

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA FÜSIKA
JA ASTRONOOMIA INSTITUUDI UURIMUSED
ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ
АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР

25

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО
ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

TARTU 1964 TARTU

ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО

ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Обобщенные инвариантные системы в общей теории относительности

15. Система счета как геометрический образ. Все, что было сказано о системах счета и координатных системах в главах 1—3, переносится без изменений в общую теорию относительности. Также в римановской теории понятие пространства времени не играет никакой большой роли, и теория как в общей теории относительности это понятие является локальным. Поэтому будем описывать систему счета и на языке геометрии четырехмерного пространства-времени. Будем считать, что система счета, определенная на кусочке материи, является локальным объектом в четырехмерном пространстве и одной из систем координат, построенных на этой базе.

TARTU 1964 TARTU

Редакционная коллегия «Трудов»

Ф. Д. Клемент (председатель)

Х. П. Керес, Ч. Б. Лушик, Ю. А. Лепик, К. К. Ребане, Х. Х. Ёйглане

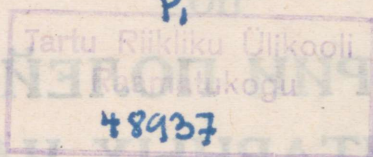
Ответственный редактор А. А. Айнсаар

Редактор Л. Я. Парфенова

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета

Академии наук Эстонской ССР

РИСО № 470



ОБОБЩЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В НЬЮТОНОВСКОЙ И ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКАХ. II ТЕОРИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Х. П. Керес

Эта статья является продолжением предыдущей [3]. В ней рассматриваются так называемые обобщенные инерциальные системы, определенные в общей теории относительности таким же методом, как определяются обобщенные инерциальные системы в «нежесткой» ньютоновской механике. Показано, что, аналогично нежесткой ньютоновской механике, движение всякого пространства характеризуется относительно множества всех обобщенных инерциальных систем двумя величинами b_i и Ω_{ik} (эти величины вычисляются с помощью конкретной обобщенной инерциальной системы S' , но являются независимыми от выбора S'). Рассмотрены различные типы (по характеристикам b_i, Ω_{ik}) неинерциальных систем отсчета.

II. Обобщенные инерциальные системы в общей теории относительности

15. Система отсчета как геометрический образ. Все, что было сказано о системах отсчета и координатных системах в пп. 1—3, переносится без изменения в общую теорию относительности. Только в ньютоновской теории понятие пространства-времени не играло никакой большой роли, в то время как в общей теории относительности это понятие является центральным. Поэтому будем описывать систему отсчета и на языке геометрии четырехмерного пространства-времени. Вспомним, что система отсчета, определенная некоторой материальной базой, состоит из трехмерного пространства и одномерного времени, отнесенных к этой базе.

Все точки-мгновения, принадлежащие к одной и той же пространственной точке, образуют в пространстве-времени направленную линию — мировую линию этой пространственной точки. Пространство в целом определяет трехмерную конгруэнцию мировых линий своих точек. Все точки-мгновения, принадлежащие к одному и тому же моменту времени (одновременные точки-мгновения), образуют в пространстве-времени гиперповерхность — гиперповерхность одновременности, соответствующую данному моменту времени. Время в целом определяет одномерное семейство гиперповерхностей одновременности, пересекающих конгруэнцию мировых линий точек пространства. *Трехмерная конгруэнция мировых линий пространственных точек, пересеченная одномерным семейством гиперповерхностей одновременности, является четырехмерной геометрической фигурой, изображающей систему отсчета.* Если в системе отсчета определена координатная система (x^i, t) , то координатные линии $x^i = \text{const.}$ и координатные гиперповерхности $t = \text{const.}$ совпадают с мировыми линиями точек пространства соответственно с гиперповерхностями одновременности.

В общей теории относительности пространство-время рассматривается метрическим римановым пространством. Если мировые линии точек пространства системы отсчета являются геодезическими и гиперповерхности одновременности пересекают их ортогонально, то система отсчета называется *геодезической*.

16. Обобщенные инерциальные системы. Будем понимать под *пробной частицей* материальную точку, влиянием которой на фоновое гравитационное поле можно пренебречь. Мировая линия свободной пробной частицы является геодезической. Свободно движущаяся пробная частица является «свободно падающей» в гравитационном поле. Но, в духе принципа эквивалентности, согласно которому гравитационные и инерционные силы имеют одинаковую физическую природу, движение свободно падающей частицы можно рассматривать как движение по инерции [2]. Закон геодезической линии приобретает тогда значение *закона инерции* мате-

риальной точки, и мы можем, аналогично ньютоновской механике, определить инерциальные системы отсчета. Но так как в общей теории относительности, вообще говоря, отсутствует понятие жесткого тела, то возможно ввести только обобщенные инерциальные системы, по примеру нежесткой ньютоновской механики.

Нами показано [1], что в системе отсчета S , обладающей временем некоторой геодезической системы отсчета S' , и при подходящем выборе временной координаты t , уравнения геодезической линии записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u_i}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta} \Gamma_{ir}^s u_s \dot{x}^r + \frac{1}{\beta} u^s v_{s;i} = 0, \quad (16.1)$$

где

$$\beta^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad (16.2)$$

$$u^2 = u_s u^s = g_{rs} u^r u^s, \quad (16.3)$$

$u^i = \dot{x}^i - v^i$, c — постоянная, g_{ik} — составляющие метрического тензора трехмерного пространства, Γ_{ik}^s — символы Кристоффеля, составленные из g_{ik} , $u_i = g_{is} u^s$. Векторное поле $v^i(x^k, t)$, определенное в пространстве системы отсчета S , является полем скоростей точек пространства геодезической системы отсчета S' , к которой относится время t . Скорость v^i вычислена как производная dx^i/dt . Точка над буквой означает дифференцирование по t , точка с запятой перед индексом — ковариантное дифференцирование в трехмерном пространстве координат x^i . Уравнение (16.1) выражает закон инерции в общей теории относительности. Поскольку уравнение (16.1) отличается от соответствующего уравнения ньютоновской теории (5.1) только тем, что на месте скорости частицы u фигурирует величина u^i/β , то можем при определении обобщенных инерциальных систем поступать совершенно аналогично ньютоновской механике: *если в некоторой системе отсчета S закон инерции материальной точки имеет вид (16.1), то пространство, определенное полем скоростей $v^i(x^k, t)$, в сочетании со временем системы отсчета S , образует обобщенную инерциальную систему.* Специальную временную координату t назовем галилеевой временной координатой.

нотой. Из сказанного ранее ясно, что множество обобщенных инерциальных систем совпадает с множеством геодезических систем отсчета. Отсюда, между прочим, видно, что, в отличие от теории Ньютона, каждая обобщенная инерциальная система имеет свое собственное время.

17. Поле скоростей в обобщенной инерциальной системе, вызванное движением пространства другой обобщенной инерциальной системы. Пусть имеем обобщенную инерциальную систему S'' с координатной системой (x^i, τ) , где τ — галилеева временная координата. В такой координатной системе выражение четырехмерного линейного элемента имеет вид [1]

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - g_{rs} dx^r dx^s. \quad (17.1)$$

Пусть S' — некоторая другая обобщенная инерциальная система, в которой введена галилеева временная координата t ; она связана с координатой τ некоторым преобразованием

$$t = \varphi(x^i, \tau). \quad (17.2)$$

Имея ввиду правило преобразования составляющей g^{00} четырехмерного метрического тензора, при формуле преобразования (17.2), находим, что функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению [1]

$$\varphi_{,0}{}^2 - c^2 g^{rs} \varphi_{,r} \varphi_{,s} = 1, \quad (17.3)$$

где величины g^{ik} определяются из соотношений

$$g_{is} g^{ks} = \delta_i^k. \quad (17.4)$$

Запятая перед индексом обозначает обычное дифференцирование, в частности $\varphi_{,0} = \partial\varphi/\partial\tau$.

Пусть точка P пространства обобщенной инерциальной системы S' движется относительно обобщенной инерциальной системы S'' со скоростью $v^i(x^k, \tau) = dx^i/d\tau$. Вычислим с помощью выражения (17.1) контравариантные составляющие 4-скорости точки P

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\mu c}, \quad \frac{dx^i}{ds} = \frac{v^i}{\mu c}, \quad (17.5)$$

где обозначено

$$\mu^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad (17.6)$$

$$v^2 = v_s v^s = g_{rs} v^r v^s. \quad (17.7)$$

Уравнение $t = \text{const.}$, или, по формуле (17.2), уравнение $\varphi(x^i, \tau) = \text{const.}$ определяет гиперповерхности одновременности обобщенной инерциальной системы S' . Мировые линии точек пространства системы S' пересекают гиперповерхности $\varphi = \text{const.}$ ортогонально. Следовательно, единичный вектор (17.5) параллелен нормали гиперповерхности $\varphi = \text{const.}$, имеющей составляющие $\varphi_{,0}, \varphi_{,i}$. Но, согласно уравнению (17.3) вектор нормали с составляющими $c\varphi_{,0}, c\varphi_{,i}$ является единичным, и так как он, равно как и вектор (17.5), имеет направление увеличения t , то оба вектора должны быть равными. Мы получаем, таким образом, после опускания индексов с помощью коэффициентов линейного элемента (17.1), равенства

$$\varphi_{,0} = \frac{1}{\mu}, \quad \varphi_{,i} = -\frac{v_i}{c^2 \mu}, \quad (17.8)$$

где

$$v_i = g_{is} v^s. \quad (17.9)$$

Исключая из соотношений (17.8) функцию φ , находим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) + c^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\mu} \right) = 0, \quad (17.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{v_k}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) = 0. \quad (17.11)$$

Этим необходимым условиям удовлетворяет поле скоростей $v^i(x^k, \tau)$, вызванное в обобщенной инерциальной системе S'' движением пространства другой обобщенной инерциальной системы S' . Но условия (17.10), (17.11) и достаточны для того, чтобы поле скоростей $v^i(x^k, \tau)$ определяло движение пространства некоторой обобщенной инерциальной

системы S' относительно данной обобщенной инерциальной системы S'' . Действительно, уравнения (17.10), (17.11) являются условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (17.8). Если они выполнены, то существует функция $\varphi(x^i, \tau)$, удовлетворяющая уравнению (17.3). Но тогда уравнение $\varphi = \text{const.}$ определяет гиперповерхности одновременности некоторой обобщенной инерциальной системы S' [1]. По формуле (17.8) 4-скорость (17.5) ортогональна гиперповерхностям $\varphi = \text{const.}$, откуда и видим, что точки пространства обобщенной инерциальной системы S' движутся относительно системы S'' со скоростью v^i .

Уравнения (17.10), (17.11) соответствуют уравнениям (9.4), (9.5) ньютоновской теории. В теории Ньютона составляющие метрического тензора g_{ik} пространства системы отсчета S'' выражались формулой (8.4), где функция $u(\xi^i)$ была произвольно выбираемой. В общей теории относительности же g_{ik} определяются из системы дифференциальных уравнений [2]

$$P_i^k = \frac{1}{2c^2 \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{g} g^{ks} g_{is,0}), \quad (17.12)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial \tau \partial x^i} + \frac{1}{2} \Gamma_{is}^p g^{sr} g_{pr,0} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} (\sqrt{g} g^{ps} g_{is,0}), \quad (17.13)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{4} g^{pq} g^{rs} g_{pr,0} g_{qs,0} = 0, \quad (17.14)$$

где P_i^k — тензор Риччи, составленный из g_{ik} , $g = \det(g_{ik})$, и обозначено $g_{ik,0} = \partial g_{ik} / \partial \tau$.

18. Преобразования, связывающие обобщенные инерциальные системы между собой. Пусть в обобщенных инерциальных системах S' и S'' , рассмотренных в предыдущем пункте, определены координатные системы (ξ^i, t) и (x^i, τ) соответственно с галилеевыми временными координатами t и τ . Будем рассматривать методы вычисления координат события x^i, τ как функции от координат ξ^i, t того же события.

Первый способ. Полагаем искомое преобразование в виде

$$t = \varphi(x^k, \tau), \quad \xi^i = \xi^i(x^k, \tau). \quad (18.1)$$

Из равенства

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{rs} d\xi^r d\xi^s = c^2 d\tau^2 - g_{rs} dx^r dx^s, \quad (18.2)$$

где γ_{ik} — составляющие метрического тензора пространства системы S' , вытекают соотношения

$$c^2 \varphi_{,0}^2 - \gamma_{rs} \xi^r_{,0} \xi^s_{,0} = c^2, \quad (18.3)$$

$$c^2 \varphi_{,0} \varphi_{,i} - \gamma_{rs} \xi^r_{,0} \xi^s_{,i} = 0, \quad (18.4)$$

$$c^2 \varphi_{,i} \varphi_{,k} - \gamma_{rs} \xi^r_{,i} \xi^s_{,k} = -g_{ik}, \quad (18.5)$$

где обозначено $\varphi_{,0} = \partial\varphi/\partial\tau$, $\varphi_{,i} = \partial\varphi/\partial x^i$, $\xi^i_{,0} = \partial\xi^i/\partial\tau$, $\xi^i_{,k} = \partial\xi^i/\partial x^k$. Считая функции $\gamma_{ik}(\xi^i, t)$ известными, имеем в виде соотношений (18.3) и (18.4) четыре уравнения для определения четырех неизвестных функций φ , ξ^i . Равенство (18.5) служит для вычисления коэффициентов g_{ik} .

Второй способ. Будем решать уравнение (17.3) для функции $\varphi(x^i, \tau)$, фигурирующей в формуле (18.1), методом Коши [1]. Соответствующая уравнению (17.3) характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений получается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= p_0, & \frac{dx^i}{dt} &= -c^2 g^{is} p_s, \\ \frac{dp_0}{dt} &= \frac{1}{2} c^2 g^{rs}_{,0} p_r p_s, & \frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{2} c^2 g^{rs}_{,i} p_r p_s, \end{aligned} \quad (18.6)$$

где обозначено $g^{rs}_{,0} = \partial g^{rs}/\partial\tau$, $g^{rs}_{,i} = \partial g^{rs}/\partial x^i$. Величины $g_{ik}(x^i, \tau)$ считаются известными. Система (18.6), имеющая интеграл

$$p_0^2 - c^2 g^{rs} p_r p_s = 1, \quad (18.7)$$

решается при начальных значениях $\tau = \tau(0)$, $x^i = x^i(0)$, $p_0 = p_0(0)$, $p_i = p_i(0)$, выбранных зависящими от трех параметров ξ^i , а именно

$$\tau = \frac{1}{c^2} F(\xi^k), \quad x^i = F^i(\xi^k), \quad (18.8)$$

где F, F_i — произвольные функции, и $\dot{p}_0 = \dot{p}_0(\xi^k)$, $\dot{p}_i = \dot{p}_i(\xi^k)$, удовлетворяющие соотношениям (18.7) и

$$p_0 F_{,i} + c^2 p_s F^s_{,i} = 0, \quad (18.9)$$

где обозначено $F_{,i} = \partial F / \partial \xi^i$, $F^i_{,k} = \partial F^i / \partial \xi^k$. Если решение этой задачи написано в виде

$$\tau = \tau(\xi^k, t), \quad x^i = x^i(\xi^k, t), \quad (18.10)$$

$$p_0 = p_0(\xi^k, t), \quad p_i = p_i(\xi^k, t), \quad (18.11)$$

то соотношения (18.10) являются уравнениями искомого преобразования, обратного преобразованию (18.1).

Уравнение (18.7), алгебраическое относительно величин p_0, p_i , решается в следующем общем виде:

$$p_0 = \frac{1}{\mu}, \quad p_i = -\frac{v_i}{c^2 \mu}, \quad (18.12)$$

$$\mu^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad v^2 = v_s v^s, \quad v^i = g^{is} v_s, \quad (18.13)$$

где v_i — новые неизвестные функции. Подставляя выражения (18.12) в характеристическую систему (18.6), получаем уравнения для неизвестных функций x^i, v_i ,

$$\frac{dx^i}{d\tau} = v^i, \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu} \Gamma_{ir,s} v^r v^s = 0. \quad (18.14)$$

Эту систему придется решать при начальных условиях: если

$\tau = \frac{1}{c^2} F(\xi^k)$, то $x^i = F^i(\xi^k)$, $v_i = \dot{v}_i(\xi^k)$, где, согласно формуле (18.9), величины \dot{v}_i определяются из уравнений

$$\dot{v}_s F^s_{,i} = F_{,i}. \quad (18.15)$$

Решение

$$x^i = f^i(\xi^k, \tau), \quad v_i = h_i(\xi^k, \tau) \quad (18.16)$$

определяет движение точек $\xi^k = \text{const.}$ пространства системы отсчета S' относительно системы отсчета S'' и соответствующее этому движению поле скоростей v^i в системе отсчета S'' .

Величину $p_0 = 1/\mu$ можно с помощью соотношений (18.16) выразить через ξ^i, τ . Тогда первое уравнение системы (18.6) записывается в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = p_0(\xi^i, \tau), \quad (18.17)$$

решением которого, при начальном условии $\tau(0) = F(\xi^i)/c^2$, является

$$t = \int_{F/c^2}^{\tau} \mu d\tau. \quad (18.18)$$

Равенство (18.18) равносильно первому уравнению (18.10). Второе уравнение (18.10) получается из решения (18.16) в виде

$$x^i = f^i[\xi^k, \tau(\xi^j, t)]. \quad (18.19)$$

Начальные значения $F(\xi^k)$, $F^i(\xi^k)$ определяют новую обобщенную инерциальную систему S' , а также пространственную координатную систему (ξ^i) в системе отсчета S' . Так как координатную систему (ξ^i) можно выбрать произвольно, то из четырех функций F , F^i три, например F^i , могут быть выбраны в каком-нибудь частном виде, например, $F^i \equiv \xi^i$. Система отсчета S' определяется тогда выбором только одной функции F . Следовательно, множество обобщенных инерциальных систем зависит, как и в ньютоновской механике, от одной произвольной функции $F(\xi^i)$ трех пространственных координат ξ^i .

Третий способ. Будем исходить из поля скоростей $v^i(x^k, \tau)$, удовлетворяющего условиям (17.10), (17.11) и характеризующего движение пространства системы отсчета S' относительно системы отсчета S'' . Так как равенства (17.10), (17.11) являются условиями интегрируемости системы (17.8), или, что то же самое, для уравнения

$$dt = \frac{1}{\mu} \left(d\tau - \frac{v_s dx^s}{c^2} \right), \quad (18.20)$$

то последнее уравнение имеет решение в виде

$$t = \varphi(x^i, \tau). \quad (18.21)$$

Далее, желая определить движение точек пространства системы отсчета S' , будем решать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\tau} = v^i(x^k, \tau), \quad (18.22)$$

например, при начальном условии $x^i(0) = \xi^i$. Решение этой системы

$$x^i = x^i(\xi^k, \tau), \quad (18.23)$$

вместе с уравнением (18.21) определяет искомое преобразование.

19. Обобщенное ускорение точки. При формулировке закона инерции в виде (16.1) нужно рассматривать две системы отсчета, обладающие общим временем: система отсчета общего типа S с координатной системой (x^i, t) , и обобщенная инерциальная система S' , в которой можно ввести галилееву временную координату t . Поле скоростей $v^i(x^k, t)$ описывает движение пространства системы отсчета S' относительно системы отсчета S . Будем рассматривать теперь частный случай $S = S'$. Тогда $v^i = 0$, и мы получаем на основании формулы (16.1) закон инерции материальной точки, написанный в обобщенной инерциальной системе при использовании галилеевой временной координаты t , в виде

$$a_i = 0, \quad (19.1)$$

где

$$a_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{is} \dot{x}^s}{a} \right) - \frac{1}{a} \Gamma_{ir,s} \dot{x}^r \dot{x}^s, \quad (19.2)$$

$$a^2 = 1 - \frac{g_{rs} \dot{x}^r \dot{x}^s}{c^2}. \quad (19.3)$$

Назовем величину a_i , определенную формулой (19.2), *обобщенным ускорением* частицы относительно обобщенной инерциальной системы. Оно отличается от соответствующего выражения ньютоновской механики только множителем $1/a$. Мы можем на основании формулы (19.1) высказать закон инерции материальной точки в следующей форме: *свободно падающая материальная частица движется относительно обобщенной инерциальной системы с нулевым обобщенным ускорением*. Эта форма закона инерции, совпадающая дословно с соответствующей формулировкой в ньютоновской механике, характерна обобщенным инерциальным системам. Из множества всевозможных систем отсчета можно выделить множество обобщенных инерциальных систем также по этому признаку.

20. Основной закон динамики пробной частицы. Пусть имеем некоторую систему отсчета S с координатной системой (x^i, t) . Пусть частица P движется относительно системы отсчета S по закону $x^i = x^i(t)$, или в четырехмерной формулировке, по закону*

$$x^\mu = x^\mu(s), \quad (20.1)$$

где обозначено $x^0 = t$. Соотношения (20.1) являются одновременно уравнениями мировой линии частицы P . 4-скорость частицы P , $V^\mu = dx^\mu/ds$, является касательным единичным вектором к мировой линии (20.1). С помощью 4-скорости V^μ вычислим вектор U_μ , определяемый формулой

$$U_\mu = \frac{dV_\mu}{ds} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} V_\sigma V^\nu, \quad (20.2)$$

где $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}$ — четырехмерные скобки Кристоффеля, составленные из коэффициентов выражения линейного элемента в координатной системе (x^i, t) . С помощью тех же коэффициентов производятся и опускание и поднятие индексов четырехмерных векторов и тензоров. Вектор U_μ , например, имеет контравариантные составляющие

$$U^\mu = \frac{dV^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma \nu \end{matrix} \right\} V^\sigma V^\nu. \quad (20.3)$$

Векторы V^μ и U_μ — ортогональны. В самом деле, умножая равенство (20.2) на V^μ и пользуясь при этом равенством

$$V^\mu \frac{dV_\mu}{ds} = -V_\mu \frac{dV^\mu}{ds},$$

вытекающим из уравнения $V_\mu V^\mu = 1$, получаем выражение

$$V^\mu U_\mu = -V_\mu \frac{dV^\mu}{ds} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma \nu \end{matrix} \right\} V_\mu V^\sigma V^\nu,$$

* Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3.

которое, с другой стороны, ввиду формулы (20.3), равно произведению $-V_\mu U^\mu$. Отсюда видно, что

$$U_\mu V^\mu = 0. \quad (20.4)$$

Взяв здесь $V^0 = dt/ds$, $V^i = \dot{x}^i(dt/ds)$, запишем равенство (20.4) в виде

$$U_0 + U_s \dot{x}^s = 0. \quad (20.5)$$

Если частица P свободно падающая, то

$$U_\mu = 0, \quad (20.6)$$

так как мировая линия свободно падающей частицы является геодезической, а соотношения (20.6) являются уравнениями геодезической линии, как это особенно хорошо видно из формулы (20.3). Если же частица P не является свободно падающей, то ее движение описывается уравнением типа

$$m_0 U_\mu = F_\mu, \quad (20.7)$$

где m_0 — инвариантная масса частицы, и F_μ — величина, характеризующая силы, действующие на частицу. На основании формул (20.5) и (20.7) 4-сила F_μ всегда удовлетворяет условию

$$F_0 + F_s \dot{x}^s = 0. \quad (20.8)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда S является обобщенной инерциальной системой и t — галилеевой временной координатой. Тогда имеем

$$V^0 = \frac{1}{ca}, \quad V^i = \frac{\dot{x}^i}{ca}, \quad (20.9)$$

и так как

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{rs} dx^r dx^s, \quad (20.10)$$

то

$$V_0 = \frac{c}{a}, \quad V_i = -\frac{g_{is} \dot{x}^s}{ca}. \quad (20.11)$$

Величина a определяется формулой (19.3). Далее, имеем

$$U_i = -\frac{a_i}{c^2 a}, \quad (20.12)$$

$$U_0 = \frac{1}{c^2 \alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{\alpha} \right) + \frac{1}{2\alpha} g_{rs,0} \dot{x}^r \dot{x}^s \right], \quad (20.13)$$

где a_i — обобщенное ускорение частицы, определенное формулой (19.2). Составляющую U_0 можно, по формуле (20.5), представить в виде

$$U_0 = \frac{1}{c^2 \alpha} a_s \dot{x}^s. \quad (20.14)$$

Из формул (20.12) и (20.14) вытекает, что равенства $a_i = 0$ и $U_\mu = 0$ эквивалентны между собой, как и должно быть, так как оба равенства выражают закон инерции материальной частицы. В частности, если обобщенное ускорение точки равно нулю в одной обобщенной инерциальной системе, то оно равняется нулю и в любой другой обобщенной инерциальной системе. Другими словами, равенство $a_i = 0$ не зависит от выбора обобщенной инерциальной системы. Будем говорить, что выражаемое равенством $a_i = 0$ свойство движения частицы имеет смысл относительно множества всех обобщенных инерциальных систем.

Из формул (20.8), (20.12) и (20.14) вытекает, что равенство (20.7) эквивалентно равенству

$$m_0 a_i = \dot{f}_i, \quad (20.15)$$

где

$$\dot{f}_i = -c^2 \alpha F_i. \quad (20.16)$$

Уравнением (20.15) выражается *основной закон динамики пробной частицы*. Он совпадает по форме со вторым законом Ньютона (8.7). Величина \dot{f}_i является вектором силы в трехмерном пространстве обобщенной инерциальной системы.

