TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

T. SÕRMUS • G. VAINIKKO

HARILIKUD DIFERENTSIAAL-VÕRRANDID

I

TARTU 1969

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

T. SÕRMUS · G. VAINIKKO

HARILIKUD DIFERENTSIAAL-VÕRRANDID

I

Teine trükk

TARTU 1969

Т. Сырмус, Г. Вайникко

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
I
Издание второе

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja E. Jürimäe
Korrektor A. Norberg

TRÜ rotaprint 1969. Paljundamisele antud 24.VII 1969. Trükipoognaid 13,25. Tingtrükipoognaid 12,05. Arvestuspoognaid 9,7. Trükiarv 700 eks. MB 05279. Tell. nr. 617.

Hind 30 kop.

S i s s e j u h a t u s .

Käesoleva kursuse eesmärgiks on lugeja tutvustamine diferentsiaalvõrrandite teooria põhiliste küsimustega. Märgime siinjuures, et diferentsiaalvõrrandi all mõistetakse funktsionaalvõrrandit, milles otsitav funktsioon esineb koos oma tuletiste või osatuletistega. Diferentsiaalvõrrandite teooria tekkeajaks loetakse 17.sajandi lõppu, kus ta üheaegselt diferentsiaal- ja integraalarvutusega arenes füüsika, mehhaanika ja teiste loodusteaduste mõjul. Selle teooria alused rajasid Leibniz, Newton ja J. Bernoulli. Iseseisvaks distsipliiniks kujunes diferentsiaalvõrrandite teooria 18.sajandil d'Alemberti, D.Bernoulli ja eeskätt kuulsa Peterburi matemaatiku Euleri tööde põhjal.

Diferentsiaalvõrrandite teooria peaülesandeks alates tema tekkeajast kuni käesoleva ajani on olnud loodusseaduste uurimine ja kirjeldamine. Hindamatu panuse on diferentsiaalvõrrandite teooria meetodid andnud ka tehnika erinevates valdkondades esinevate ülesannete ja kõrgema matemaatika paljude probleemide lahendamisel. Käesoleval ajal näiteks on diferentsiaalvõrrandite tähtsaimateks rakendusaladeks stabiilsuse teooria, automaatika, raketitehnika jt. kõige uuemad teadusharud.

Täpsustame eespool antud diferentsiaalvõrrandi mõiste.

<u>Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks</u> nimetatakse

v õ r r a n d i t, m i s s e o b o t s i t a v a t funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatu muutujaga.

Definitsiooni kohaselt on võrrandid

$$y'' + y = 2e^{-x} \qquad (1)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - ny = \frac{d^2y}{dx^2}x, \qquad (2)$$

$$y' - y \sin x = \sin x, \qquad (3)$$

$$dy - x^2y\,dx = 0 \qquad (4)$$

harilikud diferentsiaalvõrrandid. Üldiselt on iga diferentsiaalvõrrand (ka võrrandid (1) - (4)) esitatavad kujul

$$F(x,y,y', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (5)$$

Kui otsitavaks on mitme muutuja funktsioon (seega võrrandis esinevad otsitava funktsiooni osatuletised), siis kannab võrrand <u>osatuletistega diferentsiaalvõrrandi</u> nimetust. Käesoleva konspekti valdavas osas vaadeldakse harilikke diferentsiaalvõrrandeid ja kokkuleppeliselt nimetame neid edaspidi lihtsalt diferentsiaalvõrrandeiks.

Diferentsiaalvõrrandite teoorias sõltuvad mitmed olulised küsimused diferentsiaalvõrrandi liigist. Üheks aluseks diferentsiaalvõrrandite liigitamisel on <u>diferentsiaalvõrrandi järgu</u> mõiste.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse diferentsiaalvõrrandis esinevatest otsitava funktsiooni tuletiste järkudest suurimat.

Ülalesitatud näidetest (1) - (5) on diferentsiaalvõrrandid vastavalt II, III, I ja I järku, kuna viimase järk on n .

Üheks oluliseks küsimuseks diferentsiaalvõrrandite kursuses on diferentsiaalvõrrandi lahendamise, s.o. otsitava funktsiooni ehk lahendi leidmise küsimus. Teatavasti on funktsiooni üheks esitusviisiks esitus valemiga ilmutatud kujul

$$y = \varphi(x)$$

või ilmutamata kujul

$$\Phi(x,y) = 0 .$$

Vastavalt neile kahele juhule tutvume diferentsiaalvõrrandi lahendi kahe definitsiooniga.

Diferentseeruvat funktsiooni $y = \varphi(x)$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (5) lahendiks vahemikus X, kui funktsiooni $y = \varphi(x)$ ja tema tuletiste asendamisel võrrandisse muutub see sõltumatu muutuja $x \in X$ suhtes samasuseks.

Sel korral öeldakse ka , et funktsioon $y = \varphi(x)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (5) .

Nii on funktsioon

$$y = e^{-x} + \sin x$$

diferentsiaalvõrrandi (1) lahendiks vahemikus $(-\infty, \infty)$, sest iga $x \in (-\infty, \infty)$ puhul saame samasuse

$$(e^{-x} - \sin x) + (e^{-x} + \sin x) = 2e^{-x} .$$

Öeldakse, et **v õ r r a n d**

$$\Phi(x,y) = 0 \qquad (6)$$

m ä ä r a b d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i (5) <u>l a h e n d i</u> vahemikus X, kui

1) eksisteerib funktsioon $y(x)$, mis $x \in X$ puhul rahuldab võrrandit (6);

2) iga $x \in X$ korral eksisteerivad tuletised $y'(x)$, $y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ ja

3) vähemalt ühe, tingimusi 1 ja 2 täitva funktsiooni korral kehtib samasus

$$F(\, x, y(x),\, y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\,) = 0 \qquad (7)$$

iga $x \in X$ puhul.

Vastavalt meie definitsioonile määrab võrrand

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \qquad (8)$$

diferentsiaalvõrrandi

$$y'''(\,1+y'^2) - 3y'\,y''^2 = 0 \qquad (9)$$

lahendi vahemikus $(\,-1,3)$, sest

1) eksisteerib kaks funktsiooni

$$y_1 = -3 + \sqrt{3 + 2x - x^2}, \qquad (10)$$

$$y_2 = -3 - \sqrt{3 + 2x - x^2},$$

mis rahuldavad võrrandit (8) lõigul $[-1,3]$;

2) eksisteerivad funktsioonide (10) kolm esimest tule-

tist vahemikus $(-1,3)$ ja

3) võrrandiga (8) määratud funktsioonid (10) rahuldavad vahemikus $(-1,3)$ võrrandit (9) samaselt (näita seda iseseisvalt).

Diferentsiaalvõrrandil (1) oli ära toodud ü k s l a h e n d, võrrandil (9) aga – k a k s e r i n e v a t l a h e n d i t. Seega v õ i b ühel diferentsiaalvõrrandil olla e n a m k u i ü k s l a h e n d. Üldiselt on neid igal diferentsiaalvõrrandil lõpmata palju (isegi kontinuaalne hulk). Näita, et võrrandit (1) rahuldavad kõik funktsioonid

$$y = C \sin x + e^{-x},$$

kus C on suvaline konstant. Veel enam, mistahes arvude α, β ja ρ korral määrab võrrand

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$$

vahemikus $(-\rho+\alpha, \rho+\alpha)$ diferentsiaalvõrrandi (9) kaks erinevat lahendit.

Nägime, et e s i n e b d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d e i d l õ p m a t u h u l g a l a h e n d i t e g a. Ent kas see on iseloomulik igale diferentsiaalvõrrandile? Küsimusele vastame eitavalt, sest näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$|y'| + |y| = 0 \tag{11}$$

a i n s a k s l a h e n d i k s on funktsioon $y = 0$, kuna võrrandil

$$|y'| + |y| + |x| + 4 = 0$$

p o l e ü h t e g i l a h e n d i t.

Esitatud näidetest viimased pole küll tüüpilised diferentsiaalvõrrandid, ometi on nad olulised selles mõttes, et sunnivad meid iga diferentsiaalvõrrandi korral selgitama lahendi olemasolu küsimust. Viimane ongi diferentsiaalvõrrandite teooria üheks põhiküsimuseks. Käesolevas konspektis puutume selle probleemiga veel mitmel korral kokku.

I. ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

Mistahes esimest järku diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$F(x,y,y') = 0 . \qquad (0.1)$$

Juhul, kui võrrand (0.1) lahendub üheselt y' suhtes, on võrrand (0.1) samaväärne võrrandiga

$$y' = f(x,y) . \qquad (0.2)$$

Kahte diferentsiaalvõrrandit nimetatakse samaväärseks, kui kõik ühe diferentsiaalvõrrandi lahendid on lahenditeks ka teisele ja ümberpöördult.

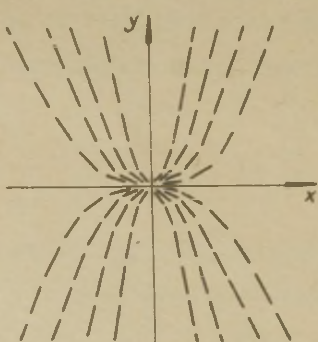
Diferentsiaalvõrrand (0.2) on uurimiseks mõnes mõttes sobivam kui üldkujul (0.1) antud võrrand. Seepärast selgitame mitmed olulised küsimused eeskätt diferentsiaalvõrrandi (0.2) kohta.

§ 1. PÕHIMÕISTED.

1. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi geomeetriline interpretatsioon. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit (0.2). Funktsioon $f(x,y)$ olgu määratud ja pidev tasandilises piirkonnas[1] D, mille projektsiooniks x-teljele olgu vahemik

[1] Piirkonnaks nimetatakse niisugust lahtist sidusat mittetühja punktide hulka D, mis rahuldab kahte järgmist tingimust: 1) hulga D iga punkt sisaldub hulgas D koos oma küllaldaselt väikese ümbrusega (lahtisus); 2) hulk D on sidus hulk, s.o. tema mistahes kahte punkti saab ühendada pideva kõveraga, mis ise asub hulgas D (sidusus).

X. Diferentsiaalvõrrand (0.2) seab igale punktile $(x_0, y_0) \in D$ vastavusse arvu $f(x_0, y_0)$, mille võtame punkti (x_0, y_0) läbiva lühikese sirglõigu tõusuks. Seda sirglõiku, aga samuti arvude $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ kolmikut nimetame edaspidi <u>diferentsiaalvõrrandi (0.2) joonelemendiks</u>. Joonelemendi komponenti $f(x_0, y_0)$ nimetame <u>joonelemendi tõusuks.</u> Kattes piirkonna D diferentsiaalvõrrandi joonelementidega, saame diagrammi, mida nimetatakse <u>diferentsiaalvõrrandi joonelementide diagrammiks</u> ehk <u>diferentsiaalvõrrandi sihtide väljaks</u>. Seega määrab diferentsiaalvõrrand (0.2) sihtide välja. On joonelementide diagramm valmistatud küllalt täpselt, ilmneb joonisel kujutis niisugusest joonte parvest, mille iga joone mistahes punktist tõmmatud puutuja lõiguke ühtib antud punkti läbiva diferentsiaalvõrrandi joonelemendiga (vt. joon.1 , mis vastab võrrandile $y' = 2\frac{y}{x}$).



Joon.1.

Olgu vaadeldava parve joontest ühe võrrandiks $y = \varphi(x)$. Ülalöeldu põhjal rahuldab selle joone puutuja tõus mistahes punktis $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ tingimust

$$y'\Big|_{x=\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

ehk, võttes arvesse tingimuse $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ (punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ asub joonel $y = \varphi(x)$!),

$$\varphi'(\bar{x}) = f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})).$$

Siis on aga funktsioon $\varphi(x)$ diferentsiaalvõrrandi (0.2) lahendiks, sest igas punktis $\bar{x} \in X$ rahuldab arvude kolmik $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}), \varphi'(\bar{x}))$, seega ka funktsioon $\varphi(x)$ diferentsiaalvõrrandit (0.2). Joon võrrandiga

$$y = \varphi(x)$$

on seega diferentsiaalvõrrandi (0.2) lahendi $y = \varphi(x)$ geomeetriliseks kujutiseks. Meie mõttekäik jääb kehtima ka iga teise joone korral vaadeldavast parvest. Selle parve iga üksikut joont võrrandiga

$$y = \varphi(x, C) \quad ,$$

mille puhul kehtib samasus

$$\varphi'(x, C) = f(x, \varphi(x, C))$$

iga $x \in X$ korral, nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (0.2) *integraalkõveraks.* Vaatlusel olevat joonte parve aga – *integraalkõverate parveks.*

Kokkuvõttes võime esimest järku diferentsiaalvõrrandi geomeetrilise interpretatsiooni kohta öelda järgmist. *Esimest järku diferentsiaalvõrrand* (0.2) *määrab piirkonnas D sihtide välja, mida läbivad integraalkõverad. Võrrandiga* (0.2) *on määratud integraalkõverate puutujate tõusude sõltuvus kõverate vastavate punktide koordinaatidest.*

2. *Isokliin.* Tutvume diferentsiaalvõrrandi integraalkõvera või integraalkõverate parve graafilise kujuta-

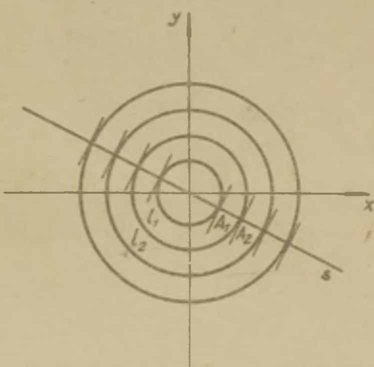
mise mõningate meetoditega.

Artiklis 1 selgus, et hoolikalt ja piisava täpsusega valmistatud diferentsiaalvõrrandi joonelementide diagramm võib olla abiks diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate graafilisel kujutamisel ja omaduste uurimisel. Selleks, et joonelementide diagrammi valmistamisel joonelementide kandmine piirkonda D ei toimuks juhuslikult, tutvume veel ühe mõistega, millele rajame integraalkõverate parve graafilise kujutamise kaks meetodit.

Olgu joonisel 2 kujutatud diferentsiaalvõrrandi (0.2) integraalkõverate parve võrrandiks

$$y = \varphi(x,c) \ .$$

(Vaadeldav joonis vastab võrrandile $y' = -\frac{x}{y}$.)



Joon.2.

Näeme, et erinevatel integraalkõveratel $l_1, l_2, \ldots$ on punkte (punktid $A_1, A_2, \ldots$), kus joonelementide tõusud on võrdsed. Veel enam, näeme, et ühe ja sama konstantse tõusuga joonelemendid paiknevad joonel s . Seda joont nimetatakse <u>isokliiniks</u>.

J o o n t, m i l l e k õ i k i d e s p u n k t i d e s o n d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i j o o n e l e m e n t i d e l s a m a d k o n s t a n t s e d t õ u s u d, n i m e t a t a k s e i s o k l i i -

n i k s.

Vastavalt joonelemendi definitsioonile rahuldab vaadeldava diferentsiaalvõrrandi iga joonelement (x,y,y'), kus y'=f(x,y), antud võrrandit (0.2). Siinjuures on $(x,y) \in D$ ja $y' \in Z$, kus sümboliga Z on tähistatud funktsiooni f(x,y) muutumispiirkond. Otsides isokliini võrrandit, omistame suurusele y' konstantse väärtuse $k \in Z$ ja vaatleme kõiki neid punkte $(x,y) \in D$, mille puhul

$$f(x,y) = k . \tag{1.1}$$

Võrrand (1.1) määrab joone, mille punktides on diferentsiaalvõrrandi (0.2) joonelementidel samad konstantsed tõusud k, ja on järelikult isokliini võrrandiks. Kui vaadelda konstanti k parameetrina piirkonnast Z , saame antud diferentsiaalvõrrandi <u>isokliinide parve võrrandi.</u>

Järgnevalt vaatleme integraalkõverate parve graafilise kujutamise meetodeid.

A. Otsime integraalkõverate parve võrrandile (0.2). Lahendamiseks:

1) fikseerime piirkonna D , kus f(x,y) on määratud;

2) määrame kindlaks funktsiooni f(x,y) muutumispiirkonna Z ;

3) valides väärtusi $k \in Z$, skitseerime piirkonda D võrrandi (0.2) isokliinide parve f(x,y) = k , kandes igale isokliinile diferentsiaalvõrrandi joonelemendid vastava tõusuga.

Nii osutub konstrueerituks diferentsiaalvõrrandi sihtide väli. Vajaduse korral täiendame joonist uute joonelementidega, kuni joonisel ilmneb kujutis integraalkõveratest, kui joontest mis igas oma punktis puudutavad joonelemente.

Lõpuks jääb skitseerida integraalkõverad.

Illustreerime öeldut järgmise näitega.

Näide 1. Diferentsiaalvõrrandi

$$y' = -2x$$

korral on 1) piirkonnaks D xy-tasand; 2) muutumispiirkond $Z = (-\infty, \infty)$ ja 3) isokliinide parve võrrandiks on

$$k = -2x .$$

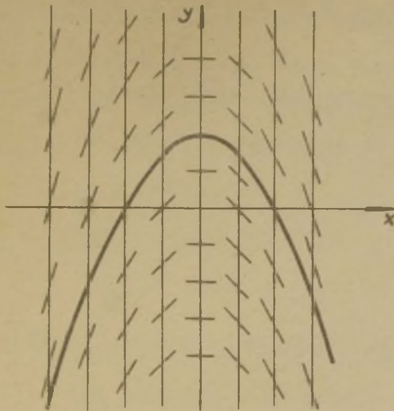
Integraalkõverate parve joonistamiseks kanname joonisele (vt. joon. 3) isokliinid koos vastavate joonelementidega. Selleks võtame andmed eelnevalt valmistatud tabelist:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
isokliini võrrand	$x=\frac{3}{2}$	$x=1$	$x=\frac{1}{2}$	$x=0$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=-1$	$x=-\frac{3}{2}$	$x=-2$

Joonisel 3 on saadud kujutis integraalkõverast võrrandiga $y = 1 - x^2$.

B. Teise meetodi puhul uurime eelnevalt integraalkõverate kulgu antud diferentsiaalvõrrandi (0.2) põhjal. Sealjuures olgu $f(x,y)$, f'_x ja f'_y pidevad piirkonnas D. Selleks selgitame välja integraalkõverate ekstreemum- ja käänupunktide asukoha ning piirkonnad, kus integraalkõverad on tõus -

vad, langevad, kumerad või nõgusad. Sealjuures eeldame, et võrrandi (o.2) puhul *läbib piirkonna D iga punkti ainult üks integraalkõver.*



Joon. 3.

1. Piirkonna D igas punktis on integraalkõverate tõus y' määratud võrrandiga (0.2). Seega on integraalkõver tõusev või langev vastavalt seal, kus

$$f(x,y)>0 \quad \text{või} \quad f(x,y)<0\,. \qquad (1.2)$$

Tähistame piirkonnad, milles kehtivad võrratused (1.2) vastavalt tähtedega S_1 ja S_2 .

2. Tingimus

$$f(x,y) = 0 \qquad (1.3)$$

on tarvilik selleks, et integraalkõveratel oleksid ekstreemumpunktid. Kuid võrrandiga (1.3) määratud kõveral paiknevad integraalkõverate ekstreemumpunktid, vaid siis, kui *kõver (1.3) on piirkondade* S_1 ja S_2 rajajooneks.[2]

[2] Piirkonna rajajoone all mõistetakse selle piirkonna rajapunktide hulka. Rajapunktiks on aga iga niisugune punkt, mis ise ei kuulu piirkonda, kuid mille ümbruses on nii piirkonna punkte, kui ka punkte, mis ei kuulu piirkonda.

Olgu märgitud, et ekstreemumpunktid paiknevad isokliinil, millel $k = 0$. (Kas võrrandil $y' = 1 + x^2$ on ekstreemumpunkte?)

3. Integraalkõverate käänupunktide olemasolu tarvilikuks tingimuseks on see, et $y'' = 0$. Arvutanud võrrandist (0.2)

$$y'' = f'_x + f'_x \cdot y' ,$$

s.o.

$$y'' = f'_x + f_y \cdot f(x,y) ,$$

näeme, et tingimus

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0 \quad \text{ehk} \quad f'_x + f'_y \cdot f(x,y) = 0 \qquad (1.4)$$

on tarvilik integraalkõverate käänupunktide olemasoluks. Kuna võrrandit (1.4) rahuldavad ka isokliinide parve $f(x,y) = k$ tõusud (näita seda !), järeldame ,et i n t e g r a a l k õ v e r a t e k ä ä n u p u n k t i d e s l e i a b a s e t i n t e g r a a l k õ v e r a t e j a i s o k l i i n i d e p u u t u m i n e.

Samuti nagu punktis 2, väidame, et võrrandiga (1.4) määratud kõveral paiknevad integraalkõverate käänupunktid siis, kui kõver (1.4) on integraalkõverate kumeruse ja nõgususe piirkondade K_1 ja K_2 rajajooneks. Viimased kujutavad endast piirkondi, milles kehtivad vastavad võrratused

$$f'_x + f'_y \cdot f(x,y) < 0 \quad \text{ja} \quad f'_x + f'_y \cdot f(x,y) > 0 .$$

Lõpuks olgu märgitud, et juhul kui võrrenditega (1.3) või (1.4) määratud kõverad osutuvad integraalkõverateks, ei saa nad samaaegselt olla ekstreemum- või käänupunktide geomeetriliseks kohaks, sest siis läbiks joone (1.3) või (1.4) iga punkti vähemalt kaks integraalkõverat ning see oleks vastuolus punkti B algul tehtud eeldusega.

Öeldut illustreerime järgmise näitega.

Näide 2. Vaatleme jälle võrrandit

$$y' = -2x .$$

Näite 1 vaatlemisel selgus, et piirkonnaks D on xy-tasand, mille iga punkti läbib ainult üks integraalkõver. Piirkond $Z = (-\infty, \infty)$. Piirkonnaks S_1 on siin pooltasand $x<0$ ja piirkonnaks S_2 - pooltasand $x>0$. Ekstreemumpunktide olemasolu tarvilikuks tingimuseks on $x = 0$. Samal ajal on sirge $x = 0$ piirkondade S_1 ja S_2 rajajooneks ja on seega integraalkõverate ekstreemumpunktide geomeetriliseks kohaks, täpsemalt - maksimumpunktide geomeetriliseks kohaks (vt. y' märgi muutu!) .

Arvutades leiame, et $y'' = -2$. Kuna piirkonna D igas punktis on $y'' \neq 0$ ja $y''<0$, puuduvad integraalkõveratel käänupunktid ja kõverad on kumerad.

Teostatud analüüs kinnitab ettekujutust meetodiga A saadud geomeetrilisest pildist (vt. joon.3).

3. Näited ülesannetest, mis toovad esimest järku diferentsiaalvõrrandite juurde. Paljudes loodusteaduse ja tehnika-alastes ülesannetes on otsitavateks funktsioonid, mis kirjeldavad vaadeldavaid nähtusi ja protsesse. Viimaste puhul on sageli eksperimentaalselt või vaatluste põhjal kindlaks

määratud seosed sõltumatu muutuja, otsitava funktsiooni ja tema tuletiste vahel. Niisugusel juhul on vaadeldav nähtus või protsess määratud diferentsiaalvõrrandiga ning otsitavaks on selle lahend. Alljärgnevas vaatleme konkreetseid näiteid.

Ülesanne 1. On tehtud kindlaks, et teatud koirohuliikidest valmistatud kuulikeste aurustumisel on kuulikese pindala antud hetkel võrdeline tema ruumala kahanemise kiirusega samal hetkel.

Leida kirjeldatud liiki koirohust kuulikeste aurustumise seadus.

Olgu hetkel t kuulikese ruumala $V(t)$ ja pindala $S(t)$. Vastavalt eeldustele on aurustumise diferentsiaalvõrrandiks

$$S(t) = -\frac{1}{k}\frac{dV(t)}{dt}$$

ehk

$$\frac{dV(t)}{dt} = -kS(t), \qquad (1.5)$$

kus k on koirohuliigist sõltuv positiivne konstant. Kuulikese aurustumise seaduse leidmiseks määrame kuulikese raadiuse R sõltuvuse ajast t. Arvestades, et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ja $S = 4\pi R^2$, leiame võrrandist (1.5), et

$$\frac{dR(t)}{dt} = -k. \qquad (1.6)$$

Siit selgub, et kuulikese raadiuse kahanemise kiirus on aurustumisprotsessis konstantne (võrrandist (1.5) ei paista see silma).

Veendu iseseisvalt, et kirjeldatud omadusega on kõikidest nendest koirohuliikidest valmistatud kuulikesed, millel raadiuse R muutumise seaduseks on

$$R(t) = -kt + C ,$$

kus C - suvaline konstant.

Märkus 1. Olgu ülesandes 1 lisaks teada, et koirohust kuulikese raadius kahaneb kuue kuu jooksul 1 cm-lt $\frac{1}{2}$ cm-le.

Lisatud andmed võimaldavad määrata ülesande 1 lahendi mõlemad konstandid C ja k.

Konstandi C leidmiseks arvestame, et hetkel $t = 0$ on $R(t) = 1$. Seega, kui koirohuliiki iseloomustav konstant k oleks teada, oleks aurustumise seaduseks

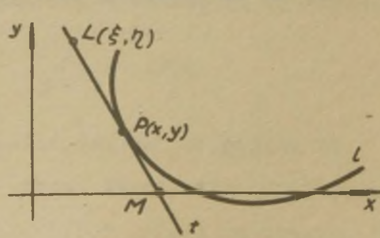
$$R(t) = -kt + 1.$$

Kui arvestame veel, et hetkel $t = 6$ (aega mõõdame kuudes) on $R(t) = \frac{1}{2}$, leiamegi mõlemaid lisatingimusi rahuldava aurustumise seaduse

$$R(t) = 1 - \frac{t}{12} .$$

Ülesanne 2. Leida võrrand kõverate parvele, mille iga punkti $P(x,y)$ abstsissi ruut on võrdeline abstsisstelje lõiguga koordinaatide alguspunktist kuni lõikumiseni kõvera puutujaga punktis $P(x,y)$.

Olgu joonisel 4 kujutatud kõver ℓ üks otsitava parve kõveratest. Punktist $P(x,y)$ on tõmmatud kõve-



Joon. 4.

rale ℓ puutuja t ja L (ξ , η) olgu puutuja suvaline punkt. Oletades, et otsitava kõvera võrrandiks on $y = \varphi(x)$, saame puutuja t võrrandiks

$$\eta - y = y'(\xi - x) .$$

Seega lõikub puutuja abstsissteljega punktis M $(x - \frac{y}{y'};0)$.

Eelduste kohaselt on siis

$$x^2 = \frac{1}{k}\left(x - \frac{y}{y'}\right),$$

kus $\frac{1}{k}$ on võrdetegur. Kõvera ℓ ja ühtlasi otsitava parve võrrandiks on diferentsiaalvõrrand

$$y'(x - kx^2) = y . \qquad (1.7)$$

Näita, et leitud diferentsiaalvõrrandite lahenditeks on funktsioonid

$$y = \frac{Cx}{1-kx}, \qquad (1.8)$$

kus C on suvaline konstant.

<u>Märkus 2</u>. Olgu ülesandes 2 nõutud lisaks, et otsitav kõver läbiks punkti A $(1, \frac{k}{1-k})$. Püstitatud nõue tähendab seda, et diferentsiaalvõrrandiga (1.7) määratud funktsioonid (1.8) peavad rahuldama tingimust

$$y(1) = \frac{k}{1-k} . \qquad (1.9)$$

Et niisugust kõverat leida, tuleb üheparameetrilise parve (1.8) kõveratest leida niisugused, mis rahuldavad lisatingimust (1.9). Koordinaatide $x = 1$ ja $y = \frac{k}{1-k}$

asendamisel võrrandisse (1.8) näeme, et niisuguseid kõveraid on iga k väärtuse korral üks ja nimelt

$$y = \frac{kx}{1-kx} .$$

4. <u>Algtingimus ja algtingimusega ülesanne.</u> Esimest järku diferentsiaalvõrrandite lahendamisel saame üldiselt korraga terve hulga funktsioone

$$y = \varphi(x,C) \qquad (1.10)$$

või

$$\psi(x,y,C) = 0 , \qquad (1.11)$$

millest iga üksik

$$y = \bar{\varphi}(x) , \qquad (1.12)$$

kus $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x, \bar{C})$ või

$$\chi(x,y) = 0, \qquad (1.13)$$

kus $\chi(x,y) = \psi(x,y, \bar{C})$, kas on ise või määrab vaadeldava diferentsiaalvõrrandi

$$F(x,y,y') = 0 \qquad (1.14)$$

lahendi vahemikus X. Võrrandites (1.10) ja (1.11) on C arvtelje sidusas piirkonnas muutuv parameeter.

Näiteks funktsioon

$$y = x - 4 \qquad (1.15)$$

rahuldab võrrandit

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{4}{x} \qquad (1.16)$$

vahemikus $(-\infty, \infty)$. Kuid sama võrrandit rahuldavad nii funktsioon $y = \frac{x}{2} - 4$, kui ka kõik funktsioonid $y = Cx - 4$, kus $C \in (-\infty, \infty)$.

Sageli seisnevad diferentsiaalvõrranditega seoses olevad ülesanded selles, et otsitakse üht konkreetset funktsiooni nende hulgast, mis rahuldavad vaadeldavat diferentsiaalvõrrandit, s.o. otsitakse üht konkreetset lahendit teiste lahendite hulgast. Näiteks otsitakse võrrandi (1.16) lahendit (1.15) või võrrandi (1.14) lahendit (1.12) lahendite (1.10) hulgast. Sisuliselt sama ülesandega oligi tegemist eelmise artikli märkustega 1 ja 2 varustatud vastavates ülesannetes. Ent sel juhul peab ülesande formuleeringus esinema niisugune lisatingimus, mis võimaldab kõne all olevat konkreetset lahendit eraldada kõikidest teistest lahenditest. Artiklis 3 esinenud lisatingimused olid järgmist tüüpi. Nõuti, et otsitav funktsioon omandaks argumendi väärtuse x_0 puhul väärtuse y_0, s.o.

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.17)$$

Tingimust (1.17) nimetatakse algtingimuseks[3]. Ülesannet lahendada diferentsiaalvõrrand (1.14) algtingimusel (1.17)

---

[3] Hiljem näeme, et esineb ülesandeid ka teist tüüpi lisatingimustega.

nimetatakse algtingimusega ülesandeks ehk Cauchy ülesandeks.

Teame, et funktsioonid (1.10) või (1.11) määravad vaadeldava diferentsiaalvõrrandi (1.14) integraalkõverate parve, kui üheparameetrilise kõveraparve[4]. Algtingimusega ülesande lahendamine tähendab geomeetriliselt niisuguse kõvera leidmist diferentsiaalvõrrandiga (1.14) määratud kõveraparvest, mis läbiks punkti $P(x_0,y_0)$.(Vt. artikkel 3 ülesanne 2 koos märkusega 2).

5. Diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahend. Eespool nägime, et diferentsiaalvõrrandite puhul esineb nii algtingimustega ülesandeid, kui ka ülesandeid, kus otsitakse diferentsiaalvõrrandi lahendeid üldse. Nende ülesannete (üldiselt [5] erinevate) lahendite eritlemiseks kasutatakse järgmisi mõisteid.

Ülalnimetatuist teise ülesande puhul on eesmärgiks: lahendada diferentsiaalvõrrand. Siin loetakse ülesanne lahendatuks, kui on leitud antud diferentsiaalvõrrandi kõik lahendid.

Vaatleme viimast ülesannet algul lihtsaima näite

$$y' = f(x) \tag{1.18}$$

varal. Eeldame, et funktsioon $f(x)$ on lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Integraalarvutuse põhikursusest teame, et

---

[4] Kui parameetri C igale väärtusele arvtelje teatud sidusast piirkonnast vastab teatav kõver, siis nimetatakse vastavate kõverate hulka üheparameetriliseks kõveraparveks.

[5] Erandiks on juht, kui diferentsiaalvõrrandil on ainult üks lahend (vt. näidet (11)).

funktsioonil $f(x)$ on siis algfunktsioon $\varphi(x)$, nii et

$$\varphi'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a,b)$ korral. Samuti teame, et vaadeldaval funktsioonil peale funktsioonide $\varphi(x) + C$, kus C on suvaline konstant, enam teisi algfunktsioone pole. Seega on võrrandi (1.18) k õ i k lahendid antud funktsioonidega

$$y = \varphi(x) + C \tag{1.19}$$

ja püstitatud eesmärk on saavutatud.

Olgu diferentsiaalvõrrandi (1.18) korral lahendamisel algtingimusega ülesanne, kus algtingimuses

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.20}$$

eeldame, et $x_0 \in (a,b)$ ja y_0 on suvaline. Ülalsaadud tulemuse kohaselt peab lahendite (1.19) hulgas leiduma ka n i i s u g u n e, mis rahuldab tingimust (1.20). On lihtne näha, et selleks on lahend

$$y = \varphi(x) + \left[y_0 - \varphi(x_0)\right]$$

ehk

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt . \tag{1.21}$$

Samuti on selge, et algtingimust (1.20) rahuldav lahend (1.21) saadakse lahendite (1.19) hulgast k o n s t a n d i C s o b i v a l v a l i k u l ja nimelt - valides $C = y_0 - \varphi(x_0)$. Sel korral öeldakse, et lahend (1.21) on diferentsiaalvõrrandi (1.18) erilahend .

Vaadeldud näite puhul võime öelda, et võrrandi (1.18) lahendite hulk (1.19) on niisugune, kus a l g t i n g i - m u s e d (1.20) mistahes $x_0 \in (a,b)$ ja suvalise y_0 korral o n r a h u l d a t a v a d s o b i v a k o n s - t a n d i C valikuga. Järelikult võrrandi (1.18) puhul lahendite hulk (1.19) 1) ammendab diferentsiaalvõrrandi (1.18) kõik lahendid ja 2) on niisugune, et sobival konstandi C valikul on rahuldatavad mistahes algtingimused (1.20).

Vaadeldud näite puhul on loomulik, kui nimetame lahendit (1.19) diferentsiaalvõrrandi (1.18) <u>üldlahendiks.</u> Ent leidub esimest järku diferentsiaalvõrrandeid (need pole üksikud erandid), millel pole nõudeid 1 ja 2 rahuldavat lahendite hulka. Näiteks võrrandi

$$2y' + x - \sqrt{x^2 + 4y} = 0 \qquad (1.22).$$

lahendite hulk

$$y = Cx + C^2 \qquad (1.23)$$

rahuldab küll nõuet 2 iga algtingimuse (1.20) korral, kus (x_0, y_0) on piirkonna

$$y \geq -\frac{x^2}{4}$$

suvaline punkt, kuid ei rahulda nõuet 1. Nimelt on diferentsiaalvõrrandil (1.22) lahend

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

mis ei kuulu lahendite (1.23) hulka, s.o. ei leidu niisugust konstanti C , mille korral kehtiks $Cx + C^2 = -\frac{x^2}{4}$.

Seega on arusaadav, miks esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi alljärgnevas definitsioonis jäetakse esimene nõuetest 1 ja 2 ära.

Diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x,y)$$

üldlahendiks nimetatakse niisugust suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit, mis sobival konstandi C valikul rahuldab algtingimust

$$y(x_0) = y_0$$

iga $(x_0,y_0) \in D$ korral, kus D on funktsiooni $f(x,y)$ pidevuse piirkond. Lahendid, mis saadakse üldlahendist konstandi C fikseeritud väärtuse korral, kannavad erilahendite nimetust.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamist nimetatakse ka <u>diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks</u>. Samas märgime veel, et võrrandi lahendamisel jõutakse sageli seoseni

$$\Phi(x,y,C) = 0,$$

mis määrab üldlahendi ilmutamata kujul (vt. sissejuhatus). See seos kannab ka võrrandi <u>üldintegraali</u> nimetust. Fikseeritud konstandi korral räägime <u>eriintegraalist</u>.

Definitsiooni kohaselt on lahendid (1.19) ja (1.23) vastavalt võrrandite (1.18) ja (1.22) üldlahendid, kuna näiteks $C = \bar{C}$ korral on $y = \varphi(x) + \bar{C}$ ja $y = \bar{C}x + \bar{C}^2$ vastavate võrrandite erilahendid. Võrrandil (1.22) on peale üld- ja erilahendite veel niisugune lahend, mis ei kuulu kummasegi kategooriasse. Edaspidise terminoloogia kohaselt oleks lahend $y = -\frac{x^2}{4}$ võrrandi (1.22) <u>iseärane</u> ehk <u>singulaarne lahend.</u> Esialgselt mõistamegi iseärase lahendi all diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ niisugust lahendit, mis pole leitav üldlahendist konstandi C ühegi väärtuse korral.

Seega võib iga diferentsiaalvõrrandi korral vaadelda kolme järgmist ülesannet:

a) lahendada diferentsiaalvõrrand;

b) leida diferentsiaalvõrrandi üldlahend;

c) leida algtingimust $y(x_0) = y_0$ rahuldav diferentsiaalvõrrandi erilahend.

Esimesel juhul tuleb leida vastava diferentsiaalvõrrandi kõik lahendid, teisel juhul - üldlahend ja kolmandal - vastav erilahend.

§ 2. MÕNED ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID JA NENDE LAHENDUVUS.

Käesolev paragrahv on üles ehitatud järgmistele analüüsis hästi tuntud teoreemidele.

<u>Teoreem 1</u>. Kui $F'(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ korral, siis on funktsioon $F(x)$ lõigul $[a,b]$ konstantne.

<u>Teoreem 2</u>. Olgu 1) funktsioon $F(x,y)$ koos oma osatuletistega F'_x ja F'_y määratud ja pidev punkti $P(x_0,y_0)$ ümbruses, 2) $F(x_0,y_0) = 0$ ja 3) $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Neil eel-

dustel määrab võrrand

$$F(x,y) = 0$$

ü h e s e l t ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$ piirkonnas $R_0 = \{ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta ;\ y_0 - \delta' < y < y_0 + \delta' \}$. Funktsioon $f(x)$ rahuldab piirkonnas R_0 tingimusi 1) $f(x_0) = y_0$, 2) $f(x)$ on vahemikus $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pidev, 3) funktsioonil $f(x)$ on vahemikus $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pidev tuletis.

Teoreem 3. Olgu funktsioonid $P(x,y)$ ja $Q(x,y)$ koos oma osatuletistega P'_y ja Q'_x määratud ja pidevad ühelisidusas[6] piirkonnas D.

Selleks, et avaldis $P\,dx + Q\,dy$ kujutaks täisdiferentsiaali piirkonnas D, on tarvilik ja piisav, et iga $(x,y) \in D$ korral kehtiks samasus

$$P'_y = Q'_x . \tag{2.1}$$

Märkus 3. Teoreemi 3 eeldustel kehtib valem

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + F(x_0,y_0) ,$$

kus (x_0,y_0) on piirkonna D mingi punkt ja (x,y) selle piirkonna suvaline punkt. Siinjuures on $F(x,y)$ niisugune funktsioon, et $dF = P\,dx + Q\,dy$.

---

[6] Tõkestatud piirkonda D me nimetame ühelisidusaks, kui koos iga piirkonnas D paikneva kontuuriga L kuulub piirkonda D ka kontuuri poolt piiratud piirkond. Piltlikult tähendab see, et piirkond D peab olema aukudeta.

