

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Hardo Niit

Optimaalse aktsiaportfelli koostamine Balti aktsiaturu näitel

Matemaatilise statistika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Toomas Raus

Tartu
2019

Optimaalse aktsiaportfelli koostamine Balti aktsiaturu näitel

Bakalaureusetöö

Hardo Niit

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade portfelliteooriast ning selle põhjal optimaalsete portfelli moodustamine Balti aktsiaturu näitel. Esmalt tutvustatakse lähemalt portfelliteooriat kahe väärtpaberi ja n -väärtpaberi korral. Praktilises osas koostatakse optimaalsed portfellid ja analüüsitakse saadud näitajaid.

Märksõnad: Portfelliteooria, finantsmatemaatika, minimaalse riskiga portfell, turuportfell, Balti aktsiaturg

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika

Creating an optimal portfolio based on Baltic Stock Market

Bachelor's thesis

Hardo Niit

The aim of this thesis is to provide an overview of modern portfolio theory and create an optimal portfolios based on Baltic Stock Market. First, portfolio theory with two securities and several securities are introduced. In the practical part an optimal portfolios will be created and analyzed.

Keywords: Portfolio theory, financial mathematics, minimum variance portfolio, market portfolio, Baltic Stock Market

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics

Sisukord

Sissejuhatus	5
1 Portfelliteooria	6
1.1 Põhimõisted	7
1.1.1 Riskivaba ning riskantne investering, riskivaba investeringu tulumäär	7
1.1.2 Investeerimisportfell, portfelli tulumäär	8
1.1.3 Riskantse investeringu oodatav tulusus, portfelli tulusus, portfelli risk	9
1.1.4 Pikk ja lühike positsioon	11
1.2 Portfelliteooria kahe väärtpaberi korral	12
1.3 Portfelliteooria n väärtpaberi korral	19
1.4 Turuportfell, Sharpe'i suhtarv	26
2 Portfelliteooria rakendus Balti aktsiaturu näitel	28
2.1 Aktsiahindade käitumine ajalooliste andmete põhjal	28
2.2 Aktsiate tulususte ja standardhälvete leidmine ajalooliste andmete põhjal . . .	29
2.3 Optimaalsed portfellid ja efektiivsuskõver ajalooliste andmete põhjal	32
2.4 Portfellide väärtused võrdlusperioodidel	33
2.5 Portfellide tulusused ja standardhälbed võrdlusperioodidel	35
3 Kokkuvõte	41
4 Kasutatud kirjandus	42
5 Lisad	43
5.1 Töös vaadeldavad aktsiad	43
5.2 Tallinna aktsiate tulususte korrelatsioonimaatriks	44
5.3 Portfellide kaalud Balti aktsiate korral	45
5.4 Portfellide kaalud Tallinna aktsiate korral	47
5.5 Portfellide näitajad hindamisperioodidel	48
5.6 Portfellide domineerimine võrdlusperioodidel Tallinna aktsiate korral	49
5.7 Aktsiahindade käitumine Tallinna aktsiate puhul	50

5.8	Aktsiate tulumäärad ja standardhälbed ajalooliste andmete põhjal Tallinna börsil	50
5.9	Minimaalse dispersiooni joon Tallinna aktsiate ajalooliste andmete põhjal . . .	51
5.10	Portfellide väärtused Tallinna aktsiate korral võrdlusperioodil	52

Sissejuhatus

Paljud inimesed omavad mingisugust vara, näiteks autot, aktsiaid või kinnisvara. Kokku võib seda nimetada varade portfelliks. Üheks võimaluseks on omada eraldi väärtpaberite ehk aktsiate portfelli, kuhu kuuluvad erinevate börsil tegutsevate ettevõtete aktsiad. Suur osa inimestest, kes alustavad investeerimisega, ei analüüsi piisavalt ettevõtteid ning nende majandustulemusi ja tihtilugu ostetakse ainult mõne üksiku ettevõtte aktsiaid.

Tänaseks päevaks on välja töötatud mitmeid teooriaid, mille alusel koostada aktsiaportfelli nii, et see oleks võimalikult sobiv igale investorile. Üheks selliseks teooriaks on Markowitzi portfelliteooria. Selle teooria rakendamisel on võimalik koostada optimaalseid portfelle optimaalsuse erinevate tõlgenduste kaudu. Võimalik on koostada näiteks minimaalse riskiga portfell, minimaalse riskiga portfell etteantud tulutaseme korral või portfell Sharpe'i suhtarvu maksimeerimise korral.

Töö üheks eesmärgiks on anda ülevaade Markowitzi portfelliteooriast ehk kaasaegsest portfelliteooriast. Töö teiseks eesmärgiks on Balti aktsiaturu ajalooliste andmete põhjal leida aktsiate osakaalud optimaalsetes portfellides ning analüüsida kahe võrdlusperioodi andmete põhjal, millised portfellid oleks investorile olnud kõige kasulikumad.

Töö esimeses osas antakse ülevaade kaasaegsest portfelliteooriast. Tutvustatakse lähemalt portfelliteooriaga seonduvaid mõisteid ning optimaalsete portfelli koostamise kriteeriume ja tuletatakse aktsiate osakaalud optimaalses portfellis. Töö teises osas koostatakse erinevad optimaalsed aktsiaportfellid kasutades Baltimaade aktsiaturul kaubeldavate aktsiate ajaloolisi hindu ning seejärel võrreldakse optimaalsete portfelli tulusust ja standardhälvet võrdsete osakaalude ja juhuslike osakaaludega portfellidega.

Bakalaureusetöö analüüs on teostatud ja joonised on koostatud programmeerimiskeelega Python 3.7.1.

1 Portfelliteooria

Markowitzi portfelliteooria, mida tuntakse ka kaasaegse portfelliteooria või modernse portfelliteooria (MPT) nime all, väljatöötajaks oli Harry M. Markowitz. Harry Markowitz avaldas 1952. aastal artikli “*Portfolio Selection*” ajakirjas “*Journal of Finance*”, mis sai aluseks kaasaegsele portfelliteooriale. Aastal 1990 sai Markowitzist oma väljatöötatud teooria eest Nobeli majandusauhinna laureaat [1].

Markowitz eeldas, et enamus investoreid soovivad olla ettevaatlikud, kui nad investeerivad. Ta oletas, et nad tahavad saavutada võimalikult väikese riskiga võimalikult suurt tulu ehk maksimeerida tulu ja riski suhte. Kaasaegse portfelliteooria kohaselt ei ole mõistlik osta vaid ühe ettevõtte aktsiaid. Kui investor investeerib rohkem kui ühte aktsiasse, siis on võimalik saavutada investeringute riskide diversifitseerimise ehk hajutamise teel investeerimisportfelli väiksem risk võrreldes portfelli kuuluvate üksikute aktsiate riskidega sama tulususe juures [2].

B. O’Neill Wyss-i väite kohaselt on kaasaegne portfelliteooria üles ehitatud kahel eeldusel:

- 1) Suuremates varaklassides (aktsiad, kinnisvara, võlakirjad) ajalugu kordub ja seetõttu on ajalooline info aktsiahindade kohta investorile väga oluline;
- 2) samas majanduskeskonnas olevate ettevõtete aktsiad ei kasvata ega kaota oma väärtust üheaegselt - mingil perioodil mõne aktsia väärtus kasvab, mõne oma kahaneb [3].

Selle ajani, kuni Harry M. Markowitz töötas välja kaasaegse portfelliteooria, ei pööranud investorid olulist tähelepanu investeerimisportfelli koostamisele ning investeerimisega seotud riski juhtimisele. Portfellid moodustati juhuslikult: kui investor uskus, et aktsia hind võiks ajas tõusta, siis lisati see portfelli. Markowitz töötas välja matemaatilise protseduuri, mille abil on võimalik koostada efektiivsuskõver, kuhu kuuluvad optimaalsed portfellid. Optimaalsete portfellide korral on ette antud riskitaseme korral maksimeeritud portfelli võimalik oodatav tulusus [4].

1.1 Põhimõisted

1.1.1 Riskivaba ning riskantne investering, riskivaba investeringu tulumäär

Investeringud saab jagada kaheks: riskivabad investeringud ja riskantsed investeringud. Riskivabade investeringute puhul on tuleviku maksete suurused ja ajad, millal makseid teostatakse, teada ning puudub makserisk. Riskivabaks investeringuks loetakse näiteks investeerimist võlakirjadesse. Võlakirjade puhul maksab võlakirja väljaandja võlakirja omanikule kindlatel kokkulepitud aegadel intressimakseid ning lunastustähtajal tagastab võlakirja omanikule ka põhisumma. Riskantsete investeringute korral ei ole tuleviku rahavood üheselt määratud vaid on juhuslikud, investoril on võimalik saada nii tulu kui kanda ka kahju. Üheks riskantseks investeringuks loetakse investeerimist aktsiatesse [5].

Olgu ajahetkel $t = 0$ investeeritud riskivabalt rahasumma $V(0)$ ning tulevikus saame ajahetkel $t > 0$ mingi rahasumma $V(t)$, kus t on aeg aastates. Sellisel juhul on meil võimalik leida nii selle investeringu puhastulu kui ka investeringu tulusus koguperioodil. Puhastulu arvutatakse valemiga $V(t) - V(0)$, mis näitab saadud kasumit, kui $V(t) - V(0) > 0$ või kahjumit, kui $V(t) - V(0) < 0$. Investeringu **tulusus** koguperioodil $[0, t]$ arvutatakse valemiga

$$R = \frac{V(t) - V(0)}{V(0)}. \quad (1)$$

Tihtiilugu on erinevate investeringute pikkused erinevad ning selleks, et nad oleksid omavahel paremini võrreldavad, kasutatakse investeringute tulususe iseloomustamiseks **aastast tulumäära**, mida tähistatakse r . Aastane tulumäär leitakse vastavalt valemile

$$r = \frac{R}{t} \quad (2)$$

Lisaks on meil võimalik leida investeringute korral ka **pidevat tulusust**, mis leitakse valemiga:

$$R_{ln} = \ln \left(\frac{V(t)}{V(0)} \right) \quad (3)$$

ning sellest omakorda logaritmilist ehk **pidevat aastast tulumäära**, mis leitakse valemiga:

$$r_{ln} = \frac{R_{ln}}{t} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{V(t)}{V(0)} \right). \quad (4)$$

Praegusel juhul vaatasime olukorda, kus leidsime ühe perioodi $[0,t]$ tulumäära. Kui meil on, aga teada järjestikuste üksikute perioodide tulumäärad r_1, r_2, \dots, r_n , siis **kumulatiivne tulus** ehk kogutulus avaldub liittulumäärade korral kujul:

$$r = \prod_{i=1}^n (1 + r_i) - 1 \quad (5)$$

ning pidevate tulumäärade korral:

$$r_{ln} = \sum_{i=1}^n r_i. \quad (6)$$

1.1.2 Investeerimisportfell, portfelli tulumäär

Investeerimisportfelliks nimetatakse erinevate investeeringute kogumit. Vaatame nüüd kuidas leida kogu investeerimisportfelli tulusust, kui meil on teada üksikute investeeringute maksumused V_1, V_2, \dots, V_n hetkel $t = 0$ ja nende investeeringute **annualiseeritud** ehk aastased **tulumäärad** r_1, r_2, \dots, r_n . Portfelli maksumus hetkel $t = 0$ on leitav valemiga $V(0) = \sum_{i=1}^n V_i$. Investeeringute osakaalud portfellis on leitavad vastavalt $w_j = \frac{V_j}{V(0)}$, kus $j = 1, 2, \dots, n$. On ilmne, et $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. Investeerimisportfelli tulumäära arvutamine sõltub sellest, kas antud on üksikute investeeringute liht- või pidevad tulumäärad [5].

Juhul kui on antud annualiseeritud tulumäärad r_1, r_2, \dots, r_n , siis saame leida portfelli tulumäära arvutamise valemi kahest seosest. Esimesel juhul on investeerimisportfelli hind ajahetkel t leitav üksikute investeeringute tulumäärade kaudu valemiga $V(t) = \sum_{j=1}^n V_j(1 + r_j t)$ ning teisel juhul portfelli tulumäära kaudu valemiga $V(t) = V(0)(1 + rt)$. Nendest kahest seosest saame avaldada portfelli tulumäära järgmiselt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{t} \left(\frac{V(t)}{V(0)} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{V_j}{V(0)} \right) (1 + r_j t) - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n w_j + \sum_{j=1}^n w_j r_j - \frac{1}{t} = \sum_{j=1}^n w_j r_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Kui on antud investeeringute annualiseeritud pidevad tulumäärad $r_{ln,1}, r_{ln,2}, \dots, r_{ln,n}$, siis saame leida portfelli tulumäära arvutamise valemi taas kahest seosest. Esimesel juhul on investeerimisportfelli hind ajahetkel t leitav üksikute investeeringute tulumäärade kaudu valemiga

$V(t) = \sum_{j=1}^n V_j e^{r_{ln,j}t}$ ning teisel juhul portfelli tulumäära kaudu valemiga $V(t) = V(0)e^{r_{ln}t}$.

