

A-16687

3. XI 41

A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

1. VIHK

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1947

A. VIHMAN

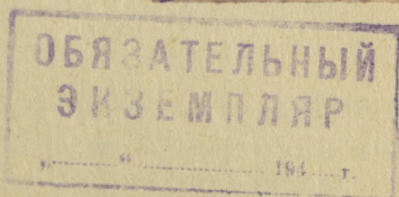
ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

1. VIHK

Kohustuslik kontrollseksemplar

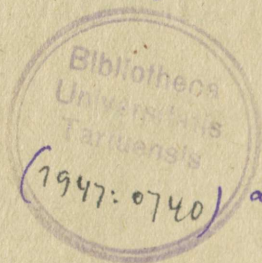
~~3139~~



RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1947

2



(1947:0740) 25338

A-16687

Peatükk I.

Relatiivsed arvud. Täisavaldised.

§ 1. Relatiivsed arvud.

Negatiivsed arvud ja positiivsed arvud.

Et tõelisust saaks arvude abil paremini kirjeldada, kui seda võimaldavad loomulikud täisarvud ja murdarvud, selleks on arvuvalda laiendatud negatiivsete arvudega. Et senise arvuvalla arvusid, loomulikke täisarvusid ja murdarvusid, uutest negatiivsetest arvudest eraldada, on endisi arvusid hakatud nimetama positiivseteks arvudeks. Sümbolite abil eraldame positiivset ja negatiivset arvu teineteisest nii, et positiivse arvu ette kirjutame märgi + ja negatiivse arvu ette märgi —. Kui ei ole vajadust, siis jäetakse positiivse arvu ees olev märk + kirjutamata. Nii võime kirjutada, et

$$+3 = 3,$$

sest nii +3 kui ka 3 tähendavad positiivset arvu 3.

Uus laiendatud arvuvald ehk arvude süsteem, mis sisaldab positiivseid arve, negatiivseid arve ja täisarvu 0, kannab relatiivsete arvude valla nime.

Ülesanded.

Kirjutada relatiivsete arvude abil:

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| 1. 3 kraadi sooja; | 1. 5 ⁰ sooja; |
| 17 kraadi külma. | 12 ⁰ külma. |

2. Võttes arvteljel ühikuks 1 cm, märkida arvud

$$+3; -2; -2,5; +1,5.$$

2. Märkida arvteljel arvud

$$-4,2; -3,6; +2,4; +3,8,$$

võttes ühikuks 0,5 cm.

3. Koolis oli õppeaasta algul a õpilast ja õppeaasta lõpul b õpilast. Kui palju kasvas õpilaste arv õppeaasta jooksul?

Mis tähendus on vastusel,

$$\text{kui } a = 420 \text{ ja } b = 432?$$

$$\text{kui } a = 375 \text{ ja } b = 370?$$

3. Aasta jooksul astus ametiühingusse a liiget ja lahkus b liiget. Mitme liikme võrra kasvas ametiühingu liikmete arv aasta jooksul?

Mis tähendus on vastusel,

$$\text{kui } a = 38 \text{ ja } b = 12?$$

$$\text{kui } a = 54 \text{ ja } b = 58?$$

Relatiivse arvu absoluutväärtus.

Arvused nagu $+5$ ja -5 , $-3,5$ ja $3,5$ nimetatakse teineteise vastas arvu deks. Üldiselt, arvud

$+a$ ja $-a$ on teineteise vastasarvud.

Siinjuures $+a$ vastasarvuks on $-a$ ja ümberpöörduvalt. Nulli vastasarvuks on null.

Positiivse arvu absoluutväärtuseks on see arv ise; negatiivse arvu absoluutväärtuseks on tema vastasarv; nulli absoluutväärtuseks on null.

Arvu absoluutväärtust märgitakse kahe püstkriipsuga. Nii kirjutatakse

$$|3| = 3 \quad |-3| = 3 \quad |0| = 0$$

Ülesanded.

4. Kas on õige, et võrdsete arvude absoluutväärtused on võrdsed?

4. Kas on õige, et vastasarvude absoluutväärtused on võrdsed?

5. Kas $a - b$ ja $b - a$ on vastasarvud või mitte?

5. Kas on õige võrdus

$$|a - b| = |b - a|?$$

Relatiivsete arvude võrdlemine.

Nagu teada,

iga positiivne arv on suurem kui null;

iga negatiivne arv on väiksem kui null;

iga positiivne arv on suurem igast negatiivsest arvust;

kahest negatiivsest arvust on see suurem, millel on väiksem absoluutväärtus.

Ümberpöörduvalt, on õige, et kui mingi arv on suurem kui null, siis see arv on positiivne. Seega kirjutis

$$a > 0$$

väljendab seda, et arv a on positiivne; kirjutis

$$m < 0$$

väljendab mõtet, et arv m on negatiivne.

Ülesanded.

6. Kui arv $a > 0$, kas siis a^2 on positiivne või negatiivne? Kirjutada vastus sümbolite abil.

6. Kirjutada sümbolite abil:

kui arv a on negatiivne, siis ka a^3 on negatiivne.

7. Kirjutada sümbolite abil, et -8 on negatiivne arv.

7. Kirjutada sümbolite abil, et $+3$ on positiivne arv.

8. Järjestada arvud

$$+4; -2; -5; -5,5; +3; 0; +1$$

suuruse järgi alates kõige väiksemaga.

8. Järjestada arvud

$$-7; -2; +2; +2,5; -1; +3,5$$

suuruse järgi alates kõige suuremaga.

Relatiivsete arvude liitmine.

Kahe ühe ja sama märgiga arvu summaks nimetatakse nende arvude absoluutväärtuste summat, mis on võetud selle märgiga, mis on liidetavail.

Näiteid:

$$(+3) + (+5) = +8;$$

$$(-2) + (-7) = -9.$$

Kahe erineva märgiga arvu summaks nimetame nende arvude absoluutväärtuste vahet, mis on võetud selle liidetava märgiga, kumma absoluutväärtus on suurem.

Näiteid:

$$(-4) + (+6) = +2;$$

$$(+5) + (-9) = -4.$$

Eespool toodud relatiivsete arvude summa definitsioonidest järeldame, et

kahe vastasarvu summa võrdub nulliga.

Näide:

$$(+2) + (-2) = 0.$$

Teiseks järeldame samadest definitsioonidest, et

kui kahest liidetavast üks on null, siis summa võrdub teise liidetavaga.

Näiteid:

$$(-2) + 0 = -2;$$

$$0 + (+3) = +3.$$

Juhul, kui liidetavaid on rohkem kui kaks, siis leiame summa kas nii, et arvutame kahe esimese liidetava summa, saadud summa liidame kolmanda liidetavaga, jne., või nii, et arvutame esmalt positiivsete arvude summa, siis negatiivsete arvude summa ja lõpuks liidame saadud summad.

Näiteid:

$$\begin{aligned} & (+7) + (-3) + (-5) + (+8) = \\ & = (+4) + (-5) + (+8) = (-1) + (+8) = +7; \\ & (-3) + (-8) + (+10) + (-2) + (+6) = \\ & = (+10) + (+6) + (-3) + (-8) + (-2) = \\ & = (+16) + (-13) = +3. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised summad:

- | | |
|---|--|
| <p>9. $(+728) + (+572)$
 $(+56,25) + (-86,75)$
 $(-0,37) + (-0,63)$
 $(-2\frac{5}{8}) + (+1\frac{1}{5})$
 $(-3\frac{1}{3}) + (-5,4)$</p> | <p>9. $(+5674) + (+4326)$
 $(-0,3015) + (-0,6185)$
 $(+\frac{5}{24}) + (-\frac{3}{16})$
 $(-1\frac{1}{2}) + (-8\frac{3}{4})$
 $(+0,667) + (-\frac{1}{3})$</p> |
|---|--|
10. $(-12) + (+9) + (-2) + (+4) + (-5)$
 $(+36) + (-52) + (-32) + (+64) + (-16)$
10. $(-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{2}) + (+\frac{5}{12}) + (-\frac{3}{8}) + (+\frac{1}{6})$
 $(+\frac{1}{4}) + (-\frac{1}{8}) + (-0,5) + (+0,4) + (-\frac{3}{4})$

Relatiivsete arvude lahutamine.

Relatiivsete arvude liitmise juhustest saame järeldada relatiivse arvu lahutamise juhise, sest kahe arvu vahe on niisugune arv, millega lahutatavat liites saame vähendatava. Niisiis vahe

$$(+5) - (-3)$$

väärtuseks peab olema niisugune arv, millega (-3) liitmisel saame $+5$, see on arv $+8$.

Seega

$$(+5) - (-3) = +8.$$

Teiselt poolt on ka

$$(+5) + (+3) = +8.$$

Edasi

$$(-5) - (+3) = -8, \text{ sest } (-8) + (+3) = -5.$$

Kuid ka

$$(-5) + (-3) = -8.$$

Nii saame relatiivse arvu lahutamiseks järgmise juhise:
relatiivse arvu lahutamise asemel liidetakse vastasaru.

Näide:

$$(-7) - (+2) = (-7) + (-2) = -9.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised vahed:

- | | | | |
|-----|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 11. | $(-8,4) - (-8,32)$ | 11. | $(+7,6) - (-2,4)$ |
| | $(+2\frac{1}{2}) - (-3\frac{1}{8})$ | | $(-5\frac{1}{8}) - (+2\frac{2}{3})$ |
| | $(-\frac{2}{3}) - (+\frac{7}{8})$ | | $(+\frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3})$ |
| | $(+5,2) - (-3\frac{1}{5})$ | | $(-0,125) - (+\frac{1}{8})$ |
| | $(-2,6667) - (+1\frac{1}{3})$ | | $(-3,3333) - (+1\frac{2}{3})$ |
| 12. | $(-5,27) - (-5,27)$ | 12. | $(+3650) - (+3650)$ |
| | $(+\frac{2}{3}) - (\frac{2}{3})$ | | $(-5\frac{1}{2}) - (-5)$ |
| | $(-a) - (-a)$ | | $(+n) - (+n)$ |
| | $(+b) - (+b)$ | | $(-m) - (-m)$ |
| | $(a - b) - (a - b)$ | | $(m + n) - (m + n)$ |

Arvutada:

13. $(+8) + (-2) + (-4) - (-5) - (-9)$
 $(-5,8) - (-3,6) + (-7,2) - (-6,1)$
13. $(-8\frac{1}{2}) - (-1\frac{1}{3}) + (-5\frac{1}{4}) - (-12\frac{3}{4})$
 $(+5\frac{1}{3}) + (-4\frac{1}{6}) - (-7\frac{2}{4}) - (+5)$

14. $4 - 6 + 8 + 7 - 25 - 7 + 2 - 9$
 $-3 - 3 - 3 + 4 - 6 - 1 + 10 - 2$
14. $3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 - 11$
 $-5 - 5 - 5 + 8 - 7 - 2 + 6 - 10$

Relatiivsete arvude korrutamise.

Relatiivsete arvude korrutist defineerime järgmiselt:

kahe relatiivse arvu korrutiseks nimetatakse nende arvude absoluutväärtuste korrutist, mis võetakse märgiga +, kui tegurid on ühe ja sama märgiga, ning märgiga -, kui tegurid on erinevate märkidega.

Näiteid:

$$\begin{aligned} (-5) \cdot (-3) &= +15; \\ (+4) \cdot (+7) &= +28; \\ (-6) \cdot (+2) &= -12; \\ (+8) \cdot (-3) &= -24; \\ 0 \cdot (-5) &= 0. \end{aligned}$$

Ülesanded.

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 15. | $(-\frac{2}{3}) \cdot (+\frac{3}{2})$ | 15. | $(+\frac{5}{8}) \cdot (+\frac{2}{3})$ |
| | $(-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{5}{2})$ | | $(-\frac{2}{8}) \cdot (-\frac{1}{6})$ |
| | $(+1,5) \cdot (+0,2)$ | | $(+3) \cdot (-1,2)$ |
| | $(+0,4) \cdot (-0,2)$ | | $(-0,03) \cdot (-0,2)$ |
| | $(-2\frac{1}{2}) \cdot (-5\frac{1}{5})$ | | $(-5\frac{1}{2}) \cdot (+\frac{2}{4})$ |
16. $(+0,6) \cdot (-1,5) \cdot (-2) \cdot (-0,3)$
16. $(-\frac{1}{3}) \cdot (+\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{1}{4}\frac{5}{6}) \cdot (-\frac{5}{6}) \cdot (-2)$

Relatiivsete arvude jagamine.

Relatiivsete arvude jagamise juhise saame järeldada relatiivsete arvude korrutise definitsioonist, sest jagatise ja jagaja korrutis on võrdne jagatavaga.

Kahe relatiivse arvu jagatis on võrdne nende arvude absoluutväärtuste jagatise, mis võetakse märgiga +, kui antud arvud on ühe ja sama märgiga, ning märgiga -, kui antud arvud on erineva märgiga.

Näiteid:

$$(+30) : (-6) = -5;$$

$$(-24) : (+8) = -3;$$

$$(-15) : (-5) = +3.$$

Ülesanded.

17. $(-20) : (-5)$

$$(-12) : (+3)$$

$$(-1,5) : (-0,03)$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) : \left(+\frac{7}{8}\right)$$

$$\left(+3\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{3}{5}\frac{1}{5}\right)$$

17. $(+16) : (+4)$

$$(-60) : (-15)$$

$$(+2,5) : (-0,002)$$

$$\left(-\frac{5}{8}\right) : \left(+\frac{1}{8}\frac{5}{8}\right)$$

$$(-2) : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

Negatiivse arvu astendamine.

Negatiivse arvu astendamise juhis järeldub korrutise definitsioonist, sest aste on võrdsete tegurite korrutis, milles iga tegur on võrdne astendatavaga. Niisiis,

negatiivse arvu aste on võrdne selle arvu absoluutväärtuse astmega, mis võetakse märgiga +, kui astendaja on paarisarv, ja märgiga —, kui astendaja on paaritu arv.

Näiteid:

$$(-2)^2 = 4;$$

$$(-2)^3 = -8;$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n};$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Ülesanded.