1. Eksaktne diferentsiaalvõrrand. On arusaadav, et iga tuletise suhtes ilmutatud esimest järku diferentsiaalvõrrand $y' = f(x,y)$ on esitatav kujul

$$f(x,y)\,dx - dy = 0,$$

mis kujutab endast erijuhtu järgmisest esimest järku diferentsiaalvõrrandist

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \qquad (2.2)$$

Vaadeldes võrrandit (2.2) eeldame, et $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ iga $(x,y) \in D$ puhul, kus D olgu funktsioonide $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ühelisidus tasandiline määramispiirkond (milleks on vajalik eeldus $M^2 + N^2 \neq 0$?).

Võrrandit (2.2) nimetatakse eksaktseks piirkonnas D, kui leidub niisugune funktsioon $U(x,y)$, et

$$dU(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (2.3)$$

kõikjal piirkonnas D.

Edaspidi vaatlemegi võrrandit (2.2) eksaktsena ristkülikukujulises piirkonnas $R = \{a < x < b;\ c < y < d\}$. Kui seejuures oleks teada funktsioon $U(x,y)$, taanduks võrrand (2.2) kujule

$$dU(x,y) = 0. \qquad (2.4)$$

Selgitame küsimuse võrrandi (2.4) lahenduvusest.

Kui võrrand (2.4) oleks lahenduv ja $y = \bar{y}(x)$ - üks tema lahenditest vahemikus (a,b), saaksime lahendi definitsiooni kohaselt samasuse

$$dU(x,\bar{y}(x)) = 0$$

vahemikus (a,b). Teoreemi 1 põhjal kehtib seega samasus

$$U(x,\bar{y}(x)) = \bar{C}, \tag{2.5}$$

iga $x \in [a,b]$ korral, kus $\bar{C}$ on funktsioonile $\bar{y}(x)$ sobivalt valitud konstant. Seega peab funktsioon $\bar{y}(x)$ olema vahemikus (a,b) määratud võrrandiga (2.5). Sama mõttekäik jääb kehtima diferentsiaalvõrrandi (2.4) mistahes lahendi korral.

Teiselt poolt, ka iga funktsioon, mis vahemikus (a,b) on määratud võrrandiga

$$U(x,y) = C, \tag{2.6}$$

kujutab diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendit. Järelikult, *kui diferentsiaalvõrrand* (2.4) *on lahenduv, avalduvad kõik tema lahendid võrrandiga* (2.6) ja me võime öelda, et *võrrand* (2.6) *määrab diferentsiaalvõrrandi* (2.4) *üldlahendi*.

Kuid veel on jäänud lahtiseks küsimus lahendi olemasolust. Viimane sõltub sellest, kas funktsiooniga U(x,y) määratud võrrand (2.6) rahuldab ilmutamata funktsiooni olemasolu tingimusi või ei. (Teoreemi 2 põhjal on nüüd lihtne jõuda diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendi olemasolu teoreemini, mille sõnastuse ja tõestuse jätame lugejale harjutusülesandeks. Juhtnöörina soovitame eelnevalt tutvuda teoreemiga 4 ja selle tõestusega).

Meie järgmiseks ülesandeks on näidata, missugustel eeldustel funktsioonide $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ kohta on võrrand (2.2) 1) eksaktne ja 2) lahenduv.

Teoreem 4. Kui funktsioonid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ on koos oma osatuletistega M'_y ja N'_x ristkülikus R määratud ja rahuldavad seal tingimusi:

1° $M(x,y)$, $N(x,y)$, M'_y ja N'_x on pidevad;

2° $M'_y = N'_x$;

3° $N(x,y) \neq 0$,

siis on diferentsiaalvõrrand (2.2) eksaktne, integreeruv ja tema üldlahend on vahemikus (a,b) määratud võrrandiga

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C ,$$

kus $(x_0,y_0) \in R$.

T õ e s t u s. Eelduste 1° ja 2° ja teoreemi 3 põhjal on diferentsiaalvõrrand (2.2) eksaktne piirkonnas R. Kuna võrrand on eksaktne, leidub niisugune funktsioon $U(x,y)$, et piirkonnas R kehtib võrdus (2.3). Märkuse 3 ja eelduste 1° ning 2° põhjal teame, et

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy + U(x_0,y_0) .$$

Ristkülikukujulise piirkonna R tõttu aga on

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + U(x_0,y_0). \quad (2.7)$$

Seega taandub võrrand (2.2) kujule (2.4), milles U(x,y) on määratud võrdusega (2.7). Käesoleva artikli algul nägime, et võrrandi (2.4), nüüd ka (2.2) üldlahend (kui võrrand on lahenduv) on määratud võrrandiga

$$U\,(x,y) - C = 0, \tag{2.8}$$

kus U(x,y) on antud võrdusega (2.7).

Näitame nüüd, et võrrand (2.4) on lahenduv, s.o. t õ e s t a m e v õ r r a n d i (2.2) l a h e n d i o l e m a s o l u p i i r k o n n a s R.

Tõestuse viime läbi kahes osas: näitame lahendi olemasolu a) punkti x_0 ümbruses ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$) , kus x_0 on suvaline vahemiku (a,b) punkt; b) ristkülikus R.

Selleks valime vabalt punkti $(x_0,y_0) \in R$ ja vaatleme funktsiooni

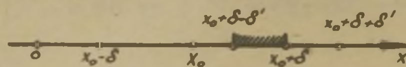
$$F\,(x,y) = U\,(x,y) - C_0 ,$$

kus $C_0 = U(x_0,y_0)$, punkti (x_0,y_0) ristkülikukujulises ümbruses $J = \{ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta ;\ y_0 - \bar{\delta} < y < y_0 + \bar{\delta} \}$. Piirkonnas J rahuldab funktsioon F(x,y) teoreemi eelduste 1° ja 3° tõttu teoreemi 2 kõiki eeldusi (näita seda !).Seega määrab võrrand

$$U\,(x,y) - C_0 = 0 \tag{2.9}$$

teoreemi 2 põhjal vahemikus ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$) ilmutamata funktsiooni y = f(x), mis samas vahemikus rahuldab tingimusi 2,3 ja 1. Viimane neist on diferentsiaalvõrrandi (2.2) suhtes algtingimus. Nii näitasime algtingimust $y(x_0)=y_0$ rahuldava lahendi (2.9) lokaalse olemasolu.

Lõpuks märgime, et lahend (2.9) eksisteerib ristkülikus R. Nimelt, kui punkt ($x_0 + \delta$, $y(x_0 + \delta)$) $\in R$, on ka siin lahendi lokaalne olemasolu tõestatud (punkti a põhjal) mingis küllaldaselt väikeses vahemikus ($x_0 + \delta - \delta'$, $x_0 + \delta + \delta'$). Ja kuna ühises piirkonnas ($x_0 + \delta - \delta'$, $x_0 + \delta$) (vt. joon. 5) on lahend määratud üheselt (vt. teoreemi 2 sõnastus), siis kujutab integraalkõver endast vahemikus



Joon.5.

($x_0 + \delta$, $x_0 + \delta + \delta'$) eelmises vahemikus ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$) defineeritud integraalkõvera jätku. Võib tõestada (vt. § 3), et teoreemi eeldustel on vaadeldav lahend kirjeldatud viisil jätkatav ristküliku R rajajooneni. Sama mõttekäik jääb kehtima piirkonna R mistahes sisepunkti (x_0, y_0), s.o. suvalise algtingimuse $y(x_0) = y_0$ korral ja seega l a h e n d i o l e m a s o l u on tõestatud terve piirkonna R jaoks.

Samaaegselt on näidatud ka l a h e n d i ü h e s u s : iga algtingimuse korral leidub ainult üks lahend, mis seda algtingimust rahuldab.

<u>Märkus 4.</u> Kui tingimus 3° teoreemis 4 asendada tingimusega $M(x,y) \not\equiv 0$ jääb teoreem kehtima (kuidas muutub olukord sisuliselt?).

<u>Märkus 5.</u> Teoreem 4 on laiendatav tegelikult mistahes ühelisidusale piirkonnale.

<u>Näide 3.</u> Vaatleme võrrandit

$$2\,xy\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0 . \qquad (2.10)$$

Funktsioonid $M(x,y) = 2xy$ ja $N(x,y) = x^2 - 2y$ koos oma

5.

osatuletistega $M'_y = 2x$ ja $N'_x = 2x$ rahuldavad xy-tasandi piirkonnas, kus $x^2 \neq 2y$, teoreemi 4 kõiki eeldusi. Seega on võrrand (2.10) eksaktne ning integreeruv. Üldlahendi leidmiseks arvutame funktsiooni

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} 2\,xy\,dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 - 2y)dy + U(x_0,y_0) =$$

$$= x^2y - x_0^2y + x_0^2y - x_0^2y_0 - y^2 + y_0^2 + U(x_0,y_0) =$$

$$= x^2y - y^2.$$

Seega määrab

$$x^2y - y^2 = C$$

diferentsiaalvõrrandi (2.10) üldlahendi.

2. <u>Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand.</u> Võrrandit

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0, \qquad (2.11)$$

milles $\varphi^2(x) + \psi^2(y) \neq 0$ iga $(x,y) \in R$ korral, kus R on ristkülikukujuline tasandiline piirkond, nimetatakse <u>eraldunud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks</u>.

Näitame, et kehtib järgmine teoreem.

<u>Teoreem 5</u>. Eraldunud muutujatega diferentsiaalvõrrand (2.11), milles $\varphi(x)$ ja $\psi(y)$ on vahemikes $a < x < b$; $c < y < d$ määratud ja p i d e v a d funktsioonid, kusjuures $\psi(y) \neq 0$ iga $y \in (c,d)$ korral, on integreeruv ja tema üldlahend määratud võrrandiga

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C .$$

T õ e s t u s. Võrrandit (2.11) võime vaadelda võrrandina (2.2), milles $M(x,y)= \varphi(x)$, $N(x,y)=\psi(y)$, $M'_y = N'_x = 0$. Seega rahuldavad funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(y)$ teoreemi 1 kõiki eeldusi ristkülikus $\{(a,b), (c,d)\}$. Teoreemi 4 kohaselt on ka võrrand (2.11) eksaktne, integreeruv ja tema üldlahend määratud võrrandiga

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)dy = C_1$$

ehk teisiti võrrandiga

$$\int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy = C .$$

<u>Näide 4.</u> Võrrand

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx - \frac{e^y}{1+e^y}\,dy = 0$$

on samuti eraldunud muutujatega diferentsiaalvõrrand, mis on integreeruv kogu xy-tasandil. Tema üldlahendi määrab võrrand

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+e^y) = \frac{1}{2}\ln C$$

ehk, mis on sama,

$$1 + x^2 = C\,(1 + e^y)^2.$$

Ent sageli diferentsiaalvõrrand, mis on küll esitatav kujul (2.11), antakse ühega võrranditest

$$y' = f(x)\,g(y), \tag{2.12}$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + g_1(x) \cdot g_2(y)dy = 0, \qquad (2.13)$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) + g_1(x) \cdot g_2(y)\, y' = 0. \qquad (2.14)$$

Sel korral öeldakse, et võrrand (2.12), (2.13) või (2.14) on <u>eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand</u>. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks tuleb ta teisendada kujule (2.11) ehk, nagu öeldakse, tuleb temas <u>eraldada muutujad</u>. Selleks tuleks võrrandeid (2.12), (2.13) ja (2.14) korrutada vastavalt teguritega $\frac{dx}{g(y)}$, $\frac{1}{f_2(y) \cdot g_1(x)}$ ja $\frac{dx}{f_2(y) \cdot g_1(x)}$. T e i s e n d a m i s e l v õ i v a d aga diferentsiaalvõrrandi (2.12),(2.13) või (2.14) m õ n e d l a h e n d i d k a d u m a m i n n a ja seega poleks taandatud võrrand (2.11) samaväärne esialgsega. Öeldut peab lähtevõrrandi lahendamisel silmas pidama.

<u>Näide 5</u>. Olgu lahendamisel võrrand

$$(x^2 + 2)\,(y^2 - 9)\, dx + xy\, dy = 0\,, \qquad (2.15)$$

mille puhul otsitakse võrrandi kõiki lahendeid.

Kuna võrrand on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand, eraldame selle muutujad. Korrutades teda funktsiooniga $\frac{1}{x(\,y^2-9)}$, saame eraldunud muutujatega võrrandi

$$\frac{x^2+2}{x}\, dx + \frac{y}{y^2-9}\, dy = 0 \qquad (2.16)$$

Leitud võrrand rahuldab kõikjal, kus $x \neq 0$ ja $y^2 \neq 9$ teoreemi 2 eeldusi. Järelikult läbib xy-tasandi iga punkti, kus $x \neq 0$ ja $y^2 \neq 9$, parajasti üks integraalkõver parvest

$$y^2 = 9 + C \frac{e^{-x^2}}{x^4} . \tag{2.17}$$

Integraalkõverate parv (2.17) on diferentsiaalvõrrandi (2.16) üldintegraaliks ja kõik selle parve kõverad on ka võrrandi (2.15) integraalkõverateks. Kuid võrrandis (2.15) pole eeldatud, et $x \neq 0$ ja $y^2 \neq 9$. Sealjuures on funktsioonid $x = 0$ ja $y = \pm 3$ diferentsiaalvõrrandi (2.15) lahenditeks (näita seda !), kuigi nad pole seda võrrandi (2.16) jaoks. Kui diferentsiaalvõrrandi (2.15) lahendid $y = \pm 3$ on tema erilahendid (nad saadakse üldlahendist $C = 0$ korral), siis lahend $x = 0$ ei näi sisalduvat parves (2.17) ja ta võiks kaduma minna. Alles pärast võrrandi (2.17) teisendamist kujule

$$x^4(y^2- 9) = C e^{-x^2}$$

selgub, et ka lahend $x = 0$ on leitav üldlahendist $C = 0$ korral.

Märkus 6. L a h e n d i t e k a o t s i m i n e k u v õ i m a l u s e g a t u l e b a r v e s t a d a a l a t i , k u i o n t e g e m i s t a n t u d d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i t e i s e n d a m i s e g a .

3. Homogeenne diferentsiaalvõrrand. Käesolevas artiklis kasutame järgmisi analüüsis tuntud mõisteid ja tõsiasju

(vt. näiteks [2] I köide p. 145).

Funktsiooni $z = f(x,y)$ nimetatakse piirkonnas D λ -astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib samasus

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x,y)$$

iga $(x,y) \in D$ ja suvalise $t>0$ korral. Homogeensuse aste võib olla mistahes reaalarv. Õpikus [2] on tõestatud homo - geensete funktsioonide omadus, mille sõnastame järgmise lemmana.

Lemma 1. Iga λ-astme homogeenne funktsioon $f(x,y)$ on kõikjal oma homogeensuse piirkonnas, kus $x \neq 0$, esitatav kujul

$$f(x,y) = x^{\lambda} \varphi(\tfrac{y}{x}) ,$$

kus $\varphi(\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$.

(Sõnastada vastav lemma 0-astme homogeensete funktsioonide kohta !)

Võrrand

$$y' = f(x,y) \tag{2.18}$$

kannab homogeense diferentsiaalvõrrandi nimetust, kui funktsioon $f(x,y)$ on oma määramispiirkonnas D 0-astme homogeenne funktsioon. Mistahes teisel kujul antud diferentsiaalvõrrandi homogeensuse kontrollimiseks ei tarvitse teda taandada kujule (2.18). Nimelt, kui funktsioonide $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ühises määramispiirkonnas D kehtib tingimus $N(x,y) \neq 0$ ning funktsioonid $M(x,y)$ ja

$N(x,y)$ on piirkonnas D s a m a a s t m e h o m o g e e n s e d f u n k t s i o o n i d , siis on võrrand

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.2)$$

homogeenne diferentsiaalvõrrand (veendu selles iseseisvalt !)

<u>Märkus 7.</u> Kui piirkonnas D kehtib tingimus $M(x,y) \neq 0$, on võrrand (2.2) endistel eeldustel ikka homogeenne diferentsiaalvõrrand (mis muutub sel korral sisuliselt?).

Alljärgnevas vaatlemegi võrrandit (2.2) homogeensena. Vastavalt lemmale 1 on võrrand (2.2) esitatav kujul

$$x^{\lambda}\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy\right] = 0\,,$$

kus $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ja $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Lahendamisele kuulub nüüd võrrand

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0\,, \qquad (2.19)$$

mille taandame võrrandiks

$$\chi\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0, \qquad (2.20)$$

kus

$$\chi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}\,.$$

(Miks on siin lubatud jagamine teguriga $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$?)

Näitame, et m u u t u j a t e a s e n d u s e g a $z = \frac{y}{x}$ t a a n d u b v õ r r a n d (2.20) e r a l d u v a t e m u u t u j a t e g a v õ r r a n d i k s . Selleks arvutame $dy = z\,dx + x\,dz$ ja teostame asenduse. Tagajärjeks on võrrand

$$\left[\chi(z) + z\right] dx + x\,dz = 0,$$

milles muutujate eraldamiseks nõuame, et

$$\chi(z) + z \neq 0.$$

Lõplikult teiseneb meie võrrand järgmiseks eraldunud muutujatega võrrandiks

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\chi(z)+z} = 0\,. \qquad (2.21)$$

Teoreemi 2 põhjal on võrrand (2.21) integreeruv ja tema üldlahendiks on funktsioon

$$x = C\,e^{-\int \frac{dz}{\chi(z)+z}}\,, \qquad (2.22)$$

kui $\chi(z)$ on vahemikus (c,d) pidev funktsioon. Tähistades $-\int \frac{dz}{\chi(z)+z} = \tau(z)$ näeme, et võrrandil (2.19) ning samaga ka (2.2) üldlahendiks on

$$x = C\,e^{\tau\left(\frac{y}{x}\right)}\,. \qquad (2.23)$$

Arvestades märkust 6 kontrollime, kas nõudega $\chi(z)+z \neq 0$ ei lähe kaduma lähtevõrrandi lahendeid. Selleks vaatleme kahte võimalust.

1° $\chi(z) + z = 0$ iga $z \in (c,d)$ korral. Sel juhul on $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ suvalise $x \neq 0$ ja niisuguste y korral, kus $c < \frac{y}{x} < d$. Ent siis on võrrand (2.19), s.o.

ka (2.2) konkreetne eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$- y\,dx + x\,dy = 0,$$

mida pole mõtet lahendada homogeense võrrandina.

2° Kui $\chi(z) + z = 0$ üksikutes punktides, näiteks punktis $z = z_0 \in (c,d)$. Siis on diferentsiaalvõrrandi (2.19), s.o. ka (2.2) lahendiks funktsioon $y = z_0 x$ (näita seda !), mis võib ka parvele (2.23) mitte kuuluda ja kujutab siis endast singulaarset lahendit.

Eespool öeldu põhjal järeldame, et **homogeenne diferentsiaalvõrrand** (2.19) **on integreeruv, kui funktsioonid** $\varphi(z)$ **ja** $\psi(z)$ **on vahemikus** (c,d) **pidevad ning samas vahemikus** $\psi(z) \neq 0$; **võrrandi üldlahend leitakse asendusega** $z = \frac{y}{x}$ **ja avaldub kujul** (2.22) **ehk** (2.23); peale üldlahendi võib esineda veel singulaarne lahend $y = z_0 x$.

Et homogeenne võrrand (2.18) on erijuht võrrandist (2.2) (näita seda!) , ei käsitle me teda eraldi. (Tuletada iseseisvalt lahendi olemasolu tingimus võrrandi (2.18) jaoks!)

Homogeense diferentsiaalvõrrandi integraalkõveratel on huvitav geomeetriline omadus. Nimelt saab näidata, et **homogeense diferentsiaalvõrrandi integraalkõverad on sarnased kõverad** (vt. lähemalt [1] pt. I § 3) .

Näide 6. Võrrandi

$$y' = \frac{x^2 - 3y^2}{xy}$$

lahendamiseks teisendame ta kujule

$$\frac{1 - 3(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}} dx - dy = 0 .$$

Näeme, et $\varphi(z) = \frac{1 - 3z^2}{z}$ on pidev kõikjal peale $z = 0$. Kuna $\psi(z) = -1$ on pidev kõikjal ja $\psi(z) \neq 0$, on vaadeldav võrrand integreeruv kõikjal, kus $z \neq 0$. Üldintegraali leidmiseks teostame asenduse $z = \frac{y}{x}$, mille järel saame võrrandi

$$\left(\frac{1 - 3z^2}{z} - z\right) dx - x\, dz = 0 .$$

Eeldades, et $\frac{1 - 3z^2}{z} - z \neq 0$, saame muutujate eraldamisel ja integreerimisel üldintegraaliks

$$\ln|x| = \frac{1}{8} \ln|C| - \frac{1}{8} \ln\left|1 - 4z^2\right|$$

ehk

$$x^2 - 4y^2 = \frac{C}{x^6} .$$

Kuna antud diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu piirkonnas (seal, kus $z \neq 0$, s.o. $\frac{y}{x} \neq 0$) on võrrandi

$$\frac{1 - 3z^2}{z} - z = 0$$

lahenditeks $z = \pm \frac{1}{2}$, siis on funktsioonid $y = \frac{1}{2} x$ ja $y = \frac{1}{2} x$ samuti lähtevõrrandi lahenditeks. Ent mõlemad lahendid on tegelikult diferentsiaalvõrrandi erilahendid (missuguse konstandi C väärtuse korral me saame nad üldlahendi avaldisest?).

4. Homogeenseteks taanduvad diferentsiaalvõrrandid. Vaatleme võrrandeid

$$(ax + by + c)\,dx - (a_1x + b_1y + c_1)\,dy = 0 \qquad (2.24)$$

ja

$$f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) dx - dy = 0, \qquad (2.25)$$

mis esinevad sageli kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

ja vastavalt

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

Samas eeldame, et vähemalt üks konstantidest c või c_1 on nullist erinev, sest vastasel juhul oleks tegemist homogeensete diferentsiaalvõrranditega.

Osutub, et kui konstandid a, b, a_1 ja b_1 võrrandites (2.24) ja (2.25) rahuldavad võrratust

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1},$$

taanduvad mõlemad diferentsiaalvõrrandid homogeenseteks. Selleks tuleb võrrandites (2.24) ja (2.25) teostada asendus

$$\begin{aligned} x &= \xi + \alpha, \\ y &= \eta + \beta, \end{aligned} \qquad (2.26)$$

kus α ja β on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0\,, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0\,. \end{cases}$$

Asenduse tulemuseks on muutujate ξ ja η suhtes homogeensed võrrandid

$$(a\xi + b\eta)\, d\xi - (\xi a_1 + b_1\eta)\, d\eta = 0$$

ja

$$f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) d\xi - d\eta = 0$$

ehk

$$\left(a + b\frac{\eta}{\xi} \right) d\xi - \left(a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}\right) d\eta = 0 \qquad (2.27)$$

ja

$$f\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}\right) d\xi - d\eta = 0\,. \qquad (2.28)$$

Artikli 3 tulemuste põhjal võime nüüd väita, et võrrand (2.27), s.o. ka (2.24), on integreeruv, sest funktsioonid $a + bz$ ja $-(a_1 + b_1z)$ on pidevad. Võrrandi (2.28), s.o. ka (2.25), integreeruvus on kindlustatud seal, kus funktsioon $f\left(\frac{a + bz}{a_1 + b_1z}\right)$ on pidev (näita seda !). Võrrandite (2.27) ja (2.28) integreerimine viiakse läbi asendusega $\eta = z\xi$.

Ent kui konstandid a, b, a_1 ja b_1 on võrdelised, nii et $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, taanduvad diferentsiaalvõrrandid (2.24) ja (2.25) eralduvate muutujatega võrranditeks. Selleks tuleb neis teostada asendus $a_1x + b_1y = t$. Kui seejuures tähistame suhte $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$, siis jõuame võrranditeni

$$\left(b_1 \frac{kt + c}{t + c_1} + a \right) dx - dt = 0$$

ja

$$\left[b_1 f \left(\frac{kt + c}{t + c_1} \right) + a_1 \right] dx - dt = 0 .$$

Saadud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrranditest on esimene integreeruv seal (vt. artiklit 2), kus $t + c_1 \neq 0$ ja teine - seal, kus $f \left(\frac{kt + c}{t + c_1} \right)$ on pidev.

Öeldu selgituseks vaatleme järgmist näidet.

<u>Näide 7.</u> Võrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x + 5}{2y - x + 7}$$

lahendamiseks valime lineaarteisendust

$$x = \xi + \alpha ,$$

$$y = \eta + \beta$$

määravad arvud α ja β nii, et

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + 5 = 0, \\ -\alpha + 2\beta + 7 = 0. \end{cases}$$

Seega teostame asenduse valemite $x = \xi + 1$ ja $y = \eta - 3$ põhjal ja saame homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - 2\xi}{2\eta - \xi} .$$

Selles homogeenses võrrandis viime läbi asenduse $\eta = z\xi$, mis toob meid eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dz}{d\xi}\xi = \frac{2z - 2z^2 - 2}{2z - 1}$$

juurde. Muutujaid eraldades ja integreerides näeme, et viimase võrrandi üldintegraaliks on

$$z^2 - z + 1 = \frac{C}{\xi^2}.$$

Avaldades lõpuks z muutujate x ja y ning ξ muutuja x kaudu, leiame vaadeldava diferentsiaalvõrrandi üldintegraali:

$$(y + 3)^2 - (y + 3)(x + 1) + (x - 1)^2 = C.$$

5. Integreeruvustegur. Vaatleme võrrandit

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \qquad (2.29)$$

mis pole eksaktne, kuid mille kohta eeldame, et ta on piirkonnas D integreeruv. Kuna võrrand (2.29) pole eksaktne, ei kehti piirkonnas D samasus

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

ja pole ka funktsiooni, mille täisdiferentsiaaliks oleks diferentsiaalavaldis

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy. \qquad (2.30)$$

Eespool nägime, et eksaktsete diferentsiaalvõrrandite integreerimine on teostatav kvadratuurides.[7] Seega pakub huvi järgmine küsimus: kas mitteektsaktsed diferentsiaalvõrran-

---

[7] Kui diferentsiaalvõrrandi lahendamine on viidud kuni integreerimiseni, öeldakse, et lahend on antud kvadratuurides.

did on teisendatavad eksaktseteks?

Näitame, et võrrandi

$$\left(3\frac{x^2}{y} + 6yx\right)dx + (6x^2 + 4y^2)\,dy = 0 \qquad (2.31)$$

puhul on see teostatav.

Antud juhul on

$$M(x,y) = 3\frac{x^2}{y} + 6xy\,; \qquad M'_y(x,y) = -\frac{3x^2}{y^2} + 6x\,;$$

$$N(x,y) = 6x^2 + 4y^2\,; \qquad N'_x(x,y) = 12x$$

ja $M'_y \neq N'_x$. Ent kui korrutada võrrandi mõlemaid pooli suurusega y saame

$$\bar{M}(x,y) = 3x^2 + 6y^2x, \qquad \bar{M}'_y(x,y) = 12\,yx,$$

$$\bar{N}(x,y) = 6x^2y + 4y^3, \qquad \bar{N}'_x(x,y) = 12\,xy$$

ning s a a d u d e k s a k t s e diferentsiaalvõrrandi integreerimine annab

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C\,.$$

Üldiselt saab näidata, et i g a i n t e g r e e r u v d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d (2.29) o n t e a t u d e e l d u s t e l f u n k t s i o o n i d e $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ k o h t a t e i s e n d a t a v e k s a k t s e k s d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i k s. Seoses sellega toome sisse järgmise mõiste.

Öeldakse, et funktsioon $\mu(x,y)$ on avaldise (2.30) integreeruvustegur ehk Euleri multiplikaator, kui peale korrutamist funtsiooniga $\mu(x,y)$ muutub avaldis (2.30) täisdiferentsiaaliks.

Nii kerkib meie ette esimest järku diferentsiaalvõrrandite lihtsana näiv üldine lahendamise meetod. Selle kohaselt 1) tuleb leida diferentsiaalvõrrandi integreeruvustegur, 2) muuta võrrand integreeruvusteguriga korrutamise teel eksaktseks ja 3) leida eksaktse võrrandi üldintegraal tuntud viisil.

Märkus 8. Võrrandi (2.29) korrutamisel teguriga $\mu(x,y)$ peab silmas pidama võõrlahendite tekkimise võimalust. Võõrlahenditeks võivad olla funktsiooni $\mu(x,y)$ niisugused tegurid, mis muudavad ta nulliks.

Meie esmaseks ülesandeks on seega leida eeskiri integreeruvusteguri leidmiseks. Selleks lähtume eeldusest, et diferentsiaalvõrrandil (2.29) on olemas integreeruvustegur. Sel juhul peab olema avaldis

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy$$

vastavalt integreeruvusteguri definitsioonile täisdiferentsiaal ning teoreemi 3 kohaselt peab kehtima samasus

$$(\mu M)'_y = (\mu N)'_x$$

piirkonnas, kus μ, M, N, $(\mu M)'_y$ ja $(\mu N)'_x$ on pidevad funktsioonid (kui niisugust piirkonda pole, mida võime öelda siis integreeruvusteguri olemasolu kohta?).

Arvutades viimases samasuses esinevad osatuletised ja rühmitades liikmeid, saame

$$\mu'_y M - \mu'_x N = \mu(N'_x - M'_y) . \qquad (2.32)$$

Leitud võrrand on otsitava funktsiooni $\mu(x,y)$ jaoks osatuletistega diferentsiaalvõrrand ega tarvitse alati lihtsalt lahenduda.

Seega pole üldjuhul ülalkirjeldatud üldine meetod diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks ratsionaalne. Teatud erijuhtudel viib ta siiski kiiresti sihile.

Vaatleme järgmisi juhte.

1° Integreeruvustegur on ainult muutuja y funktsioon, s.o. $\mu(y)$ -tüüpi integreeruvustegur. Sel juhul tuleb lahendada järgmised küsimused.

Missuguseid tingimusi peavad rahuldama funktsioonid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ selleks, et avaldisel (2.30) oleks $\mu(y)$-tüüpi integreeruvustegur ?

Missuguseks taandub diferentsiaalvõrrand (2.32) sel juhul ?

Küsimuste lahendamiseks vaatleme võrrandit (2.32) kujul

$$(\ln|\mu|)'_y M - (\ln|\mu|)'_x N = N'_x - M'_y . \qquad (2.33)$$

Kui avaldise (2.30) integreeruvustegur sõltuks ainult muutujast y , kehtiks samasus

$$(\ln|\mu|)'_x = 0$$

ja võrrand (2.33) taanduks harilikuks diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d\ \ln|\mu|}{dy} = \frac{N'_x - M'_y}{M} . \qquad (2.34)$$

Viimasest järeldub, et a) kõne all olev juht saab esineda siis, kui funktsioon

$$\frac{N'_x - M'_y}{M}$$

on ühe muutuja y funktsioon või selle erijuht – konstant ; b) diferentsiaalvõrrand (2.32) taandub niisugusel juhul võrrandiks (2.34).

2° I n t e g r e e r u v u s t e g u r o n a i n u l t m u u t u j a x f u n k t s i o o n , s.o. $\mu(x)$ -tüüpi integreeruvustegur. Küsimused, analoogilised küsimustega a ja b , lahenda iseseisvalt ja jäta meelde, et võrrand (2.32) taandub siin võrrandiks

$$\frac{d\ \ln|\mu|}{dx} = \frac{M'_y - N'_x}{N} . \qquad (2.35)$$

3° I n t e g r e e r u v u s t e g u r o n s u v a l i s e e t t e a n t u d f u n k t s i o o n i $\omega(x,y)$ f u n k t s i o o n, s.o. $\mu(\omega(x,y))$ -tüüpi integreeruvustegur. Püstitame jälle analoogilised küsimused a ja b .

Kui avaldise (2.30) integreeruvustegur oleks tüüpi $\mu(\omega(x,y))$, s.o. tüüpi $\mu(\omega)$, kus $\omega = \omega(x,y)$, siis

$$(\ln|\mu|)'_y = \frac{d\ \ln|\mu(\omega)|}{d\omega}\ \omega'_y(x,y)$$

ja

$$(\ln|\mu|)'_x = \frac{d\ \ln|\mu(\omega)|}{d\ \omega}\ \omega'_x(x,y)$$

ning võrrand (2.33) taanduks võrrandiks

$$\frac{d \ln|\mu(\omega)|}{d\omega} = \frac{N'_x - M'_y}{\omega'_y(x,y)\cdot M - \omega'_x(x,y)\cdot N} . \qquad (2.36)$$

Siit järeldub, et a) kõne all oleval juhul peab funktsioon

$$\frac{N'_x - M'_y}{\omega'_y(x,y) \cdot M - \omega'_x(x,y) \cdot N} \qquad (2.37)$$

olema abimuutuja ω funktsioon või selle erijuht - konstant; b) diferentsiaalvõrrand (2.32) taandub võrrandiks

$$\frac{d \ln|\mu(\omega)|}{d\omega} = \tau(\omega) ,$$

kus $\tau(\omega)$ on murd (2.37) ja $\omega = \omega(x,y)$. Viimase juhu 3° sageli esinevateks erijuhtudeks on integreeruvustegurid tüüpi $\mu(xy)$, $\mu(x \pm y)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(\frac{x}{y})$; kus $\omega(x,y)$ on vastavalt xy, $x \pm y$, $x^2 \pm y^2$ ja $\frac{x}{y}$. Pole raske näha , et näiteks juhul $\omega(x,y) = xy$, muutub võrrand (2.36) järgmiseks

$$\frac{d \ln|\mu(\omega)|}{d\omega} = \frac{N'_x - M'_y}{xM - yN} . \qquad (2.38)$$

Võrrandite lahendamist kirjeldatud meetodil illustreerime järgmiste näidetega.

Näide 8. Vaatleme uuesti võrrandit (2.31) ja näitame, et tema integreeruvusteguriks on $\mu(y) = y$.

$\mu(y)$ - tüüpi integreeruvusteguri olemasoluks tarvilik tingimus ütles, et

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \tau(y)$$

Koostame avaldise

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \frac{12x - 6x + 3\frac{x^2}{y^2}}{3\frac{x^2}{y} + 6xy} = \frac{6x + 3\frac{x^2}{y^2}}{6xy + 3\frac{x^2}{y}} = \frac{1}{y}\,.$$

Tingimus on täidetud. Seejärel otsime integreeruvustegurit võrrandist (2.34), s.o. võrrandist

$$\frac{d\ln|\mu(y)|}{dy} = \frac{1}{y}\,,$$

ja näeme, et $\mu(y) = Cy$.

Et meid huvitab ainult üks integreeruvustegur, valime $C = 1$ ning leiamegi $\mu(y) = y$.

Näide 9. Näidata, et diferentsiaalvõrrandil

$$(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0 \qquad (2.39)$$

on $\mu(xy)$ tüüpi integreeruvustegur ja lahendada võrrand.

Selle näitamiseks arvestame, et

$$M(x,y) = 2xy^2 - y \quad \text{ja } M'_y = 4xy - 1\,,$$
$$N(x,y) = x \quad \text{ja } N'_x = 1\,,$$

ning koostame võrrandis (2.38) esineva avaldise

$$\frac{N'_x - M'_y}{xM - yN} = \frac{2 - 4xy}{2x^2y^2 - 2xy} = \frac{1 - 2xy}{(xy)^2 - xy}\,,$$

millest selgubki, et antud võrrandil on $\mu(xy)$-tüüpi integreeruvustegur. Selle võrrandiks on, vastavalt võrrandile (2.38)

$$\frac{d \ln|\mu(\omega)|}{d\omega} = \frac{1 - 2\omega}{\omega^2 - \omega}\,.$$

Integreerides leiame, et $\mu(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega}$ ja integreeruvusteguriks on

$$\mu(xy) = \frac{1}{(xy)^2 - xy}\,.$$

Korrutades nüüd võrrandit (2.39) leitud teguriga, saame eksaktse võrrandi

$$\frac{2xy^2 - y}{x^2y^2 - xy}\,dx + \frac{x}{x^2y^2 - xy}\,dy = 0\,.$$

(Kontrolli, kas võrrand on eksaktne !)

Kvadratuurides avaldub üldintegraal teoreemi 4 põhjal kujul

$$\int_{x_0}^{x} \frac{2\,xy - 1}{x^2y - x}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x_0y^2 - y}\,dy = C_1\,.$$

Arvutades saame üldintegraaliks

$$x^2y - x = Cy\,.$$

6. <u>Lineaarne diferentsiaalvõrrand</u>. Olgu funktsioonid $P(x)$ ja $Q(x)$ määratud vahemikus (a,b). Võrrandit

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \tag{2.40}$$

nimetatakse <u>üldiseks esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks</u>. Erijuhul võivad funktsioonid $P(x)$ ja $Q(x)$ olla konstandid. Võrrand (2.40) on l i n e a a r n e otsitava f u n k t s i o o n i ja tema t u l e t i s e suht e s.

Kui iga $x \in (a,b)$ korral on $Q(x) = 0$, kannab võrrand <u>homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi</u> nimetust. Selleks on

$$y' + P(x)y = 0 . \qquad (2.41)$$

Võrrandit (2.41) nimetatakse võrrandile (2.40) vastavaks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Selgitame küsimuse võrrandite (2.40) ja (2.41) lahenduvusest.

Asudes mittehomogeense võrrandi (2.40) lahendi olemasolu selgitamisele, teisendame võrrandi kujule

$$\left[P(x)y - Q(x)\right] dx + dy = 0 , \qquad (2.42)$$

millest selgub, et võrrand pole eksaktne (näita seda !) . Võrrandi lahenduvuse küsimuse selgitamiseks otsime talle integreeruvustegurit. Selleks arvutame funktsioonide $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$ ja $N(x,y) = 1$ osatuletised $M'_y = P(x)$ ja $N'_x = 0$. Siit järeldub vahetult, et lineaarse diferentsiaalvõrrandi integreeruvustegur on tüüpi $\mu(x)$ ning seega määratud võrrandiga (2.35), nii et

$$\frac{d \ln |\mu(x)|}{dx} = \frac{P(x)}{1} .$$

Integreerides leiame, et integreeruvusteguriks on funktsioon

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx} .$$

Korrutades võrrandit (2.42) leitud teguriga, saame juba eksaktse diferentsiaalvõrrandi

$$e^{\int P(x)dx}\left[P(x)y - Q(x)\right] dx + e^{\int P(x)dx} dy = 0, \qquad (2.43)$$

kusjuures korrutamine teguriga $e^{\int P(x)dx}$ ei too võrrandile (2.42) juurde uusi lahendeid (miks?). Nii on võrrandite (2.42) (ka (2.40)) ja (2.43) lahendamise ülesanded samaväärsed. Võrrandi (2.43) kui eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu tingimused ja üldlahend on antud teoreemiga 4. Kui nõuda, et funktsioonid P(x) ja Q(x) oleksid pidevad vahemikus (a,b), on teoreemi 4 eeldused 1°,2° ja 3° täidetud ribas $R = \{a < x < b;\ -\infty < y < \infty\}$ (näita seda !) ning seega võrrandi (2.42), s.o. ka (2.40) üldlahend määratud vahemikus (a,b) võrrandiga

$$\int_{x_0}^{x} e^{\varphi(x)}\left[P(x)y - Q(x)\right] dx + \int_{y_0}^{y} e^{\varphi(x_0)} dy = C_1, \qquad (2.44)$$

kus $\varphi(x) = \int P(x)dx$ ja $(x_0, y_0) \in R$. Tulemuse lihtsustamiseks arvutame

$$1)\ y \int_{x_0}^{x} e^{\varphi(x)} P(x)dx = y \int_{x_0}^{x} d\left[e^{\varphi(x)}\right] =$$

$$= y\, e^{\varphi(x)} - y\, e^{\varphi(x_0)};$$

$$2)\ \int_{y_0}^{y} e^{\varphi(x_0)} dy = y\, e^{\varphi(x_0)} - y_0\, e^{\varphi(x_0)}$$

ja arvestame, et

$$3) \ -\int e^{\varphi(x)} Q(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} e^{\varphi(x)} Q(x)\,dx + C_2 \ .$$

Leitud integraalide asendamisel võrrandisse (2.44) saame, et

$$y\,e^{\int P(x)\,dx} - \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx = C \ ,$$

kus $C = C_1 + C_2 + y_0\,e^{\varphi(x_0)}$ on suvaline konstant.

