

Est. A-16901

XXIV 3/25

ENSV Teaduste Akadeemia
Tartu Astronoomia Observatoorium

№ 13583

5/IX - 4

P. 26.
2770



$\frac{11}{23}$ Februar 1853.

DIE GESTALT DER ERDE. VON DR. M. G. VON PAUCKER, CORRESPONDENT DER AKADEMIE.

Der nachstehende Aufsatz versucht die Frage über die wahre Gestalt der Erde auf einem Wege zu entscheiden, welcher die beschränkte elliptische Voraussetzung verlässt. Der erste Artikel enthält eine mathematische Entwicklung, welche zuletzt ein sehr einfaches Verfahren anzeigt, um die Elemente des Meridians aus den Beobachtungen einer Gradmessung zu bestimmen. Dabei wird der Meridian als eine beliebige krumme Linie angenommen, mit der einzigen Beschränkung, dass diese Linie wenig vom Kreise abweicht.

Nach diesen Ausdrücken nimmt der zweite Artikel die vorhandenen Gradmessungen in Rechnung. Dass die elliptische Gestalt unzulässig ist, war schon aus theoretischen Gründen erkannt worden. Die Elemente eines neuen mittlern Meridians, welcher alle vorhandenen Gradmessungen nach dem Satz der kleinsten Quadrate vereinigt, bestätigen diesen Anspruch. Es werden ferner die Meridiane von Ostindien, Paris und Dorpat für sich bestehend berechnet. Man gelangt hiebei zu der Ueberzeugung, dass die Gradmessungen jetzt weniger eine geographische, als vielmehr eine geologische Bedeutung haben, indem sie den Gang der örtlichen Anziehungen geben, welche grösstentheils durch die veränderliche Dichtigkeit des Erdinnern bedingt werden.

TARTU ÜLIKOOI
RAAMATUKOGU

033816396

Erster Artikel.

Der Meridianbogen der sphäroidischen nicht elliptischen Erde.

Es sei für irgend einen Ort des Meridians der aus der Erdmitte gezogene Halbmesser = r , die Neigung desselben gegen den Aequator = ψ , $\sin \psi = c$, $\cos \psi = c'$, der vom Aequator gerechnete Meridianbogen = s , der Krümmungshalbmesser im Meridian = \Re , die Neigung desselben gegen den Aequator, d. h. die geographische Breite oder Polhöhe = φ , $\sin \varphi = f$, $\cos \varphi = f'$, $\text{tang}(\varphi - \psi) = \Delta$.

Man hat alsdann die Gleichungen:

$$\frac{dc}{d\psi} = c', \quad - \frac{dr}{rd\psi} = \Delta, \quad \frac{ds}{rd\psi} = \sqrt{1 + \Delta^2}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \Re, \quad \frac{d\Delta}{d\varphi - d\psi} = 1 + \Delta^2$$

$$\text{also } \Re = \frac{r(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c'}$$

Die Erde wird sphäroidisch, d. h. wenig von der Kugel abweichend angenommen. Es sei bis mit zu den Gliedern vierter Ordnung

$$r = 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8,$$

wo der Aequatorealhalbmesser = 1, der Polarhalbmesser = $1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$, die Abplattung $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$.

Es ist aber

$$\frac{\Delta}{c'} = - \frac{dr}{dc} \cdot \frac{1}{rc} = \frac{2\alpha_1 - 4\alpha_2 c^2 + 6\alpha_3 c^4 - 8\alpha_4 c^6}{1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8}$$

Wenn also

TARTU ÜLIKOLLI
RAAMATUKOGU

$$\frac{\Delta}{cc'} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6,$$

so enthält das Verzeichniss *I* die Koeffizienten, mit denen die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ und ihre Produkte multiplicirt werden müssen, um die Brüche $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$ zu geben.

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
α_1	2
α_2	— 4
$\alpha_1 \alpha_1$	2
α_3	6
$\alpha_1 \alpha_2$	— 6
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	2
α_4	— 8
$\alpha_1 \alpha_3$	8
$\alpha_2 \alpha_2$	4
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	— 8
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	2

Aus

$$\frac{\Delta}{cc'} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6$$

folgt

$$\frac{\Delta^2}{c^2 - c^4} = \varepsilon_1 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 c^2 + (2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_2) c^4$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dc} c' &= (1 - 2c^2) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6) \\ &+ (c^2 - c^4) (2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 c^2 + 6\varepsilon_4 c^4). \end{aligned}$$

Wenn also

$$1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c' = \zeta_0 + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c^4 + \zeta_3 c^6 + \zeta_4 c^8$$

$$\frac{1}{1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c'} = \eta_0 + \eta_1 c^2 + \eta_2 c^4 + \eta_3 c^6 + \eta_4 c^8;$$

so giebt das Verzeichniss *II* die ζ durch die ε .

	$\xi_0 - 1$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
ε_1	1	- 2
ε_2	3	- 4
$\varepsilon_1 \varepsilon_1$	4	- 4
ε_3	5	- 6
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	2	- 2
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$
ε_4	7	- 8
$\varepsilon_1 \varepsilon_3$	2	- 2
$\varepsilon_2 \varepsilon_2$	1	- 1
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2$
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$

III.

Man ersetzt in *II* die $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$ durch die in *I* ihnen entsprechenden $\alpha_1 \alpha_2 \dots$. Das Verzeichniss *III* giebt dann ξ und η durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$

	$\xi_0 - 1$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
α_1	2	- 4
α_2	-12	16
$\alpha_1 \alpha_1$	10	-12
α_3	30	-36
$\alpha_1 \alpha_2$	- 46	52
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	18	-20
α_4	-56	64
$\alpha_1 \alpha_3$	80	-88
$\alpha_2 \alpha_2$	44	-48
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	-96	104
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	26	28

	$\eta_0 - 1$	η_1	η_2	η_3	η_4
α_1	- 2	4
α_2	12	- 16
$\alpha_1 \alpha_1$	4	- 26	28
α_3	- 30	36
$\alpha_1 \alpha_2$	- 48	206	- 180
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	- 8	88	- 242	180
α_4	56	- 64
$\alpha_1 \alpha_3$	120	- 464	376
$\alpha_2 \alpha_2$	144	- 428	304
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	144	-1192	2624	-1672
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	16	-248	1180	-2058	1164

III.

Es ist ferner

$$(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} \Delta^2 + \frac{3}{8} \Delta^4.$$

Wenn also

$$(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \vartheta_1 c^2 + \vartheta_2 c^4 + \vartheta_3 c^6 + \vartheta_4 c^8,$$

so hat man für die $\vartheta_1 \vartheta_2 \dots$ das Verzeichniss IV.

IV.

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
ε_1
ε_2
$\varepsilon_1 \varepsilon_1$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
ε_3
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	3	- 3
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$
ε_4
$\varepsilon_1 \varepsilon_3$	3	- 3
$\varepsilon_2 \varepsilon_2$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2$
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$
α_1
α_2
$\alpha_1 \alpha_1$	6	- 6
α_3
$\alpha_1 \alpha_2$	-24	24
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	12	-12
α_4
$\alpha_1 \alpha_3$	36	-36
$\alpha_2 \alpha_2$	24	-24
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	-60	60
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	6	6	-12

Es sei

$$r(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \varkappa_1 c^2 + \varkappa_2 c^4 + \varkappa_3 c^6 + \varkappa_4 c^8$$

so ergibt sich aus dem obigen das Verzeichniss V für die \varkappa .

	\varkappa_1	\varkappa_2	\varkappa_3	\varkappa_4
a_1	— 1
a_2	1
$a_1 a_1$	6	— 6
a_3	— 1
$a_1 a_2$	— 24	24
$a_1 a_1 a_1$	6	— 6
a_4	1
$a_1 a_3$	36	— 36
$a_2 a_2$	24	— 24
$a_1 a_1 a_2$	— 30	30
$a_1 a_1 a_1 a_1$	6	— 6

V.

Es sei

$$\mathfrak{R} = \mu_0 + \mu_1 c^2 + \mu_2 c^4 + \mu_3 c^6 + \mu_4 c^8,$$

so ergeben sich mittels des obigen Ausdrucks von \mathfrak{R} die μ aus den η , ϑ und \varkappa nach dem Verzeichniss VI.

	$\mu_0 - 1$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
a_1	— 2	3
a_2	12	— 15
$a_1 a_1$	4	— 18	18
a_3	— 30	35
$a_1 a_2$	— 48	168	— 136
$a_1 a_1 a_1$	— 8	72	— 174	122
a_4	56	— 63
$a_1 a_3$	120	— 396	300
$a_2 a_2$	144	— 392	264
$a_1 a_1 a_2$	144	— 1020	2050	— 1242
$a_1 a_1 a_1 a_1$	16	— 216	906	— 1462	792

VI.

Die μ gelten für die Entwicklung von \mathfrak{R} nach Potenzen von c . Um diese Entwicklung nach Potenzen von f zu er-

langen, müssen die Potenzen von c^2 durch die von f^2 ausgedrückt werden, durch die Gleichungen, welche f durch c geben:

$$fV(1 + \Delta^2) = c + c'\Delta = c + (c - c^3) \frac{\Delta}{cc^2};$$

$$\frac{\Delta}{cc^2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6;$$

$$f^2 = m_0^2 c^2 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^6 + m_3^2 c^8 + m_4^2 c^{10}$$

$$f^4 = m_0^4 c^4 + m_1^4 c^6 + m_2^4 c^8 + m_3^4 c^{10}$$

$$f^6 = m_0^6 c^6 + m_1^6 c^8 + m_2^6 c^{10}$$

$$f^8 = m_0^8 c^8 + m_1^8 c^{10}$$

$$f^{10} = m_0^{10} c^{10}$$

	² $m_0 - 1$	² m_1	² m_2	² m_3	² m_4
ε_1	2	- 2
ε_2	2	- 2
$\varepsilon_1 \varepsilon_1$	1	- 3	2
ε_3	2	- 2
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	2	- 6	4
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$	- 2	4	- 2
ε_4	2	- 2
$\varepsilon_1 \varepsilon_3$	2	- 6	4
$\varepsilon_2 \varepsilon_2$	1	- 3	2
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2$	- 6	12	- 6
$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$	- 1	4	- 5	2
a_1	4	- 4
a_2	- 8	8
$a_1 a_1$	4	- 8	4
a_3	12	- 12
$a_1 a_2$	- 16	36	- 20
$a_1 a_1 a_1$	- 8	12	- 4
a_4	- 16	16
$a_1 a_3$	24	- 56	32
$a_2 a_2$	16	- 40	24
$a_1 a_1 a_2$	56	- 88	32
$a_1 a_1 a_1 a_1$	- 16	28	- 16	4

VII.

	⁴ m ₀ - 1	⁴ m ₁	⁴ m ₂	⁴ m ₃
a ₁	8	- 8
a ₂	- 16	16
a ₁ a ₁	24	- 48	24
a ₃	24	- 24
a ₁ a ₂	- 96	200	- 104
a ₁ a ₁ a ₁	32	-112	120	- 40
a ₄	- 32
a ₁ a ₃	144	- 304
a ₂ a ₂	96	- 208
a ₁ a ₁ a ₂	-192	720	- 816
a ₁ a ₁ a ₁ a ₁	16	-160	312	- 224

VII.

	⁶ m ₀ - 1	⁶ m ₁	⁶ m ₂	⁸ m ₀ - 1	⁸ m ₁	¹⁰ m ₀ - 1
a ₁	12	- 12	...	16	- 16	20
a ₂	- 24	24	- 32
a ₁ a ₁	60	- 120	60	112	- 224	180
a ₃	36
a ₁ a ₂	- 240	492	- 448
a ₁ a ₁ a ₁	160	- 504	516	448	-1376	960
a ₄
a ₁ a ₃	360
a ₂ a ₂	240
a ₁ a ₁ a ₂	- 960	3144	-2688
a ₁ a ₁ a ₁ a ₁	240	-1200	2004	1120	-4928	3360

Es sei

$$\begin{aligned}
 c^2 &= n_0^2 f^2 + n_1^2 f^4 + n_2^2 f^6 + n_3^2 f^8 + n_4^2 f^{10} \\
 c^4 &= n_0^4 f^4 + n_1^4 f^6 + n_2^4 f^8 + n_3^4 f^{10} \\
 c^6 &= n_0^6 f^6 + n_1^6 f^8 + n_2^6 f^{10} \\
 c^8 &= n_0^8 f^8 + n_1^8 f^{10} \\
 c^{10} &= n_0^{10} f^{10},
 \end{aligned}$$

so hat man zur Bestimmung der n die Gleichungen

$$1 = m_0^2 n_0^2$$

$$0 = m_1^2 n_0^2 + m_0^4 n_1^2$$

$$0 = m_2^2 n_0^2 + m_1^4 n_1^2 + m_0^6 n_2^2$$

$$0 = m_3^2 n_0^2 + m_2^4 n_1^2 + m_1^6 n_2^2 + m_0^8 n_3^2$$

$$0 = m_4^2 n_0^2 + m_3^4 n_1^2 + m_2^6 n_2^2 + m_1^8 n_3^2 + m_0^{10} n_4^2$$

Hieraus die n im Verzeichniss VIII.

	$\begin{smallmatrix} 2 \\ n_0 - 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ n_1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ n_2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ n_3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ n_4 \end{smallmatrix}$
a_1	- 4	4
a_2	8	- 8
$a_1 a_1$	12	- 40	28
a_3	- 12	12
$a_1 a_2$	- 80	220	- 140
$a_1 a_1 a_1$	- 32	248	- 460	244
a_4	16	- 16
$a_1 a_3$	168	- 424	256
$a_2 a_2$	112	- 280	168
$a_1 a_1 a_2$	480	- 2680	4248	- 2048
$a_1 a_1 a_1 a_1$	80	- 1200	4324	- 5584	2380

VIII.

	$\begin{smallmatrix} 4 \\ n_0 - 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ n_1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ n_2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ n_3 \end{smallmatrix}$
a_1	- 8	8
a_2	16	- 16
$a_1 a_1$	40	- 112	72
a_3	- 24	24
$a_1 a_2$	- 224	568	- 344
$a_1 a_1 a_1$	- 160	912	- 1464	712
a_4	32
$a_1 a_3$	432	- 1040
$a_2 a_2$	288	- 688
$a_1 a_1 a_2$	1792	- 8592	12464
$a_1 a_1 a_1 a_1$	560	- 5600	16584	- 19040

	6 n_0-1	6 n_1	6 n_2	8 n_0-1	8 n_1	10 n_0-1
α_1	- 12	12	- 16	16	- 20
α_2	24	- 24	32
$\alpha_1\alpha_1$	84	- 216	132	144	- 352	220
α_3	- 36
$\alpha_1\alpha_2$	- 432	1044	- 704
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	-448	2184	- 3204	-960	4256	-1760
α_4
$\alpha_1\alpha_3$	792
$\alpha_2\alpha_2$	528
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	4320	-18888	8448
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	2016	-16272	42540	5280	-37312	11440

VIII.

Es sei

$$\Re = \pi_0 + \pi_1 f^2 + \pi_2 f^4 + \pi_3 f^6 + \pi_4 f^8$$

so ergibt sich aus VI und VIII das Verzeichniss IX.

	π_0-1	π_1	π_2	π_3	π_4
α_1	- 2	3
α_2	12	- 15
$\alpha_1\alpha_1$	4	30	30
α_3	- 30	35
$\alpha_1\alpha_2$	- 96	360	- 280
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	- 8	180	- 510	350
α_4	56	- 63
$\alpha_1\alpha_3$	360	-1092	756
$\alpha_2\alpha_2$	240	- 728	504
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	480	-4020	8134	-4662
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	16	-816	4770	-8218	4284

IX.

Eine Prüfung dieses Verzeichnisses gewähren die Gleichungen:

$$1 = \pi_0 + \frac{2}{3} \pi_1 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \pi_2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \pi_3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \pi_4;$$

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = b = \pi_0 + \frac{1}{3} \pi_1 + \frac{1}{5} \pi_2 + \frac{1}{7} \pi_3 + \frac{1}{9} \pi_4.$$

Es ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \Re, \quad \frac{df}{d\varphi} = f'$$

Wenn also

$$s = \beta_0 \varphi + \beta_1 f' f + \beta_2 f' f^3 + \beta_3 f' f^5 + \beta_4 f' f^7;$$

so ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \beta_0 + \beta_1(1-2f^2) + \beta_2(3f^2-4f^4) + \beta_3(5f^4-6f^6) + \beta_4(7f^6-8f^8)$$

also

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \beta_0 + \beta_1 \\ \pi_1 &= -2\beta_1 + 3\beta_2 \\ \pi_2 &= -4\beta_2 + 5\beta_3 \\ \pi_3 &= -6\beta_3 + 7\beta_4 \\ \pi_4 &= -8\beta_4 + \dots \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{3}{2 \cdot 4} \pi_2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi_3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \pi_4; \\ -\beta_1 &= \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{3}{2 \cdot 4} \pi_2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi_3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \pi_4; \\ -\beta_2 &= \frac{1}{4} \pi_2 + \frac{5}{4 \cdot 6} \pi_3 + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \pi_4; \\ -\beta_3 &= \frac{1}{6} \pi_3 + \frac{7}{6 \cdot 8} \pi_4; \\ -\beta^4 &= \frac{1}{8} \pi_4. \end{aligned}$$

Hieraus mit dem Verzeichniss IX das Verzeichniss X.

	$\beta_0 - 1$	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
α_2	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{15}{4}$
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{2}{8}$	$\frac{30}{8}$	$-\frac{30}{4}$
α_3	$-\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{175}{30}$
$\alpha_1\alpha_2$	$-\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	$-\frac{760}{24}$	$\frac{1400}{30}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{2}{16}$	$\frac{130}{16}$	$\frac{1310}{24}$	$\frac{1750}{30}$
α_4	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{192}$	$-\frac{35}{240}$	$\frac{63}{8}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{60}{128}$	$\frac{60}{128}$	$-\frac{60}{192}$	$\frac{17220}{240}$	$-\frac{756}{8}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{40}{128}$	$\frac{40}{128}$	$-\frac{40}{192}$	$\frac{11480}{240}$	$-\frac{504}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{50}{128}$	$\frac{50}{128}$	$\frac{30770}{192}$	$\frac{162190}{240}$	$\frac{4662}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{4}{128}$	$\frac{2044}{128}$	$\frac{50180}{192}$	$\frac{178780}{240}$	$-\frac{4284}{8}$

X.

Zur Prüfung:

$$1 = \beta_0 - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{2}{3 \cdot 5}\beta_2 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7}\beta_3 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\beta_4;$$

$$b = \beta_0 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{5}\beta_2 + \frac{1}{7}\beta_3 + \frac{1}{9}\beta_4.$$

Es sei

$$1 = \beta_0\gamma_0, \beta_1 = \beta_0\gamma_1, \beta_2 = \beta_0\gamma_2, \beta_3 = \beta_0\gamma_3, \beta_4 = \beta_0\gamma_4;$$

so giebt das Verzeichniss XI die γ .

	$\gamma_0 - 1$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
α_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
α_2	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{15}{4}$
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{24}{8}$	$-\frac{30}{4}$
α_3	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{35}{6}$
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{2}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{715}{24}$	$\frac{280}{6}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{4}{16}$	$\frac{100}{16}$	$\frac{1220}{24}$	$\frac{350}{6}$
α_4	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{192}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{63}{8}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{20}{128}$	$\frac{100}{128}$	$\frac{40}{192}$	$\frac{3304}{48}$	$\frac{756}{8}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{22}{128}$	$\frac{22}{128}$	$\frac{310}{192}$	$\frac{2296}{48}$	$\frac{504}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{102}{128}$	$\frac{122}{128}$	$\frac{28270}{192}$	$\frac{31318}{48}$	$\frac{4662}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{28}{128}$	$\frac{1572}{128}$	$\frac{44940}{192}$	$\frac{34356}{48}$	$\frac{4284}{8}$
	$\frac{128}{128}$	$\frac{128}{128}$	$\frac{192}{192}$	$\frac{48}{48}$	$\frac{8}{8}$

Die Umkehrung dieses Verzeichnisses giebt die $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ aus den $\gamma_1, \gamma_2 \dots$

	α_1	α_2	α_3	α_4	α	$\gamma_0(1-\alpha)-1$
γ_1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
γ_2	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\gamma_1\gamma_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{2}{9}$
γ_3	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{105}$	$-\frac{6}{35}$	$-\frac{23}{105}$	$\frac{1}{7}$
$\gamma_1\gamma_2$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{52}{45}$	$\frac{64}{45}$	$-\frac{1}{5}$
$\gamma_1\gamma_1\gamma_1$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{64}{27}$	$-\frac{16}{9}$	$-\frac{2}{27}$
γ_4	$-\frac{8}{315}$	$\frac{2}{315}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{8}{63}$	$-\frac{51}{315}$	$\frac{1}{9}$
$\gamma_1\gamma_3$	$\frac{4}{105}$	$\frac{17}{315}$	$\frac{398}{315}$	$\frac{48}{35}$	$-\frac{39}{315}$
$\gamma_2\gamma_2$	$\frac{22}{225}$	$\frac{96}{225}$	$\frac{128}{225}$	$-\frac{10}{225}$
$\gamma_1\gamma_1\gamma_2$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{148}{45}$	$\frac{1304}{135}$	$\frac{32}{5}$	$-\frac{13}{135}$
$\gamma_1\gamma_1\gamma_1\gamma_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{392}{81}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{128}{27}$	$-\frac{2}{81}$

XII.

Es sei jetzt der Aequatorealhalbmesser = a , so ist

$$\frac{s}{a} = \beta_0\varphi + \beta_1 f' f + \beta_2 f' f^3 + \beta_3 f' f^5 + \beta_4 f' f^7$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} = & \beta_0\varphi + \beta_1 \cos \varphi \sin \varphi + \beta_2 \cos \varphi \sin^3 \varphi \\ & + \beta_3 \cos \varphi \sin^5 \varphi + \beta_4 \cos \varphi \sin^7 \varphi, \end{aligned}$$

Es sei der zwischen den Polhöhen φ und φ' enthaltene Meridianbogen = l ,

der Breitenunterschied $\varphi' - \varphi = u$ in Theilen des Grades,

$$\begin{aligned} \cos \varphi' \sin \varphi' - \cos \varphi \sin \varphi &= b_1 \\ \cos \varphi' \sin^3 \varphi' - \cos \varphi \sin^3 \varphi &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi' \sin^5 \varphi' - \cos \varphi \sin^5 \varphi &= b_3 \\ \cos \varphi' \sin^7 \varphi' - \cos \varphi \sin^7 \varphi &= b_4: \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{l}{a\beta_0} = \frac{\pi}{180} u + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 + \gamma_4 b_4$$

oder

$$l = tu + t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 + t_4 b_4$$

Aus einer Reihe beobachteter Polhöhen und Meridianbögen seien mittels der gegebenen u, b_1, b_2, b_3, b_4 durch Ausglei-
chung die Elemente t, t_1, t_2, t_3, t_4 bestimmt worden. Für den
Meridianquadranten ist

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 90, \quad u = 90, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

Es sei der Meridianquadrant = Q ,
der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem des Me-
ridians gleich ist, = R : so ist

$$Q = 90t$$

$$R = \frac{2Q}{\pi} = a\beta_0$$

$$\gamma_1 R = t_1, \quad \gamma_2 R = t_2, \quad \gamma_3 R = t_3, \quad \gamma_4 R = t_4.$$

Aus den beiden oben angezeigten Prüfungsgleichungen der
 β folgt also:

$$\text{Aeq. Halbm. } a = R - \frac{1}{3} t_1 - \frac{2}{3 \cdot 5} t_2 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} t_3 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} t_4,$$

$$\text{Pol. Halbm. } b = R + \frac{1}{3} t_1 + \frac{1}{5} t_2 + \frac{1}{7} t_3 + \frac{1}{9} t_4.$$

Hieraus die Gesamtabplattung

$$\alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Die einzelnen Abplattungsbrüche $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ berechnet man
aus den $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ mittels des Verzeichnisses XII.

Ein Beispiel giebt Bessel's Meridian (*Astr. Nachr.* No. 438
S. 216). Hier ist in Toisen:

$$t = 57013,109, \quad t_1 = -16372,4440,$$

$$t_2 = -68,3132, \quad t_3 = -0,3547, \quad t_4 = -0,0020;$$

$$Q = 90t = 5131179,81, \quad \frac{1}{\pi} = 0,31830988618379.$$

$$R = \frac{2Q}{\pi} = 3266610,5226;$$

$$R = \dots 3266610,5226 \quad R = \dots 3266610,5226$$

$$\frac{1}{3} t_1 \dots\dots 5457,4813 \quad \frac{1}{3} t_1 \quad - \quad 5457,4813$$

$$\frac{2}{15} t^2 \dots\dots\dots 9,1084 \quad \frac{1}{5} t_2 \quad - \quad 13,6626$$

$$\frac{8}{105} t_3 \dots\dots\dots 0,0270 \quad \frac{1}{7} t_3 \quad - \quad 0,0507$$

$$\frac{16}{315} t_4 \dots\dots\dots 0,0001 \quad \frac{1}{9} t_4 \quad - \quad 0,0002$$

$$a = \quad 3272077,1394, \quad b = \quad 3261139,3278,$$

$$a - b = 10937,8116, \quad \frac{a-b}{a} = \alpha = 0,00334277317.$$

Statt des Ausdrucks

$$\frac{s}{a\beta_0} = \varphi + \gamma_1 \cos \varphi \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi \sin^3 \varphi \dots$$

kann man die Entwicklung nach den Sinus der Vielfachen vorziehen:

$$\frac{s}{a\beta_0} = \varphi + \frac{1}{2} \delta_1 \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \delta_2 \sin 4\varphi + \frac{1}{2} \delta_3 \sin 6\varphi + \frac{1}{2} \delta_4 \sin 8\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\delta_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 + \frac{5}{16} \gamma_3 + \frac{7}{32} \gamma_4$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{4} \gamma_2 - \frac{1}{4} \gamma_3 - \frac{7}{32} \gamma_4$$

$$\delta_3 = \frac{1}{16} \gamma_3 + \frac{3}{32} \gamma_4$$

$$\delta_4 = -\frac{1}{64} \gamma_4.$$

Mittels des Verzeichnisses XI findet man dann die $\delta_1 \delta_2 \dots$ nach dem Verzeichniss XIII.

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
α_1	$\frac{3}{2}$
α_2	$\frac{6}{4}$	$\frac{15}{16}$
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{30}{16}$
α_3	$\frac{45}{32}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{35}{96}$
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{18}{32}$	$\frac{135}{32}$	$\frac{280}{96}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{30}{32}$	$\frac{60}{32}$	$\frac{350}{96}$
α_4	$\frac{84}{64}$	$\frac{210}{128}$	$\frac{140}{192}$	$\frac{63}{512}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{3}{64}$	$\frac{450}{128}$	$\frac{875}{192}$	$\frac{756}{512}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{12}{64}$	$\frac{285}{128}$	$\frac{560}{192}$	$\frac{504}{512}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{240}{64}$	$\frac{150}{128}$	$\frac{2660}{192}$	$\frac{4662}{512}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{114}{64}$	$\frac{420}{128}$	$\frac{1050}{192}$	$\frac{4284}{512}$

XIII.

Zur Prüfung

$$1 = \gamma_0 + \frac{1}{3} \delta_1 + \frac{2}{3.5} \delta_2 + \frac{3}{5.7} \delta_3 + \frac{4}{7.9} \delta_4.$$

Die Umkehrung dieses Verzeichnisses giebt die $\alpha_1\alpha_2 \dots$ aus den $\delta_1\delta_2 \dots$.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α
δ_1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
δ_2	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{16}{15}$
$\delta_1\delta_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{2}{9}$
δ_3	$-\frac{54}{35}$	$-\frac{144}{35}$	$-\frac{96}{35}$	$-\frac{6}{35}$
$\delta_1\delta_2$	$\frac{12}{5}$	$\frac{368}{45}$	$\frac{256}{45}$	$-\frac{4}{45}$
$\delta_1\delta_1\delta_1$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{64}{27}$	$-\frac{16}{9}$	$-\frac{2}{27}$
δ_4	$-\frac{128}{63}$	$-\frac{640}{63}$	$-\frac{1024}{63}$	$-\frac{512}{63}$
$\delta_1\delta_3$	$\frac{124}{35}$	$\frac{864}{35}$	$\frac{1504}{35}$	$\frac{768}{35}$	$-\frac{4}{35}$
$\delta_2\delta_2$	$\frac{480}{225}$	$\frac{2528}{225}$	$\frac{4096}{225}$	$\frac{2048}{225}$
$\delta_1\delta_1\delta_2$	$-\frac{504}{135}$	$-\frac{3696}{135}$	$-\frac{6656}{135}$	$-\frac{3456}{135}$	$-\frac{8}{135}$
$\delta_1\delta_1\delta_1\delta_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{392}{81}$	$\frac{720}{81}$	$\frac{128}{27}$	$-\frac{2}{81}$

Oder

$$\alpha = -\frac{\frac{2}{3}\delta_1}{1 - \frac{1}{3}\delta_1} - \left(\frac{4}{45}\delta_1\delta_2 + \frac{6}{35}\delta_3\right) \left(1 + \frac{2}{3}\delta_1\right).$$

Es sei

$$\varphi' - \varphi = u, \quad \varphi' + \varphi = m$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) = \sin u \cos m = a_1$$

$$\frac{1}{2}(\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) = \sin 2u \cos 2m = a_2$$

$$\frac{1}{2} (\sin 6\varphi' - \sin 6\varphi) = \sin 3u \cos 3m = a_3$$

$$\frac{1}{2} (\sin 8\varphi' - \sin 8\varphi) = \sin 4u \cos 4m = a_4 :$$

so ist

$$l = \frac{\pi}{180} u + \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 + \delta_4 a_4$$

oder

$$l = tu + v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 + v_4 a_4.$$

Die Elemente t, v_1, v_2, v_3, v_4 werden aus Beobachtungen bestimmt.

Dann ist

$$Q = 90t$$

$$R = \frac{2Q}{\pi} = a\beta_0$$

$$\delta_1 R = v_1, \quad \delta_2 R = v_2, \quad \delta_3 R = v_3, \quad \delta_4 R = v_4.$$

Die einzelnen Abplattungsbrüche $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ berechnet man aus den $\delta_1, \delta_2, \dots$ mittels des Verzeichnisses XIV.

$$\text{Aeq. Halb. } a = R - \frac{1}{3} v_1 - \frac{2}{3.5} v_2 - \frac{3}{5.7} v_3 - \frac{4}{7.9} v_4,$$

$$\text{Pol. Halb. } b = R + \frac{1}{3} v_1 - \frac{2}{3.5} v_2 + \frac{3}{5.7} v_3 - \frac{4}{7.9} v_4,$$

$$\text{Krüm. Halb. } \mathfrak{R} =$$

$$R + v_1 \cos 2\varphi + 2v_2 \cos 4\varphi + 3v_3 \cos 6\varphi + 4v_4 \cos 8\varphi,$$

$$\text{Breitengrad } g =$$

$$t + \frac{\pi}{180} v_1 \cos 2\varphi + \frac{\pi}{180} 2v_2 \cos 4\varphi + \frac{\pi}{180} 3v_3 \cos 6\varphi + \frac{\pi}{180} 4v_4 \cos 8\varphi.$$

In dem oben angeführten Bessel'schen Meridian ist

$$v_1 = -16406,7117, \quad v_2 = 17,1673, \quad v_3 = -0,0223, \quad v_4 = 0,$$

$$R = 3266610,5226 \qquad 3266610,5226$$

$$\frac{1}{3} v_1 \qquad 5468,9039 \qquad - \quad 5468,9039$$

$$\frac{2}{15} v_2 \quad - \quad 2,2890 \qquad - \quad 2,2890$$

$$\frac{3}{35} v_3 \qquad 0,0019 \qquad - \quad 0,0019$$

$$a = 3272077,1394, \quad b = 3261139,3278.$$

Um die obigen Ausdrücke zu prüfen, bezieht man sie auf die Ellipse. In derselben sei der Aequatorealhalbmesser = f , der Polarhalbmesser = b , die Abplattung $1 - b = \alpha$, der Excentricitätswinkel = e , tang $e = \lambda$, so ist die Gleichung der Ellipse

$$1 = r^2(1 + \lambda^2 c^2) = b^2(1 + \lambda^2)$$

$$\Re^2 = \frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda^2 f'^2)^3}$$

Wenn also

$$r = 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8$$

$$\Re = \pi_0 + \pi_1 f'^2 + \pi_2 f'^4 + \pi_3 f'^6 + \pi_4 f'^8:$$

so erhält man übereinstimmend mit IX das Verzeichniss XV.

