TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Ü. LUMISTE

GEOMEETRIA ALUSED

I

TARTU 1964

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Algebra ja geomeetria kateeder

Ü. LUMISTE

GEOMEETRIA ALUSED

I

Tartu 1964

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ю. Лумисте

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ I

На эстонском языке

Vastutav toimetaja K. Ariva
Korrektor A. Norberg

TRÜ rotaprint 1963. Trükipoognaid 10.
Arvutuspoognaid 8,6. Trükiarv 400.
MB 07190. Tell. nr. 1182.

Hind 26 kop.

S i s u k o r d

E e s s õ n a.

Käesolev matemaatikaosakonna V kursuse üliõpilastele määratud õppevahend haarab suure osa geomeetria aluste kursuse sisust: ajaloolise sissejuhatuse, absoluutse ja eukleidilise geomeetria aksiomaatikad, nende mudelid, aksiomaatika põhiprobleemid. Programmi ülejäänud osa (Lobatševski geomeetria, Lobatševski trigonomeetria ja pindalade teooria, projektiivse geomeetria alused ja rühmateoreetiline vaatekoht geomeetrias) käsitlemine on ette nähtud käesoleva loengukursuse teises osas.

Käsitlusviisi valikul on loobutud traditsioonilisest Hilberti süsteemist, mida esitatakse suuremas osas geomeetria aluste alasest õppekirjandusest (vt. kirjanduse loetelu). Aluseks on võetud teistlaadi aksiomaatika, milles põhimõistete süsteem koosneb ainult kahest objektide hulgast (punktide hulgast ja liikumiste rühmast) ja ainult kahest neid objekte siduvast suhtest (punkt on kahe teise punkti <u>vahel</u>, liikumine <u>paigutab</u> ühe punkti teiseks).

Esimest suhet "vahel" määrav aksiomaatika ühtib sisuliselt O. Vebleni poolt 1904.a. antud aksioomide selle viimistletud süsteemiga, mis on välja töötatud J. Sarve, J. Nuudi ja eriti A. Humala poolt Tartus aastatel 1931-1934 avaldatud töödes. Uuendus on vormis - kasutatakse kaasaja matemaatilise loogika aparatuuri, mis muudab käsitluse tunduvalt lühemaks ja ülevaatlikumaks.

Teise suhte "paigutab" kohta käiv aksiomaatika pärineb õieti juba Fr. Schurilt (1909) ja kujutab endast mõnedes raamatutes (näiteks V.I. Kostini; A.P. Nordeni ja A.V. Pogorelovi omades) Hilberti kongruentsuse aksioomide asemele võetud liikumise aksioomide süsteemi täiustatud varianti. Siin osutus võimalikuks mõnevõrra rakendada rühma esituste teooria metoodikat ja üldse senisest laiemalt kasutada kaasaja algebralist aparatuuri. Kokkuvõttes on eesti matemaatikute poolt varem uuritud suhte "vahel" aksiomaatika täiendatud käesolevas kursuses kõige loomulikumal viisil eukleidilise või Lobatševski geomeetria täieliku aksiomaatikani.

Hilberti aksiomaatikat, mida tuleb kahtlemata samuti tunda, tutvustatakse kursuse käesoleva, esimese osa viimases paragrahvis (§ 35), kus tõmmatakse ka mõningaid võrdlusjooni. Lühidalt võib öelda, et siin aluseks võetud aksiomaatika ise on lihtsam, lähedasem elavale kaemusele ning seetõttu ka kergemini interpreteeritav ja uuritav kui Hilberti oma, kuid geomeetria väljaarendamine selle alusel nõuab vastavalt rohkem tööd kui Hilberti süsteemis.

Tõukeks käesoleva õppevahendi kirjutamisele oli tutvumine J. Sarve, J. Nuudi ja A. Humala varasemate töödega geomeetria aluste alal. Mitmeid kasulikke näpunäiteid käsikirja lõplikul viimistlemisel, eriti matemaatilise loogika aparatuuri osas, sai autor I. Kullilt. Kõigile neile kuulub autori siiras tänu.

S i s s e j u h a t u s.

Geomeetria kui ühe vanima matemaatilise distsipliini kujunemine on vahetult soetud kogu matemaatika tekkega. Võib kahtluseta öelda, et arvu ja geomeetrilise kujundi mõisted on vanimateks matemaatikas ja teaduses üldse. Kehade ruumiliste vormide ja vahekordade uurimisest sai matemaatiliste meetodite esimene oluline katsekivi.

Oma arengu algetapil oli geomeetria puhtempiiriline teadus ja kujutas endast kogemusest pärit retseptide enam või vähem süstematiseeritud kogu. Tolleaegset geomeetriat võib teatavas mõttes nimetada füüsika esimeseks peatükiks. Märgime kohe, et sellise tähenduse füüsika jaoks on geomeetria säilitanud olulisel määral veel tänapäevalgi, kuigi geomeetria enda iseloom on aja jooksul tunduvalt muutunud.

Murrang toimus Antiik-Kreekas 5. ja 3. saj. vahel e.m.a. Avastati geomeetriliste tõdede vahelised loogilised seosed ja hakati nende tõdedeni jõudma mitte üksnes katse ja vaatluse abil, vaid ka loogilise arutlemise teel. Geomeetria hakkas kujunema matemaatiliseks distsipliiniks nüüdisaegses mõttes.

Esimesed katsed esitada geomeetriat rangelt deduktiivse süsteemina tehti juba Antiik-Kreekas. Kõige silmapaistvamaks ja püsivat väärtust omavaks sedalaadi käsitluste seas on Aleksandria õpetlase Eukleidese 13-osaline töö "Elemendid" (-3. saj.) - antiikmatemaatika omapärane entsüklopeedia. Eukleidese teos, kuigi ka see ei haara kõiki antiikmatemaatikute saavutusi, jättis varju varasemad sellelaadilised tööd, mis sajandite möödudes vajusidki unustuse hõlma.

Eukleides seadis geomeetria aluseks aksioomide ja postulaatide süsteemi. Aksioomid (Eukleidese teksti sõna-sõnalises tõlkes "üldtuntud tõed") käsitlevad suurustevahelisi seoseid, näiteks: "võrdseile võrdsete lisamisel saame võrdsed" jne. Teine rida tõestuseta kasutatavaid lauseid, nn. postulaate, on enam geomeetrilise sisuga:

"Tuleb nõuda, et

I igast punktist saab igasse punkti tõmmata sirge,

II iga sirget[x] võib piiramatult pikendada,

III iga punkti ümber saab iga raadiusega tõmmata ringjoone,

IV iga kaks täisnurka on võrdsed,

V kui sirge lõigates kahte teist sirget moodustab nendega sisemised ühepoolsed nurgad, mille summa on väiksem kahest täisnurgast, siis need sirged piiramatul pikendamisel lõikuvad ja nimelt seal pool, kus see summa on väiksem."

Tuleb märkida, et enne aksioomide ja postulaatide süsteemi püstitamist defineerib Eukleides nendes esinevad mõisted: täisnurga, ringjoone jne. Ta annab definitsioonid isegi sirge, punkti ja tasandi jaoks, kirjutades näiteks, et "punkt on see, millel ei ole osasid", "joone otsad on punktid", "sirge on joon, mis asetseb ühteviisi kõigi oma punktide suhtes", jne. Kui täisnurga, ringjoone jne. definitsioonid on täiesti laitmatud ja leiavad kohest kasutamist, siis viimastel definitsioonidel pole mingit teaduslikku väärtust. Nad on vastuolus ka juba tollal tuntud Aristotelese deduktsiooni teooriaga, mille kohaselt teatud arv mõisteid tuleb võtta ilma definitsioonideta põhimõisteteks - ei saa ju jäägitult kõike defineerida, sest iga mõiste on defineeritav teiste mõistete kaudu. Ka Eukleides ise ei saanud "punkti", "sirge" ja "tasandi" definitsioone hiljem teoses kasutada.

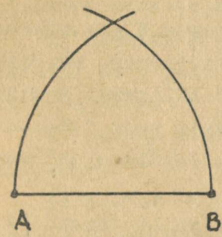
Oma ideaali Eukleides ei saavutanud. Ta ei suutnud veel luua täielikku aksioomide süsteemi ja pidi sageli pöörduma joonise näitlikkuse poole. Toome näiteks tõestuse esimesele lausele "Igale lõigule saab konstrueerida võrdkülgse kolmnurga".

Postulaadi III järgi saab punkti A ümber joonestada

---

[x] "Sirge" all mõistab Eukleides ka lõiku.

ringjoone raadiusega AB ja B ümber ringjoone raadiusega BA. Jooniselt loeb Eukleides, et neil ringjoontel on olemas ühine punkt.



Edasine tõestus on küll laitmatu, kuid lõikepunkti olemasolu oleks tulnud rangelt tõestada. Selleks aga puudub Eukleidesel veel vastav aksioom, mis tänapäeva käsitluses kannab pidevuse aksioomi nime (Dedekind, 1872).

Kolmnurkade kongruentsuse tõestamisel Eukleides rakendab ühe kolmnurga laotamist teisele, teisiti öeldes, kasutab liikumist. Kuid range käsitluse puhul ei või liikumist kasutada intuitiivselt, liikumise mõiste tuleb aksiomaatiliselt põhjendada. Tänapäeva geomeetrias täidab seda osa liikumise (või kongruentsuse) aksioomide rühm.

Ka mõisteid "punkt on kahe punkti vahel", "kaks punkti on teine teisel pool sirget" jne. kasutab Eukleides intuitiivselt, joonise näitlikkuse põhjal. Tänapäeval on kasutusele võetud spetsiaalsed järjestuse aksioomid.

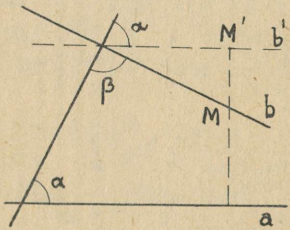
Eukleidese "Elementidel" on matemaatika ajaloos hindamatu väärtus. Ligi kahekümne sajandi jooksul oli see teos matamaatilise ranguse eeskujuks ja veel praegugi baseerub kooligeomeetria tunduval määral Eukleidese käsitlusel. Eespool mainitud puudustele Eukleidese süsteemis juhiti tähelepanu alles 19. sajandil.

Eukleidese töö on ühtlasi esimeseks teoseks geomeetria aluste alal. Geomeetria alused kui distsipliin tekkis sajandite jooksul Eukleidese puuduste kritiseerimise ja kõrvaldamispüüete tulemusena.

Eriline tähtsus geomeetria aluste tekkeloos on V postulaadil, mis on nii sisult kui ka sõnastuselt keerulisem eelnevaist. Tema erinevuse tõttu teistest postulaatidest hakati kahtlema, kas on üldse tarvis teda postuleerida ja püüti seda lauset tõestada, s.t. muuta ta teoreemiks. Ka Eukleides ise polnud oma valikus päris kindel - ta kasutab V postulaati alles 29. lauses, ehkki selle rakendamine lihtsustaks ka juba eelnenud arutlusi.

Kahekümne sajandi vältel püüti Eukleidese V postulaati tõestada. Probleemi kohta tekkis mahukas kirjandus. Esitati arvukaid "tõestusi", mis aga kõik osutusid hilisemal analüüsimisel defektseiks. Jätame siinkohal kõrvale need "tõestused", milles esineb jäme loogiline viga ja vaatleme üht varasemat silmapaistvat katsetust.

Proklos (+ 5. saj.) andis "tõestuse", mille tänapäeva tähistustes võib esitada järgmiselt.



Olgu $\alpha+\beta<\pi$. Tõmbame sirge b' nii, et ta moodustab sirgega c nurga α. Siis sirged a ja b' ei lõiku, sest vastasel korral tekiks kolmnurk, milles sisenurk oleks võrdne mitte kõrvu oleva välisnurgaga, mis Eukleidese 16. lause põhjal on võimatu. Võtame sirgel b punkti M, langetame sealt ristsirge MM' sirgele b' ja pikendame seda lõikumiseni sirgega a punktis M". Kui punkt M kaugeneb mööda sirget b, siis MM' on tõkestamatult kasvav suurus (haara punkti kaugus teisest haarast), kuid M'M" kui kahe mittelõikuva sirge vaheline kaugus on tõkestatud suurus. Järelikult peab saabuma moment, kus MM'=M"M'. Siis M=M", s.o. sirged a ja b lõikuvad punktis M.

Tänapäeval on teada, et väidet M'M" tõkestatuse kohta ei saa tõestada ilma V postulaadita, seega Proklose "tõestuses" on loogiline ring. "Tõestusest" järeldub vaid üks positiivne tulemus: kauguse M'M" tõkestatuse väide on ekvivalentne V postulaadiga.

Samal viisil sisaldavad kõik tähelepanuväärsed tõestused" endas loogilist ringkäiku. Neist on saadud rida nn. ekvivalente V postulaadile:

Proklos: Kahe mittelõikuva sirge vaheline kaugus tasandil on tõkestatud suurus.

J. Wallis: Iga kolmnurga korral leidub temaga sarnane kui tahes suur kolmnurk.

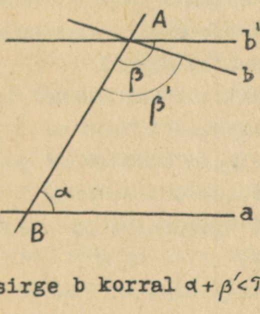
C. Clavius: Punktid, mis asuvad antud sirget läbival tasandil ühel pool sirget võrdsetel kaugustel sellest, moodustavad sirge.

F. Bolyai (vanem): Läbi iga kolme punkti saab tõmmata ringjoone.

Järgnevas on eriti olulised kaks ekvivalenti. Esimene seostab V postulaadi paralleelide teooriaga, teine kolmnurga sisenurkade summa küsimusega.

Paralleelid defineerib Eukleides teatavasti kui kaks sirget, mis on ühel tasandil ja ei lõiku. Kui on antud sirge a ja temal mitte asuv punkt A, siis Proklose tõestusest nähtub, et läbi A saab alati panna sirgega a paralleelse sirge b'. Osutub, et paralleeli ainsuse väide on siin ekvivalentne V postulaadiga. Seda märkas juba Proklos, kuid selgelt tõi esile J. Playfair oma geomeetria õpikus, mistõttu lauset "antud sirgele saab läbi temast väljaspool asuva punkti tõmmata ühe ja ainult ühe paralleeli" tuntakse geomeetria alusteajaloos Proklos-Playfair'i ekvivalendi nime all. Koolikirjanduses nimetatakse seda lauset tavaliselt paralleelide aksioomiks.

Tõestame selle lause ekvivalentsuse V postulaadiga. Valime sirgel a vabalt punkti B ja tõmbame lõigu AB ning sirge b' nii, et $\alpha+\beta=\pi$. Prokloselt on teada, et sirged a ja b' ei lõiku ja on seega paralleelid. Kui kehtib V postulaat, siis paralleele on tõesti üksainus: mistahes teise sirge b puhul läbi punkti A kehtib $\alpha+\beta'<\pi$ ning V postulaadi põhjal sirged a ja b lõikuvad, s.t. iga teine sirge b lõikab sirget a. Vastupidi, kui paralleele läbi punkti A sirgele a on üksainus, siis V postulaat kehtib: olgu mingi sirge b korral $\alpha+\beta'<\pi$; et b' puhul $\alpha+\beta=\pi$, siis b ja b'



ei saa ühtida; et b' on paralleel, siis b ei saa enam olla paralleel ning peab seetõttu lõikama sirget a.

Tõestatud ekvivalentsuse põhjal nimetatakse V postulaadi probleemi sageli ka paralleelide probleemiks.

Teiseks oluliseks ekvivalendiks on väide: Sisenurkade summa on võrdne kahe täisnurgaga kas või ühes kolmnurgas $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Selle fakti samaväärsuse V postulaadiga avastas XIV sajandil Nasir-Eddin, hiljem XVII sajandil G. Saccheri. Mõlemad tööd unustati; täie selgusega näitas ekvivalentsust uuesti Legendre. Kooligeomeetriast on teada, et see väide järeldub paralleelsuse aksioomist (resp. V postulaadist); uudiseks on siin asjaolu, et ka vastupidi, see lause toob endaga kaasa paralleelsuse aksioomi. Vastav tõestus esitatakse käesoleva kursuse teises osas.

Eukleidese V postulaadi viljatud tõestamiskatsed tekitasid paljudes matemaatikutes pessimismi. Räägiti inimmõistuse võimetusest lahendada näiliselt nii lihtne probleem. See pessimism osutus õigustamatuks, sest probleem lahendati siiski XIX saj. jooksul. Õiget teed lahenduse leidmiseks oli juba varem kasutatud mitme matemaatiku poolt. Sellele teele viisid vastuväitelise tõestamise katsed, mida tegid XVIII sajandil G. Saccheri ja J.H. Lambert.

Meetodi idee on järgmine: oletatakse, et paralleelide aksioom ei kehti ja püütakse leida sellest oletusest tulenevate järelduste süsteemis vastuolu, s.t. otsitakse selles süsteemis kahte teineteist välja sulgevat lauset. Saccheri kirjutas selle vastuolu otsingul terve raamatu, milles esineb rida kummalisi järeldusi, kuid otsest vasturääkivust ta ei leidnud, ehkki arvas end olevat jõudnud eesmärgile.

Ettevaatlikum Lambert jättis probleemi lahtiseks. Ta jõudis järeldusele, et kõik senised V postulaadi tõestamise katsed on jäänud viljatuks. Tuletanud mitmeid huvitavaid järeldusi V postulaadi eitusest, väljendab Lambert ettenägeliku mõtte, et siin on tegemist nagu mingi "geomeetriaga imaginaarsel sfääril".