<u>Märkus 9</u>. Konstandi C niisugune valik tähendab sisuliselt seda, et saadud võrduses esinevates integraalides on suvalised konstandid võetud nulliks.

Siit avaldame otsitava y ning jõuame mittehomogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi tuntud avaldise juurde

$$y = C\,e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx. \quad (2.45)$$

Sellega oleme tõestanud üldise lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendi alljärgneva olemasolu teoreemi ja leidnud üldlahendi, mis on vahemikus (a,b) pidev ja diferentseeruv funktsioon (näita seda !).

<u>Teoreem 6</u>. Üldine lineaarne diferentsiaalvõrrand (2.40) on integreeruv vahemikus (a,b) selles vahemikus mistahes pidevate funktsioonide $P(x)$ ja $Q(x)$ korral. Võrrandi üldlahend on valemiga (2.45) antud pidev ja diferentseeruv funktsioon.

Võrrandile (2.40) vastava homogeense võrrandi (2.41) lahendi leidmise puhul võime vaadelda teda erijuhuna üldjuhust, kus $Q(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ korral. Kuna konstantne funktsioon on pidev ja $\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx$ sel erijuhul on konstant, siis järeldub valemist (2.45), et homogeense diferentsiaalvõrrandi (2.41) üldlahendiks on funktsioon

$$y = C\, e^{-\int P(x)\, dx} . \qquad (2.46)$$

Seega järelduseks teoreemist 6 on järgmine tulemus.

Teoreem 7. Homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand (2.41) on integreeruv vahemikus (a,b) selles vahemikus pideva funktsiooni P(x) korral. Võrrandi üldlahend on valemiga (2.46) antud pidev funktsioon.

Avaldisest (2.45) selgub, et lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend on kahe liidetava summa. Nimelt $y = y_1 + y_2$, kus

$$y_1 = C\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

ja

$$y_2 = e^{-\int P(x)\, dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx.$$

Seejuures on y_1 võrrandile (2.40) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi (2.41) üldlahend, kuna y_2 on võrrandi (2.40) erilahend (miks võime seda väita?).

Harjutuseks ja materjali kindlamaks omandamiseks tõestada iseseisvalt järgmised teoreemid.

Teoreem A. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi (2.40) üldlahend on vastava homogeense võrrandi (2.41) üldlahendi y_1 ja võrrandi (2.41) mistahes erilahendi summa.

Teoreem B. Kui y^* on lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (2.41) üks erilahend, siis $y = Cy^*$ on selle võrrandi üldlahend.

Teoreem C. Kui y_1 ja y_2 on mittehomogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi (2.40) kaks erilahendit, avaldub tema üldlahend kujul

$$y = C\,(y_1 - y_2) + y_1 .$$

(Teoreemi C tõestamisel tugineda teoreemidele A ja B).

Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks on tuntud kolm meetodit, millest üks esineb valemi (2.45) rakendamises. Illustreerime seda näitega.

Näide 10. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

üldlahendi leidmiseks arvestame, et $P(x) = \cos x$ ja $Q(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, ning arvutame

$$\int P(x)\,dx = \sin x + c_1$$

$$\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx =$$

$$= \sin x .\ e^{\sin x} - e^{\sin x} + C_2 .$$

Arvestades märkust 9 valemi (2.45) integreerimiskonstantide kohta, saame valemi (2.45) kohaselt, et

$$y = C\,e^{-\sin x} + e^{-\sin x}\left[\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x}\right]$$

ehk

$$y = C\,e^{-\sin x} + \sin x - 1 .$$

Teine meetod mittehomogeensete lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks on Lagrange'i (nn. konstandi varieerimise) meetod, mis oma olemuselt on järgmine.

Võrrandi (2.40) lahendamisel:

1) l e i t a k s e   v a s t a v a   h o m o g e e n s e   d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i (2.41) ü l d l a h e n d, mis määratud valemiga (2.46) ;

2) o t s i t a k s e   niisugust   f u n k t s i o o n i $C(x)$, et vastava homogeense võrrandi lahendi avaldises esineva konstandi C asendamisel funktsiooniga $C(x)$ saaksime diferentsiaalvõrrandi (2.40) lahendi. Selleks

a) n õ u a m e, et $y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$ r a h u l d a k s   v õ r r a n d i t (2.40); asendades sellesse saame

$C'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$, mis on otsitava funktsiooni $C(x)$ suhtes diferentsiaalvõrrand;

b) leitud võrrand lahendatakse ja leitakse

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C_1;$$

c) funktsiooni $C(x)$ asendamisel valemisse (2.46) saamegi meile tuntud valemi (2.45).

Meetod on sageli kasutatav tema lihtsuse tõttu.

Näide 11. Leida lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi $y' + ay = b$ üldlahend.

Ülesande lahendame Lagrange'i meetodil:

1) leiame $y' + ay = 0$ üldlahendi $y = C\, e^{-ax}$;

2) otsime funktsiooni $C(x)$ nii, et $C(x)\, e^{-ax}$ oleks lähtevõrrandi lahend; sellesse asendamisel saame:

$$C'(x)\, e^{-ax} - C(x).\, a\, e^{-ax} + a\, C(x)\, e^{-ax} = b\ ,$$

$$d\,C(x) = be^{ax}\,dx$$

ja

$$C(x) = \frac{b}{a}\,e^{ax} + C_1\,;$$

3) võrrandi $y' + ay = b$ üldlahendiks on seega

$$y = C_1\,e^{-ax} + \frac{b}{a}\,.$$

Kolmanda meetodiga tutvu põhiõpikus [1] !

7. <u>Lineaarseteks taanduvad diferentsiaalvõrrandid</u>. Lineaarseteks taanduvatest diferentsiaalvõrranditest vaatleme lühidalt kahte liiki võrrandeid - Bernoulli ja Riccati võrrandeid.

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \qquad (n \neq 0,1), \tag{2.47}$$

kus funktsioonid $P(x)$ ja $Q(x)$ on määratud vahemikus (a,b). (Miks pole mõtet vaadelda juhte $n = 0$ ja $n = 1$?) Väidame, et diferentsiaalvõrrand (2.47) on lahenduv, kui $P(x)$ ja $Q(x)$ on vahemikus (a,b) pidevad funktsioonid. Selles veendume, kui teisendame võrrandi (2.47) kujule (eeldades, et $y \neq 0$)

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\,\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)\,.$$

Peale asendust $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ saame otsitava z suhtes lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$z' + (1 - n)\,P(x)\,z = (1 - n)\,Q(x), \tag{2.48}$$

millest nähtubki (vt. teoreem 6), et funktsioonide $P(x)$ ja

$Q(x)$ pidevuse korral on võrrand (2.48) integreeruv kui lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Riccati diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \qquad (2.49)$$

kus funktsioonid $P(x)$, $Q(x)$ ja $R(x)$ on määratud vahemikus (a,b). Erinevalt Bernoulli võrrandist ei saa üldjuhul väita, et Riccati võrrand taanduks lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks.

Teatud erijuhtudel on see siiski teostatav.

Kui näiteks y^* on võrrandi (2.49) üks erilahend, siis teiseneb ta asendusega $y = y^* + z$ Bernoulli võrrandiks muutuja z suhtes. Viimane teiseneb omakorda lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks. Öeldu kinnituseks teostame võrrandis (2.49) asenduse $y = y^* + z$. Tulemuseks on võrrand

$$(y^*)' + P(x)\,y^* + Q(x)\,(y^*)^2 + 2Q(x)\,y^*z +$$
$$+ Q(x)\,z^2 + z' + P(x)\,z = R(x),$$

mis samasuse

$$(y^*)' + P(x)\,y^* + Q(x)(y^*)^2 = R(x) \quad , \quad x \in (a,b),$$

tõttu taandub võrrandiks

$$z' + [P(x) + 2Q(x)\,y^*]\,z = - Q(x)\,z^2.$$

Viimane on otsitava z suhtes Bernoulli diferentsiaalvõrrand ja on vahemikus (a,b) pidevate $P(x)$ ja $Q(x)$ korral integreeruv kui Bernoulli võrrand.

Riccati diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks tuleks seega leida võrrandi (2.49) üks erilahend y^* ja teisendada ta asendusega $y = y^* + z$ Bernoulli võrrandiks. Erilahendi leidmist teostatakse tavaliselt m ä ä r a m a t u t e k o r d a j a t e m e e t o d i l , millega tutvume näite varal.

Näide 12. Otsides erilahendit Riccati võrrandile

$$y' - y + 2y^2 = 2e^{2x}$$

paneme tähele, et pärast võrrandi vasakul poolel ettenähtud tehete teostamist otsitava funktsiooniga peame saama $2e^{2x}$. Pole raske taibata, et otsitav funktsioon saab olla eksponentfunktsioon tüüpi $y^* = ae^x$. Tundmatu kordaja a määrame y^* asendamisel võrrandisse. Vajalikke tehteid teostades ja võrrandisse asendades saame

$$ae^x - ae^x + 2a^2 e^{2x} = 2 e^{2x},$$

millest järeldub, et $a = \pm 1$ ja otsitavaks erilahendiks on näiteks $y^* = e^x$.

Teostades nüüd asenduse $y = e^x + z$, saame järgmise Bernoulli võrrandi

$$z' + z(4e^x - 1) = -2z^2.$$

Eeldades, et $z \neq 0$ (selle eeldusega ei lähe kaduma lähtevõrrandi lahendeid, sest me saaksime siis erilahendi $y^* = e^x$), teisendame viimase võrrandi kujule

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1 - 4e^x}{z} = 2,$$

milles teostame asenduse $\frac{1}{z} = u$. Tulemuseks on lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$u' + (1 - 4e^x)u = 2$$

üldlahendiga

$$u = C e^{4e^x - x} - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

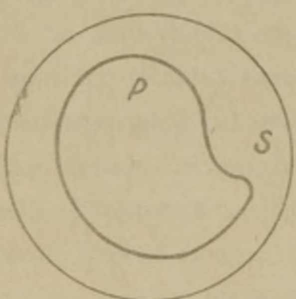
Lähtevõrrandi üldlahendiks on seega

$$y = e^x + \frac{e^x}{C e^{4e^x} - \frac{1}{2}} .$$

§ 3. LAHENDI OLEMASOLU JA ÜHESUS.

Eelmises paragrahvis vaatlesime mõningaid esimest järku diferentsiaalvõrrandeid. Meie peamiseks sihiks seal oli lahendite avaldamine kvadratuurides. Samas leidsime ka tingimused, mis garanteerisid lahendi olemasolu, kuid seda tuli teha iga diferentsiaalvõrrandite klassi korral eraldi. Ajalooliselt diferentsiaalvõrrandite teooria esimeseks ülesandeks oligi lahendite leidmine kvadratuurides. Hiljem selgus, et praktikas esineb diferentsiaalvõrrandeid, mis ei lahendu kvadratuurides, kuid funktsioone, mis olid määratud niisuguste diferentsiaalvõrranditega, tuli kasutada, seega ka igakülgselt uurida. Nii kerkis üles vajadus 1) uurida mistahes diferentsiaalvõrrandi lahenduvuse küsimust, s.o. – lahendi olemasolu; 2) uurida, mitu diferentsiaalvõrrandi integraalkõverat läbib punkti (x_0, $y(x_0)$), s.o. – lahendi ühesuse küsimust ; 3) uurida lahendite funktsionaalseid omadusi lahendeid teadmata; 4) arvutada lahendeid ligikaudu. Käesoleva paragrahvi pühendame loetletuist esimesele kahele küsimusele. Neile küsimustele on pühendatud mitmete autorite tööd. Esimene olemasolu teoreemidest kuulub Cauchy'le, kelle klassikalise teoreemi anname alljärgnevas mõnevõrra üldistatud kujul.

1. <u>Abiteoreemid ja mõisted</u>. Käesolevas paragrahvis vaatlusele tulevad piirkonnad on kõik ü h e l i s i d u s a d t a s a n d i l i s e d p i i r k o n n a d . Samuti eeldame, et kõik piirkonnad on <u>kumerad y suhtes.</u>[8] Loeme teadaolevaks faktiks, et iga t õ k e s t a t u d p i i r k o n n a P k o r r a l leidub niisugune ring S , et piirkond $P \subset S$ (vt. joonis 6) .



Joon. 6.

Üheks oluliseks tingimuseks, mida olemasolu teoreemides rahuldavad vaatlusel olevad funktsioonid, on antud Lipschitzi poolt ja siit tuleneb ka selle tingimuse nimetus.

Olgu funktsioon $z = f(x,y)$ määratud piirkonnas P. Öeldakse, et $z = f(x,y)$ <u>rahuldab piirkonnas P muutuja y suhtes Lipschitzi tingimust</u>, kui leidub niisugune positiivne arv N, et iga paari $(x,y_1) \in P$,

[8] Öeldakse, et piirkond P on kumer y suhtes, kui y-teljega paralleelne lõik AB , kus punktid $A,B \in P$ asub tervelt piirkonnas P .

$(x,y_2) \in P$ korral kehtib võrratus

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq N|y_1 - y_2|.$$

N ä i t a, et kui $f'_y(x,y)$ on piirkonnas P tõkestatud, siis funktsiooni $f(x,y)$ rahuldab piirkonnas P Lipschitzi tingimust.

Lipschitzi tingimuse mõistega on seotud järgmine, meile vajalik lemma.

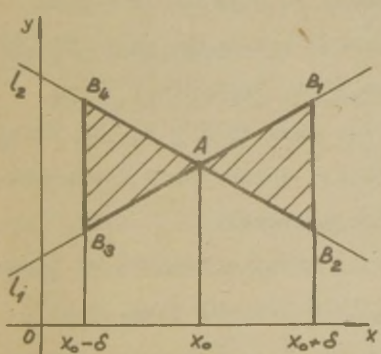
Lemma 2. Kui funktsioon $z = f(x,y)$ on piirkonnas P pidev argumendi x suhtes ja rahuldab y suhtes Lipschitzi tingimust, siis on ta piirkonnas P pidev funktsioon.

Tõesta lemma iseseisvalt, arvestades, et

$$f(x,y) - f(x_1,y_1) = [f(x,y) - f(x,y_1)] + [f(x,y_1) - f(x_1,y_1)].$$

Kummagi liidetava absoluutväärtuse hindamiseks kasuta ühte kahest eeldusest.

Olgu antud punkt $A(x_0,y_0)$ (vt. joon.7) ja positiivne arv K. Läbigu punkti A sirged l_1 ja l_2 tõusudega K ja $-K$ vastavalt. Sirgel l_1 valime punkti B_1, mille peegeldame tsentraalprojektsiooniga punktiks B_3. Saadud punktidest tõmbame sirglõigud rööbiti y-teljega kuni lõikumiseni sirgega l_2 punktides B_2 ja B_4 vastavalt. Kahest kongruentsest kolmnurgast koosnevat kinnist piir-



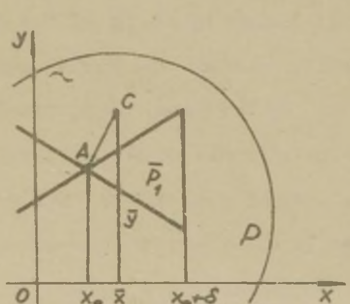
Joon. 7.

konda[9] $AB_1B_2AB_4B_3A$ nimetame edaspidi p u n k t i g a A ja t õ u s u g a K määratud liblikakujuliseks piirkonnaks. Lõiku $J = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ nimetame liblikakujulise piirkonna projektsiooniks. Alljärgnev lemma 3 näitab, et diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ lahend, mis läbib punkti A, paikneb just liblikakujulises piirkonnas, kui $f(x,y)$ rahuldab teatud tingimusi.

Lemma 3. Olgu 1) $f(x,y)$ piirkonnas P pidev ja arvuga K tõkestatud funktsioon; 2) piirkond $\bar{P}_1 \subseteq P$ punktiga (x_0, y_0) ja tõusuga K määratud liblikakujuline piirkond projektsiooniga $J = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ ja 3) $y = Y(x)$ algtingimust $Y(x_0) = y_0$ rahuldav diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ lahend.

Tehtud eeldustel kuulub integraalkõvera $y = Y(x)$ iga punkt $(x, Y(x))$ piirkonda $\bar{P}_1$, kui $x \in J$.

T õ e s t u s. Üldisust kitsendamata eeldame, et $(x, Y(x)) \in P$, kui $x \in J$ ja oletame, et kõveral $y = Y(x)$ leidub niisugune punkt $C(\bar{x}, \bar{y})$, et $\bar{x} \in J$, kuid $C(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\in} \bar{P}_1$. Olgu näiteks $\bar{x} > x_0$ ja $\bar{y} > y_0$ (teisi juhte vaadeldakse analoogiliselt).



Joon.8.

Tehtud eeldustel on lõigu AC (vt. joon.8) tõus

$$\frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0} > K. \qquad (3.1)$$

[9] Kinnise piirkonna $\bar{G}$ all mõistetakse piirkonda koos oma rajajoonega.

Kuid teiselt poolt leidub punkte A ja C läbival integraalkõveral $y = Y(x)$ niisugune punkt $\xi \in (x_0, \bar{x})$, et

$$\frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0} = Y'(\xi).$$

Kuna $\xi \in J$, peab $|Y'(\xi)| = |f(\xi, Y(\xi))| < K$, mis on vastuolus võrratusega (3.1). Sellega on lemma tõestatud.

Tutvume veel mõnede mõistetega.

Olgu J abstsisstelje mingi lõik, $x_0 \in J$ ja Y_0 – mingi arv.

Võrrandit

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \qquad (3.2)$$

kus $y(x)$ on otsitav funktsioon ja $x \in J$, nimetatakse <u>integraalvõrrandiks</u>.

Funktsioon $\bar{y}(x)$ on integraalvõrrandi (3.2) lahendiks piirkonnas J, kui

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \bar{y}(t))\, dt$$

iga $x \in J$ korral.

Vaatleme näiteks integraalvõrrandit

$$y(x) = 1 + \int_{0}^{x} [t - y(t)]\, dt,$$

kus $x \in (-\infty, \infty)$. näita, et funktsioon $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$ on selle võrrandi lahend.

<u>Teoreem 8</u>. Olgu 1) piirkond J x-telje lõik, $x_0 \in J$, y_0 – fikseeritud konstant ja 2) $f(x, y(x))$ pidev piirkonnas J eeldusel, et $y(x)$ on samas piirkonnas pidev. Selleks, et piirkonnas J pidev funktsioon $\bar{y}(x)$ oleks diferentsiaalvõrran-

di

$$y' = f(x,y) \qquad (3.3)$$

algtingimust $\bar{y}(x_0) = y_0$ rahuldav lahend on tarvilik ja piisav, et $\bar{y}(x)$ oleks integraalvõrrandi

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y\,(t)dt \qquad (3.4)$$

pidev lahend piirkonnas J.

T õ e s t u s. Piisavuse näitamiseks eeldame, et $y=\bar{y}(x)$ on võrrandi (3.4) pidev lahend piirkonnas J , s.o.

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\bar{y}\,(t))\,dt \qquad (3.5)$$

iga $x \in J$ korral. Samasust (3.5) diferentseerides (miks on see lubatav?), saame

$$\bar{y}'(x) = f(x,\bar{y}\,(x)) \qquad (3.6)$$

iga $x \in J$ korral. Seega on $y = \bar{y}(x)$ diferentsiaalvõrrandi (3.3) lahend, mis rahuldab algtingimust $\bar{y}(x_0) = y_0$ (kust see selgub?).

Tarvilikkuse tõestamisel, tuginedes teoreemile 1, lähtu samasusest (3.6) ja näita, et kehtib samasus (3.5). (Kontrolli ka algtingimuse täidetust !).

Teoreemi 8 põhjal on algtingimusega diferentsiaalvõrrandi (3.3) ja integraalvõrrandi (3.4) lahendamise ülesanded samaväärsed ning olemasolu teoreemi tõestamisel lähtumegi sellest.

2. Põhiteoreem. Alljärgnev teoreem on eespool mainitud Cauchy olemasolu teoreemi üldistuseks.

<u>Teoreem 9</u>. Olgu tasandilises kinnises ja tõkestatud piirkonnas $\bar{P}$ funktsioon $f(x,y)$ pidev x suhtes ja rahuldagu ta y suhtes Lipschitzi tingimust.

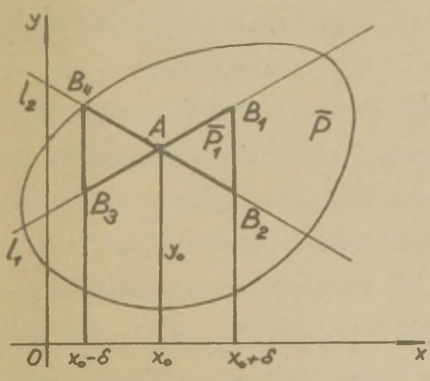
Piirkonna $\bar{P}$ mistahes seesmise punkti $A\ (x_0,y_0)$ korral leidub niisugune lõik $J=[x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta]$ $(\delta>0)$, millel eksisteerib parajasti üks algtingimust $y(x_0)=y_0$ rahuldav diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x,y)$$

lahend.

T õ e s t u s. Teoreemi 8 põhjal loeme teoreemi 9 tõestatuks, kui näitame, et tehtud eeldustel leidub lõigul J parajasti ü k s i n t e g r a a l v õ r r a n d i (3.4) n i i s u g u n e p i d e v l a h e n d $y=y(x)$, m i s r a h u l d a b t i n g i m u s t $y(x_0)=y_0$.

Lemma 2 ja teoreemi eelduste põhjal on funktsioon $f(x,y)$ piirkonnas $\bar{P}$ pidev, järelikult ka tõkestatud. Seega leidub niisugune konstant K, et $|f(x,y)|<K$ iga $(x,y)\in\bar{P}$ korral.



Joon.9.

Valime nüüd piirkonnas $\bar{P}$ mistahes seesmise punkti $A\ (x_0,y_0)$ ja vaatleme punktiga A ning tõusuga K määratud liblikakujulist piirkonda $\bar{P}_1$ projektsiooniga $J=[x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta]$. Sealjuures nõuame, et piirkonna $\bar{P}_1$ tipud (vt. joonist 9) B_1, B_2,

$B_3, B_4 \in \bar{P}$.

Edasi jagame tõestuse järgmiseks neljaks osaks.

1°. K o n s t r u e e r i m e niisuguse l ä h e n d i t e j a d a $\{\varphi_n(x)\}$, et kehtivad tingimused:

α) $\varphi_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ on määratud ja pidev lõigul J ;

β) $\varphi_n(x_0) = y_0$ $(n=0,1,2,\ldots)$;

γ) $(x, \varphi_n(x)) \in \bar{P}_1$ iga $n = 0,1,2\ldots$ ja $x \in J$ korral.

(Anna tingimustele α , β ja γ geomeetriline tõlgendus!).

Esimeseks lähendiks valime lõigul J defineeritud suvalise p i d e v a funktsiooni $\varphi_0(x)$ g r a a f i k u g a p i i r k o n n a s $\bar{P}_1$. Olgu näiteks $\varphi_0(x) = y_0$. Teise lähendi defineerime esimese abil nii, et

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt. \tag{3.6}$$

Seda protsessi jätkates jõuame jadani [10]

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{3.7}$$

Näitame induktsiooni teel, et jada (3.7) rahuldab tingimust α , β ja γ .

α. Funktsioon $\varphi_0(x)$ on määratud ja on pidev lõigul J , sest f $(t, \varphi_0(t))$ on seal pidev (põhjenda!); seega on ka funktsioon (3.6) pidev (põhjenda !).

Oletades, et $\varphi_{n-1}(x)$ on määratud ja pidev lõigul J , saame, nagu ennegi, et $\varphi_n(x)$ on määratud ja pidev lõigul J .

[10] Kirjeldatud lähendite jada konstrueerimise meetod integraalvõrrandi (3.4) lahendile kannab Picard'i iteratsioonimeetodi nime.

β. Et $\varphi_n(x_0) = y_0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$, on triviaalne.

γ. Näitame, et punkti $(x, \varphi_n(x))$ kaugus sirgest $y = y_0$ on iga $n = 0,1,2,\ldots$ ja $x \in J$ korral väiksem kui sirgel l_1 või l_2 asuva vastava punkti, s.o. $(x, y_0 \pm K(x-x_0))$ kaugus.

Punkti $(x, \varphi_1(x))$ korral on väide õige, sest

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt\right| \leqslant K\,|x - x_0|, \tag{3.8}$$

kuna $(t, y_0) \in \bar{P}_1$ ja $K\,|x - x_0|$ on sirgel l_1 või l_2 asuva vastava punkti kaugus sirgest $y = y_0$.

Oletame, et veel $(t, \varphi_{n-1}(t)) \in \bar{P}_1$, kui $t \in J$. Siis

$$|\varphi_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t)dt\right| \leqslant K\,|x - x_0|,$$

mida oligi vaja tõestada.

2° Näitame, et jada (3.7) koondub lõigul J. Selleks vaatleme rida

$$\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \ldots, \tag{3.9}$$

mille osasummade jada $S_n(x) = \varphi_n(x)$. Seega järeldub jada $\{\varphi_n(x)\}$ koonduvus lõigul J rea (3.9) koonduvusest samal lõigul. Rea (3.9) koonduvuse näitamiseks moodustame majorantrea, milleks hindame rea (3.9) liikmeid lõigul J. Seejuures kasutame võrratustes (3.8_1), (3.8_2), (3.8_3) ja järgnevates integraali aluse avaldise hindamisel nii vahetult eelnevat hinnangut, kui ka Lipschitzi tingimust, mis on lubatav, kuna 1° põhjal kõik punktid $(x, \varphi_n(x)) \in \bar{P}_1 \subset P$ iga $n = 0,1,2,\ldots$ ja $x \in J$ korral. Lähtume võrratusest (3.8), s.o.

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leq K|x - x_0|, \qquad (3.8_1)$$

ja hindame järgmisi vahesid

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_0(t))|\,dt\right| \leq \qquad (3.8_2)$$

$$\leq N\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|\,dt\right| \leq KN \frac{|x - x_0|^2}{2!};$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_2(t)) - f(t,\varphi_1(t))|\,dt\right| \leq \qquad (3.8_3)$$

$$\leq KN^2\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^2}{2!}\,dt\right| \leq \frac{KN^2}{3!}|x - x_0|^3.$$

Induktsiooni teel saame lõpuks, et

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq K \frac{N^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n.$$

Reale (3.9) majorandiks on niisiis rida

$$y_0 + K|x - x_0| + K\frac{N}{2!}|x - x_0|^2 + \ldots$$
$$\ldots + K\frac{N^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n + \ldots, \qquad (3.10)$$

mille teisendame reaks

$$y_0 + \frac{K}{N}\left[-1 + \left(1 + \frac{N|x-x_0|}{1!} + \frac{(N|x-x_0|)^2}{2!} + \ldots + \frac{(N|x-x_0|)^n}{n!} + \ldots\right)\right].$$

On teada, et piirkonnas $(-\infty, \infty)$ kehtib reaksarendus

$$e^{N(x-x_0)} = 1 + \frac{N(x-x_0)}{1!} + \frac{N^2(x - x_0)^2}{2!} + \ldots,$$

mis on absoluutselt ja ühtlaselt koonduv igal lõigul $[a,b] \in (-\infty,\infty)$. Siis on ka rida (3.10), seega ka rida (3.9) ja lõpuks jada $\{\varphi_n(x)\}$ ü h t l a s e l t koonduv lõigul J. Sellega on l õ i g u l J d e f i n e e r i t u d f u n k t s i o o n

$$\bar{y}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

mis on sellel l õ i g u l p i d e v jada $\{\varphi_n(x)\}$ ühtlase koonduvuse ja funktsioonide $\varphi_n(x)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ pidevuse tõttu lõigul J.

3°. Funktsioon $\bar{y}(x)$ o n v õ r r a n d i (3.4) seega ka diferentsiaalvõrrandi (3.3) l a h e n d i k s l õ i g u l J, kuna iga $x \in J$ korral on

$$\bar{y}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_{n-1}(t))dt \Big] =$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t,\varphi_{n-1}(t))\, dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\bar{y}(t))dt.$$

(Miks on võrdustes teostatud piirile üleminekud lubatud?)

Selles, et algtingimus on täidetud, veendu viimase võrduse põhjal ise.

Sellega on l a h e n d i o l e m a s o l u p i i r k o n n a s J näidatud.

4° Näitame, et l õ i g u l J o n diferentsiaalvõrrandil (3.3) a i n u l t $\bar{y}(x)$ n i i s u g u n e l a h e n d , m i s r a h u l d a b t i n g i m u s t $\bar{y}(x_0) = y_0$.

Väite vastaselt oletame, et lõigul J on veel lahend

$y^*(x)$, mille puhul samuti $y^*(x_0) = y_0$.

Lemma 3 põhjal on punktid $(x,\bar{y}(x))$, $(x,y^*(x)) \in \bar{P}_1$ iga $x \in J$ korral. Seega on rakendatav Lipschitzi tingimus ja iga $x \in J$ korral kehtib

$$
\begin{aligned}
|\bar{y}(x) - y^*(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,\bar{y}(t)) - f(t,y^*(t))| \, dt \right| \leq \\
&\leq N \left| \int_{x_0}^{x} |\bar{y}(t) - y^*(t)| \, dt \right| \leq NM |x - x_0| ,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

kus $M = \max\limits_{x \in J} |\bar{y}(t) - y^*(t)|$. (Põhjendada funktsiooni $\bar{y}(x) - y^*(x)$ totaalse ekstreemumi olemasolu lõigul J.)

Kuna võrratus (3.11) kehtib iga $x \in J$ korral, siis ka selle $\bar{x} \in J$ korral, kus $\bar{y}(\bar{x}) - y^*(\bar{x}) = M$. (Kas niisugune $\bar{x}$ leidub?) Seega (3.11) põhjal saame

$$M \leq NM |x - x_0|$$

ehk

$$1 \leq N |x - x_0|$$

i g a $x \in J$ korral. Ent me võime valida x nii, et $N|x - x_0| < 1$, mis viibki vastuolule.

Meie oletus teise lahendi olemasolust on seega väär ning teoreem lõplikult tõestatud.

Järeldusi teoreemist.

<u>Järeldus 1</u>. Põhiteoreemi väide järeldub ka niisugustest eeldustest, kus $f(x,y)$ on p i d e v piirkonnas $\bar{P}$ ja rahuldab seal y suhtes Lipschitzi tingimust. (Missugusest tõestuse osast see järeldub?)

<u>Järeldus 2</u>. Põhiteoreemi väide järeldub ka niisugustest

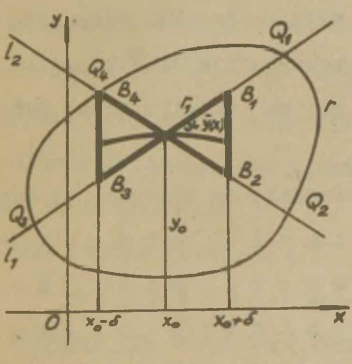
eeldustest, kus $f'_y(x,y)$ on t õ k e s t a t u d või p i d e v piirkonnas $\bar{P}$ ja $f(x,y)$ samas kas pidev x suhtes või pidev. (Põhjenduseks vaata artiklit 1.)

Kahest eelnevast järeldusest saame veel järgmise järelduse.

Järeldus 3. (C a u c h y t e o r e e m i e e l d u s e d.) Põhiteoreemi väite järeldamiseks piisab sellest, kui nõuda $f(x,y)$ ja $f'_y(x,y)$ pidevust piirkonnas $\bar{P}$.

Järeldus 4. Teoreemis 9 võib üldisust kitsendamata eeldada, et piirkond P o n l a h t i n e ühelisidus ja y suhtes kumer piirkond. (Miks?)

Nagu näeme on t e o r e e m 9 l o k a a l n e olemasolu teoreem, s.o. lahendi olemasolu ja ühesus mistahes punkti $A \in \bar{P}$ korral on tõestatud k ü l l a l d a s e l t v ä i k e s e l õ i g u $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ j a o k s (vt. joonist 10). Siinjuures märgime, et lõik J jääb seda väiksemaks, mida lähemal on punkt $A(x_0, y_0)$ rajajoonele (jälgi öeldut joonisel 10 liikuva A ja jääva tõkke K korral) või mida suurem on tõke K (jälgi seda püsiva A ja kasvava K korral).



Joon.10.

Siiski, juhul kui $f(x,y)$ rahuldab teoreemi 9 või järelduste 1-3 eeldusi üle kogu xy-tasandi ja on k o g u t a s a n d i u l a t u s e s t õ k e s t a t u d, võib lugeda lahendi eksisteerivaks ja üheseks x-telje kuitahes suurel lõigul. Öeldut illustreerime järgmiste näidete varal.

Näide 13. Olgu $y' = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$. Meid huvitab lahendi olemasolu ja ühesus algtingimusel $y(2) = 1$.

Kuna $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ rahuldab C a u c h y teoreemi eeldusi ja $|f(x,y)| \leq 1$ kogu xy-tasandil, võime näidata lahendi olemasolu ja ühesuse k u i t a h e s s u u r e l x-telje l õ i g u l. Selleks valime piirkonnaks $\bar{P}$ ringi $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq R^2$, kus R on k u i t a h e s s u u r. Valmista joonis ja näita, et lahendi olemasolu piirkonnaks $\bar{P}$ on punktiga (2,1), tõusuga 1 ja alusega $J = [2 - \frac{R}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{R}{\sqrt{2}}]$ määratud liblikakujuline piirkond.

Näide 14. Olgu $y' = x^2 + y^2$ ja otsitakse lahendit algtingimusel $y(0) = 0$.

Kas selle võrrandi puhul saab näidata lahendi olemasolu suvaliselt suurel lõigul J ? Mis toimub siin liblikakujulise piirkonnaga ja lõiguga J , kui me ringikujulist ümbrust järjest suurendame ?

3. Lahendi jätkamine. Meie ülesandeks on näidata, et teoreemi 9 eeldustel eksisteerib a i n u l t ü k s n i i s u g u n e i n t e g r a a l k õ v e r, m i s l ä b i b p u n k t i (x_0, y_0) j a u l a t u b p i i r k o n n a P r a j a j o o n e n i r. Teeme seda lahendi analüütilise jätkamise meetodil, mille olemus selgub tõestuskäigus.[11] Selleks vajame järgmist lemmat.

[11]Täienduseks vt. [5],pt.VIII,kus analüütilise jätkamise meetod on kirjeldatud analüütiliste funktsioonide jaoks.

Lemma 4. Igas tõkestatud kinnises ühelisidusas ja y-suhtes kumeras tasandilises piirkonnas $\bar{P}$ leidub niisugune seesmise punktiga A ja suvalise konstandiga K määratud liblikakujuline piirkond $\bar{P}_1$, mille üks tippudest asub piirkonna rajajoonel ja $\bar{P}_1 \subset \bar{P}$.

Lemma puhul piirdume geomeetrilise põhjendusega.

Läbigu sirged l_1 ja l_2 tõusuga K ja $-K$ punkti $A(x_0,y_0)$ ja lõikugu nad piirkonna $\bar{P}$ rajajoonega r punktides Q_1, Q_2, Q_3 ja Q_4 (vt. joonist 10). Olgu $d = \min(|AQ_1|, |AQ_2|, |AQ_3|, |AQ_4|)$; joonisel $d = |AQ_4|$. Punktid A, Q_4 ja tõus K määravad liblikakujulise piirkonna $\bar{P}_1$, mis ongi otsitav piirkond, sest: 1) $Q_4 \in r$; 2) on ilmne, et lõik $Q_4 Q_2$ kui punktihulk $H_{Q_4Q_2} \subset \bar{P}$ piirkonna sidususe, kumeruse ja $|A Q_4| = d$ tõttu; sama kehtib lõigu $Q_1 Q_3$ kohta; 3) B_1, B_2, $B_3 \in \bar{P}$ eelmise väite põhjal ja seetõttu, et $d = |AQ_4|$; 4) lõik Q_4B_3 kui punktihulk $H_{Q_4B_3} \in \bar{P}$ piirkonna kumeruse tõttu; sama kehtib lõigu B_1B_2 kohta; 4) seega piirkonna $\bar{P}_1$ rajajoon $r_1 \subset \bar{P}$ ja kuna piirkond $\bar{P}$ on ühelisidus, siis piirkonna $\bar{P}_1$ seesmised punktid, s.o. hulk $\bar{P}_1 \setminus r_1 \subset \bar{P}$, mida oligi vaja tõestada.

Nüüd võime tõestada o l e m a s o l u j a ü h e s u s e t o t a a l s e t e o r e e m i.

Teoreem 10. Rahuldagu funktsioon $f(x,y)$ teoreemi 9 eeldusi kinnises tõkestatud piirkonnas[12] $\bar{P}$.

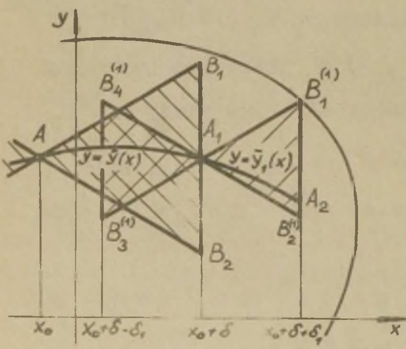
Piirkonna $\bar{P}$ mistahes seesmise punkti $A(x_0,y_0)$ korral

[12] Tuleta meelde (vt. § 3 art. 1), mis on eeldatud piirkonna $\bar{P}$ kohta.

leidub parajasti üks punkti A läbiv diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ integraalkõver, millel on piirkonna $\bar{P}$ rajajoonele r kuitahes lähedasi punkte.

T õ e s t u s. Nagu teoreemis 9, järeldub ka siin, et $|f(x,y)| \leq K$ iga $(x,y) \in \bar{P}$ korral. Lemma 4 põhjal leidub punktiga $A(x_0,y_0)$ ja tõusuga K määratud niisugune liblikakujuline piirkond $\bar{P}_1$, et üks tema otspunktidest asub rajajoonel r. Piirkonna $\bar{P}_1$ projektsiooniks olgu $J=[x_0-\delta, x_0+\delta]$ (vt. joonist 10). Sellel lõigul on teoreemi 9 põhjal määratud parajasti üks punkti $A(x_0,y_0)$ läbiv integraalkõver $y = \bar{y}(x)$. Lemmast 3 lähtudes on $(x,\bar{y}(x)) \in \bar{P}_1$ iga $x \in J$ korral. Seega, kui punkt $A_1(x_0+\delta, \bar{y}(x_0+\delta)) \in r$, on teoreem tõestatud, kui ei, siis asub punkt A_1 lõigul B_2B_1.