Astendada:

18. $(-2)^4$

$$(-3)^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(+\frac{3}{5}\right)^2$$

$$(-1)^6$$

18. $(-3)^2$

$$(-2)^5$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$(-1)^5$$

19. Arvutada avaldise

$$2x^3 - 5x^2 + x - 3$$

numbriline väärtus, kui $x = -\frac{1}{2}$.

19. Arvutada avaldise

$$a^3 - 2a^2 - 3a + 1$$

numbriline väärtus, kui $a = -\frac{2}{3}$.

§ 2. Algebraised avaldised.

Täht arvu tähisena.

Arutluste hõlbustamise, ülesannete lahendamise kergendamise ja väga paljude arvude vaheliste seoste väljendamise lihtsuse pärast arvu tähistatakse sageli tähega. Arvu tähistamiseks kasutatakse enamasti ladina tähti. Antud arve tähistatakse tavaliselt tähestiku algtähtedega, näiteks a, b, c, d, \dots , otsitavaid arve aga tähestiku lõpptähtedega, näiteks t, u, v, x, y, z, \dots .

Ka suuri tähti kasutatakse arvu tähisena. Näiteks füüsikas tähistatakse tungide suurust tähtedega P ja Q , elektri-voolu tugevust tähega J , juhtme takistust tähega R , jne. Geomeetrias tähistatakse pindala tähega S ja ruumala tähega V .

Mõnes avaldises täht tähendab mistahes arvu, mõnes mistahes nullist erinevat arvu, mõnes jälle mistahes positiivset arvu või mistahes negatiivset arvu või positiivset täisarvu või negatiivset täisarvu, jne.

Näiteks mõtet, et mingi arvu korrutis arvuga 1 on võrdne arvu endaga, saab matemaatiliste sümbolite abil väljendada nii:

$$1 \cdot a = a.$$

Selles võrduses täht a võib omada mistahes väärtust, kaasa arvatud ka 0.

Seevastu võrduses

$$\frac{a}{a} = 1,$$

mis väljendab tõsiasja, et arvu jagatis arvu endaga on 1, tähel a võib olla mistahes väärtus, välja arvatud väärtus 0, sest nulliga ei saa jagada. Seda võime kirjutada nii:

$$\text{kui } a \neq 0, \text{ siis } \frac{a}{a} = 1.$$

Ülesanne. Hulknurga külgede arv on n . Milliseid väärtusi võib omada n ?

Lahendus. Hulknurga külgede arv saab olla ainult täisarv, seepärast n peab olema täisarv. Hulknurga külgede arv ei saa olla alla 3, seega n on 2-st suurem täisarv, ehk, teisiti öeldes, n on 3-ga võrdne või 3-st suurem täisarv. Neid tõsiasju võime sümbolite abil kirjutada nii:

$$n > 2$$

ehk

$$n \geq 3.$$

Ülesanded.

20. Kui lahutame arvust arvu enda, siis saame 0. Kirjutada see tõde sümbolite abil. Mis väärtused võivad olla tähel saadud võrduses?

20. Liites arvuga arvu 0, saame arvu enda. Kirjutada see tõsiasja sümbolite abil. Mis väärtused võivad olla tähel saadud võrduses?

21. Avaldis $2n$ tähendagu positiivset paarisarvu. Mis väärtused võivad olla tähel n ?

21. Avaldis $2n$ tähendagu negatiivset paarisarvu. Mis väärtused võib omada n ?

22. Avaldis $2n + 1$ tähendagu positiivset paaritu arvu. Mis väärtused võivad olla tähel n ?

22. Avaldis $2n - 1$ tähendagu negatiivset paaritu arvu. Mis väärtused võivad olla tähel n ?

23. Mitu täisarvu on 0 ja täisarvu n vahel?

23. Mitu täisarvu on 0 ja täisarvu $m + 1$ vahel?

24. Arv t tähendagu prisma tahkude arvu. Mis väärtused võivad olla tähel t ?

24. Arv p tähendagu püramiidi tahkude arvu. Mis väärtused võivad olla tähel p ?

25. Avaldis $10a + b$ tähendab kahekohalist täisarvu, mille numbrid on a ja b . Mis väärtused võivad olla tähel a ja tähel b ?

25. Avaldis $100a + 10b + c$ tähendab kolmekohalist täisarvu numbritega a , b ja c . Mis väärtused võivad olla tähel a , tähel b ja tähel c ?

Üksliikmed ja hulkliikmed.

Algebraalises avaldises näidatud viimase tehte järgi nimetame avaldist summaks, vaheks, korrutiseks, jagatiseks või astmeks. Kõik avaldised liigitatakse kahte liiki: üksliikmed ja hulkliikmed.

Avaldis kannab üksliikme nime, kui temas viimane tehe ei ole liitmine ega lahutamine või kui temas mingit tehet üldse ei esine, ehk teisiti öeldes,

avaldis on üksliige, kui ta ei ole summa ega vahe.

Seega korrutised, jagatised ja astmed on üksliikmed.

Avaldist nimetame hulkliikmeks, kui viimane tehe temas on liitmine või lahutamine.

Niisiis summad ja vahed on hulkliikmed.

Näiteks avaldised

$$3, a, (a + 1)(a - 1), \frac{n}{n+2} \text{ ja } (a + b)^2$$

on üksliikmed, aga avaldised

$$a + 1, a^2 - b^2, a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

on hulkliikmed.

Hulkliikmes esinevate üksliikmete arvu järgi liigitatakse hulkliikmeid kaksliikmeteks, kolmeliikmeteks, jne.

Üksliikme, kaksliikme, kolmeliikme ja hulkliikme vastavad rahvusvahelised nimetused on monoom, binoom, trinoom ja polünoom.

Ülesanded.

26. Kirjutada sümbolite abil „kahe järjestikuse täisarvu korrutis“. Kas saadud avaldis on üksliige või hulkliige?

26. Väljendada algebralise avaldisena „mingi täisarvu ja temale järgneva täisarvu jagatis“. Mis liiki avaldis see on?

27. Avaldada sümbolite abil „kahe arvu ruutude vahe“. Mis liiki avaldis see on?

27. Kirjutada algebralise avaldisena „kahe arvu kuupe summa“. Mis liiki avaldis see on?

28. Väljendada sõnades algebraline avaldis

$$(m + n)(m - n).$$

Mis liiki avaldis see on?

28. Sõnastada avaldis

$$\frac{a + b}{a - b}.$$

Mis liiki avaldis see on?

29. Mis liiki on avaldis

$$a^2 + 2ab + b^2?$$

29. Mis liiki on avaldis

$$m^2 - 2mn + n^2?$$

30. Mis liiki on avaldis

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3?$$

30. Mis liiki on avaldis

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3?$$

31. Teisendada hulkliige

$$m^2 + 2mn + n^2$$

üksliikmeks.

31. Teisendada hulkliige

$$a^2 - 2a + 1$$

üksliikmeks.

Kordaja ehk koefitsient.

Üksliikme ees seisvat numbrilist tegurit koos selle üksliikme määrgiga nimetatakse kordajaks ehk koefitsiendiks.

Näiteks avaldises

$$-2a^2b$$

kordaja on -2 , ja avaldises

$$0,7(m + n)^2$$

on kordaja $0,7$.

Hulkliikme sarnased liikmed.

Kui hulkliikmes esineb üksliikmeid, mis erinevad ainult kordajate poolest või ei erinegi, siis selliseid hulkliikme liikmeid nimetame sarnasteks.

Näiteks hulkliikme

$$-5a^2 + 3a^2 + 8a^2 - 4a^2$$

liikmed on kõik sarnased, kuid hulkliikmes

$$3(a + b) - 7a - 5(a + b) + 2a + 1$$

on sarnasteks liikmeteks

$$3(a + b) \text{ ja } -5(a + b)$$

ning

$$-7a \text{ ja } +2a.$$

Liikmega $+1$ ei ole selles hulkliikmes sarnast.

Hulkliikmes

$$a^2b + 2ab^2 - 3a^2b^2 - 8$$

ei ole sarnaseid liikmeid.

Hulkliikme koondamine.

Kui hulkliikmes esineb sarnaseid liikmeid, siis seda hulkliiget saab koondada, sest korrutamise distributiivsuse seaduse põhjal on näiteks

$$5a - 3a + 4a = (5 - 3 + 4)a = 6a.$$

Tegelikul arvutamisel võib viimases kirjutises avaldise

$$(5 - 3 + 4)a$$

kirjutamata jätta, arvutades sarnaste liikmete kordajate summa peast.

Ülesanded.

Koondada hulkliikmed:

$$32. \quad -8a^2 - 2a^2$$

$$7a^2b^2 - 8a^2b^2 + a^2b^2$$

$$6a^3b^2 - 5a^2b^3 - 4a^3b^2 + 8a^2b^3$$

$$3(a + b)^4 + 5(a + b)^4 - 7(a + b)^4$$

$$32. \quad -4b^2 + 2b^2$$

$$-5x^2y + 4x^2y + x^2y$$

$$8a^3 - 7a^2 + 9a^3 - 3a^2$$

$$2(x - y)^5 + 7(x - y)^5 - 8(x - y)^5$$

§ 3. Tehted üksliikmetega ja hulkliikmetega.

Üksliikme liitmine.

Antud üksliikme liitmisel teise üksliikmega või hulkliikmega kirjutatakse antud üksliige oma märgiga teise üksliikme või hulkliikme juurde ja tulemus koondatakse, kui koondamine on võimalik.

Näide 1. Liites avaldised

$$3a^2 - 2a + 3 \text{ ja } -4a,$$

saame

$$3a^2 - 2a + 3 - 4a = 3a^2 - 6a + 3.$$

Näide 2.

$$(-4x^2y) + (-5x^2y) = -4x^2y - 5x^2y = -9x^2y.$$

Ülesanded.

Liita:

33. $5a^2b$ ja $3a^2b$
 $7ab$ ja $-4ab$
 $-\frac{1}{2}x$ ja $-\frac{1}{3}x$

33. $2ab^2$ ja $3ab^2$
 $-5xy$ ja $3xy$
 $-\frac{2}{3}a$ ja $-\frac{1}{4}a$

34. $2ab + 3a$ ja $-4a$
 $-4x^2 + 2x$ ja $+4x^2$

34. $5x^2 - 7x$ ja $+7x$
 $-8a + b$ ja $-9a$

Üksliikme lahutamine.

Antud üksliikme lahutamisel teisest üksliikmest või hulkliikmest kirjutatakse antud üksliikme vastasüksliige teise üksliikme või hulkliikme juurde ja tulemus koondatakse, kui koondamine on võimalik.

Näide 1. Üksliikmest $7ax$ lahutada üksliige $5ax$.

Saame

$$7ax - 5ax = 2ax.$$

Näide 2. Hulkliikmest $3a^2x - 5ax + 8a$ lahutada üksliige $-5a^2x$.

Saame

$$3a^2x - 5ax + 8a + 5a^2x = 8a^2x - 5ax + 8a.$$

Näide 3.
$$\frac{2}{3}a^2 - (-\frac{1}{6}a^2) = \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{3}\frac{2}{1}a^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{3}\frac{2+1}{2}a^2.$$

Ülesanded.

Lahutada:

35. üksliikmest $6ac$ üksliige $-6ac$

„ $-5x^2$ „ $+x^2$

35. „ $-7ax^2$ „ $+5ax^2$

„ $-b$ „ $-4b$

36. hulkliikmest $5a + 3b - 4$ üksliige $5a$

„ $-2a - 3x - 1$ „ $-7a$

36. „ $5x^2 - 6x - 2$ „ $+4x^2$

„ $-8m + 4n - mn$ „ $-mn$

Teostada lahutamine:

37. $2a - (+4a)$

$\frac{2}{3}x - (-\frac{1}{5}x)$

37. $-8n - (-5n)$

$\frac{2}{3}a^2 - (+\frac{5}{8}a^2)$

Üksliikmete korrutamine.

Üksliikmete korrutamiseks korrutatakse esmalt nende kordajad; ühesuguste tähttegurite astendajad liidetakse, et saada korrutises selle tähtteguri astendajat.

Näiteid:

$$3a^2bc \cdot (-5a^3b) = -15a^5b^2c;$$

$$-\frac{5}{12}a^{2n-3} \cdot (-\frac{3}{4}a^{1-n}b) = +\frac{5}{16}a^{n-2}b.$$

Ülesanded.

Korrutada:

$$\begin{aligned} 38. \quad & x^2 \cdot x^3 \\ & 4m^2 \cdot (-2m^4) \\ & -\frac{2}{3}a^2b^2c \cdot (-\frac{1}{2}a^3b^3cd) \\ & b^{n-4} \cdot b^{n+3} \\ & -\frac{1}{4}a(x+y)^n \cdot \frac{4}{3}a^2(x+y)^{1-n} \cdot [-a^3(x+y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad & -a^2 \cdot (-a^3) \\ & 3x^2 \cdot (-2x) \\ & 0,4a^2x^2y \cdot (-0,8ax) \\ & x^{m+2} \cdot x^{m-2} \\ & -5(a+b)^5 \cdot \frac{2}{3}(a+b)^4 \cdot \frac{1}{2}(a+b) \end{aligned}$$

Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Hulkliikme üksliikmega korrutamise juhise saame lähtudes summa korrutamise (korrutise distributiivsuse) seadusest:

hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutatatakse selle üksliikmega hulkliikme iga liige ja tulemused liidetakse.

Näiteid:

$$\begin{aligned} & 2a^2b^3 \cdot (3a^3b - 5a^2b^2 - ab^3) = \\ & = 6a^5b^4 - 10a^4b^5 - 2a^3b^6; \\ & -\frac{2}{3}a^pb^2 \cdot (3a - 6ab + 9b^2 - 3) = \\ & = -2a^{p+1}b^2 + 4a^{p+1}b^{2+1} - 6a^pb^{2+2} + 2a^pb^2 = \\ & = -2a^{p+1}b^2 + 4a^{p+1}b^3 - 6a^pb^4 + 2a^pb^2. \end{aligned}$$

Ülesanded.

$$\begin{aligned} 39. \quad & -2 \cdot (a - b - c) \\ & -5 \cdot (-3x + y - 1) \\ & 7ab \cdot (3a^2 - ab^2 - 2b^3) \\ & -0,2a^n \cdot (5a^n - 0,8a^{n-1} + 1,5a^{n-2}) \\ & \frac{3}{8}x^py^q \cdot (-6x + 12xy - \frac{1}{2}y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
39. \quad & 4 \cdot (x - 2y - 1) \\
& -6 \cdot (2a - 3ab - 4b) \\
& -8xy \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^3y - \frac{3}{8}y^3\right) \\
& 0,9y^m \cdot (10a^{1-m} - 2a^{2-m} + 0,9a^{3-m}) \\
& -\frac{3}{4}x^m y^n \cdot (4x^m y - \frac{2}{3}x^{m-1}y^2 - \frac{4}{3}x^{m-2}y^3)
\end{aligned}$$

Hulkliikmete korrutamine.

