TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

P. PRÜLLER JA H. TAMMET

MÕÕTMISVIGADE ARVUTAMINE

TARTU 1960

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
ÜLDISE FÜÜSIKA KATEEDER

P. PRÜLLER JA H. TAMMET

MÕÕTMISVIGADE ARVUTAMINE

TARTU 1960

Vastutav toimetaja K. Kuddu
Korrektor E. Võhandu

TRÜ Rotaprint 1960. Trükipoognaid 2,50.
Tir. 1000 eks. MB 01678. Tell. nr. 345.

Hind rbl. 0.75

S I S U K O R D

§ 1. Füüsikaliste suuruste mõõtmine

Füüsikalise suuruse, näit. pikkuse, kaalu, ruumala jne. mõõtmine seisneb tema võrdlemises teise sama liiki suurusega, mis on võetud mõõtühikuks. Seda võrdlemist saab teostada: 1) mõõtevahendiga, millele on märgitud mõõtühikud, näit. mõõdupuu, kaaluviht, mensuur jne., 2) mõõteriistaga, näit. ampermeeter, voltmeeter jne., 3) mõõtmise seadisega, mis sisaldab mõõtevahendeid, mõõteriistu ja muid abivahendeid, millede kasutamine toimub kindla skeemi või mõõtmismeetodi järgi, näit. takistussild, katoodostsillograaf jne.

Mõõtarv leitakse kas otsese mõõtmise tulemusena mõõtevahendi või mõõteriista skaalalt, näit. pikkus, temperatuur, pinge jne. või kaudselt arvutamise teel otseselt mõõdetud suurustest.

Otsene mõõtmine seisneb teatud kindla punkti asukoha määramises mõõteriista skaalal. Mõõtmise täpsuse suurendamiseks tuleb sageli hinnata silmaga ka skaala vähimate jaotiste vahede kümnendikosi.

Tähistame mõõdetava suuruse, näiteks pikkuse X-ga ja mõõtühiku M-ga, siis mõõtarv A näitab, mitu korda mõõtühik M mahub mõõdetavasse suurusesse. Seega mõõtarv

$$A = \frac{X}{M}, \text{ millest } X = A \cdot M. \qquad (1)$$

Mõõtarv A on pöördvõrdeline mõõtühikuga M. Näiteks 17 cm = 170 mm, s.o. mõõtühiku vähenemisel 10 korda suureneb mõõtarv 17-st 170-ni, s.o. samuti 10 korda.

Laboratoorse töö katselises osas tuleb mõõtmine teostada maksimaalse korralikkusega ja täpsusega. Katselise materjali kvaliteedist sõltub töö lõppvastuse täpsus.

§ 2. Mõõtmisvead

Kogemused näitavad, et sama suuruse võimalikult täpsel korduval mõõtmisel saame üksteisest erinevad tulemused. Seega ühtki mõõtmist ei saa teha täiesti täpselt ja iga mõõtmine on alati seotud teatud veaga.

Mõõtmisvead sõltuvalt neid esilekutsuvatest põhjustest liigituvad: 1) metoodilised vead, mis on tingitud mõõtmismeetodi ebatäpsusest, näit. elektrilise takistuse mõõtmisel jäetakse arvestamata ühendusjuhtmete takistus; 2) instrumentaalsed vead ehk riista vead, mis on põhjustatud mõõtmisel kasutatava mõõteriista puudulikkusest või ebatäpsusest tema valmistamisel; 3) lugemite määramise vead, mis tekivad ebatäpsustest lugemite tegemisel. Selle põhjused on kas subjektiivset laadi, näit. nägemise või kuulmise puudulikkus või objektiivset laadi, näit. vaatluskoha halb valgustus või mõõteriistade ebasobiv asend, parallaks vaatlemisel, aluse põrumine, võrgupinge kõikumine, temperatuuri muutus katse kestel. Lugemite määramise vead on juhuslikku laadi ning nad võivad ühe suuruse korduval mõõtmisel mõõtmistulemusi nii suurendada kui ka vähendada.

Mõõtmisvead oma olemuselt liigituvad:

1) juhuslikud vead, mis on korduvatel mõõtmistel võrdse tõenäosusega kas positiivse või negatiivse märgiga;

2) süstemaatilised vead, mis on kindla märgiga, s.o. nad mõjustavad mõõtmise tulemust ühes kindlas suunas, seda suurendades või vähendades. Näiteks ühendusjuhtmete takistuse arvesse võtmata jätmine annab kõigil mõõtmistel samasuunalise vea, mis osutub seega süstemaatiliseks veaks. Süstemaatilised vead võivad olla tingitud ka mõõteriista puudulikust ehitusest, näit. mõõteriista skaala on nihkunud, skaala mastaap on vigane, osuti on paindunud jne. Paljudel juhtudel saab süstemaatilise vea suurust ja märki kindlaks teha mõõteriista võrdlemisel täpse kontrollmõõteriistaga või metoodiliste vigade puhul arvutustulemuste analüüsimisel. Süstemaatiliste vigade vähendamiseks tuleb uurida katseriis-

ta ja mõõtmismeetodit ning teha vastavad parandused.

On aga olemas üks süstemaatiline viga, mida ei saa kõrvaldada ja mille kohta ei saa anda parandust. Selle süstemaatilise vea määrab mõõteriista enda valmistamise täpsus. Mis tahes mõõteriist võimaldab teha mõõtmisi ainult teatud kindla täpsusega, mis sõltub mõõteriista skaala vähimate jaotiste pikkusest, skaala joonte paksusest ja mõõteriista ehitusest. Mõõteriista valmistamise täpsus määrab instrumentaalse vea ehk riista vea. Riista viga on süstemaatiline viga, s.o. korduvatel mõõtmistel annab ta mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest ainult ühesuunalise hälbe, ent meie ei tea kunagi, millises suunas. Seepärast kirjutatakse riista viga pluss- ja miinusmärgiga. Riista vea suurus märgitakse mõõteriista passis, ent riista kauemaaegsel kasutamisel võib see viga suureneda. Passi puudumisel tuleb riista veaks võtta vähemalt pool skaala vähima jaotise pikkusest, nn. jaotise hinnast. Näiteks riista viga millimeeterjaotistega skaala puhul on võrdne $\Delta A_r = \pm 0,5$ mm. Nooniusega varustatud astmiku puhul loetakse riista veaks nooniuse täpsus, s.o. mõõteriista vastava jaotise (või jaotiste) ja nooniuse jaotise pikkuste vahe. Sekundomeetri ja teiste hüppeti edasi liikuva osutiga riistade puhul loetakse riista veaks jaotise hind. Varbsirkli, mikromeetri ja kaaluvihtide puhul on riista vigade klassifikatsioon antud selles juhendis § 8.

Juhuslikud vead, samuti nagu riista vead, ei ole kõrvaldatavad ja nende suhtes ei saa teha parandust.

Juhuslikud vead ja riista vead määravad vahemiku laiuse, milles asub mõõdetava suuruse tõeline väärtus.

Juhuslike vigade mõju vähendamiseks tuleb iga mõõtmist teostada korduvalt (vähemalt 5 või 10 korda), millisel korral ei ole põhjust oletada ainult ühesuunaliste vigade esinemist. Üksikute mõõtmiste juhuslikud vead omavad võrdset tõenäosust mõõdetava suuruse tõelise väärtuse suurendamiseks või vähendamiseks. Seetõttu on kõige lähemal mõõdetava suuruse tõelisele väärtusele rea üksikmõõtmiste aritmeetiline keskmine.

§ 3. Mõõtarvu absoluutne ja relatiivne viga.

Mõõdetava suuruse tõelise väärtuse X ja mõõtmisel saadud mõõtarvu A vahet nimetame mõõtarvu absoluutseks tõeliseks veaks α. Kuna juhuslike vigade puhul mõõtarv on mõõdetavast suurusest kas suurem või väiksem, siis tõeline viga tuleb mõõtarvule kas liita või sellest lahutada. Seega

$$X - A = \pm\alpha \quad \text{, millest}$$

$$X = A \pm \alpha. \qquad (2)$$

Mõõdetava suuruse tõeline väärtus X on meile tundmata, seetõttu ei ole võimalik leida tõelise vea α suurust. Kuna tõelise väärtuse X asemel kasutame tema lähisväärtust, s.o. mõõtarvu A, siis öeldakse, et füüsikalistel mõõtmistel leitud arvud on ligikaudsed arvud. Arvutustel on ligikaudseteks arvudeks arv π, naturaallogaritmide alus e, enamik logaritme ja trigonomeetrilisi funktsioone.

Üksikmõõtmise teostamise analüüs, mõõteriista kohta teada olev mõõtmise täpsus või rea mõõtmisseeriate tulemuste kriitiline läbitöötamine võimaldavad leida määra või mõnedel juhtudel suurusjärku, milleni ülimalt võib küündida absoluutne tõeline viga.

Absoluutsete tõeliste vigade ülemmäära nimetame mõõtarvu absoluutseks veaks. Absoluutne viga on nimetusega arv, mis mõõtarvule liidetult näitab piire, milledesse langeb mõõdetava suuruse tõeline väärtus.

Mõõtarvude A, B, C ... absoluutsed vead tähistame vastavalt ΔA, ΔB, ΔC ...

