Lehrbuch

der

reinen Arithmetik

von

A. Paulson.

Dorpat.
In Commission bei E. J. Karow, Universitätsbuchhändler.
1857.

Lehrbuch

der

reinen Arithmetik

von

A. Paulson.

[Gustav] A[lexander]

Erster Theil.

Die besondere Arithmetik.

Dorpat, 1857.

Gedruckt bei Heinrich Laakmann.

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl Exemplare zugestellt werde.

Dorpat, den 19. März 1857.

(Nr. 27.) Abgetheilter Censor de la Croix.

Vorwort.

Das vorliegende Buch soll ein Handbuch für Schüler sein. Als solches wird es Vielen zu umständlich erscheinen, namentlich denen, die eine einsichtsvolle Kenntniß und geläufige Ausübung der einzelnen Lehren der Mathematik als einzigen Zweck des mathematischen Unterrichtes betrachten. Wer aber zugibt, daß die Entwickelung des mathematischen, speculativen Denkens die eigentliche Aufgabe des mathematischen Unterrichtes in Gymnasien ist, der muß auch zugeben, daß das System, die Entwickelung die Hauptsache ist. Die einzelnen Lehren haben nur Werth als Glieder eines zusammenhängenden Ganzen, als Träger eines allgemeineren Gedankens.

Diesterweg stellt die Ausbildung der Selbstthätigkeit — als vorherrschende Eigenschaft des Mannes — als oberstes Princip für die Methodik der rationellen Unterrichtsgegenstände auf. — Nicht bloß zur Selbstthätigkeit, sondern durch Selbstthätigkeit zur Selbstständigkeit, soll der Knabe herangebildet werden. — Die Selbstthätigkeit des Schülers soll nicht beschränkt sein auf die Beweise einzelner Lehrsätze, auf die Lösung einzelner Aufgaben, der Lehrsätze und Aufgaben, die ihn vom Lehrer als willkürliche oder durch das bürgerliche, practische Leben Dictirte gegeben werden. — Die reine Mathematik soll dem Schüler vielmehr als eine selbstständige Wissenschaft vorgelegt werden, die aus sich selbst, nach einem leitenden Principe ihre Lehren und Aufgaben entwickelt, dieses Princip muß dem Schüler zum Bewußtsein gebracht werden und selbstthätig muß er aus demselben sich seine Aufgaben ableiten.

Das Buch ist für die Schüler der mittleren und oberen Classen bestimmt. Die Schüler der unteren Classen sollen kein Lehrbuch in die Hand bekommen; sie sollen nicht bloß mit dem Gedächtnisse auffassen, sondern dazu angehalten werden, die ihnen anschaulich gewordenen Begriffe und Lehren selbst in bestimmte

Worte zu fassen. — Erst wenn der Lehrer sich überzeugt hat, daß die Begriffe dem Schüler ganz klar und anschaulich sind, giebt er ihm den passenden Ausdruck, wenn ihm ein solcher fehlt. — So ist der Unterricht zugleich Denk- und Sprachübung.

In Tertia legt der Lehrer das ganze System den Schülern noch einmal übersichtlich vor und fügt die nothwendigen Ergänzungen hinzu, als da sind: die verkürzten Operationen mit Decimalbrüchen, die vollständige und abgekürzte Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln, — um dann zur allgemeinen Arithmetik überzugehen, die dem Ganzen den Abschluß giebt. — Hier nun erhält der Schüler das Buch in die Hand, damit er aus ihm die mit der Zeit entstehenden Lücken ausfülle und so im steten Zusammenhange bleibend, seines Zieles und Weges bewußt, der fernern Leitung des Lehrers folge.

Es ist zwar nicht direct die Bestimmung des Buches, ein Leitfaden für Lehrer zu sein, doch dürfte der Lehrer hier hinlängliche Anweisung auch für den Unterricht in den untern Classen finden, wenn anders er es ernst meint und sich's nicht verdrießen läßt, auch bei andern, etwa bei Diesterweg und Ungar, Rath zu holen; denn so manches Methodische enthält das Buch, was ihm als Compendium fehlen sollte, übrigens vom Schüler leicht übergangen werden kann.

Fellin, den 28. August 1856.

Der Verfasser.

Inhalt.

Verbesserungen.

1. In der ersten Zeile des 19. Lehrsatzes Seite 26 muß „andern“ gestrichen werden.
2. Auf Seite 28 Zeile 10 von oben muß „aber“ gestrichen werden.
3. Seite 31, Zeile 4 von unten muß vor b ein Semikolon stehen: c — ; b.
4. Seite 36 Zeile 6 von unten muß nach „selbst als Einheit“ eingeschoben werden „und nennen sie die negative Einheit.“
5. Seite 52 Zeile 5 von unten muß nach „daß man so“ eingeschoben werden „einen.“
6. Seite 60 müssen bei der abgekürzten Berechnung der $\sqrt{5}$ die zwischen den Ziffern befindlichen Punkte fehlen; desgleichen Seite 62 bei der verkürzt berechneten $\sqrt[3]{5}$.
7. Seite 63 Zeile 5 von oben muß stehen: Es ist z. B. zu $\sqrt{0{,}5}$.

Einleitung.

I. Von der Zahl und den Zahlformen.

1. Durch das Hinzutreten gewisser Dinge zu andern und durch das Trennen derselben von anderen gleichartigen Dingen, entsteht in uns der Begriff der Menge überhaupt. Sehen wir ab von allen Eigenschaften und Merkmalen der Dinge, und halten nur das fest, daß sie mit anderen Mengen bilden, so erhalten wir den Begriff der Einheit.

Der Begriff einer bestimmten Menge von Einheiten ist die Zahl.

Eine bestimmte Menge von Einheiten aber kann entweder unmittelbar in einem einfachen Begriffe aufgefaßt und durch ein einfaches Zahlwort angegeben werden, oder mittelbar unter verschiedenen Formen (Zahlformen).

Unmittelbar aufgefaßt werden nur folgende Mengen von Einheiten:

ǀ	in dem	Begriffe	eins.
ǀǀ	"	"	zwei.
ǀǀǀ	"	"	drei.
ǀǀǀǀ	"	"	vier.
ǀǀǀǀǀ	"	"	fünf.
ǀǀǀǀǀǀ	"	"	sechs.
ǀǀǀǀǀǀǀ	"	"	sieben.
ǀǀǀǀǀǀǀǀ	"	"	acht.
ǀǀǀǀǀǀǀǀǀ	"	"	neun.
ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ	"	"	zehn.

Die Zahlwörter der Reihe nach nennen heißt **zählen**. Wir zählen mit Bewußtsein, wenn wir uns bei jedem Zahlworte die Menge von Einheiten, die es bezeichnet, auch wirklich vorstellen.

2. Die Möglichkeit der Zahlformen ergiebt sich uns aus der Möglichkeit, eine gegebene Menge von Einheiten in Gruppen von Einheiten zu zerlegen. — Aus so viel charakteristisch verschiedenen Arten dieses geschehen kann, so viel verschiedene Zahlformen erhalten wir. — Die einer Zahlform zu Grunde liegende Zahl heißt ihr Zahlenwerth. — Den Zahlenwerth aber zu gegebenen Zahlformen ermitteln, heißt **rechnen** und ist die wesentliche Aufgabe der besondern Arithmetik.

Bevor wir uns aber an die Ermittlung aller möglichen Zahlformen machen, müssen wir uns über die Auffassungsweise größerer Mengen von Einheiten verständigen.

II. Das Decimal-Zahlensystem.

3. Eine größere Menge von Einheiten als zehn faßt man, wie schon oben bemerkt wurde, nicht mehr unmittelbar auf, sondern man theilt eine jede größere Menge von Einheiten in Gruppen zu zehn Einheiten, und zählt die Gruppen, sie als Einheiten setzend. Sind so viele vorhanden, so vereinigt man wieder je zehn solcher Gruppen in eine neue Gruppe, zur neuen Einheit u. s. f.

So hat man in der That bloß bis zehn zu zählen. Aber man zählt verschiedene Einheiten, und muß sich daher zu den obigen Zahlwörtern noch die Namen der verschiedenen Einheiten merken.

Die ursprüngliche Einheit nennt man jetzt Einer oder die Einheit der null$^{\text{ten}}$ Ordnung.

Zehn Einer	geben einen	**Zehner**	oder die Einheit	der 1$^{\text{ten}}$	Ordng.
„ Zehner	„	**Hunderter**	„	„ 2$^{\text{ten}}$	„
„ Hunderter	„	**Tausender**	„	„ 3$^{\text{ten}}$	„
u. s. w.		u. s. w.		u. s. w.	

Die Zahlen, welche die Ordnung angeben, wollen wir Exponenten nennen.

Aus folgender Zusammenstellung übersieht man leichter die weitere Benennungsweise der Einheiten:

Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, Million, zehn M., hundert M., tausend M., zehntausend M., hunderttausend M., Billion, zehn B., hundert B. u. s. w., Trillion, zehn Tr., hundert Tr. u. s. w., Quadrillion, zehn Quadr., hundert Quadr. u. s. w., Quintillion, zehn Quint., hundert Quint. u. s. w.

4. Die Begriffe eins, zwei u. s. w., acht, neun, sind einfache Begriffe; wir nennen sie Stammzahlen, so lange wir sie auf keine besondere Einheit beziehen. Geschieht dieses, so nennen wir sie Stamm-Zähler. — Alle übrigen Zahlbegriffe sind zusammengesetzte Begriffe.

Die Verbindungsweise der Zahlwörter mit den Einheitsnamen, so wie die übliche Angabe der zusammengesetzten Zahlen — kurz das Zählen über zehn hinaus, wird hier als bekannt vorausgesetzt. Nur so viel wollen wir noch bemerken:

Jeder Stammzähler, so wie jede zusammengesetzte Zahl kann auf jede beliebige Einheit bezogen werden; wir sagen z. B. zwanzig Zehner, drei hundert vier und zwanzig Hunderter rc.

Wir nennen jeden Stamm-Zähler, so wie jede zusammengesetzte Zahl, so bald wir sie auf eine besondere Einheit beziehen, Zähler dieser Einheit.

III. Das Decimal-Ziffernsystem.

5. Zur Versinnlichung der Zahlen bedient man sich, außer der Zahlwörter, noch besonderer Zahlzeichen, Ziffern genannt. — In dem s. g. arabischen Ziffernsysteme hat man für die neun einfachen Zahlbegriffe auch neun besondere Zeichen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

welche Zeichen eben die Zahl schlechtweg, ohne Rücksicht auf die Einheit, bezeichnen. — Das Zeichen 3 bezeichnet den Begriff drei, nicht drei Einer oder drei Zehner. — Die verschiedenen Einheiten aber werden nicht durch besondere Zeichen, sondern auf die sinnreiche Weise angegeben, daß man die Ziffern in verschiedene Stellen setzt:

Man setzt die Ziffer in die erste Stelle, wenn sie Einer bezeichnet.
„ „ „ zweite „ „ Zehner „
„ „ „ dritte „ „ Hunderter „
u. s. w. u. s. w. u. s. w.

Die Stellen werden von der Rechten zur Linken gerechnet. Um die Stellen abzählen zu können, wenn nicht Einheiten aller Ordnungen, von der null^ten bis zur höchsten vorkommenden Ordnung, vorhanden sind, hat man zu den neun Ziffern noch ein Zeichen, (0) die Null genannt, gefügt, welches Zeichen in die leeren Stellen gesetzt wird.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den absoluten Zahlen.

Cap. 1.

Von den directen Zahlformen und Operationen.

I. Von der Summe und der Addition.

§ 1. Eine gegebene Menge von Einheiten können wir in beliebige Gruppen zerlegen, die Zahl der, in jeder einzelnen Gruppe enthaltenen Einheiten besonders auffassen und die Gesammtzahl als aus diesen zusammengesetzt betrachten.

$$\underbrace{||||||||}_{8} = \underbrace{|||}_{3}\ \underbrace{|||||}_{5} = ||\ |||\ ||| = ||\ ||\ ||\ ||$$

Die Form, in der wir eine Zahl so als aus mehreren Zahlen zusammengesetzt auffassen, heißt Summe.

Die zur Summe vereinigten Zahlen heißen Summanden. Die Verbindung der Summanden zur Summe wird in Worten durch plus, in Zeichen durch ein stehendes Kreuz ausgedrückt:

$8 = 3 + 5$, gelesen 8 gleich 3 plus 5.

Statt des einen Begriffes (acht), setzen wir in der Summe zwei oder mehrere Begriffe, jedoch mit dem Bewußtsein, daß diese mehreren Begriffe zu einem gehören, in einen zu verschmelzen sind.

Findet die Verschmelzung statt, so haben wir keine Summe, keine Zahlform mehr, sondern den Begriff einer Zahl schlechtweg. — In sofern wir uns aber bewußt sind, daß wir die Zahl erhalten haben durch Aufhebung des Begriffes Summe, nennen wir sie den Zahlenwerth der Summe.

§ 2. Eine Zahl läßt sich auf verschiedene Weise in Summanden zerlegen; die Anzahl der Summanden kann aber nicht größer sein als die Anzahl der Einheiten.

Eine Summe aus zwei Summanden nennen wir eine zweitheilige, aus drei Summanden, eine dreitheilige &c.

Stellen wir eine Zahl auf alle möglichen Arten, als zwei-, drei-, ... theilige Summen dar, so erkennen wir leicht folgenden wichtigen Satz.

1. Grundsatz. „Die Reihenfolge der Summanden hat auf den Zahlenwerth der Summe keinen Einfluß.“

§ 3. Ist eine gegebene Menge von Einheiten in Gruppen zerlegt, so können die Gruppen von neuem in Gruppen zerlegt werden:

$$||||||||||||=\underline{|||||}+\underline{|||||||}=\underline{\overline{||}+\overline{|||}}+\underline{\overline{|||}+\overline{||||}}$$

So erhalten wir den Begriff einer Summe, deren Summanden selbst Summen sind. Wir nennen die Summen, die zugleich Summanden sind, Partial-Summen und schließen, bei der schriftlichen Darstellung, die Partialsummen in Klammern.

$$12 = 5 + 7 = (2 + 3) + (3 + 4).$$

Aus obiger Zerlegung ergeben sich uns ohne Weiteres folgende Sätze.

2. Grunds. „Verwandeln wir eine Summe aus Summen durch Weglassen der Klammer in eine einfache Summe, so hat diese denselben Zahlenwerth als die ursprüngliche Summe.“

$$(2 + 3) + (3 + 4) = 2 + 3 + 3 + 4.$$

In der That ist $(2 + 3) + (3 + 4) = 5 + 7 = 12$
und auch $2 + 3 + 3 + 4 = 12$.

3. Grunds. „In einer jeden mehrtheiligen Summe kann man eine beliebige Anzahl Summanden beliebig in Partial-Summen vereinigen, ohne dadurch den Zahlenwerth zu ändern.“

$$2 + 3 + 2 + 4 + 3 = (2 + 3) + (2 + 4) + 3 = (2 + 3 + 4) + (2 + 3) = \text{\&c.}$$

§ 4. Den Zahlenwerth einer Summe bestimmen, heißt **addiren**.

Aus dem in § 1 aufgestellten Begriffe der Summe entnehmen wir folgende Definition:

„Addiren heißt eine Zahl ermitteln, die allein so viel Einheiten hat, als mehrere gegebene Zahlen zusammen.“

Ist der Zahlenwerth einer Summe größer als 10, so hat man bei der Addition eigentlich eine Summe in eine andere zu verwandeln:

$$\underline{|||||} + \underline{||||||||} = \overline{\underline{|||||} + \underline{|||||}} + \underline{|||} = \underline{||||||||||} + \underline{|||}$$

$$5 + 8 = 10 + 3 = 13.$$

Obgleich nun 10 + 3 oder 13 so gut eine Summe ist als 5 + 8, so nennen wir nichts destoweniger 13 den Zahlenwerth der Summe 5 + 8. Denn der Zweck alles Rechnens ist, eine Zahlform also umzuformen, daß das Verhältniß der unter dieser Form gegebenen Zahlengröße zur Einheit möglichst anschaulich werde. Weil wir uns aber von vorn herein an die Auffassungsweise der Zahlen nach dem Decimalsysteme gewöhnt haben, so ist uns auch das Verhältniß einer Zahlengröße zur Einheit unter keiner Form so anschaulich, als wenn wir sie nach dem Decimalsysteme angeben.

Stamm-Zahlen oder Stamm-Zähler gleicher Ordnung addirt man, indem man sie in ihre Einheiten auflöst und die Gesammtmenge nach dem Decimalsysteme gruppirt. Die Addition zusammengesetzter Zahlen läßt sich aber, mit Hilfe der Sätze in § 2 und § 3, stets auf die der Stammzähler gleicher Ordnung zurückführen:

$$\begin{aligned}24 + 35 &= (20 + 4) + (30 + 5) \\ &= 20 + 4 + 30 + 5 \ \text{(2. Grundſ.)} \\ &= 20 + 30 + 4 + 5 \ \text{(1. Grundſ.)} \\ &= (20 + 30) + (4 + 5) \ \text{(3. Grundſ.)}.\end{aligned}$$

Die Addition der Stamm-Zahlen zu einander muß daher zur vollkommenen Geläufigkeit gebracht werden.

II. Vom Product und der Multiplication.

§ 5. Unter allen Zerlegungen einer gegebenen Menge von Einheiten in Gruppen tritt als besondere diejenige hervor, in der die Gruppen gleich viel Einheiten haben.

$$||||||||\; = \;\underline{||}\;\;\underline{||}\;\;\underline{||}\;\;\underline{||}$$

In diesem Falle nämlich setzen wir die Gruppen selbst als Einheiten, geben die Zahl derselben und auch die Zahl der, in der als Einheit gesetzten Gruppe enthaltenen ursprünglichen Einheiten an, und bilden uns so stets bloß zwei Zahlverstellungen, jedoch so, daß wir die eine auf die ursprüngliche Einheit, die andere aber auf die erstere als Einheit beziehen. Erstere Zahl, d. h. die als Einheit gesetzte, heißt der Multiplicand, letztere der Multiplicator.

Die Beziehung des Multiplicators zum Multiplicanden wird in Worten durch mal, in Zeichen durch ein liegendes Kreuz oder auch durch einen Punkt ($\times$, $.$) ausgedrückt. Der Multiplicand steht voran.

Wir schreiben $8 = 2 \times 4 = 2 . 4$ und sprechen 8 gleich 2 mal 4.

§ 6. Die Form, in der wir uns eine Zahl aus einer gegebenen Zahl so entstanden denken, wie eine andere aus der Einheit entstanden ist (8 aus 2 wie 4 aus 1), heißt Product.

Jede Zahl ist ein Product der Einheit, $5 = 1 \times 5$; wenn wir jedoch in der Folge von Producten sprechen, meinen wir diese nicht.

§ 7. Machen wir den Versuch, die Zahlen der Reihe nach als Producte darzustellen, so finden wir, daß mehrere Zahlen eine solche Darstellung nicht zulassen.

Zahlen, die sich nicht als Producte darstellen lassen, heißen Primzahlen; alle übrigen aber theilbare Zahlen.

§ 8. Die theilbaren Zahlen lassen sich im Allgemeinen auf verschiedene Weise als Producte darstellen.

$$|||||||||||| = || \; || \; || \; || \; || \; || = ||| \; ||| \; ||| \; ||| = |||| \; |||| \; |||| = |||||| \; ||||||$$

$$12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2.$$

Vergleichen wir alle Producte, die einer vorgelegten Zahl gleich sind, mit einander, so finden wir zu jedem Producte ein anderes, das sich vom ersteren bloß durch Verwechslung des Multiplicanden mit dem Multiplicator unterscheidet:

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2$$
$$12 = 3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Wir ziehen hieraus den Schluß:

4. Lehrs. „Die Verwechslung des Multiplicanden mit dem Multiplicator hat auf den Zahlenwerth des Productes keinen Einfluß."

Man nennt daher Multiplicator und Multiplicand ohne Unterschied F a c t o r e n der Zahl.

Die Wahrheit des obigen Satzes wird also erwiesen: Zwölf Einheiten lassen sich in 4 Gruppen zu 3 Einheiten zerlegen; schreiben wir diese Gruppen unter einander

und zählen die Einheiten, in horizontaler Richtung fortgehend, zusammen, so nehmen wir 3 Einheiten 4 mal, und erhalten den Werth des Productes 3 mal 4; zählen wir sie aber, in verticaler Richtung fortgehend zusammen, so nehmen wir 4 Einheiten 3 mal und erhalten den Werth des Productes 4 mal 3. Da es nun nach Grunds. 1 gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge wir dieselbe Menge von Einheiten zusammen zählen, so ist auch

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

§ 9. Da eine jede Zahl in Summanden zerlegt werden kann, so können wir auch den einen Factor oder beide Factoren eines Productes in Summanden zerlegen. Solche Producte aber aus Summen lassen sich stets in Summen aus Producten verwandeln, wie uns folgende Sätze zeigen werden.

5. Lehrs. „Das Product, dessen Multiplicand eine Summe ist, ist gleich der Summe, dessen Summanden Producte sind aus den einzelnen Summanden des Multiplicanden mit dem Multiplicator."

$$\underline{(2 + 3) \times 4 = 2 \times 4 + 3 \times 4}$$

$$\begin{aligned}(2 + 3) \times 4 &= (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3) \quad \text{[s. § 6.]}\\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 \quad \text{[Grs. 1, 2.]}\\ &= 2 \times 4 + 3 \times 4.\end{aligned}$$

6. Lehrs. „Das Product, dessen Multiplicator eine Summe ist, ist gleich der Summe, deren Summanden Producte sind aus dem Multiplicanden mit jedem Summanden des Multiplicators." $\underline{4 \times (2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3.}$

Nach dem Begriffe des Productes haben wir aus 4 eine Zahl zu bilden, wie $2 + 3$ aus der Einheit gebildet ist, d. h. wir haben zuerst 4 Einheiten 2 mal, dann 3 mal zu setzen und beide Producte zur Summe zu vereinigen, was uns eben $4 \times 2 + 4 \times 3$ giebt.

