemise oskuste arendamiseks jääda kasutamata. Ka Burte *et al.* (2020) leidsid, et õpetajad hindasid ruumilist mõtlemist sisaldavaid matemaatikaülesandeid raskemini õpetatavaks ning õpetajate enda tajutud ruumilise mõtlemise kompetentsus oli seotud suurema tajutud tõhususega matemaatika õpetamisel. Pinilla (2024) rõhutab seetõttu õpetajate toetamise vajadust, tuues ühe võimalusena välja selged seosed matemaatika õpisisu ja konkreetsete ruumilise mõtlemise oskuste vahel ning õpetajate võimaluse nende oskustega professionaalse õppimise käigus teadlikult tutvuda. Ka Eesti põhikooli matemaatika ainekavas nimetatakse ruumiliste seoste mõistmist ja kirjeldamist, kuid ruumilist mõtlemist ei ole eraldi oskusvaldkonnana kirjeldatud (Põhikooli riiklik õppekava, 2025).

Üks võimalus teadusuuringute tulemusi õpetamispraktikasse viia on õpetajale suunatud meetodiliste tööriistade loomine. Farran *et al.* (2024) ruumilise mõtlemise materjali uuringus kasutasid õpetajad materjale eelkõige enda professionaalseks õppimiseks ja õppetegevuste planeerimiseks ning hindasid neid üldiselt kasulikuks. Samas ilmnes olulise praktilise piiranguna õpetajate ajapuudus, mistõttu rõhutavad uuringu autorid teaduspõhiste materjalide võimalikult lihtsa ligipääsetavuse ja kasutatavuse tähtsust.

1.5. Lahendusstrateegiad

Ülesannete lahendamisel ei piisa sageli üksnes varem õpitud reegli või valemi rakendamisest, sest alati ei pruugi olla sobiv lahendustee kohe teada. Matemaatikaülesannete lahendamine on protsess, milles oluline ei ole ainult valmis lahendus, vaid ka selle leidmise tee. Probleemi iseseisev lahendamine sisaldab ka avastamise elementi, sest õpilane peab olemasolevate teadmiste põhjal leidma tee eesmärgini, mis ei ole vahetult saavutatav. Õpetaja ülesanne ei ole seetõttu üksnes lahenduse ette näitamine, vaid õpilase suunamine selliste küsimuste ja võtetega, mis aitavad tal iseseisvalt mõelda. Õpetaja saab õpilaste probleemilahendusoskust arendada, pakkudes neile sobiva raskusega probleeme ja aidates neid „stimuleerivate küsimustega“, mitte ainult harjutades rutiinseid tehteid. (Pólya, 1945/2001)

Probleemi lahendamise edukus ei sõltu üksnes erinevate strateegiate teadmisest, vaid ka oskusest valida konkreetse ülesande jaoks sobiv lähenemisviis ja seda vajaduse korral muuta. Ruumilise mõtlemise ülesanded võivad nõuda mitmeetapilist analüüsi, mõtteliselt kujutise muundamise käigus saadud informatsiooni meeles hoidmist ning mitme osatoimingu koordineerimist. Edukad ülesannete lahendajad kohandavad oma strateegiaid ülesande eripäraga ja kasutavad korraga mitut erinevat lahendusviisi. Seega ei pruugi sama ruumiline strateegia olla kõikide ülesannete puhul võrdselt tõhus ning keerukamate ülesannete lahendamine eeldab paindlikku strateegiavalikut. (Linn & Petersen, 1985; Pólya, 1945/2001)

Pólya probleemilahenduse raamistik koosneb neljast põhifaasist: ülesande mõistmine, lahendusplaani koostamine, plaani elluviimine ja tagasivaatev analüüs ehk lahenduse kontrollimine. Etapid aitavad korrastada lahenduse käigus tekkivaid küsimusi ja erinevaid mõttekäike. Ülesande lahendamisel võib korduvalt muuta vaatenurka ja arusaam probleemist täieneb lahenduse poole liikumisel. Sellest tulenevalt võivad probleemi uuesti mõtestamine, lahendusplaani täiustamine ja tehtud sammude kontrollimine toimuda ka lahendusprotsessi jooksul, mitte ainult üksteisele rangelt järgnevatena. (Pólya, 1945/2001)

Probleemilahenduse esimene etapp on ülesande mõistmine. Lahendaja peab suutma ülesande oma sõnadega ümber sõnastada ning eristada, mida otsitakse, millised andmed on antud ja millised tingimused neid omavahel seovad. Samuti tuleb hinnata, kas ülesande tingimusi on võimalik täita ning kas esitatud informatsioon on otsitava määramiseks piisav, puudulik, ülearune või vastuoluline. Ruumilise mõtlemise ülesannetes tähendab see ka kujundite või objektide omaduste, nende asendi ja omavaheliste ruumiliste suhete tähelepanelikku määratlemist. Kui ülesande tingimust või kujutatud olukorda mõistetakse ebatäpselt, võib lahendaja hakata tegema arvutusi või ruumilisi teisendusi, mis ei vasta tegelikult ülesandes küsitule. (Gilligan-Lee *et al.*, 2022; Pólya, 1945/2001)

Ülesande mõistmist võib toetada probleemi esitamine joonise, skeemi või tähistuste abil. Kujunditega seotud ülesande puhul soovitatakse koostada joonis, märkida sellele antud andmed ja otsitav ning võtta vajaduse korral kasutusele sobivad tähistused. Selline kujutamine sunnib lahendajat ülesande objekte ja nendevahelisi seoseid täpsemalt vaatlama. See on probleemilahenduses kasulik eelkõige siis, kui see toob esile lahendamiseks olulised matemaatilised seosed, mitte ainult ülesande olukorra välised või visuaalsed tunnused. (Hawes & Ansari, 2020; Newcombe, 2010; Pólya, 1945/2001)

Probleemi mõistmisele järgneb lahendusplaani koostamine, mille käigus otsitakse seost antud informatsiooni ja otsitava tulemuse vahel. Plaan on olemas siis, kui lahendaja teab vähemalt üldjoontes, milliseid arvutusi, konstruktsioone või muid toiminguid tuleb tulemuse saamiseks teha. Plaani kujunemist võivad toetada varem lahendatud sarnase probleemi või sobiva teoreemi meenutamine, probleemi teistsugune sõnastamine, lihtsama või erijuhulise probleemi vaatlemine ning abielemendi või abiprobleemi kasutuselevõtmine. Kui esimene lähenemisviis tulemuseni ei vii, tuleb probleemi vaadelda teisest küljest või muuta kasutatavat strateegiat, säilitades samal ajal seose esialgse küsimuse, andmete ja tingimustega. (Pólya, 1945/2001)

Ruumilise mõtlemise ülesannetes võib lahendusplaani koostamine toimuda sisemise ruumilise mudeli loomise ja muutmise kaudu. Ruumilist visualiseerimist saab kasutada „mõttelise tahvlina“, et matemaatilisi objekte ja suhteid modelleerida, simuleerida ning muuta. Olenevalt ülesandest võib plaan hõlmata näiteks kujundi mõttelist pööramist, osadeks lahutamist või osadest terviku moodustamist, vaatepunkti muutmist või erinevate ruumiliste suuruste võrdlemist. Selline mudel võib aidata korrastada ülesande informatsiooni, säilitada vahetulemusi ning kujundada antud andmete vahel uusi seoseid. Ruumiline visualiseerimine ei ole seega üksnes ülesande sooritamise, vaid võib moodustada lahendusplaani keskse osa. (Gilligan-Lee *et al.*, 2022; Hawes & Ansari, 2020)

Kolmandas etapis viiakse koostatud lahendusplaan ellu ning kontrollitakse selle iga sammu. Plaani koostamisel võib kasutada esialgseid oletusi ja heuristilist arutlemist, kuid valmis lahenduse sammud peavad olema omavahel loogiliselt seotud ja põhjendatud. Plaani üldjoont tuleb seetõttu järk-järgult täpsustada, jälgides, et ükski oluline detail ei jääks vahele ning iga osatoiming sobituks terviklikku lahenduskäiku. Ruumilise mõtlemise ülesande korral tähendab see, et kujundi või objektide mõttelisel muutmisel tuleb jälgida muutuste järjekorda ja säilitada nende omadused, mida vastav teisendus ei muuda. Visuaalselt usutav tulemus ei asenda seejuures põhjendust, miks kasutatud teisendus või järeldus on korrektne. (Pólya, 1945/2001)

Neljandas etapis vaadatakse saadud lahendus ja selleni viinud mõttekäik uuesti üle. Tagasivaatamine ei piirdu lihtsalt vastuse kontrollimisega, vaid hõlmab ka kasutatud argumentide hindamist, alternatiivse lahendusviisi otsimist ning tulemuse või meetodi rakendatavuse kaalumist teistes probleemides. Selline analüüs aitab märgata võimalikke vigu, muuta lahenduse lühemaks või selgemaks ning mõista, milline strateegia lahenduseni viis. Ükski probleem ei ole täielikult ammendatud, sest valmis lahendust saab edasi uurida, parandada või seostada teiste probleemidega. Tagasivaatamine toetab seega nii lahenduse

kontrollimist kui ka lahendusstrateegiate teadlikku üldistamist ja hilisemat taaskasutamist. (Pólya, 1945/2001)

Pólya probleemilahendusprotsessi etapid ja nendega seotud heuristilised võtted moodustavad üldise raamistiku, mille abil saab analüüsida nii ülesande lahendamiseks vajalikku mõtlemist kui ka võimalikke lahendusteid. Õpetaja eesmärk võiks seega olla õpilasel aidata probleemi mõista, märgata võimalikke seoseid, kujundada lahendusplaani ning hinnata valitud lähenemisviisi sobivust. Lahendusstrateegiate tundmine annab õpetajale võimaluse õpilaste mõtlemist paremini ennetada, kuid ei määra veel, millal ja millisel viisil lahendusprotsessi sekkuda. Õpilase iseseisvat mõtlemist toetavat õpetajapoolset juhendamist käsitletakse järgmises peatükis. (Pólya, 1945/2001)

