N. Rõbkin

GEOMEETRIA
ÜLESANNETE KOGU

PLANIMEETRIA

VI–IX
KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-21497 I

N. RÕBKIN

GEOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

I JAGU

PLANIMEETRIA

KESKKOOLI VI—IX KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel:

Н. Рыбкин. **Сборник задач по геометрии.** Часть I. Планиметрия.
Для 6—9 классов семилетней и средней школы.
Утверждён Министерством просвещения РСФСР.
Учпедгиз 1955.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
41590

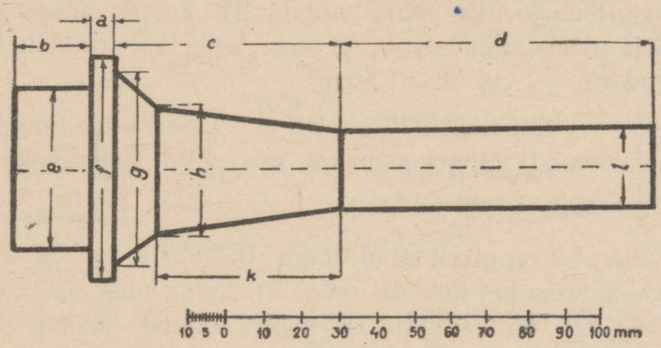
ARHIIVKOGU

§ 1. Sirgjoon.

(Selle paragrahvi ülesanded lahendada geomeetrilise konstruktsiooni abil; lahendeid kontrollida arvutamise teel.)

Lõikude mõõtmine ja tehted nendega.

1. Joonisel 1 on kujutatud osa treipingist. Kasutades antud mastaapi mõõta joonisel mõõdujoontega märgitud kaugused ning kirjutada saadud arvud vihikusse.



Joon. 1.

2. Kolm tala pikkusega 4,8 m, 3,4 m ja 5,8 m on otsakuti kokku tapitud. Leida nende ühine pikkus arvutamise teel ja konstruktsiooni teel, kujutades 1 m lõiguga 1 cm.

3. Kuuse pikkus oli 20,25 m; temast saeti maha 3,75 m pikkune tüvi ja seejärel 7,40 m pikkune palk. Kui pikk on ülejäänud latv?

4. 20 m pikkust lõiku AB on pikendatud otspunktist A lõigu $AC = 5{,}1$ m võrra ja otspunktist B lõigu $BD = 7{,}9$ m võrra. Leida lõigu CD pikkus.

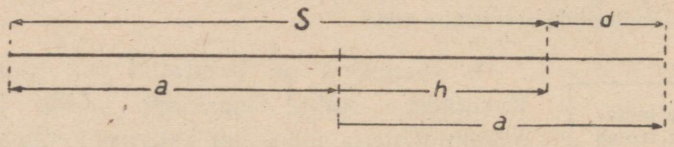
5. Lahendada ülesanne 4, muutes arvud nii: $AB = 4{,}8$ m, $AC = 2{,}8$ m ja $BD = 3$ m.

6. Joonestada lõik $3a + 2b$, kus a ja b on antud lõigud.

7. Joonestada lõik $4m - 3n$, kus m ja n on antud lõigud $(m > n)$.

8. Ühel ja samal sirgel ning ühes ja samas suunas on paigutatud punktist M kaks lõiku: $MN = 100$ cm ja $MP = 160$ cm. Leida nende lõikude keskpunktide vaheline kaugus.

9. Lõik AB on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Nende lõikude keskpunktide vaheline kaugus on 2,75 m. Leida lõigu AB pikkus.



Joon. 2.

10. Selgitada joonise põhjal (joon. 2), kuidas antud lõikude summa S ja nende lõikude vahe d järgi leida konstruktsiooni teel need lõigud ($S = 7$ cm; $d = 1{,}5$ cm).

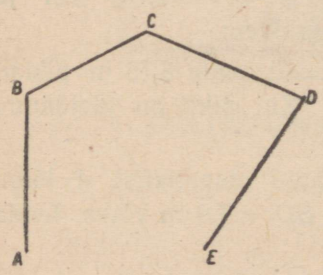
Lõikude võrdeline jaotamine.

11. Lõik AB on 2,8 m. Leida selle lõigu keskpunkti kaugus punktist, mis selle lõigu jaotab suhtes $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$.

12. Lõiku AB on pikendatud lõigu BC võrra nii, et lõik AC on m korda suurem kui lõik AB $(m = 5)$. Leida suhe $AB : BC$.

13. Lõik AB on jaotatud kolmeks lõiguks suhtes $2 : 3 : 4$. Äärmiste lõikude keskpunktide vaheline kaugus on 5,4 m. Leida AB pikkus.

14. Lõik AB on jaotatud punktiga C suhtes $5 : 7$ ja punktiga D suhtes $5 : 11$; punktide C ja D vaheline kaugus on 10 m. Leida AB pikkus.

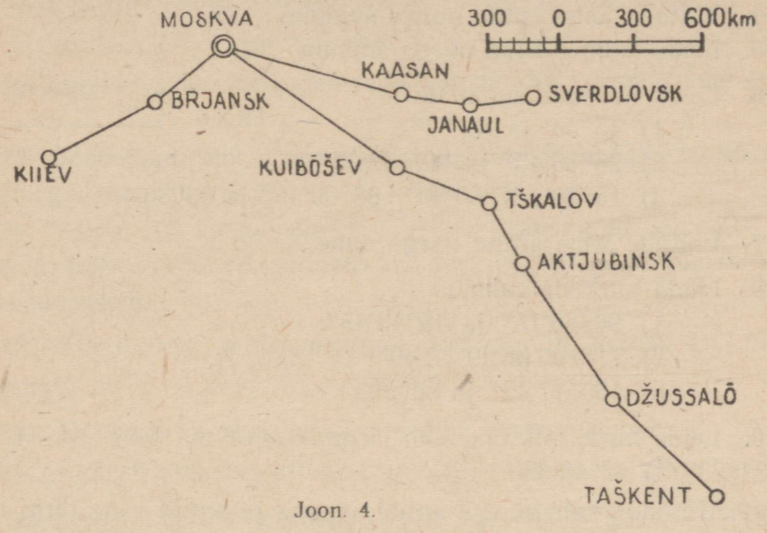


Joon. 3.

Murdjoone pikkus.

15. On antud murdjoon $ABCDE$ (joon. 3). Leida murdjoone lülide summa iga lüli mõõtmise teel. Sirgestanud murdjoone (konstruktsiooni teel), mõõta saadud lõigu pikkus. Võrrelda saadud vastuseid.

16. Joonisel 4 on antud õhuteede kaart. Võrrelda (murdjoonte sirgestamise teel) kaugusi Moskvast Kiievini, Sverdlovskini ja Taškendini. Leida need kaugused mastaabi abil.



Joon. 4.

Punktide ja sirgete vastastikune asend.

17. Otsustada, kas punktid A, B ja C asetsevad ühel ja samal sirgel, kui nendevahelised kaugused on järgmised:

1) $AB = 20$ m, $AC = 13$ m, $BC = 7$ m.
2) $AB = 4$ m, $AC = 7$ m, $BC = 3$ m.
3) $AB = 1{,}8$ m, $AC = 1{,}3$ m, $BC = 3$ m.

18. 1) On antud kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti. Mitu erinevat sirget määravad need punktid, kui iga sirge läbib kahte punkti?

2) Mitme sirgega saab paariviisi ühendada 4 punkti, milledest ükski kolmik ei asetse ühel sirgel? Sama küsimus 5 punkti, 20 punkti, n punkti kohta.

§ 2. Nurgad.

Nurkade ehitamine ja mõõtmine ning tehted nendega.

1. Ehitada antud nurgaga võrdne nurk.
2. Ehitada malli abil nurgad suurusega 60°; 75°; 125°; 150°.

3. Ehitada silma järgi nurgad suurusega 30°; 45°; 120° ja 135°. Kontrollida ehitatud nurki malliga.

Lahendada ülesanded 4—16 esmalt geomeetrilise konstruktsiooni teel malli abil ja seejärel kontrollida lahendid arvutamise teel.

4. Ehitada kahe antud nurga summa.

5. Leida kolme antud nurga summa.

6. Leida nurkade summad:

1) 45°36′ ja 78°57′;
2) 26°16′45″ ja 117°52′30″;
3) 15°40′, 37°50′30″, 88°00′45″ ja 20°30′40″.

7. Ehitada kahe antud nurga vahe.

8. Leida nurkade vahe:

1) 96°35′15″ ja 48°45′45″;
2) 71°10′ ja 29°52′30″;
3) 153°17′42″ ja 68°29′.

9. Leida nurk, mis täiendab järgmisi teravnurki 90°-ni: 1) 70°; 2) 34°23′; 3) 22°42′38″.

10. Ehitada kahe nurga antud summa ja antud vahe järgi need nurgad.

11. Suurendada antud teravnurka 3 korda.

12. Leida korrutised: 1) 35°42′ · 5; 2) 17°23′45″ · 4; 3) 55°32′30″ · 3.

13. Jaotada antud nurk 2, 4, 8, 16 võrdseks osaks.

14. Leida jagatised:

1) 93°15′ : 3;
2) 147°45′ : 2;
3) 98°21′50″ : 4;
4) 161°00′40″ : 8.

15. Joonestada nürinurk ja teravnurk. Otsustada, mitu korda teravnurk mahub nürinurgasse.

16. Leida jagatised: 1) 105° : 30°; 2) 66°55′ : 24°20′; 3) 28°35′ : 40°50′.

Lähisnurgad.

17. Nürinurga sees on joonestatud tema tipust haaradele ristsirged; nende ristsirgete vaheline nurk on $\frac{4}{7}\ d$ *. Arvutada nürinurk. Kasutades malli teha täpne joonis.

* Tähega *d* tähistatakse täisnurga suurust. Tõlk.

18. On antud 2 lähisnurka: terav- ja nürinurk. Nende tippu läbiv sirge on risti nende ühise haaraga, kuid teravnurga teise haaraga moodustab nurga $\frac{5}{7}d$ ja nürinurga teise haaraga moodustab nurga $\frac{3}{7}d$. Leida antud nurkade summa ja teha täpne joonis.

Kõrvunurgad.

19. Raudteejaama juures moodustab tagavaratee peateega nurga 20°. Joonestada teede asend.

20. Joonestada nurk, mis koos antud nurgaga *ABC* moodustab sirgnurga.

21. Sirgel *AB* võetud punktist *C* on joonestatud kiir *CD* nii, et nurk *ACD* on 4 korda suurem kui nurk *BCD*. Leida nende nurkade suurused.

22. Kui suured on kõrvunurgad, kui üks on teisest $\frac{2}{9}d$ võrra suurem?

23. Kui suur on nurk, mis on $\frac{3}{7}$ oma kõrvunurgast?

24. Kahest lähisnurgast *ABC* ja *CBD* esimene on 108°, teine on aga esimesest $1\frac{1}{2}$ korda väiksem. Kas haarad *BA* ja *BD* moodustavad sirgjoone?

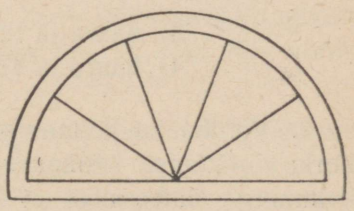
25. Kahe lähisnurga suhe on 7 : 3 ja nende vahe on 72°. Kas nad on kõrvunurgad?

26. Nurgad *ABC* ja *CBD* on kõrvunurgad; $\angle CBD = 0{,}375d$. Leida nurk punktist *B* sirgele *AB* joonestatud ristsirge ja nurga *ABC* poolitaja vahel. Teha joonis.

27. Tõestada, et kahe kõrvunurga poolitajad on teineteisega risti.

28. Arvutada lähisnurgad *AOB* ja *BOC*, teades, et nende summa on 216° ja haara *AO* pikendus (tipust) poolitab nurga *BOC*. Teha täpne joonis.

29. Neljast järjestikusest lähisnurgast *AOB*, *BOC*, *COD* ja *DOE* on iga järgnev oma eelmisest $\frac{1}{9}d$ võrra suurem; haarad *AO* ja *OE* moodustavad sirgjoone. Arvutada ja ehitada need nurgad.



Joon. 5.

30. Akna ülemisel osal on

joonisel 5 näidatud kuju. Leida, mitu kraadi on kahe lähestikku asetseva kiire vaheline nurk.

Kahel pool sirget asetsevad ühise tipuga nurgad.

31. Mitu kraadi on ratta kahe järjestikku asetseva kodara vahelises nurgas, kui rattal on 18 kodarat? 16 kodarat?

32. Nurk ABC on $\frac{6}{11}\,d$; tipust B on väljaspool nurka ABC joonestatud kiir BD, mis on võrdselt kaldu sirgetega BA ja BC. Arvutada selle kaldenurga suurus.

33. Ühest ja samast punktist lähtuvast neljast kiirest moodustatud neli nurka on säärased, et iga järgnev on eelmisest kaks korda suurem. Arvutada iga nurga suurus ning ehitada need nurgad.

Tippnurgad.

34. Üks neljast nurgast, mis on moodustatud kahest lõikuvast sirgest, võrdub $\frac{3}{5}\,d$. Kui suured on teised nurgad?

35. Joonestada ainult joonlaua abil antud nurgaga võrdne ja sellega ühist tippu omav nurk.

36. Sirged AB ja CD lõikuvad punktis O. Nurkade AOD ja COB summa on 220°. Arvutada nurk AOC.

37. Antud nurga ja tema kahe kõrvunurga summa on $2\frac{3}{8}\,d$. Arvutada antud nurk.

§ 3. Kolmnurgad ja hulknurgad. Rist- ja kaldsirged. Teljeline sümmeetria.

Võrdhaarne kolmnurk.

1. Ehitada võrdhaarne kolmnurk:
   1) aluse ja haara järgi;
   2) aluse ja alusnurga järgi;
   3) haara ja tipunurga järgi;
   4) haara ja alusnurga järgi.

2. Võrdhaarse kolmnurga haarale on ehitatud võrdkülgne kolmnurk; võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on 45 m ja võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 40 m. Arvutada võrdhaarse kolmnurga alus.

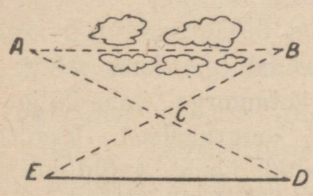
Kolmnurkade ehitamine ja nende kongruentsus.

3. Ehitada kolmnurk:
   1) külje ja selle kahe lähisnurga järgi;
   2) kahe külje ja nendevahelise nurga järgi;
   3) kolme külje järgi.

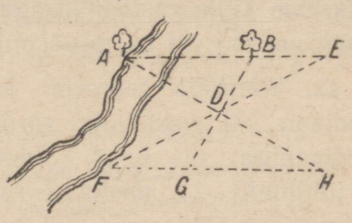
4. Tõestada, et võrdhaarses kolmnurgas alusnurkade poolitajad on võrdsed.

5. Tõestada, et võrdhaarses kolmnurgas haaradele joonestatud mediaanid on võrdsed.

6. Et maastikul mõõta punktide A ja B vahelist kaugust, mille mõõtmine mõõdulindiga on võimatu (joon. 6), selleks valitakse



Joon. 6.



Joon. 7.

niisugune punkt C, millest nii punkt A kui ka punkt B on nähtavad ja ligipääsetavad. Aetakse sihid AC ja BC, pikendatakse neid punktist C ja mõõdetakse $CD = AC$ ning $EC = BC$. Siis lõik ED võrdub otsitava kaugusega AB. Miks?

7. Et maastikul mõõta punktide A ja B vahelist kaugust, milledest üks (punkt A) on ligipääsematu, märgitakse sirglõik AB (joon. 7) ning tema pikendusel mõõdetakse mingi sirglõik BE. Valitakse maastikul niisugune punkt D, millest punkt A on näha ning millest punktid B ja E on ligipääsetavad. Aetakse sihid BDG ja EDF ning mõõdetakse $FD = DE$ ja $DG = BD$. Siis minnakse mööda sirget FG, sihtides punkti A, kuni jõutakse niisugusesse punkti H, mis asetseb sirgel AD. Tõestada, et lõik HG võrdub otsitava kaugusega.

8. Võrdkülgse kolmnurga ABC igale küljele on paigutatud võrdsed lõigud $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Punktid A_1, B_1 ja C_1 on üksteisega ühendatud sirglõikude abil. Tõestada, et ka kolmnurk $A_1B_1C_1$ on võrdkülgne.

9. Võrdkülgse kolmnurga ABC kõik küljed on pikendatud: külg AB tipust B, külg BC tipust C, külg CA tipust A; pikendustele on paigutatud võrdsed lõigud ning nende otspunktid on ühendatud üksteisega. Määrata saadud kolmnurga kuju.

10. 1) Ehitada kolmnurk kahe külje ja suurema külje vastasnurga järgi.

2) Tõestada teoreem: kui ühe kolmnurga kaks külge ja suurema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja suurema külje vastasnurgaga, siis need kolmnurgad on kongruentsed.

11. 1) Ehitada kolmnurk kahe külje ja väiksema külje vastasnurga järgi.

2) Näidata, et kui ühe kolmnurga kaks külge ja väiksema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja väiksema külje vastasnurgaga, siis need kolmnurgad võivad olla kongruentsed või ka mittekongruentsed.

12. Tõestada teoreem: kui ühe kolmnurga kaks külge ja mediaan on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja mediaaniga, siis need kolmnurgad on kongruentsed. Vaadelda 2 juhtumit: 1) mediaan on joonestatud ühele antud küljele; 2) mediaan on joonestatud antud külgede vahele.

Kolmnurga külgede vaheline seos.

13. Kas kolmnurk võib olla sääraste külgedega:

1) 5 m, 10 m, 12 m;
2) 1 m, 2 m, 3,3 m;
3) 1,2 m, 1 m, 2,2 m?

14. Kas kolmnurga küljed võivad suhtuda nii: 1) $1:2:3$; 2) $2:3:4$?

15. Kolmnurga üks külg on 1,9 m ja teine külg on 0,7 m. Leida kolmas külg, teades, et tema pikkuseks on täisarv meetreid.

16. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 1 m ja alus on 0,4 m. Arvutada haara pikkus.

17. Võrdhaarse kolmnurga üks külg on 25 m ja teine on 10 m. Milline neist on aluseks?

18. Võrdhaarse kolmnurga ühele haarale joonestatud mediaan jaotab ta ümbermõõdu 15 cm ja 6 cm pikkusteks osadeks. Arvutada kolmnurga küljed.

19. Tõestada, et kolmnurga iga külg on väiksem poolest ümbermõõdust.

20. Tõestada, et kolmnurga sees asetseva mingi punkti ja kolmnurga tippude vaheliste kauguste summa on suurem poolest ümbermõõdust.

21. Kolmnurgas ABC on küljele BC joonestatud sirglõik AD nii, et nurk CAD võrdub nurgaga ACD. Kolmnurkade ABC ja ABD ümbermõõdud on 37 m ja 24 m. Arvutada AC pikkus.

22. Võrdhaarses kolmnurgas ABC on joonestatud kõrgus BD. Kolmnurga ABC ümbermõõt on 50 m ja kolmnurga ABD ümbermõõt 40 m. Arvutada kõrgus BD.

Rist- ja kaldsirged.

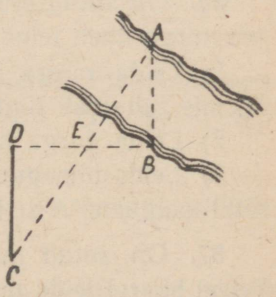
23. Võrdhaarse kolmnurga ABC haar AB on 14 cm; selle haara keskpunktist D on joonestatud temale ristsirge DE lõikumiseni küljega BC ning punkt E on ühendatud punktiga A; kolmnurga AEC ümbermõõt on 24 cm. Arvutada AC pikkus.

24. Ühest punktist on antud sirgele joonestatud kaks võrdset kaldlõiku; nende aluspunktide vaheline kaugus on 16 m. Arvutada kummagi kaldlõigu projektsiooni pikkus sellel sirgel.

Täisnurksete kolmnurkade ehitamine ja nende võrdsus (kongruentsus).

25. Ehitada täisnurkne kolmnurk:
1) kahe kaateti järgi;
2) kaateti ja hüpotenuusi järgi;
3) kaateti ja teravnurga järgi;
4) hüpotenuusi ja teravnurga järgi.

26. Kahel pool jõge asetsevate punktide A ja B vahelise kauguse mõõtmiseks ehitatakse ekkeri abil lõigule AB meelevaldse pikkusega ristlõik BD (joon. 8). BD poolitatakse punktis E. Lõigule BD ehitatakse punktis D ristlõik DC; minnakse mööda DC, sihtides punkti A, kuni punktini C, mis asetseb sirgjoonel AE. Tõestada, et pikkus DC võrdub pikkusega AB.



Joon. 8.

27. 1) Tõestada, et nurga poolitaja ristsirge lõikab nurga haaradest ära võrdsed lõigud.

2) Läbi antud punkti, mis asetseb nurga sise- või välispiirkonnas, joonestada sirge nii, et ta nurga haaradest lõikab ära võrdsed lõigud.

28. 1) Tõestada, et võrdhaarse kolmnurga haaradele joonestatud kõrgused on võrdsed.

2) Koostada eelmise teoreemi pöördteoreem ja tõestada see.

29. Kolm küla A, B ja C ei asetse ühel sirgjoonel. Näidata joonisel, kuidas ehitada külast A algav, kuid külade B ja C vahelt läbi minev ja neist võrdsetel kaugustel asetsev sirge tee.

30. Ühel pool sirget AB on antud punktid M ja N. Sirgel AB leida punkt C nii, et sirge AB moodustaks murdjoone MCN lülidega võrdsed nurgad.

Punktide geomeetrilised kohad.

31. On antud kolmnurk ABC. Nurga A poolitajal leida punkt, mis asetseb tippudest B ja C võrdsetel kaugustel.

32. Leida kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel asetsev punkt. Kas see punkt asetseb alati kolmnurga sees?

33. On antud nurk ja nurga sees punkt M. Leida niisugune punkt, mis nurga haaradest asetseb võrdsetel kaugustel ja punktist M antud kaugusel a.

34. Kolmnurga ühel küljel leida punkt, mis teistest külgedest asetseb võrdsetel kaugustel.

35. Leida kolmnurga külgedest võrdsetel kaugustel asetsev punkt.

36. On antud nurk A ning punktid B ja C, milledest üks asetseb nurga ühel, teine teisel haaral.

1) Leida nurga haaradest võrdsetel kaugustel asetsev punkt M, mis rahuldab tingimust, et $MC = MB$.

2) Leida nurga ühel haaral asetsev punkt N nii, et $NC = CB$.

3) Leida niisugune punkt P, et punktid B ja C asetseksid võrdsetel kaugustel A-st ja P-st.

37. On antud nurk A ja selle ühel haaral asetsev punkt B. Teisel haaral leida punkt C nii, et summa $CA + CB$ võrduks antud pikkusega l.

Nelinurgad.

38. Arvutada nelinurga küljed, kui nad suhtuvad nagu 2 : 5 : 4 : 8 ja nelinurga ümbermõõt on 76 m.

39. Kas nelinurga küljed võivad suhtuda nagu 2 : 3 : 4 : 10?

40. 1) Ehitada nelinurk, mille küljed on 1 cm, 2 cm, 3 cm ja 4 cm ning esimese ja neljanda külje ühisest punktist väljuv diagonaal on 2,6 cm.

2) Sama ülesanne, kui küljed on 1,2 cm, 1,8 cm, 2,4 cm ja 3,0 cm ning teise ja kolmanda külje vaheline nurk on 102°.

41. Nelinurk on diagonaaliga jaotatud kaheks kolmnurgaks, millede ümbermõõdud on 25 m ja 27 m; nelinurga ümbermõõt on 32 m. Arvutada selle diagonaali pikkus.

Hulknurgad.

42. Mitu diagonaali saab joonestada ühest tipust: 1) viisnurgas; 2) kümmenurgas; 3) n-nurgas?

43. Mitu kolmnurka tekib, kui ühest tipust joonestada kõik diagonaalid: 1) kuusnurgas, 2) kaheksanurgas, 3) n-nurgas?

44. Mitu diagonaali saab joonestada üldse: 1) viisnurgas, 2) kümmenurgas, 3) n-nurgas?

45. Mitu külge on hulknurgal, kui nende arv on ühest tipust joonestatud diagonaalide arvust m korda suurem? ($m = 2$; 4; 5.)

46. Mitu külge on hulknurgal, kui tema kõikide diagonaalide arv on külgede arvust m korda suurem? ($m = 0{,}5$; 1; 2; 2,5.)

Teljeline sümmeetria.

47. Ehitada antud telje suhtes antud sirglõiguga sümmeetriline sirglõik.

48. Ehitada antud täisnurkse kolmnurgaga sümmeetriline kolmnurk: 1) ühe kaateti suhtes; 2) teise kaateti suhtes; 3) hüpotenuusi suhtes.

49. On antud sümmeetriatelg ja ringjoon. Joonestada sellega sümmeetriline ringjoon.

50. On antud sümmeetriatelg ja murdjoon. Joonestada antud murdjoonega sümmeetriline murdjoon.

§ 4. Paralleelsed sirged. Kolmnurga ja hulknurga nurkade summa.

Paralleelsete sirgete lõikumisel kolmanda sirgega tekkivad nurgad.

1. Kaks paralleelset sirget lõikuvad kolmanda sirgega. Seejuures tekkinud kaheksast nurgast üks on 72°. Kui suured on teised nurgad?

2. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega; seejuures üks sisenurk on $1\frac{3}{8}\ d$. Kui suure nurga moodustab selle sisenurga poolitaja teise paralleelsirgega?

3. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega. Ühe sisenurga, tema lähisnurga ja põiknurga summa on $3\frac{2}{7}\ d$. Arvutada tema kaasnurga suurus.

4. Sirged AMB ja CND lõikuvad sirgega $EMNF$; $\angle CNF = \frac{3}{16}\ d$ ning $\angle NMB = \frac{3}{4}\ d$.

Kas antud sirged on paralleelsed?

Kui palju peab muutma nurka NMB, et sirged oleksid paralleelsed?

5. Sirged $AMNB$ ja $CRSD$ lõikuvad sirgetega $EMRF$ ja $GNSH$. On antud, et $\angle AME = 1\frac{5}{24}\ d$; $\angle ANS = 1\frac{3}{8}\ d$ ning $\angle MRS = \frac{19}{24}\ d$. Arvutada nurk DSH.

Vastavalt paralleelsete ja vastavalt ristuvate haaradega nurgad.

6. Nurk $ABC = 43°$. Selle nurga sees asetsevast punktist P on joonestatud haaradele paralleelsed sirged kuni lõikumiseni teiste haaradega. Arvutada seejuures tekkinud nelinurga nurgad.

7. On antud kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka; üks on teisest 90° võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

8. On antud kaks vastavalt ristuvate haaradega nurka; üks on teisest 4 korda väiksem. Arvutada kumbki nurk.

9. Kolmnurga aluse otspunktidest on joonestatud külgedele ristsirged; need ristsirged moodustavad teineteisega lõikudes 130°-se nurga. Arvutada kolmnurga tipunurk.

Kolmnurga nurkade summa.

10. Kolmnurga üks nurk on $1\frac{1}{6}d$ ja teine $\frac{3}{8}d$. Kui suur on kolmas nurk?

11. Arvutada kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3.

12. Kolmnurga kaks nurka suhtuvad nagu 5 : 7 ning kolmas nurk on esimesest $\frac{4}{19}d$ võrra suurem. Arvutada kolmas nurk.

13. Kolmnurga kaks nurka on 110°23′50″ ja 24°36′40″. Arvutada kolmas nurk.

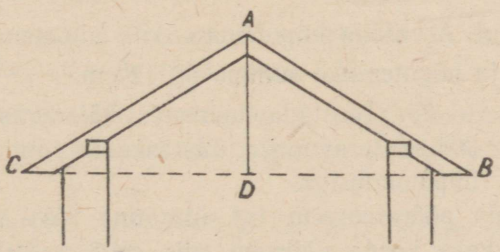
14. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 58°20′. Arvutada teine teravnurk.

Võrdhaarne kolmnurk.

15. NSV Liidu keskosas võetakse sarikate (joon. 9) *AC* ja *AB* vahelised nurgad harilikult järgmised:

plekk-katuse	jaoks	(umbes)	120°,
pappkatuse	„	„	145°,
kivikatuse	„	„	100°,
laudkatuse	„	„	90°.

Arvutada iga katuse jaoks sarika ja rõhtjoone *CB* vaheline nurk.



Joon. 9.

16. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 105°00′27″. Arvutada alusnurk.

17. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 70°43′. Arvutada tipunurk.

18. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on $1\frac{2}{7}d$. Arvutada alusnurk.

19. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $\frac{5}{9}d$. Arvutada tipunurk.

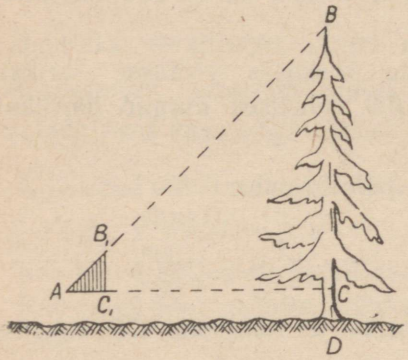
20. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 30°; haarale on joonestatud kõrgus. Arvutada selle kõrguse ja aluse vaheline nurk.

21. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 30°; arvutada ühe haara ja teisele haarale joonestatud kõrguse vaheline nurk.

22. Võrdhaarse kolmnurga kõrguse ja haara vaheline nurk on $\frac{1}{7}d$ võrra väiksem kui alusnurk. Arvutada selle kolmnurga nurgad.

Täisnurkne kolmnurk.

23. Puu kõrguse BD mõõtmiseks kasutatakse kolmnurka AB_1C_1, mille nurk $A = 45°$ (joon. 10); hoides kolmnurka püsti minnakse nii kaugele, et hüpotenuusi AB_1 mööda sihtides on näha puuladva tipp B. Kui kõrge on puu, kui kaugus $AC = 5{,}6$ m ja vaatleja kõrgus on 1,7 m?



Joon. 10.

24. 1) Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $\frac{1}{2}d$. Arvutada kaatetid, kui nende summa on 36 cm.

2) Täisnurkse kolmnurga teravnurk on $\frac{1}{2}d$. Arvutada hüpotenuus, kui hüpotenuusile joonestatud kõrguse ja hüpotenuusi summa on 12 cm.

30°-se nurga vastaskaatet.

25. Tõestada teoreem: täisnurkse kolmnurga 30°-se teravnurga vastaskaatet on võrdne poole hüpotenuusiga.

26. Tõestada pöördteoreem (vt. ülesanne 25): kui kaatet on hüpotenuusist kaks korda väiksem, siis selle kaateti vastasnurk on 30°.

27. Jaotada täisnurk sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks.

28. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $\frac{2}{3}d$; hüpotenuusi ja väiksema kaateti summa on 1,8 m. Arvutada hüpotenuus.

Kolmnurga välisnurk.

29. Kolmnurga ABC tipu B juures asetsev välisnurk on kolm korda suurem kui nurk A ja $\frac{4}{9}d$ võrra suurem kui nurk C.

Arvutada kolmnurga nurgad.

30. Arvutada võrdkülgse kolmnurga kahe mediaani vaheline teravnurk.

31. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $\frac{d}{3}$. Arvutada hüpotenuusi ja täisnurga poolitaja vaheline teravnurk.

32. Võrdhaarse kolmnurga sisenurkade ja ühe välisnurga summa on $\frac{21}{8}\,d$. Arvutada selle kolmnurga nurgad.

33. Tõestada, et võrdhaarse kolmnurga tipu juures asetseva välisnurga poolitaja on alusega paralleelne.

Kolmnurga nurkade summa teoreemi rakendamine ülesannete lahendamisel kolmnurkadest.

34. Kolmnurga üks nurk on $\frac{2}{3}\,d$; kui suur on kahe teise nurga poolitajate vaheline teravnurk?

35. On antud nurk A; tipust A paigutame haarale lõigu AB; punktist B joonestame teisele haarale paralleelse sirge; sellele paralleelsele sirgele paigutame nurga sees lõiguga BA võrdse lõigu BD ning ühendame punkti D tipuga A. Tõestada, et sirge AD poolitab antud nurga.

36. Kui suure nurga moodustavad paralleelide lõikamisel mingi sirgega saadud sisemiste lähisnurkade poolitajad?

37. Kolmnurgas ABC nurk B on 90°; M on nurkade A ja C poolitajate lõikepunkt. Arvutada nurk AMC.

38. Kolmnurga ABC nurkade A ja C poolitajad lõikuvad punktis M. Arvutada nurk ABC, kui ta võrdub poolega nurgast AMC.

39. Kolmnurgas ABC nurk B on 90°; AD ja CE on hüpotenuusi AC pikendused. Nurgad BAD ja BCE on poolitatud; M on nende poolitajate pikenduste lõikepunkt. Arvutada nurk AMC.

40. Võrdhaarses kolmnurgas haarale joonestatud kõrguse ja aluse vaheline nurk on $\frac{8}{15}\,d$. Arvutada selle kolmnurga nurgad.

41. Võrdhaarse kolmnurga ABC haarale BC joonestatud kõrgus AD moodustab haaraga AB nurga $BAD = \frac{1}{5}\,d$. Arvutada selle kolmnurga nurgad 1) oletades, et kõrgus AD asetseb kolmnurga sees ja 2) oletades, et kõrgus AD asetseb kolmnurgast väljaspool.

42. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga täisnurga tipust joonestatud mediaan võrdub poole hüpotenuusiga.

43. Tõestada teoreem: kui kolmnurga mediaan võrdub poolega sellest küljest, mille vastasnurga tipust ta on joonestatud, siis kolmnurk on täisnurkne.

44. Kui võrdhaarse täisnurkse kolmnurga BAC hüpotenuusil BC märkida punktid E ja D nii, et $BE = BA$ ja $CD = CA$, siis $\angle DAE = \frac{1}{2} d$. Tõestada see.

45. ABC on võrdhaarne kolmnurk alusega AC; CD on nurga C poolitaja; $\angle ADC = \frac{5}{3} d$. Arvutada nurk B.

46. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 36°. Tõestada, et alusnurga poolitaja tükeldab selle võrdhaarse kolmnurga kaheks samuti võrdhaarseks kolmnurgaks.

47. Kolmnurga ABC külg AC on pikendatud punktist C pikkuse $CE = CB$ võrra ning punktist A pikkuse $AD = AB$ võrra; punktid E ja D on ühendatud punktiga B. Avaldada kolmnurga DBE nurgad, kui kolmnurga ABC nurgad on teada.

48. Kolmnurgas ABC on joonestatud kõrgused AD ja CE; M on nende lõikepunkt. Arvutada $\angle AMC$, kui $\angle BAC = \frac{1}{4} d$ ja $\angle BCA = \frac{5}{6} d$.

49. Võrdhaarse kolmnurga ABC haaradele joonestatud kõrgused AD ja CE moodustavad nurga $AMC = \frac{8}{15} d$. Arvutada kolmnurga ABC nurgad.

50. Kolmnurgal ABC on tipust C joonestatud sise- ja välisnurga poolitajad; esimene poolitaja moodustab küljega AB nurga $\frac{6}{17} d$. Kui suure nurga moodustab teine poolitaja külje AB pikendusega?

51. Hüpotenuusi keskpunktist on joonestatud hüpotenuusile ristlõik lõikumiseni kaatetiga; saadud lõikepunkt on ühendatud teise kaateti otspunktiga lõigu abil, mis jaotab kolmnurga nurga vahekorras 2 : 5 (väiksem nurga osa on hüpotenuusi juures). Arvutada see nurk.

Hulknurga nurkade summa.

52. Arvutada sisenurkade summa:
1) seitsenurgas;
2) kümmenurgas;
3) kakskümmendviisnurgas.

53. Arvutada viisnurga nurgad, teades, et nad suhtuvad nagu $1 : 1{,}5 : 2 : 2{,}5 : 3$.

54. Kuidas muutub hulknurga nurkade summa, kui tema külgede arvu suurendada 5 võrra?

55. Mitu külge on hulknurgal, kui tema sisenurkade summa on: 1) $30d$; 2) $84d$; 3) $57d$?

56. Missuguse hulknurga sisenurkade summa võrdub välisnurkade summaga?

57. Mitu külge on hulknurgal, kui tema sisenurkade summa koos ühe välisnurgaga on $23d$?

58. Arvutada hulknurga külgede arv, kui tema sisenurkade summa on välisnurkade summast m korda suurem ($m = 1; 2; 3$).

59. Arvutada nelinurga nurgad, kui kaks esimest suhtuvad nagu $5 : 7$, kolmas võrdub kahe esimese vahega ja neljas on kolmandast $\frac{4}{11}\,d$ võrra väiksem.

§ 5. Rööpkülik ja trapets.

Rööpküliku nurgad ja küljed.

1. Rööpküliku üks nurk on $\frac{3}{7}\,d$. Arvutada teised nurgad.

2. Arvutada rööpküliku nurgad, kui üks on teisest $\frac{3}{11}\,d$ võrra suurem.

3. Rööpküliku $ABCD$ külg AB on 9 cm ning moodustab $\frac{3}{10}$ ümbermõõdust. Arvutada rööpküliku teised küljed.

4. Rööpküliku kaks külge suhtuvad nagu $3 : 4$ ja tema ümbermõõt on 2,8 m. Arvutada küljed.

5. Rööpkülikus $ABCD$ on joonestatud nurga A poolitaja; see lõikub küljega BC punktis E. Arvutada lõikude BE ja EC pikkused, kui $AB = 9$ cm ja $AD = 15$ cm.