Hulkliikmete korrutamisel hulkliikmega tuleb korrutada ühe hulkliikme iga liige teise hulkliikme iga liikmega ja saadused liita; tulemus koondatakse, kui see võimalik on.

Näide:

$$\begin{aligned}
& (2a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2) = \\
& = 2a^4 + a^2b^2 - 2a^3b - ab^3 + 2a^2b^2 + b^4 = \\
& = 2a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Ülesanded.

Arendada korrutised:

$$\begin{aligned}
40. \quad & (3a^2 - a + 1)(a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}) \\
& (a^m + b^n)(a^m - a^m b^n + b^n) \\
& (a + b - 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40. \quad & (5a^3 + a^2 - a)(1 - a - \frac{1}{5}a^2) \\
& (x^n + 1)(x^n - x^{n-1} - x^{n-2}) \\
& (a - b + 1)^2
\end{aligned}$$

41. Leida korrutise

$$\left(2x^2 - 3x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right) \cdot \left(3x^2 + x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$$

see liige, milles x ei esine.

41. Leida eelmises ülesandes antud korrutise see liige, milles esineb x^3 .

Korrutamise valemid.

Mõnede hulkliikmete korrutamise tulemused on soovitatav meeles pidada ja neid kasutada korrutamise valemitena:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Ülesanded.

Arendada valemite abil järgmised korrutised:

- | | | | |
|--------|--------------------------|--------|--------------------------|
| 42. 1. | $(2a + 1)(2a - 1)$ | 42. 1. | $(1 + 7x)(1 - 7x)$ |
| 2. | $(x + 3y)^2$ | 2. | $(a + 4)^2$ |
| 3. | $(5a - x)^2$ | 3. | $(6x - a)^2$ |
| 4. | $(1 + 2x)^3$ | 4. | $(a + 2b)^3$ |
| 5. | $(2 - a)^3$ | 5. | $(3 - x)^3$ |
| 6. | $(3 + x)(9 - 3x + x^2)$ | 6. | $(8 + n)(64 - 8n + n^2)$ |
| 7. | $(a - 5)(a^2 + 5a + 25)$ | 7. | $(1 - y)(1 + y + y^2)$ |

43. Tõestada, et kehtib võrdus

$$(-a + b)(-a - b) = (a + b)(a - b).$$

43. Tõestada võrduse

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

kehtivus.

44. Näidata, et on kehtiv võrdus

$$(a - b)^2 = (b - a)^2.$$

44. Näidata, et võrdus

$$(b - a)^3 = -(a - b)^3$$

on õige.

45. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a - b)^2$, et tulemuseks oleks $(a + b)^2$?

45. Millise avaldise peab a ja b summa kuubist lahutama, et tulemuseks oleks a ja b kuupide summa?

Sulgude avamine ja sulgudesse sulgemine.

Liitmise assotsiatiivsuse seaduse (s. o. summa ja vahe liitmise ning summa ja vahe lahutamise seaduse) põhjal võime kirjutada:

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

ja

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d.$$

Sulgude ärajätmist avaldises nimetame sulgude avamiseks. Nagu näeme viimastes näidetes,

sulgude avamisel sel juhul, kui sulgude ees on märk $+$, jäetakse sulud lihtsalt ära; kui aga sulgude ees seisab märk $-$, siis sulgude avamisel sulgudes olevate liikmete märgid muudetakse vastupidisteks.

Kui viimaste võrduste pooled vahetada, siis saame:

$$a + b + c - d = a + (b + c - d)$$

ja

$$a - b - c + d = a - (b + c - d).$$

Niisugust teisendamist nimetame sulgudesse panemiseks ehk sulgudesse sulgemiseks.

Ulesanne 1. Avada sulud: $a + [b - (c - d)]$.

$$\begin{aligned} \text{Lahendus. } a + [b - (c - d)] &= a + [b - c + d] = \\ &= a + b - c + d. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Avada sulud: $(a - b)^2 - (a + b)(a - b)$.

$$\begin{aligned}\text{Lahendus. } & (a - b)^2 - (a + b)(a - b) = \\ & = a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - b^2) = \\ & = a^2 - 2ab + b^2 - a^2 + b^2 = \\ & = -2ab + 2b^2 = \\ & = 2b^2 - 2ab.\end{aligned}$$

Ülesanne 3. Sulgeda avaldises

$$1 - x^2 + 4xy - 4y^2$$

täisruut sulgudesse.

$$\begin{aligned}\text{Lahendus. } & 1 - x^2 + 4xy - 4y^2 = \\ & = 1 - (x^2 - 4xy + 4y^2) = \\ & = 1 - (x - 2y)^2.\end{aligned}$$

Ülesanded.

Avada sulud:

$$\begin{aligned}46. & m - [n + (r + s)] \\ & (a + b)^2 - (a - b)^2 \\ & (x + y)^3 - (x + y)(x^2 - xy + y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}46. & a - [b + (a - b)] \\ & (x - y)^2 + (x + y)^2 \\ & (m - n)(m^2 + mn + n^2) - (m + n)^3\end{aligned}$$

47. Panna avaldises

$$a - a^2 - 2ab - b^2$$

täisruut sulgudesse.

47. Avaldises

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

eraldada sulgudega täiskuup.

Üksliikme jagamine üksliikmega.

Üksliikme jagamisel teise üksliikmega esimese üksliikme kordaja jagatakse teise kordajaga, nii saame jagatise kordaja; ühesuguste tähttegurite jagamisel esimesest astendajast lahutame teise; tähttegur, mis esineb jagatavas ja jagajas ei esine, kirjutatakse tegurina jagatises.

Kui mõni tähttegur esineb jagajas, äga jagatavas ei esine, siis saame jagatise murdavaldise; seepärast ütleme sel juhul, et jagamine pole täisavaldistes võimalik.

Näiteid:

$$\begin{aligned} -14a^6b^5x : (-7a^5b^2) &= +2ab^3x; \\ -11a^2b^nc : 2\frac{3}{4}a^2b^{1-n} &= -4b^{2n-1}c. \end{aligned}$$

Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagatakse selle üksliikmega hulkliikme iga liige ja tulemused liidetakse.

Näide.

$$\begin{aligned} [4a^2(x+y)^5 - 6ab(x+y)^4 + 2a(x+y)^3] : 2a(x+y)^3 &= \\ = 2a(x+y)^2 - 3b(x+y) + 1. \end{aligned}$$

Ülesanded.

48. $-5abc : (-5ab)$

$$x^{3n} : (-x^{2n})$$

$$-0,8ab^7c^{m+1} : (-4b^6c^{m-1})$$

$$(\frac{2}{3}a^3b^2 - 3a^2b^3 - \frac{1}{2}ab^2c) : \frac{5}{8}ab^2$$

$$[10(a-b)^n - 8(a-b)^{n+1} - (a-b)^{n+2}] : 0,5(a-b)^n$$

48. $-x^{10} : (-x)$

$$a^{2m} : a^m$$

$$\frac{3}{4}xy^3z : (-6xy^2)$$

$$(-\frac{1}{3}m^3n^4 - 5m^4n^3 - \frac{2}{3}mn) : (-\frac{2}{3}mn)$$

$$[15(x+y)^{m+2} - 6(x+y)^{m+1} + (x+y)^m] : 0,2(x+y)^m$$

Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Hulkliikme jagamisel hulkliikmega korrastatakse nii jagatav kui ka jagaja ühe ja sama tähtteguri kas alanevate või tõusvate astmete järgi ja siis toimitakse järgmiselt: jagatava esimese liikme jagamise teel jagaja esimese liikmega leitakse jagatise esimene liige; jagatise esimene liige korrutatakse jagajaga, saades sel viisil esimese osakorrutise; esimene osakorrutis lahutatakse jagatavast, nii saadakse esimene jääk; esimese jäägi esimese liikme jagamise teel jagaja esimese liikmega leitakse jagatise teine liige; jagatise teine liige korrutatakse jälle jagajaga, nii saadakse teine osakorrutis, selle lahutamisel esimesest jäägist saadakse teine jääk; teise jäägi esimese liikme jagamise teel jagaja esimese liikmega leitakse jagatise kolmas liige, jne., kuni jõutakse jäägini, mis on null, või jäägini, mille kõrgeima liikme aste on madalam kui jagaja kõrgeima liikme aste. Viimasel juhul lõpeb jagamine jäägiga.

Korrastamisel kirjutatakse puuduvate liikmete kohale nullid.

Näide 1. Jagada avaldis $a^8 - b^8$ avaldisega $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{r|l}
 a^8 + 0 + 0 + 0 - b^8 & a^2 - b^2 \\
 a^8 - a^6b^2 & \hline
 a^6b^2 + 0 + 0 - b^8 & a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 \\
 a^6b^2 - a^4b^4 & \hline
 a^4b^4 + 0 - b^8 & \\
 a^4b^4 - a^2b^6 & \hline
 a^2b^6 - b^8 & \\
 a^2b^6 - b^8 & \hline
 0 &
 \end{array}$$

Seega

$$(a^8 - b^8) : (a^2 - b^2) = a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6.$$

Näide 2. Jagada hulkliige

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x + 2$$

hulkliikmega $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x + 2 & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
 x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 & x^3 - 4x - 5 \\
 \hline
 -4x^4 + 3x^3 + x^2 - 8x + 2 & \\
 -4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x & \\
 \hline
 -5x^3 + 13x^2 - 12x + 2 & \\
 -5x^3 + 10x^2 - 15x + 5 & \\
 \hline
 3x^2 + 3x - 3 & \text{jääk.}
 \end{array}$$

Ülesanded.

Teostada jagamine:

49. $(a^5 + a^4 - 4a^3 + a^2 + a - 4) : (a^2 - a + 1)$

49. $(x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x - 3) : (x^2 - 1)$

50. $(10m^3 - 19m^2 - 10m + 1) : (2m^2 - 3m - 4)$

50. $(6x^3 - 17x^2 + 3x + 16) : (3x^2 - 4x - 5)$

51. $(a^5 - b^5) : (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

51. $(x^5 + 32) : (x + 2)$

Asendamine.

Avaldise numbrilise väärtuse arvutamisel temas esineva tähe etteantud väärtuse puhul toimitakse nii, et avaldises kirjutatakse tähe asemele selle tähe etteantud väärtus ja teostatakse siis avaldises ettekirjutatud tehted.

Näide 1. Arvutada avaldise

$$3x^2 - 2x - 1$$

numbriline väärtus, kui $x = 5$.

Asendades avaldises x -i arvuga 5, saame

$$3x^2 - 2x - 1 = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 - 1 = 3 \cdot 25 - 10 - 1 = \\ = 75 - 11 = 64.$$

Märkus. Nõuet, arvutada avaldise

$$3x^2 - 2x - 1$$

numbriline väärtus, kui $x = 5$, märgitakse sümbolite abil lühidalt järgmisel viisil:

$$\left[3x^2 - 2x - 1 \right]_{x=5}.$$

Niisiis

$$\left[3x^2 - 2x - 1 \right]_{x=5} = 64.$$

Niisugust toimingut, et mingi sümboli või avaldise asemele pannakse teine sümbol või teine avaldis, nimetame asendamiseks.

Näide 2. Avaldises $x^2(x - b)$ asendada x avaldisega $a + b$.

$$\left[x^2(x - b) \right]_{x=a+b} = \\ = (a + b)^2(a + b - b) = (a^2 + 2ab + b^2)a = a^3 + 2a^2b + ab^2.$$

Ülesanded.

52. Arvutada avaldise $2x^2 - 5x + 2$ numbriline väärtus, kui $x = -2$.

52. Missuguse väärtuse omab avaldis $3x^3 - x^2 + x$, kui $x = -1$?

53. Avaldises $x^2 + y^2$ asendada x avaldisega $a + b$ ja y avaldisega $a - b$.

53. Panna avaldises $x^3 - y^3$ tähe x asemele $a + 1$ ja tähe y asemele $a - 1$.

54. Näidata arvutamise teel, et

$$\left[x^3 - 4x^2 + 2x - 7 \right]_{x=1} = - \left[7 - 2x + 4x^2 - x^3 \right]_{x=1}$$

54. Kas on kehtiv võrdus

$$\left[x^2 - 5x + 6 \right]_{x=1} = \left[x^2 - 5x + 6 \right]_{x=4} ?$$

§ 4. Võrre.

Nagu teada, on võrdeliste suuruste vastavate väärtuste jagatised võrdsed. Näiteks kullatükkide kaalud on võrdelised nende tükkide ruumaladega, seega on vastavate kaalude ja ruumalade jagatised võrdsed.

Tabelist

Kullatüki kaal (grammides)	7,72	36,67	50,18	82,99	98,43
Kullatüki ruumala (kuupsentimeetris)	0,4	1,9	2,6	4,3	5,1

võime kirjutada jagatiste võrduse:

$$\frac{7,72}{0,4} = \frac{36,67}{1,9}$$

ehk $7,72 : 0,4 = 36,67 : 1,9$.

Kahe jagatise võrdust nimetame võrdeks ehk proportsiooniks.

Kahe arvu jagatist nimetatakse ka nende arvude suhteks. Viimast võrdust loetakse nii:

7,72 ja 0,4 suhtuvad nagu 36,67 ja 1,9.

Seega võrre

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

väljendab mõtet, et a ja b suhtuvad nagu c ja d .

Võrdes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ehk } a : b = c : d$$

nimetatakse arvusid a ja d võrde välisliikmeteks ning arvusid b ja c siseliikmeteks.