21. Неинерциальные системы отсчета, обладающие временем инерциальной системы. Будем рассматривать систему отсчета S , состоящую из пространства R произвольного типа и из времени, относящегося к некоторой обобщенной инерциальной системе S' . Если в пространстве R введена координатная система (x^i) , и в обобщенной инерциальной системе S' координатная система (ξ^i, t) , где t — галилеева времен-

ная координата, то в системе отсчета S будем иметь координатную систему (x^i, t) . Линейный элемент в координатной системе (ξ^i, t) имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{rs} d\xi^r d\xi^s. \quad (21.1)$$

Движение пространства обобщенной инерциальной системы S' относительно системы отсчета S описывается уравнениями вида

$$x^i = x^i(\xi^k, t). \quad (21.2)$$

Соответствующее этому движению поле скоростей в системе отсчета S представляется уравнением

$$v^i(x^k, t) = x^i_{,0}(\xi^k, t), \quad (21.3)$$

где обозначено $x^i_{,0} = \partial x^i / \partial t$, и величины ξ^k в правой части являются функциями от x^i, t , определенными из уравнений (21.2)

$$\xi^i = \xi^i(x^k, t). \quad (21.4)$$

Дифференцируя равенство (21.4) при $\xi^i = \text{const.}$ по t , находим, что

$$0 = \xi^i_{,s} v^s + \xi^i_{,0}, \quad (21.5)$$

где обозначено $\xi^i_{,0} = \partial \xi^i / \partial t$, $\xi^i_{,k} = \partial \xi^i / \partial x^k$. С помощью этого соотношения вычислим

$$d\xi^i = \xi^i_{,s} (dx^s - v^s dt). \quad (21.6)$$

Подставляя выражения (21.6) в правой части равенства (21.1), получаем выражение линейного элемента в координатной системе (x^i, t) ,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{rs} (dx^r - v^r dt) (dx^s - v^s dt), \quad (21.7)$$

или

$$ds^2 = c^2 \mu^2 dt^2 + 2v_s dx^s dt - g_{rs} dx^r dx^s, \quad (21.8)$$

где

$$g_{ik} = \gamma_{rs} \xi^r_{,i} \xi^s_{,k} \quad (21.9)$$

и

$$\mu^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad v^2 = v_s v^s, \quad v_i = g_{is} v^s. \quad (21.10)$$

Заметим, что в любой системе отсчета S линейный элемент может быть преобразован к виду (21.7) или (21.8). При такой форме линейного элемента 4-скорость движущейся частицы P имеет компоненты

$$V^0 = \frac{1}{c\beta}, \quad V^i = \frac{\dot{x}^i}{c\beta}; \quad (21.11)$$

$$V_0 = \frac{c^2 + v_s u^s}{c\beta}, \quad V_i = -\frac{u_i}{c\beta}, \quad (21.12)$$

где $u^i = \dot{x}^i - v^i$, и

$$\beta^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad u^2 = u_s u^s, \quad u_i = g_{is} u^s. \quad (21.13)$$

Далее вычислим, по формуле (20.2),

$$U_i = -\frac{1}{c^2\beta} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta} \Gamma_{ir,s} \dot{x}^r u^s + \frac{1}{\beta} u^s v_{s;i} \right\}, \quad (21.14)$$

или

$$U_i = -\frac{1}{c^2\beta} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta} u^s v_{s,i} - \frac{1}{2\beta} g_{rs,i} (\dot{x}^r \dot{x}^s - v^r v^s) \right\}, \quad (21.15)$$

$$U_0 = \frac{1}{c^2\beta} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2 + v_s u^s}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta} u^s v_{s,0} + \frac{1}{2\beta} g_{rs,0} (\dot{x}^r \dot{x}^s - v^r v^s) \right\}. \quad (21.16)$$

Можно показать, после довольно громоздких вычислений, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} -c^2 \beta^2 U_s \left(\delta_i^s - \frac{u_i u^s}{c^2} \right) &= \alpha a_s \left(\delta_i^s - \frac{1}{c^2} g_{ip} \dot{x}^p \dot{x}^s \right) - v_{i,0} - v^s v_{s;i} - \\ &- (v_{i,s} - v_{s,i}) \dot{x}^s - \frac{1}{c^2} u_i A_{rs} u^r u^s + \frac{1}{2c^2} g_{ip} \dot{x}^p g_{rs,0} \dot{x}^r \dot{x}^s, \end{aligned} \quad (21.17)$$

где величины a_i и α определены формулами (19.2) и (19.3), и

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (v_{i;k} + v_{k;i} + g_{ik,0}). \quad (21.18)$$

В силу формулы (20.5) закон инерции материальной точки (20.6) можно записать в виде $U_i = 0$ откуда, по формуле (21.14), получается уравнение (16.1), а по формуле (21.17) равенство

$$a_i = \frac{1}{\alpha} (v_{i,s} - v_{s,i}) \dot{x}^s + \frac{1}{\alpha} (\delta_i^q + \frac{1}{c^2 \alpha^2} g_{ip} \dot{x}^p \dot{x}^q) (v_{q,0} + v^s v_{s;q} + \frac{1}{c^2} u_q A_{rs} u^r u^s - \frac{1}{2c^2} g_{qp} \dot{x}^p g_{rs,0} \dot{x}^r \dot{x}^s). \quad (21.19)$$

В пределе $c \rightarrow \infty$ равенство (21.19) приобретает вид

$$a_i = (v_{i,s} - v_{s,i}) \dot{x}^s + v_{i,0} + v^s v_{s;i}. \quad (21.20)$$

Эта формула совпадает точно с соответствующей формулой (12.1) из ньютоновской механики. Там правая часть равенства (21.20) играла роль суммарной силы инерции, действующей на частицу. Такую же точку зрения мы можем принимать относительно равенства (21.19). Сравнивая уравнение (21.19) с уравнением (20.15), выражающим основной закон динамики пробной частицы, мы видим, что *свободно падающая частица движется так, как будто система отсчета S — обобщенная инерциальная система, но частица не свободная, а находится под влиянием силы инерции*

$$f_i^* = \frac{m_0}{\alpha} (v_{i,s} - v_{s,i}) \dot{x}^s + \frac{m_0}{\alpha} (\delta_i^q + \frac{1}{c^2 \alpha^2} g_{ip} \dot{x}^p \dot{x}^q) (v_{q,0} + v^s v_{s;q} + \frac{1}{c^2} u_q A_{rs} u^r u^s - \frac{1}{2c^2} g_{qp} \dot{x}^p g_{rs,0} \dot{x}^r \dot{x}^s), \quad (21.21)$$

где m_0 — инвариантная масса частицы.

Если на частицу действует 4-сила F_μ , то, согласно формулам (20.7) и (21.17), ее движение в системе отсчета S описывается уравнением

$$m_0 a_i = f_i^* + f_i, \quad (21.22)$$

где

$$f_i = -\frac{c^2 \beta^2}{\alpha} F_s (\delta_r^s - \frac{u_r u^s}{c^2}) (\delta_i^r + \frac{1}{c^2 \alpha^2} g_{ip} \dot{x}^p \dot{x}^r), \quad (21.23)$$

и f_i^* определяется формулой (21.21). Формула (21.23) показывает, какой 3-вектор силы в системе отсчета S соответствует заданной 4-силе F_μ , при предположении, что система отсчета S считается инерциальной. В частности, если частица покоится в пространстве R , то, согласно формулам (20.7), (21.14) и (21.16), на нее действует 4-сила

$$F_0 = 0, \quad F_i = \frac{m_0}{\mu c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) - c^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^i} \right\}, \quad (21.24)$$

которой в системе отсчета S соответствует 3-сила

$$f_i = -c^2 \mu^2 \left(\delta_i^s - \frac{v_i v^s}{c^2} \right) F_s, \quad (21.25)$$

уравновешивающая силу инерции f_i^* , которая, по формуле (21.21), при $\dot{x}_i = 0$ получается в виде

$$\begin{aligned} f_i^* &= m_0 (v_{i,0} + v^s v_{s,i} - \frac{1}{c^2} v_i A_{rs} v^r v^s) = \\ &= \mu m_0 \left(\delta_i^s - \frac{v_i v^s}{c^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_s}{\mu} \right) - c^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^s} \right\}. \end{aligned} \quad (21.26)$$

Если покоящаяся в пространстве R частица не является свободно падающей, то естественное равновесное состояние между частицей и полем нарушено, вследствие чего возникает реакция со стороны поля. Выражением этой реакции является сила инерции (21.26), для преодоления которой необходимо приложить к частице силу (21.25). Обычно сила типа (21.26) называется гравитационной.

22. Динамические характеристики пространства b_i и Ω_{ik} .

В координатной системе (x^i, t) 4-скорость точки $x^i = \text{const}$. пространства R , рассмотренного в предыдущем пункте, имеет, по формулам (21.11) и (21.12), составляющие

$$W^0 = \frac{1}{c\mu}, \quad W^i = 0, \quad (22.1)$$

$$W_0 = c\mu, \quad W_i = \frac{v_i}{c\mu}, \quad (22.2)$$

где величина μ определена формулой (21.10). Рассмотрим тензоры:

$$W_{[\mu, \nu]} = \frac{1}{2} (W_{\mu, \nu} - W_{\nu, \mu}), \quad (22.3)$$

$$W_{[\lambda} W_{\mu, \nu]} = \frac{1}{3} (W_\lambda W_{[\mu, \nu]} + W_\mu W_{[\nu, \lambda]} + W_\nu W_{[\lambda, \mu]}). \quad (22.4)$$

Пользуясь выражениями (22.2), вычислим

$$2cW_{[i, o]} = \mu b_i, \quad (22.5)$$

$$cW_{[i, k]} = \omega_{ik}, \quad (22.6)$$

$$3W_{[o, W_{i, k}]} = \mu \Omega_{ik}, \quad (22.7)$$

$$3c^2 \mu W_{[j, W_{i, k}]} = v_j \omega_{ik} + v_i \omega_{kj} + v_k \omega_{ji}, \quad (22.8)$$

где обозначено

$$b_i = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) - c^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^i} \right\}, \quad (22.9)$$

$$2\omega_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{v_i}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{v_k}{\mu} \right), \quad (22.10)$$

$$\Omega_{ik} = \omega_{ik} + \frac{1}{2\mu c^2} (v_i b_k - v_k b_i). \quad (22.11)$$

Имеем, кроме того, соотношение

$$\det(W_{[\mu, \nu]}) = \left(\frac{\mu B}{2c^2} \right)^2, \quad (22.12)$$

где

$$B = b_1 \Omega_{23} + b_2 \Omega_{31} + b_3 \Omega_{12}. \quad (22.13)$$

Величины b_i и Ω_{ik} вычислены с помощью поля скоростей $v^i(x^k, t)$, вызванного движением пространства обобщенной инерциальной системы S' в системе отсчета S . Покажем, что b_i и Ω_{ik} в действительности не зависят от выбора обобщенной инерциальной системы S' , т. е. они не зависят от выбора галилеевой временной координаты t в пространстве R . Величины b_i и Ω_{ik} определяются, таким образом, пространством R относительно множества обобщенных инерциальных систем, они являются некоторыми характеристиками движения пространства R относительно множества обобщенных инерциальных систем.

Для доказательства введем в пространстве R новую галилееву временную координату t^* , относящуюся к некоторой другой обобщенной инерциальной системе S^* . Пусть

$$t^* = \varphi(x^i, t), \quad (22.14)$$

и $v^{*i}(x^k, t^*)$ — поле скоростей точек пространства обобщенной инерциальной системы S^* в пространстве R , вычислен-

ное как производная dx^i/dt^* . Вычислим с помощью поля скоростей v^{*i} все величины, определенные формулами (22.1) — (22.11) и относящиеся к координатной системе (x^i, t^*) . По правилам преобразования тензорных компонент и при формуле преобразования (22.14) имеем соотношения

$$W_0 = \varphi_{,0} W_0^*, \quad W_{[i,0]} = \varphi_{,0} W_{[i,0]}^*,$$

$$W_{[0} W_{i,k]} = \varphi_{,0} W_{[0}^* W_{i,k]}^*,$$

или, согласно формулам (22.2), (22.5), (22.7), соотношения

$$\mu = \varphi_{,0} \mu^*, \quad \mu b_i = \varphi_{,0} \mu^* b_i^*,$$

$$\mu \Omega_{ik} = \varphi_{,0} \mu^* \Omega_{ik}^*$$

откуда и вытекают равенства

$$b_i = b_i^*, \quad \Omega_{ik} = \Omega_{ik}^*, \quad (22.15)$$

доказывающие установленное выше утверждение.

Можно показать, аналогичным образом, что при преобразовании пространственных координат x^i величины b_i и Ω_{ik} ведут себя как ковариантные составляющие вектора соответственно кососимметричного тензора. В любом пространстве R определены, таким образом, вектор b_i и тензор Ω_{ik} , характеризующие взаимоотношение между пространством R и множеством обобщенных инерциальных систем.

Выясним механический смысл вектора b_i . Согласно формулам (21.24) и (22.9) вектор U_μ для точки $x^i = \text{const.}$ имеет в координатной системе (x^i, t) составляющие

$$U_0 = 0, \quad U_i = \frac{b_i}{c^2}, \quad (22.16)$$

а в координатной системе (ξ^i, t) , принадлежащей к обобщенной инерциальной системе S' , по формуле (20.12), составляющие

$$\bar{U}_i = -\frac{\bar{a}_i}{c^2 \bar{\alpha}}, \quad (22.17)$$

где \bar{a}_i — обобщенное ускорение точки $x^i = \text{const.}$ в обобщенной инерциальной системе S' . Далее, по формуле (22.2),

4-скорость точки $x^i = \text{const.}$ имеет в координатной системе (x^i, t) составляющую

$$W^0 = \frac{1}{c\mu}, \quad (22.18)$$

а в координатной системе (ξ^i, t) , по формуле (20.9), составляющую

$$\bar{W}^0 = \frac{1}{c\bar{\alpha}}. \quad (22.19)$$

Так как координатные системы (x^i, t) и (ξ^i, t) связаны между собой преобразованием (21.4), то имеем, по правилам преобразования векторных компонент, соотношения $\bar{W}^0 = W^0$, $U_i = \xi^s_{,i} \bar{U}_s$, откуда, на основании формул (22.18) и (22.19), вытекает равенство $\bar{\alpha} = \mu$, а затем, по формулам (22.16) и (22.17), равенство

$$\mu b_i = -\xi^s_{,i} \bar{a}_s. \quad (22.20)$$

Мы видим, что вектор μb_i — взятое с обратным знаком обобщенное ускорение точки $x^i = \text{const.}$ в обобщенной инерциальной системе S' . Составляющие $\xi^s_{,i} \bar{a}_s$ обобщенного ускорения написаны в координатной системе (x^i, t) .

Если $b_i = 0$, то точки пространства R движутся относительно обобщенных инерциальных систем с нулевым обобщенным ускорением, т. е. как свободно падающие частицы, имеющие в качестве мировых линий геодезические линии. Согласно формуле (22.11) единственной динамической характеристикой такого пространства является тензор ω_{ik} .

23. Основы классификации пространств по характеристикам b_i и Ω_{ik} . Выражение линейного элемента (21.8) можно записать, по формуле (22.2), в виде

$$ds^2 = (W_0 dt + W_s dx^s)^2 - h_{rs} dx^r dx^s, \quad (23.1)$$

где

$$h_{rs} = g_{rs} + \frac{v_r v_s}{c^2 \mu^2}. \quad (23.2)$$

Из теории пфаффовых форм [4] известно, что для приведе-

ния к каноническому виду дифференциальной формы

$$D = W_0 dt + W_s dx^s \quad (23.3)$$

существуют следующие возможности:

1. Если $\det(W_{[\mu, \nu]}) \neq 0$, то $D = \lambda d\chi + \varrho d\psi$, где λ , ϱ , χ , ψ — четыре функционально независимых функции, причем χ и ψ определяются с точностью до произвольного преобразования между собой

2. Если $\det(W_{[\mu, \nu]}) = 0$, но $W_{[\lambda} W_{\mu, \nu]} \neq 0$, то $D = d\chi + \varrho d\psi$, где ϱ , χ , ψ — три функционально независимых функции, причем χ и ψ определяются с точностью до преобразования вида $\psi \rightarrow F(\psi)$, $\chi \rightarrow \chi + \Phi(\psi)$.

3. Если $W_{[\lambda} W_{\mu, \nu]} = 0$, но $W_{[\mu, \nu]} \neq 0$, то $D = \varrho d\psi$, где ϱ , ψ — две функционально независимых функции, причем ψ определяется с точностью до преобразования $\psi \rightarrow F(\psi)$.

4. *Если $W_{[\mu, \nu]} = 0$, то $D = d\psi$.

Но, по формуле (22.12), условие $\det(W_{[\mu, \nu]}) \neq 0$ равносильно условию $B \neq 0$; по формулам (22.7), (22.8), и (22.12), условия $\det(W_{[\mu, \nu]}) = 0$, $W_{[\lambda} W_{\mu, \nu]} \neq 0$ равносильны условиям $B = 0$, $\Omega_{ik} \neq 0$; по формулам (22.7), (22.8), (22.5) и (22.6), условия $W_{[\lambda} W_{\mu, \nu]} = 0$, $W_{[\mu, \nu]} \neq 0$ равносильны условиям $\Omega_{ik} = 0$, $b_i \neq 0$; по формулам (22.5), (22.6) и (22.11) условие $W_{[\mu, \nu]} = 0$ равносильно условиям $\Omega_{ik} = 0$, $b_i = 0$. Мы можем, таким образом, составить таблицу

$B \neq 0$,		$\lambda d\chi + \varrho d\psi$
$B = 0$,	$\Omega_{ik} \neq 0$	$d\chi + \varrho d\psi$
$\Omega_{ik} = 0$,	$b_i \neq 0$	$\varrho d\psi$
$\Omega_{ik} = 0$,	$b_i = 0$	$d\psi$

В каждой строке слева от вертикального штриха стоят необходимые и достаточные условия для существования соответствующего канонического вида, стоящего в этой строке справа от вертикального штриха. Условия, приведенные в левой части таблицы, служат одновременно основой для

классификации трехмерных пространств R . По этой классификации существует 4 типа пространств. Для пространства данного типа существует своя собственная естественная временная координата τ , определяемая преобразованием

$$\tau = \psi(x^i, t), \quad (23.4)$$

или преобразованием

$$\tau = \chi(x^i, t), \quad (23.5)$$

с точностью до преобразования, допустимого для функции ψ соответственно для функции χ .

Если $\Omega_{ik} = 0$, $b_i = 0$, то преобразование $c\tau = \psi(x^i, t)$ приводит линейный элемент (23.1) к виду

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - h_{rs} dx^r dx^s, \quad (23.6)$$

откуда видим, что пространство R четвертого типа принадлежит к некоторой обобщенной инерциальной системе, где временная координата τ , определенная с точностью до преобразования $\tau \rightarrow \pm \tau + \tau_0$, τ_0 — постоянная, является галилеевой.

24. Пространства типа $\Omega_{ik} = 0$, $b_i \neq 0$. После введения временной координаты τ формулой (23.4), линейный элемент (23.1) приобретает вид

$$ds^2 = \sigma^2 d\tau^2 - h_{rs} dx^r dx^s \quad (24.1)$$

(вместо ρ написано σ). Координата τ определена с точностью до преобразования $\tau \rightarrow F(\tau)$. Скаляр σ не может быть постоянным или функцией только от τ , так как в таком случае функции ρ и ψ в каноническом виде дифференциальной формы (23.3) не были бы функционально независимыми. Имеем, следовательно, $\sigma = \sigma(x^i, \tau)$ с отличным от нуля градиентом, $\sigma_{,i} \neq 0$.

При форме линейного элемента (24.1) 4-скорость частицы, движущейся по закону $x^i = x^i(\tau)$, имеет составляющие

$$V^0 = \frac{1}{\sigma\alpha}, \quad V^i = \frac{\dot{x}^i}{\sigma\alpha}, \quad (24.2)$$

$$V_0 = \frac{\sigma}{\alpha}, \quad V_i = -\frac{h_{is} \dot{x}^s}{\sigma\alpha}, \quad (24.3)$$

где обозначено $\dot{x}^i = dx^i/d\tau$ и

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{\sigma^2} h_{rs} \dot{x}^r \dot{x}^s. \quad (24.4)$$

Отсюда вычислим по формуле (20.2)

$$U_i = -\frac{1}{\sigma\alpha} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{h_{is} \dot{x}^s}{\sigma\alpha} \right) - \frac{1}{\sigma\alpha} \Gamma_{ir,s} \dot{x}^r \dot{x}^s + \frac{1}{\alpha} \sigma_{,i} \right\}, \quad (24.5)$$

$$U_0 = \frac{1}{\sigma\alpha} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sigma}{\alpha} \right) + \frac{1}{2\alpha\sigma} h_{rs,0} \dot{x}^r \dot{x}^s - \frac{1}{\alpha} \sigma_{,0} \right\}, \quad (24.6)$$

где обозначено $\sigma_{,0} = \partial\sigma/\partial\tau$, $\sigma_{,i} = \partial\sigma/\partial x^i$, и символы $\Gamma_{ik,j}$ составлены из коэффициентов h_{ik} .

Равенство (24.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2 \alpha^2}{\alpha_0} \left(\delta_i^r - \frac{\kappa^2}{\sigma^2 \alpha_0^2} h_{is} \dot{x}^s \dot{x}^r \right) U_r = a_i + \frac{1}{\alpha_0} \sigma \sigma_{,i} - \\ - \frac{1}{\alpha_0^3} h_{is} \dot{x}^s \left\{ \frac{\sigma_{,0}}{\sigma} + (1 + \kappa^2) \sigma_{,r} \frac{\dot{x}^r}{\sigma} + \frac{1}{2} \kappa^2 h_{rp,0} \frac{\dot{x}^r \dot{x}^p}{\sigma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (24.7)$$

где величина

$$a_i = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{h_{is} \dot{x}^s}{\alpha_0} \right) - \frac{1}{\alpha_0} \Gamma_{ir,s} \dot{x}^r \dot{x}^s \quad (24.8)$$

с

$$\alpha_0^2 = 1 - \frac{1}{c^2} h_{rs} \dot{x}^r \dot{x}^s, \quad \kappa^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \quad (24.9)$$

является обобщенным ускорением частицы в системе отсчета S , состоящей из пространства R и из времени, определенного координатой τ . Согласно формуле (24.7) свободно падающая частица движется в системе отсчета S по закону

$$m_0 a_i = f_i^*, \quad (24.10)$$

где

$$\begin{aligned} f_i^* = -\frac{m_0}{\alpha_0} \sigma \sigma_{,i} + \frac{m_0}{\alpha_0^3} h_{is} \dot{x}^s \left\{ \frac{\sigma_{,0}}{\sigma} + (1 + \kappa^2) \sigma_{,r} \frac{\dot{x}^r}{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \kappa^2 h_{rp,0} \frac{\dot{x}^r \dot{x}^p}{\sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24.11)$$

В системе отсчета S скорость света равна величине σ . Полагая $\sigma^2 = c^2 + 2\Phi$ так, что при $c \rightarrow \infty$ было бы $\Phi/c^2 \rightarrow 0$, и поэтому $\sigma/c \sim 1$, мы получаем, в пределе $c \rightarrow \infty$, из равенства (24.11) выражение

$$f_i^* = -m_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (24.12)$$

Это ньютоновская гравитационная сила, имеющая потенциал Φ . Значит, в ньютоновском приближении свободно падающая частица движется в системе отсчета S так, как движется частица относительно обобщенной инерциальной системы в гравитационном поле с потенциалом Φ . С той же точки зрения мы можем интерпретировать уравнение (24.10). Свободно падающая частица движется так, как будто система отсчета S — обобщенная инерциальная система, но частица не свободная, а находится под влиянием гравитационной силы (24.11). Мы могли бы, конечно, аналогично случаю уравнения (21.19), называть силу (24.11) и силой инерции.

Если на частицу действует 4-сила F_μ , то, по формуле (24.7), движение частицы описывается уравнением

$$m_0 a_i = f_i^* + f_i, \quad (24.13)$$

где

$$f_i = -\frac{\sigma^2 \alpha^2}{\alpha_0} \left(\delta^r_i - \frac{\kappa^2}{\sigma^2 \alpha_0^2} h_{is} \dot{x}^s \dot{x}^r \right) F_r, \quad (24.14)$$

и сила f_i^* определяется формулой (24.11). В частности, на частицу, покоящуюся в пространстве R , действует, согласно формуле (24.5), 4-сила

$$F_0 = 0, \quad F_i = -m_0 \frac{\sigma_{,i}}{\sigma}. \quad (24.15)$$

Этой 4-силе соответствует в системе отсчета S , по формуле (24.14), 3-сила

$$f_i = m_0 \sigma \sigma_{,i}. \quad (24.16)$$

Она уравновешивает гравитационную силу $f_i^* = -m_0 \sigma \sigma_{,i}$.

Вектор U_μ для частицы, покоящейся в пространстве R , имеет, по формуле (22.16), в координатной системе (x^i, t) составляющие $\bar{U}_0 = 0$, $\bar{U}_i = b_i/c^2$, а в координатной системе (x^i, τ) , по формуле (24.5), составляющие $U_0 = 0$, $U_i = -\sigma_{,i}/\sigma$. Так как по правилу преобразования векторных компонент и при формуле преобразования $\tau = \psi(x^i, t)$ имеем $U_i = \bar{U}_i$, то получим соотношение

$$b_i = -c^2 \frac{\sigma_{,i}}{\sigma}, \quad (24.17)$$

откуда видно, что векторное поле b_i в пространстве R выводится из потенциала $-c^2 \ln \sigma$.

25. Пространства, для которых $\Omega_{ik} \neq 0$. Здесь приходится рассматривать два случая, $B=0$ и $B \neq 0$. Если $B=0$, то преобразование (23.4), (при условии $\psi_{,0} \neq 0$), приводит линейный элемент (23.1) к виду

$$ds^2 = f^2 d\tau^2 + 2\omega_s dx^s d\tau - \gamma_{rs} dx^r dx^s, \quad (25.1)$$

где

$$f = \chi_{,0} + \varrho, \quad (25.2)$$

$$\omega_i = f \chi_{,i}, \quad (25.3)$$

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 \mu^2} - \chi_{,i} \chi_{,k}. \quad (25.4)$$

Функции ϱ и χ рассматриваются как функции от x^i, τ . Временная координата τ определяется с точностью до преобразования $\tau \rightarrow F(\tau)$, а функция χ с точностью до преобразования $\chi \rightarrow \chi + \Phi(\tau)$, так что градиент $\chi_{,i}$ определяется однозначно.

В координатной системе (x^i, τ) 4-скорость точки, покоящейся в пространстве R , имеет составляющие

$$W_0 = f, \quad W_i = \chi_{,i}, \quad (25.5)$$

с помощью которых вычислим

$$2cW_{[i,0]} = -c\varrho_{,i}, \quad 3W_{[0}W_{i,k]} = \frac{1}{2}(\varrho_{,i}\chi_{,k} - \varrho_{,k}\chi_{,i}). \quad (25.6)$$

С другой стороны, по формулам (22.2), (22.5) и (22.7), в координатной системе (x^i, t) составляющие (25.5) и (25.6) имеют значения $c\mu, \mu b_i, \mu\Omega_{ik}$ соответственно. Имея ввиду, что при формуле преобразования типа (23.4) составляющие $W_0, 2cW_{[i,0]}$ и $3W_{[0}W_{i,k]}$ умножаются только на множитель $\psi_{,0}$, как это было показано при выводе равенств (22.15), мы получаем соотношения

$$b_i = -c^2 \frac{\varrho_{,i}}{f}, \quad (25.7)$$

$$\Omega_{ik} = \frac{c}{2f} (\varrho_{,i}\chi_{,k} - \varrho_{,k}\chi_{,i}). \quad (25.8)$$

Отсюда видим, между прочим, что $\varrho_{,i} \neq 0$, $\chi_{,i} \neq 0$.