XIX saj. algul uuris paralleelide probleemi Kaasani matemaatik Nikolai Ivanovitš Lobatševski. Esialgu püüdis ka tema tõestada V postulaati, kuid peagi ta veendus selle viljatuses ja jõudis geniaalsele seisukohale: vastuväitelise tõestamise katse puhul saadavas järelduste süsteemis ei tulegi vastuolu otsida, sest seda seal lihtsalt pole - tegemist on uue geomeetriliste lausete süsteemiga, mis on täielikus loogilises kooskõlas ja kujutab endast uut geomeetriat. Seda geomeetriat nimetataksegi tänapäeval Lobatševski geomeetriaks.

Lobatševski ideid mõistsid tema eluajal ainult üksikud. Nendeks vähesteks olid eelkõige kuulus C.Fr. Gauss ja noor ungarlane János Bolyai, kes mõlemad olid iseseisvalt jõudnud samadele seisukohtadele. Prioriteet siin kuulub vastuvaidlematult Lobatševskile, kelle esimene ettekanne uuest geomeetriast toimus 1826.a., esimene publikatsioon aga ilmus 1829.a. Bolyai ainus töö nägi trükimusta 3 aastat hiljem - 1832.a. Mis puutub Gaussi, siis tema, kartes "bööotlaste kisa", ei ole oma ideede kohta midagi avaldanud. Säilinud on ainult fragmendid tema päevikus ja erakirjades. Lobatševski oma selgete filosoofiliste tõekspidamistega ei kartnud võhikute nõmedust, kuigi tal tuli selle all kannatada, sest asi läks koguni naeruvääristavate pamflettideni vene ajakirjanduses. Lobatševski mõistis oma avastuse sügavat tähendust ja seisis selle eest mehiselt elu lõpuni, arendades seda arvukates töödes.

Lobatševski ideede taassünd toimus möödunud sajandi 70-ndail aastail, mil lahendati Lobatševski geomeetria vasturääkimatuse probleem. Tuleb öelda, et Lobatševskil endal ja ka teistel tema töö tundjail oli enne seda vaid subjektiivne veendumus uue geomeetria heas loogilises kooskõlas. Kuidas seda rangelt tõestada, ei olnud veel selge.

Esimese sammu probleemi lahendamise suunas tegi 1867. aastal E. Beltrami, kes näitas, et Lobatševski geomeetria kehtib (planimeetria osas) sadulataolistel nn. negatiivse konstantse kõverusega pindadel. Nii sai aga tõlgendada ainult tasandi lõpliku osa geomeetriat. Terve Lobatševski geomeetria vasturääkimatuse tõestas F. Klein 1878.a., kes näitas, et hariliku eukleidilise geomeetria vahenditega võib konstrueerida teatava mudeli, millel realiseerub Lobatševski geomeetria. Sellega oli uue geomeetria vasturääkimatuse probleem taandatud eukleidilise geomeetria samale probleemile. Ilmnes, et geomeetria alused on palju keerulisemad, kui seda varem osati arvata. Sajandi lõpp mööduski geomeetria rangete aluste väljatöötamise tähe all.

Nii rõhutas H. Helmholz 1868. aastal liikumise osatähtsust geomeetrias ja andis vastava üsna keeruka aksiomaatika. R. Dedekind töötas 1872. aastal välja reaalarvude range teooria, milles esineb ka geomeetrias vajalik pidevuse aksioom. Kümme aastat hiljem 1882.a. formuleeris M. Pasch järjestuse aksioomid. Sellega olid Eukleidese olulised lüngad täidetud.

Esimese katse geomeetria täieliku aksiomaatika loomiseks tegi G. Peano. Kõige paremini õnnestus see aga D. Hilbertil, kelle 1899.a. ilmunud töö panigi aluse kaasaja geomeetria aluste kursusele.

Kuid küsimuse areng ei jäänud peatuma Hilberti juurde. Tuli otsida võimalusi põhimõistete arvu vähendamiseks (Hilbertil olid nendeks "punkt", "sirge", "tasand", "kuulub", "vahel", "kongruentne") ning aksioomide süsteemi lihtsustamiseks. Jättes valgustamata mitmeid ajaloolisi üksikasju, tõstame siin siiski esile mõningaid uurimusi, mis on aluseks järgnevale käsitlusele.

1904. aastal aksiomatiseeris O. Veblen geomeetria olulise osa võttes ainsateks põhimõisteteks "punkt" ja "vahel". Vebleni aksiomaatikat analüüsisid ja täiustasid 30-ndatel aastatel eesti matemaatikud J. Sarv, J. Nuut, A. Humal jt. Järgnev käsitlus toetubki oluliselt nendele töödele. 1909.a. andis suhteliselt lihtsa liikumiste aksiomaatika Fr. Schur (kes muide aastatel 1888-92 töötas Tartu ülikooli professorina ja avaldas siin koos oma õpilase K.R. Kupfferiga töid geomeetria aluste alal). Ka käesolevas kursuses on põhimõistete hulgas "kongruentsus" asendatud "liikumisega".

Kõigi ülalmainitud tööde (eriti Hilberti omade) üheks oluliseks tulemuseks on uue, kaasaegse vaatekoha kujunemine aksioomidele ja aksiomaatilisele meetodile geomeetrias ja matemaatikas üldse.

Pikka aega ainuvalitses matemaatikas aksioomide sisuline mõistmine. Sel puhul mõistetakse punktidest kõneldes nende all abstraktsioone üliväikestest materiaalsetest kehakestest, sirge all mõeldakse abstraktsiooni ülipeenest pinguli tõmmatud niidist, ülikitsast valguskiirte kimbust jms. Nii oli see Eukleidesel, nii on see õigustatult ka tänapäeva kooligeomeetrias ja inseneripraktikas. Geomeetria aksioome mõistetakse siin eriliste loodusseadustena. Seoses sellega esitatakse aga sageli veel praegugi ilmselt aegunud vaatekohti. Nimelt mõistetakse aksioomi tihti "lausena, mis ei vaja tõestamist oma ilmse kehtivuse tõttu". Niisugust seisukohta ei saa tänapäeva teaduse valguses enam õigustada. Aksioom erineb teooria teistest lausetest mitte oma suurema ilmsuse tõttu (sageli on teoreemid sugugi mitte vähem ilmsed), vaid selle erilise osa tõttu, mida nad täidavad deduktsioonis. Pealegi on "ilmsus" või "mitteilmsus" puht-subjektiivsed mõisted. Teaduse ajaloos on rohkesti näiteid selle kohta, et väide, mida loeti ilmselt kehtivaks, osutus piiratuks ja teatud juhtudel koguni vääraks.

Kõige selle tõttu on kaasaja aksiomatiseeritud matemaatilistes teooriates asutud järgmisele seisukohale. Aksioome mõistetakse täiesti abstraktselt. Aksiomaatilise teooria ülesehitamisel loetletakse rida põhimõisteid, mis jäävad defineerimata ja millega ei seostata mingeid konkreetseid kujutlusi. Põhimõisteid on seejuures kahte liiki: 1) "objektid" ja 2) neid siduvad "suhted". Aksioomid on teatavad ettekirjutised (n.-ö. "mängureeglid"), mida need põhimõisted peavad rahuldama. Nad moodustavad teatava lausete süsteemi - käsiteldava teooria n.-ö. vundamendi, millest deduktsiooni teel tuletatakse selle teooria üha uusi lauseid.

Niisugune vaatekoht võimaldab aksiomatiseeritud teooriat rakendada väga mitmesugustel konkreetsetel erijuhtudel. Tuleb vaid anda vajalikud konkreetsed tõlgendused põhimõistetele, kontrollida, kas aksioomide nõuded on seejuures täidetud, ja kui see nii on, siis on uurija käsutuses kogu selle matemaatilise teooria lausete arsenal. Üleminek sellisele vaatekohale aksiomatiseeritud teooriate suhtes on võrreldav üleminekuga konkreetsete arvude aritmeetikalt sümboolsele algebrale.

Matemaatika aluste täiustamisel selgus matemaatilise loogika eriline tähtsus selles ainevallas. Tuleb öelda, et olulise tõuke matemaatilise loogika kiirele arengule andsidki Hilberti tööd, mis on tihedalt seotud tema uurimustega geomeetria aksiomaatikas. Nüüdisaegsed uurimused geomeetria aluste valdkonnas toimuvad matemaatilise loogika, geomeetria ja algebra piirialadel.

I peatükk.

PREDIKAADID JA AKSIOOMID.

Käesolevas ettevalmistava iseloomuga peatükis tutvume põgusalt mõningate edaspidi vajalike mõistete ja tulemustega. Käsitlus ei pretendeeri siin täielikkusele. Esimesed paragrahvid on pühendatud matemaatilise loogika ühele osale - predikaatarvutusele, millele tugineb õieti kogu matemaatika aluste metoodika. Selgitamist leiavad aksioomi mõiste ja deduktsioonimeetod. Üldisi arutlusi illustreeritakse ekvivalentsuse, järjestuse, grupoidi, poolrühma, rühma ja järjestatud poolrühma mõistete abil. Kõik need mõisted osutuvad edaspidi vajalikeks. Viimases paragrahvis tõestatakse teatavate eriliste omadustega järjestatud poolrühmade isomorfsus positiivsete reaalarvude aditiivse järjestatud poolrühmaga. See tulemus on hiljem aluseks lõigu pikkuse ja nurga suuruse sissetoomisel geomeetriasse.

§ 1. Predikaadid ehk loogilised funktsioonid.

Olgu $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots, \mathcal{W}$ teatavad hulgad. Sümboliga $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\dots\times\mathcal{W}$ tähistame kõikvõimalike süsteemide $(X, Y, \dots, W)$ hulga, kus $X\in\mathcal{X}$, $Y\in\mathcal{Y}$, $\dots$, $W\in\mathcal{W}$.

Olgu antud hulga $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\dots\times\mathcal{W}$ ühene kujutus f kahest elemendist (tähistame nad 0 ja 1) koosnevasse hulka $\{0, 1\}$, s.t. iga süsteemiga $(X, Y, \dots, W)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\dots\times\mathcal{W}$ olgu vastavusse seatud üks ja ainult üks element $f(X, Y, \dots, W)\in\{0, 1\}$.

Sedalaadi kujutust nimetatakse <u>predikaadiks</u> hulgal $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\dots\times\mathcal{W}$.

Predikaati hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ või $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ nimetatakse, eriti algebras, ka vastavalt binaarseks või ternaarseks suhteks hulgas $\mathfrak{X}$.

Kui mingi konkreetse süsteemi $(X_0, Y_0, \ldots, W_0)$ korral $f(X_0,Y_0,\ldots,W_0)=1$, siis kõneldakse, et predikaadi $f(X,Y,\ldots,W)$ täislause $f(X_0,Y_0,\ldots,W_0)$ on tõene; kui $f(X_0,Y_0,\ldots,W_0)=0$, siis öeldakse, et see täislause on väär.

N ä i d e 1. Hulgaks $\mathfrak{X}$ olgu kõigi TRÜ-s õppivate üliõpilaste hulk (seisuga näit. 1. okt. 1962.a.), hulgaks $\mathcal{Y}$ olgu TRÜ kõigi osakondade hulk (sama seisuga). Defineerime hulgal $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ järgmise predikaadi: loeme, et $f(X_0,Y_0)=1$, kui üliõpilane X_0 õpib osakonnas Y_0; vastupidisel juhul loeme, et $f(X_0,Y_0)=0$.

N ä i d e 2. Loeme, et $f(X_1,X_2)=1$, kui hulga $\mathfrak{X}$ elemendid X_1 ja X_2 ühtivad, ja $f(X_1,X_2)=0$, kui X_1 ja X_2 ei ühti. Niisugust predikaati hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ - nn. "ühtimispredikaati" - tähistatakse

$$X_1=X_2.$$

Märki = mõistame edaspidi alati just selles mõttes (s.t. ühtimise mõttes).

N ä i d e 3. Hulgaks $\mathfrak{X}$ olgu grupoid - hulk Ω , millel on määratud binaarne algebraline operatsioon, mis iga kahe teatavas järjekorras võetud elemendiga $\varphi,\psi\in\Omega$ seab vastavusse ühe ja ainult ühe elemendi $\psi\varphi\in\Omega$. Grupoidi moodustavad näiteks naturaalarvud liitmise, samuti korrutamise suhtes, vektorid ruumis vektorkorrutamise suhtes jne.

Defineerime hulgal $\Omega\times\Omega\times\Omega$ predikaadi (ehk ternaarse suhte) järgmiselt: loeme, et $f(\varphi,\psi,\chi)=1$, kui antud φ,ψ,χ korral $\psi\varphi=\chi$ on tõene, ja $f(\varphi,\psi,\chi)=0$ vastupidisel juhul.

N ä i d e 4. Hulgaks $\mathfrak{X}$ olgu järjestatud hulk - hulk, mille iga kahe erineva elemendi $x,y\in\mathfrak{X}$ korral võib öelda, kumb neist eelneb teisele.

Defineerime hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ predikaadi (binaarse suhte) järgmiselt: loeme, et $f(x,y)=1$, kui x ja y ühtivad või x eelneb elemendile y, ja $f(x,y)=0$ vastupidisel juhul. Selle predikaadi - nn. "järjestuspredikaadi" - tähistame $x \lesssim y$.

N ä i d e 5. Hulgaks $\mathfrak{X}$ olgu ruumi punktide hulk. (Punkte tähistame suurte ladina tähtedega A,B,...). Loeme, et f(A,B,C)= =1, kui antud A,B,C korral B on A ja C vahel, ja f(A,B,C)=0 vastupidisel juhul. Niisuguse predikaadi hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ - nn. "vahel-predikaadi" (ehk ternaarse vahel-suhte) - tähistame $\langle ABC \rangle$. Ta kujuneb meil geomeetria järgneval aksiomaatilisel ülesehitamisel üheks põhimõisteks.

N ä i d e 6. Liikumiseks nimetatakse geomeetrias teatavasti punktide hulga $\mathfrak{X}$ niisugust üks-ühest kujutust iseendale, mille puhul säilib iga kahe punkti vaheline kaugus. Vaatleme selliseid liikumisi omaette objektidena ja tähistame nende hulga $\mathfrak{R}$; üksikuid liikumisi tähistame φ, ψ jne.

Defineerime hulgal $\mathfrak{R}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ järgmise predikaadi: loeme, et antud liikumise φ ja antud punktide A,B korral f(φ,A,B)=1, kui φ kannab punkti A punkti B, ja f(φ,A,B)=0 vastupidisel juhul. Niisugust predikaati hakkame tähistama $A\circ\varphi=B$. Temast saab edaspidi vahel-suhte kõrval geomeetria teine põhiline predikaat.

§ 2. L o o g i l i s e d t e h t e d.

Olgu hulgal $\mathfrak{X}\times\ldots\times\mathfrak{Z}$ määratud predikaat f(X,...,Z) ja hulgal $\mathfrak{U}\times\ldots\times\mathfrak{W}$ predikaat g(U,...,W). Defineerime järgmised loogilised tehted, mis võimaldavad nende predikaatide abil moodustada uusi predikaate.

1. Konjunktsioon. Predikaatide f(X,...,Z) ja g(U,...,W) konjunktsiooniks nimetatakse niisugust hulgal $\mathfrak{X}\times\ldots\times\mathfrak{Z}\times\mathfrak{U}\times\ldots\times\mathfrak{W}$ määratud predikaati h(X,...Z,U,...,W)=f(X,...,Z) & g(U,...,W), mille täislause tõesus või väärus määratakse järgmiste eeskirjade järgi:

$$1 \,\&\, 1=1,\quad 1 \,\&\, 0=0,\quad 0 \,\&\, 1=0,\quad 0 \,\&\, 0=0.$$

Tähendab, predikaatide konjunktsiooni f & g täislause on tõene siis ja ainult siis kui tõesed on f ja g vastavad täislaused. Konjunktsiooni keeleliseks vasteks on seega sõna "ja".

2. <u>Disjunktsioon.</u> Predikaatide f ja g disjunktsiooniks $f \vee g$ nimetatakse niisugust predikaati, mille täislause tõesus või väärus määratakse eeskirjadega:

$$1 \vee 1=1, \quad 1 \vee 0=1, \quad 0 \vee 1=1, \quad 0 \vee 0=0.$$

Tähendab, predikaatide disjunktsiooni $f \vee g$ täislause on tõene siis ja ainult siis, kui tõene on f <u>või</u> g vastav täislause (või mõlemad korraga). Disjunktsiooni keeleliseks vasteks on seega sõna "või" (mittevälistavas mõttes).

3. <u>Implikatsioon.</u> Predikaatide f ja g implikatsiooniks $f \rightarrow g$ nimetatakse niisugust predikaati, mille täislause tõesus või väärus määratakse eeskirjadega:

$$1 \rightarrow 1=1, \quad 1 \rightarrow 0=0, \quad 0 \rightarrow 1=1, \quad 0 \rightarrow 0=1.$$

Implikatsioon on seotud järelduste tegemisega ja tema keeleliseks vasteks on "kui ... siis". Järeldamiskäiku me loeme ju tõepoolest vääraks ainult siis, kui tõest on järeldatud vale. Teistel juhtudel oleme õigustatud lugema järeldamiskäiku õigeks (ehk tõeseks). Niisugune vaatekoht on eriti omane matemaatikale, kus järeldamiskäigu õigsust ei kõiguta mingil määral see, kui hiljem selgub, et eksperiment ei kinnita eelduse tõepärasust.

4. <u>Eitus.</u> Predikaadi f eituseks $\bar{f}$ nimetatakse niisugust predikaati, mille täislause tõesus või väärus määratakse eeskirjadega

$$\bar{1}=0, \quad \bar{0}=1.$$

Toodud definitsioonid võib kokku võtta järgmisse tabelisse.

