TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

661

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 661 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1984

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 661.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Реймерс.
Подписано к печати 2.01.1984.
МВ 01001.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 5,03.
Печатных листов 6,0.
Тираж 300.
Заказ № 2.
Цена 75 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.

2 - 2

ОБ ОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ МАТРИЦ, СОХРАНЯЮЩИХ СХОДИМОСТЬ

М. Абель

Тартуский государственный университет

Пусть F - поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, A - топологическая алгебра над F, $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ - бесконечная матрица над A и X - топологический левый A-модуль. Для данной последовательности $(x_n)\subset X$ образуем новую последовательность (y_n), где[1]

$$y_n=\sum_k a_{nk}x_k$$

при всех $n\in\mathbb{N}$. Если все элементы последовательности (y_n) принадлежат X и последовательность (y_n) сходится к $x\in X$ в топологии A-модуля X, то последовательность (x_n) будем называть *суммируемой к элементу* x *матрицей* $\mathfrak{A}$. Таким образом определенное понятие суммируемости последовательностей в топологических левых A-модулях является прямым обобщением понятия суммируемости последовательностей в линейных топологических пространствах матрицами над F.

I. Пусть A - секвенционально полная отделимая локально m-выпуклая[2] алгебра над F, топология которой определена системой $\{p_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ непрерывных полунорм и

$$q_\lambda(\mathfrak{A})=\sup_n\sum_k p_\lambda(a_{nk})$$

для каждой матрицы $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ над A и каждого $\lambda\in\Lambda$. Если $q_\lambda(\mathfrak{A})<\infty$ для каждого $\lambda\in\Lambda$, то $\sum_k p_\lambda(a_{nk})<\infty$ при всех $\lambda\in\Lambda$ и $n\in\mathbb{N}$. В силу секвенциальной полноты алгебры A, отсюда следует (см. [6], стр. 97) сходимость ряда $\sum_k a_{nk}$ в топологии алгебры A для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$.

Пусть $\Gamma(A)$ - множество всех матриц $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ над A, которые удовлетворяют условиям

(α) $q_\lambda(\mathfrak{A})<\infty$ для каждого $\lambda\in\Lambda$,

(β) для каждого $k\in\mathbb{N}$ последовательность $(a_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$

---

[1] Для краткости обозначим $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ через $\sum\limits_k$.

[2] Напомним, что локально выпуклая топология на алгебре A, определенная системой $\{p_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ непрерывных полунорм, называется локально m-выпуклой, если $p_\lambda(a_1a_2)\leq p_\lambda(a_1)p_\lambda(a_2)$ для любых $\lambda\in\Lambda$ и $a_1,a_2\in A$.

сходится в алгебре A

и

(γ) последовательность $(\sum_k a_{nk})$ сходится в алгебре A. Кроме того, пусть X – локально выпуклый левый A-модуль, топология которого определена системой $\{q_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ непрерывных полунорм, удовлетворяющей условию

(m) для каждого $\beta \in \mathcal{B}$ существует элемент $\lambda(\beta) \in \Lambda$ такой, что $q_\beta(ax) \leq p_{\lambda(\beta)}(a) q_\beta(x)$ для любых фиксированных $a \in A$ и $x \in X$.

Тогда $\Gamma(A)$ есть множество тех матриц, которые преобразуют все сходящиеся последовательности A-модуля X в сходящиеся. Чтобы убедиться в этом, пусть $\mathfrak{A} \in \Gamma(A)$, $\varepsilon > 0$, $\beta \in \mathcal{B}$ и $(x_n) \subset X$ – – последовательность, сходящаяся к нулю в топологии A-модуля X. Тогда существует число $M_\beta \in N$ такое, что $q_\beta(x_n) < \varepsilon/(4K_\beta)$ при $n > M_\beta$, где K_β – число, удовлетворяющее условию $K_\beta > q_{\lambda(\beta)}(\mathfrak{A})$.

Для каждого $n \in N$ положим

$$A_n^\beta = \sum_{k=1}^{M_\beta} (a_{nk} - a_k) x_k$$

и

$$B_n^\beta = \sum_{k=M_\beta+1}^{\infty} (a_{nk} - a_k) x_k,$$

где для каждого $k \in N$ элемент a_k обозначает предел последовательности $(a_{nk})_{n \in N}$ в алгебре A (см. условие (β)). Нетрудно заметить, что

$$\sum_k p_\lambda(a_k) \leq q_\lambda(\mathfrak{A})$$

для всех $\lambda \in \Lambda$ (по условию (α)) и то, что последовательность $(A_n^\beta)_{n \in N}$ сходится к нулю в топологии A-модуля X (по условию (β)). Поэтому существует число $N_\beta \in N$ такое, что $q_\beta(A_n^\beta) < \varepsilon/2$ при всех $n > N_\beta$.

Учитывая вышесказанное и условие (α), справедливо

$$q_\beta(B_n^\beta) \leq \sum_{k=M_\beta+1}^{\infty} p_{\lambda(\beta)}(a_{nk} - a_k) q_\beta(x_k) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4K_\beta} \sum_{k=M_\beta+1}^{\infty} p_{\lambda(\beta)}(a_{nk} - a_k) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4K_\beta} 2 q_{\lambda(\beta)}(\mathfrak{A}) < \varepsilon/2$$

независимо от n. Таким образом,

$$q_\beta\Big(\sum_k a_{nk} x_k - \sum_k a_k x_k\Big) \leq q_\beta(A_n^\beta) + q_\beta(B_n^\beta) < \varepsilon$$

при $n > N_\beta$. Следовательно, матрица $\mathfrak{A}$ суммирует последовательность (x_n) к элементу $\sum_k a_k x_k$, принадлежащему X.

Пусть, теперь, $(x_n)\subset X$ - любая последовательность, сходящаяся к $x\in X$ в топологии A-модуля X и $z_n=x_n-x$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда последовательность $(z_n)\subset X$ сходится к нулю в топологии A-модуля X и для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо

$$\sum_k a_{nk}x_k=\sum_k a_{nk}z_k+x\sum_k a_{nk}.$$

Поэтому, по условию (γ) и выше доказанному, матрица $\mathfrak{A}$ суммирует последовательность (x_n) к элементу $\sum_k a_k z_k+xa$, где $a\in A$ - предел последовательности $(\sum_k a_{nk})$, существующий по условию (γ).

2. Пусть A и B - топологические алгебры и $hom(B,A)$ - множество всех нетривиальных непрерывных A-гомоморфизмов B на A. Пусть, далее, X - топологическое пространство, $\mathfrak{S}$ - его покрытие и $C(X,A)$ $(C(X,A;\mathfrak{S}))$ - алгебра (относительно поточечных алгебраических операций) всех A-значных непрерывных отображений на X (соответственно тех непрерывных отображений f на X, при которых множество $f(S)$ относительно компактно в A для всех $S\in\mathfrak{S}$). Алгебра $C(X,A;\mathfrak{S})$ наделим топологий равномерной сходимости на элементах покрытия $\mathfrak{S}$.

Если множество $hom(A,F)$ непусто, то отображение

$$\mathcal{G}_A: A\to C(hom(A,F),F),$$

определенное равенством $\mathcal{G}_A(a)(\varphi)=\varphi(a)$ для всех $a\in A$ и $\varphi\in hom(A,F)$, является гомоморфизмом и

$$\ker\mathcal{G}_A=\bigcap\{\ker\varphi:\varphi\in hom(A,F)\}.$$

Топологическая алгебра B над F называется т о п о л о г и ч е с к о й A-а л г е б р о й, если

а) A является топологической алгеброй над F,

б) B является A-бимодулем,

в) $a(b_1b_2)=(ab_1)b_2$ и $(b_1b_2)a=b_1(b_2a)$ при всех $a\in A$ и $b_1,b_2\in B$,

г) $(b_1a)b_2=b_1(ab_2)$ и $a_1(ba_2)=(a_1b)a_2$ при всех $a,a_1,a_2\in A$ и $b,b_1,b_2\in B$,

д) $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)=(ab)\lambda$ и $(ba)\lambda=b(\lambda a)=(\lambda b)a=\lambda(ba)$ при всех $\lambda\in F, a\in A$ и $b\in B$

и

е) модульные произведения алгебры B (т.е. отображения $\rho: A\times B\to B$ и $\nu: B\times A\to B$ определяемые равенствами $\rho((a,b))=ab$ и $\nu((b,a))=ba$ для всех $a\in A$ и $b\in B$) раздельно непрерывны.

3. Для каждого элемента $a\in A$ пусть $\mu(a)=(\delta_{nk}a)$, где $\delta_{nn}=1$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\delta_{nk}=0$ при $k\neq n$. Кроме того, пусть $Q=\{q_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, θ_A - нулевой элемент алгебры A, e_A - едини-

ца алгебры A, $\mathscr{E}_A = \mu(e_A)$,

$$\mu(A) = \{\mu(a) : a \in A\},$$

$$\Delta(A) = \{(a_{nk}) \in \Gamma(A) : a_{nk} = \theta_A \text{ при } k > n\}$$

и $\mathcal{B}_A$ - одно из множеств $\Gamma(A)$ или $\Delta(A)$.

В данной статье доказываются следующие теоремы:

<u>Теорема I.</u> Пусть A - секвенциально полная отделимая локально m-выпуклая F-алгебра с единицей. Тогда $\mathcal{B}_A$ образует (относительно обычных алгебраических операций над матрицами и относительно топологии, определенной системой полунорм Q) некоммутативную отделимую локально m-выпуклую B_F-алгебру с единицей $\mathscr{E}_A$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть A -полная отделимая локально m-выпуклая коммутативная C-алгебра с единицей, для которой пространство[3] $hom(A,\mathbb{C})$ дискретно в слабой топологии, определенной алгеброй $\mathscr{G}_A(A)$, и $\mathfrak{S}$ - покрытие пространства $hom(A,\mathbb{C})$, состоящее из конечных подмножеств. Если отображение $\mathscr{G}_A$ является топологическим изоморфизмом алгебр A и $C(hom(A,\mathbb{C}),\mathbb{C};\mathfrak{S})$, то алгебра $\mathcal{B}_A$ обладает следующими свойствами:

(а) $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ - подмодуль, порожденный подалгеброй $\mu(A)$, всюду плотен в $\mathcal{B}_A$;

(б) для каждого $\varphi \in hom(\mu(A),\mathbb{C})$ существует $\Phi_\varphi \in hom(\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ такой, что $\Phi_\varphi(\mu(a)) = \mathscr{E}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}\varphi \circ \mu(a)$ при всех $a \in A$.

(в) алгебры $\mathcal{B}_A$ и $C(hom(A,\mathbb{C}), \mathcal{B}_{\mathbb{C}};\mathfrak{S})$ топологически изоморфны.

Примером алгебры A, удовлетворяющей ограничениям теоремы 2, является $C(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$ в случае, когда X - дискретное пространство, покрытие $\mathfrak{S}$ которого состоит из всех конечных подмножеств пространства X. В самом деле, в данном случае $C(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$ есть полная (см. [4], стр. I8I и I87 (пример 5)) отделимая локально m-выпуклая коммутативная $\mathbb{C}$-алгебра с единицей. По теореме 2 из статьи [2] пространства X и $H = hom(C(X,\mathbb{C};\mathfrak{S}))$ гомеоморфны. Обозначив через δ этот гомеоморфизм, мы видим, что отображение $\alpha \to \alpha \circ \delta^{-1}$ (совпадающее отображением $\mathscr{G}_{C(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})}$) является топологическим изоморфизмом алгебр $C(X,\mathbb{C})$ и $C(H,\mathbb{C})$ в топологии простой сходимости.

В заметке [3] приведены некоторые применения теоремы 2: описаны множество $hom(\mathcal{B}_A,\mathbb{C})$, радикал и односторонние замкнутые максимальные идеалы алгебры $\mathcal{B}_A$. При этом отметим,

[3] Как известно (см. [7], стр. 22I, или [9], стр. IO), множество $hom(A,\mathbb{C})$ непусто.

что теорема заметки [3] имеет смысль, если пространство $hom(A,\mathbb{C})$ дискретно (независимо от того, справедливо условие (3) или нет).

§ I. Доказательство теоремы I

Пусть A – секвенциально полная отделимая локально m-выпуклая F-алгебра с единицей e_A, топология которой определена системой $\{p_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ непрерывных полунорм. Пусть $\lambda\in F$, $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2\in B_A$, $\mathfrak{A}_1=(a^1_{nk})$ и $\mathfrak{A}_2=(a^2_{nk})$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$, $\lambda\mathfrak{A}_1\in B_A$.

Пусть $\mathfrak{L}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$. Поскольку

$$\sum_{v=1}^{V} p_\lambda(a^1_{nv}a^2_{vk})\leq\sum_v p_\lambda(a^1_{nv})p_\lambda(a^2_{vk})\leq q_\lambda(\mathfrak{A}_1)q_\lambda(\mathfrak{A}_2)$$

для любых $\lambda\in\Lambda$ и $n,k,V\in N$, то ряд

$$\sum_v p_\lambda(a^1_{nv}a^2_{vk})$$

сходится для любых $\lambda\in\Lambda$ и $n,k\in N$. В силу этого и секвенциальной полноты алгебры A, ряды

$$c_{nk}=\sum_v a^1_{nv}a^2_{vk}$$

сходятся в топологии алгебры A. Таким образом, $c_{nk}\in A$ при всех $n,k\in\mathbb{N}$.

Легко заметить, что A является левым A-бимодулем, топология которого удовлетворяет условию (M^-). Поэтому (см. выше) матрицы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ преобразуют все сходящиеся последовательности алгебры A в сходящиеся. Учитывая это, матрица $\mathfrak{L}$ преобразует также все сходящиеся последовательности алгебры A в сходящиеся. Следовательно, матрица $\mathfrak{L}$ суммирует последовательности $e=(e_n)$ и $\delta_k=(\delta^k_n)$, где $e_n\equiv e_A$ и $\delta^k_n=\delta_{nk}e_A$ при всех $n,k\in N$. Таким образом, матрица $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям (β) и (γ).

По условию (α), справедливо

$$\sum_{v=1}^{V}\sum_{k=1}^{K} p_\lambda(a^1_{nv})p_\lambda(a^2_{vk})\leq q_\lambda(\mathfrak{A}_1)q_\lambda(\mathfrak{A}_2)$$

для каждого $\lambda\in\Lambda$ и любых $V,K\in N$. Поэтому

$$q_\lambda(\mathfrak{L})\leq q_\lambda(\mathfrak{A}_1)q_\lambda(\mathfrak{A}_2)$$

при всех $\lambda\in\Lambda$. Значит, матрица $\mathfrak{L}$ удовлетворяет и условию (α).

Ясно, что умножение на B_A некоммутативно. Чтобы показать ассоциативность умножения на B_A, берем любые матрицы $\mathfrak{A}_1=(a^1_{nk})$, $\mathfrak{A}_2=(a^2_{nk})$ и $\mathfrak{A}_3=(a^3_{nk})$ из B_A. Так как

$$\sum_{v=1}^{V}\sum_{i=1}^{I} p_\lambda(a^1_{nv}a^2_{vi}a^3_{ik})\leq\sum_{v=1}^{V}\sum_{i=1}^{I} p_\lambda(a^1_{nv})p_\lambda(a^2_{vi})p_\lambda(a^3_{ik})\leq$$

$$\leq q_\lambda(\mathfrak{A}_1)q_\lambda(\mathfrak{A}_2)q_\lambda(\mathfrak{A}_3)$$

при всех $\lambda\in\Lambda$ и $n,k,\nu,i\in\mathbb{N}$, то ряд

$$\sum_{\nu,i} p_\lambda(a^1_{n\nu}a^2_{\nu i}a^3_{ik})$$

сходится при всех $\lambda\in\Lambda$ и $n,k\in\mathbb{N}$. Поэтому, ввиду секвенциальной полноты алгебры A, справедливо[4]

$$\sum_\nu\sum_i a^1_{n\nu}(a^2_{\nu i}a^3_{ik})=\sum_i\sum_\nu(a^1_{n\nu}a^2_{\nu i})a^3_{ik}$$

при всех $k,n\in\mathbb{N}$. Значит, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3)=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)\mathfrak{A}_3$. Остальные аксиомы алгебры выполнены. Поэтому множество $\mathcal{B}_A$ образует (относительно обычных алгебраических операций над матрицами) некоммутативную алгебру с единицей $\mathfrak{E}_A$.

Как показано выше, при всех $\lambda\in\Lambda$ и $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2\in\mathcal{B}_A$ справедливо $q_\lambda(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)\leq q_\lambda(\mathfrak{A}_1)q_\lambda(\mathfrak{A}_2)$. Поэтому топология на $\mathcal{B}_A$, определенная системой полунорм Q, локально m-выпукла. При этом, отделимость этой топологии следует из отделимости топологии алгебры A.

Как хорошо известно (см., например, [8], стр. 179-181), множество $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ является некоммутативной банаховой $\mathbb{F}$-алгеброй с единицей. Аналогично тому, как выше, нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{B}_A$ является $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$-бимодулем, и в том, что справедливы неравенства

$$q_\lambda(C\mathfrak{A})\leq\|C\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{F}}}\,q_\lambda(\mathfrak{A})$$

и

$$q_\lambda(\mathfrak{A}C)\leq\|C\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{F}}}\,q_\lambda(\mathfrak{A})$$

при всех $\lambda\in\Lambda$, $C\in\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ и $\mathfrak{A}\in\mathcal{B}_A$, где $\|C\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{F}}}$ – норма матрицы C в алгебре $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$. Отсюда ясно, что отображения $(C,\mathfrak{A})\to C\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A},C)\to\mathfrak{A}C$ произведения $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}\times\mathcal{B}_A\to\mathcal{B}_A$ и $\mathcal{B}_A\times\mathcal{B}_{\mathbb{F}}\to\mathcal{B}_A$ раздельно непрерывны. Кроме того, условия в), г) и д) определения топологической A-алгебры также выполнены. Этим теорема I доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть A – топологическая $\mathbb{F}$-алгебра, для которой множество $hom(A,\mathbb{F})$ непусто, $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ – бесконечная матрица над A и $\mathfrak{A}^\wedge(\varphi)=(\varphi(a_{nk}))$ при всех $\varphi\in hom(A,\mathbb{F})$.

Для доказательства теоремы 2 нужно следующее

<u>Предложение I.</u> Пусть A – топологическая алгебра, которая

[4] Доказательство этого утверждения проводится аналогично тому как в случае числовых рядов (см., например, [5], стр. 669-671).

удовлетворяет условиям теоремы 1 и для которой множество $hom(A,F)$ непусто. Если $hom(A,F)$ наделить слабой топологией, определенной системой $\{\mathfrak{A}^\wedge : \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_A\}$, то

1) отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^\wedge$ есть $\mathcal{B}_F$-гомоморфизм $\mathcal{B}_A$ в $C(hom(A,F), \mathcal{B}_F)$, ядром которого является множество

$$\{(a_{nk}) \in \mathcal{B}_A : a_{nk} \in \ker \psi_A \ \forall\, k,n \in \mathbb{N}\}$$

и

2) $hom(A,F)$ является тихоновом пространством.

<u>Доказательство.</u> 1) Пусть $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – насыщенная система непрерывных полунорм, определяющая топологию алгебры A, $\mathfrak{A} = (a_{nk}) \in \mathcal{B}_A$ и $\varphi \in hom(A,F)$. Тогда (ввиду непрерывности φ на A) существуют число $K_\varphi > 0$ и индекс $\lambda_\varphi \in \Lambda$ такие, что $|\varphi(a)| \leqslant K_\varphi p_{\lambda_\varphi}(a)$ при всех $a \in A$. Учитывая это, справедливо

$$\|\mathfrak{A}^\wedge(\varphi)\|_{\mathcal{B}_F} \leqslant K_\varphi q_{\lambda_\varphi}(\mathfrak{A}).$$

Кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(a_{nk}) = \varphi(a_k)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, где a_k обозначает предел последовательности $(a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ (см. условие (β)). Далее, из $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_A$ следует (см. выше) сходимость ряда $\sum\limits_k a_{nk}$ в топологии алгебры A для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, (по условию (α)) ряд $\sum\limits_k |\varphi(a_{nk})|$ сходится для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\varphi\Big(\sum_k a_{nk}\Big) = \sum_k \varphi(a_{nk})$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Учитывая это и условие (γ), справедливо

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k \varphi(a_{nk}) = \varphi(a),$$

где a – предел последовательности $(\sum\limits_k a_{nk})$ в алгебре A. Таким образом, $\mathfrak{A}^\wedge(\varphi) \in \mathcal{B}_F$ для каждого $\varphi \in hom(A,F)$. Следовательно, $\mathfrak{A}^\wedge \in C(hom(A,F), \mathcal{B}_F)$.

Пусть, далее, $\Omega(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\wedge$ при всех $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_A$. Тогда отображение Ω линейно на $\mathcal{B}_A$. Чтобы показать мультипликативность этого отображения на $\mathcal{B}_A$, берем любые матрицы $\mathfrak{A}_1 = (a^1_{nk})$ и $\mathfrak{A}_2 = (a^2_{nk})$ из $\mathcal{B}_A$. Поскольку

$$\sum_{\nu=1}^{V} |\varphi(a^1_{n\nu} a^2_{\nu k})| \leqslant K_\varphi \sum_{\nu=1}^{V} p_{\lambda_\varphi}(a^1_{n\nu}) p_{\lambda_\varphi}(a^2_{\nu k}) \leqslant K_\varphi q_{\lambda_\varphi}(\mathfrak{A}_1) q_{\lambda_\varphi}(\mathfrak{A}_2)$$

для всех $\varphi \in hom(A,F)$ и $k,n,V \in \mathbb{N}$, то ряд

$$\sum_\nu \varphi(a^1_{n\nu} a^2_{\nu k})$$

сходится при всех $\varphi \in hom(A,F)$ и $n,k \in \mathbb{N}$. Учитывая это и, кроме того, сходимость ряда $\sum\limits_\nu a^1_{n\nu} a^2_{\nu k}$ в алгебре A при всех $n,k\in\mathbb{N}$ и справедливость равенства

$$\varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{\nu} a^1_{n\nu}a^2_{\nu k}\Big)=\sum_{\nu=1}^{\nu}\varphi(a^1_{n\nu}a^2_{\nu k})$$

при всех $\varphi\in hom(A,F)$ и $n,k\in\mathbb{N}$, имеем

$$\varphi\Big(\sum_\nu a^1_{n\nu}a^2_{\nu k}\Big)=\sum_\nu\varphi(a^1_{n\nu}a^2_{\nu k})$$

для всех $\varphi\in hom(A,F)$ и $n,k\in\mathbb{N}$. Поэтому из

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)^\wedge(\varphi)=\Big(\varphi\Big(\sum_\nu a^1_{n\nu}a^2_{\nu k}\Big)\Big)=\Big(\sum_\nu\varphi(a^1_{n\nu})\varphi(a^2_{\nu k})\Big)=$$

$$=\mathfrak{A}_1^\wedge(\varphi)\mathfrak{A}_2^\wedge(\varphi)=(\mathfrak{A}_1^\wedge\mathfrak{A}_2^\wedge)(\varphi)$$

для всех $\varphi\in hom(A,F)$ следует, что $\Omega(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)=\Omega(\mathfrak{A}_1)\Omega(\mathfrak{A}_2)$ и $\Omega(C\mathfrak{A}_1)=C\Omega(\mathfrak{A}_1)$ при $C\in B_F$. Итак, Ω есть B_F-гомоморфизм B_A в $C(hom(A,F),B_F)$ и

$$\ker\Omega=\{(a_{nk})\in B_A:\ \varphi(a_{nk})=\theta_A\ \forall\varphi\in hom(A,F),\forall k,n\in\mathbb{N}\}=$$

$$=\{(a_{nk})\in B_A:\ a_{nk}\in\ker\mathcal{Y}_A\ \forall k,n\in\mathbb{N}\}.$$

2) Пусть τ – слабая топология множества $hom(A,F)$, определенная системой $\{\mathfrak{A}^\wedge:\mathfrak{A}\in B_A\}$. Тогда предбазу окрестностей точки $\varphi_0\in hom(A,F)$ в топологии τ образуют множества

$$O(\varphi_0,\mathfrak{A};\varepsilon)=\{\varphi\in hom(A,F):\ \|\mathfrak{A}^\wedge(\varphi)-\mathfrak{A}^\wedge(\varphi_0)\|_{B_F}<\varepsilon\},$$

где $\mathfrak{A}\in B_A$ и $\varepsilon>0$. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in hom(A,F)$, $\varphi_1\neq\varphi_2$ и $a\in\ker\varphi_1\setminus\ker\varphi_2$. Тогда

$$O(\varphi_1,\mu(a);\varepsilon)\cap O(\varphi_2,\mu(a);\varepsilon)=\emptyset$$

при $\varepsilon=|\varphi_2(a)|/4$. В самом деле, если $\psi\in O(\varphi_1,\mu(a);\varepsilon)\cap$ $\cap O(\varphi_2,\mu(a);\varepsilon)$, то

$$\|\mu(a)^\wedge(\psi)-\mu(a)^\wedge(\varphi_1)\|_{B_F}=|\psi(a)-\varphi_1(a)|=|\psi(a)|<\varepsilon$$

и

$$\|\mu(a)^\wedge(\psi)-\mu(a)^\wedge(\varphi_2)\|_{B_F}=|\psi(a)-\varphi_2(a)|<\varepsilon.$$

Поэтому

$$|\varphi_2(a)|\leq|\psi(a)|+|\psi(a)-\varphi_2(a)|<\tfrac{1}{2}|\varphi_2(a)|,$$

что невозможно. Значит, топология τ отделима.

Пусть, теперь, $\mathcal{U}$ – любое τ-замкнутое подмножество пространства $hom(A,F)$, $\varphi_0\in hom(A,F)\setminus\mathcal{U}$ и

$$a\in\Big(\bigcap\{\ker\varphi:\varphi\in\mathcal{U}\}\Big)\setminus\ker\varphi_0.$$

Тогда $\varphi(a)=0$ при всех $\varphi\in\mathcal{U}$ и $\varphi_0(a)\neq0$. Пусть $\alpha=|\varphi_0(a)|$, $b=\alpha^{-1}a$ и $g:hom(A,F)\to\mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условию $g(\varphi)=\|\mu(b)^\wedge(\varphi)\|_{B_F}$ для каждого $\varphi\in hom(A,F)$. Поскольку $\mu(b)\in B_A$, то отображение $\mu(b)^\wedge$ непрерывно на $hom(A,F)$ в топологии τ. В силу этого, функция g непрерывна на

$hom(A,F)$ в топологии τ.

Пусть, далее, h – функция, удовлетворяющая условию
$$h(\varphi)=[g(\varphi)+1-|g(\varphi)-1|]/2$$
при всех $\varphi\in hom(A,F)$. Тогда $h\in C(hom(A,F),[0,1])$, $h(\varphi_0)=1$ и $h(\varphi)=0$ при $\varphi\in U$. Значит, топология τ отделима и вполне регулярна. Поэтому в топологии τ множество $hom(A,F)$ является тихоновым пространством.

Теперь докажем теорему 2. Для этого, пусть опять $\{p_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ – насыщенная система непрерывных полунорм алгебры A, определяющая ее топологию, и $Z=C(hom(A,C),B_C;\mathscr{S})$. Пусть, далее, $\mathfrak{A}\in B_A$ и O – любая окрестность матрицы $\mathfrak{A}$ в топологии алгебры B_A. Тогда существуют такое число $\varepsilon>0$ и элемент $\lambda_0\in\Lambda$, что
$$\{\mathfrak{B}\in B_A:\ q_{\lambda_0}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})<\varepsilon\}\subset O.$$
Кроме того, в виду непрерывности отображения $\mathcal{G}_A^{-1}$, существуют число $K_0>0$ и множество $S_0\in\mathscr{S}$ такие, что
$$p_{\lambda_0}(a)\leqslant K_0\max_{\varphi\in S_0}|\varphi(a)|$$
при всех $a\in A$.