Joon. 11.

6. Millel põhineb nn. «paralleelsete joonlaudade» (joon. 11) ehitus?

7. Rööpküliku küljed on 8 cm ja 3 cm; suurema külje lähisnurkade poolitajad jaotavad vastaskülje kolmeks lõiguks. Arvutada need lõigud.

Rööpküliku diagonaalid.

8. Rööpküliku üks külg on 5 m. Kas diagonaalide pikkused võivad olla
1) 4 m ja 6 m;
2) 4 m ja 3 m;
3) 6 m ja 7 m?

9. Tõestada, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

10. Kas rööpküliku diagonaal saab olla võrdne küljega?

11. Läbi rööpküliku diagonaalide lõikepunkti on joonestatud sirgjoon. Tõestada, et see punkt poolitab selle sirgjoone lõigu, mis on rööpküliku paralleelsete külgede vahel.

12. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkti läbib sirge, mis külgedest BC ja AD eraldab lõigud $BE = 2$ m ja $AF = 2{,}8$ m. Leida külgede BC ja AD pikkused.

13. Rööpküliku $ABCD$ tipust B joonestatud kõrgus poolitab aluse AD. Arvutada rööpküliku diagonaal BD ja küljed, kui rööpküliku ümbermõõt on 3,8 m, mis on kolmnurga ABD ümbermõõdust 1 m võrra suurem.

Rööpküliku ehitamine.

14. Ehitada rööpkülik, kui tema küljed on antud ja kui nürinurga tipust joonestatud kõrgus poolitab vastaskülje.

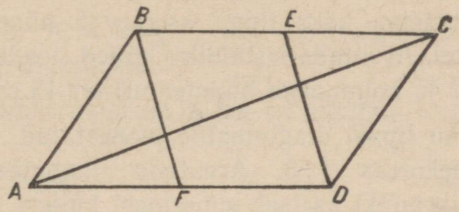
15. Ehitada rööpkülik:
1) kahe külje ja nendevahelise nurga järgi, kui külgede pikkused on 2 cm ja 3 cm ning nurk on 110°;
2) kahe külje ja ühe diagonaali järgi, kui küljed on 2,1 cm ja 3,2 cm ning diagonaal on 4,0 cm;
3) kahe diagonaali ja ühe külje järgi, kui diagonaalid on 6,0 cm ja 5,0 cm ning külg on 4,5 cm;
4) kahe diagonaali ja nendevahelise nurga järgi, kui diagonaalid on 5 cm ja 4 cm ning nurk on 135°;
5) aluse, kõrguse ja diagonaali järgi, kui need on vastavalt 2 cm, 1,5 cm ja 3,2 cm.

Mitmesuguseid ülesandeid rööpkülikust.

16. Võrdhaarse kolmnurga kumbki haar on 5 dm. Selle kolmnurga alusel võetud punktist on joonestatud haaradele paralleelsed sirged. Arvutada saadud rööpküliku ümbermõõt.

17. Rööpküliku teravnurga tipust joonestatud kõrguste vaheline nurk on $1\frac{5}{11}d$. Arvutada rööpküliku nurgad.

18. Rööpküliku $ABCD$ (joon. 12) paralleelsete külgede BC ja AD keskpunktid E ja F on lõikude abil ühendatud tippudega D ja B. Tõestada, et need ühenduslõigud jaotavad diagonaali AC kolmeks võrdseks osaks.



Joon. 12.

19. Võrdhaarse kolmnurga aluse mingist punktist on joonestatud haaradele paralleelsed sirged. Tõestada, et saadud rööpküliku ümbermõõt võrdub haarade summaga ja ei sõltu punkti asukohast alusel.

Ristkülik.

20. Ristküliku diagonaali ja külje vaheline nurk on $\frac{2}{5}d$. Arvutada diagonaalide vaheline väiksema külje vastasnurk.

21. Arvutada ristküliku väiksema külje ja diagonaali vaheline nurk, kui see nurk on diagonaalide vahelisest samale küljele toetuvast nurgast $\frac{1}{3}d$ võrra väiksem.

22. Kas ristküliku sees on olemas punkt, mis on 1) külgedest võrdsetel kaugustel? 2) tippudest võrdsetel kaugustel?

23. Ristküliku diagonaalide lõikepunkt asetseb väiksemast küljest 4 cm võrra kaugemal kui suuremast küljest. Selle ristküliku ümbermõõt on 56 cm. Arvutada küljed.

24. Ristküliku diagonaalide vaheline nurk on $\frac{2}{3}d$. Mõlema diagonaali ja mõlema väiksema külje summa on 3,6 m. Arvutada diagonaalide pikkused.

25. $ABCD$ on antud ristkülik; M — külje BC keskpunkt. On antud, et lõigud MA ja MD on teineteisega risti ja ristküliku $ABCD$ ümbermõõt on 24 m. Arvutada küljed.

26. On antud ristkülik; tipust diagonaalile joonestatud ristsirge jaotab täisnurga vahekorras 3 : 1. Arvutada selle ristsirge ja teise diagonaali vaheline nurk.

27. Täisnurksesse kolmnurka, mille kumbki kaatet on 6 cm, on joonestatud ristkülik, millel on kolmnurgaga ühine nurk. Leida ristküliku ümbermõõt.

28. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga sisse on joonestatud ristkülik nii, et tema kaks tippu asetsevad hüpotenuusil, teised kaks — kaatetitel. Arvutada ristküliku küljed, teades, et nad suhtuvad nagu 5 : 2 ja kolmnurga hüpotenuus on 45 cm.

29. Ristküliku tipust diagonaalile joonestatud ristsirge jaotab diagonaali vahekorras 1 : 3. Arvutada diagonaali pikkus, kui diagonaalide lõikepunkt asetseb suuremast küljest 2 m kaugusel.

30. Ehitada ristkülik:

1) aluse ja diagonaali järgi, kui nende pikkused on 2,4 cm ja 3,1 cm;

2) diagonaali ja diagonaalidevahelise nurga järgi, kui nende suurused on 4,2 cm ja 135°;

3) aluse ja diagonaalidevahelise nurga järgi, kui nende suurused on 3,2 cm ja 120°.

Sirgest võrdsetel kaugustel asetsevate punktide geomeetriline koht.

31. Antud sirgel AB leida teisest antud sirgest CD kaugusel m (= 2 cm) asetsev punkt.

32. Leida kahest antud punktist võrdsetel kaugustel ja antud sirgest kaugusel a (= 6 cm) asetsev punkt.

33. Leida nurga sees ühest haarast kaugusel m (= 1 cm) ja teisest haarast kaugusel n (= 2 cm) asetsev punkt.

34. 1) Antud nurga sisse on joonestatud teine samanimeline nurk, mille haarad on antud nurga haaradega paralleelsed ja võrdsetel kaugustel nendest. Tõestada, et nende nurkade poolitajad ühtivad.

2) Poolitada nurk, mille tipp ei asetse joonisel.

35. Paigutada antud pikkusega lõigu otspunktid antud nurga haaradele nii, et lõik oleks risti ühe haaraga.

Romb.

36. Rombi üks diagonaal võrdub küljega. Arvutada rombi nurgad.

37. Tõestada, et

1) rööpkülik, mille diagonaalid ristuvad, on romb;

2) rööpkülik, mille diagonaal poolitab nurga, on romb.

38. Rombi külg moodustab diagonaalidega nurgad, millede vahe on $\frac{3}{17}$ d. Arvutada rombi nurgad.

39. Rombi külg moodustab diagonaalidega nurgad, mis suhtuvad nagu 5 : 4. Arvutada rombi nurgad.

40. Arvutada rombi nurgad, kui nürinurga tipust joonestatud kõrgus poolitab vastaskülje.

41. Rombi ümbermõõt on 8 cm ja kõrgus 1 cm. Leida rombi nürinurk.

42. Ehitada romb:

1) 2,7 cm pikkuse külje ja 6,0 cm pikkuse diagonaali järgi;

2) diagonaalide järgi, millede pikkused on 4 cm ja 3 cm;

3) 2,2 cm-se kõrguse ja 4,2 cm-se diagonaali järgi;

4) 70°-se nurga ja selle nurga tippu läbiva 3,7 cm pikkuse diagonaali järgi;

5) 5 cm pikkuse diagonaali ja selle diagonaali 120°-se vastasnurga järgi.

Ruut.

43. Ehitada ruut 3,8 cm pikkuse diagonaali järgi.

44. On antud ruut $ABCD$. Tema igale küljele on paigutatud võrdsed lõigud: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Punktid A_1, B_1, C_1, D_1 on järgemööda ühendatud sirglõikudega. Tõestada, et nelinurk $A_1B_1C_1D_1$ on ruut.

45. Võrdhaarsesse täisnurksesse kolmnurka, mille kaatet on 2 m, on joonestatud ruut, millel on kolmnurgaga ühine nurk. Leida ruudu ümbermõõt.

46. Täisnurkses kolmnurgas on täisnurga poolitaja ja hüpotenuusi lõikepunktist joonestatud kaatetitele paralleelsed sirged. Tõestada, et nendest sirgetest ja kaatetitest moodustatud nelinurk on ruut.

47. Võrdhaarsesse täisnurksesse kolmnurka on joonestatud ruut nii, et tema kaks tippu asetsevad hüpotenuusil ja kaks tippu — kaatetitel. Arvutada ruudu külg, teades, et kolmnurga hüpotenuus on 3 m.

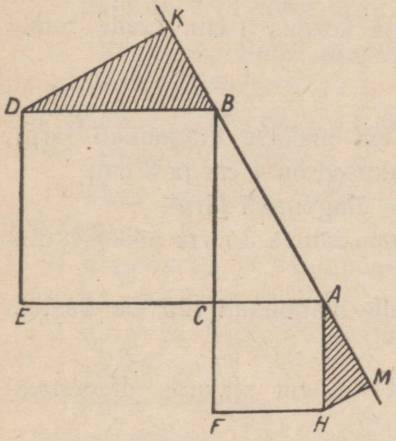
48. On antud ruut, mille külg on 1 m; tema diagonaal on teise ruudu küljeks. Arvutada teise ruudu külje pikkus.

49. Ruudu diagonaal on 4 m. Tema külg on teise ruudu diagonaaliks. Arvutada teise ruudu külg.

50. 1) Tõestada, et ristküliku nurkade poolitajad moodustavad üksteisega lõikudes ruudu.

2) Ristküliku küljed on 1 cm ja 3 cm. Arvutada selle ristküliku nurkade poolitajate lõikumisel tekkinud nelinurga diagonaalid.

51. Ruutu on joonestatud ristkülik nii, et ruudu igal küljel asetseb ristküliku üks tipp ja ristküliku küljed on ruudu diagonaalidega paralleelsed. Arvutada selle ristküliku küljed, teades, et üks külg on teisest kaks korda suurem ja et ruudu diagonaal on 12 m.



Joon. 13.

52. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetitele on ehitatud kaks ruutu (joon. 13). Nende ruutude tippudest D ja H on joonestatud ristlõigud DK ja HM hüpotenuusi pikendusele. Tõestada, et

1) antud kolmnurga võib koostada kahest viirutatud kolmnurgast;

2) ristlõikude HM ja DK summa võrdub hüpotenuusiga.

Kolmnurga kesklõik.

53. Kahe sarika keskkohad on ühendatud tõmmitsaga («penniga»). Leida penni pikkus, kui sarikate otste vaheline kaugus on 5 m.

54. Kolmnurga külgede pikkused on 8 cm, 10 cm ja 12 cm. Arvutada niisuguse kolmnurga külgede pikkused, mille tippudeks on antud kolmnurga külgede keskpunktid.

55. Kolmnurga ümbermõõt on 12 cm; külgede keskpunktid on ühendatud üksteisega. Arvutada saadud kolmnurga ümbermõõt.

56. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 3 : 4 : 6. Ühendanud kõikide külgede keskpunktid üksteisega, saame kolmnurga, mille ümbermõõt on 5,2 m. Arvutada antud kolmnurga küljed.

57. Antud sirgest MN kahel pool 10 dm ja 4 dm kaugusel sellest on antud punktid A ja B. Arvutada lõigu AB keskpunkti O kaugus antud sirgest.

58. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 6 dm. Arvutada selle kõrguse projektsioon teisel kõrgusel.

59. Läbi nürinurkse kolmnurga nürinurga tipu on joonestatud kolmnurgast väljaspool asetsev sirge; nürinurga lähiskülgede projektsioonid sellel sirgel on 4 cm ja 2 cm. Arvutada kõikide mediaanide projektsioonid samal sirgel.

60. Vabalt joonestatud nurga sees on võetud punkt M. Läbi punkti M joonestada sirge nii, et punkt M poolitab nurga haarade vahelise lõigu.

Trapets.

61. Trapetsi $ABCD$ tipust B on joonestatud haaraga CD paralleelne sirge kuni lõikumiseni suurema alusega AD punktis E. Kolmnurga ABE ümbermõõt on 1 m, lõigu ED pikkus on 3 dm. Arvutada trapetsi ümbermõõt.

62. Trapetsi haar on jaotatud 6 võrdseks osaks ning jaotuspunktidest on joonestatud teise haarani alusega paralleelsed lõigud. Arvutada nende lõikude pikkused, kui trapetsi alused on 10 cm ja 28 cm.

63. Trapetsis $ABCD$ (AD — suurem alus) on antud: $AC \perp CD$; $AB = BC$; $\angle CAD = \frac{2}{7} d$. Arvutada selle trapetsi nurgad.

64. Trapetsi $ABCD$ (AD — suurem alus) diagonaal AC on risti haaraga CD ja poolitab nurga BAD; $\angle CDA = 60°$; trapetsi ümbermõõt on 2 m. Arvutada alus AD.

65. Olgu lõik AD trapetsi $ABCD$ suuremaks aluseks. Kas nurgad A, B, C ja D võivad suhtuda nagu 2 : 5 : 6 : 3?

Trapetsi kesklõik.

66. Trapetsi alused suhtuvad nagu 7 : 3 ning nende pikkused erinevad teineteisest 3,2 m võrra. Arvutada selle trapetsi kesklõik.

67. Trapetsi alused on 2,4 m ja 3 m. Trapetsi sisse on joonestatud alustega paralleelne haaradevaheline lõik, mille pikkus on 2,8 m. Kas see lõik asetseb alustest ühekaugusel ja kui mitte, siis kummale alusele lähemal?

68. Trapetsis $ABCD$ on haara AB keskpunktist E joonestatud alustega paralleelne lõik lõikumiseni teise haaraga CD punktis F; tipust B on joonestatud haaraga CD paralleelne lõik lõikumiseni suurema alusega AD punktis G. Arvutada aluste pikkused, kui $EF = 12$ cm ja $AG = 1$ cm.

69. Trapetsis $ABCD$ on haara AB keskpunktist E joonestatud haaraga CD paralleelne sirge lõikumiseni suurema alusega AD punktis G. Arvutada trapetsi alused, kui $AG = 5$ dm ja $GD = 2{,}5$ m.

70. Trapetsi kesklõik on 8 dm ja diagonaaliga lõikudes ta jaguneb kaheks lõiguks, millede vahe on 2 dm. Arvutada trapetsi alused.

71. Leida trapetsi aluste suhe, kui tema kesklõik jaguneb diagonaalidega lõikudes kolmeks võrdseks osaks.

Võrdhaarne trapets.

72. Tõestada, et võrdhaarse trapetsi kummagi aluse lähisnurgad on võrdsed.

73. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on 24 m ja haar võrdub kesklõiguga. Arvutada haar.

74. Arvutada võrdhaarse trapetsi nurgad, teades, et vastasnurkade vahe on $\frac{8}{13}\,d$.

75. Võrdhaarse trapetsi väiksem alus võrdub haaraga ning diagonaal on haaraga risti. Arvutada trapetsi nurgad.

76. $ABCD$ on võrdhaarne trapets, kusjuures AD on suurem alus. Kolmnurkade ACD ja BAC ümbermõõtude vahe on 6 dm ning trapetsi kesklõik on 12 dm. Arvutada alused.

77. Võrdhaarse trapetsi diagonaal poolitab teravnurga; trapetsi ümbermõõt on 4,5 m ja suurem alus 1,5 m. Arvutada väiksem alus.

78. Võrdhaarse trapetsi nürinurga tipust joonestatud kõrgus jaotab suurema aluse 6 cm ja 30 cm pikkusteks lõikudeks. Arvutada selle trapetsi alused.

79. $ABCD$ on võrdhaarne trapets, kusjuures AD on suurem alus; CE on alusele AD joonestatud kõrgus. Teades, et DE on 1,25 m ja et trapetsi kesklõik on 2,75 m, arvutada alused.

80. Võrdhaarse trapetsi suurem alus on 2,7 m, haar on 1 m ja nendevaheline nurk on 60°. Arvutada väiksem alus.

81. Võrdhaarse trapetsi teravnurk on 45°, kõrgus on h meetrit ja kesklõik on m meetrit. Arvutada trapetsi alused.

82. Võrdhaarse trapetsi kõrgus on 10 cm ning diagonaalid on teineteisega risti. Arvutada kesklõik.

Täisnurkne trapets.

83. Diagonaal jaotab täisnurkse trapetsi kaheks kolmnurgaks: võrdkülgseks küljega a ja täisnurkseks. Arvutada trapetsi kesklõik.

84. Täisnurkse trapetsi $ABCD$ teravnurk $ADC = \frac{1}{2} d$ ning alus $AD = a$. Haara CD keskpunktist E on joonestatud selle haaraga ristuv sirge, mis lõikab haara BA pikendust punktis F. Leida pikkus BF.

Trapetsi ehitamine.

85. Ehitada trapets:

1) kahe haara, 1,5 cm ja 2 cm, ning aluste, 5 cm ja 2,3 cm, järgi;

2) 4,8 cm pikkuse aluse, 3,2 cm-se kõrguse ning 4,2 cm ja 5 cm pikkuste diagonaalide järgi;

3) 4 cm pikkuse aluse, 2,4 cm pikkuse haara ja nendevahelise 72°-se nurga ning teise 3 cm pikkuse haara järgi.

86. Ehitada trapets:

1) nelja külje järgi (kas konstruktsioon on alati võimalik?);

2) kahe aluse ja kahe diagonaali järgi (ülesande lahenduvuse tingimus?).

Segaülesanded rööpkülikust ja trapetsist.

87. Määrata, mis liiki on nelinurk, mille tippudeks on:

1) mistahes nelinurga külgede keskpunktid; 2) rööpküliku külgede keskpunktid; 3) ristküliku külgede keskpunktid; 4) rombi külgede keskpunktid; 5) ruudu külgede keskpunktid; 6) trapetsi külgede keskpunktid.

88. Nelinurga diagonaalid on 1 m ja 8 dm ja nad moodustavad nurga 56°25′. Selle nelinurga külgede keskpunktid on uue nelinurga tippudeks. Arvutada uue nelinurga küljed ja nurgad.

89. Kolmnurgas ABC nurga A poolitaja lõikab külge BC punktis D; punktist D küljele CA joonestatud paralleelne sirge lõikub küljega AB punktis E; punktist E küljele BC joonestatud paralleelne sirge lõikub küljega AC punktis F. Tõestada, et $EA = FC$.

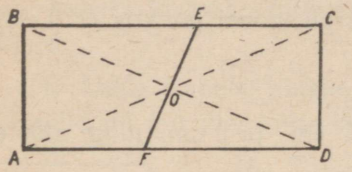
90. 1) Võrdhaarse kolmnurga alusel on võetud punkt. Tõestada, et selle punkti ja kummagi haara vahelise kauguse summa võrdub haarale joonestatud kõrgusega.

2) Võrdhaarse kolmnurga aluse pikendusel on võetud punkt. Tõestada, et selle punkti ja kummagi haara vahelise kauguse vahe võrdub haarale joonestatud kõrgusega.

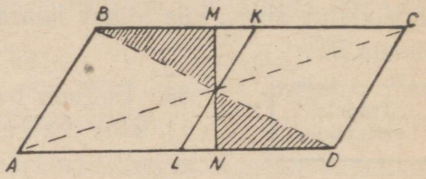
Tsentraalne sümmeetria.

91. Leida väikseim pöördenurk, mille järele ühtib iseendaga:

1) ruut; 2) romb; 3) ristkülik; 4) viisnurkne täht, kui neid pööratakse nende keskpunkti ümber.



Joon. 14.



Joon. 15.

92. Tõestada, et ristküliku diagonaalide lõikepunkti O läbiv sirge (joon. 14) jaotab ristküliku kaheks tsentraalselt sümmeetriliseks nelinurgaks.

93. Uurida joonist 15 ja tõestada, et punktid M ja N ning K ja L on tsentraalselt sümmeetrilised, s. o. asetsevad võrdsetel kaugustel keskpunktist. Millise konstruktsiooni teel tekivad rööpkülikus tsentraalselt sümmeetrilised punktid?

§ 6. Ringjoon.

Ringjoon, selle asend. Diameeter, kõõl ja selle kaugus keskpunktist. Lõikaja.

1. 120°-se nurga ABC haaradele on paigutatud lõigud $AB = BC = 4$ cm. Joonestada ringjoon läbi punktide A, B ja C ning arvutada selle raadius.

2. Leida antud raadiusega ja antud punkti läbivate ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht.

3. Joonestada kahte antud punkti läbiv ringjoon, mille keskpunkt asetseb antud sirgel.

4. Joonestada antud punkte A ja B läbiv ringjoon nii, et punkti A tõmmatud raadiuse ja kõõlu AB vaheline nurk on 30°.

5. 1) Ringjoone raadius on 10 cm; antud punkt asetseb keskpunktist 15 cm kaugusel. Leida selle punkti väikseim ja suurim kaugus ringjoonest.

2) Ringjoone raadius on 10 cm; antud punkt on keskpunktist 3 cm kaugusel. Leida selle punkti väikseim ja suurim kaugus ringjoonest.

6. Antud punkti väikseim kaugus ringjoonest on a ja suurim kaugus on b. Arvutada raadius (kaks juhtumit).

7. Tõestada, et kahe teineteisest väljaspool asetseva ringjoone vaheline väikseim kaugus võrdub keskjoone lõiguga, mis asetseb nende ringjoonte vahel.

8. Ringjoonel asetsevast punktist on joonestatud diameeter ja raadiusega võrdne kõõl. Leida nendevaheline nurk.

9. Ringjoonel asetsevast punktist on joonestatud kaks raadiusega võrdset kõõlu. Leida nendevaheline nurk.

10. Ringis on joonestatud 2 teineteisega ristuvat kõõlu; kumbki jaotab teise lõikudeks 3 cm ja 7 cm. Leida kummagi kõõlu kaugus keskpunktist.

11. Ringis on joonestatud 1 cm kaugusel keskpunktist 2 teineteisega ristuvat kõõlu; kummagi kõõlu pikkus on 6 cm. Teha kindlaks, kui suurteks lõikudeks jaotub kumbki kõõl.

12. Ringis raadiusega R on antud 2 teineteisega ristuvat diameetrit; ringjoone mingi punkt on projekteeritud neile diameetreile. Avaldada selle punkti projektsioonide vaheline kaugus.

13. Kõõl lõikab diameetrit, moodustades nurga 30°, ja jaotab ta kaheks lõiguks pikkustega 2 cm ja 6 cm. Arvutada kõõlu kaugus keskpunktist.

14. Ringjoone ühest punktist on joonestatud kaks teineteisega ristuvat kõõlu, mis asetsevad keskpunktist 6 cm ja 10 cm kaugusel. Arvutada nende kõõlude pikkused.

15. Diameetri otspunktid on puutujast 1,6 m ja 0,6 m kaugusel. Arvutada diameetri pikkus.

16. Ringis, mille keskpunkt on O, on joonestatud kõõl AB ja see on pikendatud raadiusega võrdse pikkuse BC võrra. Läbi punkti C ja keskpunkti O on joonestatud lõikaja CD (D on lõigu CO pikenduse ja ringjoone lõikepunkt). Tõestada, et nurk AOD on kolm korda suurem kui nurk ACD.

17. 1) Antud on ring, mille raadius on 2 cm. Joonestada selles ringis kõõl pikkusega 1,5 cm. Kas sellel ülesandel on lahendus? Mitu lahendit on ülesandel siis, kui antud pikkusega kõõl peab läbima ringjoone antud punkti?

2) Näidata, et antud ringis antud pikkusega kõõlude keskpunktid asetsevad mingil teisel ringjoonel.

18. 1) Tõestada, et ringjoone sees asetsevat punkti A läbivatest kõõludest on kõige väiksem see, mis ristub punkti A läbiva diameetriga.

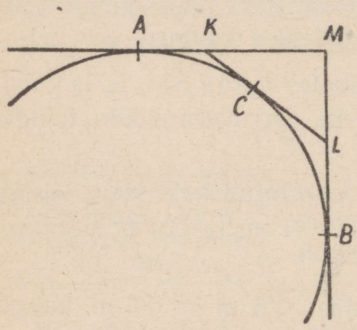
2) Läbi ringjoone sees asetseva punkti joonestada kõõl nii, et see punkt poolitab kõõlu.

19. Joonestada ringjoon, mille keskpunktiks on antud nurga ühe haara antud punkt ja et see ringjoon lõikaks selle nurga teisest haarast ära antud pikkusega kõõlu.

20. Antud ringis on joonestatud 2 võrdset teineteisega paralleelset kõõlu, millede vaheline kaugus võrdub ringi raadiusega. Arvutada nende kõõlude otspunkte läbivate sirgete vaheline teravnurk.

Puutuja. Sirgjoonte ja ringjoonte ühendamine.

21. 1) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on joonestatud ringjoonele 2 teineteisega ristuvat puutujat; ringjoone raadius $R = 10$ cm. Arvutada kummagi puutuja pikkus.



Joon. 16.

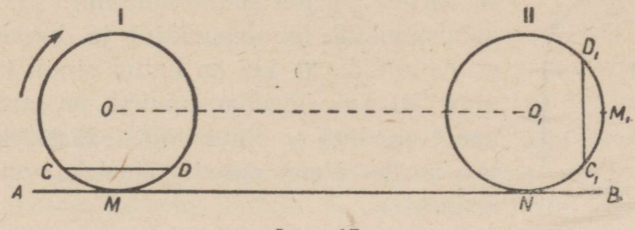
2) Antud on ringjoon raadiusega $R = 1$ dm; väljaspool ringjoont asetsevast punktist M on joonestatud ringjoonele 2 teineteisega ristuvat puutujat MA ja MB (joon. 16). Puutepunktide A ja B vahelisel kaarel AB on võetud vabalt punkt C ning läbi selle on joonestatud kolmas puutuja KL, mis moodustab puutujatega MA ja MB kolmnurga KLM. Leida selle kolmnurga ümbermõõt.

22. Antud on veerandringiga võrdne sektor raadiusega R. Avaldada tema kaare poolitamispunktist äärmiste raadiuste pikendusteni joonestatud puutuja pikkus.

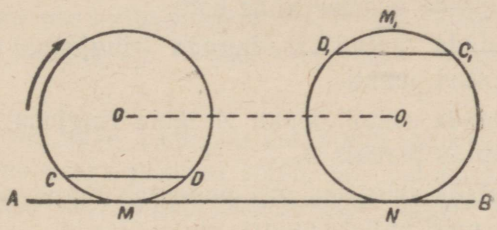
23. Täisnurgasse on joonestatud ringjoon; puutepunkte ühendava kõõlu pikkus on 2 dm. Arvutada selle kõõlu kaugus keskpunktist.

24. AB ja AC on ühe ringjoone puutujad; $\angle BAC = 60°$; murdjoone BAC pikkus on 1 m. Arvutada puutepunktide B ja C vaheline kaugus.

25. Ringi ümbermõõt on 18,84 cm; ring veereb mööda sirget AB (joon. 17). Mitme cm võrra liigub edasi ringi keskpunkt, kui ring läheb asendist I asendisse II? Asendis I kõõl $CD \parallel AB$ ning asendis II kõõl $C_1D_1 \perp AB$.



Joon. 17.



Joon. 18.

26. Ringi ümbermõõt on 18,84 cm. Ring veereb mööda sirget AB; mitme cm võrra liigub edasi tema keskpunkt O, kui tema kõõl läheb lähteasendist $CD \parallel AB$ lõppasendisse $C_1D_1 \parallel AB$ (joon. 18)?

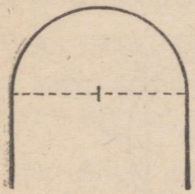
27. Kahe ringjoone raadiused on 2 cm ja 4 cm; nende ühised sisemised puutujad on teineteisega risti. Arvutada kummagi puutuja pikkus.

28. Antud on kaks ringjoont, mille ühised sisemised puutujad on teineteisega risti; puutepunkte ühendavad kõõlud on 3 cm ja 5 cm. Arvutada keskpunktide vaheline kaugus.

29. Antud on kaks ringjoont raadiustega R ja r, üks väljaspool teist; neile on joonestatud 2 ühist välist puutujat. Arvutada nende puutujate (puutepunktide vahelised) pikkused, kui nende pikendused moodustavad täisnurga ($R > r$).

30. Antud on 30°-ne nurk. Joonestada 2,5 cm-se raadiusega ringjoon nii, et see puudutaks antud nurga üht haara ja keskpunkt asetseks nurga teisel haaral.

31. Joonestada kumer kujund kahest poolringjoonega ühendatud paralleelsirgest. Arhitektuuris nimetatakse niisugust kujundit «nišiks», kui poolringjoone diameeter on vertikaalne, ning «võlvkaareks», kui diameeter on horisontaalne (joon. 19).



Joon. 19.

32. Ühendada kaarega kaks mitteparalleelset sirget. Uurida kolme juhtumit: 1) kui ühendamispunktid (puutepunktid) ja kaare raadius ei ole antud; 2) kui on antud ainult kaare raadius; 3) kui ühendamispunkt on antud, kuid kaare raadius ei ole antud (säärasteks sirgete ja kaarte ühendamise näideteks on raudtee «kurvid»).

33. Leida antud raadiusega antud sirget puudutavate ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht.

34. Joonestada antud raadiusega ringjoon, mis puudutab antud sirget antud punktis.

35. Joonestada antud punkti A läbiv ringjoon, mis puudutab antud sirget antud punktis B.

36. Joonestada ringjoon, mis puudutab antud nurga haarasid, seejuures ühte neist antud punktis.

37. Kahe paralleelse sirgjoone vahel on antud punkt; joonestada seda punkti läbiv ja paralleelsirgeid puudutav ringjoon.

38. Antud on kaks paralleelsirget ja neid lõikav sirge. Joonestada neid kolme sirget puudutav ringjoon.

39. Antud raadiusega joonestada antud punkti läbiv ja antud sirget puudutav ringjoon.

40. Kaks kiirt lähtuvad punktist M ja puudutavad ringjoont punktides A ja B. Joonestanud raadiuse OB, pikendatakse teda punktist B pikkuse $BC = OB$ võrra. Tõestada, et $\angle AMC = 3 \angle BMC$.

Kahe ringjoone vastastikune asend.

41. Kuidas asetsevad 2 ringjoont teineteise suhtes, kui:

1) keskpunktide vaheline kaugus on 10 cm ning raadiused on 8 cm ja 2 cm?

2) keskpunktide vaheline kaugus on 4 cm ning raadiused on 11 cm ja 7 cm?

3) keskpunktide vaheline kaugus on 12 cm ning raadiused on 5 cm ja 3 cm?

42. Kahe ringjoone raadiused suhtuvad nagu 5 : 3; nende sisemisel puutumisel keskpunktide vaheline kaugus võrdub 6 dm. Määrata nende ringjoonte vastastikune asend, kui keskpunktide vaheline kaugus on:

1) 24 dm;
2) 5 dm;
3) 28 dm;
4) 20 dm.

43. Antud on kaks ringi — üks teise sees; läbi nende keskpunktide on joonestatud suurema ringi diameeter, mille väiksem ringjoon jaotab kolmeks lõiguks: 5 cm, 8 cm, 1 cm. Leida keskpunktide vaheline kaugus.

44. Kahe kontsentrilise ringjoone vaheline väikseim kaugus on 2 cm, suurim kaugus on 16 cm. Arvutada nende ringjoonte raadiused.

45. Antud on kaks kontsentrilist ringi; suuremas ringis on antud kaks teineteisega ristuvat kõõlu, mis puudutavad väiksemat ringjoont, kumbki kõõl jaotab teise kaheks lõiguks: 3 cm ja 7 cm. Arvutada väiksema ringi raadius.

46. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused suhtuvad nagu 7 : 4 ning rõnga laius on 12 cm. Arvutada väiksema ringjoone raadius.

47. Tõestada, et kahe kontsentrilise ringjoone lõikaja lõigud, mis asetsevad ringjoonte vahel, on võrdsed.

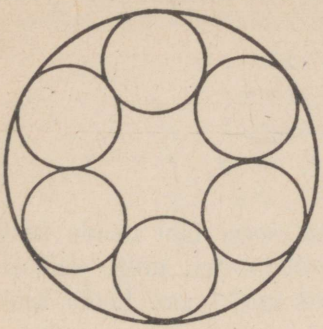
48. Üks ringjoon asetseb teise sees; nende raadiused on 28 cm ja 12 cm ning nendevaheline väikseim kaugus on 10 cm. Arvutada keskpunktide vaheline kaugus.

49. 1) Kolm võrdset ringjoont raadiusega R puudutavad üksteist välimiselt. Arvutada selle kolmnurga küljed ja nurgad, mille tippudeks on puutepunktid.

2) Antud ringisse joonestada 3 võrdset ringi nii, et nad puudutavad üksteist ja antud ringi.

50. Kaks võrdset ringi puudutavad seesmiselt kolmandat ringi ja teineteist. Ühendanud kolm keskpunkti, saame kolmnurga ümbermõõduga 18 cm. Arvutada suurema ringi raadius.

51. Antud ringisse, mille raadius on 3 dm, on joonestatud 6 võrdset ringi (joon. 20), milledest igaüks puudutab antud ringi ja kahte tema naabruses asetsevat ringi. Arvutada nende diameetrid. Teha joonis.



Joon. 20.

52. Antud ringi ümber, mille raadius on 1 dm, on joonestatud 6 võrdset seda ringi väljastpoolt puudutavat ringi nii, et igaüks puudutab kahte tema naabruses asetsevat ringi. Arvutada nende raadiused. Teha joonis.

Ringjoonte ja kaarte ehitamine.

53. 1) Leida niisuguste ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht, mis puudutavad antud ringjoont antud punktis.

2) Joonestada ringjoon, mis läbib antud punkti ja puudutab antud ringjoont antud punktis.

54. 1) Leida niisuguste ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht, mis on joonestatud antud raadiusega ja puudutavad antud ringjoont.

2) Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puudutab antud sirget ja antud ringjoont.

55. Ühendada antud sirgjoon ja antud kaar antud raadiusega kaare abil; ühendamispunktid (puutepunktid) ei ole antud.

56. Ühendada 2 antud kaart antud raadiusega kaare abil; puutepunktid ei ole antud.

57. Joonestada ringjoon, mis puudutab kahte antud paralleelset sirget ja nende vahel asetsevat ringjoont.

58. Läbi kahe ringjoone lõikepunkti joonestada lõikaja nii, et tema ringjoonte sees asetsev lõik võrdub antud pikkusega.

§ 7. Nurga mõõtmine kaarega.

Kesknurk.

1. 1) Hammasrataste paari suuremal rattal on 72 hammast. Mitu kaarekraadi sisaldab üks hammas koos hambavahega?

2) Hammasrataste paari väiksemal rattal on

24 hammast. Mitu kraadi on kaares, millel on üks hammas ja üks hambavahe?

3) Kui suure pöörde teeb suurem, 72 hambaga hammasratas, kui temaga ühendatud väiksem, 24 hambaga hammasratas teeb täispöörde?

2. Avaldada kraadides, minutites ja sekundites järgmised osad ringjoonest:

1) $\frac{1}{72}$; 3) 0,001; 5) $\frac{5}{11}$.

2) $\frac{1}{81}$; 4) $\frac{1}{14}$;

3. Arvutada, missuguse osa ringjoonest moodustavad järgmised kaared:

1) 15°; 5) 18″;
2) 22°30′; 6) 18°45′;
3) 180°; 7) 20°00′30″;
4) 24′; 8) 10′40″.

4. Arvutada nurk kella osutite vahel, kui kell näitab aega:

1) 05.00; 2) 03.25; 3) 04.50.

5. Kõõlu pikkus on 16 cm ja temale vastab 90°-ne kaar. Arvutada kõõlu kaugus keskpunktist.

6. Ringjoone raadius on 1,4 m. Arvutada 120°-sele kaarele vastava kõõlu kaugus keskpunktist.

7. Kahe raadiuse vaheline nurk on 102°00′37″. Arvutada nende raadiuste otspunktidest joonestatud puutujate vaheline nurk.

8. Kaar AB on 73°27′; tema otspunktist B on joonestatud puutuja lõikumiseni raadiuse OA pikendusega punktis C. Arvutada $\angle ACB$.

Piirdenurk.

9. Mitu kraadi ja minutit sisaldab kaar, kui tema otspunktist joonestatud raadius moodustab temale vastava kõõluga 37°23′-se nurga?

10. Kaar on 117°23′. Arvutada sellele kaarele vastava kõõlu ja tema otspunktist joonestatud raadiuse pikenduse vaheline nurk.