7. Lehrs. „Sind die beiden Factoren eines Productes Summen, so ist das Product einer Summe gleich, deren Summanden Producte sind, aus jedem Summanden des Multiplicanden mit jedem des Multiplicators."

$$(2+3) \times (4+5) = 2 \times (4+5) + 3 \times (4+5) = 2 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 5.$$

§ 10. Ist eine Zahl als Product gegeben, so sind die Factoren entweder Primzahlen oder nicht. Sind sie Primzahlen, so ist bloß das eine Product möglich; sind sie aber theilbar, so können wir sie weiter zerlegen, und wir erhalten so ein Product, in dem die Factoren selbst Producte sind. Wir nennen die Factoren des Factors entferntere Factoren der Zahl und schließen sie bei schriftlicher Darstellung in Klammern:

$$30 = 15 \times 2 = (5 \times 3) \times 2.$$

In diesem letzteren Falle sind mehrere Producte vorhanden, z. B. für 30 findet man noch

$$30 = 10 \times 3 = (2 \times 5) \times 3$$
$$30 = 6 \times 5 = (2 \times 3) \times 5.$$

Sucht man alle möglichen Producte auf und wiederholt es an mehreren Zahlen, so wird man die Wahrheit folgender Sätze erkennen:

„Jeder entferntere Factor einer Zahl ist zugleich näherer Factor derselben."

Der Unterschied zwischen näheren und entfernteren Factoren ist hiermit aufgehoben, wir schreiben kurz $30 = 2 \times 3 \times 5$, indem wir nach Belieben die Factoren in Producte zu zwei Factoren vereinigen:

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 3) \times 5 = (2 \times 5) \times 3 = 3 \times (2 \times 5) = \text{etc.}$$

8. Lehrs. „Die Reihenfolge der Factoren hat auf den Zahlenwerth eines Productes keinen Einfluß, auch wenn mehrere Factoren vorhanden sind."

Ist das Product $(2 \times 3) \times 5$ gegeben, so können wir nach Lehrs. 4 statt dessen setzen $(3 \times 2) \times 5$; $5 \times (2 \times 3)$; $5 \times (3 \times 2)$; es ist noch nachzuweisen, daß wir auch die 5 zwischen 2 und 3 setzen können: Schreiben wir eine Reihe von 3 Zweier 5 mal unter einander

$$\begin{array}{ccc} 2, & 2, & 2 \\ 2, & 2. & 2 \\ 2, & 2, & 2 \\ 2, & 2, & 2 \\ 2, & 2, & 2 \end{array}$$

und addiren sie, in horizontaler Reihe fortgehend, so erhalten wir den Werth des Productes $(2 \times 3) \times 5$; addiren wir sie aber, in verticaler Reihe fortgehend, so erhalten wir den Werth des Productes $(2 \times 5) \times 3$, da es nun nach Grs. 1, gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge wir Zahlen addiren, so ist auch $(2 \times 3) \times 5 = (2 \times 5) \times 3$. Daß der Beweis derselbe bleibt bei anderen Factoren, ist von selbst einleuchtend.

§ 11. Den Zahlenwerth des Productes finden, heißt **multipliciren.**

Aus dem aufgestellten Begriffe des Productes ergiebt sich folgende Definition:

„Multipliciren heißt, aus einer gegebenen Zahl (dem Multiplicanden) eine Zahl bilden, wie eine andere gegebene Zahl (der Multiplicator) aus der Einheit gebildet ist." —

1. Sind die Factoren Stammzahlen, so kann man den Zahlenwerth des Productes bloß durch wiederholte Addition finden:

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

Da aber die Multiplication, wie wir gleich sehen werden, stets auf die der Stammzahlen zurückgeführt werden kann, so muß man diese Operation mit Stammzahlen so oft wiederholen, bis man den Werth des Productes aus je zwei Stammzahlen augenblicklich nennen kann, (d. h. man muß das s. g. Einmaleins auswendig wissen).

2. Sind die Factoren Einheiten beliebiger Ordnungen, so ist das Product stets gleich der Einheit, deren Exponent die Summe aus den Exponenten der Factoren ist: Die Einheit der 3ten Ordnung mit der Einheit der 2ten Ordnung multiplicirt, giebt die Einheit $3 + 2 = 5$te Ordnung $1000 \times 100 = 100000$.

3. Sind die Factoren Stamm-Zähler, so multiplicirt man sie als Stammzahlen und giebt ihnen als Einheit das Product der Einheiten:

$$200 \times 30 = (2 \,.\, 100) \,.\, (3 \times 10) = (2 \times 3) \,.\, (100 \times 10)$$
$$= 6 \,.\, 1000 = 6000.$$

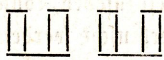
2 Einheiten der 2^{ten} Ordnung mit 3 Einheiten der 1^{ten} Ordnung multiplicirt, geben $2 \times 3 = 6$ Einheiten der $2 + 1 = 3^{\text{te}}$ Ordnung.

4) Sind die Factoren endlich zusammengesetzte Zahlen, so löst man sie in ihre Bestandtheile auf und hat dann ein Product aus Summen, welches nach Lehrs. 7 in eine Summe aus Producten verwandelt werden kann, deren Factoren hier Stamm-Zähler sind, also wie Stammzahlen multiplicirt werden.

$$24 \times 36 = (20 + 4)(30 + 6) = (20 \times 30) + (4 \times 30)$$
$$+ (20 \times 6) + (4 \times 6).$$

III. Von der Potenz und dem Potenziren.

§ 12. In einem Producte aus mehreren Factoren können, in einem besondern Falle, die Factoren einander gleich sein. Zerlegen wir z. B. 8 Einheiten in 2 Gruppen zu 4 Einheiten, so kann die Gruppe zu 4 Einheiten wieder in 2 Gruppen zu 2 Einheiten zerlegt werden:



Hiernach können wir uns die Menge von 8 Einheiten also entstanden denken, daß wir zunächst die Einheit 2 mal gesetzt haben, die entstandene Gruppe von 2 Einheiten, wiederum 2 mal und die jetzt entstandene Gruppe von 2×2 Einheiten zum 3^{ten} male 2 mal setzen.

„Die Form, in der wir eine Zahl also entstanden denken, daß wir zunächst aus der Einheit und dann aus dem jedesmaligen Resultate als Einheit, zu wiederholten Malen dieselbe Zahl bildeten, heißt Potenz."

Eine Zahl bilden aber und multipliciren, sind gleich bedeutende Begriffe; wir können daher auch sagen: Eine Potenz entsteht, wenn wir zunächst die Einheit und dann das jedesmalige Resultat zu wiederholten Malen mit derselben Zahl multipliciren.

Die Zahl, die zu wiederholten Malen als Factor gesetzt wird, heißt Grundzahl, die Zahl aber, die angiebt, wie oft die Setzung stattfindet, heißt der Exponent.

In der symbolischen Darstellung bedient man sich keines besondern Bindezeichens, sondern setzt den Exponenten ohne Weiteres rechts über die Grundzahl. Man schreibt:

$8 = [(1 . 2) . 2] . 2 = 1 . 2^3 = 2^3$ und liest 2 zur 3ten.

Ist der Exponent = Null, so heißt es, daß die Einheit kein mal mit der Grundzahl multiplicirt ist, und es ist daher die nullte Potenz einer jeden Zahl gleich der Einheit zu setzen. Bezeichnet a eine beliebige Zahl, so ist $a^0 = 1$.

Die Einheiten der auf einander folgenden Ordnungen sind auf einander folgende Potenzen von 10:

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 1 . 10 = 10$$
$$10^2 = (1 . 10) . 10 = 100$$
$$10^3 = [(1 . 10) . 10] . 10 = 1000.$$
$$\vdots \quad \text{etc.}$$

Aus diesem Grunde nannten wir auch die Einer Einheiten der nullten —, die Zehner Einheiten der ersten Ordnung . . etc., so wie die, die Ordnung angebenden Zahlen Exponenten.

§ **13**. Wie leicht einzusehen, können Exponent und Grundzahl nicht mit einander vertauscht werden,

$$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8 \text{ und } 3^2 = 3 . 3 = 9,$$

daher sie auch nicht mit einem Namen bezeichnet werden können.

§ **14**. Ist die Grundzahl der Potenz eine Summe, so läßt sich die Potenz zwar stets in eine Summe verwandeln; die allgemeine Form dieser Summe können wir aber hier nicht entwickeln. Wir beschränken uns auf die 2te und 3te Potenz einer zweitheiligen Summe.

Die 2te Potenz einer Zahl heißt auch das Quadrat; die 3te Potenz der Kubus der Zahl.

9. Lehrs. „Das Quadrat einer zweitheiligen Summe ist gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Producte beider Theile und dem Quadrate des zweiten Theiles.“

$$(4+5)^2 = 4^2 + 2 \times (4 \,.\, 5) + 5^2.$$

Bew. $(4+5)^2 = (4+5) \times (4+5) = (4 \,.\, 4) + (4 \,.\, 5) + (4 \,.\, 5) + (5 \,.\, 5)$ [s. Lehrs. 7] $= 4^2 + 2\,(4 \,.\, 5) + 5^2$.

In der That ist $(4+5)^2 = 9^2 = 81$

und auch $4^2 + 2\,(4 \,.\, 5) + 5^2 = 16 + 40 + 25 = 81$.

10. Lehrs. „Der Kubus einer zweitheiligen Summe ist gleich der Summe aus dem Kubus des ersten Theiles, dem 3fachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theiles mit dem zweiten, dem 3fachen Producte aus dem ersten Theile mit dem Quadrate des zweiten und dem Kubus des zweiten Theiles.“

$$(4+5)^3 = 4^3 + 3 \times (4^2 \,.\, 5) + 3 \,.\, (4 \,.\, 5^2) + 5^3.$$

Bew.

$$\begin{aligned}(4+5)^3 = (4+5)^2 \times (4+5) &= [4^2 + 2 \,.\, (4 \,.\, 5) + 5^2] \times (4+5)\\ &= 4^2 \,.\, 4 + 2 \,.\, (4^2 \,.\, 5) + 4 \,.\, 5^2\\ &\quad + 4^2 \,.\, 5 + 2 \,.\, (4 \,.\, 5^2) + 5^3\end{aligned}$$

d. h. $(4+5)^3 = 4^3 + 3 \times (4^2 \,.\, 5) + 3 \,.\, (4 \,.\, 5^2) + 5^3$.

§ 15. Ist die Grundzahl der Potenz ein Product, so läßt sich die Potenz stets in ein Product aus Potenzen verwandeln: $(2 \,.\, 4)^3 = (2 \,.\, 4) \,.\, (2 \,.\, 4) \,.\, (2 \,.\, 4) = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \times 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 2^3 \,.\, 4^3$.

11. Lehrs. „Die Potenz eines Productes ist gleich dem Producte aus den Potenzen der Factoren.“

12. Lehrs. „Die Potenz einer Potenz ist gleich der Potenz derselben Grundzahl, die zum Exponenten das Product der Exponenten hat.“

$$(2^3)^2 = 2^3 \,.\, 2^3 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \times 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6.$$

§ 16. Den Zahlenwerth der Potenz bestimmen, heißt **potenziren.**

1. Der Zahlenwerth einer Potenz wird im Allgemeinen durch wiederholte Multiplication gefunden, nur für die 2te und 3te Potenz leiten wir aus den Sätzen **9** und **10** ein besonderes Verfahren ab. Dieses Verfahren besteht darin, daß wir, mit der höchsten Stelle beginnend, nach und nach die folgenden Stellen mit in Rechnung ziehen. Haben wir z. B. 3467^2 zu berechnen, so beginnen wir mit dem Zähler der höchsten Ordnung, 3:

$$3^2 = 9.$$

Nehmen wir nun die folgende 4 hinzu, so ist

$$34^2 = (30 + 4)^2 = 30^2 + 2 . (30 . 4) + 4^2.$$

$$\begin{array}{rcl}
30^2 = 3^2 . 10^2 = & 9 & \text{von der } 2^{\text{ten}} \text{ Ordnung} \\
2 . (30 . 4) = (2 . 3 . 4) . 10^1 = & 24 & \text{,, ,, } 1^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
4^2 = 4^2 . 10^0 = & 16 & \text{,, ,, } 0^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
\hline
\end{array}$$

$$34^2 = 1156.$$

Nehmen wir zur 34 die folgende 6 hinzu, so haben wir:

$$346^2 = (340 + 6)^2 = 340^2 + 2 . (340 . 6) + 6^2.$$

$$\begin{array}{rcl}
340^2 = 34^2 . 10^2 = & 1156 & \text{— von der } 2^{\text{ten}} \text{ Ordnung} \\
2 . (340 . 6) = (2 . 34 . 6) . 10^1 = & 408 & \text{,, ,, } 1^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
6^2 = 6^2 . 10^0 = & 36 & \text{,, ,, } 0^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
\hline
\end{array}$$

$$346^2 = 119716.$$

Lassen wir endlich zu 346 die jetzt folgende 7 hinzutreten, so ist:

$$3467^2 = (3460 + 7)^2 = 3460^2 + 2 \times (3460 . 7) + 7^2.$$

$$\begin{array}{rcl}
3460^2 = 346^2 . 10^2 = & 119716 & \text{— von der } 2^{\text{ten}} \text{ Ordg.} \\
2 . (3460 . 7) = (2 . 346 . 7)\ 10^1 = & 4844 & \text{— ,, ,, } 1^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
7^2 = 7^2 . 10^2 = & 49 & \text{,, ,, } 0^{\text{ten}} \text{ ,,} \\
\hline
\end{array}$$

$$3467^2 = 12020089.$$

Im Zusammenhange dargestellt:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\left.\begin{array}{rcr}
3^2 & = & 9 \\
2 . (3 . 4) & = & 24 \\
4^2 & = & 16
\end{array}\right\} = 34^2 \quad
\begin{array}{rcr}
2 . (34 . 6) & = & 408 \\
6^2 & = & 36
\end{array}\right\} = 346^2 \\
\begin{array}{rcr}
2 . (346 . 7) & = & 4844 \\
7^2 & = & 49
\end{array}
\end{array}\right\} = 3467^2$$

$$3467^2 = 12020089.$$

Wir bemerken hier, daß jedes folgende Quadrat das vorhergehende einschließt und daß zum Quadrate zwei Stellen hinzukommen, wenn zur Grundzahl eine Stelle hinzukömmt.

2. Ein gleiches Verfahren ergiebt sich für die Berechnung der 3^{ten} Potenz einer mehrstelligen Zahl.

Ist die gegebene Zahl 246, so beginnen wir wieder mit dem Zähler der höchsten Ordnung, hier 2:

$$2^3 = 8.$$

Nehmen wir die nächstfolgende Stelle hinzu, so ist:

$$24^3 = (20 + 4)^3 = 20^3 + 3 \times (20^2 \,.\, 4) + 3 \times (20 \,.\, 4^2) + 4^3.$$

$20^3 =$	$2^3 \,.\, 10^3 =$	8	— von der 3ten Ordnung.
$3 \,.\, (20^2 \,.\, 4) =$	$(3 \,.\, 2^2 \,.\, 4) \,.\, 10^2 =$	48	— „ „ 2ten „
$3 \,.\, (20 \,.\, 4^2) =$	$(3 \,.\, 2 \,.\, 4^2) \,.\, 10^1 =$	96	— „ „ 1ten „
$4^3 =$	$4^3 \,.\, 10^0 =$	64	„ „ 0ten „

$$24^3 = 13824$$

Nehmen wir jetzt zu 24 die folgende 6 hinzu:

$$246^3 = (240 + 6)^3 = 240^3 + 3 \times (240^2 \,.\, 6) + 3 \,.\, (240 \,.\, 6^2) + 6^2.$$

$240^3 =$	$24^3 \times 10^3 =$	13824	von der 3ten Ordg.
$3 \,.\, (240^2 \,.\, 6) =$	$(3 \,.\, 24^2 \,.\, 6) \times 10^2 =$	10368	„ „ 2ten „
$3 \,.\, (240 \,.\, 6^2) =$	$(3 \,.\, 24 \,.\, 6^2) \times 10^1 =$	2592	„ „ 1ten „
$6^3 =$	$6^3 \times 10^0 =$	216	„ „ 0ten „

$$246^3 = 14886936.$$

Im Zusammenhange dargestellt:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rr} 2^3 = & 8 \\ 3 \,.\, (2^2 \,.\, 4) = & 48 \\ 3 \,.\, (2 \,.\, 4^2) = & 96 \\ 4^3 = & 64 \end{array}\right\} = 24^3 \\ \begin{array}{rr} 3 \,.\, (24^2 \,.\, 6) = & 10368 \\ 3 \,.\, (24 \,.\, 6^2) = & 2592 \\ 6^3 = & 216 \end{array} \end{array}\right\} = 246^3$$

$$246^3 = 14886936.$$

Auch hier schließt jeder folgende Kubus den vorhergehenden mit ein; es kommen aber zum Kubus drei Stellen hinzu, wenn zur Grundzahl eine Stelle hinzukömmt.

Cap. 2.

Von den abgeleiteten Zahlformen und den indirecten Operationen.

Einleitung.

1. Unsere Aufgabe war, von der Zahl, als dem Begriffe einer bestimmten Menge von Einheiten, ausgehend, alle möglichen Arten der Auffassung einer gegebenen Menge von Einheiten zu ermitteln, und nach Festsetzung der Begriffe der verschiedenen Zahlformen, das Verhältniß der, unter diesen Formen gegebenen Zahlengrößen zur Einheit zu bestimmen.

2. Die verschiedenen Zahlformen ergaben sich uns aus der Bemerkung, daß eine gegebene Menge von Einheiten auf verschiedene Weisen in Gruppen zerlegt werden kann. Nachdem wir nun die möglichen Arten der Gruppirung erschöpft haben, bleibt uns als einziges Mittel zum weiteren Fortschritte die nähere Erörterung der Beziehungen zwischen Zahlform und Zahlenwerth, die wir jetzt nur einseitig aufgefaßt haben.

3. Da diese Untersuchungen sich nicht auf besondere Zahlen beschränken, sondern ganz allgemeiner Natur sind, so wollen wir uns, zur Bezeichnung der Zahl überhaupt, allgemeiner Zeichen, der Buchstaben bedienen.

Bezeichnen wir nun durch a und b irgend zwei von einander unabhängige Zahlen, so wissen wir aus dem Obigen, daß wir stets eine Zahl c finden können, die respective folgenden drei Bedingungen genügt:

$$c = a + b$$
$$c = a \times b$$
$$c = a^b$$

Während nun c in den drei Gleichungen respective als der Zahlenwerth der Summe, des Productes und der Potenz gegeben, und als solcher von den jedesmaligen Werthen von a und b abhängig und durch sie bestimmt ist, so bezeichnet doch c an sich eine beliebige Zahl, und es kann offenbar auch a als von c und b, b als von a und c abhängig betrachtet werden. Wir müssen uns daher die Frage vorlegen: Kann stets zu gegebenen Werthen von c und a ein b, oder zu gegebenen Werthen von c und b ein a gefunden werden, das beziehungsweise den obigen drei Gleichungen genügt? —

1. Von der Differenz und der Subtraction.

§ 17. Da in der Gleichung $a + b = c$ nach Grds. 1. die Versetzung der Größen a und b auf c keinen Einfluß hat, so ist es offenbar für die vorliegende Untersuchung gleichgiltig, welche der Größen a und b wir als die bedingte betrachten. Wir wählen b und haben somit zu untersuchen, ob für beliebige Werthe von a und c sich stets ein b finden läßt, das der Gleichung $a + b = c$ genügt. Mit anderen Worten: „Läßt sich eine jede Zahl als Summe mit einem gegebenen Summanden darstellen?"

§ 18. Um diese Abhängigkeit der Größe b von c und a zunächst in Zeichen auszudrücken, schreiben wir:

$$b = c - a,$$

gelesen b gleich c minus a,

so daß $c - a$ eine Größe bezeichnet, die mit a zusammen c giebt:

$$(c - a) + a = c.$$

Wir nennen diese Größe **Differenz**, c heißt der **Minuend**, a der **Subtrahend**. Ob aber eine solche Größe denkbar, ob ihr Verhältniß zur Einheit angebbar ist oder nicht, das ist jetzt zu untersuchen:

1. Ist $c > a$, so läßt sich c immer in zwei Theile zerlegen, von denen der eine gleich a ist. Ist z. B. $c = 8$, $a = 5$,

so ist $8 = ||||| \; ||| = 5 + 3$,

folglich $8 - 5 = 3$.

Es ist also in diesem Falle die Differenz $c - a$ gleich einer Zahl, die so viel Einheiten hat, als a weniger denn c hat.

2. Ist dagegen $c < a$, so wäre der gegebene Summand größer als der Zahlenwerth der Summe, was sich mit unsern einstweiligen Begriffen von der Zahl und der Summe nicht verträgt. — Wir behalten uns diesen Fall für spätere Untersuchungen vor.

§ 19. „Den Zahlenwerth der Differenz bestimmen, heißt **subtrahiren**."

Aus dem Begriffe der Differenz ergiebt sich uns folgende Definition:

Subtrahiren heißt: „Man soll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte suchen, die, zu der einen addirt, eine Summe gleich der andern giebt."

13. Lehrs. „Sind Minuend und Subtrahend beide Summen, so kann man die Summanden des Subtrahenden auch einzeln von denen des Minuenden subtrahiren."

$$\underline{(5+7)-(3+4)=(5-3)+(7-4),}$$

denn $(5+7)-(3+4)+(3+4)=5+7$ (s. § 18.)
und auch $(5-3)+(7-4)+(3+4)=[(5-3)+3]$
$+[(7-4)+4]$ (1. Grds.) $=5+7$.

Mit Hilfe des obigen Satzes kann man die Subtraction zusammengesetzter Zahlen stets auf die der Zähler gleicher Ordnungen zurückführen:

$$\begin{aligned}548-325 &= (500+40+8)-(300+20+5)\\ &= (500-300)+(40-20)+(8-5)\\ &= 200+20+3=223.\end{aligned}$$

Ist hierbei ein Stammzähler des Subtrahenden größer als der entsprechende im Minuenden, so nimmt man im Minuenden von dem Zähler der nächst höheren Ordnung eine Einheit und vereinigt die mit dem betreffenden Zähler zu einem zusammengesetzten Zähler, was man **borgen** nennt:

$$736-253=(700+30+6)-(200+50+3);$$

da sich 50 von 30 nicht subtrahiren läßt, so zerlegt man:

$$\begin{aligned}736-253 &= (600+130+6)-(200+50+3)\\ &= (600-200)+(130-50)+(6-3)\\ &= 400+80+3=483.\end{aligned}$$

II. Vom Quotienten und der Division.

§ 20. Wie bei der Summe die Reihenfolge der Summanden, so hat beim Product die Reihenfolge der Factoren auf den Zahlenwerth keinen Einfluß und es ist daher gleichgiltig, ob wir a oder b in der Gleichung $ab=c$ als die abhängige Größe betrachten. Wählen wir b, so haben wir zu ermitteln, ob für beliebige Werthe von a und c sich stets ein b finden läßt, das der Gleichung $ab = c$ genügt, oder „ob sich eine jede Zahl als Product mit einem gegebenen Factor darstellen läßt."