Nendest kahest seosest saame avaldada portfelli pideva tulumäära järgmiselt:

$$e^{r_{ln}t} = \sum_{j=1}^n w_j e^{r_{ln,j}t},$$

millest

$$r_{ln} = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{j=1}^n w_j e^{r_{ln,j}t} \right). \quad (8)$$

1.1.3 Riskantse investeringu oodatav tulusus, portfelli tulusus, portfelli risk

Riskantse investeringu korral saadav tulu $V(t)$ hetkel t on juhuslik suurus. Oletame, et V on diskreetne juhuslik suurus, mis võib omada n erinevat väärtust $V_j, j = 1, \dots, n$, kusjuures väärtus V_j saavutatakse tõenäosusega $p_j > 0$, kus $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ [5]. Oodatav tulu on siis V keskväertus

$$E(V) = \sum_{j=1}^n p_j V_j,$$

oodatav tulusus μ aga

$$\mu = E(R) = \frac{E(V) - V(0)}{V(0)}.$$

Saab näidata, et

$$\mu = \sum_{j=1}^n p_j R_j,$$

kus R_j on investeringu tulusus j -nda stsenaariumi korral. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E(V) - V(0)}{V(0)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j V_j - V(0)}{V(0)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j V_j - \sum_{j=1}^n p_j V(0)}{V(0)} = \sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{V_j - V(0)}{V(0)} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n p_j R_j. \end{aligned}$$

Portfelli oodatavaks tulususeks on üksikute portfelli kuuluvate aktsiate tulususte kaalutud keskmine, kus kaaludeks on aktsiate osatähtsused vaadeldavas portfellis. Kui aktsia osakaal on portfellis suur, siis mõjutab see rohkem ka portfelli oodatavat tulumäära; kui aktsia osakaal on portfellis väike, siis see aktsia mõjutab portfelli oodatavat tulumäära vähem. Riskantse

investeeringu korral on portfelli saadav tulu V_p hetkel t juhuslik suurus [5]. Portfelli oodatav tulu on siis

$$E(V_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(V_i),$$

kus w_i on i -nda aktsia osakaal portfellis, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, ning $E(V_i)$ on i -nda aktsia oodatav tulu. Portfelli oodatav tulusus μ_p on aga

$$\mu_p = E(R_p) = \frac{E(V_p) - V(0)}{V(0)}.$$

Saab näidata, et

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i), \quad (9)$$

kus $E(R_i)$ on i -nda aktsia oodatav tulusus. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{E(V_p) - V(0)}{V(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i E(V_i) - V(0)}{V(0)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i E(V_i) - \sum_{i=1}^n w_i V(0)}{V(0)} = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{E(V_i) - V(0)}{V(0)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i E(R_i). \end{aligned}$$

Selleks, et leida kahe aktsia tulususte vahelise lineaarse seose tugevust, kasutatakse korrelatsioonikordajat, mis leitakse vastavalt valemile

$$\rho_{ik} := \rho(R_i, R_k) = \frac{Cov(R_i, R_k)}{\sigma_i \cdot \sigma_k}, \quad (10)$$

kus $\rho(R_i, R_k)$ on i -nda ja k -nda aktsia tulususte vaheline korrelatsioonikordaja, $Cov(R_i, R_k)$ on kovariatsioon i -nda ja k -nda aktsia tulususte vahel ning σ_i ja σ_k vastavalt i -nda ja k -nda aktsia tulususte standardhälbed. Tulenevalt valemist (10), saame kovariatsioonikordaja leida järgmiselt:

$$Cov(R_i, R_k) = \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k.$$

Korrelatsioonikordaja asub piirides -1 kuni $+1$. Korrelatsioonikordaja $\rho(R_i, R_k) = -1$ näitab perfektset negatiivset korrelatsiooni kahe aktsia tulususte vahel ja korrelatsioonikordaja $\rho(R_i, R_k) = 1$ näitab perfektset positiivset korrelatsiooni ning kui $\rho(R_i, R_k) = 0$, siis seos kahe aktsia tulususte vahel puudub [1].

Riskantse investeringuga kaasneb alati risk ehk võimalus saada kahju. Riskil ei ole ühest definitsiooni ja seda võib tõlgendada erinevalt, näiteks kui ohtude kombinatsioon või kahju suuruse ebaselgust. Riski mõõtmiseks on samuti erinevaid võimalusi, näiteks tõenäosus kahju saada või kahju suurus mingi kindla tõenäosusega. Üheks enamlevinud võimaluseks mõõta investeringu riski on kasutada tulususe standardhälvet [5]. Ühe aktsia tulususe standardhälbe saame leida valemiga

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j (R_j - \mu)^2}. \quad (11)$$

Leiame portfelli tulususe standardhälbe (edaspidi portfelli standardhälve) arvutamise valemi. Portfelli tulusus, kui portfelli kuulub kaks aktsiat on

$$\mu_p = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2).$$

Leiame portfelli oodatava tulususe standardhälbe $\sigma_p = \sqrt{D(\mu_p)}$, kus D on dispersioon. Teame, et kehtib valem $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab Cov(X, Y)$, seega portfelli standardhälve kahe aktsia korral avaldub järgnevalt:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{D(\mu_p)} = \sqrt{w_1^2 D(R_1) + w_2^2 D(R_2) + 2w_1 w_2 Cov(R_1, R_2)} = \\ &= \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Leitud portfelli standardhälbe valemit (12) üldistades saame portfelli standardhälbe n väärt-paberi korral esitada kujul

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k}. \quad (13)$$

1.1.4 Pikk ja lühike positsioon

Investor võtab investeerimisel **pika positsiooni**, kui ta ostab endale ettevõtte väärtpaberi. Selleks, et pikk positsioon sulgeda, tuleb varasemalt ostetud ettevõtte väärtpaber maha müüa.

Pika positsiooni puhul investor loodab, et ostetud väärtpaberi hind ajas kasvab ning tulu saadakse ostu- ja müügihinna vahena [6].

Lühikene positsioon ehk lühikeseks müümine on laenatud väärtpaberi müümine lootuses, et selle hind langeb ning siis saab selle hiljem odavamalt tagasi osta ja omanikule tagastada. Investor teenib sellisel juhul kasumit müügi- ja ostuhinna erinevuse pealt. Lühikeseks müümise eelis seisneb selles, et on võimalik teenida kasumit ka langeval turul, küll aga on lühikeseks müümine seotud suurema riskiga, sest sisuliselt on võimalikud kaotused piiramatud. Pikaajalise keskmisena aktsiaturud tõusevad aastas 8 - 12%, seega on võimalik lühikeseks müümisega teenida kasumit vaid siis, kui see on hästi ajastatud. Üldjuhul ei loeta lühikeseks müümist investeerimiseks, vaid nimetatakse lühiajaliseks finantsspekulatsiooniks. Lisaks tuleb ära märkida, et kõikidel turgudel ei ole lühikeseks müümine lubatud [7].

1.2 Portfelliteooria kahe väärtpaberi korral

Järgnev peatükk põhineb raamatul [8], kui ei ole viidatud teisiti.

Vaatleme minimaalse dispersiooniga portfelli moodustamist juhul, kui portfelli kuulub kaks väärtpaberit.

Olgu x_1 ja x_2 vastavalt esimese ja teise riskantse väärtpaberi arv portfellis ning $S_1(0)$ ja $S_2(0)$ nende väärtpaberite hinnad ajahetkel $t = 0$. Sellisel juhul portfelli koguväärtus hetkel $t = 0$ on $V(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0)$. Tähistame i -nda väärtpaberi osakaalu (edaspidi kaal) portfelli koguväärtusest tähisega $w_i, i = 1, 2$:

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}. \quad (14)$$

Lihtne on veenduda, et kaalude summa $w_1 + w_2$ on alati võrdne ühega. Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis $0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2$; kui aga lühikeseks müümine on lubatud, siis võib üks kaaludest olla ka negatiivne.

Portfelli oodatav tulusus μ_p on vastavalt valemile (9) kujul:

$$\mu_p = E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2), \quad (15)$$

kus $E(R_1)$ ja $E(R_2)$ on vastavate väärtpaberite oodatavad tulusused. Portfelli tulumäära dispersioon avaldub kahe väärtpaberi korral valemi (12) põhjal:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2. \quad (16)$$

Riskantsete väärtpaberite korral eeldame, et tulusused R_1 ja R_2 on mittekonstantsed juhuslikud suurused ning sellisel juhul $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis portfelli oodatava tulumäära dispersioon σ_p^2 ei saa olla suurem portfelli kuuluvate väärtpaberite suurimast dispersioonist ehk

$$\sigma_p^2 \leq \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}. \quad (17)$$

Tõestame eelneva väite. Eeldame ilma üldisust kitsendamata, et $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$. Kuna $w_1, w_2 \geq 0$ ning $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$, siis

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ &\leq w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ &= (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2 \leq (w_1 + w_2)^2 \sigma_2^2 = \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Kui aga lühikese positsiooni võtmine on lubatud, siis portfelli dispersioon võib kaalude absoluutväärtuste kasvades olla kuitahes suur. Tõepoolest, võttes $w_1 = 1 - x, w_2 = x$ saame

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= ((1 - x)\sigma_1 + x\sigma_2)^2 + 2(1 - x)x\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2(1 - x)x\sigma_1\sigma_2 \geq \\ &\geq 2(1 - x)x\sigma_1\sigma_2(\rho_{12} - 1) = 2(x - 1)x\sigma_1\sigma_2(1 - \rho_{12}) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kui $x \rightarrow \infty$ ja $-1 \leq \rho_{12} < 1$.

Järgnevalt vaatame, kuidas tuleks leida portfelli kuuluvate väärtpaberite osakaalud nii, et

portfelli risk ehk standardhälve oleks võimalikult väike (ideaalsel juhul võrdne nulliga). Es-
malt vaatleme kahte erijuhtu: $\rho_{12} = -1$ ja $\rho_{12} = 1$.

Kui $\rho_{12} = 1$, siis valemi (16) põhjal

$$\sigma_p^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2.$$

Seega portfelli dispersioon võrdub nulliga juhul kui võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \quad (18)$$

leidub lahend. Kui $\sigma_1 \neq \sigma_2$, siis süsteem (18) on lahenduv ning lahend on kujul

$$w_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Kuna üks kaaludest on alati negatiivne, siis riskivaba portfelli moodustamiseks peab lühikeseks
müümine olema lubatud. Portfelli oodatav tulusus riski minimiseerivate kaalude korral on

$$\mu_p = \frac{-\sigma_2\mu_1 + \sigma_1\mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (19)$$

Osutub et minimaalse riskiga portfelli oodatav tulusus võib olla negatiivne ka siis, kui üksikute
aktsiate oodatavad tulusused on positiivsed. Valemist (19) näeme, et $\mu_p < 0$, kui $\sigma_1 > \sigma_2$ ja
 $\mu_1 > \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2$ või kui $\sigma_1 < \sigma_2$ ja $\mu_1 < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2$. Juhul kui $\sigma_1 = \sigma_2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, siis

$$\mu_p = \frac{-\sigma_2\mu_1 + (\sigma_2 + \epsilon)\mu_2}{\sigma_2 + \epsilon - \sigma_2} = \frac{-\sigma_2\mu_1 + (\sigma_2 + \epsilon)\mu_2}{\epsilon}.$$

Juhul kui $\mu_1 > \mu_2$ saame, et $\mu_p \rightarrow -\infty$ kui $\epsilon \rightarrow 0$. Seega võib teataval juhul portfelli oodatav
tulusus olla kuitahes negatiivne.

Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis minimaalse riskiga portfelli saadakse nii,
et suurima dispersiooniga aktsia osakaal on 0 ning sel juhul

$$\sigma_p^2 = \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}. \quad (20)$$

Kui $\sigma_1 = \sigma_2$, siis on ilmne, et portfelli dispersioon on mistahes kaalude korral sama: $\sigma_p^2 = \sigma_1^2$.

Vaatame nüüd juhtu, kui $\rho_{12} = -1$. Sel juhul on portfelli dispersioon

$$\sigma_p^2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2$$

ning kaalud, mille korral portfelli dispersioon on võrdne nulliga, saame leida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2 = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \quad (21)$$

lahendina. Süsteem (21) on lahenduv mistahes $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ korral ning esitatav kujul

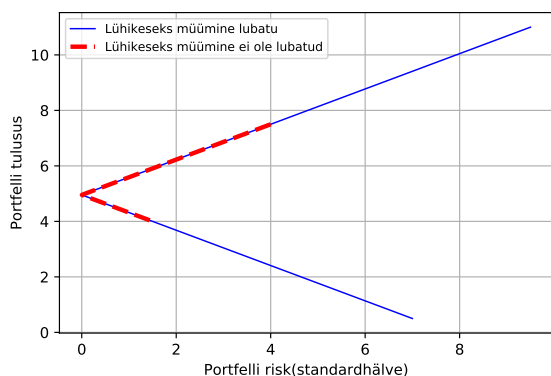
$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Kuna antud juhul on mõlemad kaalud positiivsed, siis juhul kui aktsiate tulumäärad käituvad vastassuunaliselt, on portfelli riski võimalik nulli viia ka juhul, kui lühikese positsiooni võtmine on keelatud. Portfelli oodatav tulusus riski minimiseerivate kaalude korral on

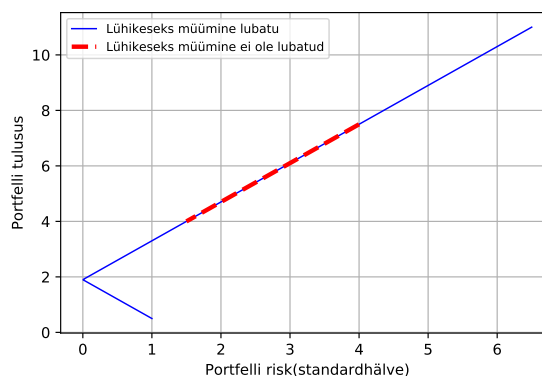
$$\mu_p = \frac{\sigma_2\mu_1 + \sigma_1\mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

ning näeme, et portfelli oodatav tulusus jääb üksikute väärtpaberite oodatavate tulususte vahele: $\min\{\mu_1, \mu_2\} \leq \mu_p \leq \max\{\mu_1, \mu_2\}$.

Portfelli riski ja oodatava tulumäära vahelist seost $\rho_{12} = 1$ ja $\rho_{12} = -1$ korral sõltuvalt kaaludest illustreerib joonis 1.



(a) $\rho_{12} = -1$



(b) $\rho_{12} = 1$

Joonis 1: Portfelli oodatava tulumäära ja riski vaheline seos erijuhtudel $\rho_{12} = 1$, $\rho_{12} = -1$.

