TARTU ÜLIKOOL
UNIVERSITAS TARTUENSIS
1632

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Geomeetria kateedri aspirant

Enn Tamme

MAJORANTPRINTSIIP ITERATSIOONIMEETODITE ÜLDISES TEOORIAS

Dissertatsioon

füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi

teadusliku kraadi taotlemiseks

Teaduslik juhendaja:

Tartu Riikliku Ülikooli professor

füüsika-matemaatika teaduste doktor G. Kangro

Tartu Riikliku Ülikooli Õpetatud Nõukogu koosoleku otsusega 31. oktoobrist 1958.a. on kinnitatud autorile Enn Eduardi p. Tamme'le füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi teaduslik kraad. (Väitekiri kaitsti 10.X 58.a. Mat.-Loodusteaduskonna Õpet. Nõukogu avalikul koosolekul).

J. Maaroos
TRÜ teaduslik
sekretär

Tartu 1958

S I S S E J U H A T U S

Iteratsioonimeetodite koonduvuse uurimine omab nii teoreetilist kui ka praktilist tähtsust. Iteratsioonimeetodeid kasutatakse väga mitmesuguste ülesannete (näit. harilike võrrandite ja võrrandisüsteemide, diferentsiaal- ja integraalvõrrandite, omaväärtusülesannete jt.) ligikaudsel lahendamisel ning samuti nende ülesannete lahendi olemasolu ja ainsuse selgitamisel.

Iteratsioonimeetodite tähtsust on viimasel ajal veelgi suurendanud kiire toimega arvutusmasinate kasutuselevõtmine, millised võimaldavad tegelikult lahendada üha enam praktika poolt püstitatud ülesandeid. Iteratsioonimeetodite mitmesugused omadused teevad neid üheks sobivamaks meetodiks ülesannete lahendamisel elektronarvutusmasinatel.

Olulist tähtsust iteratsioonimeetodite uurimisel omab funktsionaalanalüüsi aparatuuri kasutamine, mis võimaldab ühtsest seisukohast käsitleda nende meetodite küllaltki erinevaid rakendusi. Hariliku iteratsioonimeetodi koonduvust operaatorvõrrandite lahendamisel vaatles juba S.Banach ([3]). Tõuke iteratsioonimeetodite edasiseks uurimiseks andsid L.V.Kantorovitš'i tööd [29,30], milles ta üldistas operaatorvõrrandi juhule tuntud Newtoni iteratsioonimeetodi ning andis selle jaoks üldise koonduvusteoreemi. L.V.Kantorovitši ideid on kasutatud paljudes töödes, milles vaadeldakse Newtoni meetodit ja selle modifikatsioone (vt. näit.[1,2, 33,43])ning samuti mitmesuguseid Newtoni meetodiga sarnaseid iteratsioonimeetodeid (vt. näit.[18,40, 44,45,50]). Põhiliselt samasugust metoodikat kasutades andis Ü.Kaasik küllaltki ulatusliku iteratsioonimeetodite klassi jaoks üldised koonduvustingimused ning hinnangud koonduvuse kiiruse kohta ([7,23,24]).

L.V.Kantorovitš oma töödes [31,32,34] näitas, et üheks kõige sobivamaks viisiks Newtoni iteratsioonimeetodi koonduvuse uurimisel on majorantprintsiibi kasutamine. Selle printsiibi abil tõestas V.E.Mirakov ([41,42]) koonduvusteoreemi nn. puutuvate paraboolide meetodi jaoks. Ulatuslikult on vaadelnud majorantprintsiibi kasutamist hariliku iteratsioonimeetodi ning ka Newtoni meetodi puhul J.Schröder ([14,15,16]).

Käesolevas töös näidatakse, et majorantprintsiip on rakendatav küllaltki avara iteratsioonimeetodite klassi puhul. See klass hõlmab peagu kõik praktikas kasutamist leidnud iteratsioonimeetodid, sealhulgas ka mitmed tähtsad protsessid, mis ei kuulu Ü.Kaasiku poolt vaadeldud meetodite hulka. Seejuures võimaldab majorantprintsiip näidata iteratsioonimeetodite koonduvust nõrgematel tingimustel ning anda täpsemaid veahinnanguid kui töös [7].

Töö esimeses peatükis (§§1-2) esitatakse aparatuur, mida järgnevas kasutatakse iteratsioonimeetodite koonduvuse uurimisel. Selles peatükis toodud mõisted ja tulemused pole mitte kõik uued, vaid töö kergema loetavuse saavutamiseks esitatakse siin ka mõningad tuntud mõisted ja tulemused.

Esimeses paragrahvis vaadeldakse polülineaarseid operaatoreid, osatuletisi ning kahe muutuja analüütilisi operaatoreid.

Järgmises paragrahvis käsitletakse pooljärjestatud Banachi ruume ja nende abil normeeritud ruume ning samuti operaatoreid nimetatud ruumides. L.V. Kantorovitš kasutab majorantprintsiibi puhul nn. K-ruume ja nende abil normeeritud ruume ([31,32,35]). Kuna aga K-ruumides pole analüütiliste operaatorite teooria välja töötatud, siis on käesolevas töös nende asemel tarvitusele võetud M.G.Kreini poolt vaadeldud pooljärjestatud Banachi ruumid (vt. [36]). Selliste ruumide hulka kuuluvad ka mitmed praktiliselt tähtsad ruumid, mis pole K-ruumid (näit. lõigul pidevate funktsioonide ruum C).

Teine peatükk (§§3-4) sisaldab tulemusi iteratsioonimeetodite koonduvuse kohta. Kolmandas paragrahvis antakse koonduvusteoreemid (teoreemid 3.2 ja 3.4) küllaltki ulatusliku iteratsioonimeetodite klassi jaoks. Teoreemiga 3.3 näidatakse võimalus, kuidas saab moodustada uusi vaadeldavat tüüpi iteratsioonioperaatoreid, mis annavad järjest kiiremini koonduvaid protsesse. Selles paragrahvis esitatud teoreemid on kasutatavad ka võrrandi lahendi olemasolu ning ainsuse tõestamisel.

Neljandas paragrahvis vaadeldakse ilmutamata operaatori reaksarendamise meetodi kasutamist parameetrist sõltiva võrrandi lahendamisel. Teoreemiga 4.2 antakse tingimused lahendi olemasoluks ja meetodi koonduvuseks lahendiks ning samuti hinnangud lähislahendite täpsuse jaoks. Selles paragrahvis tõestatakse ka seosed, mis võimaldavad järk-järgult arvutada ilmutamata operaatori reaksarendise liikmeid.

Töö kolmas peatükk (§§5-6) on pühendatud eelmises peatükis saadud tulemuste mõningatele rakendustele. Real küsimustel, mis kerkivad nende tulemuste kasutamisel konkreetsete võrrandite mõnede tähtsamate tüüpide (võrrandisüsteemide, integraal- ja diferentsiaalvõrrandite) lahendamiseks, on peatutud juba artiklis [27]. Käesolevas töös vaadeldud juht, kus reaalse majoreeriva võrrandi asemel kasutatakse mingis pooljärjestatud Banachi ruumis konstrueeritud võrrandit, võimaldab sageli näidata lahendi olemasolu ja meetodi koonduvust nõrgematel tingimustel ning anda lahendi jaoks täpsemaid veahinnanguid. Olulisi uusi võimalusi võrreldes tavaliste iteratsioonimeetoditega pakub ka ilmutamata operaatori reaksarendamise meetod, mis on sobivaks vahendiks ühest või mitmest parameetrist sõltuvate ülesannete lahendamisel. Sageli esineb ka ülesandeid, mille ligikaudset lahendamist saab lihtsustada mingi parameetri sissetoomise teel. Paragrahvis 5 ongi kahe näite (mittelineaarse integraalvõrrandi ja rajaülesande) varal demonstreeritud mõningaid võimalusi, mida annab pooljärjestatud Banachi ruumis konstrueeritud majoreeriva võrrandi ja ilmutamata operaatori reaksarendise kasutamine.

Töö viimases paragrahvis on peatutud paragrahvis 4 saadud tulemuste ühel tähtsal rakendusel. Nimelt vaadeldakse ilmutamata operaatori reaksarendise kasutamist omaväärtuste ja omaelementide ligikaudseks leidmiseks. Nii saame samad lähendid, millised annab ka häiritusmeetod (vt. [4,21]). Teoreemist 4.2 järelduvad seetõttu tulemused häiritusmeetodi koonduvuse kohta (näit. teoreemid 6.1 ja 6.2), mis on rakendatavad üldisemate omaväärtusülesannete puhul kui vastavad teoreemid töödes [9,10,12,13,22]. Erijuhtudena võime saada mitmeid tulemusi nendest töödest (sageli isegi täpsustatud kujul).

I. VAJALIKKE MÕISTEID JA ABITULEMUSI FUNKTSIONAALANALÜÜSIST

§ 1. Analüütilised operaatorid

1. Esitame kõigepealt mõningad polülineaarsete operaatoritega seotud mõisted.

Operaatorit $A_{1\ldots n}$ Banachi ruumidest[1] $X_1,\ldots,X_n$ sama tüüpi ruumi Z nimetatakse n-lineaarseks, kui ta on aditiivne iga argumendi järgi ning tõkestatud ([20,37]). Kõigi selliste operaatorite hulk moodustab omakorda Banachi ruumi, mida tähistame $(X_1\ldots X_n\to Z)$.

Operaatoreid $A_{1\ldots n}\in(X_1\ldots X_n\to Z)$ ja $A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\in(X_{\alpha_1}\ldots X_{\alpha_n}\to Z)$, kus $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ on indeksite $1,\ldots,n$ mingi ümberjärjestus, nimetame ekvivalentseteks, kui kõigi $x_i\in X_i$ $(i=1,\ldots,n)$ puhul kehtib võrdus

$$A_{1\ldots n}x_1\ldots x_n = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}x_{\alpha_1}\ldots x_{\alpha_n}.$$

---

[1]) Käesolevas töös vaatleme reaalseid Banachi ruume, kuid kõik esitatud tulemused jäävad kehtima ka kompleksete Banachi ruumide korral.

Kui seada igale operaatorile ruumist $(X_1 \dots X_n \to Z)$ vastavusse temaga ekvivalentne operaator ruumist $(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n} \to Z)$, siis saame lineaarse isomeetrilise vastavuse nende ruumide vahel.

Nimetame operaatorit $A_{1 \dots n}$ <u>sümmeetriliseks</u>, kui ta iga ühtiva ruumide paari $X_i = X_j$ puhul langeb ühte temaga ekvivalentse operaatoriga, mis on saadud operaatorist $A_{1 \dots n}$ indeksite i ja j ümbervahetamisel. Kõigi sümmeetriliste n-lineaarsete operaatorite hulk $[X_1 \dots X_n \to Z]$ moodustab samuti Banachi ruumi. Järgnevas käsitluses samastame ekvivalentsed sümmeetrilised n-lineaarsed operaatorid ning mõistame sümboli $A_{1 \dots n}$ all (sümmeetrilise operaatori puhul) ka kõiki selle operaatoriga ekvivalentseid operaatoreid.

2. Kahe Banachi ruumi Xja Y abil saame moodustada uue Banachi ruumi $X \times Y$, mille elementideks on paarid $\bar{x} = (x, y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, kusjuures näiteks

$$\|\bar{x}\| = \|x\| + c\|y\| \quad (c > 0). \qquad (1.1)$$

Olgu antud n-lineaarne operaator[1]) $B_n \in [(X \times Y)^n \to Z]$.

---

[1]) Lihtsuse mõttes tarvitame $[\underbrace{(X \times Y) \dots (X \times Y)}_{n} \to Z]$ ja $[\underbrace{Y \dots Y}_{k}\underbrace{X \dots X}_{n-k} \to Z]$ asemel tähistusi $[(X \times Y)^n \to Z]$ ja $[Y^k X^{n-k} \to Z]$.

Valemiga

$$A_{n-k,k}y_1\ldots y_k x_{k+1}\ldots x_n = B_n(0,y_1)\ldots(0,y_k)(x_{k+1},0)\ldots(x_n,0),$$

kus $x_i \in X$ ja $y_j \in Y$, defineerime sümmeetrilised n-lineaarsed operaatorid $A_{n-k,k} \in [Y^k X^{n-k} \to Z]$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Siis kehtib võrdus [1])

$$\begin{aligned} B_n(x_1,y)(x_2,y_2)\ldots(x_n,y_n) &= A_{no}x_1x_2\ldots x_n + \\ &+ A_{n-1,1}(y_1x_2\ldots x_n + x_1y_2\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots y_n) + \\ &+ A_{n-2,2}(y_1y_2x_3\ldots x_n + y_1x_2y_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots y_{n-1}y_n) + \\ &+ \ldots + A_{on}y_1y_2\ldots y_n . \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Ümberpöördult, kui on ette antud n+1 sümmeetrilist n-lineaarset operaatorit $A_{n-k,k} \in [Y^k X^{n-k} \to Z]$ $(k=0,1,\ldots n)$, siis saame valemi (1.2) abil moodustada operaatori $B_n \in [(X\times Y)^n \to Z]$. Seega on operaator $B_n \in [(X\times Y)^n \to Z]$ samaväärne operaatorite $A_{n-k,k} \in [Y^k X^{n-k} \to Z]$ süsteemiga, mistõttu tähistame

$$B_n = (A_{no}, A_{n-1,1}, \ldots, A_{on}). \qquad (1.3)$$

See sümbol käitub nagu vektor liitmisel ning korrutamisel reaalarvuga, tema rakendamine ruumi $X\times Y$ elemendile (x,y) toimub vastavalt reeglile

---

[1]) Kirjutist $A_{n-k,k}(y_1^k x_1^{n-k} + y_2^k x_2^{n-k})$ kasutame summa $A_{n-k,k}y_1^k x_1^{n-k} + A_{n-k,k}y_2^k x_2^{n-k}$ lühemaks tähistamiseks.

$$B_n(x,y) = (A_{no}x+A_{n-1,1}y,\ A_{n-1,1}x+A_{n-2,2}y, \dots,\ A_{1,n-1}x+A_{on}y).$$

Seega näiteks

$$B_n(x,y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k,k}\, y^k x^{n-k}. \qquad (1.4)$$

Seose (1.2) abil pole raske näidata, et kui norm ruumis $X\times Y$ on defineeritud valemi (1.1) abil, siis

$$\|B_n\| = \max_{k=0,1,\dots,n} \frac{1}{c^k}\|A_{n-k,k}\| . \qquad (1.5)$$

3. Vaatleme (üldiselt mittelineaarset) operaatorit P Banachi ruumidest X ja Y sama tüüpi ruumi Z. Osatuletiseks $P_x(x,y)$ nimetatakse operaatori P tuletist, kui seda operaatorit vaadelda sõltuvana ainult argumendist x ([6,38]), s.t. $P_x(x,y)$ on selline lineaarne operaator ruumist X ruumi Z, mis rahuldab tingimust

$$\|P(x+\Delta x,y) - P(x,y) - P_x(x,y)\Delta x\| \le \|\Delta x\|\cdot \varepsilon(\|\Delta x\|),$$

kus $\varepsilon(\delta)\to 0$, kui $\delta\to 0$. Analoogiliselt defineeritakse P_y. Kõrgemat järku osatuletised defineeritakse tavalisel viisil: $P_{x^2}= (P_x)_x$, $P_{xy}= (P_x)_y$, $P_{yx}= (P_y)_x$ jne.

L e m m a 1.1. Kui operaatori P kõik n järku osatuletised eksisteerivad punkti (x,y) mingis ümbruses ning on pidevad selles punktis, siis punktis (x,y) on need n järku osatuletised sümmeetrilised n-lineaarsed operaatorid. Seejuures kõik osatuletised, mis on saadud operaatori P diferentseerimisel mistahes järjekorras $n-k$ korda x ning k korda y järgi, on ekvivalentsed ning neid võib samastada näiteks operaatoriga $P_{x^{n-k}y^k}(x,y) \in [Y^k X^{n-k} \to Z]$.

T õ e s t u s. Kergesti saab veenduda võrduse

$$P_{x^{n-k}y^k}(x,y)\Delta y^k \Delta x^{n-k} = \frac{\partial^n}{\partial t_1^{n-k}\,\partial t_2^k} P(x+t_1\Delta x, y+t_2\Delta y)\Big|_{\substack{t_1=0\\ t_2=0}}$$

õigsuses, kus t_1 ja t_2 on reaalmuutujad ning $\Delta x \in X$ ja $\Delta y \in Y$. Lemma väited järelduvad asjaolust, et lemma eeldustel on õigustatud diferentseerimisjärjekorra muutmine viimase võrduse parempoolses osatuletises.

Operaatori P, kui ühe argumendi $\bar{x} = (x,y) \in X \times Y$ operaatori, tuletisi tähistame $P^{(n)}(\bar{x})$. Kehtib järgmine lemma.

L e m m a 1.2. Tuletis $P^{(n)}(\bar{x})$ eksisteerib punkti $\bar{x} = (x,y)$ ümbruses ning on pidev selles punktis siis ja ainult siis, kui operaatori P kõik n järku osatuletised eksisteerivad punkti (x,y) mingis ümbruses ning on pidevad selles punktis. Seejuures

$$P^{(n)} = (P_{x^n}, P_{x^{n-1}y}, \dots, P_{y^n}).$$

T õ e s t u s. Tõestame selle lemma $n = 1$ korral.