Diese Abhängigkeit der Größe b von a und c wollen wir in Zeichen also ausdrücken:

$$b = c : a,$$

„so daß $c : a$ eine Größe bezeichnet, die, mit a multiplicirt, ein Product gleich c giebt":

$$(c : a) \times a = c.$$

Diese Größe heißt Quotient, c heißt der Dividend, a der Divisor.

Ob aber diese Größe in einem angebbaren Verhältnisse zur Einheit steht, ist die Frage.

§ 21. Ist der Dividend kleiner als der Divisor, so wäre der Factor größer als der Werth des Productes, was den bisherigen Begriffen widerspricht. Dieser Fall ist also vorläufig als unlösbar zu bezeichnen.

Ist aber der Dividend größer als der Divisor, so lassen sich wenigstens immer zwei, um eine Einheit verschiedene Zahlen von der Beschaffenheit angeben, daß das Product der einen mit dem Divisor kleiner, das Product der andern aber mit dem Divisor größer ist als der Dividend. — Diese beiden Zahlen heißen die Grenzwerthe des Quotienten; erstere heißt die untere, letztere die obere Grenze. — Die untere Grenze heißt auch der angenäherte Werth des Quotienten.

Die Grenzen des Quotienten $14 : 3$ z. B. sind 4 und 5, denn $4 \times 3 < 14 < 5 \times 3$.

Die Zahl, welche angiebt, um wie viel das Product des Divisors mit dem angenäherten Werthe des Quotienten kleiner ist als der Dividend, heißt der Rest. — Für den Quotienten $14 : 3$ ist 4 der angenäherte Werth und 2 der Rest, denn es ist:

$$14 = 4 \times 3 + 2.$$

§ 22. Den vollständigen oder angenäherten Werth eines Quotienten bestimmen, heißt dividiren. Nach dem Begriffe des Quotienten heißt dividiren:

„Zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte suchen, die, mit der einen (dem Divisor) multiplicirt, ein Product gleich der anderen (dem Dividenden) giebt."

Läßt eine Zahl, durch eine andere dividirt, keinen Rest, so heißt erstere durch letztere ohne Rest theilbar oder schlechtweg theilbar. — Erstere wird in diesem Falle auch ein Vielfaches der letzteren genannt.

14. Lehrs. „Hat man eine Summe durch eine einfache Größe zu dividiren, so kann man auch jeden Summanden einzeln durch diese Größe dividiren."

$$(8+6):2=(8:2)+(6:2).$$

denn $[(8+6):2]\times 2=8+6$ und auch

$[(8:2)+(6:2)]\times 2=(8:2).2+(6:2)\times 2=8+6$ (s. Lhrs. 5).

15. Lehrs. „Hat man ein Product durch eine Zahl zu dividiren, so kann man auch den einen Factor durch diese Zahl dividiren."

$$(5.6):3=5.(6:3).$$

$[(5\times 6):3]\times 3=5\times 6$ und auch

$5\times(6:3)\times 3=5.6.$

16. Lehrs. „Hat man ein Product durch ein anderes zu dividiren, so kann man die Factoren des Dividenden auch einzeln durch die des Divisors dividiren."

$$(8\times 6):(2\times 3)=(8:2)\times(6:3)$$

$[(8\times 6):(2\times 3)]\times(2\times 3)=8\times 6$ und auch

$[(8:2)\times(6:3)]\times(2\times 3)=[(8:2)\times 2]\times[(6:3)\times 3]$

$=8\times 6.$ (s. Lehrs. 8.)

Auf die letzten drei Sätze stützt sich die Divisionsmethode. Folgende Bemerkungen mögen hier genügen:

1. Sind Dividend und Divisor Einheiten beliebiger Ordnungen, so ist der Quotient gleich der Einheit, deren Exponent die Differenz aus dem Exponenten des Dividenden und Divisors ist:

$$1000:10=100 \text{ oder } 10^3:10^1=10^{3-1}=10^2,$$

$$\text{denn } 10^{3-1}\times 10^1=10^{3-1+1}=10^3.$$

2. Sind Dividend und Divisor Zähler beliebiger Ordnungen, so hat der Quotient der Zähler zur Einheit den Quotienten der Einheiten des Dividenden und Divisors:

$$600 : 30 = 20,$$

denn $600 : 30 = (6 . 100) : (3 . 10) = (6 : 3) \times (100 : 10)$
$= 2 \times 10 = 20.$

3. Ist der Dividend größer als das Zehnfache des Divisors, so zerlegt man ihn in Summanden; die Zähler der aufeinanderfolgenden Einheiten sind, jedoch so, daß jeder Zähler das möglichst größte Vielfache des Divisors ist. Soll z. B. 855 durch 3 dividirt werden, so ist 6 das möglichst größte Vielfache von 3 unter 8, man trennt daher 600 als den ersten Summanden ab, es bleiben zu theilen übrig 255; 25 ist kein Vielfaches von 3, wohl aber 24, wir zerlegen daher die Zahl in $600 + 240 + 15$ und erhalten so
$855 : 3 = (600 + 240 + 15) : 3 = (600 : 3) + (240 : 3) + (15 : 3)$
$= 285.$

In der gewöhnlichen Ausführung:

$$\begin{array}{r|r}
855 : & 3 \\ \hline
600 & 200 \\
\overline{255} & 80 \\
240 & 5 \\ \hline
\overline{15} & 285 \\
15 & \\ \hline
\end{array}$$

Rechnet der Schüler auf der Tafel, so schreibt er bloß den ersten Partialwerth des Quotienten mit vollen Nullen, und schreibt die Zähler der folgenden gleich in die gehörigen Stellen, indem er die Null jedesmal aus der entsprechenden Stelle auslöscht.

III. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§ 23. Ist eine theilbare Zahl als Product dargestellt, so sind die Factoren entweder Primzahlen oder nicht. Sind sie Primzahlen, so ist bloß das eine Product möglich; sind sie aber theilbar, so kann man sie wieder in Factoren zerlegen u. s. f., bis alle Factoren endlich Primzahlen sind.

Hierbei zeigt sich nun folgendes Bemerkenswerthe:

„Von welcher Zerlegung man auch ausgehen mag, man erhält immer dieselben Primfactoren als Factoren derselben Zahl.“

$$210 = 2 \times 105 = 2 \times (3 \times 35) = 2 \times [3 \times (5 \times 7)]$$
$$210 = 3 \times 70 = 3 \times (2 \times 35) = 3 \times [2 \times (5 \times 7)]$$
$$210 = 5 \times 42 = 5 \times (2 \times 21) = 5 \times [2 \times (3 \times 7)]$$
$$210 = 7 \times 30 = 7 \times (2 \times 15) = 7 \times [2 \times (3 \times 5)]$$
$$210 = 6 \times 35 = (2 \times 3) \times (5 \times 7)$$
$$210 = 10 \times 21 = (2 \times 5) \times (3 \times 7)$$
$$210 = 14 \times 15 = (2 \times 7) \times (3 \times 5).$$

Wir nennen daher diese Primzahlen schlechtweg die Primfactoren der Zahl und schreiben ohne Klammern:

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Zugleich entnehmen wir aus dem Obigen folgende wichtigen Sätze für die Theilbarkeit der Zahlen:

17. Grunds. „Außer den Primfactoren einer Zahl kann keine Primzahl Factor derselben Zahl sein."

18. Lehrs. „Von den theilbaren Zahlen können nur diejenigen Factoren einer Zahl sein, die sich aus den Primfactoren derselben bilden lassen, oder deren Primfactoren zugleich Primfactoren der gegebenen Zahl sind."

19. Lehrs. „Scheidet man die Primfactoren einer andern Zahl aus den Primfactoren einer andern Zahl aus (vorausgesetzt, daß sie dieselben enthält), so ist das Product der übrigen der Zahlenwerth des Quotienten beider Zahlen."

20. Lehrs. „Ist eine Zahl durch keine der Primzahlen, die kleiner sind als sie selbst, theilbar, so ist die Zahl eine Primzahl."

§ 24. Ob aber eine Zahl durch eine bestimmte Primzahl theilbar sei oder nicht, das kann man im Allgemeinen bloß durch Probiren erkennen. Nur für wenige Primzahlen lassen sich aus folgenden Sätzen bequeme Kennzeichen ableiten:

21. Lehrs. „Sind mehrere Zahlen Vielfache derselben Zahl, so ist auch ihre Summe ein Vielfaches dieser Zahl."

$$15 = 3 . 5$$
$$25 = 5 . 5$$
$$30 = 6 . 5$$

$$15 + 25 + 30 = (3 + 5 + 6) \times 5.$$

Zusatz. „Ist eine Zahl ein Vielfaches einer andern, so ist auch jedes Vielfache der ersteren ein Vielfaches der letzteren."

22. Lehrs. „Sind zwei Zahlen Vielfache derselben Zahl, so ist auch ihre Differenz ein Vielfaches dieser Zahl."

$$\begin{array}{r} 20 = 5 \times 4 \\ 12 = 3 \times 4 \\ \hline 20 - 12 = (5 - 3) \times 4. \end{array}$$

23. Lehrs. „Lassen mehrere Zahlen, durch dieselbe Zahl dividirt gewisse Reste, so läßt die Summe der Zahlen als Rest die Summe der Reste."

$$\begin{array}{r} 15 = 3 \times 4 + 3 \\ 26 = 6 \times 4 + 2 \\ 37 = 9 \times 4 + 1 \\ \hline 15 + 26 + 37 = (3 + 6 + 9) \times 4 + (3 + 2 + 1). \end{array}$$

Zusatz. „Lassen mehrere Zahlen, durch dieselbe Zahl dividirt, gewisse Reste, so ist die Summe der Zahlen durch den gemeinschaftlichen Divisor theilbar, sobald die Summe der Reste durch denselben theilbar ist.

§ 25. Aus den Sätzen des vorigen § lassen sich nun Regeln für die Theilbarkeit durch die Primzahlen 2, 3 und 5 aufstellen:

24. Lehrs. „Eine Zahl ist durch $\begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix}$ theilbar, wenn die Einer durch $\begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix}$ theilbar sind."

Bew. Trennt man nämlich die Einer als den einen Summanden von einer Zahl, so bleibt als zweiter Summand jedesmal ein Vielfaches von 10, welches zugleich ein Vielfaches sowohl von 2 als von 5 ist (Lehrs. 20. Zus.).

Anmerkg. Zahlen, die durch 2 theilbar sind, heißen gerade Zahlen, alle übrigen ungerade Zahlen.

25. Lehrs. „Ist die Summe der Stammzähler einer Zahl, die s. g. Quersumme, durch 3 theilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 theilbar."

Bew. Die Einheiten der verschiedenen Ordnungen lassen, durch 3 dividirt, sämmtlich 1 als Rest:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \times 3 + 1 \\ 10 &= 3 \times 3 + 1 \\ 100 &= 33 \times 3 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es lassen daher auch die Zähler der verschiedenen Ordnungen, durch 3 dividirt, die Zähler selbst als Rest:

$$\begin{aligned} 20 &= 6 \times 3 + 2 \\ 500 &= 165 \times 3 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lösen wir nun die zur Prüfung, auf die Theilbarkeit durch 3, vorgelegte Zahl in die Summe ihrer Stammzähler auf und dividiren die Summanden einzeln durch 3, so erhalten wir aber die Zähler selbst als Reste:

$$5742 = 5000 + 700 + 40 + 2.$$

2 =	einem	Vielfachen	von	3 + 2
40 =	"	"	"	3 + 4
700 =	"	"	"	3 + 7
5000 =	"	"	"	3 + 5

5742 = einem Vielfachen von 3 + (2 + 4 + 7 + 5).

Da nun die Summe der Reste 2 + 4 + 7 + 5 = 18 durch 3 theilbar ist, so ist es auch die Summe der Zahlen, d. h. die vorgelegte Zahl 5742 (Lehrs. 22. Zus.). Die Summe der Reste ist aber eben die Quersumme.

25. Lehrs. „Addiren wir die Zähler der geraden Ordnungen und die der ungeraden Ordnungen besonders, so ist die Zahl durch 11 theilbar, sobald die Differenz aus diesen beiden Summen durch 11 theilbar ist.“

Obgleich dieser Satz erst im 2ten Abschnitte begründet werden kann, so kann der Schüler ihn doch schon hier benutzen, da er sich ja von der Wahrheit in jedem einzelnen Falle überzeugt.

Ist z. B. die gegebene Zahl 53713, so ist:

die Summe der Zähler der geraden Ordnungen = 3 + 7 + 5 = 15
" " " " " ungeraden " = 1 + 3 = 4.

Die Differenz beider 15 — 4 = 11 ist durch 11 theilbar und es ist auch die Zahl 53713 = 4883 × 11 durch 11 theilbar.

§ **26**. Will man nun eine Zahl darauf prüfen, ob sie eine Primzahl sei oder nicht, so untersucht man zunächst nach den obigen Regeln, ob sie keine der Zahlen 2, 3, 5, 11 als Factoren hat. Ist dieses nicht der Fall, so dividirt man sie durch 7, 13, 17, . . . ꝛc. durch alle Primzahlen der Reihe nach, bis der Divisor gleich dem Quotienten wird. Durch einen größeren Divisor kann sie nicht mehr theilbar sein, denn sonst müßte sie auch durch den kleineren Quotienten theilbar sein.

Will man die Primzahlen der Reihe nach, bis zu einer bestimmten Zahl, wissen, so giebt es ein einfaches Mittel sie durch Ausschließen der theilbaren Zahlen zu erhalten:

Schreibt man nämlich die Zahlen in der natürlichen Reihenfolge hin, so ist jede 2te Zahl von 2 an durch 2 theilbar, jede 3te von 3 an durch 3, jede 5te von 5 an durch 5 . . ꝛc.

Streicht man daher jede 2te von 2 an, jede 3te von 3 an, jede 5te von 5 an . . . ꝛc. aus (indem man die schon ausgestrichenen mit zählt) und setzt diese Operation bis zu der Primzahl fort, die mit sich multiplicirt, ein Product gleich der letzten Zahl giebt, so hat man nur die Primzahlen bis zur bestimmten Grenze übrig.

1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37.

1. Aufgabe. Es soll eine jede theilbare Zahl in ihre Primfactoren zerlegt werden.

2. Aufg. Es sollen die sämmtlichen Factoren einer theilbaren Zahl angegeben werden.

Lösung. Ist die vorgelegte Zahl $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, so giebt das Product $(1 + 2 + 4 + 8) \times (1 + 3 + 9) \times (1 + 5)$ nach Lehrs. 7 aufgelöst, die sämmtlichen Factoren von 360.

3. Aufg. Es soll zu mehreren gegebenen Zahlen der größte gemeinschaftliche Factor bestimmt werden.

Aufl. Man zerlegt die Zahlen in ihre Primfactoren; das Product der niedrigsten Potenzen der in allen Zahlen zugleich vorkommenden Primzahlen ist der größte gemeinschaftliche Factor.

$$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$$
$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$
$$1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$$

$2^3 \times 3^2 = 72$ der größte gemeinschaftliche Factor (s. Lehrs. **18.**)

Zu zwei Zahlen kann man auch also den größten gemeinschaftlichen Factor finden: Man dividirt mit der kleineren Zahl in die größere, mit dem Reste in den vorhergehenden Divisor u. s. f. mit dem jedesmaligen Reste in den vorhergehenden Divisor, bis kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Divisor.

66 | 1218 | 18
558
30 | 66 | 2
6 | 30 | 5

6 ist der größte gemeinschaftliche Divisor zu 66 und 1218. Der Beweis stützt sich auf folgende Sätze.

1. „Sind Divisor und Rest durch eine Zahl theilbar, so ist auch der Dividend durch diese Zahl theilbar.“ — Die Wahrheit erkennt man gleich aus folgender Formel:

$$a = q \times b + r,$$

wo a der Dividend, b der Divisor und r der Rest ist. (s. Lehrs. **21.**)

2. Sind Dividend und Divisor durch eine Zahl theilbar, so ist auch der Rest durch diese Zahl theilbar.

Es ist $a - q \times b = r$ (s. Lehrs. **22.**)

Beim obigen Beispiele ist 6 Factor vom Reste 6 und auch von Divisor 30, also ist auch 6 Factor vom Dividenden 66 und da 6 Factor vom Reste 30 und dem Divisor 66 ist, so ist 6 auch Factor von 1218. Wäre nun eine größere Zahl als 6 gemeinschaftlicher Factor von 66 und 1218, so müßte sie auch Factor vom Reste 30 sein und da sie nun Factor von 30 und 66 wäre, so müßte sie auch Factor vom Reste 6 sein, was nicht möglich ist. Folglich ist 6 der größte gem. Factor.

Anmerkg. Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, heißen relative Primzahlen.

4. Aufg. „Es soll zu mehreren gegebenen Zahlen das kleinste Vielfache bestimmt werden.“

Aufl. Das kleinste Vielfache muß nach Lehrs. 18 die Primfactoren einer jeden der vorgelegten Zahlen enthalten und keinen mehr. Es ist daher das kleinste Vielfache gleich dem Producte aus den höchsten Potenzen aller vorkommenden Primfactoren der gegebenen Zahlen.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$135 = 3^3 \times 5$$
$$100 = 2^2 \times 5^2$$
$$144 = 2^4 \times 3^2$$
$$320 = 2^6 \times 5$$

$2^6 \times 3^3 \times 5^2 = 43200$ das kleinste Vielfache.

Will man wissen, wie oft die einzelnen Zahlen in ihrem kleinsten Vielfachen enthalten sind, so findet man das hier in der Regel am bequemsten auf die in Lehrs. 19 angegebene Weise.

IV. Von der Wurzel und der Radicirung.

§ 27. Aus § 13 wissen wir, daß wir Grundzahl und Exponent einer Potenz nicht mit einander vertauschen können, ohne den Werth der Potenz zu ändern; es ist daher auch nicht einerlei, ob wir a oder b in der Gleichung $a^b = c$ als die abhängige Größe betrachten. Wir haben daher zwei Fragen zu beantworten: 1) „Läßt sich eine jede Zahl als Potenz mit einem beliebigen, gegebenen Exponenten darstellen?" 2) „Läßt sich eine jede Zahl als Potenz einer beliebig gegebenen Grundzahl darstellen?"

§ 28. Die durch die Gleichung $a^b = c$ gegebene Abhängigkeit der Größe a von b und c, drücken wir in Zeichen also aus:

$$a = \sqrt[b]{c},$$

so daß also $\sqrt[b]{c}$ eine Größe bezeichnet, die zur b^{ten} Potenz erhoben c giebt:

$$\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = c.$$

Wir nennen diese Größe die Wurzel — die b^{te} Wurzel aus c — b heißt der Exponent, c die Grundzahl der Wurzel.

§ 29. Nur in seltenen Fällen ist der Werth der Wurzel vollständig angebbar, es lassen sich aber immer zwei um eine Einheit verschiedene Zahlen angeben, von denen die eine kleiner, die andere aber größer als die gegebene Wurzel ist. Erstere Zahl heißt die untere, letztere die obere Grenze der Wurzel. Die untere Grenze heißt auch der angenäherte Werth der Wurzel.

§ 30. Den vollständigen oder angenäherten Werth einer Wurzel bestimmen heißt „die Wurzel ausziehen" oder „radiciren."

„Beim Radiciren suchen wir eine Zahl, die zu einem gegebenen Exponenten erhoben, eine Potenz gleich einer gegebenen Zahl giebt."

Die vollständige Lösung der obigen Aufgabe können wir hier nicht geben, wir beschränken uns auf die 2te und 3te Wurzel. — Die zweite Wurzel heißt auch die Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel.

Bei der Quadratwurzel pflegt man den Exponenten fortzulassen; man schreibt statt $\sqrt[2]{5}$ kurz $\sqrt{5}$.