Tabel 1.

f	g	f & g	$f \vee g$	$f \rightarrow g$	$\bar{f}$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Loogiliste tehete abil võib antud predikaatidest moodustada mitmesuguseid uusi predikaate, samuti nagu tavalised reaalarvude korpuse tehted võimaldavad näiteks funktsioonidest $f(x,y)$, $g(z)$ ja $h(w)$ moodustada uue nelja muutuja funktsiooni

$$f(x,y)[g(z)+h(w)].$$

Funktsiooniteoorias on kindel sisu ka kirjutisel

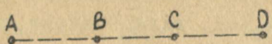
$$f(x,y)[g(x)+h(y)],$$

mis kujutab endast kahe muutuja x, y funktsiooni. Analoogilist võtet kasutame ka loogiliste tehete puhul predikaatidega, kirjutades näiteks

$$f(X,Y)\vee[g(X)\,\&\,h(Y)]$$

ja mõistes selle all predikaati hulgal $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

N ä i d e 6. Moodustame näites 4 sisse toodud "vahel-predikaadi" abil järgmised 7 predikaati



a)

b)

$$\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle , \quad (1)$$
$$\langle ABC\rangle \vee \langle BCD\rangle , \quad (2)$$
$$\langle BCD\rangle \,\&\, \langle DCB\rangle , \quad (3)$$
$$\langle BCD\rangle \vee \langle DCB\rangle , \quad (4)$$
$$\langle ABC\rangle \to \langle BCD\rangle , \quad (5)$$
$$\langle BCD\rangle \to \langle DCB\rangle , \quad (6)$$
$$\langle ABC\rangle \to \langle \overline{ACB}\rangle . \quad (7)$$

Vaatleme nende predikaatide täislauseid joonistel a) ja b) kujutatud konkreetsete punktide A,B,C,D korral. Nende täislausete tõesust või väärust iseloomustab kummalgi juhul järgmine tabel.

Tabel 2.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
a)	1	1	0	1	1	1	1
b)	0	1	0	0	0	1	1

Meie kogemused kinnitavad, et implikatsioonide (6) ja (7) puhul tuleb nende iga täislauset lugeda tõeseks. Niisugust predikaati, mille <u>iga</u> täislause on tõene, nimetatakse samaselt tõeseks. Edaspidi omandavad erilise tähtsuse samaselt tõesed implikatsioonid, mis on moodustatavad predikaatidest $\langle ABC\rangle$ ja $A\circ\varphi = B$ (näited 4 ja 5) loogiliste tehete abil. Need õieti moodustavadki järgmistes peatükkides ülesehitatava teooria sisu.

§ 3. K v a n t o r i d.

Eelmises paragrahvis sisse toodud neljast tehtest ei piisa veel kõigi järgnevas vajalike loogiliste operatsioonide teostamiseks. Meil tuleb appi võtta veel "olemasolukvantori" ja "üldsuskvantori" mõisted.

Olgu hulgal $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z} \times \mathcal{U} \times \ldots \times \mathcal{W}$ määratud predikaat $f(X,\ldots,Z,U,\ldots,W)$. Defineerime hulgal $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z}$ uue predikaadi, lugedes tema täislause konkreetsete $X_0,\ldots,Z_0$ korral tõeseks, kui hulkades $\mathcal{U},\ldots,\mathcal{W}$ on olemas elemendid vastavalt $U_0,\ldots,W_0$, nii et $f(X_0,\ldots,Z_0,U_0,\ldots,W_0)=1$, ning vääraks vastupidisel juhul. Selle uue predikaadi tähistame

$$(\exists U,\ldots,W)\ f(X,\ldots,Z,U,\ldots,W).$$

Rõhutame veelkord, et siin on tegemist predikaadiga hulgal $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z}$. Siin märki $\exists$ nimetatakse <u>olemasolukvantoriks</u>. Sümboli $(\exists\ldots)\ldots$ keeleliseks vasteks on "on olemas..., nii et...".

Üldsuskvantori defineerimiseks määrame hulgal $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z}$ veel ühe predikaadi, lugedes tema täislause konkreetsete $X_0,\ldots,Z_0$ korral tõeseks, kui iga $U,\ldots,W$ korral vastavalt hulkadest $U,\ldots,W$ on $f(X_0,\ldots,Z_0,U,\ldots,W)=1$ (s.t., kui $f(X_0,\ldots,Z_0,U,\ldots,W)$ on samaselt tõene hulgal $\mathcal{U}\times,\ldots,\times\mathcal{W}$) ning vääraks vastupidisel juhul. Selle predikaadi tähistame

$$(\forall U,\ldots,W) f(X,\ldots,Z,U,\ldots,W).$$

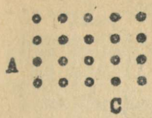
Märki $\forall$ nimetatakse <u>üldsuskvantoriks</u>. Sümboli $(\forall\ldots)\ldots$ keeleliseks vasteks on "iga ... puhul on...".

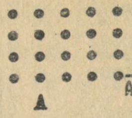
Märgime, et mõlemad kvantorid on omavahel seotud järgmiselt:

$$(\forall U,\ldots,W) f(X,\ldots,Z,U,\ldots,W) \equiv \overline{(\exists U',\ldots,W')\overline{f(X,\ldots,Z,U',\ldots W')}}.$$

Siin märk $\equiv$ tähendab predikaatide ühtimist.

N ä i d e 7. Valime tasandil ristkoordinaadistiku ja võtame hulgaks $\mathfrak{X}$ täisarvuliste koordinaatidega punktide hulga - nn. täisarvulise võrgu. Vaatleme predikaate





$(\exists B)<ABC>$, (1)

$(\forall B)<ABC>$, (2)

$\overline{A=B} \to (\exists C)<ABC>$. (3)

Predikaadi (1) täislause on joonisel a) näidatud A,C korral väär, joonisel b) näidatud A,C korral aga tõene. Predikaadi (2) ükski täislause pole tõene, sest ühegi kahe A ja C vahel ei asu <u>iga</u> punkt B - predikaat (2) on samaselt väär hulgal $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$.

Predikaat (3) on, nagu kerge veenduda, samaselt tõene hulgal $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$. Eespool antud tabeli 1 põhjal tuleb siin lihtsalt kontrollida, et implikatsiooni eesliikme tõesusest järeldub ka tagaliikme tõesus. Nii on see antud juhul tõesti, sest kui A ja B on erinevad, siis leidub C nii, et B on A ja C vahel.

§ 4. Arvutamisest predikaatidega.

Tehtemärgid &, $\vee$, $\to$, $\overline{}$, samuti nagu kvantorid $\exists$ ja $\forall$, võimaldavad antud predikaatidest moodustada uusi predikaate kooskõlas §-des 2 ja 3 antud definitsioonidega.

Siin on suur analoogia tavaliste mitme reaalmuutuja funktsioonidega, mille puhul uusi funktsioone antuist võib moodustada tehtemärkide +, -, . , : ja näiteks operatsioonide $(\frac{\partial}{\partial x}\ldots)_{x_0}$ ja $\int_a^b \ldots dx$ abil (viimase kahe operatsiooni puhul, samuti nagu kvantorite puhul, argumentide arv väheneb). Kui arvutusseadmed, milledega tuleb arvestada tehete sooritamisel reaalmuutuja funktsioonidega, on tuttavad juba koolipingist, siis seadused, millele alluvad loogilised tehted, vajavad siinkohal põgusat tutvustamist. Rõhutame, et käesolev ja järgmine paragrahv on ainult tutvustava iseloomuga ja ei pretendeeri vähimalgi määral täielikule ainekäsitlusele. Viimase võib asjast huvitatud lugeja leida I. Kulli õpikust "Matemaatiline loogika", mis ilmub peatselt ERK väljaandena.

Predikaate tähistame siin, samuti nagu eespool, $f(X, \ldots, Z)$, $g(U, \ldots, W)$ jne., ehk lühemalt f, g jne. Kaht predikaati nimetame <u>võrdseiks</u> ja kirjutame $f = g$, kui 1) nad on mõlemad määratud samal hulgal $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z}$ ja 2) seavad mõlemad selle hulga vabalt võetud elemendiga $(x, \ldots, z)$ vastavusse ühe ja sama väärtuse kas 0 või 1 (s.t., kui nad kujutustena $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{Z} \to \{0, 1\}$ ühtivad omavahel).

Kui predikaadi f väärtuseks on alati 1 ("tõesus"), siis teda nimetatakse samaselt tõeseks ja kirjutatakse

$$f = 1;$$

kui predikaadi f väärtuseks on alati 0 ("väärus"), siis teda nimetatakse samaselt vääraks ja kirjutatakse

$$f = 0.$$

Olgu f, g ja h kolm vabalt võetud predikaati. Tehete $\&, \vee, \to, \bar{\ }$ definitsioone kasutades on kerge kindlaks teha, et kehtivad järgmised võrdused.

1. $\bar{\bar{f}} = f$ (kahekordse eituse võib ära jätta);
2. $f \,\&\, f = f$, (predikaadi ja tema enda konjunktsioon
3. $f \vee f = f$ või disjunktsioon on sama predikaat);
4. $f \,\&\, g = g \,\&\, f$, (konjunktsioon ja disjunktsioon on
5. $f \vee g = g \vee f$ kommutatiivsed; sama ei või aga öelda implikatsiooni kohta; vt. Tabel 1);
6. $f \,\&\, (g \,\&\, h) = (f \,\&\, g) \,\&\, h$, (konjunktsioon ja dis-
7. $f \vee (g \vee h) = (f \vee g) \vee h$ junktsioon on assotsiatiivsed);
8. $f \,\&\, (g \vee h) = (f \,\&\, g) \vee (f \,\&\, h)$, (distributiivsus);
9. $f \vee (g \,\&\, h) = (f \vee g) \,\&\, (f \vee h)$
10. $f \,\&\, (f \vee g) = f$;
11. $\overline{f \vee g} = \bar{f} \,\&\, \bar{g}$;
12. $\overline{f \,\&\, g} = \bar{f} \vee \bar{g}$,
13. $f \,\&\, \bar{f} = 0$, (vasturääkivuse seadus: f ja $\bar{f}$ ei saa olla korraga tõesed);
14. $f \vee \bar{f} = 1$ (välistatud kolmanda seadus (tertium non datur): f ja $\bar{f}$ seast vähemalt üks on tõene).

Märgime, et 1. 11. ja 12. võimaldavad näidata 13. ja 14. samaväärsust.

Need võrdused on aluseks omalaadsele arvutusele - loogika seostub algebraga. Algebras uuritakse näiteks niisuguseid hulki, millel on defineeritud kaks tehet (meie tähistes & ja $\vee$), nii et on rahuldatud seosed 2 - 10. Nende puhul kõneldakse, et tegemist on distributiivsete struktuuridega.* Viimaste eriliigiks on Boole'i struktuurid (e. Boole'i algebrad), mis sisaldavad tehte & suhtes neutraalset elementi 1 ja tehte $\vee$ suhtes neutraalset elementi 0, nii et kehtivad seosed 1 - 14.

Tabeli 1 abil on lihtne kindlaks teha, et lisaks võrdustele 1 - 14 kehtivad iga kolme predikaadi f, g ja h korral veel järgmised võrdused, mis on samuti meile edaspidi vajalikud.

15. $f \to g = \bar{f} \vee g$.

See võrdus näitab, et nelja eespool kirjeldatud loogilise tehte asemel võib piirduda ainult kolme operatsiooniga &, $\vee$, $-$.

Ühtlasi võib selle võrduse ja seoste 1 - 12 abil tõestada järgmise kahe võrduse kehtivust.

16. $f \to g = \bar{g} \to \bar{f}$.

Tõepoolest, $f \to g = \bar{f} \vee g = g \vee \bar{f} = \bar{\bar{g}} \vee \bar{f} = \bar{g} \to \bar{f}$.

Siin parempoolset predikaati nimetatakse vasakpoolse duaalseks kujuks. Iga implikatsiooni võib seega üles kirjutada ka duaalselt.

17. $(f \to g) \to ((g \to h) \to (f \to h)) = 1$.

Tõestuse (tabeli 1 abil) jätame lugejale iseseisvalt läbi teha.

Toodud põgusa ülevaate matemaatilise loogika klassikalistest lähtekohtadest lõpetame järgmise märkusega. Raskused, mis ilmnesid matemaatika alustes (eriti hulgateoorias), näitasid, et loogika lähtekohad vajavad revideerimist. Viimasel ajal ongi kujunenud konstruktiivne loogika, milles loobutakse välistatud kolmanda seadusest ülaltoodud kujul. Loogika ehitatakse üles aksiomaatiliselt, kusjuures aksioomide hulka

*Vt. А.Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Москва 1962.

4.

jäetakse võrduste 11 - 14 seast ainult nõue, et $f \& \bar{f}$ oleks samaselt tõene. Sel puhul f ja $\bar{f}$ ei saa küll olla korraga tõesed, kuid samal ajal ei nõuta, et vähemalt üks neist peaks tõene olema - tähendab, kolmas võimalus ei ole välistatud.

Järgnevas käsitluses kasutatakse loogikat tema klassikalisel kujul. Välistatud kolmanda seadus(14)leiab edaspidi sageli rakendamist.

§ 5. Aksioomid ja deduktsioon.

Eespool me juba viitasime analoogiale reaalmuutuja funktsioonide ja predikaatide vahel. Kasutame seda analoogiat veelgi.

Edaspidi on meile eriti olulised samaselt tõesed predikaadid, s.t. predikaadid, mille iga täislause on tõene (väärtusega 1). Nendega me edaspidi õieti tegelemegi, kui me asume tuletama geomeetria teoreeme. Üldiselt matemaatilistes teooriates pakuvad alati erilist huvi predikaadid, mis on moodustatud teatavatest antud teooria aluseks võetud predikaatidest loogiliste tehete ja kvantorite abil, ning on samaselt tõesed - need on selle teooria teoreemid.

Samaselt tõene predikaat on analoogiline konstantse funktsiooniga, näiteks funktsiooniga, mis on samaselt null. Võib näidata samasusi, mis kehtivad igasuguste funktsioonide korral, näiteks

$$[f(x) + g(y)] \cdot h(x,y) - f(x) \cdot h(x,y) - g(y) \cdot h(x,y) = 0,$$

võib aga näidata ka samasusi, mis kehtivad ainult eriliste funktsioonide korral. Näiteks funktsioon $f(x) = a^x$ rahuldab samasust

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \tag{1}$$

funktsioonid $f(x) = \cos x$, $g(y) = \sin y$ - samasust

$$f(x-y) = f(x)\, f(y) + g(x)\, g(y). \tag{2}$$

Niisamuti võib predikaatide puhul näidata nendest moodustatud uusi predikaate, mis on samaselt tõesed igasuguste lähtepredikaatide korral, näiteks

$f(X) \& [f(X) \vee (\exists Z) g(Y,Z)] \to f(X)$.

Tõepoolest, igasuguste f ja g korral on 10. põhjal garanteeritud, et saadud uus predikaat hulgal $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ on samaselt tõene. Teiselt poolt võib näidata tuletatud predikaate; mis on samaselt tõesed ainult teatavate eriliste lähtepredikaatide korral. Nii näiteks on "vahel-predikaadi" ja "liikumispredikaadi" puhul samaselt tõesed järgmised tuletatud predikaadid

$$\langle ABC \rangle \to \langle \overline{ACB} \rangle \tag{3}$$

$$\langle ABC \rangle \& (A \circ \varphi = D) \& (B \circ \varphi = E) \& (C \circ \varphi = F) \to \langle DEF \rangle. \tag{4}$$

Võrrandeid (1) ja (2) võib vaadelda ka teisest seisukohast - kui funktsionaalvõrrandeid tundmatute funktsioonide määramiseks. Funktsionaalvõrrandite teoorias näidatakse, et võrrandi (1) lahendiks pidevate funktsioonide klassis on $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, võrrandi (2) lahendeiks lisatingimustel

1) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, kui $0 > x > \lambda$,

2) $f(0) = g(1) = \lambda$

on $f(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x$, $g(x) = \sin \frac{\pi}{2\lambda} x$.* Nii et võrrandit (2) ja lisatingimusi 1) ja 2) võib vaadelda trigonomeetriliste funktsioonide teooria aksioomidena.

Analoogiliselt sellele võib ka kirjutusi (3) ja (4) vaadelda uuest seisukohast. Neid kirjutusi võib käsitleda kui nõudeid teatavatele tundmatutele predikaatidele f(A,B,C) ja g(φ, A, B):

$$f(A,B,C) \to \overline{f(A,C,B)}, \tag{5}$$

$$f(A,B,C) \& g(\varphi, A,D) \& g(\varphi,B,E) \& g(\varphi,C,F) \to f(D,E,F). \tag{6}$$

Tähendab, predikaadid f ja g peavad olema sellised, et nende abil moodustatud uued predikaadid (5) ja (6) on samaselt tõesed. Sellisel kujul tuleb kirjutusi (5) ja (6) vaadelda kui teatavaid aksioome, mida peavad rahuldama praegu veel tundmatud predikaadid.

Ette rutates märgime, et kahest aksioomist (5) ja (6)

---

*Vt. Энциклопедия элементарной математики III, Москва-Ленинград 1952, lk. 247-253.
С.И.Новоселов, Специальный курс тригонометрии, Москва 1957, lk. 405-417.

veel ei piisa sisuka teooria ülesehitamiseks, aksioomide hulk vajab täiendamist. Kuid vaatekoht, millele me asume, peaks selgeks saama ka siit. Teooriat - antud juhul eukleidilise või Lobatševski ruumi geomeetriat - tuleb vaadelda punktide ja liikumiste hulga nende omaduste süsteemina, mida saab kirjeldada aksioome (5), (6) ja teisi taolisi rahuldava kahe predikaadi - nn. põhipredikaadi abil.