Kui eksisteerib $P'(\bar{x})$, siis vastavalt valemile (1.3) saame teda esitada kujus $P'(\bar{x}) = (A_{10}, A_{01})$, kus $A_{10} \in [X \to Z]$ ja $A_{01} \in [Y \to Z]$. Tuletise definitsiooni kohaselt

$$\|P(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x,y) - A_{10}\Delta x - A_{01}\Delta y\| \leq$$

$$\leq (\|\Delta x\| + c\|\Delta y\|) \cdot \varepsilon(\|\Delta x + c\|\Delta y\|),$$

kus $\varepsilon(\delta) \to 0$, kui $\delta \to 0$. Võttes $\Delta y = 0$ saame $A_{10} = P_x(x,y)$ ning võttes $\Delta x = 0$ saame $A_{01} = P_y(x,y)$.

Ümberpöördult, kui punktis (x,y) eksisteerivad operaatori P esimest järku osatuletised, siis moodustame lineaarse operaatori

$$B_1 = (P_x(x,y), P_y(x,y)) \in [X \times Y \to Z].$$

Hinnangust

$$\|P(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x,y) - B_1(\Delta x, \Delta y)\| \leq$$

$$\leq \|P(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x, y+\Delta y) - P_x(x, y+\Delta y)\Delta x\| +$$

$$+ \|P_x(x, y+\Delta y) - P_x(x,y)\| \, \|\Delta x\| +$$

$$+\|P(x,y+\Delta y) - P(x,y) - P_y(x,y)\Delta y\| \leq$$

$$\leq (\|\Delta x\| + c\|\Delta y\|)\cdot \varepsilon(\|\Delta x\| + c\|\Delta y\|)$$

järeldub, et $B_1 = P'(\bar{x})$.

Valemit (1.5) kasutades pole nüüd raske täieliku induktsiooni meetodiga tõestada selle lemma kehtivust mistahes naturaalarvu n puhul.

4. Kahe muutuja operaatorit $P(x,y)$ nimetatakse <u>analüütiliseks</u>, kui ta on analüütiline operaatorina ruumist $X\times Y$ ruumi Z ([17,20]). Seega operaatorit $P(\bar{x})$ nimetatakse punktis $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ analüütiliseks, kui ta omab selles punktis kõik tuletised ning on selle punkti mingis ümbruses esitatav koonduva astmereaga

$$P(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)^n.$$

Lemmat 1.2 ja valemit (1.4) arvestades saame viimasele reale anda kuju

$$P(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{x^{n-k}y^k}(x_0,y_0)(y-y_0)^k(x-x_0)^{n-k}. \quad (1.6)$$

Seetõttu kehtib järgmine kahe muutuja operaatori analüütilisuse kriteerium.

L e m m a 1.3. Punkti (x_0,y_0) ümbruses määratud operaator $P(x,y)$ on selles punktis analüütiline siis ja ainult siis, kui ta omab punktis (x_0,y_0) kõik osatuletised, mis on sümmeetrilised polülineaarsed operaatorid, ning on nimetatud punkti mingis ümbruses esitatav koonduva astmereaga (1.6).

Lemmat 1.2 arvestades järeldub töös [20] esitatud tulemustest kergesti järgmine lemma.

L e m m a 1.4. Olgu $D \subset X \times Y$ lahtine, sidus, punkti (x_0,y_0) sisaldav hulk, millel operaator P on analüütiline ning rida (1.6) koonduv. Siis esitab rida (1.6) hulgal D operaatorit P ning operaatori P osatuletisi võib sellel hulgal esitada astmeridadega

$$P_{x^i y^j}(x,y) =$$
$$= \sum_{n=i+j}^{\infty} \frac{1}{(n-i-j)!} \sum_{k=j}^{n-i} \binom{n-i-j}{k-j} P_{x^{n-k} y^k}(x_0,y_0)(y-y_0)^{k-j}(x-x_0)^{n-k-i},$$

mis on saadud rea (1.6) liikmeti diferentseerimisel.

Ühe muutuja operaatori analüütilisuse kohta kehtib järgmine kriteerium.

L e m m a 1.5. Punkti x_0 ümbruses määratud operaator $P(x)$ on analüütiline punktis x_0 siis ja ainult siis, kui ta omab selle punkti mingis ümbruses kõik tuletised ja kui nimetatud ümbruses kehtivad võrratused

$$\frac{1}{n!}\|P^{(n)}(x)\| \leq h\, b^n \qquad (n=0,1,\ldots), \qquad (1.7)$$

kus h ning b on mittenegatiivsed konstandid.

Selle lemma piisavuse tõestus on antud töös [20]. Kasutades nimetatud töö tulemusi saab tõestada ka toodud lemma tingimuste tarvilikkuse (näiteks analoogiliselt õpikus [39] reaalmuutuja funktsioonide korral esitatud tõestusele).

Valemit (1.5) ning lemmat 1.2 arvestades järeldub viimasest lemmast vastav tulemus kahe muutuja operaatori jaoks.

L e m m a 1.6. Punkti (x_0, y_0) ümbruses määratud operaator $P(x,y)$ on analüütiline punktis (x_0, y_0) siis ja ainult siis, kui ta omab selle punkti mingis ümbruses kõik osatuletised, mis on sümmeetrilised polülineaarsed operaatorid, ning kui nimetatud ümbruses kehtivad võrratused

$$\frac{1}{n!}\|P_{x^{n-k}y^k}(x,y)\| \leq h b^n c^k \quad (n=0,1,\ldots;k=0,\ldots,n), \qquad (1.8)$$

kus h, b ja c on mittenegatiivsed konstandid.

Analoogiliselt Abeli teise teoreemi tõestusele (vt. näit. [39]) saab tõestada selle teoreemi järgmise üldistuse.

L e m m a 1.7. Kui astmerida

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

koondub punktis $x = x_1$, siis

$$\lim_{t\to 1-0} P[x_0 + t(x_1 - x_0)] = P(x_1),$$

kus t on reaalne muutuja.

§ 2. Üldistatult normeeritud ruum

1. Pooljärjestatud Banachi ruumiks nimetatakse Banachi ruumi U, milles on defineeritud koonus ([36]), s.o. kinnine hulk, millesse koos elementidega u ja u' kuuluvad ka u+u' ja λu, kui $\lambda \geq 0$, kuid ei kuulu -u (kui $u \neq 0$). Koonusesse kuuluvaid elemente nimetame positiivseteks ning tähistame $u \geq 0$.

Kirjutame $u \geq u'$ ehk $u' \leq u$, kui $u-u' \geq 0$. Kerge on kontrollida, et sellel vahekorral on järgmised omadused:

a) kui $u \geq u'$ ja $u' \geq u''$, siis $u \geq u''$;

b) kui $u \geq u'$ ja $u_1 \geq u_1'$, siis $u+u_1 \geq u'+u_1'$;

c) kui $u \geq u'$, siis $\lambda \geq 0$ korral $\lambda u \geq \lambda u'$ ning $\lambda \leq 0$ korral $\lambda u \leq \lambda u'$;

d) kui $u_n \geq u'_n$ $(n=0,1,\ldots)$ ning $\lim u_n = u$ ja $\lim u'_n = u'$, siis $u \geq u'$.

Edaspidi leiavad kasutamist järgmised pooljärjestatud Banachi ruumide tüübid.

<u>B^+-ruumiks</u> nimetame pooljärjestatud Banachi ruumi U, milles

1) vastavalt igale elemendile $u \in U$ leidub selline positiivne element $u' \in U$, et $u \leq u'$;

2) vahekorrast $0 \leq u'_n \leq u_n$ $(n=0,1,\ldots)$ ning $\lim u_n = 0$ järeldub, et $\lim u'_n = 0$.

<u>B^{++}-ruumiks</u> nimetame B^+-ruumi, milles iga positiivsete liikmetega ja tõkestatud osasummadega rida koondub (s.o. kui $u_k \geq 0$ ning $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq u$ iga $n=0,1,\ldots$ puhul, siis rida[1]) $\sum u_k$ koondub).

Tingimus 2) on ilmselt täidetud, kui vahekorrast $0 \leq u' \leq u$ alati järeldub, et $\|u'\| \leq \|u\|$. Seetõttu B^+-ruumi erijuhuks on täielik KB-lineaal ning B^{++}-ruumi erijuhuks - KB-ruum (vt. [35]).

---

[1]) Kui rea summeerimisrajasid pole märgitud, siis toimub summeerimine nullist kuni lõpmatuseni.

L e m m a 2.1. B^+-ruumi U korral:

a) iga elementi $u \in U$ saab esitada kahe positiivse elemendi vahena;

b) rea $\sum u_k$ koonduvusest ja vahekorrast $0 \leq u'_k \leq u_k$ $(k=0,1,\ldots)$ järeldub rea $\sum u'_k$ koonduvus;

c) positiivsete liikmetega rea $\sum u_k$ koonduvus ega ka summa ei sõltu liikmete järjekorrast.

T õ e s t u s. a) Järeldub tingimusest 1).

b) Järeldub iga naturaalarvu n ja p puhul kehtivast vahekorrast

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+p} u'_k \leq \sum_{k=n}^{n+p} u_k .$$

c) Olgu $k_0, k_1, \ldots$ jada $0,1,\ldots$ mingi ümberjärjestus. Tähistame $u = \sum u_k$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ja $w_m = \sum_{i=0}^{m} u_{k_i}$. Ilmselt iga n puhul leidub selline naturaalarv N_n, et

$$0 \leq u - w_m \leq u - v_n, \quad \text{kui} \quad m \geq N_n .$$

Seetõttu rida $\sum_i u_{k_i}$ koondub ning $\sum_i u_{k_i} = u$.

2. Lineaarset hulka X nimetatakse <u>pooljärjestatud Banachi ruumi U abil normeeritud ruumiks</u> (vrd. [31]), kui igale elemendile $x \in X$ on vastavusse

seatud teatav mittetühi hulk positiivseid elemente $u \in U$, millesse kuuluvust märgime sümboliga $|x| \leq u$. Seejuures nõuame, et oleksid täidetud järgmised tingimused:

1° kui $|x| \leq u$ ja $u \leq u'$, siis $|x| \leq u'$;

2° vahekorrast $|x| \leq 0$ järeldub, et $x = 0$;

3° kui $|x| \leq u$, siis $|\lambda x| \leq |\lambda| u$;

4° kui $|x| \leq u$ ja $|x'| \leq u'$, siis $|x + x'| \leq u + u'$;

5° kui $|x| \leq u_n$ $(n=0,1,\dots)$ ja $\lim u_n = u$, siis $|x| \leq u$.

Elemendile x sellisel viisil vastavusse seatud elementide u hulka nimetame elemendi x üldistatud normiks[1]).

Vahekord $|x| \leq u$ võimaldab ruumis X defineerida koonduvuse. Me ütleme, et jada $\{x_n\}$ koondub elemendiks $x \in X$ (üldistatud normi järgi) ning kirjutame $\lim x_n = x$, kui leiduvad sellised elemendid $u_n \in U$, et $|x_n - x| \leq u_n$ $(n=0,1,\dots)$ ja $\lim u_n = 0$. Tingimustest 4° ja 5° järeldub kergesti, et kui $|x_n| \leq u_n$,

---

[1]) Kui vaadeldavas elementide $u \in U$ hulgas leidub vähim element, siis võib üldistatud normiks lugeda ka seda vähimat elementi.

$\lim x_n = x$ ja $\lim u_n = u$, siis ka $|x| \leq u$.

Ruumi X nimetame <u>täielikuks</u> (üldistatud normi järgi), kui vahekordadest $|x_n - x_m| \leq u_{nm}$ $(n, m = 0, 1, \ldots)$ ja $\lim\limits_{n,m\to\infty} u_{nm} = 0$ järeldub jada $\{x_n\}$ koonduvus. Edaspidi eeldame ruumi X täielikkust.

Lemma 2.1 tõestusele analoogilisi mõttekäike kasutades saab tõestada järgmise tulemuse.

L e m m a 2.2. Olgu ruum X normeeritud B^+-ruumi U abil. Kui $|x_k| \leq u_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ ning rida $\sum u_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum x_k$, kusjuures viimase rea koonduvus ega summa ei sõltu liikmete järjekorrast.

M ä r k u s. Kui defineerida ruumis X norm võrduse

$$\|x\| = \inf_{|x| \leq u} \|u\|$$

abil, siis see ruum osutub Banachi ruumiks, milles koonduvus normi järgi on samaväärne koonduvusega üldistatud normi järgi ruumis X. Seejuures saadud ruumi täielikkus leiab aset parajasti siis, kui ruum X on täielik üldistatud normi järgi. Seetõttu võime üldsust kitsendamata juba lähtehulgaks X valida mingi Banachi ruumi, milles defineerime tingimusi $1^o - 5^o$ rahuldava vahekorra $|x| \leq u$. See vahekord võimaldab tavaliselt täpsemalt iseloomustada koonduvust ruumis X ning anda täpsemaid hinnanguid kui tavaline norm. Märgime,et juhul, kui vahekorrast $|x| \leq u$ järeldub alati võrratus $\|x\| \leq \|u\|$, siis koonduvusest üldistatud normi järgi järeldub tavaline koonduvus Banachi ruumis X.

3. Olgu $U_1,\dots,U_n$ ja V pooljärjestatud Banachi ruumid ning $q_{1\dots n} \in (U_1 \dots U_n \to V)$. Loeme operaatorit $q_{1\dots n}$ positiivseks, kui kõigi positiivsete elementide $u_i \in U_i$ puhul $q_{1\dots n} u_1 \dots u_n \geq 0$. Kerge on kontrollida, et nii defineeritud hulk $q_{1\dots n} \geq 0$ moodustab koonuse ning seega ruum $(U_1 \dots U_n \to V)$ osutub pooljärjestatud Banachi ruumiks.

Olgu $X_1,\dots,X_n$ ja Z vastavalt $U_1,\dots,U_n$ ja V abil normeeritud ruumid ning $A_{1\dots n} \in (X_1 \dots X_n \to Z)$. Loeme kehtivaks vahekorra $|A_{1\dots n}| \leq q_{1\dots n}$, kui kõigi $|x_i| \leq u_i$ puhul $|A_{1\dots n} x_1 \dots x_n| \leq q_{1\dots n} u_1 \dots u_n$. Pole raske näidata, et see vahekord rahuldab tingimusi $1^o - 5^o$.

4. Olgu ruum X normeeritud pooljärjestatud Banachi ruumi U abil, aga $A, A' \in (X \to X)$ ja $q, q' \in (U \to U)$. Ilmselt, kui $|A| \leq q$ ja $|A'| \leq q'$, siis ka $|AA'| \leq qq'$.

Pöördoperaatori olemasolu kohta ruumis X kehtib järgmine lemma (vrd. [15]).

L e m m a 2.3. Kui $|A| \leq q$ ja rida $\sum q^k$ koondub kõikjal ruumis U, siis rida $\sum A^k$ koondub kõikjal ruumis X ning eksisteerivad pöördoperaatorid

$$(I - q)^{-1} = \sum q^k \geq 0, \quad (E - A)^{-1} = \sum A^k,$$

kusjuures

$$|(E - A)^{-1}| \leq (I - q)^{-1}$$

($q^0 = I$ ja $A^0 = E$ on ühikoperaatorid vastavalt ruumides U ja X).

T õ e s t u s. Kui $|x| \leq u$, siis $|A^k x| \leq q^k u$, millest järeldub rea $\sum A^k x$ koonduvus ja hinnang $|\sum A^k x| \leq \sum q^k u$. Pole raske veenduda, et $\sum A^k = (E - A)^{-1}$ ning $\sum q^k = (I - q)^{-1}$, millega lemma ongi tõestatud.

B^+-ruumi U korral saab tõestada järgmise tulemuse.

L e m m a 2.4. Kui $0 \leq q' \leq q$ ning rida $\sum q^k$ koondub kõikjal B^+-ruumis U, siis ka rida

$\sum[(I - q')^{-1}(q - q')]^k$ koondub kõikjal selles ruumis.

T õ e s t u s. Pole raske kontrollida, et iga naturaalarvu n puhul

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \leq \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{n-k} q'^i(q - q')\right]^k \cdot \sum_{j=0}^{n-k} q'^j \leq \sum_{k=0}^{m} q^k,$$

kui $m \geq n + \frac{n^2}{4}$. Sellest järeldub B^+-ruumi U puhul rea

$$\sum[(I - q')^{-1}(q - q')]^k(I - q')^{-1}$$

koonduvus kogu ruumis U. Kui arvestame, et lemma 2.3 põhjal operaator $I - q'$ kujutab ruumi U üksüheselt samaks ruumiks, siis olemegi tõestanud käesoleva lemma.

Lemma 2.3 põhjal rea $\sum q^k$ koonduvusest, kus $q \geq 0$, järeldub positiivse pöördoperaatori $(I - q)^{-1}$ olemasolu. B^{++}-ruumi U puhul on õige ka vastupidine väide (vrd. [35], lk.462).