1.6. Õpilase probleemilahenduse juhendamine

Õpilase juhendamise eesmärk on aidata tal ülesandega edasi liikuda viisil, mis säilitab õppija aktiivse rolli lahendusprotsessis. Üheks juhendamise vormiks on õppimise toestamine (ingl *scaffolding*), mida käsitletakse ajutise abina sellise ülesande või eesmärgi puhul, millega õppija iseseisvalt veel toime ei tule. Toestamine ei tähenda ühte kindlat õpetamisvõtet, sest toe vorm ja ulatus sõltuvad ülesandest, õpilase senisest arusaamisest ning tema tegevusest juhendamise ajal. Seetõttu on toestamine õpetaja ja õpilase vaheline aktiivne protsess, mille eesmärk ei ole lahendada probleemi õpilase eest, vaid võimaldada tal sooritada tegevusi, mis ei oleks talle ilma abita veel jõukohased. (van de Pol *et al.*, 2010)

Tõhusa toestamise keskne tunnus on toe kohandamine õpilase hetkevajadusega. Õpetaja peab lähtuma õppija tegelikust arusaamisest ja senisest tegevusest. Selleks peab enne järgmise vihje või küsimuse esitamist välja selgitama, kuidas õpilane ülesannet üldse mõistab, millist lahendusteed ta proovib ning millises etapis takistus tekkis. Kohanduv juhendamine ei järgi seega muutumatut vihjete jada, vaid õpetaja järgmine tegevus kujuneb õpilase vastuse põhjal. Kui õpetaja pole õpilase arusaamist piisavalt analüüsinud, võib pakutav tugi olla tema vajaduse suhtes kas liiga üldine või võtta temalt põhjendamatult suure osa lahendusprotsessist üle. (van de Pol *et al.*, 2010)

Õppimise toestamise eesmärk ei ole säilitada õpetaja abi kogu ülesande lahendamise vältel, vaid anda vastutus järk-järgult õpilasele üle. Toestamise põhijoonteks on toe kohanduvuse kõrval selle järkjärguline vähendamine ning vastutuse ülekandumine õpetajalt õpilasele. Kui õpilase arusaamine ja suutlikkus suurenevad, peab õpetaja oma abi vähendama ning

võimaldama õpilasel järjest rohkem lahendussamme iseseisvalt kavandada, sooritada ja kontrollida. Korduvalt kasutatavad üldised küsimused peaksid muutuma aja jooksul õppija enda mõtlemisharjumusteks. Seega on juhendamise kaugem eesmärk, et õpilane hakkaks varem õpetaja esitatud küsimusi iseendale esitama ja suudaks hiljem sarnaste probleemidega iseseisvamalt toime tulla. (Pólya, 1945/2001; van de Pol *et al.*, 2010)

Õpilase iseseisvat probleemilahendust saab toetada erinevate toetamisvõtetega. Nendeks on näiteks tagasiside, vihjed, otsesed juhised, selgitamine, modelleerimine ja küsimuste esitamine. Vihje juhhib tähelepanu võimalikule seosele või järgmisele sammule, kuid ei anna terviklikku lahendust, samal ajal kui otsene juhise ütleb õppijale konkreetsemalt, mida teha. Küsimus eeldab õppijalt aktiivset vastust ja võimaldab õpetajal saada teavet tema arusaamise kohta, modelleerimisel aga näitab õpetaja ette mõne tegevuse või mõtlemisviisi. Iga juhendamisevormi kasutus sõltub eesmärgist, ajastusest ja vastavusest õppija hetkevajadusele. (van de Pol *et al.*, 2010)

Õpilase probleemilahenduse juhendamisel tuleb leida tasakaal liiga vähese ja liiga ulatusliku abi vahel. Õpetaja peab aitama õpilast nii, et talle jääks lahendamisel mõistlik osa iseseisvast tööst. Kui õpetaja aitab liiga vähe, ei pruugi õpilane tekkinud takistusest üle saada, kuid liiga ulatusliku abi korral ei jää talle võimalust lahendusideed ise kujundada. Õpetaja ülesanne on seega püüda mõista, mis õpilase mõtlemises toimub ning pakkuma sellist küsimust või sammu, mis võiks tekkida ka õpilase enda mõtlemises. (Pólya, 1945/2001)

Pólya soovib alustada õpilase juhendamist võimalikult üldise küsimuse või soovitusena ning liikuda konkreetsema vihje poole alles siis, kui üldisem küsimus ei kutsu esile sisulist vastust. Küsimused peaksid olema lihtsad, loomulikud ja piisavalt üldised, et neid saaks rakendada ka teiste probleemide puhul. Selline järkjärguline lähenemine jätab õpilasele suurema osa lahendusidee kujundamisest ning suurendab võimalust, et küsimus muutub hiljem tema enda ülesande lahendusosaks. Liiga konkreetne küsimus või vihje võib seevastu ebaõnnestuda kahel viisil: kui õpilane ei ole lahendusideele piisavalt lähedal, ei pruugi ta vihjest aru saada, kuid kui ta vihjet mõistab, võib see anda ülesande keskse idee täielikult ette. Samuti ei toeta ainult selline konkreetne küsimus või vihje üldisema ülekantavat lahendamisoskuse kujunemist. (Pólya, 1945/2001)

Õpilase juhendamine algab juba enne seda, kui õpetaja talle küsimuse või vihje esitab. Õpilaste võimalike mõttekäikude ennetamine on oluline enne tundi, tunni ajal ja pärast tundi, sest see aitab õpetajal valida sobivaid ülesandeid, kavandada küsimusi ning valmistuda ette õpilaste

erinevateks lahendusviisideks. Ennetamine eeldab arvestamist sellega, mida õpilased juba teavad, kuidas nad võivad ülesannet tõlgendada ning milliseid korrektseid või ekslikke strateegiaid nad võivad kasutada. Produktiivse matemaatilise arutelu ettevalmistamiseks tuleb õpetajal ennetada õpilaste tõenäoliseid vastuseid ja lahendusstrateegiaid. Ennetamise eesmärk ei ole ennustada üht kindlat lahenduskäiku, vaid valmistada õpetajat ette võimalike mõtlemissuundade märkamiseks ning nende põhjal sobiva toe valimiseks. (Stein *et al.*, 2008; Watanabe, 2001)

Õpetaja peab ainetunni ajal jälgima mitte ainult seda, kas õpilase vastus on õige, vaid ka seda, kuidas ta vastuseni jõudis. Õpetaja peab oskama pöörata tähelepanu õpilase strateegias matemaatilistelt olulistele üksikasjadele, tõlgendada nende põhjal õpilase arusaamist ning otsustada, kuidas sellele reageerida. Õpilase tegevuse märkamine ei tähenda seega ainult tema lahendusviisi kirjeldamist, vaid ka järeldamist, mida ta kasutatud esitusviisist, seostest või toimingutest mõistab. Küsimused või vihjed peaksid lähtuma sellest tõlgendusest, mitte üksnes õige või vale vastuse tuvastamisest. Selline mõtlemise jälgimine võimaldab õpetajal kohandada tuge lahendusprotsessi jooksul ning otsustada, kas õpilane vajab täpsustavat küsimust, vihjet või võimalust ise jätkata. (Jacobs *et al.*, 2010; van de Pol *et al.*, 2010)

Õpilaste erinevate lahendusviiside kasutamise õppimise toetamiseks eeldab õpetajalt klassiarutelu teadlikku korraldamist. Ettevalmistumiseks ja juhtimiseks on peamiselt viis tegevust: võimalike lahenduste ennetamine, õpilaste töö jälgimine, arutelus esitatavate lahenduste valimine, nende sobivasse järjekorda seadmine ning mitme lahenduse matemaatiliste seoste erinevuste ja sarnasuste esiletoomist. Klassiruumis tekkinud lahendusi ja näiteid saab õpetaja valida ja järjestada nii, et need aitaksid võrrelda strateegiaid, märgata nende sarnasusi ja erinevusi ning liikuda ainetunni matemaatilise eesmärgi poole. (Stein *et al.*, 2008; Watanabe, 2001)

Ruumilise mõtlemisega seotud ülesannete juhendamisel on üheks võimalikuks vahendiks ka ruumilise keele teadlik kasutamine. Ruumilised väljendid aitavad nimetada objektide asukohti, suundi, suhteid ja muutusi ning võivad seeläbi toetada õpilase tähelepanu suunamist ülesande lahendamiseks olulistele omadustele. Matemaatikaõpetuses võib õpetaja teadlikult kasutada ja õpilastelt nõuda ruumiliste väljendite kasutamist, näiteks „vasakul“, „paremal“, „üleval“, „all“, „pööratud“, „peegeldatud“, „sama kujund teises asendis“, „servad kattuvad“ või „kujund liigub ühe ruudu võrra“ vms. Selline keelekasutus aitab muuta mõtlemise nähtavaks ja toetab õpilast ruumiliste seoste sõnastamisel. Ruumiline keel on seega üks ruumilise mõtlemise toetamise

võimalikest vahenditest, kuid ruumilise mõtlemise oskusi ja matemaatika paranemine ei pruugi tingimata eeldada ruumilise keele samaaegset paranemist (Farran *et al.*, 2025; Pruden *et al.*, 2011)

Lisaks sõnalisele juhendamisele saab õpetaja ruumilise mõtlemisega seotud matemaatikaülesannete puhul kasutada kehakeelt, jooniseid, analoogiaid ja mudeleid. Üksnes nende vahendite kasutamisest ei piisa, vaid õpilastele tuleb aidata mõista, kuidas neid kasutada konkreetset tüüpi matemaatiliste probleemide lahendamisel. Seetõttu peaks ruumilise ülesande juures antav küsimus või vihje suunama tähelepanu lahendamiseks olulisele ruumilisele suhtele, teisendusele või mingile kindlale tunnusele, mitte üksnes soovitama ebamääraselt olukorda visualiseerida. Ruumilist mõtlemise toetava juhendamise eesmärk on aidata õppijal luua esitusviis, milles on esile toodud ülesande matemaatiline struktuur ja selle lahendamiseks vajalikud ruumilised suhted. (Hawes & Ansari, 2020; Young *et al.*, 2018)

Tõhus juhendamine on õppija mõtlemisega kohanduv, ajutine ja iseseisvuse suurenedes vähenev. Õpetaja peab tundma ülesande võimalikke lahendusteid, ennetama õpilaste strateegiaid, jälgima nende tegelikku mõtlemist ning valima selle põhjal sobiva küsimuse, vihje või muu toe. Juhendamise eesmärk ei ole ette öelda ülesande keskset lahendusideed võimalikult kiiresti, vaid aidata õpilasel teha järgmine mõtestatud samm ja jätta talle võimalikult suur osa lahendustööst. Ruumiliste matemaatikaülesannete puhul tähendab see muuhulgas tähelepanu suunamist matemaatiliselt olulistele ruumilistele suhetele ning õpilase toetamist sobiva representatsiooni või mõttelise mudeli loomisel. (Hawes & Ansari, 2020; Pólya, 1945/2001; van de Pol *et al.*, 2010; Young *et al.*, 2018)

2. Metoodika

Käesolev magistritöö on arendusliku suunitlusega töö, mille käigus koostati Känguru matemaatikavõistluse ülesannete analüüsi põhjal ruumilist mõtlemist sisaldavate ülesannete kategoriseeritud kogum ning kadett vanuserühmale põhjalikum õpetajale suunatud metoodiline materjal. Ülesannete analüüsimisel rakendati teooriapõhist lähenemist: ruumilise mõtlemise ülesannete tuvastamisel ja kategoriseerimisel lähtuti teoreetilises osas kirjeldatud ruumilise mõtlemise käsitlustest ning kadett vanuserühma metoodilise materjali koostamisel kasutati probleemilahendusstrateegiate ja õpetajapoolse juhendamise teoreetilisi lähtekohti. Järgmistes alapeatükkides kirjeldatakse valiku- ja kategoriseerimisreegleid.