Kui mõõtarvu A absoluutne viga on ΔA, siis mõõdetava suuruse tõeline väärtus X asub vahemikus

$$A - \Delta A \leqslant X \leqslant A + \Delta A.$$

Selle võrratuse asemel kirjutame lühidalt:

$$\underline{X = (A \pm \Delta A) \text{ ühes mõõtühikuga}}. \qquad (3)$$

Näiteks X = (0,70 ± 0,03) mm tähendab, et mõõdetav suurus X asub vahemikus $0,67 \leq x \leq 0,73$ mm. Selle vahemiku teadmine võimaldab määrata mõõtarvu kehtivate kohtade arvu.

Absoluutne viga iseloomustab mõõtarvu, kuid ei iseloomusta otseselt mõõtmise sooritamise täpsust. Viimast iseloomustab relatiivne viga.

Relatiivseks ehk suhteliseks veaks E_A nimetame absoluutse vea ΔA ja mõõtarvu A suhet, s.o. mõõtarvu ühe mõõtühiku kohta tulevat absoluutset viga.

Relatiivne viga

$$E_A = \frac{\Delta A}{A}. \tag{4}$$

Relatiivne viga on nimeta suurus ja seda väljendatakse harilikult protsentides. Näiteks, kui $x = (0,70 \pm 0,03)$mm, siis $E_x = \frac{0,03}{0,70} = \frac{3}{70} = 0,043 \simeq 0,05 = 5\%$.

Valemi (4) põhjal defineeritud relatiivne viga on tõelise relatiivse vea $\frac{\alpha}{X}$ ülemmääraks, kuna $\alpha \leq \Delta A$ ja $X \simeq A$.

Valemist (4) järgneb, et absoluutne viga

$$\Delta A = E_A \cdot A. \tag{5}$$

Seda valemit kasutame absoluutse vea ΔA arvutamiseks, kui relatiivne viga E_A on teada.

Üksikmõõtmiste absoluutsete vigade hindamise kohta esitame järgmisi näiteid.

Mõõtnud sentimeeterjaotustega mõõdupuuga mingi eseme pikkuse, saame juhul, kui pikkus on kõige lähemal arvule 127 cm, mõõtarvuks 127 cm absoluutse veaga $\pm$ 0,5 cm, mille kirjutame järgmiselt: $x = (127 \pm 0,5)$ cm. Eelnevas antud viga $\pm$ 0,5 cm, mille suurus on pool mõõtarvu viimase koha ühikut, nimetatakse standardveaks. Millimeeterjaotistega skaalat omava mõõdupuuga saab mõõta standardveaga $\pm 0,5$ mm $= \pm 0,05$ cm. Sageli tuleb arvestada viga mitte ainult mõõdupuu lõpplugemi, vaid ka alglugemi juures, näiteks mensuurile kinnitatud kahe nööri vahelise kauguse mõõtmisel, U-torus asuva vedeliku nivoode vahe kauguse mõõtmisel jne. Absoluutne viga on sel juhul kaks korda suurem.

Termomeetrilt, mille jaotised on 1 kraadi tagant, saame lugeda veaga kuni $\pm$ 0,5°C. Aja mõõtmisel sekundomeetriga teeme nii alg- kui ka lõpphetke määramisel vea kuni sekundomeetrilt loetava vähima ajavahemiku ulatuses. Kui mensuuril on antud jaotised iga 25 cm^3 järel, siis vahepealsete jaotiste hindamisel teeme vea kuni $\frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5\ cm^3 \simeq 13\ cm^3$. Mõõtes näiteks mensuuriga 240 cm^3, kirjutame (240 $\pm$ 13) cm^3. Mitmekordsel mõõtmisel mensuuriga üksikmõõtmiste vead liituvad.

Laboratoorsetes töödes esineb sageli varem mõõdetud suurusi, milledele viga ei ole juurde kirjutatud. Sel juhul loetakse absoluutseks veaks pool viimase koha ühikut. Näiteks keha mass m = 632,4 g tuleb lugeda m = (632,4 $\pm$ 0,05)g.

Elektrimõõteriistale märgitakse nn. <u>täpsusklass</u>, mida tähistatakse ringjoonega ümbritsetud numbriga. Näiteks number 1,0 voltmeetril näitab, et mõõteriista lugemi absoluutne viga ei ületa 1% skaala lugemi maksimaalväärtusest. Kui viimane on näiteks 250 V, siis mõõteriista lugemi absoluutne viga on $0{,}01 \cdot 250 = 2{,}5\ V \simeq 3\ V$. Kui osuti jääb peatuma lugemile 218 V, siis X = (218 $\pm$ 3) V.

<u>Mõõtmise täpsus sõltub mõõteriistadest ja mõõtmismeetodist ja täpsust ei saa suurendada aritmeetiliste tehete sooritamise kaudu.</u>

§ 4. <u>Ligikaudsete arvude ümardamine ja aritmeetilised tehted nendega</u>

<u>Iga mõõtmise tulemusena saadud arv peab olema varustatud absoluutse veaga</u>.

Absoluutne viga antakse harilikult ühe nullist erineva numbriga, näit. $\pm$ 0,03 cm, $\pm$ 200 m.

Mõõtarv kirjutatakse alati täpsusega kuni absoluutse vea paremalt <u>esimese kehtiva numbrini</u>. Näiteks (15,19$\pm$0,03) cm, (12700 $\pm$ 200) m. Ei ole lubatud kirjutada (15,1947 $\pm$ 0,03) cm, (12715 $\pm$ 200) m.

-o-

Mõõtarvu ülearused kümnendkohad jäetakse ära või täisarvu puhul ümardatakse nullideks.

1. Ligikaudsete arvude ümardamisel viimane säilitatav number suurendatakse ühe võrra, kui temale järgnev ärajäetav number on 5 või üle selle või jäetakse muutmatuks, kui ärajäetav number on väiksem kui 5. Erandiks on juht, kus ärajäetav number 5 on saadud ümardamise teel, millisel korral eelnev number jäetakse muutmatuks. Näiteks π=3,14159 ümardatakse 3,1416, 3,142 ja 3,14. Arv 0,6345 ümardatakse 0,635, 0,63 (mitte 0,64).

Sellist arvude ümardamise viisi kuni viimase säilitatava kümnendkoha ühiku pooleni nimetatakse standardümardamise viisiks. Sel puhul on kirjutised 5,7 cm ja (5,7 $\pm$ 0,05) cm täiesti üheväärsed.

Erandina eelnevast ümardamise reeglist ümardatakse absoluutsed ja relatiivsed vead alati nii, et viga kasvaks. Mainitud vead kujutavad endast tegelikult tõelise vea ülemmäärasid ja alla ümardamisel võib vea ülemmäär osutuda väiksemaks tõelisest veast.

Näiteks absoluutne viga ΔA = 0,034 cm $\simeq$ 0,04 cm ja relatiivne viga $E_A = \frac{0,06}{12,9} \simeq \frac{0,06}{12} = 0,005 = 0,5\%$.

Erandjuhtumeil, kui tahetakse vältida liiga suurt ümardamist, antakse absoluutne viga kahe kehtiva numbriga, näiteks kirjutatakse ΔA = 0,032 cm, s.o. seda arvu ei ümardata üles 0,04 cm peale. Mõõtarvus A tuleb sel puhul säilitada samuti kolm numbrit peale koma.

2. Kehtivateks numbriteks loetakse kõik numbrid 1, 2, 3 ... 9 ja null, kui ta asub kahe kehtiva numbri vahel või täisarvu või kümnendmurru lõpus; nulle kümnendmurru numbritest vasakul ei loeta kehtivateks numbriteks.

Näiteks arvus 0,0106 on esimesed kaks nulli mittekehtivad, null 1 ja 6 vahel on kehtiv number. Arvu 7000 puhul on nullid kehtivad ja absoluutne viga on $\pm$ 0,5. Juhul aga,kui eelnevas arvus loeme kehtivaks numbriks ainult 7, siis kirjutame ta kujul 7 . 10^3, s.o. absoluutne viga on

$\pm 0,5 \cdot 10^3 = \pm 500$.

Arv 8,60 näitab, et tema mõõtmisel on arvestatud ka sajandikke ja absoluutne viga on $\pm$ 0,005. Arvu 8,6 absoluutne viga on $\pm$ 0,05, s.o. kümme korda suurem eelnevast. Seega ligikaudsete kümnendmurdude puhul näitavad nullid kehtivatest numbritest paremal mõõtmise täpsust.

3. Ligikaudsete arvude liitmisel või lahutamisel ümardame nad enne reeglite (1) ja (2) kohaselt kuni <u>kümnendkohani</u>, mis mingis arvus on vähimast ühe võrra suurem. Resultaadi ümardame ühe koha võrra.

Näiteks	2,923	asemel liidame	2,92
	15,467		15,47
	6,0		6,0
			$24,39 \simeq 24,4$

4. Ligikaudsete arvude korrutamisel või jagamisel jätame korrutises või jagatises nii palju kehtivaid numbreid, kui palju neid on kõige vähema kehtivate numbritega arvus. Näiteks $427.23 = 98.10^2$ (mitte 9821) või $454 : 61 = 7,4$ (mitte 7,44).

5. Kõigi aritmeetiliste tehete <u>vahepealsetes resultaatides tuleb säilitada üks number rohkem</u>, kui seda nõuavad eelnevad reeglid (3) ja (4). Näiteks $427.23.11 = (982.10).11 = 11.10^4$ (mitte 108020 või 110000). Kuna lähteandmetes on vähim kehtivate numbrite arv 2 (arvud 23 ja 11), siis vahepealses korrutises $427.23 = 9821$ säilitame 3 kehtivat numbrit, s.o. kirjutame ta kujul 982.10 (mitte 9820, milles on 4 kehtivat numbrit). Lõppresultaadi anname jälle 2-e kehtiva numbriga, mida näitab kirjutusviis 11.10^4, kus kehtivateks numbriteks on 11.