11. ABC on lõikaja; BD — kõõl; $\smile BD$ on 43°; $\smile BDC$ on 213°41′. Arvutada $\angle ABD$.

12. Arvutada piirdenurk, kui ta toetub kaarele, mis on $\frac{17}{32}$ ringjoonest.

13. Mitu kraadi ja minutit on kaar, millele toetuv piirdenurk on 37°21′?

14. Kaar on 84°52′. Kui suures nurgas nähakse selle kaare punktidest temale vastavat kõõlu?

15. Kõõl jaotab ringjoone vahekorras 5 : 11. Arvutada sellele kõõlule toetuvad piirdenurgad.

16. Lõigud AB ja AC on kaks kõõlu: $\smile AB$ on 110°23′; $\smile AC$ on 38°. Arvutada $\angle BAC$. (Kaks vastust.)

17. Kõõl AB jaotab ringjoone kaheks kaareks, milledest väiksem sisaldab 130° ning suurem on jaotatud kõõluga AC vahekorras 31 : 15 (alates punktist A). Arvutada $\angle BAC$.

18. Kõõlud AB ja AC asetsevad keskpunktist üks ühel pool, teine teisel pool ning moodustavad nurga BAC, mille suurus on 72°30′; $\smile AB : \smile AC = 19 : 24$. Arvutada need kaared.

19. Ringjoon on jaotatud vahekorras 7 : 11 : 6 ning jaotuspunktid on ühendatud üksteisega. Arvutada saadud kolmnurga nurgad.

20. Mitu kraadi on ringjoone niisuguses kaares, millele vastava kõõlu otspunktist joonestatud ristsirge jaotab ringjoone ülejääva kaare vahekorras 5 : 2?

21. Abiringjoont kasutades tõestada, et kui kolmnurga mediaan võrdub poole vastava küljega, siis selle külje vastasnurk on täisnurk.

22. Punktid A ja B on ühendatud kaartega, millede kumerused on suunatud üks ühele, teine teisele poole: $\smile ACB$ on 117°23′ ning $\smile ADB$ on 42°37′; nende kaarte poolitamispunktid C ja D on ühendatud punktiga A. Arvutada $\angle CAD$.

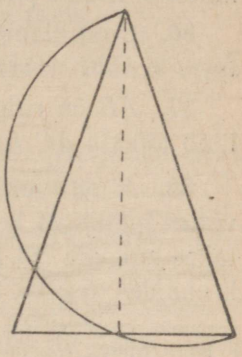
23. Tõestada, et iga ringisse joonestatud trapets on võrdhaarne.

24. Segmendisse AMB on joonestatud trapets $ACDB$, mille külg $AC = CD$ ning $\angle CAB = 51°20′$. Mitu kraadi on kaares AMB?

25. AB on diameeter, C, D ja E — punktid poolringjoonel $ACDEB$. Diameetril AB on võetud punkt F nii, et $\angle CFA = \angle DFB$, ning punkt G nii, et $\angle DGA = \angle EGB$. Arvutada $\angle FDG$, kui $\smile AC$ on 60° ja $\smile BE$ on 20°.

26. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 40°. Üks haar on diameetriks poolringjoonele, mis teiste külgedega on jaotatud kolmeks kaareks (joon. 21). Arvutada kaarte pikkused.

27. Võrdkülgse kolmnurga alus on ringjoone diameetriks. Millisteks osadeks jaotab ringjoon kolmnurga küljed? Missugusteks osadeks jaotavad kolmnurga küljed poolringjoone?



Joon. 21.

28. Ehitada mõned ringjoone punktid, mille diameeter on antud, kasutades ainult joonestamiskolmnurka.

29. Ehitada täisnurkne kolmnurk 5 cm pikkuse hüpotenuusi ning täisnurga tipust hüpotenuusile joonestatud 2 cm pikkuse kõrguse järgi.

30. Ehitada täisnurkne kolmnurk 3,5 cm pikkuse hüpotenuusi ja ühe kaateti projektsiooni järgi hüpotenuusil, kui see projektsioon on 2,9 cm.

31. Leida ühes ja samas punktis lõikuvate kõõlude keskpunktide geomeetriline koht. Uurida kahte juhtu:

1) punkt asetseb ringjoonel;

2) punkt asetseb ringi sees.

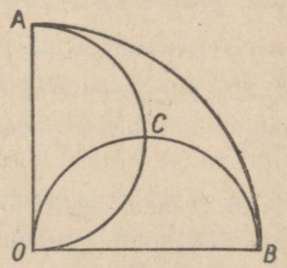
32. Läbi kahe ringjoone puutepunkti on joonestatud mingi lõikaja. Seejuures tekkinud kõõlude otspunktideni joonestatud raadiused kui ka neis punktides joonestatud puutujad on vastavalt paralleelsed. Tõestada see.

33. Veerandringi AOB raadiustele OA ja OB (kui diameetritele) on ehitatud poolringid ACO ja OCB (joon. 22). Tõestada, et

1) sirge OC poolitab nurga AOB;

2) punktid A, C ja B asetsevad ühel sirgel;

3) kaared AC, CO ja CB on võrdsed.



Joon. 22.

34. Ringjoont vahekorras 3 : 5 jaotava kõõlu otspunktist on joonestatud puutuja. Arvutada kõõlu ja puutuja vaheline teravnurk.

35. AB ja AC on võrdsed kõõlud ja MAN on puutuja; $\smile BC$, millel ei asetse punkt A, on 213°42′. Arvutada nurgad MAB ja NAC.

36. C on diameetri AB pikendusel asetsev punkt; CD on puutuja; $\angle ADC = 114°25'$. Mitu kraadi ja minutit on kaares BD?

37. AB on ringjoone diameeter; BC on puutuja. Ringjoon poolitab lõikaja AC (punktis D). Arvutada $\angle DAB$.

38. M on võrdhaarse kolmnurga ABC kõrguse BD keskpunkt; võttes punkti M keskpunktiks ja lõigu MD raadiuseks, joonestatakse külgede BA ja BC vahele kaar. Arvutada selle kaare suurus kraadides, teades, et $\angle BAC = 62°17'$.

Nurk tipuga ringjoonest väljaspool, tipuga ringjoone sees. Puutujatevaheline nurk.

39. Ringjoon on jaotatud punktidega A, B, C ja D nii, et $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 2 : 3 : 5 : 6$. Kõõlud AC ja BD lõikuvad punktis M. Arvutada $\angle AMB$.

40. Diameeter AB ja kõõl CD lõikuvad punktis M; $\angle CMB = 73°$; $\smile BC$ on 110°. Mitu kraadi on $\smile BD$?

41. Kõõlud AB ja CD lõikuvad punktis M; $\angle AMC = 40°$; kaar AD on kaarest CB suurem 20°54′ võrra. Arvutada $\smile AD$.

42. $m°$ sisaldava kaare AB otspunktidest on joonestatud kõõlud AC ja BD nii, et nende lõikumisel tekkiv nurk DMC võrdub kaarele CD toetuva piirdenurgaga DNC. Arvutada see kaar.

43. Nelinurga $ABCD$ nurgad B ja D on täisnurgad; diagonaal AC moodustab küljega AB nurga 40° ja küljega AD nurga 30°. Arvutada diagonaalide AC ja BD vaheline teravnurk.

44. Ringjoon on jaotatud punktidega A, B, C ja D nii, et $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Kõõlud AD ja BC on pikendatud lõikumiseni punktis M. Arvutada $\angle AMB$.

45. Antud on ringjoon oma kõõluga ja puutujaga, kusjuures puutepunkt asetseb kõõlule vastaval väiksemal kaarel. Leida puutujal punkt, millest kõõl on nähtav suurimas nurgas.

46. Lõikaja ABC lõikab ringjoonest ära 112°-se kaare BC; puutuja AD jaotab puutepunktis D selle kaare vahekorras 7 : 9. Arvutada $\angle BAD$.

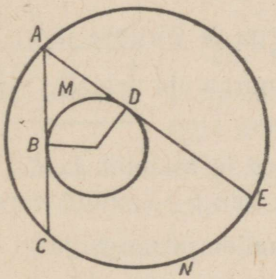
Näpunäide (mõne alljärgneva ülesande kohta). Arvutades puutujate vahelist nurka on kasulik meeles pidada järgmist: *see puutujate vaheline nurk, milles asetseb ringjoon, täiendab puutepunktidesse viivate raadiuste vahelist nurka 180°-ni.*

47. 200°30′-se kaare otspunktidest on joonestatud puutujad lõikumiseni teineteisega. Arvutada nendevaheline nurk.

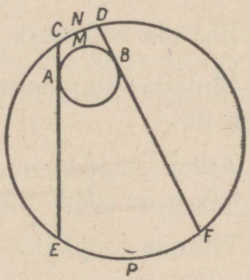
48. Puutujate vaheline nurk on 73°25′. Arvutada tema haarade vahelised kaared.

49. Kõõl jaotab ringjoone vahekorras 11 : 16. Arvutada selle kõõlu otspunktidest joonestatud puutujate vaheline nurk.

50. Antud ringjoone sees (joon. 23) on teine ringjoon. *ABC* ja *ADE* on suurema ringjoone kõõlud, mis punktides *B* ja *D* puudutavad väiksemat ringjoont; *BMD* on puutepunktide vaheline väiksem kaar; *CNE* on kõõlude otspunktide vaheline kaar. Arvutada kaar *CNE*, kui kaar *BMD* on 130°.



Joon. 23.



Joon. 24.

51. Antud ringjoone sees asetseb teine ringjoon (joon. 24); *CAE* ja *DBF* on suurema ringjoone (mittelõikuvad) kõõlud, mis punktides *A* ja *B* puudutavad väiksemat ringjoont; *AMB* on puutepunktide vaheline väiksem kaar; *CND* ja *EPF* — kõõlude otspunktide vahelised kaared. Mitu kraadi on kaar *CND*, kui kaar *AMB* on 154° ja *EPF* on 70°?

52. Ringjoon on jaotatud vahekorras 5 : 9 : 10 ning jaotuspunktidest on joonestatud puutujad. Arvutada saadud kolmnurga suurim nurk.

53. *AB* ja *AC* on kõõlud, mis moodustavad nurga $BAC = 74°24'$. Punktidest *B* ja *C* on joonestatud puutujad lõikumiseni punktis *M*. Arvutada nurk *BMC*.

54. Arvutada puutujate vaheline nurk, kui tema tipu väikseim kaugus ringjoonest võrdub raadiusega.

55. Kaar AB on $40°24'$. Raadiuse OA pikendusele on paigutatud kõõluga AB võrdne lõik AC ning punkt C on ühendatud punktiga B. Arvutada nurk ACB.

56. Kolmnurgal ABC on nurk C täisnurk. Keskpunktist C on raadiusega AC joonestatud kaar ADE, mis lõikab hüpotenuusi punktis D ning kaatetit CB punktis E. Arvutada kaared AD ja DE, kui $\angle B = 37°24'$.

Antud piirdenurka mahutav segment.

57. Kolmnurkadel ABC ja ADC on ühine külg AC; küljed AD ja BC lõikuvad punktis M. Nurgad B ja D on võrdsed ja nende suurus on $40°$. Tippude B ja D vaheline kaugus võrdub küljega AB; $\angle AMC = 70°$. Arvutada kolmnurkade ABC ja ADC nurgad.

58. Antud sirgel MN leida punkt, millest antud lõik AB on näha antud nurgas.

59. Ehitada kolmnurk aluse, tipunurga ja kõrguse järgi.

60. Ehitada kolmnurk aluse, tipunurga ja alusele vastava mediaani järgi.

61. Antud on lõikude a ja b suurused ja asendid. Leida punkt, millest lõik a on näha antud nurgas A, lõik b — antud nurgas B.

62. Ehitada rööpkülik tema diagonaalide ja nurga järgi.

Kõõl- ja puutujakolmnurk.

63. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 4 m. Arvutada tema ümberringjoone raadius.

64. Võrdhaarse kolmnurga haar võrdub 2 cm; tipunurk on $120°$. Arvutada ümberringjoone diameeter.

65. Olgu punkt O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktiks. Arvutada $\angle OAC$, 1) kui $\angle B = 50°$; 2) kui $\angle B = 126°$.

66. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $25°$; kui suures nurgas on näha kumbki kaatet ümberringjoone keskpunktist?

67. Kolmnurga kaks nurka on $100°$ ja $50°$. Kui suures nurgas on näha kolmnurga iga külg siseringjoone keskpunktist?

68. Kolmnurk ABC on võrdhaarne; ümberringjoone raadiuse OA ja kolmnurga aluse AC vaheline nurk OAC on $20°38'$. Arvutada nurk BAC. (Kaks juhtumit.)

69. Ehitada võrdhaarne kolmnurk aluse ja siseringjoone raadiuse järgi.

70. Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone puutepunkt jaotab haara vahekorras 7 : 5 (alates tipust). Arvutada haara ja aluse suhe.

71. Tähistame täisnurkse võrdhaarse kolmnurga siseringjoone raadiuse tähega *r* ning kolmnurga p o o l ü m b e r m õ õ d u tähega *p*. Avaldada hüpotenuus.

72. Antud ringjoone ümber joonestada võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

73. 4 cm-se raadiusega ringi ümber on joonestatud täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 26 cm. Arvutada kolmnurga ümbermõõt.

74. Antud ringisse joonestada kolmnurk, mille kaks nurka on antud.

75. Antud ringi ümber joonestada kolmnurk, mille kaks nurka on antud.

Kõõl- ja puutujanelinurk.

76. Ristküliku väiksema külje pikkus on 1 m; diagonaalide vaheline teravnurk on 60°. Arvutada ümberringjoone raadius.

77. Ristküliku diagonaal moodustab küljega 12°35′-se nurga. Kui suurteks kaarteks jaotavad ristküliku tipud ümberringjoone?

78. Antud rombisse joonestada ring.

79. Rombi külg on 8 cm; tema teravnurk on 30°. Arvutada siseringjoone raadius.

80. Rombisse on joonestatud ringjoon. Kui suurteks kaarteks jaotavad puutepunktid selle ringjoone, kui rombi teravnurk on 37°?

81. Võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurk on 50°, diagonaalide vaheline haara poole suunduv nurk on 40°. Kus asetseb ümberringjoone keskpunkt, kas trapetsi sees või temast väljaspool?

82. Ringi ümber on joonestatud trapets, mille ümbermõõt on 12 cm. Arvutada selle trapetsi kesklõik.

83. Ringi ümber on joonestatud võrdhaarne trapets nurgaga 30°. Tema kesklõik võrdub 1 m. Arvutada ringi raadius.

84. Kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaal AC ristub diagonaaliga BD ning poolitab selle. Arvutada nelinurga nurgad, kui $\angle BAD = 70°23'42''$.

85. Kas on võimalik joonestada ringjoon niisuguse nelinurga ümber, mille nurgad järgemööda suhtuvad nagu: 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

86. Sektori kesknurk on 60° ja raadius on R. Avaldada sellesse sektorisse joonestatud ringi raadius.

87. Nelinurgas $ABCD$ on antud: $\angle ABC = 116°$; $\angle ADC = 64°$; $\angle CAB = 35°$ ja $\angle CAD = 52°$. Arvutada küljele AB toetuv diagonaalide vaheline nurk.

88. 1) Puutujanelinurga kolm külge suhtuvad (järjekorras) nagu 1 : 2 : 3. Arvutada nelinurga küljed, kui on teada, et tema ümbermõõt on 24 m.

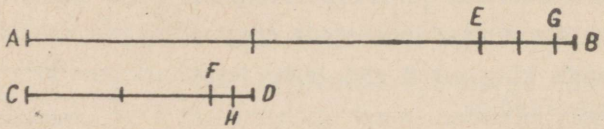
2) Kõõlnelinurga kolm nurka suhtuvad (järjekorras) nagu 1 : 2 : 3. Arvutada nelinurga nurgad.

§ 8. Võrdelised lõigud. Kolmnurga nurgapoolitaja.

Võrdelised lõigud.

1. Leida aheljaotamise võtte abil lõikude AB ja CD suhe (joon. 25).

2. Arvutada (täpsusega 0,01) võrdkülgse kolmnurga kõrguse ja külje suhe.



Joon. 25.

3. 1) Punkt M jaotab lõigu AB nõnda, et $AM : MB = 1 : 2$. Arvutada suhted $AM : AB$ ja $MB : AB$.

2) Punkt K jaotab mingi lõigu AB vahekorras $m : n$. Avaldada suhted $AK : AB$ ja $KB : AB$.

4. 6 cm pikkusel lõigul AB on antud punkt C, mille kaugus punktist A on 3,6 cm; lõigu AB pikendusel üle punkti B leida niisugune punkt D, mille kaugused punktist A ja punktist B suhtuvad nagu $AC : CB$.

5. Kaks paralleelset tänavat lõikuvad kahe ühest punktist A lähtuva tänavaga. «Radiaalsete tänavate» vaheliste paralleeltäna-

vate osade pikkused on 0,75 km ja 1,25 km. Tramm sõidab ühel radiaalsel tänaval punktist A esimese paralleeltänavani 15 minutiga. Mitme minutiga jõuab ta sama kiirusega samal tänaval esimesest paralleeltänavast teise paralleeltänavani?

6. Nurga A haarad on lõigatud kahe paralleelse sirgega BC ja DE (tähtedega B ja D on tähistatud punktid ühel nurga haaral). Nõutakse:

1) arvutada AE, kui $AB = 8$ m, $AD = 12$ m ja $AC = 10$ m;

2) arvutada AB, kui $AB + AD = 21$ m, $AC = 12$ m ja $AE = 16$ m;

3) arvutada AD, kui $AC : AE = \frac{3}{11} : 0{,}6$ ja $BD = 12$ dm.

7. Trapetsi $ABCD$ haarad AB ja CD on pikendatud lõikumiseni teineteisega punktis M. Nõutakse:

1) arvutada lõik CM, kui $AB = 1$ m, $CD = 15$ dm ja $BM = 8$ dm;

2) arvutada lõik BM, kui külg $AB = 1{,}2$ m ja $CD : CM = \frac{1}{6} : 0{,}25$;

3) arvutada CD, kui $AB : BM = 17 : 9$ ja $CD - CM = 1{,}6$ m.

8. BA ja BD on nurga B ühe haara lõigud; BC ja BE — teise haara lõigud. Kas sirged AC ja DE on paralleelsed:

1) kui $BA : AD = 3 : 4$, $BC = 1{,}2$ m ja $BE = 2{,}8$ m;

2) kui $BD : AD = 11 : 8{,}5$ ja $BC = \frac{5}{17} CE$;

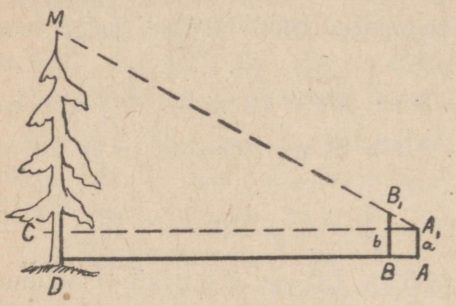
3) kui $BA = \frac{7}{13} BD$, $BC = 2{,}8$ m ja $CE = 2$ m?

9. 1) Kolmnurga külg on jaotatud viieks võrdseks osaks ja läbi jaotuspunktide on joonestatud alusega paralleelsed sirged. Aluse pikkus on 20 cm. Arvutada kolmnurga külgede vaheliste paralleelsirgete lõikude pikkused.

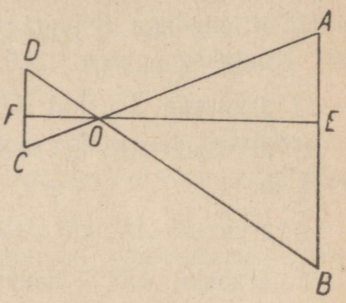
2) Trapetsi haar on jaotatud kaheksaks võrdseks osaks ja jaotuspunktidest on joonestatud alusega paralleelsed lõigud teise haarani. Trapetsi aluste pikkused on 50 cm ja 30 cm. Arvutada trapetsi haarade vaheliste paralleellõikude pikkused.

10. Trapetsi aluste pikkused on 1,8 m ja 1,2 m; tema 1,5 m ja 1,2 m pikkused haarad on pikendatud lõikumiseni teineteisega. Arvutada, kui palju on haarasid pikendatud.

11. Puu kõrguse mõõtmiseks (joon. 26) märgitakse tema tüvest alates mingi pikkusega sirglõik ning selle mingites punktides torgatakse maa sisse kaks teivast nii, et nende otspunktid A_1 ja B_1 ning puu ladva tipp M asetsevad ühel sirgel. Avaldada

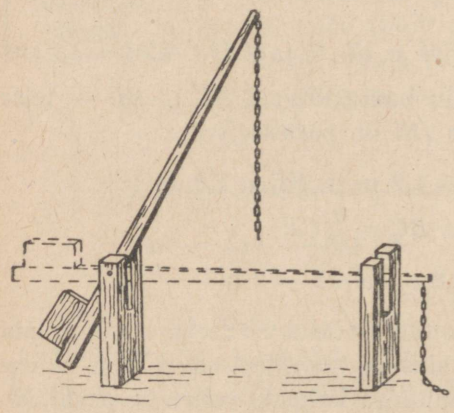


Joon. 26.



Joon. 27.

ja arvutada puu kõrgus, kui on teada kaugused $AD = m$, $AB = n$ ja teivaste kõrgused a ja b ($m = 22{,}5$ m, $n = 1{,}25$ m, $a = 1{,}75$ m ja $b = 2{,}55$ m).


Joon. 28.

12. Joonisel 27 on $AB \parallel CD$, $FE \perp AB$, $OA = 4{,}8$ cm, $OE = 4{,}5$ cm, $OB = 5{,}4$ cm, $OF = 1{,}5$ cm, $AB = 4{,}8$ cm. Arvutada OD, OC ja DC.

13. Tõkkepuu ehk valta lühema õla (joon. 28) pikkus on 0,75 m, pikema õla pikkus on 3,75 m. Kui kõrgele tõuseb pikema õla ots, kui lühema õla ots langeb 0,5 m võrra? (Teha joonis.)

14. Kolmnurga külgede projektsioonid alusele on 15 m ja 27 m ning suurem külg on 45 m. Millisteks osadeks jaotab selle külje (tipust arvates) aluse keskristsirge? (Kaks juhtumit.)

15. Läbi punkti P, mis asetseb nurga MAN sees või sellest väljaspool, joonestada sirge nii, et antud punkti ja nurga haarade vahelised selle sirge lõigud suhtuvad nagu $m : n$. (Uurida eraldi juhtumit $m = n$.)

16. 1) Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, et nende punktide ja antud nurga haarade vaheliste kauguste suhe on üks ja sama $m : n$.

2) Kolmnurgas leida niisugune punkt, et ristlõigud, mis on joonestatud sellest punktist kolmnurga külgedele, suhtuvad nagu $m : n : p$.

Kolmnurga nurgapoolitaja omadus.

17. BD on nurga B poolitaja kolmnurgas ABC. Arvutada:

1) lõigud AD ja DC, kui $AB = 10$ m, $BC = 15$ m ja $AC = 20$ m;

2) külg BC, kui $AD : DC = 8 : 5$ ja $AB = 16$ m;

3) külg AC, kui $AB : BC = 2 : 7$ ja $DC - AD = 1$ m.

18. Kolmnurga 9 cm ja 6 cm pikkuste külgede vaheline nurk on poolitatud. Kolmanda külje üks lõik on võrdne ühe antud küljega. Arvutada kolmas külg.

19. D on kolmnurga ABC küljel BC asetsev punkt. Teha kindlaks, kas sirge AD poolitab nurga A:

1) kui $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $BD = 8$ cm ja $DC = 10$ cm;

2) kui $AB = 12$ m, $AC = 56$ m ja $BD : DC = 14 : 3$;

3) kui $AB = \frac{5}{11} AC$, $BD = 2$ m ja $DC = 4{,}5$ m;

4) kui $AB = 6$ m, $AC = 28$ m ja $BD = \frac{3}{17} BC$.

20. Kolmnurka ABC on joonestatud romb $ADEF$ nii, et tipud D, E ja F asetsevad vastavalt külgedel AB, BC ja AC. Arvutada lõigud BE ja EC, kui $AB = 14$ cm, $BC = 12$ cm ja $AC = 10$ cm.

21. Kolmnurga külgede pikkused on 51 cm, 85 cm ja 104 cm. On joonestatud ringjoon, mis puudutab kahte väiksemat külge ja mille keskpunkt asetseb suuremal küljel. Kui suurteks lõikudeks jaotab keskpunkt suurema külje?

22. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on 20 cm ning alus suhtub haaraga nagu 4 : 3. Arvutada siseringjoone raadius.

23. Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone keskpunkt jaotab kõrguse suhtes 12 : 5 ning haara pikkus on 60 cm. Arvutada alus.

24. Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone raadius on $\frac{2}{7}$ kõrgusest; kolmnurga ümbermõõt on 56 cm. Arvutada küljed.

25. Kõõl $AB = 15$ m, kõõl $AC = 21$ m ja kõõl $BC = 24$ m. Punkt D on kaare CB poolitamispunkt. Kui suurteks lõikudeks BE ja EC jaotab sirge AED kõõlu BC?

26. Kolmnurga ABC küljed a, b ja c on antud. BD on nurga B poolitaja; O — sirge BD ja nurga C poolitaja lõikepunkt. Avaldada suhe $OD : OB$.

27. Kolmnurga ABC külg $AB = 15$ cm ja külg $AC = 10$ cm; AD on nurga A poolitaja; punktist D on küljele AB joonestatud paralleel lõikumiseni küljega AC punktis E. Arvutada lõigud AE, EC ja DE.

28. Võrdhaarse kolmnurga ABC külg $AC = b$; külg $BA = BC = a$; AN ja CM on nurkade A ja C poolitajad. Arvutada pikkus MN.

§ 9. Kolmnurkade ja hulknurkade sarnasus.

Sarnased kolmnurgad.

1. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu $4 : 5 : 6$; temaga sarnase kolmnurga väikseim külg on 0,8 m. Arvutada teise kolmnurga ülejäänud küljed.

2. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu $2 : 5 : 4$; temaga sarnase kolmnurga ümbermõõt on 55 m. Arvutada teise kolmnurga küljed.

3. Vabriku korstna varju pikkus on 35,8 m; samal ajal on maa sisse püsti torgatud 1,9 m kõrguse teiba varju pikkus 1,62 m. Arvutada korstna kõrgus.

4. Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ on antud, et $\angle A = \angle A_1$ ja $\angle B = \angle B_1$. Lahendada nende kolmnurkade kohta järgmised ülesanded:

1) on antud: $a = 10$; $b = 14$; $a_1 = 25$; $c_1 = 20$; arvutada c ja b_1;

2) on antud: $a = 35$; $a_1 = 21$; $c - c_1 = 8$; arvutada c.

5. Kolmnurkades ABC ja DEF on $\angle A = \angle E$ ja $\angle B = \angle D$. Külg $AB = 16$ cm; $BC = 20$ cm; $DE = 12$ cm; $AC - EF = 6$ cm. Arvutada AC, EF ja DF.

6. Kahe võrdhaarse kolmnurga tipunurgad on võrdsed. Ühe kolmnurga haar ja alus on vastavalt 17 cm ja 10 cm; teise kolmnurga alus on 8 cm. Arvutada teise kolmnurga haar.

7. Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ on antud, et $\angle B = \angle B_1$ ja esimeses kolmnurgas nurga B lähisküljed on 2,5 korda suuremad kui teises kolmnurgas nurga B_1 lähisküljed. Arvutada AC ja A_1C_1, kui nende summa on 4,2 m.

8. Kolmnurkades ABC ja DEF on: $\angle B = \angle D$, $AB = \frac{4}{3} DE$ ja $DF = 0{,}75\ BC$. Arvutada AC ja EF, kui nende vahe on 5 cm.

9. Teha kindlaks, kas kolmnurgad on sarnased, kui nende külgede pikkused on järgmised:

1) 1 m, 1,5 m ja 2 m; 10 cm, 15 cm ja 20 cm;
2) 1 m, 2 m ja 15 dm; 12 dm, 8 dm ja 16 dm;
3) 1 m, 2 m ja 1,25 m; 10 cm, 9 cm ja 16 cm.

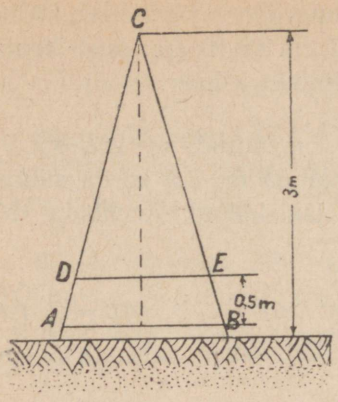
10. 1) Kolmnurgas ABC külg $AB = 15$ m ja $AC = 20$ m; küljele AB on asetatud lõik $AD = 10$ m ja küljele AC lõik $AE = 12$ m. Kas kolmnurgad ABC ja ADE on sarnased?

2) Eelmises ülesandes säilitada külgede AB ja AC pikkused ning võtta $AD = 9$ m ja $AE = 12$ m. Kas kolmnurgad ABC ja ADE on siis sarnased?

11. AB on ühe ringjoone diameeter; AC on kõõl. Diameetrile DE, mille suurus on $\frac{13}{17} AB$, on joonestatud teine ringjoon ja selles kõõl DF, mille suurus on $\frac{13}{17} AC$. Arvutada EF, teades, et $BC = 3{,}4$ m.

12. 1) Ühe kolmnurga külgede pikkused on 0,8 m, 1,6 m ja 2 m; temaga sarnase kolmnurga ümbermõõt on 5,5 m. Arvutada teise kolmnurga küljed.

2) Kolmnurga ümbermõõt on teise, temaga sarnase kolmnurga ümbermõõdust $\frac{11}{13}$. Kahe teineteisele vastava külje vahe on 1 m. Arvutada need küljed.



Joon. 29.

13. Sõjaväe sildade ehitamisel (joon. 29) paremaks silla rõhu jaotamiseks põhipinnale kinnitatakse pukkide jalgade otste A ja B vahele laud AB ning iga puki jalgade paar ühendatakse toega DE. Arvutada toe DE pikkus, teades, et puki kõrgus $h=3$ m, laua AB pikkus on 1,5 m ja et tugi kinnitatakse lauast AB 0,5 m kaugusel.

14. Antud on kolmnurk ABC ja selles lõik DE (punkt D asetseb küljel AB, punkt E — küljel BC), mis on paralleelne küljega AC. Arvutada pikkus DE:

1) kui $AC=20$ cm, $AB=17$ cm ja $BD=11{,}9$ cm;

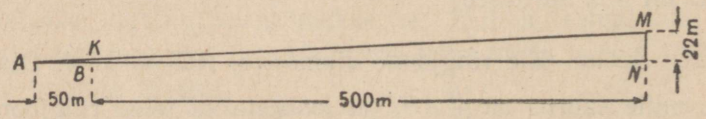
2) kui $AC=18$ dm, $AB=15$ dm ja $AD=1$ m.

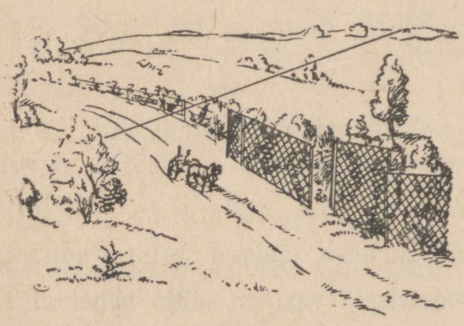
15. Antud on kolmnurk ABC ja selles küljega AC paralleelne lõik DE (punkt D asetseb küljel AB ja punkt E — küljel BC). Nõutakse:

1) arvutada AD, kui $AB=16$ cm, $AC=2$ dm ja $DE=15$ cm;

2) arvutada suhe $AD:BD$, teades, et $AC:DE=\frac{5}{7}:\frac{4}{11}$.

16. Lahtine teeosa asetseb 50 m laiuses ribas AB (joon. 30); vaenlase vaatluspunkt asetseb sellest 500 m kaugusel kõrgendikul





Joon. 30.

$MN = 22$ m. Kui kõrge tuleb teha mpondamistara KB, et varjata tee vastase vaatlejale?

17. Kolmnurgas ABC, mille küljed a, b ja c on antud, on joonestatud küljega AC paralleelne lõik MN nii, et $AM = BN$. Avaldada MN.

18. Kolmnurgas ABC on joonestatud lõik BD nii, et $\angle BDC = \angle ABC$; küljel AC tekivad lõigud $AD = 7$ cm ja $DC = 9$ cm. Arvutada külg BC ja suhe $BD : BA$.

19. Kolmnurgas ABC on joonestatud lõik BD nii, et $\angle ABD = \angle BCA$. Arvutada lõigud AD ja DC, kui $AB = 2$ m ja $AC = 4$ m.

20. Ehitada antud ümbermõõduga kolmnurk, mis on sarnane antud kolmnurgaga.

21. Ehitada kolmnurk nurga, selle nurga ühe lähiskülje ning sama külje ja kolmanda külje suhte järgi.

22. Ehitada kolmnurk kõrguse, tipunurga ja aluse lõikude suhte järgi.

Võrdelised lõigud trapetsis ja rööpkülikus.

23. $ABCD$ on antud trapets, kusjuures $BC \parallel AD$; O on diagonaalide lõikepunkt; $AO = 8$ cm, $OC = 1$ dm ja $BD = 27$ cm. Arvutada OB ja OD.

24. Antud on trapets $ABCD$, kusjuures küljed BC ja AD on paralleelsed; O on diagonaalide lõikepunkt; $BO : OD = 0{,}3 : \frac{2}{3}$; trapetsi kesklõigu pikkus on 29 cm. Arvutada alused ja suhe $AO : OC$.

25. Trapetsis $ABCD$ ($BC \parallel AD$), mille diagonaaliks on BD, on nurgad ABD ja BCD võrdsed. On antud: $BC = 10$ cm, $DC = 15$ cm ja $BD = 20$ cm. Arvutada AB ja AD.

26. Trapetsis $ABCD$, diagonaaliga AC, on nurgad ABC ja ACD võrdsed. Arvutada diagonaal AC, kui aluste BC ja AD pikkused on vastavalt 12 cm ja 27 cm.

27. Trapetsi alused suhtuvad nagu $5 : 9$ ja ühe haara pikkus on 16 cm. Kui palju peab seda haara pikendama, et ta lõikuks teise haara pikendusega?

28. Rööpküliku $ABCD$ külg $AB = 420$ m. Küljel BC on võetud punkt E nii, et $BE : EC = 5 : 7$, ja on joonestatud lõik DE, mis lõikub külje AB pikendusega punktis F. Arvutada BF.

29. $ABCD$ on antud rööpkülik; F on punkt külje AB pikendusel; E — lõikude DF ja AC lõikepunkt. Avaldada BF, kui $AE:EC=m:n$ ja $AB=a$.

30. $ABCD$ on antud rööpkülik. Läbi tema diagonaalide lõikepunkti on joonestatud küljega BC ristuv sirge, mis lõikub küljega BC punktis E ning külje AB pikendusega punktis F. Avaldada BE, kui $AB=a$, $BC=b$ ja $BF=c$.

Mitmesuguseid ülesandeid.

31. Kolmnurka on joonestatud rööpkülik, mille nurk ühtib kolmnurga nurgaga. Kolmnurga selle nurga lähiskülgede pikkused on 20 cm ja 25 cm ning nendega paralleelsed rööpküliku küljed suhtuvad nagu 6 : 5. Arvutada rööpküliku küljed.

32. Kolmnurka ABC on joonestatud romb $ADEF$ nii, et nurk A on neil ühine ja tipp E asetseb küljel BC. Avaldada rombi külg, kui $AB=c$ ja $AC=b$.

33. Rombist väljaspool asetsev ja tema tippu läbiv sirge lõikab kahe külje pikendustel ära lõigud p ja q. Avaldada rombi külg.

34. Antud segmenti joonestada ruut nii, et tema üks külg asetseb kõõlul ja vastaskülje otspunktid asetsevad kaarel.

35. Antud kolmnurka joonestada ruut nii, et tema üks külg asetseb kolmnurga ühel küljel ning selle külje vastastipud — kolmnurga teistel külgedel.

36. Kolmnurka alusega a ja kõrgusega h on joonestatud ruut nii, et selle kaks tippu asetsevad kolmnurga alusel ning teised kaks tippu — kolmnurga teistel külgedel. Avaldada ruudu külg.

37. Antud kolmnurka joonestada ristkülik, mille mõõtmed suhtuvad nagu $m:n$.

38. Kolmnurka, mille alus on 48 cm ja kõrgus 16 cm, on joonestatud ristkülik mõõtmete suhtega 5 : 9, kusjuures suurem külg asetseb kolmnurga alusel. Arvutada ristküliku küljed.

39. Kolmnurka, mille alus on 30 cm ja kõrgus 10 cm, on joonestatud täisnurkne võrdhaarne kolmnurk nii, et tema hüpotenuus on paralleelne antud kolmnurga alusega ja täisnurga tipp asetseb sellel alusel. Arvutada hüpotenuus.

40. Kolmnurka on joonestatud poolringjoon, mis puudutab alust ja mille (oma otspunktidega kolmnurga külgedele toetuv) diameeter on alusega paralleelne. Avaldada raadius, kui kolmnurga alus on a ja kõrgus h.