Korrutades selle võrde kumbagi poolt avaldisega bd saame, et

$$\frac{a \cdot bd}{b} = \frac{c \cdot bd}{d} \text{ ehk } ad = bc,$$

mis tähendab seda, et

võrde välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega.

Viimases lauses väljendatud omadus kannab võrde põhiomaduse nime.

Umberpöörduvalt, on õige ka, et kui

$$ad = bc,$$

siis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

s. t. kui võrdes välisliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega, siis võrre on õige. Siit järeldub, et võrre jääb õigeks, kui temas vahetada siseliikmed omavahel või välisliikmed omavahel.

Nii et võrdest

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

järelduvad uued võrded

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ ja } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Võrde põhiomaduse abil saab kontrollida, kas võrre on õige.

Korrutades võrde

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

kumbagi poolt arvuga b , saame

$$a = \frac{bc}{d},$$

mis ütleb, et

võrde välisliige on võrdne siseliikmete korrutise ja teise välisliikme jagatisega.

Arvuga d korrutades antud võrde pooli leiame, et

$$c = \frac{ad}{b},$$

s. o.

võrde siseliige on võrdne välisliikmete korrutise ja teise siseliikme jagatisega.

Eelmistest lausetest selgub, et võrde kolme liikme järgi saab neljanda arvutada.

Näide 1.

$$\frac{50,18}{x} = \frac{98,43}{5,1}$$
$$x = \frac{5,1 \cdot 50,18}{98,43} = 2,6.$$

Näide 2.

$$\frac{n}{9a^2} = \frac{x}{3ab}$$
$$x = \frac{n \cdot 3ab}{9a^2} = \frac{nb}{3a}.$$

Võrdusest $\frac{m}{x} = n$ võime moodustada võrde $\frac{m}{x} = \frac{n}{1}$ ja siit leiame, et

$$x = \frac{m \cdot 1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Siinjuures viimase võrde moodustamine võib toimuda peast.

Ülesanded.

Arvutada x:

$$55. \quad x : \frac{4}{15} = 3\frac{3}{4} : 2\frac{3}{5}$$

$$55. \quad 5,2 : x = 1,3 : 0,035$$

$$56. \quad \frac{x}{m} = \frac{5n}{2m}$$

$$56. \quad \frac{ab}{cd} = \frac{cd}{x}$$

$$57. \quad \frac{0,65}{x} = 0,5$$

$$57. \quad 0,4 = \frac{1}{x}$$

Tuletatud võrre.

Kui võrde

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

mõlemale poolele lisada arv 1 või lahutada arv 1, siis saame vastavalt uued võrded

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{ja} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Kui eelviimase võrde pooled jagada viimase võrde pooltega, või ümberpöörduvalt, siis saame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{ja} \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Alg võrde

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

suhtes kannavad võrded

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{ja} \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

tuletatud võrrete nime.

Selgitame näidete abil, kuidas tuletatud võrrete rakendamise võimaldab antud võrdest otsitavat avaldada.

Näide 1. $\frac{n+x}{n-x} = \frac{a}{b}$. Leida x .

Moodustame tuletatud võrde:

$$\frac{n+x+n-x}{n+x-(n-x)} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$\frac{2n}{2x} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$\frac{n}{x} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$x = \frac{n(a-b)}{a+b}.$$

Näide 2. $\frac{3}{x+2} = \frac{4}{x-2}$. Leida x .

Vahetame välisliikmed:

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{4}{3}.$$

Moodustame tuletatud võrde:

$$\frac{x-2+x+2}{x-2-(x+2)} = \frac{4+3}{4-3},$$

$$\frac{2x}{-4} = \frac{7}{1},$$

$$\frac{x}{-2} = 7; \quad x = -14.$$

Näide 3. Arvutada x ja y , kui

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{6}, \text{ teades, et } x + y = 22.$$

Moodustame tuletatud võrde:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{5+6}{6},$$

$$\frac{22}{y} = \frac{11}{6}; \text{ siit } y = \frac{6 \cdot 22}{11} = 12.$$

Asendame nüüd algvõrdes y arvuga 12, saame:

$$\frac{x}{12} = \frac{5}{6}, \text{ siit } x = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

Seega $x = 10$ ja $y = 12$.

Ülesanded.

58. $\frac{c-x}{x} = \frac{c}{d}$. Avaldada x .

58. $\frac{5+x}{x} = \frac{8}{5}$. Arvutada x .

59. $\frac{6}{x+3} = \frac{5}{x-3}$. Leida x .

59. $\frac{7+x}{5} = \frac{7-x}{3}$. Arvutada x .

60. Arvutada x ja y väärtused teades, et

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ ja } x + y = 24.$$

60. Arvutada m ja n väärtused teades, et

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{6} \text{ ja } m - n = 2.$$

61. Avaldada x ja y teades, et

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ ja } x + y = a.$$

61. Avaldada x ja y teades, et

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \text{ ja } x - y = n.$$

§ 5. Võrrandid.

Võrduste liigitelu.

Võrdusi võib liigitada samasusteks ja võrranditeks. Samasus on niisugune võrdus, mis

jääb õigeks temas esineva tähe igal väärtusel. Näiteks võrdused

$$2a + 3a = 5a,$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25,$$

$$(b - x)(b^2 + bx + x^2) = b^3 - x^3$$

on samasused. Samasuseks nimetame ka niisugust õiget võrdust, mis koosneb ainult numbrilistest avaldistest. Niisugused samasused ei sisaldagi tähti.

Näiteks võrdus $2 \cdot 3 = 6$ on samasus.

Seevastu võrdused $x + 3 = 7$

ja $x^2 - 5x = 6$

ei jää õigeks, ei muutu samasuseks neis esineva tähe igal väärtusel, vaid ainult mõnel määratud väärtusel. Me näeme, et võrdus $3 + x = 7$ jääb õigeks ainult siis, kui $x = 4$, sest mingi muu arvu ja 3 summa ei ole 7.

Teine võrdus jääb õigeks siis, kui

$$x = -1 \text{ või kui } x = 6.$$

Tõesti

$$(-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 6$$

ja ka

$$6^2 - 5 \cdot 6 = 6.$$

Kuid see võrdus ei ole enam õige, kui näiteks $x = 7$, sest

$$7^2 - 5 \cdot 7 = 49 - 35 = 14,$$

aga

$$14 \neq 6.$$

Niisugust võrdust, milles esineb täht ja mis ei ole samasus, nimetatakse võrrandiks.

Võrrandis esinevat tähte nimetame otsitavaks. Niisuguse otsitava väärtuse leidmist, mis võrrandi teeb õigeks võrduseks, ehk teisiti öeldes, mis võrrandi muudab samasuseks, nimetame võrrandi lahendamiseks; leitud otsitava väärtus on võrrandi lahend.

Kui otsitav ei esine võrrandis kõrgemas kui esimeses astmes, siis nimetame võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks.

Kui antud võrrandis on otsitavaid ainult üks, siis on see ühe otsitavaga võrrand.

Näiteks võrrand

$$5x - 2 = 3x + 18$$

on ühe otsitavaga lineaarne võrrand.

Ülesanded.

Otsustada, kas antud võrdus on samasus või võrrand:

62. $18x - 8x = 10x$

62. $9 - a = 5$

63. $3x = 6$

63. $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$

64. $x^2 + x = 12$

64. $a(a + 1) = 30$

Ühe otsitavaga lineaarse võrrandi lahendamine.

1. Kõige lihtsam ühe otsitavaga lineaarne võrrand on

$$ax = 0,$$

kus a võib olla mistahes nullist erinev arv; a ei saa siin null olla, sest antud võrdus ei oleks siis enam võrrand.

Selle võrrandi lahendiks on arv null, lühidalt:

$$x = 0,$$

sest nulli ja nullist erineva arvu a korrutis on null.

Niisiis näiteks võrrandist

$$-5,7x = 0$$

järeldame, et

$$x = 0.$$

2. Iga ühe otsitavaga lineaarset võrrandit saab teisen-
dada niisuguseks, nagu

$$ax = b,$$

kus võrrandi vabaliige b võib tähendada mistahes arvu ja
võrrandi kordaja a mistahes nullist erinevat arvu. Selle
võrrandi lahendiks on $\frac{b}{a}$, lühidalt:

$$x = \frac{b}{a},$$

sest b pidi olema tegurite a ja x korrutis, mispärast tegur
 x ongi korrutise b ja teise teguri a jagatis.

Seda lahendust on kasulik meeles pidada juhisenä:

võrrandi $ax = b$ lahendi x saamiseks tuleb vabaliige jagada võrrandi
kordajaga.

3. Kui antud võrrand ei ole nii lihtne, nagu punktides
1 ja 2 toodud näited, siis peab seda võrrandit lihtsustama.
Võrrandi lihtsustamine toimub võrrandi teisendamise lau-
sete põhjal, mis järelduvad võrduse omadustest:

I. Võrrandi pooled võib vahetada.

Näiteks võrrandi

$$16 = 4x$$

asemel võime kirjutada

$$4x = 16,$$

millest

$$x = 4.$$

Võrduse omadusest, et võrdus jääb õigeks, kui tema kumbagi poolt suurendada või vähendada ühe ja sama arvu võrra, järeldub võrrandi teisendamise lause:

II. Kui võrrandi kummalgi poolel on võrdsed liikmed, siis need liikmed võib ära jätta.

$$\begin{aligned} \text{N ä i d e.} \quad 12x + 7x &= 48 + 7x \\ 12x &= 48 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Sellest samast eespool nimetatud võrduse omadusest järeldub veel:

III. Võrrandi liikme võib viia ühelt poolelt teisele poolele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

Näiteks võrrandis

$$5x - 2 = 3x + 14$$

võib kirjutada liikme -2 paremale poolele märgiga $+$ (sellega liidame kummalegi poolele 2) ja liikme $3x$ vasakule poolele märgiga $-$ (sellega lahutame kummastki poolest $3x$), nii saame

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= 14 + 2 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Kui võrrandis ei ole sulgusid ega murdusid, siis saab viimasest teisenduslauselist järeldada järgmise juhise:

otsitavaga liikmed kirjutatakse võrrandi vasakule poolele, vabaliikmed paremale poolele, siis koondatakse ja leitakse otsitav vabaliikme jagamise teel võrrandi kordajaga.

Kui võrrandis esinevad sulud, siis avatakse need ning, toimides eespool antud juhiste järgi, arvutatakse lahend.

$$\begin{aligned} \text{Näide. } (7 - x)(49 + 7x + x^2) + 12x^2 &= (4 - x)^3 \\ 343 - x^3 + 12x^2 &= 64 - 48x + 12x^2 - x^3 \\ 343 &= 64 - 48x \\ 48x &= 64 - 343 \\ 48x &= -279 \\ x &= -5\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandid:

65. $3\frac{1}{2}x = 0$

65. $-\frac{5}{6}x = 0$

66. $17,2 = 2x$

66. $6,6 = 3x$

67. $7x - 5 = 3x + 3$

67. $9x + 4 = 28 - 3x$

68. $15x + 8 - 20x = 19 - 7x + 1$

68. $20 - 4x - 5 = 5x + 45 - 12x$

69. $4(x + 2) + 3(x - 1) = 5(3 - x) + 2$

69. $8(2 - 3x) + 11(2x - 3) = 7(4 - 5x + 3)$

70. $14(x - 2) - 5(2x - 3) = 5 - 3(2x - 4)$

70. $16 - 3(4 - 5x) = 6(3x - 4) - 2(5x - 8)$

71. $(x + 2)(x + 3) = (x - 5)(x + 6)$

71. $(3 - x)(5 + 2x) = (2 + x)(6 - 2x)$

72. $4 + (3x - 1)(4x - 8) = (6 - 2x)(5 - 6x)$

72. $20 - (3x + 2)(8x - 5) = (6x - 1)(5 - 4x)$

73. $(5x + 2)(5x - 2) = (5x - 1)^2$

73. $(3x + 2)^2 = 8 - (8 + 3x)(8 - 3x)$

74. $(x + 11)(x^2 - 11x + 121) = (x - 3)^3 + 8 + 9x^2$

74. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x + 4)^3 - 12x(x - 2)$

Ülesannete lahendamine võrrandi abil.

Ülesanne 1. Kündmine traktoriga edeneb 4 korda jõudsamini kui kahehobuse adraga. Päeva jooksul kündis traktorist 2 hektaari rohkem kui hobusemees. Mitu ha kündis hobusemees päevas ja mitu ha traktorist?

Lahendus. Hobusemees kündis päevas x ha;
traktorist " " $x + 2$ ha.

Andmete põhjal on teine arv esimesest 4 korda suurem, seega saame võrrandi

$$4x = x + 2.$$

Siit

$$4x - x = 2$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}, \text{ mis ongi hobusemehe küntud ha arv.}$$

Traktorist kündis päevas 4 korda rohkem, niisiis

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Kontroll.

$$2\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2.$$

Vastus. Hobusemees kündis päevas $\frac{2}{3}$ ha, traktorist aga $2\frac{2}{3}$ ha.

Ülesanne 2. Jaotada arv 160 kaheks liidetavaks nõnda, et need liidetavad suhtuksid nagu 3 : 5.

Lahendus. Kui üks liidetav on $3x$,
siis teine " " $5x$.

Saame: $3x + 5x = 160$

$$8x = 160$$

$$x = 20.$$

Niisiis $3x = 3 \cdot 20 = 60$ ja $5x = 5 \cdot 20 = 100$.

Kontroll. $60 : 100 = 3 : 5$
 $60 + 100 = 160.$

Vastus. Otsitavad liidetavad on 60 ja 100.

Ülesanded.

75. Jalgrattur liigub 3 korda kiiremini kui jalakäija. Tunnis kulgeb jalgrattur 12 km rohkem kui jalakäija. Kui suure kiirusega liigub kumbki?

75. Külvamine külvimasinaga edeneb 10 korda jõudsamini kui käsitsi. Päevas jõuab külvimasinaga 25 ha rohkem külvata kui käsitsi. Mitu ha päevas jõuab külvata käsitsi ja mitu ha masinaga?

76. Metsavaht hakkab raiestikust koos oma koeraga koju minema. Koer jookseb ees liikudes oma peremehest 2 korda kiiremini. Kui koer jõuab koju, hakkab ta sama kiirusega peremehele vastu jooksma. Nad kohtuvad 2 km kaugusel kodust. Kui kaugel on raiestik kodust?