	α_1	α_2	α_3	α_4	$\pi_0 - 1$	π_1	π_2	π_3	π_4
λ^2	$\frac{1}{2}$	— 1	$\frac{3}{2}$
λ^4	$\frac{3}{8}$	1	— 3	$\frac{15}{8}$
λ^6	$\frac{5}{16}$	— 1	$\frac{9}{2}$	— $\frac{45}{8}$	$\frac{35}{16}$
λ^8	$\frac{35}{128}$	1	— 6	$\frac{45}{4}$	— $\frac{35}{4}$	$\frac{315}{128}$

Zur weitem Prüfung von X, XI, XIII ist bei der Ellipse:

	$\beta_0 - 1$	β_1	β_2	β_3	β_4
λ^2	— $\frac{1}{4}$	— $\frac{3}{4}$
λ^4	$\frac{13}{64}$	$\frac{51}{64}$	— $\frac{15}{32}$
λ^6	— $\frac{45}{256}$	— $\frac{211}{256}$	$\frac{365}{384}$	— $\frac{35}{96}$
λ^8	$\frac{2577}{16384}$	$\frac{13807}{16384}$	— $\frac{35345}{24576}$	$\frac{6755}{6144}$	— $\frac{315}{1024}$

	$\gamma_0 - 1$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
λ^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
λ^4	$\frac{9}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{15}{32}$
λ^6	$\frac{23}{256}$	$\frac{133}{256}$	$\frac{320}{384}$	$\frac{35}{96}$
λ^8	$\frac{1021}{16384}$	$\frac{7491}{16384}$	$\frac{27885}{24576}$	$\frac{6195}{6144}$	$\frac{315}{1024}$

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
λ^2	$\frac{3}{4}$
λ^4	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{128}$
λ^6	$\frac{111}{512}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{35}{1536}$
λ^8	$\frac{141}{1024}$	$\frac{405}{4096}$	$\frac{35}{1024}$	$\frac{315}{65536}$

Zweiter Artikel.

Die Gradmessungen.

Wenn nach dem im ersten Artikel gefundenen Ausdruck aus den Elementen eines mittlern Meridians zu einer beobachteten Polhöhe der entsprechende Meridianbogen berechnet wird, so bedarf derselbe einer Verbesserung, um mit dem gemessenen Bogen übereinzustimmen. Die Verbesserung ist meist viel beträchtlicher als die höchstens 2 — 3 Toisen betragende Summe der Beobachtungsfehler, und steigt in den Gradmessungen von Ostindien, Frankreich, England auf 60 bis 100 Toisen. Zur Erklärung dieses Umstandes wird eine Ablenkung des Loths durch Anziehung von Gebirgen oder durch ungleiche Dichtigkeit des Erdinnern angenommen.

Es bleibt also nichts anders übrig, als die Ablenkung aus den Gradmessungen selbst zu bestimmen, und man benutzt dazu die Ausgleichsrechnung.

Diese ausgeglichene Ablenkung ist aber von der wahren Ablenkung gewiss verschieden. Denn z. B. in jeder Gradmessung von zwei Polhöhen sind die ausgeglichenen Ablenkungen einander gleich und entgegengesetzt, während die wahren Ablenkungen ungleich sind. In einer Gradmessung von mehreren Polhöhen erhält man ferner eine verschiedene Reihe von ausgeglichenen Ablenkungen, je nachdem man von einer verschiedenen Polhöhe ausgeht. Ein Verfahren, das eigentlich nur für zufällige Beobachtungsfehler gilt, wird hier auf Grössen angewendet, die von einer sehr bestimmten Ursache abhängig sind.

Um die ausgeglichenen Ablenkungen zu bestimmen, verfährt man gegenwärtig so, dass man die kleinste Polhöhe mit allen übrigen vergleicht. Die dieser kleinsten Polhöhe im Meridianbogen entsprechende Ablenkung sei $= x$, die den übrigen Polhöhen entsprechenden Ablenkungen der Meridianbögen seien k', k'' u. s. w. Man erhält also für n Polhöhen oder $n - 1$ Meridianbögen die Gleichungen:

$$\text{II. } \begin{cases} 0 = k + x \\ l' = k' + x + tu' + v_1 a_1' + v_2 a_2' \dots \\ l'' = k'' + x + tu'' + v_1 a_1'' + v_2 a_2'' \dots \end{cases}$$

n. s. w.

Es sei:

$$\begin{aligned} k' + k'' \dots &= \underline{k} & l' + l'' \dots &= \underline{l} \\ u'k' + u''k'' \dots &= \underline{uk} & u'l' + u''l'' \dots &= \underline{ul} \end{aligned}$$

u. s. w., so ist

$$\text{III. } \begin{cases} \underline{l} = \underline{k} + \underline{k} + x \quad n + t \quad \underline{u} + v_1 a_1 \dots \\ \underline{ul} = \underline{uk} + x \quad \underline{u} + t \quad \underline{uu} + v_1 a_1 u \dots \\ \underline{a_1 l} = \underline{a_1 k} + x \quad \underline{a_1} + t \quad \underline{a_1 u} + v_1 a_1 a_1 \dots \end{cases}$$

Um x auszuschneiden, setzt man in jeder Gradmessung:

$$\text{III.} \begin{cases} \overbrace{k+k}^{\quad} = 0 \\ \overset{*}{l}' = \overset{*}{l}' - \frac{1}{n} \overset{*}{l}, \quad \overset{*}{u}' = \overset{*}{u}' - \frac{1}{n} \overset{*}{u}, \quad \overset{*}{a}_1' = \overset{*}{a}_1' - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1 \\ \overset{*}{l}'' = \overset{*}{l}'' - \frac{1}{n} \overset{*}{l}, \quad \overset{*}{u}'' = \overset{*}{u}'' - \frac{1}{n} \overset{*}{u}, \quad \overset{*}{a}_1'' = \overset{*}{a}_1'' - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1 \end{cases}$$

u. s. w., so ist

$$\text{IV.} \begin{cases} \overset{*}{l}' = k' + t\overset{*}{u}' + v_1\overset{*}{a}_1' + v_2\overset{*}{a}_2' \dots \\ \overset{*}{l}'' = k'' + t\overset{*}{u}'' + v_1\overset{*}{a}_1'' + v_2\overset{*}{a}_2'' \dots \end{cases}$$

u. s. w.

$$\text{V.} \begin{cases} \overset{*}{ul} = \overset{*}{uk} + t\overset{*}{uu} + v_1\overset{*}{a}_1\overset{*}{u} + v_2\overset{*}{a}_2\overset{*}{u} \dots \\ \overset{*}{a}_1\overset{*}{l} = \overset{*}{a}_1\overset{*}{k} + t\overset{*}{a}_1\overset{*}{u} + v_1\overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_1 + v_2\overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 \dots \\ \overset{*}{a}_2\overset{*}{l} = \overset{*}{a}_2\overset{*}{k} + t\overset{*}{a}_2\overset{*}{u} + v_1\overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 + v_2\overset{*}{a}_2\overset{*}{a}_2 \dots \end{cases}$$

u. s. w.

$$\text{VI.} \begin{cases} \overset{*}{ul} = \overset{*}{ul} - \frac{1}{n} \overset{*}{u} \overset{*}{l}, \quad \overset{*}{a}_1\overset{*}{l} = \overset{*}{a}_1\overset{*}{l} - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1 \overset{*}{l} \\ \overset{*}{uu} = \overset{*}{uu} - \frac{1}{n} \overset{*}{u} \overset{*}{u}, \quad \overset{*}{a}_1\overset{*}{u} = \overset{*}{a}_1\overset{*}{u} = \overset{*}{a}_1\overset{*}{u} - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1 \overset{*}{u} \\ \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_1 = \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_1 - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_1, \quad \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 = \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 = \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 - \frac{1}{n} \overset{*}{a}_1\overset{*}{a}_2 \end{cases}$$

Die Ausdrücke *IV.* und *VI.* gewähren den wichtigen Vortheil einer Rechnungsprüfung. In den Verzeichnissen *B* und *C* sind die Zahlen durch diese zwiefache Rechnung geprüft und sichergestellt worden.

Man berechnet die Zahlen in *V.* für jede einzelne Gradmessung. Sollen dann die dieser Gradmessung entsprechenden Meridianelemente $t, v_1, v_2 \dots$ gefunden werden, so setzt man

$$\underline{uk} = 0 \quad \underline{a_1k} = 0$$

u. s. w.

Um aber die Elemente des mittlern Meridians zu bestimmen, addirt man die entsprechenden Zahlen aller Gradmessungen:

$$I \underline{ul}^* + II \underline{ul}^* \dots = \underline{ul}^*$$

$$I \underline{uw}^* + II \underline{uw}^* \dots = \underline{uw}^*$$

u. s. w.

Es können nun nicht die einzelnen \underline{uk} , $\underline{a_1k}$. . verschwinden, sondern man bestimmt die mittlern Elemente, so dass die Summen verschwinden

$$\underline{\underline{uk}} = 0, \quad \underline{\underline{a_1k}} = 0, \quad \underline{\underline{n_2k}} = 0$$

u. s. w.

Nachdem hienach aus *V* die Elemente des mittlern Meridians *M* gefunden worden sind, geben diese aus *IV* für jede Gradmessung die einzelnen ausgeglichenen Bogenablenkungen k', k'' . . und dadurch auch die der kleinsten Polhöhe entsprechende ausgeglichene Bogenablenkung

$$k = -x = -\underline{k}.$$

Das Verzeichniss *A* giebt die auf diese Art berechneten Ablenkungen *k* für den mittlern Meridian *M*. Zur Prüfung derselben enthält das Verzeichniss *C* die Werthe \underline{uk} , $\underline{a_1k}$, $\underline{a_2k}$, aus deren Addition sich ergibt, dass die Summen $\underline{\underline{uk}}$, $\underline{\underline{a_1k}}$, $\underline{\underline{a_2k}}$ für den mittlern Meridian verschwinden.

Um die mittlere einheitliche ausgeglichene Bogenablenkung \bar{f} zu erhalten, berechnet man von allen Gradmessungen die Gesamtsumme $\underline{\underline{kk}}$. Die Anzahl aller Polhöhen in allen Gradmessungen zusammen sei = *m*, hier = 42, die Anzahl aller Gradmessungen, also die Anzahl der *x* sei = ξ , hier = 11, die Anzahl der Meridianelemente *t*, v_1 , v_2 . . sei = τ , hier = 3, so ist

$$(m - \xi - \tau) \bar{f} = \underline{\underline{kk}}, \quad \text{hier } 28 \bar{f} = \underline{\underline{kk}}.$$

Bessel hat in den Astron. Nachrichten No. 333 und 438 die Elemente des mittlern Meridians aus den zehn ersten Gradmessungen berechnet, dabei aber eine Ellipse vorausgesetzt Er findet:

$$t = 57013,109, \quad \frac{1}{\alpha} = 299,1528.$$

Nach unsern Ausdrücken ergibt sich hieraus

$$\begin{array}{ll} v_1 = -16406,7117 & v_2 = 17,1673 \\ v_3 = -0,0223 & v_4 = 0 \end{array}$$

In einem spätern Artikel wird bewiesen werden, dass der Meridian nur dann eine Ellipse sein kann, wenn das Innere der Erde überall gleiche Dichtigkeit hat, eine Bedingung, welche aus geologischen Gründen nicht statt findet. Da also die elliptische Voraussetzung unzulässig ist, so ist der mittlere Meridian *M* ohne Rücksicht auf elliptische Krümmung in den Verzeichnissen *A*, *B*, *C* neu berechnet worden, mit Hinzunahme der eilften Gradmessung, welche Enke im astronomischen Jahrbuch für 1852 S. 340 anzeigt.

Es sind drei Elemente *t*, *v*₁, *v*₂ angenommen worden. Es ergibt sich

$$t = 57018,8474 \quad \text{Gewicht} = 42 \frac{1}{3}$$

$$v_1 = -16931,3423 \quad \text{Gewicht} = \frac{1}{240}$$

$$v_2 = 224,1091 \quad \text{Gewicht} = \frac{1}{31}$$

Gewicht heisst hier das Umgekehrte des entsprechenden Koeffizienten in der auflösenden Gleichung. Hieraus folgt weiter:

$$\begin{array}{ll} \text{Meridianquadrant} \dots Q = 5131696,266 \\ \text{Aquat. Halbmesser } a = 3272553,2083 \\ \text{Halbe Erdaxe} \dots \dots b = 3261265,6467 \\ \text{Gesamtabplattung} \dots \alpha = 0,0034491606 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Abplattungsnenner} \cdot \frac{1}{a} &= 289,9256 \\
 \text{Ortshalbmesser} \dots r &= 1 - 0,003399065 c^2 \\
 &\quad - 0,000051868 c^4 \\
 &\quad + 0,000001775 c^6 \\
 &\quad - 0,000000002 c^8.
 \end{aligned}$$

Der mittlere Meridian M ist also keine Ellipse, da die für die Ellipse geltenden Beziehungen

$$2\alpha_2 = 3\alpha_1\alpha_1, \quad 3\alpha_3 = 5\alpha_1\alpha_2, \quad 4\alpha_4 = 7\alpha_1\alpha_3$$

u. s. w. hier nicht statt finden.

Bemerkenswerth ist hiebei die nahe Uebereinstimmung der Abplattung mit dem Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere unter dem Aequator, = 0,003467. Nach den Pendelbeobachtungen ist diese Uebereinstimmung noch grösser, so dass der Unterschied nur drei Einheiten der 6ten Decimalstelle beträgt.

Die nächste Frage ist, ob die einzelnen Meridiane einander gleich sind, d. h. ob die Erde ein Rotationskörper ist. Wenn angenommen werden dürfte, dass die Elemente eines Meridians in seinen verschiedenen Gegenden einerlei Werth haben, so wäre es am zweckmässigsten, zwei gleiche Bögen in gleichen Abständen vom 45sten Breitengrade zu messen. Drei in verschiedenen Meridianstrichen gemessene Bogenpaare, die nicht zusammenhängend zu sein brauchen, wären zu genauerer Ermittlung dreier Meridianelemente hinlänglich. Aehnliche Messungen, in dem gegenüberliegenden Quadranten derselben Erdhälfte angestellt, müssten zeigen, ob beide Elementensysteme für die halbe Erdaxe einerlei Werth geben.

Zwei solche Quadranten wären etwa die beiden, welche unter dem 80sten und 260sten Längengrade liegen. Ihre Mitte geht durch die Kirgisensteppes und das Oregongebiet.

Unter den vorhandenen Gradmessungen findet man nur drei, welche über die Frage einigen Aufschluss geben können. Der Meridian von Ostindien mit 6 Bögen auf 16° , der von Paris mit 6 Bögen auf $12\frac{1}{2}^\circ$, der von Dorpat mit 5 Bögen auf 8° .

	Ostindien.	Paris.	Dorpat.
t	56942,8850	57009,6494	57049,5520
Gewicht von t	$\frac{1}{2}$	120	$\frac{1}{2}$
v_1	— 11552,2253	— 22239,2392	— 11559,25
Gewicht von v_1	$\frac{1}{9158}$	$\frac{1}{7881}$	$\frac{1}{43999}$
Quadrant Q	5124859,65	5130868,446	5134459,68
Aeq. Halb. a	3266437,7256	3273825,3818	3272551,6360
Halbe Erdaxe b	3258736,2420	3258999,2224	3264845,4694
Abpl. Nenn. $\frac{1}{\alpha}$	424,13	220,814	424,666

Die Rechnung ist aus den entsprechenden Zahlen der Verzeichnisse B, C nach den Gleichungen V geführt.

Hier zeigt sich die Unzulänglichkeit des Satzes der Ausgleichung zur Bestimmung der wahren Ablenkungen. Denn man kann bewirken, dass alle ausgeglichenen Ablenkungen verschwinden, wenn man soviel Elemente annimmt, als gemessene Bögen vorhanden sind. Man kommt aber dann auf Elemente, welche sehr von den Elementen des mittlern Meridians abweichen, und die Unsicherheit wächst in dem Maasse, als man mehr Elemente annimmt. Bei der geringen Ausdehnung der Messungen konnten daher in den obigen drei Meridianen nur zwei Elemente angenommen werden.

Der Quadrant des pariser Meridians hat ein grosses Gewicht, also eine bedeutende Sicherheit, weil der 45ste Breitengrad in die Mitte der französischen Gradmessung fällt. Dieser Quadrant ist um 830 Toisen kürzer, als der Quadrant des mittlern Meridians M . Die Meridiane sind also ungleich, d. h. die Erde ist kein Rotationskörper. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass die nördlichen Gradmessungen einen grössern Quadranten geben, als die südlichen. Der Unterschied zwischen dem ostindischen und dorpaten Quadranten beträgt 9600 Toisen ($3800 = 1$ geogr. Meile).

Da die Meridianelemente von der veränderlichen Erddichtigkeit abhängen, so haben sie in den verschiedenen Theilen

des Meridians wahrscheinlich nicht gleichen Werth. Die durch Rechnung geschlossenen Elemente entsprechen derjenigen Krümmung, welche eine über die Erdoberfläche verbreitete dünne flüssige Schicht annimmt. Diese Krümmung muss von der geometrischen Meridiankrümmung etwas verschieden sein, wenn die Erde anders als durch blossen Niederschlag aus einer ursprünglich flüssigen Masse sich gebildet hat. Es darf also nicht befremden, dass die drei Gradmessungen für die halbe Erdaxe einen verschiedenen Werth geben.

Die Hauptaufgabe, welche bei den Gradmessungen noch zu lösen bliebe, wäre die unmittelbare Bestimmung der Ablenkung aus Beobachtungen. Die Gradmessungen würden, vorausgesetzt dass diese Bestimmung möglich ist, alsdann nicht bloss ein geographisches und astronomisches, sondern auch ein geologisches Interesse darbieten. Die örtliche Ablenkung wäre gleichsam der Fühlhebel, der an die Erdoberfläche gelegt wird, um das dunkle Gebiet der wechselnden Dichtigkeit ihres Innern zu erforschen. (S. die Tabelle.)

Die folgenden Artikel sollen eine gedrängte Uebersicht derjenigen Sätze geben, durch welche die von Clairaut und Laplace aufgestellte theoretische Grundlage soweit ausgebildet wird, um an sie eine neue Berechnung der Erdgestalt anknüpfen zu können. Von der elliptischen Voraussetzung Umgang nehmend, ist das Umdrehungssphäroid nur der Bedingung unterworfen, dass es von der Kugel wenig abweiche. Es ergeben sich dadurch stark zusammenlaufende Reihen, deren allgemeines Gesetz zu Tage liegt, und die mit den Abplattungsgliedern vierter Ordnung hinreichend abschliessen.

Diese Andeutungen erklären, weshalb hiebei die Arbeiten der neuern Mathematik nicht benutzt werden konnten, die bei übrigen unläugbarem wissenschaftlichen Werth doch mehr auf dem Felde rein spekulativer Abstraktion sich bewegen.

Die hier gegebenen Sätze beruhen daher auf selbständiger Untersuchung. Dahin gehören die gegenseitigen Beziehungen zwischen dem Indicial und Subindicial, sowohl dem einfachen

A.

		Geogr. Länge	Gemessene oder scheinbare Pol- höhe φ	Gemessener oder scheinbarer Meridianbogen l	Erster Koeffizient a_1	Zweiter Koeffizient a_2	Ablenkung des Meridian- bogens k
1	Quito	298° 56'	— 3° 4' 32,068 0 2 31,387 476875,5 0,05430978 0,1080026	— 3,6852 3,6852
2	Ostindien I. . .	97 22	11 44 52,590 13 19 49,018 89813,01 0,0250104 0,03537015	— 2,6382 2,6382
3	Ostindien II. .	95 20	8 9 31,132 10 59 42,276 12 59 52,165 15 5 53,562 18 3 16,245 21 5 51,532 24 7 11,860 160944,20 274694,30 393828,09 561690,06 734570,43 906171,67 0,0467454 0,0786732 0,1110047 0,1541835 0,1953517 0,2324919 0,0775659 0,1243189 0,1650769 0,2064731 0,227966 0,2271661	— 10,3260 — 21,9523 63,9281 — 25,7064 — 6,8046 49,7158 — 48,8546
4	Paris	20 0	38 39 56,11 41 21 44,96 41 22 47,90 43 12 54,30 46 10 42,54 48 50 49,37 51 2 8,85 153673,61 154616,74 259172,61 428019,31 580312,41 705257,21 0,008147864 0,008186412 0,01120281 0,01174999 0,007671497 0,001116535 — 0,0883632 — 0,08895402 — 0,1518317 — 0,2550664 — 0,3466547 — 0,4184850	4,4366 61,5157 8,5512 — 6,3360 — 96,8881 — 10,7536 39,4742
5	Greenwich . .	17 40	50 37 7,633 51 28 39,000 51 50 27,632 52 13 28,031 53 27 31,130 49059,89 69829,19 91696,39 162075,93 — 0,003140562 — 0,00461269 — 0,006228516 — 0,01205088 — 0,02733806 — 0,0386799 — 0,05048314 — 0,08725726	— 26,9979 23,0160 43,0747 22,0175 — 61,1103
6	Göttingen . . .	27 36	51 31 47,85 53 32 45,27 115163,725 — 0,009149642 — 0,06079852	— 37,6447 37,6447
7	Lauenburg . .	28 17	53 22 17,046 54 54 10,352 87436,538 — 0,008380392 — 0,04292557	9,3046 — 9,3046
8	Königsberg . .	38 9	54 13 11,466 54 42 50,500 55 43 40,446 28211,629 86176,975 — 0,002798577 — 0,00897852 — 0,01361699 — 0,0403682	— 12,2356 — 22,2593 34,4949
9	Dorpat	44 23	52 2 40,864 54 39 4,519 56 30 4,562 56 34 51,550 58 22 47,280 60 5 9,771 148811,418 254543,454 259110,085 361824,461 459363,008 — 0,01306536 — 0,02471481 — 0,0252603 — 0,03850683 — 0,05269872 — 0,0758622 — 0,12358875 — 0,12551604 — 0,1659162 — 0,1983948	— 12,9162 — 29,3753 30,5670 42,9149 — 24,2313 — 6,9591
10	Torneå	41 33	65 31 30,265 67 8 49,830 92777,981 — 0,01918674 — 0,00459324	18,0992 — 18,0992
11	Kap d. g. H.	36 8	—30 21 28,26 —31 58 5,63 —32 42 0,98 —33 56 3,00 91749,290 133272,816 203608,439 0,013052 0,01851836 0,0270586 — 0,03194542 — 0,04814125 — 0,07765397	— 89,2124 66,1814 — 54,2824 77,3134

B.

	$10^{10} \cdot \underline{uu}^*$	$10^{10} \cdot \underline{a_1 u}^*$	$10^{10} \cdot \underline{a_2 u}^*$	$10^{10} \cdot \underline{a_1 a_1}^*$	$10^{10} \cdot \underline{a_1 a_2}^*$	$10^{10} \cdot \underline{a_2 a_2}^*$
1	48597971503	846588016	1683558778	14747761	29327987	58322808
2	12519016959	197874920	279838212	3127600	4423108	6255237
3	1921910310884	28030044206	27377607878	409895336	406517254	437904204
4	1196056273831	4685128	- 40775181733	1268951	- 55702	1390233583
5	43552449987	- 185780903	- 1336442515	796184	5693631	41023872
6	20320272012	- 92226104	- 612833882	418580	2781423	18482300
7	11727061362	- 64171755	- 328696948	351155	1798665	9213023
8	11821218905	- 70629105	- 315762694	422126	1886252	8435470
9	395723930355	- 2587217452	- 9802586454	17142336	63405401	244881863
10	13156064579	- 155614188	- 37253504	1840655	440646	105489
11	66983983989	508105164	- 1450145741	3861134	- 10976139	31477014
M	3742368554366	26431657927	- 25317898603	453871818	505242526	2246334863

C.

	\underline{ul}^*	$\underline{a_1 l}^*$	$\underline{a_2 l}^*$	\underline{uk}^*	$\underline{a_1 k}^*$	$\underline{a_2 k}^*$
1	275715,86317	4803,03473	9551,50694	11,4881	0,2001	0,3980
2	71057,40902	1123,12965	1588,34982	4,1746	0,0660	0,0933
3	10911530,84822	159137,63813	155426,32159	- 135,1548	- 1,5458	0,8315
4	6818664,46860	23,88770	- 232457,44885	- 188,8059	- 0,6766	6,6870
5	248549,87031	- 1060,19344	- 7627,03643	- 65,7808	0,3283	1,9254
6	116082,15570	- 526,85343	- 3500,89202	75,8898	- 0,3444	- 2,2887
7	66953,38744	- 366,37623	- 1876,63161	- 14,2498	0,0779	0,3994
8	67556,75585	- 403,63889	- 1804,53666	41,0201	- 0,2475	- 1,0895
9	2260577,92312	- 14779,77491	- 55996,61871	44,8618	- 0,1559	- 1,5348
10	75247,64592	- 890,05350	- 213,07577	- 29,3587	0,3473	0,0831
11	381298,08958	2892,32426	- 8254,77905	285,9228	1,9506	- 5,5047
M	21293234,41694	149953,12407	- 145164,84075	0,0072	0,	0,

als dem sphärischen, ferner die Darstellung des Potentials allgemein für jeden Exponenten, sowohl in aufsteigender als in absteigender Richtung, nach Potentialeiten und Indicialen, endlich der Ausdruck \mathfrak{C} , des Anziehungspotentials für jeden ausserhalb gelegenen oder auf der Oberfläche des Sphäroids befindlichen Ort, und für jedes beliebige Gesetz der Dichtigkeit, wofern nur alle Schichten von gleicher Dichtigkeit einander ähnlich sind.

Die beigelegten Zahlenverzeichnisse sind einer sorgfältigen Prüfung unterzogen. Die wichtigsten darunter sind No. 12 mit den Bedingungszahlen für die Axendrehung, und No. 16 mit den Gliedern der scheinbaren Schwere, geordnet nach Potenzen des Quadrats des Sinus der scheinbaren Polhöhe.

Es erschien zweckmässig, in einer Beilage (sechster Artikel) aus den gefundenen allgemeinen Ausdrücken die speciellen Sätze abzuleiten, welche Maclaurin, Laplace und Ivory für das elliptische Sphäroid gegeben haben. Zu diesen Sätzen sind Ergänzungen hinzugefügt worden.

Im fünften Artikel ist als leichte Schlussfolgerung der bekannte Clairautsche Satz nachgewiesen, welcher eine Gleichung zwischen der Abplattung, der Schwungkraft unter dem Aequator, und der Zunahme der scheinbaren Schwere vom Aequator zum Pol anzeigt. Diese Gleichung ist auch auf die Abplattungszahlen zweiter Ordnung ausgedehnt worden.

Dritter Artikel.

Das Indicial.

Es seien c und c' zwei beliebige ächte Brüche, in gegenseitiger Beziehung wie Sinus und Kosinus eines Winkels, so dass $c^2 + c'^2 = 1$. Es sei

$$\widehat{c}_n = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_2 c^2 + \mathfrak{f}_4 c^4 + \dots + c^n$$

$$\text{oder } \widehat{c}_n = \mathfrak{f}_1 c + \mathfrak{f}_3 c^3 + \mathfrak{f}_5 c^5 + \dots + c^n;$$

das Subindicial $c_n^* = l_0 + l_2 c^2 + l_4 c^4 + \dots + c^n$

oder $c_n^* = l_1 c + l_3 c^3 + l_5 c^5 + \dots + c^n$;

je nachdem n grade oder ungrade. Der Koeffizient der höchsten Potenz wird = 1 angenommen.

Die Benennung Indicial bezieht sich darauf, dass diese Grössen von dem Zeiger (Index) n abhängen. Diese Abhängigkeit wird durch folgende Differentialgleichungen ausgesprochen:

$$\widehat{c}_n = c'^2 \cdot \frac{d\widehat{c}_n}{dc}, \quad \widetilde{c}_n = c'^2 \cdot c_n^*,$$

$$\frac{d\widehat{c}_n}{dc} + n(n+1)\widehat{c}_n = 0, \quad \frac{d^2\widetilde{c}_n}{dc^2} + (n+1)(n+2)c_n^* = 0.$$

Es sei das allgemeine Glied $f_x c^x$ oder $l_x c^x$, so folgt aus diesen Differentialgleichungen:

$$(n-x)(n+x+1)f_x + (x+1)(x+2)f_{x+2} = 0,$$

$$(n-x)(n+x+3)l_x + (x+1)(x+2)l_{x+2} = 0.$$

Diese Koeffizienten sind in den Verzeichnissen 1. 2. angegeben.

Die Anfangskoeffizienten sind:

$$f_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{(n+1)(n+3) \dots (2n-1)}, \quad f_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots n}{(n+2)(n+4) \dots (2n-1)},$$

$$l_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{(n+3)(n+5) \dots (2n+1)}, \quad l_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots n}{(n+4)(n+6) \dots (2n+1)}.$$

Für $c = 1$ ist die Summe aller f oder das einheitliche Indicial = \widehat{f} , die Summe aller l oder das einheitliche Subindicial = \widehat{l} ;

$$\widehat{f} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}, \quad \widehat{l} = \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots (n+1)}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}.$$

Es sei $v = -\frac{1}{2}$, dessen n te Binomialzahl $= \binom{n}{v}$, die $n+1$ ste Binomialzahl $= \binom{n+1}{v}$, so ist

$$2^n \binom{n}{v} = 1, \quad 2^{n+1} \binom{n+1}{v} = \frac{n+2}{2}.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, wenn n und x ungrade,

$$x(2n-1) f_x^{(n)} = n(n+x-1) f_{x-1}^{(n-1)},$$

$$x(2n+1) l_x^{(n)} = n(n+x+1) l_{x-1}^{(n-1)}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen, wenn n grade,

$$(n+1) \widehat{c}_n + n c_{n-1}^* = (2n+1) c_n^*,$$

$$(n+1) \widehat{c}_n - n \frac{e'^2}{e} c_{n-1}^* = (2n+1) \frac{\widehat{c}_{n+1}}{e}.$$

Durch Umstellung wird die Potenz c^n nach Indicialen oder Subindicialen entwickelt:

$$c^n = m_0 + m_2 \widehat{c}_2 + m_4 \widehat{c}_4 + \dots + \widehat{c}_n,$$

$$\text{oder } c^n = m_1 \widehat{c}_1 + m_3 \widehat{c}_3 + m_5 \widehat{c}_5 + \dots + \widehat{c}_n,$$

$$c^n = n_0 + n_2 c_2^* + n_4 c_4^* + \dots + c_n^*,$$

$$\text{oder } c^n = n_1 c_1^* + n_3 c_3^* + n_5 c_5^* + \dots + c_n^*.$$

Diese Koeffizienten sind in den Verzeichnissen 3 4., angezeigt. Vermöge der obigen Differentialgleichungen haben die der Stelle x entsprechenden Koeffizienten für zwei Potenzen c^{n-2} und c^n folgende Beziehungen:

$$(n-x)(n+x+1) m_x^{(n)} = (n-1) n m_x^{(n-2)},$$

$$(n-x)(n+x+3) n_x^{(n)} = (n-1) n n_x^{(n-2)}.$$

Für das Subindicial und das Differential des Indicials gilt folgende Gleichung:

$$n c_{n-1}^* = \frac{d \widehat{c}_n}{dc}.$$

Denn wenn k eine von c unabhängige Zahl ist, so folgt aus der Gleichung des Indicials:

$$\widetilde{c}_n + n(n+1) \int \widehat{c}_n dc = n(n+1)k,$$

$$\text{oder } c'^2 \frac{d \widehat{c}_n}{dc} + n(n+1) \int \widehat{c}_n dc = n(n+1)k,$$

$$\text{oder } \odot, c'^2 c_{n-1}^* + (n+1) \int \widehat{c}_n dc = n(n+1)k,$$

$$\text{oder } \widetilde{c}_{n-1} + (n+1) \int \widehat{c}_n dc = (n+1)k,$$

$$\text{oder } \frac{d^2 \widetilde{c}_{n-1}}{dc^2} + (n+1) \frac{d \widehat{c}_n}{dc} = 0,$$

$$\text{oder } -n(n+1) c_{n-1}^* + (n+1) \frac{d \widehat{c}_n}{dc} = 0,$$

was mit der Annahme übereinstimmt.