Пусть τ' – слабая топология на $hom(A,C)$, определенная алгеброй $\mathcal{G}_A(A)$. Поскольку $\tau'\subseteq\tau$ и τ' дискретно, то $\tau'=\tau$. По предложению I, справедливо $\mathfrak{A}^\wedge\in Z$. Поэтому существуют (см. [I], теорема I) число $m\in N$, матрицы $C_1,\dots,C_m\in B_C$ и элементы $a_1,\dots,a_m\in A$ такие, что
$$\max_{\varphi\in S_0}\|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^\wedge(\varphi)\|_{B_C}<\frac{\varepsilon}{K_0L(S_0)},$$
где $L(S_0)$ – обозначает число элементов в множестве S_0 и
$$\mathfrak{B}=(b_{nk})=\sum_{\nu=1}^{m}C_\nu\mu(a_\nu).$$
Учитывая вышесказанное, имеем
$$\begin{aligned}q_{\lambda_0}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})&=\sup_n\sum_k p_{\lambda_0}(a_{nk}-b_{nk})\leqslant\\&\leqslant K_0\sup_n\sum_k\max_{\varphi\in S_0}|\varphi(a_{nk}-b_{nk})|\leqslant\\&\leqslant K_0\sup_n\sum_k\sum_{l=1}^{L(S_0)}|\varphi_l(a_{nk}-b_{nk})|\leqslant\\&\leqslant K_0\sum_{l=1}^{L(S_0)}\sup_n\sum_k|\varphi_l(a_{nk}-b_{nk})|=\\&=K_0\sum_{l=1}^{L(S_0)}\|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^\wedge(\varphi_l)\|_{B_C}<\\&<\frac{K_0\varepsilon L(S_0)}{K_0L(S_0)}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{F}\in O$. Таким образом, алгебра B_A обладает свойством (а).

Далее, для каждого $\varphi\in hom(\mu(a),\mathbb{C})$ пусть Φ_φ обозначает отображение, удовлетворяющее условию $\Phi_\varphi(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}^\wedge(\varphi\circ\mu)$ для всех $\mathfrak{a}\in B_A$. Поскольку $\varphi\circ\mu\in hom(A,\mathbb{C})$, то нетрудно показать, что отображение Φ_φ есть нетривиальный $B_\mathbb{C}$-гомоморфизм B_A на $B_\mathbb{C}$ и справедливо

$$\|\Phi_\varphi(\mathfrak{a})\|_{B_\mathbb{C}}\leqslant K q_\lambda(\mathfrak{a})$$

при некоторых $K>0$ и $\lambda\in\Lambda$. Поэтому $\Phi_\varphi\in hom(B_A,B_\mathbb{C})$ для каждого $\varphi\in hom(\mu(A),\mathbb{C})$ и справедливо $\Phi_\varphi(\mu(a))=\mathfrak{f}_\mathbb{C}\varphi\circ\mu(a)$ при всех $a\in A$ и $\varphi\in hom(\mu(A),\mathbb{C})$. Таким образом, алгебра B_A обладает свойством (б).

В заключение покажем справедливость утверждения (в). По предположению, алгебры A и $C(hom(A,\mathbb{C}),\mathbb{C};\mathfrak{S})$ топологически изоморфны. Поэтому $ker\,\mathcal{G}_A=\{\theta_A\}$. Значит, отображение Ω является мономорфизмом B_A в Z по предложению I. Кроме того, для каждого $S\in\mathfrak{S}$ существуют число $K_S>0$ и индекс $\lambda_S\in\Lambda$ такие, что

$$\max_{\varphi\in S}|\varphi(a)|\leqslant K_S\, p_{\lambda_S}(a)$$

при всех $a\in A$. С другой стороны, для каждого $\lambda\in\Lambda$ существуют число $K_\lambda>0$ и множество $S_\lambda\in\mathfrak{S}$ такие, что

$$p_\lambda(a)\leqslant K_\lambda\max_{\varphi\in S_\lambda}|\varphi(a)|$$

при всех $a\in A$. Учитывая это,

$$\|\Omega(\mathfrak{a})(\varphi)\|_{B_\mathbb{C}}\leqslant\sup_n\sum_k\max_{\varphi\in S}|\varphi(a_{nk})|\leqslant$$
$$\leqslant K_S\, q_{\lambda_S}(\mathfrak{a})$$

и

$$\begin{aligned}q_\lambda(\mathfrak{a})&\leqslant K_\lambda\sup_n\sum_k\max_{\varphi\in S_\lambda}|\varphi(a_{nk})|\leqslant\\&\leqslant K_\lambda\sup_n\sum_k\sum_{\ell=1}^{L(S_\lambda)}|\varphi_\ell(a_{nk})|\leqslant\\&\leqslant K_\lambda\sup_n\sum_{\ell=1}^{L(S_\lambda)}\|\Omega(\mathfrak{a})(\varphi_\ell)\|_{B_\mathbb{C}}\leqslant\\&\leqslant K_\lambda L(S_\lambda)\max_{\varphi\in S_\lambda}\|\Omega(\mathfrak{a})(\varphi)\|_{B_\mathbb{C}}\end{aligned}$$

при $\varphi\in S$ и $\mathfrak{a}\in B_A$ (здесь $L(S_\lambda)$ – обозначает число элементов множества S_λ). Таким образом, для каждых фиксированных $S\in\mathfrak{S}$ и $\lambda\in\Lambda$ справедливы неравенства

$$\max_{\varphi\in S}\|\Omega(\mathfrak{a})(\varphi)\|_{B_\mathbb{C}}\leqslant K_S\, q_{\lambda_S}(\mathfrak{a})$$

и

$$q_\lambda(\mathfrak{A}) \leqslant K_\lambda L(S_\lambda) \max_{\varphi\in S_\lambda} \|\Omega(\mathfrak{A})(\varphi)\|_{\mathcal{B}_\mathbb{C}}$$

при всех $\mathfrak{A}\in\mathcal{B}_A$. Следовательно, Ω является таким непрерывным мономорфизмом, обратное отображение которого также непрерывно.

Пусть X обозначает $\mathcal{B}_\mathbb{C}$-подмодуль алгебры $\mathcal{B}_A$, порожденный подалгеброй $\mu(A)$. Тогда каждый элемент подмодуля X представим в виде $C_1\mu(a_1)+\ldots+C_m\mu(a_m)$ при некоторых $m\in N, a_1,\ldots,a_m\in A$ и $C_1,\ldots,C_m\in\mathcal{B}_\mathbb{C}$. Поскольку

$$\Omega\Big(\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\mu(a_\nu)\Big)(\varphi) = \Big(\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\Omega(\mu(a_\nu))\Big)(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\Omega(\mu(a_\nu))(\varphi) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\varphi(a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} \mathcal{G}_A(a_\nu)(\varphi)C_\nu =$$
$$= \Big(\sum_{\nu=1}^{m} \mathcal{G}_A(a_\nu)C_\nu\Big)(\varphi)$$

при любых $\varphi\in hom(A,\mathbb{C})$ и фиксированных $m\in N, a_1,\ldots,a_m\in A$ и $C_1,\ldots,C_m\in\mathcal{B}_\mathbb{C}$, то $\Omega(X)=\mathcal{G}_A(A)\mathcal{B}_\mathbb{C}$, где $\mathcal{G}_A(A)\mathcal{B}_\mathbb{C}$ обозначает линейную оболочку множества $\{\alpha C: \alpha\in\mathcal{G}_A(A), C\in\mathcal{B}_\mathbb{C}\}$, а αC - функцию, опредленную на $hom(A,\mathbb{C})$ равенством $(\alpha C)(\varphi)\equiv\alpha(\varphi)C\equiv C\alpha(\varphi)$. Так как $\mathcal{G}_A(A)=C(hom(A,\mathbb{C}),\mathbb{C};\mathfrak{S})$, то $cl_Z\,\mathcal{G}_A(A)\mathcal{B}_\mathbb{C}=Z$ по теореме I из статьи [I]. Учитывая это и непрерывность отображений Ω и Ω^{-1}, имеем

$$\Omega(\mathcal{B}_A) = \Omega(cl_{\mathcal{B}_A}X) = cl_Z\,\Omega(X) = cl_Z(\mathcal{G}_A(A)\mathcal{B}_\mathbb{C}) = Z.$$

Итак, теорема 2 доказана.

Литература

I. Абель М., Условия всюду плотности в некоторых пространствах непрерывных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I977, 430, 6-I3.

2. Абель М., Описание идеалов одной топологической алгебры непрерывных функций. Уч. зап. Таптуск. ун-та, I982, 596, I05-II9.

3. Абель М., Об одной топологической алгебре бесконечных матриц. Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа", Тарту, I983, 3-5.

4. Бурбаки Н., Общая топология. Функциональные пространства Москва, I975.

5. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа I. Москва, I98I.

6. Наймарк М.А., Нормированные кольца. Москва, I968.

7. Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch., Topological algebras. North Holland Math. Studies 24, Amsterdam, 1977.

8. Maddox, I.J., Elements of functional analysis. Cambridge, 1970.
9. Michael, E., Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc., 1952, 11, 1-79.

Поступило 20.10.1983

About a topological algebra of conservative matrices

M.Abel

Summary

Let F be one of the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, A be a sequently complete separated locally m-convex algebra with unit over F and $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ be the system of continuous seminorms on A which defines the topology of A. For each matrix $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ over A and $\lambda \in \Lambda$ let

$$q_\lambda(\mathfrak{A}) = \sup_n \sum_k p_\lambda(a_{nk})$$

and let $\mathcal{B}_A$ be the set of all (or all triangular) matrices $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ which satisfy the following conditions:

(α) $q_\lambda(\mathfrak{A}) < \infty$ for each $\lambda \in \Lambda$,

(β) the sequence $(a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ converges in A for each $k \in \mathbb{N}$

and

(γ) the sequence $(\sum_k a_{nk})$ converges in A.

It is shown that the set $\mathcal{B}_A$ is a non-commutative separated locally m-convex $\mathcal{B}_\mathbb{C}$-algebra with unit over F when the algebraic operations on $\mathcal{B}_A$ are defined as usual for matrices and the topology on $\mathcal{B}_A$ by the system $\{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ of seminorms. In addition sufficient conditions for A are found in order that the algebra $\mathcal{B}_A$ should be topologically isomorphic with the algebra of all $\mathcal{B}_\mathbb{C}$-valued continuous functions on some topological space.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Т.Лейгер

Введение

Пусть $A=(a_{nk})$ - бесконечная числовая матрица. Числовая последовательность $x=(\xi_k)$ называется суммируемой методом A, если существуют[I]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k, \qquad n\in\mathbb{N}$$

и $\lim \eta_n$. Понятие суммируемости естественным образом распространяется на функциональные последовательности и ряды. Их различные виды сходимости привели к изучению суммируемости в различных абстрактных структурах. Большинство из видов сходимости функциональных последовательностей являются топологическими сходимостями в некоторых B- и F-пространствах функций. Например, сходимость в B-пространстве $C_{[a,b]}$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, совпадает с равномерной сходимостью на этом отрезке, а сходимость по мере является топологической сходимостью в F-пространстве $S_{[a,b]}$ всех функций, измеримых по Лебегу и почти всюду конечных на $[a,b]$. Суммируемость в B- и F-пространствах изучалась многими авторами (см., например, список литературы в [4]).

Примером о нетопологической сходимости служит сходимость функциональных последовательностей почти всюду, играющая важную роль в теории функций и теории вероятностей. Известно ([3], 3.I гл. I), что сходимость почти всюду на $[a,b]$ совпадает с o-сходимостью в K-пространстве $S_{[a,b]}$. С этой точки зрения представляет интерес вопрос об o-суммируемости последовательностей в K-пространствах.

В настоящей статье изучаются обобщенные положительные методы o-суммирования в K-пространствах. Находятся условия для o-консервативности и o-регулярности таких методов.

Мы придерживаемся терминологии книг [2] и [3]. Пусть X - вещественная векторная решетка, а X^+ - конус ее положительных элементов. Последовательность $x=(\xi_n)$, где $\xi_n\in X$,

---

[I]Если пределы изменения индексов не указаны, то они пробегают все значения I,2,... .

называется

1) <u>о-сходящейся</u> к пределу ξ ($\xi_n \xrightarrow{o} \xi$ или $o\text{-}\lim \xi_n = \xi$), если существуют такие $\zeta_n \in X^+$, что $\zeta_n \downarrow \theta$ и $|\xi_n - \xi| \le \zeta_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$,

2) <u>t-сходящейся</u> к пределу ξ ($\xi_n \xrightarrow{t} \xi$ или $t\text{-}\lim \xi_n = \xi$), если из любой частичной последовательности (ξ_{n_k}) можно выделить подпоследовательность $(\xi_{n_{k_i}})$, о-сходящуюся к ξ,

3) <u>τ-сходящейся</u> к пределу ξ ($\xi_n \xrightarrow{\tau} \xi$ или $\tau\text{-}\lim \xi_n = \xi$), если существует такой элемент $\omega \in X^+$, называемый <u>регулятором сходимости</u>, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) > 0$ с $|\xi_n - \xi| < \varepsilon\omega$ при $n > N$.

В общем из τ-сходимости следует о-сходимость, а из о-сходимости – t-сходимость. Будем говорить, что ряд $\sum_k \xi_k$ элементов векторной решетки X о-сходится (t-сходится) к сумме ξ, если последовательность его частичных сумм о-сходится (соответственно t-сходится) к ξ, и обозначаем $\xi = o\text{-}\sum \xi_k$ ($\xi = t\text{-}\sum \xi_k$). Известно ([3], 4.I гл. I), что для положительных рядов понятия о- и t-сходимости совпадают.

Векторная решетка X называется <u>K-пространством</u> (в смысле Канторовича), если каждое ограниченное подмножество $E \subset X$ имеет верхнюю грань $\sup E \in X$. Если в K-пространстве X всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктных элементов, отличных[2] от θ, не более, чем счетно, то X называется пространством <u>счетного типа</u>. Далее, K-пространство счетного типа называется <u>почти регулярным</u>, если о-сходимость в нем <u>устойчива</u>, т.е. если для любой последовательности (ξ_n) его элементов, о-сходящейся к θ, существует последовательность чисел $\lambda_n \uparrow \infty$ с $\lambda_n \xi_n \xrightarrow{o} \theta$.

<u>Предложение I</u> ([2], теорема УI.4.I). В K-пространстве о-сходимость устойчива тогда и только тогда, когда она совпадает с τ-сходимостью.

Почти регулярное K-пространство называется <u>регулярным</u>, если для всякой последовательности (ξ_n) его положительных элементов найдутся числа $\lambda_n > 0$ с $\lambda_n \xi_n \xrightarrow{o} \theta$.

<u>Предложение 2</u> ([2], теорема УI.5.2). В регулярном K-пространстве для счетного числа о-сходящихся последовательностей элементов найдется общий регулятор сходимости.

Подмножество E в K-пространстве X называется <u>о-аннулируемым</u>, если для каждой последовательности (ξ_n) с $\xi_n \in E$

---

[2] Через θ обозначается нулевой элемент в векторных пространствах.

и каждой последовательности чисел (λ_n) с $\lambda_n \to 0$ имеем $\lambda_n \xi_n \xrightarrow{o} \theta$. Если в K-пространстве X каждое o-аннулируемое подмножество ограничено, то X называется <u>K^+-пространством.</u>

<u>Предложение 3</u> ([3], I.49 и 3.3I гл. У). K-пространство $S_{[a,b]}$ является регулярным K^+-пространством.

Пусть X и Y - векторные решетки. Линейный оператор T из X в Y называется

I) <u>положительным</u>, если $T(X^+) \subset Y^+$,

2) <u>регулярным</u>, если $T = T^+ - T^-$, где T^+ и T^- - положительные операторы,

3) <u>o-непрерывным</u> (<u>t-непрерывным</u>) если $T\xi_n \xrightarrow{o} \theta$ (соответственно $T\xi_n \xrightarrow{t} \theta$) в Y для каждой o-сходящейся (t-сходящейся) к θ последовательности (ξ_n) в X.

Множество $L_o(X,Y)$ (соответственно $L_t(X,Y)$) всех регулярных o-непрерывных (t-непрерывных) операторов из X в Y является векторным пространством, где положительные операторы составляют конус $L_o(X,Y)^+$ ($L_t(X,Y)^+$). Известно, что для K-пространств X и Y выполняются условия $L_o(X,Y) \subset L_t(X,Y)$ и $L_o(X,Y)^+ = L_t(X,Y)^+$ (см.[3], 2.II и 2.49 гл. УII).

<u>Предложение 4</u> ([3], теорема I.3I гл. X). Пусть X и Y - регулярные K-пространства и $T_n \in L_t(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. Если последовательность операторов (T_n) t-сходится всюду в X и $T\xi = t\text{-}\lim T_n \xi$ для всех $\xi \in X$, то $T \in L_t(X,Y)$.

<u>Предложение 5</u> ([3], теорема I.42 гл. X). Пусть X и Y - регулярные K-пространства и $T_n \in L_t(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. Если последовательность операторов (T_n) всюду ограничена в X и o-сходится на некотором o-плотном[3] подмножестве, то она o-сходится всюду в X.

§I. Пространства последовательностей элементов K-пространства

Пространства последовательностей элементов векторной решетки исследовались в работах Кристеску [5],[6] и Сербан [7].

Пусть X - векторная решетка. Тогда множество $s(X)$ всех последовательностей (ξ_n) с $\xi_n \in X$ тоже является векторной решеткой с отношением порядка

---

[3] Подмножество D векторной решетки X называется o-плотным, если для произвольного $\xi \in X$ найдется последовательность (ξ_n) элементов из D с $\xi_n \xrightarrow{o} \xi$.

$$x \le y \Leftrightarrow \xi_n \le \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $x=(\xi_n)$ и $y=(\eta_n)$. Для $\xi \in X$ обозначим $e(\xi)=(\xi,\xi,\ldots)$ и $e_n(\xi)=(\theta,\ldots,\theta,\xi,\theta,\ldots)$ с ξ на n-ом месте. Пусть $E^\infty(X)$ - линейная оболочка подмножества $\{e_n(\xi) : \xi \in X, n \in \mathbb{N}\}$.

Мы рассматриваем векторные решетки $E(X)$ с

$$E^\infty(X) \subset E(X) \subset s(X)$$

и с порядком (I). Отметим их некоторые свойства (см.[5]).

I. Операторы $e_n : X \to E(X)$ и $\pi_n : E(X) \to X$ с $\pi_n x = \xi_n$ линейны, положительны и о-непрерывны для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Элемент $z=(\zeta_n) \in E(X)$ является верхней гранью подмножества $D \subset E(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\zeta_n = \sup\{\xi_n : x \in D\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. В $E(X)$ о-сходимость совпадает с покоординатной о-сходимостью: если $x_n=(\xi_k^n)$, то $x_n \xrightarrow{o} x$ в $E(X)$ тогда и только тогда, когда $\xi_k^n \xrightarrow{o} \xi_k$ в X $(k \in \mathbb{N})$.

4. В $E(X)$ имеет место о-сходимость по отрезкам:

$$x = o\text{-}\sum e_k(\xi_k), \qquad x \in E(X).$$

Предложение 6 ([7], предложение I). Пусть X - векторная решетка, а Y - некоторое K-пространство. Общий вид оператора $F \in L_o(E(X),Y)$ дается формулой

$$Fx = o\text{-}\sum \phi_k \xi_k, \qquad x \in E(X), \qquad (2)$$

где $\phi_k \in L_o(X,Y)$ и удовлетворяют условию

$$\exists\ o\text{-}\sum |\phi_k|(|\xi_k|), \quad x \in E(X). \qquad (3)$$

С помощью предложения 6 найдем общий вид операторов из $L_o(co(X),Y)$ и $L_o(co_o(X),Y)$, где

$$co(X) = \{x=(\xi_k) : \exists\ o\text{-}\lim \xi_k\},$$

$$co_o(X) = \{x=(\xi_k) : o\text{-}\lim \xi_k = \theta\}.$$

Нетрудно убедиться, что $co(X)$ и $co_o(X)$ - векторные решетки с порядком (I). Более того, $co_o(X)$ является K-пространством при K-пространстве X.

Предложение 7. Пусть X - векторная решетка и Y - некоторое K-пространство. Оператор $F \in L_o(co(X),Y)$ тогда и только тогда, когда он представляется в виде (2), где $\phi_k \in L_o(X,Y)$ и удовлетворяют условию

$$\exists\ o\text{-}\sum |\phi_k|(|\xi|), \qquad \xi \in X. \qquad (4)$$

Доказательство. Если $F \in L_o(co(X),Y)$, то ряд $\sum |\phi_k|(|\xi_k|)$ о-сходится при всех $x \in co(X)$, в том числе и при $x = e(\xi)$, откуда и следует условие (4).

Пусть, обратно, для оператора F в виде (2) выполняется условие (4) и пусть $x \in co(X)$. Тогда существует $\zeta \in X^+$ с $|\xi_k| \le \zeta$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k|(|\xi_k|) \leq \sum_{k=1}^{n} |\phi_k| \zeta, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда следует условие (3), т.е. $F \in L_0(co(X), Y)$.

Для нахождения общего вида оператора $F \in L_0(co_0(X), Y)$ нам понадобится следующая

Лемма 8. Пусть (ζ_k) – последовательность положительных элементов в K^+-пространстве Y. Если ряд $\sum \lambda_k \zeta_k$ о-сходится при каждой последовательности чисел λ_k с $\lambda_k \downarrow 0$, то ряд $\sum \zeta_k$ о-сходится.

Доказательство. Допустим, что ряд $\sum \zeta_k$ не является о-сходящимся. Тогда частичные суммы S_n этого ряда неограничены. Согласно определению K^+-пространства существуют такие числа $\lambda_k \downarrow 0$, что $\{\lambda_n S_n\}$ – неограниченное подмножество.

С другой стороны из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \zeta_k = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\lambda_k S_k + \lambda_n S_n,$$

где $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$, получаем, что

$$\lambda_n S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \zeta_k - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\lambda_k S_k \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \zeta_k.$$

Поскольку ряд $\sum \lambda_k \zeta_k$ о-сходится, то подмножество $\{\lambda_n S_n\}$ должно быть ограничено. Полученное противоречие свидетельствует об о-сходимости ряда $\sum \zeta_k$.

Предложение 9. Для K-пространства X и K^+-пространства Y оператор $F \in L_0(co_0(X), Y)$ тогда и только тогда, когда он представляется в виде (2), где $\phi_k \in L_0(X, Y)$ и удовлетворяют условию (4).

Доказательство. Необходимость. Если $F \in L_0(co_0(X), Y)$, то он представляется в виде (2), а ряд $\sum |\phi_k|(|\xi_k|)$ о-сходится при каждом $x \in co_0(X)$. Так как для всех $\xi \in X$ и последовательностей чисел λ_k с $\lambda_k \downarrow 0$ имеем $\lambda_k |\xi| \downarrow \theta$, то ряд $\sum \lambda_k |\phi_k|(|\xi|)$ о-сходится в Y. Из леммы 8 вытекает о-сходимость ряда $\sum |\phi_k|(|\xi|)$.

Достаточность следует из предложения 7.

Следующее предложение обобщает известный результат ([2], стр. 188) о регулярности K-пространства $c_0 = co_0(\mathbb{R})$ числовых нуль-последовательностей.

Предложение 10. Если X – регулярное K-пространство, то и K-пространство $co_0(X)$ регулярно.

Доказательство. Легко убедиться, что $co_0(X)$ является пространством счетного типа. Проверим устойчивость о-сходимости в $co_0(X)$. Пусть (x_n) – произвольная последовательность элементов из $c_0(X)$, сходящаяся к θ. В таком случае

I) $o\text{-}\lim_k \xi_k^n = \theta$, $n \in \mathbb{N}$,

2) $\exists\, z_n = (\zeta_k^n) \in c_0(X) : \theta \leq z_n \downarrow \theta$, $|x_n| \leq z_n$.

При этом $\zeta_k^n \geq \zeta_k^{n+1}$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$, а $\zeta_k^n \downarrow \theta$ при $n \to \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $o\text{-}\lim_k \zeta_k^n = \theta$ для $n \in \mathbb{N}$.

Так как X регулярно, то можно найти такую последовательность (λ_k) положительных чисел с $\lambda_k \uparrow \infty$, что $o\text{-}\lim \lambda_k \zeta_k^1 = \theta$. В силу предложения 2 последовательности

$$(\lambda_k \zeta_k^1),$$
$$(\zeta_k^n)_{k=1}^\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(\zeta_k^n)_{n=1}^\infty, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

r-сходятся к θ с некоторым общим регулятором $\omega \in X^+$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой индекс k_0, что $\lambda_k \zeta_k^1 \leq \varepsilon\omega$ при $k > k_0$. Обозначим $\omega_i = \lambda_i^{-1}\omega$ и $\vartheta = (\omega_i)$, тогда $\vartheta \in c_0(X)^+$. Далее, ввиду r-сходимости к θ последовательностей (5) можно найти такие индексы $n_1, n_2, \ldots, n_{k_0}$, что $\zeta_k^n \leq \lambda_k^{-1}\varepsilon\omega$ при $n > n_k$ и $k = 1, 2, \ldots, k_0$. Следовательно, $\zeta_k^n \leq \varepsilon\omega_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, если $n > N$, где $N = \max\{n_1, \ldots, n_{k_0}\}$. Таким образом $|x_n| \leq z_n < \varepsilon\vartheta$ при $n > N$, т.е. $x_n \xrightarrow{r} \theta$. Мы получили, что понятия o- и r-сходимости в $c_0(X)$ совпадают. В силу предложения I o-сходимость в $c_0(X)$ устойчива.

Пусть теперь (x_n) - произвольная последовательность элементов в $c_0(X)$. Найдем последовательность элементов $z_n = (\zeta_k^n)$ с $\theta \leq \zeta_k^n \downarrow \theta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при $k \to \infty$, удовлетворяющую условию $|\xi_k^n| \leq \zeta_k^n$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Ввиду регулярности K-пространства X существует последовательность (λ_n) положительных чисел с $\lambda_n \zeta_1^n \xrightarrow{o} \theta$. Так как $\zeta_k^n \leq \zeta_1^n$ при всех $k, n \in \mathbb{N}$, то $\lambda_n \zeta_k^n \xrightarrow{o} \theta$ для всех $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$, т.е. $\lambda_n z_n \xrightarrow{o} \theta$ в $c_0(X)$. Отсюда $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} \theta$ и регулярность K-пространства $c_0(X)$ полностью доказана.

§2. Положительные методы о-суммирования

Пусть X и Y - векторные решетки и $A_{nk} \in L_r(X, Y)$. Преобразование

$$\eta_n = o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\xi_k \in X$ и $\eta_n \in Y$, определяет обобщенный матричный метод суммирования: последовательность $x = (\xi_k)$ называется <u>о-суммируемой</u> методом A, если ряды $\sum_k A_{nk}\xi_k$ о-сходятся при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует предел $o\text{-}\lim \eta_n$. Обозначим $A_n x = \eta_n$

и $\lim_A x = o\text{-}\lim \eta_n$.

Метод суммирования A называется <u>о-консервативным</u>, если каждая o-сходящаяся последовательность в X о-суммируема методом A. В случае $X=Y$ о-консервативный метод A называется <u>о-регулярным</u>, если $\lim_A x = o\text{-}\lim \xi_k$ для всех $x\in co(X)$. Метод суммирования A называется <u>положительным</u>, если операторы A_{nk} положительны, т.е. $A_{nk}\in L_0(X,Y)^+$.