L e m m a 2.5. Kui U on B^{++}-ruum, $q \geq 0$ ja eksisteerib positiivne pöördoperaator $(I - q)^{-1} \geq 0$, siis rida $\sum q^k$ koondub kõikjal ruumis U.

T õ e s t u s. Tehtud eeldustel võrrand

$$u = qu + u'$$

omab iga $u' \geqslant 0$ puhul ainsa lahendi $u = (I - q)^{-1}u' \geqslant \geqslant 0$. Moodustame jada $u_o = 0$, $u_{n+1} = qu_n + u'$. Kerge on veenduda, et iga $n = 0,1,\dots$ puhul

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u,$$

mistõttu jada $\{u_n\}$ koondub B^{++}-ruumis U. Kuna

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k u',$$

siis rida $\sum q^k$ koondub iga $u' \geqslant 0$ puhul ning lemma 2.1 väite a) põhjal ka kogu ruumis U.

5. Olgu X Banachi ruum ning $Q(x) \in (X \to X)$. Integraali all

$$\int_{x_0}^{x_1} Q(x)dx$$

mõistame Riemann'i integraali

$$\int_0^1 Q[x_o + t(x_1 - x_o)](x_1 - x_o)dt,$$

milles t on reaalmuutuja ([20]). See integraal eksisteerib, kui operaator Q(x) sõltub vaadeldaval lõigul $x = x_o + t(x_1 - x_o)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ pidevalt muutujast x.

Olgu ruum X normeeritud pooljärjestatud Banachi ruumi U abil ning $q(u) \in (U \to U)$. Kasutades Riemanni integraali definitsiooni pole raske tõestada järgmiste tulemuste kehtivust (vrd. [34]).

L e m m a 2.6. Kui $|x_1 - x_0| \leq u_1 - u_0$ ning iga $0 \leq t \leq 1$ puhul $|Q[x_0 + t(x_1 - x_0)]| \leq q[u_0 + t(u_1 - u_0)]$, siis

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} Q(x)dx \right| \leq \int_{u_0}^{u_1} q(u)du,$$

kui vaid kirjutatud integraalid eksisteerivad.

L e m m a 2.7. Kui $0 \leq u_1 - u_0 \leq u_2 - u_0$ ning iga $u_0 \leq u \leq u' \leq u_2$ puhul $0 \leq q(u) \leq q_1(u')$, siis

$$\int_{u_0}^{u_1} q(u)du \leq \int_{u_0}^{u_2} q_1(u)du,$$

kui vaid need integraalid eksisteerivad.

II. ITERATSIOONIMEETODITE KOONDUVUS

§ 3. Üks koonduvate iteratsioonimeetodite klass

1. Vaatleme võrrandit

$$P(x) = 0, \tag{3.1}$$

kus P on mittelineaarne operaator, mis kujutab B^+-ruumi U abil normeeritud ruumi X Banachi ruumi Z. Kõrvuti sellega vaatleme veel ruumis U võrrandit

$$p(u) = 0, \tag{3.2}$$

mis teatavas (allpool täpsustatavas) mõttes majoreerib võrrandit (3.1).

Võrrandi (3.1) lahendi olemasolu kohta kehtib järgmine teoreem[1]).

T e o r e e m 3.1. Olgu teatavate elementide $x_0 \in X$ ja $u' \in U$ $(u' \geq 0)$ ning mingi naturaalarvu k puhul rahuldatud tingimused:

1^o eksisteerib pöördoperaator $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$;

---

[1]) Erijuhul, kui U on reaalarvude hulk, järeldub see teoreem töö [34] tulemustest. K-ruumi U abil normeeritud ruumi X korral on analoogilisi tulemusi esitatud töödes [31,32].

2^0 operaatorid $P(x)$ ja $p(u)$ on $k+1$ korda pidevalt diferentseeruvad vastavalt piirkondades $|x - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$ ning

$|\Gamma_0 P^{(i)}(x_0)| \leq p^{(i)}(0) \qquad (i = 0,2,3,\dots,k),$

$|\Gamma_0 P^{(k+1)}(x)| \leq p^{(k+1)}(u)$ iga $|x - x_0| \leq u \leq u'$ puhul,

kusjuures $p(0)$ ja nendes hinnangutes esinevad operaatori p tuletised on positiivsed ning $p'(0) = -I$;

3^0 $p(u') \leq 0$;

4^0 rida $\sum [p'(u') + I]^i$ koondub kõikjal ruumis U.

Siis võrrandid (3.1) ja (3.2) omavad vastavalt piirkondades $|x - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$ ainsa lahendi, milleks koonduvad jadad $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \Gamma_0 P(\bar{x}_n)$ ja $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + p(\bar{u}_n)$ $(n = 0,1,\dots)$ kõigi alglähendite $\bar{x}_0$ ja $\bar{u}_0$ puhul, mis rahuldavad tingimusi $|\bar{x}_0 - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq \bar{u}_0 \leq u'$.

T õ e s t u s. Näitame kõigepealt, et jada $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n + p(u_n)$ koondub võrrandi (3.2) lahendiks, mis asub piirkonnas $0 \leq u \leq u'$. Oletades, et mingi n puhul $u_n \leq u'$, saame tingimuste 2^0 ja 3^0 tõttu

$$u' - u_{n+1} \geq u' + p(u') - u_n - p(u_n) = \int_{u_n}^{u'} [I + p'(u)]\,du \geq 0.$$

Seega iga $n = 0,1,\ldots$ korral $u_n \leq u'$. Võrdust

$$u_{n+1} - u_n = \int_{u_{n-1}}^{u_n} [I + p'(u)]\,du$$

kasutades on kerge induktiivselt tõestada, et

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq [I + p'(u')](u_n - u_{n-1}) \leq [I + p'(u')]^n p(0),$$

millest tingimuse 4^0 põhjal järeldubki jada $\{u_n\}$ koonduvus. Minnes võrduses

$$u_{n+1} = u_n + p(u_n)$$

üle piirile $n \to \infty$, näeme, et piirelement $u^* = \lim u_n \leq u'$ on võrrandi (3.2) lahendiks.

Valime nüüd mingi $\bar{u}_0 \in U$ nii, et $0 \leq \bar{u}_0 \leq u'$, ning moodustame tema abil jada $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + p(\bar{u}_n)$. Induktiivselt saame näidata, et iga $n = 0,1,\ldots$ puhul $\bar{u}_n \leq u'$ ja

$$0 \leq \bar{u}_n - u_n \leq [I + p'(u')]^n \bar{u}_0,$$

millest järeldubki, et $\lim \bar{u}_n = \lim u_n = u^*$. Sellega on ühtlasi tõestatud ka võrrandi (3.2) lahendi ainsus piirkonnas $0 \leq u \leq u'$.

Vaatleme jada x_0, $x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n)$. Ilmselt $|x_1 - x_0| \leq u_1 = u_1 - u_0$. Kui aga oletada, et

$|x_{i+1} - x_i| \leq u_{i+1} - u_i$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$, siis lemma 2.6 põhjal ka

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x)]\, dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{u_{n-1}}^{u_n} [I + p'(u)]\, du = u_{n+1} - u_n.$$

Seetõttu jada $\{x_n\}$ koondub (üldistatud normi järgi), kusjuures piirpunkt $x^* = \lim x_n$ asub piirkonnas $|x - x_0| \leq u^* \leq u'$. Piirile üleminek võrduses $x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n)$ näitab, et x^* on võrrandi (3.1) lahend.

Valime nüüüd sellise $\bar{x}_0 \in X$, et $|\bar{x}_0 - x_0| \leq u'$ ning moodustame jadad $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \Gamma_0 P(\bar{x}_n)$ ja $u'_0 = u'$, $u'_{n+1} = u'_n + p(u'_n)$. Induktiivselt on kerge näidata, et iga n puhul

$$|\bar{x}_n - x_n| \leq u'_n - u_n,$$

millest järeldub, et $\lim \bar{x}_n = \lim x_n = x^*$. Sellega on teoreem tõestatud.

2. Vaatleme iteratsioonimeetodeid, millede puhul, lähtudes võrrandi (3.1) lahendi x^* alglähendist x_0, leitakse uued lähendid $x_1, x_2, \ldots$ järg-

mist tüüpi valemite abil[1]):

$$\Delta x_n = G_n\left[\Gamma_{i_n}P(x_n),\ E,\ \Gamma_{i_n}P''(x_n),\ldots,\Gamma_{i_n}P^{(k_n)}(x_n)\right], \quad (3.3)$$

kus $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$; $n = 0,1,\ldots$; $0 \leq i_n \leq n$, $i_n \leq i_{n+1}$, $k_n \geq 1$; $\Gamma_{i_n} = \left[P'(x_{i_n})\right]^{-1}$ ning G_n on näidatud argumentide mingi operaator.

Oletame, et on rahuldatud teoreemi 3.1 eeldused mingi naturaalarvu $k \geq k_n$ ($n = 0,1,\ldots$) korral ning moodustame valemi (3.3) abil võrrandi (3.2) piirkonnas $0 \leq u \leq u'$ asuva lahendi u^* lähendite jada $\{u_n\}$:

$$u_0 = 0,$$
$$\Delta u_n = G_n\left[\gamma_{i_n}p(u_n),\ I,\ \gamma_{i_n}p''(u_n),\ldots,\gamma_{i_n}p^{(k_n)}(u_n)\right], \quad (3.4)$$

kus $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ ja $\gamma_{i_n} = \left[p'(u_{i_n})\right]^{-1}$

Loeme iteratsioonioperaatorit G_n kuuluvaks klassi $\mathfrak{A}$, kui ta teoreemi 3.1 eeldustel iga $0 \leq u_{i_n} \leq u_n \leq u^*$ korral, mille puhul $p(u_n) \geq 0$, rahuldab tingimusi:

a) $p(u_n) \leq \Delta u_n \leq u^* - u_n$ ja $p(u_n + \Delta u_n) \geq 0$;

---

[1]) Seda tüüpi valemite abil moodustatud iteratsiooniprotsesse, kus $i_n = n$ ning $k_n = k$ on fikseeritud naturaalarv, on vaadelnud Ü.Kaasik (vt. [7,23, 25]).

b) vahekorrast

$$\left|\Gamma_{i_n} P^{(\nu)}(x_n)\right| \leq -\gamma_{i_n} p^{(\nu)}(u_n) \quad (\nu = 0,2,3,\ldots,k_n) \tag{3.5}$$

järeldub, et

$$|\Delta x_n| \leq \Delta u_n, \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} \left|\Gamma_{i_n} P(x_n) + \Delta x_n + \sum_{j=2}^{k_n} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \Delta x_n^j\right| \leq \\ \leq -\gamma_{i_n} p(u_n) - \Delta u_n - \sum_{j=2}^{k_n} \frac{1}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n) \Delta u_n^j. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Vastavate iteratsioonimeetodite koonduvuse kohta kehtib järgmine teoreem.

T e o r e e m 3.2. Kui on täidetud teoreemi 3.1 tingimused[1] 1^0– 4^0 naturaalarvu $k \geq k_n$ $(n = 0,1,\ldots)$ korral ning kõik operaatorid G_n protsessis (3.3) kuuluvad klassi[2] $\mathfrak{A}$, siis see protsess koondub võrrandi (3.1) lahendiks x^*, kusjuures kehtivad hinnangud

---

[1]) Elemendiks u' valitakse tavaliselt võrrandi (3.2) vähim positiivne lahend u^*. Sellisel juhul on rahuldatud tingimus 3^0. Märgime, et tingimuses 2^0 võib piirkonnad $|x-x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$ asendada ka väiksemate piirkondadega, mis sisaldavad vastavalt murdjooni $x_0 x_1 \ldots$ ja $u_0 u_1 \ldots$ (vt. [49]).

[2]) See teoreem kehtib ka protsessi (3.3) jaoks, milles esinevad operaatorid G_n rahuldavad tingimust b) ning mille puhul $\lim u_n = u^*$ (vt. [49]).

$$|x^* - x_n| \leq u^* - u_n \quad (n = 0,1,\ldots), \tag{3.8}$$

milles u^* on piirkonnas $0 \leq u \leq u'$ asuv võrrandi (3.2) lahend ning elemendid u_n on arvutatud valemite (3.4) abil.

T õ e s t u s. Tõestame kõigepealt induktiivselt, et teoreemi eeldustel valemite (3.3) ja (3.4) abil moodustatud jadade $\{x_n\}$ ja $\{u_n\}$ ning iga $n = 0,1,\ldots$ puhul: $p(u_n) \geqslant 0$, eksisteerivad pöördoperaatorid Γ_{i_n} ja γ_{i_n} ning kehtivad hinnangud

$$\begin{gathered} |\Gamma_{i_n} P(x_n)| \leqslant -\gamma_{i_n} p(u_n), \qquad |\Gamma_{i_n} P'(x_0)| \leq -\gamma_{i_n}, \\ |\Gamma_0 P^{(\nu)}(x_n)| \leqslant p^{(\nu)}(u_n) \quad (\nu = 2,3,\ldots,k). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Eelduste 1^0 ja 2^0 põhjal on see õige $n = 0$ korral. Oletame nende nõuete rahuldatust ka $n = 1,\ldots,m$ puhul. Siis tingimustest a) ja b) järeldub, et $|\Delta x_n| \leqslant \Delta u_n$, kui $n = 0,1,\ldots,m$, ning $|x_{m+1} - x_0| \leq \leq u_{m+1} \leq u^*$.

Taylori valemi (vt. [20]) põhjal

$$\Gamma_{i_m} P(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_m} P^{(j)}(x_m) \Delta x_m^j + \\ + \frac{1}{k!} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \Gamma_{i_m} P^{(k+1)}(x)(x_{m+1} - x)^k dx$$

ning

$$\Gamma_{i_m} P'(x_m) = E + \int_{x_{i_m}}^{x_m} \Gamma_{i_m} P''(x)dx.$$

Kõrvutades neid analoogiliste avaldistega $-\gamma_{i_m} p(u_{m+1})$ ning $\gamma_{i_m} p'(u_m)$ jaoks saame hinnangute (3.9), tingimuste 2^0 ja b) ning lemma 2.6 põhjal

$$|\Gamma_{i_m} P(x_{m+1})| \leq - \gamma_{i_m} p(u_{m+1}). \qquad (3.10)$$

Valemit

$$\Gamma_0 P^{(\nu)}(x_{m+1}) = \Gamma_0 P^{(\nu)}(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \Gamma_0 P^{(\nu+1)}(x)dx$$

kasutades on kerge näidata, et

$$|\Gamma_0 P^{(\nu)}(x_{m+1})| \leq p^{(\nu)}(u_{m+1}) \quad (\nu = 2,3,\ldots,m).$$

Kuna

$$\Gamma_0 P'(x_{i_{m+1}}) = E + \Gamma_0 \left[P'(x_{i_{m+1}}) - P'(x_0)\right],$$

$$- p'(x_{i_{m+1}}) = I - \left[p'(u_{i_{m+1}}) + I\right],$$

siis vahekorrast

$$\left|\Gamma_0 \left[P'(x_{i_{m+1}}) - P'(x_0)\right]\right| \leq p'(u_{i_{m+1}}) + I \leq p'(u') + I,$$

tingimusest 4^0 ja lemmast 2.3 järeldub pöördoperaatorite $\gamma_{i_{m+1}}$ ja $\Gamma_{i_{m+1}}$ eksisteerimine ning hinnang

$$|\Gamma_{i_{m+1}} P'(x_0)| \leq - \gamma_{i_{m+1}}.$$

Samasust

$$\Gamma_{i_{m+1}} P'(x_{i_m}) = E + \Gamma_{i_{m+1}} \left[P'(x_{i_m}) - P'(x_{i_{m+1}})\right]$$

ja kergesti põhjendatavat hinnangut

$$\left|\Gamma_{i_{m+1}}\left[P'(x_{i_m}) - P'(x_{i_{m+1}})\right]\right| \leq \gamma_{i_{m+1}}\left[p'(u_{i_m}) - p'(u_{i_{m+1}})\right]$$

kasutades saame

$$\left|\Gamma_{i_{m+1}} P'(x_{i_m})\right| \leq \gamma_{i_{m+1}} p'(u_{i_m}).$$

Seetõttu valemist (3.10) järeldub, et

$$\left|\Gamma_{i_{m+1}} P(x_{m+1})\right| \leq -\gamma_{i_{m+1}} p(u_{m+1}).$$

Sellega olemegi tõestanud, et pöördoperaatorid $\Gamma_{i_{m+1}}$ ja $\gamma_{i_{m+1}}$ eksisteerivad ning hinnangud (3.9) kehtivad ka $n = m+1$ puhul. Võrratus $p(u_{m+1}) \geq 0$ järeldub vahetult tingimusest a).

Kuna hinnangutest (3.9) järelduvad hinnangud (3.5), siis olemegi tõestanud viimaste hinnangute kehtivuse iga $n = 0,1,\ldots$ korral.

Moodustame jada $\bar{u}_o = 0$, $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + p(\bar{u}_n)$. Teoreemi 3.1 põhjal $\lim \bar{u}_n = u^*$, aga tingimusest a) järeldub, et $\bar{u}_n \leq u_n \leq u^*$ $(n = 0,1,\ldots)$. Järelikult jada $\{u_n\}$ koondub ning $\lim u_n = u^*$.