Sellisel kirjeldamisel tuleb kahe põhipredikaadi abil aksioomide alusel tuletada järjest uusi predikaate. Viimased on põhiliselt kahte liiki. Ühed ei ole samaselt tõesed, samuti nagu põhipredikaadid, neid kasutame teatavate eriliste punktihulkade defineerimisel. Teised on, samuti nagu aksioomid, samaselt tõesed implikatsioonid; neid tuleb vaadelda teooria lemmadena ja teoreemidena. Implikatsiooni eesliikmed on eeldusteks, tagaliikmed - väideteks. Rõhutame veelkord, et põhipredikaatidelt me ei eelda midagi muud kui ainult seda, et nad rahuldaksid aksioome.

Esimest liiki predikaate tuletame põhipredikaatidest tehete &, $\vee$, $\bar{}$ abil.

Teist liiki predikaatide (s.t. samaselt tõeste implikatsioonide) tuletamisel põhipredikaatidest ja aksioomidest kasutame predikaatide puhul kehtivaid võrdusi 1 - 17. Seejuures rakendame järgmist järeldamise reeglit.

Kui f ja $f \to g$ on samaselt tõesed predikaadid, siis ka g on samaselt tõene predikaat. See reegel järeldub vahetult tehte $\to$ sisulisest tähendusest (vt. Tabel 1).

Pöörame tähelepanu mõnele võrdustest 1 - 17, mida meil tuleb edaspidi kasutada eriti sageli.

Võrdusest 15 järeldub, et kui predikaat $f \to g$ on samaselt tõene, siis on samaselt tõene ka predikaat $\bar{g} \to \bar{f}$.

Võrdusest 13 järeldub, et kui predikaadi f mingi täislause on tõene, siis predikaadi $\bar{f}$ vastav täislause ei saa enam tõene olla. Seda tähelepanekut kasutame vastuväiteliste tõestuste puhul.

Võrdusest 17 saame asendamise ja järeldamise reeglite abil järgmise tulemuse: kui implikatsioonidena kirja pandud predikaadid $f \to g$ ja $g \to h$ on samaselt tõesed (s.t. on aksioomid või teoreemid), siis on samaselt tõene ka predikaat $f \to h$.

Tõepoolest, järeldamise reegli abil saame võrdusest 17 ja $f \to g$ tõesusest $(g \to h) \to (f \to h)$ tõesuse ning siit sama reegli abil $g \to h$ tõesuse põhjal saamegi $f \to h$ tõesuse.

Tulemust tuntakse süllogismi reegli nime all. Edaspidi hakkame seda reeglit lühidalt tähistama kirjutisega

$$f \to g \to h \to \ldots \to 1,$$

mida tuleb lugeda järgmiselt: kui $f \to g$, $g \to h, \ldots$ on samaselt tõesed, siis on samaselt tõene ka $f \to 1$ (s.t. eelduste tõesusest järeldub väite tõesus).

Uute samaselt tõeste predikaatide tuletamist aksioomidest kooskõlas võrdustega 1 - 17 ja järeldamise reegliga nimetatakse deduktsiooniks.

Järgmistes paragrahvides illustreerime ülalesitatud skeemi mõnede üldist laadi mõistete sissetoomisega. Kõik need mõisted osutuvad vajalikeks edaspidises käsitluses.

§ 6. Ekvivalentsus ja järjestus.

Kõneldakse, et hulgal $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ määratud predikaat $f(x,y)$ ehk binaarne suhe hulgas $\mathfrak{X}$ rahuldab ekvivalentsuse aksioome, kui tema korral on samaselt tõesed:

1° $f(x,x)$ (refleksiivsus),

2° $f(x,y) \to f(y,x)$ (sümmeetria),

3° $f(x,y)$ & $f(y,z) \to f(x,z)$ (transitiivsus).

Kui sel puhul $f(a,b)=1$, siis kõneldakse, et elemendid a ja b on ekvivalentsed. Näitame, et hulk $\mathfrak{X}$ lahutub sel korral mittelõikuvateks alamhulkadeks, mille ühendiks on terve hulk $\mathfrak{X}$, nii et ühe ja sama alamhulga iga kaks elementi on omavahel ekvivalentsed. Neid alamhulki nimetatakse ekvivalentsusklassideks.

Tõepoolest, võtame hulgas $\mathfrak{X}$ vabalt elemendi $a \in \mathfrak{X}$ ja vaatleme kõigi nende elementide x alamhulka $\mathfrak{X}_a$, mille korral

$f(a,x)=1$. See hulk ei ole tühi, sest 1^0 põhjal ta sisaldab vähemalt a. Kui ta ei ühti hulgaga $\mathfrak{X}$, siis võib leida $b \in \mathfrak{X}$, nii et $f(a,b)=0$. Moodustame analoogiliselt alamhulga $\mathfrak{X}_b$ ja näitame, et $\mathfrak{X}_a$ ja $\mathfrak{X}_b$ ei saa lõikuda. Oletame, näiteks, et lõikumine toimub elemendil c, s.t. $f(a,c)=1$, $f(b,c)=1$. Sel korral 2^0 põhjal ka $f(c,b)=1$ ja 3^0 põhjal $f(a,b)=1$ vastupidiselt eeldusele $f(a,b)=0$. Kui $\mathfrak{X}_a$ ja $\mathfrak{X}_b$ ühend ei ühti veel hulgaga $\mathfrak{X}$, siis võib leida c, nii et $f(a,c)=f(b,c)=0$. Samuti nagu eespool, võib näidata, et $\mathfrak{X}_c$ ei lõiku alamhulkadega $\mathfrak{X}_a$ ja $\mathfrak{X}_b$. Niiviisi samm-sammult võime ammendada terve hulga $\mathfrak{X}$. Tähendab, $\mathfrak{X}$ lahutub oma mittelõikuvateks alamhulkadeks $\mathfrak{X}_a$, $\mathfrak{X}_b$,....

Jääb näidata, et iga $\mathfrak{X}_a$ koosneb omavahel ekvivalentsetest elementidest. Olgu $f(a,c)=1$, $f(a,d)=1$. Siis 2^0 põhjal $f(c,a)=1$ ja 3^0 põhjal $f(c,d)=1$. Väide on tõestatud.

Ekvivalentsusklasside näiteks võib tuua arvuteooriast tuntud jäägiklassid naturaalarvude hulgas $\mathfrak{N}$. Defineerime hulgal $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ predikaadi $f(n,m)$ lugedes tema täislause tõeseks, kui m ja n annavad naturaalarvuga p jagades ühe ja sama jäägi, ning vääraks vastupidisel juhul. Lihtne on kontrollida, et niisuguse predikaadi $f(n,m)$ puhul on rahuldatud ekvivalentsuse aksioomid. Vastavateks ekvivalentsusklassideks ongi jäägiklassid p järgi.

Ekvivalentsusklassi iseärasuseks on see, et teda võib teiste ekvivalentsusklasside seast välja eraldada tema ükskõik missuguse elemendi - nn. esindaja - äranäitamisega. Antud klassi kuuluvad sel korral kõik need elemendid, mis on ekvivalentsed selle esindajaga. Tulemus seejuures ei sõltu esindaja valikust antud klassis.

Kõneldakse, et hulgal $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ määratud predikaat $f(x,y)$ rahuldab <u>järjestuse aksioome</u>, kui samaselt tõesed on

1' $f(x,y) \vee f(y,x)$ (nõrk alternatiivsus),

2' $f(x,y) \,\&\, f(y,x) \rightarrow x=y$ (antisümmeetria),

3' $f(x,y) \,\&\, f(y,z) \rightarrow f(x,z)$ (transitiivsus).

Aksioome 1' - 3' rahuldavat predikaati nimetatakse järjestuspredikaadiks, hulka $\mathfrak{X}$, millel on määratud niisugune predikaat - järjestatud hulgaks. Näitame, et sel korral kehtib võrdus

$$\overline{f(y,x)} = f(x,y) \,\&\, \overline{(x=y)}. \qquad (1)$$

Tõepoolest, samaselt tõene on

$$f(x,y) \,\&\, (\overline{x=y}) \to \overline{f(y,x)},$$

sest kui oletada eelduste tõesust ja väite väärust, siis võrduse 14 ja aksioomi 2' põhjal jõuaksime x=y tõesuseni, mis on vastuolus teise eeldusega.

Teiselt poolt on samaselt tõene

$$\overline{f(y,x)} \to (\overline{x=y}) \,\&\, f(x,y).$$

Aksioomist 1' saame nimelt $\overline{f(y,x)} \to \overline{f(x,y)}$ (vt. § 4 valem 1). Samuti on tõene $\overline{f(y,x)} \to \overline{(x=y)}$, sest aksioomist 1' saame x=y tõesuse puhul, mil $f(x,y) \equiv f(y,x)$, et tõene on $f(x,x) \vee f(x,x)$ ehk $f(x,x)$, s.t.

$$(x=y) \to f(y,x) \text{ (refleksiivsus)}$$

ning üleminek duaalsele kujule annabki soovitud tulemuse.

Kokkuvõttes olemegi kindlaks teinud võrduse (1), sest kummagi poole tõesusest järeldub teise poole tõesus - pooled on tõesed või väärad korraga.

Kui $\mathfrak{X}$ mingi kahe elemendi x ja y korral järjestuspredikaadi f(x,y) täislause on tõene, siis kirjutame $x \leq y$ ja kõneleme, et "x ei järgne elemendile y" (või "x ei ole suurem elemendist y").

Hulga $\mathfrak{X}$ võib muuta järjestatud hulgaks ka teistsuguseid aksioome rahuldava predikaadi abil. Olgu predikaadi g(x,y) puhul samaselt tõesed

1" $\overline{g(x,x)}$ (mitterefleksiivsus),

2" $\overline{x=y} \to g(x,y) \vee g(y,x)$ (tugev alternatiivsus),

3" $g(x,y) \,\&\, g(y,z) \to g(x,z)$ (transitiivsus).

Näitame, et sel korral kehtib

$$\overline{g(y,x)} = g(x,y) \vee (x=y). \qquad (2)$$

Tõepoolest, samaselt tõene on

$$\overline{g(y,x)} \to g(x,y) \vee (x=y),$$

sest kui oletada eelduse tõesust ja väite väärust, siis on tõesed $\overline{g(y,x)}$, $\overline{g(x,y)}$ ja $(\overline{x=y})$, samal ajal kui 2" põhjal peaks tõene olema $g(x,y) \vee g(y,x)$.

Teiselt poolt on samaselt tõene

$$g(x,y) \vee (x=y) \rightarrow \overline{g(y,x)},$$

sest kui oletada $g(x,y)$ tõesust ja väite $\overline{g(y,x)}$ väärust (ehk $g(y,x)$ tõesust), siis 3" põhjal jõuaksime $g(x,x)$ tõesuseni, mis on vastuolus aksioomiga 1"; kui aga oletada $(x=y) \& g(y,x)$ tõesust, saame vastuolu sama 1" aksioomiga.

Kokkuvõttes olemegi kindlaks teinud võrduse (2). Kui x ja y korral $g(x,y)$ täislause on tõene, siis kirjutame $x < y$ ja kõneleme, et "x eelneb elemendile y" (või "x on väiksem kui y").

Seos järjestatud hulga kahe definitsiooni vahel aksioomide 1'-3' ja 1"-3" abil on lihtne: a) kui $f(x,y)$ rahuldab aksioome 1'-3', siis $g(x,y)=\overline{f(y,x)}$ puhul on rahuldatud 1"-3"; b) vastupidi, kui $g(x,y)$ rahuldab aksioome 1"-3", siis $f(x,y)=\overline{g(y,x)}$ puhul on rahuldatud 1'-3'.

Tõestame selle.

a) Aksioom 1" kehtib tänu sellele, et võrduse (1) põhjal

$$g(x,y)=f(x,y)\&\overline{(x=y)}. \qquad (3)$$

Aksioom 2" kujutab endast aksioomi 2' duaalset kuju. Aksioomi 3" kehtivus nähtub sellest, et 3' põhjal

$$f(x,y)\&\overline{(x,y)} \& f(y,z) \& \overline{(y=z)} \rightarrow f(x,z),$$

kusjuures eelduste tõesuse puhul on x=z võimatu, sest sel puhul jõuaksime 2' põhjal x=y tõesuseni, mis on vastuolus teise eeldusega.

b) Aksioomi 1' kehtivus järeldub sellest, et (2) põhjal

$$f(x,y)\equiv g(x,y) \vee (x=y) \qquad (4)$$

ja seega

$$f(x,y) \vee f(y,x) \equiv g(x,y) \vee g(y,x) \vee (x=y),$$

selle predikaadi tõesus aga järeldub kohe aksioomist 2". Aksioom 2' on 2" duaalne kuju. Aksioom 3', mis antud juhul nõuab

$$(g(x,y) \vee (x=y)) \& (g(y,z) \vee (y=z)) \rightarrow g(x,z) \vee (x=z)$$

tõesust, kehtib tänu aksioomile 3". Väide on tõestatud.

Võrdused (3) ja (4) tähendavad eespool kasutusele võetud sümboolikas õieti järgmist:

$x < y$ tähendab seda, et $x \leqslant y$ ja $x \neq y$,

$x \leqslant y$ tähendab seda, et kas $x < y$ või $x=y$.

Kui järjestatud hulga $\mathfrak{X}$ element a on selline, et iga $x \in \mathfrak{X}$ puhul on $a \leqslant x$, siis elementi a nimetatakse hulga $\mathfrak{X}$ <u>esimeseks</u> elemendiks. Kui, vastupidi, iga $x \in \mathfrak{X}$ puhul on $x \leqslant b$, siis elementi b nimetatakse hulga $\mathfrak{X}$ <u>viimaseks</u> elemendiks.

Kerge on veenduda, et järjestatud hulga iga alamhulk on samuti järjestatud hulk, mistõttu võib kõnelda ka alamhulga esimesest või viimasest elemendist.

Hulga jaotust mittelõikuvateks mittetühjadeks alamhulkadeks, mille ühendiks on terve hulk, nimetatakse selle hulga <u>klassijaotuseks</u>. Alamhulki nimetatakse sel korral klassideks. (Eespool me tutvusime juba ekvivalentsusklassidega.)

Kõneldakse, et järjestatud hulga jaotus kaheks klassiks - nimetame neid alamklassiks ja ülemklassiks - on <u>lõige</u> selles hulgas, kui alamklassi iga element eelneb ülemklassi igale elemendile.

Formuleerime nüüd kaks lauset.

(A) Alamklassis leidub viimane element.

(Ü) Ülemklassis leidub esimene element.

Järjestatud hulgas on võimalikud järgmist tüüpi lõiked: tõene on kas

1) (A) & (Ü) või 2) $\overline{(A)}$ & (Ü) või 3) (A) & $\overline{(Ü)}$ või

4) $\overline{(A)}$ & $\overline{(Ü)}$.

Esimesel juhul nimetatakse lõiget <u>rebendiks</u>, viimasel juhul - <u>mõraks</u>. Teisel ja kolmandal juhul kõneldakse <u>Dedekindi lõikest</u> saksa matemaatiku R. Dedekindi nime järgi, kes 1872.a, esimesena selgitas sedalaadi lõigete tähtsust pidevuse küsimuste käsitlemisel.

<u>Järjestatud hulka nimetatakse pidevaks, kui iga tema lõige kujutab endast Dedekindi lõiget.</u>

Näitame, et pidevas järjestatud hulgas $\mathfrak{X}$ kehtib nn. Cantori printsiip:

Kui $\mathfrak{X}$ elementidest on moodustatud kaks lõpmatut jada

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ nii et $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$ ja $\ldots \leqslant y_m \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1$ ning n ja m iga väärtuse korral $x_n < y_m$, siis leidub element z, nii et n ja m iga väärtuse korral kas $x_n < z \leqslant y_m$ või $x_n \leqslant z < y_m$.

Tõepoolest, määrame hulga $\mathfrak{X}$ klassijaotuse, lugedes alamklassi iga niisuguse elemendi $x \in \mathfrak{X}$, mille korral n mingi väärtuse puhul kehtib $x \leqslant x_n$ ja ülemklassi hulga $\mathfrak{X}$ kõik ülejäänud elemendid. Klassijaotuse nõuded on siin ilmselt rahuldatud: esimesse klassi kuulub iga x_n, teise - iga y_m (sest kehtib $x_n < y_m$). Samuti on kerge veenduda, et tegemist on lõikega, sest alamklassi iga elemendi x puhul $x \leqslant x_n$, ülemklassi iga elemendi y puhul aga $y \leqslant x_n$ ei kehti ning 1° põhjal siis $x_n < y$ - järelikult 3° põhjal $x < y$.

Eelduse kohaselt $\mathfrak{X}$ on pidev, s.t. vaadeldav lõige kujutab endast Dedekindi lõiget. Tähendab, leidub $\mathfrak{X}$ element z, mis on kas alamklassi viimane element või ülemklassi esimene element. Esimesel juhul $x_n \leqslant z$, sest z on alamklassis viimane, ning $z < y_m$, sest z on alam-, y_m aga ülemklassis. Teisel juhul $x_n < z \leqslant y_m$ (põhjendused on nüüd vastupidised). Tähendab, kas $x_n \leqslant z < y_m$ või $x_n < z \leqslant y_m$, seda aga oligi tarvis näidata.

§ 7. Rühm ja järjestatud poolrühm.

Näiteks 3 (§ 1) me tõime grupoidi puhul sisse erilise predikaadi lähtudes grupoidis defineeritud algebralisest tehtest $\psi\varphi = \chi$.

