

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND
Füüsika instituut

Heido Trofimov

Pideva keskkonna dünaamika kõverjoonelistes koordinaatides

Bakalaureusetöö

Juhendaja:

Rein Rõõm, füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Kaitsmisele lubatud:

Juhendaja:

allkiri, kuupäev

Tartu 2016

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Atmosfääridünaamika võrrandid ristkoordinaatides ühtlase nurkkiirusega pöörlevas taustsüsteemis	6
1.1 Liikumisvõrrand	6
1.1.1 Lagrange'i vorm	6
1.1.2 Lagrange'i vormi arvutus komponentides	8
1.1.3 Euleri vorm	10
1.2 Pidevuse võrrand	11
1.3 Temperatuuri evolutsioonivõrrand	12
2 Kõverjoonelised koordinaadid	13
2.1 Ristkoordinaatidelt kõverjoonelistesse koordinaatidesse siirdumine	13
2.2 Vektorid ja tensorid kõverjoonelistes koordinaatides	15
2.2.1 Vektorite esitamine kõverjoonelistes koordinaatides	15
2.2.2 Vektorkorrutis kõverjoonelistes koordinaatides	17
2.3 Kõverjooneliste koordinaatide näited	18
2.3.1 Ortogonaalsed kõverjoonelised koordinaadid	19
2.3.2 Mitteortogonaalsed kõverjoonelised koordinaadid	22
3 Dünaamika võrrandid kõverjoonelistes koordinaatides	26
3.1 Diferentseerimine kõverjoonelistes koordinaatides	26
3.1.1 Materiaalne kiirus	26
3.1.2 Skalaari materiaalne tuletis	27
3.1.3 Vektori materiaalne tuletis	28
3.1.4 Christoffeli sümbolid	29
3.2 Liikumisvõrrandi teisendamine kõverjoonelistesse koordinaatidesse	31
3.3 Pidevusvõrrandi teisendamine kõverjoonelistesse koordinaatidesse	32

4 Rakendusnäited	34
4.1 Esitused konkreetsetes süsteemides	34
4.1.1 Coriolise jõu tekkimine ühtlase nurkkiirusega pöörlevasse taustsüsteemi üleminekul	34
4.1.2 Sfäärilised rõhukoordinaadid	35
4.2 Maple programm dünaamika võrrandite esitamiseks kõverjoonelistes koordinaatides	39
Arutelu ja kokkuvõte	41
Summary	43
Viited	44
Lisa	46
Lihtlitsents	50

Sissejuhatus

Käesoleva töö uurimisteenaks on pideva keskkonna võrrandite esitamine kõverjoonelistes liikuvates taustsüsteemides. Peamine rõhuasetus on seejuures adekvaatsete kovariantsete esituste tuletamine nn klassikalistele atmosfääridünaamika võrranditele.

Pideva keskkonna mehaanika võrrandid on teada ja kasutusel alates Lagrange'i, Euleri [1] ja Poissoni töödest ca 200 aastat. Teemaatika on aegade jooksul avardunud termodünaamika võrrandite lisandumisega. Käesoleval ajal loetakse atmosfääridünaamika baasvõrranditeks liikumise vektorvõrrandit, pidevusvõrrandit ja siseenergia jäävust kirjeldavat evolutsioonivõrrandit temperatuurile. Materjal on hästi dokumenteeritud monograafiates, õpikutes ([2], [3]) ja loengukursustes [4] ning rakendust leidnud mitmesugustes kliima- ja ilnamudelites (näiteks HIRLAM, ECMWF mudel, UKMO).

Töö eesmärgiks on nimetatud võrrandite teisendamine üldistesse kõverjoonelistesse koordinaatidesse. Väljateooria tensoraparaat kõverjoonelistes koordinaatides kasutamiseks töötati välja seoses kõverruumide geomeetria kirjeldamise vajadustega ning selle kohta leidub hulganisti kirjandust ([5], [6], [7]), samuti on pideva keskkonna mehaanika tensorkäsitlus välja töötatud liikumatutes kõverjoonelistes koordinaatides ([8], [9], [10], [11]) ning isegi tehtud katse [12] üldistada Navier-Stokes'i võrrandid liikuvatesse kõverjoonelistesse koordinaatidesse. Siiski jääb küsimus, mil määral need tensoranalüüsi teoreetilised tulemused on kasutamist leidnud rakenduslikus atmosfääridünaamikas, eriti ilma- ja kliimamudelites. Käesoleva töö põhitees on, et seda on tehtud seni ebapiisavalt.

Iseenesest on kõverjooneliste koordinaatide kasutamine atmosfääridünaamikas üldlevinud. Globaalsete protsesside kirjeldamisel on näiteks vaja rakendada sfäärilisi koordinaate, ringsümmeetriliste pöörise ja tsüklonite modelleerimisel kasutatakse sageli silindrilisi koordinaate. Need koordinaatsüsteemid on ajast sõltumatud ning lokaalselt ortogonaalsed ning võrrandite esitused neid süsteemides on hästi tuntud. Atmosfääri oleku lähedus hüdrostaatilise tasakaalu seisundile teeb aga eelistatuks rõhu kasutamise vertikaalse koordinaadina, kus saadav nn isobaariline koordinaadistik on kõverjooneline vertikaalselt (isobaarpinnad lainetavad horisontaalselt) ja liikuv (kuna rõhk muutub ajas). Rõhukoordinaatide edasise üldistusena ebahühtlase aluspinna korral rakendatakse ka nn maastikkujalgivaid koordinaate, mis võivad olla nii ajast sõltumatud [13] kui ka ajas muutuvad [14].

Kõikidel kirjeldatud juhtudel on dünaamikavõrrandid projekteeritud vastavatesse kõverjoonelistesse koordinaatidesse koos järgneva rakendamise numbrilistes mudelites. Isobaariliste ja maastikkujälgivate koordinaadistike puhul on aga teisendused läbi viidud kas võrrandeid eelnevalt lihtsustades, näiteks hüdrostaatilise mudeli puhul, kus vertikaalne kiirendus loetakse nulliks, või on lähendusi kasutatud projekteerimisel. Nii näiteks ei arvesta maastikkujälgivaid rõhukoordinaate kasutavad mudelid koordinaadistiku liikumisega üldse. Atmosfääridünaamika praktikas on tavaks enne võrrandid lihtsustada ja siis projekteerida. Antud töös ehitame kõigepealt adekvaatse dünaamika projektsiooni ja alles seejärel asume lihtsustama. Selles mõttes on lähenemine probleemile uudne ning teema on tänu rohkearvulistele perspektiivsetele rakendusele aktuaalne.

Töö ülesehitus on järgmine.

Esimeses sissejuhatavas peatükis esitatakse atmosfääridünaamika põhivõrrandid vektorkujul ning komponentesituses ristkoordinaatides. Selle peatüki materjal on aluseks samade võrrandite kõverjoonelistesse koordinaatidesse teisendamisel järgnevates peatükkides.

Teises peatükis esitatakse tensorarvutuse aparaat kõverjoonelistesse koordinaatidesse siirdumisel (tuuakse sisse selleks vajalikud suurused nagu jakobiaan ja meetriline tensor) ning antakse täpsem kirjeldus eespool nimetatud spetsiaasete kõverjooneliste koordinaatide erijuhtudest.

Kolmandas peatükis formuleeritakse liikumisvõrrandi ja pidevusvõrrandi invariantne kuju üldistes mitteortogonaalsetes koordinaatides, lähtudes peatükis kaks esitatud tensorarvutuse põhimõtetest.

Esimese kolme peatüki ulatuses on käesolev töö referatiivne ja baseerub peaausjalikult loengukursuse [15] materjalil. Autoripoolne panus, koondatuna 4. peatükki on programmi loomine Maple'is dünaamika projekteerimiseks mistahes etteantud omadustega mitteortogonaalsesse kõverjoonelisse koordinaadistikku koos rakendamise demonstreerimisega valitud erijuhtudel.

Kokkuvõtlikult võib töö eesmärkideks nimetada

- Kirjandusega tutvumine
- Kõverjooneliste koordinaatide ning tensorarvutuse põhimõtetega tutvumine

- Atmosfäärinäamika võrrandite tuletamine kõverjooneliste koordinaatide üldisel juhul
- Maple programmi kirjutamine, mis on võimeline realiseerima võrrandite kõverjoonelisi esitusi
- Atmosfäärinäamika võrrandite esitamine konkreetsetes kõverjoonelistes koordinaatsüsteemides

1. Atmosfääridünaamika võrrandid ristkoordinaatides ühtlase nurkkiirusega pöörlevas taustsüsteemis

Antud töös kirjeldatav dünaamika toimub Eukleidilises kolmruumis, mida esimeses peatükis kirjeldame Cartesiuse koordinaatide vahendusel. Eukleidiline ruum on lõplikumõõtmeline vektorruum, kus on defineeritud skalaarkorrutis. Eukleidiline ruum sobib ruumi kirjeldamiseks nii, nagu seda mõistetakse klassikalises füüsikas: ruum on pidev ja tasane ning seega ka ühesugune igas suunas (isotroopne) ja igas punktis (homogeenne) [16]. Kui me hiljem esitame dünaamika võrrandid kõverjoonelistes koordinaatides, siis ruum ise ei muutu kõverjooneliseks, vaid on endiselt sama Eukleidiline kolmruum.

Atmosfääridünaamika võrrandid esitame kõigepealt vektoritena Eukleidilises geomeetrias, koordinaatsüsteemi sisse toomata. **Vektor** on suurus pikkuse ja suunaga, **skalaar** on suurus, millel on ainult arvvärtus. Skalaarid ja vektorid on koordinaatteisenduste suhtes invariantsed – vektorite puhul muutuvad küll nende komponendid, aga mitte vektorid ise [5]. Füüsikaseaduste vektorvõrranditena esitamine väljendab seega ka nende seaduste sõltumatust koordinaatsüsteemist, mille füüsik võib ise valida. Konkreetseid arvutusi on aga mugavam teha komponentides, ning selleks on vaja leida võrrandite esitus konkreetses koordinaatsüsteemis.

Järgnev toetub peaaesjalikult Holtoni [1] ja Coiffier' [2] monograafiatele.

1.1 Liikumisvõrrand

1.1.1 Lagrange'i vorm

Kui tähistame kiirusvektori \mathbf{U} , siis liikumisvõrrandi **Lagrange'i vormi** võib esitada kujul

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} \quad (1.1)$$

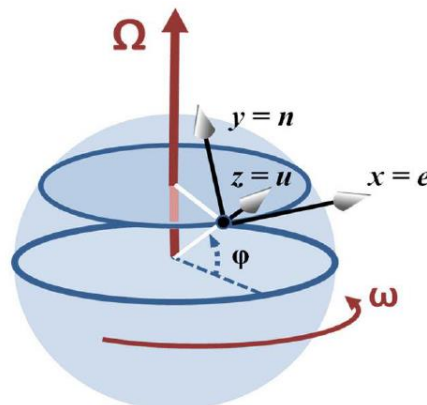
See võrrand ei ole tuletatud Lagrange'i poolt, nimi tuleneb võrrandis sisalduvast Lagrange'i tuletisest, millest tuleb juttu hiljem. Valemis (1.1) ρ tähistab tihedust, p rõhku, z vertikaalset koordinaati, $\phi(\mathbf{x})$ geopotentsiaali kohavektori \mathbf{x} funktsioonina ja $\boldsymbol{\Omega}$ Maa nurkkiiruse vektorit. Liikumisvõrrandi saame, rakendades Newtoni teist seadust pidevas gaasilises keskkonnas: võrrandi vasakul pool on kiirendus ja paremal pool seda põhjustavad jõud ühikmassi kohta. Teisiti öelduna väljendab liikumisvõrrand eriimpulsi jäävust. Siin rõhu gradientjõud ja raskusjõud on nõ fundamentaalsed ehk reaalsed jõud, mis ei sõltu taustsüsteemi valikust, Coriolise jõud on aga näiv ehk inertsijõud, mis tuleneb taustsüsteemi liikumise kiirendusest,

antud juhul sellest, et vaatame liikumist pöörleva Maa suhtes. Hiljem demonstreerime ka Coriolise jõu tekkimist koordinaaditeisendusel, kus suundume paigalseisvast ristkoordinaadistikust ühtlaselt pöörlevasse ristkoordinaadistikku.

Defineerime edasise tarbeks võrrandis (1.1) esinevad liikmed põhjalikumalt. \mathbf{U} on materiaalse osakese kiirusvektor. Defineerime **materiaalse osakese** kui mõttelise kuitahes väikese, kuid lõplike mõõtmete ja nullist erineva massiga individuaalne aineosake, mille võime iga suvalise punkti ümbrusest välja eraldada [4]. $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ on materiaalne kiirendusvektor, mis väljendab individuaalse liikuva materiaalse osakese kiirendust.

Gradient on vektor, mis on suunatud skalaarvälja *suurima kasvu suunas*, ning mille pikkuseks on skalaarvälja tuletis selle suuna järgi ehk muutumise kiirus selles suunas. Skalaarvälja gradientvektorit tähistame ∇p , kus ∇ nimetatakse ka nabla operaatoriks.

Coriolise jõu liikmes esinev $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$ tähistab Maa nurkkiiruse vektori ja kiiruse vektori vahelist **vektorkorrutist**, mis on samuti vektor. Nurkkiiruse vektor on definitsiooni järgi risti pöörlemistasandiga, nagu näidatud joonisel 1.



Joonis 1. $\boldsymbol{\Omega}$ – nurkkiiruse vektor, $\boldsymbol{\omega}$ näitab pöörlemise suunda. X telg on suunatud itta (east), y telg põhja (north) ja z telg üles (up).