A. Ausziehen der Quadratwurzel.

Der vollständige oder angenäherte Werth der Quadratwurzel aus einer Zahl zwischen 1 und 100 ist eine Stammzahl (denn $1^2 = 1$ und $10^2 = 100$) und kann nur durch Probiren aus der Reihe der Stammzahlen gefunden werden. Ist die Grundzahl größer als 100, so finden wir den Werth der Quadratwurzel stellweise, nach einem Verfahren, das wir aus § 16, 1 ableiten. Daselbst fanden wir 3467^2 also:

$$\begin{array}{rcr|l|l|l}
3^2 & = & 9 & & & \\
2 \times (3 \times 4) & = & 2 & 4 & & \\
4^2 & = & & 16 & & \\
\hline
2 \times (34 \times 6) & = & & 40 & 8 & \\
6^2 & = & & & 36 & \\
\hline
2 \times (346 \times 7) & = & & 4 & 84 & 4 \\
7^2 & = & & & & 49 \\
\hline
3467^2 & = & 11 & 02 & 00 & 89
\end{array}$$

Durch jede Stelle der Grundzahl kommen also, (wie wir auch schon oben bemerkten) zum Quadrate zwei Stellen hinzu. Haben

$\sqrt{12}$ wir daher $\sqrt{11020089}$ zu berechnen, so theilen wir die Grundzahl der Wurzel von der Rechten zur Linken in Rubriken zu zwei Stellen

$$\sqrt{11|02|00|89}$$

und wissen jetzt, daß der gesuchte Werth der Wurzel 4 Stellen hat, ferner, daß die in den auf einander folgenden Rubriken enthaltenen Stellen successiv aus den Zählern der jetzt gesuchten Grundzahl entstanden sind und zwar die Stellen der ersten Rubrike aus dem Quadrate des Zählers der höchsten Ordnung. Der Annäherungswerth zu $\sqrt{12}$, 3 ist daher der Zähler der höchsten Ordnung der gesuchten Zahl. Subtrahiren wir von den Stellen der ersten Rubrike $3^2 = 9$ und nehmen zum Reste die Stelle der zweiten Rubrike:

$$\begin{array}{l} \sqrt{12|02|00|89} = 3 \\ \;\; 9 \\ \hline \;\; 302 \end{array}$$

so erhalten wir die Zahl 302, die aus dem nächstfolgenden Zähler entstanden ist. — Durch den zweiten Zähler kam aber zum Quadrate hinzu erstens das doppelte Product des ersten Zählers mit dem zweiten und das Quadrat des zweiten Zählers. — Dividiren wir daher mit $2 \times 3 = 6$ in 30, indem wir die 2 für das Quadrat lassen, so erhalten wir 5, allein nach Abzug von $2 \times (3 \times 5) = 30$ bleibt 2 Rest, wovon sich $5^2 = 25$ nicht abziehen läßt, daher nehmen wir bloß 4 mal. Subtrahiren wir nun von 302 alles, was durch die 4 zum Quadrat hinzukömmt, und fügen zum Reste die beiden folgenden Stellen:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{12|02|00|89} = 34 \\ 3^2 = & 9 \\ \hline 6 & |\,302 \\ 2 \times (3 \times 4) = & \;\;24 \\ 4^2 = & \;\;\;16 \\ \hline & \;\;4600, \end{array}$$

so erhalten wir die Zahl 4600, die durch den 3ten Zähler entstanden sein muß. Dividiren wir nun mit $2 \times 34 = 68$ in 460, die letzte Null für's Quadrat übrig lassend, so erhalten wir 6 als dritten Zähler. Subtrahiren wir wieder alles, was durch 6 zum Quadrate von 34 hinzukömmt und fügen zum Reste die beiden letzten Stellen:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{12|02|00|89} = 346 \\ 3^2 = & 9 \\ \hline 6 & |\,302 \\ 2 \times (3 \times 4) = & \;\;24 \\ 4^2 = & \;\;\;16 \\ \hline 68 & |\,4600 \\ 2 \times (34 \times 6) = & \;\;\;408 \\ 6^2 = & \;\;\;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;48489, \end{array}$$

so erhalten wir die Zahl 48489, die aus dem letzten Zähler entstanden sein muß, den wir erhalten, wenn wir mit $2 \times 346 = 692$ in 4848 dividiren, welches die Zahl 7 giebt. In der That bleibt nach Abzug von $2 \times (346 \times 7) = 4844$ und $7^2 = 49$ kein Rest.

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{12|02|00|89} = 3467 \\
3^2 = & 9 \quad \ldots\ldots \\
\hline
 & 6|302 \ldots\ldots \\
2 \times (3 \times 4) = & 24 \quad \ldots\ldots \\
4^2 = & 16 \ldots\ldots \\
\hline
 & 68|4600 \ldots \\
2 \times (34 \times 6) = & 408 \quad \ldots \\
6^2 = & 36 \ldots \\
\hline
 & 692|48489 \\
2 \times (346 \times 7) = & 4844 \\
7^2 = & 49. \\
\hline
\end{array}
$$

B. Ausziehen der Kubikwurzel.

Der vollständige oder angenäherte Werth der Kubikwurzel aus Zahlen zwischen 1 und 1000 ist eine Stammzahl (denn $1^3 = 1$ und $10^3 = 1000$) die nur durch Probiren ermittelt werden kann. — Für das Ausziehen der Kubikwurzel aus größeren Zahlen leiten wir aus § 16, 2 ein Verfahren ab, nach welchem wir, wie bei der Quadratwurzel den Werth stellweise finden. Durch jede Stelle der Grundzahl kamen zum Kubus 3 Stellen hinzu; um daher zu erfahren, wie viel Stellen der gesuchte Werth der Kubikwurzel hat, und was als aus den einzelnen Stellen entstanden zu betrachten ist, theilen wir die Zahl von der Rechten zur Linken in Rubriken zu drei Stellen. — Die Stellen der ersten Rubrike sind dann aus dem Kubus des Zählers der höchsten Ordnung entstanden, wie das Beisp. aus § 16, 2 zeigt:

$$
\begin{array}{rr|r|r}
2^3 = & 8 & & \\
\hline
3 \times (2^2 \times 4) = & 4 & 8 & \\
3 \times (2 \times 4^2) = & & 96 & \\
4^3 = & & 64 & \\
\hline
3 \times (24^2 \times 6) = & 1 & 036 & 8 \\
3 \times (24 \times 6^2) = & & 25 & 92 \\
6^3 = & & & 216 \\
\hline
246^3 = & 14 & 886 & 936
\end{array}
$$

Haben wir daher $\sqrt[3]{14|886|936}$ zu berechnen, so ist der Zähler der höchsten Ordnung der gesuchten Zahl 2, der Annäherungswerth von $\sqrt[3]{14}$. Subtrahiren wir daher von 14 die Zahl $8 = 2^3$ und fügen zum Reste die folgenden 3 Stellen:

$$\begin{array}{r|l|l}
\sqrt[3]{14} & 886 & 936 = 2 \\
2^3 = 8 & & \\
\hline
6886 & &
\end{array}$$

so erhalten wir die Zahl 6886, die aus dem folgenden Zähler entstanden sein muß. Durch den zweiten Zähler kam aber zu 2^3 hinzu das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Zählers mit dem 2ten, welches die erste Stelle der neuen Rubrike gab; dividiren wir daher mit $3 \times 2^2 = 12$ in 68, so müssen wir den 2ten Zähler erhalten. — 68 : 12 giebt zwar 5, aber wie man sich leicht überzeugt, ist 5 zu groß, wir nehmen bloß 4. — Ziehen wir alles, was durch 4, als zweiten Zähler, zum Kubus hinzukömmt, von 6886 ab und fügen zum Reste die folgenden 3 Stellen:

$$\begin{array}{rr}
& \sqrt[3]{14|886|936} = 24 \\
2^3 = & 8 \\
\hline
& 12|6886 \\
3 \times (2^2 \times 4) = & 48 \\
3 \times (2 \times 4^2) = & 96 \\
4^3 = & 64 \\
\hline
& 1062936
\end{array}$$

so erhalten wir die Zahl 1062936, die durch den letzten Zähler entstanden sein muß. — Um diesen zu finden, dividiren wir mit $3 \times 24^2 = 1728$ in 10629, welches 6 giebt. Ziehen wir alles, was durch die 6 zu 24^3 hinzukömmt ab, so bleibt kein Rest:

$$\begin{array}{rr}
& \sqrt[3]{14|886|936} = 246 \\
2^3 = & 8 \\
\hline
& 12|6886 \\
3 \times (2^2 \times 4) = & 48 \\
3 \times (2 \times 4^2) = & 96 \\
4^3 = & 64 \\
\hline
& 1728|1062936 \\
3 \times (24^2 \times 6) = & 10368 \\
3 \times (24 \times 6^2) = & 2592 \\
6^3 = & 216 \\
\hline
\end{array}$$

Anmerkg. Die in § 27 aufgestellte 2te Frage können wir erst in der allgemeinen Arithmetik genügend beantworten, wir übergehen sie daher hier ganz.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den besonderen Zahlen.

Einleitung.

§ 31. Wir hatten uns oben die Aufgabe gestellt, das Verhältniß der durch die Symbole a — b, a : b, $\sqrt[b]{a}$ bezeichneten Größen zur Einheit zu ermitteln; haben diese Aufgabe aber nur einseitig gelöst, indem wir nur die Fälle näher betrachtet haben, wo die Größen sich als Vielfache der Einheit darstellen ließen. — Wir legen uns daher die Frage von Neuem vor und wollen die Sache zu ergründen suchen.

Cap. 1.

Von den negativen Zahlen.

A. Begriff und Bezeichnungsweise der negativen Zahlen.

§ 32. Ist in der Gleichung $c - a = b$ die Zahl a größer als c, so müßte b die Eigenschaft haben, zu einer größeren Zahl a hinzugefügt, eine kleinere Zahl c zu geben, d. h. es müßte b eine gewisse Zahl von Einheiten der Zahl a aufhebeu, vernichten. —

Uebertrifft insbesondere a die Zahl c um eine Einheit, so müßte b die Einheit aufheben; übertrifft a die Zahl c um 2, 3, 4 . . Einheiten, so müßte auch b beziehungsweise 2, 3, 4 . . . Einheiten aufheben. — Eine Größe aber, die 2, 3, 4 . . . Einheiten aufhebt, ist beziehungsweise als das 2, 3, 4 . . . fache der Größe zu betrachten, die die Einheit aufhebt. — Setzen wir daher die Größe, die die Einheit aufhebt, selbst als Einheit, so sind die Differenzen, in denen der Subtrahend größer ist als der Minuend, Zahlen gleich, die Vielfache der negativen Einheit sind. Wir nennen sie *negative* Zahlen. Im Gegensatze zu den negativen Zahlen nennen wir die, auf die ursprüngliche Einheit bezogenen Zahlen, *positive* Zahlen.

§ 33. Um die negative Einheit zu bezeichnen, setzen wir dem Zeichen für die Einheit einen horizontalen Strich vor: (-1), gelesen minus eins. — Die negativen Zahlen aber bezeichnen wir, wie die Zahlen überhaupt, durch Ziffern, die wir auf die bekannte Weise mit dem Einheitszeichen verbinden. Wir bezeichnen:

Die Größe, die eine Einheit vernichtet durch -1
" " " zwei " " " $(-1) \cdot 2$ oder kurz -2
" " " drei " " " $(-1) \cdot 3$ " " -3
⋮ ⋮ ⋮

Um dem Begriff positiv in Zeichen auszudrücken, setzen wir den Ziffern ein stehendes Kreuz vor.

Anmerkg. Die Zeichen $(+)$ und $(-)$ haben jetzt eine doppelte Bedeutung, sie sind Operations- und Qualitätszeichen zugleich.

§ 34. Den Begriff einer bestimmten Menge von Einheiten schlechtweg nennen wir die absolute Zahl.

Eine positive und eine negative Zahl von gleich viel Einheiten haben denselben absoluten Zahlenwerth, heben sich aber gegenseitig auf. Wir nennen zwei solche Zahlen gerade entgegengesetzt.

Zwei Zahlen, die in ihren Zeichen übereinstimmen, nennen wir gleichstimmig, im entgegengesetzten Falle ungleichstimmig.

Anmerkg. Bestimmen wir die Größe einer Zahl nach dem Effecte, den sie, als Zuwachs einer anderen Zahl betrachtet, hervorbringt, so müssen wir die negativen Zahlen sämmtlich als kleiner, als die kleinste positive Zahl, ja kleiner als Null betrachten. — Die dem absoluten Werthe nach größere negative Zahl ist relativ die kleinere.

$-1 > -2 > -3 > -4 > \ldots$ 2c.

26. Lehrs. „Vertauschen wir in einer Differenz den Subtrahenden mit dem Minuenden, so ist die entstandene Differenz der ursprünglichen gerade entgegengesetzt.“

$$5 - 3 = 2$$
$$3 - 5 = -2$$
$$3 - 5 = -(5-3),$$

oder $5 - 3 = -(3-5)$. NB $-(-2) = +2$.

B. Operationen mit negativen Zahlen.

§ 35. Die Addition.

Hier wird es nothwendig, den Begriff der Summe also zu erweitern:

„Unter der Form der Summe wird uns eine Zahl gegeben, die, als Zuwachs oder Verminderung einer Zahl betrachtet, allein dasselbe bewirkt, als die Summanden einzeln in gleichem Sinne angewandt.“

27. Lehrs. „Die Summe aus lauter negativen Summanden ist einer negativen Zahl gleich, deren absoluter Werth gleich ist der Summe aus den absoluten Werthen der Summanden.“

$$(-5)+(-6)+(-3)=-(5+6+3)=-14.$$

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der obigen Definition.

28. Lehrs. Sind in einer zweitheiligen Summe die Summanden ungleichstimmig, so ist der absolute Werth der Summe gleich der Differenz aus den absoluten Werthen der Summanden. Er ist $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn der $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Summand mehr Einheiten hat.“

a) $(+7)+(-3)=+(7-3)=+4,$

denn $(+7)+(-3)=(+4)+(+3)+(-3)=+4,$

b) $(-7)+(+3)=-(7-3)=-4,$

denn $(-7)+(+3)=(-4)+-(3)+(+3)=-4.$

29. Lehrs. „Eine mehrtheilige Summe aus theils positiven, theils negativen Summanden läßt sich stets in eine zweitheilige verwandeln, in welcher der eine Summand die Summe aus den positiven, der andere die Summe aus den negativen Summanden ist.“

$$(+5)+(-6)+(+7)+(-4)+(+3)=[(+5)+(+7)+(+3)]$$
$$+[(-6)+(-4)]=(+15)+(-10)=+5.$$

30. Lehrs. „Die Reihenfolge der Summanden hat auf den Zahlenwerth der Summe keinen Einfluß, auch wenn die Summanden alle oder zum Theil negativ sind.“

§ 36. Die Multiplication.

31. Lehrs. „Der absolute Werth eines Productes ist stets gleich dem Producte aus den absoluten Werthen der Factoren."

Bew. 1. Ist der Multiplicator positiv, so hat man den unveränderten Multiplicanden so oft als Summanden zu setzen, als der Multiplicator Einheiten hat:

a) $(+5) \times (+3) = (+5) + (+5) + (+5) = +(5 \times 3)$.
b) $(-5) \times (+3) = (-5) + (-5) + (-5) = -(5 \times 3)$.

2. Ist der Multiplicator negativ, so hat man das Entgegengesetzte des Multiplicanden so oft als Summanden zu setzen, als der Multiplicator Einheiten hat:

a) $(+5) \times (-3) = (-5) + (-5) + (-5) = -(5+5+5) = -(5 \times 3)$
b) $(-5) \times (-3) = (+5) + (+5) + (+5) = +(5+5+5) = +(5 \times 3)$.

Vergleicht man 1_a mit 2_b und 1_b mit 2_a, so folgt:

32. Lehrs. „Sind die beiden Factoren eines Productes gleichstimmig, so ist das Product positiv, sind sie ungleichstimmig, so ist das Product negativ."

33. Lehrs. „Ist in einem Producte aus mehreren Factoren die Anzahl der negativen Factoren $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\\text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, so ist das Product $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$."

34. Lehrs. „Die Reihenfolge der Factoren hat auf den Zahlenwerth des Productes keinen Einfluß, auch wenn alle oder ein Theil derselben negativ ist."

§ 37. Die Potenzirung.

35. Lehrs. „Der absolute Werth einer Potenz ist stets gleich der Potenz aus dem absoluten Werthe der Grundzahl."

a) Ist die Grundzahl positiv, so ist auch die Potenz positiv: $(+5)^3 = +(5^3)$.

b) Ist die Grundzahl negativ, so ist die Potenz $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ wenn der Exponent eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\\text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Zahl ist.

$$\left.\begin{matrix}(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = +(5^4)\\(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) \qquad = -(5^3)\end{matrix}\right\}\text{s. Lhrs. 33.}$$

Anmerkg. Potenzen mit negativen Exponenten haben nach unserem Begriffe von der Potenz keinen Sinn.

§ 38. Die Subtraction.

Nachdem der Begriff der entgegengesetzten Größen festgestellt ist, können wir die Definition der Subtraction auch also stellen:

„Eine Zahl von einer anderen subtrahiren, heißt das Entgegengesetzte derselben addiren.“

Bezeichnen a und b irgend welche, positive oder negative, Zahlen, so ist $a - b = a + (-b)$,
denn $(a - b) + b = a$ und auch $a + (-b) + b = a$.

36. Lehrs. „Sind Subtrahend und Minuend gleichstimmig, so ist der absolute Werth der Differenz gleich der Differenz aus den absoluten Werthen des Minuenden und Subtrahenden.“

$$1.. \begin{cases} a)\ (+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +(5-3) = +2, \\ b)\ (-3) - (-5) = (-3) + (+5) = +(5-3) = +2. \end{cases}$$

$$2.. \begin{cases} a)\ (+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -(5-3) = -2, \\ b)\ (-5) - (-3) = (-5) + (+3) = -(5-3) = -2. \end{cases}$$

37. Lehrs. „Sind Subtrahend und Minuend ungleichstimmig, so ist der absolute Werth der Differenz gleich der Summe aus den absoluten Werthen des Minuenden und Subtrahenden.“

a) $(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +(5+3) = +8.$
b) $(-5) - (+3) = (-5) + (-5) = -(5+3) = -8.$

In Betreff der Zeichen ersehen wir aus obigen Beispielen folgenden Satz:

38. Lehrs. „Ist der Subtrahend $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ als der Minuend, so ist die Differenz $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$.“ — (s. § 34 Anmerkg.).

§ 39. Die Division.

39. Lehrs. „Der absolute Werth eines Quotienten ist stets gleich dem Quotienten aus den absoluten Werthen des Dividenden und Divisors.“

1) $(+6):(+3) = +(6:3) = +2$, denn $[+(6:3)] \times (+3) = +6.$
2) $(+6):(-3) = -(6:3) = -2$ „ $[-(6:3)] \times (-3) = +6.$
3) $(-6):(+3) = -(6:3) = -2$ „ $[-(6:3)] \times (+3) = -6.$
4) $(-6):(-3) = +(6:3) = +2$ „ $[+(6:3)] \times (-3) = -6.$

Vergleichen wir 1 mit 4 und 2 mit 3, so folgt:

40. Lehrs. „Sind Divisor und Dividend $\left\{\begin{matrix}\text{gleichstimmig}\\\text{ungleichstimmig}\end{matrix}\right\}$ so ist der Quotient $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$."

§ 40. Die Radicirung.

Die Potenz einer positiven Zahl ist immer positiv, aber auch die gerade Potenz einer negativen Zahl ist positiv. Daraus folgt:

41. Lehrs. „Eine gerade Wurzel aus einer positiven Zahl hat zwei gerade entgegengesetzte Werthe."

$\sqrt{4} = \pm 2$ denn $(+2)^2 = +4$ und auch $(-2)^2 = +4$.

42. Lehrs. „Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist immaginär."

Es ist keine Zahl denkbar, die z. B. zur 2^{ten} Potenz erhoben -4 giebt, denn $(+2)^2 = +4$ und auch $(-2)^2 = +4$; $\sqrt{-4}$ hat also keinen, in einem denkbaren Verhältnisse zur Einheit stehenden Werth. — Solche inhaltlose Formen nennt man eben **immaginäre** Größen.

Im Gegensatze zu den immaginären Größen nennt man alle, in einem angebbaren Verhältnisse zur Einheit stehenden Größen **reelle** Größen.

43. Lehrs. „Eine ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl hat nur **einen** und zwar einen positiven Werth."

44. Lehrs. „Eine ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl hat immer **einen** und zwar einen negativen Werth, deren absoluter Zahlenwerth gleich ist der Wurzel aus dem absoluten Werthe der Grundzahl."

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3, \text{ denn } (-3)^3 = -27.$$

Cap. 2.

Von den Brüchen.

I. Die gemeinen Brüche.

A. Begriff, Bezeichnungsweise und Eigenschaftem der gemeinen Brüche.

§ 41. Wir konnten im Obigen den Zahlenwerth des Quotienten nur bestimmt angeben, wenn der Dividend die sämmtlichen Primfactoren des Divisors enthielt. Wir sahen aber zugleich, daß dem Quotienten auch in den übrigen Fällen ein bestimmter Werth zukömmt, weil immer bestimmte Grenzen angegeben werden konnten, zwischen denen er liegt. Es fragt sich nun, ob das Verhältniß des Quotienten zur Einheit nicht bestimmter angegeben werden kann, als durch Grenzen?

§ **42.** Die Quotienten **1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 . . . .**, sind Größen, die respective 2, 3, 4 . . . mal gesetzt die Einheit geben. — Eine Größe aber, die 2, 3, 4 . . . mal gesetzt, die Einheit giebt, ist respective der 2te, 3te, 4te . . . Theil der Einheit. Alle übrigen Quotienten sind Vielfache der Quotienten **1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 . . .**, denn der Quotient **3 : 4** z. B. ist eine Größe, die **4** mal gesetzt **3** giebt, diese ist offenbar das Dreifache von der Größe, die **4** mal gesetzt **1** giebt:

$$3 : 4 = 3 \times (1 : 4).$$

Setzen wir daher jeden aliquoten Theil der Einheit selbst als Einheit und nennen:

den zweiten	Theil	der	Einheit	ein Halbes,
„ dritten	„	„	„	ein Drittel,
„ vierten	„	„	„	ein Viertel,
:			:	:

So sind die Quotienten Zahlen gleich, die Vielfache dieser Einheiten sind.

Wir nennen die Zahlen, deren Einheiten aliquote Theile der ursprünglichen Einheit sind, g e b r o c h e n e Zahlen oder B r ü c h e.

Im Gegensatze zu den Brüchen werden die, auf die ursprüngliche Einheit bezogenen Zahlen g a n z e Zahlen genannt.

§ **43.** Die Bezeichnungsweise der Brucheinheiten ist folgende:

ein Halbes	bezeichnet	man	durch	$^1/_2$,
ein Drittel	„	„	„	$^1/_3$,
ein Viertel	„	„	„	$^1/_4$,
:				:

So wie man nun statt e i n m a l e i n H a l b e s, z w e i m a l e i n H a l b e s . . . . e i n m a l e i n D r i t t e l, z w e i m a l e i n

Drittel ...., kurz sagt ein Halbes, zwei Halbe ...., ein Drittel, zwei Drittel ...., so schreibt man auch:

statt	$1 \times {}^1/_2$	kurz	${}^1/_2$	statt	$1 \times {}^1/_3$	kurz	${}^1/_3$
"	$2 \times {}^1/_2$	"	${}^2/_2$	"	$2 \times {}^1/_3$	"	${}^2/_3$
"	$3 \times {}^1/_2$	"	${}^3/_2$	"	$3 \times {}^1/_3$	"	${}^3/_3$
	: :		:		: :		:

Bei dieser Schreibart steht der Zähler über dem Striche, er giebt die Zahl der Einheiten an. — Die unter dem Striche stehende Zahl heißt der Nenner; der Nenner giebt an, der wie vielste Theil der Einheit die Brucheinheit ist.

Anmerkg. Bei den ganzen Zahlen wird die Einheit nicht durch Nenner, sondern durch Stellen angegeben.

