T A R T U   R I I K L I K   Ü L I K O O L

Arvutusmatemaatika kateeder

KATETE MEETOD MATEMAATILISE PLANEERIMISE ÜLESANDE LAHENDAMISEKS

Diplomitöö

Töö teostaja: Andres Kerge
Matemaatikateaduskonna
V kursuse üliõpilane

Töö juhendaja: dots. L. Kivistik

Tartu 1972

Sissejuhatus

Senised matemaatilise planeerimise meetodid baseeruvad kõik algebraliste võrrandsüsteemide lahendamisel .Käesoleva diplomitöö eesmärgiks oli luua meetod matemaatilise planeerimise ülesande lahendamiseks, mis rakendaks matemaatilise analüüsi tulemusi. Sellise käsitluse eeliseks on matemaatilise analüüsi meetodite suurem võimsus.

Diplomitöö lähtematerjaliks on V.V. Leonovi artikkel "Метод покрытий для отыскания глобального максимума функций от многих переменных" ([1], lk.41 - 52). Töö esimeses peatükis ongi esitatud V.V. Leonovi üldine katete meetod veidi parandatud ning üldistatud kujul koos meetodi geomeetrilise interpretatsiooniga. Võrreldes V.V.Leonovi nimetatud artikliga on punkti f-ümbruse mõiste üldistatud tõkestatud piirkonna f-ümbruse mõisteni.

Diplomitöö teises peatükis on tuletatud meetodid funktsiooni maksimiseerimiseks nii lõigul (ühe muutuja funktsiooni korral) kui ka tõkestatud kumeras piirkonnas (mitme muutuja funktsiooni korral), kusjuures maksimiseeritav on selline analüütiline funktsioon, mille väärtus on lõplik ja mille 1.järgu osatuletiste (tuletise) väärtused on lõplikud lubatavate lahendite piirkonnas.

Kuna toodud meetod on arvutuste poolest küllaltki mahukas, siis on selle rakendamine mõeldav vaid elektronarvuti abil.

I. Katete meetodi üldine teooria.

1. Abitulemusi.

Olgu funktsioon $f(\xi)$ pidevalt diferentseeruv n muutuja funktsioon piirkonnas $\tilde{X}$ ja hulk $X \subseteq \tilde{X}$ kumer tõkestatud piirkond. Vaatame ülesannet: leida täpsusega $\varepsilon_0 > 0$

$$\hat{f}(X) = \sup_{\xi \in X} f(\xi)$$

ja punkt $\xi^* \in X$, nii et kehtiks võrratus

$$f(\xi^*) \geq \hat{f}(X) - \varepsilon_0 .$$

V.V. Leonov on sissejuhatuses mainitud artiklis ([1] lk.42) lähtunud valemist

$$f(\xi) = f(\xi_0) + \int_0^{|\xi - \xi_0|} \operatorname{grad} f(\xi_0 + te) \cdot e \, dt , \qquad (1)$$

kus

$$e = \frac{\xi - \xi_0}{|\xi - \xi_0|} ,$$

milles $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $\xi_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$.

Selle valemi abil saab mingis kindlas punktis ξ_0 siduda funktsiooni $f(\xi)$ hulga X mingi piirkonnaga S, nii et $\xi_0 \in S$. Seda näitame edaspidi, nüüd aga näitame valemi (1) kehtivuse.

Lähtume Newton - Leibnitzi valemist:

$$\int_0^{\alpha} f'(t) \, dt = f(\alpha) - f(0) .$$

Võtame algfunktsiooniks $f(t)$ mitme muutuja funktsiooni $f(\xi)$ kohal $\xi_0 + te$, kus $e = (e_1, \ldots, e_n)$ tingimusel

$$|e| = \sqrt{e_1^2 + \ldots + e_n^2} = 1 .$$

Leiame

$$\frac{d}{dt} f(\xi_0 + te) = \frac{d}{dt} f(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n) =$$

$$= \frac{\partial f(\xi_0 + te)}{\partial x_1} e_1 + \ldots + \frac{\partial f(\xi_0 + te)}{\partial x_n} e_n =$$

$$= \operatorname{grad} f(\xi_0 + te)\cdot e \ .$$

Seega

$$\int_0^{\alpha} \operatorname{grad} f(\xi_0 + te)\cdot e\, dt = \int_0^{\alpha} \frac{d}{dt} f(\xi_0 + te)\, dt =$$
$$= f(\xi_0 + \alpha e) - f(\xi_0) \ . \qquad (2)$$

Vaatame ülemist raja α muutuvana ja tähistades

$$\xi_0 + \alpha e = \xi$$

saame, et

$$\alpha = |\xi - \xi_0| \ .$$

Asendades α väärtuse avaldisse (2) ja avaldades $f(\xi)$ saamegi valemi (1).

Oletame nüüd, et oleme leidnud küllalt lihtsa funktsiooni $\varphi(\xi, t, e)$, mis rahuldab piirkonnas

$$R = \{(\xi, t, e):\ \xi \in \tilde{X},\ t \geq 0,\ |e| = 1,\ \xi + te \in \tilde{X}\}$$

tingimusi:

1) $\operatorname{grad} f(\xi + te) \leq \varphi(\xi, t, e)$,

2) $\varphi(\xi, t, e) \leq L < \infty$.

Selliste funktsioonide hulga, mis rahuldab tingimusi 1) ja 2), tähistame $T(\tilde{X})$.

Ühte tingimusi 1) ja 2) rahuldavat funktsiooni kasutame ka käesoleva töö II osas ülesande lahendusalgoritmi tuletamisel.

Defineerime nüüd hulga

$$S(\xi_0, \rho) = X \cap \{\xi_0 + te:\ \int_0^t \varphi(\xi, \tau, e)\, d\tau \leq \rho\ ,\ (\xi_0, t, e) \in R\},$$

mis kujutab endast punkti ξ_0 teatavat liiki ümbrust, mida seetõttu võiks nimetada punkti ξ_0 f-ümbruseks majorantfunktsiooni $\varphi(\xi, t, e)$ korral (ehk lühidalt punkti ξ_0 f-ümbruseks).

Vaatleme nüüd f-ümbruste mõningaid omadusi.

Omadus 1.
Kui $\xi_0 \in \mathfrak{X} \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}$, siis $\hat{f}(S(\xi_0, \varrho)) \leq f(\xi_0) + \varrho$.

See omadus järeldub otseselt valemist (1), tingimusest 1) ja punkti ξ_0 f - ümbruse definitsioonist:

$$\hat{f}(S(\xi_0,\varrho)) = \sup_{\xi \in S(\xi_0,\varrho)} f(\xi) =$$

$$= \sup_{\xi \in S(\xi_0,\varrho)} [f(\xi_0) + \int_0^{|\xi-\xi_0|} \operatorname{grad} f(\xi_0 + te) \cdot e\, dt] \leq$$

$$\leq f(\xi_0) + \sup_{\xi \in S(\xi_0,\varrho)} [\int_0^{|\xi-\xi_0|} \varphi(\xi_0, t, e)\, dt] \leq f(\xi_0) + \varrho .$$

Omadus 2.
Kui $\varphi_1(\xi, t, e) \leq \varphi_2(\xi, t, e)$, siis punkti ξ_0 f - ümbruste jooks kehtib $S_1(\xi_0, \varrho) \supseteq S_2(\xi_0, \varrho)$.

Punkti f-ümbruse definitsiooni kohaselt on hulka $S_2(\xi_0, \varrho)$ kuuluvate punktide $\xi_0 + te$ korral tingimus 1) $\varphi_1(\xi, t, e)$ kohta ammugi rahuldatud.

Omadus 3.
Iga punkti ξ_0 f - ümbrus sisaldab kera raadiusega $\frac{\varrho}{L}$ või kumerat osa sellest.

Selle omaduse tõestamisel kasutame omadust 2:

$$S(\xi_0, \varrho) = \mathfrak{X} \cap \{\xi_0 + te : \int_0^t \varphi(\xi_0, \tau, e)\, d\tau \leq \varrho,\ (\xi_0, t, e) \in R\} \supseteq$$

$$\supseteq \mathfrak{X} \cap \{\xi_0 + te : \int_0^t L\, d\tau \leq \varrho,\ (\xi_0, t, e) \in R\} =$$

$$= \mathfrak{X} \cap \{\xi_0 + te : t \leq \frac{\varrho}{L},\ (\xi_0, t, e) \in R\} =$$

$$= \mathfrak{X} \cap \{\xi : |\xi - \xi_0| \leq \frac{\varrho}{L},\ \xi \in \tilde{\mathfrak{X}}\},$$

kui tähistada $\xi = \xi_0 + te$.

Kahe kumera hulga (hulk $\mathfrak{X}$ ja kera $|\xi - \xi_0| \leq \frac{\varrho}{L}$)

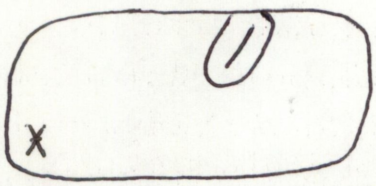
ühisosa on aga kumer hulk.

Punkti f - ümbruse mõistet saab ka üldistada.

Hüpertosandi tõkestatud piirkonna E f - ümbruseks majorantfunktsiooni $\varphi(\xi, t, e)$ korral nimetame hulka

$$S(E,\varrho) = \bigcup_{\xi \in E} S(\xi,\varrho) .$$

Näiteks kahemõõtmelisel juhul saab sellist hulka geomeetriliselt kujutada järgmiselt:



Hulgaks E on kahemõõtmelisel juhul lõik. Selle hulga f - ümbruseks on kõigi lõigu punktide f - ümbruste hulgateoreetiline summa.

Nagu on kergesti kontrollitav, jäävad punkti f-ümbruse omadused 1 ja 2 kehtima ka piirkonna korral. Omaduse 2 puhul on see ilmne, omaduses 1 kasutame aga seda, et

$$\sup_{\xi \in \bigcup_{\eta \in E} S(\eta,\varrho)} f(\xi) = \sup_{\xi \in S(\eta_0,\varrho)} f(\xi) ,$$

kus η_0 on punkt, nii et $f(\eta_0) = \hat{f}(E)$.
Omadus 1 saab siis piirkonna E korral järgmise kuju:
kui $E \subset X \subseteq \tilde{X}$, siis

$$\hat{f}(S(E,\varrho)) \leq \hat{f}(E) + \varrho .$$

Toome sisse hulga X ε-võrgu V diameetriga δ:

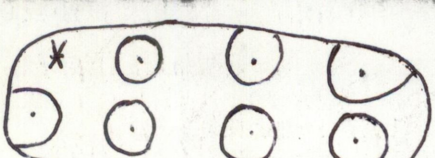
$$\delta = \max_{\xi \in V} \min_{\substack{\eta \in V \\ \eta \neq \xi}} |\xi - \eta| > 0 . \qquad (3)$$

Defineerime hulga

$$Q(a,V,\varepsilon_0) = \bigcup_{\xi \in V_t} S(\xi, a+\varepsilon_0 - f(\xi)) =$$

$$= \bigcup_{\xi \in V} (X \cap \{\xi + te : \int_0^t \varphi(\xi,\tau,e)\, d\tau \leq a + \varepsilon_0 - f(\xi)), (\xi,t,e) \in R\}).$$

Geomeetriliselt kujutab hulk $Q(a,V,\varepsilon_0)$ mingit katete süsteemi hulga X ε-võrgule V. Joonisel on punktidega tähistatud ε-võrgu V punktid. Hulga $Q(a,V,\varepsilon_0)$ moodustab ε-võrgu punktide f-ümbruste hulgateoreetiline summa.



Siin võime üldistada ka hulga $Q(a,V,\varepsilon_0)$ mõistet, lubades ε - võrgu V elementidena tõkestatud piirkondi E_i, mis asuvad hulka X lõikaval hüpertasandil, defineerides funktsiooni $f(\xi)$ väärtuseks piirkonnal E_i suuruse $\hat{f}(E_i)$. ε-võrgu diameetri mõiste (vt. valem (3)) sellest ei muutu.