Vahekorrast (3.6) järeldub, et

$$|x_{n+m} - x_n| \leq u_{n+m} - u_n \qquad (m \geq 1),$$

ning sellest omakorda jada $\{x_n\}$ koonduvus. Ilmselt piirpunkti $x^* = \lim x_n$ puhul on õiged hinnangud (3.8).

Eespool tõestatu põhjal

$$\left|\Gamma_{i_n} P(x_n)\right| \leq -\gamma_{i_n} p(u_n),$$

millest piirprotsessi $n \to \infty$ abil saame

$$\left|\left[P'(\bar{x})\right]^{-1} P(x^*)\right| \leq -\left[p'(\bar{u})\right]^{-1} p(u^*) = 0,$$

kus $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n}$ ja $\bar{u} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{i_n} \leq u^*$. Järelikult piirpunkt $x^* = \lim x_n$ on võrrandi (3.1) lahend.

Teoreem on tõestatud.

M ä r k u s. Kui operaator $P(x)$ on analüütiline ning on teada sellised sümmeetrilised polülineaarsed operaatorid $q_i \in [U^i \to U]$, et

$$\left|\Gamma_0 P^{(i)}(x_0)\right| \leq q_i \quad (i = 0,2,3,\dots;\ q_0 \in U),$$

siis võime operaatori $p(u)$ konstrueerida järgmise rea abil:

$$p(u) = q_0 - u + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} q_i u^i.$$

Teoreemi 3.1 tingimus 2^0 on täidetud, kui see rida koondub kohal $u = u'$ ning operaatorid $P(x)$ ja $p(u)$ on analüütilised vastavalt piirkondades $|x - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$.

3. Näitame, kuidas ühe teadaoleva klassi $\mathfrak{A}$ kuuluva iteratsioonioperaatori abil saab moodustada uusi sellesse klassi kuuluvaid operaatoreid, mis annavad kiiremini koonduvaid protsesse.

T e o r e e m 3.3. Kui Δx_n on määratud valemi (3.3) abil, milles operaator G_n kuulub klassi $\mathfrak{A}$, siis valem

$$\overline{\Delta x}_n = -\left[E + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j-1}\right]^{-1} \times \left[\Gamma_{i_n} P(x_n) - \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j - 1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j}\right] \tag{3.11}$$

määrab iga naturaalarvu $m \geq k_n$ ja reaalarvu $0 \leq \alpha_j \leq j$ $(j = 2,3,\dots)$ puhul klassi $\mathfrak{A}$ kuuluva iteratsioonioperaatori. Seejuures

$$\overline{\Delta u}_n \geq \Delta u_n, \tag{3.12}$$

kus

$$\overline{\Delta u}_n = -\left[I + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n)\Delta u_n^{j-1}\right]^{-1} \times \left[\gamma_{i_n} p(u_n) - \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j - 1}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n)\Delta u_n^{j}\right]. \tag{3.13}$$

T õ e s t u s. Hinnangutest

$$|\Gamma_{i_n} P^{(\nu)}(x_n)| \leq -\gamma_{i_n} p^{(\nu)}(u_n) \quad (\nu = 0,2,3,\dots,m) \tag{3.14}$$

ja (3.6) järeldub, et

$$\left|\sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j-1}\right| \leq -\sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n)\Delta u_n^{j-1} \leq$$

$$\leq -\gamma_{i_n}\left[p'(u_n+\Delta u_n) - p'(u_n)\right] \leq -\gamma_{i_n}\left[p'(u^*) - p'(u_{i_n})\right].$$

Tingimuse 4° ja lemma 2.4 põhjal rida

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{-\gamma_{i_n}\left[p'(u^*) - p'(u_{i_n})\right]\right\}^j$$

koondub kõikjal ruumis U, millest lemmat 2.3 arvestades järeldub pöördoperaatori eksisteerimine valemis (3.11) ning hinnang

$$\left\|\left[E + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j-1}\right]^{-1}\right\| \leq$$
$$\leq \left[I + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n)\Delta u_n^{j-1}\right]^{-1}. \qquad (3.15)$$

Valemist (3.11) saame

$$\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j-1}(\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n) =$$

$$= -\Gamma_{i_n} P(x_n) - \Delta x_n - \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n)\Delta x_n^{j}.$$

Kuna Δx_n rahuldab tingimust b), $m \geq k_n$ ning kehtib hinnang (3.15), siis järeldub viimasest võrdusest, et

$$\left\|\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n\right\| \leq \overline{\Delta u}_n - \Delta u_n.$$

Võrdust $\overline{\Delta x}_n = \Delta x_n + (\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n)$ kasutades, saame

$$|\overline{\Delta x}_n| \leq \Delta u_n + (\overline{\Delta u}_n - \Delta u_n) = \overline{\Delta u}_n,$$

s.t. $\overline{\Delta x}_n$ rahuldab tingimust (3.6). Ühtlasi näitasime, et $\overline{\Delta u}_n - \Delta u_n \geqslant 0$, s.t. tõestasime võrratuse (3.12).

Seosest (3.11) saame

$$\Gamma_{i_n} P(x_n) + \overline{\Delta x}_n = -\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \Delta x_n^{j-1} \left[\alpha_j (\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n) + \Delta x_n\right],$$

mistõttu

$$\Gamma_{i_n} P(x_n) + \overline{\Delta x}_n + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \overline{\Delta x}_n^j =$$

$$= \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \left[\overline{\Delta x}_n^j - \Delta x_n^j - \alpha_j \Delta x_n^{j-1} (\overline{\Delta x}_n - \Delta x_n)\right].$$

Võrreldes viimast avaldist analoogilise avaldisega operaatori $p(u)$ jaoks pole raske näha, et hinnangutest (3.14) järeldub vahekord (3.7), milles k_n on asendatud naturaalarvuga m. Seega valemiga (3.11) määratud iteratsioonioperaator rahuldab tingimust b). Jääb veel kontrollida tingimuse a) kehtivus.

Juba tõestatud vahekorrast (3.12) järeldub, et iga $0 \leq u_{i_n} \leq u_n \leq u^*$ korral, mille puhul $p(u_n) \geq 0$, kehtib võrratus

$$p(u_n) \leqslant \Delta u_n \leq \overline{\Delta u}_n.$$

Taylori valemi põhjal

$$p(u^*) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} p^{(j)}(u_n)(u^* - u_n)^j +$$

$$+ \frac{1}{m!} \int_{u_n}^{u^*} p^{(m+1)}(u)(u^* - u)^m du = 0,$$

millest järeldub

$$\gamma_{i_n} p(u_n) + u^* - u_n + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n)(u^* - u_n)^j \geq 0.$$

Kuna $0 \leq \Delta u_n \leq u^* - u_n$, siis saame viimasest võrratusest

$$\left[I + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n) \Delta u_n^{j-1}\right](u^* - u_n) \geq$$

$$\geq -\gamma_{i_n} p(u_n) + \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j - 1}{j!} \gamma_{i_n} p^{(j)}(u_n) \Delta u_n^j,$$

millest $\overline{\Delta u}_n$ avaldist arvestades järeldubki, et

$$u^* - u_n \geq \overline{\Delta u}_n.$$

Lõpuks tõestame veel, et $p(u_n + \overline{\Delta u}_n) \geq 0$. Selleks lahutame võrdusest

$$p(u + \overline{\Delta u}_n) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} p^{(j)}(u_n) \overline{\Delta u}_n^j +$$

$$\frac{1}{m!} \int_{u_n}^{u_n + \overline{\Delta u}_n} p^{(m+1)}(u)\,(u_n + \overline{\Delta u}_n - u)^m du$$

valemi (3.13) teisendamisel saadud samasuse

$$0 = p(u_n) + p'(u_{i_n})\overline{\Delta u}_n + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} p^{(j)}(u_n)\left[\Delta u_n^j + \alpha_j \Delta u_n^{j-1}(\overline{\Delta u}_n - \Delta u_n)\right]$$

ning näitame, et saadud vahe on positiivne. Sellega on teoreem tõestatud.

Kergesti saab otseselt näidata, et Newtoni meetodi iteratsioonioperaator

$$\Delta x_n = -\Gamma_{i_n} P(x_n) \qquad (0 \le i_n \le n),$$

millele vastab $\Delta u_n = -\gamma_{i_n} p(u_n)$, kuulub klassi $\mathfrak{A}$. Valemit (3.11) kasutades võime tema abil moodustada näiteks iteratsioonioperaatori (vrd. [24])

$$\Delta x_n = -\left[E - \frac{\alpha}{2}\Gamma_{i_n} P''(x_n)\,\Gamma_{i_n} P(x_n)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left[E - \frac{\alpha-1}{2}\Gamma_{i_n} P''(x_n)\,\Gamma_{i_n} P(x_n)\right]\Gamma_{i_n} P(x_n),$$

mis teoreemi 3.3 põhjal kuulub klassi $\mathfrak{A}$, kui $0 \le \alpha \le 2$. Hinnang (3.8) kindlustab selle valemi abil arvutatud lähenditele seda suurema täpsuse, mida suurem on α. Eriti on see valem leidnud kasutamist $\alpha = 0;1;2$ korral (vt. näit. [7,18,40]).

Valemi (3.11) abil võib jätkata uute iteratsioonioperaatorite moodustamist. Näiteks võime koostada klassi $\mathfrak{A}$ kuuluvaid iteratsioonioperaatoreid, mis sisaldavad operaatori P tuletisi kuni kolmanda järguni jne.

Kuid mitte kõik klassi $\mathfrak{A}$ iteratsioonioperaatorid pole tuletatavad valemi (3.11) abil. Näiteks analoogiliselt teoreemi 3.3 tõestusele saab näidata, et klassi $\mathfrak{A}$ kuuluvad ka järgmise valemiga määratud operaatorid (vrd. [26,27]):

$$\Delta_k x_n = -\left[E + \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_{kj}}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_1 x_n^{\beta_{k-1,j}} \cdots \Delta_{k-2} x_n^{\beta_{2j}} \Delta_{k-1} x_n^{\beta_{1j}}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\Gamma_n P(x_n) - \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_{kj}-1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_1 x_n^{\beta_{k-1,j}} \cdots \Delta_{k-2} x_n^{\beta_{2j}} \Delta_{k-1} x_n^{1+\beta_{1j}}\right]$$

milles mittenegatiivsed täisarvud β_{ij} ja reaalarvud α_{kj} rahuldavad tingimusi

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_{ij} = j - 1 , \qquad \beta_{ij} \geq \beta_{i+1,j} \geq 0 \ (i=1,2,\dots),$$

$$0 \leq \alpha_{kj} \leq 1 + \beta_{1j}$$

ning elemendid $\Delta_{k-1}x_n, \dots, \Delta_2 x_n$ avalduvad järk-järgult sama valemi abil, aga $\Delta_1 x_n = -\Gamma_n P(x_n)$.

Tööst [42] ilmneb, et klassi $\mathfrak{A}$ kuuluvad ka iteratsioonioperaatorid, mis kujutavad pöördoperaatori reaksarendise osasummasid.

Seega näeme, et peagu kõik praktikas kasutamist leidnud iteratsioonimeetodid on valemiga (3.3) määratud protsessid, mis koosnevad klassi $\mathfrak{A}$ operaatoritest. Tingimustel 1°- 4° kindlustab teoreem 3.2

sellise protsessi koonduvuse võrrandi (3.1) lahendiks x^* ning annab hinnangu (3.8) lähendite täpsuse jaoks. Iteratsiooniprotsessi (3.3) moodustamisel on meil võrdlemisi suur vabadus. Me võime näiteks igal sammul arvutada uue pöördoperaatori Γ_n või kasutada mitu korda järjest sama pöördoperaatorit Γ_{i_n}. Me võime ka igal sammul kasutada uut iteratsioonioperaatorit. Näiteks sageli osutuvad kasulikeks protsessid, millede puhul esimene lähend arvutatakse keerulisema iteratsioonioperaatori abil kui järgmised lähendid.

4. Juhul, kui pole teada täpne pöördoperaator $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$, vaid mingi temale lähedane lineaarne operaator Γ (ruumist Z ruumi X), siis võib võrrandi (3.1) lahendi x^* lähendite jada $\{x_n\}$ moodustada valemite

$$\Delta x_n = G_n\left[\Gamma P(x_n), E, \Gamma P''(x_n), \ldots, \Gamma P^{(k_n)}(x_n)\right] \qquad (3.16)$$

abil, kus $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $k_n \geq 1$, $n = 0,1,\ldots$

Vastavaks jadaks $\{u_n\}$ on

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ \Delta u_n &= G_n\left[-p(u_n), I, -p''(u_n), \ldots, -p^{(k_n)}(u_n)\right], \end{aligned} \qquad (3.17)$$

kus $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$.

Iteratsioonioperaatorit G_n loeme kuuluvaks klassi $\mathfrak{A}'$, kui ta järgneva teoreemi 3.4 eeldustel $1^o - 4^o$ iga $0 \leq u_n \leq u^*$ korral, mille puhul $p(u_n) \geq 0$, rahuldab tingimusi a) ja b), kusjuures viimases tingimuses operaatorid Γ_{i_n} ja γ_{i_n} on asendatud vastavalt operaatoritega Γ ja $-I$.

Kerge on kontrollida, et teoreem 3.3 on kasutatav ka klassi $\mathfrak{A}'$ kuuluvate operaatorite konstrueerimiseks ning et kõik eelmises punktis toodud klassi $\mathfrak{A}$ kuuluvad iteratsioonioperaatorid kuuluvad ka klassi $\mathfrak{A}'$.

Kehtib järgmine tulemus, mis erijuhul, kui ruum U kujutab reaalarvude hulka ja valem (3.16) omab kuju $\Delta x_n = -\Gamma P(x_n)$, on tõestatud töödes [19,34].

T e o r e e m 3.4. Olgu elementide $x_o \in X$ ja $u' \in U$ $(u' \geq 0)$ ning naturaalarvu $k \geq k_n$ $(n = 0,1,...)$ puhul rahuldatud tingimused:

1^o operaator $\Gamma \in (Z \to X)$ omab pöördoperaatori;

2^o operaatorid $P(x)$ ja $p(u)$ on $k+1$ korda pidevalt diferentseeruvad vastavalt piirkondades

$|x - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$ ning

$|\Gamma P(x_0)| \leq p(0)$, $|\Gamma P'(x_0) - E| \leq p'(0) + I$,

$|\Gamma P^{(i)}(x_0)| \leq p^{(i)}(0)$ $(i = 2,3,\ldots)$,

$|\Gamma P^{(k+1)}(x)| \leq p^{(k+1)}(u)$ iga $|x - x_0| \leq u \leq u'$ korral;

3^o $p(u') \leq 0$;

4^o rida $\sum [p'(u')+I]^i$ koondub kõikjal ruumis U.

Siis võrrandid (3.1) ja (3.2) omavad vastavalt piirkondades $|x - x_0| \leq u'$ ja $0 \leq u \leq u'$ kumbki ainsa lahendi, mida tähistame vastavalt x^* ja u^*. Seejuures klassi $\mathfrak{A}'$ kuuluvate operaatorite G_n abil moodustatud protsess (3.16) koondub võrrandi (3.1) lahendiks x^*, kusjuures kehtivad hinnangud (3.8), milles elemendid u_n on arvutatud valemite (3.17) abil.

Selle teoreemi saab tõestada analoogiliselt teoreemide 3.1 ja 3.2 tõestusele.

5. Peatume juhul, kui U on B^{++}-ruum. Siis lemma 2.5 põhjal teoreemide 3.1 ja 3.4 tingimus 4^o on samaväärne nõudega, et eksisteerib positiivne ope-

raator $-[p'(u')]^{-1} \geq 0$.

Sellel juhul juba teoreemi 3.1 (või 3.4) tingimustest 1^o- 3^o järeldub, et võrrandil (3.2) on olemas vähim positiivne lahend u^*, mis asub piirkonnas $0 \leq u \leq u'$, ning teoreemi 3.1 saab järgmiselt täpsustada.

T e o r e e m 3.5. Kui U on B^{++}-ruum, teoreemi 3.1 tingimused 1^o- 3^o on täidetud ning võrrand (3.2) omab piirkonnas $0 \leq u \leq u'$ ainult ühe lahendi, siis on õiged kõik teoreemi 3.1 väited.

M ä r k u s. Kui ruumiks U valida reaalarvude hulk ja suuruseks u' võrrandi (3.2) vähim mittenegatiivne lahend u^*(mille eksisteerimist eeldame), siis jäävad kehtima kõik selle paragrahvi tulemused, kui nõuda ainult teoreemi 3.1 (või vastavalt 3.4) tingimuste 1^o ja 2^o rahuldatust ning loobuda tingimusest 4^o (vt. [48]).

§ 4. Ilmutamata operaatori reaksarendise koonduvus

1. Vaatleme võrrandit

$$P(x,y) = 0, \tag{4.1}$$

kus P on analüütiline operaator Banachi ruumidest X ja Y sama tüüpi ruumi Z. Olgu teada selle võrrandi lahend x_0 parameetri väärtusel $y = y_0$ ning otsitagu lahendit x^*, mis vastab parameetri väärtusele $y = y^*$ (vrd. [32,34]).