Vaatleme nüüd minimaalse riskiga portfelli moodustamist juhul, kui $-1 < \rho_{12} < 1$. Tähistame $w_2 = x$ ning $w_1 = (1 - x)$, siis portfelli dispersioon on esitatav kujul:

$$\sigma_p^2 = (1 - x)^2 \sigma_1^2 + x^2 \sigma_2^2 + 2(1 - x)x \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2. \quad (22)$$

Lemma 1. *Olgu $-1 < \rho_{12} < 1$. Kui lühikese positsiooni võtmine on lubatud, siis portfelli risk on minimaalne, kui*

$$w_2 := x_0 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}. \quad (23)$$

Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis

$$x_{min} = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0 < 0, \\ x_0, & \text{kui } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ 1, & \text{kui } x_0 > 1. \end{cases}$$

Tõestus. Leiame funktsiooni $f(x) = (1 - x)^2 \sigma_1^2 + x^2 \sigma_2^2 + 2(1 - x)x \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$ ekstreemumkohad võrrandist

$$f'(x) = -2(1 - x)\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 2(2x - 1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Viimase võrrandi ainsaks lahendiks on x_0 . Kuna funktsiooni $f(x)$ teine tuletis

$$f''(x) = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0,$$

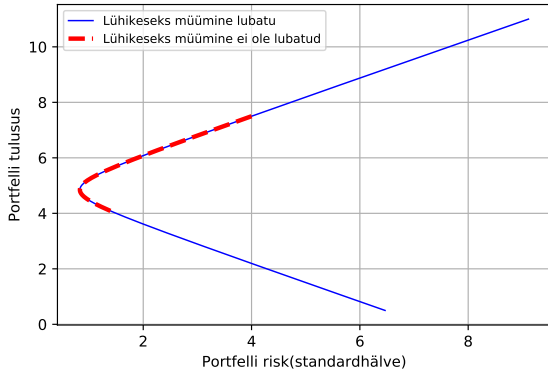
siis on punkt x_0 funktsiooni $f(x)$ miinimumkohaks. Kuna funktsioon $f(x)$ on $x < x_0$ korral kahanev ja $x > x_0$ korral kasvav, siis lemma teine väide on ilmne. \square

Kui $w_2 = x_0$, siis portfelli minimaalne dispersioon avaldub kujul

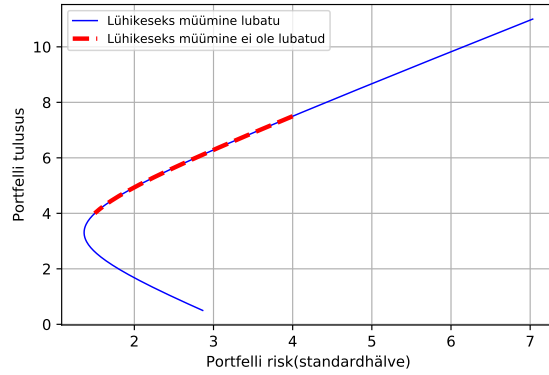
$$\begin{aligned} \sigma_{p,min}^2 &= \left(1 - \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \left(1 - \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\right) \left(\frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\right) \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = \\ &= -\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\rho_{12}^2 - 1)}{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2}. \end{aligned}$$

Portfelli minimaalne dispersioon võrdub nulliga juhul, kui $\sigma_1 = 0$ või $\sigma_2 = 0$ või $\rho_{12} = -1$ või $\rho_{12} = 1$. Sellist olukorda ei saa aga tekkida, kuna $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ ja $-1 < \rho_{12} < 1$.

Joonisel 2 on esitatud portfelli oodatava tulumäära ja riski vahelised seosed juhul kui $-1 < \rho_{12} < 1$ ning $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 7.5$, $\sigma_1 = 1.5$ ja $\sigma_2 = 4$.



(a) $\rho_{12} = -0.7$



(b) $\rho_{12} = 0.7$

Joonis 2: Portfelli oodatava tulumäära ja riski vaheline seos juhtudel $\rho_{12} = -0.7$, $\rho_{12} = 0.7$.

Uurime nüüd, millistel juhtudel on võimalik koostada portfelli, mille risk oleks väiksem kui portfelli kuuluvate üksikute väärtpaberite riskid.

Lemma 2. Olgu $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kui $-1 \leq \rho_{12} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis on võimalik moodustada portfelli nii, et $\sigma_p < \sigma_1$, ilma et lühikeseks müümine oleks lubatud;
2. Kui $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis iga moodustatud portfelli korral $\sigma_p \geq \sigma_1$;
3. Kui $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, siis on võimalik lühikeseks müümist kasutades moodustada portfelli nii, et $\sigma_p < \sigma_1$. Iga portfelli jaoks, mille korral lühikeseks müümine ei ole lubatud, kehtib $\sigma_p \geq \sigma_1$.

Tõestus.

1. Olgu $-1 \leq \rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Näitame, et siis $0 < x_0 < \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$. Vaadeldes optimaalset kaalu x_0 (valem (23)) kui funktsiooni $x_0(\rho_{12})$ korrelatsioonikordajast ρ_{12} , saame võrduse (23)

esitada kujul

$$x_0(\rho_{12}) = \frac{a - b\rho_{12}}{c - d\rho_{12}},$$

kus $a = \sigma_1^2$, $b = \sigma_1\sigma_2$, $c = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ning $d = 2\sigma_1\sigma_2$. Leides funktsioonist $x_0(\rho_{12})$ tuletise saame

$$\begin{aligned} x_0'(\rho_{12}) &= \frac{a - b\rho_{12}}{c - d\rho_{12}} = \frac{-b(c - d\rho_{12}) - (-d)(a - b\rho_{12})}{(c - d\rho_{12})^2} = \\ &= \frac{ad - bc}{(c - d\rho_{12})^2}, \end{aligned}$$

Kuna leitud tuletise märk sõltub ainult lugejast, siis vaatame seda lähemalt:

$$\begin{aligned} ad - bc &= \sigma_1^2 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \\ &= 2\sigma_1^2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2\sigma_1\sigma_2 = \\ &= (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\sigma_1\sigma_2 < 0. \end{aligned}$$

Seega $x_0(\rho_{12})$ on kahanev funktsioon. Kuna x_0 saavutab oma maksimumi kui $\rho_{12} = -1$, siis sellest tulenevalt

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \leq \\ &\leq \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} = \\ &= \frac{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \\ &= \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)} < 1. \end{aligned}$$

Kuna $0 < x_0 < 1$ siis saame minimaalse riskiga portfelli moodustada ilma lühikeseks müümist kasutamata. Et portfelli dispersioon on argumenti x suhtes ruutfunktsioon ning x_0 asub lõigu $[0, 1]$ sisepunktis, siis kehtib võrratus $\sigma_p < \sigma_1$.

2. Kui $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis $x_0 = 0$. Iga portfelli jaoks kehtib tingimus $\sigma_p \geq \sigma_1$, kuna σ_1^2 on minimaalne dispersioon.
3. Kui $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, siis sellest tulenevalt

$$x_0 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} < 0,$$

ehk minimaalse riskiga portfelli, mis vastab parameetritele x_0 , sisaldab ühe väärtpaberi lühikeseks müümist ja rahuldab tingimust $\sigma_p < \sigma_1$. Portfelli, mis ei sisalda lühikeseks müümist, rahuldab tingimust $\sigma_p \geq \sigma_1$.

□

Märgime, et kui portfelli kuulub üks riskivaba ja üks riskantne väärtpaber, siis

$$\begin{aligned}\mu_p &= w_1\mu_1 + w_2r_{rv}, \\ \sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

kus r_{rv} on riskivaba väärtpaberi tulumäär. Juhul kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis sõltuvalt kaaludest varieerub selle portfelli dispersioon 0 ja σ_1^2 vahel.

1.3 Portfelliteooria n väärtpaberi korral

Järgnev peatükk põhineb raamatul [8], kui ei ole viidatud teisiti.

Vaatleme nüüd üldjuhtu, kus portfelli kuulub $n \geq 2$ väärtpaberit. Olgu x_i i -nda väärtpaberi arv portfellis, $S_i(0)$ i -nda väärtpaberi hind ajahetkel $t = 0$ ning $V(0) = \sum_{i=1}^n x_i S_i(0)$ on portfelli kogumaksumus ajahetkel $t = 0$. Siis nende väärtpaberite kaalud portfellis esituvad valemiga

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Tähistame kaalude vektori

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n].$$

Tingimuse, et kaalude summa võrdub ühega, saame esitada kujul

$$\mathbf{1} = \mathbf{u}\mathbf{w}^T, \quad (25)$$

kus \mathbf{u} on n -mõõtmeline ühikvektor:

$$\mathbf{u} = [1, 1, \dots, 1].$$

Olgu portfelli kuuluvate väärtpaperite tulusused R_1, \dots, R_n ja nende oodatavad tulusused $\mu_i = E(R_i)$, kus $i = 1, \dots, n$. Tähistame oodatavate tulususte vektori

$$\mathbf{m} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n].$$

Olgu \mathbf{C} tulusustevaheline $n \times n$ -mõõtmeline kovariatsioonimaatriks kujul

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

kus $c_{ij} = Cov(R_i, R_j)$. Kovariatsioonimaatriks on sümmeetriline, kuna $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ ja positiivselt määratud. Sellest saame järeldada, et kovariatsioonimaatriksil \mathbf{C} leidub pöördmaatriks \mathbf{C}^{-1} . Diagonaali elementideks on tulususte dispersioonid $c_{ii} = D(R_i)$.

Portfelli oodatav tulusus $\mu_p = E(R_p)$ avaldub nüüd kujul

$$\mu_p = E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mathbf{m}\mathbf{w}^T \quad (26)$$

ning portfelli dispersioon avaldub kujul

$$\sigma_p^2 = D(R_p) = D\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i, \sum_{j=1}^n w_j R_j\right) = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j c_{ij} = \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T. \quad (27)$$

Teoreem 1. Kui $\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T \neq 0$, siis portfelli dispersioon on minimaalne juhul, kui kaalud on leitud vastavalt valemile

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T}.$$

Tõestus. Portfelli minimaalse dispersiooni leidmiseks peame lahendama tingliku ekstreemumülesande kujul

$$F(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T \rightarrow \min \quad (28)$$

tingimusel

$$\mathbf{u}\mathbf{w}^T = 1. \quad (29)$$

Tingliku ekstreemumülesande

$$\min\{F(x) : g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (30)$$

saame lahendada Lagrange'i kordajate meetodiga, mis seisneb ülesande (30) lahendi või lahendite otsimises Lagrange'i funktsiooni

$$G(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

statsionaarsete punktide hulgast. Vektorit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ nimetatakse Lagrange'i kordajate vektoriks. Lihtne on veenduda, et ülesande

$$\min\{F(x) : g_i(x) - c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (31)$$

korrall võime Lagrange'i funktsiooni vaadelda ka kujul

$$G_1(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

ning otsida ülesande (31) lahendit võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1(x_j, \lambda)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ g_i(x) = c_i, & i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

lahendite hulgast, kuna

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x_j, \lambda)}{\partial x_j} &= \frac{\partial G_1(x_j, \lambda)}{\partial x_j} && \text{ning} \\ \frac{\partial G(x_j, \lambda)}{\partial \lambda} &= g_i(x) - c_i. \end{aligned}$$

Ülesande (28)-(29) korrall on Lagrange'i funktsioon kujul

$$G_1(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{wCw}^T - \lambda \mathbf{uw}^T.$$

Leiame funktsiooni G_1 osatuletised kaalude järgi ja võrdsustame need nulliga. Saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{wCw}^T - \lambda \mathbf{uw}^T)}{\partial \mathbf{w}} &= \left(\left[\frac{\partial(\sum_{i,j}^n w_i w_j c_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^n w_i)}{\partial w_k} \right]_{k=1}^n \right)^T = \\ &= \left(\left[2 \sum_i^n w_i c_{ik} - \lambda \right]_{k=1}^n \right)^T = 2\mathbf{wC} - \lambda \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

millest saame

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1}, \quad (32)$$

Asendades saadud kaalud tingimusse $\mathbf{u} \mathbf{w}^T = 1$ ning arvestades, et \mathbf{C}^{-1} on sümmeetriline maatriks (kuna maatriks \mathbf{C} on sümmeetriline), saame

$$1 = \frac{\lambda}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}.$$

Asendades leitud λ valemisse (32), saamegi algselt toodud valemi kaalude kohta. \square

Teoreem 1 annab portfelli dispersiooni minimiseerivate kaalude valemi, kui lühikeseks müümine on lubatud. Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis optimaalsete kaalude leidmiseks tuleb lahendada mittelineaarne planeerimisülesanne (ruutplaneerimis ülesanne) kujul

$$\min\{\mathbf{w} \mathbf{C} \mathbf{w}^T : \mathbf{u} \mathbf{w}^T = 1, \mathbf{w} \geq 0\}.$$

Teoreem 2. Kui $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \\ \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \end{vmatrix} \neq 0$, siis etteantud oodatava tulususega μ_p minimaalse riskiga portfelli kaalud on leitavad vastavalt valemile

$$\mathbf{w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \\ \mu_p & \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \end{vmatrix} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} + \begin{vmatrix} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & 1 \\ \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & \mu_p \end{vmatrix} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \\ \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T & \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \end{vmatrix}}. \quad (33)$$

Tõestus. Antud ülesande korral on Lagrange'i funktsioon kujul

$$G_1(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w} \mathbf{C} \mathbf{w}^T - \lambda_1 \mathbf{u} \mathbf{w}^T - \lambda_2 \mathbf{m} \mathbf{w}^T,$$

kus λ_1 ja λ_2 on Lagrange kordajad. Leides G_1 osatuletised kaalude w_i järgi ja võrdsustades need nulliga saame vajaliku tingimuse miinimumi leidmiseks, $2\mathbf{w} \mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{u} - \lambda_2 \mathbf{m} = 0$, millest järeldub, et

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1}. \quad (34)$$

Asendades saadud võrduse valemitesse (26) ja (25), saame lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} 1 &= \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \\ \mu_p &= \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \end{cases}$$

tundmatute λ_1 ja λ_2 jaoks. Lahendame selle süsteemi. Avaldame esmalt esimesest võrdusest $\frac{\lambda_1}{2}$:

$$1 = \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} = \frac{1 - \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}.$$

Asendades leitud $\frac{\lambda_1}{2}$ teise võrrandisse, leiame $\frac{\lambda_2}{2}$:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \left(\frac{1 - \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T} \right) \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \Rightarrow \\ \mu_p &= \frac{\mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T} - \frac{\lambda_2}{2} \frac{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T} + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \Rightarrow \\ \frac{\lambda_2}{2} &= \frac{\mu_p \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T - \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T - \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}. \end{aligned}$$

Järgmiseks asendame leitud $\frac{\lambda_2}{2}$ tagasi, et saada lõplik $\frac{\lambda_1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{2} &= \frac{1 - \frac{\mu_p \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T - \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T - \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T} = \\ &= \frac{\mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T - \mu_p \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T}{\mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T - \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}^T \mathbf{m} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^T}. \end{aligned}$$

Asendades leitud lahendid $\frac{\lambda_1}{2}$ ja $\frac{\lambda_2}{2}$ võrrandisse (34) olemegi saanud valemi kaalude leidmiseks. \square

Minimaalse dispersiooni jooneks nimetatakse kõikide portfelli hulka, mis minimiseerivad portfelli dispersiooni etteantud oodatava tulususe korral.