§ 44. Ist der Zähler dem Nenner gleich, so ist der Bruch der Einheit gleich, denn es sind dann gerade so viel Theile genommen, als auf das Ganze gehen, ist aber der Zähler $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als der Nenner, so sind $\left\{\begin{matrix}\text{weniger}\\\text{mehr}\end{matrix}\right\}$ Theile genommen, als auf das Ganze gehen, der Bruch ist $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als die Einheit, er heißt ein $\left\{\begin{matrix}\text{echter}\\\text{unechter}\end{matrix}\right\}$ Bruch. —

45. Lehrs. „Der Quotient ist dem Bruch gleich, dessen Zähler gleich dem Dividenden und dessen Nenner gleich dem Divisor ist."

$7 : 3 = \frac{7}{3}$, denn $(7 : 3) \times 3 = 7$ und auch $\frac{7}{3} \times 3 = 7 \times \frac{1}{3} \times 3 = 7$.

Hat der Dividend alle Primfactoren des Divisors, so ist der Quotient einer ganzen Zahl gleich; ein unechter Bruch, dessen Zähler die Primfactoren des Nenners enthält, ist also auch einer ganzen Zahl gleich, er heißt ein uneigentlicher Bruch.

Ist der Dividend größer als der Divisor, der Quotient aber keiner ganzen Zahl gleich, so hat der Quotient eine ganze Zahl zum angenäherten Werthe, welcher um eine Größe zu klein ist, die, mit dem Divisor multiplicirt, ein Product gleich dem Reste giebt. Diese Größe ist offenbar der echte Bruch, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Divisor ist:

$$17 = 3 \times 5 + 2,$$

folglich $17 : 5 = 3 + \frac{2}{5}$, kurz $3\frac{2}{5}$ geschrieben; da aber $17 : 5 = \frac{17}{5}$ ist, so ist auch $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Eine Zahl, die aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte Zahl.

1. Aufg. „Es soll eine jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch mit einem beliebigen Nenner verwandelt werden."

2. Aufg. „Es soll ein jeder unechter Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt werden."

3. Aufg. „Es soll eine jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt werden."

§ 45. Bezeichnen wir den 2ten Theil von $\frac{1}{2}$ durch $\frac{(\frac{1}{2})}{2}$,

" " " 3ten " " $\frac{1}{2}$ " $\frac{(\frac{1}{2})}{3}$,

: : :

" " " 2ten " " $\frac{1}{3}$ " $\frac{(\frac{1}{3})}{2}$,

" " " 3ten " " $\frac{1}{3}$ " $\frac{(\frac{1}{3})}{3}$,

: : :

so ist: $\frac{1}{4} = \frac{(\frac{1}{2})}{2}$ oder $\frac{1}{2} = (\frac{1}{4}) \times 2$,

$\frac{1}{6} = \frac{(\frac{1}{2})}{3}$ " $\frac{1}{2} = (\frac{1}{6}) \times 3$,

$\frac{1}{6} = \frac{(\frac{1}{3})}{2}$ " $\frac{1}{3} = (\frac{1}{6}) \times 2$,

$\frac{1}{8} = \frac{(\frac{1}{2})}{4}$ " $\frac{1}{2} = (\frac{1}{8}) \times 4$,

$\frac{1}{8} = \frac{(\frac{1}{4})}{2}$ " $\frac{1}{4} = (\frac{1}{8}) \times 2$,

: : : :

Umgekehrt:

$$\frac{(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{(\frac{1}{2})}{3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6},$$

: : :

Wir schließen hieraus:

46. Lehrs. „Die Brucheinheit ist um so kleiner, je größer ihr Nenner ist, und zwar ist sie der 2te, 3te . . . Theil einer andern Einheit, wenn ihr Nenner respective das 2, 3 . . . fache vom Nenner der letzteren ist."

47. Lehrs. Bei gleichem Zähler ist der Bruch um so kleiner, je größer ihr Nenner ist. Ein Bruch ist der 2te, 3te ... Theil eines andern Bruches, wenn bei gleichem Zähler sein Nenner das 2, 3 ... fache vom Nenner des letzteren ist.

$$\tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{10} \times 2 \text{ oder } \tfrac{3}{10} = \frac{(\frac{3}{5})}{2},$$

$$\tfrac{5}{3} = \tfrac{5}{12} \times 4 \quad " \quad \tfrac{5}{12} = \frac{(\frac{5}{3})}{4},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

Da der Zähler die Zahl der Einheiten angiebt, so folgt ferner:

48. Lehrs. „Bei gleichem Nenner (gleicher Einheit) ist der Bruch um so größer, je größer sein Zähler ist; er ist das 2, 3 .. fache eines andern, wenn sein Zähler, bei gleichem Nenner, das 2, 3 ... fache des letzteren ist.“

$$\tfrac{6}{7} = \tfrac{2}{7} \times 3 \text{ oder } \tfrac{2}{7} = \frac{(\frac{6}{7})}{3},$$

$$\tfrac{8}{9} = \tfrac{2}{9} \times 4 \quad " \quad \tfrac{2}{9} = \frac{(\frac{8}{9})}{4},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

Aus **47** und **48** folgt:

49. Lehrs. „Wenn der Zähler und Nenner eines Bruches in gleichem Verhältniß wächst oder abnimmt, d. h. wenn der Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt wird, so wird der Werth des Bruches nicht geändert.“

Den Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl dividiren, heißt den Bruch heben.

4. Aufg. „Es soll ein Bruch auf den möglichst kleinsten Nenner gebracht werden.“

Die Lösung stützt sich auf § **26** Aufg. **3**.

§ 46. Da man Zähler und Nenner eines Bruches mit jeder beliebigen Zahl multipliciren kann, ohne seinen Werth zu ändern, so kann man auch immer einen Bruch auf verschiedene größere Nenner bringen; diese Nenner müssen aber Vielfache von dem Nenner des Bruches sein. Die Drittel z. B. kann man wohl auf 6tel, 9tel, 12tel, .. aber nicht auf 5tel, 8tel .. bringen; denn $\frac{1}{5}$ ist zwar kleiner als $\frac{1}{3}$, aber kein aliquoter Theil von $\frac{1}{3}$.

5. Aufg. „Es soll ein Bruch auf einen gegebenen größeren Nenner gebracht werden.“

Aufl. Man dividirt mit dem Nenner des Bruches in den vorgeschriebenen Nenner und multiplicirt mit der resultirenden Zahl den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches:

$$12 : 4 = 3, \text{ daher ist } \tfrac{3}{4} = \tfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \tfrac{9}{12}.$$

B. Operationen mit Brüchen.

§ 47. Die Addition.

Der Begriff der Summe setzt voraus, daß die Summanden auf dieselbe Einheit bezogen, d. h. gleichnamig sind. Wir haben daher die Aufgabe zu lösen:

6. Aufg. „Gegebene Brüche sollen auf den möglichst kleinsten gleichen Nenner gebracht werden.“

Lösung. Man suche nach § 26 Aufg. 4 das kleinste Vielfache zu den Nennern der gegebenen Brüche, den s. g. General-Nenner und verfährt dann nach Aufg. 5.

7. Aufg. „Es sollen mehrere gegebene Brüche addirt werden.“

Lösung. Nach der Definition in § 4 hat man eine Zahl zu suchen, die allein so viel Einheiten hat als die Summanden (gleiche Einheiten) haben. Sind daher die Brüche gleichnamig gemacht, so hat man bloß die Zähler zu addiren, und den Werth auf die den Summanden gemeinschaftliche Einheit zu beziehen:

$$\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{6} = \tfrac{8}{12} + \tfrac{9}{12} + \tfrac{10}{12} = \tfrac{8+9+10}{12} = \tfrac{27}{12} = 2\tfrac{3}{12}.$$

Sind die Summanden gemischte Zahlen, so addirt man die ganzen Zahlen besonders:

$$3600 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5.$$

$5\frac{5}{18}$	$200 \times 5 = 1000$
$3\frac{7}{20}$	$180 \times 7 = 1260$
$\frac{11}{75}$	$48 \times 11 = 528$
$15\frac{13}{48}$	$75 \times 13 = 975$
23	$\frac{3763}{3600} = 24\frac{163}{3600}.$

$$18 = 2 . 3 . 3$$
$$20 = 2 . 2 . 5$$
$$75 = 3 . 5 . 5$$
$$48 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3$$

$2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5 = 3600$ der General-Nenner.

Man berücksichtige hierbei Lehrs. 19.

§ 48. Die Multiplication.

1. Ist der Multiplicator eine ganze Zahl, so hat man den Multiplicanden so oft als Summanden zu setzen, als der Multiplicator Einheiten hat.

$$\tfrac{3}{4} \times 5 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{3 \times 5}{4}.$$

2. Ist der Multiplicator ein Bruch, so hat man einen aliquoten Theil des Multiplicanden so oft als Summanden zu setzen, als der Zähler des Multiplicators Einheiten hat; welchen Theil, giebt der Nenner des Multiplicators an.

Ist z. B. das Product $\tfrac{4}{5} \times \tfrac{2}{3}$ zu berechnen, so hat man von $\tfrac{4}{5}$ den 3ten Theil 2 mal zu setzen (s. § **11**).

$$\frac{(\frac{4}{5})}{3} = \frac{4}{5 \times 3} \text{ folglich } \tfrac{4}{5} \times \tfrac{2}{3} = \frac{4}{5 \times 3} \times 2 = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}.$$

Da es wünschenswerth ist, daß der resultirende Bruch in möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt sei, so muß man den Bruch, wo möglich, heben. Man hebe aber bevor die Multiplication der Zähler und Nenner unter sich ausgeführt ist, weil man da leichter die gemeinschaftlichen Factoren erkennen kann:

$$\tfrac{8}{9} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} = \frac{8 \times 3 \times 5}{9 \times 4 \times 6} = \tfrac{5}{9}.$$

3) Sind die Factoren gemischte Zahlen, so verwandelt man sie am besten in unechte Brüche. Nur in besondern Fällen ist es bequemer, die Multiplication einzeln auszuführen. Z. B.

$$(4\tfrac{8}{9}) \times \tfrac{3}{4} = \frac{4\frac{8}{9}}{4} \times 3 = (1\tfrac{2}{9}) \times 3 = 3\tfrac{2}{3}.$$

Nach diesen Betrachtungen können wir folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

50. Lehrs. „Das Product zweier, auf beliebige Einheiten bezogenen Zahlen ist stets der Zahl gleich, die zum Zähler das Product der Zähler, zur Einheit das Product der Einheiten hat."

1) $40 \times 60 = (4 \times 6) \times (10 \times 10) = 2400$;
2) $(-5) \times (-3) = (5 \times 3) \times (-1 \times -1) = +15$;
3) $\frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = (5 \times 4) \times (\frac{1}{6} \times \frac{1}{7}) = \frac{20}{42}$.

51. Lehrs. „Die Reihenfolge der Factoren hat auf den Zahlenwerth des Productes keinen Einfluß, auch wenn die Factoren Brüche sind.“

$$\tfrac{3}{5} \times \tfrac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \tfrac{4}{7} \times \tfrac{3}{5}.$$

Anmerkung. Sind die Factoren echte Brüche, so ist das Product stets einem echten Bruche gleich, der kleiner ist als jeder Factor. Sind die Factoren unechte Brüche, so ist das Product größer als jeder Factor.

§ 49. Die Potenzirung.

52. Lehrs. „Die Potenz eines Bruches ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Potenz des Zählers, dessen Nenner die Potenz des Nenners ist.“

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \tfrac{3}{4} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}.$$

1) Ist die Grundzahl ein echter Bruch, so ist die Potenz einem echten Bruche gleich, der kleiner ist als die Grundzahl; ist die Grundzahl ein unechter Bruch, so ist die Potenz einem unechten Bruche gleich, der größer ist als die Grundzahl (s. § 47 Anm.).

2) Die Potenz eines Bruches kann nie einer ganzen Zahl gleich sein, denn die Potenz einer Zahl hat dieselben Primfactoren, als die Zahl selbst. Sind daher die Primfaetoren des Nenners von denen des Zählers verschieden, so sind auch die Primfactoren einer beliebigen Potenz des Nenners von denen einer Potenz des Zählers verschieden.

§ 50. Die Subtraction.

Von der Differenz gilt, was von der Summe gesagt ward; der Minuend und Subtrahend müssen gleichnamig sein. Alsdann gilt:

53. Lehrs. „Die Differenz zweier Zahlen von gleicher Einheit ist gleich der Differenz der Zähler, bezogen auf die gemeinschaftliche Einheit.“

$$\tfrac{5}{6} - \tfrac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

Differenzen, wie $5 - \frac{3}{4}$ und $7\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6}$ können auf zwei Arten behandelt werden:

1. Beisp. $5 - \frac{3}{4} = \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ oder $5 - \frac{3}{4} = 4\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 4\frac{1}{4}$;

2. Beisp. $7\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{23}{3} - \frac{17}{6} = \frac{46}{6} - \frac{17}{6} = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$ oder
$7\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = 7\frac{4}{6} - 2\frac{5}{6} = 6\frac{10}{6} - 2\frac{5}{6} = 4\frac{5}{6}$.

Daß die zweite Art im Allgemeinen den Vorzug verdient, ist einleuchtend.

§ 51. Die Division.

1) Hat man einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, so dividirt man entweder die Zahl (den Zähler) oder man dividirt die Einheit (d. h. man multiplicirt den Nenner) mit der ganzen Zahl.

1) $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$, denn $\frac{6:3}{7} \times 3 = \frac{(6:3) \times 3}{7} = \frac{6}{7}$;

2) $\frac{5}{6} : 4 = \frac{5}{6 \times 4} = \frac{5}{24}$, denn $\frac{5}{6 \times 4} \times 4 = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{5}{6}$.

2) Hat man eine Zahl (a) durch die Brucheinheit ($\frac{1}{n}$) zu dividiren, so sucht man eine Zahl, die mit der Brucheinheit ($\frac{1}{n}$) multiplicirt, ein Product gleich der Zahl giebt. Mit $\frac{1}{n}$ multipliciren aber heißt den n^{ten} Theil nehmen; daher kann man auch sagen: man sucht eine Zahl, deren n^{ter} Theil $= a$ ist. Diese Zahl ist offenbar $n \times a$.

Hat man also eine Zahl durch die Brucheinheit zu dividiren, so multiplicirt man sie mit dem Nenner. Aus beiden folgt:

3) Hat man eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so multiplicirt man sie durch den Nenner und dividirt sie durch den Zähler des Bruches.

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{6} = (\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{6}) : 5 = (\tfrac{3}{4} \times 6) : 5 = \frac{3 \times 6}{4 \times 5}.$$

In der That ist $\frac{3 \times 6}{4 \times 5} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6 \times 5}{4 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$.

4) Hat man gemischte Zahlen zu dividiren, so verwandelt man sie zuvor in unechte Brüche.

Alle besonderen Regeln der Division lassen sich in den allgemeinen Satz zusammenfassen:

54. Lehrs. „Der Quotient aus zwei, auf beliebige Einheiten bezogenen Zahlen ist stets gleich der Zahl, die zum Zähler den Quotienten der Zähler, zur Einheit den Quotienten der Einheiten hat."

1) $600:20=(6\times100):(2\times10)=(6:2)\times(100:10)=30$;

2) $(-6):(+3)=(6:3)\times(-1:+1)=2\times(-1)=-2$;

3) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=(5\times\frac{1}{6}):(3\times\frac{1}{4})=(5:3)\times(\frac{1}{6}:\frac{1}{4})=\frac{5}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{5\times4}{3\times6}$.

Ist der Divisor ein $\left\{\begin{matrix}\text{echter}\\ \text{unechter}\end{matrix}\right\}$ Bruch, so ist der Werth des Quotienten $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als der Dividend.

§ 52. Die Radicirung.

55. Lehrs. „Die Wurzel aus einem Bruche ist stets einem Bruche gleich, dessen Zähler die Wurzel aus dem Zähler und dessen Nenner die Wurzel aus dem Nenner der Grundzahl ist."

$$\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}},\text{ denn }\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^3=\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\tfrac{2}{3}.$$

II. Decimalbrüche.

A. Begriff und Schreibart der Decimalbrüche.

§ 53. Wir haben schon oben bemerkt, daß die Einheiten der ganzen Zahlen nicht durch Nenner, sondern durch Stellen angegeben werden. Es ist einleuchtend, daß ein Gleiches bei Brüchen geschehen kann, wenn die Brucheinheiten nach demselben Prinzipe gebildet werden, wie die der ganzen Zahlen.

Das Prinzip aber, nach dem die Einheiten der ganzen Zahlen gebildet sind, ist dieses, daß je eine Einheit der höheren Ordnung zehn Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung enthält, so daß also umgekehrt der 10te Theil einer Einheit, die Einheit der nächstniedrigeren Ordnung giebt:

$\frac{10^4}{10^1}=10^{4-1}=10^3$ oder $10000:10=1000$,

$\frac{10^3}{10^1}=10^{3-1}=10^2$ „ $1000:10=100$,

$$\frac{10^2}{10^1} = 10^{2-1} = 10^1 \text{ oder } 100 : 10 = 10,$$

$$\frac{10^1}{10^1} = 10^{1-1} = 10^0 \quad " \quad 10 : 10 = 1.$$

$\vdots$

Setzen wir diese Bildungsweise über eins hinaus fort, so erhalten wir:

$$\frac{10^0}{10^1} = 10^{0-1} = 10^{-1}, \text{ oder } 1 : 10 = \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^1,$$

$$\frac{10^{-1}}{10^1} = 10^{-1-1} = 10^{-2}, \text{ oder } \frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

$$\frac{10^{-2}}{10^1} = 10^{-2-1} = 10^{-3}, \text{ oder } \frac{1}{100} : 10 = \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3.$$

$\vdots$

D. h. wir erhalten als Brucheinheiten die aufeinander folgenden Potenzen von $\frac{1}{10}$, die sich auch, wie aus dem Obigen ersichtlich, als Potenz von 10 mit negativen Exponenten darstellen lassen.

Wir nennen daher auch:

$\frac{1}{10}$ die Einheit der minus 1sten Ordnung,

$\frac{1}{100}$ " " minus 2ten "

$\vdots$

Diese Einheiten nun lassen sich durch Stellen angeben, wie die der ganzen Zahlen:

Die Einheit der 0ten Ordnung bildet die Grenze. Links stehen in den aufeinander folgenden Stellen die Einheiten der 1ten, 2ten, 3ten — Ordnung, rechts die Einheit der — 1ten, — 2ten, — 3ten Ordnung.

Da hiermit die Bestimmung, daß in der äußersten Stelle rechts die Einer stehen, aufgehoben ist, so muß man die Stelle der Einer besonders markiren. Zu dem Zwecke setzt man zwischen Einer und Zehntel ein Comma. Man schreibt also:

3,5 statt $3\frac{5}{10}$,

25,06 statt $25\frac{6}{100}$.

$\vdots$

Ist keine ganze Zahl vorhanden, so setzt man, der Deutlichkeit halber, in die Stelle der Einer eine Null. Man schreibt also:

0,5 nicht ,5 statt $\frac{5}{10}$,

0,06 " ,6 " $\frac{6}{100}$.

„Brüche, die nach dem Decimalsysteme geschrieben sind, oder deren Einheiten aufeinander folgende Potenzen von $\frac{1}{10}$ sind, werden Decimalbrüche genannt.“

B. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

§ 54. Wir haben den Bruch als den Werth des Quotienten kennen lernen. Es fragt sich, ob der Werth des Quotienten sich eben so gut durch Decimalbrüche angeben läßt, als durch gemeine Brüche? oder, was dasselbe ist, ob jeder gemeine Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden kann?

Nach § 46 lassen sich Brüche nur auf solche Nenner bringen, die Vielfache ihres Nenners sind. Die Nenner der Decimalbrüche wären aber, wenn man sie schriebe, Potenzen von 10 und eine Potenz von 10 kann nur Vielfaches einer Zahl sein, die außer 2 und 5 keine andere Primfactoren hat. Wir folgern hieraus:

56. Lehrs. „Man kann nur solche gemeine Brüche vollständig in Decimalbrüche verwandeln, deren Nenner außer 2 und 5 keine anderen Primfactoren haben.“

Für Quotienten nun, deren Divisore von 2 und 5 verschiedene Primfactoren haben, lassen sich immer Grenzwerthe in Decimalbrüchen angeben, die so wenig, als man will, von dem wahren Werthe verschieden sind:

Der Quotient $9:7$ hat zum angenäherten Werthe 1, als Rest 2; statt des Restes 2 kann man aber setzen $\frac{20}{10}$ und der Quotient $\frac{20}{10}:7$ hat als untere Grenze $\frac{2}{10}$, als Rest $\frac{6}{10}$. Setzen wir daher $1+\frac{2}{10}$ oder 1, 2 statt $\frac{9}{7}$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$. Statt des gebliebenen Restes $\frac{6}{10}$ können wir schreiben $\frac{60}{100}$; der Quotient $\frac{60}{100}:7$ hat $\frac{8}{100}$ als untere Grenze und $\frac{4}{100}$ zum Reste. Setzen wir daher $9:7$ oder $\frac{9}{7}=1+\frac{2}{10}+\frac{8}{100}=1,28$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{100}$. Daß man so beliebigen Grad der Genauigkeit erreichen kann, ist einleuchtend.

Man kann übrigens bei der Grenzbestimmung verfahren, wie bei der gewöhnlichen Division, indem man zum jedesmaligen Reste eine 0 zufügt, wodurch man die Einer in 10^{tel}, die 10^{tel}

in 100stel . . . 2c. verwandelt, und also auch als Grenzwerthe 10tel, 100stel . . . 2c. erhält.

7 | 9 | 1,285714
7
20 . . . $[\frac{20}{10}]$
14
60 . . . $[\frac{60}{100}]$
56
40 . . . $[\frac{40}{1000}]$
35
50 . . . $[\frac{50}{10000}]$
49
10 . . . $[\frac{10}{100000}]$
7
30 . . . $[\frac{30}{1000000}]$
28
2

Setzen wir die Division noch weiter fort, so erhalten wir wieder 2, dann 8 . . 2c., kurz dieselben Stammzähler in derselben Reihenfolge, denn fügen wir zum Reste 2 eine 0, so erhalten wir als Dividend wieder 20, wie oben. Den Inbegriff solcher, in derselben Reihenfolge wiederkehrender Stammzähler nennen wir eine Periode und den Decimalbruch, der eine Periode enthält, einen periodischen Decimalbruch.