Wenn der Werth des Integrals $\int \widehat{c}_n dc$ für $c = -1$, von dem Werth für $c = 1$ abgezogen wird, so ergibt sich das einheitliche Integral zwischen den Grenzen $c = \pm 1$. Aus der Gleichung \odot , folgt wegen des Faktors $c'^2 = 1 - c^2$, welcher bei beiden Werthen von c verschwindet, der erste Satz:

«Das einheitliche Integral $\int \widehat{c}_n dc$ verschwindet für jeden Werth von n .»

Wenn n grade, so ist $k = 0$.

Wenn n ungrade, so ist $(n+1)k = {}_0^{(n-1)}$.

Es seien m und n zwei beliebige Zeiger, so ist:

$$\frac{d(\widehat{c_m c_n})}{dc} = \widehat{c_m} \cdot \frac{d\widehat{c_n}}{dc} + \widehat{c_n} \cdot \frac{d\widehat{c_m}}{dc} = c'^2 \cdot \frac{d\widehat{c_m}}{dc} \cdot \frac{d\widehat{c_n}}{dc} - m(m+1)\widehat{c_m c_n},$$

$$\frac{d(\widehat{c_n c_m})}{dc} = \widehat{c_n} \cdot \frac{d\widehat{c_m}}{dc} + \widehat{c_m} \cdot \frac{d\widehat{c_n}}{dc} = c'^2 \cdot \frac{d\widehat{c_n}}{dc} \cdot \frac{d\widehat{c_m}}{dc} - n(n+1)\widehat{c_n c_m},$$

$$\frac{d(\widehat{c_m c_n})}{dc} - \frac{d(\widehat{c_n c_m})}{dc} = [n(n+1) - m(m+1)]\widehat{c_m c_n}.$$

Es sei also k eine von c unabhängige Zahl, so ist:

$$\begin{aligned} k + [n(n+1) - m(m+1)] \int \widehat{c_m c_n} dc &= \widehat{c_m c_n} - \widehat{c_n c_m} \\ &= c'^2 \left[\frac{d\widehat{c_m}}{dc} \cdot \widehat{c_n} - \frac{d\widehat{c_n}}{dc} \cdot \widehat{c_m} \right] = c'^2 [m^*_{m-1} \widehat{c_n} - n^*_{n-1} \widehat{c_m}]. \end{aligned}$$

Wegen des Faktors c'^2 , welcher für $c = \pm 1$ verschwindet, folgt hieraus der zweite Satz:

« Das einheitliche Integral des Produkts der Indicialen $\int \widehat{c_m c_n} dc$ verschwindet für zwei beliebige aber verschiedene Zeiger m und n . »

Wenn beide Zeiger m, n , einander gleich sind, so wird die obige Gleichung identisch. Es muss also das einheitliche Integral des Quadrats der Indicialen $S_{nn} = \int \widehat{c_n c_n} dc$ besonders bestimmt werden. Aus dem zweiten Satz ergibt sich leicht, dass es dem einheitlichen Integral $\int \widehat{c^n c_n} dc$ gleich ist.

Aber

$$c^n \widehat{c_n} = \dots \cdot f_x c^{n+x} \dots$$

Also

$$\int \widehat{c^n c_n} dc = \dots \frac{f_x}{n+x+1} c^{n+x+1} \dots$$

Hier ist $(n+x+1)$ immer ungrade. Für $c = \pm 1$ ist also $c^{n+x+1} = \pm 1$. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2} S_{nn} = \frac{f_0}{n+1} + \frac{f_2}{n+3} \dots \text{ oder } = \frac{f_1}{n+2} + \frac{f_3}{n+4} \dots$$

Das einheitliche Indicial sei wie oben = \underline{f} , so ergibt sich hieraus der dritte Satz:

«Das einheitliche Integral des Quadrats eines Indicials wird durch das Quadrat des einheitlichen Indicials ausgedrückt.»

$$\frac{2n+1}{2} S_{nn} = \underline{f} \cdot \underline{f}$$

oder

$$\frac{1}{2} S_{nn} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

Es seien

$$v_0 = -\frac{1}{2}, \quad v_2 = -\frac{3}{2},$$

und ihre Binominalzahlen

$${}^1 v_0, {}^2 v_0, {}^3 v_0 \dots {}^1 v_2, {}^2 v_2, {}^3 v_2 \dots,$$

so ist

$$\frac{2n+1}{2} (2^n v_0)^2 S_{nn} = 1$$

oder

$$\frac{1}{2} (2^n v_0) (2^n v_2) S_{nn} = 1.$$

Das sphärische Indicial.

In einem sphärischen Dreieck seien c und z die Kosinus zweier Seiten, welche den Winkel m einschliessen, c' und z' die Sinus dieser Seiten, C der Kosinus der dritten Seite, u der Kosinus des Winkels m , welcher der dritten Seite gegenüber liegt.

$$C = cz + c'z'u.$$

Die hier von $m=0$ bis $m=2\pi$ genommenen Integrale heissen Umlaufintegrale.

Das sphärische Indicial

$$\widehat{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int C^n dm,$$

das sphärische Subindicial

$$\overset{**}{C}_{n-1} = \frac{1}{2\pi c'z'} \int \overline{C^n u dm},$$

die Binominalzahlen von n sind $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \dots$

$$C^n = (cz)^n + \overset{1}{n} (cz)^{n-1} (c'z') u + \overset{2}{n} (cz)^{n-2} (c'z')^2 u^2 \dots$$

$$C^n u = (cz)^n u + \overset{1}{n} (cz)^{n-1} (c'z') u^2 + \overset{2}{n} (cz)^{n-2} (c'z')^2 u^3 \dots$$

Die Binominalzahlen von $v_0 = -\frac{1}{2}$ sind $\overset{1}{v_0}, \overset{2}{v_0}, \overset{3}{v_0} \dots$
sämtlich positiv genommen.

$$x \text{ ungrade } \dots \dots \frac{1}{2\pi} \int \overline{u^x dm} = 0,$$

$$x \text{ grade oder ungrade } \frac{1}{2\pi} \int \overline{u^{2x} dm} = \overset{x}{v_0},$$

$$\widehat{C}_n = (cz)^n + \overset{1}{v_0} \overset{2}{n} (cz)^{n-2} (c'z')^2 + \overset{2}{v_0} \overset{4}{n} (cz)^{n-4} (c'z')^4 \dots$$

$$\overset{**}{C}_{n-1} = \overset{1}{v_0} \overset{1}{n} (cz)^{n-1} + \overset{2}{v_0} \overset{3}{n} (cz)^{n-3} (c'z')^2 + \overset{3}{v_0} \overset{5}{n} (cz)^{n-5} (c'z')^4 \dots$$

$$(\overset{x}{n+1}) - \overset{x}{n} = \overset{x-1}{n},$$

also

$$\widehat{C}_{n+1} - \widehat{C}_n (cz) = \overset{**}{C}_{n-1} (c'z')^2.$$

Für das sphärische Indicial und Subindicial gelten ähnliche Gleichungen, wie für das einfache:

$$\widetilde{\widetilde{C}}_n = c'^2 \left(\frac{d\widehat{C}_n}{dc} \right), \quad \widetilde{\widetilde{C}}_{n-1} = c'^2 C_{n-1},$$

$$\left(\frac{d\widetilde{\widetilde{C}}_n}{dc} \right) + n(n+1) \widehat{C}_n - (n-1)n \widehat{C}_{n-2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 \widetilde{\widetilde{C}}_{n-1}}{dc^2} \right) + n(n+1) \overset{**}{C}_{n-1} - (n-1)n \overset{**}{C}_{n-3} = 0.$$

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft der Binomialzahlen von v_0 , dass

$$3v_0^1 = 4v_0^2, \quad 5v_0^2 = 6v_0^3, \quad 7v_0^3 = 8v_0^4 \dots$$

Aus diesen Differentialgleichungen folgt, dass das sphärische Indicial in eine Reihe von Gliedern sich entwickeln lässt, deren jedes ein Produkt zweier einfachen Indicialle von gleichem Zeiger enthält.

Eben so besteht das sphärische Subindicial aus einer Reihe von Gliedern, deren jedes ein Produkt zweier einfachen Subindicialle enthält.

$$\begin{aligned} \widehat{C}_n &= \widehat{f}_0 + \widehat{f}_2 c_2 \widehat{z}_2 + \widehat{f}_4 c_4 \widehat{z}_4 \dots \text{ oder } = \widehat{f}_1 c_1 \widehat{z}_1 + \widehat{f}_3 c_3 \widehat{z}_3 \dots \\ \check{C}_{n-1}^{**} &= \check{d}_1 c_1^* \check{z}_1^* + \check{d}_3 c_3^* \check{z}_3^* \dots \text{ oder } \check{d}_0 + \check{d}_2 c_2^* \check{z}_2^* + \check{d}_4 c_4^* \check{z}_4^* \dots \end{aligned}$$

je nachdem n grade oder ungrade ist.

In der bei \widehat{C}_n und \check{C}_{n-1}^{**} nach Potenzen von $(c\widehat{z})$ und $(c'\check{z}')$ fortschreitenden Reihe enthält jedes Glied die höchste Potenz von $(c\widehat{z})$, also auch das Produkt $\widehat{c}\widehat{z}$ oder $\check{c}\check{z}$ vom höchsten Zeiger. Also ist das letzte Glied

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n &= 1 + v_0^1 n + v_0^2 n^2 \dots \check{d}_{n-1} = v_0^1 n + v_0^2 n^2 \dots \\ n \text{ grade } \dots \widehat{f}_n &= \frac{(n+1)(n+3)\dots(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots n}, \\ n \text{ ungrade } \dots \widehat{f}_n &= \frac{(n+2)(n+4)\dots(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-1)}, \\ n \text{ ungrade } \dots \check{d}_{n-1} &= \frac{n(n+2)\dots(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-1)}, \\ n \text{ grade } \dots \check{d}_{n-1} &= \frac{(n+3)(n+5)\dots(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)}. \end{aligned}$$

Für die übrigen Glieder findet man aus den obigen Gleichungen folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} (n-x)(n+x+1) f_x^{(n)} &= n(n-1) f_x^{(n-2)}, \\ (n-x-1)(n+x+2) \check{d}_x^{(n-1)} &= n(n-1) \check{d}_x^{(n-3)}. \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten sind in den Verzeichnissen 5. 6. angezeigt.

Zwischen den Koefficienten des sphärischen Indicials und den umgestellten Koefficienten des einfachen Indicials ergibt sich eine von n unabhängige Beziehung:

$$f_x^{(n)} = 2^x v_0 m_x^{(n)}.$$

Wenn

$$y_x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2x-1)}, \quad w_x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2x+1)},$$

so ist

$$y_x f_x^{(n)} = m_x^{(n)}, \quad \frac{1}{n} w_x \delta_x^{(n-1)} = n_x^{(n)}.$$

Vierter Artikel.

Das geometrische Potential.

In einem gradlinigen Dreieck seien die Seiten $1, r, e$, der von den Seiten 1 und r eingeschlossenen Winkel sei $= p$, $\cos p = z$, $\sin p = z'$

$$e^2 = 1 - 2rz + r^2.$$

In dem untern Falle, wo $r < 1$, ist der Theil rechts konvergierend. Es sei $r = \frac{1}{r}$, so ist

$$(er)^2 = 1 - 2rz + r^2.$$

In dem obern Falle, wo $r > 1$, also $r < 1$, ist der Theil rechts konvergierend. Es ist also nur nöthig den untern Fall zu betrachten, weil der obere Fall aus diesem abgeleitet wird, indem man r statt r , und er statt e setzt.

Das geometrische aufsteigende Potential ist

$$P'' = e^{n''}, \text{ für } n'' = -1, 1, 3, 5, 7 \dots$$

Das geometrische absteigende Potential ist

$$P = \frac{(1-r^2)^{n-2}}{e^n}, \text{ für } n = 3, 5, 7, 9 \dots$$

Es sei

$$\alpha'' = - \left(\frac{dP''}{dr} \right) r^2, \quad \beta'' = - \left(\frac{dP''}{dz} \right) z'^2,$$

$$\alpha = - \left(\frac{dP}{dr} \right) r^2, \quad \beta = - \left(\frac{dP}{dz} \right) z'^2,$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left[\left(\frac{d\alpha''}{dr} \right) + \left(\frac{d\beta''}{dz} \right) \right] (1 - r^2) - 2 (n'' + 1) \left(\frac{dP''}{dr} \right) r^3 + n'' (n'' + 1) P'' r^2 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right) + \left(\frac{d\beta}{dz} \right) \right] (1 - r^2) - 2 (n - 3) \left(\frac{dP}{dr} \right) r^3 + (n - 4) (n - 3) P r^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass sowohl das aufsteigende als absteigende geometrische Potential sich in eine Reihe entwickeln lassen, welche nach Indicialen von z fortschreitet. Diese Indicialen sind mit Koeffizienten behaftet, welche bloss von der Seite r abhängen, und daher Potentialseiten heissen.

Es seien

$$\frac{n''}{2} = v'', \quad - \frac{n}{2} = v,$$

und deren Binomialzahlen

$$\begin{matrix} 1'' & 2'' & 3'' & & 1 & 2 & 3 \\ v, & v, & v & \dots & v, & v, & v \dots \end{matrix}$$

so ist

$$P'' = e^{n''} = l''_0 - 2^1 v'' l''_1 \widehat{z}_1 + 2^2 v'' l''_2 \widehat{z}_2 - 2^3 v'' l''_3 \widehat{z}_3 \dots$$

$$P = \frac{(1 - r^2)^{n-2}}{e^n} = l_0 - 2^1 v l_1 \widehat{z}_1 + 2^2 v l_2 \widehat{z}_2 - 2^3 v l_3 \widehat{z}_3 \dots$$

Für $n'' = -1$ ist

$$\left(\frac{d\alpha''}{dr} \right) + \left(\frac{d\beta''}{dz} \right) = 0.$$

Für $n = 3$ ist

$$\left(\frac{da}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{dz}\right) = 0.$$

In diesen beiden Fällen enthält die Potentialseite nur ein Glied $l''_x = l_x = r^x$.

Es sei also

$$-\frac{1}{2} = v_0, \text{ und } -\frac{3}{2} a =,$$

so ist

$$\frac{1}{e} = 1 - 2v_0 r \widehat{z}_1 + 2^2 v_0^2 r^2 \widehat{z}_2 - 2^3 v_0^3 r^3 \widehat{z}_3 \dots$$

$$\frac{1-r^2}{e^3} = 1 - 2v_2 r \widehat{z}_1 + 2^2 v_2^2 r^2 \widehat{z}_2 - 2^3 v_2^3 r^3 \widehat{z}_3 \dots$$

Wenn $n - n'' = 4$, so verwandelt sich die Seite des einen Potentials in die des andern. In diesem Falle haben beide eine gleiche Seite $l''_x = l_x$. Es ist also nur nöthig für eine der beiden Potentiale die Seite zu bestimmen. Durch die Gleichung $n - n'' = 4$ verwandelt man diese Seite in die des andern Potentials.

Aus der Differentialgleichung von P ergibt sich eine ähnliche für die Potentialseite l_x .

Es sei

$$\widehat{l}_x = \left(\frac{dl_x}{dr}\right) r^2,$$

so ist

$$\left[x(x+1) l_x - \frac{d\widehat{l}_x}{dr} \right] (1-r^2) - 2(n-3) \left(\frac{dl_x}{dr}\right) r^3$$

$$+ (n-4)(n-3) l_x r^2 = 0.$$

$$l_x = r^x + p_2 r^{x+2} + p_4 r^{x+4} \dots p_{n-3} r^{x+n-3}.$$

Zwei nächste Potentialzahlen seien p_{y-2} und p_y
 $2x+1 = u.$

Beim aufsteigenden Potential sei. $n''+3 = w+y.$

Bei absteigenden Potential sei. $n-1 = w+y,$

so ergibt sich aus obiger Gleichung:

$$y(u+y) p_{y-1} + w(u-w) p_{y-2} = 0.$$

Diese Potentialzahlen \wp sind im Verzeichniss 7. angezeigt.

Für $x = 0$ verhalten sich die Potentialzahlen wie die Binomialzahlen von $n - 2$ oder $n'' + 2$. Die letzte Potentialzahl ist

$$\wp_{n-3} = \pm \frac{(2x-1)(2x-3)\dots(2x+4-n)}{(2x+3)2x+5)\dots(2x-2+n)}.$$

Es sei das geometrische Potential mit einem beliebigen Indicial \widehat{z}_m multiplicirt, und von dem Produkt das einheitliche Integral $= F_m$ von $z = -1$ bis $z = 1$ genommen.

Die einheitlichen Integrale des Produkts zweier Indiciale von verschiedenem Zeiger verschwinden, und es bleibt bloss das einheitliche Integral S_{mm} des Indicialquadrats übrig. Also

$$F_m'' = 2^m v'' l''_m S_{mm}, \quad F_m = 2^m v l_m S_{mm},$$

wo

$$v'' = \frac{n''}{2}, \quad v = -\frac{n}{2}$$

und

$$l_m = r^m + \wp_2 r^{m+2} + \wp_4 r^{m+4} \dots \wp_{n-3} r^{m+n-3}.$$

Es sei also:

$$F_m = i_0 r^m + i_2 r^{m+2} \dots + i_{n-3} r^{m+n-3},$$

so ist

$$i_0 = 2^m v S_{mm},$$

$$2^m v = \frac{n(n+2)\dots(2m+n-2)}{1 \cdot 2 \dots m},$$

$$\frac{1}{2} S_{mm} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m) (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)] [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)]}.$$

Wenn also

$$2u = n - 4,$$

so ist

$$\frac{n-2}{2} 2^m u i_{n-3} = 1.$$



11
23 Februar 1853.

DIE GESTALT DER ERDE. VON DR. M. G. VON
PAUCKER, CORRESPONDENT DER AKADEMIE.

Fünfter Artikel.

Die scheinbare Schwere auf dem allge-
meinen Sphäroid.

Zwei einander anziehende Oerter seien M und m , der Erdpol sei P , die von der Erdmitte zu den Oertern M und m gezogenen Halbmesser seien R und r , der Polarhalbmesser $= b$, der lineäre Abstand der beiden Oerter $Mm = E$; die Neigung der beiden Halbmesser R und r gegen einander liegt dem Polarhalbmesser gegenüber und sei also $= p$, es sei $\cos p = z$, $\sin p = z'$, folglich

$$E^2 = R^2 - 2Rrz + r^2.$$

Die Neigung der Ebene Rr gegen die Ebene br sei $= m$; es sei $\cos m = u$, $\sin m = u'$. Die zwischen den beiden Oertern M und m wirksame Schwere sei, abgesehen von der Masse, $= -\frac{1}{E^2}$, so sind die drei Seitenkräfte

in der Richtung von r , $-\frac{Rz - r}{E^3}$,

senkrecht zu r , in der Ebene br ,... $-\frac{Rz'u}{E^3}$,

senkrecht zur Ebene br , $-\frac{Rz'u'}{E^3}$.

Die Neigung der Ebene bR gegen die Ebene br sei $= P$,
es sei

$$\begin{aligned} \cos P &= \omega, & \sin P &= \omega', \\ \cos PM &= C, & \sin PM &= C', \\ \cos Pm &= c, & \sin Pm &= c'. \end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} z &= Cc + C'c'\omega, & z'u &= Cc' - C'\omega, & z'u' &= C'\omega', \\ C &= cz + c'z'u. \end{aligned}$$

Die Lage des Orts m sei veränderlich, so dass die Grössen r, c, ω oder P , als veränderlich betrachtet werden. Die obigen Gleichungen geben:

$$\left(\frac{dz}{dc}\right) = C - \frac{C'c\omega}{c'} = \frac{z'u}{c'},$$

$$\left(\frac{dz}{dP}\right) = \left(\frac{dz}{d\omega}\right) d\omega = - \left(\frac{dz}{d\omega}\right) \omega' = - C'c'\omega' = - z'u'c',$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{E}\right)}{dr}\right] = \frac{Rr - r}{E^3},$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{E}\right)}{dc}\right] = \frac{Rr}{E^3} \left(\frac{dz}{dc}\right) = \frac{Rz'u}{E^3} \cdot \frac{r}{c'},$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{E}\right)}{dP}\right] = \frac{Rr}{E^3} \left(\frac{dz}{dP}\right) = - \frac{Rz'u'}{E^3} \cdot rc'.$$

Die Masse des in dem Ort M befindlichen Körperelements sei $= dM$, so ist das Potential der Anziehung

$$V = \int \frac{dM}{E}.$$

Wenn also für irgend einen Theil des Erdkörpers das Anziehungspotential V gefunden worden ist, und in dem Ausdruck desselben die Erdbmessungen unveränderlich, die auf

den Ort m bezüglichen Werthe veränderlich angenommen werden, so bestimmt man die partiellen Differentiale von V nach r, c, P , und erlangt die von diesem Theile des Erdkörpers auf den Ort m wirkende Schwere durch die drei Seitenkräfte A, B, H , dem Obigen gemäss mittels der Gleichungen

$$A = - \left(\frac{dV}{dr} \right), \quad B = - \left(\frac{dV}{dc} \right) \frac{c'}{r}, \quad H = \left(\frac{dV}{dP} \right) \frac{1}{rc'}$$

Es sei

$$\alpha = Ar^2 = - \left(\frac{dV}{dr} \right) r^2,$$

$$\beta = Brc' = - \left(\frac{dV}{dc} \right) c'^2,$$

$$\gamma = - H \frac{r}{c'} = - \left(\frac{dV}{dP} \right) \frac{1}{c'^2}$$

so ist, abgesehen von dem Massenelement dM ,

$$\alpha = - \frac{Rr^2 z}{E^3} + \frac{r^3}{E^3},$$

$$\beta = - \frac{Rrz'c'u}{E^3} = \frac{Rrcz}{E^3} - \frac{RrC}{E^3},$$

$$\gamma = \frac{Rrz'u'}{E^3 c'} = \frac{RrC'\omega'}{E^3 c'},$$

$$E^2 = (r - Rz)^2 + R^2 z'^2,$$

$$\left(\frac{d(c:)}{dc} \right) = 2z - \frac{C'\omega}{c'} \quad \frac{d\omega'}{dP} = \omega,$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dr} \right) = - \frac{2Rrz}{E^3} + \frac{3R^2 r^2 z'^2}{E^5},$$

$$\left(\frac{d\beta}{dc} \right) = \frac{2Rrz}{E^3} - \frac{RrC'\omega}{E^3 c'} - \frac{3R^2 r^2 z'^2 u^2}{E^5},$$

$$\left(\frac{d\gamma}{dP} \right) = \frac{RrC'\omega}{E^3 c'} - \frac{3R^2 r^2 z'^2 u'^2}{E^5}.$$

Die Grössen rechts vernichten einander gegenseitig. Nur in dem besondern Fall, wo auch der Abstand E verschwindet,

wird die Summe unbestimmt $= \frac{0}{0}$. Im Allgemeinen gilt also die Gleichung:

$$\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{dc}\right) + \left(\frac{d\gamma}{dP}\right) = 0.$$

Wenn man die Erde als einen Umdrehungskörper annimmt, in welchem jeder Meridian dem aus den Gradmessungen geschlossenen mittlern Meridian gleich ist, so entspricht der in der einen Erdhälfte von irgend einem Massenelement dM senkrecht auf den Meridian br ausgeübten Schwere eine gleiche und entgegengesetzte in der andern Erdhälfte. Der Halbmesser r geht nach irgend einem Ort ausserhalb oder innerhalb der Erde. Lässt man um diesen Halbmesser die Ebene Rr einen Umlauf machen, wobei z unverändert bleibt, während der Winkel m alle Werthe von 0 bis 2π annimmt, so hat die Kraft $\frac{Rz'u'}{E^3}$ für jeden Werth von R, z', E , zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von u' . Beim vollen Umlauf ist also die Summe dieser Seitenkräfte $\gamma = 0$. Für die Anziehung der als Rotationskörper angesehenen Erde auf irgend einen äussern oder innern Ort gilt also die Gleichung

$$\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{dc}\right) = 0.$$

Um das Massenelement dM zu bestimmen, sind die Abmessungen des Körperelements im Orte M

in der Richtung des Halbmessers $\dots dR,$
 senkrecht darauf in der Ebene Rr $\dots Rdp,$
 senkrecht zur Ebene Rr $\dots Rz' dm,$

$$\text{aber } dz = -z' dp.$$

Also ist das Körperelement $\dots - R^2 dR dz dm,$
 und für die Dichtigkeit ρ das Massenelement dM $\dots = - \rho R^2 dR dz dm.$

Der Ort M befinde sich in einer sphäroidischen Erdschicht, welche überall gleiche Dichtigkeit $= \rho$ hat und von zwei ein-

ander ähnlichen krummen Flächen begrenzt wird. Der Aequatorhalbmesser dieser Schicht sei $= a$, so ist vermöge der vorausgesetzten Aehnlichkeit der begrenzenden Flächen

$$\frac{dR}{da} = \frac{R}{a}, \quad dM = - \varrho R^3 dz dm \frac{da}{a}.$$

Man setzt hier vorläufig $\varrho = 1$ und $a = 1$, so ist das Potential der Anziehung dieser sphäroidischen Schicht

$$V = - \int \frac{R^3}{E} dz dm.$$

Es sind C und C' Sinus und Kosinus der Neigung des Halbmessers R gegen den Aequator in jedem Meridian

$$C = cz + c'z'u,$$

$$R = 1 - \alpha_1 C^2 + \alpha_2 C^4 - \alpha_3 C^6 + \alpha_4 C^8 \dots$$

Aus den Abplattungsbrüchen erster Reihe $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ bildet man nach dem Satz der Theilung zu bestimmten Summen und den beigesetzten Versetzungszahlen die Abplattungsbrüche zweiter Reihe $\beta_1 \beta_2 \dots$

$$\begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= \alpha_1, & \beta_1^{(2)} &= \alpha_2, & \beta_2^{(2)} &= \alpha_1 \alpha_1; \\ \beta_1^{(3)} &= \alpha_3, & \beta_2^{(3)} &= 2\alpha_1 \alpha_2, & \beta_3^{(3)} &= \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1; \\ \beta_1^{(4)} &= \alpha_4, & \beta_2^{(4)} &= 2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_2, & \beta_3^{(4)} &= 3\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2, \\ & & & & \beta_4^{(4)} &= \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1. \end{aligned}$$

Mittels der Binomialzahlen $\overset{1}{n} = \frac{n}{1}$, $\overset{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ u. s. w.

bildet man aus den Abplattungsbrüchen zweiter Reihe $\beta_1 \beta_2 \dots$ die Abplattungsbrüche dritter Reihe $\gamma_1 \gamma_2 \dots$

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(n)} &= \overset{1}{n} \beta_1^{(1)}, \\ \gamma_2^{(n)} &= \overset{1}{n} \beta_1^{(2)} + \overset{2}{n} \beta_2^{(2)}, \\ \gamma_3^{(n)} &= \overset{1}{n} \beta_1^{(3)} + \overset{2}{n} \beta_2^{(3)} + \overset{3}{n} \beta_3^{(3)}, \\ \gamma_4^{(n)} &= \overset{1}{n} \beta_1^{(4)} + \overset{2}{n} \beta_2^{(4)} + \overset{3}{n} \beta_3^{(4)} + \overset{4}{n} \beta_4^{(4)}. \end{aligned}$$

Alsdann hat jede Potenz des Halbmessers R folgenden Ausdruck:

$$R^n = 1 - \gamma_1^{(n)} C^2 + \gamma_2^{(n)} C^4 - \gamma_3^{(n)} C^6 + \gamma_4^{(n)} C^8 \dots$$

Auf der sphäroidischen Erdschicht wird um r als Axe mit der Neigung p , welche die R , r , zu einander haben, ein Ring abgeschnitten. Man nimmt das Umlaufsintegral von $m = 0$ bis $m = 2\pi$, und erhält dann das Anziehungspotential dieses Ringes, 2π als Einheit angesehen,

$$V'' = \frac{1}{2\pi} \int \frac{R^3}{E} dm.$$

Die Bezeichnung „oben“ gilt für $r > R$, „unten“ für $r < R$. Es sei

$$v = \frac{1}{r}, \quad v_0 = -\frac{1}{2},$$

davon die Binominalzahlen

$$v_0, v_0^2, v_0^3 \dots$$

$$\text{oben } (Er)^2 = 1 - 2vRz + v^2R^2,$$

$$\text{unten } \frac{E^2}{R^2} = 1 - 2\frac{r}{R}z + \frac{r^2}{R^2},$$

$$\text{oben } \frac{R^3}{E} = rR^3 - 2v_0z_1r^2R^4 + 2^2v_0z_2r^3R^5 \dots$$

$$\text{unten } \frac{R^3}{E} = R^2 - 2v_0z_1rR + 2^2v_0z_2r^2 - 2^3v_0z_3\frac{r^3}{R} \dots$$

Statt der Potenzen von R setzt man ihren obigen Ausdruck, und statt der Potenzen von C die durch Umlaufsintegrale aus ihnen gebildeten sphärischen Indicale

$$\widehat{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int C^n dm,$$

$$\begin{aligned} \text{oben } V'' = & \quad r(1 - \gamma_1^{(3)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(3)}\widehat{C}_4 \dots) \\ & - 2^1 v_0 \widehat{z}_1 r^2 (1 - \gamma_1^{(4)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(4)}\widehat{C}_4 \dots) \\ & + 2^2 v_0 \widehat{z}_2 r^3 (1 - \gamma_1^{(5)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(5)}\widehat{C}_4 \dots) \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{unten } V'' = & \quad (1 - \gamma_1^{(2)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(2)}\widehat{C}_4 \dots) \\ & - 2^1 v_0 \widehat{z}_1 r (1 - \gamma_1^{(1)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(1)}\widehat{C}_4 \dots) \\ & + 2^2 v_0 \widehat{z}_2 r^2 (1), \\ & - 2^3 v_0 \widehat{z}_3 r^3 (1 - \gamma_1^{(-1)}\widehat{C}_2 + \gamma_2^{(-1)}\widehat{C}_4 \dots), \end{aligned}$$

$$\widehat{C}_n = \widehat{f}_0 + \widehat{f}_2 c_2 \widehat{z}_2 + \widehat{f}_4 c_4 \widehat{z}_4 \dots$$

Man nimmt hievon das einheitliche Integral von $z = -1$ bis $z = 1$, und erhält dann das Anziehungspotential der ganzen sphäroidischen Erdschicht, 4π als Einheit angesehen,

$$V = \frac{1}{2} \int \overline{V''} dz.$$

Für jeden Werth von n verschwindet das einheitliche Integral $\int \widehat{z}_n dz$. Eben so verschwindet für beliebige aber verschiedene Werthe von m und n das einheitliche Integral $\int \widehat{z}_m \widehat{z}_n dz$. Da in V'' bloss $\widehat{C}_2, \widehat{C}_4$ u. s. w. und in diesen bloss $\widehat{z}_2 \widehat{z}_4 \dots$ für grade Zeiger vorkommen, so verschwinden bei der Integration von V'' alle Glieder, welche $\widehat{z}_1 \widehat{z}_3 \dots$ enthalten, und es bleiben bloss die einheitlichen Integrale $\int \widehat{z}_n \widehat{z}_n dz = S_{nn}$.