Seega, üldiselt hulk $Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ on järgmine:

$$Q(\alpha, V, \varepsilon_0) = \bigcup_{E_i \in V} S(E_i, \alpha + \varepsilon_0 - \hat{f}(E_i)) ,$$

kus E_i võib olla ka ühest punktist koosnev piirkond.

Märgime siinkohal, et tõkestatud hulga ε-võrgu võib alati valida koosnevana lõplikust hulgast elementidest. Seda ε-võrgu lõplikkust eeldame alati edaspidistes arutlustes.

Tõestame nüüd hulga $Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ omaduse:

Hulga X iga lõpliku ε-võrgu V $(V \subset X \subseteq \tilde{X})$ ja konstandi α korral kehtib võrratus:

$$\hat{f}(Q(\alpha, V, \varepsilon_0)) \leq \alpha + \varepsilon_0 .$$

Piirkonna f-ümbruse omaduse 1 põhjal kehtib ε-võrgu elementide E_i korral

$$f^i = \hat{f}(S(E_i, \alpha + \varepsilon_0 - \hat{f}(E_i))) = \sup_{\xi \in S(E_i, \alpha + \varepsilon_0 - \hat{f}(E_i))} f(\xi) \leq$$

$$\leq \hat{f}(E_i) + \alpha + \varepsilon_0 - \hat{f}(E_i) = \alpha + \varepsilon_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N,$$

kus N on ε-võrgu elementide arv).

Seega

$$\hat{f}(Q(\alpha, V, \varepsilon_0)) = \sup_{\xi \in \bigcup_{i=1}^{N} S(E_i, \alpha + \varepsilon_0 - \hat{f}(E_i))} f(\xi) = \max_{1 \leq i \leq N} f^i \leq \alpha + \varepsilon_0 .$$

Sellest omadusest ilmneb ka katete meetodi idee. Kõigepealt tuleb valida hulgal X ε-võrk V ja leida selle elementidel funktsiooni väärtused. Valides $\alpha = \max_{1 \leq i \leq N} \hat{f}(E_i)$, saame eelneva omaduse põhjal, et hulka $Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ kuuluvates punktides funktsiooni $f(\xi)$ väärtus ei ületa $\alpha + \varepsilon_0$. Kuna meie eesmärgiks on leida ligikaudne lahend, siis järelikult võime piirkonna $Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ edasise vaatluse alt välja jätta, ja uurida hulka $X \setminus Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$.

Sellise katete meetodi koonduvuse näitamiseks tõestame kaks lemmat.

Lemma 1.

Kui hulk $X_0 = \bigcup_{k=1}^{M} X_k$ ja on täidetud tingimused:

1) igal hulgal X_k eksisteerib ε - võrk V_k diameetriga δ_k,
2) kehtivad võrratused:

$$\hat{f}(X_k) \leq \hat{f}(V_k) + \varepsilon_0 \quad (k = 1, \ldots, M),$$

3) eksisteerivad punktid $\eta_k \in V_k$, mis rahuldavad tingimusi:

$$f(\eta_k) = \hat{f}(V_k) \quad (k = 1, \ldots, M),$$

siis kehtib võrratus:

$$f(\eta_0) \geq \hat{f}(X_0) - \varepsilon_0,$$

kus

$$f(\eta_0) = \max_{1 \leq k \leq M} \hat{f}(V_k) .$$

Tõestus

$$\hat{f}(X_0) = \sup_{\xi \in X_0} f(\xi) = \max_{1 \leq k \leq M} \sup_{\xi \in X_k} f(\xi) = \max_{1 \leq k \leq M} \hat{f}(X_k) \leq$$
$$\leq \max_{1 \leq k \leq M} \hat{f}(V_k) + \varepsilon_0 = f(\eta_0) + \varepsilon_0 .$$

Avaldame $f(\eta_0)$:

$$f(\eta_0) \geq \hat{f}(X_0) - \varepsilon_0 .$$

Lemma 2.

Kui $X \subseteq \tilde{X}$ on tõkestatud, hulga X ε - võrgu V diameeter rahuldab tingimust $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{L}$ ja leidub punkt ξ_0, nii et $f(\xi_0) = \hat{f}(V)$, siis kehtib võrratus:

$$\hat{f}(X) \leq \hat{f}(V) + \varepsilon_0 .$$

Tõestus

Nagu eelpool öeldud, võime hulga X ε -võrgu lugeda lõplikuks:

$$V = \{E_1, \ldots, E_n\} .$$

Järgnevas tõestuses kasutame valemit (1) kohal ξ_0 ning majorantfunktsiooni tingimusi 1) ja 2).

$$\hat{f}(X) = \sup_{\xi\in X} f(\xi) \le \hat{f}(V) + \sup_{\xi\in X}[f(\xi) - \hat{f}(V)] \le$$

$$\le \hat{f}(V) + \sup_{\xi\in X}[f(\xi_0) + \int_0^{|\xi-\xi_0|} \varphi(\xi_0, t, \frac{\xi-\xi_0}{|\xi-\xi_0|})dt - \hat{f}(V)] =$$

$$= \hat{f}(V) + \sup_{\xi\in X}[\int_0^{|\xi-\xi_0|} \varphi(\xi_0, t, \frac{\xi-\xi_0}{|\xi-\xi_0|})dt] \le$$

$$\le \hat{f}(V) + \sup_{\xi\in X}[\int_0^{|\xi-\xi_0|} L\,dt] \le$$

$$\le \hat{f}(V) + \int_0^{\delta} L\,dt \le \hat{f}(V) + L\cdot\frac{\varepsilon_0}{L} = \hat{f}(V) + \varepsilon_0 ,$$

mida oligi vaja näidata.

2. Katete meetodi üldine skeem

Järgnevalt esitatav skeem on esitatud V.V. Leonovi eespool nimetatud artiklis ([1] lk. 45).

Oletame, et meil on antud hulga $\tilde{X}$ mingi alamhulkade pere K, nii et igale hulgale $X^0 \in K$ vastab mingi ε-võrk V diameetriga δ.

Olgu meil veel selline operaator Φ, mis suvalise konstandi α ja $\varepsilon_0 > 0$ korral seab igale hulgale $X^0 \in K$ ühesesse vastavusse mingi hulga $X^1 = \Phi(X^0, \alpha, \varepsilon_0) \in K$, nii et on rahuldatud tingimused:

a) $\Phi(X^0, \alpha, \varepsilon_0) \subset X^0$,

b) $X^0 \setminus \Phi(X^0, \alpha, \varepsilon_0) \subseteq Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$.

Olgu antud ka funktsioon $f(\xi) \in T(\tilde{X})$ ja $\varepsilon_0 > 0$. Katete meetod on iteratsioonimeetod, mis annab kindlate tingimuste korral lahendi lõpliku arvu sammudega. Kirjeldame selle meetodi algoritmi!

I sammul leiame alghulga $X^0 = X$ jaoks ε-võrgu V_0 ja suuruse $g_1 = \hat{f}(V_0)$ ning vastava punkti $\eta_1 \in V_0$, mille korral kehtib võrdus $f(\eta_1) = g_1$. Siis leiame hulga $Q(g_1, V_0, \varepsilon_0)$ ja rakendame hulgale X^0 operaatorit Φ, mille tulemuseks saame hulga $X^1 = \Phi(X^0, g_1, \varepsilon_0)$.

Oletame, et meil on tehtud k sammu. Meil on teada suurus g_k, punkt $\eta_k \in X^0$, nii et $g_k = f(\eta_k)$ ja hulk $X^k \in K$, kusjuures kehtib sisalduvus $Q(g_k, V_{k-1}, \varepsilon_0) \subset X^k$.

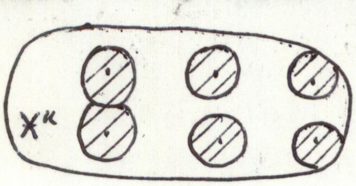
$(k+1)$-sel sammul leitakse:

1) hulga X^k ε-võrk V_k diameetriga δ_k,
2) suurus $\hat{f}(V_k)$,
3) punkt $\eta'_{k+1} \in V_k$, mis rahuldab tingimust
$$f(\eta'_{k+1}) = \hat{f}(V_k),$$
4) suurus $g_{k+1} = \max[g_k, \hat{f}(V_k)]$,
5) punkt $$\eta_{k+1} = \begin{cases} \eta_k, & \text{kui } g_{k+1} = g_k; \\ \eta'_{k+1}, & \text{kui } g_{k+1} > g_k \end{cases},$$
6) hulk $X^{k+1} = \Phi(X^k, g_{k+1}, \varepsilon_0)$.

Protsess katkeb n-ndal sammul (n sõltub lähtehulgast X^0, funktsioonist f, ε_0-st, majorantfunktsioonist φ, hulkade perest K, operaatorist Φ), kui leiab aset võrdus $X^n = Q(g_n, V_{n-1}, \varepsilon_0)$

Geomeetriliselt tähendab meetod järgmist.

Oletame, et meetodi rakendamise tulemusena on saadud hulk X^k. Leiame sellele hulgale ε-võrgu V_k, mille punktid on joonisel märgitud punktidena. Seejärel määratakse hulk $Q(g_{k+1}, V_k, \varepsilon_0)$ (joonisel on vastav hulk viirutatud).



Nüüd eraldame hulgast X^k operaatori rakendamise tulemusena võimalikult täpselt hulga $Q(g_{k+1}, V_k, \varepsilon_0)$, sest selles hulgas vastavalt hulga $Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ omadusele ei ületa funktsiooni $f(\xi)$ väärtus suurust $g_{k+1} + \varepsilon_0$. Järele jääb hulk X^{k+1}, millega teostame järgmise sammu.

Koonduvusteoreem

Kui antud $f \in T(\tilde{X})$, alamhulkade pere K, lähtehulga $X^{\circ} \in K$, $\varepsilon_{0} > 0$ ja operaatori $\Phi(X, \alpha, \varepsilon_{0})$ korral kasutatakse katete meetodi iteratsiooniprotsessi, kusjuures $\delta_{\kappa} \to 0 (\kappa \to \infty)$, siis eksisteerib selline lõplik $n = N(X^{\circ}, f, \varepsilon_{0}, \varphi, K, \Phi)$, mis rahuldab tingimust $X^{n} = Q(g_{n}, V_{n-1}, \varepsilon_{0})$ ja kehtib

$$f(\eta_{n}) \geqslant \hat{f}(X^{\circ}) - \varepsilon_{0},$$

see tähendab, et n-ndal sammul saadud $\xi(\varepsilon_{0}) = \eta_{n} \in X^{\circ}$ osutub esialgse ülesande lahendiks.

Tõestus

Hulga teisendamise operaatori tingimustest a) ja b) järeldub, et

$$X^{\kappa} = \Phi(X^{\kappa-1}, g_{\kappa}, \varepsilon_{0}) \subset X^{\kappa-1},$$

kusjuures

$$Y^{\kappa} = X^{\kappa-1} \setminus X^{\kappa} = X^{\kappa-1} \setminus \Phi(X^{\kappa-1}, g_{\kappa}, \varepsilon_{0}) \subseteq Q(g_{\kappa}, V_{\kappa-1}, \varepsilon_{0}).$$

Kuna eelduse põhjal $\delta_{\kappa} \to 0 (\kappa \to \infty)$, siis leidub selline minimaalne n, mille korral $\delta_{n} \leqslant \frac{\varepsilon_{0}}{L}$. Lemma 2 põhjal kehtib võrratus

$$f(X^{n}) \leqslant \hat{f}(V_{n}) + \varepsilon_{0}. \tag{4}$$

Ilmselt kehtib võrratus

$$\hat{f}(Z_{1}) \leqslant \hat{f}(Z_{2}),$$

kui $Z_{1} \subset Z_{2} \subseteq X$, kuna teisel juhul leitakse sup suuremast hulgast.