<u>Tähelepanu</u>! <u>Vahepealsetes resultaatides tuleb kõik vahepealsed korrutised - näiteks 982.10 - alati välja kirjutada, mis hõlbustab tunduvalt arvutuste kontrolli</u>.

<u>Kui lõppkorrutise või -jagatise esimene kehtiv number on väiksem kui kõige väiksema täpsusega arvu esimene kehtiv number, siis tuleb lõppresultaadis säilitada üks kehtiv num-</u>

ber rohkem, kui seda näeb ette reegel (4). Näiteks 454:75=6,05, mitte 6,1 või 1,60.09=1,4 , mitte 1.

§ 5. Aritmeetiline keskmine ja selle vead η ja σ_N.

Füüsika laboratoorsete tööde sooritamisel kehtib üldreegel, et igat suurust mõõdetakse vähemalt 5 korda, kui tööjuhend ei näe ette erineva arvu mõõtmiste sooritamist.

Mõõdetava suuruse tõenäoseimaks väärtuseks on üksikmõõtmiste mõõtarvude N_1, N_2, ... N_n aritmeetiline keskmine.

$$N = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}, \qquad (6)$$

kus n on mõõtmiste arv.

Olgu teostatud 5 mõõtmist tulemustega N_1, N_2, N_3, N_4 ja N_5, kusjuures N_2 on vähim mõõtarv. Aritmeetiline keskmine

$$N = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{5} =$$

$$= \frac{5N_2 + (N_1 - N_2) + (N_2 - N_2) + (N_3 - N_2) + (N_4 - N_2) + (N_5 - N_2)}{5}$$

$$= N_2 + \frac{\sum_{i=1}^{5}(N_i - N_2)}{5}. \qquad (7)$$

Valemist (7) nähtub, et aritmeetilise keskmise leiame hõlpsamini, kui vähima mõõtarvuga liidame selle vähima mõõtarvu suhtes arvutatud hälvete aritmeetilise keskmise.

Aritmeetilise keskmise ja üksikmõõtmiste mõõtarvude vahed, s.o. mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes

$$\Delta N_1 = N - N_1,$$

$$\Delta N_2 = N - N_2,$$

$$\text{-----------}$$

$$\Delta N_n = N - N_n,$$

nimetame tõenäoseimateks vigadeks. See nimetus tuleneb sellest, et tõenäoseim viga on üksikmõõtmise mõõtarvu erinevus mõõdetava suuruse tõenäoseimast väärtusest, s.o. aritmeetilisest keskmisest. Tõenäoseimad vead võivad olla kas positiivsed või negatiivsed ja nende kohta kehtivad järgmised seaduspärasused:

a) Tõenäoseimate vigade algebraline summa on null. Liitnud eelnevate võrduste vastavad pooled liikmeti, leiame,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = nN - \sum_{i=1}^{n} N_i .$$

Valemist (6) järgneb, et $nN = \sum_{i=1}^{n} N_i$, järelikult

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = 0 .$$

Seda omadust kasutatakse aritmeetilise keskmise arvutamise kontrolliks. Väike vahe positiivsete ja negatiivsete tõenäosemate vigade summades esineb vaid juhul, kui aritmeetilise keskmise väärtus on ümardatud.

b) Tõenäoseimate vigade ruutude summa

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2$$

omab minimaalset väärtust. Kui üksikmõõtmiste mõõtarvude hälbed leida mitte aritmeetilise keskmise, vaid mõne teise arvu suhtes, siis on nende hälvete ruutude summa alati suurem kui tõenäoseimate vigade ruutude summa.

Kõige lihtsamalt arvutatavaks aritmeetilise keskmise veaks on keskmine absoluutne viga, mis on aritmeetiline keskmine tõenäoseimate vigade absoluutväärtustest. Keskmine absoluutne viga

$$\eta = \frac{|\Delta N_1| + |\Delta N_2| + \cdots\cdots + |\Delta N_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta N_i|}{n} . \quad (8)$$

Keskmine relatiivne viga E_N on keskmise absoluutse vea η ja aritmeetilise keskmise N suhe

$$E_N = \frac{\eta}{N} . \quad (8a)$$

Keskmine absoluutne viga ei väljenda otseselt, kui palju võib aritmeetiline keskmine erineda mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest. Aritmeetilise keskmise võimalikku erinevust mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest iseloomustab aritmeetilise keskmise ruutviga σ_N. Aritmeetilise keskmise ruutvea olemust selgitatakse tõenäosusteoorias.

Tõenäosusteooria uurimisobjektiks on juhuslikud sündmused. Juhusliku sündmuse esinemise tõenäosuseks p nimetatakse piirväärtust, millele läheneb selle sündmuse esinemiste arvu m ja sündmuste koguarvu n suhe viimase liginemisel lõpmatusele. Tõenäosus

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} .$$

Kui mõõtmisvea ΔA langemine vahemikku x_1 kuni x_2 on tõenäosusega p, siis väga suure arvu n mõõtmiste korral on sellesse vahemikku langevate mõõtmiste arv np.

Kui sama suuruse mõõtmisel teha palju mõõtmisi, siis kehtivad järgmised seaduspärasused:

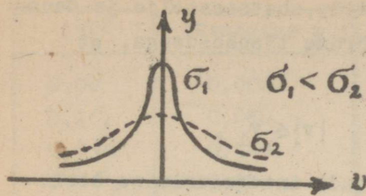
a) positiivse ja negatiivse väärtusega juhuslikud vead esinevad võrdse sagedusega,

b) mida suurem juhuslik viga, seda väiksem on tema esinemise tõenäosus ja ümberpöördult.

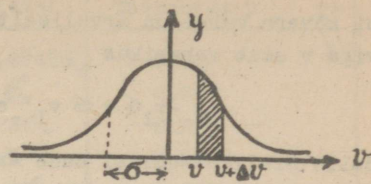
Aritmeetilise keskmise N tõeline viga v, s.o. tema hälve mõõdetava suuruse tõelise väärtuse X suhtes $v = N - X$ on samuti juhuslik suurus. Erineva suurusega tõeliste vigade esinemissagedust kirjeldab juhuslike vigade kohta kehtiv Gaussi normaalne vigade jaotusseadus, mille võrrandiks on

$$y = \frac{1}{\sigma_N \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_N^2}} . \qquad (9)$$

Gaussi kõver on kujutatud joonistel 1 ja 2.



Joonis 1



Joonis 2

Suurus σ_N^2 valemis (9) on ainuke parameeter, mis määrab kõvera kuju ja kannab nime dispersioon. Mida väiksem on dispersioon σ_N^2, seda teravam ja kõrgem on Gaussi kõvera maksimum (joon.1).

Tõenäosus Δp selleks, et viga v asuks vahemikus v kuni v + Δv, on võrdne joonisel 2 viirutatud osa pindalaga.

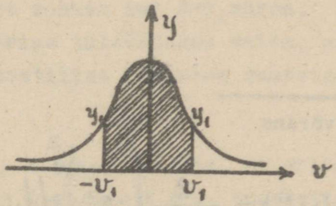
Kui Δ v on väike, siis kõvera ordinaat y punktis v on ligikaudu võrdne tõenäosuse Δ p ja vahemiku Δ v laiuse suhtega, s.o.

$$y \simeq \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Mida väiksem on Δv, seda täpsem on võrdus (a). Lõplikult ordinaat

$$y = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad .$$

Kujutame joonisel 3 ordinaadid, mis vastavad väärtustele v_1 ja $-v_1$



Joonis 3

Pindala nimetatud ordinaatide, abstsisstelje ja Gaussi kõvera vahel on arvuliselt võrdne tõenäosusega, et viga v asub vahemikus

$$-v_1 \leq v \leq v_1 \quad \text{ehk} \quad |v| \leq v_1 .$$

Selle pindala suurust saab arvutada integreerimise teel. Kuigi Gaussi kõverat mõlemale poole ükskõik kui kaugele jatkates kõver kunagi ei lõiku abstsissteljega, on siiski kogu pindala Gaussi kõvera ja abstsisstelje vahel lõplik ja võrdub ühega. Viimane asjaolu on täielikus kooskõlas sellega, et tõenäosus ükskõik millise väärtusega vea saamiseks on 1, mis tähendab, et ükskõik millist väärtust omava veaga tulemuse saame iga mõõtmise korral kindlasti.

Ordinaatidega piiratud pindala osa on alati ühest väiksem, mis tähendab, et mingis vahemikus asuva veaga tulemuse saamine pole kunagi päris kindel. Mida kitsam on vahemik, seda väiksem on vastavate ordinaatidega piiratud pindala, mis näitab, et seda väiksema tõenäosusega on selles vahemikus asuva veaga tulemuse saamine.