Arvestades lemmat 4, leidub punktiga A_1 ja tõusuga K määratud liblikakujuline piirkond $\bar{P}_2$ nii, et üks tema otspunktidest, näit. $B_1^{(1)} \in r$. Piirkonna $\bar{P}_2$ projektsiooniks olgu $J_1 = [x_0+\delta-\delta_1, x_0+\delta+\delta_1]$ (vt. joonist 11). Teoreemi 9 alusel on lõigul J_1 määratud ainult üks punkti A_1 läbiv integraalkõver. Kuna



Joon. 11.

samasse punkti jõudis ka kõver $\bar{y}(x)$, ühtivad kõverad $y(x)$ ja $\bar{y}(x)$ piirkonnas $J \cap J_1 = [x_0+\delta-\delta_1, x_0+\delta]$.

Seega juba avardatud lõigul $J \cup J_1$ on punkti $A(x_0,y_0)$ läbivaks ainsaks integraalkõveraks $y = Y_1(x)$, kus

$$Y_1(x)=\begin{cases}\bar{y}(x), & \text{kui } x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]=J;\\ \bar{y}_1(x), & \text{kui } x\in[x_0+\delta,\ x_0+\delta+\delta_1].\end{cases}$$

Lemma 3 põhjal on ka $(x,\bar{y}_1(x))\in\bar{P}_2$, kui $x\in J_1$. Kui nüüd $A_2(x_0+\delta+\delta_1,\ \bar{y}_1(x_0+\delta+\delta_1))\in r$, on teoreem tõestatud, kui ei, jätkame nüüd juba lahendit $y=Y_1(x)$ eespool kirjeldatud viisil.

Induktsiooni teel jõuame n-dal sammul lahendi ühesuse nõuet täitva integraalkõverani

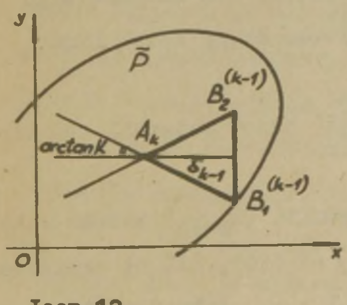
$$Y_n(x)=\begin{cases}\bar{y}(x), & \text{kui } x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta];\\ \bar{y}_1(x), & \text{kui } x\in[x_0+\delta-\delta_1,\ x_0+\delta+\delta_1];\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \bar{y}_n(x), & \text{kui } x\in[x_0+\delta+\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k-\delta_n,\ x_0+\delta+\sum_{k=1}^{n}\delta_k].\end{cases}$$

Kui kõver $y=Y_n(x)$ veel ei lõiku rajajoonega r, jätkame seda protsessi ja näitame, et nii jõuame kõverani, millel on rajajoonega r kuitahes lähedasi punkte.

Selleks oletame, et rida $\sum_k \delta_k$ (kus $\delta_k>0$) koondub. Siis on $\lim_{k\to\infty}\delta_k=0$ ja seega vastavalt $\varepsilon>0$ leidub koht k', pärast mida on $\delta_k<\varepsilon$. Siis on ka igas piirkonnas (vt. joonist 12) $\bar{P}_k$, kus $k>k'$, iga lõik

$$|A_k B_i^{(k-1)}|<\frac{\varepsilon}{\cos(\arctan K)}=\varepsilon_1$$

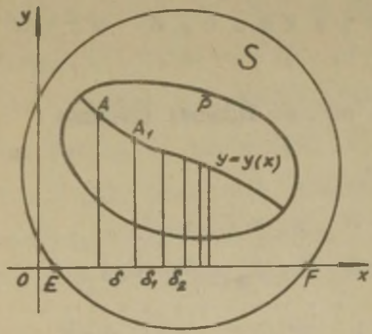
$(i=1,2,3,4)$.



Joon.12.

Saadud võrratusest järeldubki meie väide, kuna üks punktidest näit. $B_1^{(k-1)} \in r$ ja A_k on integraalkõvera $y = Y_k(x)$ punkt, kus $k > k'$.

Jäi veel näidata mittenegatiivsete liikmetega rea $\sum_k \delta_k$ koonduvust. Teatavasti järeldub niisuguse rea koonduvus osasummade jada tõkestatusest. Viimane on täidetud võrratuse



Joon.13.

$$\delta + \sum_{k=1}^{n} \delta_k < |EF|$$

tõttu, kus (vt. joonist 13) EF on kõõl niisuguses lõpliku raadiusega ringikujulises piirkonnas S, mis sisaldab endas tõkestatud kinnist p i i r k o n d a $\bar{P}$. Meie tõestuses on läbi viidud lahendi analüütiline jätkamine paremale. Analoogiliselt on see teostatav ka vasakule. Sealjuures on garanteeritud lahendi ühesus.

4. Lahendi olemasolu teoreem. Artiklites 2 ja 3 tõestasime diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemid. On tõestatud teoreeme, kus olemasolu ja ühesuse küsimused on eraldatud. Tutvume ühega neist ilma tõestuseta.

Teoreem 11. Olgu funktsioon $f(x,y)$ pidev tasandilises kinnises piirkonnas $\bar{P}$.

Piirkonna $\bar{P}$ mistahes seesmise punkti (x_0, y_0) korral leidub niisugune lõik $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $(\delta > 0)$, millel eksisteerib vähemalt üks algtingimust $y(x_0) = y_0$ rahuldav diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ lahend.

Esimese olemasolu teoreemidest sõnastas Peano.

Nägime, et lahendi olemasolu piisavaks tingimuseks on funktsiooni $f(x,y)$ pidevus kinnises piirkonnas (või punkti (x_0,y_0) ümbruses). Teoreem 11 on lokaalne, kuid analüütilise jätkamise meetodi abil saab näidata, et punkti (x_0,y_0) läbival integraalkõveral leidub piirkonna $\bar{P}$ rajajoonele kuitahes lähedasi punkte. (Tee seda iseseisvalt ja sõnasta vastav totaalne teoreem.)

(Kas artiklis 3 formuleeritud järeldus 4 jääb kehtima?)

Võib küsida: kas $f(x,y)$ pidevusest ei piisa selleks, et tõestada lahendi ühesust? Küsimusele on vastus eitav, sest leidub näiteid, mis väite ümber lükkavad. Nii on Lavrentjev konstrueerinud näite niisugusest terves piirkonnas $\bar{P}$ pideva funktsiooniga $f(x,y)$ diferentsiaalvõrrandist, kus selle piirkonna iga punkti tema kuitahes väikeses ümbruses läbib vähemalt kaks integraalkõverat. Seega peab diferentsiaalvõrrandi ühesust garanteerima mingi täiendav nõue funktsiooni $f(x,y)$ kohta. Teoreemi 9 ja tema järelduse 2 põhjal võib selleks nõuda kas $f'_y(x,y)$ pidevust, $f'_y(x,y)$ tõkestatust või veelgi vähem kitsendavat Lipschitzi tingimust y suhtes.

(Eelda diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja sõnasta kõigile kolmele juhule vastavad lahendi ühesuse teoreemid. Missuguseid abiteoreemidest meil tuleks siin kasutada ja missugust teoreemi 9 tõestuse osadest saaks sõnasõnalt kasutada?)

Lõpuks veel küsimus diferentsiaalvõrrandi $F(x,y,y') = 0$

lahendi olemasolust.

5. <u>Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu.</u> Vaatleme üldist esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$F(x,y,y')=0, \qquad (3.12)$$

mille lahendi olemasolu teoreemi sõnastus osutub oluliselt erinevaks artiklites 2 - 4 esinenutest. Et selgitada erinevuse põhjusi, vaatame järgmist näidet.

Võrrandi

$$(y')^3-(x^2+xy+y^2)y'^2+(x^3y+x^2y^2+xy^3)y'-x^3y^3=0 \qquad (3.13)$$

lahendamiseks lahutame selles esineva polünoomi teguriteks:

$$(y'-xy)(y'-x^2)(y'-y^2)=0$$

Diferentsiaalvõrrandi (3.13) lahenditeks on seega nii $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$, $y=-\frac{1}{x+C}$ kui ka $y=\frac{x^3}{3}+c$. Diferentsiaalvõrrandi joonelemendid pole seega üheselt määratud. Nii vastab punktile (1,2) kolm erinevat joonelementi $(1,2,k_1=2)$, $(1,2,k_2=1)$ $(1,2,k_3=4)$. See tähendab, et integraalkõverad väljuvad punktist (1,2) kolmes sihis ja tegemist on vähemalt kolme integraalkõveraga. Üldiselt on see antud juhul nii tasandi igas punktis ja rääkida lahendi ühesusest tuleb nüüd teises mõttes.

(Analüüsi iseseisvalt võrrandit $(y')^2-\cos^2x=0$ ja joonesta integraalkõverate joonelementide diagramm konstandi C väärtustel 0, ± 1, ± 2, ± 3).

Seega y' suhtes lahendamata diferentsiaalvõrrandite korral me s a a m e r ä ä k i d a l a h e n d i ü h e s u s e s t ainult sel juhul, k u i a l g t i n g i m u s t e l e $y(x_0) = y_0$ l i s a m e v e e l n õ u d e, et $y'(x_0) = y'_0$. Sel korral võime rääkida võrrandi (3.12) ainsast niisugusest integraalkõverast, mis l ä b i b a n t u d p u n k t i (x_0,y_0) a n t u d s i h i s y'_0. Loomulikult pole fikseeritud algtingimuste korral integraalkõvera siht y'_0 vabalt ettekirjutatav, vaid nii, et ta oleks 1) vastavuses valitud algtingimustega $y(x_0) = y_0$ ja 2) kuuluks võrrandi $F(x_0,y_0,y') = 0$ lahendite hulka. (Vt. näidet (3.13).)

Neid momente ongi arvestatud võrrandite $F(x,y,y') = 0$ lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemides. Vaatleme siin ühte neist ilma tõestuseta.

Teoreem 12. Rahuldagu funktsioon $F(x,y,y')$ xyy'-ruumi piirkonnas G järgmisi nõudeid:

1° $F(x,y,y')$ on pidev funktsioon;

2° $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ on pidev ja $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \neq 0$;

3° $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$ on tõkestatud ja pidev.

Tehtud eeldustel läbib punkti (x_0,y_0) sihis y_0', kus $(x_0,y_0,y_0') \in G$ ja y_0' on võrrandi $F(x_0,y_0,y_0') = 0$ lahend, parajasti üks diferentsiaalvõrrandi

$$F(x,y,y') = 0$$

integraalkõver, mis on määratud punkti x_0 küllaldaselt väikeses ümbruses.

Selles teoreemis garanteerivad funktsiooni $F(x,y,y')$ kohta püstitatud tingimused eeskätt seda, et võrrand $F(x,y,y') = 0$ lahendub vaadeldava punkti (x_0, y_0, y_0') ümbruses y' suhtes (missugused tingimustest 1°, 2° ja 3° garanteerivad seda ja missugusest analüüsis tuntud teoreemist see järeldub ?).

Teoreemi edasine tõestus taandub põhiteoreemi 9 tingimuste täidetuse kontrollimisele. Nii on teoreem 12 vaadeldav järeldusena teoreemist 9. (Püüa öeldut põhjendada iseseisvalt!)

§ 4. TULETISE SUHTES LAHENDAMATA DIFERENTSIAALVÕRRAND.

Vaatleme tuletise suhtes lahendamata esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$F(x,y,y') = 0 . \tag{4.1}$$

Selle võrrandi lahendamiseks oleks loomulik lahendada ta eeskätt y' suhtes. Üldiselt vastab võrrandile (4.1) mitu tuletise suhtes lahendatud võrrandit

$$y' = f_i(x,y) \qquad (i = 1,2,\dots,n), \tag{4.2}$$

millest iga üksikut tuleks lahendada iseseisvalt.

Eelmise paragrahvi artiklis 5 nägime, et võrrandi (3.13) puhul läbis iga punkti (x_0,y_0) a l g t i n g i m u s e g a $y(x_0) = y_0$ m ä ä r a t u d s i h i s y_0', kus $F(x_0,y_0,y_0') = 0$, üks integraalkõver. Erinevates sihtides läbis sama punkti (x_0,y_0) mitu erinevat integraalkõverat.

Ent kui vaadelda võrrandit

$$(y')^2 + (3x^2 - 2x)y' - 6x^3 = 0\,, \qquad (4.3)$$

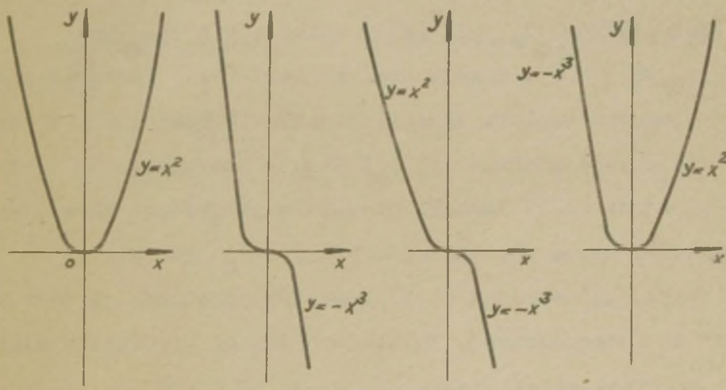
leidub punkte, näiteks punkt (0,0), mida läbivad ü h e s s i h i s (sihis $y' = 0$) kaks erinevat integraalkõverat - kõver $y = -x^3$ ja kõver $y = x^2$. Kuna kõveratel $y = -x^3$ ja $y = x^2$ on punktis (0,0) ühine puutuja, osutuvad võrrandi (4.3) intergraalkõverateks ka kõverad

$$y = \begin{cases} -x^3 &, \text{ kui } x < 0; \\ x^2 &, \text{ kui } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ja

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0\ ; \\ -x^3, & \text{kui } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

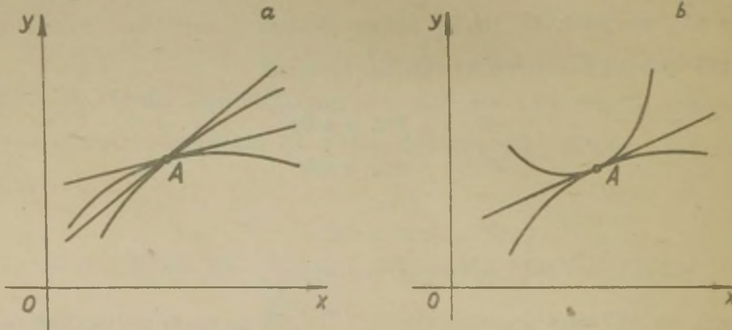
Seega on diferentsiaalvõrrandil (4.3) neli integraalkõverat (vt. joon.14),



Joon.14.

mis kõik läbivad punkti (0,0) sihis $y' = 0$.

Tuletise suhtes lahendamata esimest järku diferentsiaalvõrrandite puhul esineb seega kahte liike punkte, mille korral ei saa rääkida lahendi ühesusest endises mõttes. Ühel juhul läbivad integraalkõverad antud punkti A erinevates sihtides ja igas sihis parajasti üks kõver (vt. joon. 15 a), teisel juhul läbib antud punkti ühes sihis vähemalt kaks erinevat integraalkõverat (vt. joon. 15 b).



Joon. 15.

Kui punkti (x_0,y_0) läbib antud sihis y_0', kus $F(x_0,y_0,y_0') = 0$, ainult üks võrrandi (4.1) integraalkõver, siis nimetame vastava lahendi üheseks. Teisel juhul ütleme, et lahend pole punktis (x_0,y_0) ühene. Teoreemiga 12 olid antud võrrandi (4.1) lahendi olemasolu ja ühesust garanteerivad tingimused antud algtingimuse $y(x_0) = y_0$ korral.

Seega, kui võrrand (4.1) lahendub y' suhtes ja võrrandid (4.2) on integreeruvad, tulebki y' suhtes ilmutamata võrrandeid sellisel viisil lahendada.

Ometi esineb võrrandeid, mida pole võimalik lahendada y' suhtes või saadud võrrandite (4.2) integreerimine on seotud raskustega. Niisugusel juhul otsitakse võrrandite (4.1) lahendamiseks teisi võimalusi. Üheks sageli kasutatavaks meetodiks siin on diferentsiaalvõrrandi (4.1) lahendamine parameetrite sissetoomise teel. Selle meetodiga tutvume diferentsiaalvõrrandi (4.1) erinevate klasside vaatlemisel.

1. <u>Diferentsiaalvõrrand, milles ilmutatult puudub üks muutujatest</u>. Kui võrrandis (4.1) puudub üks muutujaist x või y, kujutab ta endast võrrandit:

$$F(x,y') = 0 \tag{4.4}$$

või

$$F(x,y') = 0 \tag{4.5}$$

Vaatleme võrrandite (4.4) ja (4.5) lahendamist. Nende üksikasjalikumat käsitlust vt. põhiõpikutest [1], ptk. III § 2 või [3], [4], ptk. I § 8.

1° Eeldame, et võrrandil (4.4) eksisteerib lahend $y = y(x)$ ja lahendugu võrrand muutuja x suhtes, nii et

$$x = \varphi(y') . \tag{4.6}$$

Toome sisse parameetri p seose $y' = p$ põhjal. Siis on (4.6) tõttu

$$x = \varphi(p). \tag{4.7}$$

Kuna teiselt poolt $\frac{dy}{dx} = p$ ja $dy = p\,dx$, saame võrrandist (4.7), et

$$dy = p\,\varphi'(p)\,dp,$$

millest

$$y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + C.$$

Diferentsiaalvõrrandi (4.4) üldlahendiks on nüüd parameetriliselt esitatud funktsioon

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + C. \end{cases}$$

2° Leida iseseisvalt diferentsiaalvõrrandi (4.5) üldlahend kvadratuurides. Selleks eelda, et võrrand (4.5) lahendub otsitava y suhtes ja vali parameetriks $y' = p$.

2. <u>Diferentsiaalvõrrandi lahendamine parametriseerimise teel.</u> Täitku diferentsiaalvõrrand (4.1) piirkonnas G teoreemi 12 eeldusi. Diferentsiaalvõrrandil (4.1) on sel juhul iga algtingimuse $y(x_0) = y_0$ korral, kus $(x_0, y_0, y_0') \in G$ ja $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, olemas lahend, mida otsime parameetrilisel kujul. Selleks eeldame, et on leitud muutujate x, y, y' parameetriline seos

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ y' = \chi(u,v) \end{cases} \tag{4.8}$$

nii, et muutujate u ja v teatud piirkonnas P kehtib samasus

$$F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) = 0 . \tag{4.9}$$

Kuna võrrand (4.1) määrab integraalkõvera, ei saa parameetrid u ja v muutuda piirkonnas P vabalt, vaid nende vahel valitseb funktsionaalne seos. Selle seose leidmisele taandubki nüüd antud diferentsiaalvõrrandi lahendamine. Süsteemi (4.8) viimasest seosest saame võrrandi $dy = \chi(u,v)dx$, mis süsteemi (4.8) kahte esimest seost arvestades taandub parameetrite u ja v suhtes diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv = \chi(u,v) \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \right] . \tag{4.10}$$

Olgu võrrandi (4.10) üldlahendiks

$$u = \tau(v, C) . \tag{4.11}$$

Diferentsiaalvõrrandi (4.1) üldlahendiks on siis

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau(v,C), v), \\ y = \psi(\tau(v,C), v). \end{cases} \tag{4.12}$$

See, et (4.12) on diferentsiaalvõrrandi (4.1) l a h e n d, järeldub vahetult samasusest (4.9). Selgitada tuleb veel küsimust selle kohta, kas (4.12) on diferentsiaalvõrrandi (4.1) ü l d l a h e n d. Küsimuse lahendamiseks peame veenduma, et kui (4.11) on diferentsiaalvõrrandi (4.10) üldlahend, siis on (4.12) diferentsiaalvõrrandi (4.1) üldlahend.

Selleks lähtume diferentsiaalvõrrandi üldlahendi definitsioonist ja näitame, et suvalise konstandi C sobiva väärtuse korral rahuldab lahend (4.12) mistahes algtingimust $y(x_0) = y_0$, mille puhul $(x_0, y_0, y_0') \in G$ ja $F(x_0, y_0, y_0') = 0$. Kuna süsteemi (4.8) puhul kehtib samasus (4.9), leidub piirkonnas P vähemalt üks punkt (u_0, v_0) nii, et

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(u_0, v_0), \\ y_0 = \psi(u_0, v_0), \\ y_0' = \chi(u_0, v_0). \end{cases} \tag{4.13}$$

Nüüd on $u = u_0, v = v_0$ vaadeldavad diferentsiaalvõrrandi (4.10) algväärtustena. Kuna (4.11) oli diferentsiaalvõrrandi (4.10) üldlahend, vastab algväärtustele (u_0, v_0) niisugune konstandi C väärtus C_0, et $u_0 = \tau(v_0, C_0)$. Süsteemide (4.13), (4.12) ja (4.11) tõttu on selge, et C_0 on niisugune konstant, mille puhul lahend (4.12) rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Seega saab kirjeldatud meetodil lahendada diferentsiaalvõrrandeid (4.1) siis,kui on võimalik teostada võrrandi parametriseerimist nii, et võrrand (4.10) oleks lahenduv kvadratuurides. Ent sobiva parametriseerimise leidmises seisnebki kirjeldatud meetodi raskus.

Alljärgnevas tutvume kahe sageli esineva parametriseerimismeetodi erijuhuga.

1° V õ r r a n d (4.1) l a h e n d u b m u u t u j a y s u h t e s , nii et lahendatud kujul taandub ta võrrandiks

$$y = f(x, y'), \tag{4.14}$$

Parametriseerimine (4.8) on käesoleval juhul teostatav lihtsalt. Nimelt valime parameetriteks u ja v vastavalt x ja y', nii et

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = f(x,p). \end{cases} \tag{4.15}$$

Lahendumisel lähtume seosest $\frac{dy}{dx} = p$ ehk $dy = p\,dx$, kus parameeter p on vaadeldav argumendi x funktsioonina. Arvutades süsteemi (4.15) viimasest võrrandist dy, saame muutujate p ja x suhtes diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,dp = p\,dx, \tag{4.16}$$

mille lahendamisel võivad esineda järgmised juhud.

A. Võrrandi (4.16) lahendamisel leiame üldlahendi kujul $p = \zeta(x,C)$. Diferentsiaalvõrrandi (4.14) üldlahendiks on sel korral $y = f(x, \zeta(x, C))$.

B. Võrrandi (4.15) lahendamisel leiame üldlahendi ku -

jul $x = \eta(p,C)$. Nüüd avaldub diferentsiaalvõrrandi (4.14) üldlahend parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \eta(p,C), \\ y = f(\eta(p,C),p). \end{cases}$$

2° V õ r r a n d (4.1) l a h e n d u b m u u t u j a x s u h t e s , nii et

$$x = g\,(y,y'). \qquad (4.17)$$

Sel korral teostub parametrisatsioon kujul

$$\begin{cases} y = y, \\ y' = p \\ x = g\,(y,p\,). \end{cases} \qquad (4.18)$$

Lähtudes nüüd seosest $\frac{dy}{dx} = p$, saame süsteemi (4.18) viimase võrrandi diferentseerimisel diferentsiaalvõrrandi muutujate y ja p suhtes

$$dy = p\left[\frac{\partial g(y,p)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g(y,p)}{\partial p}\,dp\right]. \qquad (4.19)$$

Kui leitud võrrandi üldlahend avaldub kujul $p = \zeta(y,C)$, on diferentsiaalvõrrandi (4.14) üldlahendiks funktsioon $x = g\,(y, \zeta(y,c))$.

Ent kui võrrandi (4.19) üldlahendiks on $y = \eta\,(p,C)$, saame diferentsiaalvõrrandi (4.14) üldlahendi parameetrilisel kujul:

$$\begin{cases} x = g\,(\eta\,(p,C)\,,\,p), \\ y = \eta(p,C)\,. \end{cases}$$

<u>Näide 15.</u> Võrrand $y'\sin y' - x = 0$ lahendub lihtsalt

argumendi x suhtes : $x = y'\sin y'$.

Parametriseerime antud võrrandi valemite (4.18) alusel. Süsteemile (4.18) vastab nüüd

$$\begin{cases} y = y \,, \\ y' = p \,, \\ x = p \sin p, \end{cases}$$

millest viimase võrrandi diferentseerimisel jõuame uue, eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi juurde

$$dy = p\,[\sin p + p \cos p]\, dp.$$

Saadud võrrandi integreerimisel leiame tema üldlahendi kujul

$$y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C \,.$$

Lähtevõrrandi üldlahendiks on niisiis

$$\begin{cases} x = p \sin p \,, \\ y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C \,. \end{cases}$$

3. Lagrange'i diferentsiaalvõrrand. Tuletise suhtes lahendamata esimest järku diferentsiaalvõrrandite üheks tähtsaks klassiks on muutujate x ja y suhtes lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$y = \varphi(y')\, x + \psi(y'), \qquad (4.20)$$

kus $\varphi(z)$ ja $\psi(z)$ on määratud vahemikus (c,d) . Võrrand (4.20) kannab Lagrange'i diferentsiaalvõrrandi nime. Teoreemi 12 põhjal on lihtsalt kontrollitav (tee seda !), et võrrandil on piirkonnas $(-\infty, \infty)$ olemas ühene lahend, kui funktsioonid $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ ja $\psi'(z)$ on pidevad teatud vahemikus $(c_1,d_1) \subseteq (c,d)$. Eeldades, et viimane nõue on täidetud, lahendame võrrandi (4.20) artikli 2 osas 1° kirjeldatud meetodil. Parametriseerimist teostavaks süsteemiks (4.15) on käesoleval juhul süsteem

$$\begin{cases} x = x , \\ y' = p , \\ y = \varphi(p)x + \psi(p) , \end{cases} \tag{4.21}$$

kuna võrrandiks (4.16) on

$$p\,dx = [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\,dp + \varphi(p)\,dx \tag{4.22}$$

ehk

$$[p - \varphi(p)]\,\frac{dx}{dp} - \varphi'(p)x = \psi'(p) \tag{4.23}$$

eeldusel, et $dp \neq 0$.

Saadud võrrandis tunneme ära muutuja x suhtes lineaarse diferentsiaalvõrrandi. Järelikult, iga i n t e g r e e r u v L a g r a n g e ' i v õ r r a n d (4.20) t a a n d u b parametrisatsiooni (4.21) põhjal f u n k t s i o o n i $x = x(p)$ s u h t e s l i n e a a r s e k s d i f e - r e n t s i a a l v õ r r a n d i k s .

Oletame, et $p - \varphi(p) \neq 0$ ja taandame võrrandi (4.23) kujule

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{4.24}$$

Eelduse $p - \varphi(p) \neq 0$ ja funktsioonide $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\varphi'(p)$ ning $\psi'(p)$ pidevuse tõttu on võrrand (4.24) integreeruv, kui lineaarne diferentsiaalvõrrand (vt. teoreem 6). Artikli 6, § 2 põhjal teame, et lineaarse diferentsiaalvõrrandi (4.24) üldlahendiks on funktsioon $x = C\tau(p) + \sigma(p)$, kus $C\tau(p)$ on vastava homogeense võrrandi üldlahend ja $\sigma(p)$

on võrrandi (4.24) üks erilahend.

Seega on Lagrange'i diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks funktsioon

$$\begin{cases} x = C\tau(p) + \sigma(p)\,, \\ y = C\varphi(p)\cdot\tau(p) + \varphi(p)\tau(p) + \psi(p). \end{cases} \qquad (4.25)$$

Üleminekul võrrandilt (4.22) võrrandile (4.24) eeldasime, et $dp \neq 0$ ja $p - \varphi(p) \neq 0$. Tehtud eeldustel on diferentsiaalvõrrandi (4.24) kõik lahendid võrrandi (4.22) lahenditeks. Veel peab silmas pidama lahendite kaotsimineku võimalust üleminekul võrrandilt (4.22) võrrandile (4.24). Nii peame analüüsima võimalust, kas, juhul kui $dp = 0$ või $p - \varphi(p) = 0$ või viimaste võrduste üheaegsel kehtimisel,pole tegemist võrrandi (4.22) niisuguse lahendiga, mis ei sisaldu üldlahendis (4.25).

Juhul kui $dp = 0$ peab parameeter p olema konstantne, s.o. $p = k$. Kuid võrrand (4.22) saab niisugusel juhul olla rahuldatud vaid siis, kui $k - \varphi(k) = 0$. Diferentsiaalvõrrandi (4.22) lahendiks on niisugusel juhul (näita seda !) lineaarne funktsioon

$$y = \varphi(k)\,x + \psi(k)\,. \qquad (4.26)$$

Kui funktsioon (4.26) ei kuulu parve (4.25), on ta jäänud arvestamata. Niisugusel juhul on funktsioon (4.26) diferentsiaalvõrrandi (4.22) singulaarne lahend.

Jääb veel vaadelda juhtu, kus kehtib samasus $p - \varphi(p)=0$, s.o. $\varphi(p) = p$. Nüüd kujutab võrrand (4.20) endast Lagrange'i diferentsiaalvõrrandi niisugust erijuhtu

$$y = y'x + \psi(y'), \tag{4.27}$$

mis kannab Clairaut' diferentsiaalvõrrandi nimetust. Clairaut' diferentsiaalvõrrandit uurime järgmises artiklis.

<u>Näide 16</u>. Vaatleme Lagrange'i võrrandit

$$y = x(y')^2 + (y')^2. \tag{4.28}$$

Parametriseerides seoste

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = xp^2 + p^2 \end{cases}$$

põhjal, ning arvestades, et $p\,dx = dy$, saame diferentsiaalvõrrandi

$$(p - p^2)dx = 2p(x + 1)\,dp. \tag{4.29}$$

Eeldades, et $p(1-p) \neq 0$ ja $dp \neq 0$, saame otsitava x suhtes lineaarse diferentsiaalvõrrandi[13]

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{2}{1-p},$$

mille üldlahendiks on

$$x = C\frac{1}{(1-p)^2} - 1.$$

Diferentsiaalvõrrandi (4.28) üldlahendiks on sel juhul

$$\begin{cases} x = C\dfrac{1}{(1-p)^2} - 1, \\ y = C\dfrac{p^2}{(1-p)^2}. \end{cases}$$

Peale üldlahendi on võrrandi (4.28) lahenditeks veel

[13] Käesoleval juhul on saadud võrrand ka eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand.

funktsioonid $y = 0$ ja $y = x + 1$. Viimased leiame, kui arvestame, et võrrandit (4.29) rahuldavad veel funktsioonid $p = 0$ ja $p = 1$.

4. Clairaut' diferentsiaalvõrrand. Eespool nägime, et Clairaut' diferentsiaalvõrrand (4.27) on Lagrange'i diferentsiaalvõrrandi niisugune erijuht, kus funktsioon $\varphi(z) = z$. Seega on võrrand (4.27) integreeruv seal, kus $\psi(z)$ ja $\psi'(z)$ on pidevad funktsioonid. Clairaut' diferentsiaalvõrrandi kui ühe Lagrange'i võrrandi integreerimine toimub artiklis 3 kirjeldatud meetodiga. Selleks, et paremini tuua esile Clairaut' diferentsiaalvõrrandi omadusi, viime võrrandi (4.27) integreerimise läbi üksikasjalikult.

Parametriseerides võrrandit (4.27) seoste

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = px + \psi(p) \end{cases} \tag{4.30}$$

põhjal ja arvestades, et $dy = p\,dx$, saame muutujate x ja p suhtes diferentsiaalvõrrandi

$$p\,dx = p\,dx + [x + \psi'(p)]\,dp$$

ehk

$$[x + \psi'(p)]\,dp = 0 .$$

Siit järeldub, et a) $dp = 0$ ja b) $x + \psi'(p) = 0$.

Kui $dp = 0$, siis on $p = C$ ja (4.30) põhjal näeme, et

$$y = Cx + \psi(C) \tag{4.31}$$

on diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks (veendu selles täiendavalt kontrolli abil). Geomeetriliselt vastab Clairaut' diferentsiaalvõrrandi üldlahendile (4.31) üheparameetriline sirgete parv.

Märkus 10. Pea meeles, et formaalselt saadakse Clairaut' diferentsiaalvõrrandi (4.27) üldlahend võrrandist (4.27), kui selles y' asendada suvalise konstandiga.

Kui $\psi'(p)$ ei ole konstant ja $x + \psi'(p) = 0$, siis on tegelikult teada ilma integreerimiseta muutuja x seos parameetriga ja diferentsiaalvõrrandi (4.27) lahendiks on funktsioon

$$\begin{cases} x = - \psi'(p) , \\ y = - \psi'(p)\, p + \psi(p) . \end{cases} \qquad (4.32)$$

(Näita seda funktsiooni asendamisel võrrandisse (4.27) !) Kuna funktsioon (4.32) ei sõltu suvalisest konstandist, ei ole ta üldlahend, vaid eri- või singulaarne lahend. Saab näidata, (vt. näit. [1], pt. III § 3), et lahend (4.32) ei saa olla erilahend. Nii on (4.32) singulaarne lahend. Hiljem näitame, et Clairaut' diferentsiaalvõrrandi singulaarne lahend (4.32) on geomeetriliselt seotud üldlahendi (4.31) sirgetega.

Lõpuks vaatleme juhtu, kus $\psi'(p)$ on konstant. Olgu näiteks $\psi'(p) = k$. Kuid siis peab $\psi(p)$ olema lineaarne funktsioon, nii et $\psi(p) = kp + b$, kus b on mingi konstant. Niisugusel juhul taandub võrrand (4.27) järgmiseks:

$$y = y'x + ky' + b$$

ehk

$$y'(x+k) = y - b \quad .$$

Viimane on aga eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand ja teda pole mõtete vaadelda Clairaut' võrrandina.

§ 5. ISEÄRASED PUNKTID JA SINGULAARSED LAHENDID.

1. Iseärase punkti mõiste. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}. \tag{5.1}$$

Meid huvitab selle diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate olemasolu ja kulg (0,0) ümbruses. Selles punktis pole funktsioon $f(x,y) = \frac{1}{2\,xy}$ pidev ning pole seega täidetud ei teoreemi 9 ega tema järelduste 1,2 ja 3 eeldused, mis garanteeriksid lahendi olemasolu ja ühesuse. Kuna t e o r e e m i 9 ja tema järelduste e e l d u s e d o n a i n u l t p i i s a v a d t i n g i m u s e d lahendi olemasoluks ja ühesuseks, võib küsida, kas siiski ei eksisteeri niisugune integraalkõver, mis läbib punkti (0,0)? Küsimuse selgitamiseks vaatleme veel võrrandit

$$\frac{dx}{dy} = 2\,xy, \tag{5.2}$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $x = x(y)$. Võrrandi (5.2) puhul on teoreemi 9 eeldused punkti (0,0) mistahes kinnises ümbruses täidetud. Seega läbib punkti (0,0) diferentsiaalvõrrandi (5.2) ainus niisugune integraalkõver, mille joonelemendi tõusunurk y-telje suhtes punktis (0,0) on null, s.o. joonelemendi tõusunurk x-telje suhtes on $\frac{\pi}{2}$. Diferentsiaalvõrrandi (5.1) üldlahendiks on

$$x = Ce^{y^2}, \tag{5.3}$$

millest näeme, et punkti (0,0) läbivaks integraalkõveraks on joon $x = 0$, mille tõusunurgaks punktis $(0,0)$ on tõepoolest $\frac{\pi}{2}$. Kirjeldatud omadusega punkte on diferentsiaalvõrrandil (5.1) lõpmata palju. Nendeks on punktid koordinaatidega $(x,0)$. Kõiki neid läbib ainult üks integraalkõveratest (5.3), kusjuures joonelemendi tõusunurgaks on kõikides nendes punktides nurk $\frac{\pi}{2}$. Ja kõikides nendes punktides pole diferentsiaalvõrrandi (5.1) korral teoreemi 9 eeldused täidetud. Küll on nad aga täidetud võrrandi (5.2) korral.

Nii on diferentsiaalvõrrandi $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ lahendi olemasolu ja ühesuse selgitamisel oluline vaadelda veel võrrandit $\frac{dx}{dy} = f_1(x,y)$, kus $f_1(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$.

Nüüd võime sisse tuua järgmised mõisted.

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (5.4)$$

piirkonnas D ja olgu $P(x,y)$ selle piirkonna niisugune seesmine punkt, mille teatud ümbruses on, kas $f(x,y)$ pidev x suhtes ja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ on tõkestatud, või on $f_1(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$ pidev y suhtes ja $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}$ on tõkestatud.

Tehtud eeldustel läbib piirkonna D igat seesmist punkti parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (5.4) integraalkõver. Niisugust punkti nimetame edaspidi diferentsiaalvõrrandi (5.4) <u>harilikuks</u> ehk <u>regulaarseks punktiks</u>[14]. Kõiki teisi

---

[14] Analoogiliselt defineeritakse harilikku ehk regulaarset punkti diferentsiaalvõrrandi $F(x,y,y') = 0$ korral. On ilmne, et regulaarseks punktiks on punkt, milles on täidetud teoreemi 12 eeldused 1°, 2° ja 3°.

punkte nimetame diferentsiaalvõrrandi (5.4) <u>iseärasteks punktideks.</u>

Nii on punkt (1,1) diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-1} \tag{5.5}$$

iseärane punkt, sest $f(x,y) = \frac{y-1}{x-1}$ ei ole pidev x suhtes punktis (1,1), samuti nagu $f_1(x,y) = \frac{x-1}{x-1}$ ei ole pidev y suhtes punktis (1,1). Diferentsiaalvõrrandi üld - lahendiks on $y = 1 + C\,(x-1)$.

Sellest selgub, et punkti (1,1) läbivad diferentsiaalvõrrandi(5.5) kõik integraalkõverad. Diferentsiaalvõrrandi (5.5) p u n k t i (1,1) i s e ä r a s u s seisnebki selles, et seda punkti läbivad diferentsiaalvõrrandi kõik integraalkõverad.

Ka funktsioon $f(x,y) = \frac{y-1}{1-x}$ pole pidev x suhtes punktis (1,1), samuti nagu $f_1(x,y) = \frac{1-x}{y-1}$ pole pidev y suhtes punktis (1,1). Nii on punkt (1,1) ka diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{1-x} \tag{5.6}$$

iseärane punkt. Difetentsiaalvõrrandi (5.6) iseärasuseks punktis (1,1) on see, et punkti (1,1) läbivad ainult triviaalsed lahendid, s.o. $y = 1$ (ja $x = 1$), kuna ükski teine integraalkõveratest

$$y - 1 = \frac{C}{1-x}$$

ei läbi seda punkti. (Võrdle diferentsiaalvõrrandite (5.5) ja (5.6) integraalkõverate kulgu punkti (1,1) ümbruses vastavatel graafikutel!)

2.<u>Iseäraste punktide klassifikatsioon</u>. Eelmises artiklis nägime, et diferentsiaalvõrranditel **e s i n e b i s e ä r a s e i d p u n k t e e r i n e v a i s e ä r a s u s e g a.** Iseäraste punktide Poincare poolt sisse toodud klassifikatsioon haarab diferentsiaalvõrrandeid, mis on esitatavad kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \tag{5.7}$$

kus $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ (milleks on tehtud eeldus vajalik?). Tegelikult kehtib sama klassifikatsioon palju laiema diferentsiaalvõrrandite klassi kohta, mida näitasid Perron, Poincare, Bendicson jt. (Lähemalt selle kohta vt. [1] ptk. II § 2 p.3).

Võrrandi (5.7) iseäraseks punktiks on punkt (0,0) (miks?), kuid diferentsiaalvõrrandi iseärasuse iseloom selles punktis oleneb kordajatest α, β, γ ja δ.