Kuna kehtib sisalduvus $Y^{\kappa} \subseteq Q(g_{\kappa}, V_{\kappa-1}, \varepsilon_{0})$, siis kehtib ka võrratus

$$\hat{f}(Y^{\kappa}) \leqslant \hat{f}(Q(g_{\kappa}, V_{\kappa-1}, \varepsilon_{0})) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Hulga $Q(\alpha, V, \varepsilon_{0})$ omaduse tõttu

$$\hat{f}(Q(g_{\kappa}, V_{\kappa-1}, \varepsilon_{0})) \leqslant g_{\kappa} + \varepsilon_{0} = \hat{f}(V_{\kappa-1}) + \varepsilon_{0} \quad (\kappa = 1, \ldots, n),$$

kui hulka $V_{\kappa-1}$ lisada ka punkt $\eta_{\kappa-1}$, mis võib ε-võrgu $V_{\kappa-1}$ diameetrit $\delta_{\kappa-1}$ ainult vähendada. Seega kokku saame, et

$$\hat{f}(Y^{\kappa}) \leqslant \hat{f}(V_{\kappa-1}) + \varepsilon_{0} \quad (\kappa = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Lähtehulga X^0 võime avaldada järgmiselt:

$$X^0 = X^n \cup (\bigcup_{k=1}^{n} Y^k) ,$$

kuna $X^0 = X^1 \cup Y^1,\ X^1 = X^2 \cup Y^2,\ \ldots,\ X^{n-1} = X^n \cup Y^n$.

Proovime rakendada lemmat 1. Selleks peab igal osahulgal leiduma ε-võrk, kusjuures peavad kehtima vastavad võrratused:

$$\hat{f}(Y^k) \leq \hat{f}(V_k') + \varepsilon_0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\hat{f}(X^n) \leq \hat{f}(V_n'') + \varepsilon_0 ,$$

kus V_k' $(k=1,\ldots,n)$ on liidetavate osahulkade ε-võrgud.

Hulgal X^n on olemas ε-võrk V_n diameetriga δ_n ja kehtib valem (4). Seega võime võtta $V_n'' = V_n$. Saame leida ka punkti η_{n+1}', nii et $f(\eta_{n+1}') = \hat{f}(V_n)$.

Kuna $Y^k \subset X^{k-1}$ $(k=1,\ldots,n)$, siis hulga X^{k-1} ε-võrk V_{k-1} on ε-võrguks ka hulgale $Y^k (k=1,\ldots,n)$. Kuna kehtivad ka valemid (5), siis võime võtta $V_k' = V_{k-1}$ $(k=1,\ldots,n)$. Leitud on ka punktid η_k' $(k=1,\ldots,n)$, nii et $f(\eta_k') = \hat{f}(V_{k-1})$. Seega saame lemmat rakendada, mille põhjal

$$\max_{0 \leq k \leq n} \hat{f}(V_k) \geq \hat{f}(X^0) - \varepsilon_0 .$$

Kuna me valisime alati $g_{k+1} = \max[g_k, \hat{f}(V_k)]$, siis $\max\limits_{0 \leq k \leq n} \hat{f}(V_k) = g_{n+1}$, millele vastab punkt η_{n+1}, nii et

$$f(\eta_{n+1}) = g_{n+1} .$$

Seega oleme leidnud punkti $\eta_{n+1} \in X^0$, nii et

$$f(\eta_{n+1}) \geq \hat{f}(X^0) - \varepsilon_0 .$$

Teoreem on tõestatud.

Enne konkreetsete meetodite juurde jõudmist anname veel paar juhist selle meetodi kohta:

1. Majorantfunktsioon $\varphi(\xi, t, e)$ tuleb valida sellisena, et hulgad $S(E, \rho)$ oleksid kergelt leitavad ja samal ajal tingimus 1) punktis 1 ei oleks liiga jämedalt täidetud. Näiteks pole soovitav võtta $\varphi(\xi, t, e) = L$.

2. Hulkade pere K peab rahuldama järgmisi nõudeid:

1) iga $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ korral peab olema võimalik lei-

da hulga X_k ε-võrku V_k.

2) hulk $\Phi(X, \alpha, \varepsilon_0)$ peab küllalt hästi aproksimeerima hulka $X \setminus Q(\alpha, V, \varepsilon_0)$ iga $X \in K$ korral.

II. Konkreetsete lahendusalgoritmide tuletamine

1. Ühe muutuja funktsiooni maksimiseerimine

Vaatame ülesannet:

leida $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f^*$ täpsusega $\varepsilon_0 > 0$ ja punkt $x^* \in [a, b]$, nii et

$$f(x^*) \geq f^* - \varepsilon_0 ,$$

kus $f(x)$ on analüütiline funktsioon: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, nii et $f(x) < \infty$ ja $f'(x) < \infty$, kui $x \in [a, b]$.

Jagame lõigu $[a, b]$ N osalõigu summaks:

$$X^0 = [a, b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [x^{0k}, x^{0,k+1}] ,$$

kus

$$x^{0,k+1} - x^{0k} = h = \frac{b-a}{N} .$$

Punktid $x^{00} = a, x^{01}, \ldots, x^{0,N-1}, x^{0N} = b$ on ε-võrguks V_0 hulgale $[a, b]$.

Leiame nüüd

$$g = \max_{0 \leq k \leq N} f(x^{0k})$$

ja vastava punkti x_*, nii et $f(x_*) = g$.

Püüame leida majorantfunktsiooni $\varphi(x, t, e)$ ja operaatorit $\Phi(X, \alpha, \varepsilon_0)$, mis rahuldaksid I peatükis antud tingimusi ja mille puhul saaks rakendada katete meetodit.

Hindame osalõikudel $X_k = [x^{0k}, x^{0,k+1}]$ Taylori rea jääkliiget $\alpha_0(x)$ Lagrange'i järgi (vt. [2] lk.75) arendades funktsiooni $f(x)$ ritta punktides x^{0k} küllalt väikese juurdekasvu $Z_k>0$ korral. Taylori valem näeb sel korral välja nii:

$$f(x^{0k}+z_k)=f(x^{0k})+f'(\hat{x}^{0k})z_k\ , \qquad (1)$$

kus

$$\hat{x}^{0k}\in[x^{0k},\ x^{0k}+z_k]\subset[x^{0k},x^{0,k+1}] \quad (k=0,1,\dots,N-1).$$

Tähistame $f'(x)$ ülemise tõkke osalõigul $[x^{0k},x^{0,k+1}]$ M_k^0-ga.

$$f'(\hat{x}^{0k})=\sum_{j=1}^{\infty} jc_j(\hat{x}^{0k})^{j-1}\le\sum_{j=1}^{\infty} jc_j\Big(\frac{x^{0k}+x^{0,k+1}}{2}+\frac{x^{0,k+1}-x^{0k}}{2}\cdot \operatorname{sign} c_j\Big)^{j-1}=$$

$$=M_k^0 \quad (k=0,1,\dots,N-1).$$

Seosest (1) saame siis hinnangu:

$$f(x^{0k}+z_k)\le f(x^{0k})+M_k^0 z_k \quad (k=0,1,\dots,N-1) \qquad (2)$$

Negatiivse juurdekasvu $z_{k+1}<0$ korral peame tuletist hindama alt. Taylori valem näeb sel korral välja nii:

$$f(x^{0,k+1}+z_{k+1})=f(x^{0,k+1})-f(\hat{\hat{x}}^{0,k+1})\,|z_{k+1}|\ , \qquad (3)$$

kus

$$\hat{\hat{x}}^{0,k+1}\in[x^{0,k+1}+z_k,\ x^{0,k+1}]\subset[x^{0k},\ x^{0,k+1}] \quad (k=0,1,\dots,N-1).$$

Tähistame $f'(x)$ alumise tõkke osalõigul $[x^{0k},x^{0,k+1}]$ N_k^0-ga.

$$f'(\hat{\hat{x}}^{0,k+1})\ge\sum_{j=1}^{\infty} jc_j\Big(\frac{x^{0k}+x^{0,k+1}}{2}+\frac{x^{0k}-x^{0,k+1}}{2}\cdot \operatorname{sign} c_j\Big)^{j-1}=N_k^0$$

$(k=0,1,\dots,N-1)$.

Valemi (3) asemel saame siis hinnangu:

$$f(x^{0,k+1}+z_{k+1})\le f(x^{0,k+1})-N_k^0\,|z_{k+1}| \quad (k=0,1,\dots,N-1). \qquad (4)$$

Seega oleme leidnud lihtsa majorantfunktsiooni

$$\varphi(x,t,e)=\begin{cases} M_k^0, & \text{kui } x\in[x^{0k},x^{0,k+1}],\ e=1,\\ N_k^0, & \text{kui } x\in[x^{0k},x^{0,k+1}],\ e=-1\end{cases}.$$

Kontrollime majorantfunktsiooni tingimusi 1) ja 2) I peatükist.

1) grad $f(x+te)\cdot e = f'(x+te)\cdot e$.

Meil esineb 2 juhtu!

a) $e=1$, siis $f'(x+t)\le M_k^o$, kui $x+t\in[x^{ok}, x^{o,k+1}]$.

b) $e=-1$, siis $-f'(x-t)\le -N_k^o$, kui $x-t\in[x^{ok}, x^{o,k+1}]$.

2) $\varphi(x,t,e)\le L$, sest sellel funktsioonil on üldse lõplik arv väärtusi.

Vaatame, milline tuleb punkti x^{ok} $(k=0,1,\dots,N)$ f- ümbrus!

1) $e=1$. Nüüd nõuame, et hinnangus (2) oleks z_k selline, et $M_k^o>0$ korral $f(x^{ok})+M_k^o z_k = g+\varepsilon_o$, kus g on seni leitud funktsiooni väärtustest maksimaalne.

Saame z_k $(k=0,1,\dots,N-1)$ jaoks valemi

$$z_k' = \frac{g+\varepsilon_o - f(x^{ok})}{M_k^o}, \qquad M_k^o>0 .$$

Kui $M_k^o\le 0$, siis see tähendab, et osalõigul $[x^{ok}; x^{o,k+1}]$ x kasvamisel funktsiooni $f(x)$ kasvamist ei toimu ja siis võime võtta $z_k' = \frac{b-a}{N}$. Kokkuvõttes

$$z_k' = \begin{cases} \dfrac{g+\varepsilon_o - f(x^{ok})}{M_k^o} & \text{kui} \quad M_k^o>0, \\ \dfrac{b-a}{N}, & \text{kui} \quad M_k^o\le 0 \end{cases}$$

$(k=0,1,\dots,N-1)$.

2) $e=-1$. Nüüd nõuame, et hinnangus (4) z_{k+1} oleks selline, et $N_k^o<0$ korral $f(x^{o,k+1})-N_k^o\,|z_{k+1}| = g+\varepsilon_o$ (g mõiste on endine). Saame z_{k+1} $(k=0,1,\dots,N-1)$ jaoks valemi

$$|z''_{k+1}| = \frac{g+\varepsilon_o - f(x^{o,k+1})}{-N_k^o}, \quad \text{kui} \quad N_k^o<0 .$$

Kui $N_k^o\ge 0$, siis see tähendab, et osalõigul $[x^{ok}, x^{o,k+1}]$ x kahanemisel funktsiooni $f(x)$ kasvamist ei toimu, sel juhul võtame $|z''_{k+1}| = \frac{b-a}{N}$.

Kokkuvõttes

$$Z''_{k+1} = \begin{cases} -\dfrac{b-a}{N}, & \text{kui} \quad N^0_k \geq 0, \\ \dfrac{g+\varepsilon_0 - f(x^{0,k+1})}{N^0_k}, & \text{kui} \quad N^0_k < 0 \end{cases}$$

$(k = 0, 1, \dots, N-1)$.