Toome järgnevas Gaussi vigade kõveraga ja ordinaatidega, millede abstsissid on -v ja +v (s.o. abstsissi absoluutväärtuseks on $|v|$), piiratud pindalade suurused mõnedele vahemikkudele.[1]

1) Pindala on võrdne

$$\Phi\left(\frac{v}{\sigma_N}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{v}{\sigma_N}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

$\|v\|<$	Tõenäosus p [2]	$\|v\|<$	Tõenäosus p [2]
0,00	0,000	$0,6745\sigma_N$	0,5 [1]
$0,1\sigma_N$	0,080	σ_N	0,683
$0,2\sigma_N$	0,159	$2\sigma_N$	0,955
$0,3\sigma_N$	0,236	$3\sigma_N$	0,997
$0,4\sigma_N$	0,311	$4\sigma_N$	0,999
$0,5\sigma_N$	0,383		

Vastavalt eelnevale tabelile on tõenäosusega p=0,683 oodata, et mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine N asub mõõdetava suuruse tõelist väärtust X piiravates rajades

$$X - \sigma_N \leq N \leq X + \sigma_N$$

$$\text{ehk} \quad N = X \pm \sigma_N \ .$$

Kui teha k mõõtmisseeriat (k peab olema väga suur arv), siis umbes 2/3 juhul seeriate üldarvust (0,683 k seerias) langeb mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine vahemikku $X \pm \sigma_N$ ja ainult 1/3 seeriate korral on aritmeetiline keskmine sellest vahemikust väljaspool.

Ruutviga σ_N kujutab geomeetriliselt Gaussi vigadekõvera käänutäpi abstsissi.

Tõenäosusega p = 0,997, s.o. peaaegu täieliku kindlusega (p=1) on oodata, et aritmeetiline keskmine ei erine tõelisest väärtusest rohkem kui $3\sigma_N$ võrra.

Tõenäosusteoorias tuletatakse valem, mille järgi n üksikmõõtmise aritmeetilise keskmise ruutviga σ_N on võrdne

---

1) Tõenäosusega p = 0,5 on oodata, et aritmeetiline keskmine $N = X \pm 0,6745\sigma_N = X \pm r$. Suurust $r = 0,6745\sigma_N \simeq$ $\simeq 2/3\,\sigma_N$ nimetatakse tõenäoseks veaks.

2) Pindala $\Phi\left(\frac{v}{\sigma_N}\right)$.

ruutjuurega aritmeetilise keskmise suhtes leitud hälvete ruutude summast, mis on jagatud korrutisega n(n-1)

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2}{n \cdot (n-1)}} \ . \qquad (10)$$

Ruutviga üksikmõõtmise mõõtarvu suhtes

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2}{n-1}} = \sigma_N \cdot \sqrt{n} \ .$$

on $\sqrt{n}$ korda suurem kui ruutviga aritmeetilise keskmise suhtes σ_N.

Valemist (10) nähtub, et kui mõõtmiste arv n suureneb, siis ruutviga kahaneb. Enam kui 10 mõõtmise korral muutub see kahanemine üha aeglasemaks. Siit järeldub, et aritmeetilise keskmise täpsuse edasiseks suurendamiseks on otstarbekam tee mitte mõõtmiste arvu suurendamine, vaid täpsema mõõtmismeetodi või mõõteriista kasutamine.

Küsimus, millist viga kasutada lõpptulemuse iseloomustamiseks, tuleb lahendada kokkuleppe teel.[1]

Füüsika praktikumis määratakse mõõtmiste arvu $n > 5$ korral ruutviga ning $n \leq 5$ korral keskmine absoluutne viga.

Aritmeetilise keskmise absoluutse vea ülemmäära leidmiseks kasutame järgmist kokkulepet:

---

1) Tõenäosusteoorias näidatakse, et väga suure üksikmõõtmiste arvu n korral on ruutviga σ_N ja keskmine absoluutne viga η omavahel järgnevalt seotud

$$\sigma_N = \frac{1{,}25}{\sqrt{n}} \eta \ . \qquad (11)$$

Seega ruutviga on keskmisest absoluutsest veast väiksem. Näiteks n = 10 korral saame valemist (11)

$$\sigma_N = 0{,}4 \ \eta \ .$$

Valemit (11) võib kasutada vigade arvutuse kontrolliks. Kui valemi (11) abil leitud ning otseselt valemi (10) abil arvutatud ruutvea väärtused erinevad tunduvalt, siis näitab see, et vaadeldaval juhul juhuslike vigade esinemise tõenäosus ei allu Gaussi jaotusseadusele.

a) kui $n > 5$, siis

$$\underline{\Delta N = 3\sigma_N}\ , \tag{12}$$

b) kui $n \leq 5$, siis

$$\underline{\Delta N = 2\eta} \tag{13}$$

Selle kokkuleppe püstitamisel arvestame, et tõenäosusega ligi 1 on oodata, et aritmeetiline keskmine ei erine tõelisest väärtusest rohkem kui $3\sigma_N$ või 2η võrra.

Valemite (12) ja (13) abil leitud ΔN võib lugeda mõõtarvu absoluutseks veaks ainult siis, kui ΔN on vähemalt 5 korda suurem mõõteriista passis märgitud <u>instrumentaalsest ehk riista veast ΔM.</u>

Varbsirklite, mikromeetrite ja kaaluvihtide instrumentaalsete vigade tabel on toodud § 8. Elektrimõõteriistade instrumentaalne viga määratakse nende täpsusklassi järgi, mis on kõigi kaasaegsete riistade skaalal märgitud.

Kui mõõteriista instrumentaalne viga on teadmata, siis tuleb riista veaks lugeda reeglina <u>nominaalne viga</u> $\Delta M'$, mis võrdub poolega mõõteriista skaala vähima jaotise väärtusest (jaotise hinnast). Mõõteriistade skaalad valmistatakse tavaliselt nii, et nominaalne viga on ligikaudu võrdne tegeliku instrumentaalse veaga. Kulunud mõõteriistade korral võib instrumentaalne viga osutuda nominaalsest veast märksa suuremaks, mistõttu neid võib kasutada ainult siis, kui vastav riist on eelnevalt kontrollitud täpsema mõõteriista abil. Tehastes, ülikoolide laboratooriumides jne. teostatakse aeg-ajalt kõigi mõõteriistade kohustuslikku riiklikku kontrolli, mille korral mõõdetakse kõigi mõõteriistade instrumentaalseid vigu ning praagitakse välja kõlbmatud riistad, mille viga ületab lubatud normi.

<u>Kui ΔN ei ole 5 korda suurem instrumentaalsest veast ΔM, siis tuleb mõõtarvu absoluutseks veaks lugeda aritmeetilise keskmise vea ning instrumentaalse vea summa $\Delta N + \Delta M$.</u>

Korduvatel mõõtmistel aritmeetilise keskmise absoluutse vea ülemmäär ΔN liitub instrumentaalse veaga, mis võib esineda <u>igal mõõtmisel</u> ülimalt kuni $+\Delta M$ või $-\Delta M$. Seetõttu on äärmistel juhtudel mõõtarvu absoluutse vea ülemmääraks $+(\Delta N + \Delta M)$ või $-(\Delta N + \Delta M)$.

Kui mõõtmiste käigus selgub, et üksikmõõtmiste <u>mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes on väiksemad kui instrumentaalne viga</u>, siis ei ole vaja aritmeetilise keskmise viga määrata, vaid <u>mõõtarvu absoluutseks veaks loetakse instrumentaalne viga ΔM.</u>

Selgitame allpool mõõtarvu vea määramist näitega.

Metallvõlli diameeter mõõdeti mikromeetri abil, mille ühe jaotise väärtus on 0,01 mm. Instrumentaalne viga on passi järgi $\Delta M = 0{,}004$ mm. Selleks et teostada mõõtmisi instrumentaalsele veale vastava täpsusega, peame lugemi võtmisel hindama ka jaotiste kümnendikosi. Üksikmõõtmiste mõõtarvud märgime järgnevasse tabelisse ühte veergu. Järgmisse veergu märgime hälbed vähima mõõtarvu suhtes $\delta.10^3$, mis hõlbustab aritmeetilise keskmise arvutamist. Järgnevatesse veergudesse märgime hälbed aritmeetilise keskmise suhtes $\Delta.10^3$ ja nende ruudud $\Delta^2.10^6$. Kõrvalveergudes kasutame viimase kümnendkoha ühikuid selleks, et mitte alati ülearuseid nulle välja kirjutada.

Mõõtmise nr.	D, mm	$\delta.10^3$	$\Delta.10^3$	$\Delta^2.10^6$
1	21,433	11	-2	4
2	21,424	2	+7	49
3	21,430	8	+1	1
4	21,429	7	+2	4
5	21,440	18	-9	81
6	21,435	13	-4	16
7	21,422	0	+9	81
8	21,435	13	-4	16
9	21,428	6	+3	9
10	21,431	9	0	0
	$N \simeq$ 21,431	87	$\sum\Delta^+ = +22$ $\sum\Delta^- = -19$	261

Vähima mõõtarvu 21,422 suhtes on hälvete summa $\sum \delta \cdot 10^{3} = 87.10^{-3}$. Aritmeetiline keskmine on valemi (7) põhjal

$$N = 21{,}422 + \frac{87.10^{-3}}{10} \simeq 21{,}431 \text{ mm.}$$

Aritmeetilise keskmise võtame sama arvu kohtadega peale koma nagu mõõtarvud.

Hälvete ruutude summa aritmeetilise keskmise suhtes

$$\sum (\Delta N_1)^2 = 261.10^{-6}.$$

Keskmine ruutviga on valemi (9) põhjal

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{261.10^{-6}}{10.9}} = \frac{10^{-3}}{3}\sqrt{26{,}1} = \frac{10^{-3}.5{,}1}{3} \simeq 0{,}0017 \text{ mm.}$$

Aritmeetilise keskmise vea ülemmäära leiame valemi (12) abil

$$\Delta N = 3 \,.\, 0{,}0017 \text{ mm} = 0{,}0051 \text{ mm} \simeq 0{,}006 \text{ mm.}$$

Mõõtarvu vea leiame järgmiselt:

$$\Delta D = \Delta N + \Delta M = 0{,}006 + 0{,}004 = 0{,}01 \text{ mm.}$$

Relatiivne viga $E_D = \frac{0{,}01}{21{,}43} = 0{,}00047 \simeq 0{,}0005 = 0{,}05\%.$

Diameeter $D = (21{,}43 \pm 0{,}01)$ mm, Raadius $R = (10{,}715 \pm 0{,}005)$ mm,
$E_D = 0{,}05\%$. $E_R = 0{,}05\%$.