2.1. Analüüsitav materjal ja ülesannete valik

Töö käigus analüüsiti Tartu Ülikooli teaduskooli Känguru võistluse arhiivis avaldatud eestikeelsed ülesanded ja lahendused aastatest 2020–2025 Analüüsi kaasati kooliõpilaste kuue vanuserühma ülesanded: pre-ekolier (1.-2. klass), ekolier (3.-4. klass), benjamin (5.-6. klass), kadett (7.-8. klass), juunior (9.-10. klass) ja student (11.-12. klass). Vilistlastele koostatud ülesandeid valikusse ei kaasatud, sest need on juba segu eelmainitud vanusegruppide ülesannetest. Känguru arhiivis on ülesanded ja lahendused esitatud aasta ning vanuserühmade kaupa, mis võimaldas säilitada selle algse aasta, vanuserühma ja järjekorranumbri. (*Känguru 2025 info*, 2025; *Känguru võistluse arhiiv*, s.a.).

Kokku analüüsiti aastatel 2020–2025 olnud 1008 ülesannet. Pre-ekolier ja ekolier vanuserühmas oli kuue aasta jooksul kummaski 144 ülesannet ning benjamin, kadett, juunior ja student vanuserühmas igaühes 180 ülesannet. Analüüsi hõlbustamiseks kodeeriti vanuserühmad numbriliselt: 1 – pre-ekolier, 2 – ekolier, 3 – benjamin, 4 – kadett, 5 – juunior ja 6 – student. Känguru võistlusel lahendavad kaks nooremat vanuserühma 24 ning ülejäänud vanuserühmad 30 ülesannet võistluse kohta.

Ülesannete valimine toimus kahes etapis. Esmase ülevaatus käigus tuvastati ülesanded, mille tekstis, joonisel või eeldatavas lahenduskäigus esines objektide või kujundiosade asukohtade, suhete, orientatsiooni, liikumise või ruumilise teisendamisega seotud informatsiooni. Esmase valiku eesmärk oli moodustada potentsiaalselt ruumilist mõtlemist sisaldavate ülesannete kogum. Teises etapis analüüsiti valitud ülesannete lahenduskäiku ning hinnati, kas ruumiline mõtlemine moodustas ülesande lahendamisel sisuliselt olulise osa.

Ülesannet ei liigitatud ruumilise mõtlemise ülesandeks üksnes selle tõttu, et see sisaldas pilti, diagrammi või geomeetrilist kujundit. Analüüsist jäeti välja ülesanded, mille joonis oli üksnes illustratiivne või milles esitatud kujundilt tuli lugeda arvandmeid ja teha seejärel ruumilist mõtlemist mittenoodev arvutus. Piiripealsete ülesannete korral lähtuti otsustamisel sellest, kas ülesande keskse lahendusidee leidmiseks tuli objekte või nende osade asukohti, omavahelisi suhteid, liikumist või teisendusi mõttes kujutada ja analüüsida.

Ülesande ruumilise mõtlemisega seotuse hindamisel vaadeldi ülesande lahendamiseks vajalikke mõtlemisprotsesse, mitte üksnes ülesande teemat või visuaalset välimust. Ruumilise mõtlemise ülesandeks loeti ülesanne, mille lahendamisel tuli mõttes luua, säilitada, võrrelda või muuta objektide ja nende osade ruumilisi olemusi.

Ülesannete esmasel analüüsimisel esitati järgmised küsimused:

1. Kas ülesande lahendamiseks tuleb jälgida objektide või kujundiosade asukohta ja omavahelisi suhteid?
2. Kas lahendaja peab objekti mõttes pöörama, voltima, lõikama, kokku panema või muul viisil teisendama?
3. Kas tuleb jälgida liikumise või järjestikuste muutuste mõju objektide asendile?
4. Kas ülesande keskne lahendusidee põhineb ruumilisel suhtel või on joonis üksnes arvandmete esitamise vahend?
5. Kas ruumiline strateegia on ülesande lahendamiseks vältimatu või üks sisuliselt oluline võimalik lahendustee?

Valiku tulemusena moodustus ruumilise mõtlemise ülesannete kogum, kuhu kuulus kokku 284 ülesannet 1008 analüüsitud ülesandest. Ülesannete jaotus vanuserühmade ja ruumilise mõtlemise kategooriate kaupa esitatakse tulemuste peatükis.

2.2. Känguru ülesannete analüüsimine ja kategoriseerimine

Ülesannete analüüsimisel kasutati teooriapõhist ehk deduktiivset kvalitatiivset sisuanalüüsi. Deduktiivse sisuanalüüsi korral lähtutakse analüüsi struktuuri ja kategooriate kujundamisel olemasolevast teooriast või varasematest teadmistest ning rakendatakse seda seejärel analüüsitava materjalile (Elo & Kyngäs, 2008).

Analüüsiühikuks oli üks terviklik Känguru ülesanne koos ülesande teksti, joonise, vastusevariantidega. Kategoriseerimisel arvestati ka Tartu Ülikooli teaduskooli arhiivis avaldatud lahendust.

Känguru ülesanded ei ole koostatud psühhomeetriliste ruumiliste visualiseerimise testidena ning seetõttu ei pruugi need üks ühele vastata Hawes ja Ansari (2020) artiklis ruumilise visualiseerimise mõõtmisviiside näidetena esitatud ülesandetüüpidele. Need võeti aluseks, mille alusel loodi analüüsiraamistik, mis kohandati Känguru ülesannete kontekstile vastavalt. Kohandamise eesmärk ei olnud mõõta standardiseeritult õpilaste ruumilist võimekust, vaid kirjeldada õpetajale arusaadavalt ülesande lahendamisel esinevat kesket ruumilist mõtlemisprotsessi.

Känguru ülesannete kategoriseerimiseks kasutati viit analüüsikategooriat, mille põhitunnused on alljärgnevad.

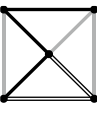
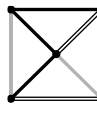
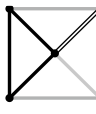
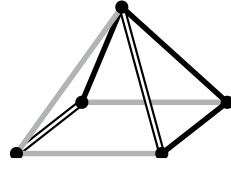
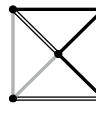
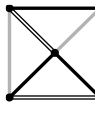
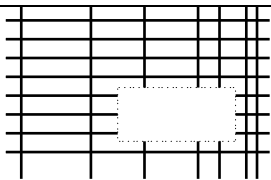
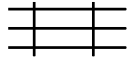
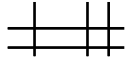
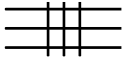
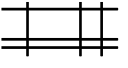
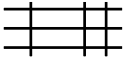
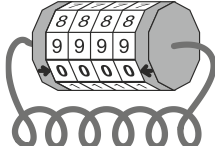
- **Mõtteline pööramine** – lahendamiseks tuli kahe- või kolmemõõtmelist kujundit, objekti või muud ruumilist keha mõttes pöörata või tuvastada sama objekt pärast orientatsiooni muutust.
- **Mõtteline kokkupanek** – lahendamiseks tuli moodustada mõttes osadest tervik või hinnata, kuidas osad tervikuks omavahel sobituvad.
- **Mõtteline lõikamine** – lahendamiseks tuli kolmemõõtmelisi objekte mõtteliselt lõikama või eraldama osadeks. Ülesandes ei pea toimuma sõnasõnaliselt lõikamist, vaid see kategooria väljendab oskust kujutada ette, kuidas ruumiline tervik jaguneb osadeks ja kuidas need osad paiknevad või seostuvad.
- **Mehaaniline kujutlusvõime** – lahendamiseks tuli mõttes jälgida omavahel seotud objektide liikumist, suunda, pöördumist, järjestikuseid muutusi, liikumisteed või ühe muutuse mõju süsteemi teistele osadele.
- **Mõtteline paberi voltimine** – lahendamiseks tuli ette kujutada voltimise või lahtivoltimise käigus toimuvat ruumilist muutust.

Iga väljavalitud ülesande analüüsimisel vaadati esmalt läbi ülesande tekst, joonis ja vastusevariandid ning lahendati ülesanne või kontrolliti selle lahenduskäiku avaldatud lahenduse põhjal. Seejärel tuvastati lahenduskäigus keskne ruumilise mõtlemise protsess ning võrreldi seda viie analüüsikategooria tunnustega.

Seejärel määrati ülesandele üks põhikategooria, milleks loeti lahenduse seisukohalt domineeriv ruumiline protsess. Domineerivaks protsessiks peeti tegevust, mille puudumisel ei oleks ülesande keskse lahendusideeni võimalik jõuda või mille sooritamine moodustas lahenduse kõige olulisema ruumilise osa. Kui ülesanne sisaldas mitut ruumilist protsessi, määrati kategooriaks ikkagi domineeriv protsess. Kui ülesande lahenduses esines küll ruumilisi

elemente, kuid kesket lahendusprotsessi ei olnud võimalik põhjendatult seostada ühegi kasutatud analüüsikategooriaga, vaadati ülesande kuulumine ruumilise mõtlemise ülesannete kogumisse uuesti üle. Ruumilise mõtlemise kategooriad ja üks näide Känguru ülesandest. on esitatud igale viiele kategooriale vastav üks ülesanne, mis vastavasse kategooriasse määrati.

Tabel 1. Ruumilise mõtlemise kategooriad ja üks näide Känguru ülesandest.