4-скорость частицы, движущейся в системе отсчета S по закону $x^i = x^i(\tau)$, имеет в координатной системе (x^i, τ) составляющие

$$V_0 = \frac{f^2 + w_s \dot{x}^s}{\beta\sigma}, \quad V_i = -\frac{u_i}{\beta\sigma}, \quad (25.9)$$

где $u^i = \dot{x}^i - w^i$, и $\sigma^2 = f^2 + w^2$, $w_i = \gamma_{is}w^s$, $w^2 = w_s w^s$,

$$\beta^2 = 1 - \frac{u^2}{\sigma^2}, \quad u_i = \gamma_{is}u^s, \quad u^2 = u_s u^s. \quad (25.10)$$

Отсюда вычислим

$$U_i = -\frac{1}{\beta\sigma} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u_i}{\beta\sigma} \right) - \frac{1}{2\beta\sigma} \gamma_{rs,i} (\dot{x}^r \dot{x}^s - w^r w^s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta\sigma} u^s w_{s,i} + \frac{1}{\beta} \sigma_{,i} \right\}, \quad (25.11)$$

$$U_0 = -\frac{1}{\beta\sigma} \left\{ -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sigma}{\beta} + \frac{w_s u^s}{\beta\sigma} \right) - \frac{1}{2\beta\sigma} \gamma_{rs,0} (\dot{x}^r \dot{x}^s - w^r w^s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta\sigma} u^s w_{s,0} + \frac{1}{\beta} \sigma_{,0} \right\}. \quad (25.12)$$

Если $B \neq 0$, то после преобразования (23.4) линейный элемент (23.1) принимает также вид (25.1), с той только разницей, что коэффициенты имеют теперь другие значения, а именно

$$f = \lambda\chi_{,0} + \varrho, \quad (25.13)$$

$$w_i = \lambda f \chi_{,i}, \quad (25.14)$$

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 \mu^2} - \lambda^2 \chi_{,i} \chi_{,k}. \quad (25.15)$$

Величины λ , ϱ , χ рассматриваются как функции от x^i, τ . Повторяя с величинами (25.13)–(25.15) вычисления, произведенные выше с величинами (25.2)–(25.4), получаем равенства

$$b_i = \frac{c^2}{f} (\lambda_{,0} \chi_{,i} - \lambda_{,i} \chi_{,0} - \varrho_{,i}), \quad (25.16)$$

$$\Omega_{ik} = \frac{c}{2f} \{ \varrho(\chi_{,i}\lambda_{,k} - \chi_{,k}\lambda_{,i}) + \lambda(\varrho_{,i}\chi_{,k} - \varrho_{,k}\chi_{,i}) \}, \quad (25.17)$$

$$B = \frac{c^3}{2f} \frac{D(\varrho, \lambda, \chi)}{D(x^1, x^2, x^3)}. \quad (25.18)$$

Формулы (25.9) — (25.12) остаются без изменения.

В случае $B \neq 0$, $b_i = 0$ имеем, по формуле (25.16),

$$\varrho_{,i} = \lambda_{,0}\chi_{,i} - \lambda_{,i}\chi_{,0}, \quad (25.19)$$

и затем по формуле (25.17)

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{2} c (\chi_{,i}\lambda_{,k} - \chi_{,k}\lambda_{,i}). \quad (25.20)$$

26. Центральнo-симметрическое поле. Центральнo-симметрическое гравитационное поле описывается обычно линейным элементом Шварцшильда, который, при обозначении $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, имеет вид

$$ds^2 = \sigma^2 d\tau^2 - h_{rs} dx^r dx^s \quad (26.1)$$

с коэффициентами

$$\sigma^2 = c^2 - \frac{2Gm}{r}, \quad (26.2)$$

где m — масса центральной точки, G — гравитационная постоянная, и

$$h_{11} = \frac{c^2}{\sigma^2}, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (26.3)$$

а при $i \neq k$, $h_{ik} = 0$. По виду линейного элемента (26.1) видно, что пространство R шварцшильдовой системы отсчета S с координатной системой (x^i, τ) — типа $\Omega_{ik} = 0$, $b_i \neq 0$. По формулам (24.17) и (26.2) имеем

$$b_1 = \frac{Gm}{r(k^2 - r)}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad (26.4)$$

где

$$k^2 = \frac{2Gm}{c^2}. \quad (26.5)$$

Предполагая, что шварцшильдова система отсчета S является инерциальной, получаем, согласно формулам (24.12) и

(26. 2), гравитационную силу в ньютоновском приближении как ньютоновскую силу притяжения

$$f_1^* = m_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Gm}{r} \right) = -\frac{Gmm_0}{r^2}, \quad f_2^* = 0, \quad f_3^* = 0. \quad (26. 6)$$

Преобразование

$$c\tau = ct - 2k\sqrt{r} + k^2 \ln \left| \frac{\sqrt{r} + k}{\sqrt{r} - k} \right|, \quad (26. 7)$$

при

$$\sqrt{r} > 0, \quad k = \pm \frac{\sqrt{2Gm}}{c},$$

приводит линейный элемент (26. 1) к виду (21. 8),

$$ds^2 = c^2 \mu^2 dt^2 + 2v_s dx^s dt - g_{rs} dx^r dx^s, \quad (26. 8)$$

где

$$\mu^2 = 1 - \frac{k^2}{r}, \quad (26. 9)$$

$$v_1 = -\frac{ck}{\sqrt{r}}, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad (26. 10)$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{ik} = 0, \quad (i \neq k). \quad (26. 11)$$

Временная координата t , относящаяся к некоторой обобщенной инерциальной системе S' , является галилеевой. Точки пространства R' обобщенной инерциальной системы S' движутся в пространстве R со скоростью v_i . Из выражения коэффициентов (26. 11) видим, что шварцшильдово пространство R , рассмотренное как составная часть некоторой другой системы отсчета S_1 , с координатной системой (x^i, t) , имеет евклидову геометрию.

Из формулы (22. 9) следует при значениях μ и v_i (26. 9) и (26. 10)

$$-\mu b_1 = \frac{Gm}{r\sqrt{r(r-k^2)}}, \quad -\mu b_2 = 0, \quad -\mu b_3 = 0. \quad (26. 12)$$

Вектор (26. 12) представляет собой, на основании формулы (22. 20), обобщенное ускорение точки шварцшильдова пространства R относительно обобщенной инерциальной системы

S' . Мы видим, что вектор $-\mu b_i$ является бесконечным на поверхности $r=k^2$, мнимым в области $0 < r < k^2$ внутри упомянутой выше поверхности, и бесконечным в точке $r=0$. Отсюда вытекает, что в области $0 < r < k^2$ невозможно реализовать материальными объектами движения пространств R и R' относительно друг друга.

При предположении, что система отсчета S_1 является инерциальной, получим из формулы (21.20) в ньютоновском приближении, при значении скорости (26.10), опять выражение ньютоновской силы притяжения (26.6), но теперь в качестве силы инерции, действующей на движущуюся частицу.

Для перехода в обобщенную инерциальную систему S' мы можем использовать систему (21.3), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{ck}{\sqrt{r}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (26.13)$$

Эта система имеет решение

$$(\sqrt{r})^3 = (\sqrt{\varrho})^3 - \frac{3}{2} ckt, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad (26.14)$$

удовлетворяющее начальному условию: при $t=0$ имеем $\sqrt{r} = \sqrt{\varrho}$. Вспомним, что величина k может иметь два знака, $ck = \pm \sqrt{2Gm}$. Взяв $ck = -\sqrt{2Gm}$, получаем решение (26.14) в конкретном виде

$$(\sqrt{r})^3 = (\sqrt{\varrho})^3 + \frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t, \quad (26.15)$$

определенное в области

$$(\sqrt{\varrho})^3 + \frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t \geq 0. \quad (26.16)$$

Переход из системы отсчета S_1 в обобщенную инерциальную систему S' производится путем преобразования, заданного формулой (26.15). Из этой формулы видно, что точки

$\varrho = \text{const.}$ пространства R' обобщенной инерциальной системы S' удаляются в шварцшильдовом пространстве R от центра $r = 0$ со скоростью $v = \sqrt{2Gm}/\sqrt{r}$. Координатная система $(\varrho, \theta, \varphi, t)$, введенная в обобщенной инерциальной системе S' , имеет ту особенность, что с помощью этой координатной системы пространство-время отображается только на одну часть четырехмерного числового пространства, а именно на область (26.16). В частности, мировая линия точки $r = 0$ изображается гиперповерхностью

$$(\sqrt{\varrho})^3 + \frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t = 0, \quad (26.17)$$

или, на языке трехмерной геометрии, точка $r = 0$ изображается в пространстве R' обобщенной инерциальной системы S' поверхностью сферы с переменным радиусом $\varrho_0 = = (-\frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t)^{2/3}$, причем при $t < 0$ внутренность этой сферы исключается из рассмотрения. Такая своеобразная математика никак не выражает каких-либо новых свойств гравитационного поля, она отражает лишь особые свойства отображения пространства-времени на числовое пространство.

После преобразования (26.15) и при обозначении $\varrho = \xi^1$, $\theta = \xi^2$, $\varphi = \xi^3$, линейный элемент (26.8) приобретает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{rs} d\xi^r d\xi^s \quad (26.18)$$

с коэффициентами

$$\gamma_{11} = \frac{\varrho}{r}, \quad \gamma_{22} = r^2, \quad \gamma_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad \gamma_{ik} = 0, \quad (i \neq k). \quad (26.19)$$

Существует, кроме S' , еще другая обобщенная инерциальная система S^* с координатной системой $(\varrho^*, \theta, \varphi, t^*)$, соответствующая выбору $ck = +\sqrt{2Gm}$ в решении (26.14). Для перехода в обобщенную инерциальную систему S^* мы получим другое преобразование

$$(\sqrt{r})^3 = (\sqrt{\varrho^*})^3 - \frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t^*, \quad (26.20)$$

определенное в области

$$(\sqrt{\varrho^*})^3 - \frac{3}{2} \sqrt{2Gm} t^* \geq 0, \quad (26.21)$$

и приводящее линейный элемент (26.8) к виду

$$ds^2 = c^2 dt^{*2} - \frac{\varrho^{*2}}{r} d\varrho^{*2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (26.22)$$

Из формулы преобразования (26.20) видно, что точки $\varrho^* = \text{const.}$ пространства R^* обобщенной инерциальной системы S^* падают в шварцшильдовом пространстве R к центру $r=0$ со скоростью $v = \sqrt{2Gm}/\sqrt{r}$. На основании формулы (26.7) галилеевы временные координаты t и t^* связаны соотношением

$$ct^* = ct + \frac{4}{c} \sqrt{2Gmr} + \frac{4Gm}{c^2} \ln \left| \frac{c\sqrt{r} - \sqrt{2Gm}}{c\sqrt{r} + \sqrt{2Gm}} \right|. \quad (26.23)$$

Отсюда вычислим, с учетом равенства (26.15),

$$dt^* = \frac{r+k^2}{r-k^2} dt + \frac{2|k|\sqrt{\varrho}}{c(r-k^2)} d\varrho. \quad (26.24)$$

Сравнивая уравнение (26.24) с уравнением (18.20), найдем, что точки пространства R^* движутся в обобщенной инерциальной системе S' со скоростью

$$v_1^* = -c \frac{2|k|\sqrt{\varrho}}{r+k^2}, \quad v_2^* = 0, \quad v_3^* = 0, \quad (26.25)$$

величина которой равна

$$v^* = c \frac{2|k|\sqrt{r}}{r+k^2}. \quad (26.26)$$

Из формулы (26.26) видим, что при $r=k^2$ имеем $v^* = c$, т. е. на поверхности $r=k^2$ точки пространства R^* движутся относительно системы отсчета S' со скоростью света. Отсюда вытекает, что в точках поверхности $r=k^2$ движение пространств R^* и R' относительно друг друга не может быть реализовано телами, имеющими конечные массы покоя. Пусть точка P^* пространства R^* , падающая к центру $r=0$,

достигает поверхность $r = k^2$, где она встречает точку P' пространства R' , вылетающую из центра в обратном направлении. Если в точках P^* и P' можно поместить реальные частицы, то, согласно вышесказанному, эти частицы не могут встречаться на поверхности $r = k^2$. По меньшей мере одна из них не может проходить через поверхность $r = k^2$. Но так как мы не видим причины, чтобы предпочесть из двух обобщенных инерциальных систем S^* и S' одну перед другой, то мы должны заключить, что поверхность $r = k^2$ является непроницаемой как для частиц типа P^* , так и для частиц типа P' . Сингулярность на поверхности $r = k^2$ имеет, по-видимому, полевой характер. Каков физический смысл такой сингулярности? Проще всего и естественно предполагать, что уравнением $r = k^2$ определяется поверхность центральной массы m . В общей теории относительности конечная гравитирующая масса m , по-видимому, всегда имеет конечные размеры. Минимальный объем для массы m ограничивается поверхностью $r = k^2$.

Поступила в редакцию
2 мая 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Керес, Труды ИФА АН ЭССР, № 5, 12, 1957.
2. Х. Керес, Труды ИФА АН ЭССР, № 9, 3, 1959.
3. Х. Керес, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 92, 1963.
4. П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., 1947.

GENERALIZED INERTIAL SYSTEMS IN NEWTONIAN MECHANICS AND IN GENERAL RELATIVITY.

II THE THEORY OF EINSTEIN.

H. Keres

If we consider freely falling particles as moving by inertia, the so called generalized inertial systems may be defined in the general relativity mechanics exactly in the same way as in «nonrigid» Newtonian mechanics [3]. They are characterized by the line element of the form (17.1). Just as in Newtonian mechanics, in a generalized inertial system the generalized acceleration a_i (defined by the formula 19.2) of a freely moving particle is zero (the law of inertia). Every 3-space R , described by a 3-dimensional congruence of time-like world lines, possesses two dynamical characteristics: a 3-vector b_i and an anti-symmetric 3-tensor Ω_{ik} . They are calculated with the aid of some specialized generalized inertial system, but are independent of the choice of the latter. Hence the quantities b_i and Ω_{ik} characterize the motion of space R with respect to the totality of generalized inertial systems. They are the analogues of Newtonian acceleration and rotation of volume elements of the space R with respect to the inertial systems. All spaces fall into four classes (table on p. 23). The spaces belonging to the generalized inertial systems are characterized by the equations $b_i = 0$, $\Omega_{ik} = 0$. For a space of a given class there exist preferred time-systems characteristic of that class of spaces. Regarding a given frame of reference as an inertial one, the 3-dimensional inertial or gravitational forces may be introduced.

О СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. I

И. Пийр

Показывается, что теорема Гоффмана [7], по которой равновесной (в ньютоновском смысле) коллинеарной системе частиц, обладающих массами обоих знаков, соответствует решение Керзона—Сильберштейна [2, 3] с изолированными сингулярностями, остается в силе и при коллинеарной системе частиц, обладающих кроме масс дипольными и мультипольными моментами ориентированными по оси z .

1. Введение

Хорошо известно, что для определения статического аксиально-симметричного гравитационного поля с квадратом линейного элемента

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{\nu-\mu} (d\rho^2 + dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\varphi^2 \quad (1.1)$$

уравнения Эйнштейна в пустоте приводят к довольно простым уравнениям (например, [1] формула (13.38)):

$$\mu_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \mu_{,\rho} + \mu_{,zz} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nu_{,\rho} = \frac{\rho}{2} (\mu_{,\rho}^2 - \mu_{,z}^2), \quad (1.3)$$

$$\nu_{,z} = \rho \mu_{,\rho} \mu_{,z}. \quad (1.4)$$

Легко убедиться, что при любой функции μ , удовлетворяющей уравнению (1.2), уравнения (1.3) и (1.4) совместимы. Уравнение (1.2), как уравнение Лапласа для аксиально-симметричного случая может иметь решение, представляющее потенциал точечных источников, расположенных в точках z_1, z_2, \dots, z_N на оси z

$$\mu = - \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{r_k}, \quad r_k = [\varrho^2 + (z - z_k)^2]^{1/2}, \quad (1.5)$$

а уравнения (1.3) или (1.4) дают тогда *

$$\nu = - \frac{\varrho^2}{4} \sum_{k=1}^N \frac{m_k^4}{r_k^4} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{m_k m_l}{(z_k - z_l)^2} \left[\frac{(z - z_k)(z - z_l) + \varrho^2}{r_k r_l} - 1 \right]. \quad (1.6)$$

Решение (1.5), (1.6) получено уже в 1924 г. Керзоном [2], а затем в 1936 г. Сильберштейном [3]. По мнению Сильберштейна полученное решение описывает гравитационное поле коллинеарной системы точечных масс. Учитывая, далее, что такое статическое решение в общем несовместимо с уравнениями движения, он пришел к далеко ведущему выводу о некорректности самой общей теории относительности. Однако, как показывали Эйнштейн и Розен [4], решение Керзона—Сильберштейна (1.1), (1.4) и (1.5) сингулярно не только в изолированных точках** z_1, z_2, \dots, z_N , но и на любом отрезке оси z между этими точками. Эти, так называемые физические сингулярности связаны с тем, что на каждом из отрезков оси z функция ν имеет постоянное, но в общем отличное от нуля значение. А из этого вытекает, что отношение длины бесконечно малой окружности с центром на оси к радиусу отличается от 2π , и, следовательно, пространство-время не является там регулярным. Это обстоятельство, указывающее на существование уравновешивающих натяжений, является, по-видимому, одной из причин, почему решение Керзона—Сильберштейна осталось мало изученным. Другая, не менее важная причина состоит в трудностях, связанных с физической интерпретацией этого решения даже при одной сингулярной точке. Хотя в линейном приближе-

* Постоянные интегрирования выбраны здесь и в дальнейшем так, чтобы метрика в бесконечности была псевдоэвклидовой.

** Особые точки пронумерованы так, что $z_1 < z_2 < \dots < z_N$.

нии оно совпадает с решением Шварцшильда, но различие, появляющееся уже во втором приближении, приведет к тому, что решения Керзона—Сильберштейна нельзя привести к центральносимметричному виду преобразованием координат (см. [5]). Пока не ясно, какими физическими свойствами соответствующей частицы обусловлено отклонение метрики от сферически-симметричной. Если бы эта проблема была решена, то физическое толкование остальных решений не представляло бы особых затруднений. Например, статическое решение с двумя источниками можно интерпретировать по Мардеру, как внешнее решение для однородного шарового слоя, внутри которого находится другое шаровое тело [6]. Легко убедиться, что по примеру Мардера можно построить аналогичные модели, состоящие из нескольких шаровых слоев, для случая с несколькими коллинеарными источниками.

Недавно Гоффман [7] показал, что при предположении о существовании масс обоих знаков возможны такие статические частные решения Керзона—Сильберштейна, которые имеют лишь изолированные сингулярности на оси z в точках z_1, z_2, \dots, z_N . Наиболее привлекательным является здесь то обстоятельство, что полученное Гоффманом решение соответствует равновесной конфигурации масс в ньютоновской теории тяготения. Например, в случае трех частиц должно выполняться условие

$$m_1 : (-m_2) : m_3 = (z_2 - z_3)^{-2} : (z_3 - z_1)^{-2} : (z_1 - z_2)^{-2} \quad (1.7)$$

Теперь не вполне ясно, следует ли рассматривать эти результаты как случайные совпадения, или искать в них более глубокие закономерности. Но во всяком случае, они показывают, что решения Керзона—Сильберштейна заслуживают более внимательного изучения. Понижение симметрии в случае одной частицы по сравнению с решением Шварцшильда нельзя считать сильным недостатком, обесценивающим данное решение, так как в действительности большинство частиц обладает осевой, а не сферической симметрией (разные спиновые свойства). Из-за совпадения первых приближений решение Керзона—Сильберштейна должно предсказывать в основном те же значения для трех

фундаментальных эффектов общей теории относительности, что и решение Шварцшильда. Расхождения в этих значениях имеют более высокий порядок малости и поэтому лежат далеко за пределами точности нынешнего эксперимента. Наконец, надо иметь в виду, что решение Керзона—Сильберштейна вообще и равновесное решение Гоффмана в частности являются простейшими и единственными точными решениями проблемы многих частиц в общей теории относительности. С этой точки зрения представляется перспективным искать возможности обобщения этих решений на случай движущихся источников, а также на случай равновесных конфигураций (в ньютоновском смысле) более сложной структуры. В данной работе выполняется лишь небольшая часть намеченной программы. А именно, мы покажем, что основной результат Гоффмана, по которому равновесной в ньютоновском смысле коллинеарной системе частиц, обладающих массами обоих знаков, соответствует решение Керзона—Сильберштейна с изолированными сингулярностями, остается в силе и при коллинеарной системе частиц, обладающих кроме масс дипольными и мультипольными моментами.

2. Обобщение решения Керзона—Сильберштейна с одной сингулярной точкой

Рассмотрим сначала обобщенное решение Керзона—Сильберштейна с одной сингулярной точкой в начале координат предполагая, что в ньютоновском приближении частица обладает кроме массы также дипольным и мультипольными моментами ориентированными по оси z . Следовательно, функция μ должна иметь следующий вид:

$$\mu = - \sum_m \frac{A^{(m)} P_m(\cos \vartheta)}{r^{m+1}} = - \sum_m \frac{(-1)^m A^{(m)}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{1}{r}, \quad (2.1)$$

где P_m — полиномы Лежандра m -ой степени, $A^{(m)}$ — постоянные. Для нахождения функции ν проще всего исходить из уравнений (1.3) и (1.4) в полярных координатах

$$v_r = \sin \vartheta \cos \vartheta \mu_{,r} \mu_{, \vartheta} + \frac{r}{2} \sin^2 \vartheta \left(\mu_{,r}^2 - \frac{1}{r^2} \mu_{, \vartheta}^2 \right), \quad (2.2)$$

$$v_{, \vartheta} = r \sin^2 \vartheta \mu_{,r} \mu_{, \vartheta} - \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{2} (r^2 \mu_{,r}^2 - \mu_{, \vartheta}^2). \quad (2.3)$$

Подставив (2.1) в уравнение (2.2) и обозначив $\cos \vartheta = t$, находим после интегрирования по r

$$v = \frac{t^2 - 1}{2} \sum_s \frac{1}{(s+2) r^{s+2}} \sum_{n=0}^s A^{(n)} A^{(s-n)} [(n+1) t P_n P'_{s-n} + (s-n+1) t P'_n P_{s-n} - (n+1)(s-n+1) P_n P_{s-n} + (t^2 - 1) P'_n P'_{s-n}]. \quad (2.4)$$

Для дальнейшего полезно представить (2.4) в более компактном виде

$$v = \sum_s \frac{1}{r^{s+2}} \sum_{n=0}^s A^{(n)} A^{(s-n)} f_{sn}(t), \quad (2.5)$$

где

$$f_{sn}(t) = \frac{t^2 - 1}{2(s+2)} [(n+1) P_n P'_{s-n} + [(s-n+1) t P'_n P_{s-n} - (n+1)(s-n+1) P_n P_{s-n} + (t^2 - 1) P'_n P'_{s-n}]] \quad (2.5')$$

является полиномом $(s+2)$ -степени. Из формулы (2.4) видно, что функция v на оси z всюду (кроме начала координат) тождественно равна нулю, и, следовательно, полученное одночастичное решение (2.1), (2.4) не имеет на оси z физических сингулярностей, упомянутых в первом пункте, характерных для проблемы многих частиц.

В качестве примера приводим конкретные выражения функций μ и v , если частица обладает массой и дипольным моментом

$$\mu = - \left(\frac{A^{(0)}}{r} + \frac{A^{(1)}}{r^2} \cos \vartheta \right),$$

$$v = - \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \left[\frac{1}{4} A^{(0)2} + \frac{A^{(0)} A^{(1)}}{r} \cos \vartheta + \frac{A^{(1)2}}{8r^2} (9 \cos^2 \vartheta - 1) \right]. \quad (2.6)$$

Легко убедиться, что решение (2.6) для простого дипольного источника ($A^{(0)} = 0, A^{(1)} \neq 0$) является предельным случаем решения Керзона—Сильберштейна с двумя источниками, соответствующими хорошо известному переходу к точечному диполю

$$z_2 - z_1 \rightarrow 0 \text{ и } (z_2 - z_1)m \rightarrow A^{(1)} \quad (m = -m_1 = m_2).$$

Аналогичным предельным случаем является и само решение (2.6), но при этом надо дополнительно предполагать, что $m_1 + m_2 = A^{(0)}$ ($A^{(1)}$ определяется как и в предыдущем случае соотношением $\lim_{z_1 - z_2 \rightarrow 0} (z_2 - z_1)m = A^{(1)}$, где $m = -m_1$).