Teoreem 3. *Võttes minimaalse dispersiooni joonelt kaks erinevat portfelli kaaludega \mathbf{w}' ja \mathbf{w}'' , siis minimaalse dispersiooni joon koosneb sellistest ja ainult sellistest portfelliidest, mille kaalud on $c\mathbf{w}' + (1-c)\mathbf{w}''$ iga $c \in \mathbb{R}$.*

Tõestus. Olgu \mathbf{w}' ja \mathbf{w}'' kahe erineva portfelli kaalud, mis kuuluvad minimaalse dispersiooni joonele ning mille oodatavad tulusused on vastavalt $\mu_{p'}$ ja $\mu_{p''}$, kus $\mu_{p'} \neq \mu_{p''}$. Kuna valemi

(33) põhjal on minimaalsete kaalude vektor esitatav kujul $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu_p + \mathbf{b}$, siis

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' &= \mathbf{a}\mu_{p'} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{w}'' &= \mathbf{a}\mu_{p''} + \mathbf{b},\end{aligned}$$

Lahendades leitud võrrandid \mathbf{a} ja \mathbf{b} suhtes saame

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{w}' - \mathbf{w}''}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}$$

ning

$$\mathbf{b} = \mathbf{w}' - \mathbf{a}\mu_{p'} = \mathbf{w}' - \frac{\mathbf{w}' - \mathbf{w}''}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\mu_{p'}.$$

Portfell oodatava tulususega μ_p ning kaaludega \mathbf{w} asub minimaalse dispersiooni joonel siis ja ainult siis, kui

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu_p + \mathbf{b}.$$

Asendades viimasesse võrrandisse eelnevalt leitud \mathbf{a} ja \mathbf{b} saame

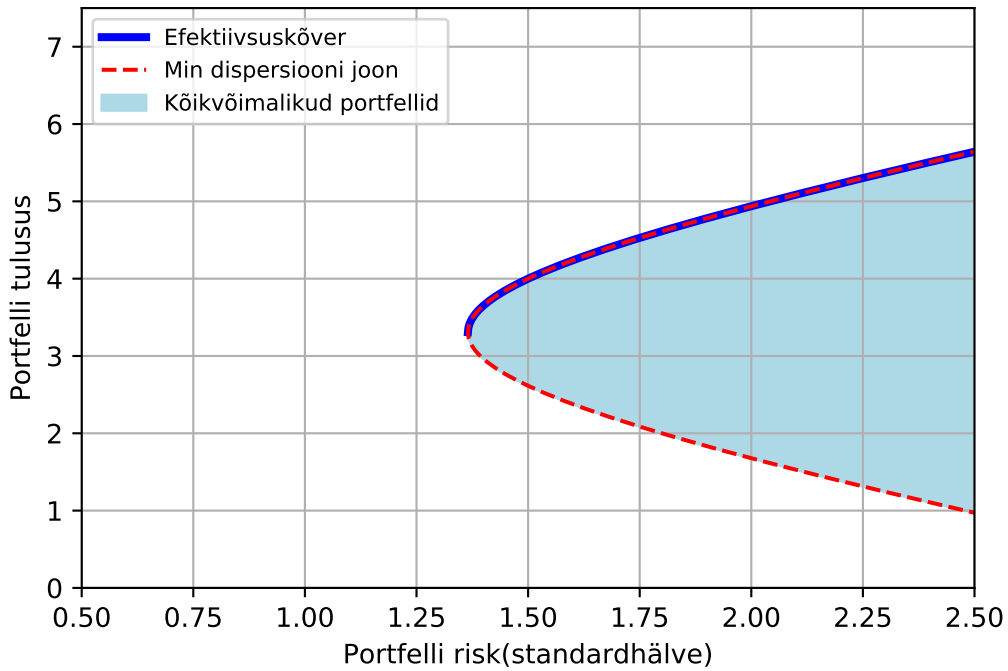
$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{\mathbf{w}' - \mathbf{w}''}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\mu_{p'} + \mathbf{w}' - \frac{\mathbf{w}' - \mathbf{w}''}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\mu_{p'} = \\ &= \left(1 + \frac{\mu_p}{\mu_{p'} - \mu_{p''}} - \frac{\mu_{p'}}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}' + \left(\frac{\mu_{p'} - \mu_p}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}'' = \\ &= \left(\frac{\mu_p - \mu_{p''}}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}' + \left(\frac{\mu_{p'} - \mu_p}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}'' = \\ &= \left(\frac{\mu_p - \mu_{p''}}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}' + \left(1 - \frac{\mu_p - \mu_{p''}}{\mu_{p'} - \mu_{p''}}\right)\mathbf{w}'' = \\ &= c\mathbf{w}' + (1 - c)\mathbf{w}'',\end{aligned}$$

kus $c = \frac{\mu_p - \mu_{p''}}{\mu_{p'} - \mu_{p''}} \in \mathbb{R}$. □

Kui investoril on võimalus valida kahe aktsia vahel, siis ratsionaalne investor valiks aktsia, mille oodatav tulusus on suurem ja risk väiksem. Aktsia oodatava tulususega μ_1 ja standardhälbega σ_1 **domineerib** teise aktsia oodatava tulususega μ_2 ja standardhälbega σ_2 üle, kui

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad \text{ja} \quad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Sama idee on ülekantav ka portfelliudele. Portfelli nimetatakse **efektiivseks**, kui ei leidu ühtegi teist portfelli peale tema enda, mis domineeriks tema üle. Siit saamegi efektiivsuskõvera mõiste. **Efektiivsuskõveraks** nimetatakse kõigi efektiivsete portfelliude kogumit kõigi võimalike lubatud portfelliude hulgas. Minimaalse dispersiooni joon ja efektiivsuskõver on kujutatud joonisel 3.



Joonis 3: Efektiivsuskõver.

Teoreem 4. *Efektiivsuskõverale kuuluvate portfelliude kaalud \mathbf{w} , välja arvatud minimaalse dispersiooniga portfelli, rahuldavad tingimust*

$$\gamma \mathbf{w} \mathbf{C} = \mathbf{m} - \mu \mathbf{u},$$

kus $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ ja $\gamma > 0$.

Tõestus. Olgu \mathbf{w} mingi efektiivsuskõverale kuuluva portfelli kaalud, välja arvatud minimaalse riskiga portfelli. Portfelli oodatav tulusus on $\mu_p = \mathbf{m} \mathbf{w}^T$ ning standardhälve $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w} \mathbf{C} \mathbf{w}^T}$. Tõmbame nüüd puutuja efektiivsuskõverale läbi punkti, mis esindab valitud portfelli. Puutuja

lõikab vertikaalset telge mingis punktis μ ning puutuja tõus on $\frac{\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu}{\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T}}$. Tõus on maksimaalne kõigi sirgete hulgas, mis läbivad vertikaalteljel punkti μ ja lõikavad mõnda portfelli kõigi portfelli kogumis. Seega otsime suuruse $\frac{\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu}{\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T}}$ maksimumi üle kõigi \mathbf{w} kitsendusel, et $\mathbf{u}\mathbf{w}^T = 1$. Selleks kasutame Lagrange'i kordajate meetodit ja moodustame vastava Lagrange'i funktsiooni

$$G_1(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu}{\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T}} - \lambda \mathbf{u}\mathbf{w}^T,$$

kus λ on Lagrange kordaja. Leiame funktsiooni G_1 osatuletised kaalude \mathbf{w} järgi ja võrdsustame need nulliga ning saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\mathbf{m}\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T} - (\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu)\frac{2\mathbf{w}\mathbf{C}}{2\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T}}}{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T} - \lambda \mathbf{u} = \\ &= \frac{\mathbf{m}}{\sigma_p} - \frac{(\mu_p - \mu)\mathbf{w}\mathbf{C}}{\sigma_p^3} - \lambda \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

millest järeldub, et

$$\mathbf{m} - \lambda \sigma_p \mathbf{u} = \frac{(\mu_p - \mu)}{\sigma_p^2} \mathbf{w}\mathbf{C}. \quad (35)$$

Korrutades nüüd viimast võrrandit paremalt poolt suurusega \mathbf{w}^T ning kasutades teadaolevaid kitsendusi saame leida λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} - \lambda \sigma_p \mathbf{u} &= \frac{(\mu_p - \mu)}{\sigma_p^2} \mathbf{w}\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{m}\mathbf{w}^T - \lambda \sigma_p \mathbf{u}\mathbf{w}^T = \frac{(\mu_p - \mu)}{\sigma_p^2} \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{m}\mathbf{w}^T - \lambda \sigma_p &= \frac{(\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu)}{\sigma_p^2} \sigma_p^2 \Rightarrow \lambda \sigma_p = \mu \Rightarrow \lambda = \frac{\mu}{\sigma_p}. \end{aligned}$$

Asendades leitud λ võrrandisse (35), saamegi teoreemi väites esitatud tingimuse

$$\gamma \mathbf{w}\mathbf{C} = \mathbf{m} - \mu \mathbf{u},$$

kus $\gamma = \frac{\mu_p - \mu}{\sigma_p^2}$. Kuna puutuja tõus on positiivne ning seega $\mu_p > \mu$, siis saame, et $\gamma > 0$. \square

1.4 Turuportfell, Sharpe'i suhtarv

Eeldame nüüd, et lisaks aktsiatele on meil portfellis ka üks riskivaba investeering. Tähistame riskivaba investeeringu tulususe tähisega r_{rv} . Koosnegu portfell riskivabast investeeringust ja riskantsetest aktsiatest koostatud portfelist, mille oodatav tulusus on μ_p ja standardhälve

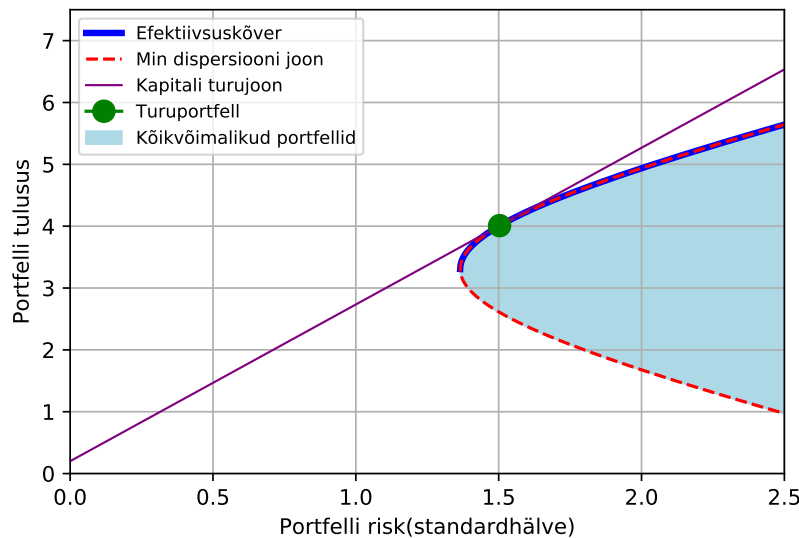
$\sigma_p > 0$. Tõmmates läbi punkti $(0, r_{rv})$ sirge (vt. joonis 4), mis oleks puutujaks efektiivsusukõverale, oleme leidnud efektiivsusukõveral puutuja portfelli, mida nimetatakse veel ka **turuportfelliks** ning puutuja sirget nimetatakse **kapitali turujooneks** (*capital market line*). Kapitali turujoon ning turuportfell on kujutatud joonisel 4. Kapitali turujoon on efektiivsusukõveraks, kui investeringute portfelli on võimalik lisada lisaks riskantsetele investeringutele ka riskivaba investering. Kapitali turujoon on esitatav võrrandiga

$$\mu = r_{rv} + \frac{\mu_p - r_{rv}}{\sigma_p} \sigma,$$

kus μ ja σ on vastavalt riskivaba investeringut sisaldava portfelli oodatav tulusus ja standardhälve, μ_p ja σ_p on turuportfelli oodatav tulusus ja standardhälve ning r_{rv} on riskivaba intressimäär. Kapitali turujoone tõusu $\frac{\mu_p - r_{rv}}{\sigma_p}$ tuntakse **Sharpe'i suhtarvu** (*Sharpe ratio*) nime all [9]. Üheks võimaluseks leida optimaalne portfelli on moodustada portfelli nii, et Sharpe'i suhtarv oleks suurim ehk võtta optimaalseks portfelli turuportfell. Selleks, et leida turuportfellis aktsiate osakaalusid, peame lahendama mittelineaarse planeerimisülesande kujul

$$\max \left\{ \frac{\mathbf{m}\mathbf{w}^T - r_{rv}}{\sqrt{\mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T}}, \quad \mathbf{u}\mathbf{w}^T = 1 \right\},$$

kus lühikeseks müümise keelamise korral lisandub tingimus $\mathbf{w} \geq 0$.



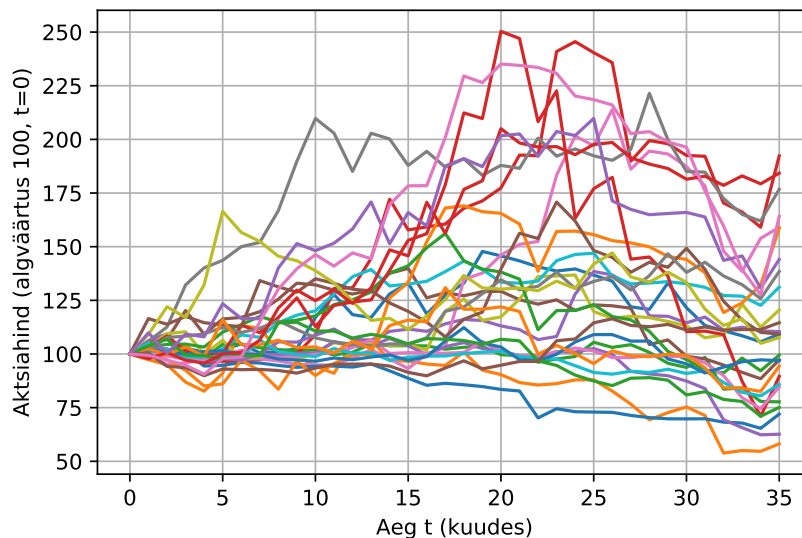
Joonis 4: Kapitali turujoon.