Пусть в дальнейшем везде X и Y – регулярные K-пространства. Тогда в силу предложения 10 и K-пространство $co_0(X)$ регулярно. Так как в $co_0(X)$ имеет место о-сходимость по отрезкам, то линейная оболочка $E^\infty(X)$ подмножества $\{e_k(\xi):\xi\in X, k\in\mathbb{N}\}$ является о-плотным в $co_0(X)$. Имея в виду, что $A_n e_k(\xi)=A_{nk}\xi$, из предложения 5 заключаем

<u>Предложение 11.</u> Метод суммирования A о-суммирует все последовательности, о-сходящиеся к θ в X, если выполняются условия

$$\exists\, o\text{-}\lim_n A_{nk}\xi = a_k\xi,\quad \xi\in X,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

$$\forall x\in co_0(X)\ \exists \zeta_x\in Y^+ : \left|\sum_{k=1}^m A_{nk}\xi_k\right|\leq \zeta_x,\quad n,m\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Теперь найдем условия для о-консервативности и о-регулярности п о л о ж и т е л ь н ы х методов суммирования. В случае $X=Y=\mathbb{R}$ следующий результат вытекает из известной теоремы Кожима-Шура ([1], теорема 1.1) о консервативности методов суммирования числовых последовательностей.

<u>Теорема 12.</u> Положительный метод суммирования A является о-консервативным тогда и только тогда, когда выполняются условия (7) и

$$\exists\, o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi = a\xi,\quad \xi\in X. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь условий (7) и (9) очевидна, так как последовательности $e_k(\xi), e(\xi)\in co(X)$ для всех $\xi\in X$ и $k\in\mathbb{N}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Допустим, что условия (7) и (9) выполнены. Мы докажем сперва, что метод A суммирует все элементы из $co_0(X)$. Для этого достаточно показать, что выполняется условие (8). Если $x\in co_0(X)$, то существует $\sigma\in X^+$ с $|\xi_k|\leq\sigma$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Ввиду условия (9) найдется такой элемент $\zeta\in Y^+$, что $\sum_{k=1}^m A_{nk}\sigma\leq o\text{-}\sum_k A_{nk}\sigma\leq\zeta$ при всех $m,n\in\mathbb{N}$. Отсюда

$$\left|\sum_{k=1}^m A_{nk}\xi_k\right|\leq\sum_{k=1}^m A_{nk}|\xi_k|\leq\sum_{k=1}^m A_{nk}\sigma\leq\zeta,\quad m,n\in\mathbb{N},$$

т.е. условие (8) выполнено.

Пусть теперь $x\in co(X)$ и $o\text{-}\lim\xi_k=\xi_0$. Тогда имеем

$x=(x-e(\xi_0))+e(\xi_0)$ и $x-e(\xi_0)\in co_0(X)$. Поэтому

и
$$A_n x = o\text{-}\sum_k A_{nk}(\xi_k-\xi)+o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_0$$
$$\lim_A x = o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}(\xi_k-\xi_0)+$$
$$+\,o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_0 .$$

Так как метод A суммирует все элементы из $co_0(X)$, то существуют $o\text{-}\sum_k A_{nk}(\xi_k-\xi_0)$ и $o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}(\xi_k-\xi_0)$. Существование сумм $o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_0$ и предела $o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_0$ обеспечивается условием (9). Теорема доказана.

Заметим, что если A o-консервативен, то в силу предложения 4 и замечания перед ним операторы a_k и a из условий (7) и (9) являются o-непрерывными положительными операторами из X в Y.

Пусть A – некоторый o-консервативный положительный метод суммирования с $A_{nk}\in L_0(X,Y)^+$, где Y – регулярное K^+-пространство. Тогда положительный оператор $\lim_A : co_0(X)\to Y$ o-непрерывен. Для каждой $x\in co(X)$ имеем согласно предложению 9, что
$$\lim_A x = \lim_A(x-e(\xi_0))+\lim_A e(\xi_0)=$$
$$=o\text{-}\sum_k \phi_k(\xi_k-\xi_0)+a\xi_0 ,$$
где $\phi_k\in L_0(X,Y)$ и удовлетворяют условию (4). Поскольку $\phi_k\xi=\lim_A e_k(\xi)=a_k\xi$, то
$$\lim_A x = o\text{-}\sum_k a_k(\xi_k-\xi_0)+a\xi_0 \qquad (10)$$
и ряд $\sum a_k(\xi_k-\xi_0)$ o-сходится при всех $x\in co(X)$. Из вышеизложенного вытекает

Теорема 13. Пусть X – регулярное K^+-пространство, а $A_{nk}\in L_0(X,X)^+$. Метод суммирования A является o-регулярным тогда и только тогда, когда выполняются условия[4] (7) и (9) с $a_k=\mathcal{O}$ и $a=I$.

Доказательство. Из o-регулярности метода A следует, что $a_k\xi=\lim_A e_k(\xi)=\theta$ и $a\xi=\lim_A e(\xi)=\xi$ для всех $\xi\in X$ и $k\in\mathbb{N}$.

Обратно, при $a_k=\mathcal{O}$ и $a=I$ из равенства (10) вытекает, что $\lim_A x=\xi_0=o\text{-}\lim\xi_k$ для всех $x\in co(X)$.

Литература

I. Барон С.А., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.

[4] Через $\mathcal{O}$ обозначается нулевой, а через I – единичный оператор.

2. Вулих Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
3. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва-Ленинград, 1950.
4. Лейгер Т., Включение обобщенных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 17-34.
5. Cristescu, Romulus. Sur les espaces ordonnés de suites vectorielles. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, 18, 1, 19-24.
6. Cristescu, Romulus, Sur les opérateurs réguliers et continus définis sur un espace ordonné de suites vectorielles bornées. Rev. roum. math. pures et appl.,1973, 18, 4, 515-518.
7. Şerban, Doina, Asupra unor operatori liniari pe spaţii de şiruri vectoriale. Stud. Cerc. mat., 1974, 26, 1, 123-127.

Поступило 07.02.1983

Verallgemeinerte positive Limitierungsverfahren

T.Leiger

Zusammenfassung

Es seien reguläre Kantorovitsch-Räume (s.[2],[3]) X und Y und ein verallgemeinertes Matrixverfahren A von der Gestalt

$$\eta_n = o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi_k , \qquad n \in \mathbb{N}$$

gegeben, wobei $A_{nk}:X \to Y$ lineare o-stetige positive Operatoren sind. Eine Folge $x=(\xi_k)$ von Elementen aus dem Raum X heißt o-limitierbar, wenn die Folge $y=(\eta_n)$ im Raum Y o-konvergent ist. Das Matrixverfahren A heißt o-konvergenztreu, wenn A jede o-konvergente Folge o-limitiert.

Theorem. Das Matrixverfahen A ist genau dann o-konvergenztreu, wenn

$$o\text{-}\lim_n A_{nk}\xi , \qquad \xi \in X, \ k \in \mathbb{N},$$
$$o\text{-}\lim_n o\text{-}\sum_k A_{nk}\xi , \qquad \xi \in X$$

existieren.

ПОЛЯ СУММИРУЕМОСТИ СО СВОЙСТВОМ БАНАХА-САКСА

Э. Кольк

Тартуский государственный университет

Пусть E - секвенциально полное отделимое топологическое векторное пространство над полем K, где $K=R$ или $K=\mathbb{C}$. Обозначим через $s(E)$ множество всех последовательностей[I] $x=(x_k)$ с $x_k \in E$, а через $c(E)$ - множество всех сходящихся в E последовательностей $x \in s(E)$. В случае бесконечной скалярной матрицы $A=(a_{nk})$ говорят, что последовательность $x=(x_k) \in s(E)$ суммируема матричным методом (или матрицей) A к элементу $x_0 \in E$, коротко $A\text{-}\lim x_k = x_0$, если ряды[I] $A_n x = \sum_k a_{nk} x_k$ сходятся и $x_0 = \lim A_n x$ в пространстве E. Матричный метод A называется регулярным в $s(E)$, если $A_n x \in c(E)$ и $A\text{-}\lim x_k = \lim x_k$ для всех $x=(x_k) \in c(E)$. По известной теореме Сильвермена-Теплица (см.[I], стр. I6; или [8], стр. 73) метод A является регулярным в $s(K)$ тогда и только тогда, когда матрица $A=(a_{nk})$ регулярна, т.е.

$$\lim_n a_{nk} = 0,$$
$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1,$$
$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty.$$

Однако оказывается, что регулярные матрицы определяют регулярные методы суммирования в $s(E)$ как в случае нормированного пространства E (см., например, [I4], стр. 43), так и в случае произвольного локально выпуклого пространства E (см.[5], стр. I29). Итак, регулярная матрица A отображает все слабо сходящиеся последовательности в локально выпуклом пространстве E опять в слабо сходящиеся последовательности. Вообще говоря, A не суммирует всех слабо сходящихся последовательностей в E. Этим объясняется интерес к суммированию слабо сходящихся последовательностей регулярными методами, в частности методом C^1 арифметических средних.

Банах и Сакс [I0] уже в I930 году доказали, что в прост-

[I] Во всей статье свободные индексы и индексы суммирования, если пределы их изменения не указаны, принимают все значения из множества $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$.

ранстве L^p при $p>1$ любая ограниченная последовательность содержит C^1-суммируемую подпоследовательность. Шрайер [18] показал, что в пространстве $C[0,1]$ найдется слабо сходящаяся последовательность, никакая подпоследовательность которой не суммируема методом C^1. В научной литературе можно найти целый ряд работ о теореме Банаха-Сакса в различных банаховых пространствах (см., например, примечания и ссылки в книге [3], стр. 68-69). Пространство E, в котором каждая ограниченная последовательность имеет C^1-суммируемую подпоследовательность, принято называть пространством со свойством Банаха-Сакса. Если любая слабо сходящаяся последовательность в E содержит C^1-суммируемую подпоследовательность, то говорят о слабом свойстве Банаха-Сакса. Мы обозначим эти свойства коротко через BS и wBS соответственно.

В настоящей статье доказывается, что счетное произведение ΠE_n пространств Фреше E_n обладает свойством wBS тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все пространства E_n. Этот результат применяется к исследованию свойства Банаха-Сакса в полях суммируемости обобщенных матричных методов суммирования.

§ 1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathcal{N}(x)$ - множество всех подпоследовательностей последовательности x. Последовательность $x=(x_k)\in s(E)$ называется устойчивой с пределом x_0 (ср.[16], стр. 369), если $C^1\text{-}\lim y_k=x_0$ равномерно по $(y_k)\in\mathcal{N}(x)$. Автором доказана следующая

Лемма 1 (см.[7], стр. 47, следствие 1). Пусть E - локально выпуклое пространство. Последовательность $x\in s(E)$ является устойчивой с пределом x_0 тогда и только тогда, когда $C^1\text{-}\lim y_k=x_0$ для всех $(y_k)\in\mathcal{N}(x)$.

Из определения вытекает, что подпоследовательности устойчивой последовательности также устойчивы. Легко убедится, что устойчивость последовательности не зависит от конечного числа ее членов. Итак справедлива

Лемма 2. Пусть E - локально выпуклое пространство и $x\in s(E)$ - устойчивая последовательность. Тогда устойчивыми являются все подпоследовательности последовательности x и все те последовательности $y\in s(E)$, которые отличаются конечным числом членов от последовательности x.

Следующая теорема для банаховых пространств доказана в работе [13]. Для пространств Фреше (т.е. для полных метризуемых локально выпуклых пространств) ее доказательство аналогично.

Теорема I. Пусть E - пространство Фреше и A - регулярная матрица. Каждая ограниченная последовательность $x \in \in s(E)$ содержит подпоследовательность y такую, что выполнено одно из следующих двух соотношений:

1^0 существует $A\text{-}\lim z_k$ для всех $(z_k) \in \mathcal{N}(y)$;

2^0 $A\text{-}\lim z_k$ не существует ни для какой $(z_k) \in \mathcal{N}(y)$.

Учитывая, что при выполнении условия I^0 все подпоследовательности (z_k) суммируемы методом A к одному и тому же элементу на основе леммы I из [5], мы из леммы I и теоремы I непосредственно выводим

Следствие I. В пространстве Фреше со слабым свойством Банаха-Сакса из любой слабо сходящейся последовательности можно извлечь устойчивую подпоследовательность.

Известно (см. [4], стр. 128, теорема I), что пространство Фреше E рефлексивно, если для каждой ограниченной последовательности $x \in s(E)$ найдется регулярная матрица A и подпоследовательность, суммируемая матрицей A. Следовательно, пространство Фреше со свойством BS рефлексивно. Для банаховых пространств это доказали Нишура и Вотермен [15]. Таким образом верна

Теорема 2. Пространство Фреше обладает свойством BS тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и обладает свойством wBS.

Введем теперь на рассмотрение один класс банаховых пространств абстрактных последовательностей и исследуем свойство Банаха-Сакса в этих пространствах. Пусть λ - банахово пространство числовых последовательностей с базисом (φ_k) такое, что из $\sum b_k\varphi_k \in \lambda$ и $|a_k| \leq |b_k|$ следует $\|\sum a_k\varphi_k\| \leq \leq \|\sum b_k\varphi_k\|$. Таковыми являются, например, известные пространства последовательностей c_0 и ℓ^p $(p \geq 1)$ относительно обычного базиса (e_k), $e_k = (\delta_{ki})$ (δ_{ki} - символ Кронекера). Пусть E_n $(n \in \mathbb{N})$ - пространство Фреше с определяющим набором полунорм $(p_{nk})_{k=1}^{\infty}$. Обозначим через $\lambda[E_n]$ множество всех последовательностей $x = (x_n)$, $x_n \in E_n$, для которых $T_k x = \sum_n p_{nk}(x_n)\varphi_n \in \lambda$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Можно показать, что $\lambda[E_n]$ является пространством Фреше, топология которого определена полунормами (P_k), где $P_k(x) = \|T_k x\|_\lambda$. Например, при $\lambda = \ell^p$ $(p \geq 1)$ приходим к известному пространству

$l^p[E_n]$, которая определяется условиями $P_k(x)=(\sum_n p_{nk}(x_n)^p)^{1/p}$ $<\infty$ $(k=1,2,\ldots)$. Если все пространства E_n совпадают с пространством E, то вместо $\lambda[E_n]$ пишем $\lambda[E]$.

В статье [16] для банаховых пространств E_n доказана следующая

Теорема 3. Пространство $\lambda[E_n]$ обладает свойством BS тогда и только тогда, когда банаховы пространства λ и E_n $(n=1,2,\ldots)$ обладают свойством BS. Если λ обладает свойством BS и пространства E_n $(n=1,2,\ldots)$ имеют свойство wBS, то $\lambda[E_n]$ имеет свойство wBS.

§ 2. Топологические произведения со свойством Банаха-Сакса

Основной в этом параграфе является

Теорема 4. Топологическое произведение ΠE_n счетного числа пространств Фреше E_n обладает свойством wBS тогда и только тогда, когда все пространства E_n обладают свойством wBS.

Доказательство. Необходимость сразу вытекает их тех фактов, что свойство wBS переносится на подпространство и сохраняется при изометрии, а пространство $E=\Pi E_n$ содержит изометричную копию каждого пространства E_n.

Достаточность. Предположим, что все пространства E_n обладают свойством wBS и пусть последовательность (x_n), $x_n=(x_n^k)$, слабо сходится к нулю в E, коротко $w\text{-}\lim x_n=\theta$. Но тогда $w\text{-}\lim_n x_n^k=\theta$ в E_k для всех $k\in\mathbb{N}$, ибо слабая сходимость в E равносильно слабой сходимости по координатам (см.[9], стр. 147). Учитывая свойство wBS пространства E_1, мы в силу следствия 1 из последовательности (x_n^1) можем извлечь устойчивую подпоследовательность $(x^1_{n_i(1)})$. Затем, опираясь на свойство wBS пространства E_2, мы из слабо сходящейся к нулю последовательности $(x^2_{n_i(1)})$ выберем устойчивую в E_2 подпоследовательность $(x^2_{n_i(2)})$ такую, что $n_1(2)>n_1(1)$. В общем случае, если устойчивая в E_k $(k\geq 1)$ последовательность $(x^k_{n_i(k)})$ уже определена, то на основе свойства wBS пространства E_{k+1} мы из последовательности $(x^{k+1}_{n_i(k)})$ отделим устойчивую в E_{k+1} подпоследовательность $(x^{k+1}_{n_i(k+1)})$ таким образом, чтобы $n_1(k+1)>n_1(k)$.

Продолжив этот процесс бесконечно, мы построим строго возрастающую последовательность индексов (n_i), где $n_i=$

$= n_1(i)$. На основе леммы 2 последовательность $(x^k_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ устойчива в E_k ($k=1,2,\ldots$) и значит, последовательность (x_{n_i}) покоординатно C^1-суммируема к нулю в E. Так как C^1-суммируемость в E совпадает с C^1-суммируемостью по координатам, то (x_{n_i}) является C^1-суммируемой подпоследовательностью последовательности (x_n). Теорема доказана.

Случай банаховых пространств E_n рассмотрен в [6].

Если $E=\Pi E_n$ обладает свойством BS, то аналогично доказательству необходимости теоремы 4 находим, что и все пространства E_n обладают этим свойством. Наоборот, если пространства E_n ($n=1,2,\ldots$) обладают свойством BS, то в силу теоремы 2 они рефлексивны и обладают свойством wBS. Учитывая рефлексивность произведения $E=\Pi E_n$, мы из теорем 4 и 2 получаем, что E должно обладать свойством BS. Таким образом, нами доказано

<u>Следствие 2.</u> Топологическое произведение ΠE_n пространств Фреше E_n ($n=1,2,\ldots$) обладает свойством BS тогда и только тогда, когда все пространства E_n обладают свойством BS.

§ 3. Пространство $c(E)$

При исследовании полей суммируемости важную роль играют FK-пространства, т.е. пространства последовательностей, которые являются пространствами Фреше и в которых имеет место сходимость по координатам. Бариком [II] показано, что в случае пространства Фреше E с определяющим набором полунорм (p_k) векторное пространство $c(E)$ является FK-пространством с полунормами (s_k), где $s_k(x) = \sup_i p_k(x_i)$. FK-пространством является и его замкнутое подпространство $c_0[E] = \{x=(x_k)\in c(E) : (p_n(x_k)) \in c_0\} = \{x=(x_k)\in c(E) : \lim x_k = \theta\}$.

Пространство E называется пространством Шура (или пространством со свойством Шура), если слабая секвенциальная сходимость в E совпадает со сходимостью в E. Пространствами Шура являются, например, конечномерные нормированные пространства, пространство $\ell = \ell^1$, а также пространства Фреше-Монтеля, т.е. пространства Фреше, каждое замкнутое ограниченное подмножество которых компактно. Пространства Шура очевидно обладают свойством wBS.

Нас интересует слабое свойство Банаха-Сакса в $c_0[E]$ и $c(E)$. Отметим сразу, что теорема 3 здесь не применима, так как c_0 обладает только свойством wBS (см.[3], стр.68), но не обладает свойством BS. Даже еще больше, по приведенному в статье [16] примеру пространство $c_0[\ell^{p_n}]$ не обладает свойством wBS, если $p_1=1$, $p_2=2$ и $1<p_n<\log n/(\log n-\log 2)$ при $n\geqslant 3$. Здесь $p_n>1$ при $n\geqslant 2$ и $\lim p_n=1$. Из наших результатов вытекает, в частности, что $c_0[\ell]$ и $c(\ell)$ обладают свойством wBS.

Теорема 5. Пусть E – пространство Фреше со свойством Шура. Тогда FK-пространство $c_0[E]$ обладает свойством wBS.

Доказательство. Известно (см. [17], стр. 500; или [11], стр. 169), что топологическим сопряженным к $c_0[E]$ служит $\ell[E']=\ell^1[E']$, где E' является топологическим сопряженным к E. При этом любой линейный непрерывный функционал f на $c_0[E]$ задается формулой $fx=\sum x_n'(x_n)$, где $x=(x_n)\in c_0[E]$ и $(x_n')\in \ell[E']$. Пусть последовательность (x^m), $x^m=(x_n(m))\in$ $\in c_0[E]$ слабо сходится в $c_0[E]$. Не уменьшая общности, можно считать, что $w\text{-}\lim x^m=\theta$ в $c_0[E]$. Докажем существование C^1-суммируемой подпоследовательности (x^{m_j}).

Пусть топология в E определена полунормами p_k, $k\in\mathbb{N}$. По нашему предположению $\lim_m\sum_n x_n'(x_n(m))=0$ для всех $(x_n')\in$ $\in \ell[E']$. Поэтому, учитывая, что для любого $x'\in E'$ и фиксированного индекса i $(\delta_{in}x')\in\ell[E']$, имеем $\lim_m x'(x_i(m))=$ $=\lim_m\sum_n\delta_{in}x'(x_n(m))=0$, т.е. $w\text{-}\lim x_i(m)=\theta$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Так как E – пространство Шура, то $\lim p_k(x_i(m))=0$ для всех $i,k\in\mathbb{N}$. Далее, из ограниченности последовательности (x^m) в $c_0[E]$ вытекает $\sup_m\sup_i p_k(x_i(m))<\infty$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Но условия $\lim_m p_k(x_i(m))=0$ $(i,k\in\mathbb{N})$ и $\sup_m\sup_i p_k(x_i(m))<\infty$ $(k\in\mathbb{N})$ являются необходимыми и достаточными для слабой сходимости к нулю последовательности $((p_k(x_i(m)))_{i=1}^{\infty})_{m=1}^{\infty}$ в пространстве c_0 (см. [2], стр. 368). Проведя индукцию по k, мы на основе свойства wBS пространства c_0 аналогично доказательству теоремы 4 определим строго возрастающую последовательность индексов (m_j) таким образом, чтобы было $\lim_s(s^{-1}\sum_{j=1}^{s}p_k(x_i(m_j)))_{i=1}^{\infty}=\theta$ в пространстве c_0 для всех $k\in\mathbb{N}$. Отсюда на основе неравенства $p_k(s^{-1}\sum_{j=1}^{s}x_i(m_j))\leqslant$ $\leqslant s^{-1}\sum_{j=1}^{s}p_k(x_i(m_j))$ следует равенство

$$\lim_s\sup_i p_k(s^{-1}\sum_{j=1}^{s}x_i(m_j))=0$$

для всех $k\in\mathbb{N}$, т.е. $C^1\text{-}\lim x^{m_j}=\theta$ в пространстве $c_0[E]$. Теорема доказана.

Имея в ввиду, что пространство $c(E)$ изоморфно топологическому произведению $c_0[E]\times E$, мы из доказанной теоремы при помощи теоремы 4 выводим

Следствие 3. Если E – пространство Фреше со свойством Шура, то пространство $c(E)$ обладает свойством wBS.

§ 4. Поля суммируемости со свойством Банаха-Сакса

Пусть E – пространство Фреше с определяющим набором полунорм (p_k). Векторное пространство $s(E)$ является пространством Фреше в топологии покоординатной сходимости, определенной полунормами p^1_{kn}, где $p^1_{kn}(x)=p_k(x_n)$. Так как $s(E)$, наделенное этой топологией, совпадает со счетным топологическим произведением $E\times E\times\ldots$, то на основе теоремы 4 пространство $s(E)$ обладает свойством wBS тогда и только тогда, когда E обладает этим свойством. Не трудно убедиться, что $s(E)$ является пространством Шура тогда и только тогда, когда E – пространство Шура.

Рассмотрим теперь матрицу $\mathfrak{A}=(A_{nk})$, элементами которой являются линейные непрерывные операторы A_{nk} из E в F, коротко $A_{nk}\in L(E,F)$, где F – пространство Фреше с определяющей системой полунорм (q_k). Bариком [II] доказано, что поле суммируемости

$$c_{\mathfrak{A}}(E,F)=\{x=(x_k)\in s(E):\ (\mathfrak{A}_n x)\in c(F)\},$$

где $\mathfrak{A}_n x=\sum_k A_{nk}x_k$, является FK-пространством с полунормами $(p^1_{kn})\cup(p^2_{kn})\cup(p^c_k)$, где $p^2_{kn}(x)=\sup_m q_k(\sum_{i=1}^m A_{ni}x_i)$ и $p^c_k(x)=\sup_n q_k(\mathfrak{A}_n x)$.

Пусть λ – банахово пространство последовательностей с базисом (φ_k) такое, что из $\sum b_k\varphi_k\in\lambda$ и $|a_k|\leq|b_k|$ следует $\|\sum a_k\varphi_k\|\leq\|\sum b_k\varphi_k\|$. В случае банаховых пространств E и F с пространством $\lambda[F]$ и матрицей $\mathfrak{A}=(A_{nk})$ естественным образом связывается поле суммируемости

$$\lambda_{\mathfrak{A}}[E,F]=\{x=(x_k)\in s(E):\ (\mathfrak{A}_n x)\in\lambda[F]\}.$$

Аналогично случаю $c_{\mathfrak{A}}(E,F)$ можно доказать, что $\lambda_{\mathfrak{A}}[E,F]$ является FK-пространством с определяющим набором полунорм $(p^1_n)\cup(p^2_n)\cup\{p^\lambda\}$, где $p^1_n(x)=\|x_n\|$, $p^2_n(x)=\sup_m\|\sum_{i=1}^m A_{ni}x_i\|$ и $p^\lambda(x)=\|(\mathfrak{A}_n x)\|_{\lambda[F]}$.

Следуя идеям Беннета [I2], каждому элементу $x=(x_k)\in c_{\mathfrak{A}}(E,F)$ сопоставим элемент

$$(x,\ (\textstyle\sum_{i=1}^m A_{1i}x_i)_{m=1}^\infty,(\sum_{i=1}^m A_{2i}x_i)_{m=1}^\infty,\ldots,(\mathfrak{A}_n(x)))$$

топологического произведения

$$s(E)\times\{c(F)\times c(F)\times\ldots\}\times c(F). \qquad (I)$$

Это соответствие определяет изоморфизм между $c_{\mathfrak{A}}(E,F)$ и некоторым замкнутым подпространством произведения (I) в случае, когда все ненулевые элементы матрицы $\mathfrak{A}$ суть обратимые операторы. Точно так же получаем, что $\lambda_{\mathfrak{A}}[E,F]$ изоморфно замкнутому подпространству произведения

$$s(E)\times\{c(F)\times c(F)\times\ldots\}\times\lambda[F],$$

если все ненулевые A_{nk} обратимы. Итак, учитывая, что свойство wBS переносится на подпространство и сохраняется при изорофизме, на основе теорем 4 и 3 и следствия 3 получаем следующие результаты.

<u>Теорема 6.</u> Пусть E – пространство Фреше со свойством wBS, F – пространство Фреше со свойством Шура и $\mathfrak{A}=(A_{nk})$ – матрица, все ненулевые элементы которых обратимы. Тогда поле суммируемости $c_{\mathfrak{A}}(E,F)$ обладает свойством wBS.

<u>Теорема 7.</u> Пусть банаховы пространства E, F и матрица $\mathfrak{A}=(A_{nk})$ удовлетворяют предположениям теоремы 6. Если λ обладает свойством BS, то поле суммируемости $\lambda_{\mathfrak{A}}[E,F]$ обладает свойством wBS.

Отсюда в случае $\lambda=\ell^p$ ($p>1$) выводим

<u>Следствие 4.</u> В предположении теоремы 7 поле суммируемости $\ell^p_{\mathfrak{A}}[E,F]$ обладает свойством wBS при $p>1$.

Учитывая, что при $E=F=K$ условия теорем 6 и 7 выполнены для любой скалярной матрицы A, получаем для полей суммируемости $c_A=c_A(K,K)$ и $\ell^p_A=\ell^p_A[K,K]$ следующий результат(ср. [6], стр. 15).

<u>Следствие 5.</u> Поля суммируемости c_A и ℓ^p_A ($p>1$) любой скалярной матрицы A обладают свойством wBS.

Литература

1. Барон С.А., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т., Линейные операторы. Общая теория. М.,1962.
3. Диестель Дж., Геометрия банаховых пространств. Киев,1980.
4. Кольк Э., О рефлексивности и суммируемости в пространствах Фреше. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972,<u>305</u>,127-130.
5. Кольк Э., Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч.зап. Тартуск. ун-та,1975,<u>374</u>,128-140.