3. Обобщенное решение Керзона—Сильберштейна с несколькими сингулярными точками и натяжениями

Находим теперь решение, описывающее поле коллинеарной системы частиц, обладающих в ньютоновском приближении кроме масс также дипольными и мультипольными моментами. Такое решение можно рассматривать либо как обобщение решения (1.5), (1.6) на случай частиц более сложной структуры, либо как обобщение решения (2.1), (2.4) на случай коллинеарной системы частиц. Следовательно, функция μ должна иметь следующий вид [см. (2.1)]:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=1}^N \mu_k = - \sum_{k=1}^N \sum_m A_k^{(m)} \frac{P_m(\cos \vartheta_k)}{r_k^{m+1}} = \\ &= - \sum_{k=1}^N \sum_m \frac{(-1)^m A_k^{(m)}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{1}{r_k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$(\cos \vartheta_k = \frac{z - z_k}{r_k})$, или, что особенно полезно для дальнейшего,

$$\mu = - \sum_{k=1}^N \sum_m \frac{A_k^{(m)}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{1}{r_k} \quad (3.1')$$

Так как с учетом (3.1) правая часть уравнения (1.4) распадается на сумму, в которой слагаемые относятся либо к k -ой частице (члены самовоздействия), либо к k -ой и l -ой частицам (члены взаимодействия), то решение для v можно искать в виде

$$v(z, \varrho) = \sum_{k=1}^N v_k(z, \varrho) + \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^N v_{kl}(z, \varrho), \quad (3.2)$$

где v_k удовлетворяют уже решенному в предыдущем пункте уравнению одной частицы

$$v_k, z = \varrho \mu_{k, \varrho} \mu_{k, z}, \quad (3.3)$$

а члены взаимодействия v_{kl} уравнению

$$v_{kl}, z = \frac{\varrho}{2} (\mu_{z, \varrho} \mu_{l, z} + \mu_{k, z} \mu_{l, \varrho}). \quad (3.3')$$

Поэтому на основе (2.5) получим

$$v_k = \sum_s \frac{1}{r_k^{s+2}} \sum_{m=0}^s A_k^{(m)} A_k^{(s-m)} \int_{cm}(\cos \vartheta_k). \quad (3.4)$$

Отметим, что уравнение (3.3') для функции v_{kl} можно с учетом (3.1) написать в виде

$$\begin{aligned} v_{kl}, z &= \sum_m \sum_n v_{kl, z}^{(mn)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \frac{A_k^{(m)} A_l^{(n)}}{m! n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_k^m \partial z_l^n} \left[\varrho \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{r_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varrho \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{r_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если от нуля отличаются лишь $A_k^{(0)}$ и $A_l^{(0)}$, то (3.3') переходит в уравнение для членов взаимодействия системы простых частиц, решенное уже Керзоном и Сильберштейном, и, следовательно,

$$\begin{aligned} v_{k,l}^{(00)} &= \frac{A_k^{(0)} A_l^{(0)}}{2(z_k - z_l)^2} \left[\frac{(z - z_k)(z - z_l) + \varrho^2}{r_k r_l} - 1 \right] = \\ &= A_k^{(0)} A_l^{(0)} F(z, \varrho; z_k, z_l), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$F(z, \varrho; z_k, z_l) = \frac{1}{2(z_k - z_l)^2} \left[\frac{(z - z_k)(z - z_l) + \varrho^2}{r_k r_l} - 1 \right], \quad (3.5')$$

а как видно из уравнения (3.3') $v_{kl}^{(mn)}$ выражаются через производные от F по z_k и z_l :

$$v_{kl}^{(mn)} = \frac{A_k^{(m)} A_l^{(n)}}{m! n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_k^m \partial z_l^n} F(z, \varrho; z_k, z_l). \quad (3.6)$$

Как пример приведем явные выражения членов взаимодействия для двух дипольных частиц ($v_{kl}^{(11)}$) и для диполя и простой массы ($v_{kl}^{(10)}$):

$$\begin{aligned} v_{kl}^{(10)}(z, \varrho) = v_{lk}^{(01)}(z, \varrho) &= -\frac{1}{(z_k - z_l)^3} \left[\frac{(z - z_k)(z - z_l) + \varrho^2}{r_k r_l} - 1 \right] - \\ &= -\frac{\varrho^2}{2(z_k - z_l)^2} \frac{1}{r_k^3 r_l}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} v_{kl}^{(11)}(z, \varrho) &= -\frac{3}{(z_k - z_l)^4} \left[\frac{(z - z_k)(z - z_l) + \varrho^2}{r_k r_l} - 1 \right] - \\ &= -\frac{\varrho^2}{(z_k - z_l)^2 r_k^3 r_l^3} [(z - z_k)^2 + (z - z_l)^2 - \\ &= -\frac{1}{2} (z - z_k)(z - z_l) + \frac{3}{2} \varrho^2]. \end{aligned} \quad (3.7')$$

Здесь, как и в случае первоначального решения Керзона—Сильберштейна, членами взаимодействия связано появление дополнительных физических сингулярностей на оси z , указывающее на существование натяжений. Действительно, из формул (3.5') и (3.6) находим

$$v_{kl}^{(mn)}(z, 0) =$$

$$= \frac{(-1)^m (1 + m + n)! A_k^{(m)} A_l^{(n)}}{2m! n! (z_k - z_l)^{m+n+2}} [\text{sign}(z - z_k) \text{sign}(z - z_l) - 1]. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что $v_{kl}^{(mn)}$ на оси z между точками z_k и z_l отличается от нуля, а этим обстоятельством и обуславливается возникновение физических сингулярностей (см. введение).

4. Коллинеарные системы, равновесные в ньютоновском смысле

Докажем нашу основную теорему, на которую мы ссылались уже в конце введения, а именно: если коллинеарная система частиц, обладающих кроме масс дипольными и мультипольными моментами, равновесна в ньютоновском смысле, то соответствующее обобщенное решение Керзона—Сильберштейна (3.1), (3.2) (3.4—6) обладает только изолированными сингулярностями в точках z_1, z_2, \dots, z_N .

Для доказательства отметим, что потенциальная энергия взаимодействия рассматриваемой системы в ньютоновской теории тяготения определяется соотношением

$$\begin{aligned}
 U(z_1, z_2, \dots, z_N) &= \sum_{\substack{k, l=1 \\ l > k}}^N \sum_n \sum_m \frac{A_k^{(m)} A_l^{(n)}}{n! m!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_k^m \partial z_l^n} \frac{1}{(z_l - z_k)} = \\
 &= \sum_{\substack{k, l=1 \\ l > k}}^N \sum_n \sum_m \frac{(-1)^n (m+n)!}{m! n!} \frac{A_k^{(m)} A_l^{(n)}}{(z_l - z_k)^{m+n+1}} = \sum_{\substack{k, l=1 \\ l > k}}^N U_{kl}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие условия равновесия, т. е. условия экстремума потенциальной энергии U :

$$\frac{\partial U}{\partial z_p} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial z_p} U_{pk} + \sum_{k=p+1}^N \frac{\partial}{\partial z_p} U_{kp} = 0,$$

или

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_s \sum_m \frac{(-1)^s (s+m+1)!}{s! m!} \frac{A_k^{(m)} A_p^{(s)}}{(z_p - z_k)^{s+m+2}} + \\
 & + \sum_{k=p+1}^N \sum_s \sum_m \frac{(-1)^m (s+m+1)!}{s! m! (z_k - z_p)^{m+s+2}} A_k^{(m)} A_p^{(s)} = 0. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Теперь остается показать, что выполнение условий (4.2) достаточно для превращения в нуль функции v на оси z в интервалах между точками z_1, z_2, \dots, z_N . Из формул (3.2), (3.4) и (3.8) видно, что $v(z, 0) = 0$, если $z < z_1$ или $z > z_N$, а на каждом интервале между точками z_1, z_2, \dots, z_N функция $v(z, 0)$ принимает некоторое конечное значение. Для того, чтобы все эти значения были нули, должны выполняться следующие условия:

$$\Delta v(z_p) \equiv v(z_p + \varepsilon, 0) - v(z_p - \varepsilon, 0) = 0, \quad (p = 1, 2, \dots, N), \quad (4.3)$$

где ε — любое достаточно малое число. Учитывая теперь, что

$$\Delta v_{pk}(z_p) = - \sum_s \sum_m \frac{(-1)^s (s+m+2)! A_p^{(s)} A_k^{(m)}}{s! m! (z_p - z_k)^{s+m+2}}, \quad \text{если } k < p, \quad (4.4)$$

а

$$\Delta v_{pk}(z_p) = - \sum_s \sum_m \frac{(-1)^m (s+m+2)! A_p^{(s)} A_k^{(m)}}{s! m! (z_p - z_k)^{s+m+2}}, \quad \text{если } k > p.$$

можно легко убедиться, что условия (4.2) и (4.3) совершенно тождественны.

На основе доказанной теоремы можно сконструировать бесконечное множество обобщенных решений Керзона—Сильберштейна свободных от натяжений. При этом оказывается, что иногда условия равновесия довольно жесткие и определяют единственным образом расстояния между частицами. Примером может быть равновесная система двух частиц с одинаковыми массами и дипольными моментами $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A^{(0)}$ и $A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = A^{(1)}$. Легко убедиться, что такая система находится в равновесии только при условии

$$(z_2 - z_1)^2 A^{(0)2} = 6A^{(1)}.$$

Более интересными, в частности с точки зрения получения новых нестатических решений, являются такие системы, в которых равновесие (в ньютоновском смысле) сохраняется

также при определенных изменениях структуры системы. Таким является, например, случай (1.7), допускающий умножение всех расстояний между частицами на один общий фактор. В рамках ньютоновской теории, этот фактор может быть также функцией времени и может привести, таким образом, в нестатическим решениям. К сожалению, такой простой возможности в теории Эйнштейна нет [7], и более того, пока не имеется даже практически проверенной методики для нахождения соответствующих точных решений.

Поступила в редакцию
15 апреля 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, Гос. изд. ИЛ., М., 1947.
2. H. E. J. Curzon, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, 23, 477, 1925.
3. L. Silberstein, Phys. Rev., 49, 268, 1936.
4. A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., 49, 404, 1936.
5. H. Takeno, Progr. Theor. Phys., 8, 317, 1952.
6. L. Marder, Proc. Cambridge Philos. Soc. 55, 82, 1959.
7. B. Hoffman, Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., Nr. 91, 237, 1962.

ON STATIC SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF MANY PARTICLES IN GENERAL RELATIVITY. I

I. Piir

The Hoffmann's theorem [7] according to which to an equilibrium (in the Newtonian sense) collinear system of point masses of both signs corresponds a Curzon-Silberstein's solution [2, 3] with isolated singularities, has been proved to remain valid in the case of point particles characterized both by masses and by dipole and multipole moments.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СУММ В ТЕОРИИ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Р. А. Презм

В приближении гармонического осциллятора вычисляются суммы, определяющие интенсивности спектральных линий комбинационного рассеяния, соответствующих переходу $m \rightarrow n$ и определяется температурная зависимость поляризуемости.

Эту работу можно рассматривать как продолжение работы автора [1]. Исходя из выведенных в [1] формул вычисляются суммы, соответствующие осцилляторным переходам $m \rightarrow n$ (при любых значениях m, n) в приближении Кондона, а также с учетом отступления от него. Предположения такие же, как в предыдущей работе: адиабатическое приближение с учетом лишь одного возбужденного электронного уровня, колебательная часть волновых функций соответствует гармоническому осциллятору с равными частотами, но с различным положением равновесия в разных электронных состояниях. Интегралы перекрывания для них были найдены раньше в работе [2] методом производящей функции.

Обозначения используются те же, что и в работе [1], лишь для простоты опущен индекс нуль для величин, вычисленных при равных частотах осцилляторов. На формулы работ [1] и [2] будем ссылаться, прибавляя к номерам формул 1 или 2.

Надеемся, что полученные формулы окажутся полезными и для других вопросов, например, в теории квазилинейчатых спектров и квазистационарных процессов, где также надо суммировать и усреднять волновые функции гармонических осцилляторов.

1. О вычислении сумм, определяющих интенсивность линий комбинационного рассеяния, соответствующих колебательному переходу $m \rightarrow n$, в приближении Кондона

В приближениях, отмеченных в работе [1]: адиабатическое приближение, предположение о существовании только одного возбужденного электронного уровня и одноосцилляторная модель, интенсивность линий комбинационного рассеяния соответствующей колебательному переходу $m \rightarrow n$, в приближении Кондона определяется следующей суммой:

$$S_{mn}^{(0)}(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(m, \nu)(n, \nu)}{\nu - m + \alpha}. \quad (1)$$

В работе [1] был дан метод для вычисления этой суммы и найдено явное выражение для переходов с основного уровня $m=0$ с учетом различия положения равновесия гармонического осциллятора в различных электронных состояниях. Здесь (m, ν) , (n, ν) обозначают интегралы перекрытия смещенных осцилляторов и

$$\alpha = \frac{1}{\nu_0} (\nu_{0e}^{(0)} - \nu),$$

либо

$$\alpha = \frac{1}{\nu_0} (\nu_{0e}^{(0)} + \nu) + m - n$$

(эти определения несколько отличаются от соответствующих определений в работе [1], вследствие чего в знаменателе формулы (1) появляется m), где $\nu_{0e}^{(0)}$ — частота чисто-электронного перехода, ν — частота возбуждающего света, а ν_0 — частота рассматриваемого осциллятора.

Выбирая в качестве базисных волновых функций собственные функции гармонического осциллятора с неизменной частотой можно получить явное выражение для перехода $m \rightarrow n$ (между любыми уровнями m и n). Согласно формуле (1.12) справедливо следующее разложение:

$$\sum_m \sum_n \sum_v (m, v) (n, v) p^v \frac{\tau^m}{\sqrt{m!}} \frac{\tau'^n}{\sqrt{n!}} = \\ = \exp[-z^2(1-p)] \exp(\tau\tau'p) \exp[z(\tau + \tau')(1-p)]. \quad (2)$$

Разлагая экспоненциальные функции в правой части равенства (2) по степеням τ и τ' , получаем

$$\sum_v (m, v) (n, v) p^v \frac{\tau^m}{\sqrt{m!}} \frac{\tau'^n}{\sqrt{n!}} = \\ = \exp[-z^2(1-p)] z^{n-m} (1-p)^{n-m} p^m.$$

$$\sum_{j=0}^m \frac{[z^2(1-p)^2/p]^{m-j}}{j!(m-j)!(n-j)!} \tau^m \tau'^n = \exp[-z^2(1-p)] \frac{z^{n-m}(1-p)^{n-m} p^m}{m!(n-m)!} \cdot \\ \cdot {}_1F_1(-m; n-m+1; -z^2(1-p)^2/p) \tau^m \tau'^n, \quad (3)$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция (здесь предполагается, что $n \geq m$; в противном случае надо в правой части (3) m и n поменять местами). Отсюда следует разложение

$$\sum_v (m, v) (n, v) p^v = \begin{cases} \frac{\sqrt{n!} p^m}{\sqrt{m!} (n-m)!} [z(1-p)]^{n-m} \exp[-z^2(1-p)] \cdot \\ \cdot {}_1F_1(-m; n-m+1; -z^2(1-p)^2/p), & m \leq n, \\ \frac{\sqrt{m!} p^n}{\sqrt{n!} (m-n)!} [z(1-p)]^{m-n} \exp[-z^2(1-p)] \cdot \\ \cdot {}_1F_1(-n; m-n+1; -z^2(1-p)^2/p), & m \geq n. \end{cases} \quad (4)$$

В частном случае, когда $m = n$, формула упрощается

$$\sum_v (m, v) (m, v) p^{v-m} = \exp[-z^2(1-p)] \cdot \\ \cdot {}_1F_1(-m; 1; -z^2(1-p)^2/p). \quad (5)$$

Чтобы получить сумму (1), определяющую интенсивность колебательного перехода $m \rightarrow n$, надо еще умножить обе стороны равенства (5) на $p^{\alpha-1} dp$ и проинтегрировать в пределах (0, 1) (предполагаем, что $\alpha > m$; но это не существенно, так как от этого предположения можно освободиться

с помощью интегрирования в комплексной плоскости). В правой части тогда появляются интегралы типа

$$\int_0^1 (1-p)^{n-m+2l} p^{\alpha-l-1} \exp[-z^2(1-p)] dp = \int_0^1 u^{n-m+2l} \cdot (1-u)^{\alpha-l-1} \exp(-z^2 u) du = \frac{(n-m+2l)!}{(a-l)(a-l+1)\dots(a+n-m+l)} \cdot {}_1F_1(n-m+2l+1; a+n-m+l+1; -z^2). \quad (6)$$

Следовательно, если $n \geq m$, то

$$S_{mn}^{(0)} = \sum_v (m, v)(n, v) \frac{1}{v-m+a} = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{m!}} \frac{z^{n-m}}{a(a+1)\dots(a+n-m)} \cdot \{ {}_1F_1(n-m+1; a+n-m+1; -z^2) + \frac{(n-m+2)m}{(a-1)(a+n-m+1)} \cdot \frac{z^2}{1!} {}_1F_1(n-m+3; a+n-m+2; -z^2) + \frac{(n-m+3)(n-m+4)}{(a-2)(a-1)} \cdot \frac{m(m-1)}{(a+n-m+1)(a+n-m+2)} \cdot \frac{z^4}{2!} {}_1F_1(n-m+5; a+n-m+3; -z^2) + \dots \}. \quad (7)$$

В частном случае, когда $m=0$, получаем

$$S_{0n}^{(0)} = \sum_v \frac{(0, v)(n, v)}{v+a} = \frac{\sqrt{n!} z^n}{a(a+1)\dots(a+n)} \cdot {}_1F_1(n+1; a+n+1; -z^2),$$

что совпадает с формулой (1.14).

Для перехода $m=n$, соответствующего рэлеевскому рассеянию для исходного уровня m , выражение (7) несколько упрощается

$$S_{mm}^{(0)} = \sum_v (m, v)(m, v) \frac{1}{v-m+a} = \frac{1}{a} \left\{ {}_1F_1(1; a+1; -z^2) + \frac{2!}{a^2-1} \binom{m}{1} \frac{z^2}{1!} {}_1F_1(3; a+2; -z^2) + \frac{4}{(a^2-1)(a^2-4)} \binom{m}{2} \frac{z^4}{2!} {}_1F_1(5; a+3; -z^2) + \dots \right\}. \quad (8)$$

Правая часть здесь — конечная сумма, первый член которой соответствует основному уровню $m = 0$. Если $a \gg \dot{m}$, то этот член — наибольший (в предположении, что параметр $z^2 = \frac{a^2}{2x_0^2}$ — стоксовы потери, выраженные в числе колебательных квантов, не приобретает слишком больших значений). Поэтому становится и справедливым следующее приближенное равенство:

$$S_{mm}^{(0)} \sim \frac{1}{\alpha} {}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) = \sum_v \frac{(0, v)(0, v)}{v + \alpha}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что вклады нижних уровней в рэлеевском рассеянии (без учета их различной населенности) приблизительно равны.

2. Зависимость поляризуемости от температуры в приближении Кондона

Если рассматриваемая система находится не в чистом состоянии $\psi^{(0)}$, а в смешанном ψ , которое соответствует термическому равновесию при определенной температуре T , то для получения диагонального элемента матрицы поляризуемости (далее коротко называемого поляризуемостью) надо вычислить сумму по исходным состояниям m с учетом вероятности ω_m пребывания системы в этом состоянии, $\sum_m \omega_m = 1$.

В термическом равновесии

$$\omega_m = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT} m\right) [1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)] = q^{2m} (1 - q^2), \quad (10)$$

где

$$q = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right).$$

Поляризуемость в таком смешанном состоянии определяется следующей суммой:

$$S_0(q) = (1 - q^2) \sum_m \sum_v (m, v)(m, v) \frac{q^{2m}}{v - m + \alpha}. \quad (11)$$

Для нахождения $S_0(q)$ умножим обе части равенства (8) на фактор $q^{2m}(1 - q^2)$ и просуммируем по всем значениям m . Получим следующий результат:

$$S_0(q) = (1 - q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) \frac{q^{2m}}{v - m + \alpha} = \frac{1}{\alpha} \left\{ {}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) + \frac{2!}{\alpha^2 - 1} \frac{z^2 q^2}{1!(1 - q^2)} {}_1F_1(3; \alpha + 2; -z^2) + \frac{4!}{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)} \frac{z^4 q^4}{2!(1 - q^2)^2} {}_1F_1(5; \alpha + 3; -z^2) + \dots \right\}. \quad (12)$$

Этот результат удобно использовать в области низких температур (где $q < \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$). Если при этом $\alpha \gg 1$, то в (12) можно ограничиться только первыми членами. При $T \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 0$),

$$S_0(q) \rightarrow \frac{1}{\alpha} {}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) = \sum_v \frac{(0, v)(0, v)}{v + \alpha}, \quad (13)$$

что совпадает с (1.14).

Для получения приближенного выражения в области высоких температур, формула (12) не пригодна. Будем исходить заново из формулы (5), заменив вырожденную гипергеометрическую функцию следующим образом:

$${}_1F_1(-m; 1; x) = K_0 \{ [(1 + \tau)/\tau]^m \exp(-x\tau) \}. \quad (14)$$

Здесь символ K_0 означает коэффициент при τ^0 в разложении по степеням τ выражения в фигурных скобках. Умножая обе стороны равенства (5) на фактор $q^{2m}(1 - q^2)$ и суммируя по m , можно получающуюся при этом в правой части сумму вычислить при помощи соотношения (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (1 - q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) p^{v-m} q^{2m} = \\ & = \exp[-z^2(1 - p)] K_0 \{ (1 - q^2) \cdot \\ & \cdot \exp[z^2(1 - p)^2 \tau / p] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} [(1 + \tau)/\tau]^m q^{2m} \} = \\ & = \exp[-z^2(1 - p)] \exp[z^2(1 - p)^2 q^2 / (1 - q^2) p]. \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразовав показатель при экспонентах следующим образом:

$$-z^2(1-p) + \frac{z^2(1-p)^2q^2}{(1-q^2)p} = -\frac{1+q^2}{1-q^2}z^2 + \frac{z^2q}{1-q^2}(p/q + q/p) \quad (16)$$

и применив разложение

$$\exp[x/2(t+1/t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n(x) = I_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + t^{-n}) I_n(x),$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка от мнимого аргумента, получаем окончательно

$$\begin{aligned} & (1-q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) p^{v-m} q^{2m} = \\ & = \exp[-z^2(1+q^2)/(1-q^2)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (p/q)^n I_n[2z^2q/(1-q^2)]. \quad (18) \end{aligned}$$

При $v-m=n$ из (18) следует одна полезная формула

$$\begin{aligned} & (1-q^2) \sum_m (m, m+n) (m, m+n) q^{2m} = \\ & = \exp[-z^2(1+q^2)/(1-q^2)] q^{-n} I_n[2z^2q/(1-q^2)]. \quad (19) \end{aligned}$$

В пределе низких температур формула (18) приводится к виду

$$\sum_v (0, v) (0, v) p^v = \exp[-z^2(1-p)],$$

непосредственно следующему и из исходного соотношения (5). Вместо (19) при этом имеем

$$(0, n) (0, n) = z^{2n} \exp(-z^2)/n!,$$

что сразу же вытекает из (2.20).

В пределе высоких температур, $T \rightarrow \infty$, т. е. $q \rightarrow 1-0$, сумма (18) расходится, если $p \neq 1$.

В самом деле, обозначив $q^2 = 1 - \beta^2$ и преобразовав показатель в экспоненте следующим образом:

$$-\frac{1+q^2}{1-q^2}z^2 + \frac{z^2q}{1-q^2}(p/q + q/p) = z^2\{(p+1/p-2)/\beta^2 + 1 - 1/p\}, \quad (20)$$

получаем в пределе

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} \exp \left\{ -\frac{1+q^2}{1-q^2} z^2 + \frac{z^2 q}{1-q^2} (p/q + q/p) \right\} = \begin{cases} \infty, & p \neq 1 \\ 1, & p = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Итак, формула (18) дает

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} (1-q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) q^{2m} = 1, \quad (22)$$

что согласуется с соотношением

$$\sum_v (m, v) (m, v) = 1,$$

вытекающим из ортонормированности системы волновых функций.

Вместо равенства (19) в пределе высоких температур имеем

$$\sum_m (m, m+n) (m, m+n) (1-\beta^2)^m = 1/2\sqrt{\pi} z \beta + O(\beta). \quad (24)$$

Для нахождения температурной зависимости поляризуемости, т. е. суммы $S_0(q)$, умножаем обе стороны формулы (18) на $p^{\alpha-1} dp$ и выполняем интегрирование. Это дает

$$S_0(q) = (1-q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) \frac{q^{2m}}{v-m+\alpha} = \\ = \exp \left[-z^2(1+q^2)/(1-q^2) \right] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{-n}}{n+\alpha} I_n[2z^2 q/(1-q^2)]. \quad (25)$$

В пределах низких температур ($q \rightarrow 0$)

$$I_n[2z^2 q/(1-q^2)] \rightarrow z^{2n} q^n / n!,$$

т. е. получается прежний результат (13).

В пределе высоких температур ($q \rightarrow 1-0$) можно получить асимптотическое выражение для (25) с помощью асимптотических выражений для функций Бесселя

$$I_n(2z^2/\beta^2) \sim \exp(2z^2/\beta^2) \cdot \beta/2\sqrt{\pi} z + O(\beta^3),$$

но более целесообразно исходить из разложений (15), заменив экспоненту по (20)

$$(1 - q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) p^{v-m} q^{2m} = \\ = \exp \{z^2 [(p + 1/p - 2)/\beta^2 + 1 - 1/p]\}, \quad (26)$$

где

$$\beta^2 = 1 - q^2 \sim \hbar\omega/kT + O(1/T^2).$$

Умножим обе стороны равенства (26) на $p^{\alpha-1} dp$ и проинтегрируем в комплексной плоскости по единичному кругу $0 \rightarrow 2\pi$. Обозначив в интеграле $p = \exp(i\varphi)$, $dp = i \exp(i\varphi) d\varphi$, приводим формулу (26) после интегрирования к виду

$$(1 - q^2) \sum_m \sum_v (m, v) (m, v) q^{2m} \frac{\exp(i2\pi\alpha) - 1}{v - m + \alpha} = \\ = \int_0^{2\pi} \exp\{-2z^2(1 - \cos\varphi)/\beta^2\} \exp\{z^2(1 - \cos\varphi + i \sin\varphi)\} \cdot \\ \cdot \exp(i\alpha\varphi) i d\varphi. \quad (27)$$

Разделяя последний интеграл на две части: от 0 до π и от π до 2π , а также, заменяя во втором интеграле φ на $2\pi - \varphi$, получим в правой части сумму двух интегралов

$$\int_0^{\pi} \exp\{-2z^2(1 - \cos\varphi)/\beta^2\} \exp\{z^2(1 - \cos\varphi + i \sin\varphi)\} \cdot \\ \cdot \exp(i\alpha\varphi) i d\varphi + \exp(i2\pi\alpha) \int_0^{\pi} \exp\{-2z^2(1 - \cos\varphi)/\beta^2\} \cdot \\ \cdot \exp\{z^2(1 - \cos\varphi - i \sin\varphi)\} \exp(-i\alpha\varphi) i d\varphi.$$

Для нахождения асимптотического выражения этих интегралов применим метод Лапласа. С помощью обозначений $z^2/\beta^2 = \nu^2$, $\nu\varphi = t$ и разложений

$$1 - \cos\varphi = \varphi^2/2 - \varphi^4/24 + \dots, \quad \sin\varphi = \varphi - \varphi^3/6 + \dots$$

интегралы в правой части выражаются следующим образом:

$$\frac{1}{\nu} \left\{ \int_0^{\infty} \exp\{-t^2 + t^4/12\nu^2 - \dots\} \exp\{z^2(t^2/2\nu^2 - \dots + it/\nu - \dots)\} \cdot \right. \\ \cdot \exp(i\alpha t/\nu) i dt + \exp(i2\pi\alpha) \int_0^{\infty} \exp\{-t^2 + t^4/12\nu^2 - \dots\} \cdot \\ \cdot \exp\{z^2(t^2/2\nu^2 - \dots - it/\nu + \dots)\} \exp(-i\alpha t/\nu) i dt \left. \right\}$$

откуда получаем для $S_0(q)$ в пределе высоких температур следующую формулу:

$$S_0(q) \sim \sqrt{\pi} \operatorname{ctg}(\alpha\pi) \cdot \beta/2z + O(\beta^2). \quad (28)$$

3. Отклонение от приближения Кондона

Проделанные выше вычисления можно без особого труда обобщить на случай, когда матричный элемент электронного перехода явно зависит от осцилляторной координаты.