Nagu eelnevast arutelust nähtub, ei ületa piirkonnas $\bigcup\limits_{k=0}^{N} [a, b] \cap \{x : x^{0k} + Z''_k \leq x \leq x^{0k} + Z'_k\}$ funktsioon $f(x)$ väärtust $g+\varepsilon_0$. Seega ta vastab katete meetodi üldises teoorias hulgale $Q(g, V, \varepsilon_0)$ ja selle piirkonna võib edaspidise vaatluse alt välja jätta. Lõigu kokkusurumise operaator Φ teisendab lõigu $[x^{0k}, x^{0,k+1}]$ lõiguks $[\overline{x}^{1k}, \overline{\overline{x}}^{1,k+1}]$, kus

$$\overline{x}^{1k} = x^{0k} + Z'_k$$

ja

$$\overline{\overline{x}}^{1,k+1} = x^{0,k+1} + Z''_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1),$$

See tähendab

$$X^1 = \Phi(X^0, g, \varepsilon_0) = \bigcup_{k=0}^{N-1} [\overline{x}^{1k}, \overline{\overline{x}}^{1,k+1}].$$

Kontrollime operaatori $\Phi(X^0, a, \varepsilon_0)$ tingimusi a) ja b) I peatükist:

a) ilmselt kehtib $\Phi(X^0, g, \varepsilon_0) \subset X^0$.

b) $X^0 \setminus \Phi(X^0, g, \varepsilon_0) = \bigcup\limits_{k=0}^{N} [a, b] \cap \{x : x^{0k} + Z''_k \leq x \leq x^{0k} + Z'_k\} \subseteq$

$\subseteq Q(g, V_0, \varepsilon_0)$.

Seega meie operaator $\Phi(X, g, \varepsilon_0)$ rahuldab nõutud tingimusi. Saadud hulga X^1 ε-võrguks V_1 võtame punktid $\overline{x}^{1k}$ ja $\overline{\overline{x}}^{1,k+1}$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$. Leiame nüüd

$$\overline{g} = \max_{0 \leq k \leq N-1} [g, f(\overline{x}^{1k}), f(\overline{\overline{x}}^{1,k+1})]$$

ja vastava $\overline{x}_*$, nii et $f(\overline{x}_*) = \overline{g}$. Nüüd rakendame hulgale X^1 uuesti operaatorit $\Phi(X, g, \varepsilon_0)$.

Koonduvuse kiirendamiseks võime valida $\bar{g}$ ja $\bar{x}_*$ pärast iga osalõigu teisendamist.

Seega oleme oma ülesande jaoks saanud järgmise algoritmi:

1) jagame lõigu $[a,b]$ osalõikudeks $[\bar{x}^{0k},\bar{\bar{x}}^{0,k+1}]$, nii et

$$\bar{x}^{00}=x^{00}=a,\ \bar{x}^{0k}=\bar{\bar{x}}^{0k}=x^{0k}\ (k=1,\dots,N-1),\ \bar{\bar{x}}^{0N}=x^{0N}=b$$

ja

$$\bar{\bar{x}}^{0,k+1}-\bar{x}^{0k}=\frac{b-a}{N}.$$

2) leiame

$$g=\max_{0\le k\le N} f(x^{0k})$$

ja vastava $x_*\in[a,b]$, nii et $f(x_*)=g$.

3) oletame, et meil on tehtud $i-1$ sammu ja i-ndal sammul on teisendatud $k-1$ osalõiku. Siis k-ndat osalõiku $[\bar{x}^{i-1,k},\bar{\bar{x}}^{i-1,k+1}]$, kui see ei ole tühi hulk, teisendame järgmiste valemite abil:

$$\bar{x}^{ik}=\bar{x}^{i-1,k}+z'_k,$$

$$\bar{\bar{x}}^{i,k+1}=\bar{\bar{x}}^{i-1,k+1}+z''_{k+1},$$

kus

$$z'_k=\begin{cases}\dfrac{g+\varepsilon_0-f(\bar{x}^{i-1,k})}{M_k^{i-1}}, & \text{kui } M_k^{i-1}>0,\\[2mm] \dfrac{b-a}{N}, & \text{kui } M_k^{i-1}\le 0\end{cases}$$

ja

$$z''_{k+1}=\begin{cases}\dfrac{b-a}{N}, & \text{kui } N_k^{i-1}\ge 0,\\[2mm] \dfrac{g+\varepsilon_0-f(\bar{\bar{x}}^{i-1,k+1})}{N_k^{i-1}}, & \text{kui } N_k^{i-1}<0.\end{cases}$$

4) kontrollime, kas hulk $[\bar{x}^{ik},\bar{\bar{x}}^{i,k+1}]$ pole tühi, see tähendab, kas $\bar{x}^{ik}\le\bar{\bar{x}}^{i,k+1}$.

5) määrame

$$\bar{g}=\begin{cases}g, & \text{kui } [\bar{x}^{ik},\bar{\bar{x}}^{i,k+1}]=\emptyset,\\ \max[g,f(\bar{x}^{ik}),f(\bar{\bar{x}}^{i,k+1})], & \text{kui } [\bar{x}^{ik},\bar{\bar{x}}^{i,k+1}]\ne\emptyset\end{cases}$$

ja

$$\bar{x}_*=\begin{cases}x_*, & \text{kui } \bar{g}=g\\ \bar{x}^{ik}, & \text{kui } \bar{g}=f(\bar{x}^{ik})\\ \bar{\bar{x}}^{i,k+1}, & \text{kui } \bar{g}=f(\bar{\bar{x}}^{i,k+1})\end{cases}.$$

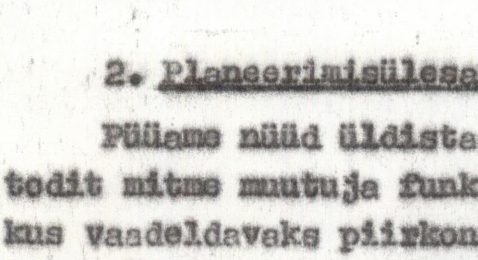
6) tähistame $g=\bar{g}$ ja $x_*=\bar{x}_*$ ning asume jälle punkti 3) täitmisele.

i-ndal sammul jätkub lahenduskäik seni, kuni on teisendatud kõik osalõigud. Protsess lõpeb n sammu järel, kui kõik osalõigud $[\bar{x}^{nk}, \bar{\bar{x}}^{n,k+1}]$ $(k=0,1,\dots,N-1)$ on kas tühjad või kõdunud üheks punktiks.

See algoritm rahuldab koonduvusteoreemi tingimusi: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in T(\tilde{X})$, see tähendab $f'(x+te)e \le \varphi(x,t,e)$ ja $\varphi(x,t,e)\le L$, nagu me varem näitasime. Hulgaks $\tilde{X}$ on lõik $[a,b]$, $X^0=\bigcup_{k=0}^{N-1}[x^{0k}, x^{0,k+1}]$, pereks K on kõikvõimalikud ühelisidusad punktihulgad lõigul $[a,b]$. Operaatoriks $\Phi(X,a,\varepsilon_0)$ on varem sisse toodud lõigu teisendamise operaator $\Phi(X,g,\varepsilon_0)$. ε-võrgu diameeter $\delta_i = \max_{0\le k\le N-1}(\bar{\bar{x}}^{i,k+1}-\bar{x}^{ik}) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, kuna igal sammul lüheneb iga osalõik vähemalt $\frac{2\varepsilon_0}{L}$ võrra, mis on lõplik suurus. Seega koonduvusteoreemi põhjal saame leida punkti $x^*=x_*$, nii et $f(x^*)\ge f^*-\varepsilon_0$.

Meetodi geomeetriline interpretatsioon

Vaatleme osalõigu $[\bar{x}^{ik}, \bar{\bar{x}}^{i,k+1}]$ teisendamist. Suuruste M_k^i ja N_k^i leidmine tähendab puutujate piirasendite leidmist kohtadel $\bar{x}^{ik}$ ja $\bar{\bar{x}}^{i,k+1}$, vastavad puutuja piirasendid on l_1 ja l_2, nende tõusud vastavalt M_k^i ja N_k^i.



Lõigu kokkusurumise operaator teisendab lõigu iseendasse nii, et uuest lõigust ülejäänud osal funktsiooni $f(x)$ väärtus ei ületa antud juhul $f(\bar{x}^{ik})+\varepsilon_0$.

2. Planeerimisülesande lahendamine katete meetodil

Püüame nüüd üldistada eelmises punktis vaadeldud meetodit mitme muutuja funktsiooni maksimiseerimisülesandele, kus vaadeldavaks piirkonnaks X on mingi kumer tõkestatud hulk D n-dimensionaalses ruumis. Seega vaatame ülesannet:

leida

$$\max f(x_1,\dots,x_n) = f^*$$

kitsendustel

$$f_i(x_1,\dots,x_n)\leq 0 \quad (i=1,\dots,m),$$
$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n).$$

täpsusega $\varepsilon_0>0$ ja punkt $\xi^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)\in D$, nii et

$$f(\xi^*)\geq f^*-\varepsilon_0 ,$$

kus D on lubatevate lahendite piirkond:

$$D=\{(x_1,\dots,x_n):\ x_j\geq 0\,(j=1,\dots,n),\ f_i(x_1,\dots,x_n)\leq 0\,(i=1,\dots,m)\}.$$

Peale tõkestatuse ja kumeruse eeldame veel hulga D kohta, et meil on teada selle piirkonna täpsed tõkked muutujate $x_1,\dots,x_n$ suunas, see tähendab $0\leq a_j\leq x_j\leq b_j$ $(j=1,\dots,n)$, kui $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

Sihifunktsiooni $f(x_1,\dots,x_n)$ kohta eeldame, et see on pidevalt diferentseeruv funktsioon piirkonnas **P**, kus P on n-mõõtmeline risttahukas:

$$P=\{(x_1,\dots,x_n):\ 0\leq a_j\leq x_j\leq b_j\ (j=1,\dots,n)\}.$$

Jagame selle n-mõõtmelise risttahuka väiksemate n-mõõtmeliste risttahukate summaks. Selleks jagame lõigu $[a_1, b_1]$ N_1+1 osaks $(a_1=x_1^{00}, x_1^{01},\dots,x_1^{0,N_1-1}, x_1^{0N_1}=b_1)$, ..., lõigu $[a_n, b_n]$ aga N_n+1 osaks $(a_n=x_n^{00}, x_n^{01},\dots,x_n^{0,N_n-1}, x_n^{0N_n}=b_n)$.

Sellega oleme piirkonna jaganud $N=N_1\cdot N_2\cdot\ldots\cdot N_n$ n-mõõtmelise risttahuka summaks.

Kui $x_1^{0i_1}\leq x_1\leq x_1^{0,i_1+1}$ $(i_1=0,1,\dots,N_1-1),\dots, x_n^{0i_n}\leq x_n\leq x_n^{0,i_n+1}$ $(i_n=0,1,\dots,N_n-1)$, siis vastava n-mõõtmelise risttahuka tähistame $X^0_{i_1\dots i_n}$-ga.

Tähistame indeksite hulgad $\{0,1,\dots,N_1-1\}=J_1$, $\dots,\ \{0,1,\dots,N_n-1\}=J_n$.

Hindame hulkades $X^0_{i_1\dots i_n}\subset P$ funktsiooni $f(\xi)$ Taylori rea esimest jääkliiget $\alpha_0(\xi)$ Lagrange'i kujus ([3] lk. 143) küllalt väikese x_n-suunalise juurdekasvu $z_n>0$ korral punktides $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n})\in X^0_{i_1\dots i_{n-1}i_n}$ $(i_n\in J_n)$, kusjuures $x_1,\dots,x_{n-1}$ võivad olla suvalised.