Also ist

$$\begin{aligned} \text{oben } V = & \quad r(1 - \gamma_1^{(3)}\widehat{f}_0^{(2)} + \gamma_2^{(3)}\widehat{f}_0^{(4)} \dots), \\ & + 2^2 v_0 r^3 \frac{1}{2} S_{22} c_2 (\dots - \gamma_1^{(5)}\widehat{f}_2^{(2)} + \gamma_2^{(5)}\widehat{f}_2^{(4)} \dots), \\ & + 2^4 v_0 r^5 \frac{1}{2} S_{44} c_4 (\dots + \gamma_2^{(7)}\widehat{f}_4^{(4)} \dots), \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{unten } V = & (1 - \gamma_1^{(2)} f_0^{(2)} + \gamma_2^{(2)} f_0^{(4)} - \gamma_3^{(2)} f_0^{(6)} \dots), \\ & + 2^4 v_0 r^4 \frac{1}{2} S_{44} \widehat{c_4} (\dots \dots \dots + \gamma_2^{(-2)} f_4^{(4)} - \gamma_3^{(-2)} f_4^{(6)} \dots), \\ & + 2^6 v_0 r^6 \frac{1}{2} S_{66} \widehat{c_6} (\dots \dots \dots - \gamma_3^{(-4)} f_6^{(6)} \dots), \\ & \vdots \end{aligned}$$

Aber $(2x + 1) (2^x v_0)^2 \frac{1}{2} S_{xx} = 1$

und $f_x^{(n)} = 2^x v_0 m_x^{(n)}$.

Man bildet also mit Hülfe der umgestellten Indicialzahlen m aus den Abplattungsbrüchen dritter Reihe γ die Abplattungsbrüche vierter Reihe δ :

$$\begin{aligned} \delta_3 &= 1 - m_0^{(2)} \gamma_1^{(3)} + m_0^{(4)} \gamma_2^{(3)} - m_0^{(6)} \gamma_3^{(3)} \dots \\ 5\delta_5 &= \dots - m_2^{(2)} \gamma_1^{(5)} + m_2^{(4)} \gamma_2^{(5)} - m_2^{(6)} \gamma_3^{(5)} \dots \\ 9\delta_7 &= \dots \dots \dots m_4^{(4)} \gamma_2^{(7)} - m_4^{(6)} \gamma_3^{(7)} \dots \\ 13\delta_9 &= \dots \dots \dots - m_6^{(6)} \gamma_3^{(9)} \dots \\ & \vdots \\ \delta_0 &= 1 - m_0^{(2)} \gamma_1^{(2)} + m_0^{(4)} \gamma_2^{(2)} - m_0^{(6)} \gamma_3^{(2)} \dots \\ 9\delta_4 &= \dots \dots \dots m_4^{(4)} \gamma_2^{(-2)} - m_4^{(6)} \gamma_3^{(-2)} \dots \\ 13\delta_6 &= \dots \dots \dots - m_6^{(6)} \gamma_3^{(-4)} \dots \end{aligned}$$

Das Verzeichniss 8., enthält diese Abplattungsbrüche δ ausgedrückt durch die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \dots$.

Das Anziehungspotential der sphäroidischen Erdschicht ist dann:

oben $V = \delta_3 r + \delta_5 r^3 \widehat{c_2} + \delta_7 r^5 \widehat{c_4} + \delta_9 r^7 \widehat{c_6} \dots$

unten $V = \delta_0 \dots \dots \dots + \delta_4 r^4 \widehat{c_4} + \delta_6 r^6 \widehat{c_6} \dots$

Man setzt nun $\frac{V}{a}$ statt V , $\frac{r}{a}$ statt r , und ax statt r . Man multiplicirt mit der Dichtigkeit ϱ und integrirt nach a . Es sei

$$\int \varrho a^n da = a^{n+1} \varrho_{n+1}.$$

Im obern Fall nimmt man das Integral von $a = 0$ bis zu dem a der Erdoberfläche, wodurch sich das Anziehungspotential des ganzen Erdkörpers ergibt.

Im untern Fall nimmt man das Integral von dem a , welches der Erdschicht, in welcher der Ort m liegt, entspricht, bis zu dem a der Erdoberfläche, wodurch sich das Anziehungspotential der Erdschale ergibt, welche von der Oberfläche bis zu dem innern Ort m reicht. Dieses Potential verschwindet für $r = R$, daher im Verfolg bloss der obere Fall berücksichtigt werden wird.

Es sei also jetzt der Aequatorealhalbmesser der Erdoberfläche $= a$, der Abstand des äussern Orts m von der Erdmitte $= r$, $\frac{a}{r} = r$,

$$\frac{\rho_5}{\rho_3} = i, \quad \frac{\rho_7}{\rho_3} = i_1, \quad \frac{\rho_9}{\rho_3} = i_2, \dots$$

so ist das Anziehungspotential des ganzen Erdkörpers auf diesen äussern Ort, wobei $4\pi a^2 Q$ als Einheit angesehen wird:

$$(c) \quad V = \delta_3 r + i \delta_5 r^3 c_2 + i_1 \delta_7 r^5 c_4 + i_2 \delta_9 r^7 c_6 \dots$$

Dieses Anziehungspotential des ganzen Erdkörpers verwandelt sich in das Anziehungspotential einer einzelnen Erdschicht, wenn $i = i_1 = i_2 \dots = 1$ gesetzt wird.

Wenn man dem ganzen Erdkörper eine durchweg gleiche Dichtigkeit beilegt, so ist

$$i = \frac{3}{5}, \quad i_1 = \frac{3}{7}, \quad i_2 = \frac{3}{9}, \quad i_3 = \frac{3}{11} \dots$$

Aus der Anziehung des Umdrehungskörpers der Erde auf den äussern Ort m gehen zwei Kräfte hervor, die in der durch diesen Ort gehenden Meridianebene wirken, die Centrakraft A in der Richtung von r , die Seitenkraft B in der darauf senkrechten Richtung.

$$A = - \left(\frac{dV}{dr} \right), \quad Ar^2 = \alpha = - \left(\frac{dV}{dr} \right) r^2,$$

$$B = - \left(\frac{dV}{dc} \right) \frac{c'}{r}, \quad Brc' = \beta = - \left(\frac{dV}{dc} \right) c'^2.$$

2

Es sei bei dem Indicial

$$\dots \frac{d\widehat{c}}{dc} c'^2 = \widehat{c},$$

so ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta_3 + 3i\delta_5 r^2 \widehat{c}_2 + 5i_1 \delta_7 r^4 \widehat{c}_4 + 7i_2 \delta_9 r^6 \widehat{c}_6 \dots \\ -\beta &= i\delta_5 r^3 \widehat{c}_2 + i_1 \delta_7 r^5 \widehat{c}_4 + i_2 \delta_9 r^7 \widehat{c}_6 \dots \\ -\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) &= 2 \cdot 3 \cdot i\delta_5 r^3 \widehat{c}_2 + 4 \cdot 5 i_1 \delta_7 r^5 \widehat{c}_4 + 6 \cdot 7 i_2 \delta_9 r^7 \widehat{c}_6 \dots \\ -\left(\frac{d\beta}{dc}\right) &= i\delta_5 r^3 \frac{d\widehat{c}_2}{dc} + i_1 \delta_7 r^5 \frac{d\widehat{c}_4}{dc} + i_2 \delta_9 r^7 \frac{d\widehat{c}_6}{dc} \dots \end{aligned}$$

Vermöge der Gleichung des Indicials ist

$$\frac{d\widehat{c}_n}{dc} + n(n+1)\widehat{c}_n = 0,$$

also

$$\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{dc}\right) = 0.$$

Der obige Ausdruck des Potentials befriedigt also die Bedingungsgleichung der Anziehung.

Ferner ist

$$\frac{d\widehat{c}_n}{dc} = n^* c_{n-1}.$$

Also wenn $4\pi aQ$ als Einheit angesehen wird, so ist

$$\begin{aligned} A &= \delta_3 r^2 + 3i\delta_5 r^4 \widehat{c}_2 + 5i_1 \delta_7 r^6 \widehat{c}_4 + 7i_2 \delta_9 r^8 \widehat{c}_6 \dots \\ -\frac{B}{cc'} &= 2i\delta_5 r^4 \frac{c_1^*}{c} + 4i_1 \delta_7 r^6 \frac{c_3^*}{c} + 6i_2 \delta_9 r^8 \frac{c_5^*}{c} \dots \end{aligned}$$

Hieraus folgen weiter die auf den Aequator bezogenen Kräfte

$$\text{Parallel dem Aequator } X = Ac' - Bc = Sc',$$

$$\text{Parallel der Erdaxe } \dots Y = Ac + Bc' = Tc.$$

$$S = A - \frac{B}{cc'} c^2, \quad T = A + \frac{B}{cc'} c'^2,$$

$$Sc'^2 + Tc^2 = A, \quad T - S = \frac{B}{cc'}.$$

$$\frac{2}{3} S + \frac{1}{3} T = A - \frac{B}{cc'} \cdot \widehat{c_2}.$$

Die Indicialle geben

$$(n+1)\widehat{c_n} + nc^*c_{n-1} = (2n+1)c_n^*.$$

$$(n+1)\widehat{c_n} - n\frac{c'^2}{c}c_{n-1}^* = (2n+1)\frac{\widehat{c_{n+1}}}{c}.$$

Also:

$$S = \delta_3 r^2 + 5i\delta_5 r^4 c_2^* + 9i_1\delta_7 r^6 c_4^* + 13i_2\delta_9 r^8 c_6^* \dots$$

$$T = \delta_3 r^2 + 5i\delta_5 r^4 \frac{\widehat{c_3}}{c} + 9i_1\delta_7 r^6 \frac{\widehat{c_5}}{c} + 13i_2\delta_9 r^8 \frac{\widehat{c_7}}{c} \dots$$

Für einen Ort auf der Erdoberfläche setzt man

$$\begin{aligned} &= 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8 \dots \\ r^a &= 1 - \gamma_1 (-n)c^2 + \gamma_2 (-n)c^4 - \gamma_3 (-n)c^6 + \gamma_4 (-n)c^8 \dots \end{aligned}$$

und entwickelt hienach die Glieder $V_0 V_2 V_4 \dots A_0 A_2 A_4 \dots B_0 B_2 B_4 \dots$, welche nur die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ und die Dichtigkeitszahlen $i_1 i_2 i_3 \dots$ enthalten:

$$V = V_0 + V_2 c^2 + V_4 c^4 + V_6 c^6 + V_8 c^8 \dots$$

$$A = A_0 + A_2 c^2 + A_4 c^4 + A_6 c^6 + A_8 c^8 \dots$$

$$\frac{B}{cc'} = B_0 + B_2 c^2 + B_4 c^4 + B_6 c^6 + B_8 c^8 \dots$$

Die Glieder von V und A sind in den Verzeichnissen 9. und 10. durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausgedrückt. Es ist unnöthig, die Glieder von B besonders zu berechnen, da sie aus denen von V und A gefunden werden können. Es ist nämlich

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) \frac{dr}{dc} + \left(\frac{dV}{dc}\right) = \frac{dV}{dc},$$

also

$$-A \frac{dr}{dc} - B \frac{r}{c'} = 2V_2 c + 4V_4 c^3 + 6V_6 c^5 \dots$$

$$A(2\alpha_1 - 4\alpha_2 c^2 \dots) - \frac{B}{cc'}(1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 \dots) = 2V_2 + 4V_4 c^2 \dots$$

Zur unmittelbaren Bestimmung der Glieder von B ist also

$$2\alpha_1 A_0 - B_0 = 2V_2,$$

$$2\alpha_1 A_2 - 4\alpha_2 A_0 - B_2 + \alpha_1 B_0 = 4V_4,$$

$$2\alpha_1 A_4 - 4\alpha_2 A_2 + 6\alpha_3 A_0 - B_4 + \alpha_1 B_2 - \alpha_2 B_0 = 6V_6$$

u. s. w.

Die durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe an der Erdoberfläche entstehende Schwungkraft sei

unter dem Aequator = D .

In m parallel dem Aequator . . . = Drc' .

In m in der Richtung von r $A_{II} = -Drc'^2 = -\left(\frac{dV_{II}}{dr}\right)$.

In m senkrecht zu r $B_{II} = Drcc' = -\left(\frac{dV_{II}}{dc}\right)\frac{c'}{r}$.

Das Potential der Schwungkraft. $V_{II} = \frac{1}{2} Dr^2 c'^2$.

Das scheinbare Potential $\mathfrak{B} = V + V_{II}$.

Die scheinbare Centralschwere. . $\mathfrak{A} = A + A_{II}$.

Die scheinbare Seitenschwere. . . $\mathfrak{B} = B + B_{II}$.

Es sei die Polhöhe = φ , $\sin \varphi = f$, $\cos \varphi = f'$.

Die Neigung des Halbmessers r gegen den Aequator = ψ

$$\sin \psi = c, \quad \cos \psi = c', \quad \text{tang} (\varphi - \psi) = \Delta.$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\Delta, \quad \Delta = -\frac{c'}{r} \cdot \frac{dr}{dc}.$$

$$\mathfrak{A} \frac{c'}{r} \cdot \frac{dr}{dc} + \mathfrak{B} = 0.$$

$$\mathfrak{A} = -\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right), \quad \mathfrak{B} = -\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dc}\right)\frac{c'}{r},$$

also

$$\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right)\frac{dr}{dc} + \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dc}\right) = 0$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dc} = 0.$$

Das scheinbare Potential \mathfrak{B} muss also von c unabhängig, d. h. für jeden Ort der Erdoberfläche unveränderlich sein. Das Potential V'' der Schwungkraft verschwindet unter dem Pol. Also muss das unveränderliche scheinbare Potential \mathfrak{B} dem Anziehungspotential unter dem Pol gleich sein.

$$\mathfrak{B} = V + \frac{1}{2} Dr^2 c'^2 = V_0 + V_2 + V_4 + V_6 \dots$$

also
$$V = V_0 + V_2 c^2 + V_4 c^4 + V_6 c^6 \dots$$

$$\frac{1}{2} Dr^2 c'^2 = \frac{1}{2} Dr^2 (1 - c^2) = V_2 (1 - c^2) + V_4 (1 - c^4) + V_6 (1 - c^6) \dots$$

also

$$\frac{1}{2} Dr^2 = V_2 + V_4 (1 + c^2) + V_6 (1 + c^2 + c^4) \dots$$

Es sei

$$V_2 + V_4 + V_6 + V_8 \dots = \underline{V_2},$$

$$V_4 + V_6 + V_8 \dots = \underline{V_4}$$

u. s. w.,

so ist

$$\frac{1}{2} Dr^2 = \underline{V_2} + \underline{V_4} c^2 + \underline{V_6} c^4 + \underline{V_8} c^6 \dots$$

wo

$$r^2 = 1 - 2\alpha_1 c^2 + (2\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_1) c^4 \dots$$

Wenn also bei der Umdrehung der Erde um ihre Axe die Oberfläche im Gleichgewicht bleiben soll, so sind folgende Gleichungen zu befriedigen:

$$\frac{1}{2} D = \underline{V_2},$$

$$U_4 = \underline{V_4} + 2\alpha_1 \underline{V_2} = 0,$$

$$U_6 = \underline{V_6} - (2\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_1) \underline{V_2} = 0,$$

$$U_8 = \underline{V_8} + (2\alpha_3 + 2\alpha_1 \alpha_2) \underline{V_2} = 0$$

u. s. w.

Mittels der Gleichungen $U_4 = 0$, $U_6 = 0$, $U_8 = 0$, werden die Dichtigkeitszahlen $i_1 i_2 i_3 \dots$ durch die erste Dichtigkeitszahl i und die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausgedrückt, so dass die scheinbare Schwere an jedem Ort nur von den Grössen $i \alpha_1 \alpha_2 \dots$ abhängt. Nimmt man hierzu noch die erste

Gleichung $\frac{1}{2} D = \underline{V}_2$, so ist die scheinbare Schwere durch $D \alpha_1 \alpha_2 \dots$ bestimmt. Ferner ist das Moment der Schwungkraft

$$Dr = D(1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 \dots) = D_0 + D_2 c^2 + D_4 c^4 \dots$$

$$D_0 = D, \quad D_2 = -\alpha_1 D, \quad D_4 = \alpha_2 D, \quad \text{u. s. w.}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 c^2 + \mathfrak{A}_4 c^4 \dots$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{cc'} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2 c^2 + \mathfrak{B}_4 c^4 \dots$$

$$\mathfrak{A}_0 = A_0 - D_0, \quad \mathfrak{A}_2 = A_2 + D_0 - D_2, \quad \mathfrak{A}_4 = A_4 + D_2 - D_4,$$

$$\mathfrak{B}_0 = B_0 + D_0, \quad \mathfrak{B}_2 = B_2 + D_2, \quad \mathfrak{B}_4 = B_4 + D_4.$$

Die Glieder $D_0 D_2 D_4 \dots$ sind im Verzeichniss 11., $U_4 U_6 U_8 \dots$ im Verzeichniss 12., $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_4 \dots$ im Verzeichniss 13. durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausgedrückt. Die Glieder von \mathfrak{B} besonders zu berechnen ist überflüssig, da sie aus den Gliedern von \mathfrak{A} durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \Delta$ gefunden werden können.

Der Clairautsche Satz.

Die scheinbare Schwere ist

unter dem Aequator $= \mathfrak{A}_0$,

unter dem Pol $= \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_6 \dots = \mathfrak{A}_0 + \underline{\mathfrak{A}_2}$,

die Zunahme der scheinbaren Schwere vom Aequator zum

$$\text{Pol} = \underline{\mathfrak{A}_2}.$$

Die Verhältnisse, welche die Aequatoreal-Schwungkraft D , und die obige Zunahme $\underline{\mathfrak{A}_2}$ zur scheinbaren Aequatoreal-schwere haben, seien h und k , so ist

$$h\mathfrak{M}_0 = D, \quad k\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0.$$

Bleibt man bei dem ersten Bruch α_1 stehen, so ist nach den Verzeichnissen 11. und 17.

$$D = 2\alpha_1(1-i), \quad \mathfrak{M}_2 = \alpha_1(4-5i), \quad \mathfrak{M}_0 = 1 - 3\alpha_1(1-i),$$

also

$$h = 2\alpha_1(1-i), \quad k = \alpha_1(4-5i),$$

hieraus

$$\frac{5}{2}h - k = \alpha_1, \quad 2h - k = \alpha_1 i.$$

Dieser Clairaut'sche Satz ist unvollständig wegen der weggelassenen Glieder $\alpha_2\alpha_3\dots$. Berücksichtigt man die beiden ersten Abplattungsbrüche $\alpha_1\alpha_2$, so ist

$$\frac{5}{2}h - k = \alpha_1 - \frac{9}{7}\alpha_2 + \frac{20}{7}\alpha_1\alpha_1 - \frac{17}{7}\alpha_1\alpha_1 i,$$

$$2h - k = -\frac{3}{7}\alpha_2 + \frac{2}{7}\alpha_1\alpha_1 + (\alpha_1 - \frac{6}{7}\alpha_2 + \frac{22}{7}\alpha_1\alpha_1) i$$

$$- 3\alpha_1\alpha_1 i.$$

Die scheinbare Schwere.

Die scheinbare Schwere ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\sqrt{1+\Delta^2}$$

$$\sqrt{1+\Delta^2} = 1 + \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{8}\Delta^4 = 1 + \Delta_2 c^2 + \Delta_4 c^4 \dots$$

$$\Delta = cc'(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6 \dots),$$

$$\Delta^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_1 c^2 + (-\varepsilon_1 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2) c^4$$

$$+ (-2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_2) c^6 - (2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_2) c^8,$$

$$\Delta^4 = \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 (c^4 - 2c^6 + c^8).$$

Das Verzeichniss der $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$ ausgedrückt durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ist im ersten Artikel gegeben. Hieraus folgt das Verzeichniss 14., welches die Glieder $\Delta_2 \Delta_4$ zuerst durch $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$, dann durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausdrückt.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_2 c^2 + \mathfrak{G}_4 c^4 \dots,$$

so ist

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{M}_0,$$

$$\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_0 \Delta_2,$$

$$\mathfrak{G}_4 = \mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_2 \Delta_2 + \mathfrak{M}_0 \Delta_4$$

u. s. w.

Die Glieder $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_4 \dots$ sind im Verzeichniss 15. durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausgedrückt.

Um die scheinbare Schwere nach Potenzen des Quadrats des Sinus f der scheinbaren Polhöhe φ zu entwickeln, so sei

$$\mathfrak{G} = g_0 + g_2 f^2 + g_4 f^4 + g_6 f^6 \dots$$

$$c^2 = n_0^{(2)} f^2 + n_1^{(2)} f^4 + n_2^{(2)} f^6 \dots$$

$$c^4 = n_0^{(4)} f^4 + n_1^{(4)} f^6 \dots$$

$$c^6 = n_0^{(6)} f^6 \dots$$

u. s. w.

Die Zahlen n sind im Verzeichniss VIII. des ersten Artikels gegeben. Hieraus ist

$$g_0 = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{M}_0,$$

$$g_2 = n_0^{(2)} \mathfrak{G}_2,$$

$$g_4 = n_1^{(2)} \mathfrak{G}_2 + n_0^{(4)} \mathfrak{G}_4,$$

$$g_6 = n_2^{(2)} \mathfrak{G}_2 + n_1^{(4)} \mathfrak{G}_4 + n_0^{(6)} \mathfrak{G}_6,$$

$$g_8 = n_3^{(2)} \mathfrak{G}_2 + n_2^{(4)} \mathfrak{G}_4 + n_1^{(6)} \mathfrak{G}_6 + n_0^{(8)} \mathfrak{G}_8$$

u. s. w.

Die Glieder $g_2 g_4 g_6 \dots$ sind im Verzeichniss 16. durch $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ ausgedrückt.

Die scheinbare Aequatoreal-

schwere ist $\dots \dots \dots \mathfrak{G}_0 = g_0 = \mathfrak{M}_0.$

Die scheinbare und wahre Po-

larschwere ist $\dots \dots \dots \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_2 = g_0 + g_2 = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_2.$

Die Zunahme vom Aequator

zum Pol ist $\dots \dots \dots \mathfrak{G}_2 = g_2 = \mathfrak{M}_2.$

Die Summe \mathfrak{A}_2 als Prüfung der Summen \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{g}_2 ist im Verzeichniss 17.

Sechster Artikel.

Die scheinbare Schwere auf dem elliptischen Sphäroid.

Als besonderer Fall des allgemeinen Sphäroids sei der Umdrehungskörper der Erde, aus elliptischen Schichten bestehend, angenommen. Jede Schicht habe die Dichtigkeit = ρ . Die einzelnen Schichten seien einander ähnlich wie bei dem allgemeineren Sphäroid. Der Aequatorealhalbmesser = 1, der Polarhalbmesser = b , die Abplattung $1 - b = \alpha$, der Excentricitätswinkel = e , $\operatorname{tg} e = \lambda$, $\cos e = b = 1 - \alpha$.

Die Gleichung des elliptischen Meridians ist

$$1 = r^2 (1 + \lambda^2 c^2) = b^2 (1 + \lambda^2).$$

Allgemein ist

$$r = 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 \dots$$

Bei dem elliptischen Meridian ist also

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \lambda^2,$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{8} \lambda^4, \quad \alpha_1 \alpha_1 = \frac{2}{8} \lambda^4,$$

$$\alpha_3 = \frac{5}{16} \lambda^6, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{3}{16} \lambda^6, \quad \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 = \frac{2}{16} \lambda^6,$$

$$\alpha_4 = \frac{35}{128} \lambda^8, \quad \alpha_1 \alpha_3 = \frac{20}{128} \lambda^8, \quad \alpha_2 \alpha_2 = \frac{18}{128} \lambda^8,$$

$$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 = \frac{12}{128} \lambda^8, \quad \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 = \frac{8}{128} \lambda^8.$$

Aus den Verzeichnissen für das allgemeine Sphäroid ergeben sich also die entsprechenden Verzeichnisse für das elliptische Sphäroid, wenn man in jenen die Zahlen der vier Abtheilungen multiplicirt mit

$$\frac{1}{2} (1), \frac{1}{8} (3, 2), \frac{1}{16} (5, 3, 2), \frac{1}{128} (35, 20, 18, 12, 8).$$

Berechnet man nun auch die Verzeichnisse für das elliptische Sphäroid auf unmittelbarem Wege, so ergibt sich dadurch eine Prüfung. Auf solche Art sind in den Verzeichnissen des allgemeinen Sphäroids sämtliche Zahlen geprüft worden, so dass sie als sicher gelten können.

In dem allgemeinen Sphäroid ist

$$r^n = 1 - \gamma_1^{(n)} c^2 + \gamma_2^{(n)} c^4 \dots$$

$$r^n = 1 - \gamma_1^{(-n)} c^2 + \gamma_2^{(-n)} c^4 \dots$$

Es sei

$$- \frac{n}{2} = v, \quad \frac{n}{2} = \omega.$$

Die Binomialzahlen

$$v, v, v, \dots \quad \omega, \omega, \omega, \dots,$$

so ist beim elliptischen Meridian

$$r^n = 1 + v \lambda^2 c^2 + v^2 \lambda^4 c^4 + v^3 \lambda^6 c^6 \dots$$

$$r^n = 1 + \omega \lambda^2 c^2 + \omega^2 \lambda^4 c^4 + \omega^3 \lambda^6 c^6 \dots$$

$$- \gamma_1^{(n)} = v \lambda^2, \quad \gamma_2^{(n)} = v^2 \lambda^4, \quad - \gamma_3^{(n)} = v^3 \lambda^6 \dots$$

$$- \gamma_1^{(-n)} = \omega \lambda^2, \quad \gamma_2^{(-n)} = \omega^2 \lambda^4, \quad - \gamma_3^{(-n)} = \omega^3 \lambda^6 \dots$$

$$\delta_3 = b, \quad \delta_5 = - \frac{1}{2} \lambda^2 b^3, \quad \delta_7 = \frac{7}{2 \cdot 4} \lambda^4 b^5,$$

$$\delta_9 = - \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \lambda^6 b^7, \quad \delta_{11} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \lambda^8 b^9$$

u. s. w.

Wenn n grade, so ist

$$\gamma_1^{(2)} = \lambda^2, \quad \gamma_2^{(2)} = \lambda^4, \quad \gamma_3^{(2)} = \lambda^6 \text{ u. s. w.},$$

$$\gamma_2^{(-2)} = \gamma_3^{(-2)} = \gamma_4^{(-2)} \dots = 0,$$

$$\gamma_3^{(-4)} = \gamma_4^{(-4)} = \gamma_5^{(-4)} \dots = 0.$$

Also

$$\delta_0 = 1 - \frac{1}{3} \lambda^2 + \frac{1}{5} \lambda^4 - \frac{1}{7} \lambda^6 \dots = \frac{e}{\lambda},$$

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_6 = 0, \quad \delta_8 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Das Anziehungspotential einer einzelnen elliptischen Schicht auf irgend einen innern Ort ist also unveränderlich

$$V = \delta_0 = \frac{e}{\lambda}.$$

Auch ist die entsprechende Anziehung = 0, weil $\delta_4 \delta_6 \dots$ verschwinden.

Das Anziehungspotential der elliptischen Schicht auf einen äussern Ort ist, wenn $br = u$,

$$V = u - \frac{1}{2} \lambda^2 u^3 \widehat{c}_2 + \frac{7}{2.4} \lambda^4 u^5 \widehat{c}_4 - \frac{9.11}{2.4.6} \lambda^6 u^7 \widehat{c}_6 \dots$$

Dieses Potential verschwindet für einen unendlich weit entfernten Ort, da für diesen $r = 0$.

Für einen Ort unter dem Pol ist $br = 1$

$$\widehat{c}_2 = \frac{2}{3}, \quad \widehat{c}_4 = \frac{2.4}{5.7}, \quad \widehat{c}_6 = \frac{2.4.6}{7.9.11} \quad \text{u. s. w.}$$

also

$$V = 1 - \frac{1}{3} \lambda^2 + \frac{1}{5} \lambda^4 - \frac{1}{7} \lambda^6 \dots = \frac{e}{\lambda}.$$

Für einen Ort unter dem Aequator ist

$$r = 1, \quad \lambda b = \sin e, \quad c = 0,$$

$$\widehat{c}_2 = -\frac{1}{3}, \quad \widehat{c}_4 = \frac{1.3}{5.7}, \quad \widehat{c}_6 = -\frac{1.3.5}{7.9.11} \quad \text{u. s. w.,}$$

also

$$V = \frac{1}{\lambda} \left[\sin e + \frac{1.1}{3.2} \sin^3 e + \frac{1}{5} \cdot \frac{1.3}{2.4} \sin^5 e + \frac{1}{7} \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin^7 e \dots \right],$$

$$\text{d. h. } V = \frac{e}{\lambda}.$$

Das Anziehungspotential einer elliptischen Schicht auf einen Ort seiner Oberfläche hat also gleichen Werth unter dem

Pol wie unter dem Aequator, ist demnach für alle Oerter der Oberfläche unveränderlich. Diess bestätigt sich auch dadurch, dass bei der elliptischen Gestalt die Glieder $V_2 V_4 V_6 \dots$ verschwinden, wenn $i = i_1 = i_2 \dots = 1$ gesetzt werden. Das Gleichgewicht kann also nur für eine nicht um ihre Axe schwingende einzelne elliptische Schicht bestehen.

Wenn man dieselben Werthe von $\delta_3 \delta_5 \dots$ und von $\widehat{c_2 c_4} \dots$ in den obigen Ausdruck von A setzt, wobei alle $i = 1$, so ergibt sich die Anziehung der elliptischen Schicht auf einen Ort ihrer Oberfläche, unter dem Pol $A = b$, unter dem Aequator $A = 1$.

Für die Anziehung des ganzen elliptischen Umdrehungskörpers der Erde auf einen äussern Ort giebt die allgemeine Auflösung folgende Ausdrücke. Es seien Sc' und Tc die dem Aequator und der Erdaxe parallelen Kräfte, $bu = u$, $Vu^2 = \mathfrak{B}$, $Sbu = \mathfrak{C}$, $Tbu = \mathfrak{I}$, so ist

$$\mathfrak{B} = u^3 - \frac{1}{2} i \lambda^2 u^5 \widehat{c_2} + \frac{7}{2 \cdot 4} i_1 \lambda^4 u^7 \widehat{c_4} - \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} i_2 \lambda^6 u^9 \widehat{c_6} \dots$$

$$\mathfrak{C} = u^3 - \frac{5}{2} i \lambda^2 u^5 c_2^* + \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} i_1 \lambda^4 u^7 c_4^* - \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} i_2 \lambda^6 u^9 c_6^* \dots$$

$$\mathfrak{I} = u^3 - \frac{5}{2} i \lambda^2 u^5 \frac{\widehat{c_3}}{c} + \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} i_1 \lambda^4 u^7 \frac{\widehat{c_5}}{c} - \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} i_2 \lambda^6 u^9 \frac{\widehat{c_7}}{c} \dots$$

Für einen Ort der Erdoberfläche, wo

$$u^2 = \frac{1 + \lambda^2 c^2}{1 + \lambda^2},$$

sei

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2 c^2 + \mathfrak{B}_4 c^4 \dots$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_2 c^2 + \mathfrak{C}_4 c^4 \dots$$

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_2 c^2 + \mathfrak{I}_4 c^4 \dots$$

Diese Glieder sind in den Verzeichnissen 18., 19., 20. angegeben.