Ограничимся, как и в работе [1], в разложении матричного элемента электронного перехода только линейным по x членом

$$M_{0e}(x) = M_{0e}(1 + \eta x + \dots). \quad (29)$$

В таком случае для вычисления матричного элемента a_{xx}^{mn} поляризуемости необходимо найти сумму

$$S_{mn}^{(1)} = \sum_{v=0}^{\infty} [(m, xv)(n, v) + (m, v)(n, xv)] \frac{1}{v - m + \alpha}. \quad (30)$$

В работе [1] было дано явное выражение такой суммы в случае, когда имеем дело с переходами с основного уровня $m = 0$.

С помощью метода работы [1] оказывается возможным найти явное выражение для $S_{mn}^{(1)}$ и в общем случае. Исходя из формулы для суммы (1.29)

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n \sum_v [m, xv)(n, v) + (m, v)(n, xv)] p^v \frac{\tau^m}{\sqrt{m!}} \frac{\tau'^n}{\sqrt{n!}} = \\ & = x_0/\sqrt{2} \cdot (1 + p)(\tau + \tau' - 2z) \exp[-z^2(1 - p)] \exp(\tau\tau'p) \cdot \\ & \quad \cdot \exp[z(1 - p)(\tau + \tau')] \end{aligned} \quad (31)$$

и разлагая экспоненциальные функции в правой части в ряд, приходим в случае $n \geq m$ к соотношениям

$$\begin{aligned} & \sum_v [(m, xv)(n, v) + (m, v)(n, xv)] p^{v-m} = \\ & = \frac{\sqrt{n!} x_0 / \sqrt{2}}{\sqrt{m!} (n-m)!} \cdot \exp[-z^2(1-p)] \frac{1+p}{z(1-p)} \cdot \\ & \cdot z^{n-m} (1-p)^{n-m} \{ 2(n-m) {}_1F_1(-m; n-m; -z^2(1-p)^2/p) - \\ & - [n-m+2z^2(1-p)] {}_1F_1(-m; n-m+1; -z^2(1-p)^2/p) \}. \end{aligned} \quad (32)$$

В случае $m \geq n$ получаем аналогичное соотношение, лишь индексы m и n переставлены.

В частном случае $m=0$ и $n \geq 1$ соотношение (32) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_v [(0, xv)(n, v) + (0, v)(n, xv)] p^v = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n!}} x_0 / \sqrt{2} \cdot \exp[-z^2(1-p)] \cdot \\ & \cdot z^{n-1} (1+p) (1-p)^{n-1} [n - 2z^2(1-p)], \end{aligned} \quad (33)$$

которое можно непосредственно получить и из формулы (1.29).

Во втором частном случае $m=n$ получается вместо этого выражение

$$\begin{aligned} & \sum_v [(m, xv)(m, v) + (m, v)(m, xv)] p^{v-m} = \\ & = 2x_0 / \sqrt{2} \cdot \exp[-z^2(1-p)] z(1+p)/p \cdot \\ & \cdot \{ m(1-p) {}_1F_1(-m+1; 2; -z^2(1-p)^2/p) - \\ & - p {}_1F_1(-m; 1; -z^2(1-p)^2/p) \}, \end{aligned} \quad (34)$$

которое при $m=0$ также следует из формулы (1.29).

Для вычисления суммы $S_{mn}^{(1)}$ умножим опять обе стороны равенства (32) на $p^{\alpha-1} dp$ и проинтегрируем по p от 0 до 1. Тогда в случае $n \geq m$ получаем

$$\begin{aligned} S_{mn}^{(1)} & = \sum_v [(m, xv)(n, v) + (m, v)(n, xv)] \frac{1}{v-m+a} = \\ & = \frac{\sqrt{n!} x_0 / \sqrt{2}}{\sqrt{m!} (n-m)!} \cdot z^{n-m-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \exp[-z^2(1-p)](1-p)^{n-m-1}(1+p)p^{\alpha-1} \cdot \\
 & \cdot \{2(n-m) {}_1F_1(-m; n-m; -z^2(1-p)^2/p) - \\
 & - [n-m+2z^2(1-p)] \cdot \\
 & \cdot {}_1F_1(-m; n-m+1; -z^2(1-p)^2/p)\} dp, \quad (35)
 \end{aligned}$$

причем опять предполагается, что $\alpha > m$ (это предположение здесь в той же мере несущественно, как раньше, и от него опять можно освободиться интегрированием в комплексной плоскости, при этом (32) остается в силе и для $\alpha < m$). Интеграл в правой части равенства (35) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \exp(-z^2u)u^{n-m-1}(2-u)(1-u)^{\alpha-1} \cdot \\
 & \cdot \{2(n-m) {}_1F_1[-m; n-m; -z^2u^2/(1-u)] - \\
 & - [n-m+2z^2u] {}_1F_1[-m; n-m+1; -z^2u^2/(1-u)]\} du = \\
 & = (2\alpha+n-m-2z^2) \int_0^1 u^{n-m}(1-u)^{\alpha-1} \exp(-z^2u) \cdot \\
 & \cdot {}_1F_1[-m; n-m+1; -z^2u^2/(1-u)] du + \varepsilon_{mn}, \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \varepsilon_{mn} = \begin{cases} -2, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

после чего для $S_{mn}^{(1)}$ получается формула ($n > m$)

$$\begin{aligned}
 S_{mn}^{(1)} &= \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{m!}} x_0/\sqrt{2} \cdot z^{n-m-1} \frac{2\alpha+n-m-2z^2}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-m)} \cdot \\
 & \cdot \{ {}_1F_1(n-m+1; \alpha+n-m+1; -z^2) + \frac{m(n-m+2)}{(\alpha-1)(\alpha+n-m+1)} \cdot \\
 & \cdot \frac{z^2}{1!} \cdot {}_1F_1(n-m+3; \alpha+n-m+2; -z^2) + \frac{m(m-1)}{(\alpha-2)(\alpha-1)} \cdot \\
 & \cdot \frac{(n-m+3)(n-m+4)}{(\alpha+n-m+1)(\alpha+n-m+2)} \frac{z^4}{2!} \cdot \\
 & \cdot {}_1F_1(n-m+5; \alpha+n-m+3; -z^2) + \dots \}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Это выражение можно рассматривать как обобщение второй формулы (1.31), переходя к ней при $m = 0$.

Если $m = n$, то $S_{mn}^{(1)}$ получается в виде

$$S_{mm}^{(1)} = 2x_0/\sqrt{2}az \cdot \{(\alpha - z^2)[{}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) + \frac{2!}{\alpha^2 - 1} \binom{m}{1} \frac{z^2}{1!} {}_1F_1(3; \alpha + 2; -z^2) + \frac{4!}{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)} \binom{m}{2} \cdot \frac{z^4}{2!} {}_1F_1(5; \alpha + 3; -z^2) + \dots] - \alpha\}, \quad (38)$$

что является обобщением первой формулы (1.31) и переходит к ней в случае $m = n = 0$.

Если $\alpha \gg m$, то можно в правой части (38) ограничиться несколькими первыми членами

$$S_{mm}^{(1)} \sim 2x_0/\sqrt{2}az \cdot [(\alpha - z^2) {}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) - \alpha] + O(1/\alpha^2). \quad (39)$$

Для нахождения температурной зависимости поляризуемости, т. е. для нахождения суммы $S_1(q)$, где

$$S_1(q) = (1 - q^2) \sum_m \sum_v [(m, xv)(m, v) + (m, v)(m, xv)] \frac{q^{2m}}{v - m + \alpha}, \quad q = \exp(-\hbar\omega/2kT), \quad (40)$$

умножим обе стороны равенства (38) на $q^{2m}(1 - q^2)$ и просуммируем по m .

$$S_1(q) = 2x_0/\sqrt{2}az \cdot \{(\alpha - z^2)[{}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) + \frac{2!}{\alpha^2 - 1} \frac{z^2 q^2}{1!(1 - q^2)} {}_1F_1(3; \alpha + 2; -z^2) + \frac{4!}{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)} \frac{z^4 q^4}{2!(1 - q^2)^2} \cdot {}_1F_1(5; \alpha + 3; -z^2) + \dots] - \alpha\}. \quad (41)$$

Формула (41) для $S_1(q)$ удобна для практического применения в области низких температур, когда можно ограничиться несколькими первыми членами.

В пределе $T \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 0$)

$$S_1(q) \rightarrow 2x_0/\sqrt{2} az \cdot \{(\alpha - z^2) {}_1F_1(1; \alpha + 1; -z^2) - \alpha\}. \quad (42)$$

Чтобы оценить ход поляризуемости в области высоких температур заново исходим из соотношения (34), заменив гипергеометрические функции следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(-m; 1; -z^2(1-p)^2/p) &= K_0\{(1+\tau)/\tau\}^m \exp[z^2(1-p)^2\tau/p] \\ m {}_1F_1(-m+1; 2; -z^2(1-p)^2/p) &= \\ &= K_0\{\tau[(1+\tau)/\tau]^m \exp[z^2(1-p)^2\tau/p]\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь символ K_0 опять означает коэффициент при τ^0 в выражении в фигурных скобках, если это выражение разложить по степеням τ . С помощью этой замены находим

$$\begin{aligned} (1-q^2) \sum_m \sum_v [(m, xv)(m, v) + (m, v)(m, xv)] p^{v-m} q^{2m} &= \\ &= -2x_0 z/\sqrt{2} \cdot \exp[-z^2(1+q^2)/(1-q^2)] \cdot \\ \cdot [q/(1-q^2) \cdot (p/q - q/p) + 1] \cdot \exp[z^2 q/(1-q^2) \cdot (p/q + q/p)] &= \\ &= -2x_0/\sqrt{2} z \cdot \exp[-z^2(1+q^2)/(1-q^2)] \cdot \\ \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+z^2) q^{-n} I_n[2z^2 q/(1-q^2)] \cdot p^n & \quad (44) \end{aligned}$$

или, обозначив $v - m = n$,

$$\begin{aligned} (1-q^2) \sum_m [(m, x(m+n))(m, m+n) + \\ + (m, m+n)(m, x(m+n))] q^{2m} &= \\ &= -2x_0/\sqrt{2} z \cdot \exp[-z^2(1+q^2)/(1-q^2)] \cdot \\ \cdot (n+z^2) q^{-n} I_n[2z^2 q/(1-q^2)]. & \quad (45) \end{aligned}$$

В пределе при низких температурах ($q \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} (1-q^2) \sum_m \sum_v [(m, xv)(m, v) + (m, v)(m, xv)] p^{v-m} q^{2m} &\rightarrow \\ &\rightarrow -2x_0 z/\sqrt{2} \cdot (1+p) \exp[-z^2(1-p)] \end{aligned} \quad (46)$$

(что получается также из (1.29)).

В пределе при высоких температурах ($q \rightarrow 1 - 0$)

$$(1 - q^2) \sum_m \sum_v [(m, xv)(m, v) + (m, v)(m, xv)] q^{2m} \rightarrow -4x_0 z / \sqrt{2} \quad (47)$$

Для нахождения температурной зависимости поляризуемости вычислим $S_1(q)$, умножив обе стороны равенства (44) на $p^{\alpha-1} dp$ и проинтегрировав. Находим

$$S_1(q) = -2x_0 / \sqrt{2} z \cdot \{1 + (z^2 - \alpha) \exp[-z^2(1 + q^2)/(1 - q^2)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{-n}}{n + \alpha} I_n[2z^2 q / (1 - q^2)]\}. \quad (48)$$

Можно придать следующий вид соотношению (48), если учесть (25):

$$S_1(q) = -2x_0 / \sqrt{2} z \cdot [1 + (z^2 - \alpha) S_0(q)]. \quad (49)$$

При низких температурах (49) переходит в формулу (42).

При высоких температурах

$$S_1(q) \sim -2x_0 / \sqrt{2} z [1 + (z^2 - \alpha) \sqrt{\pi} \operatorname{ctg} \alpha \pi \cdot \beta / 2z + O(\beta^2)], \quad (50)$$

или короче,

$$S_1(q) \sim -2x_0 / \sqrt{2} z + O(\beta).$$

Итак, в отличие от приближения Кондона, где сумма $S_0(q)$ при высоких температурах приближается к нулю как $\beta \sim O(T^{-1/2})$, сумма $S_1(q)$ в этом случае имеет конечный предел для $T \rightarrow \infty$. Это означает, что и поляризуемость с учетом отступления от приближения Кондона при высоких температурах не стремится к нулю, а остается конечной.

Автор признателен К. К. Ребане за предложение темы и за интерес к работе.

Поступило в редакцию
3 апреля 1963 г.

1. Р. А. Преэм, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 114, 1963.
2. Р. А. Преэм, Труды ИФА АН ЭССР, № 16, 57, 1961.

ON THE CALCULATION OF SUMS IN THE THEORY OF RAMAN-EFFECT IN A HARMONIC OSCILLATOR APPROXIMATION

R. Preem

The present paper can be considered as a sequel to a former one [1] by the author. From the formulas derived there, the sums determining the intensity of Raman lines for transitions $m \rightarrow n$ (with arbitrary values m, n) are calculated first in the Condon approximation and then accounting for deviation from this. The basic assumptions are the same as in the previous paper: the approximation is adiabatic and we have confined ourselves to the case of a single excited electron level. The wave functions of the oscillator part are eigenfunctions of a harmonic oscillator with unvaried frequencies but displaced equilibrium positions in different electronic states. The temperature dependence of the diagonal element of the polarization matrix is given also including the limiting cases of low and high temperatures.

ВЛИЯНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ВЕКТОРНОГО БОЗОНА НА ВЕРОЯТНОСТЬ ЗАХВАТА μ -МЕЗОНА

М. Кыйв, И. Мейтре, Л. Палги

Рассматриваются нелокальные поправки от промежуточного заряженного векторного бозона при μ -захвате в гелии, водороде и углероде; дается сравнение с экспериментальными данными.

Нелокальные эффекты в распаде μ -мезона, обусловленные заряженным векторным промежуточным бозоном, некоторым образом подтверждают существование промежуточного бозона. Действительно, с учетом нелокальных поправок [1, 2] для параметра Мишеля получается

$$\varrho = \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \left(\frac{m_\mu}{M_B} \right)^2 \quad (1)$$

и для вероятности распада μ -мезона

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{(g_V^{(\beta)})^2}{192} \frac{m_\mu^5}{\pi^3} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{m_\mu}{M_B} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где $g_V^{(\beta)}$ — константа фермиевских переходов в β -распаде (нелокальные поправки в β -распаде пренебрежимо малы), M_B — масса промежуточного заряженного векторного бозона, которая должна превышать массу K -мезона. По более точным измерениям Плано [3] $\varrho > 0,75$, что можно объяснить нелокальными эффектами промежуточного бозона массой порядка $5m_\mu$. Весьма точное сравнение констант взаимодействия при β -распаде и μ -распаде показывает, что константа μ -распада несколько больше по сравнению с векторной константой β -распада (см., например, [4]). Имея в виду пред-

положения универсального фермиевского взаимодействия, эту разницу можно рассматривать обусловленной нелокальными эффектами по формуле (2). При $M_V \approx 5m_\mu$ получает-ся поправка нужной величины.

В этой работе рассматриваются нелокальные поправки к μ -захвату. Определение констант μ -захвата является одной из актуальных проблем слабого взаимодействия. Экспериментально измеренные вероятности μ -захвата в гелии, водороде и углероде уже позволяют экспериментально определить константы μ -захвата, так как теоретические расчеты в этих случаях наиболее надежны (особенно для μ -захвата в гелии [5, 6]). В этих случаях имеет смысл рассматривать и нелокальные поправки. Отметим, что для μ -захвата в сложных ядрах до сих пор нет удовлетворительной теории, так как известная «closure» формула Примакова [7] содержит некоторые недопустимые приближения [8].

В локальной теории захват μ -мезона описывается эффективным гамильтонианом взаимодействия [9]

$$\begin{aligned}
 H_{eff} = & \tau^{(+)} \frac{(1 - \hat{\sigma} \hat{v})}{2} \sum_{i=1}^A \tau_i^{(-)} \left\{ G_V^{(\mu)} I \cdot I_i + G_A^{(\mu)} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}_i - \right. \\
 & - G_P^{(\mu)} (\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma}_i \cdot \hat{v}) - g_V^{(\mu)} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)}{m_p} - g_A^{(\mu)} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i)}{m_p} \left. \right\} \cdot \\
 & \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3)
 \end{aligned}$$

где используются обозначения Фуджи и Примакова. Эффективные константы связи в случае гипотезы сохраняющегося векторного тока следующие:

$$\begin{aligned}
 G_V^{(\mu)} &= g_V^{(\mu)} \left(1 + \frac{v}{2m_p} \right), \\
 G_A^{(\mu)} &= g_A^{(\mu)} - g_V^{(\mu)} (1 + \mu_p - \mu_n) \frac{v}{2m_p}, \\
 G_P^{(\mu)} &= [g_P^{(\mu)} - g_A^{(\mu)} - g_V^{(\mu)} (1 + \mu_p - \mu_n)] \frac{v}{2m_p},
 \end{aligned} \quad (3')$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_p - \mu_n = 3,71, \quad g_A^{(\beta)} = -1,21 g_V^{(\beta)}, \\ g_A^{(\mu)} = 0,999 g_A^{(\beta)}, \quad g_V^{(\mu)} = 0,972 g_V^{(\beta)}, \quad g_p^{(\mu)} = 8 g_A^{(\beta)}. \end{aligned} \right\} (3'')$$

Как показано в работе [10] с учетом промежуточного векторного бозона эффективный гамильтониан μ -захвата приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{\text{eff}} = \tau^{(+)} \frac{(1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{v})}{2} \sum_{i=1}^A \tau_i^{(-)} \left\{ \widetilde{G}_V^{(\mu)} I \cdot I_i + \widetilde{G}_A^{(\mu)} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}_i - \right. \\ \left. - \widetilde{G}_p^{(\mu)} (\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma}_i \cdot \hat{v}) - g_V^{(\mu)} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)}{m_p} - \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left. - g_A^{(\mu)} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{v}) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{v}_i)}{m_p} \right\} \left(1 + \frac{(p-n)^2}{M_B^2} \right)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

$$\widetilde{G}_V^{(\mu)} = G_V^{(\mu)} - \frac{m_\mu (m_n - m_p)}{M_B^2} g_V^{(\mu)},$$

$$\widetilde{G}_A^{(\mu)} = G_A^{(\mu)},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_p^{(\mu)} = \left[g_p^{(\mu)} \left(1 + \frac{(p-n)^2}{M_B^2} \right) - g_A^{(\mu)} \left(1 + \frac{2m_p m_\mu}{M_B^2} \right) - \right. \\ \left. - g_V^{(\mu)} (1 + \mu_p - \mu_n) \right] \frac{v}{2m_p}. \end{aligned} \quad (4')$$

Здесь $\widetilde{G}_V^{(\mu)} = G_V^{(\mu)}$ с достаточной точностью. Важно учитывать только поправки в $\widetilde{G}_p^{(\mu)}$ и фактор $(1 + \frac{(p-n)^2}{M_B^2})^{-1}$ в формуле (4). В оценке нелокальных поправок будем использовать приближенное выражение работы [9]

$$(p-n)^2 \approx m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu}{m_n} \right) \approx 0,9 m_\mu^2.$$

Более точные измерения вероятности μ -захвата проведены в Дубне [11] с окончательным результатом для вероятности μ -захвата в гелии $\Lambda(\text{He}^3) = (1,41 \pm 0,14) \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$. Для гелия можно считать также и теоретические расчеты наиболее точными [5, 6]. По вычислениям Вольфенштейна [5] получается для вероятности μ -захвата в гелии $(1,54 \pm \pm 0,08) \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$, что согласуется с результатами [6]. Таким образом, теоретические вероятности слегка превышают экспериментальные. Так как μ -захват в гелии один из наиболее выгодных процессов для определения констант μ -захвата, важно учитывать всевозможные поправки. С учетом нелокальных поправок при $M_B = 5m_\mu$ различие между экспериментальными и теоретическими значениями снимается, так как используя результаты [5], имеем

$$\Lambda(\text{He}^3, M_B = 5m_\mu) = (1,43 \pm 0,08) \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}.$$

Теоретическое описание вероятности μ -захвата в жидком водороде зависит существенным образом от истолкования мезомолекулярных и мезоатомных процессов в жидком водороде. Используем здесь следующие предположения:

1. В жидком водороде $\sim 75\%$ μ -захватов происходит в мезомолекуле ($\rho_{\mu p}$) и $\sim 25\%$ μ -захватов в мезоатоме [12].
2. В мезоатоме μ -захват происходит в состоянии сверхтонкой структуры со спином мезоатома 0 [13].
3. μ -мезомолекула находится во время μ -захвата в ортосостоянии со спином мезомолекулы $\frac{1}{2}$ [14]. По работе [15] вероятность μ -захвата в мезомолекуле ($\rho_{\mu p}$)

$$\Lambda_{\rho_{\mu p}} = 2\gamma_0 \left[\frac{3}{4} \Lambda_0 + \frac{1}{4} \Lambda_1 \right],$$

где $2\gamma_0 = 1,165$ и Λ_0, Λ_1 — теоретические вероятности μ -захвата в мезоатоме водорода из состояния сверхтонкой структуры со спином мезоатома 0 и 1 соответственно.

Имея в виду такую картину μ -захвата в жидком водороде и используя константы связи по формулам (3''), получаем для вероятности μ -захвата в жидком водороде в ло-

кальной теории $\Lambda(H^1) \approx 586 \text{ сек}^{-1}$; что превышает экспериментальные значения (см. табл. 1). Вероятность захвата в мезомолекуле $\Lambda_{\mu p} \approx 566 \text{ сек}^{-1}$ тоже превышает экспериментальное значение. Нелокальные эффекты несколько ($\sim 5\%$ при $M_B = 5 m_\mu$) уменьшают это различие; сравнение с экспериментальными данными приведено в табл. 1.

Таблица 1

	Локальная теория	Нелокальная теория $M_B = 5m_\mu$	Экспериментальные данные	
$\Lambda(H^1)$	586	555	420 ± 120	[16]
сек^{-1}			434 ± 100	[17]
			420 ± 75	[18]
$\Lambda_{\mu p}$	566	536	515 ± 85	[19]
сек^{-1}				

Для μ -захвата в углероде $C^{12} + \mu \rightarrow B^{12} + \nu$ (парциальный переход в основное состояние) результаты экспериментальных и теоретических работ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Экспериментальные $\Lambda(C^{12} \rightarrow B^{12}) \text{ сек}^{-1}$		Теоретические $\Lambda(C^{12} \rightarrow B^{12}) \text{ сек}^{-1}$	
$(5,9 \pm 1,5) \cdot 10^3$	[20]	$7,86 \cdot 10^3$	[9]
$(6,6 \pm 1,1) \cdot 10^3$	[21]	$7,4 \cdot 10^3$	[23]
$(6,31 \pm 0,24) \cdot 10^3$	[22]	$7,26 \cdot 10^3$	[24]
		$7,12 \cdot 10^3$	[25]

Из табл. 2 видно, что уменьшение теоретической вероятности до 7% (при $M_B = 5 m_\mu$) не приводит к противоречиям с экспериментальными данными.

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся параметра асимметрии нейтрона прямого процесса в μ -захвате в бесспиновых ядрах. Теоретические значения [26] примерно

вдвое меньше экспериментальных [27]. Нелокальные поправки уменьшают несколько эффективную псевдоскалярную константу μ -захвата и абсолютная величина параметра асимметрии уменьшается нелокальными эффектами $\sim 2\%$ при $M_B \approx 5 m_\mu$. Хотя поправка будет в нежелаемом направлении, это заметно не ухудшает дела.

Таким образом, видим, что нелокальные поправки от промежуточного векторного бозона при μ -захвате в гелии вместе с поправками в μ -распаде могут интерпретироваться как аргументы в пользу существования промежуточного бозона с массой порядка $5 m_\mu$. Такие поправки не противоречат остальными данными по μ -захвату. В водороде, по-видимому, такие поправки тоже желательны.

Поступило в редакцию
12 апреля 1963 г.

Примечание при корректуре: После того, как данная работа была сдана в редакцию, нам стали известны предварительные результаты нейтринных экспериментов по поиску промежуточных векторных бозонов (I. S. Bell, I. Løvseth, M. Veltman, Report on International Conference on Elementary Particles, Sienna, Oct. 1963.). Получены некоторые экспериментальные данные в пользу существования промежуточного векторного бозона с массой порядка $1300 M_{эв}$. Если это действительно так, то нелокальные поправки могут быть на порядок меньше по сравнению с вычисленными в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev., **108**, 1611, 1957.
2. Л. Палги, Труды ИФА АН ЭССР, № 19, 100, 1962.
3. R. J. Plano, Phys. Rev., **119**, 1400, 1960.
4. R. K. Bardin, C. A. Barnes, W. A. Fowler, P. A. Seeger, Phys. Rev., **127**, 583, 1962.
5. L. Wolfenstein, Bull. Am. Phys. Soc. **6**, 33, 1961.
6. C. Verntz, Nucl. Phys., **16**, 59, 1960.
7. H. Primakoff, Rev. Mod. Phys., **31**, 802, 1959; J. C. Sens, Phys. Rev., **113**, 679, 1959; V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett., **8**, 327, 1962.
8. R. Klein, L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett., **9**, 408, 1962.
9. A. Fujii, H. Primakoff, Nuovo Cim., **12**, 327, 1959.

10. М. Кыйв, Л. Палги, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 151, 1963.
11. О. А. Займидорога, М. М. Кулюкин, Б. Понтекорво, Р. М. Суляев, И. В. Фаломкин, А. И. Филипов, В. М. Цупко-Ситников, Ю. А. Щербаков, ЖЭТФ, 41, 1804, 1961; ЖЭТФ, 43, 355, 1962; ЖЭТФ, 44, 389, 1963.
12. Я. Б. Зельдович, С. С. Герштейн, ЖЭТФ, 35, 821, 1959.
13. С. С. Герштейн, ЖЭТФ, 34, 463, 993, 1958.
14. Частное сообщение Халперна и Кролла авторам работы [17].
15. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., 4, 575, 1960.
16. R. H. Hildebrand, Phys. Rev. Lett., 8, 34, 1962.
17. R. H. Hildebrand, J. H. Doede, Proc. of Ann. Rochester Conf. on High Energy Physics, 1962, p. 418.
18. E. Bertolini, A. Citron, G. Gialanella, S. Focardi, A. Mukhin, C. Rubbia, S. Saporetti, Proc. of Ann. Rochester Conf. on High Energy Physics, 1962, p. 421.
19. E. Bleser, L. Lederman, J. Rosen, J. Rothberg, E. Zavattini, Phys. Rev. Lett., 8, 288, 1962.
20. T. N. K. Codfrei, Phys. Rev., 92, 512, 1953.
21. J. G. Fetkovich, T. H. Fields, R. L. McIlvain, Phys. Rev., 118, 319, 1960.
22. E. J. Majer, B. L. Bloch, R. M. Edelstein, R. T. Siegel, Phys. Rev. Lett., 6, 417, 1961.
23. L. Wolfenstein, Nuovo Cim., 13, 319, 1959.
24. G. Flamand, K. W. Ford, Phys. Rev., 116, 1591, 1959.
25. M. Morita, A. Fujii, Phys. Rev., 118, 606, 1960.
26. Э. И. Долинский, Л. Д. Блохинцев, ЖЭТФ, 35, 1488, 1959; М. К. Акимова, Л. Д. Блохинцев, Э. И. Долинский, ЖЭТФ, 39, 1806, 1960.
27. В. С. Евсеев, В. И. Комаров, В. З. Куш, В. С. Роганов, В. А. Черноголов, М. М. Шимфак, ЖЭТФ, 41, 306, 1961.