57. Lehrs. „Jeder Quotient, dessen Werth nicht vollständig angegeben werden kann, hat einen periodischen Decimalbruch als angenäherten Werth." —

Der Grund ist einfach der: Sollen die nach und nach gefundenen Werthe wirklich Annäherungswerthe sein, so muß der jedesmalige Rest kleiner sein als der Divisor. Sind daher alle Zahlen, die kleiner sind als der Divisor, als Reste vorgekommen, so muß spätestens ein gewesener Rest wiederkehren, dann beginnt aber auch die Periode. Der wiederkehrende Rest braucht nicht gerade der erste zu sein, daher auch die Periode nicht mit der ersten Stelle nach dem Komma zu beginnen braucht. Beginnt die Periode mit der ersten Stelle, so heißt der Decimalbruch ein reinperiodischer, sonst ein unreinperiodischer. Die Periode zeigt man dadurch an, daß man über die wiederkehrenden

Ziffern Punkte setzt, oder dieselben noch einmal schreibt, und in Klammern schließt:

$$5{,}7\dot{3}\dot{6} \text{ oder } 5{,}736(36).$$

§ 55. Hat man einen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln, so schreibt man den gehörigen Nenner, den man aus der letzten Stelle erkennt, drunter und hebt, wo möglich.

Kennt man von einem unbegrenzten Decimalbruch die ganze Periode, so läßt sich der gemeine Bruch, aus dem sich der periodische Decimalbruch entwickeln läßt, genau bestimmen:

Es ist nehmlich: $\frac{1}{9} = 0{,}1(1) \ldots$

$$\frac{1}{99} = 0{,}01(01) \ldots$$
$$\frac{1}{999} = 0{,}001(001) \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Also auch umgekehrt:

$$0{,}1(1) = \frac{1}{9}$$
$$0{,}01(01) = \frac{1}{99}$$

Da nun $0{,}3(3) = 3 \times 0{,}1(1)$

$$0{,}7(7) = 7 \times 0{,}1(1)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$0{,}56(56) = 56 \times 0{,}01(01)$$

so ist auch $0{,}3(3) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

$$0{,}7(7) = 7 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$0{,}56(56) = 56 \times \frac{1}{99} = \frac{56}{99}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Hieraus folgt:

58. Lehrs. „Ein reinperiodischer Decimalbruch ist dem gemeinen Bruche gleich, dessen Zähler die Periode und dessen Nenner eine Zahl mit so viel Neunen ist, als die Periode Stellen hat."

Ist der Bruch ein unreinperiodischer, so verwandelt man ihn in einen reinperiodischen, wie folgt:

1) $0{,}56(6) = 5{,}6(6) : 10 = (5\frac{6}{9}) : 10 = \frac{5 \times 9 + 6}{90} = \frac{5 \times 10 + 6 - 5}{90}$

$$= \frac{56 - 5}{90}$$

$$2)\ 2,54326(326) = 254,326(326) : 100 = (254\tfrac{326}{999}) : 100$$
$$= \frac{254 \times 999 + 326}{99900} = \frac{254 \times 1000 + 326 - 254}{99900}$$
$$= \frac{254326 - 254}{99900}$$

Verfährt man, wie in diesen Beispielen gezeigt ist, so wird man leicht die bekannte practische Regel finden.

C. Operationen mit Decimalbrüchen.

§ 56. Addition und Subtraction.

Die Operationen mit Brüchen unterscheiden sich in nichts Wesentlichem von denen mit ganzen Zahlen, vollends die Operationen mit Decimalbrüchen, die ja nach demselben Systeme geschrieben sind, wie die ganzen Zahlen.

Ueber die Addition und Subtraction der Decimalbrüche kann in der That nichts weiter gesagt werden, als, daß man nicht vergessen darf, daß die Stellen nicht von der äußersten Stelle rechts, sondern vom Komma aus zu rechnen sind. Im Uebrigen hat man die Zähler gleicher Ordnungen zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren, wie bei den ganzen Zahlen.

§ 57. Die Multiplication.

Der in § 48 aufgestellte allgemeine Satz, daß das Product zweier, auf beliebige Einheiten bezogenen Zahlen, stets einer Zahl gleich ist, die zum Zähler das Product der Zähler, zur Einheit (Nenner) das Product der Einheiten (Nenner) hat, findet natürlich auch bei Decimalbrüchen Anwendung:

$$5,37 \times 0,569 = \frac{537}{100} \times \frac{569}{1000} = \frac{537 \times 569}{100 \times 1000}.$$

Hierdurch ist die Multiplication der Decimalbrüche vollständig auf die der ganzen Zahlen reducirt.

Da das Product immer mehr Decimal-Stellen hat, als jeder Factor (nämlich gerade so viele als beide Factoren zusammen), das Resultat einer Operation aber nicht genauer sein kann als die der Operation unterworfenen Zahlen, so ist es wichtig das Verfahren so einzurichten, daß die überflüssigen Stellen gleich bei der Operation fortbleiben, ohne dadurch die Operation an sich zu erschweren, so daß ein wirklicher Zeitgewinn erzielt wird.

Diesen Zweck erreicht man dadurch, daß man nicht wie gewöhnlich, mit der niedrigsten, sondern mit der höchsten Stelle des Multiplicators die Multiplication beginnt. — Eine vollständige Multiplication würde hiernach also auszuführen sein:

$$\begin{array}{r}
3{,}758 \\
\underline{6{,}947} \\
22548 \\
3382_{2} \\
150_{32} \\
26_{306} \\
\hline
26{,}106_{826}
\end{array}$$

Die mit kleinen Ziffern bezeichneten Stellen sind die überflüssigen, die bei der Operation fortzulassen sind. Hat man daher mit der ersten 6 multiplicirt, so streicht man gegen die 6 die letzte 8 im Multiplicanden, multiplicirt aber die gestrichene 8 noch mit der auf 6 folgenden 9, läßt die Einer fort und addirt die Zehner zu der aus 5 $\times$ 9 erhaltenen Zahl. Hat man die Multiplication mit 9 beendet, so streicht man gegen die 9 die 5 im Multiplicanden, multiplicirt wieder die gestrichene 5 mit der 4, wobei man 2 im Sinn behält, die man zu der, aus 4 $\times$ 7 erhaltenen 28 addirt. Gegen 4 streicht man die 7; da aber die gestrichene 7 mit der auf 4 folgenden 7 die Zahl 49 giebt, die näher an 50 als an 40 liegt, so behält man 5, nicht 4 im Sinn.

$$\begin{array}{r}
3{,}\cancel{7}\cancel{5}\cancel{8} \\
\cancel{6}{,}\cancel{9}\cancel{4}7 \\
\hline
22548 \\
3382\cancel{_{2}} \\
150\cancel{_{0}} \\
26\cancel{_{9}} = 10 \text{ gerechnet} \\
\hline
26{,}106.
\end{array}$$

Will man überhaupt im Resultate so viel Decimalstellen haben, als im Multiplicanden sind, so multiplicirt man mit der höchsten Stelle des Multiplicators beginnend bis zu den Einern vollständig:

$$\begin{array}{r}
36{,}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{9} \\
\underline{\cancel{4}8{,}\cancel{5}\cancel{3}5} \\
146316 \\
292632 \\
18289\cancel{_{5}} \\
1097\cancel{_{1}} \\
183\cancel{_{5}} = 10 \\
\hline
1775{,}361
\end{array}$$

Will man im Resultate eine Stelle mehr haben, als im Multiplicanden sind, so rechnet man auch noch mit den Zehnteln vollständig:

```
  36,54                 236,547
  41,9867                 0,08953
 ---------             ---------
 1461 6                  18 9238
   36 54                  2 1289
   29 886                   1182
    2 923                     71
      219              ---------
       25                21,1780
 ---------
 1531,193
```

§ 58. Die Division.

Der Quotient aus Decimalbrüchen kann immer in einen Quotienten aus ganzen Zahlen verwandelt werden:

$$15,6 : 3,78 = \frac{156}{10} : \frac{378}{100} = \frac{156 \times 100}{378 \times 10} = \frac{15600}{3780}$$

Gewöhnlich aber verwandelt man den Quotienten so, daß bloß der Divisor eine ganze Zahl ist:

$$3,765 : 5,4 = 3,765 : \frac{54}{10} = \frac{3,765 \times 10}{54} = \frac{37,65}{54}.$$

Die weitere Ausführung hat keine Schwierigkeit:

37 : 54 giebt 0; $\frac{376}{10}$: 54 aber $\frac{6}{10}$ zur Grenze, folglich

```
54 | 37,65 | 0,69 ...
     324
     ----
      5·2·5
      486
```

Hat der Divisor viele Stellen, so ist die Division weitläufig und eine Verkürzung am rechten Orte. Der Quotient 17,2654 : 3,4567 würde auf 4 Stellen vollständig berechnet, geben:

```
3,4567 | 17,2654 | 4,9947
         13 8268
         ----------
          34386  0
          31110  3
         ----------
           3275  70
           3111  03
         ----------
            164  670
            138  268
         ----------
             26  4020
             24  1969
```

Man übersieht leicht, daß man alle, vom vertikalen Striche rechts liegenden Stellen fortlassen kann, wenn man bloß die oben berechneten 4 Decimalstellen haben will. Man verfährt daher bei der verkürzten Division so, daß man dem Reste keine Null mehr anhängt, sondern statt dessen eine Stelle jedesmal im Divisor streicht.

$$
\begin{array}{r|r|l}
3{,}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{7} & 17{,}2654 & 4{,}9948\,.\,. \\
 & 13\,8268 & \\ \cline{2-2}
 & 34386 & \\
 & 31110 & \\ \cline{2-2}
 & 3276 & \\
 & 3110 & \\ \cline{2-2}
 & 166 & \\
 & 138 & \\ \cline{2-2}
 & 28 & \\
 & 27 & \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Man vergesse nur nicht auch hier die zuletzt gestrichene Zahl jedesmal mit zu multipliciren, der im Sinn zu behaltenden Zahl wegen.

Cap. 3.

Von den Irrationalzahlen.

§ 59. Wir haben in **§ 29** gesehen, daß nur selten die Wurzel aus einer ganzen Zahl wieder einer ganzen Zahl gleich ist, daß wir aber immer zwei, um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen finden können, die Grenzen der Wurzel sind, so daß also der Wurzel (aus einer absoluten Zahl) immer eine Größe zukömmt. Zwischen zwei aufeinanderfolgende Zahlen giebt es aber unzählig viele Brüche; es liegt daher die Frage nahe, ob nicht ein, zwischen den Grenzen der Wurzel liegender Bruch angebbar ist, welcher genau der Wurzel gleich ist? — Diese Frage müssen wir nach **§ 49, 2** verneinen, denn da haben wir gesehen, daß die Potenz eines Bruches immer wieder einem Bruche, nie einer ganzen Zahl gleich ist.

Wenn daher die Wurzel aus einer ganzen Zahl keiner ganzen Zahl gleich ist, so kann das Verhältniß derselben zur Einheit überhaupt nicht bestimmt angegeben werden. — „Zahlengrößen, deren Verhältniß zur Einheit nicht bestimmt (weder durch ganze Zahlen noch durch Brüche) angebbar ist, heißen Irrationalzahlen." — Die meisten Wurzeln sind irrational.

§ **60.** Können wir aber gleich den Werth einer Irrationalzahl nicht genau durch Brüche angeben, so können wir doch immer einen Bruch finden, der so wenig, als man will, von dem wahren Werthe verschieden ist.

Die Annäherungswerthe giebt man am bequemsten in Decimalbrüchen an; für die Quadrate und Kubikwurzel finden wir sie dann nach dem in § 30 angegebenen Verfahren:

1. Es ist $(\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100}$; wollen wir daher den Werth einer Wurzel bis auf Zehntel genau haben, so müssen wir die Grundzahl in Hundertstel verwandeln:

$$\sqrt{5} = \sqrt{\tfrac{500}{100}} = \frac{\sqrt{500}}{10}.$$

Der Grenzwerth zu $\sqrt{500}$ ist 22, denn

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{500} = 22 \\
 & 4 \\
4 & \overline{|\,100} \\
 & \;\;84 \\
\end{array}$$

Es ist daher $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{500}}{10} = \frac{22}{10} = 2,\ 2\,..$ bis auf Zehntel genau.

Wollen wir eine Genauigkeit von $\frac{1}{100}$ haben, so setzen wir, da $(\frac{1}{100})^2 = \frac{1}{10000}$ ist,

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{50000}{10000}} = \frac{\sqrt{50000}}{100}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{5|00|00} = 223 \\
 & 4 \\
4 & \overline{|\,1.0.0} \\
 & \;\;84 \\
44 & \overline{|\,1600} \\
 & \;\;1329 \\
\end{array}$$

folglich $\sqrt{5} = \frac{223}{100} = 2{,}23\,..$ bis auf Hundertstel genau.

Man sieht, daß man dem jedesmaligen Reste bloß zwei Nullen anzuhängen und nach § 30, A zu verfahren braucht, um den Grenzwerth bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit zu erhalten.

2. Hat man eine Stelle über die Hälfte der gewünschten

Zahl von Stellen vollständig berechnet, so kann man die übrigen durch eine verkürzte Division erhalten, wie folgendes Beispiel zeigt:

Vollständig.

```
√5 = 2,236067
 4
4|100
   84
44|1600
   1329
446|27100
    26796
44720|304|0000
      268|3236
447212|35|376400
       31|304789
```

Abgekürzt.

```
√5 = 2,236068
 4
4|100
   84
44|16.0.0
   13 2 9
446|27.1.0.0
    26 7 9 6
4472|30.4
     26 8
      36
      35
```

3. Aus einem Dezimalbruche zieht man die Wurzel, wie aus einer ganzen Zahl; man darf nur nicht vergessen, daß man die Stellen vom Komma aus zu rechnen, und theilt daher vom Komma aus die Zahl nach beiden Seiten in Rubriken zu zwei Stellen ab. — Sind alle Stellen herunter gezogen, so hängt man keine Nullen mehr an, sondern rechnet verkürzt:

```
√1|31,06|54|3 = 11,44838
 1 . . . . .
 2|31 . . . . .
   21 . . . . .
22|1006 . . .
    896 . . .
228|11054 .
     9136 .
2288|19183
     18310 . . 8² = 64 gibt 6 im Sinn
       873
       686
       187
       182
         5
```

Anmerkg. Hat man aus einem gemeinen Bruche die Wurzel zu ziehen, so verwandelt man ihn bis auf die gewünschte Zahl von Stellen, in einen Decimalbruch. —

4. Will man den Grenzwerth einer Kubikwurzel in Zehnteln angeben, so muß man die Grundzahl in Tausendstel verwandeln, denn $(\frac{1}{10})^3 = \frac{1}{1000}$. — Hat man z. B. $\sqrt[3]{5}$ zu berechnen, so setzt man:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\tfrac{5000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5000}}{10}$$

und bestimmt den Grenzwerth von $\sqrt[3]{5000}$.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{5|000} = 17 \\
\phantom{\sqrt[3]{}}1 \\
\hline
3|4000 \\
\quad 21 \\
\quad 147 \\
\qquad 343 \\
\hline
\qquad 87
\end{array}$$

Setzen wir also $\sqrt[3]{5} = \frac{17}{10} = 1{,}7$.. so ist der Fehler $< \frac{1}{10}$.

Will man im Grenzwerthe 100stel haben, so muß man die Grundzahl in 1000000stel verwandeln, den $(\frac{1}{100})^3 = \frac{1}{1000000}$.

Setzen wir $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\tfrac{5000000}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{5000000}}{100}$ und bestimmen den Grenzwerth zu $\sqrt[3]{5000000}$

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{5|000|000} = 170 \\
\phantom{\sqrt[3]{}}1 \\
\hline
3|4000 \\
\quad 21 \\
\quad 147 \\
\qquad 343 \\
\hline
867|87000
\end{array}$$

so erhalten wir $\sqrt[3]{5} = \frac{170}{100} = 1{,}70$, wo der Fehler $< \frac{1}{100}$ ist.

Man sieht, daß man bloß drei Nullen dem jedesmaligen Reste anzuhängen und die Operation nach § 30, B fortzusetzen braucht, um den Grenzwerth bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit zu erhalten.

Hat man die Hälfte der gewünschten Zahl von Stellen vollständig berechnet, und bildet noch den nächsten Divisor, so kann man die übrigen Stellen durch eine verkürzte Division, wie bei der Quadratwurzel finden;

1. Vollständig:

$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759$

1

3 | 4000

21

147

343

86700 | 87000000

780300

41310

729

8762313 | 8556171000

78860817

415287

729

877154403 | 665935701000

6140080821

2513553

343

87722622027 | 51902483027000

438613110135

12824775

125

8772313501875 | 80410437656250

Berechnung der Divisore.

1

14

49

$170^2 = 28900$

3069

81

$1709^2 = 2920771$

30762

81

$17099^2 = 292384801$

239386

49

$170997^2 = 29240874009$

1709970

25

$1709975^2 = 2924104500625$

2. Verkürzt:

$\sqrt[3]{5} = 1{,}709976.0$

1

3 | 4000

21

147

343

86700 | 87000000

780360

41310

729

8762313 | 8.5.56.17.1

7 8 86 08 2

4 15 3 . . . weil $3 \times 1709 \times 9^2 = 415287$

6659.36

6133 62

5.2.574

5 2 574

Anmerkg. Ich sehe mich veranlaßt, noch einmal darauf aufmerksam zu machen, daß die Grundzahl einer Quadratwurzel nothwendig in 100stel; die einer Kubikwurzel in 1000stel zu verwandeln ist, wenn man den Grenzwerth in 10teln angeben will, weil dagegen oft gefehlt wird. Es ist z. B. $\sqrt{0,5}$ nicht 0,2 der angenäherte Werth, so wenig $\sqrt[3]{0,8} = 0,2$ ist; denn $(0,2)^2 = 0,04$ und $(0,2)^3 = 0,008$. — Man muß statt $\sqrt{0,5}$ setzen $\sqrt{0,50}$ und statt $\sqrt[3]{0,8}$ setzen $\sqrt[3]{0,800}$ und findet so $\sqrt{0,5} = 0,7\ldots$ und $\sqrt[3]{0,8} = 0,9\ldots$

§ 61. Zwischen zwei Grenzen, wenn sie auch noch so eng sind, sind doch unzählich viele Werthe denkbar, — welche Gewißheit haben wir daher, daß der Irrationalzahl doch ein bestimmter Werth zukömmt? Wie läßt sich überhaupt das Größenverhältniß zweier Irrationalzahlen erkennen? — Über diese Fragen gibt folgender Lehrsatz Aufschluß:

59. Lehrs. „Zwei Irrationalzahlen sind einander gleich, wenn sie zwischen denselben Grenzen bleiben auch wenn die Differenz der Grenzen sich unendlich der Null nähert."

Bew. Sind a und b zwei Irrationalzahlen, die beide zwischen den Grenzen G und g liegen, so ist

$$\begin{array}{c} G > a \\ g < b \\ \hline \text{folglich } G - g > a - b \end{array}$$

Die Differenz der Grenzen ist also immer größer als die Differenz der zwischen ihnen liegenden Größen. Die Differenz der Grenzen kann sich daher nicht der Null unendlich nähern, wenn nicht die Differenz der zwischenliegenden Größen gleich Null ist. Ist aber $a - b = 0$, so ist $a = b$. —

§ 62. Treten Irrationalzahlen als Glieder einer Zahlform auf, so setzen wir, bei der Berechnung, statt derselben ihre Grenzwerthe. — Wir begehen allerdings dabei Fehler; — Fehler aber, die wir beherrschen können, hören, wenigstens für die Praxis, auf, solche zu sein.

Anhang.

Nachträglicher Beweis des 25sten Satzes.

Die Einheiten der verschiedenen Ordnungen lassen durch 11 dividirt, abwechselnd + 1 und — 1 als Reste:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \times 11 + 1 \\ 10 &= 1 \times 11 - 1 \\ 100 &= 9 \times 11 + 1 \\ 1000 &= 91 \times 11 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es lassen daher auch die Stammzähler der verschiedenen Ordnungen, durch 11 dividirt, die Zähler selbst als Rest. Eine jede Zahl aber ist die Summe ihrer Stammzähler und eine Summe ist durch eine Zahl theilbar, sobald die Summe der Reste, die die einzelnen Summanden, durch diese Zahl dividirt, lassen, ein Vielfaches derselben ist. — Da nun der absolute Werth einer Summe aus theils positiven, theils negativen Summanden, gleich der Differenz aus der Summe der positiven und der Summe der negativen Summanden ist, so ist auch der genannte Satz richtig:

$$52745 = 50000 + 2000 + 700 + 40 + 5$$

5 = einem Vielfachen von 11 + 5
40 = „ „ „ 11 — 4
700 = „ „ „ 11 + 7
2000 = „ „ „ 11 — 2
50000 = „ „ „ 11 + 5

52745 = „ „ „ 11 + (5 — 4 + 7 — 2 + 5)

aber $5 - 4 + 7 - 2 + 5 = (5 + 7 + 5) - (4 + 2)$ $= 11$ durch 11 theilbar folglich auch 52745 durch 11 theilbar. —

Lehrbuch

der

reinen Arithmetik.

Zweiter Theil.

Die allgemeine Arithmetik.

Einleitung.

1. Die allgemeine Arithmetik hat die Eigenschaften der Zahlformen an sich und in Beziehung zu einander zu untersuchen. — Ihre Aufgabe ist im Wesentlichen Reduction zusammengesetzter Formen auf einfachere, für die Berechnung bequemere.

2. Da es die allgemeine Arithmetik nicht mit den besonderen Werthen einer Zahlform zu thun hat, sondern mit den Zahlformen als solchen, so bezeichnet man hier die Zahlen nicht durch Ziffern, sondern durch Buchstaben, von denen jeder eine jede beliebige (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl bezeichnet, jedoch so, daß derselbe Buchstabe, in derselben Verbindung, durch alle Umformungen hindurch dieselbe Zahl bedeutet.

3. Die Verbindung zweier gleichartiger Größen durch das Gleichheitszeichen ($=$), heißt eine Gleichung. — Die Gleichung $a = b$ kann gelesen werden: a ist gleich b oder a soll gleich b gemacht werden. — Im ersteren Falle enthält die Gleichung eine Behauptung, einen Lehrsatz; die Verschiedenheit der beiden Seiten besteht bloß in der Form. Solche Gleichungen heißen analythische, sie bedürfen eines Beweises und bilden den Gegenstand eben der allgemeinen Arithmetik. — Die Gleichungen der zweiten Art sind Aufgaben, die einer Lösung bedürfen; sie heißen algebraische und bilden den Gegenstand der Algebra oder der Lehre von den Gleichungen schlecht weg. —

Gleichungen, deren beide Seiten sich in Nichts unterscheiden, wie $a = a$ heißen identische Gleichungen.