41. Kolmnurga ABC nurk C on $90°$; $AC=6$ cm, $BC=12$ cm. Küljel BC on võetud punkt D nii, et $\angle ADC=90°-\angle B$. Kui suurteks lõikudeks jaotab punkt D külje BC?

42. Kolmnurgas ABC on antud kaks külge: $BC=16$ m ja $AC=12$ m, ning vastavate kõrguste summa $AD+BE=14$ m. Arvutada kõrgused AD ja BE.

43. Rööpküliku külgede pikkused on 2 m ja 16 dm; suuremate külgede vaheline kaugus on 8 dm. Arvutada väiksemate külgede vaheline kaugus.

44. Rööpküliku ümbermõõt on 48 cm ning tema kõrgused suhtuvad nagu 5 :7. Arvutada rööpküliku küljed.

45. Avaldada kõõlu pikkus, kui ringjoone raadius on r ja kõõlu ühe otspunkti kaugus teisest otspunktist joonestatud puutujast on a.

46. Kaks ringjoont puudutavad teineteist väljastpoolt. Läbi puutepunkti joonestatud sirgel tekivad kõõlud, milledest üks on $\frac{13}{5}$ teisest. Arvutada raadiused, kui keskpunktide vaheline kaugus on 36 cm.

47. ABC on antud kolmnurk ja CD on nurga C poolitaja; punkt E asetseb küljel BC, kusjuures $DE \parallel AC$. Avaldada DE, kui $BC = a$ ja $AC = b$.

48. ABC on antud kolmnurk; BD on tema kõrgus, AE on nurga A poolitaja ja EF on ristlõik küljeni AC. Arvutada EF, kui $BD = 30$ cm ning $AB : AC = 7 : 8$.

49. Rööpkülikusse on joonestatud romb nii, et tema küljed on paralleelsed rööpküliku diagonaalidega. Avaldada rombi külg, kui rööpküliku diagonaalide pikkused on l ja m.

50. Neli paralleelsirget, millede vahelised järjestikused kaugused (lugedes ülalt) suhtuvad nagu 2 : 3 : 4, on lõigatud kahe ühest punktist lähtuva kiirega. Sel teel tekkinud neljast paralleelsest lõigust on äärmised 60 dm ja 96 dm. Arvutada keskmised lõigud.

51. Kolmnurgas ABC on joonestatud küljest BA küljeni BC küljega AC paralleelne lõik DE. On antud: $AB = 24$ m, $BC = 32$ m, $AC = 28$ m ja $AD + CE = 16$ m. Arvutada DE.

52. AD ja BE on kolmnurga ABC kõrgused ja O on nende lõikepunkt. On antud: $AD + BE = 35$ dm, $AO = 9$ dm ja $BO = 12$ dm. Arvutada lõigud OE ja OD.

TRÜ Raamatukogu

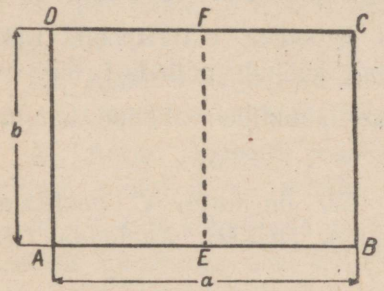
53. Võrdhaarsesse kolmnurka, mille haar on 100 dm ja alus 60 dm, on joonestatud ringjoon. Arvutada haaradel asetsevate puutepunktide vaheline kaugus.

54. Sektori raadiuse pikkus on r, tema kaarele vastava kõõlu pikkus on a. Avaldada sellesse sektorisse ehitatud ringi raadius.

Sarnased hulknurgad.

55. Viisnurga külgede pikkused on 35 cm, 14 cm, 28 cm, 21 cm ja 42 cm, temaga sarnase viisnurga väikseima külje pikkus on 12 cm. Arvutada teise viisnurga ülejäänud küljed.

56. Ühe nelinurga küljed suhtuvad nagu $1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 2$; temaga sarnase nelinurga ümbermõõt on 75 m. Arvutada teise nelinurga küljed.



Joon. 31.

57. Ühe nelinurga külgede pikkused on 10 dm, 15 dm, 20 dm ja 25 dm; temaga sarnase nelinurga väikseima ja suurima külje summa on 28 dm. Arvutada teise nelinurga küljed.

58. Kahe sarnase hulknurga suurimate külgede pikkused on 35 m ja 14 m ning ümbermõõtude vahe on 60 m. Arvutada ümbermõõdud.

59. Tsement-põrandakivide tehas määras ristkülikukujulise põrandakivi normaal- (standard-) mõõtmed nii, et terve kivi $ABCD$ on sarnane oma poolega $BCFE$ (joon. 31). Arvutada sääraste kivide mõõtmete suhe.

60. Rööpküliku $ABCD$ külg $AB = a$ ja $BC = b$. Sirge EF lõikab temast ära rööpküliku $ABEF$, mis on sarnane antud rööpkülikuga $ABCD$. Avaldada lõik BE.

§ 10. Kolmnurga ja mõnede nelinurkade joonelementide vahelised seosed.

Täisnurkses kolmnurgas tähistatakse: tähtedega a ja b — kaateteid; tähega c — hüpotenuusi; a_c ja b_c — kaatetite a ja b projektsioone hüpotenuusil; h — täisnurga tipust joonestatud kõrgust. Eeldatakse, et lõigud on mõõdetud ühe ja sama pikkusühikuga.

Võrdelised lõigud täisnurkses kolmnurgas.

1. Arvutada hüpotenuus, kui on antud mõlemad kaatetid:

1) 12 cm ja 35 cm;
2) 56 cm ja 33 cm;
3) 4 m ja 9 dm;
4) 60 cm ja 91 cm;
5) 21 ja $3\frac{1}{4}$;
6) $\frac{3}{2}$ ja $\frac{7}{16}$;
7) 16,8 ja 2,6;
8) 5 ja 6.

2. Arvutada kaatet, kui on antud teine kaatet ja hüpotenuus [1]:

1) 240 ja 289;
2) 69 ja 269;
3) 143 ja 145;
4) 6,5 ja 42,5;
5) $15\frac{2}{5}$ ja 17;
6) 7 ja 10.

3. Täisnurkse kolmnurga kahe antud elemendi järgi arvutada teised neli:

1) $a = 15$, $b = 20$;
2) $a = 24$, $b = 7$;
3) $a = 4$, $b = 5$;
4) $a = 100$, $c = 125$;
5) $b = 65$, $c = 169$;
6) $a = 600$, $c = 625$;
7) $a = 6$, $a_c = 3{,}6$;
8) $b = 7$, $b_c = 1{,}96$;
9) $c = 29$, $a_c = 15\frac{6}{29}$;
10) $c = 3$, $b_c = 2$;
11) $a_c = 1\frac{1}{2}$, $b_c = 2\frac{2}{3}$;
12) $a_c = 2$, $b_c = 18$;
13) $a = 136$, $h = 120$;
14) $b = 9$, $h = 8\frac{32}{41}$.

4. Kahe lõigu summa ja nende lõikude keskmise võrdelise järgi ehitada need lõigud.

5. Kahe lõigu vahe ja nende lõikude keskmise võrdelise järgi ehitada need lõigud.

6. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas alati $ab = ch$.

7. Kaatetid suhtuvad nagu 5 : 6 ja hüpotenuus on 122 cm. Arvutada lõigud, milledeks kõrgus jaotab hüpotenuusi.

8. Kaatetid suhtuvad nagu 3 : 2 ning kõrgus jaotab hüpotenuusi lõikudeks, milledest üks on 2 m võrra teisest pikem. Arvutada hüpotenuus.

[1] Ülesandes 2 ja paljudel teistel juhtumitel on ruutude vahe arvutamisel otstarbekohane asendada see summa ja vahe korrutisega.

9. Kaatetid suhtuvad nagu 3 : 7 ning hüpotenuusile joonestatud kõrgus on 42 cm. Arvutada hüpotenuusi lõigud.

10. Tõestada, et võrdhaarsesse trapetsisse joonestatud ringjoone diameeter on trapetsi aluste keskmine võrdeline.

11. Tõestada, et kaatetite ruudud suhtuvad nagu nende projektsioonid hüpotenuusil.

12. 1) Ehitada kaks niisugust lõiku, millede ruudud suhtuvad nagu $m : n$.

2) Ehitada kaks lõiku, mis suhtuvad nagu kahe antud lõigu ruudud.

Pythagorase teoreem.

13. Teha kindlaks, missugused kolm järjestikust täisarvu saavad väljendada täisnurkse kolmnurga külgede pikkusi.

14. Kahe vabrikuhoone vahele on ehitatud kaldrenn materjalide ülekandmiseks. Hoonete vaheline kaugus on 10 m, renni otste kõrgused maapinnast on 8 m ja 4 m. Arvutada renni pikkus.

15. 1) Täisnurga sees asetseva punkti ja täisnurga haarade vahelised kaugused on a ja b. Avaldada selle punkti ja täisnurga tipu vaheline kaugus.

2) Ristküliku mõõtmed on 60 cm ja 91 cm. Kui pikk on tema diagonaal?

16. Vaja on freesida ruudukujuline nupp külje pikkusega 32 mm. Kui suur vähemalt peab olema selleks sobiva ümarraua läbimõõt?

17. 1) Ruudu külje pikkus on a. Kui pikk on tema diagonaal?

2) Arvutada ruudu külg, kui see on diagonaalist 2 cm võrra väiksem.

18. Palgi läbimõõt on 12 cm. Kas saab sellest palgist välja tahuda ruudukujulise ristlõikega prussi nii, et ristlõike külg on 10 cm?

19. 1) Ristküliku küljed on a ja b. Avaldada ümberringjoone raadius.

2) Ringisse on joonestatud ristkülik, mille mõõtmed suhtuvad nagu 8 : 15. Arvutada ristküliku mõõtmed, kui ringi raadius on 34 cm.

20. 1) Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 8 dm ja 18 cm. Arvutada ümberringjoone raadius.

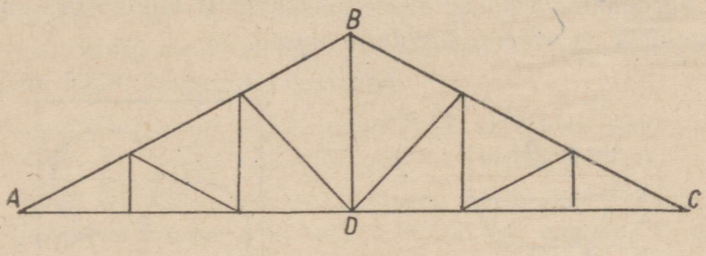
2) Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 16 cm ja 12 cm. Arvutada hüpotenuusile joonestatud mediaan.

21. 1) Võrdhaarse kolmnurga haar on 17 cm ja alus 16 cm. Arvutada kõrgus.

2) Arvutada võrdhaarse kolmnurga küljed, kui tema kõrgus on 35 cm ning alus ja haar suhtuvad nagu 48 : 25.

3) Võrdhaarse kolmnurga alus on 4 cm ning alusnurk 45°. Arvutada haar.

22. Sariktoestiku kummagi sarika AB ja CB (joon. 32) pikkus on 9 m ja toestiku alus AC on 15 m. Arvutada toestiku kõrgus BD.



Joon. 32.

23. 1) Täisnurkses kolmnurgas täisnurga poolitaja jaotab hüpotenuusi $2\frac{1}{7}$ m ja $2\frac{6}{7}$ m pikkusteks lõikudeks. Arvutada kaatetid.

2) Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused on 15 cm ja 20 cm. Täisnurga tipust on joonestatud kõrgus ja nurgapoolitaja. Kui suurteks lõikudeks jaguneb hüpotenuus?

24. 1) Avaldada võrdkülgse kolmnurga kõrgus antud külje a kaudu.

2) Avaldada võrdkülgse kolmnurga külg antud kõrguse h kaudu.

3) Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on küljest m võrra väiksem. Avaldada külg.

4) Täisnurkses kolmnurgas on üks nurk 30° ning suurem kaatet 6 cm. Arvutada selle kolmnurga teised küljed.

25. 1) Kolmnurga küljed on: $a = 25$ cm ja $b = 30$ cm ning kõrgus $h_c = 24$ cm. Arvutada alus c.

2) Kolmnurga suurem alusnurk on 45° ning kõrgus jaotab aluse 20 cm ja 21 cm pikkusteks lõikudeks. Arvutada suurem külg.

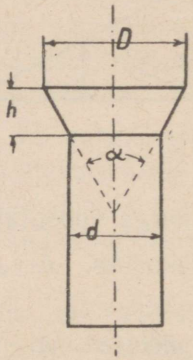
3) Ühest ja samast punktist on antud sirgele joonestatud ristlõik ja kaks kaldlõiku. Arvutada ristlõigu pikkus, kui kaldlõikude pikkused on 41 cm ja 50 cm ning nende projektsioonid antud sirgel suhtuvad nagu 3 : 10.

26. 1) Rombi diagonaalid on 24 cm ja 70 cm. Arvutada külg.

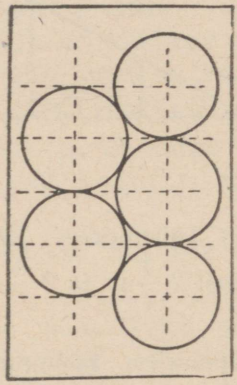
2) Arvutada rombi diagonaalid, kui nad suhtuvad nagu 3 : 4 ning rombi ümbermõõt on 1 m.

27. 1) Võrdhaarse trapetsi alused on 10 cm ja 24 cm ning haar on 25 cm. Arvutada trapetsi kõrgus.

2) Võrdhaarse trapetsi haara pikkus on 41 cm, kõrgus on 4 dm ning kesklõik on 45 cm. Arvutada alused.



Joon. 33.


Joon. 34.

28. Paralleelselt sirge teega, sellest 500 m kaugusel, asetseb laskurite ahelik; äärmiste laskurite vaheline kaugus on 120 m, kuuli lennukaugus on 2,8 km. Kui suur teeosa on selle aheliku tule all?

29. Joonisel 33 on kujutatud salapeaga neet OST 302 (OST — üleliiduline standard). Nurk $\alpha = 60°$. Arvutada:

1) D, kui $d = 16{,}5$ mm ja $h = 7{,}5$ mm;

2) d, kui $D = 30$ mm ja $h = 9{,}5$ mm;

3) h, kui $D = 35$ mm ja $d = 22$ mm.

Kirjutada valem, mis seob suurusi D, d ja h.

30. 1) Kolmnurgas ABC on joonestatud kõrgus AD. Tõestada, et $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

2) Kui M on kolmnurga ABC kõrgusel AD asetsev punkt, siis $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Tõestada see.

31. 1) Tõestada, et täisnurkse trapetsi diagonaalide ruutude vahe võrdub aluste ruutude vahega.

2) Täisnurkse trapetsi lühem diagonaal võrdub kaldu asetseva haaraga. Avaldada pikem diagonaal, kui kaldu asetsev haar on a ja väiksem alus on b.

32. Plekitahvlist on vaja välja stantsida ringid läbimõõduga 28 mm. Arvutada sirgete vahelised kaugused, milledel tuleb võtta ringide keskpunktid (joon. 34).

33. 1) Ringi raadiuse pikkus on 89 dm, kõõlu pikkus on 16 m. Arvutada kõõlu kaugus keskpunktist.

2) O on keskpunkt; ACB on kõõl ja OCD on kõõluga ristuv raadius. $OC = 9$ cm ja $CD = 32$ cm. Arvutada kõõlu pikkus.

3) Kahe lõikuva ringjoone raadiused on 13 cm ja 15 cm, ühise kõõlu pikkus on 24 cm. Arvutada keskpunktide vaheline kaugus.

4) AB ja CD on paralleelsed üks ühel pool, teine teisel pool keskpunkti O asetsevad kõõlud ringis, mille raadius $R = 15$ cm. Kõõl $AB = 18$ cm, kõõl $CD = 24$ cm. Arvutada kõõlude vaheline kaugus.

5) Kaks paralleelset kõõlu AB ja CD asetsevad ühel pool keskpunkti O ringis, mille raadius $R = 30$ cm. Kõõl $AB = 48$ cm, kõõl $CD = 36$ cm. Arvutada kõõlude vaheline kaugus.

34. Suure ketta diameetri mõõtmiseks seati varbsirkel nii, nagu näidatud joonisel 35. Varbsirkli harude pikkus $s = 25$ mm, harude otste vaheline kaugus $l = 200$ mm;

1) arvutada diameetri pikkus D;

2) tuletada valem, mis väljendab diameetrit D suuruste s ja l kaudu.

35. Segmendi kõõl on a ja kõrgus on h. Avaldada ringi raadius.

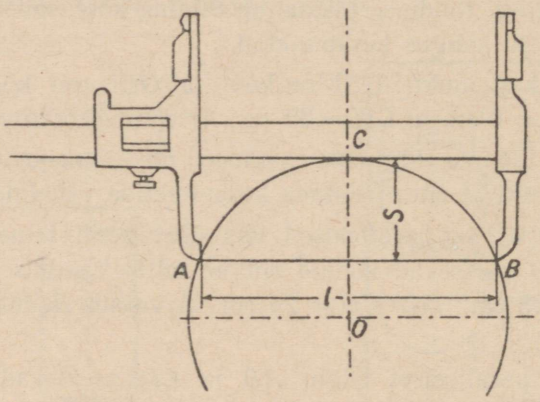
36. Ringi raadius on 25 cm; kahe paralleelse kõõlu pikkused on 14 cm ja 40 cm. Arvutada kõõlude vaheline kaugus.

37. Diameetri ühe otspunkti kaugused selle diameetriga paralleelse kõõlu otspunktidest on 13 cm ja 84 cm. Arvutada ringi raadius.

38. 1) Ringjoonele, mille raadius on 36 cm, on joonestatud tema keskpunktist 85 cm kaugusel asetsevast punktist puutuja. Arvutada puutuja pikkus.

2) Ringjoonele on joonestatud ühest punktist kaks puutujat. Ringjoone raadiuse pikkus on 11 cm ning puutujate pikkuste summa on 120 cm. Arvutada puutujate lähtepunkti kaugus keskpunktist.

3) Ringjoonele, mille raadius on 7 cm, on keskpunktist 25 cm kaugusel asetsevast punktist joonestatud kaks puutujat. Arvutada puutepunktide vaheline kaugus.



Joon. 35.

39. Kaks ringi, raadiustega R ja r, puudutavad teineteist väliselt. Ühe ringi keskpunktist on teisele ringile joonestatud puutuja ning saadud puutepunktist on joonestatud puutuja esimesele ringile. Avaldada viimase puutuja pikkus.

40. 1) Kaks ringi puudutavad teineteist väliselt. Arvutada nende ühise välise puutuja pikkus (puutepunktide vaheline lõik), kui raadiused on 16 cm ja 25 cm.

2) Kahe ringi raadiused on 27 cm ja 13 cm ning nende keskpunktide vaheline kaugus on 50 cm. Arvutada nende ühiste puutujate pikkused.

41. Ühele ringjoonele ühest ja samast punktist joonestatud puutuja ja lõikaja on vastastikku risti. Puutuja pikkus on 12 m ning lõikaja siselõigu pikkus on 10 m. Arvutada ringjoone raadius.

42. AB ja CD on paralleelsed sirged ning AC on nende lõikaja. E ja F on sirgete AB ja CD lõikepunktid nurkade C ja A poolitajatega. On antud: $AF = 96$ cm ja $CE = 110$ cm. Arvutada pikkus AC.

43. Nürinurkse võrdhaarse kolmnurga ABC alus $AC = 32$ m ning haar on 20 m. Tipust B on joonestatud haaraga ristuv lõik lõikumiseni alusega. Kui suurteks lõikudeks jaotab see ristlõik aluse?

44. Kaatet $AC = 15$ cm, kaatet $CB = 8$ cm. Keskpunkti C ümber on raadiusega CB joonestatud kaar, mis lõikab hüpotenuusist ära lõigu BD, mida nõutaksegi arvutada.

45. Kaar, mille keskpunktiks on täisnurkse kolmnurga täisnurga tipp ja raadiuseks on lühem kaatet, jaotab hüpotenuusi 98 cm ja 527 cm pikkusteks lõikudeks (alates lühemast kaatetist). Arvutada kaatetid.

46. AB on ringi diameeter, BC on puutuja ning D — sirge AC ja ringjoone lõikepunkt. On antud: $AD = 32$ cm ja $DC = 18$ cm. Arvutada raadius.

47. AB on ringi diameeter, BC — puutuja ja CDA — lõikaja. Arvutada suhe $CD : DA$, kui lõik BC võrdub raadiusega.

Nurgapoolitaja täisnurkses kolmnurgas.

48. Täisnurkses kolmnurgas täisnurga poolitaja jaotab hüpotenuusi vahekorras 7 : 9. Millises vahekorras jaotab kõrgus hüpotenuusi (lugedes lõike samas järjekorras)?

49. Arvutada kaatetid, kui täisnurga poolitaja jaotab hüpotenuusi 15 cm ja 20 cm pikkusteks lõikudeks.

50. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet on a. Millisteks lõikudeks jaotab selle kaateti vastasnurga poolitaja?

51. Täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga poolitaja jaotab kaateti lõikudeks m ja n $(m > n)$. Avaldada teine kaatet ja hüpotenuus.

52. Täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on 15 dm ja 2 m, on joonestatud täisnurga tipust kõrgus ning kõrguse ja kummagi kaateti vaheliste nurkade poolitajad. Arvutada nende poolitajate vaheline hüpotenuusi lõik.

53. Täisnurkses kolmnurgas ABC kaatet $BC = 6$ cm ja hüpotenuus $AB = 10$ cm. On joonestatud nurga ABC ja tema kõrvunurga poolitajad, mis lõikavad kaatetit AC ja tema pikendust punktides D ja E. Arvutada pikkus DE.

54. Võrdhaarse kolmnurga ABC haar $AB = 10$ m ning alus $AC = 12$ m. Nurkade A ja C poolitajad lõikuvad punktis D. Arvutada lõik BD.

55. 1) Võrdhaarse kolmnurga alus on 30 cm ning haar on 39 cm. Arvutada siseringjoone raadius.

2) Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone keskpunkt jaotab kõrguse vahekorras 17 : 15. Alus on 60 cm. Arvutada selle ringjoone raadius.

Täisnurkse kolmnurga, rombi ja trapetsi kõrgus ning küljed.

56. Punktist B on joonestatud antud sirgele ristlõik BC ja kaldlõik BA. Sirgel AC on võetud punkt D ning sirge BD on pikendatud lõikumiseni sirge AC ristsirgega AE punktis E. Arvutada lõik AE, kui $BA = 53$ dm, $AD = 8$ dm ja $DC = 20$ dm.

57. 1) Võrdhaarse kolmnurga alus on 30 dm ja kõrgus on 20 dm. Arvutada haarale joonestatud kõrgus.

2) Võrdhaarse kolmnurga alusele joonestatud kõrgus on 3 dm ja haarale joonestatud kõrgus on 4 dm. Arvutada selle kolmnurga küljed.

3) Rombi diagonaalid on 14 dm ja 48 dm. Arvutada rombi kõrgus.

58. 1) Hüpotenuus $AB = 34$ cm, kaatet $BC = 16$ cm. Arvutada hüpotenuusi keskristsirge lõik hüpotenuusi ja kaateti AC vahel.

2) Ringi raadius on r. Avaldada kõõl, mis algab antud diameetri otspunktist ja läbib selle diameetriga ristuva raadiuse keskpunkti.

59. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatet $AC = 16$ dm ja kaatet $BC = 12$ dm. Keskpunkti B ümber on joonestatud ringjoon raadiusega BC ning sellele hüpotenuusiga paralleelne puutuja (kusjuures puutuja ja kolmnurk asetsevad üks ühel pool, teine teisel pool hüpotenuusi). Kaatet BC on pikendatud lõikumiseni puutujaga. Arvutada, kui palju on pikendatud kaatetit.

60. Ühest ja samast punktist on ringile joonestatud kaks puutujat. Puutuja pikkus on 156 dm ning puutepunktide vaheline kaugus on 120 dm. Arvutada ringi raadius.

61. Täisnurkse trapetsi alused on 17 dm ja 25 dm ning suurem haar on 10 dm. Selle haara keskpunktist on joonestatud ristlõik samale haarale lõikumiseni teise haaraga. Arvutada selle ristlõigu pikkus.

Segaülesandeid täisnurksest kolmnurgast.

62. AC ja CB on kaatetid, CD on kõrgus; $DE \parallel BC$. Arvutada suhe $AE : EC$, kui $AC : CB = 4 : 5$.

63. AC ja CB on kaatetid, CD on kõrgus; $DE \perp AC$ ning $DF \perp CB$. Arvutada lõigud DE ja DF, kui $AC = 75$ dm ja $BC = 100$ dm.

64. Kahe võrdhaarse kolmnurga haarad on võrdsed ning tipunurkade summa on 180°. Alused suhtuvad nagu 9 : 40 ning haara pikkus on 41 dm. Arvutada alused.

65. 1) Kolmnurga alus on 60 m, kõrgus 12 m ja alusele joonestatud mediaan on 13 m. Arvutada küljed.

2) Arvutada täisnurkse kolmnurga kaatetite suhe, kui täisnurga tipust lähtuvad kõrgus ja mediaan suhtuvad nagu 40 : 41.

66. Arvutada võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone raadius, kui kolmnurga aluse ja haara pikkused on vastavalt:

1) 6 dm ja 5 dm;

2) 24 m ja 13 m.

67. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 13 dm ja 84 dm. Arvutada siseringjoone raadius.

68. Kahe teineteisest väljaspool asetseva ringjoone keskpunktide vaheline kaugus on 65 dm; nende ühise välise puutuja pikkus (puutepunktide vaheline lõik) on 63 dm; nende ühise seesmise puutuja pikkus on 25 dm. Arvutada ringjoonte raadiused.

69. Kahe paralleelse kõõlu pikkused on 40 dm ja 48 dm, nendevaheline kaugus on 22 dm. Arvutada ringi raadius.

70. Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi aluste pikkused on 36 cm ja 1 m. Arvutada ringi raadius.

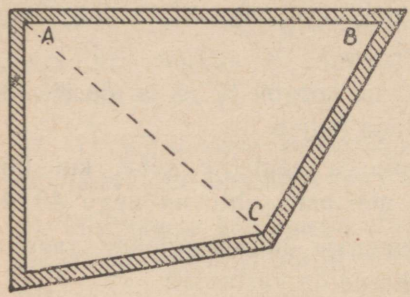
71. Ringi ümber, mille raadius on 12 cm, on joonestatud võrdhaarne trapets, mille haara pikkus on 25 cm. Arvutada selle trapetsi alused.

72. Ringi ümber, mille raadius on r, on joonestatud võrdhaarne trapets, mille alused suhtuvad nagu $m : n$. Avaldada selle trapetsi küljed.

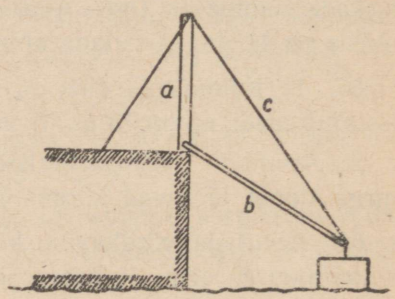
73. AB ja AC on puutujad ringjoonele, mille keskpunkt on O; M on sirge AO ja ringjoone lõikepunkt; DME — punkti M läbiv sirgete AB ja AC vaheline lõik. Arvutada pikkus DE, kui ringi raadius on 15 dm ja kaugus $AO = 39$ dm.

74. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 15 dm ja 20 dm. Arvutada siseringjoone keskpunkti kaugus hüpotenuusile joonestatud kõrgusest.

75. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust C on joonestatud ristjoon hüpotenuusile ning sellele kui diameetrile on joonestatud ringjoon, mille kõõlud kaatetitel CA ja CB on m ja n. Avaldada ja arvutada kaatetid ($m = 12$; $n = 18$).



Joon. 36.



Joon. 37.

76. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 75 dm ja 100 dm. Lõikudele, milledeks kõrgus jaotab hüpotenuusi, on joonestatud poolringid, mis asetsevad kolmnurgaga ühel ja samal pool hüpotenuusi. Arvutada nende poolringide sees asetsevad kaatetite lõigud.

77. Tõestada, et kui kaks ringjoont puudutavad teineteist väliselt, siis nende ühine väline puutuja on nende diameetrite keskmine võrdeline.

78. Trapetsi $ABCD$ lühem diagonaal BD on risti alustega AD ja BC; teravnurkade A ja C summa on 90°. Alus $AD = a$ ja $BC = b$. Avaldada haarad AB ja CD.

Kaldnurkne kolmnurk.

79. Joonisel 36 on näidatud ruumi plaan, mida soovitakse joont AC mööda vaheseinaga kaheks jaotada. Arvestades takistusi mõõtmisel mööda lõiku AC, mõõdetakse tema asemel pikkused $AB = 50$ m ja $BC = 35$ m ning $\angle ABC = 60°$. Arvutada nende andmete järgi pikkus AC.

80. Joonisel 37 on kujutatud kraana, mille tugi $a=10$ m ja õlg $b=13$ m; a ja b vaheline nurk on 120°. Arvutada tõmmitsa c pikkus.

81. Arvutada kolmnurga teine külg, kui tema üks külg, alus ja teise külje projektsioon alusel on väljendatud vastavalt järgmiste arvudega:

1) 6; 5; 3,8.
2) 2; 3; 2.
3) 12; 8; 11.
4) 2; 2; 3.

82. Määrata kolmnurga kuju (terav-, täis- või nürinurkne), kui on antud kolm külge või nende suhted:

1) 2; 3; 4.
2) 3; 4; 5.
3) 4; 5; 6.
4) 10; 15; 18.
5) 68; 119; 170.

83. Kolmnurgas ABC olgu b alus, a ja c küljed, p ja q külgede projektsioonid alusel ning h kõrgus. Arvutada p, q ja h, kui on antud kolm külge:

1) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$;
2) $a = 37$, $b = 30$, $c = 13$;
3) $a = 25$, $b = 12$, $c = 17$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$.

84. Arvutada kolmnurga kolmas külg, kui teised kaks külge moodustavad 60°-se nurga ja nende pikkused on vastavalt:
1) 5 cm ja 8 cm; 2) 8 cm ja 15 cm; 3) 63 cm ja 80 cm.

85. Arvutada kolmnurga kolmas külg, kui teised kaks külge moodustavad 120°-se nurga ja nende pikkused on vastavalt:
1) 3 cm ja 5 cm; 2) 7 cm ja 8 cm; 3) 11 cm ja 24 cm.

86. Arvutada kolmnurga kolmas külg, kui teised kaks külge moodustavad 45°-se nurga ja nende pikkused on vastavalt:
1) 2 ja 3; 2) $\sqrt{8}$ ja 5; 3) $\sqrt{18}$ ja 7.

87. Arvutada kolmnurga küljed, teades, et suuruse poolest keskmine külg erineb kummastki teisest küljest ühiku võrra ning suurema külje projektsioon keskmisel küljel võrdub 9 ühikuga.

88. Kolmnurga üks külg on 21 cm; teised küljed moodustavad 60°-se nurga ja nad suhtuvad nagu 3 : 8. Arvutada need küljed.

89. Kolmnurga üks külg on 16 m ning moodustab alusega 60°-se nurga; teine külg on 14 m. Arvutada alus.

90. Kolmnurga alus on 13 cm, tipunurk on 60°, kahe teise külje summa on 22 cm. Arvutada need kaks külge ja kõrgus.

91. Kolmnurga alus on 12 cm, üks aluse lähisnurk on 120°, selle nurga vastaskülg on 28 cm. Arvutada kolmas külg.

92. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus AB on pikendatud kaatetiga BC võrdse lõigu BD võrra ning punkt D on ühendatud punktiga C. Avaldada kolmnurga ADC küljed, kui kaatet $BC=a$.

93. Avaldada ja arvutada poolele kaarele vastav kõõl, kui tervele kaarele vastav kõõl on a ning raadius on r ($r=25$; $a=48$).

94. 1) Täisnurkse kolmnurga ABC kaatet $AC=15$ cm ja kaatet $BC=20$ cm. Hüpotenuusile AB on paigutatud lõik AD pikkusega 4 cm ning punkt D on ühendatud punktiga C. Arvutada pikkus CD.

2) ABC on täisnurkne kolmnurk täisnurgaga C. Hüpotenuusi AB pikendusele on paigutatud kaatetiga BC võrdne lõik BD ning punkt D on ühendatud punktiga C. Arvutada pikkus CD, kui $BC=7$ cm ja $AC=24$ cm.

95. Kolmnurgas ABC on joonestatud kõrgused BD ja CE ning punktid D ja E on ühendatud teineteisega. Arvutada kolmnurkade ADE ja ABC pindalade suhe, kui: 1) $\angle A=45°$; 2) $\angle A=30°$.

96. Kolmnurga ABC küljel AB on antud punkt D; arvutada pikkus CD, kui on teada, et $a=37$, $b=15$, $c=44$ ja $AD=14$.

97. Nürinurkse kolmnurga suurim külg on 16 cm ning selle külje otspunktidest joonestatud kõrgused asetsevad nürinurga tipust 2 cm ja 3 cm kaugusel. Arvutada selle kolmnurga kaks väiksemat külge.

98. Võrdhaarse kolmnurga küljed on: $AB=BC=50$ cm ja $AC=60$ cm. On joonestatud kõrgused AE ja CD ning punktid D ja E on ühendatud teineteisega. Arvutada kolmnurga DBE küljed.

99. Kolmnurga ABC küljele AC on joonestatud ristlõik tema otspunktist C lõikumiseni külje AB pikendusega punktis D. Arvutada lõigud BD ja CD, kui $AB=45$, $BC=39$ ja $AC=42$.

100. Kolmnurga ABC küljed on antud: $AB=15$, $AC=14$ ja $BC=13$. Nurga B poolitaja on üle tipu pikendatud lõikumiseni tipust C joonestatud külje AC ristsirgega punktis E. Arvutada pikkus CE.

101. Kaks kongruentset ringi puudutavad ühte ja sama suuremat ringjoont — üks seesmiselt, teine väliselt, kusjuures puutepunktide vaheline kaar sisaldab 60°. Väiksemate ringide raadiused on r, suurema raadius on R. Avaldada väiksemate ringide keskpunktide vaheline kaugus.

Rööpkülik ja trapets.

102. 1) Rööpküliku külgede pikkused on 23 cm ja 11 cm ning diagonaalid suhtuvad nagu 2 : 3. Arvutada diagonaalid.

2) Rööpküliku diagonaalide pikkused on 17 cm ja 19 cm ning küljed suhtuvad nagu 2 : 3. Arvutada küljed.

103. 1) Rööpküliku diagonaalide pikkused on 12 cm ja 14 cm ning külgede pikkuste vahe on 4 cm. Arvutada rööpküliku küljed.

2) Arvutada rööpküliku küljed ja diagonaalid, kui suurem külg võrdub väiksema diagonaaliga, külgede pikkuste vahe on 3 cm ja diagonaalide pikkuste vahe on 2 cm.

104. 1) Kolmnurga külgede pikkused on: 16, 18 ja 26. Arvutada suurimale küljele joonestatud mediaani pikkus.

2) Kolmnurga kaks külge on 7 ja 11; kolmanda külje mediaan on 6. Arvutada kolmas külg.

3) Kolmnurga küljed on a, b ja c. Avaldada mediaanid.

105. Arvutada rööpküliku kõrgus, kui rööpküliku alus on 51 cm ning diagonaalid on 40 cm ja 74 cm.

106. Arvutada võrdhaarse trapetsi diagonaalide pikkused: 1) kui alused on 4 m ja 6 m ning haar on 5 m; 2) kui üks külg on 5 cm ning teised kolm külge on igaüks 4 cm.

107. Arvutada trapetsi kõrgus ja diagonaalid, kui tema alused a ja c ning haarad b ja d väljenduvad järgmistes arvudes:

1) $a = 25$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 15$;
2) $a = 28$, $b = 25$, $c = 16$, $d = 17$;
3) $a = 6$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 4$.

108. Kolmnurka on joonestatud rööpkülik nii, et tema üks külg asetseb kolmnurga alusel ja diagonaalid on vastavalt paralleelsed kolmnurga teiste külgedega. Kolmnurga aluse pikkus on 45 cm ning teiste külgede pikkused on 39 cm ja 48 cm. Arvutada rööpküliku küljed.

109. Tõestada, et võrdhaarse trapetsi diagonaali ruut võrdub aluste korrutise ja haara ruudu summaga.

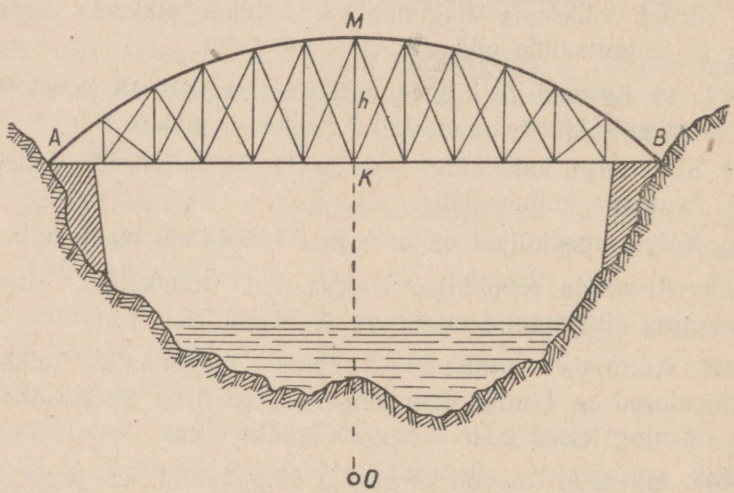
110. Tõestada, et iga trapetsi diagonaalide ruutude summa võrdub aluste kahekordse korrutise ja haarade ruutude summaga.