Viie kuni kümne mõõtmise korral võib ruutvea suurust ligikaudselt hinnata valemiga

$$\sigma_N = \frac{d}{n},$$

kus d on maksimaalse ja minimaalse mõõtarvu vahe (vaatlusriba laius).

Eelneva näite puhul $\sigma_D = \frac{18.10^{-3}}{10} = 0{,}0018$ mm.

Kui eelnevas nimetatud võlli diameetrit mõõta varbsirkliga, mille noonius võimaldab mõõta täpsusega 0,1 mm ning instrumentaalne viga on $\Delta M = 0{,}1$ mm, siis saame üksikmõõtmistel mõõtarvuks alati 21,4 mm ning juhuslike vigade arvutusel ei oleks mõtet. Mõõtmistulemus sel juhul on

$$D = (21{,}4 \pm 0{,}1) \text{ mm.}$$

§ 6. Kaudsete mõõtmistulemuste vead.

Enamikel juhtudel ei saa otseselt mõõta otsitavat suurust. Tegelikult mõõdetakse rida abisuurusi, millised on seotud otsitava suurusega vastava matemaatilise valemi kaudu. Kaudse mõõtmistulemuse viga sõltub mitte ainult otseste mõõtmistulemuste vigadest, vaid ka abisuurustega sooritatavatest matemaatilistest tehetest.

Vigade teoorias tuletatakse erinevatele matemaatilistele tehetele vastavad valemid vigade arvutamiseks.[x)]

Tabelis nr. 1 on antud rea tehete ja trigonomeetriliste suuruste leidmise puhul absoluutsed ja relatiivsed vead.

Sellest tabelist nähtub, et näiteks summa absoluutne viga võrdub liidetavate absoluutsete vigade summaga ja vahe absoluutne viga võrdub vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade summaga.

Korrutise relatiivne viga võrdub tegurite ja jagatise relatiivne viga võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

Kaudsete mõõtmistulemuste vigade leidmiseks tuleb teostada tehteid järgmises järjekorras:

1) Kõik otseste mõõtmiste mõõtarvud varustatakse kohe pärast mõõtmise teostamist vastavalt käesoleva juhendi §§ 3 ja 5 absoluutse veaga. Viie mõõtmise puhul arvutatakse keskmine absoluutne viga η, üle viie mõõtmise puhul arvutatakse ruutviga σ_N. Mõõtarvu absoluutne viga määratakse valemiga

$\Delta X = 2\eta + \Delta M$ või $\Delta X = 3\sigma_N + \Delta M$.

2) Arvutatakse vastavalt matemaatilisele valemile lõppresultaat U, paigutades valemisse otseste mõõtmiste mõõtarvud..

x) Vt. 1) "Физический практикум" под ред.проф.В.И.Ивероновой,введение.Гостехиздат,Москва I953.2) К.П.Яковлев. "Математическая обработка результатов измерений".Гостехиздат,Москва I950.

Tabel nr.1

Matemaatiline tehe	Absoluutne viga	Relatiivne viga
$N = A + B + C$	$\Delta N = (\Delta A + \Delta B + \Delta C)$	$E_N = \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{A + B + C}$
$N = A - B$	$\Delta N = (\Delta A + \Delta B)$	$E_N = \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$
$N = A.B$	$\Delta N = (A.\Delta B + B.\Delta A)$	$E_N = (\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})$
$N = \frac{A}{B}$	$\Delta N = \frac{B.\Delta A + A.\Delta B}{B^2}$	$E_N = (\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B})$
$N = A^n$	$\Delta N = n \cdot A^{n-1} \cdot \Delta A$	$E_N = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$
$N = \sqrt[n]{A}$	$\Delta N = \frac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta A$	$E_N = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
$N = \sin A$	$\Delta N = \cos A.\Delta A$	$E_N = \cot A.\Delta A$
$N = \cos A$	$\Delta N = \sin A.\Delta A$	$E_N = \tan A.\Delta A$
$N = \tan A$	$\Delta N = \frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$E_N = \frac{2.\Delta A}{\sin 2A}$
$N = \cot A$	$\Delta N = \frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$E_N = \frac{2.\Delta A}{\sin 2A}$

vud. Sealjuures tuleb tingimata kasutada § 4 reegleid (1) kuni (5) ja mitte kulutada aega 7- või 10-kohaliste arvude korrutamisega, kui kehtivateks numbriteks on esimesed 2 või 3 numbrit.

Lisaks sellele on soovitav valemis iga arvu järele kirjutada mõõtühik ja enne aritmeetiliste tehete sooritamist kontrollida vastuse mõõtühikut.

Pärast lõppresultaadi leidmist on soovitav kontrollida tema suurusjärku, s.o. kirjutada ta kujul $k.10^n$, kus k on ühekohaline arv ja n on täisarv. Selleks tuleb iga valemis esinev arv ümardada ühe või ülimalt kahe kehtiva kohani, sooritada vastavad tehted ja võrrelda tulemusi.

Selle punkti reeglite mittearvestamisel võib arvutamistel kulutada täiesti tarbetult vaeva ja aega.

3) Leitakse matemaatilises valemis esineva summa või vahe <u>absoluutne viga</u>, mis on liidetavate või vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade summa.

4) <u>Järgnevalt arvutatakse lõppresultaadi relatiivne viga</u>. Olgu punkt 2 juhtnööride kohaselt arvutatud lõppresultaat U seotud otseselt mõõdetud suurustega (või nende summade ja vahedega) A, B, C, D ... üldise valemi

$$U = \frac{A^a \cdot B^b \ldots}{C^c \cdot D^d \ldots} \qquad (14)$$

kaudu. See valem näeb ette kõikvõimalikke astendamisi, korrutamisi ja jagamisi. Vastavalt tabelile 1 on lõppresultaadi relatiivne viga tegurite relatiivsete vigade summa.

$$E_U = \frac{\Delta U}{U} = a\,\frac{\Delta A}{A} + b\,\frac{\Delta B}{B} + c\,\frac{\Delta C}{C} + \ldots \qquad (15)$$

Trigonomeetriliste funktsioonide korral esinevad valemis (15) relatiivsed vead vastavalt tabelile 1.

Valemist (15) nähtub, et lõppresultaadi relatiivse vea leidmiseks tuleb liita valemis esinevate tegurite või jagajate A, B, C ... relatiivsed vead. Kui avaldises esinev $\pi = 3{,}141593 \ldots$ või $g = 980{,}665$ cm/sek^2, siis tuleb relatiivse vea avaldises leida kõigi ülejäänud tegurite relatiivsete vigade summa S. Arv π või g tuleb võtta sellise arvu kohtadega pärast koma, et summa S ja $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ või $\frac{\Delta g}{g}$ liitmisel ja ümardamisel ei muutuks relatiivse vea esimene kehtiv number pärast nulle.

$$\pi = 3{,}1 \ , \quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}042}{3} = 0{,}014 \ ,$$

$$\pi = 3{,}14 \ , \quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}0016}{3} = 0{,}00053,$$

$$\pi = 3{,}142, \quad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}00041}{3} = 0{,}00014 \text{ jne.},$$

$$g = 981 \text{ cm/sek}^2, \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}335}{980} = 0{,}00034,$$

$$g = 980{,}7 \text{ cm/sek}^2, \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}035}{980} = 0{,}000034 \text{ jne.}$$

Eelneva tabeli asemel võib kasutada ka standard relatiivse vea väärtusi, kuigi näit. $\pi = 3{,}14$ puhul on standardviga $\frac{0{,}005}{3} = 0{,}0017$, umbes 3 korda suurem tabelis antud veast 0,00053.

Kui näiteks tegurite relatiivsete vigade summa $S = 0{,}0372$, siis võttes $\pi = 3{,}14$, leiame lõppresultaadi relatiivse vea

$$E_u = 0{,}0372 + 0{,}00053 \simeq 0{,}0377 \simeq 0{,}038,$$

s.o. selle π väärtuse puhul relatiivse vea esimene kümnendkoht ei muutu.

5) Arvutame lõppresultaadi absoluutse vea valemi (5) põhjal

$$\Delta U = U \cdot E_u \ ,$$

kus U on valemi (14) põhjal arvutatud lõppresultaat ja E on valemi (15) põhjal arvutatud lõppresultaadi relatiivne viga.

ΔU anname kahe kehtiva numbriga, seega enne korrutamist on U ja E_u kumbki ümardatud samuti kahe kehtiva numbrini.

6) Kirjutame lõppresultaadi kujul

$$u = (U \pm \Delta U) \text{ ühes mõõtühikuga},$$

$$E_u = \ldots\%,$$

kus ΔU ümardatakse ühe kehtiva numbrini ja U kuni sama järguni, milleni oli ümardatud ΔU. Vastusele kirjutame alati juurde vastava mõõtühiku (erandiks on vaid nimetusteta suhtarvud, näit. kasutegur).

Lõppresultaadi alla kirjutame ka relatiivse vea protsentides.

Kogu arvutustöö tähtsamaks eeltingimuseks on töö hoolikas ja korralik vormistamine. Arvud tuleb kirjutada korralikult ja õigesti, et vältida ühtede arvude vahetamist teistega. Liidetavad või lahutatavad arvud tuleb kirjutada üksteise alla nii, et sama järku numbrid oleksid samas püstveerus.