Kategooria	Ülesanne
Mõtteline pööramine	Milline pilt saab olla antud püramiidi pealtvaateks?     A:  B:  C:  D:  E: 
Mõtteline kokkupanek	Joonisel olevast võrgustikust, mis koosnes 8-st võrdsest horisontaalsest lõigust ja 7-st võrdsest vertikaalsest lõigust, lõigati välja üks tükk. Milline?  A:  B:  C:  D:  E: 
Mõtteline lõikamine	Kuulidest on ehitatud püramiid (vt. joonist). Selle alumine kiht on mõõtmega 4×4, selle peal on kiht 3×3, selle peal kiht 2×2 ja üleval tipus üks kuul. Iga kahe kuuli puutepunkti on pandud üks tilk liimi. Mitut tilka liimi on kasutatud?  A: 72 B: 85 C: 88 D: 92 E: 96
Mehaaniline kujutlusvõime	Kui jalgrattalukul olevad nooled osutaks koodile 0000, siis Arved näeks oma asukohast koodi 8888 (vt. joonist). Arved näeb sellest samast asukohast praegu koodi 2815. Millisele koodile osutavad nooled rattalukul praegu? 

	A: 4037	B: 4693	C: 0639							
	D: 0693	E: 9603								
Mõtteline paberi voltimine	Pabeririba on jaotatud viieks ruuduks ja neis on järjest <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table> arvud 1, 2, 3, 4 ja 5. See pabeririba volditi kokku ja asetati lauale nii, et kõik viis ruutu asetsesid üksteise peal. Kui vaadata ülevalt alla, siis milline ei saanud olla arvude järjestus neil ruutudel? A: 3, 5, 4, 2, 1 B: 3, 4, 5, 1, 2 C: 3, 2, 1, 4, 5 D: 3, 1, 2, 4, 5 E: 3, 4, 2, 1, 5					1	2	3	4	5
1	2	3	4	5						

2.3. Kadett vanuserühma metoodilise materjali koostamine

Pärast ruumilise mõtlemise ülesannete valimist ja kategoriseerimist koostati kadett vanuserühma ülesannetele põhjalikum õpetajale suunatud metoodiline materjal. Iga ülesande lahenduskäigu põhjal määrati lahenduse võtmetähelepanekud ja võimalikud probleemilahendusstrateegiad ning koostati õpetajale abiküsimused ja vihjed. Nende elementide lisamise eesmärk oli muuta ülesande lahendamisel kasutatav ruumiline mõtlemine õpetajale nähtavamaks ning pakkuda võimalikke vahendeid õpilase mõtlemise toetamiseks ilma terviklikku lahenduskäiku kohe ette andmata. Metoodilise materjali koostamisel lähtuti teoreetilises osas käsitletud Pólya probleemilahenduskäsitlusest ning õpilase probleemilahenduse toetamise põhimõtetest.

2.3.1. Probleemilahendusstrateegia määramine

Pärast ülesande lahenduskäigu analüüsimist määrati iga ülesande puhul üks või mitu probleemilahendusstrateegiat, mille määramisel lähtuti ülesande terviklikust lahendusest ja Pólya probleemilahenduskäsitlusest ja selles kirjeldatud heuristilistest võtetest. Strateegiana märgiti üldisem mõtlemis- või tegevusviis, mis aitas ülesande andmeid korrastada, lahendusplaani kujundada või võimalike vastusteni jõuda.

Känguru ülesannete jaoks sõnastati strateegiad võimalikult lühikeste ja tegevusele suunatud nimetustena. Kasutatud nimetuste hulka kuulusid näiteks:

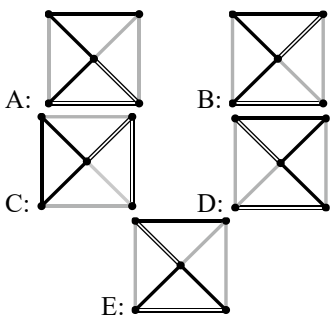
- visualiseeri olukorda või täienda joonist;
- jaga kujund või probleem osadeks;
- jälgi ühte eristatavat tunnust;
- uuri lihtsamat olukorda;

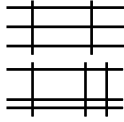
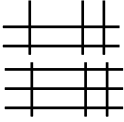
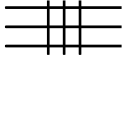
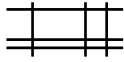
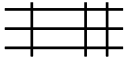
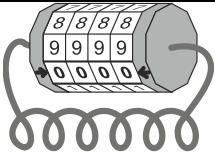
- otsi korduvat mustrit või seaduspära;
- tingimuste järjestikune rakendamine;
- mõtle lõpptulemusest alguse poole;
- kontrolli vastusevariante ja välista sobimatud;
- koosta süsteemne tabel või loend.

Kõik kasutatud strateegianimetused ei ole Pólya teoses samas sõnastuses esitatud. Osa nimetusi kohandati käesolevas töös Känguru valikvastustega ülesannete ja ruumilise mõtlemise protsesside eripäradele. Näiteks „kontrolli vastusevariante ja välista sobimatud“ on käesolevas töös kasutatav praktiline tegevusviis, seostub Pólya soovitustega kontrollida oletusi ning kasutada kõiki ülesande tingimusi. Seetõttu lähtub käesolevas töös kasutatud strateegiate loetelu Pólya heuristilistest põhimõtetest, kuid on Känguru ülesannete analüüsimiseks täiendatud ja kohandatud.

Ühele ülesandele võidi määrata mitu strateegiat, kui seda saaks lahendada erinevat moodi. Strateegiate märkimise eesmärk ei olnud määrata ülesande ainsat õiget lahendusviisi, vaid tuua välja õpetamise seisukohalt kasutatavad lahendusviisid, mida õpetaja saab õpilastega ülesande lahendamisel teadvustada ja võrrelda. Tabel 2 on toodud viiele näidisülesandele igast kategooriast lahendusstrateegiad ning järgnevates alapeatükkides kirjeldatud võtme- tähelepanekud, abiküsimused ja vihjed.

Tabel 2. Metoodiline materjal iga kategooria kohta Tabel 1 toodud näidisülesannetele

Ülesanne	Lahendus- strateegia	Tähelepanek, abiküsimus, vihje
Milline pilt saab olla antud püramiidi pealtvaateks? 	visualiseeri olukorda või täienda joonist; jälgi ühte eristatavat tunnust; kontrolli vastusevariante ja välista sobimatud	Oluline tähelepanek: pealtvaates säilivad servade omavahelised seosed ja joone tüüp. Abiküsimused: Millised neli serva moodustavad pealt vaadates püramiidi piirjoone? Kus peab olema topeltjoon? Kummale poole jääb tume külgserv? Vihje: välista esmalt variandid, kus põhjaserv või tumeda ja heleda serva asend ei klapi.

Joonisel olevast võrgustikust, mis koosnes 8-st võrdsest horisontaalsest lõigust ja 7-st võrdsest vertikaalsest lõigust, lõigati välja üks tükk. Milline?  A:  B:  C:  D:  E:	jälgi ühte eristatavat tunnust; kontrolli vastusevariante ja välista sobimatud	Oluline tähelepanek: väljalõigatud tükile jäävad alles seda läbivate joonte täpsed omavahelised kaugused; tüki asukohta saab määrata vahede suurusi jälgides. Abiküsimused: Mitu horisontaalset ja vertikaalset lõiku läbib puuduolevat ala? Millised vahed on võrdsed ja milline vahe on väiksem? Vihje: võrdle vastusevariante mitte kogu mustri, vaid kolme vertikaalse joone suhtelise paiknemise järgi.
Kuulidest on ehitatud püramiid (vt. joonist). Selle alumine kiht on mõõdmetega 4×4, selle peal on kiht 3×3, selle peal kiht 2×2 ja üleval tipus üks kuul. Iga kahe kuuli puutepunkti on pandud üks tilk liimi. Mitut tilka liimi on kasutatud? A: 72 D: 92 B: 85 E: 96 C: 88 	jaga kujund või probleem osadeks; koosta süsteemne tabel või loend	Oluline tähelepanek: liimitilku tuleb lugeda nii sama kihi kuulide vahel kui ka kahe järjestikuse kihi vahel. Abiküsimused: Mitu puutepunkti tekib ühes kihis? Mitut alumise kihi kuuli puudutab iga järgmise kihi kuul? Kuidas vältida topeltlugemist? Vihje: arvuta liimitilgad kihtide kaupa ja liida alles lõpus.
Kui jalgrattalukul olevad nooled osutaks koodile 0000, siis Arved näeks oma asukohast koodi 8888 (vt. joonist). Arved näeb sellest samast asukohast praegu koodi 2815. Millisele koodile osutavad nooled rattalukul praegu? A: 4037 E: 9603 B: 4693 D: 0693 C: 0639 	mõtla lõpptulemusest alguse poole	Oluline tähelepanek: antud näide 0000 → 8888 näitab püsivat seost noole juures oleva numbriga ja Arvedile nähtava numbriga vahel. Abiküsimused: Kui noole juures on 0 ja Arved näeb 8, mitu positsiooni need numbrid kettal erinevad? Kui Arved näeb 2, millisele numbrile peab nool osutama? Kas sama nihe kehtib kõigil neljal kettal? Vihje: liigu igast nähtavast numbrist 2 positsiooni edasi

Pabeririba on jaotatud viieks ruuduks ja neis on järjest arvud 1, 2, 3, 4 ja 5. See pabeririba volditi kokku ja asetati lauale nii, et kõik viis ruutu asetseksid üksteise peal. Kui vaadata ülevalt alla, siis milline ei saanud olla arvude järjestus neil ruutudel? A: 3, 5, 4, 2, 1 B: 3, 4, 5, 1, 2 C: 3, 2, 1, 4, 5 D: 3, 1, 2, 4, 5 E: 3, 4, 2, 1, 5	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	2	3	4	5	mõtle lõpptulemusest alguse poole; kontrolli vastusevariante ja välista sobimatud	Oluline tähelepanek: iga voltimine muudab ruutude kihilist järjestust; juba tekkinud kihtide vahele ei saa hiljem suvaliselt uusi ruute paigutada. Abiküsimused: Millised ruudud peavad olema enne viimast voltimist kõrvuti? Millise kahe ruudu omavaheline järjestus muudab ühe variandi võimatuks? Vihje: proovi iga vastusevariandi puhul mõelda lõppjärjestusest tagurpidi, millised voltimised pidid selleni viima.
1	2	3	4	5				

2.3.2. Lahenduse võtmetähelepanekute määramine

Pärast ülesandele võimalike lahendusstrateegiate lisamist, määrati iga ülesande puhul üks või mitu lahenduse võtmetähelepanekut. Käesolevas töös kasutati võtmetähelepaneku mõistet praktilise analüüsivahendina, millega tähistati ülesandespetsiifilisi omadusi, ruumilisi suhteid, muutumatuid tunnuseid või muud lahenduse seisukohalt olulisi seoseid, mille märkamine aitab mõista ülesande struktuuri või jõuda keskse lahendusideeni.