6. Кольк Э., Псевдосходимость в локально выпуклых пространствах. Депонированная рукопись. ВИНИТИ 27.II.79., 402I-79 Деп.; РЖМат,1980,3Б6I5.
7. Кольк Э., О суммируемости подпоследовательностей и перестановок. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та,1982,596,43-5I.
8. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М.,1960.
9. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж., Топологические векторные пространства. М.,1967.
I0. Banach, S., Saks, S., Sur la convergence forte dans les champs L^P. Stud. math.,1930,2,51-57.
II. Baric, L.W., The chi function in generalized summability. Stud. math.,1971,39,N°2,165-180.
I2. Bennett, G.A., A representation theorem for summability domains. Proc. London Math. Soc.,1972,24,N° 2,193-203.
I3. Erdös, P., Magidor, M., A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property. Proc. Amer. Math. Soc.,1976,59,N°2,232-234.
I4. Marti, J.T., Introduction to the theory of bases. Springer-Verlag,1969.
I5. Nishiura, T., Waterman, D., Reflexivity and summability Stud. math.,1963,23,N°1,53-57.
I6. Partington, J.R., On the Banach-Saks property. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.,1977,82,N°3,369-374.
I7. Rosier, R.C., Dual spaces of certain vector sequence spaces. Pacific. J. Math.,1973,46,N°2,487-501.
I8. Schreier, J., Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz. Stud. math.,1930,2,58-62.

Поступило 30.05.83

Summability domains with the Banach-Saks property

E. Kolk

Summary

It is proved that the countable topological product ΠE_n of complete metrizable locally convex spaces E_n has the Banach-Saks property if and only if every E_n has this property. This result is applied to investigate the Banach-Saks property in the summability domains of generalized matrix methods.

О ПОЛНОТЕ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Э. Оя, П. Оя

Тартуский государственный университет

Рассмотрим в прямом произведении $X \times Y$ банаховых пространств X и Y норму, удовлетворяющую условиям

$$\|(x,0)\| = \|x\| \quad \forall x \in X, \qquad \|(0,y)\| = \|y\| \quad \forall y \in Y. \tag{1}$$

В [1], стр. 30, утверждается, что пространство $X \times Y$, наделенное нормой, удовлетворяющей условиям (1), полно. На примере будем показывать, что это не всегда так. С другой стороны, приведем простой критерий полноты $X \times Y$ в таких нормах.

При норме, удовлетворяющей условиям (1), получаем

$$\|(x,y)\| = \|(x,0)+(0,y)\| \leq \|(x,0)\| + \|(0,y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

И поскольку в норме $\|x\| + \|y\|$, $x \in X, y \in Y$, пространство $X \times Y$ полно, то имеет место

Лемма. Пространство $X \times Y$ является полным в норме, удовлетворяющей условиям (1), тогда и только тогда, когда существует $c > 0$ такое, что $\|x\| + \|y\| \leq c\|(x,y)\|$ при всех $x \in X, y \in Y$.

Заметим, что в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ формулой

$$\|(\xi,\eta)\| = (\xi^2 + \eta^2 - 2\kappa\xi\eta)^{1/2}, \quad 0 < \kappa < 1, \tag{2}$$

определяется норма. Действительно, поскольку

$$\|(\xi,\eta)\| = ((\xi - \kappa\eta)^2 + ((1-\kappa^2)^{1/2}\eta)^2)^{1/2},$$

то неравенство треугольника следует из неравенства треугольника в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, а выполненность остальных аксиом очевидна.

Пусть $X = Y = \ell_2$. Используя обозначения $x = (\xi_i) \in \ell_2$, $y = (\eta_i) \in \ell_2$, определим норму в $X \times Y$ формулой

$$\|(x,y)\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^2 + \eta_i^2 - 2\kappa_i \xi_i \eta_i)\Big)^{1/2}, \tag{3}$$

9

где $0<\varkappa_i<1$, $\varkappa_i\to 1$ при $i\to\infty$. Ввиду того, что при всех $\varkappa=\varkappa_i$, $i=1,2,\ldots$, формулой (2) определяется норма, выполненность аксиом нормы для (3) следует из соответствующих аксиом нормы пространства l_2. Понятно, что норма (3) удовлетворяет условиям (1). При $e_j=(\delta_{ij})$ имеем $\|e_j\|+\|e_j\|=2$, но $\|(e_j,e_j)\|=(2(1-\varkappa_j))^{1/2}\to 0$, если $j\to\infty$. Таким образом, по лемме, пространство $X\times Y$ не является полным.

С другой стороны, имеет место

Теорема. Для полноты пространства $X\times Y$ в норме, удовлетворяющей условиям (1), необходимо и достаточно существование $c>0$ такого, что

$$\|(x,-y)\|\leq c\,\|(x,y)\| \tag{4}$$

при всех $x\in X$, $y\in Y$.

Доказательство. Необходимость. В случае полноты $X\times Y$ из леммы следует, что существует $c>0$ такое, что $\|x\|+\|y\|\leq c\,\|(x,y)\|$ при всех $x\in X, y\in Y$. Тогда

$$\|(x,-y)\|\leq\|x\|+\|-y\|=\|x\|+\|y\|\leq c\,\|(x,y)\|\quad \forall x\in X,\ \forall y\in Y.$$

Достаточность. Если (4) выполнено, то имеют место неравенства

$$\|x\|=\|(x,0)\|=\|\tfrac{1}{2}(x,y)+\tfrac{1}{2}(x,-y)\|\leq\tfrac{1}{2}(1+c)\,\|(x,y)\|,$$

$$\|y\|\leq\tfrac{1}{2}\|(x,y)\|+\tfrac{1}{2}\|(-x,y)\|=\tfrac{1}{2}\|(x,y)\|+\tfrac{1}{2}\|(x,-y)\|\leq\tfrac{1}{2}(1+c)\|(x,y)\|.$$

Их сложение дает

$$\|x\|+\|y\|\leq(1+c)\,\|(x,y)\|\quad \forall x\in X,\ \forall y\in Y$$

и, по лемме, пространство $X\times Y$ полно.

Теорема доказана.

Отметим, что при наиболее употребляемых нормах в $X\times Y$ условие (4) выполняется в частном виде

$$\|(x,-y)\|=\|(x,y)\|\quad \forall x\in X,\forall y\in Y.$$

Литература

1. Pietsch A., Operator Ideals. Amsterdam—New York—Oxford, 1980.

Поступило 10 06 1982

On the completeness of Cartesian products of Banach spaces

E. Oja, P. Oja

Summary

We give a counterexample to [1], p. 30, showing that the Cartesian product $X \times Y$ of two Banach spaces X and Y need not be complete with respect to every norm $\|(\cdot\,,\cdot)\|$ such that

$$\|(x,0)\| = \|x\|, \quad \|(0,y)\| = \|y\| \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \qquad (1)$$

In our example, $X = Y = \ell_2$ and

$$\|(x,y)\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^2 + \eta_i^2 - 2\kappa_i \xi_i \eta_i)\Big)^{1/2}, \quad x = (\xi_i), \; y = (\eta_i),$$

where $0 < \kappa_i < 1$ and $\kappa_i \to 1$ as $i \to \infty$.

We prove that $X \times Y$ with a norm satisfying (1) is complete if and only if there exists a constant $c > 0$ such that $\|(x,-y)\| \le c\,\|(x,y)\|$ holds for all $x \in X$ and $y \in Y$.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СВЕРТКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Э.Оя, М.Ринне

Тартуский государственный университет

1. Пусть[1] (a_n) и (b_n) – числовые последовательности. Сверткой последовательностей (a_n) и (b_n) называется последовательность (c_n), где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Хорошо известен следующий результат о свертке (см.[3], зад. 178, стр. 54, 226):

<u>Теорема Шура-Полиа-Сеге.</u> Пусть степенной ряд[2] $f(x) = \sum a_k x^k$ обладает радиусом сходимости $r>0$. Если $b_n \neq 0$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = q,$$

где $|q|<r$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = f(q).$$

Будем называть скоростью числовую последовательность $\lambda = (\lambda_n)$, удовлетворяющую условиям $\lambda_n > 0$ и $\lim \lambda_n = \infty$. Следуя Г.Кангро (см.[2]), сходящуюся к числу ξ последовательность (ξ_n) будем называть λ-ограниченной, если $(\beta_n) \in m$, где $\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \xi)$, и λ-сходящейся, если $(\beta_n) \in c$. Если при этом $(\beta_n) \in c_0$, то (ξ_n) называется регулярно λ-сходящейся. Множества всех λ-ограниченных, λ-сходящихся и регулярно λ-сходящихся последовательностей обозначаются соответственно через m^λ, c^λ и c_0^λ.

Возникает проблема: если выполнены предположения теоремы Шура-Полиа-Сеге, то при каких условиях, наложенных на скорость λ, имеют место импликации

$$1^\circ \quad \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \in m^\lambda \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{c_n}{b_n}\right) \in m^\lambda,$$

$$2^\circ \quad \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \in c^\lambda \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{c_n}{b_n}\right) \in c^\lambda,$$

---

[1] Свободные индексы и индексы суммирования пробегают все целочисленные значения 0,1,... .

[2] Положим $0^0 = 1$.

$3^\circ \quad \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \in c_0^\lambda \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{c_n}{b_n}\right) \in c_0^\lambda$?

Импликация 1° рассматривалась в [4]. В ответ на поставленную проблему докажем теорему, из которой видно, в частности, что импликация 1° имеет место при более слабых предположениях, чем в [4], а в предположениях [4] имеет место уже импликация 2°. В отличие от [4], в доказательствах воспользуемся теорией суммируемости.

2. Следующая теорема дает ответ на поставленную в п.1 проблему.

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены предположения теоремы Шура-Полиа-Сеге и пусть $\varepsilon>0$ такое число, что $|q|+\varepsilon<r$. Если скорость $\lambda=(\lambda_n)$ удовлетворяет условию

$$\lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{\lambda_k}=O(1), \tag{1}$$

где

$$\alpha=\frac{|q|}{|q|+\varepsilon},$$

то имеют место импликации 1° и 3°. Если λ удовлетворяет условию (1) и

$$\exists \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}, \tag{2}$$

то имеет место импликация 2°.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\lambda_n\left(\frac{c_n}{b_n}-f(q)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}\,a_k\,(|q|+\varepsilon)^k,$$

где

$$\alpha_{nk}=\begin{cases}0, & \text{если } k=0,\\ \dfrac{\lambda_n}{(|q|+\varepsilon)^k}\left(\dfrac{b_{n-k}}{b_n}-q^k\right), & \text{если } 0<k\le n,\\ -\dfrac{\lambda_n q^k}{(|q|+\varepsilon)^k}, & \text{если } k>n,\end{cases}$$

и матрица (α_{nk}) переводит абсолютно сходящийся ряд $\sum\alpha_k(|q|+\varepsilon)^k$ в последовательность (v_n) с $v_n = \lambda_n(c_n/b_n-f(q))$.

Перейдем к доказательству импликации 1°. Чтобы доказать соотношение $v_n=O(1)$, согласно теореме Хана (см.[1], стр. 30), достаточно показать, что

$$\alpha_{nk}=O(1). \tag{3}$$

Пусть $0<k\le n$. Учитывая тождество

$$\frac{b_{n-k}}{b_n}-q^k=\sum_{i=1}^{k}q^{i-1}\frac{b_{n-k}}{b_{n-i}}\left(\frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}-q\right), \tag{4}$$

10

где $k=1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$, которое проверяется непосредственно, и оценку

$$\frac{b_{n-\nu}}{b_n}=O((|q|+\varepsilon)^{\nu}),\quad \nu=0,1,\dots,n,$$

из [3], стр. 226, имеем

$$\alpha_{nk}=O\Big(\frac{\lambda_n}{(|q|+\varepsilon)^k}\sum_{i=1}^{k}|q|^{i-1}(|q|+\varepsilon)^{k-i}\Big|\frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}-q\Big|\Big)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{nk}=O\Big(\lambda_n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha^{i-1}}{\lambda_{n-i}}\lambda_{n-i}\Big|\frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}-q\Big|\Big).\qquad(5)$$

Поскольку

$$\Big(\frac{b_n}{b_{n+1}}\Big)\in m^{\lambda}\quad\text{и}\quad\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha^{i-1}}{\lambda_{n-i}}\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\alpha^{n-1-j}}{\lambda_j},$$

то, ввиду условия (1), получим $\alpha_{nk}=O(1)$.

Если $k>n$, то

$$|\alpha_{nk}|=\lambda_n\alpha^k\leqslant\begin{cases}\lambda_0\alpha & \text{при } n=0,\\ \lambda_n\alpha^{n-1} & \text{при } n=1,2,\dots,\end{cases}$$

но при $n=1,2,\dots$

$$\lambda_n\alpha^{n-1}\leqslant\lambda_0\lambda_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^{n-1-k}}{\lambda_k}=O(1)$$

согласно (1). Таким образом, $\alpha_{nk}=O(1)$.

Импликация 1° доказана.

Установим справедливость импликации 3°. Чтобы доказать условие $\mathcal{V}_n=o(1)$, на основе теоремы Хана (см.[1], стр. 25), достаточно проверить выполнение условий (3) и

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0,\quad k=0,1,\dots.$$

Так как $(b_n/b_{n+1})\in c_0^{\lambda}\subset m^{\lambda}$, то условие (3), согласно вышедоказанному, выполняется. При $k=0$ имеем $\alpha_{n0}=0\to0$, а при $k>0$ из условий (5) и $(b_n/b_{n+1})\in c_0^{\lambda}$ следует, что

$$\alpha_{nk}=o_k(1)\,\lambda_n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha^{i-1}}{\lambda_{n-i}},\quad k\leqslant n,$$

откуда в силу (1) вытекает $\alpha_{nk}=o_k(1)$.

Докажем, наконец, импликацию 2°. Чтобы доказать существование предела $\lim\mathcal{V}_n$, согласно теореме Хана (см.[1] стр. 25), достаточно проверить выполнение условий (3) и

$$\exists\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk},\quad k=0,1,\dots.\qquad(6)$$

Вследствие вышедоказанного условие (3) выполняется. При $k=0$ имеем $\alpha_{n0}=0\to0$, а при $k>0$ и $n\geqslant k$ с помощью тождества (4) получаем

$$\alpha_{nk}=\frac{1}{(|q|+\varepsilon)^k}\sum_{i=1}^{k} q^{i-1}\frac{b_{n-k}}{b_{n-i}}\cdot\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-i}}\lambda_{n-i}\left(\frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}-q\right).$$

Так как, ввиду предположений $\lim b_n/b_{n+1}=q$, (2) и $(b_n/b_{n+1})\in c^{\lambda}$ соответственно, при фиксированных i и k существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n-k}}{b_{n-i}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-i}}\quad \text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_{n-i}\left(\frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}-q\right),$$

то условие (6) выполняется.

Теорема доказана.

3. Приведем примеры скоростей, показывающие, в частности, что наша теорема усиливает следующий результат Бояника-Ли [4]: пусть выполнены предположения теоремы Шура-Полиа-Сеге; если скорость $\lambda=(\lambda_n)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=1, \tag{7}$$

то имеет место импликация 1°. С этой целью докажем

Предложение. Пусть $\mu=(\mu_n)$ - скорость, удовлетворяющая условию (7). Если скорость $\lambda=(\lambda_n)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\cdot\frac{\mu_k}{\mu_n}=O(1),\quad k\le n, \tag{8}$$

то она удовлетворяет и условию (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$\lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{\lambda_k}=O(1)\,\mu_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{\mu_k},$$

то достаточно показать, что μ удовлетворяет условию (I). Пусть $\beta>1$ такое число, что $\alpha\beta<1$. Тогда найдется такое натуральное число N, что при $n\ge N$ будет $\mu_{n+1}/\mu_n<\beta$. Если положить $M=\max\{\mu_N/\mu_k:\ k=0,1,\dots,N\}$ то при $n>N$ будет

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}=\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\cdot\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N}\cdot\frac{\mu_N}{\mu_k}<M\beta^{n-N+1},$$

если $k\le N$, и

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}=\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\cdot\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}<\beta^{n-k+1},$$

если $n\ge k>N$. Следовательно, при $n>N$

$$\mu_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{\mu_k}=\sum_{k=0}^{N}\alpha^{n-k}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}+\sum_{k=N+1}^{n}\alpha^{n-k}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}<$$

$$<M\beta(\alpha\beta)^{n-N}\sum_{k=0}^{N}\alpha^{N-k}+\beta\sum_{k=N+1}^{n}(\alpha\beta)^{n-k}=$$

$$= o(1) + O(1),$$

откуда вытекает наше утверждение.

Предложение доказано.

Легко проверить, что, например, скорость $\lambda = (\lambda_n)$ с $\lambda_0 = 1$, $\lambda_n = 2^k$, если $2^k \leq n < 2^{k+1}$, которая явно не удовлетворяет условию (7), удовлетворяет условию (8) с $\mu_n = n+1$, и тем самым, согласно предложению, условию (1). Таким образом, вышеприведенный результат Бояника-Ли обобщается теоремой. Кроме того, если скорость $\lambda = (\lambda_n)$ удовлетворяет условию (7), то она удовлетворяет обоим условиям (1) и (2) теоремы. Значит, при ней имеет место уже импликация 2°.

В заключение приведем пример скорости, которая удовлетворяет условиям (1) и (2), но не удовлетворяет условию (8), и подавно – условию (7). Это – скорость $\lambda = (\lambda_n)$ с $\lambda_n = \gamma^n$, где число $\gamma > 1$ выбрано таким образом, что $\alpha\gamma < 1$ (см.(1)). Ясно, что условия (1) и (2) выполнены. Рассуждая от противного, допустим, что найдется такая скорость $\mu = (\mu_n)$ со свойством (7), что выполнено условие (8). Пусть $\beta \in (1, \gamma)$ и N – такой номер, что $\mu_{n+1}/\mu_n < \beta$, если только $n \geq N$. Тогда

$$\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{2n}} = \gamma^n \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \cdot \frac{\mu_{n+1}}{\mu_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\mu_{2n-1}}{\mu_{2n}} > \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^n \xrightarrow[n]{} \infty$$

в противоречие с (8).

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Барон С.А., Реймерс Э.Г., Юримяэ Э.И., Гуннар Фромхолдович Кангро (к шестидесятилетию со дня рождения). Успехи мат. наук, 1975, 30, № 1 (181), 273–278.
3. Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, I часть, Москва, 1956.
4. Bojanic, R., Lee, Y.H., An estimate for the rate of convergence of convolution products of sequences. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5, № 3, 452–462.

Поступило 11 II 1982

On the rate of convergence of convolution products of sequences

E.Oja, M.Rinne

Summary

Let $\lambda=(\lambda_n)$, $\lambda_n>0$, $\lim \lambda_n=\infty$. A sequence (ξ_n), converging to ξ, is said to be λ-bounded if the sequence (β_n), $\beta_n=\lambda_n(\xi_n-\xi)$ is bounded, and λ-convergent if (β_n) is convergent. If $\lim \beta_n=0$ then (ξ_n) is said to be regularly λ-convergent. The sets of all λ-bounded, λ-convergent and regularly λ-convergent sequences are denoted respectively by m^λ, c^λ and c_0^λ.

Let $r>0$ be the radius of convergence of a power series $f(x)=\sum a_k x^k$. If $b_n\neq 0$ and $\lim b_n/b_{n+1}=q$, where $|q|<r$ then $\lim c_n/b_n=f(q)$, where $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (see [3], p. 54, 226). In the present paper it is shown that if $|q|+\varepsilon<r$ for $\varepsilon>0$ and

$$\lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{\lambda_k}=O(1), \tag{1}$$

where $\alpha=|q|/(|q|+\varepsilon)$ then

$$(b_n/b_{n+1})\in m^\lambda \Rightarrow (c_n/b_n)\in m^\lambda$$

and

$$(b_n/b_{n+1})\in c_0^\lambda \Rightarrow (c_n/b_n)\in c_0^\lambda.$$

If the condition (1) is satisfied and the sequence $(\lambda_{n+1}/\lambda_n)$ is convergent, then

$$(b_n/b_{n+1})\in c^\lambda \Rightarrow (c_n/b_n)\in c^\lambda.$$

This improves a result of [4].

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СИЛЬНОГО СУММИРОВАНИЯ

В.Соомер

Тартуский государственный университет

Введение

Пусть $\alpha = (A_i)$ - последовательность матриц $A_i = (a_{nik})$. Последовательность $x = (x_k)$ называется α-суммируемой, если существует конечный предел[I]

$$\lim_n \sum_k a_{nik} x_k = \alpha(x)$$

равномерно по i. Через c_α обозначим множество всех α-суммируемых последовательностей.

Последовательность $x = (x_k)$ называется сильно α-суммируемой со степенью p $(p=(p_k),\ p_k > 0)$ к числу $\ell(x)$, если

$$\lim_n \sum_k |a_{nik}| |x_k - \ell(x)|^{p_k} = 0$$

равномерно по i. Множество всех со степенью p сильно α-суммируемых последовательностей обозначим через $[c_\alpha]^p$ (при $p_k = 1$, через $[c_\alpha]$). Через c_0, c и m обозначим соответственно пространства всех сходящихся к нулю, всех сходящихся и всех ограниченных последовательностей.

В § I рассматриваются некоторые общие свойства множества $[c_\alpha]^p$. Изучаются включения $c \subset [c_\alpha]^p$, $[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p$, $[c_\alpha]^p \subset c_\alpha$, а также единственность сильного α-предела $\ell(x)$.

Во втором параграфе изучаются мультипликаторы множества $c_\alpha \cap m$.

§I. Некоторые общие теоремы о множестве $[c_\alpha]^p$

Рассмотрим такие методы α, при которых $a_{nik} \geqslant 0$. Если $c \subset [c_\alpha]^p$ и $\ell(x) = \lim x$ для всех $x \in c$, то будем писать $c \subset [c_\alpha]^p$(рег.).

Теорема I.I. Если $0 < r \leqslant p_k \leqslant H < \infty$, то включение $c \subset [c_\alpha]^p$(рег.) имеет место тогда и только тогда, когда

1^0 $\exists\, r > 0,\quad \sup_{n \geqslant r,\ i \geqslant 0} \sum_k a_{nik} < \infty,$

2^0 $\lim_n a_{nik} = 0$ для всех k, равномерно по i.

[I] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают значения от 0 до ∞.

Замечание I. Как доказано в статье [8], условия 1^0 и 2^0 теоремы I.I необходимы и достаточны для того, чтобы $c_0 \subset c_\alpha$ и $\alpha(x)=0$ для всех $x \in c_0$.

Если для всех $(x_k)\in[c_\alpha]^q$ из $\lim_n \sum_k a_{nik}|x_k-\ell|^{q_k}=0$ (равномерно по i) следует, что $\lim_n \sum_k a_{nik}|x_k-\ell|^{p_k}=0$ (равномерно по i), то будем писать $[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p$ (рег.). Имеет место

Теорема I.2. Если $0<p_k\leq q_k$ и $q_k/p_k = O(1)$, то
$$[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p (\text{рег.}).$$
В работе [7] изучается множество $[f_A]^p$, т.е. поле сильной почти суммируемости матричного метода A. Отметим, что $[c_\alpha]^p=[f_A]^p$, если $a_{nik} = 1/(n+1)\sum_{j=i}^{i+n} a_{jk}$.

Доказательства теорем I.I и I.2 аналогичны доказательством подобных теорем из статьи [7] (при $[c_\alpha]^p=[f_A]^p$).

Рассмотрим теперь включение $[c_\alpha]^p \subset c_\alpha$.

Теорема I.3. Пусть $1\leq p_k\leq H<\infty$ и существует $\lim_n \sum_k a_{nik}=a\neq 0$ (равномерно по i). Тогда $[c_\alpha]^p\subset c_\alpha$ и $\ell(x)=1/a\cdot\alpha(x)$.

Доказательство. I) Пусть $p_k=1$ для всех k, т.е. $[c_\alpha]^p=[c_\alpha]$. Так как (напомним, что $a_{nik}\geq 0$)
$$0\leq\Big|\sum_k a_{nik}x_k-\ell(x)\sum_k a_{nik}\Big|\leq\sum_k a_{nik}|x_k-\ell(x)|,$$
то из $(x_k)\in[c_\alpha]$ следует, что
$$\lim_n\Big[\sum_k a_{nik}x_k-\ell(x)\sum_k a_{nik}\Big]=0$$
равномерно по i. Учитывая, что существует $\lim_n\sum_k a_{nik}=a\neq 0$ получим $(x_k)\in c_\alpha$ и $\alpha(x)=\ell(x)a$.

2) Если $1<p_k\leq H$ то $[c_\alpha]^p\subset[c_\alpha]$ (см. теорема I.2) и, учитывая первую часть доказательства, получим, что $[c_\alpha]^p\subset c_\alpha$ и $\ell(x)=1/a\,\alpha(x)$ для всех $x\in[c_\alpha]^p$. Оказывается, что при $a=0$ сильный α-предел не является единственным.

Теорема I.4. Если $0<r\leq p_k\leq H<\infty$ и существует $\lim_n\sum_k a_{nik}=a$ (равномерно по i), то для единственности сильного α-предела $\ell(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $a\neq 0$.

Доказательство. I) Если $a=0$, то при $x=e=(1,1,1,\dots)$, получим, что
$$\lim_n\sum_k a_{nik}|1-0|=a=0,$$
а также
$$\lim_n\sum_k a_{nik}|1-1|=0.$$

т.е. $l_1(e)=0$ а $l_2(e)=1$.

2) Пусть теперь $a\neq 0$. Сначала допустим, что $1\leq p_k\leq H<<\infty$. Тогда единственность сильного α-предела $l(x)$ вытекает из теоремы I.3, ввиду которой $l(x)=\frac{1}{a}\alpha(x)$. Рассмотрим случай $0<r\leq p_k<1$. Пусть (x_k) такая последовательность, что

$$\lim_n \sum_k a_{nik}|x_k-l_1(x)|^r=\lim_n\sum_k a_{nik}|x_k-l_2(x)|^r=0 \quad (\text{I.I})$$

равномерно по i, причем $\lambda=l_1(x)-l_2(x)>0$. Известно (см. [6], стр. 346), что для всех (a_k) и (b_k) существует $K>>0$ такое, что

$$|a_k+b_k|^r\leq K(|a_k|^r+|b_k|^r).$$

Ввиду этого

$$|\lambda^r\sum_k a_{nik}|=\sum_k a_{nik}|l_1(x)-l_2(x)|^r\leq$$
$$\leq K(\sum_k a_{nik}|x_k-l_1(x)|^r+\sum_k a_{nik}|x_k-l_2(x)|^r.$$

Из условия (I.I) тогда вытекает, что

$$\lim_n \lambda^r\sum_k a_{nik}=0,$$

т.е. $\lambda^r a=0$. Так как $a\neq 0$, то $\lambda=0$ и $l_1(x)=l_2(x)$. Значит, сильный α-предел последовательности x единственный, если $x\in[c_\alpha]^\varrho$, где $\varrho=(r)$. Единственность $l(x)$ для всех $x\in[c_\alpha]^p$, где $r<p_k<1$, вытекает из того, что по теореме I.2 будет $[c_\alpha]^p\subset[c_\alpha]^\varrho$(рег.).

§2. Мультипликаторы множества $c_\alpha\cap m$

Если $c\subset c_\alpha$ и $\alpha(x)=\lim x$ для всех $x\in c$, то напишем $c\subset c_\alpha$ (рег.). В дальнейшем нам нужна следующая

Теорема 2.I. [8] Включение $c\subset c_\alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда

I⁰ $\exists \lim_n a_{nik}=a_k$ для всех $k=0,1,2,\ldots$ равномерно по i,

2⁰ $\exists \lim_n\sum_k a_{nik}=a$ равномерно по i,

3⁰ $\exists\ r>0,\quad \sup_{\substack{n>r\\ i\geq 0}}\sum_k|a_{nik}|<\infty.$

При этом $c\subset c_\alpha$(рег.) тогда и только тогда, когда в условиях I⁰ и 2⁰ $a_k=0$, $a=1$.