Unter dem Aequator haben \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{I} die Werthe der Anfangsglieder, für welche man folgende bemerkenswerthe Ausdrücke findet, die von den Binomialzahlen von 1, 2, 3, 4... abhängen. Es sei

$$\frac{1}{3} i = p, \quad \frac{1}{5} i_1 = p_1, \quad \frac{1}{7} i_2 = p_2, \quad \frac{1}{9} i_3 = p_3 \dots$$

$$\frac{1}{9} i = q, \quad \frac{1}{25} i_1 = q_1, \quad \frac{1}{49} i_2 = q_2, \quad \frac{1}{81} i_3 = q_3 \dots$$

— $\frac{3}{2} = v$, davon die Binomialzahlen $v^1, v^2, v^3 \dots$, so ist

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_0 = & 1 + v\lambda^2(1-q) + v^2\lambda^4(1-2q+q_1) + v^3\lambda^6(1-3q+3q_1-q_2) \\ & + v^4\lambda^8(1-4q+6q_1-4q_2+q_3) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_0 = & 1 + v\lambda^2(1-p) + v^2\lambda^4(1-2p+p_1) + v^3\lambda^6(1-3p+3p_1-p_2) \\ & + v^4\lambda^8(1-4p+6p_1-4p_2+p_3) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_0 = & 1 + v\lambda^2(1-i) + v^2\lambda^4(1-2i+i_1) + v^3\lambda^6(1-3i+3i_1-i_2) \\ & + v^4\lambda^8(1-4i+6i_1-4i_2+i_3). \end{aligned}$$

Unter dem Pol verwandeln sich \mathbb{W} , \mathbb{S} , \mathbb{I} in die Summen $\underline{\mathbb{W}}$, $\underline{\mathbb{S}}$, $\underline{\mathbb{I}}$:

$$\underline{\mathbb{W}} = 1 - \frac{1}{3} i\lambda^2 + \frac{1}{5} i_1\lambda^4 - \frac{1}{7} i_2\lambda^6 + \frac{1}{9} i_3\lambda^8 \dots$$

$$\underline{\mathbb{S}} = 1 - 2i\lambda^2 + 3i_1\lambda^4 - 4i_2\lambda^6 + 5i_3\lambda^8 \dots$$

$$\underline{\mathbb{I}} = 1 - i\lambda^2 + i_1\lambda^4 - i_2\lambda^6 + i_3\lambda^8 \dots$$

Aus den im Verzeichniss 12. für das allgemeine Sphäroid gegebenen Werthen von $U_4 U_6 U_8 \dots$, welche für das Gleichgewicht auf der Oberfläche bei der Axendrehung verschwinden müssen, sind diese Werthe für das elliptische Sphäroid in dem Verzeichniss 21. angezeigt.

Wenn diese $U_4 U_6 U_8 \dots$ für jede Abplattung verschwinden sollen, so müssen die in ihnen enthaltenen Koeffizienten der einzelnen Potenzen von λ^2 verschwinden. Dieses geschieht nur in zwei Fällen. Der erste Fall, wo $i = i_1 = i_2 \dots = 1$, betrifft die einzelne elliptische Schicht, und es ist dann auch $D = 0$. Für den ganzen Erdkörper verschwinden die Koeffizienten nur dann, wenn alle Schichten gleiche Dichtigkeit haben, wo

$$i = \frac{3}{5}, \quad i_1 = \frac{3}{7}, \quad i_2 = \frac{3}{9}, \quad i_3 = \frac{3}{11}.$$

Hieraus folgt der Satz:

«Bei einem um seine Axe schwingenden Umdrehungskörper, dessen Oberfläche im Gleichgewicht ist, kann der Meridian nur dann elliptisch sein, wenn alle Schichten des Körpers eine gleiche Dichtigkeit haben.»

Aus den Verzeichnissen 19., 20. ergibt sich, dass in dem Falle gleicher Dichtigkeit in allen Erdschichten auch sämtliche Glieder $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_6 \dots \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_4 \mathfrak{I}_6 \dots$ verschwinden, so dass alsdann

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}$$

unveränderlich für alle auf der Oberfläche des gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids befindlichen Oerter. Da $Xb^2 = \mathfrak{S}rc'$, $Yb^2 = \mathfrak{I}rc$, so ergibt sich hieraus der Satz von Maclaurin:

«Die Anziehungen, welche das gleichförmig dichte elliptische Umdrehungssphäroid auf die Oerter der Oberfläche ausübt, verhalten sich parallel dem Aequator, wie die Abstände von der Axe, parallel der Axe, wie die Abstände vom Aequator.»

In diesem Falle haben \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{S} , \mathfrak{I}_0 und \mathfrak{I} folgende gemeinsame Werthe \mathfrak{S} und \mathfrak{I}

$$\mathfrak{S} = 1 - \frac{6}{5} \lambda^2 + \frac{9}{7} \lambda^4 - \frac{12}{9} \lambda^6 \dots = \frac{3}{2\lambda^3} \left(e - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right),$$

$$\mathfrak{I} = 1 - \frac{3}{5} \lambda^2 + \frac{3}{7} \lambda^4 - \frac{3}{9} \lambda^6 \dots = \frac{3}{\lambda^3} (\lambda - e),$$

also

$$\frac{S}{3r} = \frac{e(1 + \lambda^2) - \lambda}{2\lambda^3}, \quad \frac{T}{3r} = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} (\lambda - e),$$

übereinstimmend mit Laplace *Méc. cel. Vol. II. Liv. III.* Diese Auflösung von Laplace lässt sich noch folgendermaassen ergänzen:

Es sei

$$\mu = \frac{\lambda^2}{3.5} - \frac{\lambda^4}{5.7} + \frac{\lambda^6}{7.9} - \frac{\lambda^8}{9.11} \dots$$

so ist

$$\frac{S}{r} = 1 - 3\mu, \quad \frac{T}{r} = 1 + 6\mu, \quad 2S + T = 3r,$$

$$\frac{A}{r} = 1 + 9\mu \widehat{c}_2, \quad \frac{B}{rec} = 9\mu,$$

$$\widehat{V} = \widehat{\mathfrak{B}} = 1 - 3\mu,$$

$$\mathfrak{B}_0 = 1 - \frac{7}{5} \lambda^2 + \frac{58}{35} \lambda^4 - \frac{194}{105} \lambda^6 \dots$$

$$V_0 = \mathfrak{B}_0(1 + \lambda^2) = 1 - \frac{6}{15} \lambda^2 + \frac{9}{35} \lambda^4 - \frac{12}{63} \lambda^6 \dots = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{e\lambda^2 + \lambda - e}{\lambda^3} \right),$$

$$\frac{1}{2} D = \widehat{V}_2 = \widehat{V} - V_0 = \frac{3}{15} \lambda^2 - \frac{6}{35} \lambda^4 + \frac{9}{63} \lambda^6 - \frac{12}{99} \lambda^8 \dots$$

$$\frac{2}{3} D \lambda^3 = e\lambda^2 - 3(\lambda - e),$$

wahre Aequatorealschwere $S_0 = 1 - 3\mu$,

wahre Polarschwere $P = \frac{1 + 6\mu}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$.

Wenn h und k dieselbe Bedeutung haben, wie im fünften Artikel bei dem Beweise des Clairaut'schen Satzes, so ist

$$\frac{h}{1 + h} = \frac{D}{S_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e\lambda^2 - 3(\lambda - e)}{(1 - 3\mu)\lambda^3},$$

$$\frac{1 + k}{1 + h} = \frac{P}{S_0} = \frac{1 + 6\mu}{(1 - 3\mu)\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2h = \frac{e\lambda^2}{\lambda - e} - 3, \quad (1 + k)^2 = 1 + \lambda^2.$$

Man erhält also die Abplattung entweder aus h oder aus k

$$\alpha = \frac{5}{4} h - \frac{345}{324} h^2 + \frac{11765}{6272} h^3 \dots$$

$$\alpha = k - k^2 + k^3 - k^4 \dots$$

Zwischen h und k ergibt sich eine Gleichung durch Ausschcheidung von λ^2 .

$$\frac{5}{2} h = 2k - \frac{1}{35} k^2 + \frac{4}{175} k^3 - \frac{1257}{67375} k^4 \dots$$

Der Satz von Ivory.

Der Ort m liege ausserhalb des elliptischen Sphäroids (ab) und auf der Oberfläche des Sphäroids (a_1b_1) . Eben so liege der Ort M auf der Oberfläche des Sphäroids (ab) und innerhalb des Sphäroids (a_1b_1) . Diese beiden Sphäroide haben einerlei Mitte und Brennpunkte, also gleiche Brennweite

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}.$$

Auch haben sie einerlei elliptischen Winkel, dessen Sinus $s = \frac{rc}{b_1} = \frac{RC}{b}$, Kosinus $s' = \frac{rc'}{a_1} = \frac{RC'}{a}$.

Das Sphäroid (ab) hat auf den äussern Ort m die Anziehungen XY , das Sphäroid (a_1b_1) auf den innern Ort M die Anziehungen X_1Y_1 , parallel dem Aequator und der Axe. Bei gleichmässiger und gleicher Dichtigkeit beider Sphäroide ist nach Ivory:

$$\text{I. } \frac{X}{ab} = \frac{X_1}{a_1b_1}, \quad \frac{Y}{aa} = \frac{Y_1}{a_1a_1}.$$

Der Ort M liege auf der Oberfläche eines dem Sphäroid (a_1b_1) ähnlichen und ähnlich gestellten Sphäroids $(a_1'b_1')$, welches auf diesen Ort die Anziehungen $X_1'Y_1'$ hat, so ist

$$X_1 = X_1' = \frac{a_1'^2}{b_1'^2} RC' \mathfrak{S} = \frac{a_1'^2}{b_1'^2} RC' \mathfrak{S},$$

$$Y_1 = Y_1' = \frac{a_1'^2}{b_1'^2} RC \mathfrak{X} = \frac{a_1'^2}{b_1'^2} RC \mathfrak{X}.$$

\mathfrak{S} und \mathfrak{X} sind die oben gefundenen Ausdrücke, in denen λ durch $\lambda_1' = \lambda_1 = \frac{f}{b_1}$ ersetzt wird.

Vermöge des Satzes I. und der Gleichheit des elliptischen Sinus s und Kosinus s' ist also die Anziehung des Sphäroids (ab) auf den äussern Ort m :

$$\text{II. } \begin{cases} X = a^2 b r c' \left(\frac{1}{b_1^3} - 2i \frac{f^2}{b_1^5} + 3i_1 \frac{f^4}{b_1^7} - 4i_2 \frac{f^6}{b_1^9} \dots \right) \\ Y = a^2 b r c \left(\frac{1}{b_1^3} - i \frac{f^2}{b_1^5} + i_1 \frac{f^4}{b_1^7} - i_2 \frac{f^6}{b_1^9} \dots \right), \end{cases}$$

wo

$$i = \frac{3}{5}, \quad i_1 = \frac{3}{7}, \quad i_2 = \frac{3}{9} \dots$$

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{f^2}{r^3} c'^2 - \frac{7}{2.4} \frac{f^4}{r^5} c'^2 \frac{c_3^*}{c} + \frac{9.11}{2.4 \cdot 6} \frac{f^6}{r^7} c'^2 \frac{c_5^*}{c} \dots$$

Der Satz von Ivory giebt also ähnliche Ausdrücke für den äussern Ort wie für den Ort der Oberfläche, wo $b_1 = b$ ist. Die oben gefundenen Ausdrücke geben für den äussern Ort

$$\text{III. } \begin{cases} X = a^2 b r c' \left(\frac{1}{r^3} - \frac{5}{2} i \frac{f^2}{r^5} c_2^* + \frac{7.9}{2.4} i_1 \frac{f^4}{r^7} c_4^* \dots \right), \\ Y = a^2 b r c \left(\frac{1}{r^3} - \frac{5}{2} i \frac{f^2 c_3}{r^5 c} + \frac{7.9}{2.4} i_1 \frac{f^4 c_5}{r^7 c} \dots \right). \end{cases}$$

Die Uebereinstimmung von II. und III. folgt aus dem obigen Werth von b_1 .

VERZEICHNISS.

1) Indicialzahlen = $f_x^{(n)}$.

x	0	2	4	6	8	10	12
0	1						
2	— 1	1					
4	3	— 6	1				
6	— 5	5	— 15	1			
8	— 231	11	— 11	1			
10	7	28	14	— 28	1		
12	— 1287	143	13	— 15	45	1	
	63	315	— 210	630	— 19		
	— 46189	4199	— 323	323	— 19	1	
	33	198	2475	660	495	— 66	
	— 96577	7429	7429	— 437	161	— 23	1

4

x n	1	3	5	7	9	11	13
1	1						
3	— $\frac{3}{5}$	1					
5	$\frac{5}{21}$	— $\frac{10}{9}$	1				
7	— $\frac{35}{429}$	$\frac{105}{143}$	— $\frac{21}{13}$	1			
9	$\frac{63}{2431}$	— $\frac{84}{221}$	$\frac{126}{85}$	— $\frac{36}{17}$	1		
11	— $\frac{33}{4199}$	$\frac{55}{323}$	— $\frac{330}{323}$	$\frac{330}{133}$	— $\frac{55}{21}$	1	
13	$\frac{429}{185725}$	— $\frac{2574}{37145}$	$\frac{1287}{2185}$	— $\frac{1716}{805}$	$\frac{429}{115}$	— $\frac{78}{25}$	1

2) Subindicialzahlen = $l_x^{(n)}$.

x n	0	2	4	6	8	10	12
0	1						
2	— $\frac{1}{5}$	1					
4	$\frac{1}{21}$	— $\frac{2}{3}$	1				
6	— $\frac{5}{429}$	$\frac{45}{143}$	— $\frac{15}{13}$	1			
8	$\frac{7}{2431}$	— $\frac{28}{221}$	$\frac{14}{17}$	— $\frac{28}{17}$	1		
10	— $\frac{3}{4199}$	$\frac{15}{323}$	— $\frac{150}{323}$	$\frac{30}{19}$	— $\frac{15}{7}$	1	
12	$\frac{33}{185725}$	— $\frac{594}{37145}$	$\frac{99}{437}$	— $\frac{132}{115}$	$\frac{297}{115}$	— $\frac{66}{25}$	1

x n	1	3	5	7	9	11	13
1	1						
3	$\frac{3}{7}$	1					
5	$\frac{5}{33}$	$\frac{10}{11}$	1				
7	$\frac{7}{143}$	$\frac{13}{84}$	$\frac{7}{5}$	1			
9	$\frac{9}{63}$	$\frac{84}{323}$	$\frac{378}{323}$	$\frac{36}{19}$	1		
11	$\frac{11}{33}$	$\frac{825}{7429}$	$\frac{330}{330}$	$\frac{330}{161}$	$\frac{55}{23}$	1	
13	$\frac{13}{143}$	$\frac{286}{6555}$	$\frac{143}{345}$	$\frac{572}{345}$	$\frac{143}{45}$	$\frac{26}{9}$	1

3) Umgestellte Indicialzahlen = $m_x^{(n)}$.

x n	0	2	4	6	8	10	12	14
0	1							
2	$\frac{1}{3}$	1						
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{7}$	1					
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{15}{11}$	1				
8	$\frac{1}{9}$	$\frac{33}{75}$	$\frac{143}{210}$	$\frac{28}{42}$	1			
10	$\frac{1}{11}$	$\frac{143}{143}$	$\frac{210}{143}$	$\frac{42}{17}$	$\frac{45}{19}$	1		
12	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{315}{221}$	$\frac{924}{323}$	$\frac{495}{133}$	$\frac{66}{23}$	1	
14	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{441}{323}$	$\frac{1001}{323}$	$\frac{2145}{437}$	$\frac{3003}{575}$	$\frac{91}{27}$	1

x n	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1							
3	$\frac{3}{5}$	1						
5	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{9}$	1					
7	$\frac{3}{9}$	$\frac{35}{33}$	$\frac{21}{13}$	1				
9	$\frac{3}{11}$	$\frac{140}{143}$	$\frac{126}{65}$	$\frac{36}{17}$	1			
11	$\frac{3}{13}$	$\frac{35}{39}$	$\frac{462}{221}$	$\frac{990}{323}$	$\frac{55}{21}$	1		
13	$\frac{3}{15}$	$\frac{14}{17}$	$\frac{693}{323}$	$\frac{8580}{2261}$	$\frac{715}{161}$	$\frac{78}{25}$	1	
15	$\frac{3}{17}$	$\frac{245}{323}$	$\frac{693}{323}$	$\frac{32175}{7429}$	$\frac{143}{23}$	$\frac{91}{15}$	$\frac{105}{29}$	1

4) Umgestellte Subindicialzahlen = $n_x^{(n)}$.

x n	0	2	4	6	8	10	12
0	1						
2	$\frac{1}{5}$	1					
4	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{3}$	1				
6	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{15}{13}$	1			
8	$\frac{1}{33}$	$\frac{140}{429}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{28}{17}$	1		
10	$\frac{3}{143}$	$\frac{35}{143}$	$\frac{210}{221}$	$\frac{630}{323}$	$\frac{15}{7}$	1	
12	$\frac{1}{65}$	$\frac{42}{221}$	$\frac{3465}{4199}$	$\frac{660}{323}$	$\frac{495}{161}$	$\frac{66}{25}$	1

x n	1	3	5	7	9	11	13
1	1						
3	$\frac{3}{7}$	1					
5	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{11}$	1				
7	$\frac{7}{33}$	$\frac{105}{143}$	$\frac{7}{5}$	1			
9	$\frac{15}{143}$	$\frac{84}{143}$	$\frac{126}{85}$	$\frac{36}{19}$	1		
11	$\frac{1}{13}$	$\frac{105}{221}$	$\frac{462}{323}$	$\frac{330}{133}$	$\frac{55}{23}$	1	
13	$\frac{1}{17}$	$\frac{126}{323}$	$\frac{429}{323}$	$\frac{4290}{3059}$	$\frac{429}{115}$	$\frac{26}{9}$	1

5) Sphärische Indicialzahlen = $f_x^{(n)}$.

x n	0	2	4	6	8	10	12
0	1						
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$					
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{35}{8}$				
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{525}{88}$	$\frac{231}{16}$			
8	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{3675}{572}$	$\frac{539}{20}$	$\frac{6435}{128}$		
10	$\frac{1}{11}$	$\frac{225}{286}$	$\frac{3675}{572}$	$\frac{4851}{136}$	$\frac{289575}{2432}$	$\frac{46189}{256}$	
12	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11025}{1768}$	$\frac{53361}{1292}$	$\frac{3185325}{17024}$	$\frac{1524237}{2944}$	$\frac{676039}{1024}$

x u	1	3	5	7	9	11	13
1	1						
3	3	5					
5	7	9	63				
7	3	175	1323	429			
9	3	350	3969	3864	12155		
11	3	175	14553	212355	668525	88179	
13	3	35	43659	920205	8690825	3438981	1300075
	15	17	2584	9044	20608	3200	1024

6) Sphärische Subindicialzahlen = $\delta_x^{(n-1)}$.

x n	0	2	4	6	8	10	12
1	3						
3	6	15					
5	3	25	105				
7	3	175	2205	3003			
9	3	525	1323	27027	21879		
11	3	175	24255	1486485	401115	323323	
13	3	105	945945	920205	15643485	12609597	2414425
	30	68	67184	10336	41216	12800	2048

x n	1	3	5	7	9	11	13
2	1						
4	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{2}$					
6	$\frac{5}{7}$	105	99				
8	20	735	231	715			
10	33	143	10	16			
	75	735	2079	32175	20995		
12	143	143	68	304	128		
	6	2205	22869	353925	692835	156009	
14	13	442	646	2128	1472	256	
	7	3087	99099	1533675	12609597	4732273	2340135
	17	646	2584	6992	14720	2304	1024

7) Potentialzahlen = p.

n''	1			3			5				7				
n	3	5		7	4		9	6		11	8		8		
y	0	0	2	0	2	4	0	2	4	6	0	2	4	6	8
w	2	4	2	6	4	2	8	6	4	2	10	8	6	4	2
x															
u															
0	1	1	$\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{1}{5}$	1	5	3	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{28}{3}$	14	4	$\frac{1}{9}$
1	3	1	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{35}$	1	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{35}$	$-\frac{1}{105}$	1	4	$\frac{18}{7}$	$\frac{4}{21}$	$-\frac{1}{231}$
2	5	1	$-\frac{3}{7}$	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{21}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{1}{231}$	1	$\frac{12}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{231}$	$\frac{1}{1001}$
3	7	1	$-\frac{5}{9}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{33}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{5}{429}$	1	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{33}$	$\frac{4}{429}$	$-\frac{1}{1287}$
4	9	1	$-\frac{7}{11}$	1	$-\frac{10}{11}$	$\frac{35}{143}$	1	$-\frac{9}{11}$	$\frac{45}{143}$	$-\frac{7}{143}$	1	$-\frac{4}{11}$	$\frac{18}{143}$	$-\frac{4}{143}$	$\frac{7}{2431}$
5	11	1	$-\frac{9}{13}$	1	$-\frac{14}{13}$	$\frac{21}{65}$	1	$-\frac{15}{13}$	$\frac{7}{13}$	$-\frac{21}{221}$	1	$-\frac{12}{13}$	$\frac{6}{13}$	$-\frac{28}{221}$	$\frac{63}{4199}$
6	13	1	$-\frac{11}{15}$	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{33}{85}$	1	$-\frac{7}{5}$	$\frac{63}{85}$	$-\frac{231}{1615}$	1	$-\frac{20}{17}$	$\frac{14}{17}$	$-\frac{84}{323}$	$\frac{11}{323}$

8) Abplattungsbriiche vierter Reihe $\equiv \delta$.

	δ_3	δ_5	δ_7	δ_9	δ_{11}	δ_0	δ_4	δ_6	δ_8
1	1	-1				$1 \frac{2}{3}$			
α_1	-1					$-\frac{2}{3}$			
α_2	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{9}$			$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$		
$\alpha_1 \alpha_1$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{21}{9}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{9}$		
α_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{35}{33}$	$\frac{9}{13}$		$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{4}{13}$	
$\alpha_1 \alpha_2$	$\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{210}{33}$	$\frac{72}{13}$		$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{33}$	$\frac{20}{13}$	
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	$\frac{1}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{175}{33}$	$\frac{84}{13}$		$\frac{1}{7}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{20}{13}$	
α_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{490}{429}$	$\frac{252}{195}$	$\frac{41}{17}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{140}{429}$	$\frac{112}{195}$	$\frac{6}{17}$
$\alpha_1 \alpha_3$	$\frac{2}{3}$	$\frac{80}{33}$	$\frac{2940}{429}$	$\frac{2016}{195}$	$\frac{110}{17}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{420}{429}$	$\frac{560}{195}$	$\frac{42}{17}$
$\alpha_2 \alpha_2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{429}{1470}$	$\frac{195}{0108}$	$\frac{17}{55}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{429}{210}$	$\frac{195}{280}$	$\frac{17}{21}$
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{429}{7350}$	$\frac{195}{7056}$	$\frac{17}{495}$		$\frac{429}{840}$	$\frac{195}{1680}$	$\frac{17}{168}$
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{33}{20}$	$\frac{429}{429}$	$\frac{195}{3528}$	$\frac{17}{330}$		$\frac{429}{350}$	$\frac{195}{980}$	$\frac{17}{126}$
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$	\dots	$\frac{33}{33}$	$\frac{429}{429}$	$\frac{195}{195}$	$\frac{17}{17}$	\dots	$\frac{429}{429}$	$\frac{195}{195}$	$\frac{17}{17}$

9) Glieder des Anziehungspotentials V.

$(V_0 - 1).$

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	— 1	$\frac{1}{3}$			
α_2	$\frac{3}{5}$	— $\frac{2}{7}$	$\frac{1}{15}$		
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{4}{7}$	$\frac{3}{15}$		
α_3	— $\frac{3}{7}$	$\frac{5}{21}$	— $\frac{1}{11}$	$\frac{15}{1001}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{6}{7}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{120}{1001}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{1}{7}$	$\frac{10}{21}$	— $\frac{5}{11}$	$\frac{140}{1001}$	
α_4	$\frac{3}{9}$	— $\frac{20}{99}$	$\frac{14}{143}$	— $\frac{4}{143}$	$\frac{7}{1989}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{6}{9}$	— $\frac{80}{99}$	$\frac{84}{143}$	— $\frac{32}{143}$	$\frac{70}{1989}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{3}{9}$	— $\frac{40}{99}$	$\frac{42}{143}$	— $\frac{16}{143}$	$\frac{35}{1989}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{3}{9}$	— $\frac{120}{99}$	$\frac{210}{143}$	— $\frac{112}{143}$	$\frac{315}{1989}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{20}{99}$	$\frac{70}{143}$	— $\frac{56}{143}$	$\frac{210}{1989}$
			$\frac{143}{143}$	— $\frac{143}{143}$	$\frac{1989}{1989}$

V_2

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	1	— 1			
α_2	$\frac{6}{7}$	— $\frac{2}{3}$		
$\alpha_1\alpha_1$	— 1	$\frac{19}{7}$	— $\frac{6}{3}$		
α_3	$\frac{5}{7}$	$\frac{210}{231}$	— $\frac{45}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{3}{5}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{1337}{231}$	— $\frac{360}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{1281}{231}$	— $\frac{420}{143}$	
α_4	$\frac{140}{231}$	— $\frac{420}{429}$	$\frac{420}{715}$	— $\frac{420}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	— $\frac{3}{7}$	$\frac{725}{231}$	— $\frac{2715}{429}$	$\frac{3435}{715}$	— $\frac{4200}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{280}{231}$	— $\frac{1260}{429}$	$\frac{1680}{715}$	— $\frac{2100}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{6}{7}$	$\frac{1500}{231}$	— $\frac{7470}{429}$	$\frac{12360}{715}$	— $\frac{18900}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{1}{7}$	$\frac{470}{231}$	— $\frac{3075}{429}$	$\frac{6580}{715}$	— $\frac{12600}{3315}$
		$\frac{231}{231}$	— $\frac{429}{429}$	$\frac{715}{715}$	— $\frac{3315}{3315}$

V_4

		i	i_1	i_2	i_3
α_2	— 1	$\frac{7}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	1	— 3	$\frac{21}{9}$		
α_3	$\frac{35}{33}$	$\frac{135}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	1	$\frac{11}{7}$	$\frac{320}{33}$	$\frac{1080}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 1	$\frac{50}{7}$	$\frac{505}{33}$	$\frac{1260}{143}$	
α_4	$\frac{490}{429}$	$\frac{1260}{715}$	$\frac{770}{1105}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{15}{7}$	$\frac{4890}{429}$	$\frac{11655}{715}$	$\frac{7700}{1105}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1327}{429}$	$\frac{5040}{715}$	$\frac{3850}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{60}{7}$	$\frac{19050}{429}$	$\frac{47880}{715}$	$\frac{34650}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	$\frac{54}{7}$	$\frac{13487}{429}$	$\frac{32340}{715}$	$\frac{23100}{1105}$

V_6

α_3	1	$\frac{9}{13}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— 2	3	$\frac{35}{9}$	$\frac{72}{13}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	1	— 6	$\frac{105}{9}$	$\frac{84}{13}$	
α_4	$\frac{924}{715}$	$\frac{4004}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	— 1	$\frac{21}{21}$	$\frac{175}{33}$	$\frac{12117}{715}$	$\frac{40040}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{54}{21}$	$\frac{110}{33}$	$\frac{3696}{715}$	$\frac{20020}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	2	$\frac{84}{21}$	$\frac{1050}{33}$	$\frac{63672}{715}$	$\frac{180180}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 1	$\frac{286}{21}$	$\frac{1865}{33}$	$\frac{57036}{715}$	$\frac{120120}{3315}$

V_8

		i	i_1	i_2	i_3
α_4	— 1	$\frac{11}{17}$
$\alpha_1\alpha_3$	2	— 3	— $\frac{63}{13}$	$\frac{110}{17}$
$\alpha_2\alpha_2$	1	— $\frac{35}{9}$	$\frac{55}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 3	12	— $\frac{504}{13}$	$\frac{495}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	1	— 10	$\frac{315}{9}$	— $\frac{588}{13}$	$\frac{330}{17}$

10) Glieder der wahren Centralschwere A.

$(A_0 - 1)$.

α_1	— 1	1			
α_2	$\frac{3}{5}$	— $\frac{6}{7}$	$\frac{1}{3}$		
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{12}{7}$	1		
α_3	— $\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	— $\frac{5}{11}$	$\frac{15}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{6}{7}$	$\frac{20}{7}$	— $\frac{30}{11}$	$\frac{120}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{1}{7}$	$\frac{10}{7}$	— $\frac{25}{11}$	$\frac{140}{143}$	
α_4	$\frac{1}{3}$	— $\frac{20}{33}$	$\frac{70}{143}$	— $\frac{28}{143}$	$\frac{7}{221}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{2}{3}$	— $\frac{80}{33}$	$\frac{420}{143}$	— $\frac{224}{143}$	$\frac{70}{221}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{1}{3}$	— $\frac{40}{33}$	$\frac{210}{143}$	— $\frac{112}{143}$	$\frac{35}{221}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{1}{3}$	— $\frac{33}{120}$	$\frac{143}{1050}$	— $\frac{143}{784}$	$\frac{221}{315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{1}{3}$	— $\frac{33}{20}$	$\frac{143}{350}$	— $\frac{143}{392}$	$\frac{221}{210}$
	— $\frac{20}{33}$	$\frac{350}{143}$	— $\frac{392}{143}$	$\frac{210}{221}$

A_2

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	2	— 3			
		$\frac{18}{7}$	— $\frac{10}{3}$		
α_2	$\frac{64}{7}$	— 10		
$\alpha_1\alpha_1$	— 2	$\frac{15}{7}$	$\frac{50}{11}$	— $\frac{315}{143}$	
		$\frac{84}{7}$	322	— 2520	
α_3	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{11}$	— $\frac{143}{143}$	
		$\frac{78}{7}$	316	— 2940	
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{11}{11}$	— $\frac{143}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{6}{5}$	$\frac{78}{7}$	$\frac{316}{11}$	— $\frac{2940}{143}$	
		$\frac{140}{77}$	— $\frac{700}{143}$	$\frac{2940}{715}$	— 252
α_4	$\frac{780}{77}$	— $\frac{4590}{143}$	$\frac{24120}{715}$	— $\frac{2520}{221}$
		$\frac{280}{77}$	— $\frac{2100}{143}$	$\frac{11760}{715}$	— $\frac{1260}{221}$
$\alpha_1\alpha_3$	— $\frac{6}{7}$	$\frac{1720}{77}$	— $\frac{12840}{143}$	$\frac{87120}{715}$	— $\frac{11340}{221}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{580}{77}$	— $\frac{5450}{143}$	$\frac{46760}{715}$	— $\frac{7560}{221}$
		$\frac{12}{7}$	— $\frac{143}{143}$	— $\frac{221}{221}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{2}{7}$	$\frac{580}{77}$	— $\frac{5450}{143}$	$\frac{46760}{715}$	— $\frac{7560}{221}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{2}{7}$	$\frac{580}{77}$	— $\frac{5450}{143}$	$\frac{46760}{715}$	— $\frac{7560}{221}$

A_4

		i	i_1	i_2	i_3
α_2	— 2	$\frac{35}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	3	— 12	$\frac{105}{9}$		
α_3	— $\frac{175}{33}$	$\frac{945}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	2	$\frac{44}{7}$	— $\frac{1710}{33}$	$\frac{7560}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 3	$\frac{214}{7}$	— $\frac{2855}{33}$	$\frac{8820}{143}$	
α_4	$\frac{2450}{429}$	— $\frac{8820}{715}$	$\frac{6930}{1105}$
$\alpha_1\alpha_3$	— $\frac{60}{7}$	$\frac{26400}{429}$	— $\frac{83160}{715}$	$\frac{69300}{1105}$
$\alpha_2\alpha_2$	— 6	$\frac{24}{7}$	$\frac{6492}{429}$	— $\frac{35280}{715}$	$\frac{34650}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{252}{7}$	$\frac{107379}{429}$	— $\frac{347760}{715}$	$\frac{311850}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{9}{5}$	— $\frac{240}{7}$	$\frac{79759}{429}$	— $\frac{241080}{715}$	$\frac{207900}{1105}$

A_6

α_3	2	— $\frac{63}{13}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— 6	12	$\frac{70}{3}$	— $\frac{504}{13}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	4	— 30	70	— $\frac{588}{13}$	
α_4	$\frac{6468}{715}$	— $\frac{12012}{1105}$
$\alpha_1\alpha_3$	— 2	4	— $\frac{350}{11}$	$\frac{89544}{715}$	— $\frac{120120}{1105}$
$\alpha_2\alpha_2$	— $\frac{72}{7}$	20	$\frac{25872}{715}$	— $\frac{60060}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	6	— $\frac{104}{7}$	— $\frac{2210}{11}$	$\frac{483504}{715}$	— $\frac{540540}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 4	$\frac{500}{7}$	— $\frac{4060}{11}$	$\frac{443352}{715}$	— $\frac{360360}{1105}$

A_8

		i	i_1	i_2	i_3
α_4	— 2	$\frac{99}{17}$
$\alpha_1\alpha_3$	6	— 12	— $\frac{504}{13}$	$\frac{990}{17}$
$\alpha_2\alpha_2$	3	— $\frac{70}{3}$	$\frac{495}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 12	60	$\frac{35}{3}$	— $\frac{4032}{13}$	$\frac{4455}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	5	— 60	$\frac{735}{3}$	— $\frac{4704}{13}$	$\frac{2970}{17}$

11) Glieder des Moments der Schwingkraft = Dr .

$$D_0 = D = 2 \sqrt{V_2}.$$

α_1	2	— 2			
α_2	— 2	$\frac{12}{7}$	$\frac{2}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{4}{7}$	$\frac{6}{9}$		
α_3	2	— $\frac{10}{7}$	— $\frac{30}{99}$	— $\frac{18}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{4}{5}$	$\frac{12}{7}$	— $\frac{4}{99}$	— $\frac{144}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{6}{5}$	— $\frac{28}{7}$	$\frac{378}{99}$	— $\frac{168}{143}$	
α_4	— 2	280	420	168	62
$\alpha_1\alpha_3$	40	231	1287	715	3315
$\alpha_2\alpha_2$	35	464	600	864	620
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	28	231	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	130	232	1028	672	310
$\alpha_2\alpha_2$	35	231	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	130	2736	12420	864	2790
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	35	231	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	32	952	7092	2128	1860
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	35	231	1284	715	3315

D_2

		i	i_1	i_2	i_3
α_2
$\alpha_1\alpha_1$	— 2	2
α_3
$\alpha_1\alpha_2$	2	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{9}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{9}$
α_4
$\alpha_1\alpha_3$	— 2	$\frac{10}{7}$	$\frac{30}{99}$	$\frac{18}{143}$
$\alpha_2\alpha_2$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{4}{99}$	$\frac{144}{143}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{28}{7}$	$-\frac{378}{99}$	$\frac{168}{143}$

D_4

α_3
$\alpha_1\alpha_2$	2	— 2
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$
α_4
$\alpha_1\alpha_3$
$\alpha_2\alpha_2$	— 2	$\frac{12}{7}$	$\frac{2}{9}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{6}{9}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$

D_3

		i	i_1	i_2	i_3
α_4
$\alpha_1\alpha_3$	— 2	2
$\alpha_2\alpha_2$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$

12) Gleichgewichtsbedingungen U .