Võtmetähelepanekute määramisel lähtuti ülesande tekstist, joonisest ja lahenduskäigust. Lahenduse analüüsimisel otsiti tunnust või seost, mille teadvustamine võimaldab lahendajal ülesandes sisalduvat informatsiooni korrastada või võimalikke lahendusi piirata. Nendeks võis olla näiteks muutumatuna säiliva tunnuse märkamine, sümmeetria või peegelduse arvestamine, objektide naabrus- või puuteseoste jälgimine, vaatepunkti või nähtavuse arvestamine, kihtide või järjestuse vahelise seose märkamine või ühe eristatava tunnuse jälgimine. Neid näiteid ei kasutatud eraldi kategooriatena, vaid need kirjeldavad ülesannetes esinenud võtmetähelepanekute erinevaid vorme.

Võtmetähelepanekud sõnastati lühikeste väidetena. Ühe ülesande juurde võidi lisada mitu tähelepanekut, kui lahenduskäigu mõistmine eeldas mitme olulise seose märkamist. Tähelepanekute arvu ei saa kasutada ülesande keerukuse hindamiseks, sest nende arv ei väljenda ülesande kognitiivset nõudlikkust.

Lahenduse võtmetähelepanek erineb ruumilise mõtlemise kategooriast ja probleemi-lahendusstrateegiast. Kategooria kirjeldab ülesandes kasutatavat üldist ruumilist protsessi, strateegia kirjeldab üldist tegutsemisviisi ning võtmetähelepanek määratleb konkreetse ülesande omadust või seost, millele lahendaja peab tähelepanu pöörama.

2.3.3. Õpetaja abiküsimuste ja vihjete koostamine

Ülesannetele koostati lahenduse võtmetähelepanekute ja võimalike lahenduskäikude põhjal õpetajale suunatud abiküsimused ja vihjed. Nende eesmärk oli pakkuda õpetajale võimalikke vahendeid õpilase mõtlemise suunamiseks olukorras, kus õpilane ei suuda ülesandega iseseisvalt edasi liikuda. Küsimuste ja vihjete koostamisel lähtuti põhimõttest, et tugi peaks aitama õpilasel märgata järgmist lahendamiseks olulist seost või tunnust, kuid jätma keske lahendusidee leidmise võimalikult suures ulatuses õpilasele endale. Abiküsimused sõnastati võimaluse korral nii, et need eeldaksid õpilaselt oma mõttekäigu väljendamist või suunaksid tema tähelepanu ülesande lahendamiseks olulisele seosele. Selline lähenemine vastab teoreetilises osas käsitletud toetamise põhimõtetele, mille järgi peab õpetaja toe valikul lähtuma õppija tegelikust arusaamisest ja tegevusest.

Vihjed sõnastati abiküsimustest konkreetsemalt. Vihje võis suunata õpilast kindla tunnuse jälgimisele, sobiva visualiseerimise kasutamisele, ühe võimaliku järgmise tegevuse sooritamisele või mõne lahendusvariandi välistamisele. Ka vihje koostamisel välditi võimaluse korral kogu lahenduskäigu või õige vastuse etteandmist. Ruumilise mõtlemise ülesannete puhul suunati küsimuste ja vihjetega tähelepanu eelkõige lahenduse seisukohalt olulistele ruumilistele suhetele, teisendustele või säilivatele tunnustele, mitte üksnes üldisele soovitusel ülesannet visualiseerida. See põhimõte on kooskõlas töö teoreetilises osas käsitletud ruumilise probleemilahenduse juhendamisega.

Ühe ülesande juurde koostati vajaduse korral mitu erineva konkreetsusastmega abiküsimust või vihjet. Need esitati metoodilises materjalis üldisemast konkreetsema toe suunas, kuid neid ei käsitletud kohustusliku järjestusena. Õpetaja saab valida sobiva küsimuse või vihje vastavalt sellele, millises lahendusprotsessi etapis õpilane takerdub ja mida tema senine mõttekäik näitab. Kui õpilane suudab pärast üldisemat küsimust iseseisvalt jätkata, ei ole konkreetsema vihje kasutamine vajalik.

Selline ülesehitus lähtub Pólya soovitusel alustada õpilase abistamisel üldisemast küsimusest või ettepanekust ning liikuda konkreetsema toe poole ainult vajaduse korral.

Käesoleva töö küsimused ja vihjed koostati ülesande lahenduskäigu analüüsis, mitte konkreetsete õpilaste empiiriliselt vaadeldud raskuste põhjal. Seetõttu kujutavad need endast õpetajale ette valmistatud võimalikke toevariante, mille sobivust tuleb tegelikus õpetamisolukorras hinnata õpilase vastuste ja tegevuste põhjal.

2.4. Metoodilise materjali struktuur

Analüüsi tulemused koondati tabelipõhiseks metoodiliseks materjaliks. Materjal koostati kahel detailsusastmel. Kõigi kuue vanuserühma puhul koondati tabelisse ruumilise mõtlemisega seotud ülesanded koos nende põhiandmete, ülesande sisu, määratud ruumilise mõtlemise kategooria ning vastuse või lahendusega. Kadett vanuserühma ülesannetele lisati täiendavalt peatükis 2.3. kirjeldatud metoodilised elemendid: probleemilahendusstrateegiad, lahenduse võtmetähelepanekud ning õpetajale suunatud abiküsimused ja vihjed.

Iga ülesande puhul säilitati selle seos algallikaga, märkides ülesande aasta, vanuserühma ja algse järjekorranumbri. Ülesanne esitati koos algse teksti, joonise ja vastusevariantidega. Vastuse ja lahenduse esitamisel lähtuti Tartu Ülikooli teaduskooli Känguru arhiivis avaldatud materjalidest; avaldatud lahenduskäigu olemasolu korral lisati see ülesande juurde ning muul juhul märgiti õige vastusevariant.

Kadett vanuserühma põhjalikuma metoodilise materjali tabel sisaldas järgmisi veerge:

1. **Kategooria** – ülesandele analüüsi käigus määratud domineeriv ruumilise mõtlemise kategooria.
2. **Ülesande andmed** – ülesande ilmumisaasta ja algne järjekorranumber.
3. **Vanuserühm** – ülesande Känguru vanuserühm; koondandmete töötlemisel kasutati peatükis 2.1. kirjeldatud numbrilist kodeeringut.
4. **Ülesanne** – ülesande algne tekst koos joonise ja vastusevariantidega.
5. **Lahendusstrateegia** – Pólya heuristilistest põhimõtetest ja ülesande lahenduskäigu analüüsist lähtuv üldisem lahendusstrateegia, millega ülesandele läheneda
6. **Tähelepanek, abiküsimus, vihje** – ülesandespetsiifilised lahendamiseks olulised tähelepanekud ning õpetajale koostatud küsimused ja vihjed, mida saab kasutada õpilase mõtlemise suunamiseks.
7. **Vastus, lahendus** – ülesande õige vastus ning selle olemasolu korral ka avaldatud lahenduskäik.

Tabeli veergude järjestus kujundati nii, et õpetaja saaks esmalt näha ülesande põhiandmeid ja ruumilise mõtlemise kategooriat, seejärel võimalikke lahendamist toetavaid metoodilisi elemente ning viimasena vastus ja lahenduskäik. Metoodilise materjali eesmärk ei ole ette kirjutada üht kindlat ülesande õpetamise või lahendamise viisi, vaid pakkuda õpetajale ülesande analüüsil põhinevaid võimalusi selle kasutamiseks ja õpilase probleemilahenduse toetamiseks.

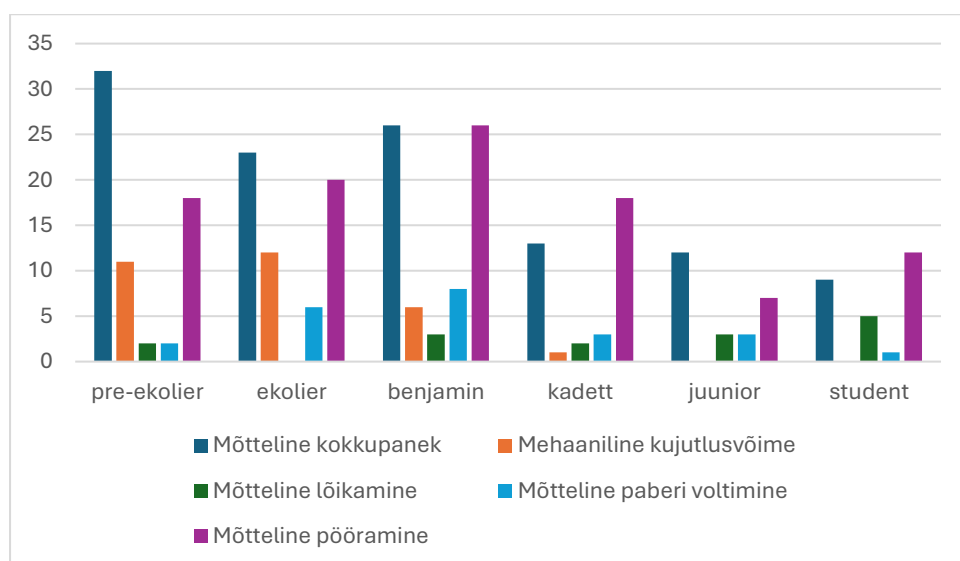
3. Tulemused ja arutelu

Käesoleva magistritöö tulemusena valmis ruumilise mõtlemise vaatenurgast kategoriseeritud Känguru ülesannete kogum ning selle põhjal õpetajale suunatud metoodiline materjal. Töö eesmärk ei olnud hinnata loodud materjali mõju õpilaste ruumilise mõtlemise oskustele, vaid välja töötada materjal, mille abil saab õpetaja ruumilist mõtlemist sisaldavaid matemaatikaülesandeid teadlikumalt valida, analüüsida ja juhendada. Seetõttu käsitletakse tulemuste peatükis esmalt valminud materjali ülesehitust ja selle põhjal loodud õpetaja tööriista, seejärel materjali võimalikke kasutusviise ning lõpuks töö käigus ilmnunud piiranguid ja kitsaskohti.