Osutub, et vaadeldava võrrandi puhul on võimalikud neli erinevat iseärasuse juhtu. Tõestuse esitame kahes etapis.

1° Näitame, et diferentsiaalvõrrand (5.7) teiseneb lineaarteisendusega

$$\begin{cases} x = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ y = a_{21}\xi + a_{22}\eta, \end{cases} \tag{5.8}$$

kas võrrandiks

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\eta}{\xi}, \tag{5.9}$$

võrrandiks

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + k\eta}{k\xi}, \tag{5.10}$$

või võrrandiks

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + k\eta}{k\xi - \eta}, \tag{5.11}$$

kui sobivalt valida lineaarteisenduse (5.8) kordajad a_{11},

a_{12}, a_{21} ja a_{22}.

2° Selgitame, et võrrandite (5.9), (5.10) ja (5.11) korral on punktis (0,0) võimalikud neli erinevat iseärasuse juhtu, mis määravad ka ainuvõimalikud neli iseärasuse juhtu võrrandile (5.7) punktis (0,0). Siinjuures on oluline meenutada, et lineaarteisendus (5.8) 1) jätab punkti (0,0) paigale, 2) teisendab sirged sirgeteks, 3) paralleelid paralleelideks ja 4) võrdelised lõigud sirgel võrdlisteks. Lineaarteisenduse korral võib küll muutuda nurk koordinaattelgede vahel ja maastaap, kuid mistahes kujund teiseneb iseendaga sarnaseks kujundiks.

1° Teostame võrrandis (5.7) muutujate asenduse valemite (5.8) põhjal, mille kordajad a_{11}, a_{12}, a_{21} ja a_{22} jätame esialgu määramata. Arvutades dy ja dx leiame, et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21} + a_{22}\frac{d\eta}{d\xi}}{a_{11} + a_{12}\frac{d\eta}{d\xi}} ,$$

millest avaldame

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_{21} - a_{11}\frac{dy}{dx}}{a_{12}\frac{dy}{dx} - a_{22}} . \qquad (5.12)$$

Asendades siia $\frac{dy}{dx}$ võrrandist (5.7) ja teisendades, leiame

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_{21}(\gamma x + \delta y) - a_{11}(\alpha x + \beta y)}{a_{12}(\alpha x + \beta y) - a_{22}(\gamma x + \delta y)} . \qquad (5.13)$$

Lähtudes soovist taandada diferentsiaalvõrrand (5.7) kujule (5.9) nõuame, et

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\eta}{\xi} .$$

Selleks avaldame ka $\frac{m}{n} \cdot \frac{\eta}{\xi}$ koordinaatides x, y valemite (5.8) põhjal ning saame samasuse

$$\frac{a_{21}(\gamma x + \delta y) - a_{11}(\alpha x + \beta y)}{a_{12}(\alpha x + \beta y) - a_{22}(\gamma x + \delta y)} = \tag{5.14}$$

$$= \frac{m}{n} \frac{(a_{11} y - a_{21} x)}{(a_{22} x - a_{12} y)} ,$$

millest leiame järgmised süsteemid kordajate a_{11}, a_{12}, a_{21} ja a_{22} määramiseks:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha - a_{21}(\gamma + m) = 0 , \\ a_{11}(\beta + m) - a_{21}\delta = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

ja

$$\begin{cases} a_{12}\alpha - a_{22}(\gamma + n) = 0, \\ a_{12}(\beta + n) - a_{22}\delta = 0 . \end{cases} \tag{5.16}$$

Kuna meid huvitab teisendus (5.8) nullist erineva determinandiga (milleks on see vajalik?) huvitavad meid süsteemide (5.15) ja (5.16) mittetriviaalsed lahendid. Viimased eksisteerivad, kui süsteemide (5.15) ja (5.16) determinandid on nullid, järelikult siis, kui m ja n rahuldavad võrrandit

$$(\beta + \mu)(\gamma + \mu) - \alpha\delta = 0$$

ehk

$$\mu^2 + (\beta + \gamma)\mu + (\beta\gamma - \alpha\delta) = 0 . \tag{5.17}$$

Eelduste kohaselt on $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ning võrrandi (5.17) lahendite suhtes võivad esineda järgmised juhud.

1. Võrrandi (5.17) juured μ_1 ja μ_2 on erinevad ja reaalsed. Valides sel korral $\mu_1 = m$ ja $\mu_2 = n$, leiame, et süsteemide (5.15) ja (5.16) lahenditeks on :

$$a_{11} = \frac{c}{\alpha}(\gamma + \mu_1), \qquad a_{21} = c \tag{5.18}$$

ja

$$a_{12} = \frac{c}{\alpha}(\gamma + \mu_2), \qquad a_{22} = c,$$

kus $c \neq 0$ on suvaline konstant.

Kontrollides selgub, et lineaarteisenduse (5.8) determinant

$$\Delta = \frac{c^2}{\alpha}(\mu_1 - \mu_2) \neq 0,$$

ja seega võrrand (5.7) teisendatud kujule (5.9). Sealjuures on valemites (5.18) eeldatud, et $\alpha \neq 0$. Juhtu $\alpha = 0$ vaatleme hiljem.

2. Võrrandi (5.17) juured on kompleksed : $\mu_1 = p + iq$ ja $\mu_2 = p - iq$, kus $q \neq 0$. Ka sel korral eeldusel, et $\alpha \neq 0$, on $\Delta \neq 0$. Valides $m = \mu_1$ ja $n = \mu_2$ näeme, et antud juhul taandub diferentsiaalvõrrand (5.7) komplekssete kordajatega diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p + iq}{p - iq}\,\frac{\eta}{\xi}.$$

Ent leitud võrrand teiseneb asendusega

$$\begin{cases} \xi = u - iv, \\ \eta = u + iv \end{cases}$$

võrrandiks (5.11) muutujate u ja v suhtes. Näita seda iseseisvalt ja pane tähele, et juhul $p = 0$ on $k = 0$, kuna juhul $p \neq 0$ on ka $k \neq 0$.

3. Võrrandi (5.17) juured ühtivad, s.o. $\mu_1 = \mu_2$. Samal ajal vaatleme jälle juhtu, kus $\alpha \neq 0$. Sel korral on $m = n$ ja süsteemid (5.15) ning (5.16) ühtivad. Järelikult on süsteemide (5.15) ja (5.16) lahendid kas võrdsed, või võrdelised ning lineaarteisendus (5.8) kõdunud, sest selle determinant $\Delta = 0$. Seega juhul, kui võrrandi (5.17) juured ühtivad, ei saa lineaarteisenduse (5.8) kordajaid nii määrata, et diferentsiaalvõrrand (5.7) teiseneks võrrandiks (5.9). Kuid vaadeldaval juhul saab lineaarteisenduse (5.8) kordajad nii määrata, et diferentsiaalvõrrand (5.7) teiseneb võrrandiks (5.10). Selleks avaldame $\dfrac{\xi + k\eta}{k\xi}$ koordinaatides x,y valemite (5.8) põhjal (eeldame, et $\Delta = 0$). Arvestades veel võrdust (5.13), saame samasuse

$$\frac{a_{21}(\gamma x + \delta y) - a_{11}(\alpha x + \beta y)}{a_{12}(\alpha x + \beta y) - a_{22}(\gamma x + \delta y)} = \frac{a_{22}x - a_{12}y + k(-a_{21}x + a_{11}y)}{k(a_{22}x - a_{12}y)},$$

millest leiame järgmised süsteemid kordajate a_{11}, a_{12}, a_{21} ja a_{22} määramiseks

$$\begin{cases} a_{12}\alpha - a_{22}(\gamma + k) = 0, \\ a_{12}(\beta + k) - a_{22}\delta = 0 \end{cases} \qquad (5.19)$$

ja

14.

$$\begin{cases} a_{11}\alpha - a_{21}(\gamma + k) = -a_{22}, \\ a_{11}(\beta + k) - a_{21}\delta = a_{12}. \end{cases} \tag{5.20}$$

Meid huvitab süsteemi (5.19) mittetriviaalne lahend. Selleks nõuame, et k rahuldaks võrrandit (5.17), sest siis on süsteemi (5.19) determinant null ja süsteemil mittetriviaalne lahend. Kuna vaatlusel on juht, kus $\mu_1 = \mu_2 = k$, peab Vieta valemite põhjal $k = -\frac{\beta+\gamma}{2}$. Seda arvestades lahendame süsteemid (5.19) ja (5.20) ning leiame, et $a_{22} = c$, $a_{12} = c\,\frac{\gamma-\beta}{2\alpha}$, $a_{21} = \bar{c}$ ja $a_{11} = \frac{-c}{\alpha} + \bar{c}\,\frac{\gamma-\beta}{2\alpha}$, kus c ja $\bar{c}$ on suvalised konstandid. (Veendu enne süsteemi (5.20) lahendamist, et astaku tingimus on rahuldatud.) Kuid niisugusel juhul on lineaarteisenduse (5.8) determinant $\Delta \neq 0$ (veendu selles!) ning diferentsiaalvõrrand (5.7) teisendatav võrrandiks (5.10).

4. Vaadeldud juhtudel 1,2 ja 3 eeldasime, et $\alpha \neq 0$. Kui $\alpha = 0$, võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\delta \neq 0$, sest vastasel korral ongi tegemist võrrandiga (5.9). Ent kui $\alpha = 0$ ja $\delta \neq 0$, vastab võrrandile (5.17) võrrand

$$\mu^2 + (\beta + \gamma)\mu + \beta\gamma = 0, \tag{5.21}$$

mille puhul on kas $\beta \neq \gamma$ või $\beta = \gamma$. Viimasel juhul vaatleme diferentsiaalvõrrandit (5.7) kujul

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y + kx}{ky},$$

kus $k = \frac{\beta}{\delta}$, mis vastabki võrrandile (5.10).

Kui $\beta \neq \gamma$ ($\alpha = 0$, $\delta \neq 0$), on võrrandi (5.21) juurteks $-\beta$ ja $-\gamma$ ning diferentsiaalvõrrand (5.7) teisendatav lineaarteisendusega (5.8) võrrandiks (5.9). Lineaarteisenduse (5.8) kordajad on määratud süsteemidega (5.15) ja (5.16), kus $\alpha = 0$.

Seega on ülesanne 1° täidetud.

2° Näitame, et punkt (0,0) on iseäraseks punktiks diferentsiaalvõrranditele (5.9), (5.10) ja (5.11). Iseäraseks punktiks võib olla kas sõlmpunkt, tsenter, fookus või sadulpunkt. Viimaseid defineeritakse järgmiselt.

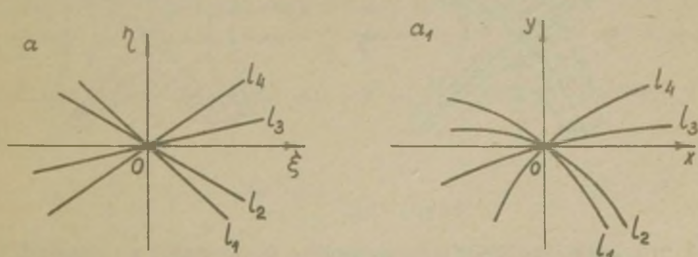
Diferentsiaalvõrrandi iseärast punkti nimetatakse

1)sõlmpunktiks, kui iseärast punkti läbivatel integraalkõveratel on selles punktis kindel puutuja, (vt. joon. 16a ja a_1) ;

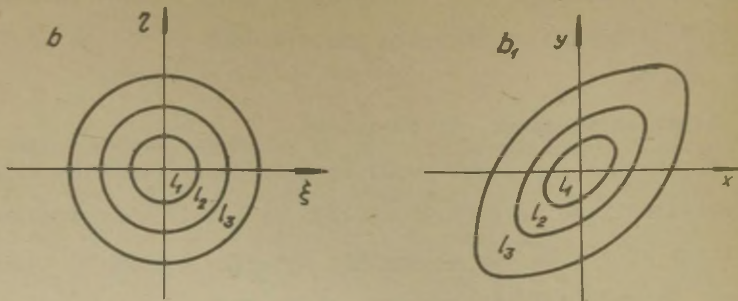
2) tsentriks, kui seda punkti ümbritsevad kinnised integraalkõverad (vt. joon.17b ja b_1);

3) fookuseks, kui integraalkõverateks on spiraalid ,mis asümptootiliselt lähenevad iseärasele punktile (vt. joon.18),

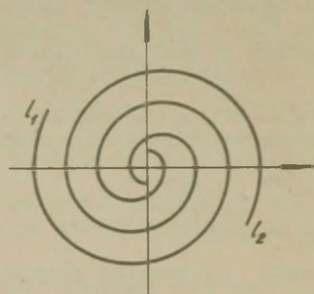
4) sadulpunktiks, kui integraalkõveratest ainult kaks läbivad iseärast punkti kindla puutuja sihiga temas, kuna ülejäänud teda ei läbi (vt. joon. 19d ja d_1).



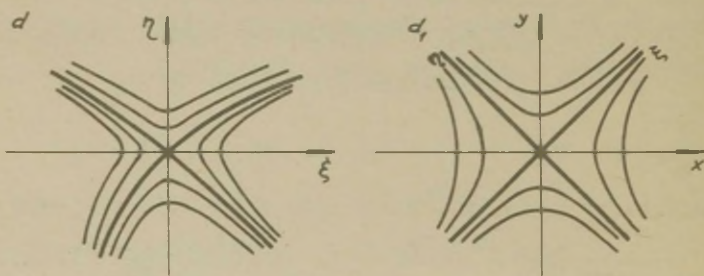
Joon. 16.



Joon. 17.



Joon. 18.



Joon. 19.

Selleks, et öeldus veenduda, lahendame võrrandid (5.9), (5.10) ja (5.11).

1. Võrrandi (5.9) puhul on võimalikud järgmised erijuhud

A. Olgu $m = n$. Punkt (0,0) on sel korral võrrandi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} \tag{5.22}$$

iseäraseks punktiks. Iseärasuse selgitamiseks lahendame diferentsiaalvõrrandi ja leiame, et $\eta = C\xi$ (või $\xi = \bar{C}\eta$) on tema üldlahendiks. Iseärast punkti (0,0) läbivad võrrandi (5.22) kõik integraalkõverad kindla puutuja tõusuga C. Seega on punkt (0,0) sõlmpunkt (vt. joon. 16a).

B. Olgu $m \neq n$ ning $\operatorname{sign}(mn) > 0$. Siis on punkt (0,0) võrrandi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = k\frac{\eta}{\xi}, \tag{5.23}$$

kus $k = \frac{m}{n} > 0$, iseärane punkt ning ka seekord sõlmpunkt, sest võrrandi (5.23) üldlahendiks on

$$\eta = C|\xi|^k \quad (\text{või } |\xi|^k = \bar{C}\eta). \tag{5.24}$$

Punkti (0,0) läbivad kõik integraalkõverad kindla puutuja tõusunurgaga 0, kui $k>1$ ja puutuja tõusunurgaga $\frac{\pi}{2}$, kui $0<k<1$. Erandiks on juhul $k>1$ "integraalkõver" $x = 0$ ja juhul $0<k<1$ "integraalkõver" $y = 0$. (Joonista iseseisvalt integraalkõverad parvest (5.24) juhtudel $k>1$ ja $0<k<1$).

C. Olgu $m \neq n$ ja $\operatorname{sign}(mn) > 0$. Siis on punkt (0,0) võrrandi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -|k|\frac{\eta}{\xi}, \tag{5.25}$$

kus $k = \frac{m}{n}$, sadulpunkt, sest diferentsiaalvõrrandi (5.25) üldlahendiks on

$$\eta|\xi|^{|k|} = C. \tag{5.26}$$

Saadud parve (5.26) kõveratest läbivad punkti (0,0) ainult sirged $\xi = 0$ ja $\eta = 0$, kuna teised integraalkõverad punkti (0,0) ei läbi (Vt. joon. 19d_1).

2. Võrrandi (5.10) iseärasuse selgitamiseks punktis (0,0) taandame vaadeldava võrrandi kujule

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{\xi}\eta = \frac{1}{k} \tag{5.27}$$

(mis tüüpi võrrand on (5.27)?) ja leiame üldlahend

$$\eta = C\xi + \frac{1}{k}\xi \ln|\xi|. \tag{5.28}$$

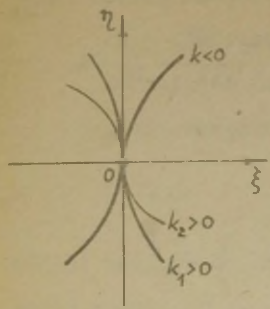
Siit selgub, et integraalkõverateks on O-punkti suhtes sümmeetrilised kõverad (miks?), millel on punktis $\xi = 0$ kõrvaldatav katkevus, sest $\lim\limits_{\xi \to 0\pm} \eta = 0$ (näita seda !). Seega on integraalkõverate

$$\eta = \begin{cases} C + \frac{1}{k}\xi \ln|\xi| & ,\text{kui } \xi \neq 0; \\ 0 & ,\text{kui } \xi = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

puutujate piirseisuks punktile (0,0) lähenemisel sirge $\xi = 0$, sest

$$\lim_{\xi \to 0\pm} \frac{d\eta}{d\xi} = C + \frac{1}{k} \lim_{\xi \to 0\pm} (\ln|\xi| + 1) = \pm\infty$$

vastavalt sellele, kas $k < 0$ või $k > 0$. Nii läbivad kõik integraalkõverad (5.29) punkti (0,0) kindla puutuja sihiga ning punkt (0,0) on sõlmpunkt. Joonisel 20 on kujutatud parve (5.29) kõverate kulg iseärase punkti ümbruses.



Joon.20

3. Võrrandi (5.11) puhul on võimalikud kaks juhtu.

A. Kui $k = 0$, on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\eta}$$

iseärane punkt (0,0) tsenter, sest integraalkõverateks $\xi^2 + \eta^2 = C^2$ on punkti (0,0) kontsentriliselt ümbritsevad ringjooned (vt. joon. 17 b).

B. Juhul kui $k \neq 0$, vaatleme võrrandit (5.11) polaarkoordinaatides. Selleks arvutame

$$d\xi = d\rho \cdot \cos\varphi - \rho \sin\varphi \cdot d\varphi$$

ja

$$d\eta = d\rho \cdot \sin\varphi + \rho \cos\varphi \cdot d\varphi$$

valemitest

$$\xi = \rho \cos\varphi ,$$
$$\eta = \rho \sin\varphi$$

ning leiame, et võrrand (5.11) teiseneb võrrandiks

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho .$$

Viimase integraalkõverateks on logaritmilised spiraalid võrrandiga

$$\rho = C e^{k\varphi}. \qquad (5.30)$$

Kuna $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\rho = 0$, kui $k < 0$, ja samuti $\lim\limits_{\varphi\to-\infty}\rho = 0$, kui

$k > 0$, on punkt (0,0) fookuseks, sest spiraalid (5.30) lähenevad asümptootiliselt 0-punktile (vt. joon.18).

Artikli 2 punkte 1° ja 2° resümeerides järeldame:

Diferentsiaalvõrrandi (5.7), s.o. võrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

iseärast punkti iseloomustavaks võrrandiks on võrrand (5.17), mida on sobiv kasutada kujul

$$\begin{vmatrix} \gamma + \mu & \delta \\ \alpha & \beta + \mu \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.31)$$

Viimast nimetataksegi <u>iseäraste punktide karakteristlikuks võrrandiks.</u> Eespool teostatud analüüsi põhjal jõuame järgmise reeglini: Kui karakteristliku võrrandi (5.31) juured on

1) reaalsed ja sama märgiga, on punkt (0,0) -sõlmpunkt;
2) reaalsed ja erinevate märkidega, on punkt (0,0) - sadulpunkt;
3) puhtimaginaarsed, on punkt (0,0) - tsenter;
4) kompleksed, nullist erineva reaalosaga, on punkt (0,0) - fookus.

Vaatleme lõpuks veel paari näidet.

1) $y' = \dfrac{x - 2y}{4x - 5y}$.

Koostame karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} 4 + \mu & -5 \\ 1 & -2 + \mu \end{vmatrix} = 0, \text{ s.o. } \mu^2 + 2\mu - 3 = 0,$$

mille juured $\mu_1 = -3$ ja $\mu_2 = 1$ on reaalsed ja erinevate märkidega. Seega on meil punktis (0,0) tegemist sadulpunktiga.

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - y}$.

Koostame karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu & -1 \\ 2 & -1 + \mu \end{vmatrix} = 0, \text{ s.o. } \quad \mu^2 + 1 = 0,$$

mille juured on imaginaarsed $\mu_{1,2} = \pm i$.

Seega on punkt (0,0) vaadeldava võrrandi tsentriks. (Lahenda võrrand ja veendu, et üldlahendiks on kontsentrilised ellipsid võrrandiga

$$2x^2 - 2\,xy + y^2 = C^2 \text{ .)}$$

3. Diferentsiaalvõrrandi singulaarne lahend. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y' = \sqrt[3]{y - x} + 1 \text{ .} \qquad (5.32)$$

Antud juhul on sirge $y = x$ kõik punktid selle võrrandi iseärased punktid, sest nii

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}},$$

kui ka

$$\frac{\partial \frac{1}{f(x,y)}}{\partial x} = \frac{1}{3(y-x)^{2/3}(\sqrt[3]{y - x} + 1)^2}$$

pole tõkestatud sirge $y = x$ punktide ümbruses.

Seega esineb diferentsiaalvõrrandeid, mille *iseärased punktid moodustavad joone*.

Seoses sellega nimetame edaspidi diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ (ka $F(x,y,y') = 0$) <u>iseäraseks jooneks</u> joont, mis on moodustatud antud diferentsiaalvõrrandi iseärastest punktidest. Sirge $y = x$ on niisiis diferentsiaalvõrrandi (5.32) iseärane joon.

Võrrandi (5.32) korral on iseärane joon $y = x$ ühtlasi ka võrrandi lahendiks. (Veendu selles asenduse teel !) Üldjuhul ei tarvitse mistahes iseärane joon olla diferentsiaalvõrrandi lahendiks. Ent, kui diferentsiaalvõrrandi iseärane joon osutub sama võrrandi lahendiks, nimetame teda diferentsiaalvõrrandi <u>iseäraseks</u> ehk <u>singulaarseks lahendiks</u>.

Võrrandi (5.32) üldlahendiks on integraalkõverate

$$27\,(y-x)^2 = 8\,(x+C)^3$$

parv. Selle parve igal kõveral on sirgega $y = x$ üks <u>ühine</u> punkt, sest süsteemil

$$\begin{cases} 27\,(y-x)^2 = 8\,(x+C)^3\,, \\ y = x \end{cases}$$

on üks lahend $x = -C$ iga C korral. Nii on kõveral

$$27\,(y-x)^2 = 8\,(x-x_0)^3, \qquad (5.33)$$

kuc $C = -x_0$, ühiseks punktiks sirgega $y = x$ punkt (x_0,x_0). Kõver (5.33) ja sirge $y = x$ puutuvad nende ühises punktis (x_0,x_0), sest

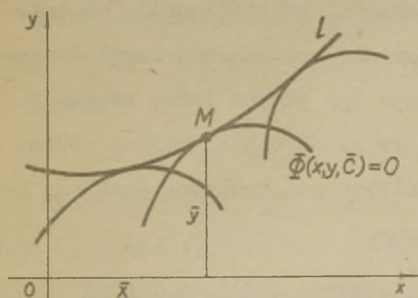
$$y'\Big|_{(x_0,x_0)} = 1\,.$$

(Veendu selles iseseisvalt !)

Seega puutub joon $y = x$ igas oma punktis üht parve kõveraist, ilma et tal oleks selle kõveraga ühist kaat. Niisugust joont nimetatakse kõveraparve mähisjooneks.[15]

Antud näite varal veendusime, et diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate parve mähisjoon osutus diferentsiaalvõrrandi singulaarseks lahendiks.

Kas võime ka üldiselt väita, et integraalkõverate parve mähisjoon on vastava diferentsiaalvõrrandi singulaarne lahend? Näitame, et vastus küsimusele on jaatav.



Joon.21.

Olgu joon l võrrandiga

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (5.34)$$

diferentsiaalvõrrandi

$$F(x,y,y')=0 \qquad (5.35)$$

integraalkõverate parve

$$\Phi(x,y,C)=0 \qquad (5.36)$$

mähisjoon (vt. joon.21). Mähisjoone l ja integraalkõvera

$$\Phi(x,y,\bar{C}) = 0 \qquad (5.37)$$

ühises punktis M $(\bar{x},\bar{y})$ on : 1) rahuldatud nii võrrand (5.34), kui ka (5.37);

2) neil ühine puutuja k , mille tõusunurga tangensiks on

$$\bar{y}' = - \frac{\dfrac{\partial \Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{C})}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{C})}{\partial y}} .$$

15 Vt. [7] lk.37.

Seega on joontel (5.34) ja (5.37) punktis M ühine joonelement $(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')$. Kuna integraalkõverate (5.36) mistahes joonelemendid rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (5.35), siis rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (5.35) ka mähisjoone suvalise punkti joonelemendid. Seega on ka mähisjoon (5.34) diferentsiaalvõrrandi (5.35) lahend.

Kas mähisjoon on singulaarne lahend?

Vastavalt singulaarse lahendi definitsioonile on integraalkõverate parve mähisjoon diferentsiaalvõrrandi singulaarne lahend, sest mähisjoone iga punkti läbib vähemalt kaks erinevat integraalkõverat samas sihis. Nii on mähisjoone iga punkt diferentsiaalvõrrandi iseärane punkt ja seega mähisjoon ise iseärane joon.

4. Singulaarse lahendi leidmine üldlahendi abil. C-diskriminantkõver. Eelnevas nägime, et integraalkõverate parve mähisjoon on vastava diferentsiaalvõrrandi singulaarne lahend. Seega tuleb singulaarse lahendi leidmiseks 1) leida diferentsiaalvõrrandi üldlahend ja 2) leida saadud integraalkõverate parve mähisjoon.

Teise punkti realiseerimiseks tuletame kõveraparve (5.36) mähisjoone võrrandi. Olgu piirkonnas J määratud parve (5.36) mähisjooneks joon l võrrandiga

$$y = y\,(x)\,. \tag{5.38}$$

Igale $\bar{x}\in J$ vastab joonel l punkt $M(\bar{x},\bar{y})$, milles toimub mähisjoone puutumine parve (5.36) ühe joonega. Parve

(5.36) kõveratest läbib punkti M üks kõver, mis olgu määratud konstandiga $\bar{C}$. Nii vastab igale $\bar{x} \in J$ kindel konstandi C väärtus $\bar{C}$. Seega on parve (5.36) võrrandis esinev konstant vaadeldav funktsioonina $C = C(x)$, kus $x \in J$. Punktis $\bar{x}$ on seega üheaegselt rahuldatud nii võrrand (5.38), s.o. $\bar{y} = y(\bar{x})$, kui ka (5.36), s.o.

$$\Phi(\bar{x}, y(\bar{x}), C(\bar{x})) = 0 . \tag{5.39}$$

Kuna $M(\bar{x}, y(\bar{x}))$ oli mähisjoone üks suvaline punkt, peab võrdus (5.39) kehtima samaselt iga $x \in J$ korral. Kuid siis on võrrand

$$\Phi(x, y(x), C(x)) = 0 \tag{5.40}$$

vaadeldav mähisjoone võrrandina, kui eeldada, et funktsioon $C(x)$ on tuntud funktsioon. Et (5.40) kehtib samaselt piirkonnas J, peab mähisjoone puhul kehtima samaselt ka võrdus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial C} C' = 0 . \tag{5.41}$$

Mähisjoone l iga punkt kui punkt kõveraparve (5.36) teatud kõveralt peab teiselt poolt rahuldama võrdust

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 , \tag{5.42}$$

mida rahuldavad kõveraparve (5.36) iga kõvera kõik punktid. Samasuse (5.42) tõttu taandub võrdus (5.41) kujule

$$\frac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial C} = 0 ,$$

sest $C'(x) \neq 0$ kõikjal piirkonnas J (miks?). Seega rahuldavad mähisjoone l kõik punktid nii süsteemi

$$
\begin{cases}
\Phi(x,y,C(x)) = 0, \\
\dfrac{\partial \Phi(x,y,C(x))}{\partial C} = 0\,,
\end{cases}
\tag{5.43}
$$

kui ka võrrandit

$$
\psi(x,y) = 0, \tag{5.44}
$$

mis on saadud süsteemist (5.43) tundmatu funktsiooni C(x) elimineerimisel.

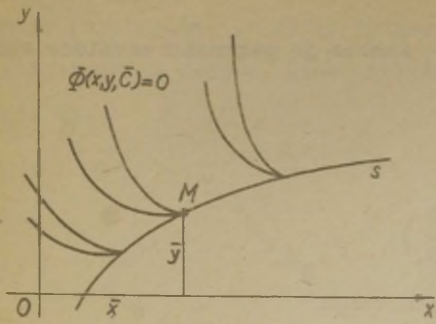
Võrrandiga (5.44) määratud kõverat nimetatakse tavaliselt diferentsiaalvõrrandi (5.35) C-diskriminantkõveraks ja mitte kõveraparve mähisjooneks. Põhjuseks on asjaolu, et süsteem (5.43), seega ka võrrand (5.44) võib peale integraalkõverate parve mähisjoone esitada veel kõveraparve (5.36) niisugust iseärast joont, mis pole antud kõveraparve mähisjooneks, vaid jooneks, mis kujutab endast kõveraparve iseäraste punktide geomeetrilist kohta.

Asugu kõveraparve (5.36) igal kõveral iseärane punkt ,s.o. punkt M(x,y), mille koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial x} = 0\,, \\
\dfrac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial y} = 0.
\end{cases}
\tag{5.45}
$$

Kujutagu punktide M(x,y) hulk sealjuures joont s. Joone s iga punkt olgu parve (5.36) ühe joone iseärane punkt, ilma et kõveral s oleks parve ühegi joonega ühist kaart (Vt. joon. 22).

Nagu mähisjoone võrrandi leidmisel,nii võib ka siin jõu-



Joon.22.

da selgusele, et võrrandit (5.40) võib vaadelda iseärase joone võrrandina, kus funktsioon C(x) on tundmatu funktsioon. Iseärase joone s igas punktis on seega peale samasuse (5.40) rahuldatud veel samasus

$$\frac{\partial F(x,y(x),C(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y(x),C(x))}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial F(x,y(x),C(x))}{\partial C}\cdot C'(x)=0,$$

mis (5.45) tõttu taandub samasuseks

$$\frac{\partial F(x,y(x),C(x))}{\partial C}\cdot C'(x) = 0$$

ja $C'(x) \neq 0$ tõttu samasuseks

$$\frac{\partial F(x,y(x),C(x))}{\partial C} = 0 .$$

Nii rahuldavad joone s punktid tõepoolest süsteemi (5.43) võrrandeid ja seega ka võrrandit (5.44) .

Diferentsiaalvõrrandi singulaarse lahendi leidmisel tuleb seepärast kontrollida, kas piki diskrinantkõverat (5.44) on rahuldatud süsteem (5.45) või ei. Esimesel juhul kujutab võrrand (5.44) endast iseärast joont, teisel juhul – singulaarset lahendit.

Näide 17. Leida võrrandi

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

singulaarne lahend.

Lahendades võrrandi y suhtes ja parametriseerides seda eeskirja

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = \frac{x}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) \end{cases}$$

põhjal saame diferentsiaalvõrrandi

$$\left(p - \frac{1}{p}\right) dx = x\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) dp,$$

mille integreerimisel leiame lähtevõrrandi üldlahendiks

$$x^2 = 2C\left(y - \frac{C}{2}\right). \tag{5.46}$$

C-diskriminantkõvera leidmiseks koostame süsteemi

$$\begin{cases} 2Cy - C^2 - x^2 = 0, \\ 2y - 2C = 0, \end{cases}$$

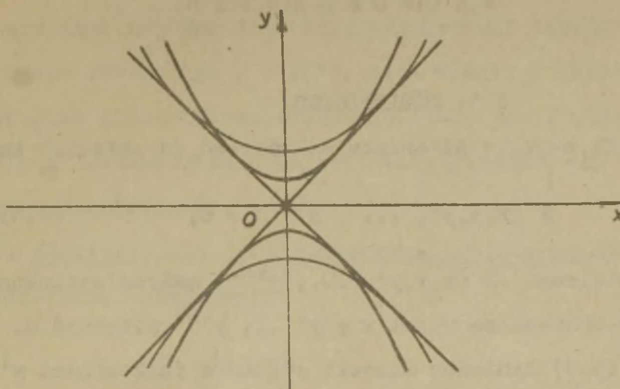
millest C elimineerimisel saame $y^2 - x^2 = 0$. Saadud võrrand laguneb kahe sirge $y = x$ ja $y = -x$ võrrandiks. Nende sirgete suhtes püüame jõuda selgusele, kas nad on kõveraparve (5.46) mähisjoonteks või iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks.

Selleks koostame süsteemi (5.45), s.o.

$$\begin{cases} -2x = 0, \\ 2C = 0, \end{cases}$$

millest järeldub, et kõveratel (5.46) iseäraseid punkte pole. Seega on sirged $y = x$ ja $y = -x$ integraalkõverate

(5.46) mähisjoonteks. Antud näite puhul, kus integraalkõverateks on paraboolid, on niigi selge, et integraalkõveratel pole iseäraseid punkte. Geomeetriliselt vastab antud näitele joonis 23.



Joon. 23.

Märkus 11. Meil on esitatud üks meetod diferentsiaalvõrrandi (5.35) singulaarse lahendi leidmiseks. See meetod toob C- diskriminantkõvera mõiste juurde. Saab näidata (vt. [1] pt. III § 4), et singulaarset lahendit võib esitada ka nn. p-diskrimantkõvera võrrand

$$\psi (x,y) = 0,$$

mis saadakse süsteemist

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 , \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

parameetri $p = y'$ elimineerimisel.

II. K Õ R G E M A T J Ä R K U D I F E R E N T S I A A L V Õ R R A N D I D.

§ 1. PÕHIMÕISTED.

Harilik n-järku diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$F\,(x,y,y',\ \ldots\ ,\ y^{(n)}) = 0, \qquad (1.1)$$

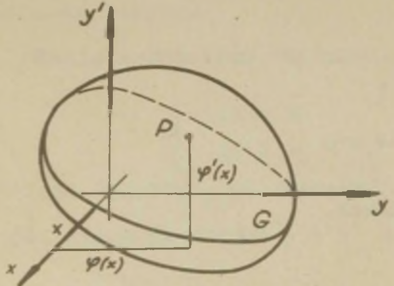
kus funktsiooni $F\,(x,y,y',\ \ldots,\ y^{(n)})$ määramispiirkonnaks on (n+2)-mõõtmelise ruumi $x\ y\ y'\ \ldots\ y^{(n)}$ piirkond H. Kui võrrand (1.1) lahendub üheselt otsitava funktsiooni $y^{(n)}$ suhtes, on võrrand (1.1) samaväärne diferentsiaalvõrrandiga

$$y^{(n)} = f\,(x,y,y',\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}), \qquad (1.2)$$

kus $f\,(x,y,y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ olgu määratud (n+1)-mõõtmelise ruumi $x\ y\ y'\ \ldots\ y^{(n-1)}$ piirkonnas D.

Vaadeldes teist järku võrrandit

$$y'' = f\,(x,y,y'), \qquad (1.3)$$



Joon. 24.

kus funktsioon $f\,(x,y,y')$ on määratud ruumi $x\ y\ y'$ piirkonnas G (vt. joon. 24), ja rääkides võrrandi (1.3) lahendist $y = \varphi(x)$, eeldame edaspidi alati, et punkt $P\,(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) \in G$.

Analoogiliselt sellega eeldame, et võrrandi (1.2) lahendiga $y=\psi(x)$ määratud punkt $Q(x,\psi(x),\psi'(x),\ldots,\psi^{(n-1)}(x))\in D$.

Mistahes n-järku diferentsiaalvõrrandis (1.2) on otsitavaks ühe muutuja funktsioon $y = y(x)$. Kuna igale ühe muutuja funktsioonile vastab graafiliselt tasandiline kõver, siis vastab mistahes n-järku diferentsiaalvõrrandi lahendile niisugune kõver võrrandiga $y = y(x)$, mida määrav funktsioon $y(x)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1.2) või (1.1). Kõverat $y = y(x)$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (1.2) või (1.1) integraalkõveraks.

1. <u>Algtingimused ja algtingimustega ülesanne</u>. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x,y) \tag{1.4}$$

korral, kus $f(x,y)$ on määratud piirkonnas K, tuli algtingimusega ülesandes vastavalt algtingimusele

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.5}$$

leida diferentsiaalvõrrandi (1.4) niisugune lahend $y=\varphi(x)$, mis rahuldaks algtingimust (1.5).

Olgu vaatlemisel teist järku diferentsiaalvõrrand (1.3). <u>Algtingimustega ülesannet</u> ehk <u>Cauchy ülesannet</u> defineeritakse siin järgmiselt.

Leida diferentsiaalvõrrandi (1.3) niisugune lahend

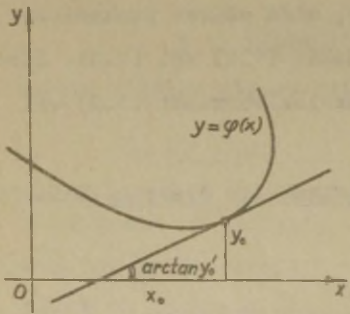
$$y=\varphi(x),$$

mis rahuldab piirkonnas G tingimusi

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{1.5}$$

Tingimused (1.5) kannavad algtingimuste ehk Cauchy algtingimuste nimetust.

Geomeetriliselt vastab siin Cauchy ülesandele diferentsiaalvõrrandi (1.3) niisuguse integraalkõvera $y = \varphi(x)$ leidmine, mis läbiks punkti (x_0, y_0) tõusuga y'_0 (vt. joon.25), kus $(x_0, y_0, y'_0) \in G$.



Joon.25.

Võrrandit

$$y'' + y' \frac{1}{x} = 0 \qquad (1.6)$$

näiteks rahuldavad kõik funktsioonid

$$y = C_1 \ln|x| + C_2, \qquad (1.7)$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid (näita seda!).

Kui otsime niisugust lahendit, mis rahuldaks algtingimusi

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \qquad (1.8)$$

tuleb selle leidmiseks võrrandiga (1.7) antud integraalkõveratest välja eraldada see, mis läbib punkti (1,0) puutuja tõusuga $y'(1) = 1$. Et niisugust lahendit leida, määrame lahendis (1.7) konstandid C_1 ja C_2 vastavalt algtingimustele. Arvutades saame, et $C_2 = 0$ ja, kuna $y' = C_1 \frac{1}{x}$, siis $C_1 = 1$.

Algtingimusi (1.8) rahuldavaks lahendiks on seega

$$y = \ln|x|. \qquad (1.9)$$

Üldjuhul mõistetakse võrrandi (1.2) puhul algtingimustega ehk Cauchy ülesande all järgmist ülesannet.

Leida diferentsiaalvõrrandi (1.2) niisugune lahend $y = \varphi(x)$, mis piirkonnas D rahuldab tingimusi

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)= y_0^{(n-1)}. \qquad (1.10)$$

Tingimused (1.10) kannavad n-järku diferentsiaalvõrrandi algtingimuste nimetust ehk Cauchy algtingimuste nimetust.