Maa nurkkiiruse vektori pikkuseks on

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{1/s} \quad (1.2)$$

Vaatame lähemalt vektorkorrutise mõistet. Olgu kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} vektorkorrutis \mathbf{c} , $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Vektori \mathbf{c} pikkuse määrab valem

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \quad (1.3)$$

Vektor \mathbf{c} on risti vektorite \mathbf{a} ja \mathbf{b} määratud tasandiga ning tema suund määratakse nii, et vektorid \mathbf{c} , \mathbf{a} ja \mathbf{b} moodustaksid parempoolse kolmiku, mis tähendab, et vektori \mathbf{c} tipust vaadates toimub

vektori \mathbf{a} lühim pööre vektorile \mathbf{b} vastupidi kellaosuti liikumise suunda. Sellest jäeldub, et vektorkorrutis ei ole kommutatiivne ehk tulemus sõltub korrutamise järjekorrast.

Vektorite **skalaarkorrutis** seevastu annab arvu, mis on määratud valemiga

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \quad (1.4)$$

1.1.2 Lagrange'i vormi arvutus komponentides

Koordinaatsüsteem on matemaatiline eeskiri, mis aitab arvude komplekti (koordinaatide) abil määrata punkti ruumis. Ristkoordinaadistik on määratud, kui on fikseeritud koordinaatide alguspunkt ja ortonormaalsed baasivektorid. Baasi nimetatakse ortonormaalseks, kui baasivektorid on ühikulise pikkusega (normeeritud) ja omavahel risti (ortogonaalsed). Sellist punktist ja ortonormaalsest baasist moodustatud hulka nimetatakse ristreeperiks.

Ristkoordinaadistik võib olla geotsentriline, st koordinaatide algusega Maa tsentris. Aga nagu näidatud joonisel 1, võib seda koordinaatsüsteemi pöörata ja nihutada alguspunkti mingisse maapinnal asuvasse punkti. Viimasel juhul on kokkuleppe järgi z telg suunatud seniiti, x telg itta ja y telg põhja. Kiirusvälja vastavaid komponente tähistatakse $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$, $\dot{z} = w$

Iga vektori saab esitada baasivektorite summana – baasivektori kordajat nimetatakse vektori vastavaks komponendiks. Vektori komponendid on alati antud mingis konkreetses koordinaatsüsteemis.

Kui tähistame baasivektoreid ristkoordinaadistikus tähega \mathbf{i} , siis vektori võime esitada kujul

$$\mathbf{a} = a_j \mathbf{i}^j \quad (1.5)$$

Siin ja edaspidi kasutame **Einsteini summeerimiskokkulepet** ehk summeerime üle kaks korda esineva indeksi. Samuti kasutame asjaolu, et ortonormaalses baasis võib indekseid tõsta ja langetada suvaliselt.

Kiirusvektori \mathbf{U} võime ristkoordinaatides esitada kujul

$$\mathbf{U} = u \mathbf{i}^x + v \mathbf{i}^y + w \mathbf{i}^z \quad (1.6)$$

Nabla operaator on formaalselt vektor, mille komponentideks on osatuletised

$$(\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.7)$$

Siiski ei ole tegu päris vektoriga, vaid operaatoriga, mis saab sisu alles siis, kui seda millelegi rakendatakse. **Gradient** on nabla-operaatori rakendamine skalaarväljale. Kasutades ristkoordinaadistiku omadust, et baasivektorid on konstantsed ehk ei sõltu koordinaatide väärtusest (see eeldus ei pruugi kehtida teistes koordinaatsüsteemides), võime võrrandis (1.1) esinevad gradiendid Cartesisuse koordinaatides komponentide abil lahti kirjutada kujul

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i}^x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{i}^y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{i}^z \quad (1.8)$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i}^x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{i}^y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{i}^z \quad (1.9)$$

Valemi (1.3) ja vektorkorrutise suuna määramise reeglist järeldub, et ristkoordinaadistiku baasivektorite vahel kehtivad seosed

$$\mathbf{i}^x \times \mathbf{i}^x = \mathbf{i}^y \times \mathbf{i}^y = \mathbf{i}^z \times \mathbf{i}^z = 0 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{i}^x \times \mathbf{i}^y = \mathbf{i}^z, \mathbf{i}^y \times \mathbf{i}^z = \mathbf{i}^x, \mathbf{i}^z \times \mathbf{i}^x = \mathbf{i}^y \quad (1.11)$$

$$\mathbf{i}^y \times \mathbf{i}^x = -\mathbf{i}^z, \mathbf{i}^z \times \mathbf{i}^y = -\mathbf{i}^x, \mathbf{i}^x \times \mathbf{i}^z = -\mathbf{i}^y \quad (1.12)$$

Kui tähistame $\mathbf{i}^x = \mathbf{i}^1, \mathbf{i}^y = \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^z = \mathbf{i}^3$, siis võime seosed (1.10)-(1.12) kirja panna kui

$$\mathbf{i}^j \times \mathbf{i}^k = \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}^i \quad (1.13)$$

Kus suurust ε_{ijk} nimetatakse Levi-Civita sümboliks, mis on defineeritud kui

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{kui } ijk \text{ on paarispermutatsioon } (1,2,3)\text{st} \\ -1, & \text{kui } ijk \text{ on paaritu permutatsioon } (1,2,3)\text{st} \\ 0, & \text{kui üks või enam indekset on samad} \end{cases} \quad (1.14)$$

Levi-Civita sümboli indeksite tõstmisel ja langetamisel pole mingit tähendust, kuna tema väärtus tuleneb alati definitsioonist (1.14) ja on sama kõikides koordinaatsüsteemides. Levi-Civita sümboli abil võime vektorkorrutise kirja panna kujul

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_j \mathbf{i}^j) \times (b_k \mathbf{i}^k) = a_j b_k (\mathbf{i}^j \times \mathbf{i}^k) = a_j b_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}^i \quad (1.15)$$

Siin kasutasime vektorkorrutise assotsiatiivsust arvuga korrutamise suhtes.

Nüüd oleme defineerinud kõik vajalikud operatsioonid ristkoordinaatides ja võime esitada võrrandi (1.1) geotsentriliste ristkoordinaatide jaoks, arvestades, et $\mathbf{\Omega} = |\mathbf{\Omega}| \cdot \mathbf{i}^z$

	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p$	$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi$	$2\Omega_j U_k \varepsilon_{ijk}$		
x	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p$	+	$\frac{\partial \phi}{\partial x}$	+	$(- \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v})$
y	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p$	+	$\frac{\partial \phi}{\partial y}$	+	$ \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u}$
z	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p$	+	$\frac{\partial \phi}{\partial z}$	+	0

1.1.3 Euleri vorm

Peatükis 3.2 näitame, et võrrandis (1.1) esineva täistuletise ehk Lagrange'i tuletise saab esitada kujul

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \quad (1.16)$$

Füüsikaliselt väljendab valem (1.16) seda, et kiiruse muutumine materiaalses osakeses on tingitud nii osakese asukoha vahetusest kui kiirusvälja enese muutumisest. Viimast väljendab parema poole esimene liige $\partial/\partial t$, mida nimetatakse ka lokaalseks tuletiseks ja mis iseloomustab voolamise mittestatsionaarsust ehk kiiruse muutumist fikseeritud ruumipunktis. Parema poole teine liige kirjeldab kiiruse transporti ehk kaasaskandmist materiaalse osakese poolt.

Kombineerides valemid (1.16) ja (1.1) saame liikumisvõrrandi **Euleri esituses**

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi - \mathbf{F} \quad (1.17)$$

Kus jõud \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \quad (1.18)$$

Võrrandi parema poole teist liiget saab teisendada kujule

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \nabla \left(\frac{U^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U} \quad (1.19)$$

Nabla operaatori vektorkorrutist vektorväljaga nimetatakse selle vektorvälja **rootoriks**. Rooror näitab vektorvälja pööriselisust. Kiirusvälja rooororit nimetatakse ka suhteliseks pööruseks (vorticity)

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{U} \quad (1.20)$$

Atmosfääri absoluutseks pöörsuseks nimetatakse aga suurust

$$\boldsymbol{\Xi} = 2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\xi} \quad (1.21)$$

Selle abil võib jõu \mathbf{F} esitada kujul

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{U^2}{2} \right) + \boldsymbol{\Xi} \times \mathbf{U} \quad (1.22)$$

1.2 Pidevuse võrrand

Kui liikumisvõrrand väljendas eriimpulsi jäävust, siis pidevuse võrrand väljendab massi jäävust. Tavaliselt nimetatakse pidevuse võrrandiks selle Euleri kuju

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \quad (1.23)$$

Vasakul on tiheduse muutumiskiirus fikseeritud ruumipunktis ning paremal aine voog ühikruumala kohta läbi seda ruumipunkti ümbritseva lõpmata väikese kuubi.

Kui arvestame, et ∇ on põhimõtteliselt tuletise võtmise operaator ning seega talle kehtib korrutisest tuletise võtmise reegel, saame vektorseose

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho \quad (1.24)$$

Ning kui arvestame jälle ajalise täistuletise kirjutamist kujul

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \quad (1.25)$$

Siis saame pidevuse võrrandi Lagrange'i kuju

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (1.26)$$

Siin on vasakul tiheduse muutumise kiirus liikuvast materiaalses osakeses ning paremal aine voog läbi selle osakese välispinna ühikruumala kohta.

1.3 Temperatuuri evolutsioonivõrrand

Temperatuuri võrrand väljendab liikuva vooluosakese energia jäävust. Selle saab tuletada, kui rakendada termodünaamika esimest seadust liikuvale osakesele, vaadeldes seda ideaalse gaasi lähendis elementaarse termodünaamilise süsteemina.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + Q \quad (1.27)$$

Siin T tähistab temperatuuri, R on gaasikonstant, c_p on isobaarne erisoojus ja Q on defineeritud kui

$$Q = \frac{W}{c_v} \quad (1.28)$$

Kus W on soojusallikate tihedus ja c_v isohoorne erisoojus.

Temperatuuri evolutsioonivõrrand ei vaja kõverjoonelistesse koordinaatidesse suundumisel teisendamist, kuid mainisime ta siin ära kui süsteemi täielikuks kirjeldamiseks vajamineva võrrandi.

2. Kõverjoonelised koordinaadid

2.1 Ristkoordinaatidelt kõverjoonelistesse koordinaatidesse siirdumine

Analoogiliselt Cartesiuse koordinaatidega võime punkti (x,y,z) määrata ka mingi teise koordinaatsüsteemi abil. Olgu esialgsed koordinaadid tähistatud $x^j : x^1, x^2, x^3$ ($x^1=x, x^2=y, x^3=z$) ja kolm kõverjoonelist koordinaati märgistatud kui $q^\alpha : q^1, q^2, q^3$. Koordinaatteisenduseks nimetatakse eeskirja, mis seob omavahel erinevad koordinaatsüsteemid

$$\begin{aligned}x^1 &= x^1(q^1, q^2, q^3) \\x^2 &= x^2(q^1, q^2, q^3) \\x^3 &= x^3(q^1, q^2, q^3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

See on nõ otseteisendus. Et koordinaadid määravad punkti asukoha üheselt, siis peab koordinaatteisendusel leiduma ka pöördteisendus

$$\begin{aligned}q^1 &= q^1(x^1, x^2, x^3) \\q^2 &= q^2(x^1, x^2, x^3) \\q^3 &= q^3(x^1, x^2, x^3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Nende funktsioonide kohta eeldame, et nad on pidevad koos esimest järku osatuletistega.

Kui funktsioon f on teada vanades koordinaatides, siis uutes koordinaatides on f defineeritud kui

$$f(q^\alpha) = f[x^j(q^\alpha)]\tag{2.3}$$

Leiame selle funktsiooni gradiendi uutes koordinaatides vanade kaudu ahelreegli abil

$$\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\alpha} = J_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\tag{2.4}$$

Kus $J_\alpha^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\alpha}$ on teisenduse Jacobi maatriksi $\mathbf{J}(q^1, q^2, q^3) = \frac{\partial x}{\partial q}$ maatrikselemendid

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^1} \\ \frac{\partial f}{\partial q^2} \\ \frac{\partial f}{\partial q^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^1 & J_1^2 & J_1^3 \\ J_2^1 & J_2^2 & J_2^3 \\ J_3^1 & J_3^2 & J_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x^3} \end{pmatrix}\tag{2.4'}$$

Kokkuleppe järgi teisendusmaatriksi reaindeks on alumine ja näitab, millise koordinaadi järgi võetakse tuletist, veeruindeks aga ülemine ja näitab seda, millisest koordinaadist seda võetakse.

Jacobi maatriksiga $\mathbf{J}(q^1, q^2, q^3)$ seondub edasise käsitluse jaoks väga oluline suurus - Jacobi maatriksi determinant ehk jakobiaan

$$D(q^1, q^2, q^3) = \det \mathbf{J}(q^1, q^2, q^3) \quad (2.5)$$

Teisenduse jakobiaan ei tohi saada kusagil nulliks, see tagab vanade ja uute koordinaatide üksühese vastavuse [6].

Analoogiliselt võime leida gradiendi vanades koordinaatides uute kaudu, ning saame tagasiteisendusmaatriksi ehk pöördteisenduse Jacobi maatriksi.

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} = \bar{J}_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial q^\beta} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{J}_1^1 & \bar{J}_1^2 & \bar{J}_1^3 \\ \bar{J}_2^1 & \bar{J}_2^2 & \bar{J}_2^3 \\ \bar{J}_3^1 & \bar{J}_3^2 & \bar{J}_3^3 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{J}}(x^1, x^2, x^3) \quad (2.6')$$

Niimääratud pöördteisenduse maatriks $\bar{\mathbf{J}}$ on definitsiooni kohaselt esialgsete Cartesiuse ristkoordinaatide $\{x^1, x^2, x^3\}$ funktsioon. Kuna pöördteisenduse maatriksit läheb tarvis mitmel pool kõverjoonelistes koordinaatides (nt meetrilise tensori esitamisel), siis on oluline tema esitamine uute koordinaatide funktsioonina.