3.1. Loodud metoodiline materjal

Analüüsi tulemusena valiti aastate 2020–2025 Känguru matemaatikavõistluse 1008 ülesandest välja 284 ülesannet, mille lahendamisel oli ruumiline mõtlemine autori hinnangul sisuliselt oluline. Ülesanded pärinesid kuuest vanuserühmast: pre-ekolier, ekolier, benjamin, kadett, juunior ja student. Valitud ülesanded koondati tabelisse (vt Lisa 1. Kaasapandud fail Känguru ülesanded 2020-2025 ning iga ülesande juures säilitati kasutamise hõlbustamiseks selle algne aasta, ülesande number, vanuserühm, ülesande tekst, joonis ja vastusevariandid. Lisaks määrati ülesannetele ruumilise mõtlemise kategooria, mille jaotust vanuserühmade kaupa on näha **Error! Reference source not found.** ning ülesannetele lisati ka õige vastus ja võimaluse korral lahenduskäik.

Joonis 1. Kategooriate jaotus vanuserühmade kaupa



Ülesanded jaotati viide ruumilise mõtlemise kategooriasse: mõtteline pööramine, mõtteline kokkupanek, mõtteline lõikamine, mehaaniline kujutlusvõime ja mõtteline paberi voltimine (vt Joonis 1). **Error! Reference source not found.** on näha, et kõige rohkem oli ruumilise mõtlemise ülesannete osakaal vanuserühmas pre-ekolier ja hüppeliselt vähenes alates vanuserühmast kadett. Kategoriseerimisel lähtuti Hawes ja Ansari (2020) esitatud ruumilise visualiseerimise ülesandetüüpidest, mida kohandati Känguru ülesannete eripärale. Kohandamine oli vajalik, sest Känguru ülesanded ei ole koostatud standardiseeritud ruumilise võimekuse mõõtmiseks ning ühes ülesandes võib esineda samaaegselt mitu ruumilist mõtlemise protsessi. Sellistel juhtudel lähtuti kategoriseerimisel lahendusprotsessis domineerivast ruumilisest tegevusest.

Kategooriate kohandamine võimaldas kaasata ülesandeid, mis ei vasta üks ühele klassikalistele ruumilise visualiseerimise testidele, kuid milles on matemaatilise lahenduse seisukohalt oluline ruumilise mõtlemise komponent. Näiteks käsitleti mõttelise pööramise kategoorias nii kahekui ka kolmemõõtmeliste objektide asendimuutusi. Selline lähenemine tähendab, et töö tulemusena kujunenud kategooriad on eelkõige matemaatikaülesannete analüüsimise vahend, mitte õpilase ruumilise võimekuse diagnostilised kategooriad.

Kogu ülesandekogumi kõrval koostati kadett vanuserühma ülesannete põhjal detailsem õpetajale suunatud metoodiline materjal (vt Lisa 2. Kaasapandud fail vanuserühma kadett ülesanded 2020-2025). Kadett vanuserühma ülesandeid oli 284-st 37 ülesannet. Nendes ülesannetes lisati ruumilise mõtlemise kategooriale ülesande võimalik lahendusstrateegia ning ülesandespetsiifilised tähelepanekud, abiküsimused ja vihjed. Lahendusstrateegiate määramisel lähtuti Pólya probleemi-lahenduskäsitlusest ning kasutati võimalikult ühtseid tegevusele suunatud nimetusi, näiteks olukorra visualiseerimine, probleemi osadeks jagamine, ühe eristatava tunnuse jälgimine, lihtsama olukorra uurimine, mustri otsimine, tingimuste järjestikune rakendamine, tagurpidi mõtlemine, vastusevariantide kontrollimine ja süsteemse tabeli või loendi koostamine.

Ülesande lahendusstrateegiale lisaks lisatud võtmetähelepanekud kirjeldavad konkreetse ülesande puhul omadust, suhet või muutumatut tunnust, mille märkamine aitab mõista ülesande olulisimat osa või leida sobiva lahendustee. Abiküsimuse eesmärk on aidata õpilasel märgata lahenduse seisukohalt olulist tunnust või suhet ilma keskset lahendusideed kohe ette andmata. Vihje on seevastu konkreetsem ning suunab õppijat järgmise tegevuse või vahetulemuse poole. Selline lähenemine põhineb Pólya põhimõttest liikuda üldisemast küsimusest konkreetsemani

ning toestamise käsitlest, mille kohaselt peaks õpetaja abi kohanduma õpilase senise mõttekäiguga. Metoodilises materjalis ei ole seetõttu küsimused mõeldud kindlas järjekorras kohustuslikult esitamiseks, vaid õpetaja saab valida neist õpilasele vajadusele vastava toe.

Tabeli koostamiseks kujunes välja üldisem metoodiline raamistik matemaatikaülesannete analüüsimiseks ruumilise mõtlemise vaatenurgast. Raamistiku abil saab õpetaja enne ülesande kasutamist mõelda mitte ainult sellele, kas õpilane oskab ülesannet lahendada, vaid sellele, millist mõtlemist ülesanna eeldab ning kuidas seda mõtlemist saab vajaduse korral teotada.

Raamistiku võib kokku võtta järgmiste küsimustega:

1. Millist ruumilist mõtlemise protsessi ülesanne eeldab?
 - Kas ülesandes tuleb objekti pöörata, osadest tervik moodustada, tervikut osadeks eraldada, voltimist ette kujutada või dünaamiliselt objektide muutust jälgida?
2. Mida peab lahendaja ülesande juures märkama?
 - Milline omadus, ruumiline suhe, muutumatu tunnus või vahetulemus on lahenduse seisukohalt keskne?
3. Milline probleemilahendusstrateegia võiks aidata?
 - Kas olukorda tuleks visualiseerida, jagada probleem osadeks, jälgida ühte tunnus, uurida lihtsamat olukorda, mõelda tagurpidi või kasutada mõnda kombinatsiooni erinevatest strateegiatest?
4. Kus võib õpilase mõtlemises tekkida takistus?
 - Kas raskus võib seisneda näiteks mitme tunnuse samaaegses jälgimises, pööramises ja peegeldamise eristamises, sobiva vaatepunkti valimises või lahendusstrateegia leidmises?
5. Millise küsimusega saab õpetaja õpilast järgmise ideeni suunata?
 - Milline üldisem küsimus võiks aidata õpilasel vajalikku seost ise märgata ning millise konkreetsema vihje võiks anda juhul, kui küsimusest ei piisa?

Raamistiku oluline omadus on seega ruumilise mõtlemise, probleemilahenduse ja õpetajapoolse juhendamise ühendamine. Ülesande kategoriseerimine ei ole eesmärk omaette, vaid aitab õpetajal kõigepealt märgata ülesandes sisalduvat ruumilise mõtlemise protsessi, kuid sellele järgneb küsimus, kuidas õpilane võiks ülesannet lahendada ning kuidas õpetaja saab tema mõtlemist toetada.

Sellise tööriista vajalikkust toetab ka varasem kirjandus. Burte *et al.* (2020) rõhutavad, et kõik matemaatikaülesanded ei rakenda ruumilist mõtlemist samal määral ning kategoriseerimine võib aidata õpetajal ruumilist komponenti ülesandes märgata. Autorite hinnangul võib selline kategoriseerimine toetada ka tunni läbiviimist, matemaatiliste seoste esiletoomist ja alternatiivsete lahenduste leidmist. Sarnaselt toob Pinilla (2024) välja, et õpetajale võib olla kasulik konkreetsete matemaatilise sisu elementide sidumine selgelt määratletud ruumilise mõtlemise oskustega. Käesolevas töös loodud materjal rakendab sama põhimõtet Känguru ülesannete kontekstis.

3.2. Materjali kasutamine

Loodud materjali peamine sihtrühm on matemaatikaõpetaja, kes soovib ruumilist mõtlemist erinevate ülesannete kaudu teadlikumalt arendada. Materjal ei ole mõeldud kasutamiseks valmis tööleheks, mille kõik veerud esitatakse õpilasele. Tabeli täiendavad veerud on eelkõige õpetaja ettevalmistust toetav tööriist, mille abil saab enne tunni läbiviimist läbi mõelda ülesande ruumilise sisu, võimaliku lahendusstrateegia ja õpilase toetamise võimalused.

Esimese kasutusviisina võimaldab kategoriseeritud ülesandekogum õpetajal valida ülesandeid vastavalt sellele, millist ruumilise aspekti soovitakse tunnis esile tuua. Kui eesmärk on näiteks harjutada objektide asendi muutmise ettekujutamist, saab valida mõttelise pööramise kategooriasse kuuluvaid ülesandeid vms. Sellisel viisil ei lähtuta ülesande valimisel ainult matemaatilisest teemast või Känguru vanuserühmast, vaid ka ülesandes vajalikust ruumilisest mõtlemisprotsessist.

Teiseks saab sarnast metoodilist raamistikku kasutada ka mõne täiesti teise ülesande õpetajapoolseks ettevalmistuvaks analüüsiks enne tundi. Õpetaja võib lahendada ülesande ise ning seejärel määrata, milline ruumiline protsess on lahenduses keskne, millised on lahenduse võtmetähelepanekud ning milline üldisem lahendusstrateegia võiks õpilast aidata. Selline eelnev analüüs suunab õpetajat ennetama ka võimalikke õpilaste lahendusviise ja raskuskohti. See on kooskõlas Watanabe (2001) käsitlemisega, mille järgi aitab õpilaste võimalike mõttekäikude eelnev ennetamine õpetajal paremini kavandada nii küsimusi kui ka klassiarutelu.

Kolmandaks saab tabelis olevaid abiküsimusi ja vihjeid kasutada õpilase järk-järguliseks toetamiseks lahendamise ajal. Õpetaja ei pea alustama konkreetse vihje või lahendusmeetodi nimetamisega. Esmalt võib kasutada üldist fookusküsimust, näiteks „Mida sa praegu jälgid?“,

„Mis siin muutub ja mis jääb samaks?“ või „Kas kogu kujundit on vaja korraga jälgida?“. Seejärel vajadusel liikuda edasi spetsiifilisemate küsimuste ja vihjeteni. Selline kasutusviis võimaldab säilitada õpilase aktiivse rolli ülesande lahenduses ning on kooskõlas teoreetilises osas käsitletud toetamise põhimõtetega.