Võrrandi (4.1) lahenduvuse uurimisel võib kasutada teoreemi 3.1 ning lahendi x^* lähendite leidmiseks valemeid kujus (3.3). Sellel juhul tuleb juba $n = 0$ korral kasutada operaatori P osatuletisi punktis (x_0, y^*). Kuid sageli (eriti siis, kui võrrandit (4.1) on vaja lahendada paljude parameetri väärtuste puhul) osutuvad kasulikeks protsessid, millistes esinevad operaatori P osatuletised ainult punktis (x_0, y_0). Selliste protsesside hulgas omab eriti suurt praktilist tähtsust ilmutamata operaatori parameetri järgi astmeritta arendamise meetod, mille uurimisele me asumegi.

Ilmutamata operaatori olemasolu ja analüütilisuse kohta kehtib järgmine teoreem (vt. näit. [8]).

T e o r e e m 4.1. Kui

1° $P(x_0, y_0) = 0$,

2° eksisteerib pöördoperaator $[P_x(x_0, y_0)]^{-1} = \Gamma_0$,

3° operaator P on analüütiline punktis (x_0, y_0),

siis eksisteerib punktis y_0 analüütiline operaator, $x = \Phi(y)$, mis on määratud võrrandiga (4.1) ja tingimusega $\Phi(y_0) = x_0$.

Seda teoreemi saab tõestada näiteks järgmiselt. Teoreemi põhjal ilmutamata operaatoritest ([38], lk. 316) määrab võrrand (4.1) eeldustel 1°- 3° ilmutamata operaatori $x = \Phi(y)$, mis rahuldab tingimust $\Phi(y_0) = x_0$ ning on mistahes arv korda diferentseeruv teatavas punkti y_0 ümbruses. Kasutades operaatori P osatuletiste jaoks hinnanguid (1.8) saame näidata, et operaatori Φ tuletised rahuldavad punkti y_0 ümbruses hinnanguid kujul (1.7), millest järeldubki ilmutamata operaatori analüütilisus punktis y_0 (vrd. [46]).

Tuletame nüüd rekurrentse seose ilmutamata operaatori diferentsiaalide arvutamiseks.

Teoreemi 4.1 eeldustel eksisteerib punkti y_0 teatavas ümbruses ilmutamata operaator Φ, mis rahuldab võrduse $P(\Phi(y),y) = 0$ teisendamisel saadud samasust

$$\Phi(y)=x_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}Q_{x^{\nu-\mu}y^{\mu}}(x_0,y_0)(y-y_0)^{\mu}\left[\Phi(y)-x_0\right]^{\nu-\mu}, \quad (4.2)$$

milles $Q(x,y) = x - x_0 - \Gamma_0 P(x,y)$. Seejuures $Q(x_0,y_0) = 0$, $Q_x(x_0,y_0) = 0$ ning ülejäänud osatuletised

$$Q_{x^{\nu-\mu}y^{\mu}}(x_0,y_0) = -\Gamma_0 P_{x^{\nu-\mu}y^{\mu}}(x_0,y_0).$$

Võrduse (4.2) järkjärgulisel diferentseerimisel saame leida seosed suuruste

$$\Delta x_n(y) = \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(y)(y^*-y_0)^n \quad (n = 1,2,\ldots)$$

arvutamiseks. Selleks toome sisse tähistuse

$$Q_k^i(y) = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{1}{(\nu-k)!}\sum_{\mu=j}^{\nu-k+j}\binom{\nu-k}{\mu-j}Q_{x^{\nu-\mu}y^{\mu}}(x_0,y_0)\times$$
$$\times(y-y_0)^{\mu-j}(y^*-y_0)^j\left[\Phi(y)-x_0\right]^{\nu-\mu-k+j}\Delta x_1^{i-j}(y)$$

ning tõestame täieliku induktsiooni meetodiga, et

$$\Delta x_n(y) = \sum_{1i_1+\ldots+ni_n=n}\frac{1}{i_1!\ldots i_n!}Q_k^{i_1}(y)\Delta x_2^{i_2}(y)\ldots\Delta x_n^{i_n}(y), \quad (4.3)$$

kus $i_1,\ldots,i_n$ on mittenegatiivsed täisarvud ning $k = i_1+\ldots+i_n \geq 1$. Rida (4.2) diferentseerides näeme, et seos (4.3) on õige n = 1 korral. Kui oletada selle seose kehtivust mingi n korral, siis saame kergesti kontrollitavate võrduste

$$d\left[\Delta x_k(y)\right] = (k+1)\Delta x_{k+1}(y),$$

$$d\left[Q_k^i(y)\right] = Q_{k+1}^{i+1}(y) + 2iQ_k^{i-1}(y)\Delta x_2(y)$$

abil näidata, et

$$\Delta x_{n+1}(y) = \frac{1}{n+1}\, d\left[\Delta x_n(y)\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{1i_1+\ldots+ni_n=n} \frac{1}{i_1!\ldots i_n!}\Big\{ d\left[Q_k^{i_1}(y)\right]\Delta x_2^{i_2}(y)\ldots\Delta x_n^{i_n}(y) +$$

$$+ i_2 Q_k^{i_1}(y)\Delta x_2^{i_2-1}(y)\, d\left[\Delta x_2(y)\right]\ldots\Delta x_n^{i_n}(y) + \ldots +$$

$$+ i_n Q_k^{i_1}(y)\Delta x_2^{i_2}(y)\ldots\Delta x_n^{i_n-1}(y)\, d\left[\Delta x_n(y)\right]\Big\} =$$

$$= \sum_{1i_1+\ldots+(n+1)i_{n+1}=n+1} \frac{1}{i_1!\ldots i_{n+1}!}\, Q_{k'}^{i_1}(y)\Delta x_2^{i_2}(y)\ldots\Delta x_{n+1}^{i_{n+1}}(y),$$

kus $k' = i_1 + \ldots + i_{n+1}$. See tõestabki valemi (4.3) kehtivuse iga $n = 1,2,\ldots$ korral.

Tähistame $Q_k^i(y_o) = Q_k^i$ ja $\Delta x_n(y_o) = \Delta x_n$. Siis

$$Q_1^o = 0, \quad Q_1^1 = -\Gamma_o P_y(x_o, y_o)(y^* - y_o),$$

$$Q_k^i = -\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Gamma_o P_{x^{k-j}y^j}(x_o, y_o)(y^* - y_o)^j \Delta x_1^{i-j} \quad (k=2,3,\ldots)$$

ning valemist (4.3) saame operaatori $\Phi(y)$ Taylori rea liikmete

$$\Delta x_n = \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(y_o)(y^* - y_o)^n$$

arvutamiseks rekurrentsed seosed

$$\Delta x_1 = - \Gamma_0 P_y(x_o,y_o)(y^* - y_o),$$

$$\Delta x_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{n-1}=k\geq 2 \\ 1i_1+\ldots+(n-1)i_{n-1}=n}} \frac{1}{i_1!\ldots i_{n-1}!} Q_k \Delta x_2^{i_1} \Delta x_2^{i_2} \ldots \Delta x_{n-1}^{i_{n-1}} \quad (n = 2,3,\ldots), \tag{4.4}$$

milles $i_1,\ldots,i_{n-1}$ on mittenegatiivsed täisarvud.

2. Olgu ruum X normeeritud B^+-ruumi U abil, aga V - mistahes pooljärjestatud Banachi ruum. Siis saame ilmutamata operaatori astmerea koonduvuse kohta tõestada järgmise teoreemi.

T e o r e e m 4.2. Eeldame, et

1^o $P(x_o,y_o) = 0$;

2^o eksisteerib pöördoperaator $[P_x(x_o,y_o)]^{-1} = \Gamma_0$;

3^o leiduvad sellised polülineaarsed operaatorid $q_{k-i,i} \in [V^iU^{k-i} \longrightarrow U]$, et

$$|\Gamma_0 P_y(x_o,y_o)(y^* - y_o)| \leq q_{01}v^*,$$

$$|\Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_o,y_o)(y^* - y_o)^i| \leq q_{k-i,i}v^{*i} \quad (i=0,\ldots,k;k=2,3,\ldots) \tag{4.5}$$

ning rida

$$q(u,v) = q_{01}v + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q_{k-i,i}v^iu^{k-i} \tag{4.6}$$

koondub punkti (0,0) ümbruses;

4° jada $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) v^{*k}$ $(n = 0,1,\ldots)$

koondub, kus operaator $u = \varphi(v)$ on määratud võrrandiga $u = q(u,v)$ ja tingimusega $\varphi(0) = 0$ [1];

5° rida (4.6) koondub kohal $u = u^*$ ja $v = v^*$, kus $u^* = \lim u_n$;

6° operaator $P(x,y)$ on analüütiline piirkonnas

$$|x - x_0| \leq u^*, \tag{4.7}$$

$$y = y_0 + t(y^* - y_0) \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{4.8}$$

Siis võrrand (4.1) omab $y = y^*$ korral piirkonnas (4.7) ainsa lahendi x^*, milleks koondub (üldistatud normi järgi) valemitega (4.4) määratud ilmutamata operaatori reaksarendise osasummade jada

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n \quad (n = 1,2,\ldots),$$

kusjuures kehtivad hinnangud

$$|x^* - x_n| \leq u^* - u_n \quad (n = 0,1,\ldots). \tag{4.9}$$

T õ e s t u s. Tähistades

$$\Delta u_n = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0) v^{*n}$$

ning kasutades Δx_n ja Δu_n avaldamiseks valemeid (4.4)

---

[1]) Nii defineeritud operaatori φ olemasolu ja analüütilisuse kindlustab teoreem 4.1.

pole raske näidata, et hinnangute (4.5) tõttu

$$|\Delta x_n| \leq \Delta u_n \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Seetõttu järeldub tingimusest 4^0, et rida

$$\Phi\left[y_0+t(y^*-y_0)\right] = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \Delta x_k$$

koondub iga $0 \leq t \leq 1$ puhul piirkonnas (4.7) asuvaks punktiks. Tähistame selle rea summat $t = 1$ korral $x^* = \Phi(y^*)$. Kerge on veenduda, et see punkt rahuldab võrratusi (4.9).

Tõestame, et x^* on võrrandi (4.1) lahend parameetri väärtusel $y = y^*$. Tingimustest 3^0 ja 5^0 järeldub rea

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y-y_0)^i(x-x_0)^{k-i}$$

koonduvus, kui x ja y kuuluvad vastavalt piirkondadesse (4.7) ja (4.8). Tingimust 6^0 arvestades osutub võrrand

$$x - x_0 = - \Gamma_0 P_y(x_0,y_0)(y-y_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y-y_0)^i(x-x_0)^{k-i} \qquad (4.10)$$

selliste x ja y väärtuste puhul samaväärseks võrrandiga (4.1). Teoreemi 4.1 põhjal kujutab rida

$x = \Phi\left[y_0+t(y-y_0)\right]$ küllalt väikese reaalse t korral võrrandi (4.1) ja järelikult ka (4.10) lahendit parameetri väärtusel $y = y_0 + t(y^* - y_0)$. Asetades need x ja y väärtused võrrandisse (4.10) saame seetõttu küllalt väikese t puhul samasuse. Lemma 2.2 põhjal võime selle samasuse parema poole korraldada t astmete järgi. Saadud võrduse mõlemad pooled koonduvad $0 \leq t \leq 1$ korral ning seetõttu kujutavad nad $0 \leq t < 1$ puhul argumendi t analüütilisi operaatoreid. Kui peame veel silmas lemmat 1.7, siis sellest järeldubki võrduse (4.10) mõlemate poolte ühtimine $0 \leq t \leq 1$ puhul. Seega jada $\{x_n\}$ piirpunkt $x^* = \Phi(y^*)$ kujutab võrrandi (4.1) lahendit parameetri y^* korral.

Jääb veel tõestada lahendi x^* ainsus piirkonnas (4.7). Olgu x' võrrandi (4.1) mistahes lahend piirkonnas (4.7), mis vastab parameetrile $y = y^*$. Siis x' rahuldab ka võrrandit (4.10) $y = y^*$ korral ning valemeid (4.4) kasutades pole raske induktiivselt tõestada, et iga $n = 0,1,\ldots$ puhul

$$|x' - x_n| \leq u^* - u_n,$$

mistõttu $x' = x^*$. Sellega on teoreem tõestatud.

M ä r k u s. Teoreem 4.2 on rakendatav ka juhul, kui x_0 pole võrrandi (4.1) täpne lahend parameetri väärtusel y_0, s.t. kui $P(x_0,y_0) \neq 0$. Siis tähistame $P(x_0,y_0) = z_0$, $(y,z) = \bar{y} \in Y \times Z$ ning moodustame võrrandi

$$\bar{P}(x,\bar{y}) = P(x,y) - z = 0, \qquad (4.11)$$

mille lahendiks parameetri $\bar{y}$ väärtusel $\bar{y}_0 = (y_0,z_0)$ on x_0. Võrrandi (4.11) lahendiks $\bar{y}^* = (y^*,0)$ puhul on võrrandi (4.1) otsitav lahend x^*, mis vastab parameetri väärtusele $y = y^*$. Lihtsad arvutused annavad

$$\bar{P}_x(x_0,\bar{y}_0) = P_x(x_0,y_0),$$

$$\bar{P}_{\bar{y}}(x_0,\bar{y}_0)(\bar{y}^*-\bar{y}_0) = P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0) + P(x_0,y_0),$$

$$\bar{P}_{x^{k-i}\bar{y}^i}(x_0,\bar{y}_0)(\bar{y}^*-\bar{y}_0)^i = P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y^*-y_0)^i (k=2,3,\dots).$$

Hinnangud (4.5) võrrandi (4.11) jaoks omavad kuju

$$\begin{aligned} &|\Gamma_0 P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0) + \Gamma_0 P(x_0,y_0)| \le q_{01} v^*, \\ &|\Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y^*-y_0)^i| \le q_{k-i,i} v^{*i} \; (k=2,3,\dots). \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Otsitava lahendi x^* lähendite $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$ ($n = 1,2,\dots$) arvutamiseks võib ka sellel juhul kasutada valemeid (4.4), kui vaid esimene neist valemitest asendada järgmisega:

$$\Delta x_1 = - \Gamma_0 P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0) - \Gamma_0 P(x_0,y_0). \qquad (4.13)$$

3. Vaatleme juhtu, millal U on B^{++}-ruum. Kui sellel juhul võrrand

$$u = q(u,v^*), \tag{4.14}$$

milles operaator $q(u,v)$ on määratud reaga (4.6), omab positiivse lahendi $u' \geqslant 0$, siis on kerge näidata, et on rahuldatud teoreemi 4.2 tingimus 4^0, s.t. jada $\{u_n\}$ koondub, kusjuures $\lim u_n = u^* \leq u'$. Valemite (4.4) abil saab veenduda, et $u^* = \lim u_n$ on võrrandi (4.14) vähim positiivne lahend.

Erijuhul, kui ruumideks U ja V valime reaalarvude hulga, võime lemma 1.6 põhjal hinnangud (4.12) alati leida kujus

$$\begin{aligned} &\|\Gamma_0 P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0) + \Gamma_0 P(x_0,y_0)\| \leqslant av^*, \\ &\|\Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y^*-y_0)^i\| \leq k!\,hb^{k-2}(cv^*)^i \quad (k=2,3,\dots), \end{aligned} \tag{4.15}$$

kus a, b, c, h, ja v^* on mittenegatiivsed konstandid. Sellel juhul

$$q(u,v) = av + \frac{h(u+cv)^2}{1-b(u+cv)}$$

ning võrrand (4.14) omab mittenegatiivse lahendi

$$u^* = \varphi(v^*) = \frac{1+b(a+c)v^* + \sqrt{\left[1-b(a+c)v^*\right]^2 - 4h(a+c)v^*}}{2(b+h)} - cv^* \leqslant$$

$$\leqslant (2a+c)v^*,$$

kui vaid ruutjuurealune avaldis on mittenegatiivne, s.t. kui

$$v^* \leqslant \frac{b+2h-2\sqrt{h(b+h)}}{b^2(a+c)} .$$

Viimane võrratus asendab vaadeldaval juhul teoreemi 4.2 tingimusi 4^o ja 5^o. Teoreemi 3.5 põhjal ei ole võrrandil $P(x,y^*) = 0$ piirkonnas

$$\|x - x_o\| < \frac{1+b(a+c)v^* + \sqrt{[1-b(a+c)v^*]^2 - 4h(a+c)v^*}}{2(b+h)} - cv^*$$

üle ühe lahendi (kui muidugi operaator $P(x,y)$ on analüütiline vastavas piirkonnas).