Kui asendame võrrandis (2.4) gradiendi vanade koordinaatide järgi võrrandist (2.6), saame

$$\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial q^\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\gamma} \quad (2.7)$$

Ilmselt peab kehtima

$$J_\beta^\gamma \bar{J}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\gamma \quad (2.8)$$

Kus δ_α^γ on Kroneckeri delta

$$\delta_\alpha^\gamma = \begin{cases} 1, & \text{kui } \alpha = \gamma \\ 0, & \text{kui } \alpha \neq \gamma \end{cases} \quad (2.9)$$

Võrrand (2.8) näitab, et teisenduse ja pöördteisenduse maatriksid on teineteise pöördmaatriksid, Seega saame pöördteisenduse Jacobi maatriksi esitada uute koordinaatide funktsioonina, pöörates maatriksi $\mathbf{J}(q^1, q^2, q^3)$

$$\bar{\mathbf{J}}(q^1, q^2, q^3) = [\mathbf{J}(q^1, q^2, q^3)]^{-1}. \quad (2.10)$$

2.2 Vektorid ja tensorid kõverjoonelistes koordinaatides

2.2.1 Vektorite esitamine kõverjoonelistes koordinaatides

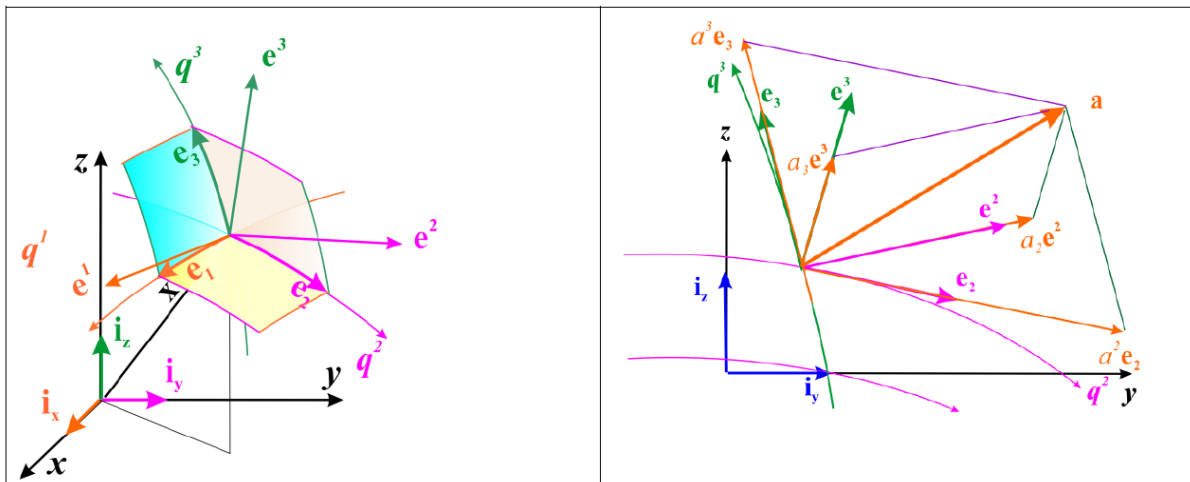
Toetudes allikale [7], kirjeldame kompaktselt vektorite esitamise põhiideed kõverjoonelistes koordinaatides koos vastavate valemitega.

Kõverjoonelistes koordinaatides võib vektori samaväärselt esitada kahes erinevas baasis ja kahe erineva komplekti komponentidega, mis ristkoordinaadistikus kokku langevad. Neid baase nimetatakse puutuja ehk põhibaasiks \mathbf{e}_α ja kaas- ehk normaalbaasiks \mathbf{e}^α .

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha = a^\beta \mathbf{e}_\beta \quad (2.11)$$

Komponente a_α , a^β nimetatakse vastavalt kovariantseteks ja kontravariantseteks komponentideks.

Esitame joonise 2 kahe erineva baasi illustreerimiseks nii kolme- kui kahemõõtmelise juhu jaoks.



Joonis 2. Vasakul on kujutatud põhi- ja kaasbaasi vektoreid kolmemõõtmelisel juhul (taustal esialgne ristkoordinaadistik) ning ruumalaelemendi paigutust mööda koordinaatjooni q^i . Paremal pool on baasid kujutatud kahemõõtmelisel juhul ning esitatud üks ja sama vektor \mathbf{a} nn rööpkülükureegli alusel nii ko- kui kontravariantsete komponentide summana.

Kaasbaasi saab esitada pöördteisenduse maatriksi abil

$$\mathbf{e}^\alpha = \bar{J}_j^\alpha \mathbf{i}^j \quad (2.12)$$

Põhibaasi aga teisenduse maatriksi kaudu

$$\mathbf{e}_k = J_k^j i^j \quad (2.13)$$

Kui oleme põhi- ja kaasbaasi niimoodi defineerinud, siis võrrandi (2.8) ja Cartesiuse baasivektorite ortonormaalsuse põhjal need baasid on üksteise suhtes biortonormaalised

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2.14)$$

Samas ei kaasbaas ega ka põhibaas ise ei ole ortogonaalsed.

Tähistagu prim'iga liikmed vektori komponente uues baasis ning prim'ita liikmed komponente vanas baasis. Vektori vanad koordinaadid uute kaudu saame esitada

$$a^\alpha = J_j^\alpha a'^j \quad (2.15)$$

$$a_j = \bar{J}_j^\alpha a'_\alpha \quad (2.16)$$

Vektori uued komponendid vanade kaudu

$$a'^\alpha = \bar{J}_j^\alpha a^j \quad (2.17)$$

$$a'_\alpha = J_\alpha^j a_j \quad (2.18)$$

Et leida vektori komponente konkreetses baasis, tuleb vektor projekteerida sellesse baasi. Näiteks kontravariantsete komponentide leidmiseks tuleb korrutada vektorit skalaarselt \mathbf{e}^j -ga.

$$a^j = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{a} = a^\alpha (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_\alpha) = a_\beta (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^\beta) \quad (2.19)$$

Siit tuleneb ka seos kontravariantsete komponentide arvutamiseks kovariantsete komponentide kaudu

$$a^j = G^{j\beta} a_\beta \quad (2.20)$$

kus tensorit \mathbf{G} nimetatakse meetriliseks tensoriks. Tema kontravariantsed komponendid on antud valemiga

$$G^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta \quad (2.21)$$

Meetriline tensor on sümmeetriline teist järku tensor. Operatsiooni (2.20) nimetatakse indeksi tõstmiseks.

Analoogiliselt saame defineerida indeksi langetamise operatsiooni

$$a_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{a} = a^\beta (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\beta) = G_{j\beta} a^\beta \quad (2.22)$$

kus tensori \mathbf{G} kovariantsed komponendid on antud valemiga

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \quad (2.23)$$

Kui rakendame indeksi tõstmise ja langetamise operatsiooni järjest

$$a^j = G^{j\alpha} a_\alpha = G^{j\alpha} G_{\alpha\beta} a^\beta \quad (2.24)$$

saame järelalusena

$$G^{j\alpha} G_{\alpha\beta} = \delta_\beta^j \quad (2.25)$$

See tähendab, et maatriksid $G^{j\alpha}$ ja $G_{\alpha\beta}$ on teineteise pöördmaatriksid.

Kui teame baasvektori esituse ortonormaalset algbaasi, saame anda meetrilise tensori ilmutatud esituse kõverjoonelistes koordinaatides. Valemite (2.12) ja (2.13) põhjal

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = J_\alpha^j \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_i J_\beta^i = J_\alpha^j J_\beta^i \quad (2.26)$$

$$G^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \bar{J}_i^\alpha \mathbf{i}^i \cdot \mathbf{i}^j \bar{J}_j^\beta = \bar{J}_i^\alpha \bar{J}_j^\beta \quad (2.27)$$

Meetrilise tensoriga on koordinaatsüsteem igas ruumpunktis täielikult kirjeldatud.

2.2.2 Vektorkorrutis kõverjoonelistes koordinaatides

Baasvektorite vahel kehtivad seosed

$$\mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta = \frac{1}{D} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma = \bar{D} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma \quad (2.28)$$

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = D \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}^\gamma \quad (2.29)$$

Kus D on otseteisenduse jakobiaan, \bar{D} pöördteisenduse jakobiaan. Levi-Civita sümboli indekse tõstmisel ja langetamisel pole küll sisulist tähendust, kuid paigutame need nii, et saaks toimuda summeerimine vastavalt summeerimiskokkuleppele.

Võrrandid (2.28) ja (2.29) tulenevad vektorkorrutise definitsioonist, mille esitasime esimeses peatükis. Võrrandi (2.14) põhjal baasvektor \mathbf{e}^j on risti vektoritega \mathbf{e}_{j-1} ja \mathbf{e}_{j+1} ehk risti nende määratud tasandiga ning sama kehtib põhibaasi baasvektorite kohta kaasbaasi suhtes. Levi-Civita sümbol hoolitseb, et märk oleks õige. Küsimus on ainult võrdetegurites $1/D$ ja D .

Veendume valemi (2.29) võrdeteguris näite põhjal. Vektorkorrutise γ -s komponent on võrdne tema projektsiooniga samasse baasi

$$(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)_\gamma = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = D \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.30)$$

Võtame $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ ja esitame baasivektorid valemi (2.13) abil, siis vasemal saame

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \mathbf{i}^\alpha \times \mathbf{i}^\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial q^2} \right) \cdot \frac{\partial x^\gamma}{\partial q^3} \mathbf{i}^\gamma = (\mathbf{i}^\alpha \times \mathbf{i}^\beta) \cdot \mathbf{i}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial q^3} = \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial q^3} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_1^\alpha J_2^\beta J_3^\gamma = D \end{aligned} \quad (2.31)$$

Kuna kolmekordne summa $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_1^\alpha J_2^\beta J_3^\gamma$ langeb kokku maatriksi \mathbf{J} determinandi D arvutamise eeskirjaga [8].

Kuna segakorrutis ei muutu indeksite tsüklilisel ümbertõstmisel, siis on see tulemus sama indeksite α, β, γ tsüklilisel roteerimisel. Analoogiline on juhtumi $\bar{D} = 1/D$ käsitlus, kus saame $(\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2) \cdot \mathbf{e}^3 = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \bar{J}_1^\alpha \bar{J}_2^\beta \bar{J}_3^\gamma = \bar{D}$

Vektori $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ võime esitada kujul

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c^\gamma \mathbf{e}_\gamma = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta b_\beta \\ \mathbf{c} &= c_\gamma \mathbf{e}^\gamma = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta b^\beta \end{aligned} \quad (2.32)$$

Vektorkorrutise kontravariantse komponendi esituse saame, korrutades esimest valemit läbi \mathbf{e}^j -ga

$$c^j = \mathbf{e}^j \cdot (a_\alpha \mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta b_\beta) = a_\alpha b_\beta \mathbf{e}^j \cdot (\mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta) \quad (2.33)$$

Mis annab

$$c^j = \frac{1}{D} \varepsilon^{j\alpha\beta} a_\alpha b_\beta \quad (2.34)$$

Analoogselt võime teist valemit korrutada \mathbf{e}_j -ga, mis annab meile avaldise vektorkorrutise kovariantsete komponentide jaoks korrutatavate vektorite kontravariantsete vektorite kaudu

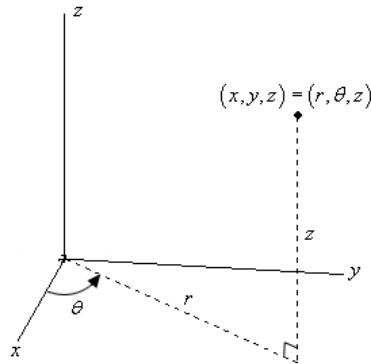
$$c_j = D \varepsilon_{j\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \quad (2.35)$$

2.3 Kõverjooneliste koordinaatide näiteid

Koordinaatsüsteemi nimetatakse ortogonaalseks, kui igas koordinaatjoonte lõikepunktis leitud koordinaatjoonte puutujavektorid on punktis ortogonaalsed. Kõverjoonelised koordinaadid võivad olla nii ortogonaalsed kui ka mitteortogonaalsed.

2.3.1 Ortogonaalsed kõverjoonelised koordinaadid

Siin tutvustame silindrilisi ja sfäärilisi koordinaate. **Silindrilises koordinaatsüsteemis** z -telg jääb samaks nagu ristkoordinaatides, aga punkti asukohta x, y tasandil iseloomustatakse nurga ja radiaalkoordinaadi abil. Tähistame silindrilised koordinaadid $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$. Geomeetrilised seosed vanade ja uute muutujate vahel on kujutatud joonisel 3.



Joonis 3. Esialgsed ristkoordinaadid ja uued silindrilised koordinaadid.