INFLUENCE OF INTERMEDIATE VECTOR BOSON ON MUON CAPTURE RATE

M. Kõiv, J. Meitre, L. Palgi

Nonlocal corrections due to the intermediate charged vector boson to the muon capture in helium, hydrogen and carbon are examined. The results are compared with the experimental data.

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПАУЛИ-ФИРЦА И ЛАГРАНЖИАНЫ ЧЕТЫРЕХБОЗОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (10-РЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ)

В. Лооритс, Х. Ыйглане

Лагранжианы четырехбозонного взаимодействия векторных бозонов определяются как собственные векторы операторов группы Паули-Фирца. Из требования нормировки лагранжианов определяются соотношения между константами связи.

Аналогично тому, как это сделано в случае скалярных бозонов [1], описываемых пятирядным представлением матриц Кеммера-Дэффина, можем составить также лагранжианы взаимодействия четырех векторных бозонов. Для этого воспользуемся базисными матрицами составленными из 10-рядных матриц Кеммера-Дэффина [2]

$$\begin{aligned} B_{\nu\sigma\rho} &= \frac{1}{2} (I + \eta_5) D_{\nu\sigma\rho}, \\ B'_{\nu\sigma\rho} &= \frac{1}{2} (I - \eta_5) D'_{\nu\sigma\rho}, \\ B_{\nu\sigma\rho\lambda} &= \frac{1}{2} (I + \eta_5) D_{\nu\sigma\rho\lambda}, \\ B_{\nu\sigma\rho\lambda\epsilon\omega} &= \frac{1}{2} (I - \eta_5) [D_{\nu\sigma\rho\lambda\epsilon\omega} + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\rho\lambda} \delta_{\epsilon\omega} I], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$D_{\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2} [\beta_\nu \beta_\sigma \beta_\rho - \beta_\rho \beta_\sigma \beta_\nu - \delta_{\sigma\rho} \beta_\nu + \delta_{\sigma\nu} \beta_\rho] \quad (2)$$

и

$$D'_{\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2} [\beta_\nu \beta_\sigma \beta_\rho - \beta_\rho \beta_\sigma \beta_\nu - \delta_{\sigma\nu} \beta_\rho + \delta_{\sigma\rho} \beta_\nu] \quad (3)$$

— величины антисимметричные относительно индексов $\nu\rho$,

$$D_{\nu\sigma\rho\lambda} = \frac{1}{2} [D_{\nu\sigma\rho} \beta_\lambda - D_{\nu\lambda\rho} \beta_\sigma] \quad (4)$$

— величины антисимметричные относительно индексов $\nu\rho$ и $\sigma\lambda$, и

$$D_{\nu\sigma\rho\lambda\varepsilon\omega} = \frac{1}{3} [D'_{\nu\sigma\rho} D'_{\lambda\varepsilon\omega} - D'_{\nu\sigma\varepsilon} D'_{\lambda\rho\omega} + D'_{\rho\sigma\varepsilon} D'_{\lambda\nu\omega} - \\ - D'_{\nu\lambda\rho} D'_{\sigma\varepsilon\omega} + D'_{\nu\lambda\varepsilon} D'_{\sigma\rho\omega} - D'_{\rho\lambda\varepsilon} D'_{\sigma\nu\omega} + \\ + D'_{\nu\omega\rho} D'_{\sigma\varepsilon\lambda} - D'_{\nu\omega\varepsilon} D'_{\sigma\rho\lambda} + D'_{\rho\omega\varepsilon} D'_{\sigma\nu\lambda}] \quad (5)$$

— величины антисимметричные относительно индексов $\nu\rho\varepsilon$ и $\sigma\lambda\omega$.

Лагранжиан в общем виде выражается линейной комбинацией 12 скаляров

$$S = \langle \frac{1}{2} (I + \eta_5) \rangle \langle \frac{1}{2} (I + \eta_5) \rangle,$$

$$S' = \langle \frac{1}{2} (I - \eta_5) \rangle \langle \frac{1}{2} (I - \eta_5) \rangle,$$

$$S'' = \langle \frac{1}{2} (I - \eta_5) \rangle \langle \frac{1}{2} (I + \eta_5) \rangle,$$

$$S''' = \langle \frac{1}{2} (I + \eta_5) \rangle \langle \frac{1}{2} (I - \eta_5) \rangle, \quad (6)$$

$$T_{(3)} = \langle B_{\nu\sigma\rho} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho} \rangle,$$

$$T'_{(3)} = \langle B'_{\nu\sigma\rho} \rangle \langle B'_{\nu\sigma\rho} \rangle,$$

$$T''_{(3)} = \langle B'_{\nu\sigma\rho} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho} \rangle,$$

$$T'''_{(3)} = \langle B_{\nu\sigma\rho} \rangle \langle B'_{\nu\sigma\rho} \rangle,$$

$$T_{(4)} = \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda} \rangle,$$

$$T'_{(4)} = \langle B_{\sigma\nu\lambda\rho} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda} \rangle,$$

$$T_{(6)} = \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda\alpha\beta} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda\alpha\beta} \rangle,$$

$$T'_{(6)} = \langle B_{\sigma\nu\lambda\rho\beta\alpha} \rangle \langle B_{\nu\sigma\rho\lambda\alpha\beta} \rangle,$$

где

$$\langle O \rangle \langle O' \rangle = (\bar{\Psi} O^* \psi) (\bar{\Phi} O' \varphi).$$

Скаляры (6) составлены с помощью базисных матриц (1) и их инвариантных линейных комбинаций

$$\frac{1}{2} B_{\nu\nu\rho\rho} = \frac{1}{2} (I + \eta_5), \quad (7)$$

$$\frac{1}{46} B_{\nu\nu\rho\rho\sigma\sigma} = \frac{1}{2} (I - \eta_5).$$

Предполагаем, что лагранжианы четырехбозонного взаимодействия являются собственными векторами операторов группы Паули-Фирца [3] q_1 и q_2 :

$$\begin{aligned} q_1 \mathcal{L} &= \pm \mathcal{L}, \\ q_2 \mathcal{L} &= \pm \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнений (8) дает нам следующие лагранжианы:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{++}^{(1)} &= 3S + 3T_{(4)} - T'_{(4)}, & \mathcal{L}_{++}^{(7)} &= S'' + T_{(3)} + S''' + T'_{(3)}, \\ \mathcal{L}_{++}^{(2)} &= 2S' + 2T_{(6)} - T'_{(6)}, & \mathcal{L}_{--}^{(8)} &= S - T_{(4)}, \\ \mathcal{L}_{++}^{(3)} &= T''_{(3)}, & \mathcal{L}_{--}^{(9)} &= S' - T_{(6)}, \\ \mathcal{L}_{++}^{(4)} &= T'''_{(3)}, & \mathcal{L}_{--}^{(10)} &= S'' - T_{(3)} + S''' + T'_{(3)}, \\ \mathcal{L}_{++}^{(5)} &= T'_{(4)}, & \mathcal{L}_{+-}^{(11)} &= S'' + T_{(3)} - S''' - T'_{(3)}, \\ \mathcal{L}_{++}^{(6)} &= T'_{(6)}, & \mathcal{L}_{-+}^{(12)} &= S'' - T_{(3)} - S''' + T'_{(3)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где первый индекс у \mathcal{L} (+ или -) обозначает собственное значение оператора q_1 , второй — собственное значение оператора q_2 .

Введем теперь в рассматриваемое пространство также метрику и определим скалярное произведение двух выражений типа (6) следующим образом:

$$(\langle O \rangle \langle O' \rangle, \langle R \rangle \langle R' \rangle) = \text{Sp } RO^* \cdot \text{Sp } R'^* O'. \quad (10)$$

Тогда таблицу умножения получим в виде

	S	S'	S''	S'''	T ₍₃₎	T' ₍₃₎	T'' ₍₃₎	T''' ₍₃₎	T ₍₄₎	T' ₍₄₎	T ₍₆₎	T' ₍₆₎
S	36	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0	0
S'	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4
S''	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S'''	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
T ₍₃₎	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
T' ₍₃₎	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
T'' ₍₃₎	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0
T''' ₍₃₎	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0
T ₍₄₎	6	0	0	0	0	0	0	0	36	6	0	0
T' ₍₄₎	6	0	0	0	0	0	0	0	6	36	0	0
T ₍₆₎	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	16	4
T' ₍₆₎	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	4	16

С помощью этой таблицы легко проверить, что все лагранжианы (9) являются ортогональными между собой. Их нормы следующие:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{Q}^{(1)}, \mathcal{Q}^{(1)}) &= 720, & (\mathcal{Q}^{(7)}, \mathcal{Q}^{(7)}) &= 96, \\
 (\mathcal{Q}^{(2)}, \mathcal{Q}^{(2)}) &= 144, & (\mathcal{Q}^{(8)}, \mathcal{Q}^{(8)}) &= 60, \\
 (\mathcal{Q}^{(3)}, \mathcal{Q}^{(3)}) &= 24, & (\mathcal{Q}^{(9)}, \mathcal{Q}^{(9)}) &= 24, \\
 (\mathcal{Q}^{(4)}, \mathcal{Q}^{(4)}) &= 24, & (\mathcal{Q}^{(10)}, \mathcal{Q}^{(10)}) &= 96, \\
 (\mathcal{Q}^{(5)}, \mathcal{Q}^{(5)}) &= 36, & (\mathcal{Q}^{(11)}, \mathcal{Q}^{(11)}) &= 96, \\
 (\mathcal{Q}^{(6)}, \mathcal{Q}^{(6)}) &= 16, & (\mathcal{Q}^{(12)}, \mathcal{Q}^{(12)}) &= 96.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если мы предположим, что все лагранжианы имеют одинаковую длину, то получим 12 лагранжианов в виде

$$L^{(k)} = C^{(k)} \mathcal{Q}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 12, \tag{12}$$

где $\mathcal{Q}^{(k)}$ определены формулами (9) и между константами связи $C^{(k)}$ имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
C^{(2)} &= \sqrt{5}C^{(1)}, \\
C^{(3)} &= C^{(4)} = C^{(9)} = \sqrt{30}C^{(1)}, \\
C^{(5)} &= 2\sqrt{5}C^{(1)}, \\
C^{(6)} &= 3\sqrt{5}C^{(1)}, \\
C^{(7)} &= C^{(10)} = C^{(11)} = C^{(12)} = \frac{1}{2}\sqrt{30}C^{(1)}, \\
C^{(8)} &= 2\sqrt{3}C^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{13}$$

Во всех процессах, описываемых лагранжианами (9), аддитивная величина η_5 сохраняется.

Поступило в редакцию
10 апреля 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Лооритс, Х. Ёйглане, Труды ИФА АН ЭССР, № 22, 61, 1963.
2. Х. Ёйглане, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 138, 1963.
3. А. Айнсаар, И. Отс, Х. Ёйглане, Труды ИФА АН ЭССР, № 22, 54, 1963.

THE PAULI-FIERZ TRANSFORMATION GROUP AND FOUR-BOSON INTERACTION LAGRANGIANS (10-ROW REPRESENTATION)

V. Loorits, H. Öiglane

Four-boson interaction Lagrangians for vector bosons are constructed as eigenvectors of the Pauli-Fierz group operators. Normalization requirements put to the Lagrangians enable to calculate the relations between the values of the interaction constants.

О СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. II

И. Пийр

Приводится одно из возможных аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна для одной частицы, включающее известные решения Шварцшильда и Керзона—Сильберштейна как частные случаи. Рассматривается также решение, описывающее гравитационное поле коллинеарной системы вышеуказанных объектов.

1. Введение

Вопрос о существовании точных решений уравнений Эйнштейна, описывающих статические системы частиц, частично уже решен для наиболее простого случая — для коллинеарной системы аксиально-симметричных частиц ([1], [2], гл. VIII, § 1). Некоторое обобщение имеющихся результатов дано в предыдущей работе автора [3]. За основу всех этих исследований принято решение Керзона—Сильберштейна, дающее в координатах Вейля [4] аксиально-симметричное решение с одной сингулярной точкой. При этом является существенным тот факт, что для аксиально-симметричного линейного элемента в координатах Вейля

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} [\rho^2 d\varphi^2 + e^\nu (d\rho^2 + dz^2)], \quad (1.1)$$

где μ и ν — функции только переменных ρ и z , функция μ в пустом пространстве удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа. Уже давно известны такие решения уравнений Эйнштейна, в которых функция μ представляет потенциал точечных источников расположенных по оси z ([5], [6]). В общем случае они обладают так называемыми

физическими сингулярностями на оси z между особыми точками функции μ . Такое положение указывает на существование неких натяжений, удерживающих данную систему частиц. Для получения решений, описывающих равновесные системы, т. е. системы свободные от натяжений, надо прямо (см. [1] и [2]) или косвенно, с помощью частиц обладающих дипольными или квадрупольными моментами, ориентированными по оси z [3], ввести отрицательные массы. Это является с физической точки зрения наиболее слабым местом данной методики. Если бы самостоятельное значение имели решения для коллинеарной системы частиц с натяжениями, то необходимость введения отрицательных масс отпадала бы. Нам кажется, что уже имеющиеся результаты, представляющие поле системы частиц с натяжениями, можно применить для описания реальных систем, так как с физической точки зрения оказывается возможным, что натяжения частично или полностью компенсируются силами инерции при переходе к системе отсчета, относительно которой частицы не покоятся.

В данной работе мы, однако, занимаемся частичным решением более скромной проблемы, связанной с неясностью физического смысла решения Керзона—Сильберштейна также для положительной массы. А именно, во второй части работы покажем, что существует более общее решение уравнений Эйнштейна включающее в себя в качестве частных случаев как решение Керзона—Сильберштейна, так и решение Шварцшильда. Для физической реализации такого решения по сравнению с решением Керзона—Сильберштейна, конечно, имеется гораздо больше возможностей. В третьей части приводим решения, соответствующие коллинеарным системам таких объектов и исследуем проблему получения равновесных систем, т. е. систем без натяжений.

2. Обобщенное решение, описывающее гравитационное поле одной частицы

Известно, что общий аксиально-симметричный статический линейный элемент

$$ds^2 = e^D dt^2 - e^{-D+U} [P^2 d\varphi^2 + e^W (dP^2 + dZ^2)], \quad (2.1)$$

где D , U и W — функции от $x^1 = P$ и $x^2 = Z$, при выполнении условия

$$R_3^3 + R_4^4 = 0 \quad (2.2)$$

допускает переход к координатам Вейля, в которых он принимает более простую форму (1.1). Для этого надо выбрать новые переменные в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= Pe^{U/2} = \varrho(P, Z), \\ z &= z(P, Z), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где функция $z(P, Z)$ — сопряженная с функцией $\varrho(P, Z)$, являющейся ввиду условия (2.2), гармонической ([4], см. также [2], гл. VIII, § 1). В частности такой переход возможен и при решении Шварцшильда, для которого в изотропных координатах функции D , U и W имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} D &= 2 \ln \frac{R+\lambda}{R-\lambda}, \quad U = 2 \ln \left(1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \right), \\ W &= 0, \quad (R = (P^2 + Z^2)^{1/2}), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

а преобразование (2.3) можно представить в виде следующей функции комплексного переменного

$$\varrho + iz = P + iZ - \frac{\lambda^2}{P + iZ}. \quad (2.5)$$

Надо отметить, что при конформном отображении (2.3) меридиальная плоскость PZ отображается фактически в Риманову поверхность соответствующей функции комплексного переменного $\varrho + iz$. Для функции (2.5) она состоит из двух комплексных плоскостей с разрезами вдоль отрезка $[-2i\lambda, 2i\lambda]$, а края разрезов склеены крест-накрест. Многолистность функции $\varrho + iz$, по-видимому, не является серьезным недостатком данной методики, так как для этих областей пространства-времени, имеющих физическое значение, отображение плоскости PZ на плоскость ϱz взаимно-однозначное. В частности при решении Шварцшильда область

внутри сингулярной сферы $R < \lambda$ считается обычно нефизической [7], а исключение этой области делает функцию (2.5) однолистной. При отказе от такого приема, по-видимому, возможны также интерпретации в духе Уйлера [8].

В координатах Вейля решение Шварцшильда имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \ln \frac{r_1 + r_2 + 4\lambda}{r_1 + r_2 - 4\lambda}, \\ \nu &= -\ln \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 - 16\lambda^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где

$$r_1 = [\rho^2 + (z - 2\lambda)^2]^{1/2}, \quad r_2 = [\rho^2 + (z + 2\lambda)^2]^{1/2}. \quad (2.6')$$

Функция μ в данном случае описывает ньютоновский потенциал бесконечно тонкого стержня с постоянной — единичной — линейной плотностью массы. Стержень расположен по оси z в интервале $[-2\lambda, 2\lambda]$, следовательно, полная масса равна 4λ . В предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ решение (2.6) превращает линейный элемент (1.1) в псевдоэвклидовый.

Естественным обобщением решения Шварцшильда (2.6) является случай, когда μ описывает ньютоновский потенциал стержня с постоянной плотностью отличной от единицы. Если α полная масса отрезка, то

$$\mu = \frac{\alpha}{4\lambda} \ln \frac{r_1 + r_2 + 4\lambda}{r_1 + r_2 - 4\lambda}, \quad (2.7)$$

и

$$\nu = -\left(\frac{\alpha}{4\lambda}\right)^2 \ln \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 - 16\lambda^2}, \quad (2.7')$$

как легко убедиться на основе уравнений для функции ν (см. например, [3], (1.3) и (1.4)). Предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ приводит здесь к решению Керзона—Сильберштейна, а решение Шварцшильда дает подстановку $\alpha = 4\lambda$. Уместно отметить, что полученное решение (2.7 и 7'), а также решение Шварцшильда (2.6) являются обобщением решения Керзона—Сильберштейна для коллинеарной системы точечных масс с натяжением (см., например, [3], (1.5) и (1.6))

для системы, стоящей из инфинитезимальных частиц Кер-

зона—Сильберштейна массой $\frac{\alpha}{4\lambda} dz$, т. е.

$$\mu = -\frac{\alpha}{4\lambda} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{dz_k}{r_{(k)}}$$

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{4\lambda} \right)^2 \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left[\frac{(z-z_k)(z-z_l) + \varrho^2}{r_{(k)}r_{(l)}} - 1 \right] \frac{dz_k dz_l}{(z_k - z_l)^2}, \quad (2.8)$$

где $r_{(k)} = [(z - z_k)^2 + \varrho^2]^{1/2}$. Таким образом, аксиально-симметричное решение Керзона—Сильберштейна с одной сингулярной точкой является довольно фундаментальным решением уравнений Эйнштейна, так как решение Шварцшильда и обобщенное решение (2.7 и 7') получаются из него путем некоторого суперпониования. Этот факт еще раз указывает на необходимость более внимательного изучения, и в особенности, выяснения физического смысла решения Керзона—Сильберштейна.

Перейдем теперь от координат Вейля ϱ, z, φ, t к первоначальным координатам R, Z, φ, t , в которых решение Шварцшильда обладает 3-мерным пространством конформным евклидовому. Наше обобщенное решение (1.1), (2.7 и 7') принимает тогда форму (2.1), где

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{\alpha}{2\lambda} \ln \frac{R+\lambda}{R-\lambda}, \\ U &= 2 \ln \left(1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \right), \\ W &= \left[1 - \left(\frac{\alpha}{4\lambda} \right)^2 \right] \ln \frac{(R^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 P^2}{(R^2 - \lambda^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Как и решение Шварцшильда оно имеет особую точку в начале координат и особую сферу $R = \lambda$. В линейном приближении, т. е. в приближении слабого поля, это решение является центрально-симметричным и описывает частицы массой α , но совсем не зависит от другого параметра λ . Откло-

нения от сферической симметрии появляются во втором и в более высоких приближениях, и при фиксированном значении параметра α определяются величиной второго независимого параметра λ (как уже отмечено, при $\alpha = 4\lambda$ решение во всех приближениях остается сферически симметричным). Такая дополнительная степень свободы должна сделать полученное обобщенное решение физически более содержательным, чем решение Керзона—Сильберштейна, а также чем решение Шварцшильда.

В заключение этого параграфа отметим, что небезынтересным может оказаться также решение (2.1), (2.9) или (1.1), (2.7) с чисто мнимым значением постоянной λ , т. е. при $\lambda = i\kappa$. В координатах Вейля μ описывает тогда потенциал бесконечно тонкой круглой плитки, а функции U , D и W по формулам (2.9) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= 2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right), \\ D &= \frac{\alpha}{2x} \operatorname{arctg} \frac{x}{R}, \\ W &= \left[1 + \left(\frac{\alpha}{4x} \right)^2 \right] \ln \frac{(R^2 + x^2)^2 - 4x^2 P^2}{(R^2 + x^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

И в этом случае метрика (2.1) в бесконечности является псевдоевклидовой и имеет особенность в начале координат, а также сингулярную сферу $R = \frac{2x}{\pi}$, если рассматриваем только главное значение арктангенса. В приближении слабого поля и это решение совпадает с полем точечной массы α . В дальнейшем частицы, гравитационное поле которых в отсутствии других частиц определяется формулами (2.1) и (2.9) или (2.1) и (2.10), будем называть соответственно частицами типа A или типа B . В данной работе рассмотрим только коллинеарные системы частиц типа A .

3. Коллинеарные системы частиц типа А

Проводим исследование в координатах Вейля, в которых каждой частице типа А соответствует расположенный по оси z однородный бесконечно тонкий стержень длиной $4\lambda_k$, с массой a_k и с центром в точке a_k (при этом для определенности считаем, что $a_1 < a_2 < \dots < a_N$). Переход к координатной системе, в которой линейный элемент для случая одной частицы описывается формулами (2.1) и (2.9), осуществляется с помощью функции комплексного переменного отображающей плоскость ρz с N разрезами от $a_k - 2\lambda_k$ до $a_k + 2\lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) по оси z в плоскость PZ , из которой исключены N односвязных областей, расположенных в некоторой окрестности оси Z . Границы этих областей должны быть симметричными относительно оси Z и, по меньшей мере, при предположении, что поле остальных частиц около данной частицы — слабое, они должны быть окружностями. Фактически эти кривые определяют форму сингулярных поверхностей рассматриваемого решения.

Поле системы частиц типа А можно представить в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sum_{k=1}^N \mu_k(z, \rho), \\ \nu &= \sum_{k=1}^N \nu_k(z, \rho) + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^N \nu_{kl}(z, \rho). \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Функции μ_k и ν_k определяются формулами (2.7), в которых r_1 и r_2 заменяются соответственно величинами

$$\begin{aligned} r_{(k)1} &= \{\rho^2 + [z - (a_k + 2\lambda_k)]^2\}^{1/2}, \\ r_{(k)2} &= \{\rho^2 + [z - (a_k - 2\lambda_k)]^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Члены взаимодействия можно определить интегрированием уравнений для ν , но проще исходить из выражения для члена взаимодействия точечных частиц Керзона—Сильберштейна,

как это было предложено для вывода функции ν в предыдущем параграфе [см. (2.8)]. Таким образом,

$$\begin{aligned} \nu_{kl}^{(AA)} &= \frac{\alpha_k \alpha_l}{16\lambda_k \lambda_l} \int_{a_k - 2\lambda_k}^{a_k + 2\lambda_k} \int_{a_l - 2\lambda_l}^{a_l + 2\lambda_l} \left[\frac{(z - z_{(k)})(z - z_{(l)}) + \varrho^2}{r_{(k)} r_{(l)}} - 1 \right] \frac{dz_k dz_l}{(z_k - z_l)^2} = \\ &= \frac{\alpha_k \alpha_l}{16\lambda_k \lambda_l} \ln \left(\frac{(r_{(k)2} + r_{(l)2})^2 - [a_k - a_l - 2(\lambda_k + \lambda_l)]^2}{(r_{(k)2} + r_{(l)2})^2 - [a_k - a_l - 2(\lambda_k - \lambda_l)]^2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{(r_{(k)1} + r_{(l)2})^2 - [a_k - a_l + 2(\lambda_k + \lambda_l)]^2}{(r_{(k)1} + r_{(l)1})^2 - [a_k - a_l + 2(\lambda_k - \lambda_l)]^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Верхние индексы AA при ν_{kl} обозначают тот факт, что обе частицы типа A . Если, например, $\lambda_k = 0$, то (3.2) дает член взаимодействия для частицы Керзона—Сильберштейна массой α_k и частицы типа A массой α_l

$$\nu_{kl}^{(A)} = \frac{\alpha_k \alpha_l}{4\lambda_l} \left\{ \frac{r_{(k)} - r_{(l)2}}{r_{(k)} [a_k - (a_l - 2\lambda_l)]} - \frac{r_{(k)} - r_{(l)1}}{r_{(k)} [a_k - (a_l + 2\lambda_l)]} \right\}. \quad (3.3)$$

Приведенные выражения членов взаимодействия (3.2) и (3.3) в бесконечности превращаются в нуль, но на оси z между частицами они постоянны, но не нули. Это приводит к известным уже из решения Керзона—Сильберштейна физическим сингулярностям, связанным с определенными удерживающими натяжениями. Легко убедиться, что

$$\nu_{kl}^{(AA)}(0, z) = \begin{cases} 0 & , \quad a_l + 2\lambda_l < z \\ -\frac{\alpha_k \alpha_l}{8\lambda_k \lambda_l} \ln \frac{(a_k - a_l)^2 - 4(\lambda_k - \lambda_l)^2}{(a_k - a_l)^2 - 4(\lambda_k + \lambda_l)^2} & , \quad a_k + 2\lambda_k < z < a_l - 2\lambda_l, \\ 0 & , \quad z < a_k - 2\lambda_k. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$v_{kl}^{(A)}(0, z) = \begin{cases} 0 & , \quad a_l + 2\lambda_l < z, \\ -\frac{2a_k a_l}{\lambda_l [(a_k - a_l)^2 - 4\lambda_l^2]} & , \quad a_k < z < a_l - 2\lambda_l, \\ 0 & , \quad z < a_k. \end{cases} \quad (3.5)$$

Так как в ньютоновской теории сила, с которой одна частица типа A действует на другую или на точечную частицу*, совпадает со значением функции $v_{kl}^{(AA)}(0, z)$ или $v_{kl}^{(A)}(0, z)$ на отрезке оси z между частицами, то легко убедиться, что при равновесии соответствующей системы в ньютоновском смысле решение свободно от натяжений. Учитывая, что выражения

$$\ln \frac{(a_k - a_l)^2 - 4(\lambda_k - \lambda_l)^2}{(a_k - a_l)^2 - 4(\lambda_k + \lambda_l)^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(a_k - a_l)^2 - 4\lambda_k^2}$$

(последнее также для двух частиц Керзона—Сильберштейна, т. е. при $\lambda_k = 0$) для всех пар частиц одного знака, увидим, что равновесие системы частиц типа A (включая и частицы Керзона—Сильберштейна) возможно лишь при предположении о существовании частиц как с положительными, так и с отрицательными массами. Кроме того, эти условия равновесия в общем жесткие, т. е. определяют равновесные параметры системы частиц данной структуры единым образом. В качестве примера рассмотрим наиболее простую симметричную равновесную систему из трех частиц типа A . Обозначая $a_1 = a_3 = a$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$, $\frac{\alpha}{4\lambda} = -\frac{\alpha_2}{4\lambda_2} = f$, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a$, $a_3 - a_1 = 2a$, приходим к следующему условию равновесия:

$$\left[\frac{a^2 - 4(\lambda + \lambda_2)^2}{a^2 - 4(\lambda - \lambda_2)^2} \right]^f = \left[\frac{4a^2 - 16\lambda^2}{4a^2} \right]^{-f}$$

* Точнее частица с индексом k на частицу с индексом l , $k < l$.