Пусть ниже метод α удовлетворяет следующему условию: (i) Если $c\subset c_\alpha\subset c_\beta$ и $\alpha(x)=\beta(x)$ для всех $x\in c$, то $\alpha(x)=\beta(x)$ для всех $x\in c_\alpha\cap m$.

Замечание 2. Если $\alpha=(A)$, $A=(a_{nk})$, то α — матричный метод суммирования и условие (i) – это условие $\mathcal{O}$-совершенности [2] матричного метода A.

Обозначим множество мультипликаторов множества $c_\alpha \cap m$ через $M(c_\alpha \cap m)$ т.е. пусть

$$M(c_\alpha \cap m) = \{(\varepsilon_k) : (\varepsilon_k x_k) \in c_\alpha \cap m,\ \forall (x_k) \in c_\alpha \cap m\}$$

В статье [I] доказана следующая

Теорема 2.2. Если $c \subset c_\alpha$(рег.), $a_{nik} \geq 0$ и метод α удовлетворяет условию (i), то $M(c_\alpha \cap m) = [c_\alpha] \cap m$.

Замечание 3. При $\alpha = (A)$, $A = (a_{nk})$ теорема 2.2 доказана в статье [5].

Пусть теперь $c \subset c_\alpha$ (метод α не должен быть регулярным), тогда можем найти число $\varrho(\alpha) = a - \sum_k a_k$ (см. теорему 2.I). На основании теоремы 2.2 нетрудно доказать более общую теорему о мультипликаторах множества $c_\alpha \cap m$.

Теорема 2.3. Если $c \subset c_\alpha$, $a_{nik} - a_k \geq 0$, $\varrho(\alpha) \neq 0$ и метод α удовлетворяет условию (i), то $(\varepsilon_k) \in M(c_\alpha \cap m)$ тогда и только тогда, когда $(\varepsilon_k) \in m$ и найдется $\ell = \ell(\varepsilon)$ такое, что

$$\lim_n \sum_k (a_{nik} - a_k)|\varepsilon_k - \ell| = 0 \tag{2.I}$$

равномерно по i.

Доказательство. Рассмотрим метод $\alpha_0 = (\alpha_i)$ где $\alpha_i = \alpha_{nik}$ и

$$\alpha_{nik} = 1/\varrho(\alpha)\,(a_{nik} - a_k).$$

Тогда

$$\sum_k a_{nik} x_k = \varrho(\alpha) \sum_k \alpha_{nik} x_k + \sum_k a_k x_k .$$

Если $c \subset c_\alpha$, то $\sum_k |a_k| < \infty$ (см. [8], следствие 4). Значит, ряд $\sum_k a_k x_k$ сходится при всех $(x_k) \in m$. Но тогда $c_{\alpha_0} \cap m = c_\alpha \cap m$, а также $M(c_{\alpha_0} \cap m) = M(c_\alpha \cap m)$. Так как метод α_0 является регулярным, то из теоремы 2.2 и из определения сильной α-суммируемости вытекает, что $(\varepsilon_k) \in M(c_\alpha \cap m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.I).

Замечание 4. Если требовать только, что $c \subset c_\alpha$, то нетрудно доказать, что условие:

$$\exists \ell : \lim_n \sum_k |a_{nik} - a_k||\varepsilon_k - \ell| = 0$$

(равномерно по i) является достаточным для того, чтобы $(\varepsilon_k) \in M(c_\alpha \cap m)$.

Если $\alpha = (A_i)$, $A_i = (a_{nik})$ и

$$a_{nik} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & i \leq k \leq i+n, \\ 0, & k < i,\quad k > i+n, \end{cases}$$

то $c_\alpha = f$ где f - множество всех почти сходящихся последовательностей. Пусть метод $\beta = (B_i)$, $B_i = (b_{nik})$ такой, что

$f \subset c_\beta$ тогда[2] (см. [8], следствие 4)

$$\beta(x) = (b - \sum_k b_k)\, f\text{-}\lim x + \sum_k b_k x_k, \qquad (2.3)$$

где $b = \lim_n \sum_k b_{nik}$ и $b_k = \lim_n b_{nik}$. Известно, что $c \subset f$ и $f\text{-}\lim x = \lim x$ для всех $x \in c$. Если теперь $\beta(x) = f\text{-}\lim x = \lim x$ для всех $x \in c$, то по теореме 2.I будет $b = 1$ и $b_k = 0$, то из равенства (2.3) получим, что $\beta(x) = f\text{-}\lim x$ для всех $x \in f$. Значит, если $c_\alpha = f$ то условие (i) выполнено, также выполнены остальные условия теоремы 2.2 и имеет место

Следствие 2.I. Последовательность (ε_k) является мультипликатором множества f тогда и только тогда, когда существует ℓ, такое что

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=i}^{i+n} |\varepsilon_k - \ell| = 0 \text{ равномерно по } i. \qquad (2,4)$$

Последовательности, для которых имеет место (2.4) называются сильно почти сходящимися. Условия для мультипликаторов $M(f)$ найдены в работах [3] и [4], но другими методами.

Если $\alpha = (A)$, $A = (a_{nk})$, то $c_\alpha = c_A$, где c_A - поле суммируемости матричного метода A. Тогда при $a_{nk} - a_k \geqslant 0$ из теоремы 2.3 следует

Следствие 2.2. Если A - корегулярный матричный метод, то последовательность $(\varepsilon_k) \in m$ является мультипликатором множества $c_A \cap m$ тогда и только тогда, когда существует $\ell(\varepsilon)$, такое, что

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k)\, |\varepsilon_k - \ell(\varepsilon)| = 0.$$

Доказательство. В данном случае условие (i) выполнено, так как каждый корегулярный матричный метод является $\mathcal{O}$-совершенным (см. [2], стр. 50) и следствие 2.2 является частным случаем теоремы 2.3.

Если A - конулевый[3] матричный метод, то имеет место

Теорема 2.4. Если A - конулевый $\mathcal{O}$-совершенный матричный метод, то для того, чтобы последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ был мультипликатором множества $c_A \cap m$, достаточно существование такого числа $\ell(\varepsilon)$, чтобы

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k|\, |\varepsilon_k - \ell(\varepsilon)| = 0. \qquad (2.5)$$

---

[2] $f\text{-}\lim x = \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=i}^{i+n} x_k$ т.е. $f\text{-}\lim x = \alpha(x)$ если $c_\alpha = f$.

[3] Матричный метод A называется корегулярным, если $\varphi(A) = a - \sum_k a_k \neq 0$ и конулевым, если $\varphi(A) = 0$.

Доказательство. Для всех $(x_k)\in c_A\cap m$ имеем

$$\left|\sum_k a_{nk}\varepsilon_k x_k - \sum_k a_k\varepsilon_k x_k\right| \leq$$
$$\left|\sum_k (a_{nk}-a_k)\, x_k(\varepsilon_k-\ell) + \ell\left(\sum_k a_{nk}x_k - \sum_k a_k x_k\right)\right| \leq$$
$$\sup_k |x_k| \sum_k |a_{nk}-a_k||\varepsilon_k-\ell| + |\ell|\left|\sum_k a_{nk}x_k - \sum_k a_k x_k\right|$$

Первое слагаемое стремится к нулю (при $n\to\infty$) ввиду условия (2.5), а второе ввиду того, что для θ-совершенных конулевых методов (см.[2], стр. 5I)

$$\lim_n \sum_k a_{nk}x_k = \sum_k a_k x_k$$

для всех $x\in c_A\cap m$. Значит

$$\lim_n \sum_k a_{nk}\varepsilon_k x_k = \sum_k a_k\varepsilon_k x_k$$

для всех $x\in c_A\cap m$, если только выполнено условие (2.5).

Литература

I. Соомер, В., Сильная суммируемость, заданная последовательностью матриц. Деп. в ВИНИТИ, IO.OI.I979, № 96-79.

2. Кримяэ, Э., Топологические свойства конулевых методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I965,I77,43-6I.

3. Ching-Chou, The multipliers of the spaceof almost convergent sequences. Ill. J. Math., 1972,16,687-694.

4. Duran, P., Infinite matrices and almost convergence.Math. Z., 1972,128,497-502.

5. Hill, J.D., Sledd, W.T., Approximation in bounded summability fields. Can. J. Math., 1968,20,410-415.

6. Maddox.I.J., Spaces of strongly summable sequences.Quart. J. Math. Oxford Ser., 1967,18,345-355.

7. Nanda, S., Some sequence spaces and almost convergence. J. Austral. Math. Soc., 1976,22,446-455.

8. Stieglitz, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklarte konvergenzbegriffe.Stuttgart, 1971.

Поступило 04.05.I983

Strong summability, defined by a sequence of matrices

V.Soomer

Summary

Let $\alpha=(A_i)$ be a sequence of matrices $A_i=(a_{nik})$ and $p=(p_k)$ be a sequence of real numbers, such that $p_k>0$. We define

$$c_\alpha = \left\{(x_k) : \exists \lim_n \sum_k a_{nik}\, x_k \quad \text{uniformly in } i\right\}$$

and

$[c_\alpha]^p = \{(x_k) : \exists\, \ell(x),\ \lim_n \sum_k |a_{nik}||x_k - \ell(x)|^{p_k} = 0$ uniformly in $i\}$.

The sets c_α and $[c_\alpha]^p$ are respectively called sets of α-summable and strongly α-summable sequences. If $\alpha = (A)$, then $c_\alpha = c_A$ where c_A is the convergence field of the matrix method A. The spaces of bounded, convergent an almost convergent sequences are denoted respectively by m, c and f.

In § 1 conditions for $c \in [c_\alpha]^p$, $[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p$, $[c_\alpha]^p \subset c_\alpha$ are given and the uniquences of strong α-limit $\ell(x)$ is considered.

Theorem 1.3. Suppose that $1 \leq p_k \leq H < \infty$ and exists $\lim_n \sum_k a_{nik} = a \neq 0$ (uniformly in i), then $[c_\alpha]^p \in c_\alpha$ and $\ell(x) = \alpha(x)/a$.

Theorem 1.4. Suppose that $0 < r \leq p_k \leq H < \infty$ and exists $\lim_n \sum_k a_{nik} = a$ (uniformly in i), then $\ell(x)$ is unique for every $x \in [c_\alpha]^p$ if and only if $a \neq 0$.

In § 2 conditions for the multipliers of the sets $c_\alpha \cap m$, $c_A \cap m$ and f are found. The set of multipliers of $c_\alpha \cap m$ is denoted by $M(c_\alpha \cap m)$.

Theorem 2.3. Let α satisfy the condition (i) and $a_{nik} - a_k \geq 0$. The bounded sequence $(\varepsilon_k) \in M(c_\alpha \cap m)$ iff there exists real number $\ell(\varepsilon)$ such that

$$\lim_n \sum_k (a_{nik} - a_k)|\varepsilon_k - \ell| = 0 \quad \text{uniformly in } i.$$

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ ТАУБЕРОВЫХ УСЛОВИЙ В ОДНОТИПНЫЕ УСЛОВИЯ

Т.Сырмус

Таллинский педагогический институт

Пусть A и B – линейные методы суммирования числовых рядов[1] $\sum u_k$ с последовательностью[2] $x=(x_n)$ частичных сумм, так что $\bar{\Delta} x_k = u_k$. Всюду ниже предположено, что поля ограниченности, суммируемости или абсолютной суммируемости методов A и B связаны соотношениями $A_0 \supset B_0$, $A' \supset B'$ или $|A|' \supset |B|'$. Если T_0 – определенный класс последовательностей, то следуя Кангро [2] будем условие $x \in T_0$ называть $|B|$-тауберовым для $|A|$, если из $x \in T_0 \cap |A|'$ следует $x \in |B|'$. Соответственно определяются B_0- или B-тауберовы условия для A_0 или A. Если $B=E$, то в рассматриваемых случаях говорят об O-тауберовых условиях для A_0, тауберовых условиях для A или абсолютных тауберовых условиях для $|A|$. Если при этом $x \in T_0$ является $|B|$-тауберовым для $|A|$ и из этого следует, быть может при некотором дополнительном условии, что $x \in T$ также $|B|$-тауберово для $|A|$, то его считают по сравнению с условием $x \in T_0$ более общим, а в случае включения $T_0 \cap |A|' \subset T$ ослабленным $|B|$-тауберовым условием для $|A|$. Аналогично определяют более общие и ослабленные тауберовы условия для рассмотренных выше других видов тауберовых условий.

Тауберово условие $\xi_k = O(1)$ будем называть однотипным с тауберовым условием $\eta_n = O(1)$, где $\xi_k = \lambda_k u_k$, $\eta_n = \sum_{k=0}^{n} t_{nk} u_k$, (λ_k) – заданная числовая последовательность, а (t_{nk}) – заданная нижняя треугольная числовая матрица. Аналогично назовем условие $\xi_k = o(1)$ однотипным с условием $\eta_n = o(1)$, условие $\xi_k = \Omega(1)$ – с условием $\eta_n = \Omega(1)$ и условие $\xi_k = \omega(1)$ – с условием $\eta_n = \omega(1)$. Значение общепринятых символов приведено в [1].

Основные результаты об ослаблении тауберовых условий для метода A содержат работы [9 – 11, 13]. Кангро [2] разработан общий метод получения более общих или ослабленных

---

[1] Вместо $\sum_{k=0}^{n} u_k$ будем всюду писать $\sum u_k$.

[2] Предполагаем ниже $n = 0, 1, 2, \ldots$.

тауберовых условий для регулярного метода суммирования. Этот метод применяется в [1] при выводе новых или ослабленных B-тауберовых условий для A. Здесь же даны некоторые теоремы для вывода новых или ослабленных тауберовых условий для $|A|$. В случае некоторых частных методов $|A|$-суммирования такие теоремы, в основном с однотипными тауберовыми условиями, рассматривались в работах [3, 4, 7, 12].

В данной статье рассматривается один метод[3] вывода новых или ослабленных тауберовых B-условий (или B_0-условий или $|B|$-условий) для A (или A_0 или $|A|$). Метод разработан на применении одной общей леммы Кангро [2], дающей достаточное условие для того, чтобы условие $x \in T$ было в определенном смысле тауберовым для A, если условие $x \in T_0$ является в этом же смысле тауберовым для A. Из полученных результатов вытекают многие ранее известные.

§1. Обозначения и рассматриваемые классы последовательностей

Пусть все элементы вещественных последовательностей (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) отличны от нуля, $\mu_{-1}=0$ и $\zeta_{-1}=0$, а (α_k) и (λ_k) либо монотонны, либо постоянны.

Воспользуемся следующими обозначениями:

$\nu_k = \mu_k(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})^{-1}$; $\tau_k = \zeta_k \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\lambda_{k+1}$;

$\sigma_k = \mu_k(\alpha_k\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})^{-1}\bar{\Delta}(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})$;

$\omega_k = (k+1)\alpha_k\lambda_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\lambda_{k+1}$; $\rho_k = \zeta_k\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\alpha_{k+1}$;

$$S_n(x) = \mu_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\lambda_k u_k, \tag{1}$$

$$R_n(x) = (n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k, \tag{2}$$

$$W_n(x) = \zeta_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k u_k. \tag{3}$$

Множества всех ограниченных, сходящихся, сходящихся к нулю, абсолютно и абсолютно к нулю сходящихся последовательностей обозначены общепринятыми символами m, c, c_0, a и a_0. Тауберовы условия для последовательности x будут ниже определятся следующими классами последовательностей:

$s_0(\lambda) = \{x: \lambda_k u_k = O(1)\}$; $\quad R_0 = \{x: R_n(x) = O(1)\}$;

$S_0 = \{x: S_n(x) = O(1)\}$; $\quad W_0 = \{x: W_n(x) = O(1)\}$;

---

[3] Аналогичный метод применен в [5] для ослабления тауберовых о-условий в О-условия.

$$s_0(\lambda)=\{x:\lambda_k u_k=o(1)\};\qquad R_0=\{x:R_n(x)=o(1)\};$$
$$S_0=\{x:S_n(x)=o(1)\};\qquad W_0=\{x:W_n(x)=o(1)\};$$
$$s_\Omega(\lambda)=\{x:\lambda_k u_k=\Omega(1)\};\qquad s_\omega(\lambda)=\{x:\lambda_k u_k=\omega(1)\};$$
$$S_\Omega=\{x:S_n(x)=\Omega(1)\};\qquad S_\omega=\{x:S_n(x)=\omega(1)\};$$
$$R_\Omega=\{x:R_n(x)=\Omega(1)\};\qquad R_\omega=\{x:R_n(x)=\omega(1)\};$$
$$W_\Omega=\{x:W_n(x)=\Omega(1)\};\qquad W_\omega=\{x:W_n(x)=\omega(1)\}.$$

Для любой последовательности x имеют место разложения (см. [2] и [5]):

$$x=y(S)+z(S), \tag{4}$$

где $y(S)=(y_n(S))$ и $z(S)=(z_n(S))$ определены через

$$y_n(S)=\sum_{k=0}^{n}\mu_k\Delta(\alpha_k^{-1}\lambda_k^{-1})S_k(x) \tag{5}$$

и

$$z_n(S)=\nu_n S_n(x); \tag{6}$$

$$x=y(R)+z(R), \tag{7}$$

где $y(R)=(y_n(R))$ и $z(R)=(z_n(R))$ определены через

$$y_n(R)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta(\lambda_k^{-1})R_k(x) \tag{8}$$

и

$$z_n(R)=(n+1)\lambda_{n+1}^{-1}R_n(x); \tag{9}$$

$$x=y(W)+z(W), \tag{10}$$

где $y(W)=(y_n(W))$ и $z(W)=(z_n(W))$ определены через

$$y_n(W)=\sum_{k=0}^{n}\zeta_k\Delta(\alpha_k^{-1})W_k(x) \tag{11}$$

и

$$z_n(W)=\zeta_n\alpha_{n+1}^{-1}W_n(x). \tag{12}$$

§2. Вспомогательные результаты

Получение тауберовых теорем с однотипными тауберовыми условиями связано с нижеследующими леммами. Докажем из них часть, отметив, что доказательства других либо аналогичны, либо вытекают из приведенных как частные случаи.

Лемма 1. Если числовые последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям

$$1.1^0\quad \nu_n=O(1)$$

и

$$1.2^0\quad \sigma_n=O(1),$$

то любая последовательность $x\in S_0$ (или $x\in S_\circ$) допускает разложение (4), где $y(S)$ и $z(S)$, определенные формулами (5) и (6), удовлетворяют условиям $y(S)\in s_0(\lambda)$ и $z(S)\in m$ (или

$y(S) \in s_0(\lambda)$ и $z(S) \in c_0$).

Доказательство. В силу условия 1.1° и предположения $x \in S_0$ (или $x \in S_\circ$) из равенства (6) вытекает, что $z(S) \in m$ (или $z(S) \in c_0$). Исходя из равенства (5) и составляя величину $\lambda_n \bar\Delta y_n(S)$, после простых упрощений имеем

$$\lambda_n \bar\Delta y_n(S) = \sigma_n S_n(x). \tag{13}$$

Из полученного равенства, предположения $x \in S_0$ (или $x \in S_\circ$) и условия 1.2° следует нужное нам заключение: $y(S) \in s_0(\lambda)$ (или $y(S) \in s_\circ(\lambda)$).

Следующая лемма вытекает из леммы 1 при $\mu_n = n+1$ и $\alpha_n = 1$.

Лемма 2. Если числовая последовательность (λ_k) удовлетворяет условиям

$$2.1^0 \quad n = O(\lambda_n)$$

и

$$2.2^0 \quad (n+1)\bar\Delta\lambda_{n+1} = O(\lambda_{n+1}),$$

то любая последовательность $x \in R_0$ (или $x \in R_\circ$) допускает разложение (7), где $y(R)$ и $z(R)$, определенные формулами (8) и (9), удовлетворяют условиям $y(R) \in s_0(\lambda)$ и $z(R) \in m$ (или $y(R) \in s_\circ(\lambda)$ и $z(R) \in c_0$).

Лемма 3. Если числовые последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ξ_k) удовлетворяют условиям

$$3.1^0 \quad \xi_n = O(\alpha_{n+1})$$

и

$$3.2^0 \quad \sum_{k=0}^{n} |\varrho_k| = O(\mu_n),$$

то любая последовательность $x \in W_0$ (или, при дополнительном условии

$$3.3^0 \quad \lim \mu_n = \infty,$$

$x \in W_\circ$) допускает разложение (10), где $y(W)$ и $z(W)$, определенные формулами (11) и (12), удовлетворяют условиям $y(W) \in S_0$ и $z(W) \in m$ (или $y(W) \in S_\circ$ и $z(W) \in c_0$).

Доказательство. Утверждение $z(W) \in m$ (или $z(W) \in c_0$) вытекает из равенства (12) в силу условия 3.1° и предположения $x \in W_0$ (или $x \in W_\circ$). Используя равенство (11), составляем величину $S_n(y(W))$, которую приводим к виду

$$S_n(y(W)) = \mu_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \varrho_k W_k(x). \tag{14}$$

Из полученного, предположения $x \in W_0$ и условия 3.2° следует заключение $y(W) \in S_0$. Отметим, что матричный метод $T = (t_{nk})$, где

$$t_{nk}=\begin{cases} \rho_k \mu_n^{-1}, & \text{при} \quad k \le n, \\ 0, & \text{при} \quad k > n, \end{cases} \tag{15}$$

при условиях 3.2^0 и 3.3^0 принадлежит к классу (c_0, c_0). Поэтому, на основании предположения $x \in W_0$ и условий 3.2^0 и 3.3^0 из равенства (14) следует, что $y(W) \in S_0$.

Лемма 4. Если числовые последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям 1.1^0 и 1.2^0, последовательность (ν_n) монотонна и

$$\sum |\bar{\Delta}(\alpha_n^{-1}\bar{\Delta}(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}))| < \infty, \tag{16}$$

то любая последовательность $x \in S_\Omega$ (или $x \in S_\omega$) допускает разложение (4), где $y(S)$ и $z(S)$, определенные формулами (5) и (6), удовлетворяют условиям $y(S) \in s_\Omega(\lambda)$ и $z(S) \in a$ (или $y(S) \in s_\omega(\lambda)$ и $z(S) \in a_0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании очевидного неравенства

$$|\bar{\Delta} z_n(S)| \le |\nu_n||\bar{\Delta} S_n(x)| + |\bar{\Delta}\nu_n||S_{n-1}(x)|, \tag{17}$$

полученного из равенства (6), для заключения $z(S) \in a$ нам следует убедится, что

$$\sum |\nu_n||\bar{\Delta} S_n(x)| < \infty \tag{18}$$

и

$$\sum |S_{n-1}(x)||\bar{\Delta}\nu_n| < \infty. \tag{19}$$

Справедливость результата (18) вытекает из условия 1.1^0 и предположения $x \in S_\Omega$. Далее имеем $\sum |\bar{\Delta}\nu_k| < \infty$ ввиду монотонности и ограниченности последовательности (ν_n). Поэтому и ввиду $x \in S_\Omega$, следовательно и $(S_n(x)) \in m$, получаем результат (19). Если же $x \in S_\omega$, то из (6) в силу 1.1^0 и $\lim S_n(x)=0$ дополнительно заключаем, что $\lim z_n(S)=0$.

Для завершения доказательства убедимся, что $y(S) \in s_\Omega(\lambda)$ (или $y(S) \in s_\omega(\lambda)$). Исходя из равенства (13) на основании очевидного неравенства

$$|\bar{\Delta}(\lambda_n \bar{\Delta} y_n(S))| \le |\sigma_n||\bar{\Delta} S_n(x)| + |\bar{\Delta}\sigma_n||S_{n-1}(x)|, \tag{20}$$

последует заключение $y(S) \in s_\Omega(\lambda)$, лишь только

$$\sum |\sigma_n||\bar{\Delta} S_n(x)| < \infty \tag{21}$$

и

$$\sum |S_{n-1}(x)||\bar{\Delta}\sigma_n| < \infty. \tag{22}$$

Результат (21) вытекает из предположения $x \in S_\Omega$ и условия 1.2^0. Далее отметим, что

$$\sum |\bar\Delta \sigma_n| < \infty . \tag{23}$$

Действительно, поскольку

$$|\bar\Delta\sigma_n| \leq |\bar\Delta \nu_n| |\alpha_n^{-1} \bar\Delta(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1})| + |\nu_{n-1}| |\bar\Delta \frac{\bar\Delta(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1})}{\alpha_n}|, \tag{24}$$

предположено 1.1^0 и (16), то

$$\sum |\nu_{n-1}| |\bar\Delta(\alpha_n^{-1}\bar\Delta(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}))| < \infty ; \tag{25}$$

с другой стороны, монотонность последовательности (ν_n) и условие 1.1^0 приводят к заключению $\sum |\bar\Delta \nu_n| < \infty$, из которого в силу предположения (16) вытекает по теореме Дедекинда - Адамара (см. [1] , стр. 168), что

$$\sum |\bar\Delta \nu_{n-1}| |\alpha_n^{-1} \bar\Delta(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1})| < \infty . \tag{26}$$

Неравенства (25), (26) и (24) приводят к заключению (23), которое ввиду $x \in S_\Omega$ приводит к результату (22). Таким образом, $y(S) \in s_\alpha(\lambda)$.

Если же $x \in S_\omega$, то $\lim S_n(x) = 0$, и ввиду условия 1.2^0 из равенства (13) вытекает дополнительное заключение $\lim \lambda_n \bar\Delta y_n(S) = 0$, т.е. $y(S) \in S_\omega$.

Этим завершается доказательство леммы.

При $\mu_n = n+1$ и $\alpha_n = 1$ из леммы 4 вытекает

Лемма 5. Если числовая последовательность (λ_k) удовлетворяет условиям 2.1^0 и 2.2^0, последовательность (n/λ_n) монотонна и

$$\sum \bar\Delta^2 \lambda_{n+1} < \infty , \tag{27}$$

то любая последовательность $x \in R_\Omega$ (или $x \in R_\omega$) допускает разложение (7), где $y(R)$ и $z(R)$, определенные формулами (8) и (9), удовлетворяют условиям $y(R) \in s_\alpha(\lambda)$ и $z(R) \in \alpha$ (или $y(R) \in s_\omega(\lambda)$ и $z(R) \in \alpha_0$).

Изменяя условия, налагаемые на последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k), получаем следующие аналоги лемм 4 и 5.

Лемма 6. Если числовые последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям

6.1^0 $\sum |\bar\Delta \nu_n| < \infty$

и

6.2^0 $\sum |\bar\Delta \sigma_n| < \infty$,

то любая последовательность $x \in S_\Omega$ (или $x \in S_\omega$) допускает разложение (4), где $y(S)$ и $z(S)$, определенные формулами (5) и (6), удовлетворяют условиям $y(S) \in s_\Omega(\lambda)$ и $z(S) \in \alpha$ (или $y(S) \in s_\omega(\lambda)$ и $z(S) \in \alpha_0$).

Следствием леммы 6 при $\alpha_n = 1$ и $\mu_n = n+1$ является

Лемма 7. Если числовая последовательность (λ_k) удовлетворяет условиям

$$7.1^0 \quad \sum |\bar{\Delta}((n+1)\lambda_{n+1}^{-1})| < \infty$$

и

$$7.2^0 \quad \sum |\bar{\Delta}(\lambda_{n+1}^{-1}(n+1)\bar{\Delta}\lambda_{n+1})| < \infty,$$

то последовательность $x \in R_{\Omega}$ (или $x \in R_{\omega}$) допускает разложение (7), где $y(R)$ и $z(R)$, определенные формулами (8) и (9), удовлетворяют условиям $y(R) \in s_{\Omega}(\lambda)$ и $z(R) \in a$ (или $y(R) \in s_{\omega}(\lambda)$ и $z(R) \in a_0$).