Üleminekuvalemid silindriliste koordinaatide jaoks on

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\theta) \\y &= r \cdot \sin(\theta) \\z &= z\end{aligned}\tag{2.36}$$

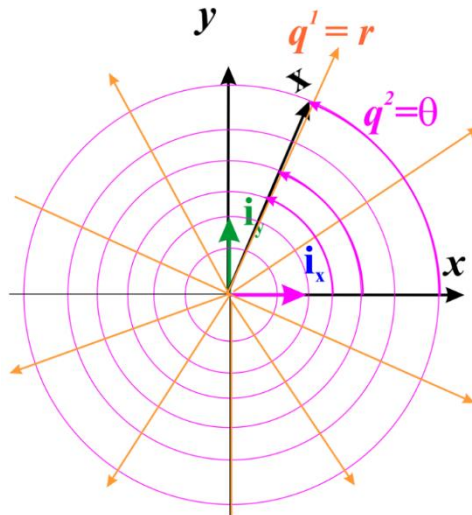
Teisenduse maatriksiks saame

$$J_{\beta}^{\alpha}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \cdot \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{2.37}$$

Ning vastavalt valemile (2.10) pöördteisenduse maatriksi

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \cdot \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{2.38}$$

r ja θ koordinaatjooni on kujutatud joonisel 4



Joonis 4. r ja θ koordinaatjooned esialgse xy tasandi suhtes. z koordinaat on joonise tasandiga risti

Kuna teame, et ringjoone puutuja on igas punktis risti raadiusega, on silindriliste koordinaatide ortogonaalsus intuiitiivselt arusaadav. Et seda matemaatiliselt näidata, peaksime leidma baasivektorid $\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^z$ vastavalt valemile (2.12) ja näitama, et nende omavahelised skalaarkorrutised on võrdsed nulliga.

$$\begin{aligned} \text{Saame } \mathbf{e}^r &= \cos(\theta) \mathbf{i}^x + \sin(\theta) \mathbf{i}^y, \quad \mathbf{e}^\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r} \mathbf{i}^x + \frac{\cos(\theta)}{r} \mathbf{i}^y, \quad \mathbf{e}^z = \mathbf{i}^z \text{ ning näeme, et } \mathbf{e}^r \cdot \\ \mathbf{e}^\theta &= (\cos(\theta) \mathbf{i}^x + \sin(\theta) \mathbf{i}^y) \cdot \left(-\frac{\sin(\theta)}{r} \mathbf{i}^x + \frac{\cos(\theta)}{r} \mathbf{i}^y\right) = -\cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{r} + \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r} = 0, \\ \mathbf{e}^r \cdot \mathbf{e}^z &= (\cos(\theta) \mathbf{i}^x + \sin(\theta) \mathbf{i}^y) \cdot \mathbf{i}^z = 0, \quad \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}^z = \left(-\frac{\sin(\theta)}{r} \mathbf{i}^x + \frac{\cos(\theta)}{r} \mathbf{i}^y\right) \cdot \mathbf{i}^z = 0. \end{aligned}$$

Meetrilise tensori ko- ja kontravariantsed komponendid silindrilistesse koordinaatidesse suundumisel saame arvutada teisendusmaatriksitest (2.37) ja (2.38) valemite (2.26) ja (2.27) alusel

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Meetrilise tensori diagonaalsus näitab, et koordinaatjooned on risti igas ruumpunktis ning reeperid on ortogonaalsed. Diagonaalil asuvad sel juhul mastaabitegurite h_i ruudud

$$h_i = \left| \frac{\partial r}{\partial q^i} \right| = \sqrt{G_{ii}} \quad (2.41)$$

Mastaabitegurid kirjeldavad punkti asukoha muutust ruumis koordinaatjooete teisenemisel. Kui punkti koordinaatidega (q^1, q^2, q^3) nihutatakse ruumis infinetsimaalse nihke (ds_1, ds_2, ds_3) võrra, siis on see seotud nihetega mööda koordinaatjooeni mastaabitegurite kaudu [2]

$$ds_1 = h_1 dq^1, ds_2 = h_2 dq^2, ds_3 = h_3 dq^3 \quad (2.42)$$

Skaalategureid kasutatakse ka vektori nn füüsikaliste komponentide saamiseks, millel on füüsikaliselt mõttekad dimensioonid. Näiteks $dq^2 = d\theta$ ei oma dimensiooni, aga $ds_2 = r d\theta$ on pikkuse dimensiooniga ning tema jagamisel dt -ga saame kiiruse dimensiooniga suuruse.

Silindrilisi koordinaate kasutatakse atmosfääridünaamikas lokaalsete pöörise, näiteks trombide modelleerimisel. Globaalsete protsesside kirjeldamiseks kasutatakse **sfäärilisi koordinaate**, kus koordinaatideks on radiaalkoordinaat (raadius) r , polaarnurk θ ja asimuutnurk φ . Vastavalt erinevatele kokkulepetele on nurgad φ/ϕ ja θ mõnikord ära vahetatud. Üleminekuvalemid ristkoordinaatidest sfäärilistesse koordinaatidesse siirdumisel on

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ z &= r \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vastavad Jacobi maatriksid on

$$J_{\beta}^{\alpha}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & 0 \\ r\cos(\varphi)\cos(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r\sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi)}{r\sin(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\varphi)\cos(\theta)}{r} & \frac{\sin(\varphi)\cos(\theta)}{r} & -\frac{\sin(\theta)}{r} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

kust saame (2.26)-(2.27) abil meetrilise tensori komponendid

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Meteoroloogias kirjeldatakse isopotentsiaalpinde sfäärilise koordinaatidega ning vastavalt kasutatakse tihti sfäärilisi koordinaate, kuid näiteks töös [17] on need asendatud **sfäroidaalsete koordinaatidega**, mis arvestavad paremini planeedi Maa kujuga ning näiva gravitatsiooni meridionaalseid variatsioone. Sfäroidaalsed koordinaadid on elliptiliste koordinaatide kolmemõõtmeline üldistus ning need on lokaalselt ortogonaalsed, kui vertikaalset mõõdet ei ole deformeeritud. Vertikaali deformeerimine toob kaasa koordinaatide muutumise lokaalselt mitteortogonaalseteks ehk lokaalselt afiinseteks.

2.2.2 Mitteortogonaalsed kõverjoonelised koordinaadid

Esimeseks atmosfäridünaamikas kasutuselevõetud lokaalselt mitteortogonaalseks koordinaatsüsteemiks olid **rõhukoordinaadid**, mida nimetatakse ka isobaarilisteks või p-koordinaatideks. Need võttis kasutusele Arnt Eliassen 1948. aastal, kes põhjendas seda eeskätt võrrandite lihtsustamisega [18]. Rõhu kasutamine sõltumatu vertikaalse koordinaadina on õigustatud, kui rõhk on kõrguse monotoonne funktsioon, st kui kehtib tingimus

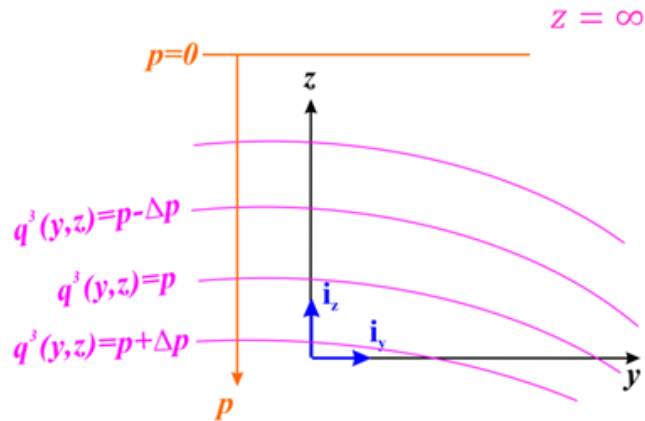
$$\frac{\partial p}{\partial z} < 0 \quad (2.48)$$

Selle tingimuse võib atmosfäridünaamikas peaaegu kõikjal kehtivaks lugeda [19].

Kui tegu ei ole täieliku hüdrostaatilise tasakaaluga ning atmosfäär liigub, sõltub rõhk ka teistest koordinaatidest peale kõrguse ning isegi ajast: $p=p(x,y,z,t)$. Samas x ja y on rõhukoordinaatides samad, mis ristkoordinaatides. Teisendusvalemid võib anda kujul

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x, y, p, t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Esitame rõhukoordinaatide kohta selgitava joonise 5.



Joonis 5. Rõhu koordinaatjooned ehk isobaarjooned (lillad) kujutatud kahemõõtmelisel juhul esialgse ristkoordinaadistiku suhtes. Lõpmata kõrgel loeme rõhu nulliks.

Teisenduse ja pöördteisenduse maatriksiteks saame

$$J_{\beta}^{\alpha}(x, y, p, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(x, y, p, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial x}}{\frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial p}} & -\frac{\frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial y}}{\frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial p}} & \frac{1}{\frac{\partial z(x, y, p, t)}{\partial p}} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Maatriks (2.49) on saadud maatriksi (2.48) pööramisest. Võrdlusest pöördteisenduse maatriksi definitsiooniga näeme, et kehtib $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$ ning $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$. Füüsikaliselt väljendab miinusmärk siin seda, et $dz < 0$ korral on $dp > 0$ [1].

Vertikaalse koordinaadina võib rõhu asemel vaadata iga suvalist kõrguse või rõhu monotoonset funktsiooni ehk nõ üldistatud kõrgust, mille alla mahuvad kõik atmosfäridünaamikas kasutuselolevad kõverjoonelised koordinaadid.

Näiteks rõhukoordinaatide puhul tekivad arvutuslikud probleemid ääretingimuste määramisel atmosfääri alumistes kihtides ning järsu orograafia (nt mägede) läheduses, millest vabanemiseks suundutakse maastikujälgivatesse koordinaatidesse, mida võib defineerida nii rõhu kui kõrguse kaudu. Enim levinud on rõhu taandamine aluspinna suhtes ehk **sigmakoordinaatidesse** suundumine, mille võttis kasutusele Phillips 1956. aastal [20]. Sigmakoordinaat on määratud valemiga

$$\sigma = \frac{p(x,y,z,t)}{p_s(x,y,t)}, \quad (2.52)$$

kus p_s tähistab aluspinna rõhku. Ülemineku $x, y, z \rightarrow x, y, \sigma$ maatriks on

$$J_{\beta}^{\alpha}(x, y, \sigma, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{p_s} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{p_s} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Sigmakoordinaadid aitavad küll leida lihtsamaid ääritingimusi atmosfääri alumistes kihtides, kuid muudavad tingimuste leidmise kõrgemal keerulisemaks, kui oleks rõhukoordinaatide puhul. Seepärast sigmakoordinaatide edasiseks üldistuseks on **eta- ehk hübriidkoordinaat**, mis tahetakse maa lähedal käituma panna kui sigmakoordinaat, kõrgemal aga kui keskmise merepinna taseme suhtes taandatud rõhukoordinaat. Esimesena võtsid hübriidkoordinaadi kasutusele Simmons ja Burrige 1980. aastal [13]. Meie anname etakoordinaadi definitsiooni kujul

$$\eta(x, y, z, t) = \frac{p(x,y,z,t)}{\varphi(x,y,z,t)p_s(x,y,t) + [1 - \varphi(x,y,z,t)]p_0} \quad (2.54)$$

Siin $\varphi(x, y, z, t)$ on kaalufunktsioon. Näeme, et juhul $\varphi(x, y, z, t) = 1$ saame sigmakoordinaadid, juhul $\varphi(x, y, z, t) = 0$, on tulemuseks keskmise merepinna taseme rõhu suhtes taandatud rõhk $\eta(x, y, z, t) = p(x, y, z, t)/p_0$. Proovime leida kaalufunktsiooni, mille puhul madalatel kõrgustel saame sigmakoordinaadid ja suurtel kõrgustel tavalised rõhukoordinaadid, st nõuame

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow h(x,y)} \varphi(x, y, z, t) = 1. \quad (2.55)$$

Lihtsaima kaalufunktsiooni perekonna annab

$$\varphi(x, y, z, t) = \left[\frac{p(x,y,z,t)}{p_s(x,y,t)} \right]^{\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (2.56)$$

Näiteks $\alpha = 1$ korral

$$\eta(x, y, z, t) = \frac{p(x,y,z,t)}{\frac{p(x,y,z,t)}{p_s(x,y,t)} p_s(x,y,t) + \left[1 - \frac{p(x,y,z,t)}{p_s(x,y,t)} \right] p_0} = \frac{p(x,y,z,t)}{p(x,y,z,t) + [p_s(x,y,t) - p(x,y,z,t)] p_0 / p_s(x,y,t)} = \frac{p(x,y,z,t)}{p(x,y,z,t) [1 - p_0 / p_s(x,y,t)] + p_0} \quad (2.57)$$

Hübriidkoordinaat on ilmaennustumudelites tihti eelistatud koordinaat.

Maastikujälgiva koordinaadi võib defineerida ka kõrguse abil, mispuhul võiks seda nimetada **taandatud kõrguseks**. Sigma- ja hübriidkoordinaatidest eristab seda sõltumatus ajast.

Taandatud kõrgust võib defineerida mitmel moel, kuid esimest ja üht lihtsaimat varianti tutvustasid 1975. aastal Gal-Chen ja Somerville [9] kujul

$$z^*(x, y, z) = \frac{H(z - z_s(x, y))}{H - z_s(x, y)} \quad (2.58)$$

Siin z_s tähistab orograafia kõrgust ning H tähistab kasutatava mudeli ülemist piiri. Teisendusest (2.56) saab identsusteisendus nii ülemisel piiril $z = H$ kui lameda orograafia $z_s = 0$ puhul. Otseteisenduseks on

$$z(x, y, z^*) = \frac{z^*(H - z_s(x, y))}{H} + z_s(x, y) \quad (2.58')$$

Vastavad teisenduse ja pöördteisenduse maatriksid on

$$J_{\beta}^{\alpha}(x, y, z^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\frac{\partial z_s}{\partial x}(H - z^*)}{H} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{\partial z_s}{\partial y}(H - z^*)}{H} \\ 0 & 0 & \frac{H - z_s}{H} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(x, y, z^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{\partial z_s}{\partial x}(z^* - H)}{H - z_s} & \frac{\frac{\partial z_s}{\partial y}(z^* - H)}{H - z_s} & \frac{H}{H - z_s} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Kõikidel nimetatud koordinaadisüsteemidel on omad eelised ja puudused, mis on seotud ääretingimuste määramisega või laiemas mõttes dünaamikavõrrandite lahendamisega. Selle töö eesmärk ei küll võrrandite lahendamine, vaid nende esituste saamine, kuid korrektsete esituste tuletamine võib aidata valida optimaalsemat koordinaadisüsteemi.