On soovitav kohe vormistada puhtand, nähes selles ette vastavad kohad vaatlusandmete märkimiseks ühes vigade arvutuse veergudega. Mustandite kasutamisest tuleb võimalikult loobuda, kuna andmete ümberkirjutamine puhtandisse tähendab tarbetut ajakulu.

Käesolevale juhendile on lisatud vigade arvutamise näiteid ja füüsika praktikumi tööde mõned näidiseksemplarid.

§ 7. Vigade arvutamise näiteid

Näide 1. Lenz-Joule'i soojusvalemi järgi on voolu toimel eraldunud soojushulk

$$Q = 0{,}24\ J^2\ Rt,$$

kus $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\ \frac{cal}{J}$, $R = (10{,}00 \pm 0{,}01)$,

$t = (40{,}0 \pm 0{,}1)$ sek., $I = 3{,}0$ A,

$Q = 0{,}24 \cdot 3^2 \cdot 10.40 = 864$ cal.

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta c}{c} + 2\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + 2.\frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}01}{10} + \frac{0{,}1}{40} =$$

$$= 0{,}021 + 0{,}067 + 0{,}001 + 0{,}0025 = 0{,}0915 \simeq 0{,}092.$$

$\Delta Q = 864 \cdot 0{,}092 = 79{,}5$ cal $\simeq 80$ cal,

$Q = (864 \pm 80)$ cal $\simeq (860 \pm 80)$ cal,

$E_Q = 9{,}2\% \simeq 10\%$.

Näide 2. Arvutada õõnessilindri ruumala

$$V = \pi h(R^2 - r^2),\ \text{kus}$$

kõrgus $h = (20{,}00 \pm 0{,}02)$ cm

väline raadius $R = (6{,}00 \pm 0{,}01)$ cm,

sisemine raadius $r = (2{,}00 \pm 0{,}01)$ cm.

Ruumala

$$V = 3{,}14 \cdot 20\,(6^2 - 2^2) = 3{,}14 \cdot 20 \cdot 32 = 3{,}14 \cdot 640 = 2010\ \text{cm}^3$$

Relatiivne viga

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(R^2 - r^2)}{R^2 - r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2R\cdot\Delta R + 2r\cdot\Delta r}{R^2 - r^2} +$$

$$+ \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}02}{20} + \frac{2.6.0{,}01 + 2.2.0{,}01}{6^2 - 2^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0{,}0010 + \frac{0{,}12 + 0{,}04}{32} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0{,}0010 + 0{,}0050 + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0{,}0060 + 0{,}00053 = 0{,}00653 \approx 0{,}0066$$

Absoluutne viga

$$V = 2010 \;.\; 0{,}0066 = 13{,}3 \simeq 20 \text{ cm}^3,$$

$$V = (2010 \pm 20) \text{ cm}^3,$$

$$E_V = 0{,}0066 \simeq 0{,}7\% \;.$$

§ 8. Instrumentaalsete vigade tabelid [1]

1. Varbsirklite instrumentaalsete vigade tabel

Mõõtmise piirkonnad mm	Nooniuse täpsus mm		
	0,02	0,05	0,1
	Varbsirkli instrumentaalne viga mm		
kuni 300	$\pm$ 0,2	$\pm$ 0,05	$\pm$ 0,1
üle 300 kuni 500	$\pm$ 0,03	$\pm$ 0,05	$\pm$ 0,1
" 500 " 1000	$\pm$ 0,04	$\pm$ 0,05	$\pm$ 0,1

2. Mikromeetrite instrumentaalsete vigade tabel

Mõõtmise piirkond mm		kuni 100	üle 100 kuni 150	üle 150 kuni 200
Δ M mm	0 klass	$\pm$ 0,002	$\pm$ 0,0025	$\pm$ 0,003
	1 "	$\pm$ 0,004	$\pm$ 0,005	$\pm$ 0,006
	2 "	$\pm$ 0,008	$\pm$ 0,010	$\pm$ 0,012

---

[1] Vt. kirjanduse loetelu § 9 p. 11.

3. Kaaluvihtide lubatavate vigade tabel

Vihi mass	Analüütilised	Tehnilised 1. klass	Tehnilised 2. klass	Vihi mass	Analüütilised	Tehnilised 1. klass	Tehnilised 2. klass
10kg		+100mg	+1g	2g	+0,6mg	+1mg	+4mg
5 "		+ 50 "	+500mg	1"	+0,6 "	+1 "	+4 "
2 "		+ 30 "	+300 "	500mg	±0,3 "	±0,5"	±2 "
1 "		+ 20 "	+200 "	200"	±0,3 "	±0,5"	±2 "
500g		+ 10 "	+100 "	100"	±0,3 "	±0,5"	±2 "
200"	+2 mg	+ 4 "	+ 50 "	50"	±0,3 "	±0,5"	±2 "
100"	+1 "	+ 3 "	+ 25 "	20"	±0,2 "	±0,5"	±2 "
50"	+1 "	+ 3 "	+ 20 "	10"	±0,2 "	±0,5"	±2 "
20"	+1 "	+ 2 "	+ 15 "	5"	±0,1 "	±0,5"	±1 "
10"	+0,6"	+ 2 "	+ 10 "	2"	±0,1 "	±0,2"	±0,4"
5"	+0,6"	+ 2 "	+ 6 "	1"	±0,1 "	±0,1"	±0,2"

Ratsurite vead ei tohi ületada nendega võrdsete massidega vihtidele lubatavaid vigu. Sama kaalukomplekti samanimeliste ratsurite masside vahe ei tohi ületada 0,1 mg.

§ 9. Kirjanduse loetelu vigade arvutamise kohta.

1. A. Borkvell - Tõenäosusteooria põhijooni, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn 1958.
2. G.Rägo - Kõrgem matemaatika - RK "Teaduslik Kirjandus" Tartu 1948.
3. Бронштейн И.Н. и К.А.Семендяев - Справочник по математике - Гостехиздат,Москва 1948.
4. Длужневский Г.И., С.Н.Немиров, Б.А.Садиков,Л.Ф.Суходольская - Лабораторные работы по физике. -Министерство высшего образования СССР,Методическое Управление - Гос.Изд."Советская Наука" Москва 1958.
5. Гуткин А.М. и И.П.Федорова - Погрешности при физических измерениях - Московский ордена Ленина Энергетический Институт имени В.М.Молотова, Москва 1956.
6. Под ред.В.И.Ивероновой Физический практикум.Гостехиздат,Москва 1953.
7. Маликов С.Ф. Введение в технику измерений.Комитет по делам мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР - Гос. Научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва 1952.
8. Романовский - Применения математической статистики в опытном деле - Гостехиздат 1947.
9. Талалаева Е.В. О вычислении ошибок измерений - Министерство высшего образования СССР - Изд.Московского Университета 1957.
10. Яковлев К.П. Математическая обработка результатов измерений.Гостехиздат,Москва 1950.

II. Комитет стандартов мер и измерительных приборов при Совете Министров Союза ССР

Инструкция I38-57 по поверке штангенциркулей-Москва 1958.

Сборник инструкции I35-57, I36-57, I37-57 по поверке микрометров - Москва I958.

Инструкция I2-39 для поверки гирь (мер массы), подлежащих обязательной поверке, Москва 1953.

1. näidistöö

TRÜ ÜLDFÜÜSIKA KATEEDER

Praktilise töö **aruanne**

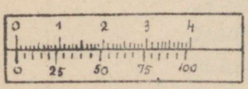
nr. 10......

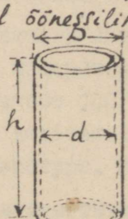
Nimi ja eesnimi: Lõo Merike...	Matr. nr.: 59612	Töö tehtud: "21." märtsil...1960.a.
Teadusk., osakond: Arstiteaduskond stomatoloogia..	Kursus: I.	Aruanne esitatud: "28.". märtsil...1960.a.
Praktikumi juhendaja: ass. E. Palmre.......	Rühm: III..	Kontrollinud:..............Hinne:.....
TÖÖ PEALKIRI: N26 ja 27	Mõõtmisi varbsirkliga ja mikromeetriga	
Katsetatavad esemed: a) Mõõtmisel varbsirkliga õõnessilinder. b) Mõõtmisel mikromeetriga traadikera.	Kasutatud riistade nimetused, nr.nr. ja andmed: Varbsirkel ШЦ nr. 8 243 555 Nooniuse täpsus 0,05 mm Skaala vähim jaotis 1 mm Mõõduriista viga ±0,05 mm Nokkade kaugus 10 mm " — " — viga ±0,02 mm	Mikromeeter MK-25 nr. Ш-1899 Mõõtepiirkond 0-25 mm Mõõduriista viga ±0,004 mm Ringskaala jaotiste vahele vastav kruvikäigu kõrgus nn. jaotise hind 0,01 mm

KATSEKORRALDUSE SKEEM , LÜLITUSSKEEM

Töö nr. 26 - Mõõtmisi varbsirkliga

Määrata varbsirkli abil õõnessilindri massiivse osa ruumala ja erikaal.





$$\frac{D}{2} = R$$

$$\frac{d}{2} = r$$

Varbsirkliks on kahe ristlüstuga nn. nokkadega varustatud mõõtastmik. Astmiku kõrval on liikuv abiastmik, nn. noonius, mis võimaldab astmiku jaotiste murdosade lugemist. Nokkade nihutamisel teineteise vastu langeb nooniuse nullkriips ühte astmiku nullkriipsuga, seetõttu langeb ära nulltäpi parandus. Nooniuse 20-ne jaotise pikkuseks on astmikul 39mm, seega kahe naaberkriipsu kaugus on $\frac{39}{20} = 1{,}95$ mm. Nooniuse täpsus, s.o. astmiku vastava jaotise pikkuse 2mm ja nooniuse jaotise pikkuse 1,95mm vahe on 2mm − 1,95mm = 0,05mm.