Лемма 8. Если числовые последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям

$$8.1^0 \quad \sum |\bar{\Delta}(\alpha_{n+1}^{-1}\zeta_n)| < \infty$$

и

$$8.2^0 \quad \sum_n |\bar{\Delta}(\mu_n^{-1}\sum_{\nu=k}^{n}\varrho_\nu)| = O(1),$$

то любая последовательность $x \in W_{\Omega}$ (или $x \in W_{\omega}$) допускает разложение (10), где $y(W)$ и $z(W)$, определенные формулами (11) и (12), удовлетворяют условиям $y(W) \in S_{\Omega}$ и $z(W) \in a$ (или $y(W) \in S_{\omega}$ и $z(W) \in a_0$).

§3. Основные теоремы

Поскольку формулировки теорем на ослабление однотипных тауберовых условий аналогичны, мы изложим эти теоремы в нижеследующей таблице. В столбце I этой таблицы приводятся условия о методах A и B, считаемых совместными и линейными, в столбце II перечисляются условия, накладываемые на последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k), в столбце IIIприводится исходное ослабляемое B-тауберово условие для A, а в столбце IУ излагается обобщенное или ослабленное B-тауберово условие для A. Как правило, тауберово условие дано в виде принадлежности последовательности x к некоторому классу последовательностей. Наконец, в столбце У формулируется тип тауберовой теоремы.

Замечание. Из теорем 1 - 12 вытекают аналогичные 12 теорем на случай $B = E$, причем в теоремах 4 - 6 для регулярного и в теоремах 7 - 12 для абсолютно регулярного метода A.

Отметим, что при доказательстве теорем применяется либо лемма 27.1 из [1], либо ее аналогично выводимые аналоги на случай ограниченности или абсолютной суммируемости. Для удобства чтения приведем эту лемму в обобщенном виде.

Теорема	I	II	III	IУ	У
1	$A,B\in$ $\in(m,m)$	1.1^0; 1.2^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in S_0$	B_0-тауберово для A_0
2	$A,B\in$ $\in(m,m)$	2.1^0; 2.2^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in R_0$	B_0-тауберово для A_0
3	$A,B\in$ $\in(m,m)$	1.1^0; 1.2^0 3.1^0; 3.2^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in W_0$	B_0-тауберово для A_0
4	$A,B\in$ $\in(c,c)$	1.1^0; 1.2^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in S_0$	B-тауберово для A
5	$A,B\in$ $\in(c,c)$	2.1^0; 2.2^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in R_0$	B-тауберово для A
6	$A,B\in$ $\in(c,c)$	1.1^0; 1.2^0 3.1^0, 3.2^0, 3.3^0	$x\in s_0(\lambda)$	$x\in W_0$	B-тауберово для A
7	$A,B\in$ $\in(a,a)$	1.1^0; 1.2^0 (ν_n) монот. (16)	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in S_\Omega$ или $x\in S_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$
8	$A,B\in$ $\in(a,a)$	2.1^0; 2.2^0 (n/λ_n) монот. (27)	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in R_\Omega$ или $x\in R_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$
9	$A,B\in$ $\in(a,a)$	6.1^0; 6.2^0	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in S_\Omega$ или $x\in S_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$
10	$A,B\in$ $\in(a,a)$	7.1^0; 7.2^0	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in R_\Omega$ или $x\in R_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$
11	$A,B\in$ $\in(a,a)$	1.1^0; 1.2^0 (ν_n) монот. (16) 8.1^0; 8.2^0	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in W_\Omega$ или $x\in W_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$
12	$A,B\in$ $\in(a,a)$	6.1^0; 6.2^0 8.1^0; 8.2^0	$x\in s_\Omega(\lambda)$ или $x\in s_\omega(\lambda)$	$x\in W_\Omega$ или $x\in W_\omega$	$\lvert B\rvert$-тауберово для $\lvert A\rvert$

Лемма А. Пусть $B \subset A$ (или $|B| \subset |A|$ или $B_0 \subset A_0$) и A совместен с B. Если условие $x \in T_0$ является B-тауберовым для A (или $|B|$-тауберовым для $|A|$ или B_0-тауберовым для A_0), то условие $x \in T$ также B-тауберово для A (или $|B|$-тауберово для $|A|$ или B_0-тауберово для A_0), когда любой элемент $x \in T$ представим в виде

$$x = y + z, \quad y \in T_0, \quad z \in B' \text{ (или } z \in |B|' \text{ или } z \in B_0).$$

В качестве примера полной формулировки приведенных теорем сформулируем теорему 6 и приведем ее доказательство.

Теорема 6. Пусть методы A и B сохраняют сходимость, линейны и совместны. Если последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям 1.1^0, 1.2^0, 3.1^0- 3.3^0, а $x \in s_0(\lambda)$ является B-тауберовым условием для A, то $x \in W_0$ также B-тауберово для A.

Доказательство. Пусть последовательность $x \in W_0$. Поскольку предположены условия 3.1^0 - 3.3^0, то, в силу леммы 3, последовательность x допускает разложение (10), где $y(W) \in S_0$ и $z(W) \in c_0$. Так как предположено выполнение условий 1.1^0 и 1.2^0, а $y(W) \in S_0$, то последовательность $y(W)$ по лемме 1 допускает разложение (4), т.е.

$$y(W) = y(S) + z(S),$$

где $z(S) \in c_0$, а $y(S) \in s_0(\lambda)$. Таким образом, любая последовательность $x \in W_0$ разлагается в сумму

$$x = y(S) + z,$$

где $y(S) \in s_0(\lambda)$, а $z = z(S) + z(W) \in c_0 \subset B'$.

Поскольку условие $y(S) \in s_0(\lambda)$ предположено B-тауберовым для A, то, ввиду основной леммы А, условие $x \in W_0$ также B-тауберово для A. Теорема доказана.

Аналогично проводятся доказательства остальных теорем. На применяемые в доказательствах леммы указывают номера условий из столбца II, причем в доказательстве теорем 7, 8, 11 соответственно применяются леммы 4, 5 и вновь 4 с леммой 8.

Из приведенных теорем вытекают некоторые ранее известные теоремы. Так, например, теорема 4 при $B = E$ обращается в теорему 2.7 из статьи [10], теорема 5 при $\lambda_n = n$ и $B = E$ дает теорему 1.1 из статьи [11], эта же теорема при $B = E$ дает теорему 2.1 из [11]. Из теоремы 9 при $B = E$ и $\alpha_k = 1$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ вытекает следствие 5 из [2].

Следующие краткие замечания проиллюстрируют применимость теорем.

1. Применение теоремы 6 при $B = E$, $\lambda_n = \sqrt{n}$, $\alpha_n = \xi_n = \exp\sqrt{n}$ и $\mu_n = \sqrt{n+1}\exp\sqrt{n+1}$ приводит к предложению из статьи [10], в которой тауберово условие $\sqrt{n}\,u_n = o(1)$ для линейного регулярного метода A обобщается в условие

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \exp\sqrt{k} = o(\exp\sqrt{n})$$

для этого же метода.

2. Применение теоремы 10 при $B = E$ и $\lambda_n = n$ приводит к следующему предложению, которое для метода Пуассона -Абеля получено в статье [3] : если для линейного абсолютно регулярного метода A условие $nu_n = \omega(1)$ является абсолютно тауберовым, то условие $\sum_{k=0}^{\hat{n}} ku_k = \omega\,(n+1)$ также абсолютно тауберово для $|A|$.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Кангро Г., Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН ЭстССР, Физ., Матем., 1970, 19, № 1, 24-33.
3. СлIпенчук К.М., Теореми тауберового типу для абсолютноI сумовностi. ДоповIдI АН УРСР, 1961, № 11, 1405-1408.
4. Слепенчук К.М., Теоремы тауберова типа для абсолютной суммируемости методами Абеля. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 6, 135-139.
5. Сырмус Т., Один метод ослабления тауберовых о-условий в О-условия. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 596, 75-89.
6. Эдвардс Э., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
7. Hyslop, J.M., A Tauberian theorem for absolute summability. J. London Math. Soc., 1937, 12, N°3, 176-180.
8. Mears, F.M., Absolute regularity and the Nörlund mean. Ann. Math., (2), 1937, 38, 594-601.
9. Meyer-König, W., Tietz, H., On Tauberian conditions of type o. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, N°6, 926-927.
10. Meyer-König, W., Tietz, H., Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie. Arch. mat., 1969, 5, N°4, 177-186.
11. Meyer-König, W., Tietz, H., Über die Limitierungsumkehrsätze von Typ o. Studia math., 1968, 31, N°3, 205-216.

12. Pati, T., A Tauberian theorem for absolute summability. Math. Z., 1954, 61, N°1; 75-78.
13. Tietz, H., Negative resultate über Tauber-Bedingungen. Monatsh. Math., 1971, 75, N°1, 69-78.

Поступила 15.02.1979

Über die Schwächung der Tauber-Bedingungen in die Bedingungen derselben Art

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Wir betrachten lineare und verträgliche Verfahren A und B zur Summierung von Zahlenfolgen. Die Mengen der von dem Verfahren A beschränkten, gewöhnlich oder absolut limitierten Folgen werden durch A_0, A' oder $|A|'$ bezeichnet.

Ferner sei A stärker als B. Es sei T eine feste Folgenklasse. Die Bedingung $x \in T$ heisst nach Kangro die $|B|$ Tauber-Bedingung für $|A|$, wenn unter der Bedingung $x \in T$ von $|A|$-Limitierbarkeit auf $|B|$-Limitierbarkeit zurückgeschlossen wird. Gleichartig definiert man die übrige Fälle.

Im ersten Paragraphen werden verschiedene Folgenklassen eingeführt, womit wir die Tauber-Bedingungen der Form $x \in T$ in die Einrichtung führen. Diese Folgenklassen sind mittels der Formeln (1) - (3) und von den festen Zahlenfolgen bestimmt. In unserem Aufsatz sind mit den Klassen $\lambda_0(\lambda)$, $\lambda_\bullet(\lambda)$, $\lambda_\Omega(\lambda)$ und $\lambda_\omega(\lambda)$ die angegebenen Tauber-Bedingungen bezeichnet, die übrigen stehn in der Rolle der Abgeleiteten neuen (schwächeren) Tauber-Bedingungen. Die Bedingungen derselben Art sind z.B. $x \in \lambda_\bullet(\lambda)$ und $x \in W_\bullet$ usw.

Die in [5] vorgeschlagene Methode zum Ableiten neuer (schwächerer) Tauber-Bedingung aus einer gegebenen Tauber-Bedingung wird im vorliegenden Aufsatz für die Tauber-Bedingungen derselben Art angewandt. Dabei werden die Fälle der A-Beschränktheit, A-Summierbarkeit, und A-absoluten Summierbarkeit untersucht. Mit den Hilfssätzen aus dem § 2 und einem Hilfsatz von Baron([1], s.229), beweist man leicht zwölf allgemeine Sätze in unsere Tabelle. Für den Fall $B=E$ sind leicht noch zwölf analogische Sätze formulierbar. Es wird auf die von Sätzen 1-12 als Sonderfälle hervorgehenden Resultate hingewiesen, ebenfalls werden einige Beispiele gebracht.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ТИПА БОАСА-КАНГРО

И.Таммерайд

Таллинский политехнический институт

Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей, $\lambda=\{\lambda_n\}$ и $\mu=\{\mu_n\}$ — последовательности положительных чисел. Пусть $x=\{\xi_n\}$ — сходящаяся последовательность с $\xi=\lim \xi_n$ и $\beta_n=\lambda_n(\xi_n-\xi)$. Обозначим

$$m^\lambda=\{x:\ \beta_n=O(1)\},\quad n^\lambda=\{x:\ \beta_n=o(1)\},$$

$$m_A^\lambda=\{x:\ Ax\in m^\lambda\},\quad n_A^\lambda=\{x:\ Ax\in n^\lambda\},$$

$$K=\{\lambda:\ \lambda_{[cn]}=O(\lambda_n)\ \ (n=0,1,2,\ldots;\ 1/2\leqslant c\leqslant 2)\},$$

$$L=\{\lambda:\ \lambda_n\nearrow\infty,\ \lambda_n\sum_{k=0}^{n}1/((n+1)\lambda_k)=O(1)\}.$$

Кангро [I] доказал для метода арифметических средних C, что при $\lambda\in L$ из условия

$$x\in m_C^\lambda \tag{I}$$

и из одностороннего тауберова условия, например, из правостороннего тауберова условия

$$\tau_n(n+1)\bar\Delta\xi_n=O_R(1) \tag{2}$$

при дополнительных условиях

$$1\leqslant\lambda_n/\tau_n\nearrow,\quad \lambda_n\tau_n\nearrow,\quad \mu_n=(\lambda_n\tau_n)^{\frac{1}{2}}$$

следует

$$x\in m^\mu. \tag{3}$$

Теорема Кангро является обобщением тауберовых теорем Боаса [2]. Боас доказал, что из условий

$$x\in n_C^\lambda \tag{4}$$

с $\lambda_n=(n+1)^\varepsilon$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$ и (2) с $\tau_n=(n+1)^{-\varepsilon}$ следует (3) с $\mu_n=1$ или из условий (I) с $\lambda_n=(n+1)^\varepsilon$ $(0<\varepsilon\leqslant1)$ и

$$\tau_n(n+1)\bar\Delta\xi_n=o_R(1) \tag{5}$$

с $\tau_n=(n+1)^{-\varepsilon}$ следует (3) с $\mu_n=1$.

Результат Кангро справедлив только при довольно медленно сходящихся последовательностях, а именно из условия $\lambda\in L$ следует $\lambda_n=o(n+1)$. Целью этой заметки является изучение аналога теоремы Кангро при $\lambda_n=O((n+1)^\alpha)$ с $0<\alpha<\infty$, т.е. при последовательностях λ показательного типа.

Лемма (см. [2]). Пусть $\varphi, \psi \in K$ и $\{a_n\}$ — последовательность чисел.

I. Если
$$a_n = O(\varphi_n), \quad \bar\Delta^2 a_n = O_R(\psi_n), \quad \varphi_n = O((n+1)^2 \psi_n),$$
то
$$\bar\Delta a_n = O((\varphi_n \psi_n)^{\frac{1}{2}}).$$

II. Если
$$a_n = o(\varphi_n), \quad \bar\Delta^2 a_n = O_R(\psi_n), \quad \varphi_n = O((n+1)^2 \psi_n),$$
то
$$\bar\Delta a_n = o((\varphi_n \psi_n)^{\frac{1}{2}}).$$

III. Если
$$a_n = O(\varphi_n), \quad \bar\Delta^2 a_n = o_R(\psi_n), \quad \varphi_n = o((n+1)^2 \psi_n),$$
то
$$\bar\Delta a_n = o((\varphi_n \psi_n)^{\frac{1}{2}}).$$

Теорема I. Пусть $\lambda, \tau \in K$ и $\mu_n = (\lambda_n \tau_n)^{\frac{1}{2}}$.

I. Из условий (I), (2) и
$$\tau_n = O(\lambda_n) \tag{6}$$
следует условие (3).

II. Из условий (2), (4) и (6) следует условие
$$x \in h^{\mu}. \tag{7}$$

III. Из условий (I), (5) и
$$\tau_n = o(\lambda_n) \tag{8}$$
следует условие (7).

Доказательство теоремы следует из леммы, если выбрать
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k - (n+1)\xi, \tag{9}$$

$$\varphi_n = (n+1)/\lambda_n, \tag{I0}$$

$$\psi_n = 1/((n+1)\tau_n). \tag{II}$$

Действительно, докажем, например, утверждение I. В силу выбора (9), имеем при $n \geqslant 1$
$$\bar\Delta a_n = a_n - a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \xi_k - (n+1)\xi - \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k + n\xi = \xi_n - \xi$$
и
$$\bar\Delta^2 a_n = \bar\Delta a_n - \bar\Delta a_{n-1} = \xi_n - \xi - \xi_{n-1} + \xi = \xi_n - \xi_{n-1} = \bar\Delta \xi_n .$$
Принимая во внимание выборы (I0) и (II) и условия (I),(2) и (6), получаем, что

$$a_n=(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}\xi_k/(n+1)-\xi\right)=(n+1)\mathcal{O}(1/\lambda_n)=$$
$$=\mathcal{O}((n+1)/\lambda_n)=\mathcal{O}(\varphi_n),$$
$$\bar\Delta^2 a_n=\bar\Delta\xi_n=\tau_n(n+1)\bar\Delta\xi_n/(\tau_n(n+1))=\mathcal{O}(\psi_n)$$
и
$$\varphi_n=(n+1)/\lambda_n=(n+1)^2/(\lambda_n(n+1))=(n+1)^2\psi_n.$$
Из условий $\lambda,\tau\in K$ следуют условия $\varphi,\psi\in K$ и выполнены все условия части I леммы. Следовательно, по лемме имеем
$$(\varphi_n\psi_n)^{-\frac{1}{2}}\bar\Delta a_n=(\lambda_n\tau_n)^{\frac{1}{2}}(\xi_n-\xi)=\mu_n(\xi_n-\xi)=\mathcal{O}(1),$$
т.е. справедливо утверждение I теоремы I.

Аналогично можно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\lambda,\tau\in K$, $\mu_n=(\lambda_n\tau_n)^{\frac{1}{2}}$, σ_n^m — чезаровские средние порядка m и
$$F(\lambda,x,m,n)=\lambda_n\sum_{\nu=0}^{n}(\nu\bar\Delta\sigma_\nu^{m+1}+(m+1)(\sigma_\nu^{m+1}-\xi)).$$

I. Из условий
$$(n+1)\tau_n\bar\Delta\sigma_n^m=\mathcal{O}_R(1),\tag{I2}$$
$$F(\lambda,x,m,n)=\mathcal{O}(n+1)\tag{I3}$$
и (6) следует условие
$$x\in m^{\mu}_{C^m}.\tag{I4}$$

II. Из условий (6), (I2) и
$$F(\lambda,x,m,n)=o(n+1)$$
следует условие
$$x\in n^{\mu}_{C^m}.\tag{I5}$$

III. Из условий (8), (I3) и
$$(n+1)\tau_n\bar\Delta\sigma_n^m=o_R(1)$$
следует условие (I5).

Литература

I, Кангро Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1973, 305, 156-166.

2. Boas, R.P., Tauberian theorems for (C,1) summability. Math. J., 1938, 4, 227-230.

Поступило 30 05 1983

Boas-Kangro Tauberian remainder theorems

I. Tammeraid

Summary

A convergent sequence $x=\{\xi_n\}$ is called bounded with the rapidity $\lambda=\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n>0)$ if

$$\lambda_n(\xi_n-\xi)=O(1) \qquad (\xi=\lim \xi_n).$$

A sequence x is called λ-bounded by a matrix method A if the sequence Ax is λ-bounded. Tauberian conditions (2) and (5) are found to deduce μ-boundedness from λ-summability for C^1 method of summability (theorem 1). The analogous problem is solved for C^m method of summability (theorem 2).

ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ II

Э.Реймерс

§I. Введение

Пусть[I] $A=(a_{nk})$ - треугольная числовая матрица, $x=(x_k)$ - числовая последовательность и пусть $y=(y_n)$ A-преобразованная последовательность, где

$$y_n=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}x_k .$$

Последовательность x называется суммируемой методом A к сумме $A(x)$, если

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = A(x)\neq\infty,$$

и пишут $x\in cA$. При этом cA называют полем суммируемости метода A.

Пусть c - множество всех сходящихся последовательностей. Метод A называют регулярным, если $c\subseteq cA$ и $A(x)=\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ при всех $x\in c$. Во всей статье будем предполагать, что метод A регулярен.

Для последовательности $x=(x_k)$, где $x_k\neq 0$, обозначим

$$u_{k+1}=x_{k+1}-x_k ,$$

$$v_{k+1}=\frac{1}{x_{k+1}}-\frac{1}{x_k}=\frac{u_{k+1}}{x_{k+1}x_k},$$

Пусть

$$e=(1,1,\ldots,1,\ldots).$$

Последовательности x и y называются эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=1,$$

и пишут $x\sim y$.

Пусть числа $c_k(x)\neq 0$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{c_k(x)}\sum_{i=0}^{k}a_{ni}x_i\right|=O(1). \qquad (\text{I.I})$$

В статье [2] доказана следующая теорема, дающая достаточное условие для эквивалентности последовательностей x и y.

Теорема A [2, теорема 2.I]. Если числа $c_k(x)$ опреде-

[I] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют значения 0,I.2,...

лены условием (I.I), то

$$c_k(x)\,\upsilon_{k+1}=o(1)\Rightarrow x\sim y.$$

Сложное условие (I.I) можно заменить более простыми. В статье [2] показано, что условие (I.I) выполнено, если

$$\left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ni}x_i}{a_{nk}}\right|\leq M|c_k(x)|, \qquad (I.2)$$

где предполагается, что $a_{nk}\neq 0$ и M – постоянная. Условие (I.2) будет выполнено для

$$c_k(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ni}x_i}{a_{nk}}, \qquad (I.3)$$

если правая сторона при каждом k возрастает монотонно, когда $n\to\infty$, или при

$$c_k(x)=\sup_{n\geq k}\left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ni}x_i}{a_{nk}}\right|. \qquad (I.4)$$

Поэтому из теоремы A вытекает следующая

Теорема B [2, теорема 2.2]. Если числа $c_k(x)$ определены условием (I.2),(I.3) или (I.4), то

$$c_k(x)\,\upsilon_{k+1}=o(1)\Rightarrow x\sim y.$$

Теорема C [2, теорема 2.3]. Если числа $c_k(x)$ определены условием(I.I),(I.2),(I.3) или (I.4) и $|x_k|\geq\varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon>0$, то

$$c_k(x)\,u_{k+1}=o(1)\Rightarrow x\sim y.$$

В статье [2] показано, что числа $c_k(x)$, определенные условием (I.3), удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$c_{k+1}(x)=c_k(x)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{nk}}{a_{nk+1}}+x_{k+1}. \qquad (I.5)$$

В частности, если $x\in cA$, то $y\in c$ и из этих теорем эквивалентности вытекают следующие теоремы тауберова типа.

Теорема D [2, теорема 4.I]. Пусть $c_k(x)$ определены условием (I.I). Если $c_k(x)\upsilon_{k+1}=o(1)$, то $x\in cA\Rightarrow x\in c$.

Теорема E [2, теорема 4.2]. Пусть числа $c_k(x)$ определены условием (I.2) или (I.3). Если $c_k(x)\upsilon_{k+1}=o(1)$, то $x\in cA\Rightarrow x\in c$.

Теорема F [2, теорема 4.3]. Пусть числа $c_k(x)$ определены условием (I.I),(I.2) или (I.3) и $|x_k|\geq\varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon>0$. Если $c_k(x)u_{k+1}=o(1)$, то $x\in cA\Rightarrow x\in c$.

В настоящей статье мы рассмотрим эти теоремы в случае методов суммирования Чезаро и взвешенных средних Рисса и сравним результаты с имеющимися результатами тауберова типа для этих методов.

§ 2. Случай $A=(C,\alpha)$

Метод Чезаро (C,α) определяется [I] матрицей $A=(a_{nk})$ с элементами

$$a_{nk}=\frac{A^{\alpha-1}_{n-k}}{A^{\alpha}_{n}}$$

где

$$A^{\alpha}_{0}=1,\quad A^{0}_{n}=1,$$

$$A^{\alpha}_{n}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Следовательно, последовательности x и y будут связаны равенством

$$y_n=C^{\alpha}_{n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^{\alpha-1}_{n-k}}{A^{\alpha}_{n}}x_k. \tag{2.I}$$

При $\alpha\geqslant 0$ метод (C,α) регулярен [I].

Если $\alpha=1$, то метод (C,α) превращается в метод арифметических средних $(C,1)$. Тогда преобразование (2.I) будет иметь вид

$$y_n=C^{1}_{n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}x_k. \tag{2.2}$$

Имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A^{\alpha}_{n+m}}{A^{\alpha}_{n}}=1, \tag{2.3}$$

если $\alpha>-1$, так как тогда можно написать

$$\frac{A^{\alpha}_{n+m}}{A^{\alpha}_{n}}=\frac{(n+m+\alpha)\ldots(n+1+\alpha)}{(n+m)\ldots(n+1)}=$$

$$=\left(1+\frac{\alpha}{n+m}\right)\ldots\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Отсюда также видно, что если $n\to\infty$

$$\frac{A^{\alpha}_{n+m}}{A^{\alpha}_{n}}\begin{cases}\nearrow & \text{при } -1<\alpha<0,\\ \searrow & \text{при } \alpha>0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Найдем числа $c_k(x)$ для метода (C,α) по формуле (I.3). Учитывая равенство (2.3), мы получим, взяв $n-k=m$, что при любом $\alpha>0$

$$c_k(x)=\sum_{i=0}^{k}x_i\lim_{n\to\infty}\frac{A^{\alpha-1}_{n-i}}{A^{\alpha-1}_{n-k}}=$$

$$= \sum_{i=0}^{k} x_i \lim_{m\to\infty} \frac{A_{m+(k-i)}^{\alpha-1}}{A_m^{\alpha-1}} = \sum_{i=0}^{k} x_i .$$

Но в условии (I.3) правая сторона должна монотонно возрастать, поэтому, согласно формуле (2.4), нужно взять $0<\alpha\leq 1$.

Итак, для метода Чезаро (C,α) мы имеем при $0<\alpha\leq 1$, что

$$c_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i . \tag{2.5}$$

или, учитывая (2.2),

$$c_k(x) = (k+1)\, C_k^1(x) . \tag{2.6}$$

Если $x_k>0$, то по формуле (I.4) получим

$$c_k(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} x_i, & \text{если } 0<\alpha\leq 1, \\ \sum\limits_{i=0}^{k} A_{k-i}^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha\geqslant 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

или

$$c_k(x) = \begin{cases} (k+1)\, C_k^1(x), & \text{если } 0<\alpha\leq 1, \\ A_k^{\alpha}\, C_k^{\alpha}(x), & \text{если } \alpha\geqslant 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Видим, что при $0<\alpha\leq 1$ формулы (I.3) и (I.4) дают один и тот же результат.

Из теорем А – С мы теперь получим следующие теоремы эквивалентности для метода (C,α).

Пусть последовательность y определена равенством (2.I) и числа $c_k(x)$ определены формулой (2.5) или (2.7). Из теоремы В тогда получается

Теорема 2.I. Если $0<\alpha\leq 1$, то

$$v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1) \Rightarrow x\sim y .$$

Из теоремы С получается

Теорема 2.2. Если $0<\alpha\leq 1$ и $|x_k|\geqslant\varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon>0$, то

$$u_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1) \Rightarrow x\sim y .$$

Если, в частности, $x\in c(C,\alpha)$, то последовательность $y\in c$ и из теоремы Е (или из теоремы 2.I) получается следующая тауберова теорема для метода (C,α).

Теорема 2.3. Пусть $0<\alpha\leq 1$. Если

$$v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1),$$

то

$$x\in c(C,\alpha) \Rightarrow x\in c .$$

Из теоремы F (или теоремы 2.2) получается

Теорема 2.4. Пусть $0<\alpha\le 1$ и $|x_k|\geqslant\varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon>0$. Если

$$u_{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1), \tag{2.9}$$

то

$$x\in c(C,\alpha) \Longrightarrow x\in c. \tag{2.10}$$

Теоремы 2.1,2.2,2.3 и 2.4 опубликованы в тезисах [3].