U_4

α_2	— 1	$\frac{7}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	3	— 5	$\frac{21}{9}$		
α_3	1	$\frac{105}{99}$	36	
$\alpha_1\alpha_2$	— 3	$\frac{44}{7}$	$\frac{553}{99}$	288	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{4}{7}$	$\frac{294}{99}$	143	
α_4	— 1	$\frac{1470}{1287}$	336	451
$\alpha_1\alpha_3$	3	$\frac{117}{21}$	$\frac{7455}{1287}$	715	3315
$\alpha_2\alpha_2$	2	36	$\frac{3266}{1287}$	3093	4510
	5	21	$\frac{1287}{1287}$	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 9	24	16148	1344	2255
	5	21	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	9	170	17685	715	3315
	5	21	1287	8484	13530
				715	3315

U_6

		i	i_1	i_2	i_3
α_3	1	$\frac{9}{13}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— 4	5	$\frac{35}{9}$	$\frac{72}{13}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 5	$\frac{105}{9}$	$\frac{84}{13}$	
α_4	— 1	$\frac{924}{715}$	$\frac{185}{3351}$
$\alpha_1\alpha_3$	1	— 2	$\frac{6825}{1287}$	$\frac{8652}{715}$	$\frac{18590}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	3	$\frac{90}{21}$	$\frac{1001}{1287}$	$\frac{3696}{715}$	$\frac{9295}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{162}{21}$	$\frac{41951}{1287}$	$\frac{35952}{715}$	$\frac{83655}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	82	$\frac{28119}{1287}$	$\frac{24696}{715}$	$\frac{55770}{3315}$
		21			

U_8

α_4	— 1	$\frac{11}{17}$
$\alpha_1\alpha_3$	4	— 5	$\frac{63}{13}$	$\frac{110}{17}$
$\alpha_2\alpha_2$	1	$\frac{35}{9}$	$\frac{55}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 1	10	$\frac{504}{13}$	$\frac{495}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	1	— 10	$\frac{315}{9}$	$\frac{588}{13}$	$\frac{330}{17}$

13) Glieder der scheinbaren Centralschwere \mathfrak{A} .

$(\mathfrak{A}_0 - 1)$.

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	— 3	3			
α_2	$\frac{13}{5}$	— $\frac{18}{7}$	$\frac{1}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{8}{7}$	$\frac{3}{9}$		
α_3	— $\frac{85}{35}$	$\frac{15}{7}$	— $\frac{15}{99}$	$\frac{33}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{2}{35}$	$\frac{8}{7}$	— $\frac{266}{99}$	$\frac{264}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{47}{35}$	$\frac{38}{7}$	— $\frac{603}{99}$	$\frac{308}{143}$	
α_4	$\frac{245}{105}$	— $\frac{420}{231}$	$\frac{210}{1287}$	— $\frac{308}{715}$	$\frac{43}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	— $\frac{50}{105}$	— $\frac{96}{231}$	$\frac{4380}{1287}$	— $\frac{1984}{715}$	$\frac{430}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	— $\frac{49}{105}$	— $\frac{48}{231}$	$\frac{2918}{1287}$	— $\frac{1232}{715}$	$\frac{215}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{425}{105}$	— $\frac{3576}{231}$	$\frac{21870}{1287}$	— $\frac{4784}{715}$	$\frac{1935}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{96}{105}$	$\frac{812}{231}$	— $\frac{3942}{1287}$	$\frac{168}{715}$	$\frac{1290}{3315}$
	$\frac{105}{105}$	$\frac{231}{231}$	$\frac{1287}{1287}$	$\frac{715}{715}$	$\frac{3315}{3315}$

α_2

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	4	— 5			
		30	28		
α_2	— 2	<u>7</u>	<u>9</u>		
		46	84		
$\alpha_1\alpha_1$	<u>7</u>	<u>9</u>		
		25	420	333	
α_3	2	<u>7</u>	<u>99</u>	<u>143</u>	
		60	2916	2664	
$\alpha_1\alpha_2$	— 8	<u>7</u>	<u>99</u>	<u>143</u>	
	<u>5</u>				
	12	110	3288	3108	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>99</u>	<u>143</u>	
		700	5880	3108	3718
α_4	— 2	<u>231</u>	<u>1287</u>	<u>715</u>	<u>3315</u>
		1546	42300	24894	37180
$\alpha_1\alpha_3$	80	<u>231</u>	<u>1287</u>	<u>715</u>	<u>3315</u>
	35	608	19928	12432	18590
$\alpha_2\alpha_2$	28	<u>231</u>	<u>1287</u>	<u>715</u>	<u>3315</u>
	<u>35</u>				
	218	8292	128032	87264	167310
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 35	<u>231</u>	<u>1287</u>	<u>715</u>	<u>3315</u>
		136	37044	43792	111540
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	64	<u>231</u>	<u>1287</u>	<u>715</u>	<u>3315</u>
	<u>35</u>				

2_4

		i	i_1	i_2	i_3
α_2	— 2	$\frac{35}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	1	— 10	$\frac{105}{9}$		
α_3	$\frac{525}{99}$	$\frac{945}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	2	$\frac{46}{7}$	$\frac{5152}{99}$	$\frac{7560}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 3	$\frac{218}{7}$	$\frac{8631}{99}$	$\frac{8820}{143}$	
α_4	$\frac{7350}{1287}$	$\frac{8820}{715}$	$\frac{6930}{1105}$
$\alpha_1\alpha_3$	— 2	$\frac{50}{7}$	$\frac{79590}{1287}$	$\frac{83070}{715}$	$\frac{69300}{1105}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{19190}{1287}$	$\frac{35280}{715}$	$\frac{34650}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{7}{5}$	$\frac{260}{7}$	$\frac{32131}{1287}$	$\frac{347040}{715}$	$\frac{311850}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	$\frac{212}{7}$	$\frac{234363}{1287}$	$\frac{240240}{715}$	$\frac{207900}{1105}$

2_6

α_3	2	$\frac{63}{13}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— 4	10	$\frac{70}{3}$	$\frac{504}{13}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	4	— 30	70	$\frac{588}{13}$	
α_4	$\frac{6468}{715}$	$\frac{12012}{1105}$
$\alpha_1\alpha_3$	2	$\frac{3150}{99}$	$\frac{89544}{715}$	$\frac{120120}{1105}$
$\alpha_2\alpha_2$	— 2	$\frac{60}{7}$	$\frac{2002}{99}$	$\frac{25872}{715}$	$\frac{60060}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	6	$\frac{108}{7}$	$\frac{19824}{99}$	$\frac{483504}{715}$	$\frac{540540}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 4	$\frac{500}{7}$	$\frac{36540}{99}$	$\frac{443352}{715}$	$\frac{360360}{1105}$

α_3					
		i	i_1	i_2	i_3
α_4	— 2	99 17
$\alpha_1\alpha_3$	4	— 10	— $\frac{504}{13}$	990 17
$\alpha_2\alpha_2$	3	— $\frac{70}{3}$	495 17
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 12	60	$\frac{35}{3}$	— $\frac{4032}{13}$	4455 17
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	5	— 60	$\frac{735}{3}$	— $\frac{4704}{13}$	2970 17

14) Glieder der Secante des Winkels, den Loth und Halbmesser bilden, $= \sqrt{1 + \Delta^2} = 1 + \Delta_2 c^2 + \Delta_4 c^4 + \Delta_6 c^6 + \Delta_8 c^8$.

	Δ_2	Δ_4	Δ_6	Δ_8
ε_1
ε_2
$\varepsilon_1\varepsilon_1$	$\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$		
ε_3
$\varepsilon_1\varepsilon_2$	1	— 1
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$
ε_4
$\varepsilon_1\varepsilon_3$	1	— 1
$\varepsilon_2\varepsilon_2$	$\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2$
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	— $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	— $\frac{1}{8}$

	Δ_2	Δ_4	Δ_6	Δ_8
α_1
α_2
$\alpha_1\alpha_1$	2	- 2
α_3
$\alpha_1\alpha_2$	- 8	8
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	4	- 4
α_4
$\alpha_1\alpha_3$	12	-12
$\alpha_2\alpha_2$	8	- 8
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	-20	20
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	- 2	10	- 8

15) Glieder der scheinbaren Schwere \mathfrak{G} nach Potenzen von c .

$$(\mathfrak{G}_0 - 1) = (2i_0 - 1).$$

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	— 3	3			
α_2	$\frac{13}{5}$	— $\frac{18}{7}$	$\frac{1}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{8}{7}$	$\frac{3}{9}$		
α_3	— $\frac{85}{35}$	$\frac{7}{8}$	— $\frac{15}{99}$	$\frac{33}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{2}{35}$	$\frac{7}{7}$	— $\frac{266}{99}$	$\frac{264}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{47}{35}$	$\frac{38}{7}$	— $\frac{603}{99}$	$\frac{308}{143}$	
α_4	$\frac{245}{105}$	— $\frac{420}{231}$	$\frac{210}{1287}$	— $\frac{308}{715}$	$\frac{43}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{50}{105}$	— $\frac{96}{231}$	$\frac{4380}{1287}$	— $\frac{1984}{715}$	$\frac{430}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	— $\frac{49}{105}$	— $\frac{48}{231}$	$\frac{2918}{1287}$	— $\frac{1232}{715}$	$\frac{215}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{425}{105}$	— $\frac{3576}{231}$	$\frac{21870}{1287}$	— $\frac{4784}{715}$	$\frac{1935}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{96}{105}$	$\frac{812}{231}$	— $\frac{3942}{1287}$	$\frac{168}{715}$	$\frac{1290}{3315}$

⊙₂

		<i>i</i>	<i>i</i> ₁	<i>i</i> ₂	<i>i</i> ₃
α_1	4	— 5			
α_2	— 2	$\frac{30}{7}$	— $\frac{28}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	2	$\frac{46}{7}$	— $\frac{84}{9}$		
α_3	2	— $\frac{25}{7}$	$\frac{420}{99}$	— $\frac{333}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— 8	— $\frac{60}{7}$	2916	— 2664	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 18	— $\frac{68}{7}$	$\frac{3288}{99}$	— $\frac{3108}{143}$	
α_4	— 2	$\frac{700}{231}$	— $\frac{5880}{1287}$	$\frac{3108}{715}$	— $\frac{3718}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	80	1546	— 42300	24894	— 37180
$\alpha_2\alpha_2$	35	$\frac{231}{608}$	— $\frac{1287}{19928}$	$\frac{715}{12432}$	— $\frac{3315}{18590}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	28	$\frac{231}{7104}$	— $\frac{1287}{127746}$	$\frac{715}{87264}$	— $\frac{3315}{167310}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	36	$\frac{231}{664}$	— $\frac{1287}{36186}$	$\frac{715}{43792}$	— $\frac{3315}{111540}$
	— 35	231	— 1287	715	— 3315

⊙₄

		<i>i</i>	<i>i</i> ₁	<i>i</i> ₂	<i>i</i> ₃
α_2	- 2	$\frac{35}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	- 1	- 10	$\frac{105}{9}$		
α_3	$\frac{525}{99}$	$\frac{945}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	- 6	$\frac{46}{7}$	$\frac{5152}{99}$	$\frac{7560}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	15	$\frac{106}{7}$	$\frac{8631}{99}$	$\frac{8820}{143}$	
α_4	$\frac{7350}{1287}$	$\frac{8820}{715}$	$\frac{20790}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	- 2	$\frac{50}{7}$	$\frac{79590}{1287}$	$\frac{83070}{715}$	$\frac{207900}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{19190}{1287}$	$\frac{35280}{715}$	$\frac{103950}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{81}{5}$	$\frac{332}{7}$	$\frac{313037}{1287}$	$\frac{347040}{715}$	$\frac{935550}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	- 73	$\frac{20}{7}$	$\frac{209481}{1287}$	$\frac{240240}{715}$	$\frac{623700}{3315}$

⊙₆

α_3	2	$\frac{63}{13}$	
$\alpha^1\alpha_2$	4	10	$\frac{70}{3}$	$\frac{504}{13}$	
$\alpha^1\alpha^1\alpha^1$	- 8	-20	70	$\frac{588}{13}$	
α_4	$\frac{6468}{715}$	$\frac{12012}{1105}$
$\alpha^1\alpha_3$	12	2	$\frac{3150}{99}$	$\frac{89544}{715}$	$\frac{120120}{1105}$
$\alpha_1\alpha_1$	6	$\frac{60}{7}$	$\frac{2002}{99}$	$\frac{25872}{715}$	$\frac{60060}{1105}$
$\alpha^1\alpha^1\alpha_1$	-70	40	$\frac{18438}{99}$	$\frac{483504}{715}$	$\frac{540540}{1105}$
$\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^1$	36	$\frac{44}{7}$	$\frac{32382}{99}$	$\frac{443352}{715}$	$\frac{360360}{1105}$

\mathfrak{G}_8

		i	i_1	i_2	i_3
α_4	— 2	99 <u>17</u>
$\alpha_1\alpha_3$	— 8	— 10	— 504 13	990 <u>17</u>
$\alpha_2\alpha_2$	— 5	— 70 3	495 <u>17</u>
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	44	20	35 9	— 4032 13	4455 <u>17</u>
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 21	— 20	1995 9	— 4704 13	2970 <u>17</u>

16) Glieder der scheinbaren Schwere \mathfrak{G} nach Potenzen von f .

$$(g_0 - 1) = (\mathfrak{G}_0 - 1) = \alpha_0 - 1.$$

α_1	— 3	3			
α_2	$\frac{13}{5}$	— $\frac{18}{7}$	$\frac{1}{9}$		
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{3}{5}$	— $\frac{8}{7}$	$\frac{3}{9}$		
α_3	— $\frac{85}{35}$	$\frac{15}{7}$	— $\frac{15}{99}$	$\frac{33}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{2}{35}$	$\frac{8}{7}$	— $\frac{266}{99}$	$\frac{264}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{47}{35}$	$\frac{38}{7}$	— $\frac{603}{99}$	$\frac{308}{143}$	
α_4	$\frac{245}{105}$	— $\frac{420}{231}$	$\frac{210}{1287}$	— $\frac{308}{715}$	$\frac{43}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	— $\frac{50}{105}$	$\frac{96}{231}$	— $\frac{4380}{1287}$	$\frac{1984}{715}$	$\frac{430}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	— $\frac{49}{105}$	$\frac{48}{231}$	— $\frac{2918}{1287}$	$\frac{1232}{715}$	$\frac{1215}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{425}{105}$	$\frac{5576}{231}$	— $\frac{21870}{1287}$	$\frac{4784}{715}$	$\frac{1935}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— $\frac{96}{105}$	$\frac{812}{231}$	— $\frac{3942}{1287}$	$\frac{168}{715}$	$\frac{1290}{3315}$

G_2

		i	i_1	i_2	i_3
α_1	4	— 5			
α_2	— 2	<u>30</u> 7	— <u>28</u> 9		
$\alpha_1\alpha_1$	— 14	<u>186</u> 7	— <u>84</u> 9		
α_3	2	— <u>25</u> 7	420 99	— 333 143	
$\alpha_1\alpha_2$	<u>32</u> 5	<u>180</u> 7	<u>4148</u> 99	<u>2664</u> 143	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	<u>182</u> 5	<u>672</u> 7	<u>6984</u> 99	<u>3108</u> 143	
α_4	— 2	<u>700</u> 231	— 5880 1287	<u>3108</u> 715	— <u>3718</u> 3315
$\alpha_1\alpha_3$	— 200	<u>4846</u>	— 64140	<u>31554</u>	— <u>37180</u>
$\alpha_2\alpha_2$	<u>35</u> 28	<u>231</u> 608	— <u>1287</u> 19928	<u>715</u> 12432	— <u>3315</u> 18590
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	<u>35</u> 652	<u>231</u> 26904	— <u>1287</u> 327426	<u>715</u> 140544	— <u>3315</u> 167310
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	<u>35</u> 3030	<u>231</u> 63488	— <u>1287</u> 351306	<u>715</u> 105952	— <u>3315</u> 111540
	— 35	<u>231</u>	— 1287	<u>715</u>	— 3315

G_4

		i	i_1	i_2	i_3
α_2	— 2	35		
			9		
$\alpha_1\alpha_1$	15	— 30	105		
			9		
α_3	525	945	
			99	143	
$\alpha_1\alpha_2$	34	— 114	9464	7560	
		7	99	143	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 129	2250	21567	8820	
		7	99	143	
α_4	7350	8820	20790
			1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_3$	6	— 150	156030	127530	207900
		7	1287	715	3315
$\alpha_2\alpha_2$	— 76	252	12842	35280	103950
	5	7	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	— 1231	1028	1264741	702720	935550
	5	7	1287	715	3315
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	723	— 14460	2359161	655200	623700
		7	1287	715	3315

G_6

α_3	2	63	
				13	
$\alpha_1\alpha_2$	— 44	50	490	504	
			9	13	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	96	— 240	1470	588	
			9	13	
α_4	6468	12012
				715	1105
$\alpha_1\alpha_3$	— 60	62	7350	168924	120120
			99	715	1105
$\alpha_2\alpha_2$	— 10	300	10626	25872	60060
		7	99	715	1105
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	850	— 1220	113246	1118544	540540
			99	715	1105
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	— 1420	27800	339822	1184232	360360
		7	99	715	1105

G_8

		i	i_1	i_2	i_3
α_4	— 2	99
$\alpha_1\alpha_3$	64	— 70	— $\frac{1260}{13}$	$\frac{990}{17}$
$\alpha_2\alpha_2$	27	— $\frac{770}{9}$	$\frac{495}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	—596	1000	$\frac{3395}{9}$	— $\frac{10080}{13}$	$\frac{4455}{17}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	787	—2200	$\frac{17115}{9}$	— $\frac{11760}{13}$	$\frac{2970}{17}$

17) Zur Prüfung der Verzeichnisse 15) und 16).

$$\mathfrak{S}_2 = g_2 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_0 k.$$

α_1	4	— 5			
α_2	— 4	$\frac{30}{7}$	7		
$\alpha_1\alpha_1$	1	— $\frac{24}{7}$	21		
α_3	4	— $\frac{25}{7}$	— $\frac{105}{99}$	— $\frac{81}{143}$	
$\alpha_1\alpha_2$	— $\frac{18}{5}$	8	$\frac{74}{99}$	— $\frac{648}{143}$	
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{17}{5}$	— $\frac{102}{7}$	$\frac{1587}{99}$	— $\frac{756}{143}$	
α_4	— 4	$\frac{700}{231}$	$\frac{1470}{1287}$	$\frac{756}{715}$	$\frac{341}{3315}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{150}{35}$	— $\frac{1952}{231}$	— $\frac{3660}{1287}$	$\frac{3648}{715}$	$\frac{3410}{3315}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{91}{35}$	— $\frac{976}{231}$	— $\frac{4742}{1287}$	$\frac{3024}{715}$	$\frac{1705}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{379}{35}$	$\frac{10008}{231}$	— $\frac{49398}{1287}$	$\frac{1968}{715}$	$\frac{15345}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{120}{35}$	— $\frac{4492}{231}$	— $\frac{37614}{1287}$	$\frac{11816}{715}$	$\frac{10230}{3315}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{35}{35}$	— $\frac{231}{231}$	— $\frac{1287}{1287}$	$\frac{715}{715}$	$\frac{3315}{3315}$

18) Elliptisches Potentialmoment \mathfrak{B} .

$(\mathfrak{B}_0 - 1)$.

		i	i_1	i_2	i_3
$\frac{1}{2} \lambda^2$	— 3	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	15	— $\frac{10}{3}$	$\frac{3}{5}$		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 35	$\frac{35}{3}$	— $\frac{21}{5}$	$\frac{5}{7}$	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	315	— 140	$\frac{378}{5}$	— $\frac{180}{7}$	$\frac{35}{9}$

\mathfrak{B}_2

$\frac{1}{2} \lambda^2$	3	— 1			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	— 18	$\frac{40}{3}$	— 6		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	45	— $\frac{155}{3}$	$\frac{231}{5}$	— 15	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	— 420	$\frac{1960}{3}$	— $\frac{4368}{5}$	$\frac{3960}{7}$	— 140

\mathfrak{B}_4

$\frac{1}{2} \lambda^2$
$\frac{1}{8} \lambda^4$	3	— 10	7		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 9	55	— 91	45	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	90	— 800	2100	— 2160	770

\mathfrak{B}_6

$\frac{1}{2} \lambda^2$
$\frac{1}{8} \lambda^4$
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 1	— 15	49	— 33	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	12	$\frac{920}{3}$	— 1792	2808	— $\frac{4004}{3}$

\mathfrak{B}_8

		i	i_1	i_2	i_3
$\frac{1}{2} \lambda^2$			
$\frac{1}{8} \lambda^4$		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	3	— 20	490	— 1188	715

$(\mathfrak{B} - 1)$

$\frac{1}{2} \lambda^2$	— $\frac{2}{3}$			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	$\frac{8}{5}$		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— $\frac{16}{7}$	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	$\frac{128}{9}$

19) Elliptisches Moment \mathfrak{E} .

$(\mathfrak{E}_0 - 1)$.

$\frac{1}{2} \lambda^2$	— 3	1			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	15	— 10	3		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 35	35	— 21	5	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	315	— 420	378	— 180	35

\mathfrak{E}_2

$\frac{1}{2} \lambda^2$	3	— 5			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	— 18	60	— 42		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	45	— 225	315	— 135	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	— 420	2800	— 5880	5040	— 1540

\mathfrak{E}_4

		i	i_1	i_2	i_3
$\frac{1}{8} \lambda^4$	3	— 50	63		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 9	265	— 735	495	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	90	—3800	16380	—22680	10010

\mathfrak{E}_6

$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 1	— 75	441	— 429	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	12	1520	—15288	33264	—20020

\mathfrak{E}_8

$\frac{1}{128} \lambda^8$	3	— 100	4410	—15444	12155
---------------------------	---	-------	------	--------	-------

$(\mathfrak{E} - 1)$

$\frac{1}{2} \lambda^2$	— 4			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	24		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 64	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	640

20) Elliptisches Moment \mathfrak{I} .

$(\mathfrak{I}_0 - 1)$

$\frac{1}{2} \lambda^2$	— 3	3			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	15	— 30	15		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 35	105	— 105	35	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	315	—1260	1890	— 1260	315

\mathfrak{I}_2

		i	i_1	i_2	i_3
$\frac{1}{2} \lambda^2$	3	— 5			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	— 18	80	— 70		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	45	— 325	595	— 315	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	— 420	4200	— 11760	12600	— 4620

\mathfrak{I}_4

$\frac{1}{8} \lambda^4$	3	— 50	63		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 9	295	— 931	693	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	90	— 4400	22708	— 36288	18018

\mathfrak{I}_6

$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 1	— 75	441	— 429	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	12	1560	— 17248	40392	— 25740

\mathfrak{I}_8

$\frac{1}{128} \lambda^8$	3	— 100	4410	— 15444	12155
---------------------------	---	-------	------	---------	-------

$(\mathfrak{I} - 1)$

$\frac{1}{2} \lambda^2$	— 2			
$\frac{1}{8} \lambda^4$	8		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 16	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	128

21) Elliptische Gleichgewichtsbedingungen.

U_4

		i	i_1	i_2	i_3
$\frac{1}{8} \lambda^4$	3	— 10	7		
$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 4	20	— 28	12	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	25	— $\frac{580}{3}$	462	— 444	$\frac{451}{3}$

U_6

$\frac{1}{16} \lambda^6$	— 7	5	35	— 33	
$\frac{1}{128} \lambda^8$	39	$\frac{20}{3}$	— 686	1260	— $\frac{1859}{3}$

U_8

$\frac{1}{128} \lambda^8$	59	— 60	210	— 924	715
---------------------------	----	------	-----	-------	-----



11
23 Februar 1853.

DIE GESTALT DER ERDE. VON DR. M. G. VON
PAUCKER, CORRESPONDENT DER AKADEMIE.

Siebenter Artikel.

Die Pendelmessungen.

An einem Ort dessen Polhöhe = φ , sei die Länge des dem mittlern Sonnentage entsprechenden einfachen Sekundenpendels = l , die Anzahl der Schwingungen eines unveränderlichen Pendels, z. B. des londoner Sekundenpendels L , in einem mittlern Sonnentage = O , die scheinbare Schwere = g .

Unter dem Aequator seien die entsprechenden Grössen $l_0 O_0 g_0$. Alsdann ist

$$\frac{l}{l_0} = \frac{OO}{O_0 O_0} = \frac{g}{g_0}.$$

Hiebei wird vorausgesetzt, dass die Beobachtungen auf das einfache Pendel, den leeren Raum, die Wärme des astronomischen Längenmaasses = $13\frac{1}{3}^{\circ}$ R., den Meeresspiegel und unendlich kleine Schwingungsbögen gebracht worden sind.

Im Verzeichniss 16 sind die Glieder $g_0 g_2 g_4 \dots$ durch die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ und die Dichtigkeitszahlen $i i_1 \dots$ ausgedrückt. Bei der Anwendung sind den Potenzen von $\sin^2 \varphi$ die Quadrate von $\sin n\varphi$ vorzuziehen. Wonach

$$g = g_0 + (g_2 + g_4) \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} g_4 \sin^2 2\varphi \dots$$

Bei drei Gliedern giebt dann der Koeffizient des zweiten Gliedes den vollständigen Betrag der Zunahme der scheinbaren Schwere vom Aequator zum Pol.

Es ist vortheilhaft, statt der Schwingungszahlen O oder der Pendellängen l , den Gravitationsbogen S in die Rechnung einzuführen:

$$S = \frac{OO - (86264)^2}{86,264}.$$

Denn da unter dem Aequator 2000 Einheiten von S einer Schwingung entsprechen, so können die Decimaltheile von S weggelassen werden.

Es sei durch Ausgleichung der Beobachtungen

$$S = v + \omega \sin^2\varphi - \omega'' \sin^2 2\varphi,$$

so ist sehr nahe

$$O_0 = 86264 + \frac{\quad}{2000}$$

Es sei

$$m = 86264000 + v$$

und

$$\omega = mk \quad \omega'' = mk'',$$

so ist

$$\frac{OO}{O_0 O_0} = \frac{l}{l_0} = 1 + k \sin^2\varphi - k'' \sin^2 2\varphi.$$

Die erste vollständige Berechnung der Pendelmessungen giebt Schmidt *mathem. Geographie. Gött. 1829. I. § 413*. Wenn

$$l = l_0 + \lambda \sin^2\varphi,$$

so findet Schmidt aus 47 Beobachtungen

$$l_0 = 39,015233 \quad \lambda = 0,202898 \text{ engl. Z.}$$

Für die Polhöhe von London $\varphi = 51^\circ 31' 8''$ ist hienach $L = 39,1395682$, folglich

$$S = -2686 + 448600 \sin^2\varphi$$

$$O_0 = 86262,657 \quad k = 0,005200480.$$

In den *Memoirs of the Roy. Astr. Soc. VII. 1834* berechnet Baily zwei Ausdrücke für das Quadrat der Schwingungen O des londoner Sekundenpendels. Der erste aus 14 Beobachtungen des Kap. Foster, S. 81:

$$OO = 7441507482 + 38666418 \sin^2 \varphi.$$

Hieraus folgt

$$S = 345 + 448233 \sin^2 \varphi$$

$$O_0 = 86264,172 \quad k = 0,005196046.$$

Der zweite aus 79 Beobachtungen verschiedener Weltumsegler und Astronomen S. 94:

$$OO = 7441625711 + 38286335 \sin^2 \varphi.$$

Hieraus folgt

$$S = 1716 + 443827 \sin^2 \varphi$$

$$O_0 = 86264,858 \quad k = 0,005144890.$$

Im *Bulletin* der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, I. 1843 berechnet Borenius aus 47 Beobachtungen des zweiten Verzeichnisses von Baily drei Ausdrücke für O . Dieses Verzeichniß stimmt mit dem von Baily bis auf folgende Aenderungen:

	Baily.	Borenius.	Baily.	Borenius.
Valparaiso	8632816	8632844		
Petropawlowsk..	8640890	8640887	53 0 53	53 0 59
Sitka	8642054	8642062	57 2 58	57 3 0
St. Petersburg ...	8643220	8643239		

Der erste Ausdruck hat zwei Glieder:

$$O = 86265,016 + 222,359 \sin^2 \varphi,$$

woraus

$$S = 2032 + 444723 \sin^2 \varphi.$$

Der zweite Ausdruck enthält drei Glieder:

$$O = 86265,475 + 216,379 \sin^2 \varphi - 6,958 \sin^4 \varphi,$$

woraus

$$S = 2950 + 451655 \sin^2\varphi - 4722 \sin^2 2\varphi$$

$$k = 0,005235547 \quad k'' = 0,00005471.$$

Die Abweichung der ausgeglichenen Schwingungen von den beobachteten ist oft beträchtlich, an einem Orte 11 Schwingungen, was eine erhebliche Verschiedenheit der örtlichen Dichtigkeitszahl i von dem mittlern Werthe dieser Zahl anzeigt.

Es dürften aber 3 Schwingungen im Laufe des Tages das höchste sein, was sich als Summe der Beobachtungs- und Reduktionsfehler annehmen lässt.

Da die Ausgleichsrechnung vorzugsweise nur auf solche Beobachtungen angewendet werden kann, welche möglichst frei von festen Fehlern sind, so schien es nothwendig, eine neue Rechnung bloss auf diejenigen 28 Beobachtungen des Verzeichnisses von Borenius zu gründen, in denen die Abweichung nicht mehr als 3 Schwingungen oder 6000 Einheiten von S beträgt.