76. Õde ja väikeveli hakkavad toa juurest kaevu juurde minema. Õde kõnnib 3 korda kiiremini kui väikeveli. Kui õde jõudis kaevu juurde, tuli ta kohe tagasi väikevellele vastu. Nad kohtusid 10 m kaugusel kaevust. Kui kaugel on kaev toast?

77. 2,5 m pikkune sirglõik jaotatakse kaheks osaks nii, et nende pikkused suhtuvad nagu 3 : 2. Leida osade pikkused.

77. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk ja tipunurk suhtuvad nagu 5 : 2. Arvutada selle kolmnurga nurgad.

78. Vend on 16 aastane, õde 4 aastane. Mitme aasta pärast on vend õest 2 korda vanem?

78. Praegu on vanem vend 15 aastane ja noorem vend 11 aastane. Mitme aasta eest oli vanem vend nooremast 3 korda vanem?

79. Kolmnurga kaks külge suhtuvad nagu 2 : 5 ja kolmas külge on eelmise küljepaari pikemast küljest 5 meetri võrra lühem. Arvutada kolmnurga külgede pikkused teades, et kolmnurga übermõõt on 19 meetrit.

79. Kolmnurga kaks nurka suhtuvad nagu 3 : 4. Kolmas nurk on 40° võrra suurem kui väiksem nurk kahest eelmisest. Arvutada kolmnurga nurkade suurused.

Võrrandite ekvivalentsus.

Võrrandi teisendamise teel, nagu võrrandi poolte vahetamisel, kummalegi poolele ühe ja sama arvu liitmisel või lahutamisel, võrrandi liikme viimisel ühelt poolelt teisele poolele, sulgude avamisel ja kummagi poole koondamisel, saame algvõrrandist uue võrrandi. Uuel võrrandil on sama lahend, mis algvõrrandil. Niisiis ülalnimetatud võrrandi teisendused muudavad küll võrrandi kuju, aga ei muuda võrrandi lahendi väärtust.

Võrrandeid, millel on võrdsed lahendid, nimetatakse ekvivalentseiks ehk üheväärseiks võrrandeiks.

Kas antud võrrandid on ekvivalentsed või mitte, seda saab mõnikord otsustada juba nende kuju järgi: kui on näha, et üks võrrand on teise võrrandi mõni eespool nimetatud teisend, siis on ilmne, et vaadeldavad võrrandid on ekvivalentsed.

Näiteks võrrandid

$$2(x + 3) = 12 \text{ ja } 2(x + 3) - 2 = 10$$

on ekvivalentsed, sest teine on esimesest saadud sel teel, et esimese kummastki poolest on lahutatud 2.

Kui ekvivalentsus võrrandite kuju järgi pole näha, siis lahendame antud võrrandid ja võrdleme lahendeid.

Näide. Kas võrrandid

$$(x + 3)^2 = x^2 + 9 \text{ ja } x + 3 = 9$$

on ekvivalentsed või mitte?

Esimese võrrandi lahendamine annab:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 9$$

$$6x = 0$$

$$x = 0.$$

Teise võrrandi lahendamisel saame:

$$x + 3 = 9$$

$$x = 6.$$

Näeme, et antud võrrandid ei ole ekvivalentsed, sest nende lahendid 0 ja 6 ei ole võrdsed.

Ülesanded.

Otsustada, kas alljärgnevad võrrandid on ekvivalentsed või mitte:

80. $2x = 7$ ja $2x + 3 = 10$

80. $3x - 5 = 0$ ja $3x = 5$

81. $7(x - 1) = 2x$ ja $7(x - 1) + x = 3x$

81. $(x + 8)^2 = x^2$ ja $(x + 8)^2 - x^2 = 0$

82. $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x + 3$

ja

$$(x - 1) = (x + 1)(x - 1)$$

82. $(1 + x)^2 = (x + 1)(x + 2)$

ja

$$(x + 1)^3 - x = x^3 + 3x(x + 1)$$

$$83. (x - 1)(x^2 + x + 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

ja

$$2x + 4 = 0$$

$$83. (y - 1)^3 = y^3 - 3y(y^2 - 2)$$

ja

$$6 = 3y - 3$$

§ 6. Kahe otsitavaga lineaarne võrrand.

Kui lineaarses võrrandis on kaks otsitavat, siis nime-tame seda võrrandit kahe otsitavaga lineaarseks võrrandiks. Niisuguse võrrandi näiteks on

$$ax + by = c,$$

kus võrrandi kordajad a ja b võivad olla mistahes nullist erinevad arvud ning võrrandi vabaliige c mistahes arv. Kumbki kordaja, ei a ega b ei või olla null, sest siis võrrand $ax + by = c$ ei oleks enam kahe otsitavaga võrrand või ei oleks üldse võrrand.

Kahe otsitavaga lineaarse võrrandi lahendiks nimetame niisugust otsitavate x ja y väärtuste paari, mis antud võrrandi teeb õigeks võrduseks.

Küsime nüüd, kuidas leida niisugune x ja y väärtuste paar, mis rahuldaks näiteks võrrandit

$$5x + 2y = 16?$$

Vastuse saamiseks sellele küsimusele arutleme nõnda: kui otsitavaks oleks ainult y , siis oleks

$$2y = 16 - 5x$$

$$y = 8 - \frac{5x}{2}.$$

Nüüd on otsitav y avaldatud otsitava x kaudu. Viimasest võrdusest näeme, et niipea, kui x on määratud, võib kohe

y arvutada. Me näeme edasi, et igale x-i väärtusele saab leida vastava y väärtuse, näiteks

$$\text{kui } x = 2, \text{ siis } y = 3;$$

$$\text{,, } x = 3, \text{ ,, } y = 0,5;$$

$$\text{,, } x = 4, \text{ ,, } y = -2, \text{ jne.}$$

Tõesti, kui viimastest väärtuste paaridest ükskõik mis-sugune asetada algvõrrandisse

$$5x + 2y = 16,$$

siis saame õige võrduse.

Nii on näiteks viimase väljakirjutatud arvude paari puhul:

$$5 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 16.$$

Ulal toodud arutlusest selgub, et väärtuste paare, mis rahuldavad kahe otsitavaga lineaarset võrrandit, võib arvutada kuitahes palju. Arvutamine võib toimuda järgmise juhise järgi:

väljendame ühe otsitava teise otsitava kaudu, nüüd võtame teise otsitava väärtuse vabalt ja selle järgi arvutame esimese otsitava väärtuse.

Selle juhise järgi toimides võib näitena toodud võrrandi

$$5x + 2y = 16$$

lahendi mõlema väärtuse arvutamiseks kirjutada valemid, sest võrduses

$$y = 8 - \frac{5x}{2}$$

võime x-i väärtuse võtta vabalt, ning märkides selle vabalt võetud väärtuse näiteks tähega t, saame

$$x = t;$$

nüüd

$$y = 8 - \frac{5t}{2}.$$

Niisiis võrrandi

$$5x + 2y = 16$$

lahendid sisalduvad valemeis

$$\begin{cases} x = t \\ y = 8 - \frac{5t}{2}, \end{cases}$$

kus t on mistahes vabalt võetav väärtus. Arvutatud väärtused võib ülevaatlikkuse pärast tabelisse korraldada.

Mõnikord esitatakse kahe otsitavaga lineaarse võrrandi lahendite kohta lisatingimusi. Uheks niisuguseks lisatingimuseks võib olla näiteks see, et lahendid peavad olema täisarvulised.

Meie lahendi

$$\begin{cases} x = t \\ y = 8 - \frac{5t}{2} \end{cases}$$

kohta tähendab see nõue seda, et esiteks t peab olema täisarv, ja teiseks, et ka $\frac{5t}{2}$ peab olema täisarvuline. Seda liiget võib kirjutada kujul

$$5 \cdot \frac{t}{2}.$$

Et avaldis $5 \cdot \frac{t}{2}$ oleks täisarvuline, selleks on tarvilik ja ka piisav, et $\frac{t}{2}$ oleks täisarv, nii et oleks

$$\frac{t}{2} = k,$$

siit $t = 2k$.

Nii saame valemid täisarvuliste lahendite jaoks, asendades eelmistes valemites t avaldisega $2k$:

$$\begin{aligned} x &= 2k \\ y &= 8 - 5k, \end{aligned}$$

kus k võib olla mistahes täisarv.

Kirjutame näitena välja võrrandi

$$5x + 2y = 16$$

mõned täisarvulised lahendid:

k	x	y
-1	-2	13
0	0	8
1	2	3
2	4	-2
3	6	-7
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Ülesanded.

Anda valemid alljärgnevate võrrandite lahendamiseks ja kirjutada välja 5 arvude paari, mis antud võrrandit rahuldavad:

84. $3x + y = 6$

84. $x + 2y = 8$

85. $3x + 4y = 12$

85. $5x + 6y = 30$

86. $4x - 2y = 5$

86. $6x - y = 4$

Leida 5 täisarvude paari, mis rahuldavad antud võrrandit:

87. $x + 2y = 10$

87. $3x + 2y = 12$

88. $x - 3y = 6$

88. $2x - 3y = 6$

89. $2y - 8 = 3x$

89. $4x - 10 = 3y$

§ 7. Lineaarne võrrandisüsteem kahe otsitavaga.

Kahe otsitavaga võrrandi lahendamisel võib antud võrrandi lahendite kohta esineda nõue, et need rahuldaksid veel teist antud võrrandit. Näiteks võib nõuda: leida võrrandi

$$2x + 3y = 21$$

niisugused lahendid, mis oleksid ühtlasi võrrandi

$$6x - y = 13$$

lahendeiks.

Sel puhul antud võrrandid moodustavad võrrandite süsteemi. Võrrandite ühte süsteemi kuuluvus märgitakse kirjas võrrandite ette kirjutatud loogelise suluga.

Näide:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13. \end{cases}$$

Niisugust arvupaari, mis antud süsteemi võrrandeid rahuldab, nimetame antud võrrandisüsteemi lahendiks. Nii on siin näitena toodud võrrandisüsteemi lahendiks arvude paar

$$3 \text{ ja } 5, \text{ nimelt } x = 3 \text{ ja } y = 5,$$

milles võib veenduda kontrollimise teel. Lahendiks saadud arvupaari kokkukuuluvus märgitakse ka suluga. Niisiis antud võrrandisüsteemi lahend kirjutatakse järgmiselt:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Tuntakse mitmesuguseid võrrandisüsteemi lahendamise võtteid, sealhulgas liitmisvõtet ja asendusvõtet. Võrrandisüsteemi lahendamise võtete mõte seisneb

selles, et võrrandi teisendamise lausete põhjal antud võrranditest järeldada niisugune võrrand, milles esineb üksainus otsitav. Võrrandisüsteemi lahendamisel kasutame lisaks eespoolt tuttavatele teisendustele veel seda võrrandi teisenduslauset; et

võrrandi iga liiget võib ühe ja sama arvuga korrutada või jagada.

See teisenduslause on otsene järeldus sellest võrduse omadusest, et võrdus jääb õigeks, kui tema kumbagi poolt ühe ja sama arvuga korrutada või jagada.

Viimane võrrandi teisenduslause lubab teha järelduse, et

võrrandi liikmete märgid võib vahetada,

sest võrrandi liikmete märkide vahetamine pole muud kui liikmete korrutamine arvuga -1 .

Liitmisvõtte. Lahendame liitmisvõttega võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13. \end{cases}$$

Kui teise võrrandi liikmed korrutame 3-ga, siis saame

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39. \end{cases}$$

Liites nüüd võrrandite vastavad pooled, saame:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \\ \hline 20x \quad = 60, \end{array}$$

siit

$$x = 3.$$

Asetades leitud x -i väärtuse ühte võrrandisse, näiteks esimesse, x -i asemele, saame y väärtuse:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 21 \\ 3y &= 21 - 6 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Nagu näeme, pärast teise võrrandi liikmete korrutamist arvuga 3 tuleb teises võrrandis y kordajaks -3 , esimeses võrrandis on y kordaja aga $+3$. Need kordajad on vastasarvud ja seetõttu võrrandi poolte liitmisel kaob liige otsitavaga y . Nii õnnestus eemaldada ehk elimineerida otsitav y .

Eespool toodud arvutuskäigu võib lühemalt nõnda kirja panna:

$$\begin{array}{l|l|l} 2x + 3y = 21 & & 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13 & \cdot 3 & 18x - 3y = 39 \\ \hline & & 20x = 60 \\ & & x = 3. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6 + 3y &= 21 \\ 3y &= 15; & y &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Mõnikord peab selleks, et ühe otsitava kordajaiks tuleksid vastasarvud, mõlema võrrandi liikmeid sobivate arvudega korrutama. Lahendame selle selgituseks veel ühe võrrandisüsteemi.

Ülesanne. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + 6y = 17. \end{cases}$$

Lahendus.

$$\begin{array}{r|l|l} 3x + 4y = 11 & 5 & 15x + 20y = 55 \\ 5x + 6y = 17 & -3 & \underline{-15x - 18y = -51} \\ & & 2y = 4 \\ & & y = 2 \end{array}$$

$$3x + 4 \cdot 2 = 11$$

$$3x + 8 = 11$$

$$3x = 3$$

$$x = 1.$$

Kontroll.

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11$$

$$5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 5 + 12 = 17.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Märkus: Lahendamiseks peab võrrandisüsteemi võrrandid teisendama niisuguseks, et vasakul poolel on otsitavaga liikmed ühes ja samas otsitavate järjekorras ning paremal poolel võrrandi vabaliige. Niisugust võrrandisüsteemi nimetame normaalkujuliseks.

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$90. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} 7x + 3y = 38 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} 6x - 5y = 14 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} 5x + 6y = 39 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} 8x - 3y = 17 \\ 9x - 2y = 26 \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} 6x = 18 - 5y \\ 4x = y - 1 \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} 2 - y = -3x \\ 3y = 10 - 12x \end{cases}$$

Asendusvõtte. Ühe otsitava võib võrrandisüsteemist elimineerida ka sel teel, et selle otsitava avaldame ühest võrrandist teise otsitava kaudu ja saadud avaldisega asendame selle otsitava teises võrrandis.