Asume nüüd vastupidisele seisukohale rakendades paragrahvis 5 arendatud üldist skeemi. Olgu antud hulk $\mathfrak{G}$ elementidega $\varphi, \psi, \ldots$ ja predikaat $f(\varphi, \psi, \chi)$, mis hulga $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ teataval alamhulgal on tõene, teataval aga väär. Millal see predikaat (koos "ühtimispredikaadiga") muudab hulga $\mathfrak{G}$ grupoidiks? Ilmselt siis, kui järgmised predikaadid on samaselt tõesed:

$$(\exists \chi)\, f(\varphi, \psi, \chi) \tag{1}$$

$$f(\varphi, \psi, \chi') \,\&\, f(\varphi, \psi, \chi) \rightarrow (\chi = \chi'). \tag{2}$$

Tingimusi (1) ja (2) tuleb seega käsitleda <u>grupoidi aksioomidena.</u> Elementi χ, mis antud φ, ψ korral muudab tõeseks predikaadi $f(\varphi, \psi, \chi)$ nimetatakse elemendi ψ parempoolseks korrutiseks (või summaks) elemendiga φ ja tähistatakse $\psi\varphi = \chi$ (või $\psi + \varphi = \chi$).

Formuleerime täiendava aksioomi, mis muudab grupoidi <u>poolrühmaks</u>:

$$f(\psi, \chi, \vartheta) \,\&\, f(\varphi, \vartheta, \omega) \,\&\, f(\varphi, \psi, \theta) \,\&\, f(\theta, \chi, \omega') \rightarrow$$
$$\rightarrow (\omega = \omega') \tag{3}$$

ning täiendavad aksioomid, mis muudavad poolrühma <u>rühmaks</u>:

$$(\exists \varepsilon)\, f(\varepsilon, \varphi, \varphi), \tag{4}$$

$$f(\varepsilon, \varphi, \varphi) \,\&\, f(\varepsilon', \psi, \psi) \rightarrow (\varepsilon = \varepsilon'), \tag{5}$$

$$(\exists \psi, \varepsilon)(f(\psi, \varphi, \varepsilon) \,\&\, f(\varepsilon, \varphi, \varphi)). \tag{6}$$

Anname aksioomidele (3)-(6) algebras kasutatava kuju. Oletame, et implikatsiooni (3) eesliikme täislause on tõene. Siis kokkuleppe kohaselt kirjutame (piirdume multiplikatiivse kirjutusviisiga)

$$\vartheta = \chi\psi, \quad \omega = \vartheta\varphi = (\chi\psi)\varphi,$$
$$\theta = \psi\varphi, \quad \omega' = \chi\theta = \chi(\psi\varphi).$$

Et (3) kui aksioom on samaselt tõene, siis eesliikme tõesusest järeldub tagaliikme tõesus, ning seega

$$(\chi\psi)\varphi = \chi(\psi\varphi).$$

Tähendab, (3) väljendab tavalist assotsiatiivsuse nõuet.

Aksioom (4) nõuab, et iga elemendi φ korral eksisteeriks niisugune element ε (mida aditiivse kirjutusviisi puhul tähistatakse 0), nii et

$$\varphi\varepsilon = \varphi \quad (\text{või } \varphi + 0 = \varphi).$$

Sellist elementi ε (või 0) nimetatakse φ parempoolseks ühikuks (või parempoolseks nulliks). Aksioom (5) nõuab, et iga kahe elemendi φ ja ψ ühikud (või nullid) ühtiksid omavahel, s.t. et hulga kõikidel elementidel oleks üksainus ühine parempoolne ühik ε (või null 0). Aksioom (6) nõuab, et iga elemendi φ korral eksisteeriks element ψ, nii et

$$\varphi\psi = \varepsilon \text{ (või } \varphi + \psi = 0\text{)},$$

kus ε (või 0) on parempoolne ühik (või null). Sellist elementi ψ nimetatakse φ parempoolseks pöördelemendiks (või vastandelemendiks) ja tähistatakse $\psi = \varphi^{-1}$ (või $\psi = -\varphi$).

Edasi võib rühmateooriat arendada juba tavalisel viisil.[x] Muu hulgas võib näidata, et parempoolsed ühikelement ε ja pöördelement φ^{-1} on samaaegselt ka vasakpoolseks ühik- või pöördelemendiks, s.t. kui $\varphi\varepsilon = \varphi$, siis ka $\varepsilon\varphi = \varphi$, kui

$$\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon, \text{ siis ka } \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon.$$

Toome järgnevalt sisse järjestatud poolrühma mõiste.

Hulka $\mathfrak{A}$ elementidega a,b,... nimetatakse <u>järjestatud poolrühmaks</u>, kui

1) temas on määratud binaarne assotsiatiivne algebraline operatsioon (mille edaspidiste rakenduste huvides tähistame $a + b$),

2) ta on märgi $<$ abil järjestatud hulk ning

3) järjestus temas on operatsiooni suhtes kahepoolselt stabiilne:

kui $a < b$, siis $c + a < c + b$ ja $a + c < b + c$ iga $c \in \mathfrak{A}$ korral.

Märgime, et operatsiooni kommutatiivsust siin ei eeldata. Kui operatsioon poolrühmas on kommutatiivne, siis kahepoolse stabiilsuse asemel on küllalt nõuda ühepoolset (näiteks vasakpoolset) stabiilsust.

Nõudest 3) võime teha ühe olulise järelduse: kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a + c < b + d$ ("võrratusi võib liikmeti liita"). Tõepoolest, kui $a < b$, siis $a + c < b + c$; kui $c < d$, siis $b + c < b + d$. Siit transitiivsuse põhjal $a + c < b + d$.

Meie tähelepanu pälvivad järgmises paragrahvis teatavad erilised järjestatud poolrühmad, millega tuleb edaspidi tegemist teha seoses lõikude ja nurkade liitmisega geomeetrias. Otstarbekas on neid poolrühmi uurida esialgu abstraktselt, formuleerides nende ühiseid iseärasusi väljendavad nõuded täiendavate aksioomidena järjestatud poolrühma kohta.

---

[x] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra II, Tallinn-Tartu 1950, VI ptk.

§ 8. Ühest pidevate poolrühmade klassist.

Käesolevas paragrahvis vaatleme niisuguseid järjestatud poolrühmi $\mathfrak{A}$, mis on järjestuse suhtes pidevad ning milles operatsioon + ja järjestus < on lisaks eespool seatud nõudeile 1)-3) seotud veel järgmise kahe aksioomiga.

A. <u>Kui $a < b$, siis leidub $\mathfrak{A}$ element c, nii et $a + c = b$.</u>

B. <u>Kui $a + c = b$, siis $c < b$.</u>

Näitame, et aksioomis A. on garanteeritud veel elemendi c ainsus. Tõepoolest, kui oleks $a + c = a + c'$, $c \neq c'$ siis 2" põhjal kas $c < c'$ või $c' < c$. Esimesel juhul saame stabiilsuse tõttu $a + c < a + c'$, teisel juhul $a + c' < a + c$. Mõlemal juhul oleks $a + c = a + c'$ 1" põhjal võimatu.

Tähistame $a + a + \ldots + a = na$.

Aksioomist B. järeldub, et kuna $a + a = 2a$, siis $a < 2a$, kuna $a + 2a = 3a$, siis $2a < 3a$ jne. Üldiselt $a < 2a < 3a < \ldots < na < \ldots$

Näitame, et <u>pidevates</u> järjestatud poolrühmades $\mathfrak{A}$, milles on rahuldatud aksioomid A. ja B., kehtib nn. <u>Archimedese printsiip</u>:

Iga $a, b \in \mathfrak{A}$ korral leidub naturaalarv n, nii et $b < na$.

Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et leiduvad $a, b \in \mathfrak{A}$, nii et ühegi n korral ei kehti $b < na$. Teeme hulgas $\mathfrak{A}$ klassijaotuse, lugedes alamklassi iga niisuguse elemendi $c \in \mathfrak{A}$, mille korral leidub n, nii et $c < na$, ja ülemklassi hulga $\mathfrak{A}$ kõik ülejäänud elemendid. Klassijaotuse nõuded on siin rahuldatud, sest kumbki klass pole tühi - alamklassis on a, ülemklassis b.

Edasi on kerge veenduda, et tegemist on lõikega: alamklassi c puhul $c < na$, ülemklassi d puhul aga $d < na$ ei saa kehtida ja seega $na \leq d$ - järelikult, $c < d$. Alamklassis viimast elementi c^* ei leidu, sest $c^* < na < (n+1)a$ ja c^* ei saa olla viimane. Pidevuse tõttu leidub ülemklassis esimene element d^*. Kuna a on alamklassis, siis $a < d^*$. Aksioomi A põhjal leidub c, nii et $a + c = d^*$. Aksioomi B põhjal $c < d^*$. Kuna d^* on ülemklassi esimene element, siis c kuulub alamklassi, mistõttu leidub n, nii et $c < na$. Aksioomi 3) põhjal nüüd $a+c < (n+1)a$ ehk $d^* < (n+1)a$. Element d^* peaks kuuluma alamklassi! Oleme jõudnud vastuoluni, mis näitab, et tehtud oletus on väär, ja kinnitab seega Archimedese printsiibi kehtivust antud eeldustel.

Lisame nüüd aksioomidele A ja B veel ühe nõude:

C. Hulgas $\mathfrak{A}$ leidugu niisugune element e, mis on lõpmatult poolitatav, s.t. mille korral eksisteerivad elemendid $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ nii et $2e_1 = e$, $2e_2 = e_1$, ..., $2e_k = e_{k-1}, \ldots$

Näitame kohe, et kui nõudeid A ja B rahuldavas pidevas järjestatud poolrühmas on täidetud ka nõue C, siis jadas $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ võib alati minna nii kaugele, et teatav element e_n on väiksem kui mis tahes etteantud element a.

Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et iga naturaalarvu n korral on $a < e_n$, siis vasakpoolse stabiilsuse tõttu $2a < a+e_n$, parempoolse stabiilsuse tõttu $a+e_n < 2e_n = e_{n-1}$, ja transitiivsuse tõttu $2a < e_{n-1}$. Samal viisil jätkates leiaksime, et $2^2a < e_{n-2}, \ldots, 2^n a < e_{n-n} = e$, ja seda iga naturaalarvu n korral. Tähendab, a ükski kordne ei saaks olla suurem kui e, see on aga vastuolus Archimedese printsiibiga!

Tõestame järgnevalt ühe olulise teoreemi, mille alusel me toome edaspidi sisse lõigu pikkuse ja nurga suuruse mõiste.

Teoreem: Pidev järjestatud poolrühm $\mathfrak{A}$, milles on rahuldatud aksioomid A -C, on isomorfne positiivsete reaalarvude järjestatud poolrühmaga R^+ liitmise suhtes.*

Isomorfne selles mõttes, et leidub $\mathfrak{A}$ niisugune üksühene kujutus poolrühmale R^+

$$a \leftrightarrow \alpha \ , \ a \in \mathfrak{A} \ , \ \alpha \in R^+,$$

mille puhul säilib nii algebraline operatsioon kui järjestus, s.t., kui $a \leftrightarrow \alpha$, $b \leftrightarrow \beta$, $a \leq b$, siis $a+b \leftrightarrow \alpha+\beta$, $\alpha \leq \beta$.

Tõestus: Määrame kõigepealt ühese kujutuse $\mathfrak{A} \to R^+$.

---

* Tutvumise selle teoreemi tõestusega võib lugeja edasi lükata lõigu pikkuse ja nurga suuruse mõistete juurde jõudmiseni IV peatükis.

Olgu antud $\mathfrak{A}$ element a. Temale vastavat positiivset reaalarvu α otsime kahendmurruna

$$\alpha = n + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \dots, \ \varepsilon_k = 0,1.$$

Meie ülesandeks on anda eeskiri, mis võimaldab ühesel viisil määrata α naturaalosa n ja üksikuid kahendkohti ε_k (k= 1,2...)

Archimedese printsiibi järgi leidub niisugune naturaalarv n+1, nii et $a < (n+1)e$. Olgu n+1 esimene selline, nii et

$$ne \leq a < (n+1)e.$$

Sel puhul naturaalarvu n võtamegi α naturaalosaks.

Võib osutuda, et ne=a. Sel korral võtame $\alpha = n$.

Kui $ne < a$, siis A põhjal leidub a_1, nii et

$$ne + a_1 = a.$$

Seejuures $a_1 < e$, sest kui oleks $e \leq a_1$, siis stabiilsuse põhjal oleks $(n + 1)e \leq ne + a_1 = a$, samal ajal kui $a < (n + 1)e$.

Aksioomi C põhjal leidub e_1, nii et $2e_1 = e$. On võimalikud järgmised kolm juhtu:

1a) $a_1 = e_1$, 1b) $a_1 < e_1$, 1c) $e_1 < a_1 < e$.

Juhul 1a) võtame $\alpha = n + \frac{1}{2}$. Juhtudel 1b) ja 1c) määrame ε_1 väärtuse ja $\mathfrak{A}$ teatava elemendi a_2 järgnevalt: kui $a_1 < e_1$, siis võtame $\varepsilon_1 = 0$ ja tähistame $a_2 = a_1$; kui $e_1 < a_1 < e$, siis võtame $\varepsilon_1 = 1$ ja määrame A põhjal a_2 selliselt, et

$$e_1 + a_2 = a_1.$$

Mõlemal juhul on $a_2 < e_1$. Esimesel juhul järeldub see vahetult sellest, et $a_1 < e_1$, $a_2 = a_1$. Teisel juhul on aga võimalik näidata, et $e_1 \leq a_2$ on lubamatu, sest kui oleks $e_1 \leq a_2$, siis stabiilsuse põhjal saaksime $2e_1 \leq e_1 + a_2$ ehk $e \leq a_1$, samal ajal kui $a_1 < e$.

Aksioomi C põhjal leidub e_2, nii et $2e_2 = e_1$. On võimalikud järgmised kolm juhtu:

2a) $a_2 = e_2$, 2b) $a_2 < e_2$, 2c) $e_2 < a_2 < e_1$.

Juhul 2a) võtame $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \dots = \varepsilon_k = \dots = 0$ ja lõpetame sellega protsessi. Juhtudel 2b) ja 2c) määrame ε_2 väärtuse ja α teatava elemendi a_3 järgnevalt: kui $a_2 < e_2$, siis võtame $\varepsilon_2 = 0$ ja tähistame $a_3 = a_2$. Kui $e_2 < a_2 < e_1$, siis võtame $\varepsilon_2 = 1$ ja määrame A põhjal a_3, nii et $e_2 + a_3 = a_2$. Mõlemal juhul on $a_3 < e_2$ (põhjendused on samasugused nagu eelmise sammu juures.)

Leidub e_3, nii et $2e_3 = e_2$.

3a) Kui $a_3 = e_3$, siis võtame $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \ldots = \varepsilon_k \ldots = 0$.

3b) Kui $a_3 < e_2$, siis võtame $\varepsilon_3 = 0$, 3c) kui $e_3 < a_3 < e_2$, siis võtame $\varepsilon_3 = 1$. Viimasel kahel juhul tuleb protsessi jätkata - leida analoogilisel viisil $a_4 < e_3$, võrrelda seda suurusega e_4 jne.

Niiviisi võime samm-sammult leida α arendise kõik kahendkohad ja sel moel määrata ka reaalarvu α enda.

On selge, et selliselt korraldatud vastavus $a \to \alpha = n + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \ldots$ on ühene. Jääb näidata, et ta on üksühene ja kujutab endast järjestatud poolrühmade $\mathcal{O}\!\!\iota$ ja R^+ vahelist isomorfismi.

Veendume kõigepealt selles, et konstrueeritud vastavuse puhul säilib järjestus. Selle tulemuse võib saada koguni rangel kujul: kui $a < b$ ja $a \to \alpha$, $b \to \beta$, siis $\alpha < \beta$.

Esmalt teeme kindlaks, et $\mathcal{O}\!\!\iota$ ükskõik missugusele elemendile a vastavusse seatud kahendmurrus $n + \frac{\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \ldots$ ei või esineda olukord, mil teatud järgust alates kõikides järgnevates kahendkohtades on arv 1. Tõepoolest, kui me oletaksime, et $\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} = \ldots = 1$, siis oleks

$$e_k < a_k < e_{k-1}, \quad e_{k+1} < a_{k+1} < e_k, \ldots$$

(s.t. k-ndast sammust alates oleks alati tegemist juhuga c)), kusjuures

$$e_k + a_{k+1} = a_k, \quad e_{k+1} + a_{k+2} = a_{k+1}, \ldots$$

Siit jõuaksime kergesti vastuolunі, sest A põhjal leiduks parajasti üks b_k, nii et $a_{k+1} + b_k = e_k$, edasi parajasti üks b_{k+1}, nii et $a_{k+2} + b_{k+1} = e_{k+1}$ jne. Teise võrduse pooltele e_{k+1} liitmisel vasakult saaksime $a_{k+1} + b_{k+1} = e_k$ ja siit A. põhjal $b_{k+1} = b_k$. Niiviisi edasi jätkates leiaksime, et $b_k = b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = b$ ja seetõttu $a_{k+\ell} + b = e_{k+\ell-1}$ $(\ell = 1,2,\ldots)$. Siit B põhjal $b < e_n$ $(n = k+\ell-1, k+\ell, k+\ell+1, \ldots)$. Saaksime vastuolu nõudele C vahetult järgneva märkuse sisuga.