2. n-järku diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahend. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi (1.4) üldlahend (vt. ptk. I § 1 art. 5) oli ühest suvalisest konstandist sõltuv niisugune lahend $y = \varphi(x,C)$, mis sobival konstandi C valikul rahuldas algtingimust (1.5) mistahes $(x_0,y_0) \in K$ korral.

Teist järku diferentsiaalvõrrandi (1.6) puhul nägime, et seda rahuldas kaheparameetriline kõveraparv (1.7). Sealjuures on kõveraparv (1.7) niisugune, et mistahes (x_0,y_0,y_0') korral piirkonnast, kus $x \neq 0$, on konstandid C_1 ja C_2 määratud üheselt (näita seda vastava süsteemi lahendamise teel !).

Olgu lahendite parve (1.7) puhul võimalik näidata, et teist järku diferentsiaalvõrrandi (1.3) kahest suvalisest konstandist C_1 ja C_2 sõltuv lahend $y = \varphi(x,C_1,C_2)$ on niisugune, mis sobival konstantide C_1 ja C_2 valikul rahuldab algtingimusi (1.5) mistahes (x_0,y_0,y_0') korral piirkonnast G. Analoogia põhjal esimest järku võrrandiga nimetatakse lahendit $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ diferentsiaalvõrrandi (1.3) üldlahendiks.

Üldjuhul mõistetakse diferentsiaalvõrrandi (1.2) üldlahendi all järgmist.

D i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i (1.2) ü l d l a h e n d i k s n i m e t a t a k s e n i i s u g u s t n s u v a l i s e s t k o n s t a n d i s t s õ l t u v a t l a h e n d i t $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, m i s s o b i v a l k o n s t a n t i d e $C_1, C_2, \ldots, C_n$ v a l i k u l r a h u l d a b a l g t i n g i m u s i (1 . 1 0) i g a $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ k o r r a l, kus D on funktsiooni $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ pidevuse piirkond. L a h e n d i d , m i s s a a d a k s e ü l d l a h e n d i s t k o n s t a n t i d e $C_1, C_2 \ldots, C_n$ f i k s e e r i t u d v ä ä r t u s t e k o r r a l k a n n a v a d <u>erilahendite</u> n i m e t u s t.

n-järku diferentsiaalvõrrandi lahendamisel jõutakse sageli võrrandini

$$\Phi(x,y,C_1,\ldots, C_n) = 0, \qquad (1.11)$$

mis määrab diferentsiaalvõrrandi lahendi $y = \varphi(x,C_1,\ldots,C_n)$ ilmutamata kujul. Sel korral öeldakse, et v õ r r a n d (1.11) m ä ä r a b d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i l a h e n d i ehk (1.11) on d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i ü l d i n t e g r a a l.

<u>Märkus 12</u>. Olgu märgitud, et n-järku $(n > 1)$ diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmisel antakse sageli lisatingimused (1.10) ette teisel kujul. (Kui palju neid peab olema, et erilahend oleks määratav ?)

Kui näiteks diferentsiaalvõrrandi (1.6) puhul nõuda, et otsitav integraalkõver läbiks kahte punkti — P(1,0) ja Q($-e^2$,2) (leida üldlahendist (1.7) vastav kõver!), siis räägitakse <u>rajatingimustega diferentsiaalvõrrandi lahendamise ülesandest</u> ehk <u>rajaülesandest</u>. Üksikasjalikumalt vaadeldakse rajaülesannet käesoleva peatüki § 4.

<u>Näide 1</u>. Näitame, et funktsioon $y = ax^2 + bx + c$, kus a,b ja c on suvalised konstandid, on diferentsiaalvõrrandi $y''' = 0$ üldlahendiks. Selleks, vastavalt üldlahendi definitsioonile tõestame, et

1) $y = ax^2 + bx + c$ rahuldab antud võrrandit suvaliste a,b ja c korral;

2) konstandid a,b ja c on üheselt määratavad vastavalt algtingimustele $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ ja $y''(x_0) = y_0''$, suvaliste x_0, y_0, y_0' ja y_0'' korral.

Esimene väide on ilmselt õige, sest suvaliste a,b ja c puhul on $y''' = 0$. Teine väide järeldub sellest, et konstandid a,b ja c on ja sealjuures üheselt määratud süsteemiga

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ 2\,ax_0 + b = y_0', \\ 2\,a = y_0''. \end{cases}$$

(Näita, et antud süsteemil on suvaliste x_0, y_0, y_0' ja y_0'' korral parajasti üks lahend !).

3. <u>n-järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu teo-</u>

reem. Vaatleme teist järku diferentsiaalvõrrandit (1.3). Teostades võrrandis (1.3) muutujate asenduse $y' = z$ ja $z' = y''$, jõuame kahe otsitava funktsiooni $y(x)$ ja $z(x)$ suhtes järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemini

$$\begin{cases} y' = z , \\ z' = f(x,y,z), \end{cases} \qquad (1.12)$$

mida nimetame võrrandile (1.3) vastavaks diferentsiaalvõrrandite süsteemiks.

Süsteemis (1.12) on 1) kaks (üldiselt n) otsitavat funktsiooni ja kaks (üldiselt n) võrrandit, 2) võrrandid lahendatud otsitavate funktsioonide tuletiste suhtes ja 3) otsitavate funktsioonide kõrgeimat järku tuletisteks - esimesed tuletised. Niisugust süsteemi, mis rahuldab kolme loetletud tingimust, nimetatakse Cauchy normaalkujul esitatud diferentsiaalvõrrandite süsteemiks.

On arusaadav, et diferentsiaalvõrrandi (1.3) iga lahend rahuldab süsteemi (1.12). Ka ümberpöördult, kui oletada, et

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$$

on diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1.12) mistahes lahend, siis on pikemata selge, et funktsioon $y(x)$ rahuldab ka võrrandit (1.3).

Nii võime järeldada, et diferentsiaalvõrrandi (1.3) ja talle vastava Cauchy normaalkujul antud süsteemi (1.12) lahendamise ja lahendi olemasolu selgitamise ülesanded on ekvivalentsed.

Analoogiliselt saab näidata, et n-järku diferentsiaalvõrrandi (1.2) ja talle vastava Cauchy normaalkujul esitatud süsteemi

$$\begin{cases} y' = z_1, \\ z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ z_{n-2}' = z_{n-1}, \\ z_{n-1}' = f(x,y,z_1,\ldots, z_{n-1}) \end{cases} \qquad (1.13)$$

lahendamise ja lahendi olemasolu selgitamise ülesanded on ekvivalentsed.

Meie konspekti kolmandas peatükis tõestatakse üldise Cauchy normaalkujul esitatud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreem. Viimase vahetuks järelduseks (näita seda ptk. III § 5 õppimisel) on järgmine diferentsiaalvõrrandi (1.2) lahendi olemasolu ja ühesuse teoreem.

<u>Teoreem 13</u>. Olgu funktsioon $f(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)})$ määratud ja pidev $(n+1)$-mõõtmelise ruumi $x\ y\ y' \ldots y^{(n-1)}$ kinnises tõkestatud piirkonnas D ning rahuldagu ta piirkonnas D Lipschitzi tingimust muutujate $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ suhtes.

Piirkonna D mistahes seesmise punkti $A(x_0,y_0,y_0', \ldots, \ldots, y_0^{(n-1)})$ korral leidub niisugune lõik $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $(\delta > 0)$, millel eksisteerib parajasti üks algtingimusi

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.10)$$

rahuldav diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} = f\,(x,y,y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

lahend.

Samas märgime, et algtingimusi (1.10) rahuldava lahendi (vähemalt ühe) olemasoluks piisab sellest, kui võrrandis (1.2) on funktsioon $f(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)})$ pidev piirkonnas D. Lipschitzi tingimuse lisamine garanteerib seega diferentsiaalvõrrandi (1.2) lahendi ühesust.

Lisame veel, et diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendi olemasolu ja lahendi leidmise küsimuse selgitamisel tuleb nõuda funktsioonilt $F\,(x,y,y',\ldots, y^{(n)})$ niisuguste tingimuste täidetust, mis garanteerivad võrrandi (1.1) lahenduvuse $y^{(n)}$ suhtes.

Esimese paragrahvi lõpetuseks märgime, et kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite üheks sagedamini kasutatavaks lahendamisvõtteks on võrrandi järgu alandamine. Diferentsiaalvõrrandite üldkursuses käsitletakse mitut liiki võrrandeid, kus järgu alandamine on teostatav. Vastavate võrrandite liikide ja lahendusmeetoditega tutvutakse lähemalt diferentsiaalvõrrandite kursuse praktikumis (Vt. samuti [1] ptk. IV § 2-4 ja [3], [4] pt. II § 2).

§ 2. KÕRGEMAT JÄRKU LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

1. n-järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi mõiste. Diferentsiaalvõrrandit

$$
\begin{aligned}
&Q_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + Q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots \\
&\qquad \dots + Q_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + Q_n(x)y = Q(x),
\end{aligned}
\tag{2.0}
$$

kus funktsioonid $Q_i(x)$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$ ja $Q(x)$ on määratud vahemikus J ja $Q_0(x) \neq 0$, nimetatakse üldiseks n-järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks. Üldisust kitsendamata loeme edaspidi $Q_0(x) = 1$ iga $x \in J$ korral (miks võib seda eeldada?) ning vaatleme edaspidi võrrandit (2.0) kujul

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots \\
&\qquad \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = P(x).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Kui $P(x) = 0$ iga $x \in J$ korral, kannab võrrand (2.1) homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi nimetust. Selleks on võrrand

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0. \tag{2.2}$$

Võrrandit (2.2) nimetame edaspidi võrrandile (2.1) vastavaks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Diferentsiaalvõrrandi (2.1) lahendi olemasolu ja ühesus vahemikus J on garanteeritud funktsioonide $P_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ja $P(x)$ pidevusega vahemikus J. Öeldu järeldub vahetult teoreemist 13. Selleks 1) esita võrrand $\frac{d^n y}{dx^n}$ suhtes ilmutatud kujul ja 2) näita, et teisendatud võrrandi paremal pool seisev funktsioon rahuldab teoreemi 13 eeldusi iga $x \in J$ korral.

2. Diferentsiaaloperaatori mõiste. Olgu X ja Y kaks hulka vastavalt elementidega x ja y. Kui igale elemendile $x \in X$ on teatud eeskirja põhjal seatud vastavusse element $y \in Y$, siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud operaator (näiteks A) ja kirjutatakse $y = Ax$. Hulkasid X ja Y nimetatakse vastavalt operaatori A määramispiirkonnaks ja väärtuste piirkonnaks. Edaspidi vaatleme operaatoreid, mille määramispiirkondadeks on lineaarsed hulgad. Hulka X nimetatakse lineaarseks hulgaks, kui sellel hulgal on defineeritud liitmine ja skalaariga korrutamine nii, et kehtivad seadused:

1° kui $x_1, x_2 \in X$, siis $x_1 + x_2 \in X$;

2° iga $x_1, x_2, x_3 \in X$ puhul $(x+y)+z = x+(y+z)$;

3° leidub element $\theta \in X$ nii, et iga $x \in X$ puhul $x + \theta = \theta + x = x$;

4° iga $x \in X$ puhul leidub element $-x \in X$, nii, et $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;

5° kui $x \in X$, siis $\lambda x \in X$ iga reaalarvulise λ korral;

6° $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, ($\mu$ — mistahes reaalarv) ;

7° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

8° $1 \cdot x = x$.

Operaatorit A nimetatakse <u>lineaarseks</u>, kui iga $x_1, x_2 \in X$ ja mistahes reaalarvude λ_1 ja λ_2 korral kehtib võrdus

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 .$$

Kui näiteks hulk X on vahemikus J n korda diferentseeruvate funktsioonide hulk, siis on sellel hulgal defineeritav nn. <u>diferentseerimisoperaator</u> $\frac{d}{dx} = D$, mis igale funktsioonile $f(x) \in X$ seab vastavusse funktsiooni $f'(x)$, nii et $f'(x) = Df(x)$.

Operaator D on ilmselt lineaarne operaator. Analoogiliselt on defineeritud operaatorid $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, mis kõik on lineaarsed operaatorid n korda diferentseeruvate funktsioonide hulgal. Tõesta iseseisvalt, et $D^{k+l} = D^{l+k}$.

Kui vaadelda hulka X jälle vahemikus J n korda diferentseeruvate funktsioonide hulgana, siis on sellel hulgal defineeritav <u>n-järku diferentsiaaloperaator</u> valemiga

$$L = D^n + P_1(x)D^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)D + P_n(x) ,$$

mis igale funktsioonile $y \in X$ seab vastavusse funktsiooni Ly, nii et

$$Ly = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y .$$

Diferentsiaaloperaatori L abil on võrrandid (2.1) ja

(2.2) esitatavad vastavalt kujul

$$Ly = P(x) \tag{2.3}$$

ja

$$Ly = 0 \, . \tag{2.4}$$

Näitame, et operaator L on lineaarne operaator. Selleks näitame, et mistahes $y_1, y_2 \in X$ ja reaalarvude λ_1, λ_2 korral on

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2 .$$

Kui arvestame, et $P_0(x) = 1$ vahemikus J, võime operaatori L esitada kujul $L = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^{n-k}$. Seega

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^{n-k}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \left[\lambda_1 D^{n-k} y_1 + \lambda_2 D^{n-k} y_2 \right] =$$

$$= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^{n-k} y_1 + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^{n-k} y_2 =$$

$$= \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2$$

ja väide on tõestatud.

(Kus antud tõestuskäigus on kasutatud operaatori D^s lineaarsust?).

3. Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite üldised omadused. Tõestame mõned teoreemid, millele tugineme lineaarsete diferentsiaalvõrrandite üldise teooria ja lahendusmeetodite esitamisel.

Vahemiku J all me mõistame käesoleva artikli ulatuses operaatorit L määravate funktsioonide $P_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$

pidevuse vahemikku, seega vahemikku, millel on diferentsiaalvõrrandi (2.3) Cauchy ülesandel parajasti üks algtingimusi rahuldav lahend. Samuti eeldame, et funktsioon P(x) on vahemikus J pidev funktsioon.

Teoreem 14. Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.3) lahendid, siis on $C\left[y_1(x) - y_2(x)\right]$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend mistahes reaalarvulise C korral.

T õ e s t u s . Tuginedes operaatori L lineaarsusele, leiame et

$$L\left\{C\left[y_1(x) - y_2(x)\right]\right\} = C\left[Ly_1(x) - L\,y_2(x)\right] =$$

$$= C\left[P(x) - P(x)\right] = 0$$

iga $x \in J$ korral, kuna $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ olid diferentsiaalvõrrandi (2.3) lahendid.

Teoreem 15. Kui $y_1(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.3) lahend ja $y_2(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend, siis on $y_1(x) + C\,y_2(x)$ võrrandi (2.3) lahend mistahes reaalarvulise C korral.

T õ e s t u s. Tuginedes operaatori L lineaarsusele leiame, et

$$L\left[y_1(x) + C\,y_2(x)\right] = L\,y_1(x) + C\,L\,y_2(x) = P(x) \text{ iga}$$

$x \in J$ korral, sest $y_1(x)$ oli diferentsiaalvõrrandi (2.3) ja $y_2(x)$ - diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend.

Teoreem 16. Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendid, siis on $C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ sama võrrandi lahend mistahes reaalarvuliste C_1 ja C_2 korral.

(Tõesta teoreem iseseisvalt ja näita, et ta on kehtiv mistahes lõpliku arvu lahendite korral !).

Teoreem 17. Kui diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend $y(x)$ rahuldab punktis $x_0 \in J$ tingimusi

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 , \qquad (2.5)$$

siis on ta triviaalne lahend, s.o.

$y(x) = 0$ iga $x \in J$ korral.

T õ e s t u s. Tingimused (2.5) on vaadeldavad diferentsiaalvõrrandi (2.4) algtingimustena. Kokkuleppe kohaselt on võrrandi (2.4) kordajad $P_k(x)$ pidevad vahemikus J ning igal algtingimustega ülesandel on olemas vaid üks neid tingimusi rahuldav lahend. Öeldu põhjal peab $y(x)$, mis rahuldab tingimusi (2.5), olema triviaalne lahend, kuna viimane ilmselt eksisteerib ja rahuldab tingimusi (2.5).

Teoreem 18. Kui diferentsiaalvõrrandi (2.3) vabaliige $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ ja võrrandi $Ly = F_1(x)$ erilahendiks on $y^*(x)$, kuna võrrandi $Ly = F_2(x)$ erilahendiks on $y^{**}(x)$, siis on funktsioon $y^*(x) + y^{**}(x)$ diferentsiaalvõrrandi $Ly = F_1(x) + F_2(x)$ erilahendiks.

(Tõesta teoreem iseseisvalt tuginedes operaatori L lineaarsusele!)

Teoreem 19. Kui funktsioon $y_1(x) + iy(x)$ $(i = \sqrt{-1})$ on diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend, siis on ka funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ selle võrrandi lahenditeks.

Tõesta teoreem iseseisvalt, tuginedes operaatori L lineaarsusele ja definitsioonile

$$\frac{d[z_1(x) + i\, z_2(x)]}{dx} = \frac{dz_1(x)}{dx} + i\, \frac{dz_2(x)}{dx} .$$

4. <u>Funktsioonide lineaarne sõltuvus.</u> Olgu $f_k(x)$ ($k = 1,2,\ldots, m$) vahemikus J defineeritud funktsioonide süsteem.

Öeldakse, et <u>funktsioonid $f_k(x)$ ($k= 1,2,\ldots, m$) on vahemikus J lineaarselt sõltuvad,</u> kui leiduvad arvud c_k ($k = 1,2,\ldots, m$), mis ei ole kõik nullid ja mille puhul kehtib seos

$$\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x) = 0 \tag{2.6}$$

iga $x \in J$ korral.

Kui seos (2.6) kehtib vaid juhul $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, siis öeldakse, et funktsioonid $f_k(x)$ ($k = 1,2,\ldots,m$) on <u>lineaarselt sõltumatud vahemikus J.</u> Funktsioonide lineaarse sõltuvuse korral v ä h e m a l t ü k s f u n k t s i o o n i d e s t $f_k(x)$ a v a l d u b l i n e a a r s e k o m b i n a t s i o o n i n a ü l e j ä ä n u t e s t .

<u>Näide 2.</u> Funktsioonid $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^4$ on lineaarselt sõltuvad kogu reaalteljel, sest samasus

$$c_1 \cdot 0 + c_2\, x + c_3\, x^2 + c_4\, x^4 = 0$$

kehtib näiteks järgmiste konstantide korral: $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

(Missugune vaadeldavatest funktsioonidest sõltub ülejäänutest ja kuidas ? Kas funktsioonid $f_k(x)$, ($k = 1,2,\dots,m$), kus $f_1(x) = 0$ iga $x \in J$ korral, ja $f_2(x), f_3(x),\dots,f_m(x)$- suvalised vahemikus J määratud funktsioonid, on vahemikus J lineaarselt sõltuvad või sõltumatud?)

Näide 3. Funktsioonid $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = 1$, $f_4(x) = \ln x$, $f_5(x) = e^x$ on vahemikus $(0, \infty)$ samuti lineaarselt sõltuvad, sest samasus

$$c_1 \sin^2 x + c_2 \cos^2 x + c_3 + c_4 \ln x + c_5 e^x = 0$$

kehtib näiteks konstantide $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = c_5 = 0$ korral.

Näide 4. Funktsioonid $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ ja $f_3(x) = x^3$ on lineaarselt sõltumatud, sest samasus

$$C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 = 0$$

kehtib vahemikus $(-\infty, \infty)$ ainult siis, kui $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. (Miks?).

Diferentsiaalvõrrandite teoorias tuleb sageli selgitada küsimust funktsioonide lineaarsest sõltuvusest. Alljärgnevas esitame funktsioonide lineaarse sõltuvuse tingimuse.

Olgu funktsioonid $y_k(x)$ ($k = 1,2,\dots, m$) lineaarselt sõltuvad vahemikus J. Definitsiooni kohaselt leiduvad siis arvud C_k ($k= 1,2,\dots,m$) , mis ei ole kõik nullid, nii et kehtib samasus

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_k(x) = 0$$

iga $x \in J$ puhul.

Diferentseerides viimast samasust $m - 1$ korda, saame samasused

$$\sum_{k=1}^{m} C_k\, y_k^{(l)}(x) = 0 \qquad (l = 1,2,\ldots, m-1),$$

mis suvalises punktis $x = x_0 \in J$, annavad järgmise võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} C_k\, y_k(x_0) = 0\,, \\ &\sum_{k=1}^{m} C_k\, y'_k(x_0) = 0\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\sum_{k=1}^{m} C_k\, y_k^{(m-1)}(x_0) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Süsteem (2.7) on konstantide C_k suhtes lineaarne homogeenne võrrandite süsteem, millel on olemas mittetriviaalne lahend (arvude C_k-de seas on nullist erinevaid arve !).

Algebra põhikursusest on teada, et niisugusel juhul peab süsteemi (2.7) determinant olema võrdne nulliga

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_m(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \ldots & y'_m(x_0) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(m-1)}(x_0) & y_2^{(m-1)}(x_0) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

Et $x_0 \in J$ oli suvaline, peab tingimus (2.8) kehtima samaselt vahemikus J.

Võrduses (2.8) esinev determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_m(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = W(y_1(x),\dots,y_m(x))$$

kannab funktsioonide süsteemi $y_k(x)$ $(k=1,2,\dots,m)$ Wronski determinandi nime. Teda tähistatakse veel lühidalt sümboliga $W(x)$.

Ülalsaadud tulemuse võime nüüd sõnastada järgmise teoreemina.

Teoreem 20. Vahemikus J lineaarselt sõltuvate funktsioonide süsteemi Wronski determinant on selles vahemikus samaselt null.

Seega tingimus, et

$$W(y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0 \qquad (2.9)$$

iga $x \in J$ korral, on tarvilik selleks, et funktsioonid $y_k(x)$ $(k = 1,2,\dots, m)$ oleksid vahemikus J lineaarselt sõltuvad. Tunnuseks sobiks tingimus (2.9) alles siis, kui ta oleks ka piisav.

Seega on meie ees küsimus teoreemi 20 pööratavusest.

Küsimuse selgitamiseks vaatleme eelkõige järgmist näidet.

Olgu funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ defineeritud vahemikus (0,2) järgmiselt:

$$y_1(x) = \begin{cases} -x^2+2x-1, & \text{kui } x \in (0,1] \ ; \\ 0 \ , & \text{kui } x \in (1,2) \ ; \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{kui } x \in (0,1] \ ; \\ x^2-2x+1 & ,\text{kui } x \in (1,2) \ . \end{cases}$$

Vaadeldavad funktsioonid on vahemikus (0,2) lineaarselt sõltumatud, sest

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = \begin{cases} C_1(2x-x^2-1), & \text{kui } x \in (0,1] \ ; \\ C_2(x^2-2x+1), & \text{kui } x \in (1,2) \end{cases}$$

ning samasus $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$ iga $x \in (0,2)$ puhul kehtib ainult $C_1 = C_2 = 0$ korral.

Samal ajal on[16]

$$W(y_1(x),\ y_2(x)) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x - x^2 - 1 & 0 \\ 2 - 2x & 0 \end{vmatrix}, & \text{kui } x \in (0,1] \ ; \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2-2x+1 \\ 0 & 2x-2 \end{vmatrix}, & \text{kui } x \in (1,2) \end{cases}$$

ning seega $W(y_1(x),\ y_2(x))=0$ iga $x \in (0,2)$ puhul.

Vaadeldava näite põhjal võime öelda, et e k s i s t e e r i b niisuguseid f u n k t s i o o n i d e s ü s t e e m e, m i l l e W r o n s k i d e t e r m i n a n t o n v a h e m i k u s J s a m a s e l t n u l l, k u i d f u n k t s i o o n i d i s e o n l i n e a a r s e l t s õ l t u m a t u d.

Nii pole teoreem 20 vahetult pööratav. Näitame, et seda saab teha teatud lisatingimustel funktsioonide süsteemi $y_k(x)$, ($k = 1,2,\ldots, m$) kohta. Nimelt p i i s a b sellest l i s a n õ u d e s t, e t f u n k t s i o o n i d $y_k(x)$

[16] Pane tähele, et funktsioonidel $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ eksisteerivad kahepoolsed tuletised punktis $x = 1$.

($k = 1,2,\ldots, m$) o l e k s i d m i n g i l i n e a a r s e d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i l a h e n d i d . Öeldu kinnituseks tõestame järgmise teoreemi.

<u>Teoreem 21.</u> Selleks, et lineaarse diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendid $y_k(x)$ ($k=1,2,\ldots,n$) oleksid lineaarselt sõltuvad vahemikus J, on tarvilik ja piisav, et

$$W\,(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = 0 \qquad (2.10)$$

iga $x \in J$ korral.

T a r v i l i k k u s. Tingimuse (2.10) tarvilikkus järeldub vahetult teoreemist 20.

P i i s a v u s. Tingimuse (2.10) piisavuse tõestamiseks näitame, et 1) leiduvad niisugused konstandid $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$, mille seas on nullist erinevaid, ent funktsioon

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i\, y_i(x) \qquad (2.11)$$

rahuldab punktis $x_0 \in J$ tingimusi

$$\bar{y}\,(x_0) = \bar{y}'(x_0) = \ldots = \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad (2.12)$$

Eeldades väite 1 kehtivust, näitame, et 2) lahendid $y_k(x)$ ($k=1,2,\ldots,n$) on lineaarselt sõltuvad. Teoreemi 16 põhjal on funktsioon (2.11) võrrandi (2.4) niisugune lahend, mis rahuldab algtingimusi (2.12). Teoreemi 17 põhjal on $\bar{y}(x) = 0$ iga $x \in J$ korral, s.o.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i\, y_i(x) = 0 \qquad (x \in J). \qquad (2.13)$$

Kuna konstantide $\bar{C}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ seas on nullist erinevaid, on lahendid $y_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots, n)$ vahemikus J lineaarselt sõltuvad.

On jäänud tõestada väide 1.

Konstandid $\bar{C}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ määrame süsteemist

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} C_i y_i (x_o)= 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} C_i y_i' (x_o)= 0 , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_o)=0 , \end{aligned} \tag{2.14}$$

mille determinant $W(x_o) = 0$ eelduse põhjal. Süsteemil (2.14), kui lineaarsel homogeensel süsteemil, on mittetriviaalne lahend, milleks olgu $\bar{C}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Arvestades võrdust (2.11), süsteemi (2.14) ja seda, et konstandid $\bar{C}_i$ $(i=1,2,\ldots,$ $\ldots,n)$ on viimase lahendid, järeldub, et funktsioon $\bar{y}(x)$ rahuldab tingimusi (2.12).

Sellega on meie teoreem tõestatud.

Edaspidiseks on oluline äsja tõestatud teoreemi järgmine järeldus.

Järeldus 1. Selleks, et lineaarse diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendid $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ oleksid vahemikus J lineaarselt sõltumatud, on tarvilik ja piisav, et

$$W (y_1(x),\ldots, y_n(x)) \neq 0 \tag{2.15}$$

i g a $x \in J$ k o r r a l.

T a r v i l i k k u s. Olgu diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendid $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ lineaarselt sõltumatud. Väite vastaselt eletame algul, et nende lahendite puhul on $W(x)=0$ iga $x \in J$ korral. Teoreemi 21 piisava osa põhjal on siis lahendid lineaarselt sõltuvad. Sellega on püstitatud oletus väär. Kuid on veel mõeldav, et leidub kas või üks punkt, $x = x_0$, kus $W(x_0) = 0$. Ent seegi oletus toob meid vastuolule, sest nüüd leiduvad niisugused konstandid $\bar{C}_i$ $(i =1,2,\ldots,\ldots,n)$ (nende olemasolu on näidatud teoreemi 21 piisavas osas), mille seas on nullist erinevaid, kuid kehtib samasus (2.13) (viimane on jälle põhjendatud teoreemi 21 piisavas osas). Selle põhjal on lahendid $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ lineaarselt sõltuvad, mis pole võimalik meie eelduse tõttu. Tingimuse (2.15) tarvilikkus on sellega tõestatud.

Tingimuse (2.15) piisavus järeldub teoreemist 20 väite vastase oletusega.

Kokku võttes võime öelda: n-j ä r k u l i n e a a r s e h o m o g e e n s e d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i e r i l a h e n d i t e $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ W r o n s k i d e t e r m i n a n t $W(x)$ o n v a h e m i k u s J k a s s a m a s e l t v õ r d n e n u l l i g a, v õ i n u l l i s t e r i n e v s e l l e v a h e m i k u i g a s p u n k t i s. Esimesel juhul on lahendid lineaarselt sõltuvad, teisel juhul – lineaarselt sõltumatud.

5. <u>Lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteem.</u> Näitame, et n-järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend avaldub selle võrrandi n lineaar-

selt sõltumatu erilahendi kaudu.

Teoreem 22. Diferentsiaalvõrrandi (2.4) mistahes lahend avaldub selle võrrandi n lineaarselt sõltumatu lahendi lineaarse kombinatsioonina.

T õ e s t u s. Olgu $y_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) diferentsiaalvõrrandi (2.4) lineaarselt sõltumatud lahendid vahemikus J. Järelduse 1 põhjal kehtib võrratus (2.15). Olgu siis $x = x_0 \in J$ niisugune punkt, et

$$W\,(y_1(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0)) \neq 0\ ,$$

ja $\bar{y}(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) mingi lahend, nii et

$$\bar{y}(x_0) = y_0,\quad \bar{y}'(x_0) = y_0',\ \ldots\ ,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\ . \qquad (2.16)$$

Vaatleme lineaarset mittehomogeenset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = y_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y'_i(x_0) = y_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}, \qquad (2.17)$$

mille determinant $W\,(y_1(x_0),\ldots,\ y_n(x_0)) \neq 0$. Seega esineb süsteemi (2.17) puhul Crameri peajuht ning süsteemil on vaid üks lahend, milleks olgu konstandid $\bar{C}_1,\ \bar{C}_2,\ \ldots,\ \bar{C}_n$. Leitud konstantide abil moodustame funktsiooni

$$y_*(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i\, y_i(x). \qquad (2.18)$$

Teoreemi 16 tõttu on $y_*(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend, mis rahuldab algtingimusi (2.16), kuna $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ on süsteemi (2.17) lahendiks.

Vaadeldes lõpuks vahet

$$\bar{y}(x) - y_*(x) = z(x) ,$$

paneme tähele, et

$$z(x_0) = z'(x_0) = \ldots = z^{(n-1)}(x_0)=0 .$$

Samaaegselt on $z(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend (vt. teoreem 16). Teoreemist 17 järeldub, et $z(x) = 0$ iga $x \in J$ korral, s.o. $\bar{y}(x) = y_*(x)$, mis (2.18) tõttu tähendabki, et $\bar{y}(x)$ on lahendite $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ lineaarne kombinatsioon. Teoreem on tõestatud.

Näide 4. Diferentsiaalvõrrandil

$$y''' = 0 \tag{2.19}$$

on vahemikus $(-\infty, \infty)$ kolm lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ ja $y_3(x) = x^2$ (veendu selles iseseisvalt!). Teoreemi 22 põhjal avaldub diferentsiaalvõrrandi iga teine lahend nende lineaarse kombinatsioonina. Võrrandi (2.19) lahendiks on seega ka funktsioon

$$\bar{y}(x) = 3 - 2x + 4x^2,$$

(näita seda !) sest vahetult on selge, et

$$\bar{y}(x) = 3 \cdot y_1(x) - 2 \cdot y_2(x) + 4 \cdot y_3(x) .$$

Nii on iga lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamise seisukohalt oluline osata leida diferentsiaalvõrrandi need n lahendit, mis on lineaarselt sõltumatud ning mille kaudu avalduvad kõik teised võrrandi lahendid. Selle erilise osa tõttu kannab n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi n lineaarselt sõltumatust lahendist moodustatud lahendite süsteem <u>diferentsiaalvõrrandi</u> <u>lahendite fundamentaalsüsteemi</u> nime.

Teoreemi 22 põhjal võime nüüd öelda, et n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) ,$$

kus funktsioonid $y_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) on selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemiks.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteem on oluline ka mittehomogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise seisukohalt.

<u>Teoreem 23</u>. Kui süsteem $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ on diferentsiaalvõrrandi

$$Ly = 0 \tag{2.4}$$

lahendite fundamentaalsüsteem, siis avaldub diferentsiaalvõrrandi

$$Ly = P(x) \tag{2.3}$$

mistahes lahend $y(x)$ kujul

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x) + y^*(x), \tag{2.20}$$

kus $y^*(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.3) mingi lahend.

T õ e s t u s . Olgu $\bar{y}(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.3) mistahes lahend. Teoreemi 14 põhjal on $\bar{y}(x) - y^*(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahend. Teoreemist 22 järeldub, et sel juhul leidub niisugune konstantide süsteem $\bar{C}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, et

$$\bar{y}(x) - y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i\, y_i(x) ,$$

s.o.

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i\, y_i(x) + y^*(x) .$$

Sama mõttekäik on rakendatav võrrandi (2.3) mistahes teise lahendi puhul ja meie teoreem on tõestatud.

Seega tuleb v õ r r a n d i (2.3) l a h e n d a m i s e k s l e i d a s e l l e v õ r r a n d i ü k s e r i l a h e n d j a v a s t a v a h o m o g e e n s e võrrandi (2.4) l a h e n d i t e f u n d a m e n t a a l s ü s t e e m . Diferentsiaalvõrrandi (2.4) üldlahendiks on (2.20).

6. Konstantide varieerimise meetod. Vaatleme võrrandeid

$$Ly = P(x) \tag{2.3}$$

ja

$$Ly = 0 \tag{2.4}$$

ning eeldame, et homogeense diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendite fundamentaalsüsteem on leitud. Selleks olgu funktsioonid $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, nii et võrrandi (2.4) üldlahendiks on

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x). \tag{2.21}$$

Nagu esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi puhul, otsime ka siin võrrandile (2.3) erilahendit kujul

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x)\,, \tag{2.22}$$

milles püüame määrata funktsioonid $C_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ nii, et funktsioon (2.22) oleks võrrandi (2.3) lahend.

Meetodit, mida kasutatakse funktsioonide $C_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ leidmiseks nimetatakse Lagrange'i (konstanyide varieerimise) meetodiks. Selle olemus selgub järgmisest arutelust.

Otsitavaid funktsioone on arvult n, kuid nende määramiseks on esialgu olemas ainule nõue - nad peavad olema määratud nii, et funktsioon (2.22) oleks võrrandi (2.3) lahend. Puuduvad $n-1$ tingimust on seega vabalt etteantavad ja nende etteandmisel lähtume sellest eesmärgist, et funktsiooni (2.22) esimest $n-1$ tuletist oleksid võimalikult lihtsama kujuga. Seega nõuame, et

$$(y^*(x))' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y'_i(x)\,,$$
$$(y^*(x))'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y''_i(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(y^{*(n-1)}(x)) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x)\,.$$

mis on samaväärne järgmiste nõuetega:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) \quad y_i(x) = 0 \,, \\ \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y'_i(x) = 0 \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0 \,. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Arvutame lõpuks $(y^*(x))^{(n)}$

$$(y^*(x))^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x)$$

ja asendame $y^*(x)$ võrrandisse (2.3), mis sarnaste liikmete koondamisel taandub järgmiseks:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, L\, y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = P(x).$$

Arvestades, et $L\, y_i(x) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ korral, võtab viimane võrrand kuju

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = P(x) \,; \qquad (2.24)$$

saamegi n-inda tingimuse funktsioonide $C_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ määramiseks.

Võrranditest (2.23) ja (2.24) saame järgmise lineaarse mittehomogeense süsteemi otsitavate $C'_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ jaoks:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) \quad y_i(x) = 0 , \\
\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) \quad y'_i(x) = 0 , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) \quad y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) \quad y_i^{(n-1)}(x) = P(x) .
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

Süsteemi (2.25) puhul esineb Crameri peajuht, sest süsteemi determinandiks on $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ iga $n \in J$ puhul ning süsteem on üheselt lahenduv.

Arvestades, et Wronski determinandis on kõik elemendid pidevad funktsioonid ning seda on ka $P(x)$, võime väita, et

$$C'_i(x) = \psi_i(x) \qquad (i= 1,2,\ldots,n), \tag{2.26}$$

kus $\psi_i(x)$ on pidevad funktsioonid. Sellega on kõik funktsioonid $C_i(x)$ määratud i n t e g r e e r u v a t e võranditega (2.26) ja meie ülesanne lahendatud.

Näide 5. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$(x^2 + 1)\, y'' - 2xy' = (x^2 + 1)^2. \tag{2.27}$$

Lahendame vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - \frac{2\,xy'}{x^2 + 1} = 0 .$$

Selleks alandame järku asendusega $y' = z$. Saame

$$z' - \frac{2x}{x^2+1} z = 0 .$$

Siit leiame $z = C_1 (x^2 + 1)$ ja seega $y = C_1(\frac{x^3}{3} + x) + C_2$.

Varieerides leitud lahendis konstante, saame $C_1'(x)$ ja $C'_2(x)$ arvutamiseks süsteemi

$$\begin{cases} C'_1(x) (\frac{x^3}{3} + x) + C'_2(x) = 0 , \\ C'_1(x) (x^2+ 1) = x^2 + 1 . \end{cases}$$

Näeme, et $C'_1(x) = 1$ ja $C_1(x) = x$, kus integreerimiskonstant on võetud võrdseks nulliga. Esimesest võrrandist leiame nüüd, et $C'_2(x) = - (\frac{x^3}{3} + x)$ ja $C_2(x) = - \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}$.

Seega on võrrandi (2.27) erilahendiks funktsioon

$$y^*(x) = \frac{x^4}{3} + x^2 - \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$$

ning vaadeldava võrrandi üldlahendiks on

$$y(x) = C_1(\frac{x^3}{3} + x) + C_2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} .$$

(Miks võib funktsioonide $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ leidmisel integreerimiskonstandid võtta võrdseteks nulliga?)

7. Liouville' - Ostrogradski valem. Moodustagu funktsioonid $y_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendite fundamentaalsüsteemi. Asendame need lahendid diferentsiaalvõrrandisse (2.4) ja lahendame nii leitud võrrandid funktsioonide $y_i^{(n)}(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ suhtes. Sel teel saame järgmise süsteemi n võrrandist

$$\begin{cases} P_n(x)y_j(x)+P_{n-1}(x)y'_j(x)+\ldots+P_1(x)y_j^{(n-1)}(x)=-y_j^{(n)}(x) \\ \qquad (j=1,2,\ldots,n), \end{cases} \tag{2.28}$$

milles vaatleme kordajaid $P_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ otsitavatena. Kuna süsteemi (2.28) determinandiks on Wronski determinant $W(x)$ süsteemi (2.4) lahendite fundamentaalsüsteemist, on $W(x) \neq 0$ iga $x \in J$ korral. Seega lahendub süsteem (2.28) kordajate $P_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ suhtes üheselt ning süsteemiga (2.28) on määratud seos nende kordajate ja determinandi $W(x)$ vahel. Meid huvitab eriti seos $P_1(x)$ ja $W(x)$ vahel. Süsteemist (2.28) järeldub, et

$$P_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \ldots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & \ldots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(x)} . \tag{2.29}$$

Algebra kursuses tõestatakse, et funktsionaaldeterminandi tuletis on arvutatav järgmise eeskirja põhjal (piirdume kolmerealise determinandi juhuga):

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{32}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a'_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a'_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a'_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

Selle eeskirja põhjal on selge, et

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \cdots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y'_n \cdots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{d\,W(x)}{dx}$$

ja (2.29) tõttu kehtib nüüd seos

$$P_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

Seega

$$P_1(x) = -\frac{d \ln |W(x)|}{dx}.$$

Saadud võrrand on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand. Viimase lahendamisel jõuamegi valemini, mis kannab <u>Liouville'-Ostrogradski valemi</u> nimetust:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(t)\,dt} \qquad (2.30)$$

Leitud valemist (2.30) järeldub veel kord, et kui d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i (2.4) l a h e n d i t e s ü s t e e m i W r o s n k i d e t e r m i -

nant $W(x)$ on null vahemiku J ühes punktis, on ta null kõikjal vahemikus J ja kui $W(x)$ on nullist erinev vahemiku J ühes punktis, on ta seda kõikjal vahemikus J.