Näide.

$$\begin{cases} 7x - 3y = 29 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist otsitava y otsitava x kaudu. Saame

$$y = 12 - 2x.$$

Avaldise $12 - 2x$, mis nüüd on võrdne y -ga, kirjutame esimesse võrrandisse y asemele:

$$7x - 3(12 - 2x) = 29.$$

Nagu näeme, on selle asendamise tulemuseks võrrand, milles otsitav y ei esine, tulemuseks on ühe otsitavaga võrrand. Lahendame selle võrrandi:

$$7x - 36 + 6x = 29$$

$$7x + 6x = 29 + 36$$

$$13x = 65$$

$$x = 5.$$

EX LIBRIS Tartu

Võrduse

$$y = 12 - 2x$$

abil leiame nüüd:

$$y = 12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2.$$

Kontrollime, asendades otsitavad algsüsteemi vasakul poolel leitud väärtustega:

$$7 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 35 - 6 = 29$$

$$2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12.$$

Näeme, et lahend on õige.

Seega

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Asendusvõtte rakendamisel on tarvis silmas pidada, et kui otsitava avaldamine teise otsitava kaudu on toimunud esimesest võrrandist, siis asendamine peab toimuma teises võrrandis, või ümberpöörduvalt. Ei tohi otsitava avaldamist ja asendamist toimetada ühe ja sama võrrandi abil, sest siis ei saa tulemuseks võrrandit, vaid samasuse. Näiteks, kui eespool lahendatud võrrandisüsteemi hakkasime lahendama nii, et teisest võrrandist, nimelt võrrandist

$$2x + y = 12,$$

avaldame y , saades

$$y = 12 - 2x,$$

ja asendades nüüd otsitava y samas võrrandis avaldisega $12 - 2x$, saaksime

$$2x + 12 - 2x = 12$$

ehk

$$12 = 12.$$

Nagu näeme, tulemuseks on samasus ja mitte enam võrrand.

Asendusvõtte kasutamine on eriti sobiv siis, kui ühel otsitaval on võrrandisüsteemis kordajaks 1, sest selle otsitava avaldamine teise otsitava kaudu on siis eriti hõlps.

Kui nimetatud kordajaks on -1 , siis muudame võrrandi kõigil liikmeil märgid vastupidisteks.

Ülesanded.

Lahendada asendusvõtte abil järgmised võrrandisüsteemid:

$$94. \begin{cases} 5x + 8y = 91 \\ 11x + y = 18 \end{cases}$$

$$94. \begin{cases} 13x + y = 27 \\ 12x + 3y = 27 \end{cases}$$

$$95. \begin{cases} 6x + y = 77 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$95. \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 9x - y = 81 \end{cases}$$

$$96. \begin{cases} 14x - y = 38 \\ 7x + 2y = 29 \end{cases}$$

$$96. \begin{cases} x - 5y = 5 \\ 3x - 2y = 54 \end{cases}$$

$$97. \begin{cases} x + 17y = 49 \\ 3x - y = 43 \end{cases}$$

$$97. \begin{cases} 16x - 5y = -3 \\ x + 4y = 30 \end{cases}$$

$$98. \begin{cases} 3x = 37 - y \\ 3y + 6 = 4x \end{cases}$$

$$98. \begin{cases} x = 5y - 13 \\ 7y - 25 = 2x \end{cases}$$

Lahendada sobivaima võttega järgmised võrrandisüsteemid:

$$99. \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$99. \begin{cases} 7x + 2y = 47 \\ -7x + 3y = -17 \end{cases}$$

$$100. \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 5y = 110 \end{cases}$$

$$100. \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 7x + y = 20 \end{cases}$$

$$101. \begin{cases} 3x + y = 25 \\ 5x - y = 23 \end{cases}$$

$$101. \begin{cases} x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases}$$

Lahendamatud võrrandisüsteemid.

Me nägime, et ühe otsitavaga lineaarne võrrand

$$ax = b,$$

mille kordaja a ei ole null, võimaldab alati lahendit avaldada järgmiselt:

$$x = \frac{b}{a},$$

see tähendab, et

lineaarsel võrrandil $ax = b$, kus $a \neq 0$, on alati lahend olemas ja nimelt üksainus.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine kas liitmisvõttega või asendusvõttega viib üldiselt ühe otsitavaga lineaarse võrrandini, mis määrab selle otsitava väärtuse ja nimelt üheainsa. Leitud otsitava väärtuse asendamisel antud süsteemi ühte võrrandisse saame teise otsitava suhtes lineaarse võrrandi, millest leiame teise otsitava väärtuse ja jällegi üheainsa. Seega võib kokkuvõttes öelda, et kui kahe otsitavaga lineaarset võrrandisüsteemi saab lahendada, siis on lahendeid üksainus, see tähendab, et tulemuseks saame üheainsa otsitava väärtuste paari, mis antud võrrandisüsteemi mõlemat võrrandit rahuldab.

Nüüd võib küsida, kas antud võrrandisüsteemi saab alati lahendada.

Lähem vaatlus näitab, et on võrrandisüsteeme, mida lahendada ei saa. Niisuguste võrrandisüsteemide lahendamisel ei liitmis- ega asendusvõtte ei vii ühe otsitavaga võrrandini, vaid kas

- a) samasuseni või
- b) vale võrduseni.

Ühe otsitava elimineerimisel saame samasuse, kui antud võrrandisüsteemi võrrandid on ekvivalentsed, see tähendab, et üks võrrand on teise võrrandi teisend.

Näide.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 4x - 10y = 24. \end{cases}$$

Kui seda süsteemi hakkame lahendama liitmisvõttega, siis, jagades teise võrrandi iga liikme arvuga 2, saame:

$$\begin{array}{r|l|l} 2x - 5y = 12 & -1 & -2x + 5y = -12 \\ 2x - 5y = 12 & & \underline{2x - 5y = 12} \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

Samasuseni jõuame siin ka asendusvõtte rakendamisel. Ekvivalentsete võrrandite puhul võib öelda, et arvupaarid, mis rahuldavad esimest võrrandit, rahuldavad ka teist. Et esimesel võrrandil on kuitahes palju lahendeid, siis on ka võrrandisüsteemil kuitahes palju lahendeid, kuid süsteemi lahendusvõtted ei anna ühtki neist.

Mõnikord jõuame võrrandisüsteemi lahendamisel vale võrduseni. Vaatleme üht niisugust süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist otsitava y :

$$y = 8 - 2x.$$

Asendamine teises võrrandis annab:

$$\begin{aligned} 2x + 8 - 2x &= 9 \\ 8 &= 9. \end{aligned}$$

Tulemuseks on vale võrdus; sellest selgub, et antud võrrandisüsteemi ei saa lahendada: ei ole olemas ühtki arvupaari, mis antud süsteemi rahuldaks. Niisuguse võrrandisüsteemi võrrandeid nimetame sobimatuiks; nad on teineteisele vasturääkivad, sest ühe võrrandi järgi peab arvude

2x ja y summa olema 8, teine võrrand aga nõuab, et nende samade arvude summa peab hoopis olema 9, mis ei ole võimalik. Niisiis

võrrandisüsteemi ei saa lahendada, kui tema võrrandid on ekvivalentsed või kui need võrrandid on sobimatud.

Ülesanded.

Allpool on antud võrrandisüsteemid: mõni neist on lahenduv, mõne võrrandid on ekvivalentsed ja mõne võrrandid on sobimatud. Otsustada, mis liiki on iga võrrandisüsteem.

$$102. \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$$

$$102. \begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ 7x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$103. \begin{cases} 5x - y = 38 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

$$103. \begin{cases} 7x + 2y = 13 \\ 12x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} 4x - 4y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi koostamine.

Mõne ülesande lahendamine võrrandisüsteemi abil on kergem kui ühe otsitavaga võrrandi abil. Siinjuures peab silmas pidama, et kui ülesande lahendamiseks kasutatakse kahte otsitavat, siis tuleb koostada ka kaks võrrandit, teiste sõnadega, tuleb koostada võrrandisüsteem. Lahendame näitena võrrandisüsteemi abil järgmise ülesande.

Ülesanne. Artell sai tähtajalise tellimise valmistada 12-ndaks laulupeoks määratud arv metallmärke. Kui artell valmistaks iga päev 180 märki, siis jääb tähtpäevaks 600 märki puudu. Kui aga valmistada iga päev 210 märki, siis võiks tähtpäevaks valmistada 300 märki rohkem kui tellitud. Kui mitu märki telliti ja mitmepäevane oli tähtaeg?

Lahendus. Telliti x märki.
Tähtaeg oli y päeva.

Valmistades 180 märki päevas, saaks tähtajaks valmis $180y$ märki, mis on 600 võrra vähem kui tellitud märkide arv, seega 600 võrra vähem kui x ehk võrdub avaldisega $x - 600$.

Saame võrrandi

$$x - 600 = 180y.$$

Valmistades aga 210 märki päevas, saaks tähtajaks valmis $210y$ märki, mis on andmete põhjal 300 võrra suurem kui x , seega

$$x + 300 = 210y.$$

Nii oleme saanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - 600 = 180y \\ x + 300 = 210y. \end{cases}$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi, teisendades ta esmalt normaalkujuliseks:

$$\begin{array}{l|l|l} \begin{cases} x - 180y = 600 \\ x - 210y = -300 \end{cases} & -1 & \begin{cases} x - 180y = 600 \\ -x + 210y = 300 \end{cases} \\ \hline & & 30y = 900 \end{array}$$

$$y = 30, \text{ s. o. päevade arv.}$$

$$x - 180 \cdot 30 = 600;$$

$$x - 5\,400 = 600; \quad x = 6\,000, \text{ mis ongi märkide arv.}$$

Kontroll. Kui tehakse 180 märki päevas, siis 30 päevaga valmiks märke $30 \cdot 180 = 5\,400$. Vajalikust märkide arvust 6 000 jäaks puudu

$$6\,000 - 5\,400 = 600, \text{ seega õige puudujääk.}$$

Teisel juhul:

$$30 \cdot 210 = 6\,300,$$

$$6\,300 - 6\,000 = 300, \text{ nagu pidigi tulema üle tellitud arvu.}$$

Vastus. Artellilt telliti 6 000 märki tähtajaga 30 päeva.

Ülesanded.

105. Kahekohalise arvu ristsumma on 13. Kümneliste numbri ja üheliste numbri vahe on 5. Leida see kahekohaline arv.

105. Trapetsi aluste summa on 21 cm ja aluste vahe on 5 cm. Leida trapetsi alused.

106. Kalakombinaat soolas 30 tunni silku kaaluga 1 356 kg. Tünne oli kaheksa suurusel, ühed mahutasid 50 kg, teised 32 kg. Mitu suuremat ja mitu väiksemat tunni soolati silku?

106. Toidukaubastu sai toiduainete tööstuselt 650 kg soolatud kurke. Saadeti oli 10-kilogrammistes ja 15-kilogrammistes purkides, kokku 55 purki. Mitu väiksemat ja mitu suuremat purki sisaldas kurgisaadeti?

107. Võrdhaarse kolmnurga übermõõt on 34 cm. Leida selle kolmnurga aluse ja haara pikkus, teades et haara ja aluse vahe on 5 cm.

107. Ristküliku übermõõt on 70 cm. Arvutada ristküliku pikkus ja laius, teades et pikkuse ja laiuse vahe on 11 cm.

108. Kahekohalise arvu ristsumma on 10. Kui selle arvu numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on antud arvust 72 võrra väiksem. Leida see kahekohaline arv.

108. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Numbrite vahetamisel suureneb see arv 27 võrra. Leida see kahekohaline arv.

109. Kangi õlgade pikkused on 12 dm ja 4 dm. Kang on tasakaalus, kui ühel õlal mõjuv tung on teisest 10 kg võrra suurem. Kui suured on kangi õlgadele mõjuvad tungid?

109. Kangi õlgadel, mille pikkused on 18 dm ja 4 dm, rippuvate raskuste summa on 11 kg. Arvutada kangi õlgadel rippuvad raskused.

§ 8. Arvu ja üksliikme algtegurid.

Algarv ja kordarv.

Täisarve liigitatakse algarvudeks ja kordarvudeks.

Algarv on niisugune täisarv, mis on suurem kui 1 ja millel ei ole muid tegureid kui arv 1 ja arv ise.

Algarvu võib ka teisiti defineerida: algarv on niisugune täisarv, mis on suurem kui 1 ja mida saab jäägita jagada vaid arvuga 1 ja arvu endaga.

Esimesed 15 algarvu loomulikkude täisarvude hulgas on 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ja 47.

Kordarv on niisugune täisarv, mida saab kujutada algarvude korrutisena.

Ülal toodud algarvu ja kordarvu definitsioonidest selgub, et arv 1 ei kuulu ei algarvude ega kordarvude hulka.

Kui kordarv esitatakse algarvude korrutisena, siis öeldakse, et antud arv on lahutatud algtegureiks.

Antud arvu algtegureiks lahutamine toimub järk-järgulise jagamise teel proovimisega leitud algarvuga, nagu näeme järgmises näites:

6006		2
3003		3
1001		7
143		11
13		13

$$6006 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Ülesanded.

Lahutada järgmised arvud algtegureiks:

110.	798	111.	8428	112.	2436
110.	2990	111.	5005	112.	26978

Üksliikme algtegurid.

Üksliikme algtegureiks nimetame tema kordaja algtegureid ja kõiki tähttegurite astendatavaid.

Näiteks üksliikme $56ab^2x^5$ algtegurid on

$$2, 7, a, b, x.$$

Oma algtegurite korrutisena võib antud üksliiget kirjutada nõnda:

$$56ab^2x^5 = 2^3 \cdot 7 \cdot ab^2x^5.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised üksliikmed oma algtegurite korrutisena:

113. $42a^2b^3$

113. $45xy^2$

114. $4214ax^n$

114. $791a^2b^3y^m$

§ 9. Hulkliikme algtegurid.

Nagu antud arve ja antud üksliikmeid saab esitada algtegurite korrutisena, või, nagu selle kohta öeldakse, saab lahutada algtegureiks, nii võime kõnelda ka hulkliikme algtegureist.