3. Dünaamika võrrandid kõverjoonelistes koordinaatides

3.1 Diferentseerimine kõverjoonelistes koordinaatides

3.1.1 Materiaalne kiirus

Kuna atmosfäridünaamikas defineeritud materiaalne tuletis, millest tuleb juttu järgnevatel peatükkides 3.1.2 ja 3.1.3, sisaldab kiirust, seletame kõigepealt lahti kiiruse mõiste ning kiiruse komponendid, mille eristamine koordinaadivahetusel võib vajalikuks osutada.

Iga materiaalne osake pidevas keskkonnas liigub mööda kindlat trajektoori. Kui jagame piki trajektoori tehtud elementaarnihke vektori \mathbf{dx} nihke sooritamiseks kulunud ajaga dt , saame kiirusvektori

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{i}^\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} = \mathbf{e}_\alpha U^\alpha = \mathbf{e}^\beta U_\beta \quad (3.1)$$

Teades kiiruse ko- või kontravariantseid komponente, saame vastavalt teised komponendid tuletada indeksi tõstmise/langetamise valemite (2.24), (2.27) abil. Tavaliselt on vaja teada kiiruse kontravariantseid komponente ja neid üritame me nüüd leida. Selleks paneme esmalt kirja nihkevektori nii rist- kõverjoonelistes koordinaatides

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_\alpha(x^\beta, t) dq^\alpha(x^\gamma, t) = \mathbf{i}_\alpha dx^\alpha(q^\beta, t) \quad (3.2)$$

Võrrandit (3.2) dt -ga läbi jagades saame küll valemis (3.1) seisva absoluutse kiiruse esialgses ristkoordinaadistikus, kuid kiiruse mõistet kõverjoonelistes koordinaatides tuleb veel selgitada. Selleks kirjutame täisdiferentsiaalid lahti kujul

$$dq^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} dt = \bar{J}_\beta^\alpha dx^\beta + \bar{J}_0^\alpha dt \quad (3.3)$$

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} dq^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} dt = J_\beta^\alpha dq^\beta + J_0^\alpha dt$$

Kontravariantsed kiirusekomponendid saame vastavate nihkevektori komponentide läbijagamisel dt -ga

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= \bar{J}_\beta^\alpha \dot{x}^\beta + \bar{J}_0^\alpha \\ \dot{x}^\alpha &= J_\beta^\alpha \dot{q}^\beta + J_0^\alpha \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tähistused $\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} = J_0^\alpha$ ja $\frac{\partial q^\alpha}{\partial t} = \bar{J}_0^\alpha$ tulenevad sellest, et oleme samastanud aja nullinda koordinaadiga. Need liikmed on nullist erinevad ainult liikuvast koordinaadistikust ning

kirjeldavad nad reeperi liikumiskiirust. Seega peame üldjuhul eristama suhtelist ja absoluutset kiirust, mis langevad kokku vaid paigalseisvas koordinaatsüsteemis. Üldjuhul peame absoluutse kiiruse saamiseks suhtelisele kiirusele juurde liitma reeperi liikumise kiiruse. Vektorkujul võime absoluutse kiiruse kirja panna järgnevalt

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}^0 \quad (3.5)$$

kus suhteline kiirus on $\mathbf{U}' = \mathbf{e}_i \dot{q}^i$ ja reeperi liikumise kiirus on $\mathbf{U}^0 = \mathbf{e}_i U^{0i}$. Leiame seose komponentide U^{0i} jaoks. Selleks korrutame võrranditest (3.4) esimest \mathbf{e}_α -ga ja teist \mathbf{i}_α -ga.

$$\mathbf{e}_\alpha \dot{q}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha \bar{J}_\beta^\alpha \dot{x}^\beta + \mathbf{e}_\alpha \bar{J}_0^\alpha = \mathbf{i}_\beta \dot{x}^\beta + \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \quad (3.4')$$

$$\mathbf{i}_\alpha \dot{x}^\alpha = \mathbf{i}_\alpha J_\beta^\alpha \dot{q}^\beta + \mathbf{i}_\alpha J_0^\alpha = \mathbf{e}_\beta \dot{q}^\beta + \mathbf{i}_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}$$

Need võrrandid võib suhtelise ja absoluutse kiiruse definitsioonide põhjal ümber kirjutada kujul

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \mathbf{e}_\alpha \bar{J}_0^\alpha = \mathbf{U} - \mathbf{U}^0 \quad (3.4'')$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{i}_\alpha J_0^\alpha = \mathbf{U}' + \mathbf{U}^0$$

Järelikult reeperi liikumise kiiruse kohta kehtivad seosed

$$\mathbf{U}^0 = -\mathbf{e}_\alpha \bar{J}_0^\alpha = \mathbf{i}_\alpha J_0^\alpha \quad (3.6)$$

Komponentide saamiseks korrutame avaldist (3.6) \mathbf{e}^j -ga

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{U}^0 = -\frac{\partial q^j}{\partial t} = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{i}_\alpha J_0^\alpha = \bar{J}_\alpha^j J_0^\alpha \quad (3.7)$$

3.1.2 Skalaari materiaalne tuletis

Atmosfääridünaamikas defineeritakse kahte liiki tuletisi. **Materiaalsed tuletised** kirjeldavad mingi suuruse muutumist liikuvast materiaalses osakeses ning need esinevad jäävusseaduste Lagrange'i vormis. Materiaalset tuletist (nimetatud ka Lagrange'i või täistuletiseks) tähistatakse D/Dt või d/dt . Euleri vormi saamiseks peame materiaalse tuletise siduma suuruse muutumiskiirusega fikseeritud ruumpunktis, mida kirjeldab **lokaalne tuletis** ehk tavaline osatuletis aja järgi [1].

Materiaalse tuletise saab siduda lokaalse tuletisega diferentseerimise ahelreeglit kasutades. Sõltugu skalaarväli φ koordinaatidest ja ajast. Kui kirjutame välja tema täistuletise, näeme, et sinna ilmub suhtelist kiirust sisaldav liige

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathbf{U}' \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (3.16)$$

Siin $\nabla\varphi$ on skalaarvälja gradientvektor

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} \quad (3.17)$$

Võrrand (3.17) on invariantne gradiendi määrang. Arvutustes peame silmas pidama, et koordinaatteisendustel teiseneb ka normaalbaas \mathbf{e}^α .

Skalaarvälja materiaalses tuletises esinevat kiiruse ja gradiendi skalaarkorrutist nimetatakse ka skalaarseks adveksioonioperaatoriks ja tähistatakse

$$A = \mathbf{U}' \cdot \nabla = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (3.18)$$

3.1.3 Vektori materiaalne tuletis

Koordinaatidest sõltumatul kujul võime vektori materiaalse tuletise jaoks kirja panna analoogilise seose nagu skalaarvälja materiaalse tuletise puhul

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{U}' \cdot \nabla\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + A\mathbf{a} \quad (3.23)$$

Proovime nüüd leida selle jaoks arvutuseeskirja komponentides. Vektori diferentseerimisel peame arvestama ajast sõltuvust nii komponentide kui baasivektorite järgi. Üldisel juhul

$$\mathbf{a}(q^j, t) = \mathbf{e}_\alpha(q^j, t) a^\alpha(q^j, t) = \mathbf{e}^\alpha(q^j, t) a_\alpha(q^j, t) \quad (3.24)$$

Edaspidi piirdume vaid kontravariantsete komponentide ja normaalbaasiga. Seose (3.24) diferentseerimine annab seose (3.23) kaasamisel

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e}_\alpha a^\alpha)}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \frac{da^\alpha}{dt} + a^\alpha \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{\partial a^\alpha}{\partial t} + A a^\alpha \right) + a^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} + A \mathbf{e}_\alpha \right) \quad (3.25)$$

Komponentide saamiseks peame (3.25) skalaarselt läbi korrutama \mathbf{e}^j -ga. Kirjutame ka adveksioonioperaatori lahti komponentides (3.19) põhjal.

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)^j = \frac{\partial a^j}{\partial t} + \dot{q}^\beta \frac{\partial a^j}{\partial q^\beta} + \mathbf{e}^j \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} a^\alpha + \dot{q}^\beta \mathbf{e}^j \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} a^\alpha \quad (3.26)$$

Toome sisse Christoffeli sümbolid, millel peatume pikemalt peatükis 3.1.4. Tähistame

$$\mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}^j \quad (3.27)$$

Kui osatuletis on võetud aja järgi, tähistame selle

$$\mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} = \Gamma_{\alpha 0}^j \quad (3.28)$$

Christoffeli sümbolite abil saame vektori materiaalse tuletise komponendid (3.26) esitada

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)^j = \frac{\partial a^j}{\partial t} + \Gamma_{\alpha 0}^j a^\alpha + \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial a^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j a^\alpha\right) \quad (3.29)$$

Selles võrrandis esinevate liikmete põhjal saab defineerida vektori kovariantse ajatuletise

$$a_{;t}^j = \frac{\partial a^j}{\partial t} + \Gamma_{\alpha 0}^j a^\alpha \quad (3.30)$$

ja vektori kovariantse gradiendi komponendid

$$a_{;\beta}^j = \frac{\partial a^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j a^\alpha \quad (3.31)$$

Vektori gradient on teist järku tensor, mille saame, kui mõjume gradientoperaatoriga vektorväljale

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (a^\beta \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}^\alpha a_{;\alpha}^\beta \mathbf{e}_\beta \quad (3.32)$$

Kompaktsel kujul saame vektori materiaalse tuletise komponendid seega esitada kui

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)^j = a_{;t}^j + \dot{q}^\beta a_{;\beta}^j \quad (3.33)$$

Paneme tähele, et kui koordinaadistik ei sõltu ajast, langeb kovariantne ajatuletis (3.30) kokku tavalise osatuletisega aja järgi. Analoogiliselt, kui baas ei pöördu, st kui $\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = 0$ ning Christoffeli sümbolid on nullid, siis langeb kovariantne gradient kokku tavalise gradiendiga.

3.1.4 Christoffeli sümbolid

Korrutades võrrandit (3.27) skalaarselt \mathbf{e}_k -ga võime Christoffeli sümbolid defineerida kui vektori $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j}$ komponendid baasi \mathbf{e}_k suhtes [10]

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (3.35)$$

Täpsemalt on tegu II liiki Christoffeli sümbolitega. Neid nimetatakse sümboliteks, kuna nende teisenemiseeskiri ei vasta tensoritele. Christoffeli sümbolid on alumiste indeksite suhtes sümmeetrilised.

II liiki Christoffeli sümboolite arvutamiseks võime kasutada valemit (3.27) ja Jacobi maatrikseid

$$\Gamma_{kl}^j = \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^l} = \bar{J}_\alpha^j \mathbf{i}^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial q^l} J_k^\beta \mathbf{i}_\beta = \bar{J}_\alpha^j \frac{\partial}{\partial q^l} J_k^\alpha \quad (3.36)$$

Võime aga arvutamiseks kasutada ka meetrilist tensorit, mis on fundamentaalsem suurus. Selleks esitame kõigepealt Christoffeli II liiki sümboolid Christoffeli I liiki sümboolite kaudu

$$\Gamma_{ij}^l = G^{lk} \Gamma_{ijk} \quad (3.37)$$

kust järeldub I liiki sümboolite arvutusvalem

$$\Gamma_{ijk} = G_{lk} \Gamma_{ij}^l = G_{lk} \mathbf{e}^l \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \quad (3.38)$$

Kuna $G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, saame seose

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^k} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{ikj} \quad (3.39)$$

Leides analoogilised seosed kõikide indeksi permutatsioonide jaoks ning kasutades asjaolu, et Christoffeli I liiki sümboolid on kahe esimese indeksi suhtes sümmeetrilised, saab näidata, et

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial G_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^k} \right) \quad (3.40)$$

ning järelikult Christoffeli II järku sümboolid on meetrilise tensori kaudu esitatavad

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{G^{lk}}{2} \left(\frac{\partial G_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial G_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^k} \right) \quad (3.41)$$

Viimaks tuletame seose aega sisaldava Christoffeli sümbooli $\Gamma_{\alpha 0}^j$ ja reeperi suhtes liikumise kiiruse komponentide U^{0j} vahel. Selleks esitame $\Gamma_{\alpha 0}^j$ Jacobi maatriksite kaudu

$$\Gamma_{\alpha 0}^j = \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t} = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \mathbf{i}^i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial q^\alpha} \mathbf{i}_\beta \right) = \frac{\partial q^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial q^\alpha} \right) = \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial t} J_\alpha^\beta \quad (3.42)$$

Siin Jacobi maatriksid on eelduste kohaselt teadaolevad kõverjoonelistel koordinaatidel ja aja funktsioonid. $J_\alpha^\beta = J_\alpha^\beta(t, q^1, q^2, q^3)$. Tähistame aja nullinda koordinaadina ning kirjutame

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial t} = J_0^\beta(q^0, q^1, q^2, q^3) \quad (3.43)$$

Võrrandi (3.43) abil ning arvestades osatuletiste võtmise järjekorra suvalisust võime võrrandi (3.42) esitada kujul

$$\Gamma_{\alpha 0}^j = \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} J_0^\beta \quad (3.44)$$

Sama tähistust kasutades võime U^{0j} esitada definitsiooni (3.15) põhjal kujul

$$U^{0j} = \bar{J}_\beta^j J_0^\beta \quad (3.45)$$

Avaldame sellest võrrandist J_0^β -i U^{0j} abil, korrutades mõlemat poolt J_j^k -ga

$$J_j^k U^{0j} = J_j^k \bar{J}_\beta^j J_0^\beta = \delta_\beta^k J_0^\beta = J_0^k \quad (3.46)$$

Asendades selle valemisse (3.44) saame lõpliku tulemuse

$$\Gamma_{\alpha 0}^j = \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J_i^\beta U^{0i}) \quad (3.47)$$