8. Lahendite fundamentaalsüsteemi olemasolu. Artiklis 5 nägime, et homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi teadmine on vajalik, kuna temaga on määratud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Kuid kas igal n järku homogeensel lineaarsel diferentsiaalvõrrandil on olemas lahendite fundamentaalsüsteem? Küsimuse selgitamiseks vaatlemegi diferentsiaalvõrrandit (2.4), mille puhul eeldame, et funktsioonid $P_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) on vahemikus J pidevad. Seega eksisteerib diferentsiaalvõrrandil vahemikus J parajasti üks niisugune lahend (vt. art. 1 § 2) $y_i(x)$, mis punktis $x_0 \in J$ rahuldab (näiteks järgmisi) algtingimusi

$$y_i^{(i-1)}(x_0) = 1 \quad \text{ja} \quad y_i^{(j)}(x_0) = 0$$
$$j = 0,1,2,\ldots, n-1 \quad \text{ja } j \neq i-1 \,. \tag{2.31}$$

Kui muudame algtingimusi (2.31) nii, et $i = 1,2,\ldots,n-1$, vastab igale sel teel saadud algtingimuste süsteemile vaid üks neid tingimusi rahuldav lahend. Nii saame terve süsteemi lahendeid $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, mis punktis x_0 rahuldavad algtingimusi:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1\,, \quad y_1^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n-1), \\ y_2'(x_0) = 1\,, \quad y_2(x_0) = 0\,, \quad y_2^{(j)}(x_0) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (j = 2,3,\dots, n-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \quad y_n^{(j)}(x_0) = 0 \quad (j = 0,1,2,\dots, n-2). \end{cases}$$

Need lahendid $y_i(x)$ ($i = 1,2,\dots,n$) moodustavadki diferentsiaalvõrrandi (2.4) lahendite fundamentaalsüsteemi (vt. art. 4 § 2), sest $W(y_1,\dots, y_n) \neq 0$ iga $x \in J$ korral, kuna leidub punkt $x_0 \in J$, kus

$$W(y_1(x_0),\dots, y_n(x_0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Sellega tõestasime, et igal vahemikus J pidevate kordajatega lineaarsel homogeensel diferentsiaalvõrrandil eksisteerib lahendite fundamentaalsüsteem.

Lihtne on tõestada, et tehtud eeldustel on igal lineaarsel homogeensel diferentsiaalvõrrandil lõpmatult palju lahendite fundamentaalsüsteeme.

9. Diferentsiaalvõrrandi koostamine lahendite fundamentaalsüsteemi põhjal. Olgu antud n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteem

$y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) .

Kuidas koostada antud lahendite süsteemile vastav diferentsiaalvõrrand ja mitu diferentsiaalvõrrandit vastab ühele lahendite fundamentaalsüsteemile? Vastuse viimasele küsimusele leiame järgnevast teoreemist.

Teoreem 24. Kui vahemikus J pidevate kordajatega kahel n-järku lineaarsel homogeensel diferentsiaalvõrrandil

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = 0 \qquad (2.32)$$

ja

$$y^{(n)} + Q_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + Q_n(x)\, y = 0 \qquad (2.33)$$

on ühine lahendite fundamentaalsüsteem $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, siis kehtivad samasused

$$P_i(x) = Q_i(x) \qquad (i = 1,2,\ldots, n) \qquad (2.34)$$

iga $x \in J$ korral, s.t. võrrandid (2.32) ja (2.33) ühtivad.

T õ e s t u s. Samasuste (2.34) näitamiseks asendame lahendid $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ võrrandisse (2.33) ning lahendame nii leitud võrrandid funktsioonide $y_i^{(n)}(x)$ suhtes. Sel teel saame süsteemi n võrrandist

$$\begin{cases} Q_n(x)\, y_i(x) + Q_{n-1}(x)\, y_i'(x) + \ldots + Q_1(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = \\ \qquad\qquad\qquad = - y_i^{(n)}(x) \\ i = 1,2,\ldots, n\,. \end{cases} \qquad (2.35)$$

Analoogiliselt toimime võrrandiga (2.32) ning see toob meid varem esinenud süsteemi (2.28) juurde. Võrreldes süsteeme (2.35) ja (2.28) näeme, et otsitavad $P_i(x)$ ja $Q_i(x)$ on määratud sama lineaarse mittehomogeense süsteemiga, mille determinandiks on $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Viimane on vahemikus J kõikjal nullist erinev (miks?). Seega on ühtivatel süsteemidel (2.35) ja (2.28) ainult üks lahend ning samasus (2.34) sellega tõestatud.

(Näita, et samasus $P_1(x) = Q_1(x)$ iga $x \in J$ korral järeldub Loiuville'i-Ostrogradski valemist!)

Koostame nüüd lahendite fundamentaalsüsteemile $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ vastava lineaarse diferentsiaalvõrrandi. Selleks arvestame, et (vt. teoreem 22) lineaarse diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend $y(x)$ on lineaarne kombinatsioon lahendite fundamentaalsüsteemist. Seega sõltub lineaarse diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend $y(x)$ funktsioonidest $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots, n)$ lineaarselt ning teoreemi 21 põhjal peab

$$W\,(y_1(x)\,,\ \ldots,\ y_n(x),\ y(x)) = 0 \qquad (2.36)$$

iga $x \in J$ korral. Funktsioon $y(x)$ on niisiis võrrandi (2.36) lahend vahemikus J. Näitame, et (2.36) on $y(x)$ suhtes lineaarne homogeenne n-järku diferentsiaalvõrrand. Arvestades Wronski determinandi definitsiooni saame

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.37)$$

millest determinandi arendamisel viimase veeru järgi selgubki öeldu. L õ p u k s veendu iseseisvalt, et funktsioonid $y_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ on diferentsiaalvõrrandi (2.37) lahendid!

Teoreemi 24 põhjal on diferentsiaalvõrrand (2.37) ainus n-järku lineaarne diferentsiaalvõrrand, mis vastab lahendite fundamentaalsüsteemile $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Näide 6. Koostada diferentsiaalvõrrand, mille lahendite fundamentaalsüsteemiks on funktsioonid $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = e^{-x}$.

Eelneva põhjal on vastavaks kolmandat järku diferentsiaalvõrrandiks võrrand

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} & y \\ 0 & e^x & -e^{-x} & y' \\ 0 & e^x & e^{-x} & y'' \\ 0 & e^x & -e^{-x} & y''' \end{vmatrix} = 0 .$$

Arendades determinandi viimase veeru järgi, saame

$$y''' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

s.o.

$$y''' - y' = 0 .$$

10. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine ühe teadaoleva erilahendi abil. Olgu $y_1(x)$ diferentsiaalvõr-

randi

$$P_0(x)\, y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots +$$

$$\ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0 \qquad (2.38)$$

üks teadaolev erilahend. Näitame, et asendusega

$$y = y_1 \int u\, dx, \qquad (2.39)$$

kus u on muutuja x funktsioon, taandub diferentsiaalvõrrand (2.38) ühe võrra madalamat järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks otsitava u suhtes. Selleks arvestame, et

$$\frac{d^k \int u dx}{dx^k} = \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} = u^{(k-1)}, \qquad (2.40)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

ning defineerime $u^{(-1)} = \int u\, dx$, nii et (2.40) kehtib $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ korral. Kasutades Leibnizi valemit korrutise diferentseerimiseks, leiame (2.39) ja (2.40) põhjal, et

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i-1)} y_1^{(k-i)} . \qquad (2.41)$$

Teostades nüüd asenduse (2.39), saame (2.38) ja (2.41) põhjal, et võrrandi (2.38) vasak pool

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(x)\, y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(x) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i-1)} y_1^{(k-i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} u^{(i-1)} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} P_{n-k}(x)\, y_1^{(k-i)} =$$

$$= \int u\, dx \left[\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(x)\, y_1^{(k)}\right] + \sum_{i=1}^{n} u^{(i-1)} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} P_{n-k}(x)\, y_1^{(k-i)} .$$

Kuna y_1 oli diferentsiaalvõrrandi (2.38) erilahend, on esimene liidetav viimases avaldises samaselt null. Teostades teises liidetavas indeksite vahetuse eeskirja $j = i - 1$ põhjal ja tähistades

$$\sum_{k=j+1}^{n} \binom{k}{j+1} P_{n-k}(x)\, y_1^{(k-j-1)} = q_{n-j}(x)$$

(viimane on üheselt määratud $P_{n-k}(x)$ ja y_1 kaudu), näemegi, et diferentsiaalvõrrand (2.38) taandub u suhtes $(n-1)$-järku lineaarseks homogeenseks võrrandiks, s.o. võrrandiks

$$\sum_{j=0}^{n-1} q_{n-j}(x)\, u^{(j)} = 0 . \qquad (2.42)$$

Järgnevalt selgitame küsimuse diferentsiaalvõrrandi (2.38) lahendite fundamentaalsüsteemist. Olgu süsteem u_j $(j = 2, 3, \ldots, n)$ diferentsiaalvõrrandi (2.42) lahendite fundamentaalsüsteem. Seega on need lahendid lineaarselt sõltumatud. Näitame, et diferentsiaalvõrrandi (2.38) lahendite süsteem

$$y_1, \quad y_1 \int u_2\, dx, \ldots, y_1 \int u_n\, dx \qquad (2.43)$$

on samuti lineaarselt sõltumatu, s.o. ta on diferentsiaalvõrrandi (2.38) lahendite fundamentaalsüsteem. Selleks näitame, et samasus

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \int u_2\, dx + \dots + \alpha_n y_1 \int u_n\, dx = 0 \qquad (2.44)$$

kehtib ainult siis, kui $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Kuna $y_1(x)$ pole triviaalne lahend, jagame võrduse (2.44) läbi funktsiooniga $y_1(x)$ ja diferentseerime saadud samasust. Tulemuseks on

$$\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0,$$

millest lahendite $u_2, \dots, u_n$ lineaarse sõltumatuse tõttu järeldub, et $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$. Samasusest (2.44) järeldub nüüd omakorda, et ka $\alpha_1 = 0$, mida oligi vaja tõestada.

Näide 7. Lahendada võrrand

$$x^3 y'' - xy' + y = 0$$

teades, et $y_1 = x$ on üks erilahend.

Asenduse $y = x \int u\, dx$ teostamiseks arvutame $y' = \int u\, dx + xu$, $y'' = 2u + xu'$ ja asendame võrrandisse. Tulemuseks on $x^4 u' + 2x^3 u - x^2 u = 0$. Saadud eralduvate muutujatega võrrandi üldlahendiks on

$$u = C \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Antud võrrandi teiseks erilahendiks on seega üks funktsioonidest

$$y = x \int e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\, dx$$

näiteks

$$y = + xe^{-\frac{1}{x}}$$

ning üldlahendiks

$$y = C_1 x + C_2\, x\, e^{-\frac{1}{x}} .$$

Süsteem (2.43) oli diferentsiaalvõrrandi (2.38) lahendite fundamentaalsüsteem. Seega avaldub võrrandi (2.38) iga lahend kujul

$$y(x) = y_1(C_1 + C_2 \int u_2\, dx + \ldots + C_n \int u_n\, dx) ,$$

kus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ on lahendile $y(x)$ vastavalt valitud konstandid. Nii on aga

$$\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)' = C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

diferentsiaalvõrrandi (2.42) mingi lahend. Olgu nüüd $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ diferentsiaalvõrrandi (2.38) kaks erilahendit. Siis on

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = u_2$$

diferentsiaalvõrrandi (2.42) üks erilahend ja me võime võrrandi (2.42) järku omakorda alandada asendusega

$$u = u_2 \int v\, dx$$

ehk

$$u=\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' \int v\,dx.$$

Nii, teades diferentsiaalvõrrandi (2.38) kahte erilahendit, võib diferentsiaalvõrrandi (2.38) järku alandada juba kahe võrra.

Saab näidata, et diferentsiaalvõrrandi (2.38) l lineaarselt sõltumatu erilahendi teadmisel võib võrrandi järku alandada l võrra.

§ 3. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

Konstantsete kordajatega n-järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = P(x), \tag{3.1}$$

kus p_i $(i = 0,1,\dots,n)$ on konstantsed kordajad reaalarvude korpusest R ja $P(x)$ on vahemikus J määratud funktsioon. Kuna võrrand (3.1) on üldise n-järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi erijuht, on kõik eelmises paragrahvis tõestatud teoreemid kehtivad ka võrrandi (3.1) puhul. Veendu iseseisvalt, et diferentsiaalvõrrandi (3.1) l a h e n d i o l e m a s o l u k s j a ü h e s u s e k s p i i s a b sellest, kui nõuda f u n k t s i o o n i $P(x)$ p i d e- v u s t v a h e m i k u s J. Võrrandile (3.1) vastaval homogeensel diferentsiaalvõrrandil on iga algtingimuse $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ korral olemas ühene lahend (veendu selles iseseisvalt!) .

1. Operaatorpolünoomide ring. Operaatorit

$$L(D) = p_0D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n, \qquad (3.2)$$

kus $p_i \in R$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nimetatakse operaatorpolünoomiks. Viimane on defineeritud n korda diferentseeruvate funktsioonide hulgal Y ja § 2 põhjal on ta lineaarne operaator. Olgu $\{L(D)\}$ kõikvõimalike operaatorite (3.2) hulk. Defineerime l i i t m i s- ja k o r r u t a m i s o p e r a t s i o o n i d hulgal $\{L(D)\}$. Selleks vaatleme selle hulga kahte elementi

$$L_1(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} \quad \text{ja} \quad L_2(D) = \sum_{k=0}^{n} b_k D^{n-k} .$$

Operaatorite $L_1(D)$ ja $L_2(D)$ summaks nimetatakse operaatorit $L_1(D) + L_2(D)$, mis on defineeritud võrdusega

$$\left[L_1(D) + L_2(D)\right] y = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) D^{n-k} y \qquad (3.3)$$

iga $y \in Y$ puhul. Nende korrutiseks aga operaatorit $L_1(D)L_2(D)$, mis on defineeritud võrdusega

$$[L_1(D)\, L_2(D)]\, y = L_1(D)\, [L_2(D)\, y]$$

iga $y \in Y$ puhul.

Osutub, et operaatorpolünoomide hulk $\{L(D)\}$, kui kahe operatsiooniga algebraline süsteem, moodustab kommutatiivse ringi. Selle näitamiseks tuleb tõestada, et vaadeldava hulga elementide puhul on 1) kehtivad kõik liitmisega seotud kommutatiivse ringi postulaadid; 2) korrutamine kommutatiivne, assotsiatiivne ja distributiivne liitmise suhtes.

Esiteks näitame liitmise kommutatiivsuse seaduse kehtivust. Olgu $y \in Y$ ja $L_1(D)$, $L_2(D) \in \{L(D)\}$. Arvutame

$$[L_1(D) + L_2(D)]\, y = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, D^{n-k}\, y =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (b_k + a_k)\, D^{n-k}\, y = [L_2(D) + L_1(D)]\, y,$$

milles tuginetakse definitsioonidele (3.2), (3.3) ja reaalarvude liitmise kommutatiivsuse seadusel. Saadud võrdusest järeldubki, et

$$L_1(D) + L_2(D) = L_2(D) + L_1(D),$$

mida tahtsimegi tõestada.

Teiseks veendume korrutamise kommutatiivsuse seaduse kehtivuses. Selleks arvutame

$$[L_1(D)\, L_2(D)]\, y = L_1(D)\, [L_2(D)\, y] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} \left[\sum_{l=0}^{n} b_l D^{n-l} y \right] = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l D^{2n-(k+l)} y =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k b_l \, D^{2n-(k+l)} y = \sum_{k,l=0}^{n} b_l a_k \, D^{2n-(k+l)} y =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} b_l \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-l} (D^{n-k} y) = \sum_{l=0}^{n} b_l D^{n-l} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} y \right] =$$

$$= L_2 (D) \left[L_1 (D) y \right] = L_2 (D) \; L_1 (D) y ,$$

milles tuginetakse a) definitsioonidele (3.2) ja (3.4) ; b) operaatorite D^k lineaarsusele (vt. § 2 art. 2); c) omadusele $D^{k+l} = D^{l+k}$ (vt. § 2 art. 2) ja d) reaalarvude korrutamise kommutatiivsuse seadusele.

Saadud võrdusest järeldubki, et

$$L_1 (D) L_2(D) = L_2(D) . L_1(D) .$$

Samuti on lihtsalt kontrollitavad ringi $\{L(D)\}$ ülejäänud neli postulaati. (Nende kontrollimise jätame lugejale harjutusülesandeks.)

Nii loeme tõestatuks, et operaatorpolünoomide $\{L(D)\}$ hulk moodustab kommutatiivse ringi üle reaalarvude korpuse R. Kuid kommutatiivse ringi moodustab ka harilike polünoomide

$$P_n(x) = p_o x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

hulk $\{ P_n(x) \}$, kus $p_i \in R$ $(i = 0,1,2,\dots, n)$. Seega võime operaatorpolünoomidele kanda üle need polünoomide $P_n(x)$

omadused, mis on seotud ringis defineeritud tehetega või on tõestatavad nende abil.

Vaatleme näiteks operaatorpolünoomi $L(D)$, mille puhul eeldame, et $p_0 = 1$, s.o. $L(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_{n-1} D + p_n$. Kui nüüd arvud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on polünoomi $P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$ juurteks, nii et $P_n(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$ (antud seose tõestamisel tuginetaksegi kommutatiivse ringi postulaatidele), siis kehtib ka seos

$$L(D) = (D - \lambda_1) \ldots (D - \lambda_n) ,$$

kusjuures $p_k = (-1)^k \sigma_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ ja σ_k on sümmeetrilised põhipolünoomid[17] juurtest $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Nii on operaatorpolünoom $D^4 - 4D^3 + D^2 + 6D$ esitatav kujul

$$D^4 - 4D^3 + D^2 + 6D = D(D+1)(D-2)(D-3) , \qquad (3.4)$$

sest polünoomi $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$ juurteks on $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ ja $x_4 = 3$. Võrdus (3.4) on vahetult kontrollitav. Nimelt, tuginedes korrutamise assotsiatiivsuse seadusele saame

$$D(D+1)\left[(D-2)(D-3)\right] = D(D+1)(D^2 - 5D + 6) =$$
$$= D\left[(D+1)(D^2 - 5D + 6)\right] = D(D^3 - 4D^2 + D + 6) =$$
$$= D^4 - 4D^3 + D^2 + 6D .$$

---

[17] Vt. [6] § 27 art. 2

2. <u>Homogeense lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine</u>. Et selgusele jõuda, missugused funktsioonid võivad olla lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahenditeks, vaatleme järgmisi näiteid.

1°. Lahendame I järku võrrandi $y' + ky = 0$. Muutujaid eraldades saame võrrandi

$$\frac{dy}{y} = - k\, dx,$$

millest $y = C_1 e^{-kx}$. Leitud funktsioon on diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

2°. Lahendame teist järku võrrandi $y'' + ky' = 0$. Teostades muutujate asenduse $y' = z$ ja integreerides saame

$$z = \bar{C}_1 e^{-kx}$$

ning arvestades, et $z = y'$ ja veel kord integreerides näeme, et

$$y = C_1 e^{-kx} + C_2 ,$$

kus $C_1 = -\frac{\bar{C}_1}{k}$. Seega selgub, et võrrandi $y'' + ky' = 0$ erilahenditeks on funktsioonid $y_1 = e^{-kx}$ ja $y_2 = 1$, s.o. $y_2 = e^{0x}$.

Nii võib tulla mõttele ka võrrandile

$$L(D)\, y = 0, \tag{3.5}$$

kus $L(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1}D + p_n$, otsida lahendeid kujul $y = e^{\lambda x}$. Kordaja λ määrame lähtudes sellest nõudest, et funktsioon $e^{\lambda x}$ rahuldaks võrrandit (3.5). Selleks asendame $e^{\lambda x}$ võrrandisse (3.5), veendudes eelnevalt, et $\frac{d^k e^{\lambda x}}{dx^k} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Asendamisel taandub

22.

võrrand (3.5) järgmiseks

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n) = 0 .$$

Siit järeldub, et $e^{\lambda x}$ on diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahendiks, kui kordaja λ on n astme algebralise võrrandi

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (3.6)$$

lahendiks. Võrrand (3.6) kannab diferentsiaalvõrrandi (3.5) karakteristliku võrrandi nimetust. Kuna karakteristlik võrrand (3.6) on n astme algebraline võrrand, on tal parajasti n (reaalset või kompleksset) lahendit[18], mille seas võib olla ka ühtivaid. Diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahendamise edasisel uurimisel eritleme järgmisi juhte.

A. Olgu karakteristliku võrrandi (3.6) juured $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kõik reaalsed ja erinevad.

Siis on funktsioonid $e^{\lambda_i x}$ $(i = 1,2,\dots, n)$ kõik diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahenditeks, sest iga λ_i rahuldab karakteristlikku võrrandit (3.6).

Märkus 1. Öeldus saab veenduda ka teisiti. Kuna arvud λ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ on polünoomi $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$ juurteks on meie operaatorpolünoom esitatav kujul $L(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)$ ning võrrand (3.5) taandub võrrandiks

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)\, y = 0,$$

18 Võrrandi (3.6) lahendeid λ_i nimetatakse sageli ka diferentsiaalvõrrandi (3.5) karakteristlikeks väärtusteks.

millest on lihtne näha, et igat võrrandeist

$$(D - \lambda_i)\, y = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

rahuldab funktsioon $y = e^{\lambda_i x}$ (i = 1, 2, ...,n). Seega on funktsioonid $e^{\lambda_i x}$ (i = 1,2,...,n) ka diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahenditeks.

Näitame, et funktsioonid $e^{\lambda_i x}$ (i = 1,2,...,n) moodustavad diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks arvutame

$$W(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Kuna $e^{(\lambda_1 + \ldots \lambda_n)x} \neq 0$ ja nullist on erinev ka saadud Vandermonde determinant[19], järeldame, et

$$W(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) \neq 0.$$

Nii on lahendid $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ lineaarselt sõltumatud vahemikus $(-\infty, \infty)$ (Vt. § 2 järeldus 1) ja moodustavad võrrandi (3.5) lahendite fundamentaalsüsteemi. Teoreemi 22 .

---

[19] Vt. [6] § 3 näide 6 .

põhjal on seega võrrandi (3.5) üldlahendiks

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x} ,$$

kus C_i on suvalised konstandid.

B. Olgu karakteristliku võrrandi (3.6) juured $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ reaalsed ja kordsed, vastavalt kordsusega $r_1, \ldots, r_k$, nii et $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Nüüd on diferentsiaalvõrrand (3.5) esitatav kujul

$$(D - \lambda_k)^{r_k} (D - \lambda_{k-1})^{r_{k-1}} \ldots (D - \lambda_1)^{r_1} y = 0. \qquad (3.7)$$

Võrrandi (3.5), s.o. (3.7) üheks lahendiks on funktsioon $y = e^{\lambda_1 x}$, sest $(D - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} = 0$. Teoreemi 16 põhjal on lahendiks ka funktsioon $y = C e^{\lambda_1 x}$, kus C on suvaline konstant. Kas pole aga võimalik vaadelda kordajat C niisuguse funktsioonina $C(x)$, et $y_l = C_l(x) e^{\lambda_1 x}$ rahuldaks võrrandeid

$$(D - \lambda_1)^l y = 0 \qquad (l = 2,3,\ldots, r_1) \qquad (3.8)$$

ja seega ka võrrandit (3.7)?

Olgu $l = 2$. Otsime niisugust funktsiooni $C_2(x)$, et $y_2 = C_2(x) e^{\lambda_1 x}$ rahuldaks võrrandit

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0. \qquad (3.9)$$

Arvutame selleks

$$(D - \lambda_1)^2 \left[C_2(x) e^{\lambda_1 x}\right] = (D - \lambda_1) \left\{ (D - \lambda_1) \left[C_2(x) e^{\lambda_1 x}\right]\right\} =$$
$$= (D - \lambda_1) \left\{ C'_2(x) e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 C_2(x) e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 C_2(x) e^{\lambda_1 x} \right\} =$$

$$= C''_2(x)\, e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 C'_2(x)\, e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 C'_2(x)\, e^{\lambda_1 x} = C''_2(x) e^{\lambda_1 x}.$$

Nii saab $C_2(x)\, e^{\lambda_1 x}$ olla diferentsiaalvõrrandi (3.9) lahendiks, kui $C''_2(x) = 0$. Funktsiooniks $C_2(x)$ sobivad seega kõik funktsioonid $\bar{C}_1 x + \bar{C}_2$. Meid huvitab üks võimalikult lihtne $C_2(x)$ valik. Seega valime $C_2(x) = x$. Juurele λ_1 vastab nüüd juba kaks erinevat ja lineaarselt sõltumatut lahendit $e^{\lambda_1 x}$ ja $xe^{\lambda_1 x}$.

Näidake iseseisvalt, et funktsiooniks $C_3(x)$, mille puhul $C_3(x)\, e^{\lambda_1 x}$ on võrrandi $(D - \lambda_1)^3\, y = 0$ lahendiks, sobib funktsioon $C_3(x) = x^2$.

Teeme nüüd induktiivse oletuse: olgu $x^{s-2}\, e^{\lambda_1 x}$ diferentsiaalvõrrandi $(D - \lambda_1)^{s-1}\, y = 0$ lahendiks, kus $s = r_1$. Näitame, et siis on $x^{s-1}\, e^{\lambda_1 x}$ diferentsiaalvõrrandi $(D - \lambda_1)^s y = 0$ lahendiks. Selleks arvutame

$$(D - \lambda_1)^s \left[x^{s-1} e^{\lambda_1 x}\right] = (D - \lambda_1)^{s-1} \left\{(D - \lambda_1) \left[x^{s-1}\, e^{\lambda_1 x}\right]\right\} =$$

$$= (D - \lambda_1)^{s-1} \left\{(s-1)\, x^{s-2}\, e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x^{s-1}\, e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 x^{s-1}\, e^{\lambda_1 x}\right\} =$$

$$= (s-1)\, (D - \lambda_1)^{s-1} \left[x^{s-2}\, e^{\lambda_1 x}\right] = 0,$$

iga $x \in (-\infty, \infty)$ puhul meie induktiivse oletuse põhjal.

Sellega näitasime, et karakteristliku võrrandi (3.6) r_1 kordsele reaalsele juurele λ_1 vastab r_1 lahendit

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{r_1 - 1}\, e^{\lambda_1 x}.$$

(Viimaste lineaarses sõltumatuses veendu iseseisvalt !)

Analoogiliselt leitakse diferentsiaalvõrrandi (3.5) ülejäänud $n - r_1$ lahendit. Järgmises artiklis näeme, et leitud lahendite süsteem

$$e^{\lambda_p x},\ x e^{\lambda_p x},\ \ldots,\ x^{r_p-1} e^{\lambda_p x} \qquad (3.10)$$
$$(p = 1,2,\ldots,k)$$

on diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahendite fundamentaalsüsteem.

C. Olgu diferentsiaalvõrrandi (3.5) karakteristlikul võrrandil (3.6) kompleksne ühekordne juur $\lambda = \alpha + i\beta$. Võrrandi (3.6) juureks on siis ka $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Seega on võrrandi (3.5) kompleksväärtuseliseks lahendiks funktsioon

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Teoreemi 19 põhjal on võrrandi (3.5) reaalseteks lahenditeks käesoleval juhul funktsioonid

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{ja} \quad y = e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (3.11)$$

Nii vastab kahele kompleksarvulisele juurele $\alpha \pm i\beta$ ka kaks reaalset lahendit (3.11).

D. Olgu diferentsiaalvõrrandi (3.5) karakteristlikul võrrandil (3.6) kompleksne r-kordne juur $\lambda = \alpha + i\beta$.

Arvestades, et

$$\frac{d\, e^{(\alpha + i\beta)x}}{dx} = (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta)x},$$

ja seega

$$\frac{d^n\, e^{(\alpha + i\beta)x}}{dx^n} = (\alpha + i\beta)^n\, e^{(\alpha + i\beta)x},$$

on juhul B teostatud mõttekäik korratav sõna-sõnalt ka käesoleval juhul. Selle põhjal on antud juhul diferentsiaalvõrrandi (3.5) komplekssesteks lahenditeks funktsioonid

$$y_k = x^{k-1}\, e^{(\alpha + i\beta)x}$$

ehk

$$y_k = x^{k-1}\, e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

Karakteristliku võrrandi r-kordsetele juurtele $\alpha + i\beta$ ja $\alpha - i\beta$ vastab seega teoreemi 19 põhjal 2r reaalset lahendit

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\quad x\, e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

ja

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\quad x\, e^{\alpha x} \sin \beta x,\ \ldots,\ x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3. <u>Homogeense lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteem.</u> Artiklis 2 käsitletut resümeerides saame iga võrrandi (3.5) puhul öelda järgmist.

Kui karakteristlikul võrrandil (3.6) on p reaalset juurt λ_k kordusega r_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) ja q kompleksset juurt $\alpha_\ell + i\beta_\ell$ kordsusega $\varkappa_\ell$ ($\ell = 1, 2, \ldots, q$), nii et

$r_1 + r_2 + \ldots + r_p + 2\,(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_q) = n$, siis vastab nendele juurtele järgmine lahendite süsteem

$$\begin{cases} e^{\lambda_k x},\ x\, e^{\lambda_k x},\ \ldots,\ x^{r_k-1}\, e^{\lambda_k x} \quad (k = 1,2,\ldots,p)\,; \\ e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\ x\, e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\ldots,\ x^{\varkappa_l-1} e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x; \\ e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,\ x\, e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,\ \ldots, x^{\varkappa_l-1} e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x \\ \qquad\qquad (\,l = 1,2,\ldots,q)\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Võib tõestada, et lahendite süsteem (3.12) on diferentsiaalvõrrandi (3.5) lahendite fundamentaalsüsteem. Selle väite tõestamisel piirdume juhuga, kus diferentsiaalvõrrandi (3.5) karakteristliku võrrandi (3.6) juured on reaalsed ja nende seas võib olla kordseid.

Näitame, et samasus

$$\sum_{p=1}^{l} e^{\lambda_p x} \sum_{k=1}^{r_p} C_{pk}\, x^{k-1} = 0 \tag{3.13}$$

kehtib ainult siis, kui

$$C_{pk} = 0 \tag{3.14}$$

$$(\ k=1,2,\ldots,r_p;\ p=1,2,\ldots,l\ )\,.$$

Viimane tähendab seda, et lahendite süsteem (3.10) on lineaarselt sõltumatu - seega lahendite fundamentaalsüsteem.

Võrduste (3.14) järeldamiseks samasusest (3.13) näitame, et samasusest (3.13) järelduvad samasused

$$P_{r_p-1}(\,x) = \sum_{k=1}^{r_p} C_{pk}\, x^{k-1} = 0 \tag{3.15}$$

$$(p = 1,2,\ldots,\ l\ ).$$

Viimastest järelduvad vahetult võrdused (3.14). (Miks?)

Väite vastselt oletame, et samasuse (3.13) puhul vähemalt üks polünoomidest, näiteks $P_{r_1-1}(x) \neq 0$. Siis järeldub samasusest (3.13), et veel vähemalt üks polünoomidest $P_{r_p-1}(x) \neq 0$. Üeldut arvestades esitame (3.13) kujul

$$\sum_{p=1}^{l-1} e^{\lambda_p x} P_{r_p-1}(x) + e^{\lambda_l x} P_{r_l-1}(x) = 0 \quad , \quad (3.16)$$

korrutame teda astmega $e^{-\lambda_l x}$ ja diferentseerime r_l korda. Nii jõuame samasuseni

$$\sum_{p=1}^{l-1} e^{\varrho_p x} Q_{r_p-1}(x) = 0 \, , \qquad (3.17)$$

kus $\varrho_p = \lambda_p - \lambda_l$ ja polünoomid $Q_{r_p-1}(x)$ erinevad polünoomidest $P_{r_p-1}(x)$ vaid kordajate poolest. Viimase tõestamiseks näita, et

$$\frac{d}{dx}\left[e^{kx}(p_0 x^n + \ldots + p_{n-1} x + p_n x) \right] =$$

$$= e^{kx} (q_0 x^n + \ldots + q_{n-1} x + q_n x) \, ,$$

kus p_i ja q_i ($i = 0,1,\ldots,n$) on reaalarvud. (Milline seos on kordajate p_i ja q_i vahel?)

Korrates samasuse (3.17) puhul eelnevaga analoogilist arutlust ja teisendusi ning jätkates seda arutlust $l - 2$ korda, jõuame samasuseni

$$T_{r_1-1}(x)\, e^{\varsigma_1 x} = 0 \quad , \qquad (3.18)$$

kus $\zeta_1 = \lambda_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_l)$ ja $T_{r_1-1}(x)$ on teatud r_1-1 astme p o l ü n o o m ega saa olla null. Ent see on vastuolus samasusega (3.18). Tekkinud vastuolu on tingitud meie väite vastasest oletusest, millega ongi vajalik tõestatud.

Eelneva põhjal saame järgmise eeskirja konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

lahendamiseks.

E s i t e k s l a h e n d a t a k s e v a s t a v k a r a k t e r i s t l i k v õ r r a n d

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

ja l e i t u d j u u r t e a b i l k o o s t a t a k s e l a h e n d i t e f u n d a m e n t a a l s ü s t e e m (3.12). Viimasega on m ä ä r a t u d ü l d l a h e n d k u i l i n e a a r n e k o m b i n a t s i o o n l a h e n d i t e s t (3.12).

Näide 8. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Koostame ja lahendame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 .$$

Lahenditeks on $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

Kirjutame välja lahendite fundamentaalsüsteemi

$y_1(x) = e^{-x}$; $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-3x}$

ja selle kaudu üldlahendi

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} .$$

Näide 9. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{IV} - 2y''' + y'' + 8y' - 20 y = 0 .$$

Koostame ja lahendame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 20 = 0.$$

Lahenditeks on $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1 + 2i$, $\lambda_4 = 1 - 2i$.
Kirjutame välja lahendite fundamentaalsüsteemi

$$y_1(x) = e^{2x} , \ y_2(x) = e^{-2x} , \ y_3(x) = e^x \cos 2x ,$$

$$y_4(x) = e^x \sin 2x$$

ja selle kaudu üldlahendi

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x \cos 2x + C_4 e^x \sin 2x .$$

Näide 10. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^V - 6y^{IV} + 9 y''' = 0 .$$

Koostame ja lahendame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 .$$

Lahenditeks on $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$.
Lahendite fundamentaalsüsteemiks on seega süsteem

$$y_1(x) = 1, \ y_2(x) = x , \ y_3(x) = x^2,$$

$$y_4(x) = e^{3x} \quad \text{ja} \quad y_5(x) = x e^{3x}$$

ja üldlahendiks

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\, e^{3x} \quad C_5\, xe^{3x}.$$

4. Mittehomogeenne lineaarne konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrand. Mittehomogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise küsimust käsitlesime eelmise paragrahvi artiklites 5 ja 6 . Seal öeldu on loomulikult kehtiv ka lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n y = P\,(x) \qquad (3.19)$$

puhul.

Ent mõningatel juhtudel on võrrandi (3.19) erilahendit lihtsam otsida määramatute kordajate meetodil, millega tutvumegi käesolevas artiklis. Eritleme järgmisi juhte.

1°. *Olgu* $P(x) = q_o x^m + \ldots + q_{m-1}\, x + q_m$, lühidalt $P(x) = Q_m(x)$ *ja* $p_n \neq 0$. Kuna $p_n \neq 0$, *ei ole* $\lambda = 0$ *karakteristliku võrrandi*

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (3.20)$$

juureks.

Näitame, et tehtud eeldustel on diferentsiaalvõrrandi (3.19) erilahendiks samuti m-astme polünoom

$$S_m(x) = s_o\, x^m + \ldots + s_{m-1}\, x + s_m\ . \qquad (3.21)$$

Selleks esitame diferentsiaalvõrrandi (3.19) vasaku poole kujul $(D - \lambda_1)\,(D - \lambda_2)\,\ldots\,(D - \lambda_n)\, y$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

on karakteristliku võrrandi (3.20) juured) ja rakendame operaatorit $D-\alpha$, kus $\alpha = \lambda_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, polünoomile $S_m(x)$. Saame

$$(D-\alpha)\left(\sum_{k=0}^{m} s_k x^{m-k}\right) = \sum_{k=0}^{m-1}(m-k)\, s_k x^{m-k-1} -$$

$$-\alpha\sum_{k=0}^{m} s_k x^{m-k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (m-j+1)\, s_{j-1} x^{m-j} - \alpha\sum_{j=0}^{m} s_j x^{m-j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[(m-j+1)\, s_{j-1} - \alpha s_j\right] x^{m-j} - \alpha s_0 x^m,$$

kus teisendustes on teostatud indeksi vahetus $k+1 = j$ ja $k = j$.

Seega: operaatori $D-\alpha$ rakendamisel polünoomile $S_m(x)$ saame sama astme polünoomi, mille kõrgeima astme kordajaks on $-\alpha s_0$. Järelikult ka operaatori $(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)$ rakendamisel polünoomile $S_m(x)$ saame ikka sama astme polünoomi, kus kõrgeima astme kordajaks on $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n s_0$ (näita seda iseseisvalt, kui $m \geq n$).

Seega võib võrrandi erilahendiks tõepoolest olla polünoom $S_m(x)$, kui saame nii määrata tema kordajad, et kehtib samasus

$$(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)S_m(x) = Q_m(x).$$

Arvestades ülalöeldut saame kordaja s_0 arvutamiseks järgmise valemi

$$(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n s_0 = q_0.$$

Võib näidata, et polünoomi $S_m(x)$ teiste kordajate arvutamiseks leitav süsteem on samuti lahenduv. Öeldu kinnituseks vaatleme järgmist näidet.

<u>Näide 11.</u> $y''' - y = x^2 + 1$.

Selles võrrandis on vabaliikmeks teise astme polünoom ja $p_3 = -1 \neq 0$. Seega otsime lahendit kujul $y^* (x) = s_0x^2 + s_1x + s_2$. Selleks arvutame tuletise $(y^*(x))''' = 0$ ja võrrandisse asendamisel saame

$$- s_0x^2 - s_1x - s_2 = x^2 + 1 ,$$

millest leiamegi kordajad: $s_0 = -1$; $s_1 = 0$ ja $s_2 = -1$.

Erilahendiks on $y^*(x) = -x^2 - 1$, kuna üldlahendiks on

$$y(x) = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) - x^2 - 1 .$$

2°. Olgu $P(x) = Q_m(x)$, kuid olgu $p_n = p_{n-1} = \ldots = p_{n-r+1} = 0$ ja $p_{n-r} \neq 0$.

Seega $\lambda = 0$ on karaketristliku võrrandi (3.20) r-kordne juur.