Neljas võimalik kasutusviis on erinevate lahendusstrateegiate võrdlemine pärast ülesande lahendamist. Känguru ülesanne ei pea lõppema õige vastuse leidmisega. Õpetaja saab pärast lahendamist küsida, millist tunnust erinevad õpilased jälgisid, kas kogu objekti oli vaja mõttes muuta, millised vastusevariandid sai kiiresti välistada või kas sama tulemuseni oleks saanud jõuda ka teistmoodi. Selline arutelu muudab tähelepanu lõppvastuselt lahendusprotsessile ning aitab õpilastel teadvustada kasutatud lahendusstrateegiaid.

Materjali saab kasutada ka ülesannete raskuse kohandamiseks ilma algset ülesannet muutmata. Sama Känguru ülesannet võib anda ühele õpilasele ilma täiendava toeta, teisele koos üldise fookusküsimusega ning kolmandale konkreetsema vihjega. Sel viisil ei seisne diferentseerimine tingimata erinevate ülesannete andmises, vaid õpetajapoolse toe ulatuse muutmises. Samas tuleb rõhutada, et materjalis esitatud küsimused ja vihjed ei moodusta üldist järjestust, tegelik abi peaks sõltuma sellest, mida õpilane juba mõistab ja millises kohas tema lahendusprotsess takistub.

Loodud materjali praktiline väärtus seisneb seetõttu peamiselt kahe funktsiooni ühendamises. Ühelt poolt on tegemist ülesandepangaga, millest õpetaja saab leida ruumilise mõtlemisega seotud Känguru ülesandeid. Ülesannete tabel on teadlikult koostatud lihtsasti kopeeritavas failis, millest oleks õpetajatel kiire ja mugav valida ülesandeid ainetunnis kasutamiseks. Teiselt poolt on tegemist analüüsivahendiga, mis aitab õpetajal mõelda läbi, mida ülesanne õpilaselt ruumiliselt nõuab ja kuidas toetada lahendusidee kujunemist ilma seda kohe ette ütlemata.

3.3. Materjali puudused ja kitsaskohad

Loodud materjali tõlgendamisel tuleb arvestada mitme piiranguga. Üks piirang tuleneb ülesannete valimise ja kategoriseerimise tõlgendamise eripärast. Ülesanded valis ja kategoriseeris autor ning usaldusväärsus ei kontrollitud teise sõltumatu hindaja abil. Seetõttu ei saa väita, et ei jäänud 1008 ülesandest välja ruumilise mõtlemise ülesandeid või ei sattunud kogemata valituks ülesandeid, mille peamine lahendusprotsess ei vaja ruumilist mõtlemist. Ka ei saa välistada, et ülesannetele määratud kategooriad ei kattu täielikult kellegi teise poolt

määratud kategooriatega. Eriti puudutab see piiripealseid ülesandeid, milles esineb korraga mitu ruumilist mõtlemisprotsessi.

Ühes ja samas ülesandes saab ja vahest peab rakendama mitut erinevat ruumilise mõtlemise lahendusprotsessi. Mõni ülesanne võib nõuda näiteks nii mõttelist pööramist kui ka kokkupanekut ning selle paigutamine ühte või teise kategooriasse ei tähenda, et teised ruumilise mõtlemise protsessid ülesandes puuduksid. Käesolevas töös lahendati see probleem domineeriva protsessi määramisega, kui selline otsus lihtsustab paratamatult ülesande tegelikku lahendusprotsessi.

Probleemilahendusstrateegiate määramisel võeti aluseks Pólya käsitluses üldised heuristilised küsimused ja mõtlemisvõtted, kuid kõik käesolevas tabelis kasutatud strateegianimetused ei ole tema teoses sõna-sõnalt samal kujul esitatud. Strateegialoend lähtub Pólya heuristilistest põhimõtetest, mis on kohandatud Känguru valikvastustega ülesannete analüüsimiseks. Seetõttu ei tohiks tabelis märgitud strateegiat käsitleda Pólya poolt konkreetsele ülesandetüübile määratud lahendusviisina ega ülesande ainsa sobiva strateegiana.

Samuti võivad ühe ülesande puhul olla võimalikud mitu sisuliselt erinevat lahendusteed. Känguru ametlik lahendus kirjeldab tavaliselt ühte lahendusviisi, kuid see ei välista teistsuguse matemaatiliselt korrektse või õpilasele intuiitvsema strateegia olemasolu. Tabelis nimetatud lahendusstrateegia kirjeldab seetõttu üht autori hinnangul sobivat või õpetamise seisukohalt olulist lähenemist, mitte kõiki võimalikke lahendusi.

Oluline piirang puudutab ka õpetajale mõeldud abiküsimusi, vihjeid ja tähelepanekuid. Need koostati ülesande struktuuri, lahenduskäigu ja teoreetilises osas kirjeldatud juhendamispõhimõtete põhjal, kuid neid ei koostatud õpilaste tegelike lahenduskäikude vaatlemise põhjal. Seetõttu võib ülesandes koht, mida autor peab tõenäoliseks raskuskohaks, erineda sellest, kus õpilased tegelikult takerduvad. Samuti võib küsimus, mis ühe õpilase puhul aitab lahenduseni jõuda, olla teise jaoks liiga üldine või vastupidi juba liiga konkreetne.

Sellega seostub ka asjaolu, et loodud materjali ei katsetatud käesoleva töö raames süsteemselt õpetajate ega õpilastega. Seetõttu saab töös kirjeldada materjali kavandatud kasutusviise, kuid ei saa teha järeldusi selle kasutatavuse, õpetajate hinnangute ega mõju kohta õpilaste ruumilisele mõtlemisele või probleemilahendusoskusele. Kuigi materjali ühe võimaliku kasutuseesmärgina käsitletakse visualiseerimise ja teiste probleemilahendusstrateegiate järkjärgult iseseisvamat valimist ja kasutamist, ei uuritud käesolevas töös õpilaste tegelikku

strateegiakasutust enne ega pärast materjali rakendamist. Seetõttu ei saa tulemuste põhjal väita, et loodud materjal suurendab õpilaste iseseisvat visualiseerimist või parandab nende ruumilise mõtlemise oskusi. Selleks, et hinnata materjali tegelikku kasutatavust ja mõju, oleks vaja eraldi rakendus- ja hindamisuuringut.

Nimetatud piirangutest hoolimata võimaldas tööprotsess ühendada kolm teoreetilises osas käsitletud teemat: ruumilise mõtlemise kategooriad, probleemilahendusstrateegiad ja õpetajapoolse juhendamise. Töö tulemus ei ole seega ainult kategoriseeritud ülesannete nimekiri, vaid raamistik, mis suunab õpetajat küsima, millist ruumilist mõtlemist ülesanne nõuab, mida õpilasel on vaja märgata, milline strateegia võiks lahendamist toetada ning millise küsimuse või vihjega saab õpetaja aidata õpilasel järgmise lahendusideeni ise jõuda. Selle raamistiku praktilise kasutatavuse ja sobivuse hindamine õpetajate ja õpilastega jääb edasise uurimise ülesandeks.

Kokkuvõte

Ruumiline mõtlemine on matemaatilise mõtlemise oluline osa, mis võimaldab luua, tõlgendada ja muuta ruumilisi kujutisi ning kasutada neid matemaatiliste seoste mõistmisel ja probleemide lahendamisel. Ruumilise mõtlemise tähtsus ei piirdu geomeetriaga, vaid see avaldub ka arvuliste suuruste, graafikute, diagrammide, mõõtmise ja erinevate matemaatiliste seoste mõtestamisel. Kuigi ruumilised oskused on seotud matemaatilise soorituse ja hilisema edukusega STEM-valdkondades, ei ole ruumilise mõtlemise protsessid matemaatika-ülesannetes alati õpetajale otseselt nähtavad. Samuti ei tähenda ülesande visuaalne esitus automaatselt, et selle lahendamine nõuab ruumilist mõtlemist.

Käesoleva magistritöö eesmärk oli koostada õpetajale suunatud metoodiline materjal ruumilist mõtlemist sisaldavate Känguru matemaatikavõistluse ülesannete kasutamiseks matemaatika-õpetuses. Selleks analüüsiti aastatel 2020–2025 avaldatud Känguru ülesandeid kuues kooliõpilaste vanuserühmas: pre-ekolier, ekolier, benjamin, kadett, juunior ja student. Ülesannete valimisel lähtuti nende lahendamiseks vajalikest mõtlemisprotsessidest, mitte üksnes ülesande teemast või visuaalsest esitusviisist.

Ruumilist mõtlemist sisaldavad ülesanded kategoriseeriti Hawesi ja Ansari (2020) käsitlusele tuginedes viide kategooriasse: mõtteline pööramine, mõtteline kokkupanek, mõtteline lõikamine, mehaaniline kujutlusvõime ja mõtteline paberi voltimine. Kuna Känguru ülesanded ei ole koostatud standardiseeritud ruumilise võimekuse mõõtmiseks, kohandati kategooriaid ülesannete kontekstile ning mitut ruumilist protsessi sisaldava ülesande puhul määrati selle domineeriv protsess. Loodud kategoriseeritud ülesandekogum võimaldab õpetajal valida ülesandeid lisaks vanuserühmale ja ilmumisaastale ka neis sisalduva ruumilise mõtlemise protsessi järgi.

Kadett vanuserühma ülesannetele koostati detailsem metoodiline materjal. Iga ülesande juurde määrati võimalikud probleemilahendusstrateegiad ja lahenduse võtmetähelepanekud ning koostati õpetajale abiküsimused ja vihjed. Probleemilahendusstrateegiate sõnastamisel lähtuti Pólya (1945/2001) heuristilistest põhimõtetest, kohandades neid Känguru ülesannete eripärale. Küsimuste ja vihjete koostamisel lähtuti toestamise põhimõttest, mille kohaselt tuleks õpilasele pakkuda tema hetkevajadusele vastavat tuge ning liikuda üldisemast küsimusest konkreetsema vihje poole ainult vajaduse korral.