111. Tõestada, et iga nelinurga diagonaalide ruutude summa on kaks korda suurem kui nelinurga vastaskülgede keskpunkte ühendavate lõikude ruutude summa.

112. Arvutada rombi teravnurk, kui tema külg on diagonaalide keskmine võrdeline.

§ 11. Võrdelised lõigud ringis.

1. Silla toestik on piiratud ringjoone kaarega (joon. 38); toestiku kõrgus $MK = h = 3$ m; kaare AMB raadius $R = 8{,}5$ m. Arvutada silla pikkus AB.



Joon. 38.

2. Poolsilindri-kujulisse võlvitud keldrisse on vaja paigutada kaks püsttuge, kumbki ühel ja samal kaugusel põranda lähemast küljest. Arvutada tugede kõrgus, kui põranda laius on 4 m ja tugede vaheline kaugus on 2 m.

3. 1) Ringjoone punktist on joonestatud diameetrile ristlõik. Arvutada selle ristlõigu pikkus, kui diameetri lõikude pikkused on: 1) 12 cm ja 3 cm; 2) 16 cm ja 9 cm; 3) 2 m ja 5 dm.

2) Diameetri punktist on joonestatud ristlõik lõikumiseni ringjoonega. Arvutada selle ristlõigu pikkus, kui diameetri pikkus on 40 cm ning ristlõigu kaugus diameetri ühest otspunktist on 8 cm.

4. Diameeter on jaotatud lõikudeks: $AC=8$ dm ja $CB=5$ m ning punktist C on joonestatud temale antud pikkusega ristlõik CD. Näidata punkti D asukoht ringjoone suhtes, kui lõigu CD pikkus on: 1) 15 dm; 2) 2 m; 3) 23 dm.

5. ACB on poolringjoon; CD — ristlõik diameetrile AB. Nõutakse:

1) arvutada DB, kui $AD=25$ ja $CD=10$;
2) arvutada AB, kui $AD:DB=4:9$ ja $CD=30$;
3) avaldada AD, kui $CD=3AD$ ning raadius on r;
4) arvutada AD, kui $AB=50$ ja $CD=15$.

6. 1) Ringjoone punktist raadiusele joonestatud ristlõik jaotab raadiuse suhtes 8 : 9 (alates keskpunktist). Arvutada ristlõigu pikkus, kui raadius on 34 cm.

2) Kõõl BDC on risti raadiusega ODA. Arvutada BC, kui $OA=25$ cm ja $AD=10$ cm.

3) Kahest kontsentrilisest ringjoonest moodustatud rõnga laius on 8 dm; väiksemat ringjoont puudutav suurema ringjoone kõõl on 4 m. Arvutada ringjoonte raadiused.

7. Lõikude võrdlemise teel tõestada, et kahe mittevõrdse arvu aritmeetiline keskmine on suurem nende geomeetrilisest keskmisest.

8. Ehitada 3 cm ja 5 cm pikkuste lõikude keskmine võrdeline.

9. Ehitada lõik pikkusega: $\sqrt{15}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ ühikut.

10. ADB on diameeter, AC — kõõl, CD — ristlõik diameetrile. Arvutada kõõl AC: 1) kui $AB=2$ m ja $AD=0{,}5$ m; 2) kui $AD=4$ cm ja $DB=5$ cm; 3) kui $AB=20$ m ja $DB=15$ m.

11. AB on diameeter, AC — kõõl, AD — kõõlu projektsioon diameetril AB. Nõutakse:

1) arvutada AD, kui $AB=18$ cm ja $AC=12$ cm;
2) arvutada raadius, kui $AC=12$ m ja $AD=4$ m;
3) arvutada DB, kui $AC=24$ cm ja $DB=\frac{7}{9}AD$.

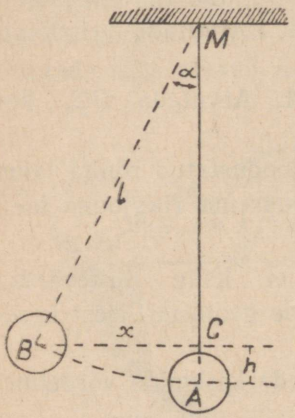
12. AB on diameeter, AC — kõõl, AD — kõõlu projektsioon diameetril AB. Nõutakse:

1) arvutada AC, kui $AB=35$ cm ja $AC=5AD$;
2) avaldada AC, kui raadius on r ja $AC=DB$.

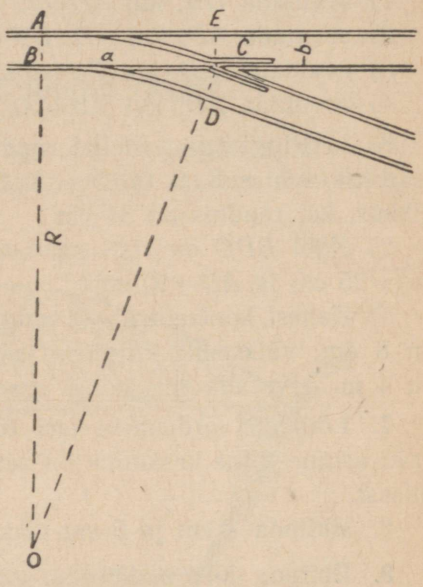
13. Ringis kaks kõõlu lõikuvad teineteisega. Ühe kõõlu lõigud on 24 cm ja 14 cm; teise kõõlu üks lõik on 28 cm. Arvutada selle kõõlu teine lõik.

14. Silla toestik on piiratud ringjoone kaarega (joon. 38); silla pikkus $AB = 6$ m, kõrgus $h = 1{,}2$ m. Arvutada kaare raadius ($OM = R$).

15. Kaks sirglõiku AB ja CD lõikuvad punktis M nii, et $MA = 7$ cm, $MB = 21$ cm, $MC = 3$ cm ja $MD = 16$ cm. Kas punktid A, B, C ja D asetsevad ühel ja samal ringjoonel?



Joon. 39.



Joon. 40.

16. Pendli pikkus $MA = l = 1$ m (joon. 39), nurga α suuruse hälbe puhul ta tõuseb $CA = h = 10$ cm võrra. Arvutada punkti B kaugus x püstsirgest MA ($BC = x$).

17. Raudtee, mille laius $b = 1{,}524$ m, haruneb kohal AB kaare AC abil; seejuures $BC = a = 42{,}4$ m (joon. 40). Arvutada kaare raadius $OA = R$.

18. Kõõlu AMB pööratakse punkti M ümber nii, et lõik MA suureneb $2\frac{1}{2}$ korda. Kuidas muutub lõik MB?

19. 1) Kahest teineteisega lõikuvast kõõlust üks jaguneb lõikepunktis lõikudeks pikkustega 48 cm ja 3 cm ning teine pooleks. Arvutada teise kõõlu pikkus.

2) Kahest teineteisega lõikuvast kõõlust üks jaguneb lõikepunktis lõikudeks pikkustega 12 m ja 18 m ning teine suhtes 3 : 8. Arvutada teise kõõlu pikkus.

20. Kahest teineteisega lõikuvast kõõlust üks võrdub 32 cm ning teise lõigud on 12 cm ja 16 cm. Arvutada esimese kõõlu lõigud.

21. Ringjoone lõikaja ABC on välise punkti A ümber pööratud nii, et tema väline lõik AB vähenes kolm korda. Kuidas muutus lõikaja pikkus?

22. Olgu ADB ja AEC kaks sirget, mis lõikavad ringjoont: esimene — punktides D ja B, teine — punktides E ja C. Nõutakse:

1) arvutada AE, kui $AD = 5$ cm, $DB = 15$ cm ja $AC = 25$ cm;

2) arvutada BD, kui $AB = 24$ m, $AC = 16$ m ja $EC = 10$ m;

3) arvutada AB ja AC, kui $AB + AC = 50$ m ning $AD : AE = 3 : 7$.

23. Ringjoone raadiuse pikkus on 7 cm. Keskpunktist 9 cm kaugusel asetsevast punktist on joonestatud lõikaja nii, et ringjoon poolitab teda. Arvutada selle lõikaja pikkus.

24. MAB ja MCD on ühe ja sama ringjoone lõikajad. Nõutakse:

1) arvutada CD, kui $MB = 1$ m, $MD = 15$ dm ja $CD = MA$;

2) arvutada MD, kui $MA = 18$ cm, $AB = 12$ cm ja $MC : CD = 5 : 7$;

3) arvutada AB, kui $AB = MC$, $MA = 20$ ja $CD = 11$.

25. Kaks kõõlu on pikendatud lõikumiseni teineteisega. Avaldada pikendused, kui kõõlude pikkused on a ja b ning pikendused suhtuvad nagu $m : n$.

26. Ühest ja samast punktist on ringjoonele joonestatud lõikaja ja puutuja. Arvutada puutuja pikkus, kui lõikaja välise ja seesmise lõigu pikkusi väljendavad järgmised arvud: 1) 4 ja 5; 2) 2,25 ja 1,75; 3) 1 ja 2.

27. Puutuja pikkus on 20 cm ning samast punktist joonestatud suurima lõikaja pikkus on 50 cm. Arvutada ringi raadius.

28. Lõikaja on oma välisest lõigust $2\frac{1}{4}$ korda suurem. Mitu korda on ta suurem samast punktist joonestatud puutujast?

29. Kahe lõikuva ringjoone ühise kõõlu pikendusel võetud punktist on neile ringjoontele joonestatud puutujad. Tõestada, et need puutujad on võrdsed.

30. Nurga A ühele haarale on paigutatud lõigud: $AB = 6$ cm ja $BC = 8$ cm; teisele haarale on paigutatud lõik $AD = 10$ cm. Läbi punktide B, C ja D on joonestatud ringjoon. Nõutakse selgitada, kas sirge AD puudutab seda ringjoont või on punkt D esimene või teine lõikepunkt (arvates punktist A).

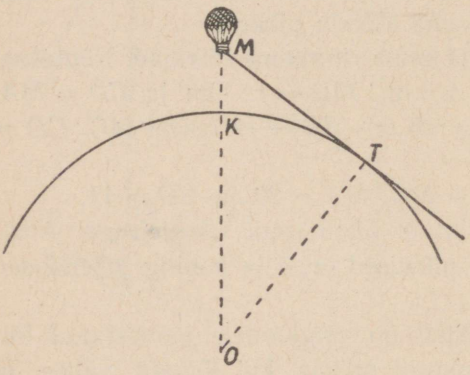
31. Olgu AB ringjoone puutuja ning ACD sama ringjoone lõikaja. Nõutakse:

1) arvutada CD, kui $AB = 2$ cm ja $AD = 4$ cm;
2) arvutada AD, kui $AC : CD = 4 : 5$ ja $AB = 12$ cm;
3) avaldada AB, kui $AB = CD$ ja $AC = a$.

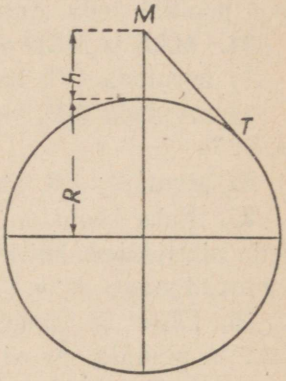
32. 1) Kui kaugele on näha õhupallist (joon. 41), kui ta on tõusnud 4 km kõrgusele maapinnalt (maakera raadius on ≈ 6370 km)?

2) Elbrusi mäetipp (Kaukasuses) on 5600 m üle merepinna. Kui kaugele on näha sellelt mäetipult?

3) M on vaatepunkt h meetri kõrgusel (joon. 42); maakera raadius on R, $MT = d$ on kõige suurem nähtav kaugus. Tõestada, et $d = \sqrt{2Rh + h^2}$.



Joon. 41.



Joon. 42.

Märkus. Et h^2 võrreldes suurusega $2Rh$ on väga väike, siis ta resultaadisse peaaegu ei mõju; seetõttu võib kasutada ligikaudset valemit $d \approx \sqrt{2Rh}$.

33. 1) Puutuja ja lõikaja, mis väljuvad ühest ja samast punktist, on vastavalt 20 cm ja 40 cm pikkused; lõikaja kaugus keskpunktist on 8 cm. Leida ringjoone raadius.

2) Leida keskpunkti kaugus sellest punktist, millest väljuvad puutuja ja lõikaja, kui nende pikkused on vastavalt 4 cm ja 8 cm ja lõikaja kaugus keskpunktist on 12 cm.

34. 1) Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone puutuja ja lõikaja. Leida puutuja pikkus, kui ta on lõikaja välisest lõigust 5 cm võrra pikem ja seesmisest lõigust sama võrra lühem.

2) Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone puutuja ja lõikaja. Lõikaja pikkus on a ja tema seesmine lõik on välisest lõigust puutuja pikkuse võrra suurem. Leida puutuja pikkus.

35. Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone puutuja ja lõikaja. Puutuja on lõikaja seesmisest ja välisest lõigust pikem vastavalt 2 cm võrra ja 4 cm võrra. Leida lõikaja pikkus.

36. Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone puutuja ja lõikaja. Leida nende pikkused, kui puutuja on lõikaja seesmisest lõigust 20 cm võrra lühem ja välisest lõigust 8 cm võrra pikem.

37. 1) Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone puutuja ja lõikaja. Nende summa on 30 cm ja lõikaja seesmine lõik on puutujast 2 cm võrra lühem. Leida lõikaja ja puutuja pikkus.

2) Ühest ja samast punktist on joonestatud ringjoone lõikaja ja puutuja. Nende summa on 15 cm ja lõikaja väline lõik on puutujast 2 cm võrra lühem. Leida lõikaja ja puutuja pikkus.

38. Sirglõiku AB on pikendatud BC võrra. Lõikudele AB ja AC kui diameetritele on ehitatud ringjooned. Punktist B on ehitatud sirglõigule AC ristsirge BD lõikumiseni suurema ringjoonega. Punktist C on joonestatud väiksema ringjoone puutuja CK. Tõestada, et $CD = CK$.

39. Antud ringjoonele on ehitatud kaks paralleelset puutujat ja kolmas puutuja, mis kahte eelmist lõikab. Raadius on kolmanda puutuja lõikude keskmine võrdeline. Tõestada see.

40. Antud on kaks paralleelset sirget 15 dm kaugusel teineteisest; nende vahel, 3 dm kaugusel ühest neist, on antud punkt M. Läbi punkti M on ehitatud ringjoon, mis puudutab mõlemat paralleeli. Leida keskpunkti ja punkti M projektsioonide vaheline kaugus ühel antud paralleelil.

41. Ringis, mille raadius on r, on ehitatud võrdhaarne kolmnurk, mille kõrguse ja aluse summa võrdub ringjoone diameetriga. Leida kõrgus.

42. Leida võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone raadius:

1) kui alus on 16 cm ja kõrgus on 4 cm;
2) kui haar on 12 dm ja kõrgus on 9 dm;
3) kui haar on 15 m ja alus on 18 m.

43. Võrdhaarse kolmnurga alus on 48 dm ja haar on 30 dm. Leida ümberringjoone ja siseringjoone raadiused ja keskpunktide vaheline kaugus.

44. Raadius on r, antud kaarele vastav kõõl on a. Avaldada kahekordsele kaarele vastav kõõl.

45. Ringjoone raadius on 8 dm; kõõl AB on 12 dm. Punktist A on joonestatud puutuja ja punktist B kõõl BC, mis on puutujaga paralleelne. Leida puutuja ja kõõlu BC vaheline kaugus.

46. Punkt A asetseb sirgjoonest MN kaugusel a. Antud raadiusega r on joonestatud ringjoon nii, et ta läbib punkti A ja puudutab sirget MN. Leida tekkinud puutepunkti ja antud punkti A vaheline kaugus.

§ 12. Korrapärased hulknurgad.

Tähistused: n on korrapärase hulknurga külgede arv; a_n — korrapärase kõõlhulknurga külg; b_n — korrapärase puutujahulknurga külg; k_n — korrapärase kõõlhulknurga apoteem; R — ümberringjoone raadius; r — siseringjoone raadius.

1. 1) Arvutada korrapärase 24-nurga ja korrapärase 16-nurga küljele toetuv kesknurk.

2) Missuguse korrapärase hulknurga küljele vastav kesknurk on 30°? 12°?

2. Tõestada, et korrapärase hulknurga küljele vastava kesknurga ja hulknurga sisenurga summa on 180°.

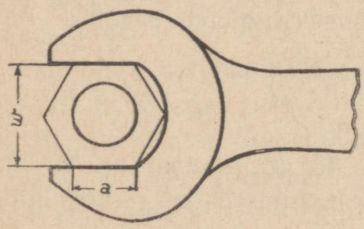
3. Leida korrapärase n-nurga nurk ($n = 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 25$).

4. 1) Mitu külge on korrapärasel hulknurgal, kui tema iga sisenurk on 135°? 150°?

2) Mitu külge on korrapärasel hulknurgal, kui tema iga välisnurk on 36°? 24°?

5. Rull, mille läbimõõt on 4 cm, on otsast tahutud ruudu kujuliseks. Leida kõige suurem pikkus, mis selle ruudu küljel võib olla.

6. Gaasijaotaja kruvi otsal on korrapärase kolmnurga kuju. Milline kõige suurem pikkus võib selle kolmnurga küljel olla, kui kruvi silindrilise osa diameeter on 2 cm?



Joon. 43.

7. Arvutada korrapärase kuuekandilise mutrivõtme ava laius w, kui mutri tahu laius $a = 2{,}5$ cm. Mutri ja võtme vaheline vaheruum on 0,5 mm (joon. 43).

8. 1) Ehitada ringisse korrapärane 12-nurk, 15-nurk.

2) Ehitada ringi ümber korrapärane 8-nurk, 10-nurk.

3) Antud külje a järgi ehitada korrapärane 8-nurk, 12-nurk.

9. 1) Tõestada, et kõõl, mis on raadiusega risti ja poolitab teda, on võrdne korrapärase kõõlkolmnurga küljega.

2) Näidata, et $k_6 = 0{,}5a_3$.

10. 1) Tõestada, et korrapärase kolmnurga apoteem on $\frac{1}{3}$ kõrgusest ja $\frac{1}{2}$ ümberringjoone raadiusest.

2) Korrapärase kolmnurga ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste vahe on m. Avaldada kolmnurga külg.

11. 1) Korrapärase hulknurga külg on a; selle hulknurga ümberringjoone raadius on R. Avaldada siseringjoone raadius.

2) Korrapärase hulknurga külg on a; tema siseringjoone raadius on r. Avaldada ümberringjoone raadius.

3) Korrapärase hulknurga ümberringjoone raadius on R ja siseringjoone raadius on r. Avaldada selle hulknurga külg.

12. Ringisse, mille raadius $R = 4$ cm, on ehitatud korrapärane 6-nurk. Leida tema külgede projektsioonid igal tema diagonaalil.

13. Tõestada, et

$$1)\ a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$2)\ k_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

14. Tõestada, et

$$1)\ a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$2)\ k_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

15. Antud külje $a_n = a$ järgi leida R, kui n on: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 12.

16. Antud a kaudu avaldada:

1) k_3; 2) k_4; 3) k_6.

17. Antud $k_n = k$ kaudu avaldada R, kui n on:

1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

18. Antud R kaudu avaldada:

1) b_3; 2) b_4; 3) b_6.

19. Antud ringi raadiuse R ja ringisse ehitatud korrapärase n-nurga külje a_n kaudu avaldada ringi ümber ehitatud korrapärase n-nurga külg b_n.

20. Ringisse, mille raadius $R = 50$ cm, ehitada korrapärane 7-nurk, kasutades seda, et korrapärase kõõlseitsenurga külg on ligikaudu võrdne korrapärase kõõlkolmnurga külje poolega.

21. Avaldada korrapärase 8-nurga diagonaalide pikkused:

1) antud raadiuse R kaudu;

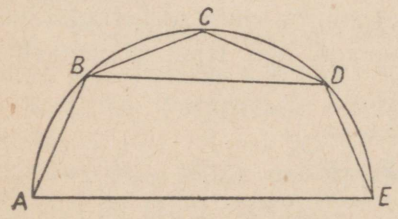
2) antud külje a kaudu.

22. Avaldada korrapärase 12-nurga diagonaalide pikkused:

1) antud raadiuse R kaudu;

2) antud külje a kaudu.

23. Ehitada korrapärane viisnurk tema diagonaali järgi.



Joon. 44.

24. Kõige lihtsama mansardkatuse ristlõige moodustab poole korrapärasest 8-nurgast (joon. 44). Leida katuse ülemine laius BD, 8-nurga külg ja mansardtoa $ABDE$ kõrgus. Antud on: $AE = 6$ m.

25. Ringisse ja tema ümber on ehitatud korrapärane n-nurk. Leida nende n-nurkade külgede suhe ($n = 3$; $n = 6$).

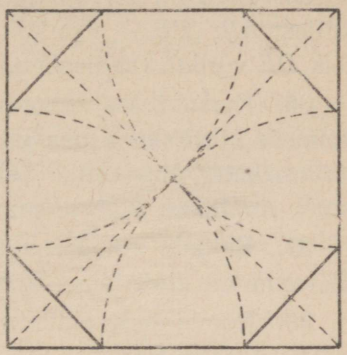
26. Ringisse, mille raadius on R, on ehitatud korrapärane n-nurk ja selle külgede keskpunktid on järgemööda ühendatud sirglõikudega. Avaldada uue n-nurga külg, kui n on: 1) 6; 2) 8.

27. 1) Korrapärases 8-nurgas, mille külg on a, on nelja külje keskpunktid, mis on võetud üle ühe, ühendatud sirglõikudega nii, et tekkis ruut. Avaldada ruudu külg.

2) Korrapärases 12-nurgas, mille külg on a, on üle ühe võetud külgede keskpunktid ühendatud sirglõikudega nii, et on saadud korrapärane 6-nurk. Avaldada kuusnurga külg.

28. Ehitada korrapärane 8-nurk, ära lõigates antud ruudu nurgad.

Et saada antud ruudust tema nurkade äralõikamise teel korrapärane 8-nurk, selleks lõikame ruudu külgi kaartega (joon. 45), mille raadiusteks on pool ruudu diagonaalist ja keskpunktideks on ruudu tipud.



Joon. 45.

Tõestada, et niiviisi saadud 8-nurk on korrapärane.

29. Antud korrapärane kolmnurk, mille külg on a, teisendada nurkade äralõikamise teel korrapäraseks 6-nurgaks ja avaldada selle külg a kaudu.

30. Ringisse, mille raadius on R, on ehitatud korrapärane hulknurk külje pikkusega a_n. Kahekordistada selle hulknurga külgede arv ja näidata, et

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

31. Ringisse ehitatud korrapärase kolmnurga külg on b. Avaldada ringi raadius ja ringisse ehitatud ruudu külg.

32. Ringisse, mille raadius on 4 dm, on ehitatud korrapärane kolmnurk, mille küljele on ehitatud ruut. Leida ruudu ümberringjoone raadius.

33. 1) Ringisse, mille raadius on R, on ehitatud korrapärane kolmnurk, mille sisse on joonestatud ring ja sellesse ringi on ehitatud ruut. Avaldada selle ruudu külg.

2) Korrapärase kolmnurga ümber, mille külg on a, on joonestatud ringjoon; selle ringjoone ümber on ehitatud ruut ja selle ruudu ümber — ringjoon. Avaldada ruudu ümber joonestatud ringjoone raadius.

34. 1) Kahe lõikuva ringjoone ühine kõõl a on ühel ringjoonel korrapärase kõõlkolmnurga küljeks, teisel ringjoonel aga korrapärase kõõlnelinurga küljeks. Avaldada ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus.

2) Kahe lõikuva ringjoone keskpunktid asetsevad ühel pool nende ühisest kõõlust, mille pikkus on a ja mis toetub ühe ringjoone 60°-sele kaarele, aga teise ringjoone 30°-sele kaarele. Avaldada keskpunktide vaheline kaugus.

35. ABC on korrapärane kõõlkolmnurk; AD on üks kolmandik küljest AB; BE — üks kolmandik küljest BC. Tõestada, et sirglõik DE võrdub raadiusega.

36. Korrapärase kolmnurga iga külg pikkusega a on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja kõigi külgede esimesed jaotuspunktid on omavahel ühendatud. Sel teel on saadud uus korrapärane kolmnurk. Avaldada selle kolmnurga siseringjoone raadius.

37. Ehitada antud ruudu sisse teine antud küljega ruut. Kas ülesanne on alati lahendatav?

38. Rombi sisse ehitada ruut, mille küljed on rombi diagonaalidega paralleelsed.

39. Kaks kongruentset ruutu küljega a asetsevad teineteise peal nii, et nende keskpunktid ühtivad ja üks ruut on teise suhtes pööratud 45° võrra. Avaldada sel teel moodustatud tähe ümbermõõt.

40. 1) Korrapärase viisnurga diagonaalid moodustavad omakorda korrapärase viisnurga. Tõestada see.

2) Kui korrapärase viisnurga külgi pikendada kuni lõikumiseni üksteisega, siis tekib võrdsete külgedega tähekujuline viisnurk (pentagramm). Tõestada see.

41. 1) Ringjoon, mille raadius on R, on jaotatud kuueks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud kõõludega üle ühe. Avaldada sel teel saadud kuusnurkse tähe külg.

2) Ringjoon, mille raadius on R, on jaotatud kaheksaks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud kõõludega üle ühe. Avaldada sel teel saadud kaheksanurkse tähe külg.

42. Antud raadiuse R kaudu avaldada kõõl, mis vastab kaarele suurusega 1) 135°; 2) 150°.

43. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed, kui tema nurgad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3?

44. Poolringjoone poolitamispunkt on ühendatud diameetri otspunktidega ja läbi ühenduslõikude keskpunktide on joonestatud kõõl. Kõõlu kumbki äärmine lõik on c. Avaldada ringi raadius c kaudu.

45. Segmendisse, mille kaar on 120° ja kõrgus h, on ehitatud ristkülik, mille alus on kõrgusest 4 korda suurem. Avaldada ristküliku kõrgus.

46. n kongruentset ringjoont, mis puudutavad üksteist, puudutavad ka antud ringjoont, mille raadius on R.

Avaldada nende ringjoonte raadius, kui n on: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

47. Antud sirglõik on poolitatud ja kummalegi poolele kui diameetrile on joonestatud ringjooned; sirglõigu ühest otspunktist on joonestatud puutujad ringjoonele, mis läbib teist otspunkti, ning teisest otspunktist puutujad ringjoonele, mis läbib esimest. Tõestada, et sirglõik, mis ühendab puutujate lõikepunkte, on võrdne ühe ringjoone sisse ehitatud ruudu küljega.

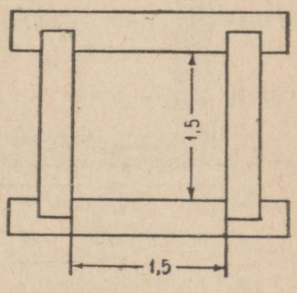
§ 13. Hulknurkade pindalad.

Ruut.

1. Arvutada joonisel 45 kujutatud teetruubi ristlõike pindala (mõõtmed on antud meetrites).

2. Raudtraat, mille ristlõike pindala on 1 mm², katkeb 40 kG koormusel. Missugusel koormusel katkeb raudkang, mille ristlõige on ruut külje pikkusega 24 mm?

3. Kahe ruudukujulise maatüki küljed on vastavalt 100 m ja 150 m. Kui pikk külg on niisugusel ruudukujulisel maatükil, mis on sama suur kui need kaks maatükki kokku?



Joon. 46.

4. 1) Avaldada ruudu pindala tema diagonaali l kaudu.

2) Avaldada ruudu pindala tema ümberringjoone raadiuse R kaudu.

3) Ringi ümber ja sisse on ehitatud ruut. Mitu korda on esimese ruudu pindala suurem teise ruudu pindalast?

5. 1) Kuidas muutub ruudu pindala, kui tema iga külge suurendada 3 korda? Vähendada 1,5 korda?

2) Kuidas peab muutma ruudu iga külge, et tema pindala suureneks 4 korda? Väheneks 25 korda?

6. Ruudukujulise maatüki plaani pindala (mastaap 1 : 10 000) on 552,25 cm². Leida maatüki pindala looduses.

Ristkülik.

7. Kerget tüüpi tank kaalub 6880 kG, tema roomikute laius on 0,35 m, maapinnaga kokkupuutuv roomiku osa on 2,05 m pikk (mõlemal poolel). Kui suur raskus tuleb roomiku tööpinna 1 dm²-le?

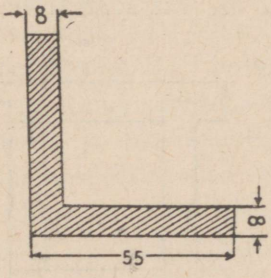
8. Tehase hoone-alusel maatükil on ristküliku kuju, mille mõõtmed on 82,5 m ja 26,5 m. Leida hoone-alune pindala aarides.

9. Ristkülikukujulise maatüki suurus on 400 ha; maatüki pikkus on 8 km. Leida maatüki piiri pikkus (ümbermõõt).

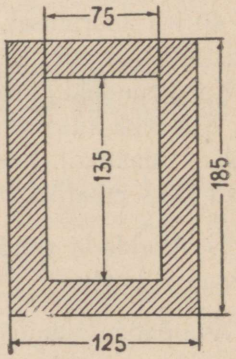
10. 1) Leida ristküliku küljed, kui nad suhtuvad nagu 4 : 9 ja pindala on 144 m².

2) Leida ristküliku küljed, kui tema ümbermõõt on 74 dm ja pindala on 3 m².

11. Ristküliku küljed on 72 m ja 8 m. Leida temaga pindvõrdse ruudu külg.



Joon. 47.



Joon. 48.

12. Leida nurkraua ristlõike pindala (joon. 47, mõõtmed on antud millimeetrites).

13. Leida joonisel 48 kujutatud toru ristlõike pindala (mõõtmed on antud millimeetrites).

14. Ristküliku diagonaal on 305 cm ja pindala on 37 128 cm². Leida selle ristküliku ümbermõõt.

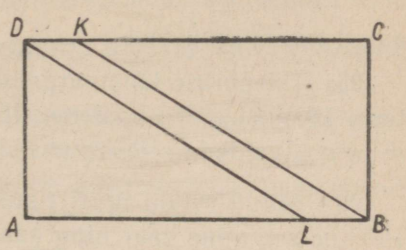
Rööpkülik.

15. Üle välja, millel on ristküliku $ABCD$ kuju (joon. 49), peab minema raudtee. On teada, et $AB = 125$ m, $BC = 72{,}5$ m, $AL = KC = 114{,}6$ m. Arvutada võõrandatava riba $BLDK$ pindala.

16. Rööpküliku pindala on 480 cm²; tema ümbermõõt 112 cm; suuremate külgede vaheline kaugus on 12 cm. Leida väiksemate külgede vaheline kaugus.

17. Avaldada rööpküliku pindala tema kahe kõrguse h_1 ja h_2 ning ümbermõõdu $2p$ järgi.

18. Avaldada rööpküliku pindala tema kahe külje ja nendevahelise nurga järgi: 1) a, b, 30°; 2) a, b, 45°; 3) a, b, 60°.



Joon. 49.

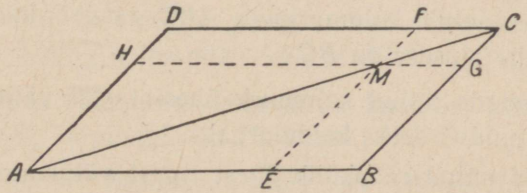
19. Rööpkülikul ja ristkülikul on vastavalt võrdsed küljed. Leida rööpküliku teravnurk, kui rööpküliku pindala on pool ristküliku pindalast.

20. Joonestada ruut ja romb nii, et nende ümbermõõdud oleksid võrdsed. Kumma kujundi pindala on suurem? Mispärast?

21. Leida rombi pindala, kui rombi kõrgus on 12 cm ja lühem diagonaal on 13 cm.

22. Rööpküliku $ABCD$ külg $AB = 37$ cm ja diagonaalide lõikepunktist küljele AD ehitatud ristsirge jaotab selle lõikudeks $AE = 26$ cm ja $ED = 14$ cm. Leida rööpküliku pindala.

23. 1) Rööpkülikus $ABCD$ (joon. 50) on joonestatud diagonaal AC ja sellel on võetud meelevaldne punkt M. Läbi punkti M on joonestatud rööpküliku külgedega paralleelsed sirged: $EF \| BC$ ja $GH \| CD$. Tõestada, et sel teel tekkinud rööpkülikud $DHMF$ ja $EBGM$, milledest diagonaal läbi ei lähe, on pindvõrdsed.



Joon. 50.

2) Rööpküliku küljed on $a = 8$ cm ja $b = 4$ cm. Teisendada ta niisuguseks pindvõrdseks rööpkülikuks, millel on üks nurk endine, aga alus on 6 cm.

24. Antud ruudu iga tipp on ühendatud külje keskpunktiga, mis asetseb kahe järgneva tipu vahel (lugedes tippe ühes ja samas järjekorras). Ühendussirged moodustavad üksteisega lõikudes seesmise ruudu. Tõestada (arvutamise teel), et selle pindala on $\frac{1}{5}$ antud ruudu pindalast.

25. Täisnurkse kolmnurga sisse on ehitatud ruut nii, et üks tema külg asetseb hüpotenuusil. Hüpotenuusi äärmised lõigud on m ja n. Avaldada selle ruudu pindala.

26. Antud ruudu igast tipust on joonestatud järgmise tipuni 120°-ne seesmine kaar ning kaarte lõikepunktid on omavahel ühendatud nii, et on tekkinud seesmine ruut. Leida ruutude pindalade suhe.

27. Hüpotenuusil võetud punktist on ehitatud ristlõigud mõlemale kaatetile. Avaldada ristlõikudest moodustatud ristküliku pindala, kui hüpotenuusipoolsed lõigud kaatetitel on m ja n.

28. Kolmnurga sisse, mille alus on 30 cm ja kõrgus on 10 cm, on ehitatud ristkülik pindalaga 63 cm². Arvutada selle ristküliku küljed.

Kolmnurk.

29. Õhu rõhk on 1,03 kG ruutsentimeetrile. Leida õhu rõhumine kolmnurksele pinnale, mille alus on 0,13 m ja kõrgus on 0,18 m.

30. Arvutada kolmnurga pindala, kui tema alus ja kõrgus on vastavalt:

1) 32 cm ja 18 cm; 2) 5 dm ja 4 m; 3) $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{20}$.

31. 1) Ehitada antud kolmnurgaga ABC pindvõrdne kolmnurk, jättes tema küljeks BC, kuid asendades nurga ABC antud nurgaga α.

2) Ehitada antud kolmnurgaga ABC pindvõrdne võrdhaarne kolmnurk, mille aluseks on BC.

32. 1) Jaotada antud kolmnurk ühest tipust väljuvate sirgete abil kolmeks pindvõrdseks kolmnurgaks.

2) Jaotada antud rööpkülik ühest tipust väljuvate sirgete abil neljaks pindvõrdseks osaks.

3) Jaotada antud rööpkülik ühest tipust väljuvate sirgete abil kolmeks pindvõrdseks osaks.

33. Avaldada kolmnurga pindala, teades, et tema kaks külge on a ja b ning nurk nende külgede vahel on:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

34. Kui kolmnurga kaks külge on 3 cm ja 8 cm, kas tema pindala võib siis olla: 1) 10 cm²; 2) 15 cm²; 3) 12 cm²?

35. 1) Arvutada täisnurkse kolmnurga pindala, kui hüpotenuus on 313 cm ja üks kaatet on 312 cm.
2) Täisnurkse kolmnurga pindala on 720 cm² ja kaatetid suhtuvad nagu 9 : 40. Arvutada hüpotenuusi pikkus.
3) Avaldada kaatetite a ja b kaudu hüpotenuusile joonestatud kõrgus.

36. Avaldada võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala tema hüpotenuusi c kaudu.

37. Arvutada võrdhaarse kolmnurga pindala, kui tema alus ja haar on vastavalt: 1) 56 cm ja 1 m; 2) b ja c; 3) 20 cm ja 11 cm.

38. Kolmnurga ABC küljel AB antud punktist K joonestada sirgjoon, mis poolitab kolmnurga pindala.

39. 1) Avaldada võrdkülgse kolmnurga pindala tema külje a kaudu.
2) Avaldada võrdkülgse kolmnurga külg tema pindala Q kaudu.
3) Avaldada võrdkülgse kolmnurga pindala tema kõrguse h kaudu.

40. 1) Avaldada korrapärase kolmnurga pindala tema ümberringjoone raadiuse R kaudu.
2) Avaldada korrapärase kolmnurga pindala tema siseringjoone raadiuse r kaudu.

41. Arvutada täisnurkse kolmnurga pindala, kui tema kõrgus jaotab hüpotenuusi lõikudeks pikkustega 32 cm ja 18 cm.

42. Arvutada kolmnurga pindala, kui tema kaks külge on 85 cm ja 60 cm ning kolmandale küljele ehitatud kõrgus on 36 cm.

43. Arvutada täisnurkse kolmnurga kaatetid, kui tema hüpotenuus on 73 cm ja pindala on 1320 cm².

44. Võrdhaarse kolmnurga haar on 10 cm ja pindala on 48 cm². Arvutada alus.

45. 1) Arvutada rombi pindala, kui tema diagonaalid on 72 cm ja 40 cm.