Hulkliikme algtegureiks nimetame temas esinevaid algarvulisi numbrilisi tegureid, ühetähelisi tegureid ja niisuguseid hulkliikmelisi tegureid, mida ei saa tegureiks lahutada.

Hulkliikme algteguriteks võivad olla algarvud

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \text{ jne.};$$

ühetähelised tegurid, nagu

$$a, b, c, m, n, x, y,$$

ja hulkliikmelised tegurid, nagu

$$a + 1, 3x + 2, b - y, a^2 + x^2, x^3 + 5a^2b, a + b + c.$$

Algteguriks ei saa aga olla näiteks binoom $1 - x^2$, sest teda saab lahutada tegureiks:

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x).$$

Viimases avaldises tegurid $1 + x$ ja $1 - x$ on algtegurid, sest neid ei saa enam omakorda tegureiks lahutada. Sellepärast võime öelda, et hulkliikme $1 - x^2$ algtegurid on $1 + x$ ja $1 - x$.

Kirjutame veel näitena hulkliikme

$$30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2$$

tema algtegurite korrutisena:

$$\begin{aligned} 30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2 &= 30a^2b(b^2 - 2bx + x^2) = \\ &= 30a^2b(b - x)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b(b - x)(b - x). \end{aligned}$$

Kui korrutises esineb algteguri aste, siis seda astet ei ole tingimata vajalik igakord võrdsete tegurite korrutisena kirjutada, sest astmes esinevad algtegurid on selletagi nähtavad, seetõttu võime viimase lahenduse kirjutada ka niisugusel kujul:

$$30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5a^2b(b - x)^2.$$

Hulkliikme algtegurid leiame tema tegureiks lahutamise teel, milleks kasutatakse meile tuntud võtteid: teguri sulgude ette toomise võtet, liikmete rühmitamise võtet, arvutamise abivalemite kasutamise võtet ja liikme kahendamise võtet. Mõnda võtet õpime tundma veel edaspidi.

1. Teguri sulgude ette toomise võte.

Näide 1. $3a - 3 = 3(a - 1)$.

Näide 2. $5ab - 10a^2b + 15ab^2 = 5ab(1 - 2a + 3b)$.

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed algtegureiks:

115. $7a + 7b$

115. $ab + bc$

116. $6n - 12n$

116. $5ab - 10ac$

117. $3 - 3x$

117. $8x - 8$

118. $a^2 + 5a$

118. $a^4 + a^3$

119. $15a^3x^2 - 5a^2x^3$

119. $21a^4x^3 + 14a^2x^3$

120. $an + bn - cn$

120. $2b - 3bx - 4by$

121. $-4a^3b + 8a^2b^2 - 12ab^3$

121. $-15a^4b^2 - 20a^3b^3 - 25a^2b^4$

Näide 3. $a^n b^{2n} + a^{n+1} b^{2n+1} = a^n b^{2n} (1 + ab)$.

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed algtegureiks:

122. $a^n + a^{n+1}$

122. $b^{2n} - b^{2n+1}$

123. $a^{2n} - a^{3n}$

123. $b^{2n+2} - b^{2n}$

124. $a^{2n} b^{n+1} - a^{2n+1} b^n$

124. $2a^n b^{n+1} - 4a^{n+1} b^n$

Näide 4. $5a(x + y) + x + y = 5a(x + y) + (x + y) = (x + y)(5a + 1)$.

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed algtegureiks:

125. $a(3m + n) + b(3m + n)$

125. $5(x - 2y) + a(x - 2y)$

126. $(a + b)(2x + y) + a(2x + y)$

126. $m(5x - 1) - (n + 2)(5x - 1)$

127. $(3a + 2b)(m + 3p) - (2a + b)(m + 3p)$

127. $(4p + q)(x + y) - (2p - q)(x + y)$

128. $5b(x + y) + x + y$

128. $3(x + y) + x + y$

129. $a(1 + x + x^2) - (1 + x + x^2)$

129. $x(a^2 - a + 1) - 2(a^2 - a + 1)$

2. Liikmete rühmitamise võtte.

$$\begin{aligned} \text{Näide. } x^3 - 3x^2 - 3x + 9 &= x^3 - 3x^2 - (3x - 9) = \\ &= x^2(x - 3) - 3(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 3). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed algtegevureiks:

130. $ax + ay + 3x + 3y$

130. $5x - 5y + ax - ay$

131. $a^2 - na - 3a + 3n$

131. $x^2 - ax - 4x + 4a$

132. $a^3 + a^2 + a + 1$

132. $x^3 + x^2 + x + 1$

133. $a^3 - 3a^2 - 2a + 6$

133. $3a^3 - 7a^2 - 9a + 21$

3. Arvutamise abivalemite kasutamise võtte.

Kui korrutamise abivalemite pooled vahetame, siis saame hulkliikme algtegevureiks lahutamise valemid:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Näide 1.

$$25a^2 - 1 = (5a)^2 - 1^2 = (5a + 1)(5a - 1).$$

Ülesanded.

Lahutada algtegueriks:

134. $a^2 - 1$

134. $1 - a^2$

135. $9 - x^2$

135. $b^2 - 4$

136. $16a^2 - 4x^2$

136. $x^2 - 64n^2$

137. $49 - a^2b^2$

137. $81a^2 - 25x^2$

Näide 2.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2.$$

Ülesanded.

Lahutada algtegueriks:

138. $a^2 + 4a + 4$

138. $49 + 14x + x^2$

139. $x^2 - 8x + 16$

139. $a^2 - 18a + 81$

140. $25a^2 - 30ab + 9b^2$

140. $36x^2 + 24xy + 4y^2$

Näide 3.

$$\begin{aligned} a^3 - 18a^2 + 108a - 216 &= \\ &= a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 6 + 3 \cdot a \cdot 6^2 - 6^3 = (a - 6)^3. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algtegueriks:

141. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

141. $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

142. $125 - 75x + 15x^2 - x^3$

142. $8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3$

Näide 4.

$$\begin{aligned} 64 - a^3 &= 4^3 - a^3 = \\ &= (4 - a)(16 + 4a + a^2). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algtegiureiks:

143. $x^3 + 125$

143. $x^3 - 27$

144. $8a^3 - 1$

144. $1 + 64x^3$

4. Liikme kahendamise võtte.

Näide 1.

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 15 &= x^2 + 3x + 5x + 15 = \\ &= x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5).\end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algtegiureiks:

145. $x^2 + 6x + 8$

145. $a^2 + 7a + 12$

146. $y^2 - 7y + 10$

146. $n^2 - 9n + 20$

Näide 2.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x - 18 &= x^2 - 6x + 3x - 18 = \\ &= x(x - 6) + 3(x - 6) = (x - 6)(x + 3).\end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algtegiureiks:

147. $a^2 - 2a - 15$

147. $x^2 - 3x - 10$

148. $x^2 + 2x - 15$

148. $a^2 + 4a - 12$

Näide 3.

$$\begin{aligned}x^2 + (3 + a)x + 3a &= x^2 + 3x + ax + 3a = \\ &= x(x + 3) + a(x + 3) = (x + 3)(x + a).\end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algtegiureiks:

149. $x^2 + (b + 6)x + 6b$

149. $a^2 + (4 + n)a + 4n$

$$150. a^2 + (7 - x)a - 7x$$

$$150. x^2 + (9n - 7)x + 63n$$

$$151. m^2 - (3n - 1)m - 3n$$

$$151. x^2 - (a - 5)x - 5a$$

$$152. x^2 - (3m - 4n)x - 12mn$$

$$152. u^2 - (1 - 7n)u - 7n$$

Näide 4.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 4 &= 3x^2 + 6x + 2x + 4 = \\ &= 3x(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(3x + 2). \end{aligned}$$

Näide 5.

$$\begin{aligned} 8a^2 + 2a - 15 &= 8a^2 + 12a - 10a - 15 = \\ &= 4a(2a + 3) - 5(2a + 3) = (2a + 3)(4a - 5). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada algteguiks:

$$153. 2a^2 + 5a + 3$$

$$153. 3a^2 + 5a + 2$$

$$154. 3x^2 + 7x + 2$$

$$154. 6a^2 + 13a + 6$$

$$155. 5m^2 + 9m - 2$$

$$155. 6x^2 - 13x + 6$$

$$156. 7n^2 + 22n + 3$$

$$156. 6a^2 - 5a - 6$$

Mõne hulkliikme tegureiks lahutamisel on vajalik mitme abivõtte rakendamine. Selgituseks toome paar näidet.

Ülesanne 1. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^2 - x^2 + 2xy - y^2.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 + 2xy - y^2 &= a^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= a^2 - (x - y)^2 = (a + x - y)(a - x + y). \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^3 + a^2 - 2ax + a - x + x^2 - x^3.$$

Lahendus. Rühmitame antud hulkliikme liikmed järgmiselt:

$$(a^3 - x^3) + (a^2 - 2ax + x^2) + (a - x).$$

Esimene rühm on kuupide vahe, teine rühm esitab kahe arvu vahe ruutu. Neid rühmi tegureiks lahutades saame hulkliikme järgmisel kujul:

$$(a - x)(a^2 + ax + x^2) + (a - x)^2 + (a - x).$$

Nüüd näeme, et igal liikmel on üks ja sama tegur $(a - x)$, seda tegurit sulgude ette tuues saamegi antud hulkliikme korrutisena:

$$(a - x)(a^2 + ax + x^2 + a - x + 1).$$

Niisiis

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 - 2ax + a - x + x^2 - x^3 &= \\ &= (a - x)(a^2 + ax + x^2 + a - x + 1). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed algtegureiks:

157. $24a + 48$

157. $72x - 18$

158. $3a^2 + 6ab + 3b^2$

158. $6x^2 - 12x + 6$

159. $5x^2 - 5$

159. $3a^2 - 12$

160. $6a^2 + 2a + 9a + 3$

160. $2b^2 + 4b + b + 2$

161. $m^2 - 3m + 2m - 6$

161. $x^2 + 5x + 2x + 10$

162. $y^2 - 2y - y + 2$

162. $a^2 - 3a - a + 3$

163. $21a^3 - 21b^3$

163. $2a^3 + 16$

164. $3a^2 + 12ab + 12b^2$

164. $6x^2 - 36x + 54$

- | | | | |
|------|--|------|-------------------------|
| 165. | $a^2 + 4m^2 + 4am$ | 165. | $a^4 - 2a^2b + b^2$ |
| 166. | $5b^4 - 20b^2$ | 166. | $a^3b^2 - a$ |
| 167. | $a^2 + 8a + 7$ | 167. | $x^2 - 6x + 8$ |
| 168. | $2m^2 + 11m + 5$ | 168. | $3n^2 - 5n - 2$ |
| 169. | $a^2 - b^2 + (a + b)c$ | 169. | $a^2 - n^2 + a - n$ |
| 170. | $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$ | 170. | $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$ |
| 171. | $(a^2 + 2ab + b^2)c + ab(a + b)$ | | |
| 171. | $ab - an - (b^2 - 2bn + n^2)$ | | |
| 172. | $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$ | | |
| 172. | $(c^2 - b^2 + d^2 - a^2)^2 - 4(ab - cd)^2$ | | |
| 173. | $a^3 + 8 + 6a^2 + 12a$ | | |
| 173. | $b^3 - 8 - 6b^2 - 12b$ | | |
| 174. | $(a^3 + 1)^2 - (b^3 - 1)^2$ | | |
| 174. | $(a + x)^3 - (a - x)^3$ | | |
| 175. | $x^3 - 27a^3 - 9ax^2 + 27a^2x$ | | |
| 175. | $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ | | |
| 176. | $x^3 + x^2 + 2xy + y^2 + y^3$ | | |
| 176. | $a^3 + a^2 - 2ab + a - b + b^2 - b^3$ | | |

§ 10. Antud arvude suurim ühistegur.

Antud arvude suurimaks ühisteguriks nimetame suurimat niisugust arvu, millega igaüks antud arvudest jagub jäägita.

Et antud arvu iga tegur on tema jagajaks, siis antud arvude ühiseks jagajaks saab olla nende arvude ühine tegur, suurimaks ühiseks jagajaks on siis nende arvude kõikide ühiste tegurite korrutis. Seega

selleks, et saada antud arvude suurimat ühistegurit, lahutame arvud algteguriks, kirjutame välja nende ühised algtegurid ja leiame nende korrutise.

Näide.

Leiame arvude 726 ja 990 suurima ühisteguri.

		990	2
726	2	495	3
363	3	165	3
121	11	55	5
11	11	11	11

$$726 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$$

$$990 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Arvude 726 ja 990 suurim ühistegur ehk lühemalt s. ü. t. on $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$.

Ülesanded.

Leida järgmiste arvude suurim ühistegur:

177. 30 ja 70

177. 78 ja 104

178. 224 ja 352

178. 924 ja 1176

179. 242, 308 ja 330

179. 306, 408 ja 510

180. 288, 324 ja 396

180. 264, 360 ja 300

§ 11. Antud avaldiste suurim ühistegur.

Antud avaldiste suurimaks ühisteguriks nimetame nende avaldiste kõigi ühiste algtegurite korrutist.

Sellest definitsioonist järeldeb hulkliikmete suurima ühisteguri leidmise juhise:

antud hulkliikmete suurima ühisteguri leidmiseks lahutame need hulkliikmed algtegureiks, kirjutame välja nende ühised algtegurid ja moodustame viimaste korrutise.

Kui hulkliikmeil pole ühiseid algtegureid, siis öeldakse, et nende suurimaks ühisteguriks on arv 1.

Ülesanne. Leida polünoomide

$$15h^2 - 15h, 9h^3 - 9h \text{ ja } 24h^3 - 48h^2 + 24h$$

suurim ühistegur.