TRÜ Rotaprint 1959. T.220.10.000.

Kui nooniuse 1. kriips ühtib astmiku mingi kriipsuga, siis on nooniuse ja astmiku nullkriipsude ja sega ka nokkade kaugus 0,05 mm, kui nooniuse 2. kriips ühtib astmiku kriipsuga, siis on nokkade kaugus $2 \times 0,05 = 0,10$ mm. jne. Nooniusele on märgitud iga 5. kriipsu järele millimeetri sajandike mõõtarvud 25, 50, 75 ja 100. Sisemise diameetri mõõtmisel liidan varbsirkli lugemile nokkade kauguse 10 mm.

Silindri mõõtarvud

Jrk. nr.	Väline diameeter		Sisemine diam.		Kõrgus	
	ϕD mm	$\delta \cdot 10^2$	ϕd mm	$\delta \cdot 10^2$	h mm	$\delta\, 10^2$
1	23,75	-	21,90	5	29,05	-
2	23,80	5	21,85	-	29,05	-
3	23,80	5	21,90	5	29,10	5
4	23,80	5	21,85	-	29,05	-
5	23,75	-	21,85	-	29,05	-
6	23,75	-	21,85	-	29,10	5
7	23,75	-	21,90	5	29,05	-
8	23,75	-	21,90	5	29,05	-
9	23,75	-	21,90	5	29,05	-
10	23,80	5	21,85	-	29,10	5
Aritm. keskmine	23,77	20:10 = 2	21,88	25:10 = 2,5 ≈ 3	29,07	15:10 = 1,5 ≈ 2

$D = 23,75 + 0,02 = 23,77$	$d = 21,85 + 0,03 = 21,88$	$h = 29,05 + 0,02 = 29,07$
$D = (23,77 \pm 0,05)$ mm	$d = (21,88 \pm 0,07)$ mm	$h = (29,07 \pm 0,05)$ mm
$R = (11,89 \pm 0,03)$ mm	$r = (10,94 \pm 0,04)$ mm	

Mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes on välise diameetri mõõtmisel vastavalt +0,02 mm, -0,03 mm; -0,03 mm jne. Need on väiksemad kui varbsirkli viga 0,05 mm. Seetõttu võtame aritmeetilise keskmise veaks mõõduriista vea 0,05 mm, millele sisemise diameetri mõõtmisel liidame nokkade vea 0,02 mm. Raadiuse viga on 2 korda väiksem.

Silindri massiivse osa ruumala $V = \pi h (R^2 - r^2)$;

$$V = 3,14 \cdot 29,07 (11,89^2 - 10,94^2) = 91,280 (141,37 - 119,68) =$$

$$= 91,280 \cdot 21,69 = 1979,9 \text{ mm}^3.\ ^{1)}$$

Ligikaudne kontroll: $V = 3 \cdot 29 (12^2 - 11^2) \doteq 87 (144 - 121) = 87 \cdot 23 = 2001 \text{ mm}^3$.

---

1) Lähteandmetes on h, R ja r kehtivate numbrite arv 4, seepärast säilitame vaheresultaatides üks number rohkem, s.o. 5 numbrit. Arvu π kohtade arvu näitab vigadearvutus.

Ruumala relatiivne viga

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(R^2-r^2)}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2R\Delta R + 2r\Delta r}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} ;$$

$$E_v = \frac{0,05}{29} + \frac{2\cdot 12\cdot 0,03 + 2\cdot 11\cdot 0,04}{21} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0,0018 + \frac{1,60}{21} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0,0018 + 0,08 + 0,00053 = 0,08233 \simeq 0,083 \quad {}^{1)}$$

Ruumala absoluutne viga

$$\Delta V = V \cdot E_v = 20\cdot 10^2 \cdot 0,083 = 166 \simeq 170 \text{ mm}^3$$

$$V = (1980 \pm 170) \text{ mm}^3 = (1,980 \pm 0,17) \text{ cm}^3 \quad {}^{2)}$$

$$E_v = 8,3\% \simeq 9\%$$

Silindri kaal tehnilistel kaaludel (täpsus 0,01 G)

$$P = (17,60 \pm 0,005)\ G.$$

Silindri erikaal $\ell = \frac{P}{V}$; $\ell = \frac{17,60}{1,98} = 8,89\ \frac{G}{cm^3}$.

Erikaalu relatiivne viga

$$E_\ell = \frac{0,005}{17} + \frac{0,17}{1,98} = 0,0003 + 0,086 \simeq 0,087.$$

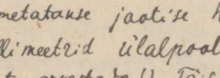
Erikaalu absoluutne viga

$$\Delta\ell = 8,9 \cdot 0,087 = 0,7743 \simeq 0,8,$$

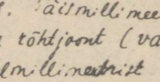
$$\ell = (8,9 \pm 0,8)\ \frac{G}{cm^3}; \quad E_\ell = 8,7\% \simeq 9\%.$$

2. Töö nr. 27. Mõõtmisi mikromeetriga

Arvutada isolatsioonita valgevaskse traadikera ($\ell = 8,4\ \frac{G}{cm^3}$) traadi pikkus.



Traat



Mikromeetri lugem
$3,5 + 0,440 = 3,940$ mm

Mikromeetriks on klambris edasi-tagasi liikuv kruvi. Kruvikäigu kõrgus on 0,5 mm, millele vastab trumli skaalal 50 jaotist. Pööramisel 1 jaotise võrra nihkub kruvi edasi $\frac{1}{50}\cdot 0,5 = 0,01$ mm võrra, mida nimetatakse jaotise hinnaks. Täismillimeetrid loeme allpool, poolmillimeetrid ülalpool skaala tõhtjoont (väike püstkriips, mida tingimata arvestada!). Täis- või poolmillimeetrist üle ulatuva osa loeme trumlilt. Kruvi ja klambri kokkupuutel nihkub trumli nullpunkt kõrgemale põhiskaala nulljoonest, seega nullpunkti parandus $\alpha > 0$.

---

1) Arvu π relatiivse vea $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ võtame selliste kohtade arvuga pärast koma, et selle liitmisel ei muutuks relatiivse vea esimene kehtiv number pärast nulle. §6 p3. tabeli kohaselt $\frac{\Delta\pi}{\pi} = 0,00053$ ja vastavalt $\pi = 3,14$

2) Absoluutse vea kirjutame 2 kehtiva numbriga, kuna see on vahepealne resultaat (arvutatakse veel erikaal).

Jrk nr.	Nullpunkt mm	$\delta \cdot 10^{2}$	Traadi diam. ϕ D mm	$\delta \cdot 10^{3}$	$\Delta \cdot 10^{3}$	$\Delta^2 10^{6}$
1	−0,007	−	0,290	5	+6	36
2	7	−	,297	12	−1	1
3	7	−	,307	22	−11	121
4	7	−	,295	10	+1	1
5	7	−	,292	7	+4	16
6			,303	18	−7	49
7			,296	11	0	0
8			,293	8	+3	9
9			,285	0	+11	121
10			,299	14	−3	9
Aritm. keskm.	−0,007		0,296	107	+25 −22	363

Diameeter $D = 0,285 + \frac{107 \cdot 10^{-3}}{10} =$
$= 0,285 + 0,011 = 0,296$ mm.

Diameeter ühes nulltäpi parandusega
$D = 0,296 - (-0,007) = 0,303$ mm.

Hälbed aritmeetilise keskmise suhtes ulatuvad kuni 0,01 mm ja ületavad riista vea $\Delta M = 0,004$ mm. Seetõttu arvutame aritmeetilise keskmise ruutvea

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{363 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 9}} = \frac{10^{-3}}{3} \cdot \sqrt{36,3} = 0,002 \text{mm}$$

Diameetri absoluutne viga

$$\Delta D = 3\sigma + \Delta M = 3 \cdot 0,002 + 0,004 = 0,010 \text{mm}$$

Diameeter

$$D = (0,303 \pm 0,010) \text{mm} = (0,0303 \pm 0,0010) \text{cm}.$$

Traadikera kaal tehnilistel kaaludel $P = (3,82 \pm 0,005)$ G.

Kuna traadi ruumala $\frac{\pi D^2 l}{4}$ korrutatud erikaaluga e annab kaalu P, siis $\frac{\pi D^2 l e}{4} = P$, kust traadi pikkus $l = \frac{4P}{\pi D^2 e}$

$$l = \frac{4 \cdot 3,82 \text{ G}}{3,14 \cdot (30,3 \cdot 10^{-3})^2 \text{cm}^2 \, 8,4 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}} = \frac{3,82}{3,14 \cdot 918 \cdot 10^{-6} \, 2,1} \text{cm} = \frac{3,82 \cdot 10^{6}}{288 \cdot 10 \cdot 2,1} \text{cm} =$$

$$= \frac{3,82 \cdot 10^{6}}{605 \cdot 10} \text{cm} = 631 \text{ cm}.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta P}{P} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta \pi}{\pi} = \frac{0,005}{3,8} + 2\frac{0,0010}{0,03} + \frac{0,05}{8,4} + \frac{\Delta \pi}{\pi} =$$

$$= 0,0013 + 0,07 + 0,006 + \frac{\Delta \pi}{\pi} = 0,0773 + 0,00053 = 0,078$$

Absoluutne viga $\Delta l = 64 \cdot 10 \cdot 0,078 = 50$ cm. 1)

Traadi pikkus $l = (631 \pm 50)\text{cm} \simeq (630 \pm 50)\text{cm}$, 2)

$$E_l = 0,078 \simeq 8\%$$

---

1) Vea arvutamisel arv 631 ümardatakse üles kahe kehtiva koha peale, s.o. 64.10

2) Lõppresultaat 631 ümardatakse alla 630 peale.