Arendades funktsiooni $\varphi(v^*)$ ritta v^* astmete järgi, saame

$$\Delta u_1 = av^*,$$

$$\Delta u_k = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{i+1} \binom{k-2}{i} \binom{k+i}{i} b^{k-2-i} h^{i+1} (a+c)^k v^{*k} \quad (k=2,3,\ldots).$$

Kui $m = 2(b+2h)(a+c)v^* < 1$, siis saame hinnata

$$\Delta u_k \leq h(a+c)^2 v^{*2} \frac{m^{k-2}}{k-1} \qquad (k = 2,3,\ldots),$$

ning võrratustest (4.9) järelduvad küll mitte nii täpsed, kuid lihtsamini rakendatavad hinnangud

$$\|x^* - x_n\| < \frac{h(a+c)^2 v^{*2}}{1-m} \frac{m^{n-1}}{n} \quad (n = 1,2,\ldots). \quad (4.16)$$

4. Teoreemid 3.2, 3.4 ja 4.2 annavad meile aprioorsed hinnangud (3.8) ja (4.9), mis võimaldavad hinnata lähendite x_n täpsust enne nende tegelikku arvutamist. Kõrvuti selliste hinnangutega omavad praktikas suurt tähtsust aga ka aposterioorsed hinnangud, mis on küll kasutatavad alles pärast lähendite leidmist, kuid on enamasti täpsemad ning annavad õige hinnangu ka juhul, kui lähendite leidmisel on tehtud arvutusvigu. Lihtsa seda tüüpi hinnangu saame järgmisel viisil.

Olgu täidetud teoreemi 4.2 eeldused ning olgu $\tilde{x}$ võrrandi $P(x,y^*) = 0$ lahendi x^* mingi lähend, mis asub piirkonnas (4.7). Lagrange'i valemi kohaselt

$P(x^*,y^*) = P(\tilde{x},y^*) + P_x[\tilde{x} + \theta(x^*-\tilde{x}),y^*](x^*-\tilde{x}) = 0$

$(0 \leq \theta \leq 1)$. Kui rida $\sum [q_u(u^*,v^*)]^k$ koondub kõikjal ruumis U ning on teada hinnang $|\Gamma_0 P(\tilde{x},y^*)| \leq w$, siis saame viimasest võrdusest

$$|x^* - \tilde{x}| \leq [I - q_u(u^*,v^*)]^{-1} w.$$

Juhul, kui funktsioon $q(u,v)$ on moodustatud hinnangute (4.15) abil ja

$$v^* < \frac{b+2h-2\sqrt{h(b+h)}}{b^2(a+c)},$$

siis kehtib võrratus

$$q_u(u^*,v^*) = \frac{h(u^*+cv^*)[2 - b(u^*+cv^*)]}{[1 - b(u^*+cv^*)]^2} < 1$$

ning on kasutatav hinnang

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leq \frac{\|\Gamma_0 P(\tilde{x},y^*)\|}{1 - q_u(u^*,v^*)}.$$

Sama tüüpi hinnanguid saab ilmselt kasutada ka teoreemide 3.2 ja 3.4 eeldustel.

III. R A K E N D U S I

§ 5. Integraal- ja diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

1. Vaatleme eelmises paragrahvis saadud tulemuste rakendamist integraalvõrrandi

$$P(x,y) = x(s) - \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t,x(t),y)dt = 0$$

ligikaudseks lahendamiseks, kus y on reaalne või kompleksne parameeter[1]), aga K funktsioon, mis on analüütiline argumentide x ja y ning pidev s ja t suhtes. Operaatori P osatuletised avalduvad nüüd kujul:

$$P_x(x_0,y_0)\Delta x = \Delta x(s) - \int_{\alpha}^{\beta} K_x(s,t,x_0(t),y_0)\Delta x(t)dt,$$

$$P_{x^k y^i}(x_0,y_0)\Delta y^i \Delta x^k = -\Delta y^i \int_{\alpha}^{\beta} K_{x^k y^i}(s,t,x_0(t),y_0)\Delta x^k(t)dt$$

$$(k = 0, i = 1 \text{ ja } k+i \geqslant 2).$$

Töös [27] on näidatud vajalike hinnangute saamise võimalus ruumide valiku $X = Z = C[\alpha,\beta]$ ning tavalise normi kasutamise puhul.

---

[1]) Analoogiliselt võib käsitleda ka juhtu, kui y on teatav parameetrite süsteem, s.t. kui võrrand sõltub mitmest parameetrist.

Valime ruumideks X ja Z lõigul $[\alpha,\beta]$ pidevate funktsioonide hulga, mis on normeeritud pooljärjestatud vektorruumi m_2 [1]) abil nii, et

$$|x| \leq u = (u_1,u_2),$$

kui $\max\limits_{\alpha\leq s\leq\alpha_1}|x(s)| \leq u_1$ ja $\max\limits_{\alpha_1\leq s\leq\beta}|x(s)| \leq u_2$ $(\alpha \leq \alpha_1 \leq \beta)$.

Kui tähistada tuuma $K_x(s,t,x_o(t),y_o)$ resolventfunktsiooni sümboliga $\Gamma(s,t)$ ning tuua sisse hinnangud $|y^*- y_o| \leq v^*$,

$$\max_{\alpha_{m-1}\leq s\leq\alpha_m}|\Delta x_1(s)| \leq a_m v^*,$$

$$\max_{\alpha_{m-1}\leq s\leq\alpha_m}\int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n}|\Gamma(s,t)|\,dt \leq c^{mn},$$

$$\max_{\alpha_{m-1}\leq s\leq\alpha_m}\int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n}|K_{x^k y^i}(s,t,x_o(t),y_o)|\,dt \leq b_{ki}^{mn},$$

kus $m,n = 1,2$ ja $\alpha_0=\alpha$ ning $\alpha_2=\beta$, siis majoreeriv rida (4.6) omab kuju

$$q(u,v) = (a_1,a_2)v + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\begin{pmatrix}1+c^{11} & c^{12}\\ c^{21} & 1+c^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{k-i,i}^{11} & b_{k-i,i}^{12}\\ b_{k-i,i}^{21} & b_{k-i,i}^{22}\end{pmatrix}(u_1^{k-i},u_2^{k-i})v^i.$$

---

[1]) Ruum m_n on vektorite $u = (u_1,u_2,\dots,u_n)$ hulk, kusjuures $\|u\| = \max(|u_1|,|u_2|,\dots,|u_n|)$ ning $u \geq 0$, kui $u_i \geq 0$ iga $i = 1,2,\dots,n$ puhul.

N ä i d e. Integraalvõrrandi

$$x(s) - \int_0^{0,5} s \cos st \, e^{x(t)-\frac{t}{3}} dt = 0 \qquad (5.1)$$

ligikaudseks lahendamiseks vaatleme parameetrist sõltuvat võrrandit

$$P(x,y) = x(s) - \int_0^{0,5} [s + ys(\cos st - 1)] e^{x(t)-\frac{t}{3}} dt = 0,$$

mis $y^* = 1$ korral ühtib lähtevõrrandiga. Valime $y_0 = 0$ ja $x_0(s) = \frac{s}{3}$. Kuna $P(x_0, y_0) \neq 0$, siis kasutame teoreemi 4.2 kohta tehtud märkust. Ruumide $X = Z = C[0; 0,5]$ puhul rahuldab operaator P hinnanguid (4.15), milles $a = 0,095$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0,011$, $h = 0,165$ ja $v^* = 1$. Järelikult võrrand (5.1) omab teoreemi 4.2 põhjal piirkonnas $\|x - x_0\| \leq 0,097$ lahendi $x^*(s)$, mis teoreemi 3.5 põhjal on ainus piirkonnas $\|x - x_0\| < 1,96$. Jada $\{x_n(s)\}$, milles $x_1 = x_0 + \Delta x_1$ on arvutatud valemi (4.13) ning $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$ $(n = 2,3,\dots)$ valemi (4.4) abil, koondub ühtlaselt selleks lahendiks. Hinnang (4.16) kindlustab lähenditele täpsuse

$$\max_{0 \leq s \leq 0,5} |x^*(s) - x_n(s)| < 0,0022 \cdot \frac{0,141^{n-1}}{n} \qquad (n = 1,2,\dots).$$

Kui valida ruumideks X ja Z lõigul $[0; 0,5]$

pidevate funktsioonide hulk, mis on äsjakirjeldatud viisil normeeritud pooljärjestatud ruumi m_2 abil, kusjuures $\alpha_1 = 0{,}25$, siis saame valemi (4.9) abil mõnevõrra täpsemad lähendite veahinnangud.

Arvutustulemused on koondatud järgmisse tabelisse.

n	$x_n(s)$	hinnang (4.16)	hinnang (4.9) $(U=m_2,\ \alpha_1=0{,}25)$
1	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}0234s$	$2{,}2\cdot 10^{-3}$	$(0{,}6;1{,}3)\cdot 10^{-3}$
2	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024245s - 0{,}001458s^3 + 0{,}000020s^5$	$1{,}6\cdot 10^{-4}$	$(2{,}8;6{,}6)\cdot 10^{-5}$
3	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024268s - 0{,}001517s^3 + 0{,}000021s^5$	$1{,}5\cdot 10^{-5}$	$(1{,}7;3{,}8)\cdot 10^{-6}$
4	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024269s - 0{,}001519s^3 + 0{,}000021s^5$	$1{,}6\cdot 10^{-6}$	$(1{,}1;2{,}4)\cdot 10^{-7}$

2. Vaatleme rajaülesande

$$x'' + f(s,x,x',y) = 0, \quad x(\alpha) = x(\beta) = 0$$

ligikaudset lahendamist, kus y on kompleksne parameeter. Kui mingi funktsiooni $x_0(s)$ ja arvu y_0 korral õnnestub leida rajaülesande

$$\Delta x'' + f_{x'}(s,x_0,x_0',y_0)\Delta x' + f_x(s,x_0,x_0',y_0)\Delta x = 0,$$

$$\Delta x(\alpha) = \Delta x(\beta) = 0$$

Green'i funktsioon $\Gamma(s,t)$, siis saame uuritava raja-ülesande asendada temaga samaväärse võrrandiga

$$P(x,y) = x(s) + \int_\alpha^\beta \Gamma(s,t)\big[f(t,x(t),x'(t),y) -$$

$$- f_{x'}(t,x_0(t),x_0'(t),y_0)x'(t) -$$

$$- f_x(t,x_0(t),x_0'(t),y_0)x(t)\big]dt = 0.$$

Operaatori P osatuletised avalduvad nüüd kujul

$$P_x(x_0,y_0) = E,$$

$$P_{x^k y^i}(x_0,y_0)\Delta y^i \Delta x^k = \Delta y^i \int_\alpha^\beta \Gamma(s,t) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_{x^{k-j} x'^j y^i} \Delta x^{k-j} \Delta x'^j dt$$

$$(k = 0, i = 1 \text{ ja } k+i \geq 2).$$

Valime ruumiks X lõigul $[\alpha,\beta]$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulga, mille normeerime ruumi m_2 abil, defineerides

$$|x| \leq u = (u_1,u_2),$$

kui iga $s \in [\alpha,\beta]$ puhul

$$|x(s)| \leq u_1 \quad \text{ja} \quad |x'(s)| \leq u_2.$$

Kui on teada hinnangud $|y^* - y_0| \leq v^*$,

$$\max_{\alpha \leq s \leq \beta} |\Delta x_1^{(n)}(s)| \leq a_n v^*,$$

$$\max_{\alpha \leq s \leq \beta} \int_\alpha^\beta \left| \Gamma_{s^n}(s,t) f_{x^{k-j} x'^j y^i}(t,x_0(t),x_0'(t),y_0) \right| dt \leq b_{kij}^{(n)}$$

$$(n = 0,1),$$

siis saame rea (4.6) kujul

$$q(u,v) = (a_o, a_1)V +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}v^i\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k-i}{j}(b^{(o)}_{k-i,i,j}, b^{(1)}_{k-i,i,j})u_1^{k-i-j}u_2^j.$$

N ä i d e. Olgu tarvis lahendada rajaülesanne (vrd. [5])

$$x'' - xx' + ys = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

parameetri väärtusel $y = 6,3$. See ülesanne omab $y_o = 0$ puhul lahendi $x_o(s) = 0$. Valemite (4.4) abil saame kergesti leida

$$x_1(s) = \frac{1}{6}s(1-s^2)y,$$

$$x_2(s) = \frac{1}{6}s(1-s^2)\left[y - \frac{1}{1260}(8 - 27s^2 + 15s^4)y^2\right].$$

Kui valime ruumiks X lõigul $[0,1]$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulga normiga (vt. [27])

$$\|x\| = \max_{0 \le s \le 1}(|x(s)|, p|x'(s)|) \quad (p > 0),$$

siis $p = 1$ korral järeldub teoreemist 4.2 jada $\{x_n(s)\}$ koonduvus rajaülesande lahendiks $|y| \le 1,5$ puhul, aga $p = 0,2$ korral – $|y| \le 6$ puhul. Konstandi p ükski valik ei võimalda näidata protsessi koonduvust viimasest suuremas piirkonnas. Kasutades aga ülaldefineeritud üldistatud normi, järeldub samast teoreemist protsessi koonduvus, kui $|y| \leq 6{,}8$. Hinnangutest (4.9) saame $y = 6{,}3$ jaoks

$$|x^* - x_1| \leq (0{,}27;\ 1{,}06),\quad |x^* - x_2| \leq (0{,}16;\ 0{,}63),$$

s.o. lõigul $s \in [0, 1]$

$$|x^*(s) - x_2(s)| \leq 0{,}16 \text{ ja } |x^{*\prime}(s) - x_2'(s)| \leq 0{,}63.$$

§ 6. Omaväärtuste ja omaelementide ligikaudne leidmine

1. Vaatleme omaväärtusülesannet

$$(A - \lambda B)x + yF(x,\lambda,y) = 0, \tag{6.1}$$

milles λ ja y on üldjuhul kompleksed parameetrid.

Võrrandi (6.1) kohta teeme järgmised eeldused.

1) A ja B olgu lineaarsed (üldiselt tõkestamata) operaatorid Banachi ruumist X sama tüüpi ruumi Z.

2) Võrrand

$$(A - \lambda_0 B)x = 0 \tag{6.2}$$

omagu m lineaarselt sõltumatut lahendit $x_{1o},\dots,x_{mo}$.

3) Olgu teada m funktsionaali [1]) $f_1,\dots,f_m \in Z^*$,

---

[1]) Kui toodud tingimusi rahuldavad funktsionaalid $f_1,\dots,f_m$ eksisteerivad, siis on nad võrrandi (6.2) kaasvõrrandi lahenditeks. Seda asjaolu kasutatakse tavaliselt nende funktsionaalide leidmisel.

millede puhul

$$f_j Bx_{io} = \begin{cases} 1, & \text{kui } j = i, \\ 0, & \text{kui } j \neq i, \end{cases}$$

ning operaator $A - \lambda_0 B$ vaadelduna hulgal[1]) $X_{f_1 B,\dots,f_m B}$ omab pöördoperaatori R, mis on määratud kogu ruumis[1]) $Z_{f_1,\dots,f_m}$. Edaspidi kasutame operaatorit R, mis on võrduste $RBx_{io} = 0$ $(i = 1,\dots,m)$ abil laiendatud kogu ruumile Z.

4) Operaator RB ja funktsionaalid $f_j B$ $(j = 1,\dots,m)$ olgu tõkestatud ning eksisteerigu nende pidevad lineaarsed laiendid kogu ruumis X. Edaspidi tähistamegi sümbolitega RB ja $f_j B$ neid pidevaid laiendeid.

5) Operaator $F(x,\lambda,y)$ olgu argumendi x suhtes homogeenne, aga operaator $RF(x,\lambda,y)$ ning funktsionaalid $f_j F(x,\lambda,y)$ $(j = 1,\dots,m)$ omagu laiendeid, mis on analüütilised punkti $(x_{io},\lambda_0,0)$ teatavas ümbruses. Järgnevas kasutamegi sümboleid RF ja $f_j F$ nende analüütiliste laiendite tähistamiseks.

---

[1]) Sümbolitega $X_{f_1 B,\dots,f_m B}$ ja $Z_{f_1,\dots,f_m}$ tähistame ruumide X ja Z osahulki, mis koosnevad kõigist tingimusi $f_1 Bx = \dots = f_m Bx = 0$ ja $f_1 z = \dots = f_m z = 0$ rahuldavatest elementidest.

Tehtud eeldustel saab võrrandi (6.1) omaväärtuse λ_i ja temale vastava omaelemendi x_i $(i=1,\dots,m)$ leida võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} &(A-\lambda B)x + yF(x,\lambda,y) = 0, \\ &f_jBx = \alpha_j \quad (j = 1,\dots,m) \end{aligned} \tag{6.3}$$

lahendina, kus $\alpha_i = 1$ ning α_j $(j \neq i)$ on lisatundmatud[1]). Võrrandisüsteemi (6.3) iga lahend rahuldab süsteemi

$$R(A-\lambda B)x + yRF(x,\lambda,y) = 0$$

$$f_j(A-\lambda B)x + yf_jF(x,\lambda,y) = 0 \quad (j = 1,\dots,m)$$

ning järelikult ka süsteemi

$$\begin{aligned} &\tilde{x} - \tilde{\lambda} RB\tilde{x} + yRF(x,\lambda,y) = 0, \\ &\tilde{\lambda} - yf_iF(x,\lambda,y) = 0, \\ &\alpha_j f_i F(x,\lambda,y) - f_jF(x,\lambda,y) = 0 \quad (j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,m), \end{aligned} \tag{6.4}$$

milles $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{jo} + \tilde{x}$ $(\tilde{x} \in X_{f_1B,\dots,f_mB})$ ja $\lambda = \lambda_o + \tilde{\lambda}$.