Kuna vaatame vaid x_n-suunalist juurdekasvu, siis võime muutujaid $x_1, \ldots, x_{n-1}$ vaadelda parameetritena. Taylori valem näeb sel juhul välja nii:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0 i_n} + z_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0 i_n}) + \qquad (5)$$
$$+ \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \hat{x}_n^{0 i_n})}{\partial x_n} z_n \quad (i_n \in J_n), \text{ kus } (x_1, \ldots, x_{n-1}, \hat{x}_n^{0 i_n}) \in X^0_{i_1 \ldots i_n}.$$

Oletame, et oleme leidnud osatuletise ülemise tõkke igas hulgas $X^0_{i_1 \ldots i_n} \subset P$:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \leq M^0_{i_1 \ldots i_n} \quad (i_1 \in J_1, \ldots, i_n \in J_n).$$

Kui $(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcup_{i_1 \in J_1} \ldots \bigcup_{i_{n-1} \in J_{n-1}} X^0_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} = X^0_{n i_n}$, siis $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}$ ülemiseks tõkkeks on

$$M^0_{i_n} = \max_{i_1 \in J_1, \ldots, i_{n-1} \in J_{n-1}} M^0_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} \quad (i_n \in J_n).$$

Negatiivse x_n-suunalise juurdekasvu $z_n < 0$ anname punktidele $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0, i_n+1}) \in X^0_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$, kusjuures $x_1, \ldots, x_{n-1}$ muutuvad jälle suvaliselt. Taylori valem näeb siis välja nii:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0, i_n+1} + z_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0, i_n+1}) + \qquad (6)$$
$$+ \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \hat{\hat{x}}_n^{0, i_n+1})}{\partial x_n} \cdot z_n \quad (i_n \in J_n),$$

kui $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \hat{\hat{x}}_n^{0, i_n+1}) \in X^0_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$.

Oletame, et oleme leidnud ka osatuletise alumise tõkke igas hulgas $X^0_{i_1 \ldots i_n} \subset P$:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \geqslant N^0_{i_1 \ldots i_n} \quad (i_1 \in J_1, \ldots, i_n \in J_n).$$

Kui $(x_1, \ldots, x_n) \in X^0_{n i_n}$, siis $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}$ alumiseks tõkkeks on

$$N^0_{i_n} = \min_{i_1 \in J_1, \ldots, i_{n-1} \in J_{n-1}} N^0_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} \quad (i_n \in J_n).$$

Näitame nüüd, et funktsiooni $f(\xi)$ majorantfunktsiooniks sobib funktsioon

$$\varphi(\xi,t,e_n)=\begin{cases} M^{\circ}_{i_n}, & \text{kui} \quad e_n=1,\ \xi\in X^{\circ}_{ni_n},\\ N^{\circ}_{i_n}, & \text{kui} \quad e_n=-1,\ \xi\in X^{\circ}_{ni_n}.\end{cases}$$

Selleks kontrollime tingimusi 1) ja 2) I peatükist.

1) $\operatorname{grad} f(\xi+te)\cdot e\le\varphi(\xi,t,e)$, sest iga punkti $\xi+te\in X^{\circ}_{ni_n}$, kus $\xi\in X^{\circ}_{ni_n}$ ja $e=(e_1,\ldots,e_n)$, nii et $|e|=1$, saab esitada kujul $\xi'+t'e'$, kus $\xi'\in X^{\circ}_{ni_n}$ ja $e'=(0,\ldots,0,1)$. Siis aga

$$\operatorname{grad} f(\xi+te)\cdot e=\frac{\partial f(\xi'+t'e_n)}{\partial x_n}\cdot e_n\le\varphi(\xi,t,e_n),$$ kuna

juhul, kui $e_n=1$, siis $\frac{\partial f(\xi+te_n)}{\partial x_n}\le M^{\circ}_{i_n}$, kui $\xi+te_n\in X^{\circ}_{ni_n}$.

Kui $e_n=-1$, siis $-\frac{\partial f(\xi+te_n)}{\partial x_n}\le -N^{\circ}_{i_n}$, kui $\xi+te_n\in X^{\circ}_{ni_n}$.

2) $\varphi(\xi,t,e_n)\le L$, sest sellel funktsioonil on üldse lõplik arv väärtusi.

Tõestame nüüd teoreemi!

Kui funktsiooni $f(\xi)$ majorantfunktsiooniks on funktsioon $\varphi(\xi,t,e_n)$, siis hüpertasandi tõkestatud piirkonna $D_{i_n}=\{(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^{oi_n})\in D\}$ $(i_n\in J_n)$ f-ümbruseks $S(D_{i_n}, g+\varepsilon_0-\hat f(D_{i_n}))$ on piirkond

$$\{(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_n)\in D,\ x_n^{oi_n}+Z''_{ni_n}\le x_n\le x_n^{oi_n}+Z'_{ni_n}\},$$

kus

$$Z'_{ni_n}=\begin{cases}\dfrac{g-f^{o*}_{i_n}}{M^{\circ}_{i_n}}, & \text{kui} \quad M^{\circ}_{i_n}>0,\\[2ex] \dfrac{b_n-a_n}{N_n}, & \text{kui} \quad M^{\circ}_{i_n}\le 0\end{cases}$$

ja

$$Z''_{ni_n}=\begin{cases}-\dfrac{b_n-a_n}{N_n}, & \text{kui} \quad N^{\circ}_{i_n}\ge 0,\\[2ex] \dfrac{g-f^{o*}_{i_n}}{N^{\circ}_{i_n-1}}, & \text{kui} \quad N^{\circ}_{i_n}<0.\end{cases}$$

$f_{i_n}^{o*}$ on aga järgmise ülesande lahend:

leida täpsusega $\varepsilon_o > 0$

$$f_{i_n}^{*} = \max f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{o i_n}) = g_{i_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

kitsendustel

$$f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{o i_n}) = g_{i i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

ja punkt $\xi_{i_n}^{o*}$,nii et $f_{i_n}^{o*} = f(\xi_{i_n}^{o*}) \geqslant f_{i_n}^{*} - \varepsilon_o$.

See teoreem võimaldab n tundmatuga ülesande lahendamise taandada teatud arvu $n-1$ tundmatuga ülesannete lahendamisele. Seega, kui oskame lahendada 1 tundmatuga maksimiseerimisülesande, siis võime põhimõtteliselt lahendada ükskõik millise tundmatute arvuga ülesande. On aga ka selge, et arvutuste maht kasvab väga kiiresti tundmatute arvu suurenemisel.

Teoreemi tõestus

Hüpertasandi tõkestatud piirkond D_{i_n} on saadud lubatavate lahendite hulga D projekteerimisel hüpertasandile $x_n = x_n^{o i_n}$, seetõttu tundmatute $x_1, \dots, x_{n-1}$ suunaliste juurdekasvude andmisel punktidele $\xi \in D_{i_n}$ me piirkonnast D_{i_n} välja ei saa (punkti f-ümbruse definitsiooni kohaselt I peatükis).

Vaatame x_n-suunalist juurdekasvu z_n.

1) olgu $z_n \geqslant 0$, siis kasutame Taylori valemit kujul (5).

Valemist (5) järeldub, et

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{o i_n} + z_n) \leq f_{i_n}^{o*} + \varepsilon_o + M_{i_n}^{o} z_n \quad (i_n \in J_n),$$

kui

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, \hat{x}_n^{o i_n}) \in \mathfrak{X}_{n i_n}^{o} .$$

Nõuame, et $z_n \geqslant 0$ oleks selline, et

$$f_{i_n}^{o*} + \varepsilon_o + M_{i_n}^{o} z_n = g + \varepsilon_o \quad (i_n \in J_n),$$

kus g on seni leitud funktsiooni $f(x_1, \dots, x_n)$ väärtustest suurim.

Tähistame

$$z'_{ni_n} = \begin{cases} \dfrac{g - f^{o*}_{i_n}}{M^o_{i_n}}, & \text{kui } M^o_{i_n} > 0, \\ \dfrac{b_n - a_n}{N_n}, & \text{kui } M^o_{i_n} \leq 0. \end{cases}$$

Nüüd piirkonnas

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in D,\ x_n^{oi_n} \leq x_n \leq x_n^{oi_n} + z'_{ni_n}\} \quad (7)$$

ei ületa funktsiooni $f(\xi)$ väärtus suurust $g + \varepsilon_o$, sest kui $M^o_{i_n} > 0$, siis $0 \leq t \leq z'_{ni_n}$ korral

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{oi_n} + t) \leq f^{o*}_{i_n} + \varepsilon_o + M^o_{i_n} t \leq$$

$$\leq f^{o*}_{i_n} + \varepsilon_o + M^o_{i_n} \cdot \frac{g - f^{o*}_{i_n}}{M^o_{i_n}} = g + \varepsilon_o .$$

Kui $M^o_{i_n} \leq 0$, siis piirkonnas $X^o_{ni_n}$ x_n-suunalise positiivse küllalt väikese juurdekasvu korral funktsiooni $f(\xi)$ väärtuse kasvamist aset leida ei saa ja $f(\xi)$ väärtus seega ei ületa piirkonnas (7) suurust $f^{o*}_{i_n} < g + \varepsilon_o$.

2) olgu $z_n \leq 0$, siis kasutame Taylori valemit kujul (6).

Valemist (6) järeldub, et

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{o,i_n+1} + z_n) \leq f^{o*}_{i_n+1} + \varepsilon_o - N^o_{i_n} |z_n| \qquad (i_n \in J_n),$$

kui $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \hat{\hat{x}}_n^{o,i_n+1}) \in X^o_{ni_n}$.

Nõueme, et ka $z_n \leq 0$ oleks selline, et

$$f^{o*}_{i_n+1} + \varepsilon_o - N^o_{i_n} |z_n| = g + \varepsilon_o \qquad (i_n \in J_n)$$

ehk

$$f^{o*}_{i_n+1} - N^o_{i_n} |z_n| = g \qquad (i_n \in J_n).$$

Kui võtta

$$z''_{n,i_n+1} = \begin{cases} -\dfrac{b_n - a_n}{N_n}, & \text{kui } N^o_{i_n} \geqslant 0, \\ \dfrac{g - f^{o*}_{i_n+1}}{N^o_{i_n}}, & \text{kui } N^o_{i_n} < 0, \end{cases}$$

siis saab analoogiliselt 1) juhuga näidata, et piirkonnas

$$\{(x_1,\dots,x_n):(x_1,\dots,x_n)\in D,\ x_n^{0,i_n+1}+z''_{n,i_n+1}\le x_n\le x_n^{0,i_n+1}\} \qquad (8)$$

ei ületa funktsiooni $f(\xi)$ väärtus suurust $g+\varepsilon_0$. Kui $N^0_{i_n}<0$, siis $z''_{n,i_n+1}\le t\le 0$ korral

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0,i_n+1}+t)\le f^{0*}_{i_n+1}+\varepsilon_0+N^0_{i_n}t\le$$
$$\le f^{0*}_{i_n+1}+\varepsilon_0+N^0_{i_n}\cdot\frac{g-f^{0*}_{i_n+1}}{N^0_{i_n}}=g+\varepsilon_0 .$$

Kui $N^0_{i_n}\geqslant 0$, siis x_n-suunalise negatiivse küllalt väikese juurdekasvu korral funktsiooni $f(\xi)$ väärtuse kasvamist aset leida ei saa ja $f(\xi)$ väärtus piirkonnas (8) ei ületa suurust $f^{0*}_{i_n+1}<g+\varepsilon_0$.