Loodud materjali saab kasutada ülesannete valimiseks, tunni ettevalmistamiseks, õpilaste võimalike lahendusviiside ja raskuskohtade ennetamiseks, järkjärguliseks juhendamiseks ning erinevate lahendusstrateegiate võrdlemiseks. Materjali korduva kasutamise üks võimalik pikemaajaline eesmärk on toetada seda, et õpilane õpiks erinevaid probleemilahendusstrateegiaid, sealhulgas visualiseerimist, järjest iseseisvamalt valima ja kasutama. Selline eesmärk on kooskõlas ka põhikooli matemaatika ainekavaga, kus visualiseerimist käsitletakse ühe võimaliku probleemilahendusstrateegiana.

Töö olulisteks piiranguteks on ülesannete valimise ja kategoriseerimise sõltuvus ühe autori hinnangust, kategooriate kohandamine Känguru ülesannete kontekstile ning asjaolu, et detailsem metoodiline materjal koostati ainult kadett vanuserühmale. Samuti ei katsetatud materjali süsteemselt õpetajate ega õpilastega. Seetõttu ei saa käesoleva töö põhjal teha järeldusi materjali mõju kohta õpilaste ruumilisele mõtlemisele, strateegiakasutusele või matemaatilisele sooritusele. Edasistes uuringutes oleks võimalik hinnata loodud materjali kasutatavust õpetajate ja õpilastega, analüüsida õpilaste tegelikke lahenduskäike ning laiendada detailset metoodilist materjali ka teistele vanuserühmadele.

Viited

- Applebaum, M. (2017). Spatial Abilities as a Predictor to Success in the Kangaroo Contest. *Journal of Mathematics and System Science*, 7, 154. <https://doi.org/10.17265/2159-5291/2017.06.002>
- Burte, H., Gardony, A. L., Hutton, A., & Taylor, H. A. (2020). Elementary teachers' attitudes and beliefs about spatial thinking and mathematics. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 5(1), 17. <https://doi.org/10.1186/s41235-020-00221-w>
- Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107–115. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x>
- Farran, E. K., Gilligan-Lee, K. A., Mareschal, D., Živković, M., Bartuševica, S., Bell, D., Jay, T., & Gilmore, C. (2025). Teacher Delivered Block Construction Training Improves Children's Mathematics Performance. *Mind, Brain, and Education*, 19(3), 118–129. <https://doi.org/10.1111/mbe.70006>
- Farran, E. K., McCarthy, S., Gilligan-Lee, K. A., Bates, K. E., & Gripton, C. (2024). Translating Research to Practice: Practitioner Use of the Spatial Reasoning Toolkit. *Gifted Child Today*, 47(3), 202–215. <https://doi.org/10.1177/10762175241242494>
- Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., & Golinkoff, R. (2013). Taking Shape: Supporting Preschoolers' Acquisition of Geometric Knowledge Through Guided Play. *Child Development*. <https://doi.org/10.1111/cdev.12091>
- Gilligan, K. A., Flouri, E., & Farran, E. K. (2017). The contribution of spatial ability to mathematics achievement in middle childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, 163, 107–125. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.04.016>
- Gilligan-Lee, K. A., Hawes, Z. C. K., & Mix, K. S. (2022). Spatial thinking as the missing piece in mathematics curricula. *npj Science of Learning*, 7(1), 10. <https://doi.org/10.1038/s41539-022-00128-9>

- Gilligan-Lee, K. A., Hawes, Z. C. K., Williams, A. Y., Farran, E. K., & Mix, K. S. (2023). Hands-On: Investigating the role of physical manipulatives in spatial training. *Child Development, 94*(5), 1205–1221. <https://doi.org/10.1111/cdev.13963>
- Harris, D. (2023). Spatial reasoning in context: Bridging cognitive and educational perspectives of spatial-mathematics relations. *Frontiers in Education, Volume 8-2023*. <https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/feduc.2023.1302099>
- Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review, 27*(3), 465–482. <https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7>
- Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of Spatial Training on Mathematics Performance: A Meta-Analysis. *Developmental Psychology, 58*, 112–137. <https://doi.org/10.1037/dev0001281>
- Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children’s Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Känguru 2025 info. (2025). Tartu Ülikooli teaduskool. Vaadatud 15.08.2026 <https://teaduskool.ut.ee/et/sisu/kanguru-2025-info>
- Känguru võistluse arhiiv. (s.a.). Tartu Ülikooli teaduskool. Vaadatud 15.08.2026 <https://teaduskool.ut.ee/et/ainevoistlused/kanguru-voistluse-arhiiv>
- Levine, S., Ratliff, K., Huttenlocher, J., & Cannon, J. (2011). Early Puzzle Play: A Predictor of Preschoolers’ Spatial Transformation Skill. *Developmental Psychology, 48*, 530–542. <https://doi.org/10.1037/a0025913>
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development, 56*(6), 1479–1498. JSTOR. <https://doi.org/10.2307/1130467>

- Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and g. I. Dennis & P. Tapsfield (Toim), *Human Abilities: Their Nature and Measurement* (lk 97–116). Lawrence Erlbaum Associates.
<https://doi.org/10.4324/9780203774007-6>
- Lowrie, T., Logan, T., & Ramful, A. (2017). Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. *British Journal of Educational Psychology*, 87.
<https://doi.org/10.1111/bjep.12142>
- Mix, K. S., & Cheng, Y.-L. (2012). Chapter 6—The Relation Between Space and Math: Developmental and Educational Implications. J. B. Benson (Toim), *Advances in Child Development and Behavior* (Kd 42, lk 197–243). JAI. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394388-0.00006-X>
- Newcombe, N. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34, 29–43.
- Newcombe, N. S. (2013). Seeing Relationships: Using Spatial Thinking to Teach Science, Mathematics, and Social Studies. *The American Educator*, 37, 26.
- Newcombe, N. S., Booth, J. L., & Gunderson, E. A. (2019). Spatial Skills, Reasoning, and Mathematics. J. Dunlosky & K. A. Rawson (Toim), *The Cambridge Handbook of Cognition and Education* (lk 100–123). Cambridge University Press. Cambridge Core. <https://doi.org/10.1017/9781108235631.006>
- Pinilla, R. K. (2024). Spatial reasoning in mathematics standards: Identifying how early elementary educators are systematically supported to teach spatial skills. *Frontiers in Education*, Volume 9-2024.
<https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/feduc.2024.1407388>
- Pólya, G. (2001). *Kuidas seda lahendada?* Valgus. (Originaalteos ilmunud 1945)

- Pruden, S., Levine, S., & Huttenlocher, J. (2011). Children's spatial thinking: Does talk about the spatial world matter? *Developmental science*, 14, 1417–1430.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01088.x>
- Põhikooli riiklik õppekava, Lisa 5 Ainevaldkond „Matemaatika” (2025).
https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/1231/2202/5006/VV2011_m1_lisa5_2025.pdf#
- Sorby, S. (2001). *A New And Improved Course For Developing Spatial Visualization Skills* (lk 6.66.7). <https://doi.org/10.18260/1-2--9600>
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.
<https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Uttal, D., & Cohen, C. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why, and how? *Psychology of Learning and Motivation*, 1. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394293-7.00004-2>
- Uttal, D., Meadow, N., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A., Warren, C., & Newcombe, N. (2012). The Malleability of Spatial Skills: A Meta-Analysis of Training Studies. *Psychological Bulletin*, 139, 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in Teacher–Student Interaction: A Decade of Research. *Educational Psychology Review*, 22, 271–296.
<https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6>
- Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology*, 101, 817–835. <https://doi.org/10.1037/a0016127>
- Watanabe, T. (2001). Anticipating children's thinking: A Japanese approach to instruction. *Mathematics Education Dialogues*, 11.

Young, C. J., Levine, S. C., & Mix, K. S. (2018). The Connection Between Spatial and Mathematical Ability Across Development. *Frontiers in Psychology, Volume 9-2018*.
<https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2018.00755>

Lisad

Lisa 1. Kaasapandud fail Känguru ülesanded 2020-2025

Tööga kaasa lisatud ZIP-failis on dokument nimega *tabel Känguru ülesanded 2020-2025.docx*, milles on tabelisse koondatud kuue vanuserühma ruumilise mõtlemise ülesanded. Tabeli struktuur:

1. **Kategooria** – ülesandele analüüsi käigus määratud domineeriv ruumilise mõtlemise kategooria.
2. **Ülesande andmed** – ülesande ilmumisaasta ja algne järjekorranumber.
3. **Vanuserühm** – ülesande Känguru vanuserühm; koondandmete töötlemisel kasutati numbrilist kodeeringut: 1 – pre-ekolier, 2 – ekolier, 3 – benjamin, 4 – kadett, 5 – juunior ja 6 – student.
4. **Ülesanne** – ülesande algne tekst koos joonise ja vastusevariantidega
5. **Vastus, lahendus** – ülesande õige vastus ning selle olemasolu korral ka avaldatud lahenduskäik.

Lisa 2. Kaasapandud fail vanuserühma kadett ülesanded 2020-2025

Töoga kaasa lisatud ZIP-failis on dokument nimega *tabel Känguru kadett ülesanded 2020-2025.docx*, milles on tabelisse koondatud vanuserühma kadett ruumilise mõtlemise ülesanded.

Tabeli struktuur:

1. **Kategooria** – ülesandele analüüsi käigus määratud domineeriv ruumilise mõtlemise kategooria.
2. **Ülesande andmed** – ülesande ilmunisaasta ja algne järjekorranumber.
3. **Vanuserühm** – ülesande Känguru vanuserühm; koondandmete töötlemisel kasutati numbrilist kodeeringut: 1 – pre-ekolier, 2 – ekolier, 3 – benjamin, 4 – kadett, 5 – juunior ja 6 – student.
4. **Ülesanne** – ülesande algne tekst koos joonise ja vastusevariantidega
5. **Lahendusstrateegia** – Pólya heuristilistest põhimõtetest ja ülesande lahenduskäigu analüüsist lähtuv üldisem lahendusstrateegia, millega ülesandele läheneda
6. **Tähelepanek, abiküsimus, vihje** – ülesandespetsiifilised lahendamiseks olulised tähelepanekud ning õpetajale koostatud küsimused ja vihjed, mida saab kasutada õpilase mõtlemise suunamiseks.
7. **Vastus, lahendus** – ülesande õige vastus ning selle olemasolu korral ka avaldatud lahenduskäik.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kerttu Talts,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Ruumilise mõtlemise toetamine matemaatikaõpetuses Känguru ülesannete ja metoodilise materjali abil“, mille juhendajad on Tiina Kraav ja Raili Vilt, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada Tartu Ülikooli digitaalarhiivi kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kerttu Talts

17.08.2026