Следовательно, такая система является равновесной только при определенном значении параметра λ_2

$$\lambda_2 = \frac{2\lambda^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - 3\lambda^2}}{2\lambda} \quad (3.7)$$

(при этом $\lim_{a/\lambda \rightarrow \infty} \lambda_2 = \frac{1}{4}\lambda$). С изменением расстояния a меняется и величина удерживающей отрицательной массы. Напомним, что в случае частиц Керзона—Сильберштейна симметричная система, для которой $\alpha_1 = \alpha_3 = a$ и $\alpha_2 = -\frac{1}{4}a$ находится в равновесии независимо от конкретного значения параметра a [1].

Поступило в редакцию
7 октября 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Hoffmann, Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., Nr. 91, 237, 1962.
2. Дж. Синг, Общая теория относительности, М., 1963.
3. И. Пийр, Труды ИФА АН ЭССР, № 25, 36, 1964.
4. Н. Weyl, Ann. d. Phys., 54, 117, 1917.
5. Н. Е. I. Curzon, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 23, 477, 1925.
6. L. Silberstein, Phys. Rev., 49, 268, 1936.
7. В. Унт, Тезисы Советской гравитационной конференции 27—30 июля 1961 г., М., 1961, стр. 30.
8. Дж. Уйлер, Гравитация, нейтрино и Вселенная, М., 1962.

ON STATIC SOLUTIONS OF MANY PARTICLES PROBLEM IN GENERAL RELATIVITY. II

I. Piir

Problems similar to those dealt with in the Part I [3] are considered and extended. A possible axially symmetric one-particle solution of the Einstein's equations has been obtained. It contains both the well known solutions of Schwarzschild and of Curzon-Silberstein as special cases. Also a solution describing the gravitational field of a collinear system of such particles has been analysed.

РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ НА ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Я. И. Грановский

На основе метода Якоба-Вика разработаны практически удобные приемы разложения на парциальные волны. Рассмотрены процессы $\pi N \rightarrow \pi N$, $\pi\lambda \rightarrow N\bar{N}$, $NN \rightarrow NN$, $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$.

1. Введение

Необходимость в разложении на парциальные волны возникает всегда, когда в процессе рассеяния оказываются фиксированными те или иные квантовые числа. Широко используемое экспериментаторами выражение амплитуды рассеяния через фазовые сдвиги или модное в последнее время у теоретиков представление Редже (оба основаны на разложении в ряд по квантовым числам какого-либо оператора). Удобство такого разложения в значительной мере обусловлено тем, что для парциальных амплитуд условие унитарности принимает простейший вид.

Выделение зависимости от таких квантовых чисел, как заряд, барионное число, странность, изотопический спин — обычно не представляет труда. Что же касается разложения по собственным функциям момента количества движения, то оно оказывается довольно громоздким, если сталкиваются частицы, обладающие спином [1]. Существенного упрощения можно добиться и в том случае, если — согласно Якобу и Вику [2] — характеризовать состояние частицы ее спиральностью (т. е. проекцией спина на импульс).

Благодаря тому, что спиральность не изменяется при вращениях, разложение амплитуды рассеяния по собственным функциям момента принимает вид

$$(\lambda'_1 \lambda'_2 | M | \lambda_1 \lambda_2) = \frac{1}{p} \sum_j (j + 1/2) M_j e^{i(\lambda - \mu)\varphi} d_{\lambda\mu}^j(\theta),$$

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \mu = \lambda'_1 - \lambda'_2. \quad (1.1)$$

Благодаря ортогональности функций Вигнера отсюда непосредственно получаем парциальные амплитуды

$$(\lambda'_1 \lambda'_2 | M_j | \lambda_1 \lambda_2) = p e^{-i(\lambda - \mu)\varphi} \int_0^\pi (\lambda'_1 \lambda'_2 | M | \lambda_1 \lambda_2) d_{\lambda\mu}^j(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (1.2)$$

Задача сводится к тому, чтобы научиться простым путем переходить от полной амплитуды M к спиральной $(\lambda'_1 \lambda'_2 | M | \lambda_1 \lambda_2)$. Мы сделаем это в пп. 2 и 3, где будет получена формула для частиц со спином $1/2$. Затем мы применим общие формулы к столкновениям частиц со спином 0 и $1/2$ (в п. 4), и двух частиц со спином $1/2$ (в п. 5). В приложениях вычислены необходимые матричные элементы и рассмотрен переход от спирального представления к представлению с диагональной четностью.

2. Матрица плотности спиральных состояний

Частица со спином $1/2$ описывается уравнением Дирака

$$(i\gamma \cdot p + m)u(p) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu. \quad (2.2)$$

4-компонентная функция $u(p)$ может быть представлена в виде

$$u = u_{\alpha\nu}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, \quad (2.3)$$

где α — спиновый индекс, а ν — дополнительный индекс, из-за которого удваивается число компонент.

Такая запись позволяет представить каждую матрицу Дирака в виде

$$\gamma = (\sigma)_{\beta\alpha} (\varrho)_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

где матрицы σ и ϱ действуют на разные индексы и потому коммутируют между собой. Легко видеть, что выбор

$$\gamma = \varrho_2 \sigma, \quad \gamma_4 = \varrho_3 \quad (2.5)$$

позволяет удовлетворить (2, 2) и записать уравнение Дирака в виде

$$(i\varrho_2 \overset{\rightarrow}{\sigma} p - E\varrho_3 + m) u(p) = 0. \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что оператор спиральности

$$\lambda = \overset{\rightarrow}{\sigma} p / p \quad (\lambda^2 = 1), \quad (2.7)$$

коммутирует с левой частью уравнения (2, 6) и может иметь определенное значение в состояниях, описываемых его решением $u(p)$. Общее решение уравнения Дирака можно разложить по состояниям с заданной спиральностью

$$u_{\alpha\nu} = \sum_{\lambda} \varphi_{\alpha}^{(\lambda)} x_{\nu}^{(\lambda)}. \quad (2.8)$$

Найдем решение уравнения Дирака с заданной спиральностью. Для него

$$\overset{\rightarrow}{\sigma} p \varphi^{(\lambda)} = \lambda p \varphi^{(\lambda)} \quad (2.9)$$

и

$$(i\lambda p \varrho_2 - E\varrho_3 + m) \chi^{(\lambda)} = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда

$$x^{(\lambda)} = N (i\lambda p \varrho_2 - E\varrho_3 - m) \omega, \quad (2.11)$$

где N — нормирующий множитель, а

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

— единичный спинор *

Если φ нормирована обычным образом (т. е. $\varphi^+ \varphi = 1$), то

$$\bar{u}u = u^+ \gamma_4 u = \chi^+ \varrho_3 \chi = 1, \quad (2.13)$$

откуда

$$|N| = 1/\sqrt{2m(E+m)}. \quad (2.14)$$

Матрица плотности спиральных состояний определяется равенством

$$\varrho_{\lambda\mu} = \chi^\lambda \bar{\chi}^\mu \quad (2.15)$$

и легко находится с помощью (2.11)

$$\varrho_{\lambda\mu} = |N|^2 (i\lambda r \varrho_2 - E \varrho_3 - m) \omega \omega^+ (-i\mu r \varrho_2 - E \varrho_3 - m) \varrho_3. \quad (2.16)$$

Поскольку

$$\omega \omega^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \varrho_3}{2},$$

то

$$\begin{aligned} \varrho_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2} |N|^2 (i\lambda r \varrho_2 - E \varrho_3 - m) (1 + \varrho_3) (i\mu r \varrho_2 - E \varrho_3 - m) = \\ &= C_0 + C_2 \varrho_1 + C_2 \varrho_2 + C_3 \varrho_3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{E+m - \lambda\mu(E-m)}{4m}, \quad C_1 = p \frac{\lambda - \mu}{4m}, \quad C_2 = -ip \frac{\lambda + \mu}{4m}, \\ C_3 &= \frac{E+m + \lambda\mu(E-m)}{4m}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

* Спинор $\omega^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ не может быть нормирован в нерелятивистском случае.

3. Переход от инвариантных амплитуд к спиральным

Пусть дано релятивистски инвариантное выражение

$$\bar{u}Ou = \bar{u}(S + V\gamma_\mu Q_\mu + T\gamma_{\mu\nu} R_{\mu\nu} + A i\gamma_5 \gamma_\mu N_\mu + P\gamma_5)u, \quad (3.1)$$

в котором O — произвольная комбинация всех 16 матриц Дирака. Вычислим это выражение, когда заданы спиральности начального и конечного состояний. Если опустить спиноры φ^λ , $\bar{\varphi}^\mu$, то мы имеем при этом

$$(\mu|\bar{u}Ou|\lambda) = \bar{\chi}^\mu O\chi^\lambda = \text{Sp } O\rho_{\lambda\mu}, \quad (3.2)$$

где ρ — матрица плотности, введенная выше. Представив матрицы O в расщепленном виде (2, 4)

$$1, \gamma_\mu = (\rho_2\sigma, \rho_3), \gamma_{\mu\lambda} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 & \rho_1\sigma_1 \\ & 0 & \sigma_2 & \rho_1\sigma_2 \\ & & 0 & \rho_1\sigma_3 \\ & & & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_5\gamma_\mu = (\rho_3\sigma, -\rho_2), \gamma_5 = -\rho_1. \quad (3.3)$$

легко вычисляем след, который оказывается равным

$$\frac{1}{2} (\mu|\bar{u}Ou|\lambda) = SC_0 + V(C_2\sigma Q + C_3Q_4) +$$

$$+ T(C_0\sigma\vec{K} + C_1\sigma\vec{L}) + A(C_3\sigma\vec{N} - C_2N_4) - PC_1. \quad (3.4)$$

Здесь для удобства записи вместо тензора $R_{\mu\nu}$ мы ввели два вектора \vec{K} , \vec{L} :

$$R_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & K_3 & -K_2 & L_1 \\ & 0 & K_1 & L_2 \\ & & 0 & L_3 \\ & & & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Формула (3, 4) вместе с определениями (2, 18) решает поставленную задачу в общем виде.

4. Спиральные амплитуды одно-нуклонных процессов

а. Рассеяние $\pi N \rightarrow \pi N$ (см. [3]).

Амплитуда этого процесса имеет вид

$$M_{\pi N} = \bar{u}(-A + iB\gamma \cdot Q)u, \quad (4.1)$$

где $Q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ — полусумма импульсов мезона до и после рассеяния. Согласно (3, 4)

$$\frac{1}{2} (\mu|M|\lambda) = -AC_0 + iB(C_2\sigma\vec{Q} + C_3Q_4), \quad (4.2)$$

но

$$\vec{\sigma}\vec{Q} = -\vec{\sigma}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2 = -p(\lambda + \mu)/2, \quad Q_4 = i(W - E), \quad (4.3)$$

так что

$$\frac{1}{2} (\mu|M|\lambda) = -AC_0 + iB(-pC_2\frac{\lambda + \mu}{2} + iC_3(W - E)). \quad (4.4)$$

Независимых спиральных амплитуд столько же, сколько инвариантных функций, т. е. две. Мы возьмем следующие:

$$M_{++} = -A - B\left(\frac{p^2}{m} + E\frac{W-E}{m}\right) = -A - B\frac{WE - m^2}{m},$$

$$M_{-+} = -A\frac{E}{m} - B(W - E). \quad (4.5)$$

Напомним, что все спиральные амплитуды $M_{\lambda\mu}$ суть матрицы в спиновом пространстве и их еще нужно обложить спинорами $\bar{\varphi}^\mu \dots \varphi^\lambda$, чтобы перейти к числам. В частности, для (4, 5) нужно знать, что

$$(+|1|+) = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (-|1|+) = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4.6)$$

Эти формулы выводятся в приложении А.

б. Переход $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ (см. [4]).

Здесь необходимо рассмотреть амплитуду $\bar{u}Ov$ (v — спинор античастицы). В спиральном представлении этому соот-

ветствует матрица

$$\bar{\chi}^\mu O \varrho_2 \chi^\lambda = \text{Sp } O \varrho_2 \varrho_{\lambda\mu}.$$

Произведение $\varrho_2 \varrho_{\lambda\mu}$ снова имеет вид (2, 17), но

$$C_0 \leftrightarrow C_2, \quad C_1 \leftrightarrow -iC_3. \quad (4.7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mu | \bar{u} O v | \lambda = & SC_2 + V(C_0 \vec{\sigma} \vec{Q} + iC_1 Q_4) + \\ & + T(C_2 \vec{\sigma} \vec{K} - iC_3 \vec{\sigma} \vec{L}) + A(iC_1 \vec{\sigma} \vec{N} - C_0 N_4) + PiC_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Взяв амплитуду в виде

$$M_{\pi\pi \rightarrow N\bar{N}} = \bar{u}(-A + iB\gamma \cdot Q)v, \quad (4.9)$$

где

$$Q = \frac{q_1 - q_2}{2} = (\vec{q}, 0), \quad (4.10)$$

получим

$$\frac{1}{2} (\mu | M_{\pi\pi \rightarrow N\bar{N}} | \lambda) = -AC_2 + iBC_0 \vec{\sigma} \vec{q}. \quad (4.11)$$

Подставив из (2, 18) C_0 и C_2 , найдем

$$\begin{aligned} M_{++} &= \frac{ip}{m} A + iB\vec{\sigma} \vec{q}, \\ M_{-+} &= iBE\vec{\sigma} \vec{q}/m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Элементы спиновых матриц вычислены в приложении — формулы (А, 6—7). Помня, что в нашем случае нуклон и антинуклон движутся под углом $\theta_{1,2} = \pi$ друг к другу, получаем

$$\begin{aligned} f_{++} &= -\frac{ip}{m} A + iBq \cos \theta, \\ f_{-+} &= iBEq \sin \theta/m, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\theta = \widehat{q, p}$.

5. Спиральные амплитуды двух-нуклонных процессов

а. $NN \rightarrow NN$ (см. [5]).

Амплитуда рассеяния имеет вид

$$M_{NN} = \sum_{k=1}^5 F_k (\bar{u} O_k u) (\bar{u} O_k u)$$

и необходимо задавать 4 спиральности. Перемножая выражения типа (2, 17), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M_{\mu\lambda}^{\lambda'\mu'} = & F_1 C_0 C'_0 + F_2 (C_2 C'_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + C_3 C'_3) + \\ & + F_3 (C_0 C'_0 + C_1 C'_1) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + F_4 (C_3 C'_3 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + C_2 C'_2) + F_5 C_1 C'_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из этих 16 амплитуд независимыми являются только 5:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & (+ +)(+ +), \quad \varphi_2 = (+ -)(+ -), \quad \varphi_3 = (+ +)(- -), \\ \varphi_4 = & (+ -)(- +), \quad \varphi_5 = (+ +)(+ -). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Задав спиральности, мы тем самым задали C_k и C'_k . Взяв их из (2, 18), приходим к выражениям

$$\varphi = C \cdot F, \quad (5.4)$$

где φ и F — 5-рядные столбцы, а C — матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{E^2 - \rho^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'}{m^2} & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \frac{E^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' - \rho^2}{m^2} & 0 \\ E^2/m^2 & 1 & \frac{E^2 + \rho^2}{m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \rho^2/m^2 \\ 1 & \frac{E^2 + \rho^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'}{m^2} & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \frac{E^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + \rho^2}{m^2} & 0 \\ E^2/m^2 & 1 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & -\rho^2/m^2 \\ E^2/m^2 & E/m & \frac{E}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Элементы спиновых матриц, которые входят в это выражение, вычислены в приложении — формулы (А, 9—10). Подставив их, найдем

$$C = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + 3\rho^2 + m^2 \cos \theta}{2m^2} & \frac{\cos \theta - 3}{2} & \frac{-3E^2 - \rho^2 + m^2 \cos \theta}{2m^2} & 0 \\ -\frac{E^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + \rho^2 \cos \theta + 3}{m^2} & \frac{\cos \theta + 3}{2} & -\frac{\rho^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + \rho^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + \rho^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 \\ \frac{E^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\rho^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{E}{2m} \sin \theta & -\frac{E}{2m} \sin^2 \theta & -\frac{E}{2m} \sin \theta & -\frac{E}{2m} \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Эти выражения для спиральных амплитуд совпадают с приведенными в работе Голдбергера и др. [5], с точностью до общего нормировочного множителя $m^2/4\pi E^2$. Используемая здесь запись соотношений в матричной форме очень удобна, так как большинство преобразований — антисимметризация амплитуды, кросс-переход и др. — сводятся к умножению C на числовые матрицы.

б. $NN \rightarrow NN$ (см. [6, 7]).

Возьмем амплитуду NN -рассеяния в виде

$$M_{NN} = \sum_{k=1}^5 G_k (\bar{u} O_k u) (\bar{v} O_k v), \quad (5.7)$$

который получается из (5.1) с помощью зарядового сопряжения одного билинейного коварианта. Спиральная матрица плотности античастиц может быть получена с помощью матрицы зарядового сопряжения

$$\rho^c = -\rho_2 \rho \rho_2 = -C_0 + C_1 \rho_1 - C_2 \rho_2 + C_3 \rho_3. \quad (5.8)$$

Таким образом, для определения спиральных амплитуд достаточно в (5.2) изменить знаки перед C'_0 и C'_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M_{\lambda\mu}^{\lambda'\mu'} = & -G_1 C_0 C_0' + G_2 (-C_2 C_2' \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + C_3 C_3') + \\ & + G_3 (-C_0 C_0' + C_1 C_1') \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + \\ & + G_4 (C_3 C_3' \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' - C_2 C_2') + G_5 C_1 C_1'. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Дальнейшие вычисления проводятся в полной аналогии с NN -рассеянием. В качестве независимых берем амплитуды

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & (++) (++) , \quad \Phi_2 = (+-) (-+) , \quad \Phi_3 = (++) (--) , \\ \Phi_4 = & (+-) (+-) , \quad \Phi_5 = (++) (+-) \end{aligned} \quad (5.10)$$

($\Phi_{2,4}$ по сравнению с $\varphi_{2,4}$ переставлены) и тогда

$$\Phi = \bar{C} \cdot G, \quad (5.11)$$

где

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{E^2 + p^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'}{m^2} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \frac{E^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + p^2}{m^2} & 0 \\ -E^2/m^2 & 1 & -\frac{E^2 + p^2}{m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & -p^2/m^2 \\ -1 & \frac{E^2 - p^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'}{m^2} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \frac{E^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' - p^2}{m^2} & 0 \\ -E^2/m^2 & 1 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & p^2/m^2 \\ -E/m & E/m & -\frac{E}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & \frac{E}{m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

После подстановки элементов спиновых матриц (см. приложение, формулы (A, 11—12)) получаем

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} -\cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + 3\rho^2 + m^2 \cos \theta}{2m^2} & \frac{\cos \theta - 3}{2} & \frac{3E^2 + \rho^2 - m^2 \cos \theta}{2m^2} & 0 \\ -\frac{E^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{E^2 + \rho^2 \cos \theta + 3}{m^2} & \frac{\cos \theta + 3}{2} & -\frac{\rho^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{E^2 + \rho^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{m^2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{E^2 + \rho^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{m^2} & 0 \\ \frac{E^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\rho^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{2m}{E} \sin \theta & +\frac{E}{2m} \sin \theta & +\frac{E}{2m} \sin \theta & -\frac{E}{2m} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (5.13)$$

Собственно говоря, этим задача решена. Однако многие авторы (см. например, [6, 7]) пользуются другим, нежели (5.7), определением инвариантной амплитуды рассеяния

$$M_{NN} = \sum_{k=1}^5 H_k (\bar{u} O_{k\nu}) (\bar{\nu} O_{k\mu}). \quad (5.14)$$

Покажем, как перейти от G к H . Для этого следует сделать в (5.14) преобразование Фирца

$$\nu_\alpha \bar{\nu}_\beta = \sum_l a_l \Gamma_{\alpha\beta}^l, \quad a_l = \frac{1}{4} \bar{\nu} \Gamma_l \nu \quad (5.15)$$

и тогда M_{NN} приводится к виду (5.7), причем

$$G_k = \sum_l A_{kl} H_l. \quad (5.16)$$

Матрица A_{kl} имеет вид (см., например, [8])

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Подставив (5.16) в (5.11), получим

$$\Phi = \bar{D} \cdot H,$$

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} p^2/m^2 & -\cos \theta & -\cos \theta & -1 & -E^2/m^2 \\ -p^2/m^2 & \cos \theta & \frac{E^2 + p^2}{m^2} \cos \theta & -1 & -E^2/m^2 \\ 0 & -\frac{2E^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{2p^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2 \sin^2 \frac{2\theta}{2} \frac{2p^2}{m^2} \sin^2 \frac{2\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E}{m} \sin \theta & -\frac{E}{m} \sin \theta & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(5, 18)

— результат, который имеется у Волкова и Грибова [7].

В заключение нам хотелось бы отметить, что несмотря на простоту и прозрачность использованного аппарата, он по-видимому, может быть еще более упрощен. Действительно, с математической точки зрения рассмотренная задача есть редукция представления группы Лоренца по представлениям группы 3-мерных вращений. Применение методов теории групп позволяет рассмотреть этот вопрос в рамках более общего и адекватного математического аппарата. Нам хотелось бы привлечь внимание специалистов к этому вопросу.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Матричные элементы спиновых матриц

а. Один нуклон.

Все спиральные амплитуды $M_{\mu\nu}$, рассмотренные в тексте, являются матрицами в спиновом пространстве и для фактического их вычисления необходимо знать элементы вида

$$\bar{\varphi}_2 O \varphi_1. \quad (A, 1)$$

Трудность состоит в том, что импульсы \vec{p}_1 и \vec{p}_2 в состояниях φ_1 и φ_2 не совпадают. Она легко устраняется поворотом спинора на угол $\theta = \widehat{(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}$

$$\bar{\varphi}_2 O \varphi_1 = \bar{\varphi}_1 e^{i\sigma_2 \theta} / 2 O \varphi_1 = \cos \frac{\theta}{2} (\bar{\varphi}_1 O \varphi_1) + i \sin \frac{\theta}{2} (\bar{\varphi}_1 \sigma_2 O \varphi_1) \quad (A, 2)$$

(считаем, что азимутальный угол φ отсчитывается от плоскости векторов \vec{p}_1, \vec{p}_2).

Оба спинора в правой части (A, 2) совпадают и могут быть взяты в представлении, где σ_3 диагональна. Тогда из (A, 2) непосредственно следует

$$\bar{\varphi}_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A, 3})$$

$$\bar{\varphi}_2 \sigma_n \varphi_1 = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} n_x + in_y & -n_z \\ -n_z & -n_x + in_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A, 4})$$

Во избежание путаницы заметим, что строки в матрицах нумеруются спиральностью частицы 1, а столбцы — спиральностью частицы 2.

Отдельно рассмотрим случай, когда один из спиноров описывает антинуклон

$$\bar{\varphi}_2 O \varphi_1^c = \bar{\varphi}_2 O i \sigma_2 \varphi_1. \quad (\text{A, 5})$$

Это значит, что матрицы (A, 3—4) следует умножить сначала на $i \sigma_2$

$$\bar{\varphi}_2 \cdot \varphi_1^c = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A, 6})$$

$$\bar{\varphi}_2 \sigma_n \varphi_1^c = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -n_x + in_y & n_z \\ n_z & n_x + in_y \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x + in_y \\ n_x - in_y & -n_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A, 7})$$

Если антинуклон появляется в конечном состоянии (т. е. элемент имеет вид $\bar{\varphi}_2^c O \varphi_1$), то следует умножить (A, 3—4) на $i \sigma_2$ слева. Результат снова выражается формулами

(А, 6—7), в которых только произведена замена $n_{x,z} \rightarrow -n_{x,z}$.
 б. Два нуклона.

В этом случае мы встречаемся с элементами вида

$$1 \cdot 1 \equiv (\bar{\varphi}^{\lambda'_2} \varphi^{\lambda_2}) (\bar{\varphi}^{\lambda'_1} \varphi^{\lambda_1}), \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \equiv (\bar{\varphi}^{\lambda'_2} \vec{\sigma} \varphi^{\lambda_2}) (\bar{\varphi}^{\lambda'_1} \vec{\sigma} \varphi^{\lambda_1}). \quad (\text{А, 8})$$

Они находятся умножением элементов, приведенных в (А, 3—4). При этом необходимо помнить, что направления импульсов обоих нуклонов противоположны, так что одинаковая величина проекций спинов получается при противоположной спиральности.

Результаты удобно представить в виде матриц, строки которых нумеруются спиральностями одной частицы, $(++, +-, -+, --)$, а столбцы — спиральностями другой $(++, -+, +-, --)$

$$1 \cdot 1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta & -\frac{1}{2} \sin \theta & \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta \\ & & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2} \sin \theta \\ & & & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{А, 9})$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta - 3}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta & -\frac{1}{2} \sin \theta & \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{\cos \theta + 3}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta \\ & & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2} \sin \theta \\ & & & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{А, 10})$$

При выбранной нами нумерации обе матрицы симметричны.