2. näidistöö

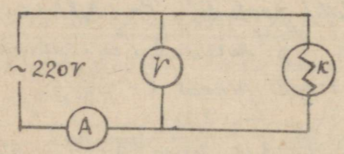
TRÜ ÜLDFÜÜSIKA KATEEDER

Praktilise töö aruanne

nr. 7

Nimi ja eesnimi: Heinla Väino	Matr. nr.: 60721	Töö tehtud: "8." märtsil 1960.a.
Teadusk., osakond: Matem.-loodus. bioloogia	Kursus: I	Aruanne esitatud: "15." märtsil 1960.a.
Praktikumi juhendaja: ass. Ü. Rannaste	Rühm: II	Kontrollinud: .... Hinne: .....
TÖÖ PEALKIRI: N93	Elektrienergia hulga ja kasuteguri määramine.	
Katsetatavad esemed: Elektrikeetja.	Kasutatud riistade nimetused, nr.nr. ja andmed: 1) Elektrikeetja inv. nr. 61273. 2) Ampermeeter nr. 2764, täpsusklass 2,5, skaala 5A. 3) Voltmeeter nr. 235A " — " 2,5, " — " 250 V 4) Mensuur 500 cm^3, väikseim jaotiste vahe 25 cm^3. 5) Termomeeter, jaotised iga kraadi järgi. 6) Sekundomeeter.	

KATSEKORRALDUSE SKEEM , LÜLITUSSKEEM



A - ampermeeter
V - voltmeeter
K - elektrikeetja

1. Töö ülesanne

Määrata vee soojendamisel elektrikeetjaga:

a) Kogu tarvitatud elektrienergia ja selle hind, kui 1 kWh maksab 40 kop.

b) Keedunõus oleva vee temperatuuri tõstmiseks kulunud elektrienergia (kasulik töö).

c) Kulunud ja tarvitatud elektrienergia suhe, s.o. kasutegur.

TRÜ Rotaprint 1959. T.220.10.000.

2. Töö käik

a) Kogu tarvitatud elektrienergia kWh-des

$$A = Nt = 0{,}001\ UJt,$$

kus N - võimsus kW-es, U-pinge voltides (0,001U kilovoltides), J-voolutugevus ampriites, t-aeg tundides.

Sama elektrienergia kalorites on Joule-Lenzi seaduse põhjal

$$Q = cUJt,$$

kus U-pinge voltides, J-voolutugevus ampriites, t-aeg sekundites, $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\ \frac{cal}{J}$ on töö termiline ekvivalent.

b) Vee soojendamiseks kulunud energia arvutan valemi järgi

$$q = c_1 \cdot m\ (\tau_2 - \tau_1)$$

kus c_1 - vee erisoojus, m - vee mass grammides, τ_1 - vee algtemperatuur ja τ_2 - vee lõpptemperatuur.

c) Kasutegur

$$\eta = \frac{q \cdot 100}{Q}\ \%$$

d) Töö toimetan järjekorras:

1) mõõdan mensuuriga keedunõusse 750 cm^3 vett;

2) koostan vooluahela;

3) määran vee algtemperatuuri elektrikeetjas ja voolu lülitamise hetkel käivitan sekundomeetri;

4) katse kestel jälgin ampermeetri ja voltmeetri lugemeid ning registreerin nad iga minuti järel;

5) katset jätkan, kuni vee temperatuur tõuseb 80-90 kraadini, kogu katse kestel vett korralikult segades. Siis katkestan voolu, registreerin sekundomeetri lugemi ja temperatuuri keetjas;

6). Vaatlus- ja arvutustulemused märgin tabelisse

U	217	215	216	216	217	217	217	217	216	216	$215+1=216\ V$
δ	2	0	1	1	2	2	2	2	1	1	$\frac{14}{10}=1,4\simeq 1$
I	2,70	2,70	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,69	2,69	$2,69+0=2,69\ A$
$\delta . 10^2$	1	1	–	–	–	–	1	1	–	–	$\frac{4.10^{-2}}{10}=0,004$

Voltmeetri lugemi viga (klass 2,5, skaala 250 V) $0,025 \cdot 250 = 6,25 \simeq 7\ V$.
Ampermeetri " – " (" – " 2,5, " – " 5 A) $0,025 \cdot 5 = 0,125 \simeq 0,13\ A$.

Tabelist on näha, et voltmeetri ja ampermeetri lugemite hälbed aritmeetilise keskmise suhtes 0,6 V vst. 0,004 A on palju väiksemad, kui üksiklugemite vead nn. riistade vead 7 V ja 0,13 A. Seetõttu tuleb võtta ka aritmeetilise keskmise veaks riista viga, s.o. pinge $U = (216 \pm 7)\ V$ ja voolutugevus $I = (2,69 \pm 0,13)\ A$.

Vee soojendamise aeg $t = 8m\ 30s = 0,125\ h = 510\ sek \pm 2\ sek$.
Vee hulk keet-jas $m = (750 \pm 5)\ g$,
" algtemperatuur $\tau_1 = (19,1 \pm 0,1)°\ C$,
" lõpptemperatuur $\tau_2 = (86,2 \pm 0,1)°\ C$,
" temperatuuri tõus $\tau_2 - \tau_1 = 86,2 - 19,1 = 67,1°C$ veaga $0,1° + 0,1° = 0,2°\ C$.

Kogu tarvitatud elektrienergia

$$A = 0,001 \cdot 216\ V \cdot 2,69\ A \cdot 0,125\ h = 0,5810 \cdot 0,125\ kWh = 0,0726\ kWh.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{7}{216} + \frac{0,13}{2,69} + \frac{0,0005}{0,125} = 0,033 + 0,049 + 0,004 = 0,086.$$

Absoluutne viga

$$\Delta A = 0{,}073 \cdot 0{,}086 \approx 0{,}0063 \text{ kWh},$$

$$\underline{A = (0{,}073 \pm 0{,}007) \text{ kWh}}.$$

Elektrienergia hind

$$H = 0{,}073 \cdot 40 = 2{,}92 \simeq 3 \text{ kop.}$$

Sama elektrienergia kalorites

$$Q = 0{,}24 \frac{cal}{J} 216 \, V \cdot 2{,}69 \, A \cdot 510 \, sek =$$

$$= 51{,}8 \cdot 1370 \frac{cal}{J} W sek = 70970 \frac{cal}{J} J = 71 \cdot 10^3 \, cal.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + \frac{7}{216} + \frac{0{,}13}{2{,}69} + \frac{2}{510} = 0{,}021 + 0{,}033 + 0{,}049 + 0{,}004$$

$$= 0{,}107 \simeq 0{,}11.$$

Absoluutne viga $\Delta Q = 71 \cdot 10^3 \cdot 0{,}11 = 781 \simeq 800$ cal.

$$\underline{Q = (71\,000 \pm 800) \text{ cal}}.$$

Vee soojendamiseks kulunud soojushulk

$$q = 1 \frac{cal}{g\,kr} \cdot 750 g \cdot 67{,}1 \, kr = 503 \cdot 10^2 \, cal. \quad [1]$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta q}{q} = 0{,}0009 + \frac{5}{750} + \frac{0{,}2}{67} = 0{,}0009 + 0{,}0067 + 0{,}003$$

$$= 0{,}0106 \approx 0{,}011.$$

Absoluutne viga

$$\Delta q = 51 \cdot 10^3 \cdot 0{,}011 = 561 \, cal \simeq 600 \, cal$$

$$q = \underline{(50\,300 \pm 600) \text{ cal}}.$$

Kasutegur $\eta = \dfrac{50\,300}{71\,000} = 0{,}71 = 71$ %.

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta q}{q} = 0{,}11 + 0{,}011 = 0{,}121.$$

Absoluutne viga $\Delta\eta = 0{,}71 \cdot 0{,}121 = 0{,}086 \simeq 0{,}09$.

Kasutegur $\underline{\eta = 0{,}71 \pm 0{,}09 = (71 \pm 9)\ \%}$

$$\underline{E_\eta = 0{,}121 \simeq 13\ \%}.$$

---

[1] Vee keskmine erisoojus 20–90°C on tabeli põhjal (В.И. Иверонова, Физический практикум, 1953 lk. 594) $c_1 = 0{,}9991 \frac{cal}{g\,kr}$. Selle arvu asendamisel 1-ga, teeme absoludse vea $\Delta c_1 = 0{,}0009 \frac{cal}{g\,kr}$, seega relatiivne viga $\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{0{,}0009}{0{,}999} \simeq 0{,}0009$.

Vee keskmiste erisoojuste tabel.

Temperatuuri vahemik.	Erisoojus c_1 $\frac{cal}{g.kr}$
20°-70°C	0,9981
20°-75°C	0,9984
20°-80°C	0,9986
20°-85°C	0,9988
20°-90°C	0,9991
20°-95°C	0,9994
20°-100°C	0,9997

RBL. 0.75