2 Portfelliteooria rakendus Balti aktsiaturu näitel

Käesolevas bakalaureusetöös kasutatakse analüüsi läbiviimiseks ja erinevate kriteeriumide alusel optimaalsete portfelli koostamiseks Balti aktsiaturul kaubeldavaid aktsiaid ning nende hindu perioodil märts 2016 - veebruar 2019. Balti aktsiaturul on võimalik kaubelda 33 põhimekirja kuuluva aktsiaga. Bakalaureusetöö analüüsi ossa kaasati lõpuks 27 erinevat aktsiat (Lisa 5.1), millel eksisteeris kauplemisajalugu töös vaadeldaval perioodil. Optimaalseid portfelle (täpsemalt portfelli tulususi ja standardhälbeid) võrreldi nii omavahel kui ka võrdsete kaaludega ja juhuslikult valitud kaaludega portfelli dega kahel perioodil (edaspidi võrdlusperiood). Esimene võrdlusperiood on märts 2018 - august 2018 ning teine võrdlusperiood on september 2018 - veebruar 2019. Optimaalsete portfelli kaalud leiti niinimetatud hindamisperioodil aktsiate hindade põhjal. Esimese võrdlusperioodi korral oli hindamisperioodiks märts 2016 - veebruar 2018 ning teise võrdlusperioodi korral märts 2016 - august 2018. Nii tulususte, standardhälvete kui kovariatsioonimaatriksi leidmisel kasutatakse aktsiate hindu kuu esimese kauplemispäeva algul. Töös vaadeldakse optimaalsete portfelli koostamist kahel juhul. Esiteks, kasutades kõiki 27 Balti turu aktsiat, mis on antud töösse kaasatud, ning teiseks juhtu, kus portfelli moodustati vaid Tallinna börsil kaubeldavate aktsiate baasil.

2.1 Aktsiahindade käitumine ajalooliste andmete põhjal

Aktsia hind sõltub paljudest erinevatest teguritest: majanduse üldolukorrast, poliitilisest olukorrast, ettevõtte enda turundustegevusest ja paljust muust. Tulenevalt eelnevalt toodud punktidest võivad aktsiate hinnad ajas nii tõusta kui ka langeda. Joonisel 5 on väljatoodud aktsiahindade käitumine, kui vaatluse all on kõik töös kasutatavad Balti aktsiaturu aktsiad. Aktsiad, mille koduturuks on Tallinn, on toodud joonisel 10 (Lisa 5.6). Kuna ühe aktsia hind võib olla teise aktsia hinnast kordades erinev, siis aktsiate hindade käitumisest parema ülevaate saamiseks on kõikide aktsiate alghinnad võrdsustatud 100-ga ning seejärel vaadeldud nende käitumist 3 aasta jooksul. Töös vaadeldavatel hindamisperioodidel oli aktsiaturg kasvava trendiga ning võrdlusperioodidel oli tegemist pigem langeva aktsiaturuga. Jooniselt 5 näeme, et umbes pooled aktsiad on võrreldes alghetkega oma väärtuses langenud ja teine pool oma väärtuses kas kasvanud või jäänud samaks.



Joonis 5: Aktsiate hindade käitumine Balti turul perioodil märts 2016 - veebruar 2019.

2.2 Aktsiate tulususte ja standardhälvete leidmine ajalooliste andmete põhjal

Praktikas eeldatakse sageli, et aktsiate tulusused eelmistest perioodidest esindavad tulevase perioodi tulususte jaotust. Sellise eelduse põhjal on meil võimalik leida aktsia oodatav tulusus tuginedes ajaloolistele andmetele. Ajalooliste andmete baasil tulususe leidmiseks kasutatakse järgmist valemit [1]:

$$R_{i,j} = \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{P_{i-1,j}}, \quad (36)$$

kus

$R_{i,j}$ - j -nda aktsia i -nda kuu tulusus,

$P_{i,j}$ - j -nda aktsia hind i -ndal kuul,

$P_{i-1,j}$ - j -nda aktsia hind $(i - 1)$ -ndal kuul.

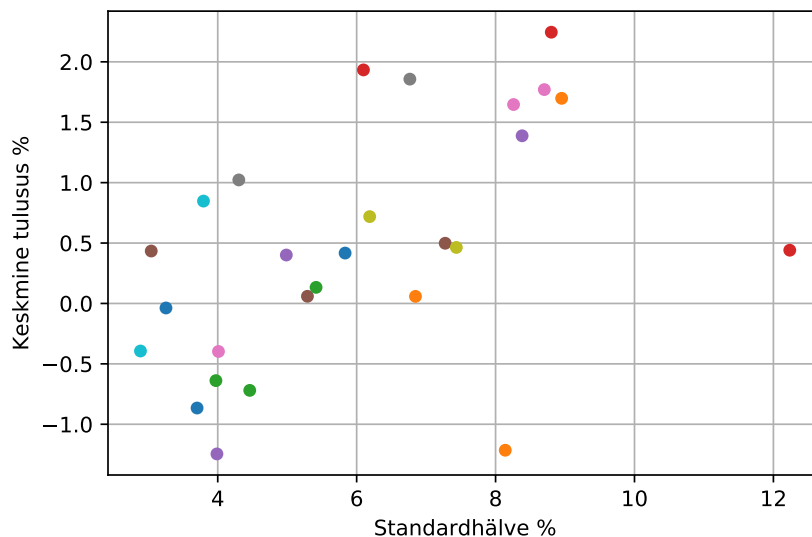
Aktsia keskmise kuutulususe valem on seega

$$R_j = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_{ij}, \quad (37)$$

kus R_j on j -nda aktsia keskmine kuutulusus ning T on kuude arv vastaval perioodil. Üksiku aktsia keskmise kuutulususe standardhälve arvutatakse valemist

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (R_{ij} - R_j)^2}. \quad (38)$$

Jooniselt 6 näeb Balti aktsiate keskmisi kuutulususi ja standardhälbeid perioodil märts 2016 - veebruar 2019. Tallinna aktsiate korral on info toodud joonisel 11 (Lisa 5.8). Joonis kinnitab üldist fakti, et mida suurem tulusus, seda suurem standardhälve ehk risk. Mõlemal juhul osutus kõige parema keskmise kuutulususega aktsiaks Harju Elekter, mille keskmine kuutootlus vaadeldud perioodis oli 2,25%. Kõige kehvema keskmise kuutootlusega aktsia Balti aktsiate korral oli Apranga, mille keskmine kuutulusus oli $-1,25\%$. Tallinna börsi aktsiate korral oli kõige kehvema keskmise kuutootlusega Baltika, mille keskmine kuutootlus oli $-1,21\%$. Kui vaatluse all olid Baltikumini aktsiaturu aktsiad ühiselt, siis kõikide nende keskmine kuutootlus oli $0,46\%$ ning kui vaatluse all olid aktsiad, mille kodubörsiks Tallinn, siis nende keskmine kuutulusus oli $0,5\%$.



Joonis 6: Aktsiate oodatavad keskmised kuutulusused ja standardhälbed Balti turul perioodil märts 2016 - veebruar 2019.

Ajalooliste tulususte aegridasid kasutades saame leida tulususte vahelise kovariatsiooni järg-

mise valemi abil [1]:

$$Cov(R_j, R_k) = \sum_{i=1}^T \frac{(R_{ij} - R_j)(R_{ik} - R_k)}{T - 1}, \quad (39)$$

kus

$Cov(R_i, R_k)$ - kovariatsioon j -nda ja k -nda aktsia tulususe vahel,

R_{ij} - j -nda aktsia kuine tulusus i -ndal kuul,

R_j - j -nda aktsia keskmine kuine tulusus,

R_{ik} - k -nda aktsia kuine tulusus i -ndal kuul,

R_k - k -nda aktsia keskmine kuine tulusus,

T - vaatlusaluste perioodide arv.

Seose tugevuse hindamiseks leitakse korrelatsioonikordaja, mis arvutatakse valemiga [1]:

$$\rho(R_j, R_k) = \frac{Cov(R_j, R_k)}{\sigma_j \sigma_k}, \quad (40)$$

Korrelatsioonimaatriks aktsiate korral, mille koduturuks on Tallinn, on toodud lisas (Lisa 5.2). Suurim positiivne korrelatsioonikordaja on Baltika ja Tallinna Kaubamaja vaheline korrelatsioonikordaja, mis on 0,502. Vähim negatiivne korrelatsioonikordaja on kordaja Baltika ja Silvano Fashion Groupi vahel, mille väärtus on $-0,311$. Balti aktsiaturu aktsiate korral on suurim positiivne korrelatsioonikordaja 0,678 ning vähim negatiivne korrelatsioonikordaja on $-0,326$.

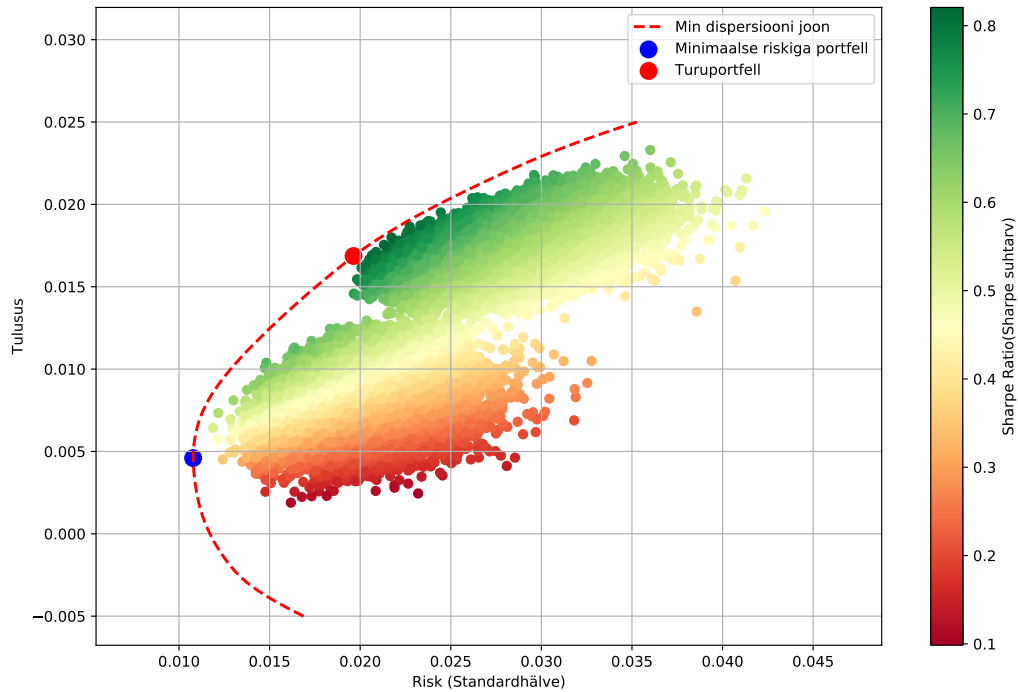
2.3 Optimaalsed portfellid ja efektiivsuskõver ajalooliste andmete põhjal

Optimiseeritud portfelli mõistel on mitmeid tähendusi. Antud bakalaureusetöös on lähemalt vaadeldud kuute erinevat võimalust optimaalse portfelli koostamiseks. Nendeks on:

- 1) turuportfell ehk Sharpe'i suhtarvu maksimeerimine, kui lühikeseks müümine ei ole lubatud (edaspidi "turuportfell");
- 2) turuportfell, kui lühikese müümine on lubatud mistahes suuruses (edaspidi "turuportfell lühike");
- 3) turuportfell, kui lühikeseks müümisele on seatud kitsendus $w_i \geq -0,2$ (edaspidi "turuportfell lühike 20%");
- 4) riski minimiseeriv portfell, kui lühikeseks müümine ei ole lubatud (edaspidi "minimaalse riskiga portfell");
- 5) riski minimiseeriv portfell, kui lühikeseks müümine on lubatud mistahes suuruses (edaspidi "min risk lühike");
- 6) riski minimiseeriv portfell, kui lühikeseks müümisele on seatud eespool toodud kitsendus (edaspidi "min risk lühike 20").

Optimaalsete portfelli korral leitakse aktsiate osakaalud vastavas portfellis nii Balti aktsiate korral (Lisa 5.3) kui Tallinna aktsiate korral (Lisa 5.4). Portfelliteooria väidab, et investeeringute hajutamine ehk erinevate aktsiate kaasamine portfelli peaks portfelli riski vähendama, samas portfelli tulususele negatiivset mõju avaldamata. Joonisel 7 on kujutatud 50 000 juhuslike kaaludega moodustatud portfelli keskmisi kuutulususi ja standardhälbeid kasutades Balti aktsiaturu aktsiaid hindamisperioodil märts 2016 - august 2018. Portfelli moodustamisel on kasutatud juhuslikke kaale, mis on genereeritud ühtlasest jaotusest $U \sim (0, 1)$. Lisaks on joonisel toodud ka minimaalse dispersiooni joon, mis on leitud eeldusel, et lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud.

Joonisel 12 (Lisa 5.9) on toodud juhuslike kaaludega portfellid Tallinna aktsiate korral. Joonistelt näeme, et hajutamine aitab vähendada portfelli riski ehk standardhälvet. Balti aktsiate korral on minimaalne saavutatav risk ligikaudu 0,01 ning Tallinna aktsiate korral on minimaalne saavutatav risk ligikaudu 0,02.