Lahendus. Antud avaldiste algtegureiks lahutamine annab:

$$15h^2 - 15h = 15h(h - 1) = 3 \cdot 5 \cdot h(h - 1),$$

$$9h^3 - 9h = 9h(h^2 - 1) = 3^2 \cdot h(h + 1)(h - 1),$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h = 24h(h^2 - 2h + 1) = \\ = 2^3 \cdot 3 \cdot h(h - 1)^2.$$

Seega nõutud suurim ühistegur on

$$3h(h - 1).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste avaldisepaaride suurimad ühistegurid:

181. $4a$
 $3a - 1$

181. $7a$
 $7a - b$

182. $8mnp$
 $12m^2np - 4mn^2p$

182. $a^2x + ax^2$
 $a^2x - ax^2$

183. $15pq - 5p$
 $10p^2 + 15p$

183. $7a^2 - 21ab$
 $5a - 15b$

184. $a^2 - 1$
 $a + 1$

184. $5(a + x)^2$
 $10(a^2 - x^2)$

185. $N^2 - 9$
 $N^2 - 6N + 9$

185. a^3
 $a^2x + ax^2$

186. $m^2n^2 - 1$
 $5mn^2 + 5n$

186. $u^3 - c^2u$
 $u^3 - 2u^2c + uc^2$

Leida järgmiste avaldisekolmikute suurimad ühistegurid:

$$187. \quad \begin{aligned} x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 1 \\ 5x - 5 \end{aligned}$$

$$188. \quad \begin{aligned} 25 - 36x^2 \\ 5 + 6x \\ 36x^2 - 60x + 25 \end{aligned}$$

$$189. \quad \begin{aligned} x^2 - 25 \\ x^2 + 6x + 5 \\ x^2 + 3x - 10 \end{aligned}$$

$$190. \quad \begin{aligned} 2a - 5 \\ 10 - 4a \\ 6a - 15 \end{aligned}$$

$$191. \quad \begin{aligned} 4c^2 - 28cf + 49f^2 \\ 10c^2 - 35cf \\ 49f^2 - 4c^2 \end{aligned}$$

$$192. \quad \begin{aligned} a^2 - b^2 + a - b \\ 3a^2 - 6a + 3 \\ 5a^2 - 5b^2 \end{aligned}$$

$$187. \quad \begin{aligned} 9 - x^2 \\ x^2 + 6x + 9 \\ 2x + 6 \end{aligned}$$

$$188. \quad \begin{aligned} x^2 - 4x + 4 \\ x^2 + x - 6 \\ x^2 - 7x + 10 \end{aligned}$$

$$189. \quad \begin{aligned} 3x^2 + x \\ 3x + 3 \\ 3x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

$$190. \quad \begin{aligned} a^2 - 2a - 3 \\ 4a^2 - 4 \\ a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \end{aligned}$$

$$191. \quad \begin{aligned} 4(a + 1)^2 \\ 6a^2 - 6 \\ 2a^2 + 4a + 2 \end{aligned}$$

$$192. \quad \begin{aligned} m^2 - n^2 + 2(m + n) \\ 8(m + n)^3 \\ 7m^2 + 14mn + 7n^2 \end{aligned}$$

§ 12. Antud arvude väikseim ühiskordne.

Antud arvude väikseimaks ühiskordseks nimetame väikseimat nii-sugust arvu, mis jagub jäägita iga antud arvuga.

Definitsioonist selgub, et antud arvude väikseim ühiskordne on arv, mille jagajad on antud arvud, seepärast väikseim ühiskordne sisaldab antud arvude kõik tegurid.

Sellest saame jühise:

selleks, et saada antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutame arvud algteureiks, kirjutame välja ühe arvu algtegurid, nendele lisaks teiste arvude need algtegurid, mis veel puuduvad, ja leiame kõigi välja-kirjutatud algtegurite korrutise.

Sellest juhiseist järeldub, et

algarvude ja ühistegurita arvude väiksemaks ühiskordseks on nende arvude korrutis.

Näide 1. Leiame arvude 63 ja 28 väikseima ühiskordse.

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline 28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 & \end{array}$$

Arvude 63 ja 28 väiksem ühiskordne, ehk lühemalt v. ü. k., on $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 252$.

Näide 2. Arvude 21 ja 10 v. ü. k. on nende korrutis 210, sest nad on ühistegurita.

Ülesanded.

Leida järgmiste arvude väiksem ühiskordne:

193.	48 ja 100	193.	66 ja 44
194.	35 ja 39	194.	55 ja 91
195.	24, 28, 35 ja 80	195.	18, 48, 64 ja 96
196.	252, 343 ja 945	196.	162, 216 ja 378

§ 13. Antud avaldiste väiksem ühiskordne.

Antud avaldiste väiksemaks ühiskordseks nimetame ühe avaldise algtegurite korrutist teiste avaldiste nende algteguritega, mis võetud avaldises ei esine.

Sellest definitsioonist järeldub hulkliikmete väikseima ühiskordse leidmise juhiseid:

hulkliikmete väikseima ühiskordse leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegureiks, kirjutame välja ühe hulkliikme, siis selles puuduvad algtegurid teistest hulkliikmetest ja moodustame väljakirjutatud avaldistest korrutise.

Ülesanne. Leida avaldiste

$$4N^2x - 4N^2, 6N(x^2 + 2x - 3) \text{ ja } 20Nx^2 - 20N$$

väikseim ühiskordne.

Lahendus. Antud avaldiste algtegiureiks lahutamine annab:

$$4N^2x - 4N^2 = 4N^2(x - 1) = 2^2 \cdot N^2(x - 1),$$

$$6N(x^2 + 2x - 3) = 6N(x - 1)(x + 3) = 2 \cdot 3 \cdot N(x - 1)(x + 3),$$

$$20Nx^2 - 20N = 20N(x^2 - 1) = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x - 1)(x + 1);$$

seega nõutud väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot N^2(x - 1) \cdot 3 \cdot (x + 3) \cdot 5 \cdot (x + 1)$$

ehk

$$60N^2(x - 1)(x + 1)(x + 3).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste avaldisepaaride väikseimad ühiskordsed:

197. 5
 $5a - 5x$

197. 12
 $12a + 5b$

198. m
 $m^2 + m$

198. Ny
 $N^2 - N$

199. $3p^2$
 $p^2 + pq$

199. $4a + 4n$
 $5a - 5n$

200. $a^3 - aR^2$
 $6a - 6R$

200. $(v - 9)^2$
 $(18 - 2v)^2$

201. $(t - 1)^2$
 $4t^3 - 4t$

201. $3x$
 $3x^2 - 6xy$

202. $x^2 - u^2$
 $7x + 7u$

202. $1 - x^2$
 $(x - 1)(x + 2)$

Leida järgmiste avaldisekolmikute väikseimad ühis-
kordsed:

203.	$12a^2x$ $15a^3x^2$ $18a^4x^4$	203.	$a + 2$ $a + 3$ $a^2 + 2a$
204.	$(b - 7)^2$ $b^2 - 7b$ $5b$	204.	ax $a^2 + ax$ $ax + x^2$
205.	$3x^2 - 48$ $3x - 12$ $(x + 4)^2$	205.	$(x - 3)^2$ $x^2 - 9$ $5x - 15$
206.	$3(n^2 - 1)$ $(n - 1)(n^2 + 1)$ $n^3 + n$	206.	$2(x - 1)^2$ $7(x + 1)^2$ $14(x^2 - 1)$

Leida järgmiste avaldisekolmikute väikseimad ühis-
kordsed:

207.	$a(a + b) + a^2 - b^2$ $4a^2 - 4ab + b^2$ $a^2 - b^2$	207.	$x^2 - 4x + 3$ $x^2 + 4x - 5$ $x^2 - 2x + 1$
208.	$x^2 - 5x - 14$ $4x - 16$ $x^2 + x - 2$	208.	$x^2 - 3x - 4$ $x^2 - 6x + 8$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
209.	$x^2 - y^2$ $(x + y)^2$ $x^3 + y^3$	209.	a^4 $2a - 1$ $4a^2 - 1$
210.	$8ab + 16b^2$ $a^2b + 4ab^2 + 4b^3$ a^3	210.	$x - 1$ $x^2 - x + 1$ $x^3 + 1$
211.	$a^3 - a^2 + a - 1$ $a^3 + a^2 + a + 1$ $a^4 - 1$	211.	$a^2 - 4$ $a^3 + 8$ $a^2 + 2a + 4$

VASTUSEID.

- | | |
|---|--|
| <p>3. $b - a$ õpilase võrra.</p> <p>5. On.</p> <p>6. $a^2 > 0$</p> <p>7. $-8 < 0$</p> <p>10. -6</p> <p>11. $-0,08$</p> <p>13. 16</p> <p>14. -26</p> <p>15. -1</p> <p>16. $-0,54$</p> <p>17. 4</p> <p>18. $16; -27; \frac{1}{4}; \frac{4}{9}; 1$</p> <p>19. -5</p> <p>20. $a - a = 0$</p> <p>21. Positiivne täisarv.</p> <p>22. Positiivne täisarv ja 0.</p> <p>23. $n - 1$ täisarvu.</p> <p>24. $t > 3$, täisarv.</p> <p>26. $n(n + 1)$</p> <p>29. Hulkliige.</p> <p>31. $(m + n)^2$</p> <p>32. $-10a^2$</p> <p>33. $8a^2b$</p> <p>34. $2ab - a$</p> | <p>35. $12ac$</p> <p>36. $3b - 4$</p> <p>37. $-2a$</p> <p>38. x^5</p> <p>39. $-2a + 2b + 2c$</p> <p>40. $a^{2m} - a^{2m}b^n + 2a^m b^n - a^m b^{2n} + b^{2n}$</p> <p>41. -32</p> <p>43. Arendame korrutised võrduse mõlemal poolel, saame võrdsed tulemused.</p> <p>45. $4ab$</p> <p>46. $m - n - r - s$</p> <p>47. $a - (a^2 + 2ab + b^2) = a - (a + b)^2$</p> <p>48. $c; -x^n$</p> <p>49. $a^3 + 2a^2 - 3a - 4$</p> <p>51. $a - b$</p> <p>52. 20</p> <p>53. $2a^2 + 2b^2$</p> <p>55. $x = \frac{5}{13}$</p> <p>56. $x = \frac{5n}{2}$</p> |
|---|--|

58. $x = \frac{cd}{c+d}$
59. $x = 33$
60. $x = 13\frac{5}{6}$
 $y = 10\frac{1}{6}$
61. $x = \frac{a^2}{a+b}$
 $y = \frac{ab}{a+b}$
62. Samasus.
63. Vörrand.
64. Vörrand.
65. $x = 0$
70. $x = 3$
71. $x = -9$
74. $x = 50$
75. 6 ja 18
76. 6 km
77. 1,5 m ja 1 m
78. 8 a. pärast.
79. 4 m; 5 m; 10 m
80. On ekvivalentsed.
83. Ei ole ekvivalentsed.
84. $x = t$; $y = 6 - 3t$;
 1 ja 3; 2 ja 0; 3 ja -3
87. $x = 10 - 2t$; $y = t$;
 14 ja -2; 12 ja -1;
 8 ja 1; 6 ja 2
90. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
93. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$
105. 94
106. 22 ja 8
107. 8 cm ja 13 cm
108. 91
109. 5 kg ja 15 kg
115. $7(a+b)$
117. $3(1-x)$
122. $a^n(1+a)$
124. $a^{2n}b^n(b-a)$
125. $(3m+n)(a+b)$
129. $(1+x+x^2)(a-1)$
130. $(x+y)(a+3)$
133. $(a-3)(a^2-2)$
134. $(a+1)(a-1)$
137. $(7+ab)(7-ab)$
138. $(a+2)^2$
140. $(5a-3b)^2$
141. $(a+1)^3$
142. $(5-x)^3$
143. $(x+5)(x^2-5x+25)$
145. $(x+2)(x+4)$
146. $(y-2)(y-5)$
147. $(a+3)(a-5)$
148. $(x+5)(x-3)$
149. $(x+6)(x+b)$
150. $(a+7)(a-x)$
153. $(a+1)(2a+3)$
154. $(3x+1)(x+2)$
155. $(5m-1)(m+2)$
156. $(7n+1)(n+3)$
161. $(m-3)(m+2)$
163. $21(a-b)(a^2+ab+b^2)$
164. $3(a+2b)^2$
167. $(a+7)(a+1)$

- | | | | |
|------|---|------|----------------------------|
| 168. | $(2m + 1)(m + 5)$ | 182. | $4mnp$ |
| 170. | $(a + b + x)(a + b - x)$ | 186. | $mn + 1$ |
| 171. | $(a + b)(ac + bc + ab)$ | 187. | $x - 1$ |
| 174. | $(a + b)(a^2 - ab +$
$+ b^2)(a^3 - b^3 + 2)$ | 192. | Uhistegurita. |
| 176. | $(x + y)(x^2 - xy +$
$+ y^2 + x + y)$ | 193. | 1200 |
| 177. | 10 | 195. | 1680 |
| 178. | 32 | 197. | $5a - 5x$ |
| 179. | 22 | 201. | $4t(t - 1)^2$ |
| 181. | Uhistegurita. | 203. | $180a^2x^4$ |
| | | 205. | $3(x - 4)(x + 4)^2$ |
| | | 207. | $(a + b)(a - b)(2a - b)^2$ |
| | | 211. | $(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$ |

Sisukord.

I. Relatiivsed arvud. Täisavaldised.

	Lk.
§ 1. Relatiivsed arvud	3
§ 2. Algebraised avaldised	11
§ 3. Tehted üksliikmetega ja hulkliikmetega	17
§ 4. Võrre	28
§ 5. Võrrandid	33
§ 6. Kahe otsitavaga lineaarne võrrand	43
§ 7. Lineaarne võrrandisüsteem kahe otsitavaga	47
§ 8. Arvu ja üksliikme algtegurid	50
§ 9. Hulkliikme algtegurid	60
§ 10. Antud arvude suurim ühistegur	68
§ 11. Antud avaldiste suurim ühistegur	69
§ 12. Antud arvude väiksem ühiskordne	71
§ 13. Antud avaldiste väiksem ühiskordne	72
Vastuseid	75

II parandatud trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Keeleline toimetaja M. Tamm.

Ladumisele antud 16. VIII 1947. Trükkimisele antud 17. X 1947. Trüki-
arv 10.200. Paber 56:79, $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 5,0. Trükitähti trüki-
poognas 34.560. Arvutuspoognaid 4,3. MB-06064.

Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1505

На эстонском языке.

А. Вихман. Учебник алгебры для VIII класса. I.

2

Rbl. 3.—

A-16687

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00506810 3

683