3.2 Liikumisvõrrandi teisendamine kõverjoonelistesse koordinaatidesse

Alustame liikumisvõrrandist Lagrange'i esituses (1.1). Selles esinev kiirusvektor \mathbf{U} tähistab absoluutset kiirust, mis kõverjoonelistes koordinaatides esitub suhtelise kiiruse ja reeperi omakiiruse summana. Seega saab (1.1) kuju

$$\frac{d(\mathbf{U}' + \mathbf{U}^0)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U}' + \mathbf{U}^0) \quad (3.48)$$

Teeme sellest võrrandi suhtelise kiirenduse leidmiseks

$$\frac{d(\mathbf{U}')}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U}' + \mathbf{U}^0) - \frac{d(\mathbf{U}^0)}{dt} \quad (3.49)$$

Võrrandis esinevad materiaalsed tuletised kirjutame lahti peatüki 3.1.3 eeskujul, arvestades, et vektori \mathbf{a} rollis esineb vastavalt suhteline kiirus \mathbf{U}' ja taustkiirus \mathbf{U}^0 .

$$\left(\frac{d\mathbf{U}'}{dt} \right)^j = \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} + \Gamma_{\alpha 0}^j \dot{q}^\alpha + \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta \alpha}^j \dot{q}^\alpha \right) \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{U}^0}{dt} \right)^j = \frac{\partial U^{0j}}{\partial t} + \Gamma_{\alpha 0}^j U^{0\alpha} + \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial U^{0j}}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta \alpha}^j U^{0\alpha} \right)$$

Asendame nendes võrrandites aega sisaldavad Christoffeli sümbolid valemi (3.47) põhjal ning saame

$$\left(\frac{d\mathbf{U}'}{dt} \right)^j = \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} + \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J_i^\beta U^{0i}) \dot{q}^\alpha + \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta \alpha}^j \dot{q}^\alpha \right) \quad (3.50')$$

$$\left(\frac{d\mathbf{U}^0}{dt} \right)^j = \frac{\partial U^{0j}}{\partial t} + \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J_i^\beta U^{0i}) U^{0\alpha} + \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial U^{0j}}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta \alpha}^j U^{0\alpha} \right)$$

Et võrrandi (3.49) vasakul pool on kontravariantne komponent, peame ka paremal pool leidma kontravariantsed komponendid, esitades

$$(\nabla p)^j = G^{jk} \frac{\partial p}{\partial q^k} \quad (3.51)$$

$$(\nabla \phi)^j = G^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial q^k}$$

Vektorkorrutise esitame võrrandi (3.47) põhjal. Selles esinevad kiiruste kovariantsed komponendid, mille esitame kontravariantsete komponentide kaudu indeksi langetamise operatsiooni abil

$$[2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U}' + \mathbf{U}^0)]^j = \frac{2}{D} \varepsilon^{j\alpha\beta} \Omega_\alpha (G_{\beta i} \dot{q}^i + G_{\beta i} U^{0i}) \quad (3.52)$$

Olles võrrandi (3.49) liikmed niimoodi komponentides lahti kirjutanud, oleme jõudnud **liikumisvõrrandi Euleri kuju komponentesitusele:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} G^{jk} \frac{\partial p}{\partial q^k} - G^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial q^k} - \frac{2}{D} \varepsilon^{j\alpha\beta} \Omega_\alpha (G_{\beta i} \dot{q}^i + G_{\beta i} U^{0i}) - \frac{\partial U^{0j}}{\partial t} - \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J_i^\beta U^i) U^\alpha - \\ & \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial U^i}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j U^\alpha \right) - \bar{J}_\beta^j \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J_i^\beta U^i) \dot{q}^\alpha - \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j \dot{q}^\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Märgime, et kui koordinaatteisendus ei sõltu ajast ning taustkiirus \mathbf{U}^0 on null (reeper ei liigu), omandab (3.53) lihtsama kuju

$$\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} G^{jk} \frac{\partial p}{\partial q^k} - G^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial q^k} - \frac{2}{D} \varepsilon^{j\alpha\beta} \Omega_\alpha G_{\beta i} \dot{q}^i - \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j \dot{q}^\alpha \right) \quad (3.54)$$

3.3 Pidevusvõrrandi teisendamine kõverjoonelistesse koordinaatidesse

Pidevusvõrrandi teisendamiseks alustame tema komponentesitusest ristkoordinaatides (1.26) põhjal

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (3.55)$$

kus kiiruse divergentsi teisendame vahetult teisendusmaatriksi abil

$$\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \bar{J}_\alpha^\beta \frac{\partial (\dot{x}^\alpha)}{\partial q^\beta} \quad (3.56)$$

kus kiiruse vanades koordinaatides asendame valemist (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} = & \bar{J}_\alpha^\beta \frac{\partial (J_\gamma^\alpha \dot{q}^\gamma + J_0^\alpha)}{\partial q^\beta} = \bar{J}_\alpha^\beta J_\beta^\alpha \frac{\partial \dot{q}^\gamma}{\partial q^\beta} + \bar{J}_\alpha^\beta \frac{\partial (J_\gamma^\alpha)}{\partial q^\beta} \dot{q}^\gamma + \bar{J}_\alpha^\beta \frac{\partial (J_0^\alpha)}{\partial q^\beta} = \delta_\gamma^\beta \frac{\partial \dot{q}^\gamma}{\partial q^\beta} + \bar{J}_\alpha^\beta \left(\frac{\partial (J_\gamma^\alpha)}{\partial q^\beta} \dot{q}^\gamma + \right. \\ & \left. \frac{\partial (J_\gamma^\alpha)}{\partial q^\beta} \dot{q}^\gamma \right) = \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q^\beta} + \bar{J}_\alpha^\beta \frac{dJ_\gamma^\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Edasi kasutame seost

$$\bar{J}^j_i = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial J^i_j} \quad (3.58)$$

mis kehtib iga maatriksi ja tema pöördmaatriksi paari jaoks [15]. Selle abil saame

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\alpha} + \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial J^\alpha_\beta} \frac{dJ^\alpha_\beta}{dt} = \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\alpha} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} \quad (3.59)$$

Tulemusena oleme saanud pidevusvõrrandi kujul

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\alpha} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} \right) = 0 \quad (3.60)$$

Edasise lihtsustusena võime üle minna pseudotihedusele

$$\rho^{(q)} = D\rho \quad (3.61)$$

Selleks korrutame võrrandit D-ga ja saame

$$\frac{d\rho^{(q)}}{dt} + \rho^{(q)} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (3.62)$$

Ehk Euleri vormis

$$\frac{\partial \rho^{(q)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\rho^{(q)} \dot{q}^\alpha) = 0 \quad (3.63)$$

Võrrandit (3.63) kasutab näiteks Davies *et al* [14] maastikujälgiva kõrguskoordinaadi puhul, kuid ilma pseudotiheduse mõistet sisse toomata. Meie aga tõestasime selle võrrandi üldisel juhul ehk kõigi koordinaatsüsteemide jaoks.

4. Rakendusnäited

4.1 Esitused konkreetsetes süsteemides

4.1.1 Coriolise jõu tekkimine ühtlase nurkkiirusega pöörlevasse taustsüsteemi üleminekul

Ajast sõltuva koordinaadistiku näitena teeme läbi ülemineku inertsiaalsest, paigalseisvast ristkoordinaadistikust ühtlase nurkkiirusega pöörlevasse ristkoordinaadistikku, jõudes Coriolise jõu avaldiseni üldise koordinaatteisenduse kaudu.

Inertsiaalses ristkoordinaadistikus viibimine tähendab, et hakkame teisendama võrrandit, kus võrreldes (1.1)ga esinevad ainult „absoluutsed“ jõud, st

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi \equiv \mathbf{F} \quad (4.1)$$

Vaatame, kuidas teiseneb võrrandi vasak pool üleminekul paigalseisvast koordinaadistikust x, y, z ühtlase nurkkiirusega Ω ümber z -telje pöörlevasse taustsüsteemi x', y', z' . Koordinaatteisendus on siin

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y &= x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \\ z &= z' \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nurkkiiruse vektor on $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{i}_3$. Teisenduse maatriksid on

$$J_{\beta}^{\alpha}(x', y', z') = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(\varphi, \theta, p) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Meetrilise tensori ko- ja kontravariantsete komponentide maatriksid on ühikmaatriksid ning Christoffeli sümbolid on nullid. Uued baasivektorid vanade kaudu (2.13) põhjal

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos(\Omega t)\mathbf{i}^1 + \sin(\Omega t)\mathbf{i}^2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin(\Omega t)\mathbf{i}^1 + \cos(\Omega t)\mathbf{i}^2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i}^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Suvalise vektori \mathbf{a} materiaalne tuletis uutes koordinaatides on

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \frac{da^\alpha}{dt} + a^\alpha \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \frac{da^\alpha}{dt} + a^\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} + a^\alpha \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_\alpha \frac{da^\alpha}{dt} + a^\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} \quad (4.6)$$

kus viimane liige

$$a^\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} = a^1 (-\Omega \sin(\Omega t) \mathbf{i}^1 + \Omega \cos(\Omega t) \mathbf{i}^2) + a^2 (-\Omega \cos(\Omega t) \mathbf{i}^1 - \Omega \sin(\Omega t) \mathbf{i}^2) \quad (4.7)$$

Teiselt poolt

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} = \Omega \mathbf{i}^3 \times a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \Omega \mathbf{i}^3 \times [a^1 (\cos(\Omega t) \mathbf{i}^1 + \sin(\Omega t) \mathbf{i}^2) + a^2 (-\sin(\Omega t) \mathbf{i}^1 + \cos(\Omega t) \mathbf{i}^2)] = a^1 \Omega \cos(\Omega t) \mathbf{i}^2 - a^1 \Omega \sin(\Omega t) \mathbf{i}^1 - a^2 \Omega \sin(\Omega t) \mathbf{i}^2 - a^2 \Omega \cos(\Omega t) \mathbf{i}^1 \quad (4.8)$$

Võrreldes valemiga (4.7) näeme, et oleme suvalise vektori materiaalse tuletise jaoks tõestanud seose

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \frac{da^\alpha}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} \quad (4.9)$$

Kui \mathbf{a} rollis on kohavektor \mathbf{x} , saame seose absoluutse kiiruse jaoks

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U} = \mathbf{e}_\alpha \dot{q} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}^0 \quad (4.10)$$

Rakendame valemit (4.9) kiiruse enda suhtes. Saame

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d(\mathbf{U}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{e}_\alpha \frac{dU'^\alpha}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}' + \mathbf{e}_\alpha \frac{d(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x})^\alpha}{dt} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}) = \mathbf{e}_\alpha \frac{dU'^\alpha}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}' + \mathbf{e}_\alpha (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}')^\alpha + \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x} \right)^\alpha + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Eelviimane liige on null, kuna $\mathbf{\Omega}$ on konstantne vektor. Viimane liige on aga tsentrifugaaljõud, mida atmosfäridünaamikas üldiselt ei arvestata või arvatakse raskuskiirenduse sisse. Olles $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ niimoodi avaldanud, saamegi liikmeid kokku võttes ja paremale poole viies avaldisest (4.1) avaldise (1.1) suhtelise kiiruse jaoks

$$\frac{d\mathbf{U}'}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}' \quad (4.12)$$

4.1.2 Sfäärilised rõhukoordinaadid

Piirdume lihtsuse mõttes ajast sõltumatu rõhuvälja juhuga. Üleminek geotsentrilistelt ristkoordinaatidelt x, y, z sfäärilistele rõhukoordinaatidele φ, θ, p toimub sel juhul valemitega

$$\begin{aligned} x &= [r_0 + h(\varphi, \theta, p)] \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y &= [r_0 + h(\varphi, \theta, p)] \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z &= [r_0 + h(\varphi, \theta, p)] \cos(\theta) \end{aligned} \quad (4.13)$$

r_0 on keskmine maa raadius ja $h(\varphi, \theta, p) = r(\varphi, \theta, p) - r_0$ on kõrgus atmosfääris tasemest r_0 ülespoole nurkade φ, θ ja rõhu p funktsioonina.