Püüame tõestada teoreemi väidet:

$$\{(x_1,\dots,x_n):(x_1,\dots,x_n)\in D,\ x_n^{0i_n}+z''_{ni_n}\le x_n\le x_n^{0i_n}+z'_{ni_n}\}=$$
$$=\{(x_1,\dots,x_n):(x_1,\dots,x_n)\in D,\ x_n^{0i_n}\le x_n\le x_n^{0i_n}+z'_{ni_n},(\xi,z'_{ni_n},1)\in R\}\cup$$
$$\cup\{(x_1,\dots,x_n):(x_1,\dots,x_n)\in D,\ x_n^{0i_n}+z''_{ni_n}\le x_n\le x_n^{0i_n},(\xi,|z''_{ni_n}|,-1)\in R\}=$$
$$=\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}+t):(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}+t)\in D,\ M^0_{i_n}t\le g-f^{0*}_{i_n},$$
kui $M^0_{i_n}>0$, $(\xi,t,1)\in R\}\cup\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}+t):$
$(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}+t)\in D$, $t=\dfrac{b_n-a_n}{N_n}$ kui $M^0_{i_n}\le 0$,
$(\xi,t,1)\in R\}\cup\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}-t):(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}-t)\in D$,
$t=\dfrac{b_n-a_n}{N_n}$, kui $N^0_{i_n-1}\geqslant 0$, $(\xi,t,-1)\in R\}\cup$
$\cup\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}-t):(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{0i_n}-t)\in D,\ -N^0_{i_n-1}t\le g-f^{0*}_{i_n}$,
kui $N^0_{i_n-1}<0$, $(\xi,t,-1)\in R\}\subseteq$

$$\subseteq\{\xi+te_n:\xi+te_n\in D,\ M^0_{i_n}t\le g-[\hat f(D_{i_n})-\varepsilon_0],(\xi,t,1)\in R\}\cup$$
$$\cup\{\xi+te_n:\xi+te_n\in D,\ -N^0_{i_n-1}t\le g-[\hat f(D_{i_n})-\varepsilon_0],(\xi,t,-1)\in R\}=$$
$$=D\cap\{\xi+te_n:\varphi(\xi,t,e_n)t\le g+\varepsilon_0-\hat f(D_{i_n}),(\xi,t,e_n)\in R\}=$$
$$=D\cap\{\xi+te_n:\int_0^t\varphi(\xi,\tau,e_n)d\tau\le g+\varepsilon_0-\hat f(D_{i_n}),(\xi,t,e_n)\in R\}=$$

$$= S(D_{i_n}, g + \varepsilon_0 - \hat{f}(D_{i_n})).$$

Kuna vaadeldav piirkond sisaldus piirkonna D_{i_n} f-ümbruses, siis võib ka teda ennast lugeda f-ümbruseks.

Seega teoreem on tõestatud.

Kui me võtame hulga D ε-võrgu V elementideks hüpertasandite $x_n = x_n^{0 i_n}$ $(i_n \in J_n)$ tõkestatud piirkonnad D_{i_n}, siis hulk $Q(g, V, \varepsilon_0)$ on selline:

$$Q(g, V, \varepsilon_0) = \bigcup_{i_n \in J_n} \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in D, \ x_n^{0 i_n} + z''_{n i_n} \le x_n \le x_n^{0 i_n} + z'_{n i_n}\}.$$

Kuna piirkonnas $Q(g, V, \varepsilon_0)$ $f(\xi)$ väärtus ei ületa suurust $g + \varepsilon_0$, siis võime selle hulga edaspidi vaatluse alt välja jätta ja ülejäänud piirkonda $X^1 = D \setminus Q(g, V, \varepsilon_0)$ analoogiliselt teisendada: leida uutel hulga D lõiketasanditel D'_{i_n} ja D''_{i_n} $(i_n \in J_n)$, maksimumid $\bar{f}^{1*}_{i_n}$ ja $\bar{\bar{f}}^{1*}_{i_n}$ $(i_n \in J_n)$, uue $\bar{g} = \max_{i_n \in J_n} [g, \bar{f}^{1*}_{i_n}, \bar{\bar{f}}^{1*}_{i_n}]$ ning vastavad juurdekasvud $z'_{n i_n}$ ja $z''_{n i_n}$ $(i_n \in J_n)$ jne.

Meetodi lõplikkuse tõestamiseks kontrollime üldise katete meetod koonduvusteoreemi tingimusi. Sihifunktsioon $f(\xi)$ on pidevalt diferentseeruv, seega $f(\xi) \in T(P)$, alamhulkade pereks K võtame kõikvõimalikud piirkonna P ühelisidusad punktihulgad. Kui lähtehulgaks $X^0 \in K$ võtame hulga P, operaatoriks $\Phi(X, \alpha, \varepsilon_0)$ aga n-mõõtmelise risttahuka muutuja x_n suunalise kokkusurumise operaatori, siis eespoolkirjeldatud meetod, mille täpse algoritmi esitame edaspidi, kujutab endast katete meetodit. Lähemat uurimist vajab veel probleem, kas $\delta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Kuna ε-võrgu elementideks on võetud hüpertasandite tõkestatud piirkonnad, siis

$$\delta_k = \max_{0 \le i_n \le N_n - 1} (\bar{\bar{x}}_n^{k, i_n + 1} - \bar{x}_n^{k i_n}).$$

Kuna operaator Φ on selline, et $\Phi(X^k_{n i_n}, g, \varepsilon_0) \le X^k_{n i_n}$, siis $\delta_{k+1} \le \delta_k$ iga k korral. Vaatleme eraldi erijuhte:

1) $\delta_{k+1} < \delta_k$ iga k korral, siis on veel 2 võimalust:

a) leidub k_0, et $\delta_{k_0} \le \frac{\varepsilon_0}{L}$, kus L on määratud tingimusega 2) I peatükis. Siis lemma 2 põhjal meetod lõpeb K_0 sammu järel, sest siis

$$\hat{f}(D) \leq \hat{f}(V_{K_0}) + \varepsilon_0 .$$

b) $\lim_{K\to\infty} \delta_K = \delta > \frac{\varepsilon_0}{L}$, siis alates mingist kohast K' võime teatud täpsusega (ümardamise täpsusega) lugeda, et $\delta_{K'+1} \approx \delta_{K'}$, ja seega vaadelda seda juhtu punktis 2).

2) $\delta_{K+1} = \delta_K$ mingi K korral. See tähendab, et maksimaalse x_n -suunalise mõõtmega n -dimensionaalset risttahukat $X^K_{n i_{n_0}}$ ei teisendatud. See on aga võimalik vaid juhul, kui K-ndal sammul piirkondadel $D'_{i_{n_0}}$ ja $D''_{i_{n_0}}$ funktsiooni $f(\xi)$ maksimumid on ümardamisvea piirides võrdsed ja ühtivad suurusega g. Siin on võimalikud samuti 2 juhtu:

a) kehtib $N^K_{i_{n_0}} = M^K_{i_{n_0}} = 0$, sel juhul on funktsioon $f(\xi)$ vaadeldavas piirkonnas konstantne funktsioon muutuja x_n suhtes ja selle piirkonna võib edasise vaatluse alt välja jätta (maksimaalne $f(\xi)$ väärtus seal ei ületa suurust $g+\varepsilon_0$).

b) $N^K_{i_{n_0}} \neq 0$ või $M^K_{i_{n_0}} \neq 0$. Sel juhul leiame funktsiooni $f(\xi)$ maksimumi täpsusega $\varepsilon_0 > 0$ ühel piirkonna D uuel lõiketasandil $x_n = x_n^{K,N_n+1}$, mis asub piirkondade $D'_{i_{n_0}}$ ja $D''_{i_{n_0}}$ vahel, see tähendab $\overline{x}_n^{K i_{n_0}} \leq x_n^{K,N_n+1} \leq \overline{\overline{x}}_n^{K,i_{n_0}+1}$.

Näiteks võtame lõigu $[\overline{x}_n^{K i_{n_0}}; \overline{\overline{x}}^{K,i_{n_0}+1}]$ keskpunkti. Kui lisada selle lõiketasandi tõkestatud piirkonna punktid ε -võrgule V_{K+1} , siis ε -võrgu diameeter kokkuvõttes väheneb: $\delta_{K+1} < \delta_K$.

Seega võime eeldada, et alati kehtib $\delta_{K+1} < \delta_K$, kusjuures protsessis $K\to\infty$ võime saavutada olukorra, et teatud K_0 korral $\delta_{K_0} \leq \frac{\varepsilon_0}{L}$. Seega mingi lõpliku arvu K_0 sammude järel hulk $Q(g, V_{K_0}, \varepsilon_0) \supseteq D$, see tähendab, et kogu lubatavate lahendite piirkonnas ei eksisteeri punkti, milles funktsiooni $f(\xi)$ väärtus ületaks suurust $g+\varepsilon_0$.

Selleks, et meetod koonduks kiiremini, tuleb igal sammul teisendada vaid üht piirkonda, see tähendab, et pärast iga n -mõõtmelise risttahuka teisendamist leiame tema uutel tahkudel funktsiooni $f(\xi)$ väärtuste maksimumid ja võrdleme neid senistest $f(\xi)$ väärtustest suurimaga ehk g -ga. Kui üks maksimumidest osutub g -st suuremaks, asendame g senise väärtuse uuega.

3. Lahendusalgoritm analüütiliste funktsioonide korral

Anname nüüd kasutatava lahendusalgoritmi juhu jaoks, kui sihifunktsiooniks $f(\xi)$ on analüütiline funktsioon!

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} c_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n} .$$

Eeldame, et funktsiooni $f(\xi)$ rida ja selle kõik I järku osatuletised on lubatavate lahendite piirkonnas lõplikud.

Sel juhul on lihtne leida funktsiooni $f(\xi)$ osatuletiste tõkkeid n -mõõtmelises risttahukas $X^k_{i_1 \ldots i_n}$.

Tähistame $\dfrac{\partial f(\xi)}{\partial x_n}$ ülemised ja alumised tõkked hulgas

$X^k_{i_1 \ldots i_n}$ vastavalt $M^k_{i_1 \ldots i_n}$ ja $N^k_{i_1 \ldots i_n}$-ga.

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_n} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{j_n=1}^{\infty} j_n c_{j_1 \ldots j_{n-1} j_n} x_1^{j_1} \ldots x_{n-1}^{j_{n-1}} x_n^{j_n - 1} \leq$$

$$\leq \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{j_n=1}^{\infty} j_n c_{j_1 \ldots j_n} \left(\frac{\bar{x}_1^{k i_1} + \bar{\bar{x}}_2^{k, i_1+1}}{2} + \frac{\bar{\bar{x}}_1^{k, i_1+1} - \bar{x}_1^{k i_1}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_1} \cdot \tag{9}$$

$$\cdot \ldots \cdot \left(\frac{\bar{x}_{n-1}^{k i_{n-1}} + \bar{\bar{x}}_{n-1}^{k, i_{n-1}+1}}{2} + \frac{\bar{\bar{x}}_{n-1}^{k, i_{n-1}+1} - \bar{x}_{n-1}^{k i_{n-1}}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_{n-1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\bar{x}_n^{k i_n} + \bar{\bar{x}}_n^{k, i_n+1}}{2} + \frac{\bar{\bar{x}}_n^{k, i_n+1} - \bar{x}_n^{k i_n}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_n - 1} = M^k_{i_1 \ldots i_n} ,$$

kui $(x_1, \ldots, x_n) \in X^k_{i_1 \ldots i_n}$.

Selline tõkke valik tähendab seda, et kui muutuja $x_m \in [\overline{x}_m^{k i_m}, \overline{\overline{x}}_m^{k, i_m+1}]$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, siis positiivse astmerea kordaja puhul suurendame muutujat x_m $\overline{\overline{x}}_m^{k, i_m+1}$-ni, negatiivse kordaja puhul aga vähendame muutujat x_m $\overline{x}_m^{k i_m}$-ni. Kuna $x_j \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, siis kehtib ilmselt

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \leqslant M_{i_1 \ldots i_n}^k,$$

kui $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi_{i_1 \ldots i_n}^k$.