Teostame võrrandis (3.19) asenduse $y^{(r)}(x) = z$, mille tagajärjel saame (n -r)-järku diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n-r)} + p_1 z^{(n-r-1)} + \ldots + p_{n-r} z = Q_m(x) .$$

Saadud võrrandi puhul esineb meil eespool vaadeldud juht 1° ning võrrandi erilahendiks on $z = S_m(x)$. Seega jääb $y(x)$ leidmiseks lahendada võrrand $y^{(r)}(x) = S_m(x)$.

Kuna meid huvitab üks erilahend, saame integreerimiskonstante nulliks võttes ja r korda integreerides $y(x) = x^r \bar{S}_m(x)$, kus $\bar{S}_m(x)$ erineb polünoomist $S_m(x)$ vaid kordajate poolest (miks?).

Nii otsime juhul 2° lahendit kujul $x^r S_m(x)$.

<u>Näide 12</u>. $y''' - 2y'' = x - 1$.

Võrrandis on vabaliikmeks esimese astme polünoom ja $\lambda = 0$ on kahekordne juur, sest karakteristlikuks võrrandiks on

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0.$$

Erilahendit otsime niisugusel juhul kujul $y^*(x) = x^2 (ax + b)$. Tuletisi arvutades

$$(y^*)'' = 6ax + 2b \quad \text{ja} \quad (y^*)''' = 6a$$

ja võrrandisse asendades, saame

$$6a - 4b - 12ax = x - 1,$$

millest leiame, et $a = -\frac{1}{12}$ ja $b = \frac{1}{8}$.

Erilahendiks on seega funktsioon $y^*(x) = \frac{1}{4} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right)$ ja üldlahendiks

$$y(x) = \frac{1}{4} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) + C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}.$$

3° Olgu $P(x) = e^{\lambda x} Q_m(x)$, kus λ on reaalarv. Näitame, et muutujate asendusega $y(x) = e^{\lambda x} z$, taandub käesolev juht juhtudele 1° või 2°. Arvestades, et Leibnizi valemi põhjal on

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{(j)} \left(e^{\lambda x}\right)^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{(j)} \lambda^{k-j} ,$$

saame võrrandi (3.19) vasaku poole esitada kujul:

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i} y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} z^{(j)} \lambda^{i-j} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} z^{(j)} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} p_{n-i} \lambda^{i-j} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^{(j)} ,$$

kus

$$a_{n-j} = \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} p_{n-i} \lambda^{i-j} \qquad (3.22)$$

on reaalarvulised kordajad.

Taandades kordajaga $e^{\lambda x}$, näemegi, et antud juhul taandub võrrand (3.19) kujule

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^{(j)} = Q_m(x)$$

ehk

$$a_0 z^{(n)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = Q_m(x) \qquad (3.23)$$

ning on seega sama tüüpi, mis käsitletud juhtudel 1° ja 2° .

3°. 1. Vaatleme nüüd juhtu, kus $a_n \neq 0$. Valemi (3.22) põhjal on

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} \lambda^i$$

ning sel korral ei ole arv λ karakteristliku võrrandi juur; 1° põhjal on võrrandi (3.23) erilahendiks funktsioon $z(x) = S_m(x)$. Samaaegselt on siis võrrandi

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i}\, y^{(i)}(x) = e^{\lambda x} Q_m(x)$$

lahendiks funktsioon $y(x) = e^{\lambda x} S_m(x)$.

<u>Näide 13.</u> $y'' + 4y = x e^{-2x}$.

Käesoleval juhul on karakteristliku võrrandi $\lambda^2 + 4 = 0$ juurteks $\lambda_1 = 2i$ ja $\lambda_2 = -2i$, kuna vabaliikmeks on e^{-2x} ja esimese astme polünoomi korrutis. Erilahendit otsime nüüd kujul $y^*(x) = (ax + b) e^{-2x}$. Asendades $y^*(x)$ ja $(y^*(x))'' = [4(b-a) + 4ax] e^{-2x}$ võrrandisse, saame astmega e^{-2x} taandades samasuse

$$8b - 4a + 8ax = x,$$

millest leiame, et $a = \frac{1}{8}$ ja $b = \frac{1}{16}$.

Nii on

$$y^*(x) = \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}$$

diferentsiaalvõrrandi erilahend, kuna

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}$$

on üldlahend.

3°. 2. Olgu nüüd $a_n = a_{n-1} = a_{n-r+1} = 0$, $a_{n-r} \neq 0$. Valemi (3.22) põhjal on

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} \lambda^{i} = 0, \text{ s.o. } P_n(\lambda) = 0 ;$$

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} 1! \binom{i}{1} p_{n-i} \lambda^{i-1} = 0, \text{ s.o. } P'_n(\lambda) = 0 ;$$

. . . .

$$a_{n-r+1} = \sum_{i=r-1}^{n} (r-1)! \binom{i}{r-1} p_{n-i} \lambda^{i-r+1} = 0 ,$$

$$\text{s.o. } P_n^{(r-1)}(\lambda) = 0$$

ja seega (vt. [6] ptk. VI § 22) on λ karakteristliku võrrandi r-kordseks juureks.

2° põhjal on võrrandi (3.23) lahendiks $z(x) = x^r S_m(x)$ ja lähtevõrrandi lahendiks $y(x) = x^r S_m(x) e^{\lambda x}$.

<u>Näide 14</u>. $y'' - y = x^2 e^x$.

Karakteristliku võrrandi $\lambda^2 - 1 = 0$ juurteks on siin $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -1$, kusjuures vabaliikmeks on $x^2 e^x$. Seega peab erilahendit otsima kujul $y^*(x) = (ax^2 + bx + c)\, x\, e^x$.

Arvutades tuletise $(y^*(x))'' = e^x [ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c]$, asendades võrrandisse ja taandades astmega e^x, saame $6ax^2 + (6a + 4b)x + 2b + 2c = x^2$, millest järeldub, et $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{4}$ ja $c = \frac{1}{4}$. Nii on $y^*(x) = (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\, x\, e^x$ ja võrrandi üldlahendiks on

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\, x\, e^x.$$

Tulemusi 1° – 3° kokku võttes saame diferentsiaalvõrrandi (3.19) erilahendi leidmiseks järgmise eeskirja.

O l g u v õ r r a n d i (3.19) v a b a l i i g e

$P(x) = e^{\lambda x} Q_m(x)$, kus λ on mingi reaalarv ja $Q_m(x)$ on antud m-astme polünoom. Olgu λ karakteristliku võrrandi (3.20) r-kordne juur (λ ja r võivad ka nullid olla). Siis on võrrandi (3.19) erilahendiks funktsioon

$$y^*(x) = e^{\lambda x} x^r S_m(x),$$

kus $S_m(x)$ on m-astme polünoom.

5. <u>Konstantsete kordajatega lineaarseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad diferentsiaalvõrrandid</u>. Lineaarsetest diferentsiaalvõrranditest oskame me senini lahendada vaid konstantsete kordajatega võrrandeid. On loomulik küsida: kas mittekonstantsete kordajatega lineaarseid võrrandeid saab taandada konstantsete kordajatega võrrandeiks? Üldjuhul pole taandamine võimalik, küll on aga niisuguseid võrrandite liike, mille puhul osutub see võimalikuks. Üheks niisugustest on nn. <u>Euleri diferentsiaalvõrrand</u>.

Euleri diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0 , \qquad (3.24)$$

kus p_i ($i = 1,2,\ldots,n$) on reaalarvulised kordajad.

Näitame, et muutujate vahetusega $x = e^t$ taandub võrrand (3.24) konstantsete kordajatega lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks. Selleks esitame võrrandi (3.24) kujul

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} x^k D^k y = 0, \qquad (3.25)$$

kus $p_0 = 1$, ja näitame, et kehtib võrdus

$$x^k D^k y = D_t(D_t - 1) \dots (D_t - k + 1)\, y(t) \quad (3.26)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

milles $D_t = \frac{d}{dt}$ ja $y(t)$ on funktsioon muutujast t. Siinjuures märgime, et

$$D_t(D_t - 1) \dots (D_t - k + 1) = \sum_{l=1}^{k} b_{k-l} D_t^l, \quad (3.27)$$

kus b_{k-l} on konstantsed kordajad ja $b_0 = 1$ (miks?) .

Kui arvestame, et võrrandis (3.25) on teostatud muutujate vahetus seose $x = e^t$ põhjal ja loeme võrduse (3.26) tõestatuks, saame (3.27) põhjal:

$$p_n y + \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{k-l} D_t^l y \right) =$$

$$= p_n y + \sum_{l=1}^{n} D_t^l y \left(\sum_{k=l}^{n} p_{n-k} b_{k-l} \right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} q_{n-l} D_t^l y ,$$

kus $q_n = p_n$ ja $q_{n-l} = \sum_{k=l}^{n} p_{n-k} b_{k-l}$ $(l = 1, 2, \dots, n)$ on reaalarvulised kordajad, kuna nii p_{n-k} kui ka b_{k-l} $(k, l = 1, 2, \dots, n)$ on reaalarvud.

Seega taandub võrrand (3.24) ,s.o. (3.25) tõepoolest konstantsete kordajatega võrrandiks

$$\sum_{l=0}^{n} q_{n-l} D_t^l y = 0 .$$

Lõpuks tõestame võrduse (3.26) induktsioonimeetodiga:

1) kontrollime valemi õigsust, kui indeksi k väärtuseks on 1. Siis

$$x\ Dy = e^t \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^t D_t y \cdot e^{-t} = D_t y\ ;$$

2) teeme induktiivse oletuse, et võrdus (3.26) on veel õige, kui indeksi väärtuseks on k ja

3) näitame, et ta jääb õigeks ka $k + 1$ korral. Selleks arvutame

$$x^{k+1} D^{k+1} y = e^{(k+1)t} \frac{d\, D^k y}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= e^{(k+1)t} \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d\, D_t(D_t-1) \ldots (D_t - k+1)\, y \cdot e^{-kt}}{dt} =$$

$$= e^{(k+1)} e^{-t} \left[D_t^2 (D_t -1) \ldots (D_t - k+1)\, y \cdot e^{-kt} - \right.$$

$$\left. - ke^{-kt} D_t(D_t -1) \ldots (D_t - k + 1)\ y \right] =$$

$$= D_t (D_t - 1) \ldots (D_t - k +1)(D_t y - k y) =$$

$$= D_t (D_t -1) \ldots (D_t - k + 1)(D_t - k)\ y\ ,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Olgu märgitud, et võrdust (3.26) kasutatakse ka vahetult Euleri võrrandi lahendamisel. Jälgime näidet.

<u>Näide 15</u>.

$$x^3 y''' + x^2 y'' + 3\, xy' - 8y = 0.$$

Antud võrrand on Euleri võrrand. Seega teostame asenduse $x = e^t$ <u>ning</u> arvestades võrdust (3.26), saame $xy' = D_t\ y$; $x^2 y'' = D_t(D_t - 1)\ y$ ja $x^3 y''' = D_t (D_t - 1) (D_t - 2)\ y$,

$$D_t(D_t-1)(D_t-2)\,y + D_t(D_t-1)y + 3\,D_t y - 8y = 0.$$

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed saame

$$D_t^3\,y - 2\,D_t^2\,y + 4\,D_t y - 8y = 0, \tag{3.28}$$

mille lahendamiseks leiame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

juured. Nendeks on $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2i$, $\lambda_3=-2i$.

Võrrandi (3.28) lahendite fundamentaalsüsteemiks on seega funktsioonid

$$y_1 = e^{2t}\ ,\ y_2 = \cos 2t\ ,\quad y_3 = \sin 2t \quad \text{ja}$$

antud võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1x^2 + C_2\cos 2\ln|x| + C_3\sin 2\ln|x|.$$

Analoogiliselt saab näidata, et ka üldisem Euleri diferentsiaalvõrrand

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(ax+b)\,y' + p_n y = 0,$$

kus a,b ja p_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ on reaalarvud, taandub asendusega $ax+b = e^t$ konstantsete kordajatega lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks.

Eespool kirjeldatud meetod on rakendatav ka mittehomogeense Euleri diferentsiaalvõrrandi puhul ,kus võrrandi pa-

paremaks pooleks on vahemikus J määratud funktsioon P(x).

§ 4. RAJAÜLESANDED. GREENI FUNKTSIOON.

1. Rajaülesanne ja rajatingimused. Vaatleme lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$
\begin{aligned}
Ly \equiv P_0(x)\, y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + \\
\ldots + P_n(x)\, y = P(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Me eeldame kogu käesoleva paragrahvi kestel, et funktsioonid $\frac{1}{P_0(x)}$, $P_1(x)$, ... , $P_n(x)$ ja $P(x)$ on pidevad lõigul $[a,b]$.

Võrrandi (4.1) üldlahend avaldub teatavasti kujul $y = y^* + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$, kus y^* on võrrandi (4.1) mingi erilahend, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ aga vastava homogeense võrrandi $Ly=0$ erilahendite fundamentaalsüsteem. Seni oleme erilahendi väljaeraldamist üldlahendist teostanud ainult algtingimuste

$$
y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}
\tag{4.2}
$$

abil. Nagu me nägime, on võrrandil (4.1) parajasti üks lahend, mis rahuldab algtingimusi (4.2), s.t. suvaliste konstantide C_i väärtused on tingimustega (4.2) üheselt määratavad.

Ei ole aga õige arvata, et erilahendi väljaeraldamine toimub alati algtingimuste abil. Võrdlemisi sageli esineb ülesandeid, kus tuleb leida võrrandi (4.1) lahend, mis rahuldaks järgmist tüüpi tingimusi:

$$
\sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ij}\, y^{(j)}(a) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(b) \right] = \gamma_i \quad (i=1,2,\ldots,n)
\tag{4.3}
$$

(Siin α_{ij}, β_{ij} ja γ_i on etteantud konstandid). Tingimused (4.3) kujutavad endast lineaarseid seoseid $y(x)$, $y'(x)$,..., $y^{(n-1)}(x)$ väärtuste vahel $[a,b]$ otspunktides (rajapunktides a ja b); neid tingimusi nimetatakse <u>rajatingimusteks</u>, täpsemalt, l i n e a a r s e t e k s   r a j a t i n g i m u s t e k s. Kui $\gamma_i = 0$ ($i = 1,2,...,n$), öeldakse, et rajatingimused (4.3) on <u>homogeensed</u>.

Diferentsiaalvõrrandit (4.1) koos rajatingimustega (4.3) nimetatakse <u>rajaülesandeks</u>. R a j a ü l e s a n d e $\{(4.1), (4.3)\}$ l a h e n d i   a l l   m õ i s t e t a k s e   v õ r r a n d i (4.1) s e l l i s t   l a h e n d i t,   m i s   r a h u l d a b   r a j a t i n g i m u s i (4.3). <u>Rajaülesannet</u> $\{(4.1),(4.3)\}$ <u>nimetatakse homogeenseks</u>, kui võrrand (4.1) ja rajatingimused (4.3) on homogeensed (s.t. kui $P(x) \equiv 0$ ja $\gamma_1 = ... = \gamma_n = 0$).

Vaatleme tingimusi (4.3) ajutiselt algebralise võrrandisüsteemina $y(a)$, $y'(a)$, ... , $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $y'(b)$,..., ..., $y^{(n-1)}(b)$ suhtes. Süsteemi kordajate maatriks

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} \cdots & \alpha_{1,n-1} & \beta_{10} & \beta_{11} \cdots \beta_{1,n-1} \\ \alpha_{20} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2,n-1} & \beta_{20} & \beta_{21} \cdots \beta_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} \cdots & \alpha_{n,n-1} & \beta_{n0} & \beta_{n1} \cdots \beta_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

koosneb n reast ja $2n$ veerust.

Algebrast teame, et kui maatriksi A astak on n-st väiksem, siis on kaks võimalust: võrrandid (4.3) on kas vasturääkivad või lineaarselt sõltuvad. Esimesel juhul ei leidu ühtegi funktsiooni $y(x)$, mis rahuldaks rajatingimusi

(4.3), ja rajaülesanne $\{(4.1), (4.3)\}$ on mittelahenduv. Teisel juhul on vähemalt üks võrranditest (4.3) lineaarne kombinatsioon ülejäänutest ja meil jääb järgi vähem kui n lineaarselt sõltumatut rajatingimust (4.3), mille abil ei ole võimalik üheselt määrata n suvalist konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ üldlahendi avaldises. Kumbki nendest kahest juhtumist meile ei sobi ja me eeldame järgnevas kogu aeg, et maatriksi A astak on n. Nagu veendusime, tähendab see eeldus sisuliselt, et rajatingimused (4.3) on mittevasturääkivad ja lineaarselt sõltumatud.

Illustreerime öeldut näidetega teist järku võrrandile (n = 2) kaasnevatest rajatingimustest; rajatingimuste kõrvale kirjutame nende kordajate maatriksi. Rajatingimused

$$\begin{cases} y(a) + y'(a) - 3y(b) = 1, \\ 2y(b) + y'(b) = 0, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rahuldavad püstitatud nõuet - maatriksi A astak on 2.

Rajatingimused

$$\begin{cases} y(a) - y(b) = \gamma_1, \\ 2y(a) - 2y(b) = \gamma_2, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

aga ei rahulda - astak on 1. Kui $\gamma_2 \neq 2\gamma_1$ on viimased rajatingimused vasturääkivad, $\gamma_2 = 2\gamma_1$ korral aga lineaarselt sõltuvad (teise tingimuse saame esimese läbikorrutamisel 2-ga).

Ka algtingimusi (4.2) võib vaadelda rajatingimustena: võttes $x_0 = a$, on kordajate maatriksiks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

mille astak on ilmselt võrdne n-ga.

Erinevalt algtingimustest, ei võimalda rajatingimused alati erilahendi ühest väljaeraldamist üldlahendist,s.t. mitte alati ei ole rajaülesanne üheselt lahenduv. Näiteks on rajaülesandel

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 , \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

lõpmata palju lahendeid $y = C \sin \pi x$; rajatingimuste kordajate maatriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rahuldab püstitatud nõuet - astak on 2 .

2. <u>Rajaülesande ühene lahenduvus</u>.Analüüsime küsimust rajaülesande ühesest lahenduvusest. Et muuta mõningaid teisendusi ülevaatlikumaks, toome sisse nn. <u>rajaoperaatorid</u> U_i ($i = 1, 2, \dots, n$), mis seavad igale $n - 1$ korda pidevlt diferentseeruvale funktsioonile $y(x)$ vastavusse arvu

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ij} \, y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b) \right] .$$

Ilmselt on rajaoperaator U_i lineaarne (põhjendage üksikasjaliselt):

$$U_i(y_1 + y_2) = U_i(y_1) + U_i(y_2) ,$$

$$U_i\,(c\,y) = cU_i(y) \qquad (c = \mathrm{const}).$$

Kasutades rajaoperaatoreid, võime rajaülesande $\{(4.1),\ (4.3)\}$ lühidalt kirja panna nii:

$$Ly = P, \quad U_i(y) = \gamma_i \qquad (\, i = 1,2,\ldots,n) \;;$$

rajaülesandele $\{(4.1),\ (4.3)\}$ vastavaks homogeenseks rajaülesandeks on

$$Ly = 0 \;, \; U_i(y) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,\, n). \quad (4.4)$$

Püüame määrata konstandid C_j võrrandi (4.1) üldlahendis $y = y^* + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j$ selliselt, et oleksid rahuldatud rajatingimused (4.3) :

$$U_i\,(y^* + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j) = \gamma_i \cdot (i = 1,2,\ldots,n).$$

Kasutades operaatorite U_i lineaarsust, kirjutame viimased tingimused ümber nii

$$C_1\, U_i\,(y_1) + C_2U_i(y_2) + \ldots + C_nU_i(y_n) =$$

$$= \gamma_i - U_i\,(y^*) \qquad (\, i = 1,2,\ldots,\, n).$$

Me saime konstantide $C_1,\ C_2,\ \ldots\ ,\ C_n$ määramiseks algebralise võrrandisüsteemi, mis on üheselt lahenduv siis ja ainult siis, kui süsteemi determinant

$$D = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \ldots U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \ldots U_2(y_n) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) \ldots U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

erineb nullist. Sellega oleme tõestanud järgmist.

<u>Lemma 1.</u> Rajaülesanne $\{(4.1), (4.3)\}$ on üheselt lahenduv siis ja ainult siis, kui $D \neq 0$.

Uurime nüüd, millal $D = 0$, s.t. millal rajaülesanne $\{(4.1), (4.3)\}$ ei ole üheselt lahenduv. Tingimus $D = 0$, tähendab, et determinandi veeruvektorid on lineaarselt sõltuvad; leiduvad sellised konstandid $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \neq 0)$, et

$$\alpha_1 U_i(y_1) + \alpha_2 U_i(y_2) + \ldots + \alpha_n U_i(y_n) = 0$$

$$(i = 1,2,\ldots,n).$$

Kasutades taas operaatorite U_i lineaarsust, kirjutame viimased tingimused ümber kujul

$$U_i(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n) = 0$$

$$(i = 1,2,\ldots, n).$$

Nagu näha, rahuldab funktsioon $\bar{y} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$ homogeenseid rajatingimusi $U_i(y) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$; see funktsioon on ühtlasi homogeense võrrandi $Ly = 0$ mittetriviaalseks lahendiks (miks?) . Me jõudsime tulemuseni : kui $D = 0$, siis homogeensel rajaülesandel (4.4) on olemas mittetriviaalne lahend. Viies arutlused läbi vastupidises suunas (teha seda!) , saame vastupidise tulemuse : kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on olemas mittetriviaalne lahend, siis $D = 0$. Kokkuvõttes, $D = 0$ siis ja ainult siis, kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on ole-m a s m i t t e t r i v i a a l n e l a h e n d. (Paneme tähele, et $y = 0$ on alati (4.4) lahendiks, s.t. homogeensel rajaülesandel on triviaalne lahend alati olemas.)

Järeldus 1. $D \neq 0$ siis ja ainult siis, kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on olemas a i n u l t triviaalne lahend.

Lemmast 1 tuleneb järgmine teereem.

Teoreem 25. Rajaülesanne $\{(4.1), (4.3)\}$ on üheselt lahenduv siis ja ainult siis, kui vastaval homogeensel rajaülesandel (4.4) on olemas a i n u l t triviaalne lahend.

3. Rajatingimuste teisendamine homogeenseteks. Rajatingimusi on muutujate vahetuse abil võimalik teisendada homogeenseteks. Tõepoolest, olgu $u(x)$ selline n korda pidevalt diferentseeruv funktsioon, mis rahuldab rajatingimusi (4.3) (võrrandit (4.1) $u(x)$ rahuldama ei pea ja seetõttu ei valmista sobiva $u(x)$ leidmine raskusi). Kui $y(x)$ on rajaülesande $\{(4.1), (4.3)\}$ lahendiks, siis funktsioon

$$z(x) = y(x) - u(x)$$

rahuldab järgmisi tingimusi:

$$Lz = L(y - u) = Ly - Lu = F - Lu,$$

$$U_i(z) = U_i(y-u) = U_i(y) - U_i(u) = \gamma_i - \gamma_i = 0$$
$$(i = 1,2,\ldots,n).$$

Järelikult omandab rajaülesanne $\{(4.1), (4.3)\}$ uue otsitava funktsiooni $z = y - u(x)$ suhtes kuju

$$Lz = P_1, \quad U_i(z) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

milles $P_1 = P - Lu$ on meile tuntud funktsioon. Rajatingimused on viimases rajaülesandes juba homogeensed. Nagu näha, muutub rajatingimuste homogeenseks teisendamisel ainult võrrandi vabaliige.

Edaspidi me vaatleme ainult homogeenseid rajatingimusi, s.t. eeldame, et vastav muutujate vahetus on juba tehtud.

4. <u>Greeni funktsioon</u>. Rajaülesannete lahendamisega on tihedalt seotud nn. Greeni funktsiooni mõiste. Greeni funktsiooni tähtsus selgub lugejale allpool (teoreemiga 27). Vahepeal aga esitame definitsiooni, mis võimaldab Greeni funktsiooni praktiliselt konstrueerida.

Kaasnegu diferentsiaalvõrrandiga (4.1) lineaarsed homogeensed rajatingimused

$$U_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b) \right] = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.3)$$

<u>Definitsioon</u>. <u>Rajaülesande</u> $\{(4.1),(4.3)\}$ <u>Greeni funktsiooniks</u> nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $G(x,s)$, mis on määratud ruudus

$$R = \{ a \leq x \leq b, \quad a \leq s \leq b \}$$

ja rahuldab järgmisi tingimusi:

1° $G(x,s)$ on ruudus R pidev ja tal on seal olemas pidevad osatuletised x järgi kuni järguni $n - 2$;

2° funktsioonil $G(x,s)$ on olemas ka pidevad $(n-1)$- ja n-järku osatuletised x järgi kõikjal ruudus R, välja arvatud sirgel $x=s$, kus (n-1)-järku osatuletisel on lõplik hüpe

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,s)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,s)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=s-0} = \frac{1}{P_0(s)};$$

3° $x \neq s$ korral rahuldab $G(x,s)$ kui muutuja x funktsioon homogeenset võrrandit $Ly = 0$ ja rajatingimusi (4.3').

Lugedes toodud definitsiooni veel kord hoolsalt läbi, veendume, et Greeni funktsioon ei sõltu mingil viisil võrrandi (4.1) vabaliikmest $P(x)$. Sel põhjusel nimetatakse äsja defineeritud funktsiooni $G(x,s)$ sageli ka diferentsiaaloperaatori L Greeni funktsiooniks rajatingimustel (4.3').

Vaatleme, kuidas toimub G r e e n i f u n k t s i o o n i p r a k t i l i n e l e i d m i n e. Omaduse 3° põhjal on $G(x,s)$ nii $x > s$ kui ka $x < s$ korral homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendiks, mistõttu ta avaldub lineaarse kombinatsioonina erilahenditest $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

$$G(x,s) = \begin{cases} a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x), & \text{kui } x < s; \quad (4.5') \\ b_1y_1(x) + b_2y_2(x) + \ldots + b_ny_n(x), & \text{kui } x > s. \quad (4.5'') \end{cases} \qquad (4.5)$$

Kordajad a_i ja b_i on s erinevate väärtuste korral üldiselt erinevad, s.t. $a_i = a_i(s)$, $b_i = b_i(s)$; nende kordajate leidmisele taandubki Greeni funktsiooni konstrueerimine . Avaldisest (4.5) järeldub, et

$$\frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} = \begin{cases} a_1 y_1^{(i)}(x) + \ldots + a_n y_n^{(i)}(x), \text{kui } x < s; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=0,1,\ldots,n), \\ b_1 y_1^{(i)}(x) + \ldots + b_n y_n^{(i)}(x), \text{ kui } x > s; \end{cases}$$

nii et muuhulgas

$$\left.\frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i}\right|_{x=s-0} = a_1 y_1^{(i)}(s) + \ldots + a_n y_n^{(i)}(s) ,$$

$$\left.\frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i}\right|_{x=s+0} = b_1 y_1^{(i)}(s) + \ldots + b_n y_n^{(i)}(s) .$$

Viimased piirväärtused on $i = 0,1,\ldots, n-2$ korral võrdsed (omadus 1°) , $i = n-1$ korral aga erinevad nad teineteisest $\frac{1}{p_o(s)}$- võrra (omadus 2°). Seega

$$b_1 y_1(s) + \ldots + b_n y_n(s) - [a_1 y_1(s) + \ldots + a_n y_n(s)] = 0,$$

$$b_1 y'_1(s) + \ldots + b_n y'_n(s) - [a_1 y'_1(s) + \ldots + a_n y'_n(s)] = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_1 y_1^{(n-2)}(s) + \ldots + b_n y_n^{(n-2)}(s) - \\ - [a_1 y_1^{(n-2)}(s) + \ldots + a_n y_n^{(n-2)}(s)] = 0,$$

$$b_1 y_1^{(n-1)}(s) + \ldots + b_n y_n^{(n-1)}(s) - \\ - [a_1 y_1^{(n-1)}(s) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(s)] = \frac{1}{p_o(s)}$$

ehk, tähistades $b_i - a_i = c_i$,

$$\begin{cases} c_1 y_1(s) + \dots + c_n y_n(s) = 0, \\ c_1 y'_1(s) + \dots + c_n y'_n(s) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(s) + \dots + c_n y_n^{(n-2)}(s) = 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(s) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(s) = \frac{1}{p_0(s)} \end{cases} \quad (4.6)$$

Tingimused (4.6) kujutavad endast võrrandisüsteemi $c_1, c_2, \dots, \dots, c_n$ suhtes. Süsteemi determinant erineb iga $s \in [a,b]$ korral nullist kui Wrosnki determinant homogeense võrrandi $Ly = 0$ lineaarselt sõltumatutest erilahenditest $y_1, \dots, y_n$. Niisiis on süsteemil (4.6) parajasti üks lahend $c_1, \dots, c_n$.

Esitame rajaoperaatori U_i kahe rajaoperaatori summana:

$$U_i = U_{ia} + U_{ib},$$

kus

$$U_{ia}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}\, y^{(j)}(a), \quad U_{ib} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij}\, y^{(j)}(b).$$

Paneme nüüd kirja tingimuse, et $G(x,s)$ rahuldab fikseeritud $s \in (a,b)$ korral rajatingimusi (4.3')(omadus 3°):

$$U_i(G(x,s)) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

ehk

$$U_{ia}(G(x,s)) + U_{ib}(G(x,s)) = 0 \quad (i=1,\dots,n).$$

Kuna $x = a$ korral (siis $x < s$) avaldub $G(x,s)$ kujul (4.5'), $x = b$ korral aga kujul (4.5"), siis viimastest tingimustest saame, et

$$U_{ia}(a_1y_1 + \dots + a_ny_n) + U_{ib}(b_1y_1 + \dots + b_ny_n) = 0$$
$$(i = 1, \dots, n).$$

Asendame siin $b_i = a_i + c_i$

$$U_{ia}(a_1y_1 + \dots + a_ny_n) + U_{ib}((a_1 + c_1)y_1 + \dots$$
$$\dots + (a_n + c_n)y_n) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Kasutades operaatorite U_{ia} ja U_{ib} lineaarsust ning võttes arvesse, et $U_{ia}(y_j) + U_{ib}(y_j) = U_i(y_j)$, viime meie tingimused lõpuks kujule

$$a_1U_i(y_1) + \dots + a_nU_i(y_n) = -c_1U_{ib}(y_1) - \dots$$
$$\dots - c_n U_{ib}(y_n) \qquad (i = 1, \dots, n). \qquad (4.7)$$

See on võrrandisüsteem $a_1, \dots, a_n$ suhtes; paremal pool on eespool juba leitud suurused $c_1, \dots, c_n$ ja kergesti arvutatavad konstandid $U_{ib}(y_1), \dots, U_{ib}(y_n)$. Kui süsteemil (4.7) on olemas ühene lahend $a_1, \dots, a_n$, s.t. kui süsteemi determinant erineb nullist, siis, avaldanud kordajad $b_1, \dots, b_n$ seostest $b_i = a_i + c_i$, on Greeni funktsioon (4.5) leitud. Kuid järelduse 1 põhjal on süsteemi (4.7) determinant D nullist erinev siis ja ainult siis, kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on olemas ainult triviaalne lahend. Sellega oleme jõudnud järgmise tulemuseni:

<u>Teoreem 26</u>. Kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on ainult triviaalne lahend, siis rajaülesandel $\{(4.1), (4.3')\}$ on para-

jasti üks Greeni funktsioon. See Greeni funktsioon avaldub kujul (4.5), kus $b_i = c_i + a_i$, c_i ja a_i aga on leitavad vastavalt süsteemidest (4.6) ja (4.7).

Näide 16. Leiame rajaülesande

$$y'' = Q(x), \quad y(a) = 0 \ , \quad y(b) = 0 \qquad (4.8)$$

Greeni funktsiooni. Homogeense võrrandi $y'' = 0$ lineaarselt sõltumatuteks erilahenditeks on $y_1(x) = 1$ ja $y_2(x) = x$ ning Greeni funktsioon avaldub kujul

$$G(x,s) = \begin{cases} a_1 + a_2 x \ , \text{kui} & x < s \ , \\ b_1 + b_2 x, \ \text{kui} & x > s \ . \end{cases}$$

Süsteem (4.6) on antud juhul järgmine:

$$c_1 + c_2 s = 0 \ , \quad c_1 \cdot 0 + c_2 = 1.$$

Siit $c_1 = -s$, $c_2 = 1$. Kuna vaadeldava näite korral

$$U_1(y) = y(a), \ U_2(y) = y(b), \ U_{1b}(y) = 0, \ U_{2b}(y) = y(b),$$

siis süsteemiks (4.7) saame

$$a_1 + a_2 a = 0 \ , \quad a_1 + a_2 b = s - b \ ,$$

kust $a_1 = -a \dfrac{s-b}{b-a}$, $a_2 = \dfrac{s-b}{b-a}$. Seostest $b_i = c_i + a_i$ leiame nüüd, et $b_1 = b \dfrac{a-s}{b-a}$, $b_2 = \dfrac{s-a}{b-a}$,

ja pärast lihtsaid teisendusi võtab Greeni funktsioon kuju

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & \text{kui } x < s, \\ \dfrac{(x-b)(s-a)}{b-a}, & \text{kui } x > s. \end{cases}$$

Teoreem 27. Kui homogeensel rajaülesandel (4.4) on ainult triviaalne lahend, siis rajaülesande $\{(4.1), (4.3)\}$ lahend avaldub kujul

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)\, P(s)\, ds, \qquad (4.9)$$

kus $G(x,s)$ on rajaülesande $\{(4.1), (4.3)\}$ Greeni funktsioon.

T õ e s t u s. Me peame näitama, et avaldisega (4.9) defineeritud funktsioon $y(x)$ on n korda pidevalt diferentseeruv ning rahuldab võrrandit (4.1) ja rajatingimusi (4.3'). Paneme tähele, et $\int_a^b G(x,s)\, P(s)\, ds$ on parameetrist x sõltuv integraal; kuna integraalialune funktsioon $G(x,s)\, P(s)$ on pidev ja $n-2$ korda pidevalt diferentseeruv parameetri x järgi, siis $y(x)$ on pidev ja $n-2$ korda pidevalt diferentseeruv, kusjuures diferentseerimist võib teostada integraali märgi all. Seega $i = 0,1,\ldots, n-2$ korral

$$y^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i}\, P(s)\, ds. \qquad (4.9')$$

Järgnevat kahte tuletist ei ole sellisel viisil enam võimalik leida, sest $\dfrac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}}$ ja $\dfrac{\partial^n G(x,s)}{\partial x^n}$ ei ole pidevad. Seetõttu toimime järgmiselt. Kirjutame $y^{(n-2)}(x)$ avaldise ümber kahe integraali summana:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-2} G(x,s)}{\partial x^{n-2}} P(s)ds + \int_x^b \frac{\partial^{n-2} G(x,s)}{\partial x^{n-2}} P(s)ds .$$

Esimeses integraalis on $x > s$, teises $x < s$. Kuid nii $x > s$ kui ka $x < s$ korral on Greeni funktsioonil olemas pidev $(n-1)$ -järku osatuletis x järgi (omadus 2°) ning järelikult võime kumbagi liidetavat diferentseerida integraali märgi all. Arvestades, et x esineb ka integreerimisrajades (esimeses liidetavas on x ülemiseks, teises alumiseks integreerimisrajaks), saame:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)ds + \left. \frac{\partial^{n-2} G(x,s)}{\partial x^{n-2}} P(s) \right|_{s = x-0} + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)ds - \left. \frac{\partial^{n-2} G(x,s)}{\partial x^{n-2}} P(s) \right|_{s=x+0} .$$

Kumbki integraal võrduse paremal pool esitab pidevat funktsiooni ja need kaks integraali on kokku võetavad üheks inte-

27.

integraaliks rajades (a,b). kaks ülejäänud liiget aga koonduvad välja, sest $\dfrac{\partial^{n-2} G(x,s)}{\partial x^{n-2}}$ on pidev. Seega $y^{(n-1)}(x)$ on pidev ja (4.9') kehtib ka i = n - 1 korral. Avaldisest

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)ds + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)ds$$

leiame analoogiliselt, et

$$y^{(n)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^n G(x,s)}{\partial x^n} P(s)ds + \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)\Big|_{s=x-0} + \int_x^b \frac{\partial^n G(x,s)}{\partial x^n} P(s)ds - \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)\Big|_{s=x+0}.$$

Integraalid võrduse paremal pool esitavad taas pidevaid funktsioone ja on kokku võetavad üheks integraaliks rajades (a,b). Ülejäänud kaks liiget ei koondu sel korral välja, vaid omaduse 2° põhjal

$$\frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)\Big|_{s=x-0} - \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)\Big|_{s=x+0} = \frac{P(x)}{P_0(x)}.$$

Seega $y^{(n)}(x)$ on ka pidev ja avaldub kujul

$$y^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G(x,s)}{\partial x^n} P(s)ds + \frac{P(x)}{P_0(x)}. \qquad (4.9")$$

Veendume, et y(x) rahuldab võrrandit (4.1). Tõepoolest, (4.9') ja (4.9") põhjal

$$Ly(x) = P_0(x)y^{(n)}(x)+P_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+P_n(x)y(x) =$$

$$= P_0(x)\left[\int_a^b \frac{\partial^n Q(x,s)}{\partial x^n} P(s)ds + \frac{P(x)}{P_0(x)}\right] +$$

$$+ P_1(x)\int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x,s)}{\partial x^{n-1}} P(s)ds + \ldots$$

$$\ldots + P_n(x)\int_a^b G(x,s)\, P(s)\, ds = P(x) +$$

$$+ \int_a^b \left[LG(x,s)\right] P(s)ds = P(x), \text{ m.o.t.t.}$$

Me viisime kordajad $P_i(x)$ vastavate integraalide märkide alla; võtnud integraalid kokku üheks integraaliks, saime integraali alla $[LG(x,s)]\, P(s)$. Kuid $x \neq s$ korral $LG(x,s) = 0$ omaduse 3° põhjal ning $\int_a^b LG\,(x,s)\, P(s)ds=0$, sest integraali väärtus ei sõltu teatavasti integraalialuse funktsiooni väärtusest ühes fikseeritud punktis (antud juhul punktis $s = x$).

Täiesti analoogiliselt leiame (4.9') ja 3° abil, et

$$U_i(y) = \int_a^b U_i(G(x,s))\;\; P(s)\, ds = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

s.t. $y(x)$ rahuldab ka rajatingimusi (4.3'). Teoreem 27 on tõestatud.

Nagu tõestatud teoreemist nähtub, võimaldab Greeni funktsiooni teadmine kohe välja kirjutada rajaülesande lahendit mistahes vabaliikme $P(x)$ korral. Näiteks on rajaülesande (4.8) lahendiks (vt. vastava Greeni funktsiooni avaldist)

$$y(x) = \frac{x - b}{b - a} \int_a^x (s - a)\, P\,(s)ds\, +$$

$$+ \frac{x - a}{b - a} \int_x^b (s - b)\, P\,(s)ds.$$

P õ h i l i n e   k i r j a n d u s.

1. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1950.
2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа I, Москва, 1964.
3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения, Москва, 1957.
4. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Москва, 1965.

T ä i e n d a v   k i r j a n d u s.

5. Kaasik, Ü. Kompleksmuutuja funktsioonide teooria, Tartu, 1962.
6. Kangro, G. Kõrgem algebra, Tallinn 1962.
7. Lumiste, Ü. Diferentsiaalgeomeetria, Tallinn, 1963.

S i s u k o r d.