2) Leida rombi kõrgus, kui rombi diagonaalid on 16 m ja 12 m.

46. Määrata rombi külg, kui rombi diagonaalid suhtuvad nagu $m : n$ ja pindala on Q.

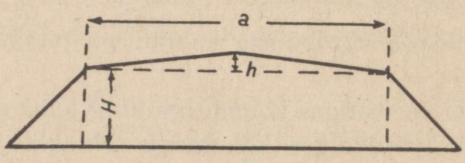
47. Kolmnurga aluse keskpunktist on joonestatud sirged, mis on paralleelsed külgedega. Tõestada, et sel teel saadud rööpküliku pindala on $\frac{1}{2}$ kolmnurga pindalast.

48. Kui mingi punkt rööpküliku sees ühendada tema tippudega, siis kahe vastaskolmnurga pindalade summa võrdub kahe teise vastaskolmnurga pindalade summaga. Tõestada see.

49. Teisendada kolmnurk temaga pindvõrdseks rööpkülikuks.

50. Teisendada antud hulknurk temaga pindvõrdseks hulknurgaks, mille külgede arv on ühe võrra väiksem kui antud hulknurga külgede arv.

51. Tee muldkeha laius $a = 6{,}74$ m (joon. 51), harja kõrgus (h) üle muldkeha moodustab 2% muldkeha laiusest, muldkeha kõrgus $H = 1{,}5$ m ja kaldad moodustavad horisontaaljoonega 45°-se nurga. Arvutada tee muldkeha ristlõike pindala.



Joon. 51.

52. Avaldada kolmnurga pindala, kui tema alus on a ja alusnurgad on 30° ja 45°.

53. Kongruentsed täisnurksed kolmnurgad ACB ja ADB asetsevad nende ühisest hüpotenuusist AB ühel pool; seejuures $AD = BC = 12$ cm ja $AC = BD = 16$ cm. Arvutada nende kolmnurkade ühise osa pindala.

54. Võrdkülgse kolmnurga külgedele on ehitatud ruudud ning nende vabad tipud on omavahel järgemööda ühendatud. Avaldada saadud kuusnurga pindala, kui antud kolmnurga külg on a.

55. Antud ruudu nurgad on ära lõigatud nii, et on tekkinud korrapärane kaheksanurk. Avaldada selle kaheksanurga pindala, kui antud ruudu külg on a.

56. Täisnurkse kolmnurga kaatetite suhe on 1,05; ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste vahe on 17 dm. Arvutada kolmnurga pindala.

57. Rombis, mille diagonaalid on 150 cm ja 200 cm, on nürinurga tipust joonestatud kõrgused ning nende otspunktid omavahel ühendatud. Arvutada sel teel tekkinud kolmnurga pindala.

58. AB ja CD on kaks paralleelset sirglõiku; M on sirgjoonte AD ja BC lõikepunkt. Sirglõik $AB = 8$ cm, sirglõik $CD = 12$ cm ja nendevaheline kaugus on 10 cm. Arvutada kolmnurkade ABM ja MCD pindalade summa.

Heroni valem.

59. Arvutada kolmnurga pindala tema kolme külje järgi: 1) 13; 14; 15. 2) 29; 25; 6. 3) 5; 6; 9. 4) 3; 5; 7. 5) 6; 5; 2,2. 6) 5; $8\frac{2}{3}$; $12\frac{1}{3}$. 7) 5; 4; $\sqrt{17}$. 8) 5; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$. 9) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

60. 1) Arvutada kolmnurga kõige väiksem kõrgus, kui tema küljed on 25 dm, 29 dm ja 36 dm.

2) Arvutada kolmnurga kõige suurem kõrgus, kui tema küljed on 15, 112 ja 113.

61. Arvutada kolmnurga küljed:

1) kui nad suhtuvad nagu $26 : 25 : 3$ ja pindala on 9 m^2;

2) kui küljed suhtuvad nagu $9 : 10 : 17$ ja pindala on 114 cm^2.

62. Arvutada nelinurga pindala, kui üks diagonaal on 17 cm, sellest diagonaalist ühel pool asetsevad küljed on 10 cm ja 21 cm ning samast diagonaalist teisel pool asetsevad küljed on 8 cm ja 15 cm.

63. Kahe teineteisega lõikuva ringjoone raadiused on 17 cm ja 39 cm ning keskpunktide vaheline kaugus on 44 cm. Arvutada ühise kõõlu pikkus.

64. Arvutada rööpküliku pindala, kui üks tema külgedest on 51 cm ja diagonaalid on 40 cm ja 74 cm.

65. Arvutada kolmnurga pindala, kui tema kaks külge on vastavalt 27 cm ja 29 cm ja kolmandale küljele tõmmatud mediaan on 26 cm.

66. Arvutada kolmnurga kolmas külg kahe antud külje ja pindala järgi:

1) $a = 17$; $b = 28$; $S = 210$;

2) $a = 7$; $b = 11$; $S = \sqrt{1440}$.

67. Kolmnurgast ABC on antud kolm külge: $AB = 26$, $BC = 30$ ja $AC = 28$. Arvutada see osa kolmnurga pindalast, mis on tipust B joonestatud kõrguse ja nurgapoolitaja vahel.

68. Kolmnurga küljed on 13 cm, 14 cm ja 15 cm. Kui suure raadiusega on ringjoon, mille keskpunkt asetseb keskmisel küljel ja mis puudutab kahte teist külge?

69. Antud kolmnurga tipud on ühendatud siseringjoone keskpunktiga. Need sirglõigud jaotavad kolmnurga pindala kolmeks osaks: 28 m², 60 m² ja 80 m². Arvutada antud kolmnurga küljed.

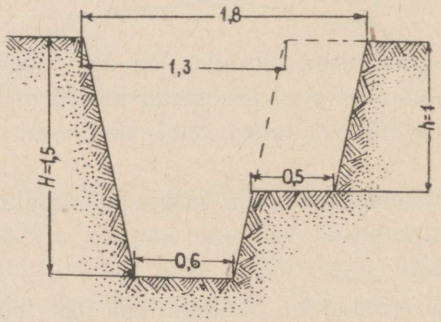
70. Nelinurgast $ABCD$ on antud küljed: $AB = 26$ cm, $BC = 30$ cm, $CD = 17$ cm, $AD = 25$ cm ja diagonaal $AC = 28$ cm. Arvutada nelinurga pindala ja diagonaal BD.

Trapetsi pindala.

71. 1) Trapetsi alused on 35 cm ja 29 cm; trapetsi pindala on 256 cm². Arvutada trapetsi kõrgus.

2) Trapetsi kõrgus on 8 cm ja pindala on 2 dm². Arvutada kesklõigu pikkus.

3) Trapetsi pindala on 144 cm²; alused suhtuvad nagu 4 : 5; kõrgus on 16 cm. Arvutada alused.



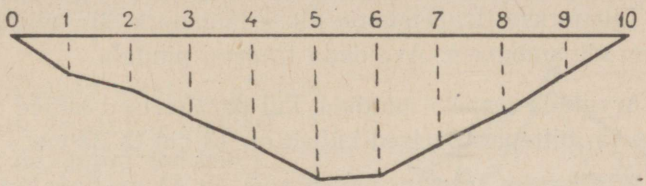
Joon. 52.

72. Arvutada laskepesa ristlõike pindala (joon. 52). Mõõtmed on antud meetrites.

73. Arvutada jõe ristlõike pindala, mis on antud joonisel 53 (jõe «veekeha» ristlõike pindala), tabelis antud sügavuste järgi.

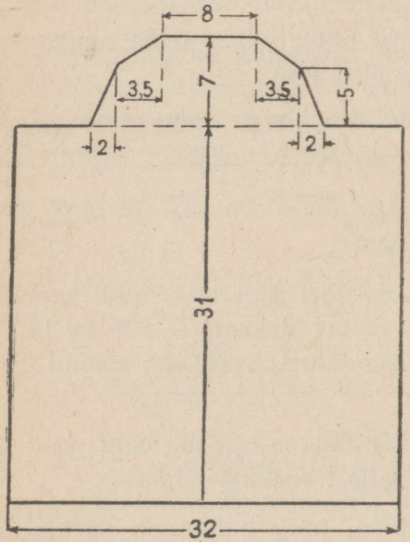
74. Joonisel 54 on kujutatud töölisklubi söögitoa plaan; mõõtmed on antud meetrites. Arvutada söögitoa pindala.

Kaugus kaldast meetrites	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sügavus meetrites	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,75	1,25	0,6	0

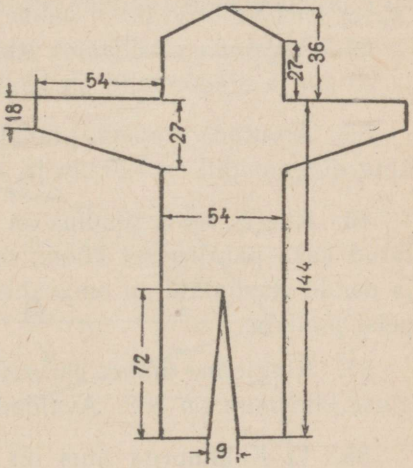


Joon. 53.

75. Sõjaväelise moondamisülikonna valmistamisel kasutatakse lõikemustrit, mis on kujutatud joonisel 55; mõõtmed on antud sentimeetrites. Arvutada lõike pindala.



Joon. 54.



Joon. 55.

76. 1) Trapetsi $ABCD$ pindala on poolitatud sirglõiguga EF, mis on paralleelne haaraga AB. Arvutada sirglõik AF, kui $AD = 28$ cm ja $BC = 12$ cm.

2) Diagonaal jaotab trapetsi pindala kaheks osaks suhtes 3 : 7. Missuguses suhtes jaotab kesklõik selle pindala (alates väiksema aluse poolt)?

77. Võrdhaarse trapetsi alused on 51 cm ja 69 cm ja haar on 41 cm. Arvutada pindala.

78. Arvutada võrdhaarse trapetsi pindala, kui alused on 42 cm ja 54 cm ja suurema aluse lähisnurk on 45°.

79. Täisnurkses trapetsis on aluse lähisnurk 30°, aluste summa m ja haarade summa n. Avaldada trapetsi pindala.

80. Arvutada trapetsi pindala, kui paralleelsed küljed on 60 cm ja 20 cm ja mitteparalleelsed küljed on 13 cm ja 37 cm.

81. Võrdhaarse trapetsi pikem alus on 44 m, haar on 17 m ja diagonaal on 39 m. Arvutada selle trapetsi pindala.

82. 1) Arvutada võrdhaarse trapetsi pindala, kui alused on 12 cm ja 20 cm ja diagonaalid on teineteisega risti.

2) Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui diagonaalid on teineteisega risti ja kõrgus on h.

83. Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui tema diagonaal on c ja moodustab suurema alusega nurga 45°.

84. Arvutada võrdhaarse trapetsi pindala, kui alused on 10 cm ja 26 cm ja diagonaalid on haaradega risti.

85. Arvutada trapetsi pindala, kui alused on 142 cm ja 89 cm ning diagonaalid on 120 cm ja 153 cm.

86. Ringis, mille raadius on R, on ühel pool keskpunkti joonestatud kaks paralleelset kõõlu, mis vastavad kaartele 60° ja 120°, ja nende otspunktid on omavahel ühendatud. Avaldada saadud trapetsi pindala.

87. Ringjoone ümber ehitatud võrdhaarse trapetsi haar on a ja aluse lähisnurk on 30°. Avaldada selle trapetsi pindala.

88. 1) Kolmnurga alus on 75 cm ning küljed on 65 cm ja 70 cm. Kõrgus on jaotatud suhtes 2 : 3 (alates tipust) ja läbi jaotuspunkti on joonestatud alusega paralleelne sirge. Arvutada sel teel tekkinud trapetsi pindala.

2) Trapetsi diagonaalid on 20 m ja 15 m; kõrgus on 12 m. Arvutada trapetsi pindala.

89. Võrdhaarse trapetsi alused ja haar suhtuvad nagu 10 : 4 : 5. Tema pindala on 112 cm^2. Leida trapetsi ümbermõõt.

Hulknurga pindala.

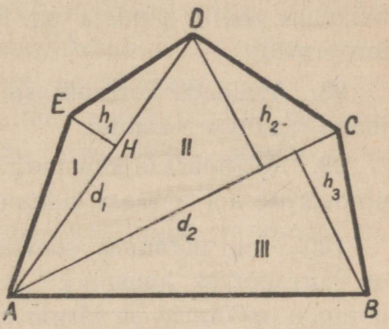
90. Joonisel 56 on antud maatüki plaan mastaabis 1 : 10 000. Plaanil on mõõdetud diagonaalid d_1 ja d_2 ja kõrgused h_1, h_2 ja h_3. Mõõtmise tulemused on: $d_1 = 44$ mm; $d_2 = 50$ mm; $h_1 = 7$ mm; $h_2 = 20{,}4$ mm; $h_3 = 21{,}6$ mm. Väljendada maatüki pindala hektarites.

91. Arvutada maatüki pindala, mille plaan on antud joonisel 57; mõõtmed on antud meetrites.

92. Avaldada nelinurga pindala, kui tema diagonaalid on k ja l ning nad

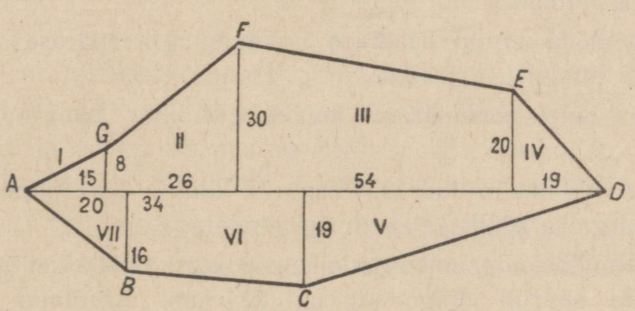
1) on teineteisega risti;

2) moodustavad nurga 30°.



Joon. 56.

93. Ristküliku külgedele on ristkülikust väljapoole ehitatud võrdkülgsed kolmnurgad ja nende vabad tipud on omavahel järgemööda ühendatud. Avaldada sel teel tekkinud nelinurga pindala, kui antud ristküliku küljed on a ja b.



Joon. 57.

94. Sirglõigul AE on võetud punkt C nii, et $AC = a$ ja $CE = b$. Sirglõikudele AC ja CE on sirglõigust AE ühele poole ehitatud võrdkülgsed kolmnurgad ABC ja CDE, mille tipud B ja D on ühendatud teineteisega. Avaldada nelinurga $ABDE$ pindala.

95. Olgu nelinurgas $ABCD$ külje AD keskpunkt M. Antud on: $MB \perp AB$; $MC \perp CD$; $AD = 50$ cm; $AB = 15$ cm; $CD = 7$ cm. Nõutakse arvutada pindala $ABCD$.

96. Ringjoonel raadiusega r on võetud järgemööda kaared: $AB = 30°$, $BC = 60°$, $CD = 90°$ ja $DE = 120°$ ning on moodustatud viisnurk $ABCDE$. Avaldada selle viisnurga pindala.

97. 1) Ringi ümber ehitatud hulknurga ümbermõõt on 60 cm ja pindala on 240 cm^2. Arvutada ringi raadius.

2) Ringjoone ümber, mille raadius on 25 cm, on ehitatud hulknurk, mille pindala on 20 dm^2. Arvutada selle hulknurga ümbermõõt.

98. Avaldada korrapärase kolmnurga pindala tema siseringjoone raadiuse r kaudu.

99. Korrapärase kuusnurga külg on 84 cm; arvutada temaga pindvõrdse korrapärase kolmnurga külg.

100. Toa põrandat soovitakse katta parketiga, mille plaadil on korrapärase kuusnurga kuju külje pikkusega 12 cm. Toa põranda mõõtmed on järgmised: pikkus 7,48 m ja laius 3,25 m. Kui palju vajatakse parketiplaate?

101. Toal pikkusega 5,6 m ja laiusega 4,5 m on rõdu, millel on 1,6 m küljega korrapärase kuusnurga poole kuju. Arvutada toa ja rõdu põranda pindala.

102. 1) Avaldada antud raadiuse R kaudu korrapärase kõõlkuusnurga pindala.

2) Avaldada antud raadiuse r kaudu korrapärase puutujakuusnurga pindala.

3) Avaldada korrapärase kuusnurga külg tema pindala S kaudu.

103. Avaldada antud raadiuse R kaudu korrapärase kõõlkaheksanurga ja kõõlkaksteistnurga pindala.

104. Raudbetoon-samba ristlõikel on korrapärase kaheksanurga kuju; selle suurim diagonaal on 224 mm. Arvutada ristlõike pindala.

105. Kaheksakandilise raua vastastahkude vaheline kaugus on 36 mm. Arvutada ristlõike pindala.

106. 1) Ringisse ehitatud korrapärase kaksteistnurga pindala Q kaudu avaldada samasse ringisse ehitatud korrapärase kuusnurga pindala.

2) Avaldada ringisse ehitatud ruudu pindala samasse ringisse ehitatud korrapärase kaheksanurga pindala Q kaudu.

107. 1) Ringjoon, mille raadius on R, on jaotatud kuueks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud omavahel üle ühe. Avaldada sel teel tekkinud kuuetipulise tähe pindala.

2) Ringjoon, mille raadius on R, on jaotatud kaheksaks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud omavahel üle ühe. Avaldada sel teel tekkinud kaheksatipulise tähe pindala.

Kolmnurkade ja hulknurkade pindalade võrdlemine.

108. 1) Tõestada, et iga sirgjoon, mis läbib rööpküliku sümmeetriakeskpunkti, jaotab rööpküliku kaheks pindvõrdseks osaks.

2) Joonestada läbi antud punkti sirgjoon, mis jaotab antud rööpküliku kaheks pindvõrdseks osaks.

109. Jaotada antud rööpkülik tema ühest tipust väljuvate sirgete abil n pindvõrdseks osaks, kui

1) $n = 6$;

2) $n = 5$.

110. Nelinurga ühe diagonaali keskpunkt on ühendatud teise diagonaali otspunktidega. Tõestada, et sel teel tekkinud murdjoon jaotab nelinurga kaheks pindvõrdseks osaks.

111. Tõestada, et kui mingi nelinurga üks diagonaal poolitab teise diagonaali, siis ta poolitab ka nelinurga pindala.

112. 1) Sirgjoon, mis läbib trapetsi paralleelsete külgede keskpunkte, jaotab trapetsi kaheks pindvõrdseks osaks. Tõestada see.

2) Sirglõigul, mis ühendab trapetsi aluste keskpunkte, on võetud punkt ja see on ühendatud trapetsi iga tipuga. Tõestada, et trapetsi haaradega külgnevad kolmnurgad on pindvõrdsed.

113. 1) Diagonaalid jaotavad trapetsi neljaks kolmnurgaks. Tõestada, et trapetsi haaradega külgnevad kolmnurgad on pindvõrdsed.

2) Kui trapetsi ühe haara AB keskpunkt M ühendada teise haara CD otspunktidega, siis sel teel tekkinud kolmnurga CMD pindala on pool trapetsi pindalast. Tõestada see.

114. Trapetsi diagonaal jaotab ta pindala suhtes 3 : 7. Missuguses suhtes jaguneb selle trapetsi pindala, kui lühema aluse otspunktist joonestada haaraga paralleelne sirge?

115. 1) Ehitada ruut, mis on pindvõrdne kahe antud ruudu summaga, millede küljed on vastavalt a ja b ($a = 5$ cm ja $b = 12$ cm).

2) Ehitada ruut, mille pindala on antud ruudu pindalast kolm korda suurem, kui antud ruudu külg on a.

116. Täisnurkse kolmnurga külgedele on ehitatud ruudud ja nende vabad tipud on omavahel ühendatud. Arvutada sel teel tekkinud kuusnurga pindala, kui antud kolmnurga kaatetid on a ja b.

117. Kuidas suhtuvad kahe kolmnurga pindalad P ja Q, kui nendel kolmnurkadel on üks nurk võrdne ja selle nurga lähisküljed ühes kolmnurgas on 12 dm ja 28 dm, teises kolmnurgas aga 21 dm ja 24 dm?

118. Kolmnurgas ABC on külge BA pikendatud pikkuse $AD = 0{,}2\ BA$ võrra ja külge BC pikkuse $CE = \frac{2}{3}\ BC$ võrra; punktid D ja E on omavahel ühendatud. Leida kolmnurkade ABC ja DBE pindalade suhe.

119. Tuletada kolmnurga nurgapoolitaja omadus pindalade võrdlemise teel.

120. Mitu korda suureneb kolmnurga pindala, kui tema iga külge suurendada 4 korda? 5 korda?

121. Kolmnurga külg on 5 dm. Kui suur on temaga sarnase, kaks korda suurema pindalaga kolmnurga vastav külg?

122. Kui suure (tipupoolse) osa pindalast lõikab kolmnurgast ära tema kesklõik?

123. Kolmnurga kõrgus on h. Kui kaugel tipust asetseb aluse paralleel, mis poolitab kolmnurga pindala?

124. 1) Kolmnurga külg on jaotatud suhtes $2:3:4$ (tipust aluse poole) ja jaotuspunktidest on joonestatud alusega paralleelsed sirged. Missuguses suhtes jaguneb kolmnurga pindala?

2) Läbi punkti E, mis jaotab kolmnurga ABC külje AB suhtes $m:n$, on joonestatud küljega BC paralleelne sirge. Missugune on äralõigatud kolmnurga ja ülejääva trapetsi pindalade suhe?

125. Kolmnurga alusega paralleelne sirge jaotab külje suhtes $5:3$ (alates tipust) ja kolmnurga pindala — osadeks, millede vahe on 56 cm^2. Arvutada kolmnurga pindala.

126. Kolmnurga alusega paralleelsed sirged jaotavad tema pindala (tipust aluse poole) suhtes $9:55:161$. Missuguses suhtes jagunevad küljed?

127. Missuguse osa korrapärase samanimelise puutujahulknurga pindalast moodustab korrapärase: 1) kõõlkolmnurga,

2) kõõlnelinurga, 3) kõõlkuusnurga pindala? (Lahendada küsimus ilma pindalasid endid arvutamata.)

128. Kolme üksteisega sarnase hulknurga pindalade summa on 232 dm² ja nende ümbermõõdud suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Arvutada iga hulknurga pindala.

129. Täisnurkse kolmnurga külgedele on ehitatud üksteisega sarnased hulknurgad, kusjuures kolmnurga küljed on nende hulknurkade vastavateks külgedeks. Tõestada, et hüpotenuusile ehitatud hulknurga pindala võrdub kaatetitele ehitatud hulknurkade pindalade summaga.

130. 1) Ehitada ruut, mis on pindvõrdne kahe antud ruudu pindalade vahega.

2) Ehitada ruut, mis on pindvõrdne n antud ruudu pindalade summaga.

131. Ehitada antud hulknurgaga pindvõrdne kolmnurk.

132. Antud on kahe ruudu külgede suhe ja üks neist ruutudest; ehitada teine ruut.

133. Rööpküliku iga külje keskpunkt on ühendatud järgmise külje otspunktiga, nii et tekib seesmine rööpkülik. Tõestada, et selle pindala on $\frac{1}{5}$ antud rööpküliku pindalast.

134. Kuidas suhtuvad trapetsi alused, kui trapets on pindvõrdne oma täienduskolmnurgaga?

135. Täisnurkse kolmnurga pindala on hüpotenuusi ristsirgega poolitatud. Leida selle sirge ja väiksema teravnurga tipu vaheline kaugus, kui pikem kaatet on 20 m.

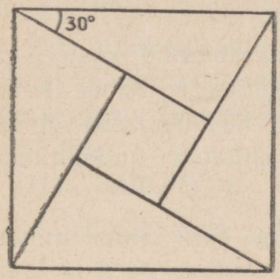
136. Täisnurkse kolmnurga kaatetid suhtuvad nagu 3 : 4 ja kõrgus jaotab selle kolmnurga pindala osadeks, millede vahe on 84 dm². Arvutada kolmnurga pindala.

137. 1) Kolmnurga ABC kolm mediaani lõikuvad punktis M. Tõestada, et kolmnurga AMB pindala on kolmandik kolmnurga ABC pindalast.

2) Kolm mediaani jaotavad kolmnurga pindala kuueks võrdseks osaks. Tõestada see.

138. Välisest punktist A on joonestatud ringjoone puutuja AB ja lõikaja ACD. Arvutada kolmnurga CBD pindala, kui $AC : AB = 2 : 3$ ja kolmnurga ABC pindala on 20 dm².

139. AB ja CD on kaks mittelõikuvat kõõlu, kusjuures kaar $AB = 120°$ ja kaar $CD = 90°$ ning M on kõõlude AD ja BC lõikepunkt. Arvutada pindalad AMB ja CMD, kui nende summa on 100 cm².



Joon. 58.

140. AB on ringi diameeter, BC ja AC on kõõlud, kusjuures kaar $BC = 60°$; D on diameetri pikenduse ja puutuja CD lõikepunkt. Leida pindalade DCB ja DCA suhe.

141. Ruudu iga külg on pööratud 30° võrra ruudu sissepoole, nagu näidatud joonisel 58. Leida antud ruudu ja pööratud külgedest moodustatud ruudu külgede suhe ja pindalade suhe.

142. $ABCD$ on antud ruut; E ja F on tema külgede CD ja AD keskpunktid ning M on sirgete BE ja FC lõikepunkt. Tõestada, et kolmnurga BMC pindala on $\frac{1}{5}$ ruudu pindalast.

143. Kolmnurgal ja tema sisse ehitatud rombil on ühine nurk. Kolmnurgas selle nurga lähisküljed suhtuvad nagu $m : n$. Leida rombi ja kolmnurga pindalade suhe.

§ 14. Kolmnurga mediaanide, nurgapoolitajate, ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste arvutamine.

Mediaanide arvutamine.

1. Kolmnurga küljed on a, b ja c. Näidata, et küljele c joonestatud mediaan

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

2. 1) Kolmnurga alus on 22 dm, küljed on 13 dm ja 19 dm. Arvutada aluse mediaan.

2) Arvutada kõik mediaanid kolmnurgas, millel $a = 2$, $b = 3$ ja $c = 4$.

3. Kolmnurga kaks külge on 11 ja 23 ja kolmanda külje mediaan on 10. Leida kolmas külg.

4. Kolmnurga üks külg on 26 dm ja selle külje mediaan on 16 dm. Arvutada selle kolmnurga teised küljed, kui nad suhtuvad nagu 3 : 5.

5. Võrdhaarse kolmnurga mediaanid on 15, 15 ja 18. Leida kolmnurga pindala.

6. Kolmnurga alus on 23; külgede mediaanid on 15 ja $22\frac{1}{2}$. Leida kolmas mediaan.

7. 1) Ehitada kolmnurk aluse ja aluse otspunktidest väljuvate mediaanide järgi.

2) Kolmnurga alus on 10 ja kahe teise külje mediaanid on 9 ja 12. Leida kolmnurga pindala.

8. 1) Ehitada kolmnurk kolme mediaani järgi.

2) Kolmnurga mediaanid on 9, 12 ja 15. Leida kolmnurga pindala.

Nurgapoolitaja.

9. Kolmnurga tipunurga poolitaja ruut võrdub mõlema külje korrutise ja aluse lõikude korrutise vahega. Tõestada see.

10. Arvutada kolmnurga ABC nurga A poolitaja, kui külgede pikkused on järgmised:

1) $a = 7, \quad b = 6, \quad c = 8;$
2) $a = 18, \quad b = 15, \quad c = 12;$
3) $a = 39, \quad b = 20, \quad c = 45.$

11. Kolmnurga kaks külge on 6 ja 12 ja nende külgede vaheline nurk on 120°. Arvutada selle nurga poolitaja pikkus.

12. Kolmnurga kahe antud külje ja nendevahelise nurga poolitaja järgi arvutada kolmanda külje lõigud:

$$b = 20; \; c = 45; \; b_A = 24.$$

Ümberringjoone ja siseringjoone raadius.

13. 1) Tõestada, et täisnurkse kolmnurga siseringjoone raadius on võrdne kaatetite summa ja hüpotenuusi poolvahega.

2) Kaatetid on 40 cm ja 42 cm. Arvutada ümberringjoone ja siseringjoone raadius.

14. Määrata ümberringjoone keskpunkti asukoht kolmnurga suhtes, kui on antud kolmnurga küljed (või nende suhted):

1) 5, 8, 10;
2) 8, 7, 5;
3) 80, 315, 325.

15. Tõestada, et igas kolmnurgas kahe külje korrutis võrdub ümberringjoone diameetri ja kolmandale küljele tõmmatud kõrguse korrutisega.

16. Kolmnurga pindala on S; tema ümbermõõt $a + b + c = 2p$. Tõestada, et

1) siseringjoone raadius $r = \frac{S}{p}$;

2) ümberringjoone raadius $R = \frac{abc}{4S}$.

17. Arvutada R ja r kolmnurgale, mille külgede pikkused on:

1) 13, 14, 15;
2) 15, 13, 4;
3) 35, 29, 8;
4) 4, 5, 7.

18. Võrdhaarse kolmnurga haar on 6 ja kõrgus on 4. Leida ümberringjoone raadius.

19. Ringisse, mille raadius on R, on ehitatud kolmnurk; üks tema nurkadest on

1) 30°;
2) 45°.

Leida selle nurga vastaskülg.

20. Tõestada, et võrdus

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

on õige.

21. Avaldada kolmnurga pindala tema ümberringjoone raadiuse R kaudu, kui selle kolmnurga kaks nurka on 45° ja 60°.

22. Arvutada täisnurkse kolmnurga kaatetid, kui nad suhtuvad nagu 20 : 21 ning ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste vahe on 17 cm.

23. Ringisse, mille raadius on R, on ehitatud ristkülik $ABCD$. Avaldada selle pindala raadiuse R kaudu, kui kaar AB on α kraadi, nimelt

1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.

§ 15. Ringjoone ja kaare pikkus. Ringi ja selle osade pindala.

Ringjoone ja kaare pikkus.

1. Arvutada ringjoone pikkus, kui raadius on 1) 10 m; 2) 15 m; 3) 35 cm.

2. Arvutada raadius, kui ringjoone pikkus on 1) 1 m; 2) 25 cm; 3) 4,75 dm.

3. Hammasratta diameeter on 0,66 m, ratta kahe hamba keskkohtade vaheline kaugus kaart mööda mõõtes on 34,5 mm. Mitu hammast on hammasrattal?

4. Rihmaratta läbimõõt on 1,4 m; ratas teeb 80 tiiru minutis. Arvutada ratta äärjoone punkti kiirus.

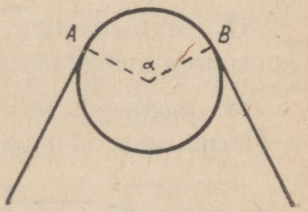
5. Antud raadiuse R kaudu avaldada kaare pikkus, kui kaar on: 45°; 2) 24°30′; 3) 5°14′15″.

6. Avaldada kaare raadius, kui tema pikkus on l ja kraadimõõt on

1) 135°; 2) 10°40′.

7. Rihmaratta ümbermõõt on 540 mm (joon. 59), rihm puudutab ratast 200 mm pikkusega kaart mööda. Arvutada rihma haardenurk (α) rattal.

8. Raudtee kurvi raadius on 1200 m; kaare pikkus on 450 m. Mitu kraadi on selles kaares?



Joon. 59.

9. 1) Ringjoon, mille raadius on 2 cm, on lahti painutatud niisugùseks kaareks, mille raadius on 5 cm. Arvutada seejuures tekkinud kesknurk.

2) 4 cm raadiusega kaar, millele vastab kesknurk 120°, on oma pikkuselt võrdne mingi ringjoone pikkusega. Leida selle ringjoone raadius.

3) Ringjoon, mille raadius on 6 cm, on lahti painutatud kaareks, millele vastab kesknurk 300°. Leida kaare raadius.

10. Arvutada kaare kraadide arv, kui on antud tema raadius R ja pikkus l:

1) $R = 10$; $l = 45$;
2) $R = 15$; $l = 6$.

11. Mitu kraadi ja minutit on kaares, mille pikkus võrdub raadiusega ($\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$)?

12. Antud kõõlu a kaudu avaldada temale vastava kaare pikkus, kui kaares on 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

13. Antud kaare pikkuse l kaudu avaldada temale vastava kõõlu pikkus, kui kaares on 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

14. Arvutada ringjoone raadius, kui ringjoon on oma diameetrist 107 cm võrra pikem.

15. 1) Kui palju pikeneb ringjoon, kui raadiust pikendada m võrra?

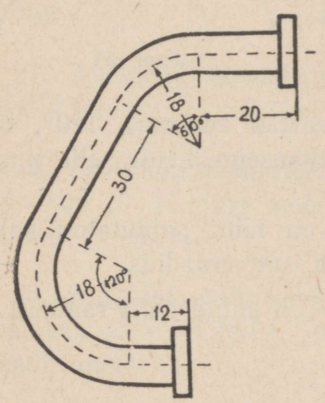
2) Kujutleme, et maakera ümber on ekvaatorit mööda tõmmatud võru ja et samal viisil on tõmmatud võru jalgpalli ümber tema suurringjoont mööda. Kujutleme edasi, et mõlemad võrud pikenevad 1 m võrra. Siis kumbki võru eemaldub keha pinnalt, mille ümber ta enne oli pingul, mingisugusele kaugusele. Kummal juhul see kaugus on suurem, kas maakeral või jalgpallil?

16. 1) Raudtoru seinte paksus on 6 mm ja väline ümbermõõt on 22 cm. Leida seesmise ringjoone pikkus.

2) Kahest kontsentrilisest ringjoonest üks on 167 cm ja teine on 117 cm pikk. Arvutada rõnga laius.

17. Arvutada ringjoone pikkus, kui ta on korrapärase kõõlkuusnurga ümbermõõdust 7 cm võrra suurem.

18. Segmendi kaar on 120° ja selle pikkus on l. Avaldada segmendi sisse ehitatud ringjoone pikkus.



Joon. 60.

19. Kaar ABC on 120°; tema otspunktidest on joonestatud puutujad kuni lõikumiseni teineteisega punktis D ja saadud kujundi $ABCD$ sisse on ehitatud ringjoon. Tõestada, et selle ringjoone pikkus on võrdne kaare ABC pikkusega.

20. Joonisel 60 on antud aurumasina kõvera toru kuju ja mõõtmed sentimeetrites. Leida tema pikkus. (Seda pikkust mõõdetakse keskmist kriipsjoont mööda.)

21. Leida niisuguse ringi raadius, et ümbermõõtu ja pindala väljendab üks ja sama arv.

22. Määrata relatiivne viga, mis tekib, kui (ringjoone ligikaudsel sirgestamisel) poolringjoone pikkuse $\frac{1}{2}C$ asemel võetakse $a_3 + a_4$.

23. Üks ringjoone ligikaudne sirgestamine seisab selles, et ringjoone pikkus asendatakse niisuguse täisnurkse kolmnurga ümbermõõduga, mille üks kaatet on $\frac{6}{5}$ diameetrist ja teine kaatet on $\frac{3}{5}$ diameetrist. Arvutada absoluutne viga.

Ringi pindala.

24. Arvutada ringi pindala, kui raadiuse pikkus on: 1) 10 m; 2) 4 dm; 3) 2,6 cm. (Võtta $\pi = 3{,}14$.)

25. Arvutada ringi raadius, kui ringi pindala on: 1) 2 cm²; 2) 50 m²; 3) 17 dm².

26. Hobune on seotud 10,5 m pikkuse nööriga vaia külge. Arvutada maatüki suurus, millelt hobune saab süüa rohtu. (Täpsusega kuni 0,01 m².)

27. Leida õhupumba kolvi ristlõike pindala, kui kolvi diameeter on 10 cm.

28. Pumba kolvi ristlõike pindala on 12,56 cm². Leida kolvi läbimõõt.

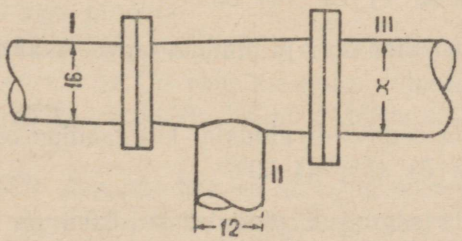
29. Puutüve ümbermõõt on 1,884 m. Kui suur on tema ristlõike pindala, kui ristlõikel on (ligikaudu) ringi kuju?

30. Kui suurt koormust kannatab kanepist köis, mille ristlõike ümbermõõt on 18 cm, kui lubatav koormus on 100 kG/cm²?

31. 1) Arvutada ringi pindala, kui ümbermõõt on 8 cm.

2) Arvutada ringjoone pikkus, kui ringi pindala on 18 cm².

32. 1) Toru III (joon. 61) läbilaskevõime on sama, mis torudel I ja II kokku. Määrata konstruktsiooni teel suurus x joonisel antud mõõtmete järgi.



Joon. 61.

2) Kaks toru, mille diameetrid on 6 cm ja 8 cm, peab asendama ühe toruga nii, et läbilaskevõime jääb endiseks. Leida selle toru diameeter.

33. Avaldada ringi pindala tema sisse ehitatud ruudu pindala F kaudu.

34. Arvutada ringi pindala, mis on 4,3 m² võrra väiksem tema ümber ehitatud ruudu pindalast.

35. Leida

1) korrapärase kolmnurga,

2) ruudu,

3) korrapärase kuusnurga

sise- ja ümberringi pindalade suhe.