Аналогичным образом для $N\bar{N}$ -рассеяния получаем

$$(1 \cdot 1)_{NN} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta & -\frac{1}{2} \sin \theta & \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta & \\ & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2} \sin \theta & \\ & & & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A}, 11)$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ (\sigma \cdot \sigma')_{NN} = \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{3 - \cos \theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta & -\frac{1}{2} \sin \theta & -\cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{3 + \cos \theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2} \sin \theta \\ & \frac{3 + \cos \theta}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta \\ & & \frac{3 - \cos \theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A}, 12)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Переход от спиральных амплитуд к амплитудам с заданной четностью

Метод, изложенный в основном тексте, позволяет сравнительно просто находить амплитуды рассеяния с заданными моментом и спиральностью. Практически, однако, необходимо знать парциальные амплитуды с заданной четностью. Возникает необходимость перехода от одного представления к другому.

Этот переход, в случае одного нуклона, осуществляется с помощью линейного преобразования

$$\psi_+ = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \psi_- = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B}, 1)$$

Действительно, при отражении спиральность изменяет знак, так что ψ_{\pm} имеет четность ± 1 . Матрица преобразования (B. 1)

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B}, 2)$$

и осуществляет необходимый переход по известной формуле

$$M_{\text{чет}} = SM_{\text{сп}}S^+, \quad (\text{Б, 3})$$

где $M_{\text{сп}}$ — амплитуда в представлении спиральности, а $M_{\text{чет}}$ — амплитуда в представлении четности. Зная, что

$$M_{\text{сп}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (\text{Б, 4})$$

$$a = f_{++}^j, \quad b = f_{-+}^j, \quad (\text{Б, 4})$$

находим

$$M_{\text{чет}} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}. \quad (\text{Б, 5})$$

В случае двух нуклонов мы имеем 4 состояния:

$$\psi_{+1} = \frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \psi_{+2} = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б, 6})$$

$$\psi_{-1} = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \psi_{-2} = \frac{|++\rangle - |--\rangle}{\sqrt{2}}$$

и 4-рядную матрицу преобразования

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{Б, 7})$$

которая переводит

$$M_{\text{сп}} = \begin{pmatrix} a & e & e & b \\ e & c & d & e \\ e & d & c & e \\ b & e & e & a \end{pmatrix}. \quad (\text{Б, 8})$$

$$a = \varphi_{1j}, \quad b = \varphi_{2j}, \quad c = \varphi_{3j}, \quad d = \varphi_{4j}, \quad e = \varphi_{5j} \quad (\text{Б, 9})$$

$$M_{\text{чет}} = \begin{pmatrix} a+b & 2e & 0 & 0 \\ c+d & 0 & 0 & 0 \\ c-d & 0 & 0 & 0 \\ a-b \end{pmatrix} \quad (\text{Б, 10})$$

В отличие от $M_{сл}$, которая симметрична при всех j , матрица $M_{чет}$ симметрична только при нечетных j . При четных j она антисимметрична. Структура (Б, 10) матрицы рассеяния хорошо известна (см. [6]) — в частности, недиагональный элемент $2e$ представляет собой параметр смешивания продольного и одного из поперечных триплетов, а элемент a — b описывает рассеяние в синглетном состоянии.

Поступило в редакцию
29 июля 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А. М. Балдин, В. И. Гольданский, И. Л. Розенталь, Кинематика ядерных реакций, Физматгиз, М., 1959.
2. M. Jacob, G. C. Wick, Ann. of Phys., 7, 404, 1959.
3. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, Y. Nambu, Phys. Rev., 106, 1337, 1957.
4. W. Frazer, J. Fulco, Phys. Rev., 117, 1603, 1960.
5. M. L. Goldberger, M. T. Grisaru, S. W. MacDowell, D. Y. Wong, Phys. Rev., 120, 2250, 1960.
6. В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ, 44, 1603, 1963.
7. Д. В. Волков, В. Н. Грибов, ЖЭТФ, 44, 1068, 1963.
8. Я. И. Грановский, ЖЭТФ, 37, 442, 1959.

ON EXPANSION OF THE SCATTERING AMPLITUDE INTO PARTIAL WAVES.

Ya. I. Granovsky.

A convenient method for expansion of the scattering amplitude into partial waves on the basis of Jacob-Wick method has been developed. The processes $\pi N \rightarrow \pi N$, $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, $NN \rightarrow NN$, $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ are considered.

Поляризационная матрица плотности при конверсии на
сверхтонкой структуре μ^- -мезоатома

М. Кыйв

Polarisation Density Matrix with Conversion between
 μ^- -mesic Atom Hyperfine Structure States

M. Kõiv

Влияние сверхтонкой структуры в K -орбите μ^- -мезоатома на поляризацию мюона и ядра описывается матрицей плотности (1)

$$\rho^{\pm} = \frac{1}{2F+1} \left(1 \pm \frac{2P}{2I+1} (\vec{j} \cdot \vec{F}) \right) P^{\pm} \quad (1)$$

Здесь индексы $+$ и $-$ соответствуют состояниям $F = I \pm \frac{1}{2}$, $\vec{F} = \vec{I} + \vec{s}$, где \vec{I} и \vec{s} — соответственно спин ядра и мюона, P — степень поляризации мюона в момент попадания на K -орбиту, \vec{j} — единичный вектор направления поляризации и P^{\pm} — проекционные операторы состояний $F = I \pm \frac{1}{2}$:

$$P^{+} = \frac{I+1+2Is}{2I+1}, \quad P^{-} = \frac{I-2Is}{2I+1}$$

Выражение (1) предполагает неполяризованность ядра перед попаданием мюона на K -орбиту.

Если возможна конверсия $F^{+} \rightarrow F^{-}$ с испусканием Оже-электронов, то матрица плотности (1) не в состоянии полностью описывать ситуации поляризации на K -орбите.

Гамильтониан конверсии имеет следующий вид:

$$H \sim \mu_i (R_e)_i, \quad (2)$$

$$\mu_i = \frac{1}{m_\mu} s_i + \frac{\mu_I}{I} \frac{1}{m_p} I_i,$$

где

m_μ , m_p — соответственно масса мюона и протона и μ_I магнитный момент ядра. Оператор R_e относится к электронам. Так как гамильтониан зависит от спина, нужно учитывать влияние конверсии на поляризацию.

Поляризационные состояния после конверсии $F^+ \rightarrow F^-$ описывает матрица плотности в виде

$$\rho_{\alpha\beta}^f = \frac{1}{N} (H \rho^+ H)_{\alpha\beta},$$

где N — нормирующая постоянная.

Так как нас не интересуют электронные состояния, мы можем взять шпур по электронным индексам. Тогда

$$\rho^f = \frac{1}{N} \sum_i \mu_i \rho^+ \mu_i.$$

Если хотим получить ρ^f в представлении $m_I m_s$, то

$$\rho^f = \frac{1}{N} \sum_i (I + \sigma I) \mu_i \left(1 + \frac{2P}{2I+1} \vec{F} \vec{J} \right) (I + 1 + I \sigma) \mu_i (I - \sigma I). \quad (3)$$

Обозначая $R = 2 \frac{\mu_I}{I} \frac{m_\mu}{m_p}$, можно взять $\mu_i = (\sigma_i + R I_i)$, где $\sigma_i = 2s_i$ и ρ^f приобретает вид

$$\rho^f = \frac{1}{N} (L_1 + R L_2 + R^2 L_3). \quad (4)$$

После некоторых преобразований получаем

$$L_1 = 4(I+1)A, \quad L_2 = -4(I+1)A, \quad L_3 = (I+1)A,$$

где

$$A = \left[2I + 1 + \frac{4P}{2I+1} \left(I + \frac{3}{2} \right) \vec{F} \vec{J} \right] (I - \sigma I). \quad (5)$$

Выбирая N так, что $\text{Sp } \rho^j = 1$, зависимость от R исчезает и получаем окончательно

$$\rho^j = \frac{1}{2I} \left[1 + \frac{4P}{(2I+1)^2} \left(I + \frac{3}{2} \right) \vec{F} \vec{j} \right] P^{-}. \quad (6)$$

Вероятность конверсии $K \gg \Delta\Lambda$ ($\Delta\Lambda = \Lambda_+^c - \Lambda_-^c$ и Λ_{\pm}^c — вероятность захвата в состояниях $F = I \pm 1/2$) [2], во всяком случае для металлов [3]. Так как населенность уровней при предположении $K \gg \Delta\Lambda$ можно выразить $n_-(t) = e^{-\Lambda_- t} [n_-(0) + n_+(0) (1 - e^{-Rt})]$; $n_+(t) = n_+(0) \cdot e^{-t(\Lambda_- + R)}$ (где Λ_- — суммарная вероятность захвата и распада от $F = I - 1/2$ состояния), то через достаточный промежуток времени ($t \gg K^{-1}$) все мюоны практически оказываются на нижнем энергетическом уровне. Поляризация мюона \bar{s}_i в таком случае получается (при $F^+ \rightarrow F^-$)

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \frac{I}{2I+1} \text{Sp } (s_i \rho^-) + \frac{I+1}{2I+1} \text{Sp } (s_i \rho^j) = \\ &= -\frac{4}{3} P j_i \frac{(I - \frac{1}{2})(I + \frac{3}{4})}{(2I+1)^3}. \end{aligned}$$

Среднее значение спина ядра после времени $t \gg K^{-1}$

$$\begin{aligned} \bar{I}_i &= \frac{I}{2I+1} \text{Sp } (I_i \rho^-) + \frac{I+1}{2I+1} \text{Sp } (I_i \rho^j) = \\ &= \frac{4}{3} P j_i \frac{(I+1)(I + \frac{3}{4})(2I-1)}{(2I+1)^3}. \end{aligned}$$

В ядрах, где F^- энергетически выше, происходит конверсия $F^- \rightarrow F^+$. Для нахождения ρ^j нужно вместо выражения (3) использовать

$$\begin{aligned} \rho^j &= \frac{1}{N} \sum_i (I + 1 + \vec{\sigma} I) \mu_i \left(1 - \frac{2P}{2I+1} \vec{j} \vec{F} \right) (I - \vec{\sigma} I) \mu_i \cdot \\ &\cdot (I + 1 + \vec{\sigma} I). \end{aligned} \quad (7)$$

После некоторых вычислений можно дать $q^{I'}$ вид выражения (4), где A нужно заменить на

$$A' = \left[2I + 1 + \frac{4P}{2I+1} \left(I - \frac{1}{2} \right) \vec{F}j \right] (I + 1 + \vec{\sigma}I). \quad (8)$$

После нормировки исчезает зависимость от R и получаем

$$q^{I'} = \frac{1}{2I+1} \left[1 + \frac{4P}{(2I+1)^2} \left(I - \frac{1}{2} \right) \vec{F}j \right] P^+. \quad (9)$$

Поступило в редакцию
15 декабря 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ 36, 654, 1959.
2. R. Winston, V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett., 7, 104, 1961.
3. А. Е. Игнатенко, М. Пэтрашку, Д. Чултэм, ЖЭГФ, 42, 646, 1962.

Влияние ангармонизма колебаний на положение линии

Мёссбауэра

В. В. Хижняков

Anharmonicity Effect in the Mössbauer Line Shift

V. Hizhnyakov

Нами было рассмотрено совместное влияние изменения массы ядра при γ -переходе и ангармонизма колебаний решетки на эффект Мёссбауэра. Учитывалось влияние этих факторов на положение и ширину бесфононных, а также фононных переходов. Поправки к вероятностям переходов, обусловленные как ангармонизмом колебаний, так и изменением массы ядра, не рассматривались. Считалось, что локальные колебания отсутствуют.

В этих приближениях, а также в первом порядке по изменению массы ядра и во втором по кубическому ангармонизму вероятность $I(\omega)$ испускания γ -кванта с частотой ω равна (спектр нормирован таким образом, что площадь под спектральной кривой равна единице)

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0 - R(T)t - \gamma_0|t|} J(t) dt, \quad (1)$$

$\hbar\omega_0$ — энергия возбужденного уровня ядра, а γ_0 — его естественная ширина,

$$J(t) = \exp \left\{ - \sum_j z_j^2 [2\bar{n}_j + 1 - (\bar{n}_j + 1) e^{i\bar{\omega}_j t - \gamma_j |t|} - \bar{n}_j e^{-i\bar{\omega}_j t - \gamma_j |t|}] \right\}, \quad (2)$$

z_j^2 — энергия отдачи, приходящаяся на осциллятор j [1], γ_j — константа затухания, а ω_j — перенормированная частота осциллятора j , относящаяся к основному состоянию γ -радиоактивного ядра [1, 2],

$$R(T) = \frac{1}{\hbar} \sum_j c_{jj} (2\bar{n}_j + 1) - \frac{36}{\hbar^3} \sum_{jiks} \sum_{\eta_i \eta_j \eta_k \eta_s} \xi_{\eta_i} \xi_{\eta_j} \xi_{\eta_k} \xi_{\eta_s} \left\{ \frac{c_{ij} V_{-\eta_j, \eta_k, \eta_s} V_{-\eta_i, -\eta_k, -\eta_s}}{\eta_i \omega_i - \eta_k \omega_k - \eta_s \omega_s} \left[\frac{\exp\{\hbar(\eta_j \omega_j + \eta_k \omega_k + \eta_s \omega_s)/kT\} - 1}{\eta_j \omega_j + \eta_k \omega_k + \eta_s \omega_s} - \frac{\exp\{\hbar(\eta_i \omega_i + \eta_j \omega_j)/kT\} - 1}{\eta_i \omega_i + \eta_j \omega_j} \right] + \frac{c_{ij} V_{-\eta_i, -\eta_j, \eta_k} V_{-\eta_k, \eta_s, -\eta_s}}{\eta_i \omega_i + \eta_j \omega_j - \eta_k \omega_k} \left[\frac{\exp\{\hbar(\eta_i \omega_i + \eta_j \omega_j)/kT\} - 1}{\eta_i \omega_i + \eta_j \omega_j} - \frac{\exp\{\hbar \eta_k \omega_k / kT\} - 1}{\eta_k \omega_k} \right] \right\}, \quad (3)$$

P — символ главного значения, $\eta_i = 1$, $\xi_{\eta_i} = \bar{n}_i + \frac{1}{2}(1 - \eta_i)$.

Кроме того, $c_{ij} = -\frac{\Delta m_r}{m_r^2} \sqrt{\hbar^2 \omega_i \omega_j m_i m_j} \sum_{\alpha} e_{\alpha}(r|i) e_{\alpha}(r|j)$, если

$\Delta m_r = \hbar \omega_0 / c^2$ — изменение массы m_r ядра номер r при γ -переходе в нем, m_j — эффективная масса, а ω_j — частота осциллятора j , $\bar{n}_j = (e^{\hbar \omega_j / kT} - 1)^{-1}$, $e_{\alpha}(r|j)$ — элемент собственного вектора динамической матрицы, относящийся к декартовой координате α ядра r и осциллятору j , $V_{\eta_i, \eta_j, \eta_k}$ — параметры ангармонической связи осцилляторов, являющиеся коэффициентами членов третьей степени в разложении адиабатического потенциала по операторам рождения a_j^+ и уничтожения a_j фононов (индекс $\eta_j = 1$ здесь соответствует коэффициенту перед членом, содержащим a_j , $\eta_j = -1$ — коэффициенту перед членом, содержащим a_j^+).

Из формулы (1) следует, что ангармонизм колебаний приводит к изменению температурной зависимости положения линии Мёссбауэра по сравнению с гармоническим приближением ($R(T)$).

В случае электронно-колебательных переходов в примес-

ных центрах совместный учет изменения упругих постоянных решетки при электронном переходе и ангармонизма колебаний также приводит к дополнительному температурному сдвигу бесфононной (чисто-электронной) линии. Формулы (1) — (3) определяют также спектр люминесценции примесного центра в отсутствие локальных колебаний, если в (3) параметры c_{ij} заменить $c_{ij}\eta_i\eta_j$. При этом z_j^2 и c_{ij} характеризуют соответственно изменение положений равновесия ядер и динамической матрицы при электронном переходе, а γ_0 определяет естественную ширину возбужденного электронного уровня.

Поступило в редакцию
22 июня 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Хижняков, Известия АН ЭССР (в печати).
2. М. А. Кривоглаз, ЖЭТФ, 46, 637, 1964.

Изоэнергетическая колебательная релаксация и спектр люминесценции

А. П. Пурга

Isoenergetic Vibrational Relaxation and Luminescence Spectrum

А. Purga

Имеется много работ, в которых рассматривались спектры примесных кристаллов и сложных молекул, находящихся в тепловом равновесии (см., например, [1 — 3]). Применительно к спектру люминесценции это означает, что исследовались спектры, излучаемые после колебательной релаксации в центре. Колебательная релаксация в центре люминесценции обычно, действительно, протекает быстро по сравнению с оптическим временем жизни, о чем свидетельствуют многочисленные эксперименты о независимости спектра люминесценции от частоты возбуждающего света [1, 4].

Тем не менее любопытно выяснить, как изменяется спектральный состав излучения в ходе колебательной релаксации. Это существенно прежде всего для более глубокого понимания разыгрывающихся в центре процессов. Кроме того, следует думать, что временная зависимость спектра люминесценции может проявляться в эксперименте в особых условиях, когда время колебательной релаксации становится сравнимым с оптическим временем жизни. Это может иметь место в системах с интенсивным индуцированным излучением.

Рассмотрим обладающий сплошным колебательным спектром кристалл, в котором в результате электронного перехода в примеси возникает нестационарное колебательное

состояние. Развитие этого состояния во времени описывается как квантовомеханическое движение колебательного волнового пакета. Согласно теореме Фока и Крылова [5], нестационарное состояние в системе с непрерывным энергетическим спектром распадается. Пространственное изоэнергетическое расплывание колебательного волнового пакета означает уход энергии из центра, тем самым колебательную релаксацию. Такой процесс релаксации происходит в бесконечном кристалле уже в адиабатическом и гармоническом приближениях без привлечения внешнего термостата [6]. Учитывая колебательную релаксацию возбужденного состояния, получим зависящий от времени спектр излучения, который исследуем методом моментов, оказавшимся эффективным в ряде задач теории электронно-колебательных переходов [7].

Моменты распределения интенсивности в спектре испускания, зависящего от времени, будем находить по формуле

$$S_l(t) = \text{Sp} [\varrho_T(t) \hat{S}_l] \quad (1)$$

Здесь матрица плотности $\varrho_T(t)$ описывает неравновесное начальное состояние для излучения в момент времени t , причем она подчиняется уравнению движения

$$i\hbar \frac{\partial \varrho_T(t)}{\partial t} = [H, \varrho_T(t)], \quad (2)$$

где H — гамильтониан системы. Оператор момента \hat{S}_l для данной задачи выбирается эрмитовым в виде

$$\hat{S}_l = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^l (-1)^p \binom{l}{p} [H_I^p P H_{II}^{l-p} P + P H_{II}^{l-p} P H_I^p], \quad (3)$$

где H_I и H_{II} — гамильтонианы исходного и конечного состояний, соответственно, P — эрмитовый оператор возмущения, вызывающего переход.

Предположим, что до поглощения кванта света рассматриваемая система находилась в состоянии термического равновесия и описывалась гамильтонианом H_0 и матрицей плот-

ности ρ_T . Далее, примем, что электронный переход совершается мгновенно. Тогда мгновенно изменится и колебательный гамильтониан: развитие колебательного движения будет описываться гамильтонианом H_{II} . Пусть H_I и H_{II} отличаются только равновесными положениями нормальных осцилляторов. Тогда в приближении Кондона для бесконечного одноатомного кристалла в отсутствие локальных колебаний получим следующие выражения первых моментов

$$S_0 = 1,$$

$$S_1(t) = E_0 - \frac{1}{2} \int_0^{\omega_L} \omega^2 z_0^2(\omega) (1 - 2 \cos \omega t) \rho(\omega) d\omega,$$

$$\bar{S}_2(t) = \bar{S}_2 = \int_0^{\omega_L} (k\tau(\omega)) \omega^2 z_0^2(\omega) \rho(\omega) d\omega, \quad (4)$$

$$\bar{S}_3(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_L} \omega^2 z_0^2(\omega) (\hbar\omega)^2 (2 \cos \omega t - 1) \rho(\omega) d\omega.$$

Здесь \bar{S}_l — центральный момент порядка l , E_0 — энергия чистоэлектронного перехода, ω_L — предельная частота зоны колебаний, $z_0(\omega)$ — приведенный сдвиг равновесного положения нормального осциллятора частоты ω при возбуждении, τ — эффективная температура осциллятора ($k\tau \equiv \frac{1}{2} \hbar\omega \operatorname{cth} [\frac{1}{2} 2\beta\hbar\omega]$), $\rho(\omega)$ — плотность колебательных состояний.

Сопоставление формул (4) с независящими от времени моментами для поглощения и излучения [7] дает, что при $t = 0$ моменты полосы излучения (4) совпадают с моментами полосы поглощения, а при $t \rightarrow \infty$ с моментами обычного излучения. Разность первых моментов поглощения и зависящего от времени излучения дает удобный параметр — зависящие от времени стоксовы потери [6], который характеризует уход энергии из центра люминесценции.

В работе [8] из экспериментально измеренного спектра

получена «функция распределения стоковых потерь», которая в наших обозначениях с точностью постоянного множителя совпадает с функцией $z_0^{-2}(\omega)\rho(\omega)$, что позволяет оценить время релаксации в реальных системах. Численный расчет зависящих от времени моментов показывает, что действительно, колебательный волновой пакет расплывается весьма быстро — за время меньше, чем 10^{-11} сек.

Поступило в редакцию
9 июня 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Левшин, Фотолюминесценция жидких и твердых веществ, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
2. Б. И. Степанов, Люминесценция сложных молекул, Изд. АН БССР, Минск, 1955; М. А. Ельяшевич, Атомная и молекулярная спектроскопия, ГИФМЛ, М., 1962.
3. С. И. Пекар, УФН, 50; Ю. Е. Перлин, УФН, 80, 553, 1963.
4. Ч. Б. Лущик, Труды ИФА АН ЭССР, № 14, 3, 1961.
5. Н. С. Крылов, В. А. Фок, ЖЭТФ, 17, 93, 1947.
6. А. П. Пурга, Труды ИФА АН ЭССР, № 27 (в печати).
7. M. Lax, J. Chem. Phys., 20, 1752, 1952.
К. К. Ребане, А. П. Пурга, О. И. Сильд, В. В. Хижняков, Труды ИФА АН ЭССР, № 14, 31, 48, 1961.
8. К. К. Ребане, Е. Д. Трифионов, В. В. Хижняков, Труды ИФА АН ЭССР № 27 (в печати).

СОДЕРЖАНИЕ

Х. П. Керес. Обобщенные инерциальные системы в ньютоновской и общерелятивистской механиках. II Теория Эйнштейна	3
И. Р. Пийр. О статических решениях проблемы многих частиц в общей теории относительности. I	36
Р. А. Прээм. О вычислении сумм в теории комбинационного рассеяния в приближении гармонического осциллятора	47
М. Н. Кыйв, И. Х. Мейтре, Л. Д. Палги. Влияние промежуточного векторного бозона на вероятность захвата μ -мезона	63
В. А. Лооритс, Х. Х. Ыйглане. Группа преобразований Паули-Фирца и лагранжианы четырехбозонного взаимодействия (10-рядное представление)	70
И. Пийр. О статических решениях проблемы многих частиц в общей теории относительности. II	75
Я. И. Грановский. Разложение амплитуды рассеяния на парциальные волны	85
Краткие сообщения:	
М. Кыйв. Поляризационная матрица плотности при конверсии на сверхтонкой структуре μ -мезоатома	102
В. В. Хижняков. Влияние анагармонизма колебаний на положение линии Мёссбауэра	106
А. П. Пурга. Изоэнергетическая колебательная релаксация и спектр люминесценции	110

CONTENTS

H. Keres. Generalized Inertial Systems in Newtonian Mechanics and in General Relativity. II The Theory of Einstein	35
I. Piir. On Static Solutions of the Problem of Many Particles in General Relativity I	46
R. Pream. On the Calculation of Sums in the Theory of Raman-Effect in a Harmonic Oscillator Approximation	62
M. Kõiv, J. Meitre, L. Palgi. Influence of Intermediate Vector Boson on Muon Capture Rate	69
V. Loorits, H. Oiglane. The Pauli-Fierz Transformation Group and Four-Boson Interaction Lagrangians (10-Row Representation)	74
I. Piir. On Static Solutions of Many Particles Problem in General Relativity II	84
Ya. I. Granovsky. On Expansion of the Scattering Amplitude into Partial Waves	101
Short Notes:	
M. Kõiv. Polarisation Density Matrix with Conversion between μ -mesic Atom Hyperfine Structure States	102
V. Hizhnyakov. Anharmonicity Effect in the Mössbauer Line Shift	106
A. Purga. Isoenergetic Vibrational Relaxation and Luminescence Spectrum	110

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ

№ 25

На русском и английском языках

*

Редакционно-издательский совет
Академии наук Эстонской ССР
Таллин, ул. Кохту, 6

Редактор Л. Парфенова
Технический редактор И. Курвитс

Сдано в набор 25/V 1963. Подписано к печати
3/VII 1964. Бумага $60 \times 84,1/16$. Печатных листов
7,25. Учетно-издательских листов 4,6. Тираж 1000.
экз. МВ-05637. Заказ № 4442.

Типография им. Ханса Хейдеманна,
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 17/19. II.

Цена 32 коп.

Содержание предыдущих выпусков «Трудов ИФА»

1. Исследования по люминесценции, 1955.
2. Исследования по теоретической физике, 1955.
3. Ч. Б. Лушник, Исследования центров захвата в щелочногалоидных кристаллофосфорах, 1955.
4. Исследования по люминесценции, 1956.
5. Исследования по теоретической физике, 1957.
6. Исследования по люминесценции, 1957.
7. Исследования по люминесценции, 1958.
8. Исследования по люминесценции, 1958.
9. Исследования по теоретической физике, 1959.
10. Исследования по люминесценции, 1959.
11. Исследования по люминесценции, 1960.
12. Исследования по люминесценции, 1960.
13. Исследования по теоретической физике, 1961.
14. Исследования по люминесценции, 1961.
15. Исследования по люминесценции, 1961.
16. Исследования по теоретической физике, 1961.
17. Исследования по люминесценции, 1961.
18. Исследования по люминесценции, 1962.
19. Исследования по теоретической физике, 1962.
20. Исследования по теоретической физике, 1963.
21. Исследования по люминесценции, 1962.
22. Исследования по теоретической физике, 1963.
23. Исследования по люминесценции, 1963.
24. Исследования по теоретической физике и математике, 1964.



32 коп.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00509630 2