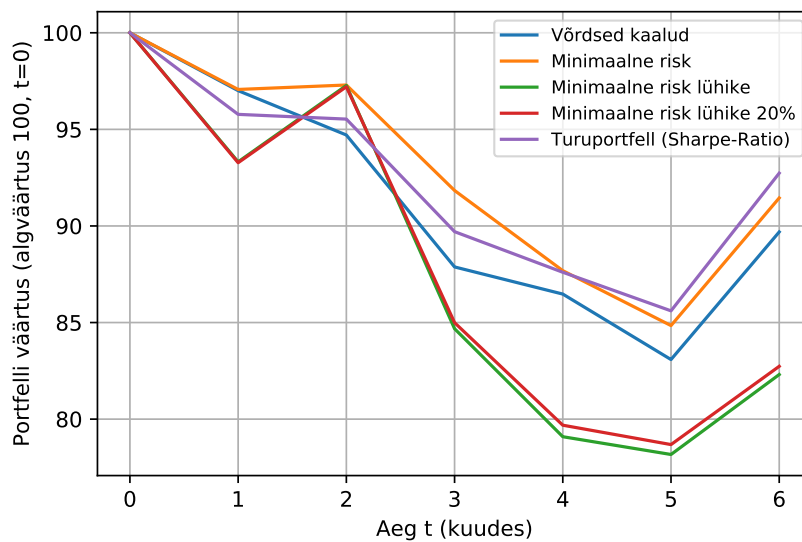


Joonis 7: Minimaalse dispersiooni joon Balti aktsiaturu aktsiate korral.

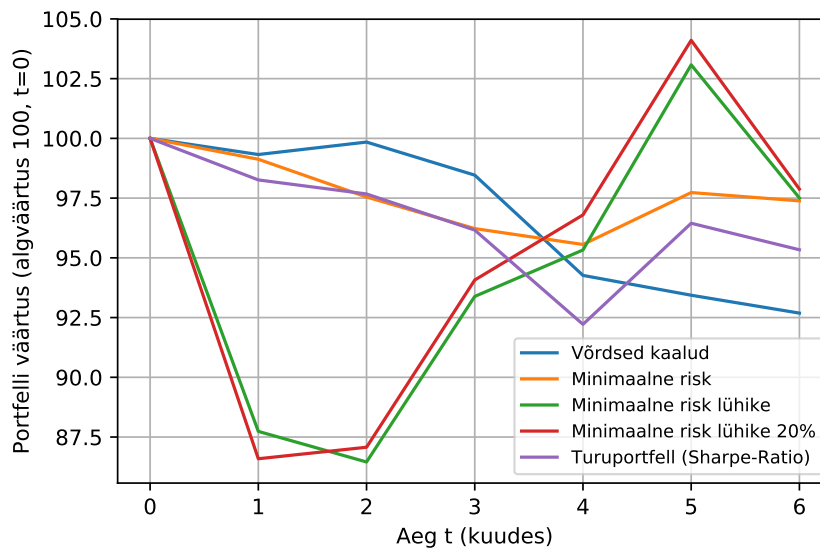
2.4 Portfellide väärtused võrdlusperioodidel

Joonisel 8 on toodud optimaalsete portfellide väärtused kuude lõikes Balti aktsiaturu aktsiate korral võrdlusperioodil september 2018 - veebruar 2019. Joonisel 9 on toodud optimaalsete portfellide ja võrdsete kaaludega portfelli väärtused võrdlusperioodil märts 2018 - august 2018. Ajahetkel $t = 0$ investeeriti vastavasse optimaalsesse portfelli 100€. Jooniselt 8 näeme, et portfellid on oma esialgset väärtust kaotanud. Suurim langus portfellide väärtustes on toimunud teise ja kolmanda kuu vahel, mis on tingitud langevast aktsiaturust. Jooniselt 9 näeme, et ka sel juhul on portfellid oma esialgset väärtust kaotanud, kuid mitte nii palju kui teisel võrdlusperioodil. Näeme, et võrdlusperioodil märts 2018 - august 2018 on parima tulemuse väärtuste poolest teinud portfellid, kus lühikeseks müümine on lubatud. Samas on nad

kõige volatiilsemad ehk kõiguvad oma väärtuses kõige rohkem. Jooniselt 8 näeme, et sellises turuolukorras on suhteliselt sarnaselt käitunud kolm portfelli: turuportfell, minimaalse riskiga portfell ja portfell võrdsete kaaludega. Teise sarnaselt käituvate portfellide grupi moodustavad min risk lühike ja min risk lühike 20 portfell. Lühikeseks müümist lubavate portfellide puhul esineb sama muster mõlemal võrdlusperioodil. Portfellide väärtuste vahe võrdlusperioodil september 2018 - veebruar 2019 on suurim vaadeldava perioodi lõpus, kus kahe grupi erinevus on ligikaudu 10€. Teisel võrdlusperioodil on väärtuste vahe suurim teisel kuul, kui see on ligikaudu 13€.



Joonis 8: Portfellide väärtused kogu Balti turu aktsiate korral perioodil september 2018 - veebruar 2019.



Joonis 9: Portfellide väärtused kogu Balti turu aktsiate korral perioodil märts 2018 - august 2018.

Joonisel 13 ja joonisel 14 (Lisa 5.10) on toodud optimaalsete portfellide väärtused mõlemal võrdlusperioodil kuude lõikes Tallinna aktsiate korral. Tallinna aktsiate puhul näeme Balti aktsiatest erinevat käitumist võrdlusperioodil märts 2018 - august 2018. Algselt on portfellid oma väärtust kasvatanud ja saavutanud maksimumi teisel kuul. Seejärel on nende väärtus hakanud langema ja jõudnud tagasi enam-vähem algele väärtusele. Tallinna aktsiate korral on käitumise poolest eristatavad grupid erinevad Balti aktsiate omast. Ühise grupi moodustavad need portfellid, kus on minimiseeritud risk kõigil töös vaadeldud juhtudel, ning teise grupi moodustavad võrdsete kaaludega portfell ja turuportfell.

2.5 Portfellide tulusused ja standardhälbed võrdlusperioodidel

Tabelites 1 ja 2 on toodud optimaalsete portfellide ning lisaks võrdsete kaaludega portfelli ja kolme juhuslike kaaludega portfellide tulusused ja standardhälbed võrdlusperioodidel. Tabelites on toodud ka Sharpe'i suhtarv ning korrigeeritud Sharpe'i suhtarv, mida kasutatakse portfellide headuse hindamiseks (mida suurem on Sharpe'i suhtarv, seda eelistatum on portfell).

Üldjuhul kasutatakse portfelli headuse hindamiseks Sharpe'i suhtarvu

$$SR = \frac{\mu_p - r_{rv}}{\sigma_p},$$

kus μ_p on portfelli tulusus, σ_p on portfelli standardhälve ja r_{rv} on riskivaba investeeringu tulumäär. Antud töös on kasutatud 10-aastaste Saksa võlakirjade aastast tulumäära, mis on 0,2%. Sharpe'i suhtarv ei ole aga sobiv näitaja portfelli headuse hindamiseks, kui antud näitaja lugeja $\mu_p - r_{rv}$ on negatiivne. Näiteks, kui kahe portfelli korral on Sharpe'i suhtarvu lugejad võrdsed ja negatiivsed, siis suurem on selle portfelli suhtarv, mille risk on suurem. See aga ei ole loogiline. Kui $\mu_p - r_{rv}$ on negatiivne, siis on kirjanduses portfelli võrdlemiseks välja pakutud Sharpe'i korrigeeritud suhtarv

$$SR_k = \frac{\mu_p - r_{rv}}{\sigma_p^{\frac{|\mu_p - r_{rv}|}{\mu_p - r_{rv}}}}$$

ehk kui $\mu_p - r_{rv} \geq 0$, siis $SR_k = SR$ ning kui $\mu_p - r_{rv} < 0$, siis $SR_k = (\mu_p - r_{rv})\sigma_p$ [10].

Tabelist 1 ja 2 näeme, et Balti aktsiate korral on turuportfelli (TP) korrigeeritud Sharpe'i suhtarv vastavalt $SR_k = -0,00028$ ja $SR_k = -0,00016$, mis on mõlemal juhul suuremad kui võrdsete kaaludega portfellil (Võrdsed kaalud) ja juhuslike kaaludega portfellidel (Juh portfell). Turuportfellil on mõlemal juhul ka parem tulusus, mõlemal juhul $\mu = -0,005$ ning standardhälve vastavalt $\sigma = 0,055$ ja $\sigma = 0,031$, mis on võrreldavatest portfellidest parem kolmel juhul kaheksast. Tallinna aktsiate puhul on aga turuportfelli korrigeeritud Sharpe'i suhtarv mõlemal juhul $SR_k = -0,00052$, mis on võrreldavatest portfellidest parem kahel juhul kaheksast. Turuportfelli tulusused Tallinna aktsiate korral on vastavalt $\mu = -0,01$ ning $\mu = -0,014$, mis on parem või samaväärne kui võrdluses olevatel portfellidel. Standardhälbed on vastavalt $\sigma = 0,051$ ning $\sigma = 0,037$, mis on suurem viiel juhul kaheksast.

Minimaalse riskiga portfelli korral näeme tabelitest 1 ja 2, et portfelli standardhälbed Balti aktsiate korral on vastavalt $\sigma = 0,055$ ning $\sigma = 0,015$. Minimaalse riskiga portfelli standardhälve on parem kui võrdsete kaaludega portfellidel ning viiel juhuslike kaaludega portfellidel kuuest. Minimaalse riskiga portfelli tulusused on vastavalt $\mu = -0,01$ ning $\mu = -0,003$, mis on samuti paremad tulemused kui võrreldavatel portfellidel. Seega võime öelda, et Balti

aktsiate korral minimaalse riskiga portfelli annab soovitud tulemusi. Hindamisperioodil märts 2018 - august 2018 on küll lühikeseks müümise korral minimaalse riskiga portfelli tulusused positiivsed, aga standardhälbed on suured. Minimaalse riskiga portfelli lühikeseks müümise korral soovitud tulemusi ei anna, nende standardhälbed on suuremad kui juhuslike kaaludega portfelli ja võrdsete kaaludega portfelli. Tallinna aktsiate korral on minimaalse riskiga portfelli standardhälbed vastavalt $\sigma = 0,049$ ja $\sigma = 0,023$, mis on kuuel juhul kaheksast parem näitaja võrreldavate portfelli. Tulusus on vastavalt $\mu = -0,014$ ja $\mu = -0,01$, mis on neljal juhul parem ja neljal juhul halvem näitaja kui võrreldavatel portfelli. Lühikeseks müümise korral on minimaalse riskiga portfelli standardhälbed ühel perioodil veidi paremad, teisel perioodil aga veidi halvemad, kui ilma lühikeseks müümiseta. Tulusused on mõlemal perioodil sisuliselt samad.

Tabel 1: Portfelli näitajad perioodil september 2018 - veebruar 2019.

Portfell	Balti				Tallinn			
	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe
Võrdsed kaalud	-0,014	0,059	-0,24	-0,00084	-0,011	0,054	-0,207	-0,0006
Min risk	-0,01	0,055	-0,185	-0,00056	-0,014	0,049	-0,289	-0,00069
Min risk lühike	-0,021	0,076	-0,279	-0,00161	-0,015	0,047	-0,323	-0,00071
Min risk lühike 20	-0,02	0,074	-0,273	-0,00149	-0,015	0,047	-0,323	-0,00071
TP	-0,005	0,055	-0,094	-0,00028	-0,01	0,051	-0,199	-0,00052
TP lühike	0,462	0,337	1,37	1,37043	-0,029	0,09	-0,324	-0,00263
TP lühike 20	0,004	0,069	0,056	0,05556	-0,004	0,051	-0,082	-0,00021
Juh portfelli 1	-0,016	0,052	-0,311	-0,00084	-0,008	0,055	-0,148	-0,00045
Juh portfelli 2	-0,013	0,065	-0,203	-0,00086	-0,01	0,05	-0,203	-0,00051
Juh portfelli 3	-0,014	0,056	-0,253	-0,00079	-0,01	0,055	-0,185	-0,00056

Tabel 2: Portfellide näitajad perioodil märts 2018 - august 2018.

Portfell	Balti				Tallinn			
	μ	σ	Sharpe	Mod. Sharpe	μ	σ	Sharpe	Mod. Sharpe
Võrdsed kaalud	-0,013	0,018	-0,731	-0,00024	-0,017	0,019	-0,904	-0,00033
Min risk	-0,003	0,015	-0,211	-0,00005	-0,01	0,023	-0,442	-0,00023
Min risk lühike	0,018	0,06	0,297	0,29722	-0,01	0,024	-0,424	-0,00024
Min risk lühike 20	0,021	0,06	0,347	0,34722	-0,009	0,028	-0,327	-0,00026
TP	-0,005	0,031	-0,167	-0,00016	-0,014	0,037	-0,383	-0,00052
TP lühike	-35,257	74,103	-0,476	-2612,66182	-0,032	0,054	-0,596	-0,00174
TP lühike 20	0,002	0,075	0,024	0,02444	-0,02	0,038	-0,531	-0,00077
Juh portfell 1	-0,014	0,018	-0,787	-0,00026	-0,015	0,011	-1,379	-0,00017
Juh portfell 2	-0,011	0,017	-0,657	-0,00019	-0,017	0,027	-0,636	-0,00046
Juh portfell 3	-0,013	0,021	-0,627	-0,00028	-0,018	0,024	-0,757	-0,00044

Tabelist 3 näeme, millised optimaalsed portfellid kui paljudel juhtudel domineerivad juhuslike positiivsete kaaludega portfellide üle Balti aktsiate korral. Sama tabel Tallinna aktsiate kohta on toodud lisas (Lisa 5.6). Genereeritud on 1000 juhuslike kaaludega portfelli. Tabelitest näeme, et minimaalse riskiga portfell, kui lühikeseks müüa ei ole lubatud, annab parimaid tulemusi, kuna domineerimise % on kolmel juhul neljast (2 võrdlusperioodi, 2 aktsiaturgu) suurem kui juhuslike kaaludega portfellidel. Turuportfell ei anna nii häid tulemusi, kuna domineerimise % on suurem kahel juhul neljast ning ühel juhul on juhuslike kaaludega portfellide domineerimise % suurem kui turuportfellil. Kõige halvemaid tulemusi annab turuportfell, kui lühikeseks müümine ei ole tõkestatud. Siis on juhuslike kaaludega portfellide domineerimise % kolmel juhul neljast suurem kui turuportfellil.

Tabel 3: Portfellide domineerimine võrdlusperioodidel Balti aktsiate korral.