Es sei $\sin^2\varphi = a_1$ $\sin^2 2\varphi = a_2$, der ausgeglichene Gravitationsbogen = S' , der Ausgleichungsfehler = f

$$S'' = v + \omega a_1 - \omega'' a_2 \quad S = f + S''.$$

Bei der Ausgleichung müssen die Summen der Ausgleichungsfehler verschwinden:

$$\underline{f} = 0 \quad \underline{a_1 f} = 0 \quad \underline{a_2 f} = 0.$$

Nach der eingeführten Bezeichnung ist das gegebene System:

T	\underline{S}	$\underline{a_1 S}$	$\underline{a_2 S}$
A	n	$\underline{a_1}$	$\underline{a_2}$
B	$\underline{a_1}$	$\underline{a_1 a_1}$	$\underline{a_1 a_2}$
C	$\underline{a_2}$	$\underline{a_1 a_2}$	$\underline{a_2 a_2}$

Durch Umwendung des Systems ABC ergibt sich das System $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$:

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{A} & n \quad \underline{a_1} \quad \underline{a_2} \\ \mathfrak{B} & \underline{a_1} \quad \underline{a_1 a_1} \quad \underline{a_1 a_2} \\ \mathfrak{C} & \underline{a_2} \quad \underline{a_1 a_2} \quad \underline{a_2 a_2} \end{array}$$

Und hieraus:

$$v = \mathfrak{A}T \quad \omega = \mathfrak{B}T \quad \omega'' = \mathfrak{C}T.$$

Der mittlere einheitliche Ausgleichungsfehler sei = f . Hier ist $n = 28$, $r = 3$, $n - r = 25$, also... $\underline{ff} = \frac{1}{25} \underline{ff}$

$$(\underline{dv})^2 = n\underline{ff} \quad (\underline{d\omega})^2 = \underline{a_1 a_1} \underline{ff} \quad (\underline{d\omega''})^2 = \underline{a_2 a_2} \underline{ff}.$$

Die Rechnung giebt

T	6627428	4763967	4348406
A	28	14,7905005	16,6228471
B	14,7905005	10,6347895	9,7425709
C	16,6228471	9,7425709	13,4283815

\mathfrak{A}	0,1875257	— 0,1435649	— 0,1279762
\mathfrak{B}	— 0,1435649	0,3903071	— 0,1054585
\mathfrak{C}	— 0,1279762	— 0,1054585	0,3094055

$$\underline{ff} = 266625284 \quad \underline{f} = 3266$$

$$v = 2382,53 \quad (\underline{dv}) = 1414$$

$$\omega = 449367,644 \quad (\underline{d\omega}) = 2040$$

$$\omega'' = 5152,859 \quad (\underline{d\omega''}) = 1816$$

$$O_0 = 86265,191 \quad (\underline{dO_0}) = 0,707$$

$$O_0 O_0 = 7441683222$$

$$k = 0,005209070 \quad (\underline{dk}) = 0,000023648$$

$$k'' = 0,00005973 \quad (\underline{dk''}) = 0,00002105$$

Das Sekundenpendel.

Der Ausdruck lässt sich so einrichten, dass er für die Polhöhe von London $\varphi = 51^{\circ}31'8''$ genau die Messung von Kater $L = 39,13929$ giebt, zugleich aber den obigen Werthen von k und k'' entspricht:

$$l = l_0 + \lambda \sin^2 \varphi - \lambda'' \sin^2 2\varphi$$

$$l_0 = 39,016956 \quad \lambda = 0,203242 \quad \lambda'' = 0,002330.$$

Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere.

Nach Bessel, *Astr. Nachr.* No. 133, ist die mittlere siderische Bewegung der Sonne in einem mittlern Sonnentage in Theilen des Umfangs

$$\mu = \frac{129597738,2344}{36525 \cdot 1296000} = 0,00273780300615.$$

Unter dem Aequator ist für die mittlere Sekunde

$$\text{die Schwungkraft} \dots = 4\pi^2 a \left(\frac{1 + \mu}{86400} \right)^2$$

$$\text{die scheinbare Schwere} = \pi^2 L \left(\frac{O_0}{86400} \right)^2$$

$$\text{ihr Verhältniss } h = \frac{4a}{L} \left(\frac{1 + \mu}{O_0} \right)^2.$$

Nach dem zweiten Artikel ist $a = 3272553,2083$ Toisen.

Nach dem *Bulletin* X. No. 230 S. 217

$$\text{die Toise} = 76,7350881 \text{ astr. Zoll.}$$

Nach Kater $L = 39,13929$ also $\frac{a}{L} = 6416050,4$.

$$O_0 O_0 = 7441683222 \quad (1 + \mu)^2 = 1,005483101578.$$

Also

$$h = 0,0034676188 \quad \frac{1}{h} = 288,3824.$$

Die Abplattung.

$$hg_0 = D \quad kg_0 = g_2 + g_4 \quad k''g_0 = \frac{1}{4}g_4.$$

Die Verzeichnisse geben

$$11. D = (2 - 2i)\alpha_1 + \left(-2 + \frac{12}{7}i + \frac{2}{9}i_1\right)\alpha_2 + \left(-\frac{4}{7}i + \frac{6}{9}i_1\right)\alpha_1\alpha_1$$

$$13. \mathcal{Q}_0 = g_0 = 1 + (-3 + 3i)\alpha_1.$$

$$16. g_2 + g_4 =$$

$$(4 - 5i)\alpha_1 + \left(-4 + \frac{30}{7}i + \frac{7}{9}i_1\right)\alpha_2 + \left(1 - \frac{24}{7}i + \frac{21}{9}i_1\right)\alpha_1\alpha_1$$

$$\frac{1}{4}g_4 = \left(-\frac{2}{4} + \frac{35}{36}i_1\right)\alpha_2 + \left(\frac{15}{4} - \frac{30}{4}i + \frac{105}{36}i_1\right)\alpha_1\alpha_1$$

$$12. U_4 = 0 = \left(-1 + \frac{7}{9}i_1\right)\alpha_2 + \left(3 - 5i + \frac{21}{9}i_1\right)\alpha_1\alpha_1$$

Hieraus:

$$\alpha_1 = \left(\frac{5}{2}h - k\right)[1 - (3 - 3i)\alpha_1] + \frac{9}{7}\alpha_2 - \frac{1}{7}(4i - 1)\alpha_1\alpha_1$$

$$\alpha_1 i = (2h - k)[1 - (3 - 3i)\alpha_1] + \frac{3}{7}(1 + 2i)\alpha_2 - \frac{1}{7}(2 + i)\alpha_1\alpha_1$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{3}k'' + \frac{5}{3}i\alpha_1\alpha_1.$$

Hieraus mittels obiger Werthe von h, k, k''

$$i = 0,50343 \quad \alpha_1 = 0,003555850$$

$$\alpha_2 = 0,000090249$$

Abplattung $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 0,003465601$

Schwungkr. z. scheinb. Schwere $h = 0,003467618$

Unterschied $0,0000020..$

$$\frac{1}{\alpha} = 288,55 \quad \frac{1}{h} = 288,38.$$

Im mittlern Meridian der Gradmessungen ist

$$\frac{1}{\alpha} = 289,92 \quad \alpha = 0,00344916.$$

Bemerkungen.

Bei den Pendelmessungen eben so wie bei den Gradmessungen sind die mittlern Fehler der einzelnen Beobachtungen nicht angezeigt. Die Ausgleichung wird daher so geführt, dass alle Pendelmessungen einerlei Gewicht haben, während es doch gewiss gerechtfertigt wäre, den auf zahlreichen vieljährigen Beobachtungen beruhenden Pendelmessungen von Paris und London ein grösseres Gewicht zu geben, als irgend einer andern bei kurzem Aufenthalt geschlossenen.

Die Reduktionen welche Baily anbringt wegen des von Bessel zuerst in Rechnung genommenen Mitschwingens der Luft, dürften noch nicht die letzten sein. Denn vor Kurzem hat Professor Stokes eine neue sehr befriedigende Theorie aufgestellt über den Widerstand und die Reibung der Luft bei der Pendelschwingung, wodurch die in den Versuchen von Bessel und Baily noch zurückbleibende Ungewissheit aufgelöst wird. Siehe *Cambr. Phil. Trans.* 1851 und *Bibliothèque Univ. de Genève* 1852. Sept.

Der für i gefundene Werth, welcher nahe $= \frac{1}{2}$ ist, scheint anzudeuten, dass die Dichtigkeit der sphäroidischen Erdschichten $= \rho$ von der Mitte nach der Oberfläche hin nahe im umgekehrten Verhältniss des Quadrats des Abstandes steht. Es sei nämlich

$$\rho = \delta_0 + \delta_1 \frac{1}{a} + \delta_2 \frac{1}{a^2},$$

so ist

$$\int \rho a^2 da = \frac{1}{3} \delta_0 a^3 + \frac{1}{2} \delta_1 a^2 + \delta_2 a$$

$$\int \rho a^4 da = \frac{1}{5} \delta_0 a^5 + \frac{1}{4} \delta_1 a^4 + \frac{1}{3} \delta_2 a^3,$$

also

$$i = \frac{\frac{1}{5} \delta_0 + \frac{1}{4} \delta_1 + \frac{1}{3} \delta_2}{\frac{1}{3} \delta_0 + \frac{1}{2} \delta_1 + \delta_2},$$

also

$$0 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}i\right)\delta_0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)\delta_1 + \left(\frac{1}{3} - i\right)\delta_2.$$

Für $i = \frac{1}{2}$ verschwindet das zweite Glied und es wird die Erddichtigkeit

$$\rho = 5\delta_2 + \delta_2 \frac{1}{a^2} + \delta_1 \frac{1}{a}.$$

Es sei $\delta_1 = 0$. Für $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sind dann die Dichtigkeiten den Zahlen 6, 9, 14, 21, 30, ... entsprechend *).

Die Frage über die Abplattung der Erde scheint der Entscheidung ziemlich nahe gebracht zu sein. Die Abplattung des mittlern Meridians der Gradmessungen ist nur um $\frac{1}{6}$ der fünften Decimalstelle kleiner als die Abplattung des mittlern Meridians der Pendelmessungen. Die letztere ist dem Verhältniss der Schwingkraft zur scheinbaren Schwere unter dem Aequator fast gleich. Ob diese Gleichheit eine bloss zufällige oder eine physisch begründete ist, verdiente näher untersucht zu werden.

Hingegen zeigt es sich, dass der Abplattungsbruch zweiter Ordnung beider Messungen ein entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Bei den Gradmessungen ist $\alpha_2 = -0,000051868$.

Bei den Pendelmessungen ist $\alpha_2 = +0,000090249$.

Alle Schärfe der Beobachtungskunst vermag den störenden

*) Roche Mém. sur la figure de la Terre. Oct. 1848. Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris 1854. 26 Déc. Es sei die mittlere Dichtigkeit der Erde = 1, die Dichtigkeit ρ für den Halbmesser a , so findet Roche

$$\rho = \frac{25}{13}(1 - 0,8a^2).$$

Einfluss der örtlichen Anziehung nicht aufzuheben. Dieser Einfluss äussert sich in der angezeigten Unsicherheit der Abplattung zweiter Ordnung.

Von dieser örtlichen Anziehung scheinen die Elemente des mittlern Meridians noch mehr bei den Gradmessungen als bei den Pendelmessungen behaftet zu sein. Denn bei jenen sind die Koeffizienten der aufgelösten Gleichungen sehr gross, die letztern aber sind an Oertern angestellt, welche über der ganzen Erdoberfläche zerstreut liegen.

Es wäre zweckmässig, die Pendelmessung mit der Gradmessung in der Art zu verbinden, dass beide an denselben Oertern desselben Meridians vorgenommen würden. Wählt man hiezu eine Reihe naheliegender Oerter in einer bestimmten Fortschreitung, ganz wie es der Physiker bei seinen Versuchen macht, so müsste der Einfluss der örtlichen Anziehung entdeckt werden können.

Es sei bei zwei naheliegenden Oertern der Breitenunterschied $= u$, der Unterschied der Lothablenkungen $= x$, die mittlere Polhöhe $= \varphi$, der mittlere Breitengrad $= t$, der Halbmesser desselben $= R$, der Unterschied der Meridianbögen $= s' - s$, der Unterschied der Gravitationsbögen $= S' - S$, $86264000 + v = m$, so ist

$$s' - s = tx + tu - \frac{3}{2} \alpha_1 \sin u \cos 2\varphi$$

$$S' - S = \omega \sin u \sin 2\varphi$$

$$\omega = mk \quad k = 4\alpha_1 - 5i\alpha_1.$$

Das Glied der örtlichen Anziehungen ist

bei den Gradmessungen $= tx$,

bei den Pendelmessungen $= 5i\alpha_1 m$.

Für $i = \frac{1}{2}$ ist $k = \frac{3}{2} \alpha_1$ wie bei den Gradmessungen.

Ein Beispiel dürfte nicht überflüssig sein. Für Paris und London sind die Schwingungen 86388,30 und 86400. Also

$$S' - S = \frac{(11,70)(172788,30)}{86,264} = 23435$$

$$u = 2^\circ 40' 54'' \quad 2\varphi = 100^\circ 21' 22'' \quad m = 86266382$$

$$\frac{s' - s}{m \sin u \sin 2\varphi} = k = 0,005902537$$

$$4\alpha_1 = 0,014223400$$

$$\text{Also } 5i\alpha_1 = 0,008320863$$

$$\text{Also für Paris } \left. \begin{array}{l} \text{und London} \end{array} \right\} i = 0,46801$$

$$\text{Mittlerer Werth } i = 0,50343$$

$$\text{Unterschied } = 0,03542.$$

Verzeichniss 21 Pendelmessungen.

	φ	100 O	S	S''	f
Pulo	0° 1' 49''	8626664	5280	2382	2898
Galapagos	0 32 19	26456	1120	2421	-1301
Ascension	7 55 23	27226	16521	10536	5985
Sierra Leone . .	8 29 28	26754	7080	11740	-4660
Porto bello	9 32 30	27201	16021	14179	1842
Jamaika	17 56 7	28466	41325	43227	-1902
Valparaiso	33 2 30	32844	128925	131671	-2746
Paramatta	33 48 43	33148	135013	137127	-2114
Cape of g. H. . .	33 54 37	33133	134713	137828	-3115
New York	40 42 43	35806	188223	188523	- 300
Toulon	43 7 20	36716	206443	207218	- 775
Paris	48 50 14	38830	248779	252011	-3232
London	51 31 8	40000	272214	272862	- 648
Falkland	51 31 44	39984	271894	272940	-1046
Petropawlowsk .	53 0 59	40887	289983	284361	5622
Altona	53 32 45	40898	290204	288394	1810
Staaten I.	54 46 23	41522	302705	297661	5044
Cape Horn	55 51 20	41798	308235	305735	2500
Leith Fort	55 58 41	41802	308315	306642	1673
Sitka	57 3 0	42062	313524	314518	- 994
St. Petersburg .	59 56 31	43239	337109	335139	1970
Unst	60 45 28	43540	343140	340771	2369
Kandalaks	67 7 43	45255	377512	381225	-3713
Hammerfest . . .	70 40 5	46114	394730	400494	-5764
Port Bowen	73 13 39	47048	413454	412756	698
Grönland	74 32 19	47072	413935	418453	-4518
Melville	74 47 12	47470	421914	419485	2429
Spitzbergen . . .	79 49 58	48328	439117	437127	1990
			6627428	6627426	2

Achter Artikel.

Die Masse der Erde.

Unter Masse wird in der Physik die Menge der materiellen Bestandtheile verstanden, in der Astronomie aber ist die Masse ein rein geometrischer Begriff, nämlich das Produkt der Schwere in das Quadrat des Abstandes, wobei die Schwere als das Doppelte des freien Falles in der Zeiteinheit genommen wird.

Es muss diess bemerkt werden, weil die Verwechslung der physikalischen Masse mit der astronomischen eine Veranlassung zu Angriffen auf die Newton'sche Lehre gegeben hat.

Bei der gegenseitigen Bewegung zweier astronomischen Körper wird einer von ihnen als unbeweglich angesehen, was dadurch geschieht, dass man seine Bewegung in entgegengesetztem Sinn auf den andern überträgt. Das Produkt der Schwere in das Quadrat des Abstandes oder die Bahnmasse \mathfrak{M} , enthält nun nicht mehr die Masse des einen Körpers allein, sondern die Summe beider Massen.

Es ist aber noch ein dritter Körper vorhanden, welcher Einfluss auf die Bewegung hat, daher ist in der Bahnmasse \mathfrak{M} nicht bloss die Summe der Massen jener beiden, sondern noch die mit einem gewissen Faktor multiplicirte Masse des dritten Körpers enthalten.

Die drei Körper seien Erde, Mond, Sonne, ihre Massen δ , \mathfrak{C} , \mathfrak{O} , ihr Dreieck *ems*. Die von ihnen in der Ebene des Dreiecks ausgeübten Kräfte werden in solche zerlegt, die nach der Richtung der Dreieckseiten wirken, und in solche, die auf deren Richtung senkrecht sind. Die letztern bleiben hier unberücksichtigt.

Die Kraft des Mondes nach *me* ist

$$= \frac{\delta + \mathfrak{C}}{me^2} + \frac{\mathfrak{O} \cos m}{ms^2} + \frac{\mathfrak{O} \cos e}{se^2}.$$

Die Kraft der Sonne nach *se* ist

$$= \frac{\delta + \mathfrak{O}}{se^2} + \frac{\mathfrak{C} \cos s}{sm^2} + \frac{\mathfrak{C} \cos e}{me^2}.$$

Es sei

$$\frac{me}{se} = x \quad \frac{se}{ms} = y \quad \frac{me}{ms} = xy,$$

so ist

$$\mathfrak{M}^{\circ} = \delta + \mathfrak{C} + (x^2 y^2 \cos m + x^2 \cos e) \odot$$

$$\mathfrak{M}^{\ominus} = \delta + \ominus + (y^2 \cos s + \frac{1}{x^2} \cos e) \mathfrak{C}$$

$$\cos m = xy - y \cos e \quad \cos s = y - xy \cos e$$

$$\mathfrak{M}^{\circ} = \delta + \mathfrak{C} + x^2 (y^3 x - (y^3 - 1) \cos e) \odot$$

$$\mathfrak{M}^{\ominus} = \delta + \ominus + y^3 \mathfrak{C} + \left(\frac{1}{x^2} - y^3 x \right) \cos e \cdot \mathfrak{C}.$$

Da x ein sehr kleiner Bruch, so ist genähert

$$y = 1 + x \cos e \quad y^3 = 1 + 3x \cos e$$

$$\mathfrak{M}^{\circ} = \delta + \mathfrak{C} - \frac{1}{2} x^3 \ominus - \frac{3}{2} x^3 \cos 2e \cdot \ominus$$

$$\mathfrak{M}^{\ominus} = \delta + \ominus + \mathfrak{C} + \left(\frac{1}{x^2} - x \right) \cos e \cdot \mathfrak{C}.$$

Bei den Bahnmassen werden nur diejenigen Glieder berücksichtigt, welche bei der Umlaufsbewegung unverändert bleiben. Also

$$\mathfrak{M}^{\circ} = \delta + \mathfrak{C} - \frac{1}{2} x^3 \ominus \quad \mathfrak{M}^{\ominus} = \delta + \ominus + \mathfrak{C}$$

$$v = \frac{\frac{1}{2} x^3}{1 + \frac{1}{2} x^3} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{v} = \frac{2}{x^3} + 1$$

$$\ominus = \mathfrak{M}^{\ominus} - \mathfrak{M}^{\circ} = (\mathfrak{M}^{\ominus} - \mathfrak{M}^{\circ}) v$$

$$\delta + \mathfrak{C} = \mathfrak{M}^{\circ} \quad + (\mathfrak{M}^{\ominus} - \mathfrak{M}^{\circ}) v.$$

Der Aequatorialhalbmesser *) = a . Betrachtet man am Aequator den Fall eines gegen die Erdmasse verschwindenden Körpers mit Berücksichtigung des Einflusses des Mondes und der Sonne, so ist

*) In den Artikeln 1 — 6 ist überall Aequatorial- statt Aequatorial- zu lesen.

$$\frac{1}{x_r} = \frac{me}{a} \quad \frac{1}{v_r} = \frac{2}{x_r^3} + 1$$

$$\frac{1}{x_{r'}} = \frac{se}{a} \quad \frac{1}{v_{r'}} = \frac{2}{x_{r'}^3} + 1$$

$$\delta = \mathfrak{M}^\delta + (\mathfrak{M}^c - \mathfrak{M}^\delta) v_r + (\mathfrak{M}^\circ - \mathfrak{M}^\delta) v_{r'}.$$

Das londoner Sekundenpendel = L , die Anzahl der Schwingungen desselben am Aequator in einem mittlern Sonnentage = O_0 , die mittlere siderische Bewegung der Sonne in einem mittlern Sonnentage in Theilen des Umfanges = μ . Man nimmt den mittlern Sonnentag zur Einheit, so ist mit Weglassung des Faktors $4\pi^2 a^3$

$$\mathfrak{M}^\delta = \frac{LO_0O_0}{4a} + (1 + \mu)^2.$$

Das erste Glied ist die scheinbare Schwere, das andere die Schwungkraft.

Die mittlere Entfernung der Sonne oder des Mondes ausgedrückt in Theilen von a sei = A , die mittlere horizontale Aequatorialparallaxe in Theilen des Halbmessers $\frac{64800}{\pi}$ sei = p , so ist

$$A = \frac{1}{\sin p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{6} p + \frac{7}{360} p^3 + \frac{31}{15120} p^5 \dots$$

Mit Weglassung des Faktors $4\pi^2 a^3$ und den mittlern Sonnentag zur Einheit genommen, ist

$$\mathfrak{M}^\circ \text{ oder } \mathfrak{M}^c = A^3 \mu^2.$$

Nach den im siebenten Artikel gegebenen Werthen ist

$$L = 39,13929, \quad a = (3272553,2083) (76,7350881)$$

$$O_0 O_0 = 7441683222$$

$$\frac{LO_0O_0}{4a} = 289,963556779$$

$$(1 + \mu)^2 = 1,005483101578$$

$$\mathfrak{M}^\delta = 290,969039880.$$

Für die Sonne ist nach Bessel, *Astr. Nachr.* No. 133 und nach Enke's *Astr. Jahrb.* für 1852 S. 323

$$\mu = \frac{129597738,2344}{36525 \cdot 1296000} = 0,00273780300645$$

$$p = 8,57116 \quad A = 24064,9814385051$$

$$A^3 = 13936592226415,76$$

$$\mu^2 = 0,000007495565302125$$

$$\mathfrak{M}^\odot = 104462637,122187.$$

Für den Mond ist nach den Tafeln von Damoiseau die
 mittlere tropische Bewegung 1336 Uml. 307°52'41",6.
 Nach Bessel a. a. O. die Präcession 1 23 43,57.
 Folglich die siderische Bewegung 1336 Uml. 306 28 58,03.

Also

$$\mu = \frac{1732559338,03}{36525 \cdot 1296000} = 0,03660099496434.$$

Nach Damoiseau's Tafeln

$$p = 3420,9.$$

Also

$$A = 60,298243878305048$$

$$A^3 = 219237,07130828$$

$$\mu^2 = 0,0013396328323796$$

$$\mathfrak{M}^c = 293,6971787993311$$

$$\mathfrak{M}^\odot - \mathfrak{M}^c = 104462343,425008$$

$$\mathfrak{M}^\odot - \mathfrak{M}^\delta = 104462346,153147$$

$$\mathfrak{M}^c - \mathfrak{M}^\delta = 2,728138919.$$

Es ist sehr nahe

$$v = \frac{1}{2} \frac{\sin^3 8,57116}{\sin^3 3420,9}; v_I = \frac{1}{2} \sin^3 3420,9; v_{II} = \frac{1}{2} \sin^3 8,57116$$

$$\mathfrak{M}^\odot - \mathfrak{M}^c \dots 104462343,425008$$

$$(\mathfrak{M}^\odot - \mathfrak{M}^c) v \dots 0,821650$$

$$\odot = 104462342,603358$$

$$\mathfrak{M}^c \dots 293,6971787993311$$

$$(\mathfrak{M}^\odot - \mathfrak{M}^c) v \dots 0,821650582239$$

$$\delta + c = 294,518829381570$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}^{\delta} \dots & 290,969039880 \\
 (\mathfrak{M}^{\circ} - \mathfrak{M}^{\delta}) v_{I} \dots & 6222 \\
 (\mathfrak{M}^{\circ} - \mathfrak{M}^{\delta}) v_{II} \dots & 3748 \\
 \delta = & 290,969049850 \\
 \mathfrak{C} = & 3,549779531 \\
 \frac{\delta}{\mathfrak{C}} = & 81,9682032 \\
 \frac{\odot}{\delta} = & 359015,30646 \\
 \frac{1}{m} = \frac{\mathfrak{M}^{\circ}}{\delta + \mathfrak{C}} = & 354689,16314.
 \end{aligned}$$

Die beobachtete spezifische Bahnmasse \mathfrak{M} enthält die vereinigten Massen der Sonne, des Planeten und seiner Monde, $= \odot'$.

Die absolute Bahnmasse ist diejenige, bei welcher die Massen des Planeten und seiner Monde gegen die Sonnenmasse verschwinden. Man erhält sie aus der spezifischen Bahnmasse durch Multiplikation derselben mit

$$\frac{\odot}{\odot'} = 1 - \frac{\odot' - \odot}{\odot} = 1 - m.$$

Hier ist m das Verhältniss, welches die Masse des Planeten mit seinen Monden zur Gesamtmasse hat, die aus der Masse der Sonne, des Planeten und seiner Monde besteht. Ist dann der mittlere Abstand des Planeten von der Sonne $= A$, seine spezifische mittlere siderische Bewegung in einem mittlern Sonnentage in Theilen des Umfangs $= \mu$, die absolute mittlere siderische Bewegung in Theilen des Umfangs $= \mu\sqrt{1-m} = \mu'$; so ist die feste Zahl des Sonnensystems

$$K = 2\pi A^2 \mu^3 \sqrt{1-m} = 2\pi A^2 \mu'^3.$$

Für die Erdbahn ist $A = 1$ und $\frac{1}{m}$ oben gefunden.

„ „ spezifische mittl. sid. Be. $\mu = 0,00273780300645$.

„ Reduktion durch $\frac{1}{2} m$ $= 385944$.

„ absolute mittlere sid. Be. $\mu' = 0,00273779914701$.

Multiplirt mit 2π $K = 0,0172020993745$.

Gauss, *theoria mot.* $K = 0,01720209895$.

Zur Veranschaulichung dient die Gleichung $R^2 = AV^2$. V ist der Bogen, welchen der Planet in einem mittlern Sonnentage mit seiner absoluten mittlern siderischen Bewegung in einem Kreise beschreibt, dessen Halbmesser $= A$.

Neunter Artikel.

Der Newton'sche Satz, die projektive Methode in der Ebene, und der Krümmungskreis des Kegelschnitts.

In Crelle *Zeitschrift für Mathematik etc.* 1846. Bd. 31. II. 174, giebt Möbius einen Beweis des Newton'schen Satzes durch Ablothung des Kreises auf eine Ebene. Dieser Beweis erinnerte mich an einen Aufsatz aus dem Anfange meines mathematischen Lehramts vor etwa 40 Jahren, worin ich auf ähnliche Weise sämtliche Eigenschaften der Ellipse aus bekannten Sätzen des Kreises ableitete, indem ich beide als einem Cylinder angehörig annahm.

So einfach diese Herleitung auch ist, und so elegant sie mitunter ausfällt, wie der erwähnte Beweis von Möbius zeigt, so genügt sie doch nicht, erstlich weil sie nur auf die Ellipse, nicht auf die beiden andern Kegelschnitte anzuwenden ist, dann auch weil sie Sätze der Ebene aus einer Raumbetrachtung entwickelt, statt umgekehrt.

Bei der Untersuchung der Kegelschnitte ist die projektive Methode in der Ebene, der gewöhnlichen halb konstruirenden, halb algebraischen oder trigonometrischen Behandlung wissenschaftlich entschieden überlegen. Die projektive Geometrie beseitigt die Anwendung der Verhältnisse und Gleichungen, vermeidet überhaupt die rechnende Darstellung, und gründet ihre Schlüsse nur auf die Durchschnitte grader Linien. Da die Kegelschnitte eben sowohl in eine grade Linie wie in einen Punkt übergehen können, und der Punkt als Pol einer graden Linie angesehen wird, so hat jeder Satz der projektivi-

ven Geometrie einen polaren Gegensatz, welcher ausgesprochen wird durch Umnennung der graden Linien in Punkte, der Punkte in grade Linien, der Ecken einer dem Kegelschnitt eingeschriebenen Figur in Seiten einer umschriebenen, und der Seiten der umschriebenen in Ecken einer eingeschriebenen.

Jeder einfach auf grade Linien und Punkte bezogene Satz der ebenen projektiven Geometrie entspricht einem Satz der Kegelschnitte, der durch den Schluss vom Besondern auf das Allgemeine sich auffinden lässt.

Diese Methode, welche ich in der *Bildlehre, Mitau und Leipzig* 1846, vollständiger entwickelt habe, ist bei geometrischen Untersuchungen noch wenig in Gebrauch gekommen. Es sei daher erlaubt, sie beispielsweise auf den Newton'schen Gravitationsatz und die Bestimmung des Krümmungshalbmessers eines Kegelschnitts anzuwenden.

Erläuterung zu Newton's Beweis.

(Fig. 1.) Der Planet durchlaufe in irgend einer krummen Linie in gleichen Zeiten die Bögen $p'p$ und pp'' . Die beliebig gezogenen Linien pm und pf schneiden die Sehne $p'p''$ in x und y . Die Bewegung pp' wird hervorgebracht entweder durch die Bewegungen px und xp' , oder durch die Bewegungen py und yp' .

Je kleiner die Zeit ist, desto genauer ist die Sehne $p'p''$ der in p gezogenen Berührungslinie parallel, und desto mehr nähert sich das Verhältniss $p'x : p'y$ dem der Gleichheit. Diese Linien sind zuletzt der Bahngeschwindigkeit V gleich.

Die krummlinige Bewegung wird also hervorgebracht durch Zusammenwirken der Geschwindigkeit V entweder mit einem nach m gerichteten Fall px , oder mit einem nach f gerichteten Fall py . Die Linie xy ist der berührenden in p parallel. Die Kraft wird durch den doppelten Fall in der Zeiteinheit bezeichnet, also durch $2px$ oder $2py$.

Man beschreibe um die drei Oerter $p'p''$ einen Kreis n , welcher von der Linie pf in p''' geschnitten wird, so ist

$$py \cdot p'''y = p'y \cdot p''y.$$

Wenn zuletzt die Oerter $p'p''$ einander unendlich nahe liegen, so ist n der Mittelpunkt des Krümmungskreises, nt das zur Sehne pp'' gezogene Loth und

$$2py \cdot pt = V^2$$

oder wenn $G=2py$ die nach f gerichtete Gravitation ist, so ist

$$G \cdot pt = V^2.$$

Newton's Beweis.

Diesen durch die vorstehende Einleitung erläuterten Beweis giebt Newton in dem berühmten 11ten Satz der *Princip. Ph. N.* vom 8. Mai 1686, gegründet auf die von Kepler am 15. Mai 1618 entdeckten Gesetze der Planetenbewegung.

(Fig. 2.) Die Bahn ist ein Kegelschnitt, dessen grössere Halbaxe = A , halber Parameter = P , Mittelpunkt m , Brennpunkt f . Die Berührende in p ist ph , mb und fg'' sind senkrecht auf ph , mg''' parallel zu fp , der dem Halbmesser mp zugeordnete Halbmesser mq ist parallel zu ph , der Halbmesser $m\pi = mp$, die Abschnitte $bg'' = bg'''$, $mg'' = mg''' = A$, $p'x = p''x$,

$$px : py = mp : mg''' = mp : A$$

$$px \cdot \pi x : p'x \cdot p''x = mp^2 : mq^2.$$

Zuletzt ist $\pi x = 2mp$ $p'x = p''x = V$;

also

$$2px \cdot mq^2 = V^2 \cdot mp$$

$$2py \cdot mq^2 = V^2 \cdot A$$

$$G \cdot mq^2 = V^2 \cdot A.$$

Aber

$$mb^2 \cdot mq^2 = A^3 \cdot P$$

Also

$$G \cdot A^2 \cdot P = V^2 \cdot mb^2.$$

Der Radius vektor $fp = q$, der in der Zeiteinheit beschriebene Sektor = S

$$2S = V \cdot fg'' = V \cdot fp \cdot \frac{mb}{mg'''} = V \cdot mb \cdot \frac{p}{A},$$

also

$$Gq^2 = \frac{4S^2}{P}.$$

Projektive Sätze in der Ebene.