Analoogiliselt leiame ka $\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_n}$ alumise tõkke n-mõõtmelises risttahukas $\chi_{i_1 \ldots i_n}^k$:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \geqslant \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{j_n=1}^{\infty} j_n c_{j_1 \ldots j_n} \left(\frac{\overline{x}_1^{k i_1} + \overline{\overline{x}}_1^{k, i_1+1}}{2} + \frac{\overline{x}_1^{k, i_1} - \overline{\overline{x}}_1^{k i_1+1}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_1} \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot \left(\frac{\overline{x}_{n-1}^{k i_{n-1}} + \overline{\overline{x}}_{n-1}^{k, i_{n-1}+1}}{2} + \frac{\overline{x}_{n-1}^{k, i_{n-1}} - \overline{\overline{x}}_{n-1}^{k i_{n-1}+1}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_{n-1}} \cdot \tag{10}$$

$$\cdot \left(\frac{\overline{x}_n^{k i_n} + \overline{\overline{x}}_n^{k, i_n+1}}{2} + \frac{\overline{x}^{k, i_n} - \overline{\overline{x}}^{k i_n+1}}{2} \cdot \operatorname{sign} c_{j_1 \ldots j_n} \right)^{j_n - 1} = N_{i_1 \ldots i_n}^k .$$

<u>Lahendusalgoritm</u>

1) olgu $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ lubatavate lahendite piirkonna D tõkked, s.t. $x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n]$, kui $(x_1, \ldots, x_n) \in D$. Jagame selle n-mõõtmelise risttahuka väiksemate n-mõõtmeliste risttahukate summaks:

$$[a_1, b_1] = \bigcup_{i_1=0}^{N_1-1} [\overline{x}_1^{0 i_1}, \overline{\overline{x}}_1^{0, i_1+1}], \ldots, [a_n, b_n] = \bigcup_{i_n=0}^{N_n-1} [\overline{x}_n^{0 i_n}, \overline{\overline{x}}_n^{0 i_n+1}],$$

kus $\overline{x}^{0 i_k} = \overline{\overline{x}}^{0 i_k} = x^{0 i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, nii et

$$x^{0, i_k+1} - x^{0 i_k} = \frac{b_k - a_k}{N_k} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

2) leiame järgmiste ülesannete lahendid täpsusega $\varepsilon_0 > 0$

$$\max f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0 i_n}) = f_{i_n}^* \quad (i_n = 0, 1, \ldots, N_n)$$

kitsendustel

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{0i_n}) \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1),$$

samuti leiame ka punktid $(x_1^{0i_n}, \ldots, x_{n-1}^{0i_n}, x_n^{0i_n}) = \xi_{i_n}^{0*} \in D$,

nii et $f_{i_n}^{0*} = f(\xi_{i_n}^{0*}) \geq f_{i_n}^{*} - \varepsilon_0$.

3) valime $g = \max\limits_{0 \leq i_n \leq N_n} f_{i_n}^{0*}$

ja $\xi^* = \xi_{i_n}^{0*}$, nii et $f(\xi_{i_n}^{0*}) = g$.

oletame, et meil on tehtud $k-1$ sammu ja k-ndal sammul on teisendatud i_n-1 n-mõõtmelist risttahukat $X_{ni_n}^{k}$ $(i_n - 1 < N_n - 1)$.

4) i_n-ndat n-mõõtmelist risttahukat, kui see ei ole tühi hulk (tühja hulga puhul läheme üle punkti 10) täitmisele) teisendatakse järgmiste valemite abil:

$$\overline{X}_n^{ki_n} = \overline{X}_n^{k-1,i_n} + z'_{ni_n},$$

$$\overline{\overline{X}}_n^{k,i_n+1} = \overline{\overline{X}}_n^{k-1,i_n+1} + z''_{ni_n},$$

kus

$$z'_{ni_n} = \begin{cases} \dfrac{g - \overline{f}_{i_n}^{k-1*}}{M_{i_n}^{k-1}}, & \text{kui } M_{i_n}^{k-1} > 0, \\ \dfrac{b_n - a_n}{N_n}, & \text{kui } M_{i_n}^{k-1} \leq 0, \end{cases}$$

$$z''_{ni_n+1} = \begin{cases} -\dfrac{b_n - a_n}{N_n}, & \text{kui } N_{i_n}^{k-1} \geq 0, \\ \dfrac{g - \overline{\overline{f}}_{i_n+1}^{k-1*}}{N_{i_n}^{k-1}}, & \text{kui } N_{i_n}^{k-1} < 0, \end{cases}$$

suurused $M_{i_n}^{k-1}$ ja $N_{i_n}^{k-1}$ määratakse järgmiselt:

$$M_{i_n}^{k-1} = \max_{\substack{i_1=0,1,\dots,N_1-1 \\ \dots\dots\dots \\ i_{n-1}=0,1,\dots N_{n-1}-1}} M_{i_1\dots i_{n-1} i_n}^{k-1}$$

ja

$$N_{i_n}^{k-1} = \min_{\substack{i_1=0,1,\dots,N_1-1 \\ \dots\dots\dots \\ i_{n-1}=0,1,\dots,N_{n-1}-1}} N_{i_1\dots i_{n-1} i_n}^{k-1} ,$$

kus $M_{i_1\dots i_n}^{k-1}$ ja $N_{i_1\dots i_n}^{k-1}$ leitakse seoste (9) ja (10) abil.

Kui $Z'_{ni_n} = Z''_{ni_n} = 0$, siis asume punkti 9) täitmisele.

5) Kui kehtib $\bar{X}_n^{ki_n} \leq \bar{\bar{X}}_n^{k,i_n+1}$, siis asume punkti 6) täitmisele, kui mitte, siis punkti 10) juurde.

6) lahendame täpsusega $\varepsilon_0 > 0$ ülesanded:

$$\max f(x_1,\dots,x_{n-1},\bar{X}_n^{ki_n}) = \bar{f}_{i_n}^*$$

kitsendustel

$$f_i(x_1,\dots,x_{n-1},\bar{X}_n^{ki_n}) \leq 0 \quad (i=1,\dots m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n-1)$$

ja

$$\max f(x_1,\dots,x_{n-1},\bar{\bar{X}}_n^{k,i_n+1}) = \bar{\bar{f}}_{i_n+1}^*$$

kitsendustel

$$f_i(x_1,\dots,x_{n-1},\bar{\bar{X}}_n^{k,i_n+1}) \leq 0 \quad (i=1,\dots,m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n-1).$$

Leiame ka punktid $\bar{\xi}_{i_n}^{k*}$ ja $\bar{\bar{\xi}}_{i_n+1}^{k*}$, nii et

$$\bar{f}_{i_n}^{k*} = f(\bar{\xi}_{i_n}^{k*}) \geq \bar{f}_{i_n}^* - \varepsilon_0$$

ja

$$\bar{\bar{f}}_{i_n+1}^{k*} = f(\bar{\bar{\xi}}_{i_n+1}^{k*}) \geq \bar{\bar{f}}_{i_n+1}^* - \varepsilon_0 .$$

7) Valime

$$\bar{g}=\max\{g, \bar{f}^{k*}_{i_n}, \bar{\bar{f}}^{k*}_{i_n+1}\}$$

ning

$$\bar{\xi}^*=\begin{cases}\xi^*, & \text{kui } \bar{g}=g,\\ \bar{\xi}^{k*}_{i_n}, & \text{kui } \bar{g}=\bar{f}^{k*}_{i_n},\\ \bar{\bar{\xi}}^{k*}_{i_n+1}, & \text{kui } \bar{g}=\bar{\bar{f}}^{k*}_{i_n+1}.\end{cases}$$

8) tähistame $g=\bar{g}$ ja $\xi^*=\bar{\xi}^*$.

9) sel juhul on meil tegemist juhuga 2) leheküljel 26) ja seda n-mõõtmelist risttahukat teisendame selles punktis antud reeglite järgi.

10) võtame $i_n=i_n+1$. Kui nüüd $i_n=N_n$, siis võtame $k=k+1$ ja $i_n=0$. Asume punkti 4) täitmisele.

Protsess lõpeb k_0 sammu järel, kui kõik n-mõõtmelised risttahukad on teisenenud tühjaks hulgaks või kõdunud hüpertasandi tõkestatud piirkonnaks. Tulemuseks saame punkti ξ^*, mis rahuldab koonduvusteoreemi põhjal tingimust: $g=f(\xi^*)\geqslant f^*-\varepsilon_0$.

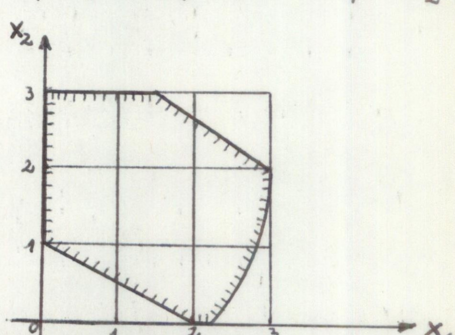
4. Näide

Leida täpsusega $\varepsilon_0=0{,}5$

$$\max f(x_1,x_2)=\max(2x_1^4-10x_1^3x_2+7x_1^2x_2^2-18x_1+x_2^2)$$

kitsendustel

$$x_2-3\leq 0,$$
$$2x_1+3x_2-12\leq 0,$$
$$-x_1-2x_2+2\leq 0,$$
$$x_1^2+x_2^2-4x_2-5\leq 0,$$
$$x_i\geqslant 0\ (i=1,2).$$



Moodustame lubatavate lahendite piirkonnal ε-võrgu:

$$x_2=0,1,2,3.$$

Eelsamm

1. Lahendame ülesande:

leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [2;\, 2,236]} f_0(x_1) = \max_{x_1 \in [2;\, 2,236]} (2x_1^4 - 18x_1)$$

Võtame ε -võrguks lõigu otspunktid.

x_1^0	2	2,236
$f_0(x_1^0)$	- 4	- 15,2
$M_0^0 \mid N_0^0$	89,4	46
x_1^1	[2,01; 2,00] = $\emptyset$	

Seega on ülesande lahendiks punkt $\xi_0^{0*} = (2;\, 0)$, kus $f(\xi_0^{0*}) = f_0^{0*} = -4$.

2. Lahendame ülesande:

leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;\, 2,828]} f_1(x_1) = \max_{x_1 \in [0;\, 2,828]} (2x_1^4 - 10x_1^3 + 7x_1^2 - 18x_1 + 1).$$

$$f_1'(x_1) = 8x_1^3 - 30x_1^2 + 14x_1 - 18.$$

Moodustame lõigul $[0;\, 2,828]$ ε -võrgu: $x_1 = 0;\, 1;\, 2;\, 2,828$.

x_1^0	0		1		2	2,828
$f_1(x_1^0)$	1		- 18		- 55	-92,2
$M_{i_1}^0 \mid N_{i_1}^0$	4	-48	44	-116	82,8	-166
x_1^1	[0,125; 0,59]		[1,44; 1,51]		[2,68; 2,26] = $\emptyset$	
$f_1(x_1^1)$	-1,17	-9,07	-31,6	-44,8		
$M_{i_1}^1 \mid N_{i_1}^1$	-8,5	-27,4	-31,5	-58,3		
x_1^2	[1,125; 0,20] = $\emptyset$		[2,44; 0.72] = $\emptyset$			

Seega on selle ülesande lahendiks $\xi_1^{0*} = (0,\, 1)$,

kus $f(\xi_1^{0*}) = f_1^{0*} = 1$.