	Balti I periood		
Optimaalne portfell	Optimaalne domineerib	Domineerimine puudub	Juhuslik portfell domineerib
Min risk	84,9%	15,1%	0,0%
Min risk lühike	0,0%	100,0%	0,0%
Min risk lühike 20	0,0%	100,0%	0,0%
TP	0,0%	100,0%	0,0%
TP lühike	0,0%	0,0%	100,0%
TP lühike 20	0,0%	100,0%	0,0%
	Balti II periood		
Optimaalne portfell	Optimaalne domineerib	Domineerimine puudub	Juhuslik portfell domineerib
Min risk	70,7%	26,7%	2,6%
Min risk lühike	0,0%	0,0%	100,0%
Min risk lühike 20	0,0%	0,3%	99,7%
TP	81,7%	18,3%	0,0%
TP lühike	0,0%	100,0%	0,0%
TP lühike 20	0,5%	99,5%	0,0%

Kirjanduses on välja toodud, et portfelliteooria kasutamisel võib esineda erinevaid probleeme. Üheks probleemiks on ekstreemsete portfellide koostamine ehk portfelli kuuluvate aktsiate kaalud on ekstreemselt suured. Ekstreemsed kaalud on tulenevad tulususte ja kovariatsioonide hindamisel tehtavates vigadest. Kuna investor ei tea kunagi täpseid tegelikke keskmisi tulususi ja kovariatsioone, siis koostades hindamisel leitud andmete põhjal efektiivuskõvera võib investor teha tegelikkuses halva otsuse. Teiseks probleemiks on kaalude suur tundlikkus, väike muutus ühe aktsia tulususes võib muuta kogu optimaalse portfelli kaale. Üheks võimaluseks neid probleeme leevendada on vältida lühikeseks müümist [11].

Kokkuvõttes võime öelda portfellide tulususte, riskide, Sharpe'i korrigeeritud suhtarvu ja domineerimise põhjal, et kõige paremaid tulemusi annab minimaalse riskiga portfell, kus lühikeseks müümine on keelatud. Minimaalse riskiga portfell omab selget eelist juhuslike kaaludega portfellide ees. Minimaalse riskiga portfellide puhul, kui lühikeseks müümine on lubatud, ei

osutunud portfelli osakaalud küll ekstreemseteks nagu kirjanduses viidatud [11], kuid tulemused olid halvemad kui minimaalse riskiga portfellil ilma lühikeseks müümiseta. Samuti ei olnud tulemused kuigi head kui võrreldi nende portfelli domineerimist juhuslike kaaludega portfelli. Turuportfell ei ole nii hea kui minimaalse riskiga portfell, küll aga annab arvestatavaid tulemusi, kui võrrelda turuportelli domineerimist juhuslike kaaludega portfelli. Turuportfellidel, mille korral lühikeseks müümine ei ole tõkestatud, on üldjuhul väga ekstreemseid kaalud ning portfelli tulused võivad olla väga erinevad, andes osadel juhtudel väga häid tulemusi ja osadel väga halbasid. Portfelli riskid on seejuures mõlema võrdlusperioodi ja mõlema aktsiaturu korral väga suured.

3 Kokkuvõte

Antud bakalaureusetöö üheks eesmärgiks oli anda ülevaade kaasaegsest portfelliteooriast. Teiseks eesmärgiks oli koostada erinevatele kriteeriumitele vastavad optimaalsed portfellid, kasutades selleks Balti aktsiaturu aktsiaid. Töö esimeses osas anti ülevaade portfelliteooriast kahe väärtpaberi ja n -väärtpaberi korral. Anti ülevaade portfelliteooriaga seonduvatest põhimõistetest ning tuletati optimaalsete portfellide kaalud. Töö teises osas koostati kriteeriumitele vastavad optimaalsed portfellid ja võrreldi neid võrdsete kaaludega ja juhuslike kaaludega portfellidega kahel võrdlusperioodil ning kahe aktsiaturu (Balti ja Tallinn) korral.

Analüüsi tulemusel leiti, et kasutades Balti aktsiaturu aktsiaid annab parimaid tulemusi minimaalse riskiga portfelli domineerides nii juhuslike kaaludega portfelli kui ka võrdsete kaaludega portfelli üle. Kasutades kõiki Balti aktsiaid domineeris minimaalse riskiga portfelli vastavalt 84,9% ja 70,7% juhtudest juhuslike kaaludega portfelli üle. Tallinna aktsiate korral ei olnud tulemused nii head, aga oli näha sama trendi. Tallinna aktsiate korral juhtudel, kui minimaalse riskiga portfelli risk oli väiksem kui juhuslike kaaludega portfelli, siis oli tulusus halvem. Juhul kui risk oli suurem, kui juhuslikel portfelli, siis oli tulusus parem. Seda kinnitab ka fakt, et Tallinna aktsiate korral domineeris minimaalse riskiga portfelli juhuslike portfelli üle vastavalt 37,9% ja 13,2% juhtudest. Turuportfelli tulusus oli parem kui juhuslike kaaludega portfelli, samas risk oli mõningatel perioodidel suurem. Seda kinnitab ka fakt, et turuportfelli domineeris enamasti juhuslike kaaludega portfelli üle kahel perioodil neljast. Turuportfelli puhul, kui lühikeseks müümine ei olnud tõkestatud, saadi väga ekstreemsed kaalud, mis andsid ebastabiilseid tulemusi osadel perioodidel. Selleks, et ebastabiilseid tulemusi vältida, tuleks kasutada portfelle, kus lühikeseks müümine ei ole lubatud.

4 Kasutatud kirjandus

- [1] Sander, P. (1999). *Portfelleoteooria I*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- [2] Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] O'Neill, W. B. *Fundamentals of the Stock Market*. New York: MCGRAW-HILL Professional.
- [4] Modern Portfolio Theory.
<https://www.investopedia.com/terms/m/modernportfoliotheory.asp> (13.04.2019).
- [5] Raus, T. (2018). *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse*, loengukonspekt. Tartu: Tartu Ülikool, matemaatika ja statistika instituut.
- [6] Long (or Long Position). <https://www.investopedia.com/terms/l/long.asp> (30.03.2019).
- [7] Short Selling. <https://www.investopedia.com/terms/s/shortselling.asp> (30.03.2019).
- [8] Capinski, M. Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. London: Springer.
- [9] Lyuu, Y-D. (2001). *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Israelsen, C. L. (2005). *A refinement to the Sharpe ratio and information ratio*. Journal of Asset Management, Vol. 5, Issue 6, p423-427.
- [11] Haugh, M. (2016). *Mean-Variance Optimization and the CAPM*, loengukonspekt. New York: Columbia University, Department of Industrial Engineering and Operations Research.

5 Lisad

5.1 Töös vaadeldavad aktsiad

Nr	Aktsia nimi	Lühend	Kodubörs
1	Arco Vara	ARC1T	Tallinn
2	Baltika	BLT1T	Tallinn
3	Ekspress Grupp	EEG1T	Tallinn
4	Harju Elekter	HAE1T	Tallinn
5	Merko Ehitus	MRK1T	Tallinn
6	Nordecon	NCN1T	Tallinn
7	PRFoods	PRF1T	Tallinn
8	Silvano Fashion Group	SFG1T	Tallinn
9	Tallink Grupp	TAL1T	Tallinn
10	Tallinna Kaubamaja Grupp	TKM1T	Tallinn
11	Tallinna Vesi	TVEAT	Tallinn
12	Grindeks	GRD1R	Riia
13	Olainfarm	OLF1R	Riia
14	SAF Tehnika	SAF1R	Riia
15	Apranga	APG1L	Vilnius
16	AUGA group	AUG1L	Vilnius
17	Energijos Skirstymo Operatorius	ESO1L	Vilnius
18	Grigeo	GRG1L	Vilnius
19	Klaipėdos nafta	KNF1L	Vilnius
20	Lietuvos energijos gamyba	LNR1L	Vilnius
21	Linas Agro Group	LNA1L	Vilnius
22	Panevėžio statybos trestas	PTR1L	Vilnius
23	Pieno žvaigždės	PZV1L	Vilnius
24	Rokiškio suris	RSU1L	Vilnius
25	Šiaulių bankas	SAB1L	Vilnius

26	Telia Lietuva	TEL1L	Vilnius
27	Vilkyškių pieninė	VLP1L	Vilnius

5.2 Tallinna aktsiate tulususte korrelatsioonimatriks

	ARC1T	BLT1T	EEG1T	HAE1T	MRK1T	NCN1T	PRF1T	SFG1T	TAL1T	TKM1T	TVEAT
ARC1T	1	-0,098	-0,112	0,359	0,226	0,325	-0,008	-0,111	0,124	0,068	0,154
BLT1T	-0,098	1	0,256	-0,044	0,144	0,029	0,192	-0,311	-0,081	0,502	0,195
EEG1T	-0,112	0,256	1	-0,026	0,305	0,438	0,032	0,055	-0,063	0,237	0,384
HAE1T	0,359	-0,044	-0,026	1	0,162	-0,002	0,418	-0,099	0,146	0,262	0,327
MRK1T	0,226	0,144	0,305	0,162	1	0,172	0,078	-0,249	0,015	0,217	0,224
NCN1T	0,325	0,029	0,438	-0,002	0,172	1	-0,214	0,051	0,132	-0,012	0,265
PRF1T	-0,008	0,192	0,032	0,418	0,078	-0,214	1	-0,103	0,119	0,244	0,211
SFG1T	-0,111	-0,311	0,055	-0,099	-0,249	0,051	-0,103	1	0,021	-0,037	-0,153
TAL1T	0,124	-0,081	-0,063	0,146	0,015	0,132	0,119	0,021	1	0,107	-0,029
TKM1T	0,068	0,502	0,237	0,262	0,217	-0,012	0,244	-0,037	0,107	1	0,274
TVEAT	0,154	0,195	0,384	0,327	0,224	0,265	0,211	-0,153	-0,029	0,274	1

5.3 Portfellide kaalud Balti aktsiate korral

	TP	TP lühike	TP lühike 20	Min risk	Min risk lühike	Min risk lühike 20
ARC1T	0,036	-0,242	-0,049	0,009	0,018	0,026
BLT1T	0	0,024	-0,053	0	0,045	0,047
EEG1T	0	1,355	0,252	0,033	0,259	0,267
HAE1T	0	2,056	0,008	0	0,051	0,054
MRK1T	0,102	2,201	0,318	0,045	0,134	0,128
NCN1T	0	0,108	-0,034	0,025	0,036	0,039
PRF1T	0,044	-1,242	0,011	0	0,099	0,097
SFG1T	0,221	0,975	0,272	0,089	0,173	0,167
TAL1T	0	-0,775	-0,045	0	-0,076	-0,074
TKM1T	0,135	2,604	0,467	0	-0,069	-0,069
TVEAT	0	0,446	-0,2	0	-0,484	-0,487
GRD1R	0,064	0,123	0,067	0,021	0,054	0,052
OLF1R	0	-3,072	-0,191	0	-0,061	-0,053
SAF1R	0	0,605	0,067	0	0,034	0,031
APG1L	0	-8,119	-0,2	0	-0,042	-0,064
AUG1L	0,031	0,136	0,021	0	-0,026	-0,023
ESO1L	0	-2,47	-0,143	0,227	0,019	0,013
GRG1L	0,301	1,049	0,303	0,087	0,075	0,083
KNF1L	0	-0,04	-0,095	0	-0,08	-0,079
LNR1L	0	4,164	0,461	0,262	0,518	0,508
LNA1L	0	2,015	-0,2	0	-0,104	-0,087
PTR1L	0	1,209	0,23	0,012	0,163	0,155
PZV1L	0	-1,414	-0,167	0,048	0,306	0,314
RSU1L	0,033	-0,4	-0,004	0,015	-0,161	-0,161
SAB1L	0	0,075	-0,114	0	-0,047	-0,049
TEL1L	0	-0,771	0,045	0,126	0,223	0,222
VLP1L	0,033	0,399	-0,027	0	-0,058	-0,055

TP	TP lühike	TP lühike 20	Min risk	Min risk lühike	Min risk lühike 20	
ARC1T	0	98,928	-0,09	0,017	-0,198	-0,208
BLT1T	0,007	90,166	-0,153	0,004	-0,216	-0,252
EEG1T	0	-89,731	0,447	0	0,279	0,301
HAE1T	0,096	283,87	0,184	0,019	0,067	0,045
MRK1T	0	-104,193	-0,2	0	-0,075	-0,123
NCN1T	0	-43,657	-0,2	0	0,025	0,032
PRF1T	0	95,613	-0,172	0	-0,082	-0,154
SFG1T	0,187	170,161	0,294	0,113	0,265	0,215
TAL1T	0	187,719	0,024	0,029	-0,021	-0,028
TKM1T	0,082	480,489	0,616	0	0,341	0,333
TVEAT	0	-370,782	-0,2	0	-0,484	-0,393
GRD1R	0,014	-34,482	-0,067	0,036	-0,094	-0,112
OLF1R	0	381,033	-0,077	0	-0,134	-0,143
SAF1R	0,036	65,705	0,323	0	0,391	0,404
APG1L	0	-371,211	-0,2	0	-0,315	-0,341
AUG1L	0,051	167,64	0,117	0,015	0,016	0,018
ESO1L	0,212	65,281	0,368	0,309	0,577	0,648
GRG1L	0,204	339,551	0,329	0,104	-0,057	-0,072
KNF1L	0	34,049	-0,009	0	-0,072	-0,05
LNR1L	0,004	-128,601	0,194	0,216	0,447	0,375
LNA1L	0	-327,493	-0,2	0	-0,053	0,045
PTR1L	0	-75,707	0,158	0,011	0,364	0,314
PZV1L	0	-239,767	-0,2	0,046	0,158	0,134
RSU1L	0	-36,177	-0,091	0,016	-0,215	-0,18
SAB1L	0	65,783	-0,2	0	-0,374	-0,391
TEL1L	0	-888,705	-0,2	0,034	0,384	0,486
VLP1L	0,106	185,518	0,206	0,031	0,076	0,094

5.4 Portfellide kaalud Tallinna aktsiate korral

	TP	TP lühike	TP lühike 20	Min risk	Min risk lühike	Min risk lühike 20
ARC1T	0,116	0,146	0,093	0,109	0,134	0,133
BLT1T	0	-0,198	-0,079	0,044	0,038	0,038
EEG1T	0	-0,208	-0,2	0,313	0,347	0,338
HAE1T	0,073	0,337	0,075	0	-0,027	-0,028
MRK1T	0,113	0,381	0,183	0,046	0,045	0,045
NCN1T	0,026	0,608	0,176	0	-0,052	-0,052
PRF1T	0,161	0,551	0,222	0,027	0,029	0,027
SFG1T	0,326	0,609	0,349	0,128	0,125	0,126
TAL1T	0,003	-0,196	-0,019	0,099	0,106	0,105
TKM1T	0,182	1,013	0,399	0,068	0,066	0,077
TVEAT	0	-2,044	-0,2	0,166	0,19	0,19