Известный частный случай классического результата [4, теорема 63], что при $0<\alpha\le 1$ для (2.10) достаточно выполнения условия

$$(k+1)u_{k+1} = o(1), \tag{2.11}$$

будет частным случаем теоремы 2.4. Действительно, если(2.11) выполнено, то ввиду известного равенства

$$x_n = C_n^1(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}(k+1)u_{k+1}$$

будет $x_k = O(1)$. Поэтому мы можем выбрать постоянную M такую, что $x_k+M\geqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – какое-нибудь число. Последовательность (x_k+M) также суммируется методом (C,α) к сумме $C(x+Me)$. Условие (2.9) для последовательности (x_k+M) выполнено, так как ввиду (2.6) мы имеем

$$u_{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}(x_\nu+M) = (k+1)u_{k+1}C_k^1(x+Me) =$$
$$= (k+1)u_{k+1}O(1) = o(1).$$

по условию (2.11). Следовательно, по теореме 2.4 последовательность (x_k+M) сходится. Тогда сходится и последовательность (x_k).

§ 3. Случай $A=(R,p_n)$

Метод взвешенных средних Рисса (R,p_n) определяется [I] матрицей $A=(a_{nk})$ с элементами

$$a_{nk} = \frac{p_k}{P_n},$$

где последовательность (p_n) задана и

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0.$$

Следовательно, последовательности x и y будут связаны равенством

$$y_n = R_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{P_n}x_k. \tag{3.1}$$

Метод (R,p_n) регулярен тогда и только тогда, когда

1^0 $\lim_{n\to\infty}|P_n| = \infty$

$$2^0 \quad \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{p_k}{P_n} \right| = O(1).$$

Ниже во всех теоремах предполагается, что метод (R, p_n) регулярен.

Найдем величину $c_k(x)$ для метода (R, p_n) по формуле (I.3). Мы получим

$$c_k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k},$$

т.е.

$$c_k(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} \tag{3.2}$$

или, учитывая (3.I),

$$c_k(x) = \frac{P_k}{p_k} R_k(x). \tag{3.3}$$

Формула (I.4) дает такой же результат, если $x_k > 0$ и $p_k > 0$.

Из теорем A – C мы теперь получим следующие теоремы эквивалентности для метода (R, p_n).

Пусть последовательность y определена (3.I) и числа $c_k(x)$ определены формулой (3.2) или (3.3). Из теоремы B тогда получается

Теорема 3.I.

$$v_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1) \Longrightarrow x \sim y. \tag{3.4}$$

Условие (3.4), учитывая (3.3), можно и так записать

$$\frac{P_k}{p_k} v_{k+1} R_k(x) = o(1) \Longrightarrow x \sim y. \tag{3.5}$$

Из теоремы C получается

Теорема 3.2. Если $|x_k| \geqslant \varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$, то

$$u_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1) \Longrightarrow x \sim y. \tag{3.6}$$

Условие (3.6) ввиду (3.I) можно записать в виде

$$\frac{P_k}{p_k} u_{k+1} R_k(x) = o(1) \Longrightarrow x \sim y. \tag{3.7}$$

Если, в частности, $x \in c(R, p_n)$, то последовательность $y \in c$ и из теоремы E (или из теоремы 3.I) получается следующая тауберова теорема для метода (R, p_n).

Теорема 3.3. Если

$$v_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1), \tag{3.8}$$

то

$$x \in c(R, p_n) \Rightarrow x \in c.$$

Из теоремы F (или теоремы 3.2) получается

Теорема 3.4. Если $|x_k| \geq \varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$ и

$$u_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1), \tag{3.9}$$

то

$$x \in c(R, p_n) \Rightarrow x \in c. \tag{3.10}$$

Известный частный случай классического результата, что для (3.10) достаточно выполнения условия

$$\frac{P_k}{p_k} u_{k+1} = o(1),$$

будет частным случаем теоремы 3.4. Это доказывается аналогично случаю метода (C, α) в § 2.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Реймерс Э., Проблема эквивалентности последовательностей и тауберовы теоремы. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 596, 15-23.
3. Реймерс Э., Тауберовы коэффициенты, зависящие от последовательности, для метода Чезаро. В сборнике "350 лет математики в Тартуском университете (тезисы докладов)", Тарту, 1982, 17-19.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Тартуский государственный университет

Поступило 11.04.1983

The problem of equivalence of sequences and Tauberian theorems II

E. Reimers

Summary

§ 1. Introduction

Let $A = (a_{nk})$ be a tringular numerical matrix, $x = (x_k)$ be a numerical sequence and let $y = (y_n)$ be the A-transform of the sequence x where

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k.$$

The sequence x is said to be summable by the method A to the sum $A(x)$ if

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = A(x) \neq \infty$$

and we write $x \in cA$. The set cA is called the summability field of the method A.

Let c be the set of all convergent sequences. The method A is called regular if $c \subseteq cA$ and $A(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ for all $x \in c$.

In the whole article we assume that the method A is regular.

For the sequence $x = (x_k)$, where $x_k \neq 0$, we denote

$$u_{k+1} = x_{k+1} - x_k$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}.$$

The sequences x and y are called equivalent that is $x \sim y$ if

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1.$$

Let numbers $c_k(x)$ satisfy the condition

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \right| = O(1). \tag{1.1}$$

Theorem A [2, Theorem 2.1]. If numbers $c_k(x)$ satisfy the condition (1.1), then

$$c_k(x)\, v_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

The condition (1.1) may be substituted by more simple ones. In [2] it is shown that the condition (1.1) is satisfied if

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i}{a_{nk}} \right| \leq M |c_k(x)| \tag{1.2}$$

where it is assumed that $a_{nk} \neq 0$ and M is some constant.

In turn, the condition (1.2) is satisfied for

$$c_k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i}{a_{nk}}, \tag{1.3}$$

if the right sight increases monotonically for every k when $n \to \infty$ or for

$$c_k(x) = \sup_{n \geq k} \left| \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i}{a_{nk}} \right|. \tag{1.4}$$

Therefore Theorem A implies the following:

Theorem B [2, Theorem 2.2]. If $c_k(x)$ satisfy (1.2), (1.3) or (1.4), then

$$c_k(x)\, v_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

Theorem C [2, Theorem 2.3]. If $c_k(x)$ satisfy (1.1), (1.2), (1.3) or (1.4) and $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$, then

$$c_k(x)u_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

In particular, if $x \in cA$, then $y \in c$ and these equivalence theorems imply the following Tauberian results.

Theorem D [2, Theorem 4.1]. Let $c_k(x)$ satisfy (1.1). If $c_k(x) v_{k+1} = o(1)$, then $x \in cA \Rightarrow x \in c$.

Theorem E [2, Theorem 4.2]. Let $c_k(x)$ satisfy (1.2) or (1.3). If $c_k(x) v_{k+1} = o(1)$, then $x \in cA \Rightarrow x \in c$.

Theorem F [2, Theorem 4.3]. Let $c_k(x_k)$ satisfy (1.1), (1.2) or (1.3) and let $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$. If $c_k(x)u_{k+1} = o(1)$, then $x \in cA \Rightarrow x \in c$.

In the present article we examine these theorems in the case of Cesàro and Riesz summability methods and compare the results with known Tauberian results concerning these methods of summability.

§ 2. The case $A = (C, \alpha)$

The Cesaro method (C, α) is defined [1] by the matrix $A = (a_{nk})$ with the elements

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}$$

where

$$A_0^{\alpha} = 1, \quad A_n^0 = 1,$$

$$A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Therefore, the sequences x and y are connected by the relation

$$y_n = C_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} x_k. \qquad (2.1)$$

For $\alpha \geq 0$ the method (C, α) is regular [1].

Let the numbers $c_k(x)$ for the method (C, α) be defined by the formula (1.3). Taking into account the equality (2.3), we get for all $\alpha > 0$

$$c_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i \lim_{n \to \infty} \frac{A_{n-i}^{\alpha-1}}{A_{n-k}^{\alpha-1}} = \sum_{i=0}^{k} x_i.$$

But in (1.3) the right sight must monotonically encrease, therefore, in accordance with (2.4), it is necessary to take $0 < \alpha \leq 1$. Thus, we have for the method (C, α) when $0 < \alpha \leq 1$ that

$$c_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i \qquad (2.5)$$

or

$$C_k(x) = (k+1)\, C_k^1(x). \tag{2.6}$$

For $0 < \alpha \leq 1$ the formula (1.4) gives the same result.

Hence Theorems A, B and C imply the following equivalence theorems for the method (C, α):

Theorem 2.1. If $0 < \alpha \leq 1$, then

$$v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

Theorem 2.2. If $0 < \alpha \leq 1$ and $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$, then

$$u_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

In particular, if $x \in c(C, \alpha)$, then $y \in c$ and the following Tauberian theorems for the method (C, α) results from Theorems 2.1 and 2.2 (or Theorems E and F):

Theorem 2.3. Let $0 < \alpha \leq 1$. If

$$v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1),$$

then

$$x \in c(C, \alpha) \Rightarrow x \in c.$$

Theorem 2.4. Let $0 < \alpha \leq 1$ and $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$. If

$$u_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu = o(1), \tag{2.9}$$

then

$$x \in c(C, \alpha) \Rightarrow x \in c. \tag{2.10}$$

The known special case of the classical result, that the condition

$$(k+1)\, u_{k+1} = o(1)$$

is sufficient for (2.10), is a special case of Theorem 2.4.

§ 3. The case $A = (R, p_n)$

The Riesz weighted means method (R, p_n) is defined [1] by the matrix $A = (a_{nk})$ with the elements

$$a_{nk} = \frac{p_k}{P_n},$$

where the sequence (p_n) is given and

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0.$$

Hence the sequences x and y are connected by the relation

$$y_n = R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{P_n} x_k. \tag{3.1}$$

Method $(\mathcal{R}, p_n)$ is regular [1] if and only if

1° $\lim_{n\to\infty} |P_n| = \infty$,

2° $\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{p_k}{P_n} \right| = O(1)$.

Below in the theorems it is assumed that $(\mathcal{R}, p_n)$ is regular.

Let the numbers $c_k(x)$ for the method $(\mathcal{R}, p_n)$ be defined by the formula (1.3), then

$$c_k(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} \tag{3.2}$$

or

$$c_k(x) = \frac{P_k}{p_k} \mathcal{R}_k(x). \tag{3.3}$$

The formula (1.4) gives the same result, if $x_k > 0$ and $p_k > 0$.

Hence Theorems A, B and C imply the following equivalence theorems for the method $(\mathcal{R}, p_n)$:

<u>Theorem 3.1.</u>

$$v_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1) \Rightarrow x \sim y. \tag{3.4}$$

The condition (3.4), taking into account (3.3), may be written in the form

$$\frac{P_k}{p_k} v_{k+1} \mathcal{R}_k(x) = o(1) \Rightarrow x \sim y. \tag{3.5}$$

<u>Theorem 3.2.</u> If $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$, then

$$u_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1) \Rightarrow x \sim y. \tag{3.6}$$

The condition (3.6) in view of (3.1) may also be written in the form

$$\frac{P_k}{p_k} u_{k+1} \mathcal{R}_k(x) = o(1) \Rightarrow x \sim y. \tag{3.7}$$

In particular, if $x \in c(\mathcal{R}, p_n)$, then $y \in c$ and the following Tauberian theorems for the method $(\mathcal{R}, p_n)$ results from Theorems 3.1 and 3.2 (or Theorems E and F).

<u>Theorem 3.3.</u> If

$$v_{k+1} \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1), \tag{3.8}$$

then

$$x \in c(\mathcal{R}, p_n) \Rightarrow x \in c.$$

<u>Theorem 3.4.</u> If $|x_k| \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$ and

$$u_{k+1}\frac{\sum_{i=0}^{k} p_i x_i}{p_k} = o(1), \tag{3.9}$$

then

$$x \in c(R, p_n) \Longrightarrow x \in c. \tag{3.10}$$

The known special case of the classical result, that the condition

$$\frac{P_k}{p_k} u_{k+1} = o(1)$$

is sufficient for (3.10), is a special case of Theorem 3.4.

О ЯДРЕ СРЕДНИХ БОРЕЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.Лотоцкий

Тернопольский педагогический институт

Пусть $\{S_n\}$ - последовательность комплексных чисел. Функция

$$B(x) = \exp(-x) \cdot \sum_{0}^{\infty} S_k \frac{x^k}{k!}, \quad 0 \le x < \infty, \qquad (1)$$

называется экспоненциальными средними Бореля [1,стр.10] этой последовательности, при условии, что ряд (1) сходится для всех $x \in [0;+\infty)$. Легко убедиться, что последнее будет выполнено в том случае, когда последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет следующему ограничению

$$S_n = O(\exp C n^{2\beta}), \quad n \to \infty, \qquad (2)$$

где $C > 0$ - некоторая константа, а $\beta \le 0,5$, причем если в условии (2) β взять большим $0,5$, то к такой последовательности преобразование (1) уже не применимо.

В работе [2] установлены достаточные условия совпадения ядер [3,стр.77] неограниченной последовательности, удовлетворяющей условию (2), когда $\beta < 0,5$ и ее средних Бореля (1). В настоящем сообщении исследуется этот вопрос для класса последовательностей, рост которых ограничивается условием (2), когда $\beta = 0,5$. Как оказалось, достаточные условия в этом случае не получаются из соответствующих условий работы [2], если там положить $\beta = 0,5$.

Пусть $C > 0$ - произвольная константа и γ_C - положительный корень уравнения

$$(1-x) \cdot \exp(C+x) = 1.$$

Очевидно, что γ_C всегда существует для любого $C > 0$, причем с помощью элементарных рассуждений легко можно убедиться, что для произвольного $x > \gamma_c$ справедливо неравенство $(1-x)\cdot exp(c+x) < 1$ и $(1-x)\cdot exp(c+x) > 1$ всякий раз, когда $0 < x < \gamma_c$. Аналогично, если δ_c - положительный корень уравнения $(1+x)\cdot exp(c-x) = 1$, то $(1+x)\cdot exp(c-x) < 1$ для всех $x > \delta_c$ и $(1+x) exp(c-x) > 1$, когда $0 < x < \delta_c$. Отметим, что с ростом C числа γ_c и δ_c тоже увеличиваются, причем всегда $\gamma_c < 1$.

Рассмотрим теперь класс комплексных последовательностей $\{S_n\}$, удовлетворяющих условию

$$S_n = O(exp\, Cn),\ n \to \infty,\ C > 0. \qquad (3)$$

Для последовательностей из этого класса справедливы следующие утверждения.

Теорема I. Пусть z_0 - конечный частичный предел последовательности $\{S_n\}$, обладающий следующим свойством: для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$|S_n - z_0| \le \varepsilon, \text{ когда } n_k \le n \le m_k < n_{k+1}, \text{ причем}$$

$$m_k \cdot n_k^{-1} \geq a > exp(\gamma_c + \delta_c),\ k > k_0(\varepsilon). \qquad (4)$$

Тогда $z_0 \in K_B(S)$, где $K_B(S)$ ядро средних (1) последовательности $\{S_n\}$.

Теорема 2. Пусть для последовательности $\{S_n\}$ существуют последовательность замкнутых выпуклых множеств $\{G_k\}$ ($\rho(0; G_k) \to +\infty$) и последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ такие, что $S_n \in G_k$, когда $n_k \le n \le m_k < n_{k+1}$, причем для чисел n_k и m_k справедливо соотношение (4). Тогда существует последовательность действительных чисел $\{x_k\}$, $x_k \nearrow +\infty$, для которой $B(x_k) \in G_k(\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ (здесь

$G'_k(\varepsilon)$ - множество, содержащее в себе множество G_k, граница которого отстоит от G'_k не более чем на ε).

В связи с этими теоремами возникает вопрос: насколько точна константа $\exp(\gamma_c+\delta_c)$ в условии (4) ? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 3. Для любых $C>0$ и $a_1\in(1;\exp(\gamma_c+\delta_c))$ существуют последовательность $\{S_n\}$, удовлетворяющая условию (3) и точка z_0 такие, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ для которых $|S_n-z_0|\le\varepsilon$, когда $n_k\le n\le m_k<n_{k+1}$, причем

$$m_k\cdot n_k^{-1}\le a_1<\exp(\gamma_c+\delta_c),\quad k>k_0(\varepsilon)$$

и z_0 не принадлежит ядру $R_B(S)$ средних (1) этой последовательности.

Таким образом, константу $\exp(\gamma_c+\delta_c)$ в условии (4) теоремы I уменьшить нельзя.

Отметим в качестве следствия из теорем I и 2 следующую тауберову теорему о колебаниях для рассматриваемого нами метода суммирования Бореля.

Теорема 4. Пусть дан ряд с действительными членами $\sum\limits_0^\infty a_n$, последовательность $\{S_n\}$ частных сумм которого удовлетворяет условию (3) . Если $a_n=0$, для $n\neq n_k$, причем $n_{k+1}\cdot n_k^{-1}\geq a>\exp(\gamma_c+\delta_c)$, $k>k_0$ то

$$\varliminf_{x\to+\infty} B(x)=\varliminf_{n\to\infty} S_n \quad\text{и}\quad \varlimsup_{x\to+\infty} B(x)=\varlimsup_{n\to\infty} S_n .$$

Здесь, как и выше, константа $\exp(\gamma_c+\delta_c)$ точная.

Желая перенести теорему 4 на случай комплексных последовательностей, рассмотрим класс $T_1(S)$ комплексных последовательностей, удовлетворяющих следующим условиям.

а/. Последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условию (3) .

б/. Ее ядро $R(S)$ отлично от всей плоскости и от полуплоскости.

в/. Последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

г/. Для произвольного $\varepsilon>0$ справедливы включения $G_{k_i} \subset H_1(S;\varepsilon)$ и $G_{n_i} \subset H_2(S;\varepsilon)$, где $\{G_{k_i}\}$ и $\{G_{n_i}\}$ - подпоследовательности последовательности $\{G_k\}$ из теоремы 2, а $H_1(S;\varepsilon)$ и $H_2(S;\varepsilon)$ - криволинейные полуполосы, получающиеся из бесконечной криволинейной полосы шириной ε, средней линией которой является граница ядра $\mathcal{R}(S)$, если разрезать ее вдоль отрезка минимальной длины с концами на разных краях полосы, проходящего через любую конечную фиксированную точку границы ядра $\mathcal{R}(S)$.

Очевидно, класс $\mathcal{T}_1(S)$ не пуст и для него справедливо такое утверждение.

Теорема 5. Пусть последовательность $\{S_n\}$ принадлежит классу $\mathcal{T}_1(S)$. Если каждая крайняя точка [4,стр.85] ядра $\mathcal{R}(S)$ последовательности $\{S_n\}$ обладает свойством точки z_0 теоремы I, то

$$\mathcal{R}_B(S) = \mathcal{R}(S).$$

Литература

I. Кангро Г., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. "Мат. анализ. Т. I2. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР". Москва, I974, 5 - 70.

2. Лотоцкий В., О ядрах средних Бореля для неограниченных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I98I, 504, 99 - I04.

3. Харди Г.,Расходящиеся ряды. Москва, I95I.

4. Рудин У., Функциональный анализ. Москва, I975.

Поступило 28.05.I983

On a core of the Borel means for one class of unbounded sequences

V.Lototsky

Summary

Sufficient conditions are given for the elements of one class of unbounded sequences to provide the coincidence of its core with the core of the Borel means. It is proved that these conditions are precise. Some Tauberian theorems on the oscillation for the Borel method are also proved.

О (ℓ^p, ℓ^q)-СУММИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Паллас

Таллинский политехнический институт

I. Пусть M — пространство всех измеримых по Лебегу конечных почти всюду на $e=[a,b]$ функций. Через ℓ^p_+ обозначим множество рядов $\{\lambda=(\lambda_k)\in \ell^p:\ \lambda_k\geq 0,\ k=0,1,2,\dots\}$. Ряд[I]

$$\sum \xi_k(t) \qquad (I)$$

где $\xi_k\in M$, $k=0,1,2,\dots$ будем называть абсолютно p-сходящимся $(0<p<\infty)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\lambda\in\ell^p_+$ такая, что

$$\inf_{\alpha>0}(\alpha+\mu\{t:|\xi_k(t)|>\lambda_k\alpha\})<\varepsilon,\quad k=0,1,2,\dots .$$

Введем следующие обозначения. Через $C^0(M)$ обозначим пространство всех сходящихся к нулю по мере последовательностей и через $\ell^p(M)$ $(0<p<\infty)$ — пространство всех абсолютно p-сходящихся рядов. Если $p=1$, то вместо абсолютной 1-сходимости будем говорить об абсолютной сходимости и пространство всех абсолютно сходящихся рядов будем обозначать через $\ell(M)$.

Далее, пусть $A=(a_{nk})$ — бесконечная числовая матрица. Рассмотрим преобразование

$$\eta_n(t)=\sum_k a_{nk}\xi_k(t). \qquad (2)$$

Множество всех суммируемых к нулю по мере матрицей A последовательностей $x=(\xi_k)$, т.е. множество таких x, для которых $y=(\eta_n)\in C^0(M)$, будем обозначать через $C^0_A(M)$. Аналогично будем обозначать множество всех абсолютно p-суммируемых последовательностей через $\ell^p_A(M)$.

Матрицами конечного типа называются матрицы, у которых число ненулевых элементов в каждой строке не превосходит некоторой положительной константы $L>0$. Через $\mathfrak{N}$ обозначим множество всех конечных подмножеств множества всех неотрицательных целых чисел.

2. Целью настоящей статьи является нахождение аналогов теорем Кноппа-Лоренца [2] и Пейерихоффа [3] для последова-

[I] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все целочисленные значения от 0 до ∞.

тельностей и рядов измеримых функций из пространства M. В частности, будут найдены необходимые и достаточные условия для включения $\ell^r_A(M)\supset\ell^p(M)$ с $1\le r\le p<\infty$.

Ниже мы докажем следующие теоремы.

Теорема I. Для включения $\ell^r_A(M)\supset\ell^p(M)$ с $1\le r<p<\infty$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^\circ \quad \sum_n |a_{n,k(n)}|^{pr/(p-r)}<\infty \tag{3}$$

для любой последовательности индексов $(k(n))$ и

$$2 \quad \text{матрица } A \text{ – матрица конечного типа.} \tag{4}$$

Теорема 2. Для включения $\ell^p_A(M)\supset\ell^p(M)$ с $1\le p<\infty$ необходимо и достаточно выполнение условий (4) и

$$|a_{nk}|\le N, \quad n,k=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Теорема 3. Для включения $\ell^p_A(M)\supset\ell(M)$ с $1<p<\infty$ необходимо и достаточно выполнение условий (4) и

$$\sum_n |a_{nk}|^p\le N, \quad k=0,1,2,\ldots . \tag{6}$$

Теорема 4. Для включения $\ell^p_A(M)\supset\ell^0(M)$ с $1\le p<\infty$ необходимо и достаточно выполнение условий (4) и

$$\sum |a_{n,k(n)}|^p<\infty \tag{7}$$

для любой последовательности индексов $(k(n))$.

Если сравнить условия (3) и (5) - (7), то можно заметить, что условие (6) выбывает из общей системы. Причина тут в том, что в этом случае мы сталкиваемся с проблемой нахождения сопряженного пространства для ℓ^p с $0<p<1$. По той же причине в статье не найдены необходимые и достаточные условия для включения $\ell^r_A(M)\supset\ell^p(M)$ с $1<p<r<\infty$.

3. В доказательствах теоремы I - 4 мы воспользуемся несколькими вспомогательными результатами.

Лемма I. Для включения $c^0_A(M)\supset c^0(M)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$1 \text{ существует } \lim_n a_{nk}=0, \quad k=1,2,\ldots \tag{8}$$

$$2 \quad \sup_n \sum_k |a_{nk}|<\infty \tag{9}$$

и условия (4).

Доказательство леммы I мы пропускаем, так как оно существенно не отличается от доказательства теоремы 2 из [I].

Из определения абсолютной p-сходимости вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Пространства $\ell^p(M)$ и $\ell^p_+\times c^0(M)$ $(0<p<\infty)$ изоморфны.

Лемма 3. Если

$$|\tau_k \xi_k| \le N(\tau),\ k=0,1,2,\ldots \tag{10}$$

для всех $\tau=(\tau_k)\in c^0$, то найдется $N>0$, такая, что

$$|\xi_k| \le N,\ k=0,1,2,\ldots \tag{11}$$

Доказательство. Допустим, что (11) не выполняется. Значит, $\limsup_k |\xi_k|=\infty$, т.е. найдется возрастающая последовательность индексов (k_ν), такая, что $\lim_\nu |\xi_{k_\nu}|=\infty$.

Положим

$$\tau_k \begin{cases} 1/\ln|\xi_k|, & \text{если } k=k_\nu, \\ 1/k, & \text{если } k\ne k_\nu. \end{cases}$$

Тогда $\lim \tau_k=0$, но $\limsup_k \tau_k|\xi_k| = \lim|\xi_{k_\nu}|/\ln|\xi_{k_\nu}|=\infty$, что противоречит (10).

Лемма 4. Если

$$\sum \tau_k c_k = O_\tau(1)$$

для всех $\tau\in c^0$, то найдется постоянная $N>0$, такая, что

$$\sum|c_k| \le N.$$

Утверждение леммы 4 следует из принципа равномерной ограниченности.

Лемма 5. Если матрица A является матрицей конечного типа и выполняется условие

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{H}} \sum_k \Big|\sum_{n\in\sigma} a_{nk}\Big| < \infty, \tag{12}$$

то

$$\sum_k \sum_n |a_{nk}| < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем лемму в два этапа.

1) Пусть сначала A матрица, имеющая в любой строке не более одного ненулевого элемента. По условию (12) найдется $N>0$, такая, что

$$\sum_k \Big|\sum_{n\in\sigma} a_{nk}\Big| \le N \tag{14}$$

какое бы ни было $\sigma\in\mathcal{H}$.

Далее, пусть τ_k обозначает множество всех строк матрицы A, таких, в которых A в k-ом столбце имеет отличные от нуля элементы: $\tau_k=\{n: a_{nk}\ne 0\}$ и пусть $\tau_k^+=\{n: a_{nk}>0\}$, $\tau_k^-=\{n: a_{nk}<\infty\}$. Тогда $\tau_k^+\cup\tau_k^-=\tau_k$ и кроме того $\tau_i\cap\tau_j=\emptyset$ для $i\ne j$. Таким образом получим для любого $\sigma\in\mathcal{H}$, что

$$\sum_k\sum_{n\in\sigma}|a_{nk}| = \sum_k\sum_{n\in\sigma\cap\tau_k^+}|a_{nk}| + \sum_k\sum_{n\in\sigma\cap\tau_k^-}|a_{nk}| =$$

$$=\sum_k\Big|\sum_{n\in\sigma\cap\tau_k^+}a_{nk}\Big| + \sum_k\Big|\sum_{n\in\sigma\cap\tau_k^-}a_{nk}\Big| \le 2N,$$

так как (14) выполняется для всех $\sigma\in\mathcal{H}$, в том числе и для таких, для которых $\sigma\cap\tau_k^-=\phi$ или $\sigma\cap\tau_k^+=\phi$, $k=0,1,2,\ldots$.

2) Пусть теперь A произвольная матрица конечного типа, у которой число ненулевых элементов в каждой строке не превосходит некоторой положительной константы L. Множества τ_k, $k=0,1,2,\ldots$ определяем как и в первой части. Для произвольного $\sigma\in\mathcal{H}$ разобьем множество $\sigma\cap\tau_k$ на L подмножеств: $\sigma_0^k\subset\sigma\cap\tau_k$ — множество строк матрицы A, таких, в которых элементу k-ого столбца не предшествует не одного ненулевого элемента, $\sigma_1^k\subset\sigma\cap\tau_k$ — множество строк матрицы A, в которых элементу k-ого столбца предшествует один ненулевой элемент, ..., $\sigma_{L-1}^k\subset\sigma\cap\tau_k$ — множество строк матрицы A, в которых элементу k-ого столбца предшевствует $L-1$ отличного от нуля элемента. Тогда $\bigcup_{i=0}^{L-1}\sigma_i^k=\sigma\cap\tau_k$ и $\sigma_i^k\cap\sigma_j^k=\phi$ для $i\neq j$.