Meiloodud Maple programm (vt punkt 4.2) annab teisenduse maatriksi

$$J_{\beta}^{\alpha}(\varphi, \theta, p) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos(\varphi) - r_0 \sin(\varphi) - \sin(\varphi) h \right) & \sin(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin(\varphi) + r_0 \cos(\varphi) + \sin(\varphi) h \right) & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \sin(\theta) + r_0 \cos(\theta) + \cos(\theta) h \right) & \sin(\varphi) \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \sin(\theta) + r_0 \cos(\theta) + \cos(\theta) h \right) & \frac{\partial h}{\partial \theta} \cos(\theta) - \sin(\theta) (r_0 + h) \\ \frac{\partial h}{\partial p} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \frac{\partial h}{\partial p} \sin(\varphi) \sin(\theta) & \frac{\partial h}{\partial p} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mis $h \ll r_0$ korral lihtsustub kujule

$$\approx \begin{pmatrix} \sin(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos(\varphi) - r_0 \sin(\varphi) \right) & \sin(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin(\varphi) + r_0 \cos(\varphi) \right) & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \sin(\theta) + r_0 \cos(\theta) \right) & \sin(\varphi) \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \sin(\theta) + r_0 \cos(\theta) \right) & \frac{\partial h}{\partial \theta} \cos(\theta) - \sin(\theta) r_0 \\ \frac{\partial h}{\partial p} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \frac{\partial h}{\partial p} \sin(\varphi) \sin(\theta) & \frac{\partial h}{\partial p} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

(4.14) pööramisel saame

$$\bar{J}_{\beta}^{\alpha}(\varphi, \theta, p) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\varphi)}{r_0 \sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi) \cos(\theta)}{r_0} & \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin(\varphi) + r_0 \cos(\varphi) \sin^2(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) \frac{\partial h}{\partial \theta}}{r_0 \sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial p}} \\ \frac{\cos(\varphi)}{r_0 \sin(\theta)} & \frac{\sin(\varphi) \cos(\theta)}{r_0} & -\frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos(\varphi) - r_0 \sin(\varphi) \sin^2(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \frac{\partial h}{\partial \theta}}{r_0 \sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial p}} \\ 0 & \frac{-\sin(\theta)}{r_0} & \frac{\frac{\partial h}{\partial \theta} \sin(\theta) + r_0 \cos(\theta)}{r_0 \frac{\partial h}{\partial p}} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Meetrilise tensori komponentide arvutus lihtsustatud jakobiaanide põhjal toob avaldistele

$$G_{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} r_0^2 \sin^2(\theta) & \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial p} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & r_0^2 & \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial p} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial \theta} & \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$G^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{r_o^2 \sin^2(\theta)} & 0 & -\frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2 \sin^2(\theta)} \\ 0 & \frac{1}{r_o^2} & -\frac{\frac{\partial h}{\partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} \\ -\frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2 \sin^2(\theta)} & -\frac{\frac{\partial h}{\partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} & \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)^2} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Christoffeli sümbooliteks saame

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 \approx \begin{pmatrix} \frac{2}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \cot(\theta) & \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \\ \cot(\theta) & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 \approx \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & 0 \\ \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{2}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \theta} & \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \\ 0 & \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 \approx \begin{pmatrix} -\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o \sin^2(\theta)} & \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cot(\theta) - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} & \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \\ \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cot(\theta) - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} & \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial p}} & \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \\ \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} & \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p}} & \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \end{pmatrix}$$

Teisenduse determinant on

$$D = -\sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial p} r_o^2 \quad (4.19)$$

Potentsiaaligradiendi arvutamisel arvestame, et rõhukoordinaatides rõhk on teistest koordinaatidest sõltumatu, nii et $G^{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q^k} = \frac{1}{\rho} G^{j3} = \frac{gH}{p} G^{j3}$, kus H on skaalakõrgus, defineeritud kui $H = \frac{RT}{g}$

Tabel 1

Liikumisvõrrand komponentides seisvate sfääriliste rõhukoordinaatide juhul. Esitatud on iga komponendi korral liikmed järjekorras potentsiaaligradient $\Phi^j = \frac{gH}{p} G^{j3} - G^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial q^k}$, Coriolise

kiirendus $\Phi_{cor}^j = \frac{2}{D} \epsilon^{j\alpha\beta} \Omega_\alpha G_{\beta i} \dot{q}^i$ ja adveksiooniliige $(Av)^j = \dot{q}^\beta (\frac{\partial q^j}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^j \dot{q}^\alpha)$.

Liikumisvõrrandis on need liikmed vastandmargiga.

$q^j = \varphi, v^j = \dot{\varphi}$	
Φ^j	$\frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2 \sin^2(\theta)} \left(-\frac{gH}{p} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{1}{r_o^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$
Φ_{cor}^j	$\frac{2}{\sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} \Omega \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + r_o^2 \dot{\theta} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial p} \omega \right)$
$(Av)^j$	$\dot{\varphi}^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \dot{\varphi} \dot{\theta} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \omega \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial p} + \frac{2}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 + \cot(\theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} + \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \dot{\varphi} \omega + \cot(\theta) \dot{\varphi}^2$ $+ \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \dot{\varphi}^2$
$q^j = \theta, v^j = \dot{\theta}$	
Φ^j	$-\frac{\frac{\partial h}{\partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} \left(\frac{gH}{p} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$
Φ_{cor}^j	$\frac{2}{\sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} \Omega \left(r_o^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\theta} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial p} \omega \right)$
$(Av)^j$	$\dot{\varphi} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial p} - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{2}{r_o} \frac{\partial h}{\partial \theta} \dot{\theta}^2$ $+ \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \dot{\theta} \omega + \frac{1}{r_o} \frac{\partial h}{\partial p} \dot{\theta}^2$
$q^j = p, v^j = \omega$	
Φ^j	$\frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^2} \left(\frac{gH}{p} - \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{\frac{\partial h}{\partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p} r_o^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$
Φ_{cor}^j	0

$(Av)^j$	$\begin{aligned} & \dot{\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial p} - \dot{\varphi} \omega \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial p}} r_0 \sin^2(\theta) + \dot{\theta} \omega \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cot(\theta) - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} + \omega^2 \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \\ & + \dot{\varphi} \omega \frac{\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cot(\theta) - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} + \frac{\dot{\theta} \omega}{\frac{\partial h}{\partial p}} + \omega^2 \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p}} + \dot{\varphi} \omega \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \varphi}}{\frac{\partial h}{\partial p}} + \dot{\theta} \omega \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial \theta}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \\ & + \omega^2 \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}}{\frac{\partial h}{\partial p}} \end{aligned}$
----------	--

4.2 Maple programm dūnaamika vōrrandite esitamiseks kōverjoonelistes koordinaatides

Maple on Maplesofti loodud kommertstarkvara, mis omab laialdasi vōimalusi, olles eriti mugav sūmbolarvutuste lābiviimiseks ning omades sisseehitatud tensorarvutuse keskkonda. Graafiline kasutajaliides vōimaldab sisestada valemeid traditsioonilistes matemaatilistes tāhistustes, viia lābi numbrilisi arvutusi, aga ka kirjutada traditsioonilises mōttes programme konkreetsete sisendite ja vāljunditega. Viimast vōimalust kasutasime selles tōōs dūnaamikavōrrandite teisendamiseks ūhest koordinaatsüsteemist teise. Jārgneb programmi lūhike tutvustus, tāpne kood on āra toodud lisan.

Maple programme saab kirjutada erinevate protseduuride defineerimise kaudu, ūmbritsedes mingi Maple kāsksude jada viidetega *proc()* ja *end proc*. *Proc()* sulgude sees on vōimalik programmile ette anda eeldefineeritud parameetrid, programm vāljastab viimase kāsksu enne *end proc*-i. Protseduuri sees saab kasutada Maple'i teeke ning ka teisi protseduure. Seda vōimalust kasutades saab lōpliku tulemuse esitada nn superprotseduurina, mis jātub vōimaluse vālja kutsuda ka vahepealseid protseduure ja nāha vahetulemusi.

Esmased protseduurid, mis defineerimist vajavad, on teisenduse maatriksi, pōordteisenduse maatriksi, meetrilise tensori ko- ja kontravariantsete komponentide ning Christoffeli sūmbolite leidmiseks. Kōik nimetatud protseduurid vajasisid sisendparameetritena vaid esialgseid koordinaatmuutujaid, uusi koordinaatmuutujaid ning nende vahelist ūleminekufunktsiooni. Jārgnevad protseduurid vōrrandi (3.54) erinevate osade leidmiseks, kus saab kasutada eeldefineeritud protseduure, nii nagu neid vastavalt vōrrandile vaja lāheb. Potentsiaaligradiendi leidmiseks oli vaja programmi jaoks tāpsustada kōrguse parameetrit maapinnast, nii nagu seda

vastavas koordinaatsüsteemis mõista tuleb (programmis tähistatud sümboliga h). Coriolise jõu leidmiseks on vaja parameetritena ette anda kontravariantsed kiiruse komponendid uues koordinaatsüsteemis ning Maa nurkkiiruse vektor. Viimast on tarvis, kuna erinevatesse kõverjoonelistesse koordinaatsüsteemidesse suundumisel võib olla aluseks nii geotsentriline ristkoordinaadistik (nt sfäärilistesse koordinaatidesse suundumisel), kus Maa nurkkiiruse vektoril on vaid z -komponent, kui ka ristkoordinaadistik, mille alguspunkt on nihutatud mingisugusesse maapinnal asuvasse punkti (nt silindrilistesse koordinaatidesse suundumisel), kus nurkkiiruse vektor on vastavalt teisenenud. Ka adveksiooniliikme arvutamiseks on vaja ette anda kiiruse kontravariantsed komponendid.

Lõplik protseduur seisneb võrrandi kolme liikme kokkuliitmisel, kusjuures selle väljakutsumiseks on vaja ette anda ühtekokku kuus parameetrit: esialgsed koordinaatmuutujad, uued koordinaatmuutujad, koordinaatmuutujate vahelised üleminekuseosed, kiiruse kontravariantsed komponendid uues koordinaatsüsteemis, kõrguse parameeter uues koordinaatsüsteemis ning Maa nurkkiiruse vektor esialgses koordinaatsüsteemis.

Programmi lõpus on defineeritud ka protseduur pidevusvõrrandi esitamiseks kõverjoonelistes koordinaatsüsteemides, kuigi seal on programmi abi vaja üksnes üleminekumaatriksi determinandi arvutamisel.

Arutelu ja kokkuvõte

Antud töö peamine eesmärk oli kirja panna dünaamika võrrandid invariantisel kujul üldistes kõverjoonelistes suvaliselt liikuvates (deformeeruvates) koordinaatides, kasutades korrektset tensoranalüüsi aparati. Peamiseks teoreetiliseks tulemuseks võib pidada liikumisvõrrandeid (3.53)-(3.54) kiirusele ning pidevusvõrrandit (3.63) pseudotihedusele. Et sarnast ülesannet on püstitatud ka varem, siis proovime siinkohal tulemusi ja käsitlusi võrrelda tööde puhul, mis sarnaselt käesolevaga tuletavad võrrandid korrektsetes tensorformuleeringus, kasutades mitte üksnes meetrilist tensorit vaid ka Christoffeli sümboleid.

Üheks uudseks asjaoluks, mis seda tööd teistest eristab, on taustkiiruse ilmutatud käsitlus, mis on jäänud varasemates töödes kas piisava tähelepanuta või üldse vaatluse alt välja. Näiteks ei tehta eristust absoluutse ja suhtelise kiiruse vahel Arise monogoraafias [8], kus saadakse kiiruse tuletise jaoks seos, mis on kooskõlas meie materiaalse tuletise avaldisega (3.29) vaid ajast sõltumatul juhul, s.t kui $\Gamma_{\alpha 0}^j = 0$ (erinevus on vaid selles, et Aris tegeleb vektori füüsikaliste komponentidega), kuid sellega ka sarnasus piirdub.

Sama kehtib Arisele toetuva Luo ja Bewley artikliga [12], kus uuritakse impulsi jäävust Navier-Stokesi võrrandi teisendamisel ajas liikuvasse koordinaatsüsteemi. Autorid rõhutavad, et vektori ajalist tuletist ei saa käsitleda sarnasel moel skalaari tuletisega, kuna nii ei arvestata kõiki olulisi liikmeid, ning toovad sisse suurused, mis vastavad meie töös absoluutsele ja reeperi liikumise kiirusele, kuid ei nimeta neid nii ega ava ka nende sisu täpsemalt (näiteks ei esita kusagil absoluutset kiirust kui suhtelise kiiruse ja reeperi omakiiruse ehk taustkiiruse summana). Tulemusena langeb kiiruse materiaalse tuletise esitus kokku käesolevas töös esitatuga ainult liikumatu koordinaadistiku puhul. Liikuva koordinaadistiku korral on [12] tulemused valed. Vaid reeperi omakiiruse nulliks muutumisel on nende võrrandid õiged, taandudes liikumatu koordinaadistiku juhtumile.

Tensoresitust kasutavad ka Charron *et al* [21], kuid teevad seda neljamõõtmelises formalismis, suutes ühteainsasse tensorvõrrandisse massi-impulsi tensori kasutuselevõtmisega kodeerida nii pidevus- kui liikumisvõrrandi. Teistsuguse formalismi tõttu ei ole tulemused otseselt võrreldavad, kuigi konkreetsetes süsteemides esitatuna peavad komponendid kokku langema. Autorid tunnistavad ka, et neljamõõtmelise formalismi kasulikkust meteoroloogias pole veel põhjalikult uuritud.

Ka Simarro ja Hortal [22] teevad ülemineku Cartesisuse koordinaatidelt üldistatud kõrgust sisaldavasse koordinaatsüsteemi ilma lokaalse ortogonaalsuse eelduseta, kuid kahemõõtmelisel juhul ning ilma $x \rightarrow q$ arenduseta, tuues küll sisse Christoffeli sümbolid, kuid esitades lõpptulemuse üldistatud kõrguse tuletiste kaudu. Kuigi nende käsitus on sarnane käesolevale, on see oluliselt vähem üldine (teisendatakse ainult ühte koordinaati), samuti ei eristata liikuvat ja liikumatut reeperi juhtumeid.

Toodud võrdlusest varasemate tulemustega nähtub, et kui atmosfääridünaamika võrrandite teisendamine ortogonaalsetesse kõverjoonelistesse koordinaatidesse on hästi teada ning sfääriliste ja silindriliste koordinaatide erijuhul ka õpikutes kirja pandud, siis üldiste mitteortogonaalsete kõverjooneliste koordinaatide osas ühest selgust varem ei olnud ning päris sellisel kujul, nagu need käesolevas töös kirja said, neid varem kirja pandud ei ole (välja arvatud loengukursus [15], ja isegi seal on taustkiirus käsitlust leidnud vaid episoodiliselt).

Taustkiiruse \mathbf{U}^0 väljaeraldamine ja vastava mitteinertsiaalse taustkiirenduse $\frac{d(\mathbf{U}^0)}{dt}$ arvestamine on korrektse esituse saamiseks vajalik iga liikuva koordinaadistiku puhul. Atmosfääridünaamika numbrilistes rakendustes on sellisteks ajas muutuvateks taustsüsteemideks rõhukoordinaadid ja nendel baseeruvad sigma- ning hübriidkoordinaadid, mida kirjeldati peatükis 2.2.2. Ajas muutuva rõhuvälja vertikaalse rõhukiiruse jagunemine isobaarpinna liikumiskiiruseks (lainetamiseks) ja materiaalse aineosakese suhteliseks kiiruseks selle isobaarpinna suhtes on dünaamika rakendustes seni olnud mitte üksnes läbiuurimata, vaid üldse tundmata probleem. Seega peaks edasine uurimis- ja tegevusvaldkond olema üsna ulatuslik.