Die projektive Methode gründet sich auf die projektive Gleichheit, und diese wird aus der perspektiven Gleichheit genommen.

Vier grade Linien in einer Ebene, welche von einem Punkt ausgehen, werden von zwei graden Linien *A* und *B* durchschnitten. Die vier Durchschnittspunkte bilden in der Linie *A* ein Viereck, welches dem Viereck in *B* perspektiv gleich ist.

(Fig. 3.) Zwei Vierecke in graden Linien, welche einem dritten Viereck in einer graden Linie perspektiv gleich sind, sind einander projektiv gleich (Bildlehre 54)

In *A* gesehen aus 5 . . . 1234 \parallel *abcd*.

In *B* gesehen aus 1 . . . 5678 \parallel *abcd*.

Also in *A* und *B* 1234 \parallel 5678, projektiv gleich.

Wenn die Vierecke in zwei graden Linien *A* und *B* dem Viereck in einer dritten graden Linie *C* projektiv gleich sind, so sind sie einander selbst projektiv gleich (B. 59).

Es können also in einer graden Linie zwei projektiv gleiche Vierecke liegen (B. 104. Doppelstab).

Bei einem solchen in einer graden Linie liegenden Doppelviereck können einige Punkte zusammenfallen, andre ins Unendliche rücken. Das letztere wird durch ∞ bezeichnet.

Die beiden wichtigsten Fälle sind die harmonische Gleichheit (Gleichmessung), und die projektive Fläche (Flächung).

Ein Viereck 1234 in einer graden Linie ist sich selbst harmonisch gleich, wenn das eine Glied 12 dem andern Gliede 34 sowohl grad als umgekehrt projektiv gleich ist (B. 66).

1234 \parallel 1243, harmonische Gleichheit.

Diese harmonische Gleichheit entsteht aus der Theilung einer graden Linie oder eines Winkels in zwei gleiche Theile.

Drei Abschnitte oder Glieder 15, 26, 37, in einer graden Linie bilden eine projektive Fläche, wenn das eine Glied den beiden andern verwechselt projektiv gleich ist (B. 106).

1532 \parallel 1567, 1536 \parallel 1527, u. s. w.

(Fig. 4.) Die drei Paare der Gegenseiten eines Vierecks $abcd$ bilden in jeder beliebigen graden Linie eine solche projektive Fläche. Jedes Seitenpaar fasst ein Glied dieser Fläche.

(Fig. 5.) Wenn ein Punkt der projektiven Fläche, z. B. 7, ins Unendliche rückt, so entsteht eine einfache Projektivfläche (B. 109).

$$15, 26, 3\infty.$$

In diesem Fall ergeben sich in der graden Linie zwei Paare von projektiv gleichen Dreiecken

$$312 \parallel 365 \quad 316 \parallel 325.$$

Aus der harmonischen Gleichheit entsteht, wenn ein Glied in die Hälfte geteilt wird, eine einfache Projektivfläche von zwei vereinigten Punkten (B. 115).

Es sei

$$12, 34, \text{ eine harmonische Gleichheit}$$

und

$$m \text{ die Mitte von } 34,$$

so sind

$$\left. \begin{array}{l} \infty m, 12, 33 \\ \infty m, 12, 44 \end{array} \right\} \text{ einfache } \\ \text{Projektivflächen.}$$

Projektive Sätze vom Kegelschnitt.

(Fig. 6. 7). Es sei p ein Punkt des Umfangs, die grosse Axe wird von der Ordinate von p in c , von der Berührenden an p in h , von der Normallinie an p in k getroffen, so dass hpk ein rechter Winkel ist. Es seien m der Mittelpunkt, ff' die beiden Brennpunkte, gg' die beiden Scheitelpunkte, i der zu g gehörige parametrische Punkt. Es sind dann

$$\left. \begin{array}{l} gg', hc, \\ ff', hk, \\ ff', gi, \end{array} \right\} \text{ harmonische } \\ \text{Gleichheiten.}$$

Aus diesen folgen die einfachen Projektivflächen

$$\begin{aligned} \infty m, & \quad gg, \quad hc \\ \infty m, & \quad ff, \quad hk \\ \infty m, & \quad ff, \quad gi \\ \infty m, & \quad gi, \quad hk \end{aligned}$$

Hieraus die projektiv-gleichen Dreiecke auf der Axe:

$$mgh \parallel mcg, \quad mgh \parallel mki, \quad mcg \parallel mki, \quad mki \parallel mig.$$

Wenn also der Punkt p des Umfangs beliebig verändert wird, so bilden sein Normalpunkt k und Ordinatenpunkt c mit dem Mittelpunkt m ein Dreieck, welches einem unveränderlichen Dreieck mig projektiv gleich ist.

Es sei fg'' senkrecht zur Berührenden ph , d der Durchschnitt von pk und mg'' , so hat man die projektiv-gleichen Dreiecke

$$mdg'' \parallel mkf, \quad mkf \parallel mfh, \quad mdg'' \parallel mfh.$$

Also ist fd der Berührenden ph parallel, also $fdpg''$ ein Rechteck.

Aus dem Kreisviereck $fcpg''$ folgen die gleichen Winkel $dg''p = fp g'' = hcg''$, also die ähnlichen Dreiecke $mcg'' \sim mg''h$. Projektiv-gleiche Dreiecke sind. $mcg \parallel mgh$. Also ist $mg'' = mg = A$ die grössere Halbaxe.

Auf der Linie md nimmt man:

$$mc'' = mc \quad mf'' = mf \quad mi'' = mi,$$

so sind die Linien gg'', cc'', ff'', ii'' parallel. Dann ist:

$$\begin{aligned} mf''g'' \parallel mfg \parallel mif, & \quad \text{also } if'' \simeq fg'', \\ mc''g'' \parallel mcg \parallel mgh \parallel mki, & \quad \text{also } gc'' \simeq hg'', \quad ke'' \simeq ig'', \\ mi''g'' \parallel mig \parallel mki, & \quad \text{also } ki'' \simeq cg''. \end{aligned}$$

Da $ki'' \simeq cg''$ und $kd \simeq fg''$ so ist $fi'' \simeq cd$ (B. 16). Also $fc dg'', fki''d$ Kreisvierecke.

Die Linien pc , fd , treffen in o , die Linien ko , fp in l zusammen, wo l ein rechter Winkel ist. Wegen der Kreisvierecke $fc pd$, $lop d$, sind die Winkel $fdl = fdc$. Aber $fi'' \simeq cd$. Also die Winkel $fdc = dfi''$.

Also die Winkel $fdl = df''$ und $fdi'' = dfl$.

Also $li'' = fd$.

Also ist $pl = g''i'' = gi = P$ der halbe Parameter.

Anmerkung. Setzt man

$$fp = \varrho, mf = F, \frac{F}{A} = f, mc = x, fe = u,$$

so giebt diese projektive Darstellung unmittelbar die bekannte Gleichung

$$\varrho = A - f \cdot x = P + f \cdot u.$$

Der Krümmungskreis. Erste Bestimmung.

(Fig. 8.) Es seien p und p' zwei beliebige Punkte im Umfange des Kegelschnitts, ihre Ordinaten pc und $p'c'$, ihre Normallinien pk und $p'k'$, welche in n' zusammentreffen. Ihre Sehne pp' trifft die Axe in h' , die der Normallinie $p'k'$ parallele Linie pq trifft die Axe in q , die der Normallinie $p'k'$ parallele Linie $h'r'$ trifft die Ordinate pc in r' , die Normallinie pk in s' .

Wie oben gezeigt wurde ist

$$mkc \parallel mig, mk'c' \parallel mig, \text{ also } mkc \parallel mk'c'.$$

Also $\infty m, kc', k'c$ eine einfache Projektivfläche.

Also $k'cmk \parallel k'cc' \infty$.

Ferner $h'k'q \parallel h'p'p \parallel h'c'c$,

folglich $\infty h', c'q, k'c$, eine einfache Projektionsfläche.

Also $k'ch'q \parallel k'cc' \infty$.

Also $k'cmk \parallel k'ch'q$.

Also $k'c, mq, kh'$, eine Projektivfläche.

Also. $mkch' \parallel k'kqh'$.

Aber aus p gesehen ist $k'kqh' \parallel k'n' \infty p'$.

Aus h' gesehen ist. . . $k'n' \infty p' \parallel kn's'p$.

Also $mkch' \parallel kn's'p$ oder $mkch' \parallel n'kps'$.

Wegen des gemeinsamen Punkts k treffen also $mn', cp, h's'$ in einem gemeinsamen Punkt r' zusammen (B. 58).

Wenn die Punkte pp' einander immer näher rücken und zuletzt zusammenfallen, so fällt n' in n , h' in h , r' in r . Es ist dann n die Mitte des Krümmungskreises, und hr parallel zu pk oder senkrecht zur Berührenden ph .

Hieraus ergibt sich folgende Verzeichnung:

(Fig. 9.) Ein Punkt des Kegelschnitts sei p . Dessen Berührende, Ordinate und Normallinie treffen die Axe in h, c, k , die Ordinate pc trifft die in h zur Berührenden gezogene senkrechte Linie in r , die vom Mittelpunkt m gezogene Linie mr trifft die Normallinie pk in n , so ist n die Mitte des Krümmungskreises.

Der Krümmungskreis. Zweite Bestimmung.

(Fig. 10.) Aus k wird zur Berührenden ph eine Parallellinie gezogen welche den Radius vektor fp in t , die Ordinate pc in u , den Halbmesser mp in v , die zum Radius vektor fp senkrechte Linie $p\omega$ in ω , die zur Axe parallele Linie pz in z trifft.

Da $\infty m, ff, hk$ eine einfache Projektivfläche, so ist. $mkf\infty \parallel mfh\infty$.

Aus p gesehen ist $mkf\infty \parallel vktz, mfh\infty \parallel vt\infty z$.

Also $vktz \parallel vt\infty z$.

Also $\infty k, ut, vz$ eine einfache Projektivfläche, also $ktz \parallel kvt$

Die drei rechten Winkel hpk, tpw, upz , bilden auf der aus k mit ph parallel gezogenen eine einfache Projektivfläche (B. 158)

$$\infty k, t\omega, uz,$$

also $ku\omega \parallel ktz \parallel kvt$.

Also $\infty k, tu, v\omega$, eine einfache Projektivfläche.

Also $vku\infty \parallel tk\omega\infty$.

Aus p gesehen ist $vku\infty \parallel mkch$,

Aus r gesehen ist $mkch \parallel nkp\infty$.

Also $tk\omega\infty \parallel nkp\infty$ oder $tk\omega \parallel nkp$.

Also ist die Linie nt der Linie $p\omega$ parallel oder zu pt oder pf senkrecht. Hieraus ergibt sich die Verzeichnung durch den Brennpunkt:

(Fig. 9.) Aus dem Normalpunkt k wird eine der Berührenden ph parallele Linie gezogen, welche den Radiusvektor in t trifft. Aus t wird eine zum Radiusvektor senkrechte Linie gezogen, welche die Normallinie pk in n trifft, so ist n die Mitte des Krümmungskreises.

Anmerkung. Es sei (Fig. 2 und 9) das Loth $mb = L$, die Normallinie $pk = N$, der Krümmungshalbmesser $np = \Re$, so ergibt sich aus dem Obigen sofort, da $pl = P = \frac{B^2}{A}$ ist:

$$L \cdot N = A \cdot P, \quad \Re = \frac{N^3}{P^2} = P \cdot \frac{A^3}{L^3}.$$

Es sei der Halbmesser $mp = r$, der zugeordnete $= r'$, der Normalwinkel $k = \varphi$ (Polhöhe), so ist

$$L \cdot r' = A \cdot B, \text{ also } \Re = \frac{r'^3}{A \cdot B}, \quad L^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi.$$

Der Gravitationsatz.

Nachdem die erforderlichen Sätze durch die projektive Methode gefunden worden sind, kann am Schluss die Rechnung eintreten.

Die Gravitation nach dem Brennpunkt $= G$, die Bahngeschwindigkeit $= V$, so ist, wie oben gezeigt,

$$G \cdot pt = V^2$$

$$2S = V \cdot pd, \quad \frac{pd^2}{fp^2} = \frac{pl^2}{pk^2} = \frac{pl}{pt}, \quad (\text{Fig. 9.})$$

also
$$G \cdot Q^2 = \frac{4S^2}{P} = 4\pi^2 A^3 \mu^2,$$

wo μ die mittlere tägliche siderische Bewegung in Theilen des Umfangs.

Zehnter Artikel.

Hat Eratosthenes einen Erdgrad gemessen *)?

Ein Artikel des Hrn. Vincent in den *Comptes rendus hebdomadaires* der pariser Akademie der Wissenschaften vom 21. Februar 1853 No. 8 giebt ein sehr überraschendes Zeugniß in Betreff der Gradmessung, die dem Eratosthenes zugeschrieben wird. In dieser Gegend habe ein dem Sonnendienste geweihter Ort gelegen, der Sitz eines altägyptischen Priesterkollegiums, Apollinopolis, jetzt Edfu, in Oberägypten unter $24^{\circ}58'$; hier fand Champollion Kalenderhieroglyphen und andre astronomische Denkmäler.

Hr. Vincent nimmt nach Saigey's *Physique du globe* (24° bis $25^{\circ} = 110768$ Meter, $25^{\circ} - 26^{\circ} = 110782$ Meter) den mittlern Grad für Apollinopolis 110775 Meter. Indem er nun die altägyptische Elle auf $527\frac{1}{2}$ Meter festsetzt, erhält er den Erdgrad des Eratosthenes, welcher 700 Stadien zu 300 altägyptischen Ellen, also 210000 Ellen betrug, durch Multiplikation der beiden Zahlen 210000 und $527\frac{1}{2}$, gleich 110775 Meter, also genau so gross, als wenn er aus den Gradmessungen der neuesten Zeit hervorgegangen wäre. Diese Genauigkeit ist so merkwürdig, dass sie zu einer weitern Prüfung auffordert.

Hr. Vincent verweist auf die von ihm selbst 1851 herausgegebene nachgelassene Schrift von Letronne über die Fragmente des Heron**). Diese Schrift wurde 1816 von der *Académie des inscriptions* als Preisarbeit gekrönt, von ihrem Verfasser indess nicht veröffentlicht. Der neuere Herausgeber bezeichnet (S. 116, 278) zwei Bestimmungen der altägypt-

*) Humboldt Kosmos II. 208. 435.

***) *Recherches critiques, historiques et géographiques sur les fragments d'Héron d'Alexandrie, ou du système métrique Egyptien, considéré dans ses bases, dans ses rapports avec les mesures itinéraires des Grecs et des Romains, et dans les modifications qu'il a subies depuis le regne des Pharaons jusqu'à l'invasion des Arabes.* [Ouvrage posthume de M. Letronne, couronné en 1816 par l'Académie des inscriptions et belles-lettres revu et mis en rapport avec les principales découvertes faites depuis, par A. F. H. Vincent. Paris 1851. 4^o. 294.]

tischen Elle 525 und 530 MM. und nimmt aus ihnen das Mittel $527\frac{1}{2}$ MM. Dieses Mittel legt er den von Letronne geführten hienach abgeänderten Rechnungen zum Grunde.

Von dem ersten jener beiden Werthe, 525 MM., sagt Hr. Vincent (S. 116): *La longueur des diverses coudées que l'on a découvertes depuis la première rédaction de ce Mémoire, réduisent la longueur moyenne de la coudée telle qu'elle est aujourd'hui connue, à 525 millimètres. Voyés le traité de métrologie de M. Saigey p. 17. Voyés aussi Boeckh metrologische Untersuchungen p. 227.*

Hier ist wohl Böck's Werk «Gewichte, Münzfusse und Maasse des Alterthums, Berlin 1838» gemeint. In dieser Schrift findet aber Böckh aus sechs altägyptischen Maassstäben als Mittel 524,587 MM., nämlich S. 227:

Turin (Drovetti)	523,525
Louvre (Drovetti) ..	525,
Florenz (Nizzoli) . . .	523,4
Paris (Raffaelli)	524,1
Florenz (Anastasy) .	526,5
Pariser Museum	525,

Mittel . . . 524,5875 Meter.

Der zweite von Hrn. Vincent angeführte Werth 530 Metre ist weder ein materielles noch ein aus altägyptischen Denkmälern geschlossenes Maass, sondern eine Rechnungsgrösse, welche Letronne aus dem römischen Fuss ableitet. Letronne findet nämlich auf der pariser Nationalbibliothek unter den nicht veröffentlichten Handschriften sechs Fragmente des Heron, Auszüge aus einem verloren gegangenen grössern Werk über praktische Geometrie, dessen Verfasser um 430 nach Chr. gelebt zu haben scheint. Letronne zeigt, dass die in diesen Fragmenten gegebenen Maassvergleichen nur dadurch in Uebereinstimmung gebracht werden können, wenn der Fuss, den diese Fragmente den italischen nennen, der römische war. Letronne setzt die ägyptische Elle gleich $\frac{9}{5}$ des römischen Fusses, und findet:

S. 10 den römischen Fuss .294,7 MM.

S. 108 die ägyptische Elle . . . 530,46 MM.

Böckh a. a. O. kommt ebenfalls auf diese Elle, nennt sie aber nicht die ägyptische, sondern die königliche oder babylonische Elle. Er setzt S. 197 nach Wurm den römischen Fuss 131,15 par. Lin. Nimmt man das Meter 443,296 par. Lin., so ist

der römische Fuss 295,852 MM,
die babylonische Elle $\frac{9}{5}$ röm. Fuss . . . 532,534 MM.

Einen genauern Werth dieser babylonischen Elle entwickelt Böckh aus dem griechischen Maass. Diese Elle ist (S. 199, 216) $\frac{144}{125} = 1,151$ einer Rechnungsele, welche $1\frac{1}{2}$ griech. Fuss hält; ein Verhältniss, welches (S. 219) entsprungen ist aus dem gesetzlichen Verhältniss der Hohlmaasse und Gewichte $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1,144714$. Nach Herodot (Böckh S. 214, Le-tronne S. 234) wird es bei gewöhnlichen Vergleichen durch das einfachere Verhältniss $\frac{8}{7} = 1,142857$. . . ersetzt. Nun bestimmt Böckh (S. 199) aus den Messungen des Engländer's Stuart an Tempelgebäuden, die der perikleischen Zeit angehören, den griechischen Fuss 136,66 p. L. Mithin ist

der griechische Fuss 308,282 MM.
die griechische Elle $1\frac{1}{2}$ gr. Fuss . . . 462,423 MM.
die babylonische $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ der gr. Elle . . . 529,342 MM.

Dieser Werth ist nur um den 11ten Theil eines Zolls grösser als die Elle am Nilmesser zu Elephantine. Die nahe Uebereinstimmung berechtigt vielleicht zu dem Schluss, dass die babylonische Elle das Urmaass der jüngern ägyptischen Elle war. Will man es dann für erlaubt halten, das Mittel aus Werthen zu nehmen, deren grösster Unterschied nicht ganz $\frac{1}{5}$ Zoll ist, so ist:

die babylonische Elle.....529,342 MM ,
die Elle am Nilmesser zu Elephantine..527, MM.,
die Elle aus sechs alten Stäben524,587 MM.

• Mittel....526,976 MM.

300 solcher Ellen geben das alexandrinische Stadium158,0928 Meter.

Letronne findet (S. 108), dass der in den Fragmenten des Heron erwähnte Schoinos oder Farsang 30 Stadien zu 400 (babylonischen) Ellen gehalten habe, übereinstimmend mit Herodot, dessen Schoinos in Oberägypten 30, in Unterägypten 60, beim See Möris 120 Stadien betrug, während (S. 225) der Schoinos des Eratosthenes 40 alexandrinische Stadien zu 300 (ägyptischen) Ellen hielt. Wenn also der Schoinos überall derselbe war, so musste (S. 130) der Erdgrad von 700 alexandrinische Stadien $17\frac{1}{2}$ Schoinen betragen.

Nach diesem Verhältniss untersucht Letronne in der zweiten Abtheilung seiner Schrift die ägyptischen Maassangaben im Herodot, Diodor, Strabon u. a. Bei dieser Grösse des Schoinos stimmen die Wegstrecken des Herodot auf 1 bis 3 Minuten mit der Wirklichkeit. Letronne bemerkt (S. 155): die Kenntniss der gradlinigen Entfernungen der nicht unter einem Meridian liegenden Oerter Pelusios, Heliopolis, Elephantine, könne nur durch Vermittelung ihrer geographischen Längenunterschiede erlangt worden sein (?). Ferner (191): das von Eratosthenes gebrauchte Stadium könne schon in den Angaben des Herodot über die Abmessungen der Pyramiden nachgewiesen werden, sei also viel älter als die Zeit des Eratosthenes. (Herodot starb nach 408 v. Chr., Eratosthenes war seit 228 v. Chr. Bibliothekar zu Alexandrien.) (S. 166): in Aegypten seien lange vor Herodot und vielleicht 1800 bis 2000 vor Chr. Landesvermessungen von grosser Genauigkeit ausgeführt worden.

Letronne ist daher geneigt, dem Eratosthenes die Bestimmung des Erdgrades zu 700 Stadien ganz abzuspreehen. Er sagt (S. 244 Anm. 2): das Zeugniss des Kleomedes *Cycl. Theor. libr. I c. 10* verdiene kein Vertrauen; (S. 121): diese

Bestimmung gebe den Erdgrad um 10000 Toisen fehlerhaft, und «*cette prétendue opération, en tant qu'opération de géodésie, n'a jamais été faite*»; und weiterhin (S. 281): «*opération prétendue que le compilateur Cléomède attribue à Eratosthène.*»

Letronne sieht in der Angabe von 700 Stadien auf den Erdgrad das Ergebniss einer lange vor Eratosthenes in Aegypten ausgeführten Gradmessung. Er sagt darüber (S. 129, 280): «*Il n'est pas moins certain qu'ils avaient, à une époque qui nous est inconnue, mesuré un arc du méridien, et rapporté leurs propres mesures à la grandeur du degré avec une exactitude qui ne le cède point à celle des modernes.*» Ferner (S. 246): Die übrigen vier Angaben des Erdumfangs, nämlich nach Aristoteles 400000, nach Archimedes 300000, nach Posidonius 240000, nach Ptolemäus 180000 Stadien, die vielleicht zu folge Gosselin einer und derselben in verschiedenen Massen ausgedrückten Bestimmung angehören mögen, seien jener ägyptischen Gradmessung fremd, da jene Zahlen zwar unter sich in einfachen Verhältnissen stehen, aber zu dem Umfang von 252000 Stadien kein einfaches Verhältniss haben.

Die Anführung des Strabon II. p. 132 Cas. ist allerdings weniger entscheidend zu Gunsten des Eratosthenes, da sie bloss erwähnt, dass derselbe den Erdgrad zu 700 Stadien annehme, und dass Hipparch (160 — 125 v. Chr.) sich dieser Zahl bediene; aber nicht bemerkt, ob die Messung von Eratosthenes selbst herrühre.

Dagegen wird im Plinius diese Messung ausdrücklich dem Eratosthenes zugeschrieben. H. N. l. 2. 112: — «*Universum autem hunc circuitum Eratosthenes in omnium quidem literarum subtilitate, et in hac utique prae ceteris solers, quem cunctis probari video, 252000 stadiûm prodidit.* — c. 108 lect. 112: — *improbum ausum, verum ita subtili argumentatione (computatione) comprehensum, ut pudeat non credere.*»

Freilich verwechselt Plinius das alexandrinische Stadium von 108 römischen Schritten mit dem olympischen Stadium von 125 römischen Schritten, indem er jene Zahl 252000 durch Multiplikation mit 125 auf 31'500000 röm. Schritt bringt.

Die runde Zahl von 700 Stadien kann als solche nicht aus einer Verbindung terrestrischer und astronomischer Messungen hervorgegangen sein. Die Maassangaben des Herodot sind terrestrische Entfernungen und Wegstrecken, zu deren Messung astronomische Beobachtungen nicht erforderlich waren. Sie sind ebenfalls in runden Zahlen ausgedrückt, so dass sie füglich aus der gleichförmigen Bewegung der Karawanen abgeleitet, oder in Maass verwandelte Tagereisen sein können. Es scheint sehr gewagt, hieraus auf eine Vermessung Aegyptens in heutigem Sinn zu schliessen. Da Herodot von astronomischen Beobachtungen nichts berichtet, so ist es mindestens sehr zweifelhaft, dass Gradmessungen vor Herodot in Aegypten ausgeführt worden seien. Auch wenn von solchen Messungen jede Spur bis auf die runde Zahl 700 verloren gegangen wäre, so hätte diesem aufmerksamen Beobachter und Berichterstatter eine so wichtige Thatsache nicht entgehen können.

Die oben bezeichnete Stelle des Kleomedes, eines nahen Zeitgenossen des Strabon und Plinius, ist die einzige, welche als astronomische Begründung der 700 Stadien bis auf uns gekommen ist. Man hat um so weniger Grund, sie für eine ohne Sachkenntniss gemachte Kompilation zu erklären, da sie nichts weiter sein will, als eine Hinweisung auf eine verloren gegangene Schrift des Eratosthenes. Sie beginnt so (*Bernhardi Eratosthenica* Berlin 1822 p. 57): « — Die (Meinung oder Angabe) des Eratosthenes, welche mit einer geometrischen Begründung zusammenhängt» — — «Er sagt, dass Syene und Alexandrien unter demselben Meridian liegen» — — «Er sagt ferner, und es verhält sich so, dass Syene unter dem sommerlichen Wendekreise liegt. Wenn die Sonne in das Zeichen des Krebses tritt, und Sonnenwende machend genau in der Mitte des Himmels (um Mittag) steht, werden die Gnomone der Uhren schattenlos, weil die Sonne in genau senkrechter Lage über ihnen ist. Dieses geschieht, wie man sagt, 300 Stadien in der Richtung des Durchmessers (auf den Durchmesser hin: ἐπὶ σταδίου τριακοσίου τὴν διάμετρον). In Alexandrien aber werfen die Gnomone der Uhren um dieselbe Zeit einen Schatten, da diese Stadt nördlicher als Syene

liegt.» — — «Der (Bogen) auf der Skapha wird (in Alexandrien) ein Funfzigstel seines Kreises befunden, also muss der Abstand von Syene und Alexandrien ein Funfzigstel des grössten Kreises der Erde sein. Dieser Abstand beträgt 5000 Stadien, der ganze Kreis also 250000 Stadien. Diess ist die Begründung des Eratosthenes.»

Es erscheint hier Eratosthenes nicht ausdrücklich als ein die Beobachtungen und Messungen veranstaltender Astronom, gewiss aber als ein die Grösse des Erdgrades aus ihnen berechnender Geometer. Die 5000 Stadien oder 125 Schoinen können als runde Zahl nicht auf einer geometrischen Messung beruhen, sie sind wohl aus den zur Zurücklegung des Weges von Alexandrien nach Syene erforderlichen Tagereisen hergeleitet worden. Dagegen konnte die Schattenlänge auf der Skapha zu Alexandrien in jedem Sommer beobachtet werden.

Eratosthenes war nach den ihm zugeschriebenen Erfindungen, z. B. des *cribrum* zur Bestimmung der Primzahlen, ein scharfsinniger Mathematiker. Er musste also die Unzulänglichkeit der angeführten Beobachtungen einsehen. Wäre er im Besitz genauerer Beobachtungen gewesen, so hätte er sie gewiss so wie jene in seinem Buche angeführt.

Der hieraus folgende Erdgrad ist $69\frac{4}{9}$ Stadien. Es ist aber sehr möglich, dass statt derselben die runde Zahl 700 als eine zu Reduktionen bequemere von Eratosthenes selbst festgestellt wurde, wie sie denn auch Hipparch zu diesem Zweck benutzte, und wie sie Strabon und Plinius an den angeführten Stellen als eine von Eratosthenes angegebene Zahl bezeichnen. Da sie auf die Entfernung zwischen Alexandrien und Syene gegründet ist, und Alexandrien erst nach Herodot's Zeit erbaut wurde, so kann diese Bestimmung nicht einer frühern Zeit angehören.

Nach Nouet (1832 und 1836) sind die Ortsbestimmungen:

	Breite.	Länge.
Alexandrien, Leuchtthurm . . .	31°12' 53	47°32' 35''
Syene oder Assuan	24 5 23	50 30 18

Aus ihnen folgt zwischen beiden Oertern:

Die mittlere Breite $27^{\circ}39' 8''$
 Der Bogen d. grössten Kreises $7\ 35\ 30 = 7^{\circ},591666..$

Nach Encke's Berechnung aus den von Bessel gefundenen Abmessungen des mittlern Meridians im *Berl. Astr. Jahrbuch* für 1852 S. 353 ist für die mittlere Breite $27^{\circ}39'8''$ der Meridiangrad $56849,904$ Toisen, oder $\frac{56849,904}{0,513074} = 110802,54$ Meter, oder $\frac{110802,54}{158,0928} = 700,87$ alexandrinische Stadien.

Nimmt man mit Eratosthenes den Erdgrad $69\frac{4}{9}$ Stadien oder $208333\frac{1}{3}$ ägyptische Ellen, oder $208333\frac{1}{3} \times 0,526976 = 109786\frac{2}{3}$ Meter, so ist er um 1016 Meter zu klein.

Der Bogen des grössten Kreises zwischen beiden Oertern $7^{\circ},591666..$ giebt mit dem gradlinigen Abstand von 5000 Stadien den Erdgrad $\frac{5000}{7,591666..} = 658,617$ Stadien.

Der gradlinige Abstand ist also von Eratosthenes um mehr als 300 Stadien zu klein angegeben, was hinreichend beweist, dass er nicht durch geometrische Messung gefunden sein kann. Er beträgt $7^{\circ},591666.. \times 110802,54 = 841176$ Meter, oder $7^{\circ},591666.. \times 700,87 = 5320,77$ alexandrinische Stadien.

Indem also Eratosthenes sowohl den terrestrischen als den astronomischen Abstand zwischen beiden Oertern beträchtlich zu klein annahm, dabei aber den hieraus gefundenen Erdgrad auf 700 Stadien vergrösserte, erhielt er eine der Wahrheit sehr nabekommende Bestimmung, nämlich $700 \times 158,0928 = 110665$ Meter, welche nur um 137 Meter zu klein ist.

Wenn man annimmt, dass die Bestimmung des Eratosthenes 220 v. Chr. geschah, so war damals die Schiefe der Ekliptik nach Bessel (*Astr. N.* 133)

$$23^{\circ}27'54'',8 + 2020 \times 0'',457 = 23^{\circ}43'18''.$$

Also zur Zeit der Sommersonnenwende der mittägliche Abstand der Sonne vom Zenith von Alexandrien $= 7^{\circ}29'35''$, d. h. nahe der 48ste Theil des Umfangs der Skapha. Der

Beobachtungsfehler war also $17'35''$, d. h. etwas mehr als der Sonnenhalbmesser, oder als der an der Spitze des Gnomenschattens auf der Skapha sich bildende Halbschatten.

Der Gnomon war schattenlos, nicht genau zu Syene, sondern an einem Ort, welcher südlich von Syene lag, um $22\frac{1}{5}''$, d. h. um $\frac{22\frac{1}{5}''}{60'} \times 700,87 = 258$ Stadien.

Der Ausdruck des Kleomedes in der oben angeführten Stelle: «dieses geschieht 300 Stadien in der Richtung des Durchmessers», kann sich entweder beziehen auf die dem Wendekreis nicht genau entsprechende Lage von Syene, oder auch darauf, dass die Breite des Halbschattens bei senkrechter Lage nach allen Seiten hin dem Sonnendurchmesser gleich ist, also etwas mehr als einen halben Grad beträgt. Ein halber Grad aber entspricht einer Strecke von 350 Stadien.