Рассмотрим теперь матрицу A в виде суммы L матриц A^0, $A^1,\ldots,A^{L-1}$ с $A^i=(a_{nk}^i)$, где k-тым столбцом матрицы A^i служит множество элементов $\{a_{nk}: n\in\sigma_i^k\}$.

Таким разбиением мы добъемся того, что каждая из матриц A^i ($i=0,1,\ldots,L-1$) имеет в любой строке не более одного ненулевого элемента. Воспользовавшись теперь первой частью доказательства, получим, что для любого $\sigma\in\mathcal{H}$

$$\sum_k\sum_{n\in\sigma}|a_{nk}|=\sum_k\sum_{n\in\bigcup_{i=0}^{L-1}\sigma_i^k}|a_{nk}|=\sum_{i=0}^{L-1}\sum_k\sum_{n\in\sigma}|a_{nk}^i|\leq 2LN,$$

что равносильно условию (I3).

Как известно, если A не является матрицей конечного типа, то утверждение леммы 5 не имеет место. Пример матрицы, удовлетворяющей условию (I2), но не (I3), имеется у Пейеримхоффа в [4].

Лемма 6. Если матрица A - матрица конечного типа, то условие (I3) равносильно условию

$$\sum|a_{n,k(n)}|<\infty \tag{I5}$$

для любой последовательности индексов $(k(n))$.

Доказательство. Очевидно, (I3) влечет (I5). Докажем обратное. Пусть, во-первых, матрица A имеет в любой строке не более одного ненулевого элемента. Для фиксированного n имеем

$$\sum_k|a_{nk}|=|a_{n,k(n)}|$$

и (I5) влечет (I3).

Пусть, во-вторых, матрица A имеет в любой строке не более L ненулевых элементов. Точно так же, как в доказательстве леммы 5, рассмотрим матрицу A в виде суммы L матриц A^0, $A^1,\ldots,A^{L-1}$, где k-ым столбцом матрицы $A^i=(a_{nk}^i)$

будет множество элементов $\{a_{nk} : n \in \tau_i^k\}$, где (в общем случае бесконечные) множества τ_i^k $(i=0,1,\dots,L-1)$ определены так же, как в доказательстве леммы 5 множества σ_i^k. Тогда любая из матриц $A^0, A^1, \dots, A^{L-1}$ становится матрицей, имеющей в любой строке не более одного ненулевого элемента. Теперь имеем

$$\sum_k \sum_n |a_{nk}| = \sum_k \sum_{n \in \bigcup_{i=0}^{L-1} \tau_i^k} |a_{nk}| = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_k \sum_n |a_{nk}^i|$$

и, так как по первой части доказательства для любой A^i $(i=0, 1,\dots,L-1)$ (I3) выполняется, то оно выполняется так же для произвольной матрицы конечного типа.

Лемма 7. Если матрица A – матрица конечного типа, то для $1 \le r < p < \infty$ выполнение условия (3) для любой последовательности индексов $(k(n))$ равносильно выполнению условия

$$\sum_n \{\sum_k |a_{nk}\theta_k|\}^r < \infty \qquad (I6)$$

для всех $(\theta_k) \in \ell^p$.

Доказательство. Для $r > 1$ $(r=1)$ условие (I6) равносильно условию

$$\sum_k \sum_n |d_n a_{nk} \theta_k| < \infty$$

для всех $(d_n) \in \ell^s$ с $1/r + 1/s = 1$ (соответственно для всех $(d_n) \in \ell^\infty$). По лемме 6 последнее имеет место в точности тогда, когда для любой последовательности индексов $(k(n))$ имеет место

$$\sum_n |d_n a_{n,k(n)} \theta_{k(n)}| < \infty$$

Полагая $\xi_n = \theta_{k(n)}$, последнее условие равносильно условию

$$\sum_n |a_{n,k(n)} \xi_n|^r < \infty .$$

Учитывая, что последнее условие, в свою очередь, выполняется для всех $z=(\xi_n) \in \ell^p$, то по принципу равномерной ограниченности оно равносильно условию (3).

Подобным образом доказывается

Лемма 8. Если матрица A – матрица конечного типа, то для $1 \le r < \infty$ выполнение условия (I6) для всех $(\theta_k) \in \ell^r$ равносильно выполнению условия (5).

Лемма 9. Для включения $\ell_A^r(M) \supset \ell^p(M)$ с $0 < p, r < \infty$ необходимо, чтобы матрица A была матрицей конечного типа.

Доказательство. По лемме 2 $x = (\xi_k) \in \ell^p(M)$ в точности тогда, когда ее элементы представимы в виде $\xi_k(t) = \lambda_k \tau_k(t)$, где $\lambda = (\lambda_k) \in \ell_+^p$ и $\tau = (\tau_k) \in C^0(M)$. Теперь преобразование

$$\eta_n(t) = \sum_k a_{nk} \lambda_k \tau_k(t) \qquad (I7)$$

должно перевести любой элемент $\tau\in c^0(M)$ в некоторый элемент $y=(\eta_n)\in \ell^p(M)$. Поскольку $\ell^q(M)\subset c^0(M)$ для $0<q<\infty$, то преобразование (I7) должно перевести любой элемент $\tau\in c^0(M)$ в некоторый элемент $y\in c^0(M)$ для всех $\lambda\in\ell^p_+$. По лемме I матрица $A(\lambda)=(a_{nk}\lambda_k)$ должна быть матрицей конечного типа для всех $\lambda\in\ell^p_+$ откуда следует, что матрицей конечного типа является и $A=(a_{nk})$.

4. Доказательство теоремы I. Необходимость. Необходимость условия (4) доказана леммой 9. Так как $c^0\subset c^0(M)$, то

$$\sum_n\Big|\sum_k a_{nk}\lambda_k\tau_k\Big|^r<\infty$$

для всех $\lambda\in\ell^p_+$ и $\tau\in c^0$. Тогда при $r>1$ для всех $d=(d_k)\in\ell^s$ с $1/r+1/s=1$ (соответственно при $r=1$ для всех $d\in\ell^\infty$)

$$\sum_{n\in\sigma} d_n\sum_k a_{nk}\lambda_k\tau_k=O(1),$$

какое бы ни было $\sigma\in\mathfrak{N}$. Учитывая условие (4) и после изменения порядка суммирования

$$\sum_k\lambda_k\tau_k\sum_{n\in\sigma}d_n a_{nk}=O(1).$$

Из меммы 4 следует, что

$$\sum_k\Big|\sum_{n\in\sigma}{}'\lambda_k d_n a_{nk}\Big|=O(1).$$

Ввиду произвольности $\sigma\in\mathfrak{N}$ по лемме 5 имеем для всех $d\in\ell^s$ (соответственно для всех $d\in\ell^\infty$)

$$\sum_k\sum_n|a_{nk}d_n\lambda_k|<\infty.$$

Это равносильно условию (I6) для всех $\lambda\in\ell^p_+$ и по лемме 7 также условию (3).

Достаточность. По лемме 7 условие (3) влечет (I6). Фиксируем произвольную $\lambda\in\ell^p_+$ и положим $\mu_n'=\sum_k|a_{nk}|\lambda_k$. По условию (I6) $(\mu_n')\in\ell^r_+$. Далее, найдется (μ_n'') с $\mu_n''\nearrow\infty$ такая, что $(\mu_n'\mu_n'')\in\ell^r_+$. Обозначим $\mu_n=\mu_n'\mu_n''$ и рассмотрим преобразование (без ограничения общности можно считать, что $\mu_n\neq 0$ для $n=0,1,2,\dots$)

$$\nu_n(t)=\sum_k\frac{a_{nk}\lambda_k}{\mu_n}\tau_k(t). \tag{I8}$$

Учитывая условие (4), по лемме 2 достаточно показать, что матрица $A(\lambda,\mu)=(a_{nk}\lambda_k/\mu_n)$ удовлетворяет условиям леммы I.

Условие (9) очевидно, ибо по определению μ_n

$$\sum_k|a_{nk}|\lambda_k=O(\mu_n)$$

для $n=0,1,2,\dots$.

Далее, фиксируя некоторое k_0, имеем

$$|a_{nk_0}| = \frac{1}{\lambda_{k_0}}\left(\sum_k |a_{nk}|\lambda_k - \sum_{k\neq k_0} |a_{nk}|\lambda_k\right).$$

Следовательно, для произвольного индекса k

$$a_{nk}/\sum_k |a_{nk}|\lambda_k = O(1)\frac{1}{\lambda_k},$$

откуда

$$\lim_n \frac{a_{nk}}{\mu_n} = \frac{O(1)}{\lambda_k}\lim_n \frac{1}{\mu_n''} = 0,$$

т.е. для $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется (8). Теорема I доказана.

Теорема 2 доказывается аналогично, только там, где в доказательстве теоремы I применяется лемма 7, нужно применять лемму 8.

5. Доказательство теоремы 3. Необходимость. Необходимость условия (4) доказана леммой 9. Поскольку $c^0 \subset c^0(M)$, то для всех $\lambda \in \ell_+$ и $\tau \in c^0$

$$\sum_n \left|\sum_k a_{nk}\lambda_k\tau_k\right|^p < \infty.$$

По неравенству Гельдера получим для всех $d \in \ell^q$ с $1/p + 1/q = 1$, что

$$\sum_n \left|d_n \sum_k a_{nk}\lambda_k\tau_k\right| \le \left\{\sum |d_n|^q\right\}^{1/q}\left\{\sum_n \left|\sum_k a_{nk}\lambda_k\tau_k\right|^p\right\}^{1/p} < \infty.$$

Отсюда, в силу условия (4), после изменения порядка суммирования,

$$\sum_k \left|\lambda_k\tau_k \sum_n d_n a_{nk}\right| < \infty.$$

Так как последнее условие выполняется для всех $\lambda \in \ell_+$, то по принципу равномерной ограниченности найдется $N(\tau, d)$ такая, что

$$\left|\tau_k \sum_n d_n a_{nk}\right| \le N(\tau, d)$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. По лемме 3 найдем $N(d)$ такую, что

$$\left|\sum_n d_n a_{nk}\right| \le N(d).$$

По принципу равномерной ограниченности последнее равносильно условию (6).

Достаточность. Пусть выполняется условие (6). По неравенству Гельдера получим для любого $d \in \ell^q, 1 < q < \infty$, что

$$\left|\sum_n d_n |a_{nk}|\right| \le N^{1/p}\|d\|.$$

Отсюда получаем для любого $\lambda \in \ell_+$ что

$$\sum_k \lambda_k \sum_n |d_n||a_{nk}| < \infty,$$

и, в силу условия (4), после изменения порядка суммирования

$$\sum_n |d_n| \sum_k |a_{nk}|\lambda_k < \infty,$$

откуда по теореме Ландау

$$\sum_n \Big(\sum_k |a_{nk}|\lambda_k\Big)^p < \infty .$$

Фиксируем теперь произвольную $\lambda \in \ell_+$ и положим $\mu'_n = \sum_k |a_{nk}|\lambda_k$. Поскольку $\mu'_n \in \ell^p_+$, то найдется (μ''_n) с $\mu''_n \nearrow \infty$ такая, что $(\mu'_n\mu''_n) \in \ell^p_+$. Полагая $\mu_n = \mu'_n\mu''_n$, получим, что $\lim_n |a_{nk}|\lambda_k/\mu_n = 0$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$\sum_k |a_{nk}|\lambda_k = \mathcal{O}(\mu_n)$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Учитывая еще условие (4), получим по лемме I, что матрица $A(\lambda, \mu) = (a_{nk}\lambda_k/\mu_n)$ переводит любой элемент $\tau \in c^0(M)$ в некоторый элемент $\nu = (\nu_n) \in c^0(M)$, где $\nu_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ определены соотношением (I8). Ввиду того, что $\lambda \in \ell_+$ фиксирована произвольно, получим по лемме 2, что преобразование (2) с $\eta_n(t) = \mu_n\nu_n(t)$ и $\xi_k(t) = \lambda_k\tau_k(t)$ переводит любой элемент $x = (\xi_k) \in \ell(M)$ в некоторый элемент $y = (\eta_n) \in \ell^p(M)$.

6. Доказательство теоремы 4. Необходимость. Необходимость условия (4) доказана леммой 9. Для любого $x \in c^0$ найдется $N = N(x)$ такая, что

$$\sum_{n\in\sigma} \Big|\sum_k a_{nk}\xi_k\Big|^p \le N$$

какое бы ни было $\sigma \in \mathfrak{N}$. В случае $p > 1$ для любой $d = (d_n) \in \ell^q$ с $1/p + 1/q = 1$ по неравенству Гельдера (соответственно при $p = 1$ для любой $d \in \ell^\infty$) имеем

$$\Big|\sum_{n\in\sigma} d_n \sum_k a_{nk}\xi_k\Big| \le N(x, d)$$

откуда, учитывая условие (4), после изменения порядка суммирования для всех $x \in c^0$

$$\sum_k \xi_k \sum_{n\in\sigma} a_{nk}d_n = \mathcal{O}(x, d).$$

По лемме 4

$$\sum_k \Big|\sum_{n\in\sigma} a_{nk}d_n\Big| = \mathcal{O}(d)$$

для любого $\sigma \in \mathfrak{N}$, откуда по лемме 5

$$\sum_k \sum_n |a_{nk}d_n| < \infty . \tag{I9}$$

Применяя теперь лемму 6, получим, что

$$\sum_n |d_n a_{n,k(n)}| < \infty$$

для произвольной последовательности индексов $(k(n))$ и для любой $d \in \ell^q$ (соответственно для любой $d \in \ell^\infty$). Но последнее выполняется в точности тогда, когда выполняется (7) для любой последовательности индексов $(k(n))$.

Достаточность. По лемме 6 условия (7) и (I9) равносильны. По принципу равномерной ограниченности из (I9) вытекает

$$\sum_n \{\sum_k |a_{nk}|\}^p < \infty$$

с $p \geq 1$. Положим $\mu_n' = \sum_k |a_{nk}|$. Поскольку $(\mu_n') \in \ell_+^p$, то найдем (μ_n'') с $\mu_n'' \nearrow \infty$, такую, что $(\mu_n' \mu_n'') \in \ell_+^p$. Пусть $\mu_n = \mu_n' \mu_n''$. Тогда

$$\sum_k |a_{nk}| = O(\mu_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

и

$$\lim_n \frac{a_{nk}}{\mu_n} = O(1) \lim_n \frac{1}{\mu_n''} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. матрица $A(\mu) = (a_{nk}/\mu_n)$ удовлетворяет условиям леммы I с $(\mu_n) \in \ell_+^p$. По лемме 2 преобразование (2) должно перевести любой элемент $x \in c^0(M)$ в некоторый элемент $y \in \ell^p(M)$ с $p \geq 1$.

Литература

I. Вихман Ф., О консервативности матриц относительно сходимости по мере. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., I97I, 20, № 3, 275–278.

2. Knopp, K., Lorenz, G.G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math.,1949, 2, 10–16.

3. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs Inst. math. Akad. serbe sci., 1955, 8, 139–156.

4. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H.C.Chow. J. London Math. Soc., 1957, 32, N° 1, 33–36.

Поступила I6.05.1983

On (ℓ^p, ℓ^k)-summability in space of measurable functions

L. Pallas

Summary

Let M denote the space of all Lebesgue-measurable and finite almost everywhere on interval $[0,1]$ functions and let ℓ_+^p denote the set of sequences $\{\lambda = (\lambda_k) \in \ell^p;\ \lambda_k \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$. We shall say, that series (1) with $\xi_k \in M$ for $k = 0, 1, 2, \ldots\}$ is absolutely p-convergent $(0 < p < \infty)$, if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\lambda \in \ell_+^p$ such that

$$\inf_{\alpha > 0} (\alpha + \mu\{t : |\xi_k(t)| > \lambda_k \alpha\}) < \varepsilon$$

holds for $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Let $c^0(M)$ denote the set of all convergent in measure to zero sequences and $\ell^p(M)$ - the set of all absolutely p-convergent series.

Let $A=(a_{nk})$ be an infinite matrix of real numbers and let $y=(\eta_k)$ be A-transform of $x=(\xi_k)$ defined by(2). We denote by $c^0_A(M)$ the set of all A-summable in measure to zero sequences, i.e. the set of all x, for which $y \in c^0(M)$, and analogously by $\ell^p_A(M)$ - the set of all absolutely (A,p)-summable series.

It is said, that a matrix A is of finite type, if the number of different from zero elements in every row doesn't exceed some certain positive constant.

In the present paper necessary and sufficient conditions for the inclusions $\ell^r_A(M) \supset \ell^p(M)$ if $1 \leq r < p < \infty$, $\ell^p_A(M) \supset \ell^p(M)$ if $1 \leq p < \infty$, $\ell^p_A(M) \supset \ell(M)$ if $1 < p < \infty$ and $\ell^p_A(M) \supset c^0(M)$ if $1 \leq p < \infty$ have been found. In particular, for each of these inclusions it is necessary and sufficient that A is a matrix of finite type.

Пространство рядов Фурье-Шварца с асимптотическим условием

Я.Сикк

Известная теорема Рисса-Фишера показывает, что если последовательность $c=(c_k)$ при $k\in Z$ удовлетворяет условию

$$\sum |c_k|^2<\infty, \tag{1}$$

то существует $f\in L^2$ такое, при котором $c_k, k\in Z$ являются его коэффициентами Фурье-Лебега. В настоящей статье рассматривается следующая проблема: каким является класс всех тригонометрических рядов, коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\sum_{|k|\le n} |c_k|^2=O(n). \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{D}$ - пространство всех обобщенных функций, то есть множество всех непрерывных линейных функционалов в C^∞.

Последовательность $(F_n)_{n=1}^\infty$ обобщенных функций сходится к $F\in\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для каждого $u\in C^\infty$ выполнено $\lim F_n(u)=F(u)$.

Коэффициенты Фурье-Шварца для $F\in\mathcal{D}$ определяются через

$$\hat{F}(n)=F(e_{-n}) \qquad (n\in Z), \tag{3}$$

где $e_m(x)=e^{imx}$ для каждого $m\in Z$.

Ряд

$$\sum_{k\in Z}\hat{F}(k)e^{ikx} \tag{4}$$

называется рядом Фурье-Шварца для $F\in\mathcal{D}$.

Последовательность $c=(c_k)$ $(k\in Z)$ называется темперированной, если существует такое $m>0$, что

$$c_k=O(|k|^m).$$

Имеет место следующая (см. [2] , том 2, стр. 65)

<u>Лемма I.</u> Если $c=(c_k), (k\in Z)$ является темперированной, то последовательность обобщенных функций

$$S_n=\sum_{|k|\le n}c_ke_k$$

сходиться в $\mathcal{D}$ к некоторой обобщенной функций F с рядом Фурье-Шварца (4) с $\hat{F}(k)=c_k$ $(k\in Z)$.

<u>Определение I.</u> Пусть X некоторое пространство последовательностей $c=(c_k)$ $(k\in Z)$. Пусть любым двум ее элементам c и c' сопоставлено вещественное число,

обозначаемое (c, c'), причем выполнены следующие свойства:

а) $(c,c') = (c',c)$;

б) $(c+c',c'') \le (c,c'') + (c',c'')$ при $c'' \in X$;

в) $(\lambda c, c) = \lambda(c,c')$ где $\lambda \ge 0$;

г) $(c,c) \ge 0$ для любого $c \in X$, причем $(c,c) = 0$ тогда и только тогда, когда $c = (0)$.

При выполнении условий а) - г) число (c,c') называется квазискалярным произведением элементов $c, c' \in X$.

Пусть $\tilde{\ell}^2$ - пространство всех последовательностей $c = (c_k)(k \in Z)$, для которых выполнено (2).

Теорема I. Пространство $\tilde{\ell}^2$ является банаховым пространством с нормой

$$\|c\|_\sim = \sup_n \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{|k|\le n} c_k^2}. \qquad (5)$$

Доказательство. Пользуясь неравенством Коши и свойствами супремума, нетрудно показать, что $\tilde{\ell}^2$ является линейным нормированным пространством. Докажем, что $\tilde{\ell}^2$ - полное пространство. Пусть (c^j), $j = 1,2,\ldots$ - последовательность Коши в пространстве $\tilde{\ell}^2$, т.е. для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что

$$\sup_n \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{|k|\le n}(c_k^j - c_k^{j+i})^2} < \varepsilon \qquad (6)$$

при $j > N$ и при каждом i. Покажем, что тогда существует $\lim\limits_j c_k^j = c_k$ для любого k. Действительно, пусть $n_0 > |k|$. Тогда из (6) получаем

$$|c_k^j - c_k^{j+i}| < n_0\varepsilon^2$$

для любых $|k| \le n_0$, $j > N$ и $i = 1,2\ldots$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{j\to\infty} c_k^j = c_k. \qquad (7)$$

Имея ввиду соотношение (6), получаем из (7), что

$$\lim_j \sup_n \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{|k|\le n}|c_k^j - c_k|^2} = 0,$$

т.е. $\lim\limits_j c^j = c$. Последовательность $c = (c_k)$ является элементом пространства $\tilde{\ell}^2$, так как для любого

$$\|c\|_\sim = \|c - c^j + c^j\|_\sim \le$$

$$\le \|c - c^j\|_\sim + \|c^j\|_\sim = O(1).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $c = (c_k)$ и $c' = (c'_k)$ - последовательности из $\tilde{\ell}^2$. Тогда соотношение

$$(c,c') = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{|k|\le n} c_k c'_k \qquad (8)$$

является квазискалярным произведением в $\tilde{\ell}^2$.

Доказательство. Надо показать, что условия а) – г) квазискалярного произведения (см. определение I) выполнены. Выполнение условий а) и в) непосредственно следует из (8). То, что выполнено условие б) вытекает из неравенства

$$\sup_n \frac{1}{n}\Big(\sum_{|k|\le n} c_k c''_k + \sum_{|k|\le n} c'_k c''_k\Big) \le$$

$$\le \sup_n \frac{1}{n} \sum c_k c''_k + \sup_n \frac{1}{n} \sum_{|k|\le n} c'_k c''_k .$$

Остается доказать, что при (8) условие г) выполнено. Когда $c=c'$, соотношение (8) имеет вид

$$(c,c) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{|k|\le n} c_k^2 \qquad (9)$$

и, следовательно, $(c,c)>0$ при каждом $c \ne (0)$, а при $c=(0)$ имеет место $(c,c)=0$. Теорема доказана.

Квазискалярное произведение в $\tilde{\ell}^2$ имеет свойства, похожие на свойства скалярного произведения в ℓ^2. Примером служит

Теорема 3. В пространстве $\tilde{\ell}^2$ выполнены условия

а) $|(c,c')| \le \|c\|_\sim \cdot \|c'\|_\sim$; (IO)

б) $\|c\|_\sim = \sqrt{(c,c)}$. (II)

Доказательство. Из равенства Коши получаем, что неравенство

$$\sum_{|k|\le n} c_k c'_k \le \sqrt{\sum_{|k|\le n} c_k^2}\ \sqrt{\sum_{|k|\le n} c_k'^2}$$

имеет место при каждом n. Тогда из формул (5) и (8) получаем неравенство (IO). Равенство (II) следует из соотношений (5) и (9). Теорема доказана.

Теорема 4. Если $c \in \tilde{\ell}^2$, то ряд

$$\sum_{k\in Z} c_k e^{ikx}$$

является рядом Фурье-Шварца для некоторой $F \in \mathcal{D}$ при $\hat{F}(k)=C_k$.

Доказательство. Пусть $c = \tilde{\ell}^2$, тогда выполнено условие (2) и, следовательно, последовательность $c=(c_k)$ является темперированным и из леммы I следует утверждение теоремы.

Определение 2. Множество всех тех $F \in \mathcal{D}$, коэффициенты Фурье-Шварца которых удовлетворяют условию (2), называется псевдо-Лебеговым пространством и обозначается через L^0.

Теорема 5. Пространство L° является BK-пространством с нормой

$$\|F\|_{\circ} = \sup_{n} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{|k|\le n} \hat{F}^{2}(k)} \tag{12}$$

Доказательство следует из определения 2 и теоремы 1.

Рассмотрим ядро Дирихле

$$\mathcal{D}_{n}^{p} = \|\sum_{|k|\le n} e^{ikx}\|_{p}$$

в пространстве L^{p} при $p\in(1,\infty)$. Известно, что

$$\mathcal{D}_{n}^{p} = O(n^{\frac{1}{q}}),$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$ (см. [2], том I, стр. 115). Используя норму в L^{2} видим, что условие (2) имеет вид

$$\|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{2} = O(n^{\frac{1}{2}}) \tag{13}$$

Таким образом, $\sum c_k e^{ikx} \in L^{\circ}$ тогда и только тогда, когда норма его частных сумм в L^{2} и последовательность Дирихле ($\mathcal{D}_{n}^{2}$) имеют одного и того же порядка ограниченности. Покажем, что это свойство не является свойством, характерным только для нормы пространства L^{2}.

Теорема 6. Ряд $\sum c_k e^{ikx} \in L^{\circ}$ тогда и только тогда, когда условие

$$\|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{p} = O(n^{\frac{1}{q}}) \tag{14}$$

выполнено при некотором $p\in(1,\infty)$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$

Доказательство. Как мы показали выше, при $p=2$ утверждение теоремы верное. Покажем теперь, что при всех $p\in(1,\infty)$ условия типа (14) являются равносильными т.е. они определяют одни и те же тригонометрические ряды. Выбираем числа p_1 и p_2, при которых $1<p_1<p_2<\infty$. Из известного неравенства между разными L^{p} нормами тригонометрических полиномов (см. [1], стр. 243) следует неравенство

$$\|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{p_2} \le 2n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{p_1} . \tag{15}$$

Допустим, что (14) выполнено при p_1, тогда (15) превращается в

$$\|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{p_2} = O(n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_1}}) = O(n^{\frac{1}{q_2}}),$$

где $p_j^{-1}+q_j^{-1}=1$ при $j=1,2$. Следовательно, условие (14) выполнено для p_2. Из обратного неравенства между разными L^{p} нормами тригонометрических полиномов (см. [1] стр. 245) следует, что неравенство

$$\|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_p \le c_1(n+1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_{p_2} \tag{I6}$$

имеет место. Допустим теперь, что (I4) выполнено для p_2, тогда (I6) превращается в

$$\|\sum c_k e^{ikx}\|_{p_2} = c_1(n+1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{q_2}} = \\ = c_1(n+1)^{\frac{1}{q_2}} = O(n^{\frac{1}{q_2}}),$$

где $p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1$ при j =I,2. Следовательно, условие (I4) является равносильным при всех p. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Пространство L° является BK – пространством с нормой

$$\|\sum c_k e^{ikx}\|_\circ = \sup_n (n^{-\frac{1}{q}} \|\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}\|_p) \tag{I7}$$

при $p \in (1,\infty)$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, причем все нормы типа (I7) при разных $p \in (1,\infty)$ эквивалентны.

Литература

I. Тиман А.Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, I960.

2. Edwards R.E. Fourier series. A modern introduction. Vol. I ; II New-York, 1967.

Эстонская сельскохозяйственная академия

Поступило 04.09.I983

The set of Fourier-Schwartz series with an asymptotic condition

J.Sikk

Summary

Let L_o be a set of distributions F for which the condition $\sum_{|k|\le n} (\hat F(k))^2 = O(n)$

is satisfied. The set L° is a BK-space with the norm

$$\|F\|_{op} = \sup_n (n^{-\frac{1}{q}} \|\sum_{|k|\le n} \hat F|k| e^{ikx}\|_p)$$

for some $p \in (1,\infty)$ and $p^{-1} + p^{-2} = 1$ and all norms of type $\|F\|_{op}$ are equivalent for every $p \in (1,\infty)$.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS * INHALT