Ka vastupidi pole raske tõestada, et võrrandisüsteemi (6.4) lahend $\tilde{x} = \tilde{x}_i, \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_i, \alpha_j = \alpha_{ji}$ $(j \neq i)$ määrab võrrandi (6.1) omaväärtuse $\lambda_i = \lambda_o + \tilde{\lambda}_i$ ning temale vastava omaelemendi $x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} x_{jo} + \tilde{x}_i$ $(\alpha_{ii} = 1)$, kui vaid x_i ja λ_i kuuluvad operaatorite B ja F määramispiirkonda. Märgime, et elemendi $\tilde{x}_i$

---

[1]) Ühekordse omaväärtuse puhul on omaväärtusülesande asendamist võrrandisüsteemiga kasutatud näiteks töödes [12,30].

kuuluvuse näitamisel nende operaatorite määramispiirkonda saab sageli kasutada asjaolu, et $\tilde{x}_i$ on süsteemi (6.4) esimese võrrandi lahendiks.

Võtame vaatlusele ruumi Ξ elementidega $\xi = (\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m)$, kus $\tilde{x} \in X$ ning $\tilde{\lambda}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ on kompleksarvud. Olgu ruum X üldistatult normeeritud B^+-ruumi U abil. Kui $|\tilde{x}| \leq u$, $|\tilde{\lambda}| \leq \mu$ ja $|\alpha_j| \leq \beta_j$ $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m)$, siis loeme[1])

$$|(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_j)| \leq (u, \mu, \beta_j).$$

Nii defineeritud vahekord rahuldab paragrahvis 2 püstitatud tingimusi 1^o- 5^o ning seega ruum Ξ osutub üldistatult normeerituks B^+-ruumi $\bar{U}$ abil, mille elementideks on süsteemid $\bar{u} = (u, \mu, \beta_j)$, kus $u \in U$ ning μ ja β_j on reaalarvud, kusjuures $\|\bar{u}\| = \max(\|u\|, |\mu|, |\beta_j|)$ ning $\bar{u} \geq 0$, kui $u \geq 0$, $\mu \geq 0$ ja $\beta_j \geq 0$.

Defineerime operaatori P_i ruumidest Ξ ja Y ruumi Ξ :

---

[1]) Tähistuste $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m)$ ja $(u, \mu, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m)$ asemel kasutame siin ja ka edaspidi lühemaid tähistusi $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_j)$ ja (u, μ, β_j).

$$P_i(\xi,y) = (\tilde{x} - \tilde{\lambda} RB\tilde{x} + yRF(x,\tilde{\lambda},y),$$
$$\tilde{\lambda} - yf_iF(x,\lambda,y),$$
$$\alpha_j f_iF(x,\lambda,y) - f_jF(x,\lambda,y)).$$

Siis võrrandisüsteem (6.4) omandab operaatorvõrrandi

$$P_i(\xi,y) = 0 \tag{6.5}$$

kuju. Selle võrrandi lahend $\xi_i = (\tilde{x}_i, \tilde{\lambda}_i, \alpha_{ji})$ annab otsitava omaväärtuse ning vastava omaelemendi. Kui kasutada võrrandi (6.5) ligikaudseks lahendamiseks ilmutamata operaatori reaksarendist parameetri y järgi, siis saame samad lähendid mis häiritusmeetodi kasutamisel (vrd. [9,10,21]). Tingimused võrrandi (6.5) lahendi olemasolu ning omaväärtuse ja omaelemendi reaksarendiste koonduvuse kohta annab teoreem 4.2.

Selline omaväärtuste leidmise meetod on kasutatav küllaltki üldise omaväärtusprobleemi puhul. Peatume järgnevas üksikasjalisemalt võrrandi (6.1) kahel rakendustes sagedamini esineval erijuhul.

2. Omagu võrrand (6.1) kuju

$$(A + yC)x = \lambda(B + yD)x \tag{6.6}$$

(s.t. $F(x, \ ,y) = Cx - \lambda Dx$), kus C ja D on lineaarsed (üldiselt tõkestamata) operaatorid (vrd. [4]). Olgu täidetud eeldused 1)- 5). Märgime, et eeldus 5) osutub rahuldatuks, kui operaatorid RC ja RD ning funktsionaalid f_jC ja f_jD ($j = 1,\dots,m$) on tõkestatud ning eksisteerivad nende kogu ruumis X määratud pidevad lineaarsed laiendid (Toodud sümbolite all me mõistamegi edaspidi neid laiendeid).

Kui $m>1$, siis eeldame täiendavalt, et

6) $j \neq i$ puhul[1] $f_j(C - \lambda_0 D)x_{io} = 0$

ja $f_j(C - \lambda_0 D)x_{jo} \neq f_i(C - \lambda_0 D)x_{io}$.

Neil eeldustel on võrrandil (6.5) parameetri väärtusel $y_o = 0$ olemas lahend $\xi_0 = 0$. Lihtsad arvutused annavad:

$$\Gamma_{io}(x,\lambda,\alpha_j) = (x, \lambda, \gamma_{ij}\left[\alpha_j + f_j(C-\lambda_0 D)x - \lambda f_j Dx_{io}\right]),$$

kus $\dfrac{1}{\gamma_{ij}} = f_i(C-\lambda_0 D)x_{io} - f_j(C-\lambda_0 D)x_{jo}$;

$$P_{iy}(0,0)\Delta y = \Delta y(R(C-\lambda_0 D)x_{io}, -f_i(C-\lambda_0 D)x_{io}, 0),$$

---

[1]) Märgime, et kui $f_j(C-\lambda_0 D)x_{io} = f_i(C-\lambda_0 D)x_{jo}$ (näit. operaator $A-\lambda_0 B$ on enesekaasne ja $f_j = x_{jo}$), siis saame funktsionaalid f_j ja elemendid x_{io} asendada nende selliste lineaarsete kombinatsioonidega $f_j' = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}f_k$ ja $x_{io}' = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}x_{ko}$, et on täidetud tingimus 3) ning $f_j'(C-\lambda_0 D)x_{io}' = 0$, kui $j \neq i$ (vt. [4]).

$$P_{i\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2 = 2(-\Delta\lambda\, RB\Delta\tilde{x},\ 0,\ \Delta\alpha_j f_i(C-\lambda_0 D)\Delta\tilde{x} -$$

$$-\Delta\alpha_j\,\Delta\lambda\, f_i Dx_{io} + \Delta\lambda\, f_j D\Delta x),$$

$$P_{iy\xi}(0,0)\Delta\xi\,\Delta y = \Delta y(R(C-\lambda_0 D)\Delta x - \Delta\lambda\, RDx_{io},$$

$$-\ f_i(C-\lambda_0 D)\Delta\tilde{x} + \Delta\lambda\, f_i Dx_{io},\ 0),$$

$$P_{i\xi^3}(0,0)\Delta\xi^3 = 6(\ 0,\ 0,-\Delta\alpha_j\Delta\lambda\, f_i D\Delta x),$$

$$P_{iy\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2\Delta y = 2\Delta y(-\Delta\lambda\, RD\Delta x,\ \Delta\lambda\, f_i D\Delta x,\ 0),$$

kus $\Delta\xi = (\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{\lambda}, \Delta\alpha_j)$, $\Delta x = \sum_{j=1}^{m} \Delta\alpha_j\, x_{jo} + \Delta\tilde{x}$ $(\Delta\alpha_i = 0)$

ja $\Delta\lambda = \Delta\tilde{\lambda}$.

Kasutades hinnanguid

$\|R(C-\lambda_0 D)\| \le a$, $\|R(C-\lambda_0 D)x_{io}\| \le a_i$,

$\|f_j(C-\lambda_0 D)\| \le b_j$, $|f_i(C-\lambda_0 D)x_{io}| \le b_{ii}$,

$\|RD\| \le c$, $\|RDx_{io}\| \le c_i$,

$\|f_j D\| \le d_j$, $|f_j Dx_{io}| \le d_{ji}$,

$\|RB\| \le r$, $|\gamma_{ij}| \le g_{ij}$ $(i,j = 1,\dots,m)$

saame hinnata operaatori P_i osatuletiste norme.

Majoreeriv võrrand $\bar{u} = q_i(\bar{u},v)$, kus $\bar{u} = (u,\mu,\beta_j) \in m_{m+1}$ (u, μ ja β_j on reaalarvud), kujutab enesest võrrandisüsteemi

$$u = r\mu u + v(a+c\mu)u + v\sum_{k=1}^{m}(a_k+c_k\mu)\beta_k,$$

$$\mu = v(b_{ii} + b_i u + d_i\mu u) + v\mu\sum_{k=1}^{m} d_{ik}\,, \tag{6.7}$$

$$\beta_j = g_{ij}(b_j + b_i\beta_j + d_j\mu + d_i\beta_j\mu)u + g_{ij}\mu\sum_{k=1}^{m}(d_{jk}+d_{ik}\beta_j)\beta_k$$

$$(j = 1,\dots,i-1,i+1,\dots,m;\ \beta_i = 1).$$

Teoreemist 4.2 järeldub kergesti järgmine tulemus häiritusmeetodi koonduvuse kohta.

T e o r e e m 6.1. Eeldame, et

a) võrrand (6.6) rahuldab tingimusi 1) - 6);

b) võrrandisüsteem (6.7) omab vaadeldava $v > 0$ puhul positiivse lahendi $\bar{u}_i = (u_i, \mu_i, \beta_{ji}) \in m_{m+1}$;

c) omaelemendid x_{jo} $(j = 1,\ldots,m)$ kuuluvad operaatorite C ja D määramispiirkonda ning võrrandi

$$\tilde{x} = \tilde{\lambda} RB\tilde{x} - yRCx + y\lambda RDx,$$

kus $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{jo} + \tilde{x}$, iga lahend $\tilde{x}$ kuulub operaatorite B, C ja D määramispiirkonda.

Siis võrrand (6.6) omab iga $|y| \le v$ puhul omaväärtuse $\lambda_i = \lambda_o + \tilde{\lambda}_i$ ning sellele vastava omaelemendi $x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} x_{jo} + \tilde{x}_i$, millede puhul

$$|\lambda_i - \lambda_o| \le \mu_i \,, \qquad \|x_i - x_o\| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \beta_{ji} \|x_{jo}\| + u_i ,$$

kus $\bar{u}_i = (u_i, \mu_i, \beta_{ji})$ on süsteemi (6.7) vähim positiivne lahend. Sealjuures on λ_i ja x_i esitatavad astmeridadena parameetri y järgi, millede koonduvuskiirus on määratud võrratustega (4.9).

Valemite (4.4) abil saame arvutada omaväärtuse λ_i ja omaelemendi x_i järgmised lähendid

$$\lambda_{i1} = \lambda_0 + \Delta\lambda_{i1}, \quad \lambda_{i2} = \lambda_{i1} + \Delta\lambda_{i2},$$

$$x_{i1} = x_{io} + \Delta\tilde{x}_{i1} + \sum_{j=1}^{m} \Delta\alpha_{ji1} x_{jo},$$

kus $\Delta\lambda_{i1} = yf_i(C-\lambda_0 D)x_{io}$,

$$\Delta\lambda_{i2} = y\left[f_i(C-\lambda_0 D)\Delta\tilde{x}_{i1} - \Delta\lambda_{i1} f_i D x_{io}\right],$$

$$\Delta x_{i1} = -yR(C-\lambda_0 D)x_{io},$$

$$\Delta\alpha_{ji1} = -\gamma_{ij}\left[f_j(C-\lambda_0 D)\Delta\tilde{x}_{i1} - \Delta\lambda_{i1} f_j D x_{io}\right], \text{ kui } j \neq i,$$

ning $\Delta\alpha_{ii1} = 0$.

Valemitest (4.9) saame $|y| \leq v$ puhul hinnangud nende lähendite täpsuse jaoks:

$$|\lambda_i - \lambda_{i1}| \leq \mu_i - vb_{ii},$$

$$|\lambda_i - \lambda_{i1}| \leq \mu_i - vb_{ii} - v^2(a_i b_i + b_{ii} d_{ii}),$$

$$\|x_i - x_{i1}\| \leq u_i - va_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[\beta_{ji} - vg_{ij}(a_i b_j + b_{ii} d_{ji})\right] \|x_{jo}\|.$$

3. Vaatleme omaväärtusülesannet (6.6) juhul, kui $m = 1$, s.t. kui λ_0 on võrrandi $(A - \lambda B)x = 0$ ühekordseks omaväärtuseks. Sellel juhul võrrandisüsteem (6.7) omab kuju

$$\begin{aligned} u &= r\mu u + v(a_1 + au + c_1\mu + c\mu u), \\ \mu &= v(b_{11} + b_1 u + d_{11}\mu + d_1\mu u). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Kui lisaks sellele võrrandis (6.6) $D = 0$, siis võime valida $c = c_1 = d_1 = d_{11} = 0$ ning anda teoreemi 6.1 tingimusele b) kuju

$$v \leq \frac{1}{a + b_{11}r + 2\sqrt{a_1 b_1 r}} . \tag{6.9}$$

Süsteemi (6.8) vähima positiivse lahendi (u_1, μ_1) arvutamiseks saame seejuures valemid

$$\mu_1 = \frac{1}{2r}\left[1 - va + vb_{11}r - \sqrt{(1-va-vb_{11}r)^2 - 4v^2 a_1 b_1 r}\right],$$

$$u_1 = \frac{va_1}{1 - va - r\mu_1} .$$

Vaadeldaval juhul saame suuruste a, a_1, b_1, b_{11}, r ja v abil suhteliselt lihtsalt üles kirjutada ka hinnangud (4.9) (vt. [47]).

Kirjanduses on tulemusi häiritusmeetodi koonduvuse kohta avaldatud peamiselt võrrandi (6.6) erijuhul, kui $D = 0$ ning $B = E$. Võrdleme järgnevas mõningaid häiritusmeetodi tuntud koonduvustingimusi teoreemi 6.1 nõuetega. Oletame seejuures tingimuste 1) - 5) täidetust, millised nõuded esinevad sisuliselt ka võrreldavates töödes.

Olgu $m = 1$, $D = 0$, $B = E$ ning C tõkestatud operaator. Kui valida[1])

---

[1]) Lihtsuse mõttes kasutame $m = 1$ korral x_{10} ja f_1 asemel tähistusi x_0 ja f.

$a = r\|C\|$, $a_1 = r\|C\|\|x_0\|$, $b_1 = \|f\|\|C\|$, $b_{11} = \|f\|\|C\|\|x_0\|$,
siis teoreem 6.1 kindlustab häiritusmeetodi koonduvuse võrratusest (6.9) järelduval tingimusel

$$|y|\|C\| \leq \frac{1}{(1+\gamma+2\sqrt{\gamma})r}, \tag{6.10}$$

kus $\gamma = \|f\|\|x_0\|$.

Töös [12] tõestatakse häiritusmeetodi koonduvus tingimusel

$$|y|\|C\| \leq \frac{1}{(1+\gamma+2\sqrt{2\gamma})r},$$

mis nõuab enam võrratusest (6.10).

Hilberti ruumi X korral M.K. Gavurini teoreem (vt. [22]) kindlustab häiritusmeetodi koonduvuse, kui

$$|y|\|C\| \leq \frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}{2\gamma r}. \tag{6.11}$$

Viimane tingimus on $\gamma \geqslant 1,2$ korral halvem tingimusest (6.10). Kuid praktiliselt tähtsal juhul $\gamma = 1$ (näit. enesekaasoperaatori A puhul) on ta ilmselt tunduvalt parem. Märgime aga, et tingimus (6.9) osutub näidetes enamasti tingimusest (6.11) täpsemaks ka $\gamma = 1$ puhul.

Teoreem 6.1 on kasutatav ka F.Rellichi töös [11] tehtud eeldustel. Olgu X = Z Hilberti ruum,

$D = 0$, $B = E$ ja A enesekaasne ning C sümmeetriline operaator ühise määramispiirkonnaga $D_C = D_A$. Oletame, et λ_0 on operaatori A ühekordne omaväärtus normeeritud omaelemendiga $x_0 = f$, kusjuures vahemikus $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ pole teisi operaatori A spektri punkte peale omaväärtuse λ_0, kus $\delta > 0$. Kui eksisteerivad sellised mittenegatiivsed konstandid α ja β, et iga $x \in D_A$ puhul

$$\|Cx\| \leq \alpha \|x\| + \beta \|Ax\|,$$

siis teoreemi 6.1 eeldused a) ja c) on rahuldatud ning võime valida $r = \frac{1}{\delta}$, $b_1 = \alpha + \beta|\lambda_0|$, $b_{11} = |(Cx_0, x_0)|$, $a_1 = b_1 r$, $a = a_1 + \beta$. Tingimuse (6.9) põhjal häiritusmeetod koondub, kui

$$|y| \leq \frac{\delta}{\beta\delta + 3(\alpha + \beta|\lambda_0|) + |(Cx_0, x_0)|}.$$

Tehtud eeldustel kindlustab töös [13] esitatud teoreem häiritusmeetodi koonduvuse vaid

$$|y| \leq \frac{\delta}{2\beta\delta + 3(\alpha + \beta|\lambda_0|) + |(Cx_0, x_0)|}.$$

puhul, aga töödes [9,11] esitatud tulemused veelgi rangematel tingimustel.