4. Die Wahrheit der aufgestellten analytischen Gleichungen wird erwiesen, indem man darthut, daß dieselben durch gehörige Anwendung gewisser, unmittelbar als wahr anerkannter Sätze

der s. g. Grundsätze, sich in identische Gleichungen verwandeln lassen.

5. Die Grundsätze zerfallen in allgemeine und besondere. — Die allgemeinen Grundsätze sind:

1) In jeder Verbindung kann man statt einer Größe, eine ihr gleiche Größe setzen.

$$\begin{array}{l} \text{Ist } a \overset{=}{>} b \\ \text{und } a = c \\ \hline \text{so ist } c \overset{=}{>} b \end{array}$$

2) Gleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt, mit Gleichem multiplicirt, durch Gleiches dividirt, auf gleiche Exponenten erhoben, gibt Gleiches.

$$\begin{array}{lllllllll} & & \text{Ist} & a & = & b & & & \\ & & \text{und} & c & = & d & & & \\ \hline \text{so ist} & 1) & a & + & c & = & b & + & d \\ & 2) & a & - & c & = & b & - & d \\ & 3) & a & \times & c & = & b & \times & d \\ & 4) & a & : & c & = & b & : & d \\ & 5) & a^c & & & = & b^d & & \end{array}$$

3) Gleiches zu Ungleichem addirt, von Ungleichem subtrahirt; Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, durch Gleiches dividirt, auf gleiche Exponenten erhoben gibt Ungleiches mit denselben Zeichen:

$$\begin{array}{lllllllll} & & \text{Ist} & a & > & b & & & \\ & & \text{und} & c & = & d & & & \\ \hline \text{so ist} & 1) & a & + & c & > & b & + & d \\ & 2) & a & - & c & > & b & - & d \\ & 3) & a & \times & c & > & b & \times & d \\ & 4) & a & : & c & > & b & : & d \\ & 5) & a^c & & & > & b^d & & \end{array}$$

4) Ungleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches durch Ungleiches dividirt, gibt Ungleiches mit entgegengesetzten Zeichen.

$$\begin{array}{lllllllll} & & \text{Ist} & a & = & b & & & \\ & & \text{und} & c & > & d & & & \\ \hline \text{so ist} & 1) & a & - & c & < & b & - & d \\ & 2) & a & : & c & < & b & : & d \end{array}$$

5) Ungleiches zu Ungleichem addirt, mit Ungleichem multiplicirt, bei gleichem Zeichen, gibt Ungleiches mit demselben Zeichen.

$$\begin{array}{ll} & \text{Ist } a > b \\ & \text{und } c > d \\ \hline \text{so ist} & 1)\ a + c > b + d \\ & 2)\ a \times c > b \times d \end{array}$$

6. Aus der besonderen Arithmetik kennen wir sechs Zahlformen:

1) die Summe, bezeichnet durch $a + b$
2) die Differenz " " $a - b$
3) das Product " " $a \times b = a . b = ab$
4) den Quotienten " " $a : b = \frac{a}{b}$
5) die Potenz " " a^b
6) die Wurzel " " $\sqrt[b]{a}$

Diese sechs Formen können selbst als Glieder einer zusammengesetzten Form auftreten. — Als solche werden sie in Klammern geschlossen. — Stehen in einer zusammengesetzten Form keine Klammern, so geht die höhere Operation der niederen voraus. Den Ausdruck $a \times b^n - c : b$ hat man also zu deuten: $[a \times (b^n)] - (c : b)$. —

Cap. 1.

Von der Summe und der Differenz.

Die Definition (s. i. 1. Thl. § 35 u. § 18).

1. Grundsatz. Die Reihenfolge der Summanden hat auf den Zahlenwerth der Summe keinen Einfluß.

$$a + b = b + a$$

2. Erklärung. Ist $a - b = 0$, so ist $a = b$; ist $a + b = 0$ so heißen a und b entgegengesetzte Größen und man schreibt:

$$a = - b \text{ oder } b = - a$$

oder, um den Gegensatz stärker hervorzuheben:

$$+ a = - b \text{ oder } + b = - a$$

Es ist also $a + (- a) = 0$ (Einl. 5,1).

Anmerkg. Die mit demselben Zeichen behafteten Größen wollen wir gleichstimmige, die mit verschiedenen Zeichen aber ungleichstimmige Größen nennen.

3. Lehrsatz. Die Summe zweier ungleichstimmiger Größen ist gleich der Differenz der gleichstimmigen Größen, (mit dem Zeichen $+$).

Behauptung $(+a) + (-b) = (+a) - (+b) = a - b$

Bew. $(a - b + b = a$ (s. 1 Thl. § 18)

$(+a) + (-b) + b = a$ (s. 2.)

$(a - b) + b = (+a) + (-b) + b$ (Einl. 5,1)

$b = b$

$a - b = (+a) + (-b)$ (Einl. 5,2)

4. Zusatz. Jede Differenz läßt sich auch als Summe darstellen, indem man dem Subtrahenden das entgegengesetzte Zeichen gibt:

$a - b = a + (-b)$ oder $a - (-b) = a + (+b) = a + b$

Anmerkg. Man nennt daher auch ein Aggregat von Größen, die durch die Zeichen $+$ und $-$ verbunden sind schlechtweg eine algebraische Summe. —

5. Lehrsatz. Die Summe aus algebraischen Summen ist eine algebraische Summe mit denselben Zeichen.

Behauptung. $(a + b) + (c - d + e) = a + b + c - d + e$

Bew. Folgt unmittelbar aus 1 und 4.

6. Lehrsatz. Die Differenz aus algebraischen Summen ist eine algebraische Summe mit entgegengesetzten Zeichen der Summanden des Subtrahenden.

Behauptung. $(a + b) - (c - d + e) = a + b - c + d - e$

Bew. Ist wie zu Lehrs. 3 zu führen.

Cap. 2.

Vom Producte und dem Quotienten.

Die Definition (s. i. 1. Thl. § 6 u. § 20).

7. Lehrsatz. Die Reihenfolge der Factoren hat auf den Zahlenwerth des Productes keinen Einfluß.

1. Behauptung. $a \times b = b \times a$

1. Voraussetzung. Die Factoren sind ganze Zahlen.

Bew. Wir schreiben eine Summe von a Einheiten b mal unter einander:

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{(a mal)} \\ 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \\ \text{(b mal)} \end{array}$$

Addiren wir nun diese Einheiten in horizontaler Reihenfolge, so erhalten wir den Werth des Productes $a \times b$; addiren wir sie aber in verticaler Reihenfolge, so erhalten wir den Werth des Productes $b \times a$. Da es nun gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge wir dieselbe Menge von Einheiten addiren, so ist

$$a \times b = b \times a$$

2. Voraussetzung. Die Factoren sind Brüche.

Bew. Wir setzen $a = \frac{m}{n}$ und $b = \frac{p}{q}$ (m, n, p, q, sind ganze Zahlen), so ist

$$a \times b = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q} \text{ (1. Thl. Lehrs. 50)}$$

$$\frac{m \times p}{n \times q} = \frac{p \times m}{q \times n} = \ldots\ldots \text{ (1. Vorauss.)}$$

$$a \times b = \frac{p \times m}{q \times n} \text{ (Einl. 5,1)}$$

$$b \times a = \frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{p \times m}{q \times n} \text{ (1. Thl. Lehrs. 50)}$$

$$a \times b = b \times a \text{ (Einl. 5,1)}$$

3. Voraussetzung. Die Factoren sind Irrationalzahlen.

Bew. Es sei:

$$\begin{array}{c} g < a < G \\ l < b < L \end{array}$$

so ist $g \times l < a \times b < G \times L$ (Einl. 5,5)

und $l \times g < b \times a < L \times G$ (. . . .)

Da nun $g \times l = l \times g$ und $G \times L = L \times G$ (2. Voraussſ.) ist, auch wenn $GL - gl$ oder $LG - lg$ sich unendlich der Null nähern, so ist $a \times b = b \times a$ (ſ. 1. Thl. Lehrsatz 59).

2. Behauptung. $(ab) \times c = (ac) \times b$

Voraussetzung. Die Factoren sind ganze Zahlen.

Bew. Wir schreiben die Summe von b Summanden $= a \ldots$ c mal untereinander:

$$\begin{array}{l} a + a + a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b \text{ mal}) \\ a + a + a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \qquad\qquad (c \text{ mal}) \end{array}$$

Addiren wir nun die Summanden, in horizontaler Reihenfolge, so erhalten wir den Werth des Productes $(a \times b) \times c$; addiren wir sie dagegen in verticaler Reihenfolge, so erhalten wir den Werth des Productes $(ac) \times b$. Es ist also nach 1. Grdſ.

$$(a \times b) \times c = (a \times c) \times b$$

Anmerkg. Für Brüche und Irrationalzahlen ist der Beweis zu führen wie oben. —

8. Lehrsatz. Das Product aus zwei Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den Producten der Dividenden durch das Product der Divisoren. —

Behauptung. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Bew. $\frac{ac}{bd} \times bd = ac$ (nach der Defin.)

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times bd = \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \text{ (7. Lehrſ.)}$$
$$= a \times c$$

1. Zusatz. Setzen wir $d = 1$, so folgt $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$

2. Zusatz. Setzen wir $d = c$ so folgt $\frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

9. Lehrsatz. Der Quotient aus zwei Quotienten ist gleich dem Producte aus den Quotienten mit umgekehrtem Divisor.

Behauptung. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Bew. $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

1. Zusatz. Setzen wir $d = 1$, so folgt: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

2. Zusatz. Setzen wir $c = 1$, so folgt: $\frac{a}{b} : \frac{1}{d} = \frac{a}{b} \times d = \frac{ad}{b}$

Anmerkg. Wie werden die Zusätze zu 8 und 9 in Worten ausgedrückt, und wie unabhängig bewiesen?

10. Lehrsatz. Das Product aus einer Summe und einer beliebigen Zahl ist gleich der Summe aus den Producten der Summanden mit der Zahl.

Behauptung. $(a + b) \times c = ac + bc$

1. Voraussetzung. $c =$ einer ganzen Zahl.

Bew. $(a+b)\times c = \overset{1}{(a+b)} + \overset{2}{(a+b)} + \ldots\ldots + \overset{c}{(a+b)}$ (1. Definition)

$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots + \overset{c}{b}$ (1. Grundsatz)

$= ac + bc$

2. Voraussetzung. $c = \frac{1}{p}$ (p eine ganze Zahl)

Bew. $(a+b)\times\frac{1}{p}\times p = a+b$ (weil $\frac{1}{p}\times p = 1$)

$\left(a\times\frac{1}{p}+b\times\frac{1}{p}\right)\times p = a\times\frac{1}{p}\times p + b\times\frac{1}{p}\times p = a+b$ (1. Voraussf.)

folglich $(a+b)\times\frac{1}{p} = a\times\frac{1}{p} + b\times\frac{1}{p}$

3. Voraussetzung. $c = \frac{m}{p}$ (m u. p sind ganze Zahlen)

Bew. $(a+b)\frac{m}{p} = (a+b)\times\frac{1}{p}\times m = \left(a\times\frac{1}{p}+b\times\frac{1}{p}\right)\times m$

$= a\times\frac{1}{p}\times m + b\times\frac{1}{p}\times m$

$= a\times\frac{m}{p} + b\times\frac{m}{p}$

4. **Voraussetzung.** $c =$ einer Irrationalzahl.

Bew. Es sei $g < c < G$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{alsdann ist} & (a+b)\,g < (a+b)\,c < (a+b)\,G \\ \text{und auch} & ag + bg < ac + bc < aG + bG\end{array}\right\}\ \left\{\text{Einl. } 5{,}3\right\}$$

Nun ist aber nach dem Obigen stets

$$(a + b) \times g = ag + bg$$
$$\text{und } (a + b) \times G = aG + bG$$

auch wenn $G - g$, also auch $(a + b)\,G - (a + b)\,g$, so wie $(aG + bG) - (ag + bg)$ sich unendlich der Null nähert. Folglich

$$(a + b) \times c = ac + bc \text{ (1. Thl. Lehrs. 59)}$$

11. **Lehrsatz.** Sind die Factoren beide Summen, so ist das Product gleich der Summe, deren Summanden Producte sind aus jedem Summanden des Multiplicanden mit jedem des Multiplicators.

Behauptung. $\underline{(a+b) \times (c+d) = ac + bc + ad + bd}$

Bew. $$\left.\begin{array}{l}(a+b)\times(c+d) = a(c+d) + b(c+d) \\ \qquad = ac + ad + bc + bd\end{array}\right\}\ \left\{\text{s. Lehrs. } 10\right\}$$

12. **Lehrsatz.** Sind die Factoren ungleichstimmig, so hat das Product das Zeichen $(-)$.

Behauptung. $\underline{a \times (-b) = -(ab)}$

Bew. .... $\underline{ab + a \times (-b) = a\,(b - b) = 0}$

folglich $a \times (-b) = -(ab)$ (s. 2)

Zusatz. $(a+b)\times(-c) = -[(a+b)\times c] = -(ac+bc) = -ac-bc$
$= a.(-c) + b.(-c)$

13. **Lehrsatz.** Sind die Factoren gleichstimmig, so hat das Product das Zeichen $(+)$. —

Behauptung. $\underline{(-a) \times (-b) = +(ab)}$

Bew. .. $-(ab) + (-a)\times(-b) = (-a)\times b + (-a)\times(-b)$
$= (-a)\times(b-b) = 0$

14. **Lehrsatz.** Sind Dividend und Divisor ungleichstimmig, so hat der Quotient das Zeichen $(-)$.

1. **Behauptung.** $\underline{\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}}$

Bew. $\frac{-a}{b} \times b = -a$

und auch $-\frac{a}{b} \times b = -a$

2. Behauptung. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Bew. $\frac{a}{-b} \times (-b) = a$

und auch $\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot (-b) = a$

15. Lehrsatz. Sind Dividend und Divisor gleichstimmig, so hat der Quotient das Zeichen (+). —

Behauptung. $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

Bew. $\frac{-a}{-b} \times (-b) = -a$

und auch $\frac{a}{b} \times (-b) = -\left(\frac{a}{b} \times b\right) = -a$

16. Lehrsatz. Der Quotient aus einer Summe durch eine einfache Größe, ist gleich der Summe aus den Quotienten der Summanden durch die einfache Größe.

Behauptung. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Bew. $\frac{a+b}{c} \times c = a + b$

und auch $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \times c = \frac{a}{c} \times c + \frac{b}{c} \times c = a + b$

Cap. 3.

Reductionen.

1. Die algebraische Addition und Subtraction.

Bezieht man in einem Producte (a b) die eine Größe (a) auf das Product selbst (oder dessen Werth), so heißt die Größe

Factor; bezieht man aber die eine Größe auf die andere, so heißt erstere der Coefficient der letzteren. Insbesondere führt die Größe den Namen Coefficient, wenn sie als bestimmte Zahl vor einem Buchstaben steht. —

In dem Producte 2×3 heißt 2 Factor von 2×3 oder 6, dagegen Coefficient von 3. —

Größen, die sich bloß durch ihre Coefficienten unterscheiden heißen gleichnamige Größen.

Nach Lehrs. 10 ist $ac + bc = (a + b) \times c$

Betrachtet man daher a und b als Coefficienten von c, so sagt die Gleichung:

„Die Summe gleichnamiger Größen ist den Summanden gleichnamig und hat zum Coefficienten die Summe aus den Coefficienten der Summanden.“ Oder, wie man sich kurz auszudrücken pflegt:

„Hat man gleichnamige Größen zu addiren, so addirt man bloß ihre Coefficienten.“

In der Anwendung dieses Satzes, mit Rücksicht auf Cap. 1, besteht die s. g. algebraische Addition und Subtraction.

Beispiel:

$$(2a+3b)+(5a-4b)-(3a-b+2c)=2a+3b+5a-4b-3a+b-2c$$
(s. Lehrs. 5 u. 6)
$$=2a+5a-3a+3b-4b+b-2c \text{ (1. Grds.)}$$
$$=(2+5-3)a+(3-4+1)\,b-2c$$
$$=4a-2c$$

Setzen wir $a = 2$; $b = -1$; $c = -3$, so ist:

$2a = 4$	$5a = 10$	$3a = 6$	
$3b = -3$	$4b = -4$	$-b = 1$	
$2a+3b = 1$	$5a-4b = 14$	$2c = -6$	$4a = 8$
		$3a-b+2c = 1$	$2c = -6$
$(2a+3b)+(5a-4b)-(3a-b+2c)=1+14-1=14$			$4a-2c = 14$

2. Die algebraische Multiplication.

Die s. g. algebraische Multiplication besteht in der directen Anwendung der Lehrsätze 10 u. 11 mit Hinzuziehung des Obigen:

1. Beispiel.

$$\left(4a-6bd+\frac{c}{2a}\right)\times\tfrac{1}{4}a=4\times\tfrac{1}{4}\times a\times a-6\times\tfrac{1}{4}\times a\times b\times d+\tfrac{1}{4}a\times\frac{c}{2a}$$

$$=a^2-\tfrac{3}{2}abd+\frac{c}{8}$$

2. Beisp. $(2a+3b)\times(4a-5b)=8a^2+12ab-10ab-15b^2$

$$=8a^2+\ 2ab-15b^2$$

Setzen wir $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{3}$, so ist:

$2a=\ 1$	$4a=\ 2$	$8a^2=8\times\frac{1}{4}=\ 2$
$3b=-1$	$5b=-1\frac{2}{3}$	$2ab=-\ \frac{1}{3}$
$2a+3b=\ 0$	$4a-5b=\ 3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$	$-15b^2=-\frac{15}{9}=-1\frac{2}{3}$
$(2a+3b)\times(4a-5b)=0\times\frac{11}{3}=0$		$8a^2+2ab-15b^2=2-\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}=0$

3. Die algebraische Division.

Den Quotienten aus zwei Summen verwandelt man in eine Summe nach einer Methode, die der arithmetischen Division vollkommen analog ist und sich, wie diese, auf das Verfahren bei der Multiplication stützt:

Man ordnet die Glieder im Dividenden und Divisor nach fallenden (oder auch steigenden) Potenzen derselben Größe, dividirt mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste des Dividenden. Die so erhaltene Größe ist das erste Glied des Quotienten. Das Product des Divisors mit dieser Größe subtrahirt man vom Dividenden und verfährt mit dem Reste in gleicher Weise:

$$\begin{array}{r|l} & 6a+3b \\ 42a^2+51ab+15b^2 & \overline{7a+5b} \\ 42a^2+21ab & \\ \hline 30ab+15b^2 & \\ 30ab+15b^2 & \end{array}$$

Nur in seltenen Fällen läßt sich der Quotient aus zwei Summen vollständig in eine Summe verwandeln. Durch das obige Verfahren aber können wir einen jeden Quotienten, dessen Divisor eine Summe ist, in eine Summe von einer beliebigen Anzahl Glieder entwickeln, welche nach Hinzufügung des Restes stets dem Quotienten gleich ist. So ist z. B.

$$\frac{c}{a-b}=\frac{c}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}+\frac{b^3c}{a^4}+\ldots+R\left(R=\frac{b^{n-1}c}{a^{n-1}(a-b)}\right)$$

Nähert sich der Rest R bei wachsender Zahl der Glieder, der Grenze O, so giebt die Reihe angenäherte Werthe des Quotienten und heißt eine convergente. Im entgegengesetzten Falle wird die Reihe eine divergente genannt, und kann weiter nicht gebraucht werden. —

Obige Reihe convergirt immer, wenn $a > b$ ist. Setzen wir z. B. $c = 1$; $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots + \ldots \text{ rc.}$$

eine Summe die in der That sich immer mehr und mehr der Grenze 2 nähert.

Setzen wir aber $c = 1$; $a = 1$ und $b = 2$, so folgt:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots + R$$

Diese Summe nähert sich nun keineswegs der Grenze -1; dessen ungeachtet kann man nicht sagen, daß man „durch ein richtiges Verfahren ein falsches Resultat erhalten habe.“ Das Resultat ist richtig, man darf nur den Rest nicht vernachlässigen und etwa auch hier schreiben wollen:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \text{ rc.}$$

4. Das Zerlegen von Summen in Faktoren.

Haben die sämmtlichen Summanden einen oder mehrere Faktoren gemeinschaftlich, so kann man dieselben nach Lehrsatz 10 als Factoren des ganzen Ausdruckes herausheben:

$$3a^2b + 6ab^2 - 9abc = 3ab\,(a + 2b - 3c)$$

Haben die Summanden keinen Faktor gemeinschaftlich, so kann man die Summe durch theilweises Herausheben oft in eine andere verwandeln, deren Summanden einen gemeinschaftlichen Factor haben, so daß durch das Herausheben desselben die Summe vollständig in ein Product aus zwei Summen zerlegt wird. (S. Lehrs. 11).

Beispiel. $8ac + 12bc - 15bd - 10ad = 4c(2a + 3b) - 5d(2a + 3b)$
$= (4c - 5d) \times (2a + 3b)$

Auch eine dreitheilige Summe kann aus einem Product aus zwei zweitheiligen Factoren entstanden sein (s. 2. Beisp. 2). — Alsdann ist das Mittelglied aus zwei gleichnamigen Gliedern zusammen gezogen und muß durch probiren wieder in seine Bestandtheile zerlegt werden:

Beisp. $6a^2 + 31ab + 35b^2$

$6a^2$ kann entstanden sein aus $2a \times 3a$

$35b^2$ „ „ „ „ $5b \times 7b$

Da nun zugleich $2 \times 5 + 3 \times 7 = 10 + 21 = 31$ ist, so zerlegen wir 31ab in 10ab + 21ab und erhalten so:

$$6a^2 + 31ab + 35b^2 = 6a^2 + 10ab + 21ab + 35b^2$$
$$= 2a\,(3a + 5b) + 7b\,(3a + 5b)$$
$$= (2a + 7b) \times (3a + 5b)$$

Für die Zerlegung in Factoren sind folgende Formeln besonders zu bemerken:

1) $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$

2) $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$

3) $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

Wie heißen die Formeln in Worten?