Kahte niisugust kahendmurdu, mille teatavast kohast alates ei või esineda alati arv 1, on lihtne võrrelda: kui kahes sedalaadi kahendmurrus kohtade väärtused teatud järguni ühtivad, esimeses murrus on järgmisel kohal 0, teises 1, siis võime kindlad olla, et esimene kahendmurd on rangelt väiksem teisest kahendmurrust.

Nüüd võimegi tõestada soovitud tulemuse: kui $a < b$, $a \to \alpha$, $b \to \beta$, siis $\alpha < \beta$.

Olgu

$$\alpha = n + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \ldots,$$

$$\beta = m + \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \ldots + \frac{\eta_k}{2^k} + \ldots,$$

s.t.

$$ne \leq a < (n+1)e,$$

$$me \leq b < (m+1)e.$$

Näitame kõigepealt, et kui $a < b$, siis $n \leq m$. Tõepoolest, kui oletaksime vastuväiteliselt, et $a < b$ puhul $m < n$, siis saaksime $me < ne$ ja seega $(m+1)e \leq ne$, ning transitiivsuse tõttu jõuaksime $b < (m+1)e \leq ne \leq a$ põhjal vastuoluni: $b < a$!

Kui $n < m$, siis väide $\alpha < \beta$ kehtib; kui $n = m$, tuleb minna sammu võrra edasi. Viimasel juhul nimelt võib eespool kirjeldatud menetluse põhjal leida a_1 ja b_1, nii et $ne + a_1 = a$, $ne + b_1 = b$, $a_1 < e, b_1 < e$. Seejuures $a_1 < b_1$, sest kui oleks $b_1 \leq a_1$, siis stabiilsuse põhjal saaksime $ne + b_1 \leq ne + a_1$ ehk $b \leq a$, see on aga vastuolus eeldusega $a < b$! Näitame, et sel puhul $\varepsilon_1 = 1$, $\eta_1 = 0$ on võimatu. Tõepoolest, kui oletada, et $\varepsilon_1 = 1$, $\eta_1 = 0$, siis peaks kehtima $b_1 < e_1 \leq a_1$, mis on vastuolus äsja leitud tulemusega $a_1 < b_1$.

6.

Tähendab ε_1 ja η_1 kas ühtivad või $\varepsilon_1 = 0$, $\eta_1 = 1$. Viimasel juhul $\alpha < \beta$ kehtib, esimesel juhul tuleb minna sammu võrra edasi - määrata a_2 ja b_2, nii et kas $a_2 = a_1 < e_1$, $b_2 = b_1 < e_1$ ($\varepsilon_1 = \eta_1 = 0$ puhul), või $e_1 + a_2 = a_1$, $e_1 + b_2 = b_1$, $a_2 < e_1$, $b_2 < e_1$ ($\varepsilon_1 = \eta_1 = 1$ puhul). Mõlemal juhul $a_2 < b_2$. Esimesel juhul on see ilmne, sest $a_1 < b_1$. Teisel juhul on aga $b_2 \leq a_2$ võimatu, sest siis oleks $e_1 + b_2 \leq e_1 + a_2$ ehk $b_1 \leq a_1$!

Nüüd on kerge veenduda, et võrdused $\varepsilon_2 = 1$, $\eta_2 = 0$ ei või aset leida, sest siis oleks $b_2 < e_2 \leq a_2$, mis on vastuolus sellega, et $a_2 < b_2$. Järelikult ε_2 ja η_a kas ühtivad või $\varepsilon_2 = 0$, $\eta_2 = 1$. Viimasel juhul $\alpha < \beta$ kehtib, esimesel juhul tuleb minna sammu võrra edasi.

Niiviisi samm-sammult jätkates kas 1) jõuame varem või hiljem olukorrani, kus mingi k-nda järgu puhul $\varepsilon_k = 0$, $\eta_k = 1$ ja seega $\alpha < \beta$ või 2) α ja β kõik kahendkohad ühtivad ning $\alpha = \beta$.

Jääb näidata, et viimane juht ei või aset leida. Selleks toome A põhjal sisse $\mathfrak{A}$ elemendid c, c_1, c_2, ..., c_k, ..., nii et $a + c = b$, $a_1 + c_1 = b_1$, $a_2 + c_2 = b_2$, ..., $a_k + c_k = b_k$, $a_{k+1} + c_{k+1} = b_{k+1}$, ... Sellesama A abil on lihtne veenduda, et $c = c_1 = c_2 = \ldots = c_k = \ldots$, sest kui $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = b_k$ (s.t. $\varepsilon_k = \eta_k = 0$), siis $a_k < b_k$, $a_k + c_k = b_k$, $a_k + c_{k+1} = b_k$ ning A põhjal $c_{k+1} = c_k$ ($k = 0,1,\ldots$; $c_0 = c$), kui aga $e_k + a_{k+1} = a_k$, $e_k + b_{k+1} = b_k$ (s.t. $\varepsilon_k = \eta_k = 1$), siis võrdusest $a_{k+1} + c_{k+1} = b_{k+1}$ saame mõlemale poole e_k liitmisel vasakult $a_k + c_{k+1} = b_k$ ja seega samuti $c_{k+1} = c_k$ ($k = 0,1,\ldots$; $c_0 = c$).

Aksioomi B põhjal $c_1 < b_1$, $c_2 < b_2$, ..., $c_k < b_k$, ..., ning kuna $b_k < e_{k-1}$, siis kokkuvõttes

$$c < e_{k-1} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

See tulemus on vastuolus nõudele C järgneva märkuse sisuga. Tähendab, juht 2) on võimatu. Võrratus $\alpha < \beta$ ongi tõestatud.

Nüüd on lihtne näidata, et vastavus $a \to \alpha$ on üks-ühene. Tõepoolest, kui a ja b on $\mathfrak{A}$ erinevad elemendid, siis kas $a < b$ või $b < a$ ning kui $b \to \beta$, siis vastavalt kas $\alpha < \beta$ või $\beta < \alpha$ - tähendab $\alpha \neq \beta$.

Tekib küsimus, kas iga positiivse reaalarvu α korral leidub $\mathfrak{A}$ niisugune element a, millele vastab see arv α? Näitame, et see tõesti nii on. Selleks esitame arvu α kahendmurruna

$$\alpha = n + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \ldots \quad (\varepsilon_k = 0,1)$$

ning võtame vaatlusse $\mathfrak{A}$ järgmised elemendid

$$x_1 = ne \qquad y_1 = (n+1)e$$

$$x_2 = ne + \varepsilon_1 e_1 \qquad y_2 = ne + (\varepsilon_1 + 1)e_1$$

$$x_3 = ne + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 \qquad y_3 = ne + \varepsilon_1 e_1 + (\varepsilon_2 + 1)e_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_k = ne + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_k e_k \qquad y_\ell = ne + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_{\ell-1} e_{\ell-1} + (\varepsilon_\ell + 1)e_\ell$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Siin $x_k \leq x_{k+1}$ $(k = 1,2,\ldots)$, sest $x_k = Ne_{k+1}$, kus $N = n.2^{k+1} + \varepsilon_1 . 2^k + \ldots + \varepsilon_k .2$, kuid $x_{k+1} = (N + \varepsilon_{k+1})e_{k+1}$, ning aksioomi B. järelduse põhjal tõesti $Ne_{k+1} \leq (N + \varepsilon_{k+1}) e_{k+1}$. Analoogiliselt võib veenduda, et $y_{\ell+1} \leq y_\ell$ ning et

$$x_k < y_\ell$$

k ja ℓ iga väärtuse korral.

Jadade $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_\ell, \ldots$ puhul on seega täidetud Cantori printsiibi eeldused, mistõttu eksisteerib $\mathfrak{A}$ niisugune element a, nii et k ja ℓ iga väärtuse korral kas $x_k \leq a < y_\ell$ või $x_k < a \leq y_\ell$.

Viimase võimaluse võime üldsust kitsendamata välja sulgeda. Tõepoolest, kui oletada, et mingi konkreetse ℓ väärtuse korral $a = y_\ell$, siis tänu sellele, et $a \leq y_{\ell+1} \leq y_\ell$, kehtib ka $a = y_{\ell+1}$ jne. Tähendab, sel korral $y_\ell = y_{\ell+1} = \ldots$ $\ldots = y_{\ell+p} = \ldots$ See aga tähendab seda, et $\varepsilon_\ell = \varepsilon_{\ell+1} = \ldots =$ $= \varepsilon_{\ell+p} = \ldots = 1$, ehk teisiti öeldes, α arendises kahendmurruks on kõik kahendkohad teatavast järgust alates võrdsed arvuga 1. Niisuguse olukorra võime tõesti välja sulgeda, asendades α selle arendise vastava lõpliku kahendmurruga.

Järelikult eksisteerib $\mathfrak{A}$ niisugune element a, nii et

$$x_k \leq a < y_\ell .$$

Edasi on nüüd kerge veenduda, et kui me hakkaksime konstrueerima elemendile a vastavat reaalarvu, saaksime selleks parajasti arvu α: täisosaks saaksime $ne \leq a < (n+1)e$ põhjal n, esimese kahendkoha väärtuseks $ne + \varepsilon_1 e \leq a < ne + (\varepsilon_1 + 1)e_1$ põhjal ε_1 jne.

Senise tõestuskäigu kokkuvõttena võime öelda, et konstrueeritud vastavus $a \to \alpha$ kujutab endast üksühest vastavust $\mathfrak{A} \leftrightarrow R^+$, mis säilitab järjestuse.

Teoreemi lõplikuks tõestamiseks jääb veel näidata, et vastavuse puhul säilib algebraline operatsioon: kui $a \to \alpha$, $b \to \beta$, siis $a + b \to \alpha + \beta$.

Selleks valime $\mathfrak{A}$ elementidele jadast $e, e_1, \ldots, e_k, \ldots$ vabalt elemendi e_k. Archimedese printsiibi põhjal leiduvad niisugused naturaalarvud N ja M, nii et

$$N e_k \leq a < (N + 1)e_k$$

$$M e_k \leq b < (M + 1)e_k .$$

Siit

$$(N + M)e_k \leq a + b < (N + M + 2)e_k .$$

Tähistame $\mathfrak{A}$ elemendile a + b vastava reaalarvu γ. Elemendile Ne_k vastab reaalarv $N . \frac{1}{2^k}$. Selles on kerge veenduda, kui esitada N kahendsüsteemis järgmiselt: $N = n2^k + \varepsilon_1 2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_{k-1} \cdot 2 + \varepsilon_k$. Element Ne_k on siis esitatav järgmiselt: $Ne_k = ne + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_{k-1}e_{k-1} + \varepsilon_k e_k$, millest nähtubki, et $Ne_k \to N . \frac{1}{2^k}$.

Et vastavus, nagu me eespool näitasime, säilitab järjestuse, siis

$$N \cdot \frac{1}{2^k} \leq \alpha < (N + 1) \cdot \frac{1}{2^k},$$
$$M \cdot \frac{1}{2^k} \leq \beta < (M + 1) \cdot \frac{1}{2^k},$$
$$(N + M) \cdot \frac{1}{2^k} \leq \gamma < (N + M + 2) \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Esimese kahe rea võrratuste vastavate poolte liitmisel saame
$$(N + M) \cdot \frac{1}{2^k} \leq \alpha + \beta < (N + M + 2) \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Siit nähtub, et reaalarvud γ ja $\alpha + \beta$ asuvad samas poollõigus pikkusega $\frac{1}{2^{k-1}}$, ning kuna k võib olla ükskõik missugune naturaalarv, siis
$$\gamma = \alpha + \beta.$$
Teoreem on tõestatud.

Teoreemist võib teha mitmeid huvitavaid järeldusi. Teoreemi eeldustes puudub näiteks poolrühma $\mathfrak{A}$ operatsiooni kommutatiivsuse nõue - see järeldub nüüd $\mathfrak{A}$ ja R^+ isomorfsusest! Samuti võime öelda, et teoreemi eeldust rahuldava poolrühma $\mathfrak{A}$ iga element on lõpmatult poolitatav (sest R^+ iga element on seda). Ühesõnaga, positiivsete reaalarvude valla kõik järjestusega ja liitmisega seotud omadused kanduvad üle poolrühma $\mathfrak{A}$.

Poolrühma $\mathfrak{A}$ elemendile a vastavat positiivset reaalarvu α nimetatakse selle elemendi <u>mõõduks</u>. Elemendi e mõõduks on arv 1. Seetõttu seda elementi e nimetatakse <u>mõõtühikuks</u> poolrühmas $\mathfrak{A}$.

Näitame, et $\mathfrak{A}$ elemendi a mõõtu mõõtühiku e korral võib defineerida ka kui positiivset reaalarvu α, mis vastab elemendile a ükskõik missuguses isomorfismis $\mathfrak{A} \leftrightarrow R^+$, mille korral elemendile e vastab arv 1.

Tõestada tuleb õieti see, et iga isomorfism $\mathfrak{A} \leftrightarrow R^+$, mille korral $e \leftrightarrow 1$, ühtib varem konstrueeritud konkreetse isomorfismiga.

Oletame, et lisaks isomorfismile $\mathfrak{A} \leftrightarrow R^+$, mille korral $a \leftrightarrow \alpha$, leidub veel teine taoline isomorfism, mille puhul

$a \leftrightarrow \alpha'$, kusjuures mõlemal juhul $e \leftrightarrow 1$. Sel korral on määratud R^+ isomorfism iseendasse (ehk automorfism) $\alpha \leftrightarrow \alpha'$, mille puhul $1 \leftrightarrow 1$. Siin võime kasutada ka funktsiooniteoreetilist keelt: järjestatud poolrühmal R^+ on määratud ühene funktsioon $\alpha' = f(\alpha)$, mis rahuldab tingimusi

1) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$,

2) kui $\alpha \leq \beta$, siis $f(\alpha) \leq f(\beta)$,

3) $f(1) = 1$.

Tingimus 1) kujutab endast tuntud Cauchy funktsionaalvõrrandit, tingimus 2) aga monotoonsuse nõuet. On hästi teada, et Cauchy võrrandi ainsaks lahendiks monotoonsete funktsioonide klassis on $f(\alpha) \equiv c\alpha$ ($c = \text{const}$)*. Et meil $f(1) = 1$, siis $c = 1$, ning $f(\alpha) \equiv \alpha$.

Tähendab, seatud eelduste korral $\alpha' = \alpha$. Elemendi a mõõt poolrühmas $\mathfrak{A}$ antud mõõtühiku e korral on seega määratud üheselt.

Eespool me märkisime, et isomorfismi $\mathfrak{A} \leftrightarrow R^+$ põhjal on $\mathfrak{A}$ iga element lõpmatult poolitatav ja me võime mõõtühikus võtta $\mathfrak{A}$ ükskõik missuguse elemendi e'. Sel korral saame uue isomorfismi $a \leftrightarrow \alpha'$ ja järjestatud poolrühmas R^+ uue funktsiooni $\alpha' = f(\alpha)$, mis rahuldab küll tingimusi 1) ja 2), kuid mitte enam tingimust 3). Kui e' mõõt mõõtühiku e korral tähistada k, siis $f(k) = 1$, ning kuna 1) ja 2) määravad funktsiooni $f(\alpha) = c\alpha$, siis antud juhul $\alpha' = \frac{\alpha}{k}$.

Kokkuvõttes saame tulemuseks:

Kui mõõtühik asendada elemendiga, mille mõõt on k, siis suvalise elemendi mõõt korrutub teguriga $\frac{1}{k}$. Arvu k nimetatakse <u>mastaabikordajaks</u>.

---

* Kui monotoonse funktsiooni väärtused täidavad terve vahemiku (või poolsirge, nagu praegu), siis funktsioon on pidev (Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, гл.II, §4, п.71). Pidevate funktsioonide klassis on Cauchy võrrandi lahendiks aga $f(\alpha) = c\alpha$ (Г.М.Фихтенгольц, loc,cit., п.74). Väite võib tõestada ka vahetult, kusjuures tõestus mõnevõrra lihtsustub.

II peatükk.

TASANDI STRUKTUUR.

Käesolevas peatükis formuleerime hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ määratud predikaadi - ternaarse suhte - jaoks n-mõõtmelise vahel-struktuuri ($n \geqslant 2$) aksioomid I_1 - I_6 ja näitame, et niisugust kuut aksioomi rahuldava predikaadi abil võib hulgas (punktide hulgas) sisse tuua vahemiku, sirge, poolsirge, kolmnurga, selle sisepiirkonna ja laiendite, tasandi ja pooltasandi mõisted selliselt, et kehtib rida põhilisi elementaargeomeetriast tuntud lauseid. Peatüki vältel toome sisse planimeetria dimensiooniaksioomi (nõude $n = 2$), millest me aga järgmises peatükis kohe jälle loobume.

§ 9. Vahel-struktuuri aksioomid.

Kõneldakse, et hulgal $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ määratud predikaat $f(xyz)$ rahuldab n-mõõtmelise vahel-struktuuri aksioome ($n \geqslant 2$), kui samaselt tõesed on

1° $\overline{(x = y)} \rightarrow (\exists z) f(xyz)$,

2° $f(xyz) \rightarrow f(zyx)$,

3° $f(xyz) \rightarrow \overline{f(xzy)}$,

4° $g(xyz) \;\&\; h(xyw) \rightarrow h(xzw)$,

kus $g(xyz) \equiv f(xyz) \vee f(yzx) \vee f(zxy)$,

$h(xyz) \equiv g(xyz) \vee (x = y) \vee (y = z) \vee (z = x)$,

5° $\overline{(x = y)} \rightarrow (\exists z)\, \overline{h(xyz)}$,

6° $\overline{h(xyz)}$ & f(xyu) & f(yvz) → ($\exists$ w) (f(xwz) & f(uvw)).