Toome järgnevas ühe näite diferentsiaalvõrrandi omaväärtuste ja omafunktsioonide ligikaudse leidmise kohta häiritusmeetodi abil. Märgime, et selle ülesande puhul pole võimalik kasutada ühegi eespool viidatud töö tulemusi häiritusmeetodi koonduvuse kohta, küll aga on rakendatav teoreem 6.1.

N ä i d e. Vaatleme omaväärtusülesannet [1])

$$\begin{aligned} & x^{IV} - yh_1(sx')' = -\lambda(x'' - yh_2x), \\ & x(0) = x''(0) = x(1) = x''(1) = 0, \end{aligned} \qquad (6.12)$$

milles y, h_1 ja h_2 on komplekssed parameetrid.

Ruumiks X valime lõigul $[0,1]$ pidevate ning tingimusi $x(0) = x(1) = 0$ rahuldavate funktsioonide hulga, kusjuures $\|x\| = \max\limits_{0\le s\le 1} |x(s)|$. Antud juhul on operaatorid $Ax = x^{IV}$, $Bx = -x''$, $Cx = -h_1(sx')'$ ja $Dx = h_2x$ määratud lõigul $[0,1]$ vastavalt neli või kaks korda pidevalt diferentseeruvate ning ülesande (6.12) rajatingimusi rahuldavate funktsioonide hulgal.

Rajaülesandel (6.12) on $y_0 = 0$ korral ühekordsed omaväärtused $\lambda_{n0} = (n\pi)^2$ $(n = 1,2,\ldots)$, milledele vastavad omafunktsioonid

$$x_{n0} = \sin n\pi s,$$

---

[1]) Sellist tüüpi ülesanded esinevad raske varda painde uurimisel (vt. [4]).

funktsionaalid

$$f_n z = \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi s\, z(s)ds$$

ning operaatorid[1])

$$R_n z = \int_0^1 \Gamma_n(s,t)\, z(t)dt,$$

kus

$$\Gamma_n(s,t) = \frac{5}{2n^4\pi^4}\sin n\pi s \sin n\pi t - \frac{s}{n^3\pi^3}\cos n\pi s \sin n\pi t -$$

$$- \frac{t}{n^3\pi^3}\sin n\pi s \cos n\pi t + \frac{ts}{n^2\pi^2} +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{n^3\pi^3}\sin n\pi s \cos n\pi t - \frac{s}{n^2\pi^2}, & \text{kui } s \le t, \\ \frac{1}{n^3\pi^3}\cos n\pi s \sin n\pi t - \frac{t}{n^2\pi^2}, & \text{kui } s \ge t\ , \end{cases}$$

Kerge on kontrollida, et teoreemi 6.1 tingimused a) ja c) on rahuldatud. Arvutades saame

$$\lambda_{n1} = \lambda_{n0} + y(\frac{h_1}{2} - h_2),$$

$$\lambda_{n2} = \lambda_{n1} + y^2h_1^2\left[\frac{1}{48n^2\pi^2} + \frac{7}{16n^4\pi^4} - \frac{4}{n^6\pi^6}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right] -$$

$$- \frac{y^2h_2}{n^2\pi^2}\left(\frac{h_1}{2} - h_2\right),$$

$$x_{n1} = x_{no} + yh_1\left[\frac{s(1-s)}{4n\pi}\cos n\pi s + \frac{3(2s-1)}{8n^2\pi^2}\sin n\pi s + \right.$$

---

[1]) Diferentsiaalvõrrandite puhul avaldub operaator R lihtsalt üldistatud Green'i funktsiooni kaudu (vt. [28]).

$$+ \frac{1}{n^3\pi^3}(\cos n\pi s - 1) + \frac{s}{n^3\pi^3}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\Big] .$$

Erilisi raskusi ei valmista ka vajalike hinnangute

$$a = \frac{0,27}{n}|h_1| + 0,43|h_2|, \quad a_1 = \frac{0,029}{n}|h_1|,$$

$$b_1 = 0,87|h_1| + 1,28|h_2|, \quad b_{11} = |0,5h_1 - h_2|, \quad c = \frac{0,044}{n^2}|h_2|,$$

$$c_1 = 0, \quad d_1 = \frac{0,13}{n^2}|h_2|, \quad d_{11} = \frac{0,11}{n^2}|h_2|, \quad r = \frac{0,17}{n}$$

leidmine, millest järeldub[1]):

h_1	h_2	koonduvus-tingimus	hinnangud $\lvert y\rvert \leq 1$ $(v=1)$ ning $0 \leq s \leq 1$ puhul				
			$\lvert\lambda_n - \lambda_{n0}\rvert$	$\lvert\lambda_n - \lambda_{n1}\rvert$	$\lvert\lambda_n - \lambda_{n2}\rvert$	$\lvert x_n(s) - x_{n0}(s)\rvert$	$\lvert x_n(s) - x_{n1}(s)\rvert$
1	0	$\lvert y\rvert \leq 2,05n$	0,54	0,04	0,015	0,046	0,017
1	$\frac{1}{2}$	$\lvert y\rvert \leq 1,59$	0,045	0,045	0,024	0,057	0,028
0	1	$\lvert y\rvert \leq 9\ n^2$	$\frac{n^2}{n^2-0,11}$	$\frac{0,11}{n^2-0,11}$	$\frac{0,0121}{n^2(n^2-0,11)}$	0	0

Tabelis esitatud hinnangud kehtivad iga $n = 1,2,\ldots$ puhul. Juhul $n \geq 2$ võiks muide saada ka täpsemaid hinnanguid.

---

[1]) Kui $h_1 = 1$ ja $h_2 = \frac{1}{2}$, siis kasutatakse hinnangut $b_1 = 0,73$.

4. Rakendusmatemaatikas esineb omaväärtusülesandeid, mille puhul võrrand sõltub mittelineaarselt parameetrist λ (vt. näit [4]). Käesolevas paragrahvis vaadeldav meetod on kasutatav ka sellistel juhtudel.

Peatume võrrandi (6.1) erijuhul

$$Ax = \lambda Bx + y\lambda^2 Cx, \qquad (6.13)$$

kus C on lineaarne operaator. Olgu täidetud eeldused 1) - 5) ning m = 1. Vaadeldaval juhul $F(x,\lambda,y) = -\lambda^2 Cx$ ning võrrand (6.5) omab kuju

$$P(\xi,y) = (\tilde{x} - \tilde{\lambda} RBx - y\lambda^2 RCx, \tilde{\lambda} + y\lambda^2 Cx) = 0, \qquad (6.14)$$

kus $\xi = (\tilde{x},\tilde{\lambda})$, $\xi_0 = (0,0)$, $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ ja $x = x_0 + \tilde{x}$.

Arvutades saame:

$\Gamma_0 = E$, $P_y(0,0)\Delta y = \Delta y(-\lambda_0^2 RCx_0,\ \lambda_0^2 fCx_0)$,

$P_{\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2 = 2(-\Delta\lambda\ RB\Delta x,\ 0)$,

$P_{y\xi}(0,0)\Delta\xi\,\Delta y = \Delta y(-\lambda_0^2\ RC\Delta x - 2\lambda_0\Delta\lambda\ RCx_0,$
$\qquad \lambda_0^2 fC\Delta x + 2\lambda_0\Delta\lambda\, fCx_0)$,

$P_{y\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2\Delta y = 2\Delta y(-2\lambda_0\Delta\lambda\ RC\Delta x - \Delta\lambda^2 RCx_0,$
$\qquad 2\lambda_0\Delta\lambda\, fC\Delta x + \Delta\lambda^2 fCx_0)$,

$P_{y\xi^3}(0,0)\Delta\xi^3\Delta y = 6\Delta y(-\Delta\lambda^2 RC\Delta x,\ \Delta\lambda^2 fC\Delta x)$,

kus $\Delta\xi = (\Delta x,\Delta\lambda)$.

Kui tähistada hinnangud

$\|RC\| \le a$, $\|RCx_o\| \le a_o$, $\|fC\| \le b$, $|fCx_o| \le b_o$, $\|RB\| \le r$,

siis võrrand $\bar{u} = q(\bar{u}, v)$, milles $\bar{u} = (u, \mu) \in m_2$, kujutab enesest võrrandisüsteemi

$$
\begin{aligned}
u &= r\mu u + v(a_o + au)(|\lambda_0| + \mu)^2, \\
\mu &= v(b_o + bu)(|\lambda_0| + \mu)^2.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Teoreemist 4.2 järeldub vaadeldava juhu jaoks järgmine tulemus.

T e o r e e m 6.2. Eeldame, et

a) võrrand (6.13) rahuldab tingimusi 1) - 5), kusjuures m = 1;

b) võrrandisüsteem (6.15) omab positiivse lahendi $\bar{u}_1 = (u_1, \mu_1) \in m_2$;

c) omaelement x_o ning võrrandi

$$\tilde{x} = \tilde{\lambda} RB\tilde{x} + y\lambda^2 RC(x_o + \tilde{x})$$

iga lahend $\tilde{x}$ kuuluvad operaatorite B ja C määramispiirkonda.

Siis võrrand (6.13) omab iga $|y| \le v$ puhul omaväärtuse $\lambda_1 = \lambda_0 + \tilde{\lambda}_1$ omaelemendiga $x_1 = x_o + \tilde{x}_1$, millede puhul

$$|\lambda_1 - \lambda_0| \le \mu_1 \quad \text{ja} \quad \|x_1 - x_o\| \le u_1,$$

kus (u_1, μ_1) on süsteemi (6.15) vähim positiivne lahend. Seejuures $\xi_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{\lambda}_1)$ on võrrandi (6.14) lahend ning omaväärtus λ_1 ja omaelement x_1 on esitatavad astmeridadena parameetri y järgi, millede koonduvuskiirus on määratud hinnangutega (4.9).

Omaväärtuse ja omaelemendi esimeste lähendite

$$\lambda_{11} = \lambda_0 - y\lambda_0^2 fCx_0 \ , \quad x_{11} = x_0 + y\lambda_0^2 RCx_0$$

jaoks saame hinnangud

$$|\lambda_1 - \lambda_{11}| \leq \mu_1 - v|\lambda_0|^2 b_0 \ , \quad \|x_1 - x_{11}\| \leq u_1 - v|\lambda_0|^2 a_0 .$$

Kui võrrandis (6.13) $B = E$, C on kogu ruumis X määratud tõkestatud operaator ning $\|f\| = \|x_0\| = 1$, siis võime valida

$$a_0 = a = rc \text{ ja } b_0 = b = c, \text{ kus } \|C\| \leq c.$$

Sellel juhul on rahuldatud teoreemi 6.2 eeldus c) ning

$$v \leq \frac{1}{4|\lambda_0| c(1 + r|\lambda_0|)}$$

puhul ka eeldus b). Võrrandisüsteemi (6.15) lahendamisel saame

$$\mu_1 = \frac{1}{2(r+vc)}\left[1 - 2v|\lambda_0|c - \sqrt{1 - 4v|\lambda_0|c(1+r|\lambda_0|)}\right],$$

$$u_1 = \frac{r\mu_1}{1 - r\mu_1} .$$

T S I T E E R I T U D   K I R J A N D U S

1. A l t m a n, M. A generalization of Newton's method. Bull. Acad. polon. sci., cl.3, 3, Nr.4 (1955), 189-193.

2. A l t m a n, M. Concerning approximate solutions of non-linear functional equations. Bull. Acad. polon. sci., cl.3, 5, Nr.5 (1957), 461-465.

3. B a n a c h, S. Théorie des opérations linéaires. Varssavi, 1932.

4. C o l l a t z, L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.

5. C o l l a t z, L. Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben. Z. angew. Math. Mech., 33, Nr.4 (1953), 116-127.

6. H i l d e b r a n d t, T.H., G r a v e s, L.M. Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc., 29 (1927), 127-153.

7. K a a s i k, Ü. Iteratsioonimeetoditest Banachi ruumis. Dissertatsioon. Tartu, 1956.

8. M i c h a l, A.D., C l i f f o r d, A.H. Fonctions analytiques implicite dans les espaces vectoriel abstraits. C.r. Acad. sci., 197 (1933), 735-737.

9. S z.- N a g y, B. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert. Comm. Math. Helv., 19 (1947), 347-366.

10. S z.- N a g y, B. Perturbations des transformations linéaires fermées. Acta Sci. Math. Szeged, 14 (1951), 125-137.

11. R e l l i c h, F. Störungstheorie der Spektralzerlegung IV. Math. Ann., 117 (1940), 356-382.

12. R o s e n b l o o m, P. Perturbation of linear operators in Banach spaces. Arch. Math., 6, Nr.2 (1955), 89-101.

13. S c h r ö d e r, J. Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes. Math. Nachr., 10, Nr.1/2 (1953), 113-128.

14. S c h r ö d e r, J. Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech., 36, Nr.5/6 (1956), 168-181.

15. S c h r ö d e r, J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z., 66, Nr.1 (1956), 111-116.

16. S c h r ö d e r, J. Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherungen. Arch. Math., 7, Nr.6 (1957), 471-484.

17. T a y l o r, E. On the properties of analytic function in abstract spaces. Math. Ann., 115 (1938), 466-484.

18. V õ h a n d u, L. Iteratsioonimeetoditest võrrandite lahendamisel. Dissertatsioon. Tartu, 1955.

19. В е р т г е й м, Б.А. О некоторых методах приближенного решения нелинейных функциональных уравнений. Автореферат дисс. Молотов, 1957.

20. Г а в у р и н, М.К. Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. Ленингр. ун-та, серия матем. наук, I9 (I950), 59-I54.

21. Г а в у р и н, М.К. О собственных числах операторов, зависящих от параметра. Вестник Ленингр. ун-та, 7, № 9 (I952), 77-95.

22. Г а в у р и н, М.К. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. Докл. АН СССР, 96, № 6 (I954), I093-I095.

23. К а а з и к, Ю.Я. О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами. Успехи матем. наук, I2, № I (I957), I95-I99.

24. К а а з и к, Ю.Я. Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений. Докл. АН СССР, II2, № 4 (I957), 579-582.

25. К а а з и к, Ю.Я. О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 62 (I958).

26. К а а з и к, Ю.Я., Т а м м е, Э.Э. Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений. Докл. АН СССР, I0I, № 6 (I955), 98I-984.

27. К а а з и к, Ю.Я., Т а м м е, Э.Э. Об одном методе приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 62 (I958).

28. К а м к е, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М,, I95I.

29. К а н т о р о в и ч, Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 3, № 6 (1948), 89-185.

30. К а н т о р о в и ч, Л.В. О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 28 (1949), 104-144.

31. К а н т о р о в и ч, Л.В. Принцип мажорант и метод Ньютона. Докл. АН СССР, 76, № 1 (1951), 17-20.

32. К а н т о р о в и ч, Л.В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. Докл. АН СССР, 80, № 6 (1951), 849-852.

33. К а н т о р о в и ч, Л.В. Приближенное решение функциональных уравнений. Успехи матем. наук, 11, № 6 (1956), 99-116.

34. К а н т о р о в и ч, Л.В. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений. Вестник Ленингр. ун-та, 12, № 7 (1957), 68-103.

35. К а н т о р о в и ч, Л.В., В у л и х, Б.З., П и н с к е р, А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л., 1950.

36. К р е й н, М.Г., Р у т м а н, М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи матем. наук, 3, № 1 (1948), 3-95.

37. К у л л ь, И. Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 62 (1958).

38. Л ю с т е р н и к, Л.А., С о б о л е в, В.И. Элементы функционального анализа. М.-Л., 1951.

39. М а р к у ш е в и ч, А.И. Теория аналитических функций. М.-Л., 1950.

40. М е р т в е ц о в а, М.А. Сходимость некоторых итерационных процессов в различных функциональных пространствах. Диссертация. Казань, 1953.

41. М и р а к о в, В.Е. О принципе мажорант для метода Чебышева. Успехи матем. наук, II, № 3 (1956), 171-174.

42. М и р а к о в, В.Е. Принцип мажорант и метод касательных парабол для нелинейных функциональных уравнений. Докл. АН СССР, 113, № 5 (1957), 977-979.

43. М ы с о в с к и х, И.П. О сходимости метода Л.В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях. Вестник Ленингр. ун-та, 8, № 11 (1953), 25-48.

44. Н е ч е п у р е н к о, М.И. О методе Чебышева для функциональных уравнений. Успехи матем. наук, 9, № 2 (1954), 163-170.

45. С а л е х о в, Г.С., М е р т в е ц о в а, М.А. О сходимости некоторых итерационных процессов. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. н.,5 (1954), 77-108.

46. Т а м м е, Э.Э. О приближенном решении функциональных уравнений методом разложения в ряд обратного оператора. Докл. АН СССР, 103, № 5 (1955), 769-772.

47. Т а м м е, Э.Э. О неявных операторах. Докл. АН СССР, 120, № 2 (1958).

48. Т а м м е, Э.Э. Об одном классе сходящихся итерационных методов. Изв. МВО (в печати).

49. Т а м м е, Э.Э. О принципе мажорант для итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та (в печати).

50. У л ь м, С. О сходимости итерационных процессов в пространство Банаха. Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 42 (1956), 135-142.

S I S U K O R D