Rõnga pindala.

36. Silindrilise püstkatla läbimõõt on 78 cm ja ta kaalub 752 kG; tal on põhjas ümmargune ava, mille läbimõõt on 36 cm. Katel toetub kogu oma põhjaga vundamendile. Arvutada, kui suur on katla raskusest tulenev rõhk vundamendi 1 cm²-le.

37. Kahe kontsentrilise ringjoone vahelises rõngas suurema ringjoone kõõl, mis puudutab väiksemat ringjoont, on a. Avaldada rõnga pindala.

38. Kuus ringi, mis on kongruentsed antud ringiga, puudutavad üksteist ja antud ringi. Need seitse ringi on ümbritsetud niisuguse rõngaga, mis on pindvõrdne nende summaga. Tõestada, et rõnga laius on võrdne antud ringide raadiusega.

Sektor ja segment.

39. Avaldada sektori pindala, kui tema raadius on r ja kaar on 1) 67°30′; 2) 15°45′.

40. Avaldada sektori raadius, kui tema pindala on q ja nurk on 1) 72°; 2) 36′.

41. Sektori raadius on r ja pindala on q. Avaldada tema nurga (või kaare) suurus.

42. Avaldada segmendi pindala, kui raadius on R ja kaar on 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30°.

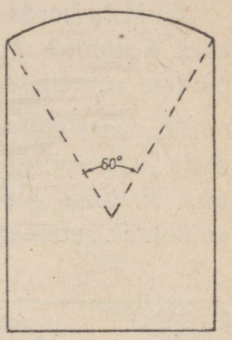
43. Avaldada segmendi pindala, kui kõõl on a ja segmendi kaar on 1) 120°; 2) 90°; 3) 60°.

Kaarte ja sirglõikudega piiratud kujundite pindala.

44. Arvutada akna pindala (joon. 62), kui aken on piiratud ristküliku kolme küljega ja ülalt ringjoone kaarega 60°; akna kõrgus kaare poolitamispunktist aluseni on 2,4 m ja laius on 1,6 m.

45. 1) Poolringjoon raadiusega r on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud diameetri ühe otspunktiga. Avaldada poolringi keskmise osa pindala.

2) Kaare CD otspunktid on diameetrist AB ühel pool ja võrdsetel kaugustel sellest. Avaldada kaarega CD ning kõõludega AC ja AD piiratud pindala, kui ringi pindala on Q ja kaar CD on $n°$.



Joon. 62.

46. Ringis raadiusega R on joonestatud keskpunktist ühel pool kaks paralleelset kõõlu, milledest ühele vastab kaar 120° ja teisele kaar 60°. Avaldada kõõlude vaheline osa ringi pindalast.

47. Kahe lõikuva ringjoone ühine kõõl on a ja toetub ühes ringis kaarele 60°, aga teises kaarele 90°. Avaldada ringide ühise osa pindala (kaks juhtu).

48. Ringi pindala on Q. Avaldada kõõlristküliku pindala, kui küljed suhtuvad nagu $m : n$.

49. Ringi sisse, mille raadius on R, on ehitatud ristkülik, mille pindala on pool ringi pindalast. Avaldada selle ristküliku küljed.

50. Ringi ümber, mille pindala on Q, on ehitatud 30°-se nurgaga romb. Avaldada selle rombi pindala.

51. Korrapärase kolmnurga pindala on Q. Selle kolmnurga ümber ja sisse on joonestatud ringjooned. Avaldada nende ringjoonte vahelise rõnga pindala.

52. AMB on kaar 120°; OA ja OB on raadiused; AC ja BC — puutujad; DME on CA ja CB vaheline kaar, mille keskpunktiks on C ja mis puudutab kaart AMB. Leida sektorite $CDME$ ja $OAMB$ pindalade suhe.

53. Kaare ACB otspunktidest on ehitatud puutujad, mis lõikuvad punktis D. Avaldada kahe puutuja ja kaare vaheline pindala, kui raadius on R ja kaar on

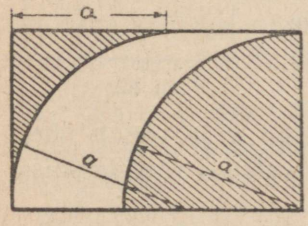
1) 90°; 2) 120°; 3) 60°.

54. Võrdkülgse kolmnurga keskpunkti ümber on joonestatud ringjoon, mis lõikub kolmnurga külgedega nii, et välimised kaared on 90°. Tähistades kolmnurga külje tähega a, avaldada pindala, mida piiravad seesmised kaared ja kolmnurga külgede keskmised lõigud.

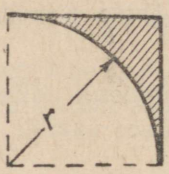
55. 1) Mitu korda suureneb ringi pindala, kui tema diameetrit suurendada 3 korda? Mitu korda väheneb pindala, kui raadius väheneb 5 korda?

2) Mitu korda peab ringi raadiust vähendama, et pindala väheneks 4 korda? Mitu korda peab diameetrit suurendama, et ringi pindala suureneks 5 korda?

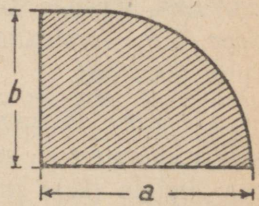
56. Kas võib veevärgi toru, mille läbimõõt on 50 mm, asendada kahe toruga, kumbki läbimõõduga 25 mm? Kas ühe jämeda toru ristlõike pindala on võrdne kahe peenema toru ristlõigete pindalade summaga?



Joon. 63.



Joon. 64.



Joon. 65.

57. Arvutada joonisel 63 antud ristküliku pindalast viirutatud osa.

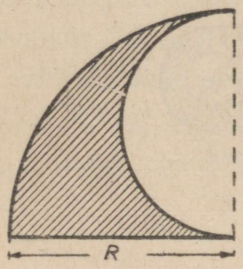
58. Avaldada antud mõõtmete kaudu joonistel 64—67 viirutatud kujundite pindalad.

59. Kaks kongruentset poolringi on teineteise peale pandud nii, et nende diameetrid on paralleelsed ja nende poolringjooned läbivad teineteise keskpunkti. Avaldada poolringide ühise osa pindala nende raadiuse R kaudu.

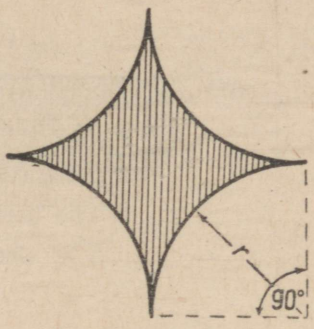
60. Ruudu igale küljele, mis on võetud diameetriks, on joonestatud poolringjoon ruudu sees. Avaldada saadud roseti pindala, kui ruudu külg on a.

61. Rombisse on joonestatud poolringjooned, kusjuures nende diameetriteks on rombi küljed. Avaldada saadud roseti pindala, kui rombi diagonaalid on a ja b.

62. Diameeter on jaotatud võrdseteks osadeks: läbi diameetri kummagi otspunkti on joonestatud igasse jaotuspunktisse poolringjoon, kusjuures ühte otspunkti läbivad poolringjooned on diameetrist ühel pool, teist otspunkti läbivad poolringjooned teisel pool. Tõestada, et saadud kõverjooned jaotavad ringi pindvõrdseteks osadeks ja et iga osa ümbermõõt on võrdne ringi ümbermõõduga.

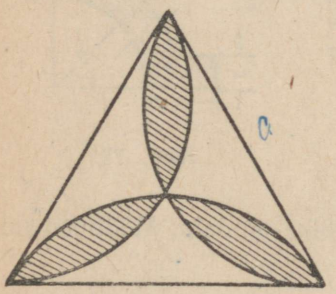


Joon. 66.

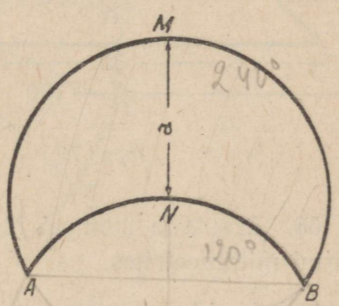


Joon. 67.

63. Võrdkülgses kolmnurgas on joonestatud iga kahe tipu vahelised kaared, mis läbivad kolmnurga keskpunkti (joon. 68). Kolmnurga külg on *a*. Avaldada saadud roseti pindala.



Joon. 68.



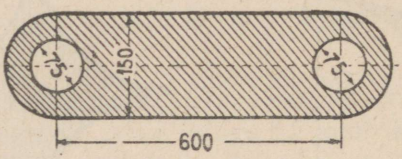
Joon. 69.

64. Punktide *A* ja *B* vahele on joonestatud kaks kaart, mis oma kumerusega on pööratud ühele poole: kaar *AMB* on 240° ja kaar *ANB* on 120° (joon. 69). Nende kaarte poolitamispunktide vaheline kaugus on *a*. Arvutada kuusirbi pindala.

65. *AB* ja *CD* on ringis kaks teineteisega ristuvat diameetrit. Punkti *D* kui kespunkti ümber on joonestatud kaar *AMB* raa-

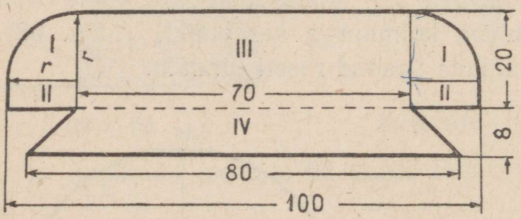
diusega DA. Tõestada, et kuusirp $AMBC$ on võrdpindne kolmnurgaga ABD.

66. Poolringjoone punktist C on ehitatud tema diameetrile AB ristlõik CD ning lõikudele AD ja DB on joonestatud uued poolringjooned ühele poole antud poolringjoonega. Tõestada, et kolme poolringjoone vaheline pindala on võrdne ringi pindalaga, mille diameetriks on CD.

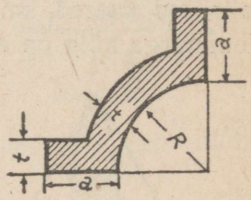


Joon. 70.

67. Arvutada viirutatud kujundi pindala joonisel 70. Mõõtmed on antud millimeetrites.



Joon. 71.



Joon. 72.

68. Arvutada joonisel 71 kujutatud lõike pindala. Mõõtmed on antud millimeetrites.

69. Avaldada vormraua ristlõike pindala, kasutades joonisel 72 antud andmeid.

70. Kahe paralleelse kõõlu pikkused on 14 m ja 40 m ning nendevaheline kaugus on 39 m. Arvutada ringi pindala.

71. Avaldada antud sektorisse ehitatud ringi raadius, kui sektori raadius on R ja sektori kaar on:

1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

§ 16. Algebra rakendamine geomeetrias. Jaotamine kuldlõikes.

Valemite ehitamine.

1. 1) Ehitada sirglõigud, mille pikkusteks on $\sqrt{6}$ ja $\sqrt{7}$.

2) Joonisel 73 on antud:

$OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HK = KL =$ $= 1$, kusjuures

$AB \perp AO$, $BC \perp BO$, $CD \perp CO$ jne.

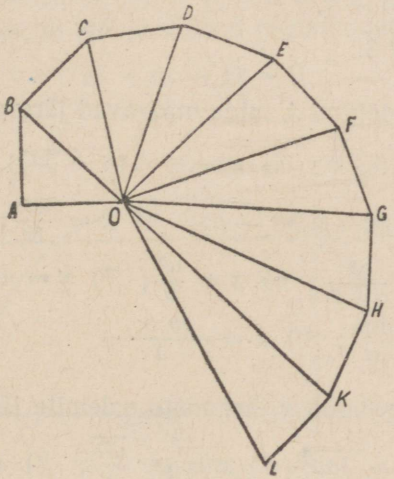
Arvutada OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OK, OL.

3) Ehitada sirglõigud, mille pikkused on:

$\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$.

2. Ehitada kolmnurk, mille küljed on:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{7}$.



Joon. 73.

3. Nimetada iga alljärgneva avaldise dimensioon, kui iga täht, peale tähe π, tähendab sirglõigu pikkust:

1) $3{,}5a$; 2) $2\pi R$; 3) $R\sqrt{3}$;

4) $\frac{bh}{2}$; 5) abc; 6) $\pi r^2 h$; 7) $\frac{abc}{d}$;

8) $\frac{3a}{2b + c - 4d}$; 9) $\sqrt{ab}$;

10) $0{,}5\pi D$; 11) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

12) $\sqrt[3]{a^2h}$; 13) $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$;

14) $2\pi R^2 + 2\pi RH$; 15) $\frac{\pi D^2 H}{4}$;

16) $\frac{(a+b)h}{2}$; 17) $\frac{4}{3}\pi R^3$;

18) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Missugused alljärgnevatest valemitest ei ole homogeensed:

1) $x = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{d} - 3a$; 2) $x = \sqrt{c - 2}$; 3) $x^2 = \frac{a^3 - b^3}{a + b}$;

4) $x = 2$; 5) $x = a + bc^2$; 6) $x = \frac{a}{b}$?

5. Ehitada kolmnurk külgedega

$a = 2 + \sqrt{3}$,

$b = \sqrt{3} - 1$,

$c = 2\sqrt{3}$.

6. Ehitada sirglõigud x, mida määravad järgmised valemid:

1) $x = 3\frac{1}{2}a$; 2) $x = a - (b + 3d)$;

3) $x = 3c - (2m - n)$; 4) $x = \frac{2ab}{3c}$;

5) $x = \frac{ab}{c + d}$; 6) $x = \frac{a^2}{b}$; 7) $x = \pi r$;

8) $x = \frac{pqr}{st}$; 9) $x = \frac{ab}{c - d}$.

7. Ehitada sirglõigud x järgmiste valemite järgi:

1) $x = \sqrt{3ab}$; 2) $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$; 3) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$;

4) $x = \sqrt{4a^2 - b^2}$; 5) $x = \sqrt{b^2 + 3c^2}$;

6) $x = a\sqrt{\frac{a + c}{b + d}}$.

Kujundite ehitamine.

8. Ehitada ruut, mis on pindvõrdne antud võrdkülgse kolmnurgaga, mille külje pikkus on a.

9. Ehitada ring, mille pindala on antud ringi pindalast kaks korda suurem, kui antud ringi raadius on R.

10. Antud ringisse, mille raadius on R, joonestada kontsentriline ringjoon, mis poolitab tema pindala.

11. Ehitada ruut, mis on pindvõrdne $\frac{3}{5}$-ga rööpkülikust, mille külg on a ja sellele küljele tõmmatud kõrgus on h.

12. Ehitada ring, mis on pindvõrdne kahe antud kontsentrilise ringjoone vahelise rõngaga, kui antud ringjoonte raadiused on R ja r.

13. Antud aluse a ja selle 30°-se lähisnurga järgi ehitada kolmnurk, mis on pindvõrdne antud kolmnurgaga, mille alus on b ja kõrgus on h.

Ruutvõrrandi lahendite ehitamine.

14. Ehitada ruutvõrrandite

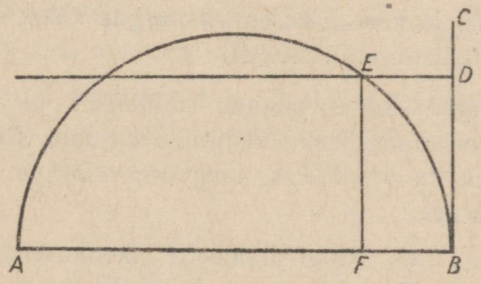
$$x^2 \pm px \pm q^2 = 0$$

lahendid.

15. 1) Sirglõigule AB (joon. 74) kui diameetrile on joonestatud poolringjoon. Antud on $AB = p$; $BC \perp AB$; $BD = q$; $DE \parallel AB$; $EF \perp AB$. Tõestada, et AF ja FB on ruutvõrrandi

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

lahenditeks.



Joon. 74.

2) Kasutada eespool vaadeldud konstruktsiooni võrrandi

$$x^2 - 6{,}5x + 4 = 0$$

lahendite ehitamiseks võrrandit arvutamise teel mitte lahendades.

3) Miks selle võtte kasutamine võrrandi

$$x^2 - 2{,}5x + 9 = 0$$

korral ei anna tulemusi?

Kuldlõige.

16. Jaotada antud sirglõik a kuldlõikes, s. o. jaotada antud sirglõik kaheks niisuguseks osaks, et suurem osa oleks antud sirglõigu ja väiksema osa keskmiseks võrdeliseks.

17. 1) Tõestada, et korrapärase kõõlkümmenurga külg on võrdne raadiuse suurema osaga, mis tekib raadiuse jaotamisel kuldlõikes.

2) Avaldada a_{10} antud raadiuse R kaudu.

18. Kui mingi lõik jaotada kuldlõikes, siis suurem osa on ligikaudu $\frac{5}{8}$ tervest lõigust. Kontrollida seda ja määrata niisuguse lahendi täpsus.

19. 1) Määrata sirglõigu kuldlõikes jaotamisel tekkiv suurem osa, kui väiksem osa on b.

2) Kui kuldlõikes jaotatud sirglõigu väiksem osa paigutada suuremale osale nii, et ühed otspunktid ühtivad, siis suurem osa jaguneb kuldlõikes. Tõestada see.

20. Ringjoone punktist diameetrile tõmmatud ristlõik jaotab diameetri kuldlõikes. Ringjoone raadius on r. Leida ristlõigu pikkus.

21. Tõestada, et korrapärases viisnurgas kaks lõikuvat diagonaali jaotavad teineteise kuldlõikes.

22. Kui ringi raadius jaotada kuldlõikes ja raadiuse suurema osaga joonestada kontsentriline ringjoon, siis antud ringi pindala jaguneb ka kuldlõikes, kusjuures rõngas on suuremaks osaks. Tõestada see.

Algebralise meetodi rakendamine.

23. Ringi diameetri pikendusel leida niisugune punkt, millest antud ringile joonestatud puutuja võrdub diameetriga. Antud ringi raadius on r.

24. Antud poolringisse ehitada ruut.

25. Antud on kolmnurk alusega a ja kõrgusega h. Ehitada selle kolmnurga sisse ristkülik, millel on antud ümbermõõt $2p$.

26. Poolitada antud kolmnurk sirgega, mis on alusega paralleelne.

27. Poolitada kolmnurga pindala sirgega, mis on alusega risti.

28. Antud rombisse ehitada ristkülik, mille küljed on rombi diagonaalidega paralleelsed ja mille pindala on $\frac{1}{3}$ rombi pindalast.

29. Antud ruudusse ehitada võrdkülgne kolmnurk nii, et neil üks tipp on ühine.

30. Antud ruudusse, mille külg on a, ehitada teine ruut, mille külg on b.

31. Ehitada ringjoon, mis puudutab antud ringjoont, mille raadius on r, ja antud sirgjoont sellel antud punktis.

32. Antud on kaks ristkülikut. Ehitada kolmas niisugune ristkülik, mille ümbermõõt on võrdne ühe antud ristküliku ümbermõõduga ja pindala on võrdne teise antud ristküliku pindalaga.

33. Antud kolmnurgasse ehitada ristkülik, mille alus ja kõrgus suhtuvad nagu $m : n$.

34. Rööpküliku $ABCD$ külg $AB = a$ ja $BC = b$. Joonestada sirge EF nii, et ta lõikaks ära rööpküliku $ABEF$, mis oleks sarnane rööpkülikuga $ABCD$.

35. Rööpküliku $ABCD$ külg $AB = a$ ja $BC = b$. Joonestada küljega AB paralleelne sirge EF nii, et ta jaotab antud rööpküliku kaheks teineteisega sarnaseks rööpkülikuks.

36. Ristküliku $ABCD$ nurkadesse A ja C ehitada kaks kongruentset ringjoont, mis puudutavad teineteist.

37. Läbi antud punktide A ja B ehitada ringjoon, mis antud sirgest lõikab ära kõõlu, millel on antud pikkus m.

Vastused.

§ 1.

2. 14 m. 3. 9,10 m. 4. 7 m. 5. 1 m. 8. 30 cm. 9. 5,5 m. 10. a = = 4,25 cm, b = 2,75 cm. 11. 0,6 m. 12. $AB : BC = 1 : (m-1) = 1 : 4$. 13. 8,1 m. 14. 96 m. 17. 1) Jah; 2) jah; 3) ei. 18. 1) 3; 2) 6; 10; 190; $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2.

6. 1) 124°33′; 2) 144°9′15″; 3) 162°1′55″. 8. 1) 47°49′30″; 2) 41°17′30″; 3) 84°48′42″. 9. 1) 20°; 2) 55°37′; 3) 67°17′22″. 12. 1) 178°30′; 2) 69°35′; 3) 166°37′30″. 14. 1) 31°5′; 2) 73°52′30″; 3) 24°35′27″,5; 4) 20°7′35″. 16. 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $2\frac{3}{4}$; 3) 0,7. 17. $1\frac{3}{7}d$. 18. $1\frac{5}{7}d$. 20. Pikendada AB või CB üle punkti B. 21. 36° ja 144°. 22. $\frac{8}{9}d$ ja $1\frac{1}{9}d$. 23. 54°. 24. Jah. 25. Jah. 26. $\frac{3}{16}d$. 28. 72° ja 144°. 29. $\frac{1}{3}d$; $\frac{4}{9}d$; $\frac{5}{9}d$; $\frac{2}{3}d$. 30. 36°. 31. 20°; 22°30′. 32. $1\frac{8}{11}d$. 33. $\frac{4}{15}d$; $\frac{8}{51}d$; $1\frac{1}{15}d$; $2\frac{2}{15}d$. 34. $1\frac{2}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $1\frac{2}{5}d$. 36. 70°. 37. $1\frac{5}{8}d$.

§ 3.

2. 10 m. 7. *Näpunäide.* Esiteks tõestada kolmnurkade DBE ja DGF kongruentsus. 9. Võrdkülgne. 11. 1) Võib saada kas kaks kolmnurka, ühe kolmnurga või mitte ühtegi. 13. 1) Jah. 2) Ei. 3) Ei. 14. 1) Ei. 2) Jah. 15. 2 m. 16. 0,3 m. 17. 10 m. 18. 10 cm, 10 cm, 1 cm. 19. *Näpunäide.* Rakendada teoreemi $a<b+c$, lisada võrratuse mõlemale poolele a. 20. *Näpunäide.* Kolmnurga iga külg on väiksem kui sirglõikude summa, mis ühendavad võetud punkti selle külje otspunktidega. 21. 13 m. 22. 15 m. 23. 10 cm. 24. 8 m. 29. Tee peab läbima punktide B ja C vahelise sirglõigu keskpunkti. 30. *Näpunäide.* Ehitada ühele antud punktidest sümmeetriline punkt AB suhtes ja ühendada see teise antud punktiga. 32. Kolmnurga sees üksnes teravnurksel kolmnurgal. 33. *Näpunäide.* Ehitada ringjoon keskpunktiga M ja raadiusega a ning nurgapoolitaja. Punkte võib olla kas kaks, üks või mitte ühtegi. 34. *Näpunäide.* Joonestada vastasnurga poolitaja. 36. *Näpunäide.* 1) Ehitada nurga A poolitaja ja BC keskristsirge. 2) Joonestada ringjoon keskpunktiga C ja raadiusega CB, mis lõikub nurga haaradega. Ülesandel võib olla kas üks,

kaks või kolm lahendit. 3) Ehitada tipule A sümmeetriline punkt telje BC suhtes. **37.** *Näpunäide.* Nurga teisele haarale paigutada sirglõik $AD = l$ ja ehitada BD keskristsirge. **38.** 8 m, 20 m, 16 m, 32 m. **39.** Ei. **41.** 10 m. **42.** 1) 2; 2) 7; 3) $n-3$. **43.** 1) 4; 2) 6; 3) $n-2$. **44.** 1) 5; 2) 35; 3) $\frac{(n-3)n}{2}$. **45.** $n = \frac{3m}{m-1}$; 6; 4; juhtum, mis ei ole võimalik. **46.** $n = 2m + 3$; 4; 5; 7; 8.

§ 4.

1. 72° ja 108°. **2.** $\frac{11}{16}d$. **3.** $1\frac{2}{7}d$. **4.** Suurendada $1\frac{1}{16}d$ võrra. **5.** $\frac{5}{8}d$. **6.** 43°; 137° ja 137°. **7.** 135° ja 45°. **8.** 36° ja 144°. **9.** 50° või 130°. **10.** $\frac{11}{24}d$. **11.** 30°; 60°; 90°. **12.** $\frac{14}{19}d$. **13.** 44°59′30″. **14.** 31°40′. **15.** 30°; 17°30′; 40°; 45°. **16.** 37°29′46″,5. **17.** 38°34′. **18.** $\frac{5}{14}d$. **19.** $\frac{8}{9}d$. **20.** 15°. **21.** 30°. **22.** $\frac{4}{7}d$; $\frac{4}{7}d$; $\frac{6}{7}d$. **23.** 7,3 m. **24.** 1) 18 cm; 2) 8 cm. **25.** *Näpunäide.* Antud kolmnurk on pool võrdkülgsest kolmnurgast. **26.** *Näpunäide.* Pikendada kaatetit üle täisnurga tipu, paigutada pikendusele selle kaatetiga võrdne sirglõik, ühendada teravnurga tipuga. **28.** 1,2 m. **29.** $A = \frac{4}{9}d$; $B = \frac{2}{3}d$; $C = \frac{8}{9}d$. **30.** 60°. **31.** $\frac{5}{6}d$. **32.** $1\frac{3}{8}d$; $\frac{5}{16}d$; $\frac{5}{16}d$. **34.** $\frac{2}{3}d$. **35.** *Näpunäide.* Rakendada teoreeme: 1) võrdhaarse kolmnurga alusnurkadest ja 2) põiknurkadest paralleelide lõikamisel. **36.** 90°. **37.** 135°. **38.** $\frac{2}{3}d$. **39.** $\frac{d}{2}$. **40.** $\frac{7}{15}d$; $\frac{7}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$. **41.** 1) $\frac{4}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $\frac{3}{5}d$. 2) $1\frac{1}{5}d$; $\frac{2}{5}d$; $\frac{2}{5}d$. **42.** *Näpunäide.* Pikendada mediaani tema enda pikkuse võrra. **44.** *Näpunäide.* Arvutada nurgad CAD ja $CAE = BAD$. **45.** $1\frac{5}{9}d$. **46.** *Näpunäide.* Arvutada tekkinud nurgad. **47.** $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$; $\angle DBE = d + \frac{1}{2}\angle B$. **48.** $1\frac{1}{12}d$. **49.** $\frac{4}{15}d$; $\frac{4}{15}d$; $1\frac{7}{15}d$. **50.** $\frac{11}{17}d$. **51.** $\frac{7}{9}d$. **52.** 1) $10d$; 2) $16d$; 3) $46d$. **53.** 54°; 81°; 108°; 135°; 162°. **54.** Suureneb $10d$ võrra. **55.** 1) 17; 2) 26; 3) ei ole võimalik. **56.** Nelinurgas. **57.** 13. **58.** $2m + 2$. **59.** $1\frac{4}{11}d$; $1\frac{10}{11}d$; $\frac{6}{11}d$; $\frac{2}{11}d$.

§ 5.

1. $1\frac{4}{7}d$; $\frac{3}{7}d$; $1\frac{4}{7}d$. **2.** $\frac{19}{22}d$; $1\frac{3}{22}d$. **3.** $BC = DA = 6$ cm; $CD = 9$ cm. **4.** 0,6 m; 0,8 m. **5.** $BE = 9$ cm; $EC = 6$ cm. **6.** Kahe paari võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik. **7.** 3 cm; 2 cm; 3 cm. **8.** 1) Ei; 2) ei; 3) jah. **9.** *Näpu-*

näide. Tõestada, et seesmised põiknurgad on võrdsed. **10.** Võib; kaks haarapidi külgnevat kongruentset võrdhaarset kolmnurka. **12.** 4,8 m. **13.** $AD = BC = 1$ m; $AB = BD = CD = 0{,}9$ m. **16.** 10 dm. **17.** $\frac{6}{11}d$; $1\frac{5}{11}d$. **20.** $\frac{4}{5}d$. **21.** $\frac{5}{9}d$. **22.** 1) Niisugune punkt on olemas ainult ruudul; 2) jah. **23.** 10 cm ja 18 cm. **24.** 1,2 m. **25.** 4 m ja 8 m. **26.** 45°. **27.** 12 cm. **28.** 25 cm ja 10 cm või 18,75 cm ja 7,5 cm. **29.** 8 m. **36.** 120° ja 60°. **38.** $\frac{14}{17}d$ ja $1\frac{3}{17}d$. **39.** 80° ja 100°. **40.** 60° ja 120°. **41.** 150°. **42.** 1) Ülesandel ei ole lahendit. **45.** 4 m. **47.** 1 m. **48.** 2 m. **49.** 2 m. **50.** 2) 2 cm. **51.** 4 m ja 8 m. **53.** $2\frac{1}{2}$ m. **54.** 4 cm, 5 cm, 6 cm. **55.** 6 cm. **56.** 2,4 m, 3,2 m, 4,8 m. **57.** 3 dm. *Näpunäide.* Joonestada läbi punkti B sirgele MN paralleel ja sellele ristsirged punktidest A ja O. **58.** 3 dm. **59.** 4 cm, 5 cm, 1 cm. **61.** 16 dm. **62.** 13 cm, 16 cm, 19 cm, 22 cm, 25 cm. *Näpunäide.* Esiteks tõestada (rakendades abikonstruktsiooni), et saadud joonisel paralleelsed lõigud kasvavad ühtlaselt. **63.** $\angle A = \frac{4}{7}d$; $\angle B = 1\frac{3}{7}d$; $\angle C = 1\frac{2}{7}d$; $\angle D = \frac{5}{7}d$. **64.** $AD = 0{,}8$ m. **65.** Ei. **66.** 4 m. **67.** Suuremale alusele ligemal. **68.** $12\frac{1}{2}$ cm, $11\frac{1}{2}$ cm. **69.** 3 m, 2 m. **70.** 6 dm ja 10 dm. **71.** 1 : 2. **73.** 6 m. **74.** $\frac{9}{13}d$ ja $1\frac{4}{13}d$. **75.** $\frac{2}{3}d$ ja $1\frac{1}{3}d$. **76.** 15 dm, 9 dm. **77.** 1 m. **78.** 24 cm ja 36 cm. **79.** 1,5 m, 4 m. **80.** 1,7 m. **81.** $m - h$; $m + h$. **82.** 10 cm. **83.** $\frac{3}{4}a$. **84.** a. *Näpunäide.* Pikendada sirget EF kuni lõikumiseni BC pikendusega. **86.** 1) Konstruktsioon on võimalik ainult niisugusel juhul, kui trapetsi aluste vahe on haarade summast väiksem ja nende vahest suurem. *Näpunäide.* Alguses ehitada kolmnurk, mille küljed on võrdsed trapetsi haaradega ja alus on võrdne trapetsi aluste vahega. 2) Ülesandel on lahend ainult niisugusel tingimusel, et trapetsi aluste summa on diagonaalide summast väiksem ja nende vahest suurem. *Näpunäide.* Alguses ehitada kolmnurk, mille küljed on vastavalt võrdsed trapetsi diagonaalidega ja alus on võrdne trapetsi aluste summaga. **87.** 1) Rööpkülik; 2) rööpkülik; 3) romb; 4) ristkülik; 5) ruut; 6) rööpkülik. **88.** 5 dm, 4 dm, 56°25′ ja 123°35′. **91.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 180°; 4) 72°.

§ 6.

1. 4 cm. **5.** 1) 5 cm ja 25 cm; 2) 7 cm ja 13 cm. **6.** $\frac{b \pm a}{2}$. **8.** 60°. **9.** 120°. **10.** 2 cm. **11.** 2 cm ja 4 cm. **12.** R. **13.** 1 cm. **14.** 20 cm ja 12 cm. **15.** 2,2 m. **16.** $\angle AOD = \angle OAC + \angle ACO$; $\angle OAC = \angle OBA = \angle BOC + \angle ACO = 2\angle ACO$; $\angle AOD = 2\angle ACO + \angle ACO = 3\angle ACO$. **17.** 1) Ülesandel on lõpmata palju lahendeid. Kui aga punkt on antud ringjoonel, siis ülesandel on kaks lahendit — saab joonestada kaks kõõlu. **20.** 60°. **21.** 1) 10 cm; 2) 2 dm. **22.** $2R$. **23.** 1 dm. **24.** 0,5 m. **25.** 14,13 cm. **26.** 9,42 cm. **27.** 6 cm. **28.** 8 cm. **29.** $R - r$. **30.** 5 cm. **31.** Ühendava

ringjoone keskpunkt asetseb paralleelide vahelise ristlõigu poolitamispunktis. **32.** *Näpunäide.* Ühendava ringjoone keskpunkt asetseb kõikidel juhtudel antud sirgete vahelise nurga poolitajal. **33.** Kaks antud sirgega paralleelset sirget, millede kaugused antud sirgest võrduvad antud raadiusega. **34.** *Näpunäide.* Ringjoonte keskpunktid asetsevad antud sirge ristsirgel, mis on ehitatud antud punktist (kaks lahendit). **35.** *Näpunäide.* Ringjoone keskpunkt asetseb antud sirgele punktis B ehitatud ristsirgel ja sirglõigu AB keskristsirgel. **36.** *Näpunäide.* Ringjoone keskpunkt on nurga poolitajal. **38.** *Näpunäide.* Ringjoone keskpunktiks on lähisnurkade poolitajate lõikepunkt. Ülesandel on kaks lahendit. **41.** 1) Väline puutumine; 2) seesmine puutumine; 3) ringjooned on teineteisest väljaspool. **42.** 1) Väline puutumine; 2) üks ringjoon on teise sees; 3) ringjooned on teineteisest väljaspool; 4) lõikumine. **43.** 2 cm. **44.** 9 cm, 7 cm. **45.** 2 cm. **46.** 16 cm. **47.** *Näpunäide.* Ehitada keskpunktist lõikajale ristsirge. Tema aluspunkt poolitab mõlemad kõõlud. **48.** 6 cm. **49.** 1) R ja 60°. 2) *Näpunäide.* Jaotada ringjoon kolmeks võrdseks osaks, jaotuspunktidest ehitada puutujad, tekkinud kolmnurga tipud ühendada ringi keskpunktiga; saame kolm nürinurkset kolmnurka, milledest igaühes tuleb ehitada siseringjoon. **50.** 9 cm. **51.** 2 dm. *Näpunäide.* Ühendada kõikide siseringjoonte keskpunktid järgemööda omavahel ja antud ringjoone keskpunktiga ning vaadelda saadud kolmnurki. **52.** 1 dm. **53.** 1) Sirge, mis ühendab keskpunkti antud punktiga. **54.** 1) Kaks kontsentrilist ringjoont. **57.** *Näpunäide.* Ülesandel on üldisel juhul 4 lahendit. Leida tingimus, mil ülesandel on 3 lahendit.

§ 7.

1. 1) 5°; 2) 15°; 3) $\frac{1}{3}$. **2.** 1) 5°; 2) 4°26′40″; 3) 21′36″; 4) 25°42′51$\frac{3''}{7}$; 5) 163°38′10 $\frac{10''}{11}$. **3.** 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) 0,3; 4) $\frac{1}{900}$; 5) $\frac{1}{72000}$; 6) $\frac{5}{96}$; 7) $\frac{241}{43200}$; 8) $\frac{1}{2025}$. **4.** 1) 150°; 2) 47°,5; 3) 155°. **5.** 8 cm. **6.** 0,7 m. **7.** 77°59′23″. **8.** 16°33′. **9.** 105°14′. **10.** 148°41′30″. **11.** 94°39′30″. **12.** 84°22′30″. **13.** 285°18′. **14.** 137°34′. **15.** 123°45′ ja 56°15′. **16.** 105°48′30″ või 36°11′30″. **17.** 37°30′. **18.** 95° ja 120°. **19.** 52°30′; 82°30′ ja 45°. **20.** 108°. **22.** 40°. **24.** 154°. **25.** 50°. **26.** 40°, 40° ja 100°. **27.** Kolmnurga küljed poolituvad, poolringjoon jaguneb kolmeks võrdseks osaks, igaüks 60°. **28.** Asetada kolmnurk nii, et kaatetid läheksid läbi diameetri otspunktide, ja märkida täisnurga tipu asukoht. **29.** Otsitav tipp asetseb hüpotenuusile kui diameetrile ehitatud ringjoonel ja sirgel, mis on alusega paralleelne ja 2 cm kaugusel alusest. **31.** Ringjoon, mille diameetriks on antud ringjoone keskpunkti ja antud punkti vaheline sirglõik. **34.** 67°30′. **35.** 36°34′30″ või 143°25′30″. **36.** 48°50′. **37.** 45°. **38.** 110°52′. **39.** 78°45′. **40.** 144°. **41.** 150°27′. **42.** $180° - \frac{m°}{2}$. **43.** 80°. **44.** 72°. **45.** Puutepunkt. **46.** 7°. **47.** 20°30′. **48.** 106°35′ ja 253°25′. **49.** 33°20′. **50.** 100°. **51.** 18°. **52.** 105°. **53.** 31°12′. **54.** 60°. **55.** 34°54′. **56.** 15°12′ ja 74°48′. **57.** $\angle BAC = 110°$; $\angle BCA = 30°$; $\angle DAC = 80°$; $\angle DCA = 60°$. *Näpu-*

näide. Kasutada nelinurga $ABCD$ ümberringjoont. **62.** Ülesande lahendamine taandub ülesande nr. 60 lahendamiseks. **63.** 2 m. **64.** 4 cm. **65.** 1) 40°; 2) 36°. **66.** 50° ja 130°. **67.** 105°, 115° ja 140°. **68.** 55°19′ või 34°41′. **69.** *Näpunäide*. Alata kolmnurga konstrueerimisega, mille moodustavad alus ning siseringjoone keskpunkti ja aluse otspunktide vahelised sirglõigud. **70.** 6 : 5. **71.** $p - r$. **73.** 60 cm. **75.** *Näpunäide*. Antud ringjoone puutujale kui haarale ehitada antud nurgad ja joonestada kahe teise haaraga paralleelsed puutujad. **76.** 1 m. **77.** 25°10′; 154°50′; 25°10′ ja 154°50′. **78.** *Näpunäide*. 1) Siseringjoone keskpunktiks on rombi diagonaalide lõikepunkt. **79.** 2 cm. **80.** 143°, 37°, 143° ja 37°. **81.** Väljaspool. **82.** 3 cm. **83.** 25 cm. **84.** $\angle BCD = 109°36'18''$; $\angle B = \angle D = 90°$. **85.** 1) Jah; 2) ei. **86.** $\frac{1}{3}R$. **87.** 81°. **88.** 1) 3 m, 6 m, 9 m, 6 m; 2) 45°, 90°, 135°, 90°.