Edaspidi, selleks et lähendada sümboolikat ja kõneviisi geomeetrias traditsiooniliseks saanud maneerile, hakkame hulga $\mathfrak{X}$ elemente nimetama punktideks ja tähistame neid suurte ladina tähtedega A,B,C,... . Seejuures eeldame kohe algusest peale, et $\mathfrak{X}$ sisaldab vähemalt kaks erinevat punkti. Hiljem selgub siis, et punkte on tegelikult lõpmata palju. Aksioomide 1°-6° nõudeid rahuldavat predikaati hakkame nimetama vahel-predikaadiks ja tähistame $\langle ABC \rangle$.

Aksioomid 1°-6° omandavad sel puhul järgmise kuju ja sisu

I_1 $\overline{(A = B)} \rightarrow (\exists\, C) \langle ABC \rangle$

Kui punktid A ja B on erinevad, siis leidub niisugune punkt C, nii et B on A ja C vahel.

I_2 $\langle ABC \rangle \rightarrow \langle CBA \rangle$

Kui B on A ja C vahel, siis ta on ka C ja A vahel (vahel-predikaadi sümmeetria).

I_3 $\langle ABC \rangle \rightarrow \overline{\langle ACB \rangle}$

Kui B on A ja C vahel, siis C ei ole A ja B vahel.

Järgmiste aksioomide lihtsama esitamise huvides toome sisse kaks tuletatud predikaati.

Kõneleme, et kolmest punktist koosnev kolmik A,B,C on korrektne (lad. k. correctus - õgvendatud), kui

$$\langle ABC \rangle \vee \langle CAB \rangle \vee \langle BCA \rangle$$

on tõene (kui vähemalt üks kolmest punktist A,B,C on ülejäänud kahe vahel). Sel viisil defineeritud predikaati - - "korrektsus "-predikaati tähistame [ABC] (eespool h(xyz), nii et kehtib samasus

(1) $$[ABC] \equiv \langle ABC \rangle \vee \langle CAB \rangle \vee \langle BCA \rangle .$$

Kõneleme, et kolmik A,B,C on kollineaarne, kui

$$[ABC] \vee (A = B) \vee (B = C) \vee (C = A)$$

on tõene (kui kolmik on kas korrektne või vähemalt kaks punkti temas ühtivad). Seda "kollineaarsus" - predikaati tähistame $\{ABC\}$ (eespool g(xyz)):

(2) $\{ABC\} \equiv [ABC] \vee (A = B) \vee (B = C) \vee (C = A)$.

Märgime, et kui "vahel"-predikaat $\langle ABC \rangle$ on I_2 põhjal sümmeetriline ainult äärmiste punktide suhtes:

(3) $\langle ABC \rangle \equiv \langle CBA \rangle$,

siis "korrektsus"- ja "kollineaarsus"- predikaadid on (1) ja (2) põhjal sümmeetrilised kõigi kolme punkti suhtes:

(4) $[A_i A_j A_k] \equiv [A_1 A_2 A_3]$

(5) $\{A_i A_j A_k\} \equiv \{A_1 A_2 A_3\}$

(siin i,j,k on indeksite 1,2,3 vabalt võetud permutatsioon).

Formuleerime nüüd viimased kolm aksioomi:

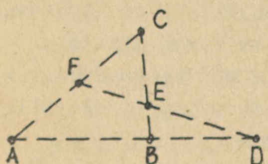
I_4 $[ABC] \& \{ABD\} \rightarrow \{ACD\}$

Kui kaks punktikolmikut, millest üks on korrektne ja teine kollineaarne, sisaldavad kaht ühist punkti, siis üks neist ühistest punktidest moodustab koos selle kahe punktiga, mille poolest antud kolmikud erinevad, kollineaarse punktikolmiku.

I_5 $\overline{(A = B)} \rightarrow (\exists C) \{\overline{ABC}\}$

Leidub mittekollineaarne punktikolmik.

I_6 $\overline{\{ABC\}} \& \langle ABD \rangle \& \langle BEC \rangle \rightarrow (\exists F) (\langle AFC \rangle \& \langle DEF \rangle)$



Joonis 1.

Viimase aksioomi küllaltki komplitseeritud sõnastuse asemel piirdume kõrvalesitatud joonisega (1). Rõhutame, et sellel on ainult illustreeriv tähendus.

Käesoleva peatüki sisuks on järelduste tegemine vahel-struktuuri aksioomidest. Esimestes paragrahvides on need järeldused veel formaalse ilmega, kuid peagi asenduvad nad sisukate geomeetrilise iseloomuga lausetega.

Märgime siin kohe, et n-mõõtmelise vahel-struktuuri aksioomidel on põhjapanev tähendus mitte üksnes tavalise elementaargeomeetria jaoks, vaid ka paljude kaasaja matemaatika osade jaoks. Nii näiteks võib kergesti sisse tuua aksioome I_1-I_6 rahuldava predikaadi igas lineaarruumis üle järjestatud korpuse (lähemalt vt. § 21). Samuti võib meetrilises ruumis loomulikul viisil sisse tuua meetrikaga seotud vahel-predikaadi, lugedes, et $\langle ABC \rangle$ on tõene, kui A, B, C on meetrilise ruumi erinevad punktid ja $\rho(AC) = \rho(AB) + \rho(BC)$. Tuletame siinjuures meelde, et meetrilisest ruumist $\mathfrak{X}$ kõneldakse sel korral, kui on antud hulga $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ ühene kujutus ρ reaalarvude hulka, nii et

1° $\rho(AA) = 0$

2° $\rho(AB) = \rho(BA) > 0$, kui $A \neq B$

3° $\rho(AB) + \rho(BC) \geqslant \rho(AC)$

Osutub, et aksioomid I_2 ja I_3 on sel korral järeldusteks aksioomidest 1°-3°, sest kui $\rho(AC) = \rho(AB) + \rho(BC)$, siis ka $\rho(CA) = \rho(CB) + \rho(BA)$, kuid $\rho(AB) = \rho(AC) + \rho(CB)$ on sel puhul erinevate B, C korral võimatu, sest me saaksime siis $\rho(BC) = 0$ ja B, C peaksid ühtima. Aksioomidest 1°-3° järeldub ka osa aksioomi I_4 nõudeid, nimelt

$$\langle ABC \rangle \;\&\; \langle ACD \rangle \rightarrow \langle BCD \rangle \;\&\; \langle ABD \rangle$$

tõesus (vrd. § 11, teoreem 4). See järeldub nimelt seostest $\rho(AD) = \rho(AC) + \rho(CD) = \rho(AB) + \rho(BC) + \rho(CD) \geqslant$ $\geqslant \rho(AB) + \rho(BD) \geqslant \rho(AD)$.

Aksioomi I_4 ülejäänud nõuded, samuti nagu I_1, I_5 ja I_6 nõuded, meetrilise ruumi aksioomidest 1°-3° ei järeldu ja kujutavad endast täiendavaid kitsendusi meetrilise ruumi mõistele.

Järgnev käsitlus on seega teatavas mõttes vaadeldav ka näiteks lineaarsete ruumide ja teatavate eritüüpi meetriliste ruumide geomeetrilise ehituse uurimisena.

§ 10. Lemmasid ja teoreeme punktikolmikute kohta.

Käesolevas paragrahvis tuletame aksioomide I_1-I_6 alusel range deduktsiooni teel rea samaselt tõeseid implikatsioone punktikolmikute kohta. Märgime, et sedalaadi implikatsioonideks on õieti ka aksioomid I_1-I_6 ise.

Alustame üheainsa kollineaarse punktikolmiku uurimisega. Kollineaarse punktikolmiku me defineerisime predikaadi (2) abil: kolmik A,B,C on kollineaarne, kui

(2) $\{ABC\} \equiv [ABC] \vee (A = B) \vee (B = C) \vee (C = A)$

on tõene, kusjuures

(1) $[ABC] \equiv \langle ABC \rangle \vee \langle CAB \rangle \vee \langle BCA \rangle$

tõesuse puhul kõneleme korrektsest punktikolmikust.

Samasuste (1) ja (2) paremate poolte tõesus on garanteeritud, kui disjunktsiooni kasvõi üks liige on tõene. Seetõttu võime kohe kirja panna rea alati tõeseid implikatsioone:

(6) $(A = B) \rightarrow \{ABC\}$,

(7) $[ABC] \rightarrow \{ABC\}$,

(8) $\langle ABC \rangle \rightarrow [ABC]$.

Siinjuures ei ole sugugi välja suletud võimalus, et tõesed on korraga disjunktsioonide (1) ja (2) mitu liiget või koguni kõik liikmed. Meie ülesandeks ongi välja selgitada, missugused on võimalikud olukorrad kollineaarse punktikolmiku puhul.

T e o r e e m 1. Kollineaarse punktikolmiku A,B,C puhul on tõene üks ja ainult üks neljast järgnevast täislausest.

1. $(A = B) \vee (B = C) \vee (B = A)$
2. $\langle ABC \rangle$
3. $\langle BCA \rangle$
4. $\langle CAB \rangle$

T õ e s t u s. Näitame esmalt, et kolme viimase täislause puhul igaühe tõesus suleb välja ülejäänud kahe tõesuse. Nii et implikatsioon

(9) $\langle ABC \rangle \rightarrow \overline{\langle BCA \rangle} \;\&\; \overline{\langle CAB \rangle}$

on alati tõene.

Lepimegi kokku edaspidi kirja panna ainult alati tõeseid implikatsioone, nimetades neid lemmadeks või teoreemideks (kui nad ei ole aksioomid). Lemmade näideteks on (6) - -(8). Tõestada lemma või teoreem tähendab näidata, et vastav implikatsioon on alati tõene. Deduktsiooni puhul kasutame seejuures süllogismi reegli lühendatud kirjutist (§ 5). Viited kasutatavatele aksioomidele ning eespool tõestatud lemmadele või teoreemidele anname rea ees kumersulgudes. Kasutame seejuures ka nende duaalseid kujusid (§ 4) ilma seda eriliselt märkimata.

Lemma (9) tõestus näeb sel puhul välja järgmine:

$(I_3, I_2)\ \langle ABC\rangle \rightarrow \langle\overline{ACB}\rangle \rightarrow \langle\overline{BCA}\rangle$

$(I_2, I_3)\ \langle ABC\rangle \rightarrow \langle CBA\rangle \rightarrow \langle\overline{CAB}\rangle.$

Edasi võime näidata, et ükskõik missuguse täislause tõesus kolmest viimasest (2.-4.) teoreemis 1 sulgeb välja esimese täislause tõesuse:

(10) $\langle ABC\rangle \rightarrow \overline{(A = B)}\ \&\ \overline{(B = C)}\ \&\ \overline{(C = A)}.$

Tõestus on vastuväiteline ja kasutada tuleb loogika samaselt tõeseid valemeid 13 ja 14 (§ 4). Kõigepealt näitame, et

(11) $\langle ABC\rangle \rightarrow \overline{(B = C)}.$

Tõepoolest, kui oletada, et mingi kolme punkti A, B, C korral on $\langle ABC\rangle$ ja $B = C$ korraga tõesed, siis on tõene ka $\langle ACB\rangle$ (sest B ja C on ju üks ja seesama punkt). Aksioomi I_3 põhjal on sel korral tõene ka $\langle\overline{ACB}\rangle$. Tähendab, tõene peaks olema $\langle ACB\rangle\ \&\ \langle\overline{ACB}\rangle$, see on aga vastuolus loogika valemiga 13. Järelikult $\langle ABC\rangle$ tõesuse korral on $B = C$ väär ja 14 põhjal siis $\overline{(B = C)}$ tõene. Lemma (11) ongi sellega tõestatud.

Nüüd on kerge tõestada, et

(12) $\langle ABC\rangle \rightarrow \overline{(A = B)}.$

Tõepoolest,

$(I_2, 11)\ \langle ABC\rangle \rightarrow \langle CBA\rangle \rightarrow \overline{(B = A)}.$

Jääb veel kindlaks teha, et

(13) $\langle ABC\rangle \rightarrow \overline{(A = C)}.$

Seda teeme samuti vastuväiteliselt. Oletame, et mingi kolme punkti A, B, C korral on $\langle ABC\rangle$ ja $A = C$ korraga tõesed. Siis (11) põhjal $\overline{(B = C)}$ on tõene ning I_5 põhjal leidub P, nii et $\{\overline{BCP}\}$ on tõene. Edasi on (8) põhjal tõene $[ABC]$. Sellest aga, et $A = C$ on tõene, järeldub (6) põhjal $\{ACP\}$ tõesus ning kokkuvõttes (4) ja (5) põhjal ka $[CAB]\ \&\ \{CAP\}$ tõesus. Aksioomi I_4 põhjal on nüüd $\{CBP\}$ ehk $\{BCP\}$ tõene. Tõene peaks seega olema $\{\overline{BCP}\}$ & $\{BCP\}$ mis on vastuolus valemiga 4b) (§4). Lemma (13) on tõestatud.

Lõppeks on nüüd kerge veenduda, et esimese täislause tõesus teoreemis 1 sulgeb välja viimase kolme täislause tõesuse. See järeldub otsekohe lemmade (11)-(13) duaalsetest kujudest, nii et üldiselt võime kõnelda implikatsiooni

(14) $\quad (A = B) \vee (B = C) \vee (C = A) \rightarrow \langle \overline{ABC} \rangle$

samaselt tõesusest.

Teoreem 1 on tõestatud.

Tõestame nüüd mõningad lemmad ja teoreemid, mis seovad kaht üldist punktikolmikut.

L e m m a 1.

(15) $\quad [ABC]$ & $\{\overline{ABD}\} \rightarrow \{\overline{ACD}\}$.

T õ e s t u s: Oletame vastuväiteliselt, et leidub neli niisugust punkti, mis muudavad koos eeldusega tõeseks ka lause $\{ACD\}$. Et

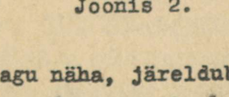
(4, I_4) $\quad [ABC]$ & $\{ACD\} \rightarrow [ACB]$ & $\{ACD\} \rightarrow \{ABD\}$,

siis on sel korral tõene ka $\{ABD\}$. Eeldust arvestades leiaksime, et tõene on $\{\overline{ABD}\}$ & $\{ABD\}$, mis on aga vastuolus loogika valemiga 4b). Tähendab kui (15) eeldus on tõene, siis peab 4a) põhjal tõene olema ka $\{\overline{ACD}\}$.

L e m m a 2.

(16) $\quad \{\overline{ABC}\}$ & $\{ABD\}$ & $\{ADC\} \rightarrow (A = D)$ (joonis 2).

T õ e s t u s: Oletame vastuväiteliselt, et leidub neli punkti A,B,C,D, mille korral eeldus on tõene, kuid väide väär, s.t. $\overline{(A = D)}$ on tõene.



Joonis 2.

(6) $\quad \{\overline{ABC}\} \rightarrow \overline{(A = B)}$;

(§4, 4a)) $\{\overline{ABC}\}$ & $\{ADC\} \rightarrow \overline{(B = D)}$;

(2) $\quad \{ABC\}$ & $\overline{(A = B)}$ & $\overline{(B = D)}$ & & $\overline{(D = A)} \rightarrow [ABD] \rightarrow [ADB]$;

(I_4) $\quad [ADB]$ & $\{ADC\} \rightarrow \{ABC\}$.

Nagu näha, järeldub valemi (16) eelduse ja lause $\overline{(A = D)}$ tõesusest ABC tõesus, seega $\{\overline{ABC}\}$ & $\{ABC\}$ tõesus, mis on aga võimatu.

L e m m a 3.

(17) $\langle ABC\rangle \;\&\; \langle BCD\rangle \to [ABD]$.

T õ e s t u s: Näitame kõigepealt, et kui eeldus on tõene, siis punktid A,B,D on erinevad.

(12, 13) $\langle ABC\rangle \to \overline{(A = B)}$, $\langle BCD\rangle \to \overline{(B = D)}$.

Oletame vastuväiteliselt, et koos eeldusega võib teha tõeseks ka D = A.

(I_2, I_3) $\langle BCD\rangle \;\&\; (D = A) \to \langle BCA\rangle \to \langle ACB\rangle \to \langle \overline{ABC}\rangle$,

tähendab, oletuse korral saaks tõeseks ka $\langle ABC\rangle \;\&\; \langle \overline{ABC}\rangle$, mis on võimatu.

Edasine tõestus on järgmine:

$(8, 7, I_4)$ $\langle ABC\rangle \;\&\; \langle BCD\rangle \to [BCA] \;\&\; \{BCD\} \to \{BAD\}$;

(2,4) $\{BAD\} \;\&\; \overline{(B = A)} \;\&\; \overline{(A = D)} \;\&\; \overline{(D = B)} \to [BAD] \to$
$\to [ABD]$.

L e m m a 4.

(18) $\{\overline{ABC}\} \;\&\; \langle ADB\rangle \;\&\; \langle AEC\rangle \to \overline{(D = E)}$ (joonis 3.)

T õ e s t u s: Oletame vastuväiteliselt, et leidub viis niisugust punkti, mille korral eeldus ja D = E on korraga tõesed.

(7,8) $\langle ADB\rangle \to \{ABD\}$;

(7,8) $\langle AEC\rangle \;\&\; (D = E) \to \langle ADC\rangle \to \{ADC\}$;

(12) $\langle ADB\rangle \to \overline{(A = D)}$;

(16) $\{\overline{ABC}\} \;\&\; \{ABD\} \;\&\; \{ADC\} \to (A = D)$.

Tähendab, meie oletuse korral oleks tõene $\overline{(A = D)} \;\&\; (A = D)$, ning oletus on võimatu.

T e o r e e m 2.

(19) $\{\overline{ABC}\} \;\&\; \langle ADB\rangle \;\&\; \langle AEC\rangle \;\&\; \langle BFC\rangle \to \{\overline{DEF}\}$ (joonis 3).