Samuti on uueks tulemuseks pidevusvõrrandi invariante kuju pseudotihedusele (3.63), mis on esmakordselt esitatud üldise liikuva taustsüsteemi puhul, sisaldamata samal ajal ilmutatud kujul taustkiirgust. Sama vormi on küll kasutanud varem näiteks Davies [14] ja Coffier [2] konkreetsetes koordinaatsüsteemides, kuid varem ei ole seda formuleeritud invariantisel kujul suvalise kõverjoonelise mitteortogonaalse liikuva taustsüsteemide jaoks.

Summary

Dynamics of continuous medium in curvilinear coordinates

The aim of this paper is to derive an invariant formulation of the main dynamic equations of atmosphere (equation of motion and continuity equation) in the **general non-orthogonal curvilinear coordinates**. The equations are first presented in a vector form and in Cartesian components. Then the general ideas of working in the curvilinear coordinates are discussed and both orthogonal coordinate systems (cylindrical and spherical) and non-orthogonal coordinate systems (pressure, sigma and hybrid coordinates) are introduced and described. In the third part of the paper the general forms of the equation of motion and continuity equation are derived. We started with distinguishing material velocity components as the relative velocity (relative to the base) and the velocity of the base itself. Together these components do give the absolute velocity of the material particle that coincides with the relative velocity in unmoving, time-independent coordinate systems only. The other important step in transforming the equation of motion to general curvilinear coordinates was to find correct formulation of the material derivative. The final results are the equations of motion (3.53)-(3.54) and the continuity equation (3.63).

In the last part of the paper it is demonstrated how we can derive the Coriolis force from the general equations if the transition to rotating coordinate system is performed. As an other example the equations of motion are derived in the spherical pressure-coordinates. A part of the work was to write a Maple program for deriving of exact equations of motion automatically for any given coordinate system. This Maple program also is described in the last part of the paper.

The novelty of this paper lies in using correct tensor analysis in derivation and also in making the proper distinction between absolute and relative velocities. Thanks to it the correct result for the equation of motion are derived that we believe haven't been published before. Also the general invariant form of the continuity equation is novel, although some authors have used it formerly in particular coordinate systems.

Viited

[1] Leonhard Euler, *General principles of the motion of fluids*, Novi. Comm. Acad. Sci. Petrop.: 271–311.

[2] James R. Holton, *An introduction to dynamic meteorology*, fourth edition (Elsevier Academic Press, USA, 2004)

[3] Jean Coiffier, *Fundamentals of numerical weather prediction* (Cambridge University Press, UK, 2011)

[4] Rein Rõõm, *Loengukonspekt aines Atmosfääridünaamika I*, 2009

<http://meteo.physic.ut.ee/~room/DYNAMET-I-2013/dmI.pdf>

[5] Edmund Bertschinger, *Introduction to tensor calculus for general relativity*, Massachusetts Institute of Technology, Department of Physics. 34 p, 1999

<http://web.mit.edu/edbert/GR/gr1.pdf>

[6] Tõnu Laas ja Risto Tammelo, *Vektor- ja tensoranalüüs*, Tartu Ülikool, Teoreetilise Füüsika Instituut (2000-2004)

<http://www.tlu.ee/~tony/oppetoo/mfvorrandid/vektor-tensoranalüüs.pdf>

[7] K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering*, third edition (Cambridge University Press, UK, 2006)

[8] R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics* (Courier Dover Publications, New York, 1989)

[9] Tzvi Gal-Chen, Richard C.J Somerville, *On the use of a coordinate transformation for the solution of the Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, Volume 17, Issue 2, February 1975, Pages 209-228

[10] David A. Clarke, *A Primer on Tensor Calculus*, Saint Mary's University, Halifax NS, Canada, 2011

<http://ap.smu.ca/~dclarke/home/documents/byDAC/tprimer.pdf>

[11] Dutton

- [12] Haoxiang Luo, Thomas R. Bewley, *On the contravariant form of the Navier-Stokes equations in time-dependent curvilinear coordinate systems*, J. Comput. Phys. 199: 355–375, 2004
- [13] A.J Simmons, D.M Burridge, *An energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates*. Mon. Weather Rev., 109, 758–766. (1981)
- [14] T. Davies, M. J. P. Cullen, A. J. Malcolm, M. H. Mawson, A. Staniforth, A. A. White, N. Wood, *A new dynamical core for the Met Office's global and regional modelling of the atmosphere*, Q. J. R. Meteorol. Soc. (2005), 131, pp. 1759–1782
- [15] Rein Rõõm, *Loengukonspekt aines Atmosfääridünaamika II*, 2015
<http://meteo.physic.ut.ee/~room/DM-II-2015/>
- [16] Hardi Veermäe, *Loengukonspekt aines analüütiline mehhaanika*, 2013
http://dSPACE.ut.ee/bitstream/handle/10062/20769/Analutiline_mehaanika_materjalid.pdf
- [17] A. A. White, A. Staniforth, N. Wood, *Spheroidal coordinate systems for modelling global atmosphere*, Q. J. R. Meteorol. Soc. 134: 261–270 (2008)
- [18] Arnt Eliassen, *The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable*, Geofys. Publikasjoner 1949
- [19] R. Rõõm, A. Männik, *Responses of Different Nonhydrostatic, Pressure-Coordinate Models to Orographic Forcing*, American Meteorological Society, volume 56 (1999)
- [20] N.A Phillips, *A coordinate system having some special advantage for numerical forecasting*, Journal of Meteorology 1957
- [21] Martin Charron, Ayrton Zadra, Claude Girard, *Four-dimensional tensor equations for a classical fluid in an external gravitational field*, Q. J. R. Meteorol. Soc. 140: 908–916, 2013
- [22] Juan Simarro, Mariano Hortal, *A semi-implicit non-hydrostatic dynamical kernel using finite elements in the vertical discretization*, Q. J. R. Meteorol. Soc; 138, pp 826- 839, 2012
- [23] Rein Rõõm, *A general form of the equations of atmospheric dynamics in isobaric coordinates*, 1990

Lisa

Jacobi maatriksite leidmine

```
jakobiaan := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon) with(tensor) : dim := 3;  
x2q := funktsioon;  
gIJ_compts := array(symmetric, 1 .. dim, 1 .. dim);  
gIJ_compts[1, 1] := 1; gIJ_compts[1, 2] := 0; gIJ_compts[1, 3] := 0;  
gIJ_compts[2, 1] := 0; gIJ_compts[2, 2] := 1; gIJ_compts[2, 3] := 0;  
gIJ_compts[3, 1] := 0; gIJ_compts[3, 2] := 0; gIJ_compts[3, 3] := 1;  
gIJ := create([-1, -1], op(gIJ_compts));  
Jacobian(q1q2q3, x2q, qJx, xJq);  
op(xJq);  
xJq_c := get_compts(xJq);  
end proc;
```

```
pöördjakobiaan := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon)  
with(tensor) : dim := 3;  
x2q := funktsioon;  
gIJ_compts := array(symmetric, 1 .. dim, 1 .. dim);  
gIJ_compts[1, 1] := 1; gIJ_compts[1, 2] := 0; gIJ_compts[1, 3] := 0;  
gIJ_compts[2, 1] := 0; gIJ_compts[2, 2] := 1; gIJ_compts[2, 3] := 0;  
gIJ_compts[3, 1] := 0; gIJ_compts[3, 2] := 0; gIJ_compts[3, 3] := 1;  
gIJ := create([-1, -1], op(gIJ_compts));  
Jacobian(q1q2q3, x2q, qJx, xJq);  
op(qJx);  
qJx_c := get_compts(simplify(qJx));  
end proc;
```

Meetrilise tensori komponentide leidmine

```
komeetriline := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon)  
with(tensor) : dim := 3;  
xJq_c := jakobiaan(xyz, q1q2q3, funktsioon);  
G_compts := array(symmetric, 1 .. dim, 1 .. dim);  
for i to dim do for j to dim do G_compts[i, j] := xJq_c[i, 1] * xJq_c[j, 1]  
+ xJq_c[i, 2] * xJq_c[j, 2] + xJq_c[i, 3] * xJq_c[j, 3] od od;  
G_compts := simplify(op(G_compts));  
end proc;
```

```
kontrameetriline := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon)  
with(tensor) : dim := 3;  
xJq_c := pöördjakobiaan(xyz, q1q2q3, funktsioon);  
G_compts := array(symmetric, 1 .. dim, 1 .. dim);  
for i to dim do for j to dim do G_compts[i, j] := xJq_c[i, 1] * xJq_c[j, 1]  
+ xJq_c[i, 2] * xJq_c[j, 2] + xJq_c[i, 3] * xJq_c[j, 3] od od;  
G_compts := simplify(op(G_compts));  
end proc;
```

II järku Christoffeli sümbolite leidmine

```
ChII := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon)
  with(tensor) :
  coord := q1q2q3;
  G_compts := array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3) :
  mc := kontrameetriline(xyz, q1q2q3, funktsioon);
  G_compts1,1 := mc1,1 :
  G_compts2,2 := mc2,2 :
  G_compts3,3 := mc3,3 :
  G := create( [-1,-1], eval(G_compts));
  ginv := invert(G, 'detg');
  D1g := d1metric(G, coord);
  Cf1 := Christoffel1(D1g);
  `tensor/Christoffel2/simp` := proc(x) simplify(x, trig) end proc:
  Cf2 := Christoffel2(ginv, Cf1);
end proc:
```

Potentsiaaligradiendi leidmine

```
potentsiaal := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon, h)
  G := kontrameetriline(xyz, q1q2q3, funktsioon);
  dim := 3;
  tulemus := array(1..dim);
  ptul := array(1..dim);
  for j to dim do ptulj := Diff(p, q1q2q3j) od;
  ztul := array(1..dim);
  for j to dim do ztulj := diff(h, q1q2q3j) od;
  for j to dim do tulemusj :=  $\sum_{\alpha=1}^{\dim} G_{j,\alpha} \cdot \left( \frac{ptul_{\alpha}}{\rho} + g \cdot ztul_{\alpha} \right)$  od;
  simplify(tulemus);
end proc:
```

Coriolise kiirenduse leidmine

```

Coriolis := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon, kiirused,  $\Omega$ )
  with(Physics) :
  with(LinearAlgebra) :
  dim := 3;
  Setup(dimension = dim, signature = '+' ) :
  G := komeetriline(xyz, q1q2q3, funktsioon);
  J := jakobiaan(xyz, q1q2q3, funktsioon);
  Jm := convert(J, Matrix);
  D := simplify(Determinant(Jm));
  kovkiirused := array(1..dim);

  for j to dim do kovkiirusedj :=  $\sum_{\alpha=1}^{dim} G_{j, \alpha} \cdot kiirused_{\alpha}$  od;

  xq := jakobiaan(xyz, q1q2q3, funktsioon);
   $\Omega q$  := array(1..dim);

  for j to dim do  $\Omega q_j := \sum_{\beta=1}^{dim} xq_{j, \beta} \cdot \Omega_{\beta}$  od;
  tulemus := array(1..dim);

  for j to dim do tulemusj :=  $\frac{2}{D} \cdot \sum_{\alpha=1}^{dim} \left( \sum_{\beta=1}^{dim} LeviCivita_{j, \alpha, \beta} \cdot \Omega q_{\alpha} \cdot kovkiirused_{\beta} \right)$  od;

  simplify(tulemus);

end proc;

```

Advektsooniliikme leidmine

```

adv := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon, kiirused)
  with(tensor) :
  dim := 3;
  Chrs := ChII(xyz, q1q2q3, funktsioon);
  Chs := get_compts(Chrs);
  Ch := array(1..dim, 1..dim, 1..dim);

  for i to dim do for j to dim do for k to dim do Chi,j,k := Chsi,j,k od od od;
  tulemus := array(1..dim);
  for j to dim do for i to dim do kiirustulj, i := Diff(kiirusj, q1q2q3i) od od;

  for j to dim do tulemusj :=  $\sum_{\alpha=1}^{dim} kiirus_{\alpha} \cdot kiirustul_{j, \alpha} + \sum_{\alpha=1}^{dim} \left( \sum_{\beta=1}^{dim} (kiirus_{\alpha}) \cdot (Ch_{j, \alpha, \beta}) \cdot kiirus_{\beta} \right)$  od;

  op(tulemus);
end proc;

```

Liikumisvõrrandi kontravariantsete komponentide leidmine

```
võrrand := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon, h, kiirused,  $\Omega$ )  
  dim := 3;  
  tulemus := array(1 ..dim);  
  for j to dim do tulemusj := -potentsiaal(xyz, q1q2q3, funktsioon, h)j -  
  Coriolis(xyz, q1q2q3, funktsioon, kiirused,  $\Omega$ )j - adv(xyz, q1q2q3, funktsioon, kiirused)j od;  
  convert(tulemus, Matrix);  
end proc;
```

Pidevusvõrrandi leidmine

```
pidevus := proc(xyz, q1q2q3, funktsioon, kiirused)  
  with(LinearAlgebra) :  
  dim := 3;  
  kiirustul := array(1 ..dim);  
  
  J := jakobiaan(xyz, q1q2q3, funktsioon);  
  Jm := convert(J, Matrix);  
  D := simplify(Determinant(Jm));  
  for j to dim do kiirustulj := -Diff(D· $\rho$ ·kiirusedj, q1q2q3j) od;  
  parempool := Diff(D· $\rho$ , t);  
  parempool =  $\sum_{i=1}^{dim}$  kiirustuli;  
end proc;
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Heido Trofimov

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Pideva keskkonna dünaamika kõverjoonelistes koordinaatides

mille juhendaja on prof. Rein Rõõm

- 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **22.05.2016**