5. Das Heben der Quotienten.

Haben Dividend und Divisor einen gemeinschaftlichen Factor, so kann man denselben nach Lehrs. 8, Zus. 2 fortlassen, ohne den Werth des Quotienten zu ändern. Sind beide Summen, so muß man sie zu dem Zwecke nach dem Vorigen in ihre einfachen Factoren zerlegen:

1. Beisp. $\frac{3ab + 6ac}{6a + 3ab} = \frac{3a\,(b + 2c)}{3a\,(2 + b)} = \frac{b + 2c}{2 + b}$

2. Beisp. $\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \frac{(n - 1) \times (n - 1)}{(n - 1) \times (n + 1)} = \frac{n - 1}{n + 1}$ (s. 4 Formel 2 u. 3)

Das Zerlegen der Summen in Factoren durch Probiren, kann zuweilen unüberwindlich schwierig sein. Alsdann findet man den gemeinschaftlichen Faktor durch ein Verfahren, das dem im 1. Thl., § 26, Aufg. 3 gelehrten ganz analog ist: — Man dividirt die eine Summe in die andere, den Rest in den vorhergehenden Divisor u. s. f., bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist der gemeinschaftliche Factor. — Man hat nur hier noch zu bemerken, daß man den gemeinschaftlichen Factor in dem jedesmaligen Divisor — wenn einer vorhanden ist — weglassen muß. Sind z. B. die gegebenen Summen:

$$2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7 \text{ und } 2y^6+2y^5-3y^4-5y^3-14y^2-7y$$

so hebt man in der zweiten Summe gleich den Factor y heraus und verfährt dann also:

$$\begin{array}{r|l|l}
2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7 & 2y^5+2y^4-3y^3-5y^2-14y-7 & =1 \\
 & \underline{2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7} & \\
 & \qquad\quad 2y^3 \qquad\quad -7y &
\end{array}$$

Den gemeinschaftlichen Factor im Reste, y, läßt man fort und dividirt also mit $2y^2-7$ in den vorigen Divisor:

$$\begin{array}{r|l|l}
2y^2-7 & 2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7 & y^3+y^2+y+1 \\
 & \underline{2y^5 \qquad\quad -7y^3} & \\
 & \quad +2y^4+2y^3-5y^2-7y-7 & \\
 & \quad \underline{+2y^4 \qquad\quad -7y^2} & \\
 & \qquad\quad 2y^3+12y^2-7y-7 & \\
 & \qquad\quad \underline{2y^3 \qquad\quad -7y} & \\
 & \qquad\qquad\qquad 2y^2-7 & \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{2y^2-7} &
\end{array}$$

$2y^2-7$ ist der gemeinschaftliche Factor. In der That ist:

$$\frac{2y^6+2y^5-3y^4-5y^3-14y^2-7y}{2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7}=\frac{y(2y^2-7)(y^3+y^2+2y+1)}{(2y^2-7)(y^3+y^2+y+1)}$$

$$=\frac{y(y^3+y^2+2y+1)}{y^3+y^2+y+1}$$

6. Das Vereinigen der Quotienten.

Will man nach Lehrs. 16 die Summe aus Quotienten in einen Quotienten vereinigen, so hat man die Quotienten auf gleiche Divisoren zu bringen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

Sind die Divisoren Summen, so muß man sie zuvor in ihre einfachen Factoren zerlegen, um den gemeinschaftlichen Dividuus zu finden:

Aufgabe: $\dfrac{1}{1-x-6x^2}+\dfrac{1}{1-9x^2}$ zu vereinigen.

Lösung. $1-x-6x^2=(1+2x)(1-3x)$

$1-9x^2=(1+3x)(1-3x)$

Gemeinschaftlicher Dividuus.

$$=(1+2x)(1-3x)(1+3x)=1+2x-9x^2-18x^3$$

$$\frac{1}{1-x-6x^2}=\frac{1}{(1+2x)(1-3x)}=\frac{1+3x}{(1+2x)(1-3x)(1+3x)}$$

$$\frac{1}{1-9x^2}=\frac{1}{(1+3x)(1-3x)}=\frac{1+2x}{(1+2x)(1-3x)(1+3x)}$$

$$\frac{1}{1-x-6x^2}+\frac{1}{1-9x^2}=\frac{(1+3x)+(1+2x)}{(1+2x)(1-3x)(1+3x)}=\frac{2+5x}{1+2x-9x^2-18x^3}$$

Ist man nicht im Stande die Divisoren durch Probiren in ihre einfachen Factoren zu zerlegen, so kann man nach 5 den gemeinschaftlichen Factor der Divisoren suchen. Das Product dieses Factors mit den übrigen Factoren der Divisoren ist der gemeinschaftliche Dividuus.

Cap. 4.

Potenzen mit positiven Exponenten.

Aus der besonderen Arithmetik haben wir die Potenz als ein Product gleicher Factoren kennen lernen. Hiernach muß der Exponent eine absolute (positive ganze) Zahl sein.

1) $a^n \times b^n = \overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n}{a} \times \overset{1}{b}.\overset{2}{b}.\overset{3}{b}\ldots\overset{n}{b} = \overset{1}{(ab)} \times \overset{2}{(ab)}\ldots\overset{n}{(ab)} = (ab)^n$. Hieraus folgt:

17. Lehrsatz. $a^n \times b^n = (ab)^n$

2) $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n}{a}}{\overset{1}{b}.\overset{2}{b}.\overset{3}{b}\ldots\overset{n}{b}} = \overset{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)}.\overset{2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)}\ldots\overset{n}{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Hieraus folgt:

18. Lehrsatz. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3) $a^n \times a^m = \overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n}{a} \times \overset{1}{a}.\overset{2}{a}\ldots\overset{m}{a} = \overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n+m}{a} = a^{n+m}$. Hieraus folgt:

19. Lehrsatz. $a^n \times a^m = a^{n+m}$

$$4)\ \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n}{a}}{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{m}{a}} = \begin{cases} 1)\ \overset{1}{a}.\overset{2}{a}\ldots\overset{n-m}{a} = a^{n-m} & \text{für } n > m \\ 2)\ \dfrac{1}{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}\ldots\overset{m-n}{a}} = \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{für } n < m \\ 3)\ \ldots\ldots = 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Für $\frac{a^n}{a^m}$ erhalten wir also drei verschiedene Ausdrücke. Wir können sie aber alle unter eine Form bringen. Ist nehmlich $n < m$, so ist $n - m$ negativ; es sei $n - m = - k$, so ist $m - n = k$. — Ist $n = m$, so ist $n - m = 0$.

Setzen wir daher $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

und $a^0 = 1$

so gilt allgemein:

20. Lehrsatz. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$5)\ (a^n)^m = \overset{1}{a^n} \cdot \overset{2}{a^n_1} \ldots \overset{m}{a^n_2}$$

$$= \underbrace{(\overset{1}{a}.\overset{2}{a}..\overset{n}{a})}_{} \times \underbrace{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}..\overset{n}{a}}_{} \times \ldots \overbrace{\overset{1}{a}.\overset{2}{a}\ldots\overset{n}{a}}^{m}$$

$$= \overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}\ldots\overset{n.m}{a} = a^{n.m}$$

21. Lehrsatz. $(a^n)^m = a^{n.m}$

Cap. 5.

Der binomische Lehrsatz.

22. Lehrsatz:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots \text{rc.}$$

Bew. Wir beweisen zunächst, daß die Formel für $n + 1$ gilt, wenn sie für n gilt:

Es ist $(a+b)^{n+1} = (a + b)^n \times (a+b.)$ — Wir multipliciren daher die obige Gleichung mit $a + b$:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$a + b = a + b$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n}{1}a^n b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-2}b^3 + \ldots$$

$$a^n b + \frac{n}{1}a^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^n$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\frac{n}{1} + 1\right)a^n b + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n}{1}\right)a^{n-1}b^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\right)a^{n-2}b^3 + .$$

Nun ist aber:

$$\frac{n}{1}+1=\frac{n+1}{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n}{1}=\frac{n(n-1)+2n}{1.2}=\frac{(n+1)n}{1.2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n.(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{1.2.3}=\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}$$

folglich:

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\frac{n+1}{1}a^nb+\frac{(n+1)n}{1.2}a^{n-1}b^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^{n-2}b^3+\ldots$$

Wie leicht zu übersehen, erhält man dieselbe Reihe, wenn man in der obigen $n + 1$ statt n setzt. Folglich gilt die obige Reihe für $n + 1$, sobald sie für n gilt. — Daß sie aber für irgend ein n gilt, ist leicht nachzuweisen. —

Für $n = 2$ z. B. gibt die obige Reihe

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dasselbe Resultat erhalten wir aber auch, wenn wir $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ durch Multiplication entwickeln. Es gilt also die Reihe für $n = 2$; daher gilt sie auch für $n = 2 + 1 = 3$; und da sie nun für $n = 3$ gilt, so gilt sie auch für $n = 3 + 1 = 4$ . . . ꝛc. d. h. sie gilt für jeden Werth von n. —

Zusatz. Setzen wir $-b$ statt b, so erhalten wir:

$$(a-b)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots\ldots$$

Eigenschaften der Binomial-Reihe.

Das allgemeine, kte Glied der Reihe ist:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-3)][n-(k-2)]}{1.2.3\quad\ldots\quad(k-3)(k-2)(k-1)}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

Hieraus folgern wir:

1. Die Reihe bricht ab für $n - (k - 2) = 0$ d. h. für $k = n + 2$; sie hat also $n + 1$ Glieder und das $n + 1$te Glied ist zugleich das letzte. Setzen wir daher für k successiv die Werthe $n + 1$, n, $n - 1$, . . . ꝛc., so erhalten wir:

als letztes Glied: $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3..(n-2)(n-1).n}a^0b^n=b^n$

als vorletztes Glied: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2}{1.2.3\ldots(n-2)(n-1)}a\,b^{n-1} = \frac{n}{1}ab^{n-1}$

als drittletztes Glied: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots4.3}{1.2.3\ldots(n-2)}a^2b^{n-2} = \frac{n.(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Wir schließen hieraus weiter:

2. Der Coefficient des letzten Gliedes ist gleich dem des ersten, der Coefficient des vorletzten ist gleich dem des 2ten ... kurz die Coefficienten der, von der Mitte gleich weit entfernten Glieder, sind gleich. —

3. Ist n gerade, so ist die Anzahl der Glieder ungerade und es ist in der Mitte ein größter Coefficient. — Ist n ungerade, so ist die Anzahl der Glieder gerade und es sind in der Mitte zwei gleiche größte Coefficienten.

4. Bezeichnen wir die Coefficienten der Reihe nach durch $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$, so ist:

$$A_0 = 1 \ldots\ldots\ldots = 1$$

$$A_1 = \frac{n}{1} \ldots\ldots\ldots = A_0 \times \frac{n}{1}$$

$$A_2 = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} \ldots = A_1 \times \frac{n-1}{2}$$

$$A_3 = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} = A_2 \times \frac{n-2}{3}$$

Diese Eigenschaft ist zur Berechnung der Coefficienten hoher Potenzen besonders bequem. — Man erhält hiernach die Coefficienten für $(a + b)^{11}$ also:

$$A_0 = 1 \ldots = 1$$
$$A_1 = 1 \;.\; 11 = 11$$
$$A_2 = 11 \;.\; \tfrac{10}{2} = 55$$
$$A_3 = 55 \;.\; \tfrac{9}{3} = 165$$
$$A_4 = 165 \;.\; \tfrac{8}{4} = 330$$
$$A_5 = 330 \times \tfrac{7}{5} = 462$$
$$A_6 = 462 \times \tfrac{6}{6} = 462$$
$$A_7 = 462 \;.\; \tfrac{5}{7} = 330$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Cap. 6.

Potenzen mit negativen Exponenten.

In Cap. 4, 4 haben wir ein neues Symbol eingeführt, welches die Form einer Potenz hat. — Wir wollen sehen, ob ihm auch die Eigenschaften der Potenzen zukommen? —

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a.a.a..a}_{n}} = \overset{1}{\frac{1}{a}} \times \overset{2}{\frac{1}{a}} \ldots \overset{n}{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

2. $a^{-n} \times b^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \times \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{ab}\right)^n = (ab)^{-n}$

3. $\frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n : \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$

4. $a^{-n} \times a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \times \left(\frac{1}{a}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+m} = a^{-(n+m)}$

5. $a^{-n} : a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^n : \left(\frac{1}{a}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-m} = a^{-(n-m)}$

6. $(a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}\right)^m = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{n.m}} = a^{n.m}$

Wie die 6 Sätze zeigen, läßt sich das Symbol a^{-n} ganz wie eine Potenz behandeln; wir nennen es eine **Potenz mit negativen Exponenten.**

Cap. 7.

Die Wurzel.

Definition. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (s. 1. Thl. § 28.).

23. **Lehrs.** Die Wurzel liegt stets zwischen der Grundzahl und der Einheit.

1. Ist $a > 1$ so ist $a > \sqrt[n]{a} > 1$.
2. Ist $a < 1$ so ist $a < \sqrt[n]{a} < 1$.

24. **Lehrs.** $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Bew. $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ und auch

$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{a}^{\,n} \times \sqrt[n]{b}^{\,n} = ab.$$

25. Lehrs. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Bew. $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n = \dfrac{a}{b}$ und auch

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a}^{\,n}}{\sqrt[n]{b}^{\,n}} = \frac{a}{b}.$$

26. Lehrs. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Bew. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$ und auch

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n.m} = \left(\sqrt[n]{a}^{\,n}\right)^m = a^m$$

27. Lehrs. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Bew. $\left(\sqrt[n.m]{a}\right)^{n.m} = a$ und auch

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n.m} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = a.$$

28. Lehrs. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.m]{a^m}$

Bew. $\sqrt[n.m]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$

29. Lehrs. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl.)

Bew. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$ und auch

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}.n} = a^m.$$

Da das Symbol $a^{\frac{m}{n}}$ nicht schon anderweitig definirt ist und im Falle $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, kein Widerspruch entsteht, — wie so eben bewiesen ist — so wollen wir die Symbole $\sqrt[n]{a^m}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ stets gleichdeutig gebrauchen. — Hiernach können wir jede Wurzel in Potenzform schreiben; was übrigens kein Gewinn ist, wenn nicht dem Symbole $a^{\frac{m}{n}}$ außer der Form, auch die Eigenschaften der Potenz zukommen.

1. Man hat beim Quotienten den Divisor gerne in rationaler Form. Kommt daher im Divisor eine Wurzel vor, so hat man dieselbe durch Multiplication fortzuschaffen. Ist der Divisor eine $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$, so multiplicirt man Dividend und Divisor mit der $\left\{\begin{matrix}\text{Differenz}\\ \text{Summe}\end{matrix}\right\}$ der Größen. (s. Formel 3, Cap. 3, 4.)

1. Beisp. $\frac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{8})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+4}{2} = \sqrt{2}+2.$

2. Beisp. $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2} = \sqrt{2}-1.$

2. Das Quadrat einer Summe hat mindestens drei Glieder — zwei volle Quadrate und das doppelte Product aus den Wurzeln der Quadrate.

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2\,ab.$$

Hiernach kann man leicht prüfen, ob eine dreitheilige Summe ein volles Quadrat ist, so wie die Wurzel finden.

Z. B. $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = (\frac{1}{2}x + 3)^2$,
denn $\frac{1}{4}x^2 = (\frac{1}{2}x)^2$

$$9 = 3^2$$

$$2 \times 3 \times \frac{1}{2}x = 3x$$

folglich $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9} = \sqrt{(\frac{1}{2}x + 3)^2} = \frac{1}{2}x + 3.$

Hat die Summe mehr als drei Glieder, so findet man die Wurzel gewöhnlich gliedweise, durch mehrmalige Anwendung der vorigen Formel. — In der Regel aber gelangt man bequemer zum Ziele, wenn man die vorgelegte Summe mit folgenden Formeln vergleicht:

1) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2.$

2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$
$= (a + b + c + d)^2.$

3. Aus einer viergliedrigen Summe findet man die Kubikwurzel durch unmittelbaren Vergleich mit der Formel:

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$$

Aus einer mehrgliedrigen Summe sucht man die Wurzel gliedweise; oder, man vergleicht auch wohl die Summe mit der Formel:

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc = (a+b+c)^3.$$

Cap. 8.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

1. $a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m . b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}.$

2. $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}.$

3. $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$

4. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \dfrac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$

5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$

Das Symbol $a^{\frac{m}{n}}$ läßt sich also vollständig wie eine Potenz behandeln; wir nennen es eine Potenz mit gebrochenen Exponenten oder auch Bruchpotenz.

Cap. 9.

Die Logarithmen.

Betrachten wir in der Gleichung $a^b = c$ die Größe b als abhängig von a und c, so nennen wir b den Logarithmus von c für die Grundzahl a und schreiben

$$b = {}^aLc.$$

Es ist also $a^{{}^aLc} = c$; d. h. „Der Logarithmus ist der Exponent, auf den man eine bestimmte Grundzahl erheben muß, damit die Potenz gleich einer gegebenen Zahl werde.“

Eine Zahl **logarithmiren** heißt daher, sie als Potenz einer gegebenen Grundzahl darstellen.

An die Lösung dieser Aufgabe konnten wir erst gehen, nachdem der Begriff der Potenz in den Capiteln 6 und 8 die gehörige Erweiterung erlangt hatte. Jetzt läßt sich in der That eine jede Zahl als Potenz einer jeden positiven Grundzahl — die 1 ausgenommen — darstellen.

Untersuchen wir zu dem Zwecke den Gang der Potenz a^x während x alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft.

1. Voraussetzung: $a > 1$.

$$a^x = \infty \text{ für } x = \infty$$
$$a^x = a \quad " \quad x = 1$$
$$a^x = 1 \quad " \quad x = 0$$
$$a^x = \frac{1}{a} \quad " \quad x = -1$$
$$a^x = 0 \quad " \quad x = -\infty$$

Nimmt x stetig ab von ∞ bis $-\infty$, so nimm a^x auch stetig ab von ∞ bis 0. Umgekehrt, — alle Zahlen zwischen 0 und ∞ d. h. alle positiven Zahlen haben Logarithmen zwischen $-\infty$ und $+\infty$. — Die Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 1 liegen zwischen $-\infty$ und 0, d. h. die Logarithmen der echten Brüche sind **negativ**. — Die Zahlen zwischen 1 und ∞ haben Logarithmen zwischen 0 und ∞, d. h. die Logarithmen der Zahlen, die > 1, sind positiv.

2. Voraussetzung: $a < 1$.

$$a^x = 0 \text{ für } x = \infty$$
$$a^x = 1 \quad " \quad x = 0$$
$$a^x = \infty \quad " \quad x = -\infty.$$

Ist also $a < 1$ so sind die Logarithmen der echten Brüche positiv, die der unechten negativ.

Hat man alle Zahlen von 0 bis zu einer bestimmten Grenze hin, als Potenzen derselben Grundzahl dargestellt, so bildet die zusammenhängende Reihe der Exponenten ein **Logarithmen-System**.

Wie aus dem Obigen ersichtlich, kann jede positive Zahl — mit Ausschluß der 1 — als Grundzahl eines Logarithmen-Systems dienen. — Der Engländer Henry **Briggs** berechnete zuerst ein Logarithmen-System für die Grundzahl 10, welches System daher auch das Briggische heißt.

Die Vortheile, die 10 als Grundzahl bietet, sind leicht aus Folgendem zu ersehen:

$$\begin{array}{ll} 10^0 = 1 & 10^0 = 1 \\ 10^1 = 10 & 10^{-1} = \frac{1}{10} \\ 10^2 = 100 & 10^{-2} = \frac{1}{100} \\ 10^3 = 1000 & 10^{-3} = \frac{1}{1000} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Die Logarithmen sind im Allgemeinen Irrationalzahlen, die durch 5- oder 7stellige Decimalbrüche angegeben werden. Die vor dem Komma stehende (ganze) Zahl heißt die Characteristik — Kennziffer, — der zugehörige Decimalbruch — die Mantisse.

Ist die Anzahl der Stellen einer Zahl $= n$, so ist die Charakteristik des Logarithmus dieser Zahl im Briggischen Systeme $= n - 1$.

30. Lehrs. Der Logarithmus des Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

$$\text{Ist } \left.\begin{array}{r} a = A^x \\ b = A^y \end{array}\right\} \text{ d. h., ist } \left\{\begin{array}{l} x = {}^A\text{Log}\, a \\ y = {}^A\text{L} \quad b \end{array}\right.$$

so ist $ab = A^{x+y}$ oder ${}^A L(ab) = x + y$; d. h.

$${}^A L(ab) = {}^A La + {}^A Lb.$$

31. Lehrs. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen des Dividenden und Divisors.

$$\text{Ist } \left.\begin{array}{r} a = A^x \\ b = A^y \end{array}\right\} \text{ d. h., ist } \left\{\begin{array}{l} x = {}^A La \\ y = {}^A Lb \end{array}\right.$$

so ist $a : b = A^{x-y}$ oder $x - y = {}^A L\left(\frac{a}{b}\right)$.

folglich ${}^A L\left(\frac{a}{b}\right) = {}^A La - {}^A Lb$.

32. Lehrs. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Exponenten mit dem Logarithmus der Grundzahl.

$$\begin{array}{l} \text{Ist } a = A^x \text{ d. h. ist } x = {}^A La \\ \text{so ist } a^n = A^{nx} \text{ oder } nx = {}^A L(a^n) \\ \hline \text{folglich } {}^A L(a^n) = n \,.\, {}^A La. \end{array}$$

33. Lehrs. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus der Grundzahl durch den Exponenten.

$$\begin{array}{l} \text{Ist } a = A^x \text{ d. h. ist } x = {}^A La \\ \text{so ist } \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{A^x} = A^{\frac{x}{n}} \text{ oder } \frac{x}{n} = {}^A L(\sqrt[n]{a}) \\ \hline \text{folglich } {}^A L(\sqrt[n]{a}) = \frac{{}^A La}{n} \end{array}$$

34. Aufgabe. Die Logarithmen für die Basis A sind gegeben, es soll der Logarithmus einer beliebigen Zahl a für die Basis B bestimmt werden.

Lösung. Wir setzen $a = B^y$

$$\begin{array}{l} \text{so ist } {}^A La = {}^A L(B^y) = y\, {}^A LB \\ \hline \text{folglich } y = \frac{{}^A La}{{}^A LB} \text{ oder } {}^B La = \frac{{}^A La}{{}^A LB}. \end{array}$$