	TP	TP lühike	TP lühike 20	Min risk	Min risk lühike	Min risk lühike 20
ARC1T	0,091	0,08	0,1	0,061	0,071	0,085
BLT1T	0,026	0,147	0,078	0,043	0,043	0,04
EEG1T	0	-0,393	-0,2	0,354	0,406	0,512
HAE1T	0,174	0,383	0,21	0,018	0,023	0,03
MRK1T	0	0,201	0,026	0,224	0,226	0,234
NCN1T	0	0,475	0,157	0	-0,04	-0,1
PRF1T	0,084	0,222	0,117	0,043	0,037	0,031
SFG1T	0,289	0,334	0,295	0,13	0,134	0,138
TAL1T	0,098	0,038	0,098	0,054	0,057	0,057
TKM1T	0,238	0,506	0,319	0,072	0,071	0,072
TVEAT	0	-0,993	-0,2	0	-0,028	-0,1

5.5 Portfellide näitajad hindamisperioodidel

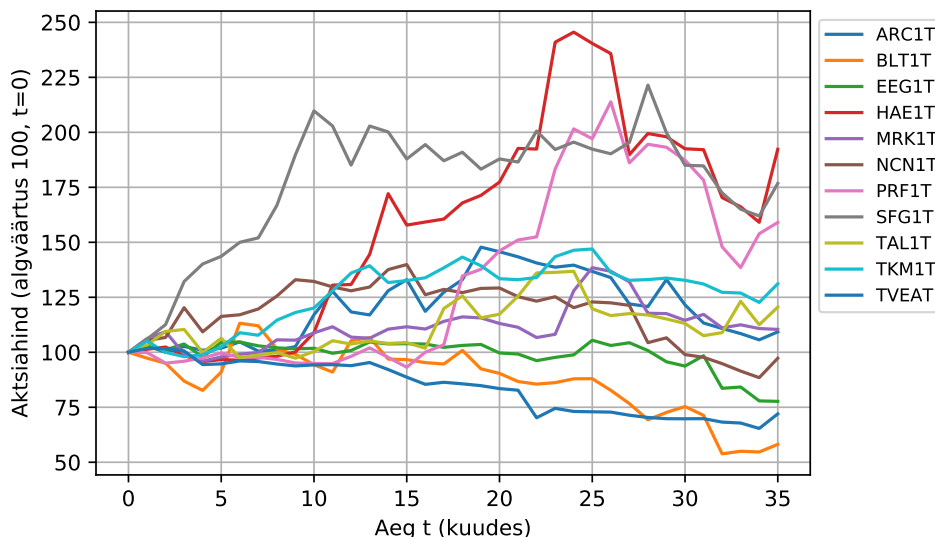
Portfell	Balti				Tallinn			
	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe
Võrdsed kaalud	0,009	0,023	0,384	0,38406	0,009	0,024	0,368	0,36806
Min risk	0,005	0,011	0,439	0,43939	0,004	0,019	0,202	0,20175
Min risk lühike	0,007	0,008	0,854	0,85417	0,003	0,019	0,149	0,14912
Min risk lühike 20	0,008	0,008	0,979	0,97917	0,004	0,019	0,202	0,20175
TP	0,017	0,02	0,842	0,84167	0,019	0,029	0,649	0,64943
TP lühike	0,124	0,032	3,87	3,86979	0,081	0,095	0,851	0,85088
TP lühike 20	0,019	0,011	1,712	1,71212	0,027	0,036	0,745	0,74537
Juh portfell 1	0,019	0,03	0,628	0,62778	0,016	0,036	0,44	0,43981
Juh portfell 2	0,016	0,023	0,688	0,68841	0,006	0,021	0,278	0,27778
Juh portfell 3	0,006	0,02	0,292	0,29167	0,007	0,026	0,263	0,26282

Portfell	Balti				Tallinn			
	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe	μ	σ	Sharpe	Mod.Sharpe
Võrdsed kaalud	0,014	0,021	0,659	0,65873	0,013	0,022	0,583	0,58333
Min risk	0,01	0,011	0,894	0,89394	0,01	0,019	0,518	0,51754
Min risk lühike	0,013	0,000011	1166,667	1166,66667	0,01	0,019	0,518	0,51754
Min risk lühike 20	0,008	0,000009	870,37	870,37037	0,01	0,019	0,518	0,51754
TP	0,021	0,015	1,389	1,38889	0,025	0,026	0,955	0,95513
TP lühike	56,13	0,002	28064,917	28064,91667	0,061	0,047	1,294	1,29433
TP lühike 20	0,037	0,005	7,367	7,36667	0,034	0,029	1,167	1,16667
Juh portfell 1	0,015	0,022	0,674	0,67424	0,015	0,022	0,674	0,67424
Juh portfell 2	0,018	0,022	0,811	0,81061	0,014	0,024	0,576	0,57639
Juh portfell 3	0,016	0,024	0,66	0,65972	0,017	0,024	0,701	0,70139

5.6 Portfellide domineerimine võrdlusperioodidel Tallinna aktsiate korral

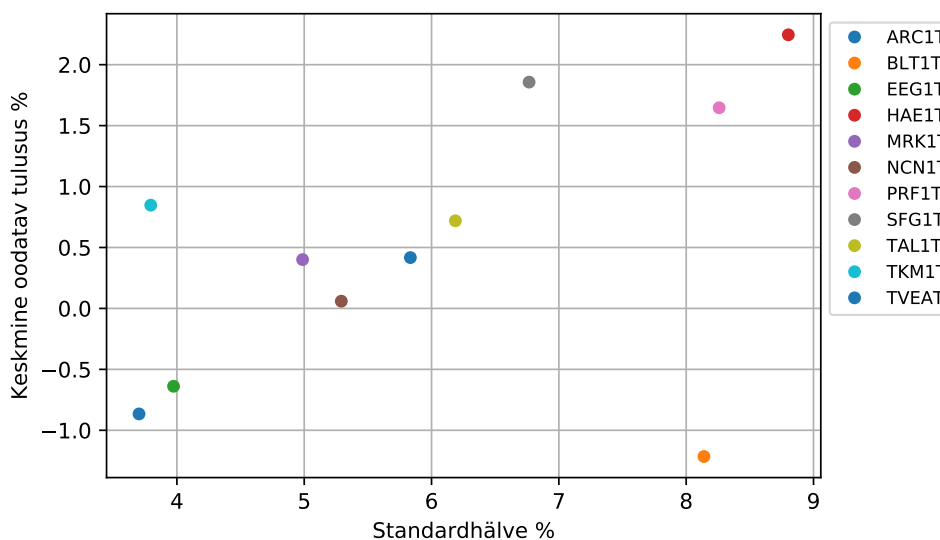
	Tallinn I periood		
Optimaalne portfell	Optimaalne domineerib	Domineerimine puudub	Juhuslik portfell domineerib
Min risk	37,9%	62,0%	0,1%
Min risk lühike	30,5%	69,4%	0,1%
Min risk lühike 20	11,9%	88,1%	0,0%
TP	0,2%	83,0%	16,8%
TP lühike	0,0%	0,0%	100,0%
TP lühike 20	0,0%	10,0%	90,0%
	Tallinn II periood		
Optimaalne portfell	Optimaalne domineerib	Domineerimine puudub	Juhuslik portfell domineerib
Min risk	13,2%	73,4%	13,4%
Min risk lühike	7,4%	85,3%	7,3%
Min risk lühike 20	9,0%	84,5%	6,5%
TP	45,2%	41,0%	13,8%
TP lühike	0,0%	0,0%	100,0%
TP lühike 20	74,9%	24,5%	0,6%

5.7 Aktsiahindade käitumine Tallinna aktsiate puhul



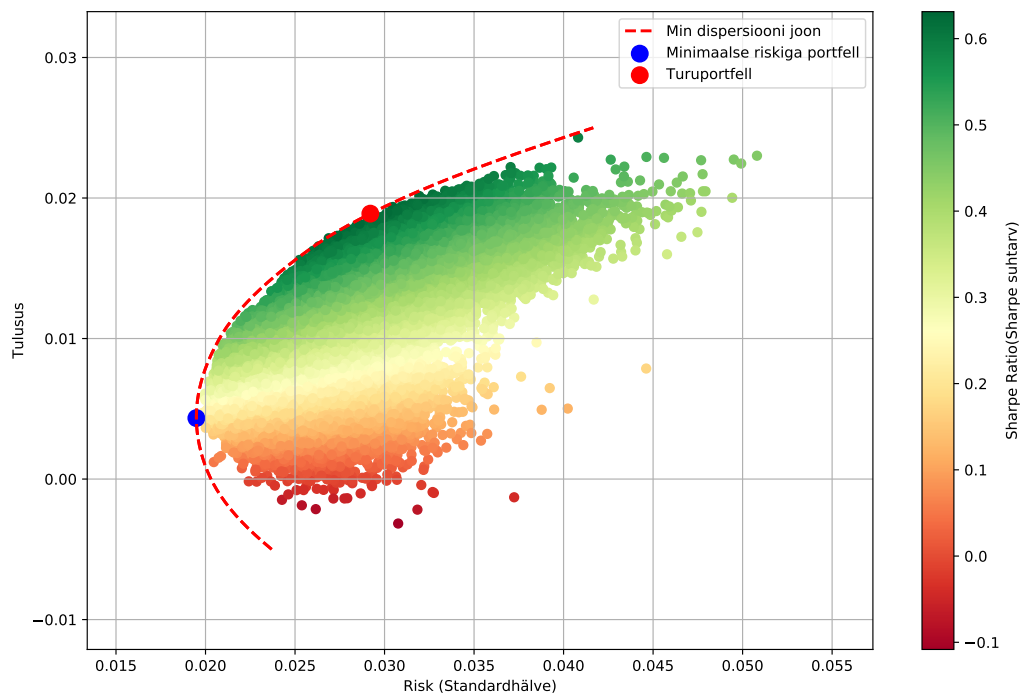
Joonis 10: Aktsiate hindade käitumine Tallinna turul perioodil märts 2016 - veebruar 2019.

5.8 Aktsiate tulumäärad ja standardhälbed ajalooliste andmete põhjal Tallinna börsil



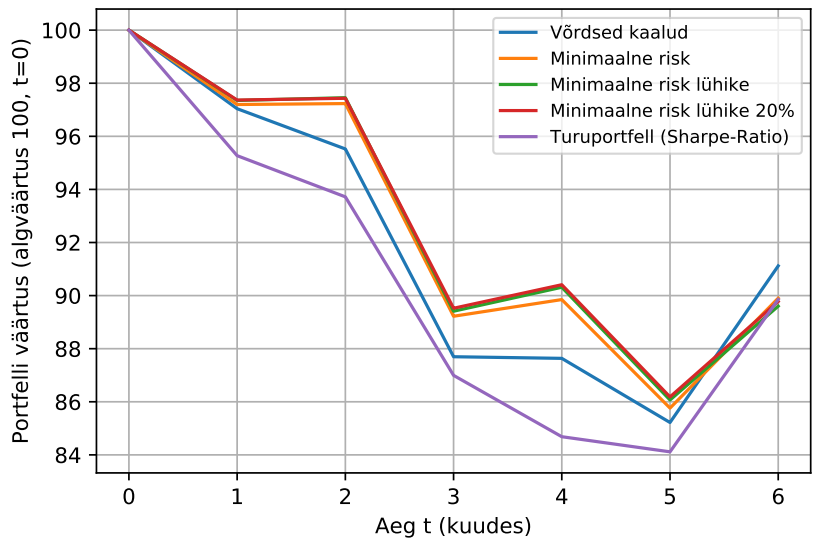
Joonis 11: Aktsiate oodatavad keskmised tulusused ja standardhälbed Tallinna börsil perioodil märts 2016 - veebruar 2019.

5.9 Minimaalse dispersiooni joon Tallinna aktsiate ajalooliste andmete põhjal

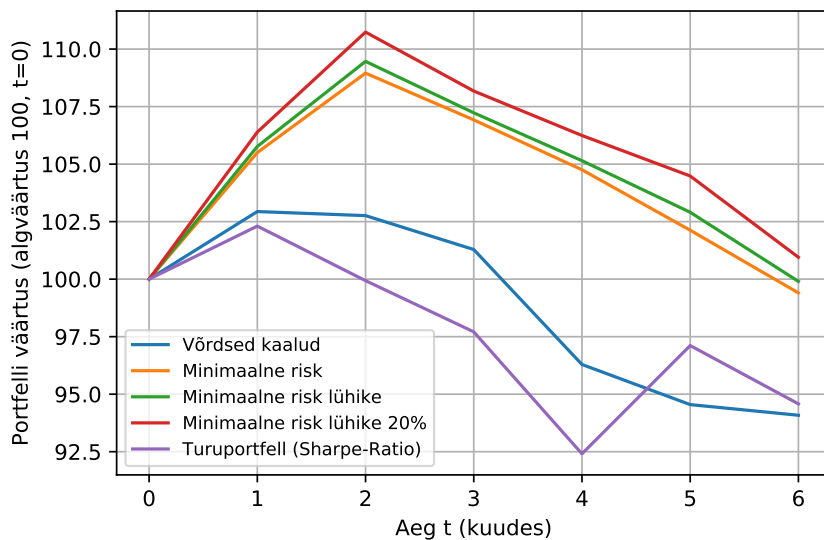


Joonis 12: Minimaalse dispersiooni joon Tallinna aktsiate korral.

5.10 Portfellide väärtused Tallinna aktsiate korral võrdlusperioodil



Joonis 13: Portfellide väärtused Tallinna aktsiate korral perioodil september 2018 - veebruar 2019.



Joonis 14: Portfellide väärtused Tallinna aktsiate korral perioodil märts 2018 - august 2018.

Mina, Hardo Niit,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose “Optimaalse aktsiaportfelli koostamine Balti aktsiaturu näitel”, mille juhendaja on Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktis 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hardo Niit

08.05.2019