3. Lahendame ülesande:

leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0,3]} f_2(x_1) = \max_{x_1 \in [0,3]} (2x_1^4 - 20x_1^3 + 28x_1^2 - 18x_1 + 4).$$

$$f_2'(x_1) = 8x_1^3 - 60x_1^2 + 56x_1 - 18.$$

Moodustame lõigul $[0,3]$ ε -võrgu: $x_1 = 0, 1, 2, 3$.

x_1^0	0	1		2		3
$f_2(x_1^0)$	4	-4		-48		-176
$M_{i_1}^0 \| N_{i_1}^0$	46	-78	98	-192	126	-382
x_1^1	[0,011;	0,89]	[1,087;	1.73]	[2,42;	2,53]
$f_2(x_1^1)$	3.83	-2,68	-4,3	-28,9	-101,4	-113,8
$M_{i_1}^1 \| N_{i_1}^1$	37,4	-64,9	48,9	-125,6	-12,4	-141,8
x_1^2	[0,03;	0,78]	[1,26;	1,45]	[3,42;	2,12] $=\emptyset$
$f_2(x_1^2)$	3,66	-3,75	-4,9	-11,1		
$M_{i_1}^2 \| N_{i_1}^2$	29,3	-52,8	-13,8	-66,2		
x_1^3	[0,06;	0,62]	[2,26;	1,18] $=\emptyset$		
$f_2(x_1^3)$	3,03	-0,88				
$M_{i_1}^3 \| N_{i_1}^3$	18,40	-37,7				
x_1^4	[0,14;	0,44]				
$f_2(x_1^4)$	1,98	-0,11				
$M_{i_1}^4 \| N_{i_1}^4$	6,1	-21,8				
x_1^5	[0,55;	0,25] $=\emptyset$				

Selle ülesande lahendiks on seega $\xi_2^{0*} = (0, 2)$, kus

$f(\xi_2^{0*}) = f_2^{0*} = 4.$

4. Lahendada ülesanne!

leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;1,5]} f_3(x_1) = \max_{x_1 \in [0;1,5]} (2x_1^4 - 30x_1^3 + 63x_1^2 - 18x_1 + 9).$$

$$f_3'(x_1) = 8x_1^3 - 90x_1^2 + 126x_1 - 18.$$

Lõigu $[0; 1,5]$ ε- võrguks võtame $x_1 = 0;\ 0,5;\ 1,0;\ 1,5.$

x_1^0	0	0,5		1,0		1,5
$f_3(x_1^0)$	9	12,13		26		32,93
$M_{i_1}^0 \mid N_{i_1}^0$	46	-40,5	92,5	-44	108	-96,3
x_1^1	[0,53;	-0,07] = ∅	[0,73;	0,83]	[1,07;	1,495]
$f_3(x_1^1)$			18,43	21,07	27,57	32,80
$M_{i_1}^1 \mid N_{i_1}^1$			43,0	15,0	93,5	-74,5
x_1^2			[1,08;	0,33] = ∅	[1,14;	1,486]
$f(x_1^2)$					29,08	32,72
$M_{i_1}^2 \mid N_{i_1}^2$					78,3	-54,5
x_1^3					[1,20;	1,47]
$f(x_1^3)$					29,55	32,55
$M_{i_1}^3 \mid N_{i_1}^3$					63,9	-36,1
x_1^4					[1,25;	1,45]
$f(x_1^4)$					30,55	32,40
$M_{i_1}^4 \mid N_{i_1}^4$					48,0	-33,7
x_1^5					[1,33;	1,42]
$f(x_1^5)$					31,1	+32,1

$M^5_{i_1}/N^5_{i_1}$			24,6 -10,5
x_1^6			$[1{,}38;\ 1{,}21] = \emptyset$

Selle ülesande lahendiks on seega punkt $\xi_3^{0*} = (1,5;\ 3)$, kus $f(\xi_3^{0*}) = f_3^{0*} = 32,93$.

5. Valime $g = \max\limits_{0 \le i \le 3} f(\xi_i^{0*}) = 32,93$ ja vastav $\xi^* = \xi_3^{0*} = (1,5;\ 3)$.

6. Hindame osatuletist

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -10x_1^3 + 14x_1^2 x_2 + 2x_2 .$$

							$M^0_{i_2}$
$M^0_{i_1 2}$	16,5	24,7	34,3	49,8	61,2	75,4	75,4
$M^0_{i_1 1}$	11	20,75	33,7	42,25	39	33,87	42,25
$M^0_{i_1 0}$	5,5	14,25	26	24,25	9,5	-28,1	26

0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0

							$N^0_{i_2}$
$N^0_{i_1 2}$	2,75	1	-1,75	-13	-40,87	-91	-91
$N^0_{i_1 1}$	0,75	-4,5	-17,75	-46,5	-98,13	-180,5	-180,5
$N^0_{i_1 0}$	-1,25	-10	-33,75	-80	-156,13	-270	-270

0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0

Leiame juurdekasvud:

$$Z'_{20} = \frac{36,93}{26} = 1,42 , \qquad \bar{x}_2^{10} = 1,42 ,$$

$$Z''_{21} = \frac{31,93}{-270} = -0,12 , \qquad \bar{\bar{x}}_2^{11} = 0,88 .$$

Kuna $\bar{X}_2^{10} > \bar{\bar{X}}_2^{11}$, siis $X_0^1 = \emptyset$.

$$z_{21}' = \frac{31,93}{42,25} = 0,76\,, \qquad \bar{X}_2^{11} = 1,76\,,$$

$$z_{22}'' = \frac{28,93}{-180,5} = -0,16\,, \qquad \bar{X}_2^{12} = 1,84\,.$$

I. samm

1. Lahendame ülesande!

leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;2,99]} \bar{f}_1(x_1) = \max_{x_1 \in [0;2,99]} (2x_1^4 - 17,6x_1^3 + 21,7x_1^2 - 18x_1 + 3,1).$$

Lahendades selle ülesande analoogiliselt eelsammul lahendatud ülesannetega, saame tulemuseks punkti $\bar{\xi}_1^{1*} = (0;1,76)$, kus $f(\bar{\xi}_1^{1*}) = \bar{f}_1^{1*} = 3,1$.

2. Lahendades ülesande! leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;2,99]} \bar{\bar{f}}_2(x_1) = \max_{x_1 \in [0;2,99]} (2x_1^4 - 18,4x_1^3 + 23,7x_1^2 - 18x_1 + 3,4),$$

saame tulemuseks punkti $\bar{\bar{\xi}}_2^{1*} = (0;1,84)$, milles $f(\bar{\bar{\xi}}_2^{1*}) = \bar{\bar{f}}_2^{1*} = 3,4$.

3. Leiame $g = \max[32,93;\ 3,1;\ 3,4] = 32,93$ ja $\xi^* = (1,5;\ 3)$.

4. Leiame juurdekasvud!

$$z_{22}' = \frac{28,93}{75,4} = 0,39\,, \qquad \bar{X}_2^{12} = 2,39\,,$$

$$z_{23}' = 0\,, \qquad \bar{\bar{X}}_2^{13} = 3,0\,.$$

5. Lahendades ülesande! leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;2,41]} \bar{f}_2(x_1) = \max_{x_1 \in [0;2,41]} (2x_1^4 - 23,9x_1^3 + 40x_1^2 - 18x_1 + 5,71),$$

saame tulemuseks punkti $\bar{\xi}_2^{1*} = (0,94;\ 2,39)$, milles $f(\bar{\xi}_2^{1*}) = \bar{f}_2^{1*} = 6,08$.

6. Hindame osatuletist

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -10\,x_1^3 + 14\,x_1^2\,x_2 + 2\,x_2 \,.$$

$M^1_{i_2}$

$M^1_{i_1 2}$	16,5	24,7	34,3	49,8	61,2	75,4	75,4
$M^1_{i_1 1}$	10,1	19,8	31,4	39,4	38,1	31,7	39,4

0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0

$N^1_{i_2}$

$N^1_{i_1 2}$	3,53	3,15	4,53	0,18	-17,35	-65,72	-65,72
$N^1_{i_1 1}$	1.85	-0,32	-5,63	-21,08	-54,11	-112,5	-112,5

0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0

II samm

1. Leiame juurdekasvud!

$$Z'_{21} = \frac{29,83}{39,4} = 0,65 \quad , \quad \bar{X}_2^{21} = 2,41 \,,$$

$$Z''_{22} = \frac{29,53}{-112,5} = -0,26 \quad , \quad \bar{\bar{X}}_2^{22} = 1,58 \,.$$

Kuna $\bar{X}_2^{21} > \bar{\bar{X}}_2^{22}$, siis $X_1^2 = \emptyset$.

$$Z'_{22} = \frac{26,85}{75,4} = 0,36 \quad , \quad \bar{X}_2^{22} = 2,75 \,,$$

$$Z''_{23} = 0 \quad , \quad \bar{\bar{X}}_2^{23} = 3,0 \,.$$

2. Lahendades ülesande! leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;\,1,875]} \bar{f}_2(x_1) = \max_{x_1 \in [0;\,1,875]} \left(2x_1^4 - 27,5\,x_1^3 + 53\,x_1^2 - 18\,x_1 + 7,56\right),$$

saame tulemuseks $\bar{\xi}_2^{2*} = (1,17;\ 2,75)$, milles $f(\bar{\xi}_2^{2*}) = 19,30$.

3. Leiame, et $g = 32,93$ ja $\xi^* = (1,5;\ 3,0)$.

4. Leiame, et $M_2^2 = 75,4$.

III samm

1. Arvutame juurdekasvud:

$$Z'_{22} = \frac{13,63}{75,4} = 0,18 \quad , \quad \bar{X}_2^{32} = 2,93,$$

$$Z''_{23} = 0 \quad , \quad \bar{\bar{X}}_2^{33} = 3,0.$$

2. Lahendades ülesande: leida täpsusega $\varepsilon_0 = 0,5$

$$\max_{x_1 \in [0;\,1,605]} \bar{f}_2(x_1) = \max_{x_1 \in [0;\,1,605]} (2x_1^4 - 29,3x_1^3 + 60,1x_1^2 - 18x_1 + 8,6),$$

saame tulemuseks punkti $\bar{\xi}_2^{3*} = (1,435;\ 2,93)$, milles $f(\bar{\xi}_2^{3*}) = 27,47$.

3. Leiame, et $g = 32,93$ ja $\xi^* = (1,5;\ 3,0)$.

4. Leiame, et $M_2^3 = 75,4$.

IV samm

1. Arvutame juurdekasvud:

$$Z'_{22} = \frac{5,46}{75,4} = 0,072 \quad , \quad \bar{X}_2^{42} = 3,002,$$

$$Z''_{23} = 0 \quad , \quad \bar{\bar{X}}_2^{43} = 3,0.$$

Kuna $\bar{X}_2^{42} > \bar{\bar{X}}_2^{43}$, siis $X_2^4 = \emptyset$ ja seega oleme kõik ristkülikud teisendanud tühjadeks hulkadeks.
Seega on meie esialgse ülesande lahendiks $\xi^* = (1,5;\ 3,0)$, milles $f(\xi^*) = 32,93$.

Kasutatud kirjandus

1. Исследования по кибернетике. Москва, 1970.
2. G.Kangro. Matemaatiline analüüs. Tallinn,1969.
3. Г.Корн,Т.Корн. Справочник по математике. Москва 1970.

А.Керге

Метод покрытий для решения задачи математического программирования

Р е з ю м е

В настоящей дипломной работе рассматривается возможность использования методов математического анализа при решении задачи математического программирования.

В первой главе проводится общая теория метода покрытий В.В.Леонова ([1] стр.41-52) в немного исправленном и обобщенном виде.

Во второй части работы даётся метод решения следующей задачи:
найти с точностью $\varepsilon_0 > 0$

$$\max f(x_1, \ldots, x_n) = f^*$$

и точку $\xi^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in D$, так что

$$f(\xi^*) \geqslant f^* - \varepsilon_0 ,$$

где выпуклое ограниченное множество D определяется условиями

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Под целевой функцией $f(\xi)$ рассматриваются аналитические функции в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} c_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} .$$

Значения функции $f(\xi)$ и всех частных производных I степени должны быть конечными в области D.

12.06.72.

АКерге

S i s u k o r d