§ 8.

1. $AB : CD \approx 2{,}4$. **2.** 0,87. **3.** 1) $AM : AB = 1 : 3$; $MB : AB = 2 : 3$; 2) $AK : AB = \frac{m}{m+n}$; $KB : AB = \frac{n}{m+n}$. **4.** $BD = 12$ cm ja $AD = 18$ cm. **5.** 10 min. **6.** 1) 15 m; 2) 9 m; 3) 22 dm. **7.** 1) 12 dm; 2) 1,8 m; 3) 3,4 m. **8.** 1) Jah; 2) jah; 3) ei. **9.** 1) 4 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm; 2) 32,5 cm, 35 cm, 37,5 cm, 40 cm, 42,5 cm, 45 cm, 47,5 cm. **10.** 3 m ja 2,4 m. **11.** 16,15 m. **12.** $OD = 1{,}8$ cm; $OC = 1{,}6$ cm; $DC = 1{,}6$ cm. **13.** 2,5 m. **14.** 10 m ja 35 m või 35 m ja 10 m. **15.** *Näpunäide*. Sirgjoon, mis on paralleelne nurga ühe haaraga ja läbib punkti P, jaotab kolmnurgas, mille moodustavad nurga haarad ja otsitav sirge, kolmnurga kaks külge suhtes $m : n$. **16.** *Näpunäide*. Punktid, mille kaugused nurga haaradest suhtuvad nagu $m : n$, jaotavad samas suhtes nurga haarade vahelise sirglõigu, mis on risti nurga poolitajaga. **17.** 1) $AD = 8$ m ja $DC = 12$ m; 2) 10 m; 3) 1,8 m. **18.** 10 cm. **19.** 1) Jah; 2) ei; 3) ei; 4) jah. **20.** $BE = 7$ cm; $EC = 5$ cm. **21.** 39 cm ja 65 cm. **22.** 8 cm. **23.** 50 cm. **24.** 16 cm, 20 cm, 20 cm. **25.** $BE = 10$ m, $EC = 14$ m. **26.** $\frac{b}{a+c}$. **27.** 6 cm, 4 cm ja 6 cm. **28.** $\frac{ab}{a+b}$.

§ 9.

1. 1 m, 1,2 m. **2.** 10 m, 25 m, 20 m. **3.** 42,0 m (täpsusega 0,1). **4.** 1) $b_1 = 35$, $c = 8$; 2) $c = 20$. **5.** $AC = 24$ cm, $EF = 18$ cm, $DF = 15$ cm. **6.** 13,6 cm. **7.** $AC = 3$ m; $A_1C_1 = 1{,}2$ m. **8.** $AC = 20$ cm; $EF = 15$ cm. **9.** 1) Jah; 2) jah; 3) ei. **10.** 1) Ei; 2) jah. **11.** 2,6 m. **12.** 1) 1 m, 2 m ja 2,5 m; 2) 6,5 m ja 5,5 m. **13.** 1,25 m. **14.** 1) 14 cm; 2) 6 dm. **15.** 1) 4 cm; 2) 27 : 28. **16.** 2 m. **17.** $\frac{bc}{a+c}$. **18.** $BC = 12$ cm; $BD : BA = 3 : 4$. **19.** $AD = 1$ m, $DC = 3$ m. **20.** *Näpunäide*. Otsitava kolmnurga iga külg on kolme järgmise sirglõigu neljas võrdeline: otsitava kolmnurga ümbermõõt, antud kolmnurga ümbermõõt ja antud kolmnurga üks külg.

22. *Näpunäide.* Nurga ja aluse lõikude suhte järgi ehitada otsitava kolmnurgaga sarnane kolmnurk. 23. $OB = 15$ cm, $OD = 12$ cm. 24. $AO : OC = 20 : 9$, $AD = 40$ cm, $BC = 18$ cm. 25. $AB = 30$ cm, $AD = 40$ cm. 26. 18 cm. 27. 20 cm. 28. 300 m. 29. $\frac{a(m-n)}{n}$. 30. $\frac{bc}{a+2c}$. 31. 10 cm ja 12 cm. 32. $\frac{bc}{b+c}$. 33. $\sqrt{pq}$. 34. *Näpunäide.* Leida kõõlu keskpunkti ja ruudu tippe läbivate sirgjoonte sihid. 35. *Näpunäide.* Leida ühte kolmnurga tippu ja ühte ruudu tippu läbiva sirgjoone siht. 36. $\frac{ah}{a+h}$. 37. *Näpunäide.* Leida ühte kolmnurga tippu ja ühte ristküliku tippu läbiva sirgjoone siht. Ülesandel on üldiselt 6 lahendit. 38. 10 cm ja 18 cm. 39. 12 cm. 40. $\frac{ah}{a+2h}$. 41. $CD = 3$ cm, $BD = 9$ cm. 42. $AD = 6$ m, $BE = 8$ m. 43. 1 m. 44. 14 cm ja 10 cm. 45. $\sqrt{2ar}$. 46. 10 cm ja 26 cm. 47. $\frac{ab}{a+b}$. 48. 16 cm. 49. $\frac{lm}{l+m}$. 50. 68 dm ja 80 dm. 51. 20 m. 52. $OE = 6$ dm; $OD = 8$ dm. 53. 42 dm. 54. $\frac{ar}{a+2r}$. 55. 30 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm. 56. 18 m, 9 m, 12 m, 36 m. 57. 8 dm, 12 dm, 16 dm, 20 dm. 58. 100 m ja 40 m. 59. $a : b = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. 60. $\frac{a^2}{b}$.

§ 10.

1. 1) 37 cm; 2) 65 cm; 3) 41 dm; 4) 109 cm; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61} \approx 7{,}81$. 2. 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51} \approx 7{,}14$.

3.

	a	b	c	a_c	b_c	h
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	75	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$\left(15\frac{6}{29}\right)$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$\left(1\frac{1}{2}\right)$	$\left(2\frac{2}{3}\right)$	2
12)	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$\left(8\frac{32}{41}\right)$

4. *Näpunäide.* Kasutada § 190 Kisseljovi õpikust. **5.** *Näpunäide.* Kui sirglõikude vahe $x - y = r$ ja keskmine võrdeline $\sqrt{xy} = p$, siis võib leida sirglõikude summa kui hüpotenuusi täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on r ja $2p$. **7.** 50 cm ja 72 cm. **8.** 5,2 m. **9.** 18 cm, 98 cm. **12.** Vaata ülesannet nr. 11. **13.** 3, 4, 5. **14.** $\sqrt{116} \approx 10{,}8$ m. **15.** 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 cm. **16.** $32\sqrt{2} \approx 45$ mm. **17.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $2(\sqrt{2} + 1)$ cm. **18.** Ei. **19.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 32 cm ja 60 cm. **20.** 1) 41 cm; 2) 10 cm. **21.** 1) 15 cm; 2) 125 cm, 125 cm, 240 cm; 3) $2\sqrt{2}$ cm. **22.** $BD \approx 5{,}0$ m. **23.** 1) 3 m ja 4 m; 2) 9 cm, $1\frac{5}{7}$ cm, $14\frac{2}{7}$ cm. **24.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) $2m(2 + \sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$ ja $4\sqrt{3}$ cm. **25.** 1) 25 cm või 11 cm; 2) 29 cm; 3) 40 cm. **26.** 1) 37 cm; 2) 3 dm ja 4 dm. **27.** 1) 24 cm; 2) 36 cm ja 54 cm. **28.** Umbes 5630 m. **29.** 1) $D \approx$ ≈ 25 mm; 2) $d \approx 19$ mm; 3) $h \approx 11$ mm; $D = d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$. **31.** 2) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. **32.** 24 mm. **33.** 1) 39 dm; 2) 80 cm; 3) 14 cm või 4 cm; 4) 21 cm; 5) 6 cm. **34.** 1) $D = 425$ mm; 2) $D = \frac{l^2 + 4s^2}{4s}$. **35.** $\frac{a^2 + 4h^2}{8h}$. **36.** 9 cm või 39 cm. **37.** 42,5 cm. **38.** 1) 77 cm; 2) 61 cm; 3) 13,44 cm. **39.** $y = \sqrt{2Rr}$. **40.** 1) 40 cm; 2) väline puutuja on 48 cm; seesmine puutuja on 30 cm. **41.** 13 m. **42.** 73 cm. **43.** 7 m ja 25 m. **44.** $7\frac{9}{17}$ cm. **45.** 175 cm ja 600 cm. **46.** 20 cm. **47.** 1 : 4. **48.** 49 : 81. **49.** 21 cm ja 28 cm. **50.** $a\sqrt{2}$—1) ja $a(2 - \sqrt{2})$. **51.** $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ ja $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **52.** 1 m. **53.** 15 cm. **54.** 5 m. **55.** 1) 10 cm; 2) 7,5 cm. **56.** 18 dm. **57.** 1) 24 dm; 2) $2{,}4\sqrt{5}$ dm; $1{,}8\sqrt{5}$ dm; 3) 13,44 dm. **58.** 1) $9\frac{1}{15}$ cm; 2) $0{,}8r\sqrt{5}$. **59.** 15 dm. **60.** 65 dm. **61.** 35 dm. *Näpunäide.* Ehitada kesklõik ja kõrgus nürinurga tipust. **62.** $AE : EC = 16 : 25$. **63.** 36 dm, 48 dm. **64.** 18 dm ja 80 dm. **65.** 1) 37 m ja $\sqrt{769}$ m $\approx 27{,}7$ m; 2) 4 : 5. **66.** 1) 3,125 dm; 2) 16,9 m. **67.** 6 dm. *Näpunäide.* Hüpotenuusi lõigud, milledeks hüpotenuus jaguneb puutepunktis, on võrdsed nende juures olevate kaatetite lõikudega. **68.** 38 dm ja 22 dm. **69.** 25 dm. *Näpunäide.* Rakendada abitundmatut, võttes selleks kauguse keskpunktist ühe kõõluni. **70.** 30 cm. **71.** 32 cm ja 18 cm. **72.** Alused: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ ja $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; haar on $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. **73.** 20 dm. **74.** 1 dm. **75.** $CA = \frac{m^2 + n^2}{m} =$ $= 39$; $CB = \frac{m^2 + n^2}{n} = 26$. *Näpunäide.* Ühendada lõikude m ja n otspunktid ristlõigu aluspunktiga. **76.** 27 dm ja 64 dm. **77.** *Näpunäide.* Väljendada ühise välise puutuja pikkus raadiuste kaudu. **78.** $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD =$ $= \sqrt{b(a+b)}$. **79.** $AC \approx 44$ m. **80.** $c \approx 20$ m. **81.** 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $2\sqrt{3}$. **82.** 1) Nürinurkne; 2) täisnurkne; 3) teravnurkne; 4) teravnurkne; 5) nürinurkne. **83.** 1) $p = 5$, $q = 9$, $h = 12$; 2) $p = 35$, $q = 5$, $h = 12$;

3) $p = 20$, $q = 8$, $h = 15$; 4) $p = 1\frac{3}{8}$, $q = 2\frac{5}{8}$, $h = \frac{3}{8}\sqrt{15}$. **84.** 1) 7 cm; 2) 13 cm; 3) 73 cm. **85.** 1) 7 cm; 2) 13 cm; 3) 31 cm. **86.** 1) $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}} \approx 2{,}125$; 2) $\sqrt{13} \approx 3{,}6$; 3) 5. **87.** 13; 14; 15. **88.** 9 cm ja 24 cm. **89.** 10 m või 6 m. **90.** Haarad on 7 cm ja 15 cm, kõrgus $\frac{105\sqrt{3}}{26} \approx 7{,}0$ cm. **91.** 20 cm. **92.** $AC = a$, $AD = a(\sqrt{2} + 1) \approx 2{,}4a$; $CD = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1{,}8a$. **93.** $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} = 30$. **94.** 1) 13 cm; 2) 11,2 cm. **95.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$. **96.** 13. **97.** 12 cm ja 8 cm. **98.** 14 cm ja 16,8 cm. **99.** 25; 56. **100.** 52. *Näpunäide.* Ehitada kolmnurga ABC kõrgus ja rakendada kolmnurkade sarnasust. **101.** $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. **102.** 1) 20 cm ja 30 cm; 2) 10 cm ja 15 cm. **103.** 1) 7 cm ja 11 cm; 2) küljed 4 cm ja 7 cm; diagonaalid 7 cm ja 9 cm. **104.** 1) 11; 2) 14; 3) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. **105.** 24 cm. **106.** 1) 7 cm; 2) 6 cm. **107.** 1) 12; 20; $\sqrt{544} \approx 23$; 2) 15; 17; 39; 3) 2,4; $\sqrt{23{,}4}$; $\sqrt{13{,}6}$. **108.** 15 cm ja 25 cm. **111.** *Näpunäide.* Ühendada nelinurga keskpunktid veel järgemööda. **112.** 30°.

§ 11.

1. $AB \approx 13$ m. **2.** $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ m. **3.** 1) 6 cm, 12 cm, 1 m; 2) 16 cm. **4.** 1) Seespool; 2) ringjoonel; 3) väljaspool. **5.** 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 või 45. **6.** 1) 30 cm; 2) 40 cm; 3) 21 dm ja 29 dm. **10.** 1) 1 m; 2) 6 cm; 3) 10 m. **11.** 1) 8 cm; 2) 18 m; 3) 14 cm. **12.** 1) 7 cm; 2) $r(\sqrt{5} - 1) \approx 1{,}24r$. **13.** 12 cm. **14.** $R = 4{,}35$ m. **15.** Ei. **16.** 43,6 cm. **17.** $R \approx 591$ m. **18.** Vähenes $2\frac{1}{2}$ korda. **19.** 1) 24 cm; 2) 33 m. **20.** 24 cm ja 8 cm. **21.** Suurenes 3 korda. **22.** 1) 4 cm; 2) 20 m; 3) $AB = 35$ m ja $AC = 15$ m. **23.** 8 cm. **24.** 1) 9 dm; 2) 36 cm; 3) 25. **25.** mx ja nx, kus $x = \frac{am - bn}{n^2 - m^2}$. **26.** 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. **27.** 21 cm. **28.** $1\frac{1}{2}$ korda. **30.** Teine lõikepunkt. **31.** 1) 3 cm; 2) 18 cm; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. **32.** 1) 226 km; 2) 270 km. **33.** 1) 17 cm; 2) 13 cm. **34.** 1) 10 cm; 2) $\frac{a}{2}$. **35.** 18 cm. **36.** 12 cm ja 36 cm. **37.** 1) 18 cm ja 12 cm; 2) 9 cm ja 6 cm või $12\frac{1}{2}$ cm ja $2\frac{1}{2}$ cm. **40.** 6 dm. **41.** $\frac{2}{5}r$. **42.** 1) 10 cm; 2) 8 dm; 3) 9,375 m. **43.** 25 dm, 8 dm, 15 dm. **44.** $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$. **45.** 9 dm. **46.** $\sqrt{2ar}$.

§ 12.

1. 1) 15°; 22°,5; 2) 12-nurk; 30-nurk. **3.** 60°; 90°; 108°; 120°; 135°; 144°; 150°; 165°36′. **4.** 1) 8-nurk; 12-nurk; 2) 10-nurk; 15-nurk. **5.** $2\sqrt{2} \approx$ $\approx 2{,}8$ cm. **6.** $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ cm. **7.** 4,4 cm. **10.** 2) $2m\sqrt{3}$. **11.** 1) $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$; 2) $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$; 3) $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. **12.** 2 cm, 4 cm, $2\sqrt{3}$ cm, 0. **15.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$; 5) $a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. **16.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **17.** 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. **18.** 1) $2R\sqrt{3}$; 2) $2R$; 3) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **19.** $b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

21. 1) $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2} + 1)$, $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. **22.** 1) R, $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $a\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = a(\sqrt{3} + 1)$, $a\sqrt{3(2 + \sqrt{3})}$, $a(2 + \sqrt{3})$, $2a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. **23.** *Näpunäide.* Otsitava viisnurga külg on võrdne kuldlõikes jaotatud diagonaali suurema osaga. **24.** $BD = 4{,}2$ m, $a_3 = 2{,}3$ m, $H = 2{,}1$ m. **25.** $a_n : b_n = r : R$, $a_3 : b_3 = \frac{1}{2}$, $a_6 : b_6 \approx 0{,}866$. **26.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866R$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707R$.

27. 1) $\frac{a}{2}(2 + \sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(2 + \sqrt{3})$. **29.** $\frac{a}{3}$. **31.** $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. **32.** $2\sqrt{6} \approx 4{,}9$ dm. **33.** 1) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7R$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82a$.

34. 1) $\frac{a}{6}(3 \pm \sqrt{3})$; 2) a. **36.** $\frac{a}{6}$. **37.** *Näpunäide.* Läbi antud ruudu keskpunkti ehitada otsitava ruudu diagonaalid, milledest kumbki on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiks, kui kaatetid võrduvad antud küljega. **38.** *Näpunäide.* Ruudu diagonaalid poolitavad rombi diagonaalide vahelised nurgad. **39.** $8a(2 - \sqrt{2})$. **41.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1)$.

42. 1) $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. **43.** $1 : \sqrt{3} : 2 \approx 1 : 1{,}7 : 2$.

44. $c(\sqrt{3} + 1)$. **45.** $\frac{3}{5}h$. **46.** Välise puutumise korral: 1) $R(2\sqrt{3} + 3)$; 2) $R(\sqrt{2} + 1)$; 3) R. Seesmise puutumise korral: 1) $R(2\sqrt{3} - 3)$; 2) $R(\sqrt{2} - 1)$; 3) $\frac{R}{3}$.

§ 13.

1. 2,25 m². **2.** 23 t. **3.** $\sqrt{32\,500} \approx 180$ m. **4.** 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2R^2$; 3) 2 korda. **5.** 1) Suureneb 9 korda; väheneb 2,25 korda; 2) peab suurendama 2 korda; peab vähendama 5 korda. **6.** 552,25 ha. **7.** $48\frac{\text{kG}}{\text{dm}^2}$. **8.** 21,9 a. **9.** 17 km. **10.** 1) 8 m, 18 m; 2) 12 dm ja 25 dm. **11.** 24 m. **12.** 8,16 cm². **13.** 130 cm². **14.** 818 cm. **15.** 7,54 a. **16.** 30 cm. **17.** $\frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$. **18.** 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **19.** 30°. **21.** 202,8 cm². **22.** 1400 cm². **25.** *mn*. **26.** 1 : 3. **27.** *mn*. **28.** 7 cm ja 9 cm või 21 cm ja 3 cm. **29.** ≈ 120 kG. **30.** 1) 288 cm²; 2) 1 m²; 3) 5 ruutühikut. **31.** *Näpunäide.* Antud kolmnurga ja otsitava kolmnurga kõrgused on võrdsed. **33.** 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. **34.** 1) Jah; 2) ei; 3) jah. **35.** 1) 39 dm²; 2) 82 cm; 3) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **36.** $\frac{c^2}{4}$. **37.** 2688 cm²; 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}$; 3) $10\sqrt{21} \approx 46$ cm². **38.** *Näpunäide.* Ühendame antud punkti K külje AC keskpunktiga D, ehitame $BE \parallel DK$. Sirge KE on otsitav. **39.** 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3Q\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. **40.** 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. **41.** 6 dm². **42.** 2250 cm² või 522 cm². **43.** 55 cm, 48 cm. **44.** 12 cm või 16 cm. **45.** 1) 1440 cm²; 2) 9,6 m. **46.** $\sqrt{Q\frac{m^2+n^2}{mn}}$. **51.** 12,8 m². **52.** $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}183a^2$. **53.** 75 cm². **54.** $a^2(3+\sqrt{3}) \approx 4{,}73a^2$. **55.** $2a^2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8a^2$. **56.** 8,4 m². **57.** 6912 cm². **58.** 52 cm². **59.** 1) 84; 2) 60; 3) $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$; 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} \approx 6{,}49$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$; 7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$. **60.** 1) 2 m; 2) 112. **61.** 1) 130 dm, 125 dm, 15 dm; 2) 18 cm, 20 cm, 34 cm. **62.** 144 cm². **63.** 30 cm. **64.** 1224 cm². **65.** 270 cm². **66.** 1) 25 või 39; 2) 14 või 12. **67.** 36 ruutühikut. **68.** 6 cm. **69.** 14 m, 30 m, 40 m. **70.** 546 cm²; $\sqrt{1621} \approx 40$ cm. *Näpunäide.* BD leidmiseks ehitame $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ ja $DG \parallel AC$ kuni lõikumiseni BE pikendusega. **71.** 1) 8 cm; 2) 25 cm; 3) 8 cm ja 10 cm. **72.** $\approx 1{,}9$ m². **73.** 13,25 m². **74.** 1100 m². **75.** 11583 cm² $\approx 1{,}2$ m². **76.** 1) 10 cm; 2) 2 : 3. **77.** 24 dm². **78.** 288 cm². **79.** $\frac{mn}{6}$. **80.** 480 cm². **81.** 540 m². **82.** 1) 256 cm²; 2) h^2. **83.** $\frac{c^2}{2}$. **84.** 216 cm². **85.** 8316 cm². *Näpunäide.* Olgu $ABCD$ antud trapets, kusjuures $BC \parallel AD$. Ehitame $CE \parallel BD$, kus E on punkt AD pikendusel, ja asendame trapetsi kolmnurgaga

ACE. **86.** $\frac{R^2}{2}$. **87.** $\frac{a^2}{2}$. **88.** 1) 1764 cm²; 2) 150 cm². **89.** 48 cm. **90.** $\frac{1}{2}[d_1h_1 + d_2(h_2 + h_3)] \approx 12{,}0$ ha. **91.** ≈ 34 a. **92.** 1) $\frac{1}{2}kl$; 2) $\frac{1}{4}kl$. **93.** $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{3})(b + a\sqrt{3})$. **94.** $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + ab + b^2)$. **95.** 426 cm². *Näpunäide.* Ehitada $BE \perp AD$ ja $CF \perp AD$. **96.** $\frac{3r^2}{4}(\sqrt{3} + 1)$. **97.** 1) 8 cm; 2) 16 dm. **98.** $3r^2\sqrt{3}$. **99.** $84\sqrt{6}$. **100.** 650. **101.** 28,5 m². **102.** 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $2r^2\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. **103.** 1) $2R^2\sqrt{2}$; 2) $3R^2$. **104.** ≈ 355 cm². **105.** $\approx 10{,}7$ cm². **106.** 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. **107.** 1) $R^2\sqrt{3}$; 2) $4R^2(2 - \sqrt{2})$. **114.** 3 : 2. **116.** $2(a^2 + ab + b^2)$. **117.** $P : Q = 2 : 3$. **118.** $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DBE} = 1 : 2$. **120.** 16; 25. **121.** $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ dm. **122.** $\frac{1}{4}$. **123.** $h\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7h$. **124.** 1) 4 : 21 : 56; 2) $m^2 : (2m + n)n$. **125.** 256 cm². **126.** 3 : 5 : 7. **127.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$. **128.** 32 dm², 72 dm², 128 dm². **134.** $\sqrt{2}$. **135.** $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ m. **136.** 300 dm². **138.** 25 dm². **139.** 60 cm² ja 40 cm². **140.** 1 : 3. **141.** $\sqrt{3} + 1 \approx 2{,}732$; $2(2 + \sqrt{3}) \approx 7{,}464$. **143.** $\frac{2mn}{(m + n)^2}$.

§ 14.

2. 1) 12 dm; 2) $m_a = \sqrt{11{,}5} \approx 3{,}4$; $m_b = \sqrt{7{,}75} \approx 2{,}8$; $m_c = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}6$. **3.** 30. **4.** 15 dm ja 25 dm. **5.** 144. **6.** 16,5. **7.** 1) *Näpunäide.* Alguses ehitada kolmnurk *AMB* külgedega *c*, $\frac{2}{3}m_a$ ja $\frac{2}{3}m_b$; 2) 72. **8.** 1) *Näpunäide.* Ehitada kolmnurk *AMK* külgedega $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ ja $\frac{2}{3}m_c$ ja seejärel leida otsitava kolmnurga *ABC* alus *AC*. 2) 72. **10.** 6; 10; 24. **11.** 4. **12.** 12 ja 27. **13.** 29 cm ja 12 cm. **14.** 1) Kolmnurgast väljaspool; 2) kolmnurga sees; 3) hüpotenuusi keskpunktis. **17.** 1) $R = 8\frac{1}{8}$ $r = 4$; 2) $R = 8\frac{1}{8}$, $r = 1{,}5$; 3) $R = 24\frac{1}{6}$, $r = 2\frac{1}{3}$; 4) $R = \frac{35}{\sqrt{96}} \approx 3{,}6$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}2$. **18.** 4,5. **19.** 1) R; 2) $R\sqrt{2}$. **20.** *Näpunäide.* Avaldada kõik kõrgused pindala ja külgede kaudu. **21.** $\frac{R^2}{4}(3 + \sqrt{3})$. **22.** 40 cm ja 42 cm. **23.** 1) R^2; 2) $R^2\sqrt{2}$; 3) $R^2\sqrt{3}$; 4) $2R^2$.

§ 15.

1. 1) $\approx 62{,}8$ m; 2) $\approx 94{,}2$ m; 3) ≈ 220 cm. **2.** 1) ≈ 16 cm, 2) $\approx 4{,}0$ cm; 3) $\approx 0{,}76$ dm. **3.** 60. **4.** $\approx 5{,}9\ \frac{\text{sek.}}{\text{m}}$. **5.** 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{350}$; 3) $\frac{419\pi R}{14400}$. **6.** 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. **7.** 133°20′. **8.** $\approx 21°{,}5$. **9.** 1) 144°; 2) $1\frac{1}{3}$ cm; 3) 7,2 cm. **10.** $x = \frac{190°l}{\pi R}$; 1) $\frac{810°}{\pi}$; 2) $\frac{72°}{\pi}$. **11.** $\approx 57°18'$. **12.** 1) $\frac{\pi a}{3} \approx 1{,}05a$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}11a$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}21a$. **13.** 1) $\frac{3l}{\pi} \approx$ $\approx 0{,}95l$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}90l$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}83l$. **14.** 25 cm. **15.** 1) $2\pi m$; 2) kaugus on üks ja sama nii maakeral kui jalgpallil ja on $\frac{1}{2\pi} \approx$ $\approx 0{,}16$ m. **16.** 1) ≈ 182 mm; 2) $\approx 8{,}0$ cm. **17.** $50\pi \approx 157$ cm. **18.** $\frac{3}{4}l$. **20.** ≈ 119 cm. **21.** 2. **22.** $\approx 0{,}15\%$. **23.** $0{,}00005D$. **24.** 1) ≈ 314 m²; 2) $\approx 50{,}2$ dm²; 3) $\approx 21{,}2$ cm². **25.** 1) $\approx 0{,}8$ cm; 2) ≈ 4 m; 3) $\approx 2{,}3$ dm. **26.** $\approx 346{,}28$ m². **27.** $\approx 78{,}5$ cm². **28.** ≈ 4 cm. **29.** $\approx 0{,}2826$ m². **30.** $\approx 2{,}6$ T. **31.** 1) $\approx 5{,}1$ cm²; 2) ≈ 15 cm. **32.** 2) 10 cm. **33.** $\frac{\pi F}{2}$. **34.** $\approx 15{,}7$ m². **35.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **36.** $\approx 0{,}2\ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$. **37.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **39.** 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$. **40.** 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. **41.** $360° \cdot \frac{q}{\pi r^2}$. **42.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2) \approx$ $\approx 0{,}275R^2$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}09R^2$; 3) $\frac{R^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}) \approx 0{,}04R^2$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3) \approx 0{,}01R^2$. **43.** 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}20a^2$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2) \approx$ $\approx 0{,}14a^2$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}09a^2$. **44.** $\approx 3{,}7$ m². **45.** 1) $\frac{1}{6}\pi r^2 \approx$ $\approx 0{,}5\ r^2$; 2) $\frac{Qn}{360}$. **46.** $\frac{\pi R^2}{6}$. **47.** $\frac{a^2}{24}(7\pi - 6 - 6\sqrt{3}) \approx 0{,}23a^2$ või $\frac{a^2}{24}(13\pi +$ $+ 6 - 6\sqrt{3}) \approx 1{,}52a^2$. **48.** $\frac{4Qmn}{\pi(m^2+n^2)}$. **49.** $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) \approx 1{,}8R$ ja $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) \approx 0{,}87R$. **50.** $\frac{8Q}{\pi} \approx 2{,}55Q$. **51.** $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}82Q$. **52.** 1 : 2. **53.** 1) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi) \approx 0{,}215R^2$; 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi) \approx 0{,}68R^2$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3} - \pi) \approx 0{,}05R^2$. **54.** $\frac{a^2}{14}(\pi + 6) \approx 0{,}38a^2$. **55.** 1) 9 korda, 25 korda; 2) 2 korda, $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ korda. **56.** Ei, on vaja 4 niisugust väikest toru. **57.** a^2. **58.** 1) $\approx 0{,}215r^2$; 2) $ab - 0{,}215b^2$; 3) $\approx 0{,}393R^2$; 4) $\approx 0{,}858r^2$. **59.** $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1{,}23R^2$. **60.** $\frac{a^2}{2}(\pi - 2) \approx 0{,}57a^2$.

61. $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)-\frac{ab}{2}$. **63.** $\frac{a^2}{6}(2\pi-3\sqrt{3})\approx 0{,}18a^2$. **64.** $\frac{a^2}{6}(2\pi+3\sqrt{3})\approx$ $\approx 1{,}9a^2$. **67.** ≈ 988 cm^2. **68.** ≈ 25 cm^2. **69.** $(1{,}57R+2a)t-1{,}215t^2$. **70.** 625π m^2. **71.** 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2}-1)\approx 0{,}4R$; 3) $R(2\sqrt{3}-3)\approx 0{,}46R$.

§ 16.

1. 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{10}$. **3.** Nr. 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13 — lineaarsed; 4, 7, 14, 16, 18 — ruutavaldised; 5, 6, 15, 17 — kuupavaldised; 8 — nullmõõteline avaldis. **4.** Nr. 2, 4, 5, 6. **6.** *Näpunäide.* 8) Ehitada alguses $y=\frac{pq}{s}$, seejärel $x=\frac{yr}{t}$. **7.** *Näpunäited.* 2) $x=\sqrt{yb}$, kus $y=\frac{a^2}{c}$; 5) $x=\sqrt{b^2+y^2}$, kus $y=c\sqrt{3}$; 6) $x=\sqrt{a^2\cdot\frac{a+c}{b+d}}=\sqrt{yz}$, kus $y=\frac{a^2}{a+d}$; $z=a+c$. **8.** Ruudu külg $x=\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}$. **9.** Otsitava ringi raadius $x=R\sqrt{2}$. **10.** Kontsentrilise ringjoone raadius $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **11.** Ruudu külg $x=\sqrt{\frac{3}{5}}\,ah$. **12.** Otsitav raadius $x=\sqrt{R^2-r^2}$. **13.** Otsitava kolmnurga kõrgus on $\frac{hb}{a}$. **15.** 1) Anda võrrandile kuju: $x(p-x)=q^2$ ja koostada tema liikmetest võrre; 3) võrrandil ei ole (reaalarvulisi) lahendeid. **16.** Lõigu suurem osa $x=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$, väiksem osa $a-x=\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$. **17.** 2) $a_{10}=$ $=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **18.** Suurem osa on $a\cdot\frac{2{,}236-1}{2}=0{,}618a$ ja see erineb avaldisest $\frac{5}{8}a$ ligikaudu $0{,}007a$ võrra. **19.** 1) $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. **20.** $2r\sqrt{\sqrt{5}-2}\approx$ $\approx 0{,}98r$. **23.** Punkti otsitav kaugus keskpunktist on $r\sqrt{5}$. **24.** Ruudu üks diameetril asetsevatest tippudest on keskpunktist kaugusel $x=\frac{r\sqrt{5}}{5}$. **25.** Ristküliku külg, mis on kolmnurga alusega risti, on $x=\frac{h(p-a)}{h-a}$. **26.** Otsitava paralleeli ja kolmnurga tipu vaheline kaugus $x=\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **27.** Otsitava ristsirge ja kolmnurga väiksema alusnurga tipu vaheline kaugus $x=\sqrt{\frac{bm}{2}}$, kus b on kolmnurga alus ja m on suurema külje projektsioon alusel. **28.** Ristküliku küljed on $x=\frac{d_1(3\pm\sqrt{3})}{6}$ ja $y=\frac{d_2(3\mp\sqrt{3})}{6}$, kus d_1 ja

d_2 on rombi diagonaalid. **29.** Kolmnurga tipu ja ruudu tipu vaheline kaugus $x = a(2 - \sqrt{3})$, kus a on ruudu külg. (Tõlkija märkus: Kujund on sümmeetriline ruudu diagonaali suhtes, mis lähtub otsitava kolmnurga ja ruudu ühisest tipust. Ehitada selle tipu juurde ruudu sisse nurk 15°, mille üheks haaraks jääb ruudu külg, teiseks haaraks tuleb otsitava kolmnurga külg.) **30.** Antud ruudu ja otsitava ruudu tippude vaheline kaugus $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. **31.** Otsitava ringjoone raadius $x = \frac{a^2 + b^2 - r,}{2(a + r)}$, kus a tähendab antud ringjoone keskpunktist antud sirgele tõmmatud ristlõigu pikkust ja b on selle ristlõigu kaugus antud punktist. **32.** Otsitava ristküliku küljed on $\frac{(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4cd}}{2}$, kus a ja b on esimese ristküliku küljed, kuna c ja d on teise ristküliku küljed. **33.** Kolmnurga kõrgusega paralleelne ristküliku külg $y = \frac{bhn}{bn + mh} = \frac{bh}{b + \frac{m}{n}h}$, kus b on kolmnurga alus ja h — kolmnurga kõrgus. **34.** $BE = \frac{a^2}{b}$. **35.** $BE = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$. **36.** Otsitav raadius $r = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2}$, kus a ja b on ristküliku küljed. **37.** $x = \frac{1}{2}[\sqrt{m^2 + 4b(a + b)} - m]$. *Näpunäide.* Pikendada sirglõiku $AB = a$ lõikumiseni antud sirgega punktis C ja tähistada punkti C kaugus lähemast antud punktist tähega b. Rakendada ühest ja samast punktist lähtuvate lõikajate omadust.

Sisukord.

§ 1. Sirgjoon (1—18) 3
§ 2. Nurgad (1—37) 5
§ 3. Kolmnurgad ja hulknurgad. Rist- ja kaldsirged. Teljeline sümmeetria (1—50) 8
§ 4. Paralleelsed sirged. Kolmnurga ja hulknurga nurkade summa (1—59) 14
§ 5. Rööpkülik ja trapets (1—93) 19
§ 6. Ringjoon (1—58) 28
§ 7. Nurga mõõtmine kaarega (1—88) 34
§ 8. Võrdelised lõigud. Kolmnurga nurgapoolitaja (1—28) 42
§ 9. Kolmnurkade ja hulknurkade sarnasus (1—60) 46
§ 10. Kolmnurga ja mõnede nelinurkade joonelementide vahelised seosed (1—112) 52
§ 11. Võrdelised lõigud ringis (1—46) 66
§ 12. Korrapärased hulknurgad (1—47) 72
§ 13. Hulknurkade pindalad (1—143) 77
§ 14. Kolmnurga mediaanide, nurgapoolitajate, ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste arvutamine (1—23) 92
§ 15. Ringjoone ja kaare pikkus. Ringi ja selle osade pindala (1—71) 95
§ 16. Algebra rakendamine geomeetrias. Jaotamine kuldlõikes (1—37) 103
Vastused 108

Н. Рыбкин
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ I.
ПЛАНИМЕТРИЯ.

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid M. Juske ja H. Peel

Ladumisele antud 22. II 1957. Trükkimisele antud 17. IV 1957. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 7,75. Arvutuspoognaid 7,07. Trükiarv 10000. Tellimise nr. 532. Trükikoda „Pioneer", Tartu, Kastani 38.

Hind rbl. 1.45

6—6

Rbl. 1.45

AFH
A-21497 I

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00357060 5