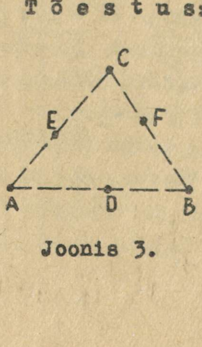
T õ e s t u s: Kõigepealt näitame, et A,B,...,F on kuus erinevat punkti.

(6) $\{\overline{ABC}\} \to \overline{(A = B)} \;\&\; \overline{(B = C)} \;\&\; \overline{(C = A)}$

(12, 11) $\langle ADB\rangle \to \overline{(D = A)} \;\&\; \overline{(D = B)}$ jne.

(18) $\{\overline{ABC}\} \;\&\; \langle ADB\rangle \;\&\; \langle AEC\rangle \to (D = E)$ jne.

Edasi tõestame, et koos teoreemi eeldustega on tõene ka $[\overline{ADE}] \;\&\; [\overline{BDF}] \;\&\; [\overline{CEF}]$. Oletame vastuväiteliselt, et



Joonis 3.

koos eeldustega on tõene näiteks $[ADE]$. Kuna

$(4,8,7,I_4)$ $\quad [ADE] \,\&\, \langle AEC\rangle \to [AED] \,\&\, \{AEC\} \to \{ADC\}$,

$(8,I_4)$ $\quad \langle ADB\rangle \,\&\, \{ADC\} \to [ADB] \,\&\, \{ADC\} \to \{ABC\}$,

siis peaks tõene olema $\{ABC\}$, koos sellega aga ka $\{\overline{ABC}\}$ & & $\{ABC\}$, mis on võimatu. Analoogiliselt viib vastuolule oletus $[BDF]$ või $[CEF]$ tõesuse kohta.

Eeltoodu põhjal võib kokkuvõttes öelda, et koos teoreemi eeldustega on tõene

$$\{\overline{ADE}\} \,\&\, \{\overline{BDF}\} \,\&\, \{\overline{CEF}\}.$$

Teoreemi edasine tõestus on samuti vastuväiteline. Oletame, et leidub kuus punkti, mille puhul on tõesed nii teoreemi (19) eeldused kui ka $\{DEF\}$. Kuna D,E ja F on erinevad punktid, siis on tõene $[DEF]$ ehk (1) põhjal kas $\langle DEF\rangle$, $\langle DFE\rangle$ või $\langle EDF\rangle$. Vaatame läbi näiteks teise juhu, ülejäänud kaks tõestatakse sümmeetria põhjal analoogiliselt.

(I_6) $\quad \{\overline{ADE}\} \,\&\, \langle ADB\rangle \,\&\, \langle DFE\rangle \;(\exists G)\; (\langle AGE\rangle \,\&\, \langle BFG\rangle)$;

$(8,7,I_4)$ $\quad \langle AGE\rangle \,\&\, \langle AEC\rangle \to [AEG] \,\&\, \{AEC\} \to \{AGC\}$;

$(8,7,I_4)$ $\quad \langle BFG\rangle \,\&\, \langle BFC\rangle \to [BFG] \,\&\, \{BFC\} \to \{BGC\}$;

$(5,16)$ $\quad \{\overline{ABC}\} \,\&\, \{AGC\} \,\&\, \{BGC\} \to \{\overline{CAB}\} \,\&\, \{CAG\} \,\&\, \{CBG\} \to (C = G)$;

(I_3) $\quad \langle AGE\rangle \,\&\, (C = G) \to \langle ACE\rangle \to \langle\overline{AEC}\rangle$.

Järelikult, kui lugeda, et koos eeldustega on tõene $\langle DFE\rangle$, siis on tõene ka $\langle\overline{AEC}\rangle$, seega ka $\langle AEC\rangle \,\&\, \langle\overline{AEC}\rangle$, mis on aga võimatu. Teoreem 2 on tõestatud.

§ 11. Järjestatud punktinelik.

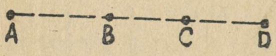
Kõneldakse, et on antud n järjestatud punkti süsteem ($n \geqslant 3$), kui iga naturaalarvuga i, $i \leqslant n$ on vastavusse seatud punkt A_i, nii et $\langle A_iA_jA_k\rangle$ on tõene niipea, kui $i < j < k$.

Kui $n = 3$, siis räägitakse järjestatud punktikolmikust. Viimase olemasoluks on vaja eeldada, et hulk $\mathfrak{X}$ sisaldab vähemalt kaks erinevat punkti. Edaspidi me alati arvestame seda eeldust. Sel korral aksioomi I_1 põhjal eksisteerib kolm punkti A,B,C, nii et $\langle ABC\rangle$. Tarvitseb vaid võtta $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$.

Teisiti on lugu juhul $n = 4$, mil kõneldakse <u>järjestatud punktinelikust.</u> Kui tähistada siin $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$, $A_4 = D$, siis tingimus, mille puhul A,B,C,D moodustavad järjestatud punktineliku, omandab kuju: lause

$$\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle$$

on tõene (joonis 4.). Siin on tegemist nelja "vahel"-predikaadi konjunktsiooniga, selle tõeseks muutmise võimalikkus ei järeldu lihtsalt ühestainsast aksioomist, vaid vajab eraldi tõestamist. Joonisel 4 on siin ainult illustratiivne tähendus.

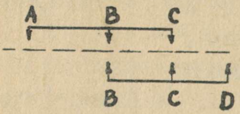


Joonis 4.

Järjestatud punktineliku olemasolu kindlaks tegemiseks tuleb eelnevalt tõestada kaks olulist teoreemi.

T e o r e e m 3.

(20) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \to \langle ACD\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle$ (joonis 5).



Joonis 5.

T õ e s t u s: Esmalt tõestame lemma

(21) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \to \langle ABD\rangle$ (joonis 6).

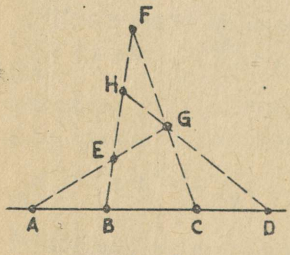
$(12,I_5)$ $\langle ABC\rangle \to \overline{(A = B)} \to (\exists E)\,\{\overline{ABE}\}$;

$(5,6,I_1)$ $\{\overline{ABE}\} \to \{\overline{BEA}\} \to \overline{(B = E)} \to$
$\to (\exists F)\, \langle BEF\rangle$;

$(8,4,5,15)$ $\langle ABC\rangle \,\&\, \{\overline{ABE}\} \to [BAC] \,\&$
$\& \{\overline{BAE}\} \to \{\overline{BCE}\}$;

(- " -) $\langle BEF\rangle \,\&\, \{\overline{BCE}\} \to [BEF] \,\&$
$\& \{\overline{BEC}\} \to \{\overline{BFC}\}$;

$(5,I_2,I_6)$ $\{\overline{BFC}\} \,\&\, \langle ABC\rangle \,\&\, \langle BEF\rangle \to \{\overline{CBF}\} \,\&$
$\& \langle CBA\rangle \,\&\, \langle BEF\rangle \to (\exists G)($
$(\langle CGF\rangle \,\&\, \langle AEG\rangle)$;



Joonis 6.

(I_6) $\{BCF\} \,\&\, \langle BCD\rangle \,\&\, \langle CGF\rangle \to (\exists H)(\langle BHF\rangle \,\&\, \langle DGH\rangle)$;

$(8,5,15)$ $\langle AEG\rangle \,\&\, \{\overline{ABE}\} \to [AEG] \,\&\, \{\overline{AEB}\} \to \{\overline{AGB}\} \to \{\overline{ABG}\}$;

(17) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \to [ABD]$;

$(15,5)$ $[ABD] \,\&\, \{\overline{ABG}\} \to \{\overline{ADG}\} \to \{\overline{DGA}\}$;

(I_6) $\{\overline{DGA}\} \,\&\, \langle DGH\rangle \,\&\, \langle GEA\rangle \to (\exists I)\ (\langle DIA\rangle \,\&\, \langle HEI\rangle)$.

Jääb näidata, et $I = B$.

$(7,8,I_4)$ $\langle BEF\rangle \,\&\, \langle BHF\rangle \to [BFE] \,\&\, \{BFH\}\ \{BEH\}$;

(") $\langle HEI\rangle \,\&\, \{BEH\} \to [EHI] \,\&\, \{EHB\}\ \{EIB\}$;

$(7,8,I_4)$ $\langle DIA\rangle \,\&\, [ABD] \to [ADI] \,\&\, \{ADB\}$ $\{AIB\}$;

$(5,16)$ $\{\overline{ABE}\} \,\&\, \{AIB\} \,\&\, \{EIB\} \to \{\overline{BAE}\} \,\&\, \{BAI\} \,\&\, \{BIE\} \to$
$\to (B = I)$;

(I_2) $\langle DIA\rangle \,\&\, (B = I) \to \langle DBA\rangle \to \langle ABD\rangle$.

Lemma (21) on tõestatud. Teoreemist (20) jäi tõestada veel, et

(22) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \to \langle ACD\rangle$.

Seda võime nüüd teha järgmiselt:

$(I_2,21)$ $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BCD\rangle \to \langle DCB\rangle \,\&\, \langle CBA\rangle \to \langle DCA\rangle \to \langle ACD\rangle$.

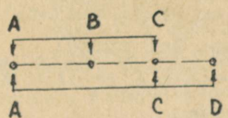
Teoreem 2 on tõestatud.

Nagu näha, on teoreemi (20) tõestus küllaltki komplitseeritud. Juhime tähelepanu sellele erilisele osale, mida tõestuses mängib aksioom I_6. Järgnevate taoliste teoreemide tõestusi me tavaliselt sellise põhjalikkusega ei esita.

Teine "teoreem punktinelikust" on järgmine.

T e o r e e m 4.

(23) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \to \langle BCD\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle$ (joonis 7).



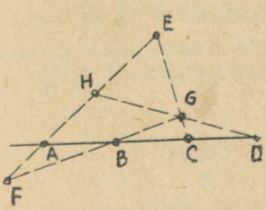
Joonis 7.

T õ e s t u s jaguneb kahte ossa. Esmalt tõestame lemma

(24) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \to \langle ABD\rangle$

(joonis 8).

Selleks leiame kõigepealt punktid E ja F, nii et $\{\overline{ACE}\}$ ja $\langle EAF\rangle$ oleksid tõesed. Seejärel leiame I_6 abil G, nii et $\langle EGC\rangle$ ja $\langle FBG\rangle$ on tõesed, ning seejärel H, nii et $\langle AHE\rangle$ ja $\langle DGH\rangle$ on tõesed.



Joonis 8.

(19) $\{\overline{ACE}\} \,\&\, \langle ABC\rangle \,\&\, \langle AHE\rangle \,\&\, \langle CGE\rangle \to$
$\to \{\overline{BGH}\}$;

(15) $[GBF] \,\&\, \{\overline{GBH}\} \to \{\overline{GFH}\}$;
$\{\overline{HGF}\} \,\&\, \langle HGD\rangle \,\&\, \langle GBF\rangle \to (\exists I)(\langle HAF\rangle$
$\&\, \langle DBI\rangle)$.

Jääb näidata, et I = A. Seda võib teha samal viisil nagu eelmises tõestuses.

Teoreemi tõestuse lõpuleviimiseks tuleb tõestada lemma

(25) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \to \langle BCD\rangle$.

Seda on kõige lihtsam teha vastuväiteliselt. Samuti nagu lemma 3 tõestuses veendume, et koos eeldusega saab tõeseks ka

$$\overline{(B = C)} \;\&\; \overline{(C = D)} \;\&\; \overline{(D = B)}.$$

Et

(7,8,I_4) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \to [CAB] \,\&\, \{CAD\} \to \{CBD\} \to \{BCD\}$.

(2) $\{BCD\} \,\&\, \overline{(B = C)} \,\&\, \overline{(C = D)} \,\&\, \overline{(D = B)} \to [BCD]$,

siis (1) põhjal tuleb (25) tõestamiseks kindlaks teha, et koos eeldusega saavad tõeseks $\langle \overline{CDB}\rangle$ ja $\langle \overline{DBC}\rangle$. Selle tõestamegi vastuväiteliselt.

Oletame esmalt, et tõesed on eeldus ja $\langle CDB\rangle$; siis

(24,I_2,I_3) $\langle CDB\rangle \,\&\, \langle CBA\rangle \to \langle CDA\rangle \to \langle ADC\rangle \to \langle \overline{ACD}\rangle$

ja tõene oleks $\langle ACD\rangle \,\&\, \langle \overline{ACD}\rangle$, mis on võimatu. Märksa raskem on ümber lükata oletust, et tõeseks saavad korraga eeldus ja $\langle DBC\rangle$. Siin on otstarbekas jälle üle minna rangele deduktsioonile, ilma et me lihtsamatel juhtudel enam näitaksime, mille alusel üks või teine implikatsioon on välja kirjutatud. Oletame, et $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \,\&\, \langle DBC\rangle$ on tõene. Sel korral

(I_5,I_1) $\langle ABC\rangle \to \overline{(A = C)} \to (\exists E)\ \{\overline{ACE}\} \to \overline{(E = A)} \to (\exists F) \langle EAF\rangle$,

(15) $\langle ACD\rangle \,\&\, \{\overline{ACE}\} \to [ACD] \,\&\, \{\overline{ACE}\} \to \{\overline{ADE}\}$,

(15) $\langle ACD\rangle \,\&\, \{\overline{ACE}\} \to [CAD] \,\&\, \{\overline{CAE}\} \to \{\overline{CDE}\}$,

(I_6) $\{\overline{EAC}\} \,\&\, \langle EAF\rangle \,\&\, \langle ABC\rangle \to (\exists G)(\langle EGC\rangle \,\&\, \langle FBG\rangle)$,

(24) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ACD\rangle \to \langle ABD\rangle$,

(I_6) $\{\overline{EAD}\} \,\&\, \langle EAF\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \to (\exists H)(\langle EHD\rangle \,\&\, \langle FBH\rangle)$.

Nüüd ühelt poolt

(I_4) $\langle FBH\rangle \,\&\, \langle FBG\rangle \to [BFH] \,\&\, \{BFG\} \to \{BHG\}$,

teiselt poolt

(19) $\{\overline{CDE}\} \,\&\, \langle CBD\rangle \,\&\, \langle CGE\rangle \,\&\, \langle DHE\rangle \to \{\overline{BGH}\}$,

mis viib muidugi vastuolule. Teoreem 4 on tõestatud.

Lihtsateks järeldusteks teoreemidest 3 ja 4 on kolm järgmist lemmat, mida me edaspidi vajame:

(26) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \,\&\, \overline{(C = D)} \to \langle ACD\rangle \vee \langle ADC\rangle$,

(27) $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \,\&\, \overline{(C = D)} \to \langle BCD\rangle \vee \langle BDC\rangle$,

(28) $\langle ACB\rangle \,\&\, \langle ADB\rangle \,\&\, \overline{(C = D)} \to \langle ACD\rangle \vee \langle ADC\rangle$.

Tõestame neist näiteks esimese. Teiste tõestus on analoogiline.

$(7,8,I_4)$ $\quad \langle ABC\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \rightarrow [ABC] \,\&\, \{ABD\} \rightarrow \{ACD\}$;

$(13,2)$ $\quad \{ACD\} \,\&\, \langle ABC\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \,\&\, \overline{(C = D)} \rightarrow \{ACD\} \,\&$

$\quad \& \, \overline{(A = C)} \,\&\, \overline{(A = D)} \,\&\, \overline{(C = D)} \rightarrow [ACD].$

Meil jääb vastuoluni viia oletus, et koos eeldusega saab tõeseks $\langle CAD\rangle$. Kuna

$$\langle ABD\rangle \,\&\, \langle CAD\rangle \rightarrow \langle DBA\rangle \,\&\, \langle DAC\rangle \rightarrow \langle BAC\rangle,$$

siis on sellise oletuse korral tõene $\langle ABC\rangle \,\&\, \langle BAC\rangle$, mis teoreemi 1 põhjal on võimatu.

Peale nende mõnevõrra formaalselt esitatud valemite tuletamist võime asuda geomeetria sisu järk-järgulisele väljaarendamisele.

§ 12. V a h e m i k, l õ i k, s i r g e.

Kõigepealt defineerime vahemiku mõiste.

Olgu $\overline{A = B}$. Sel korral kõigi niisuguste punktide X hulka, mille puhul $\langle AXB\rangle$ on tõene (s.t. mis paiknevad A ja B vahel), nimetatakse <u>vahemikuks</u> (AB). Sümboolselt tähistame seda järgmiselt:

$$(AB) \equiv \{X : \langle AXB\rangle\}.$$

Punkte A ja B nimetatakse selle vahemiku otspunktideks. Vahemikku (AB) koos otspunktidega A ja B nimetatakse lõiguks [AB].

T e o r e e m 5. Vahemikku (AB) kuulub lõpmata palju punkte.

T õ e s t u s. Tõestame kõigepealt, et vahemikku (AB) kuulub vähemalt üks punkt (vt. joonis 9).

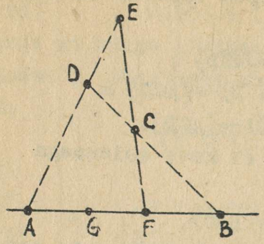
$(I_5,6)$ $\quad \overline{(A = B)} \rightarrow (\exists\, C)\, \{\overline{ABC}\} \rightarrow \overline{(B = C)}$;

$(I_1,8)$ $\quad \overline{(B = C)} \rightarrow (\exists\, D)\, \langle BCD\rangle \rightarrow [BCD]$;

$(15,6)$ $\quad [BCD] \,\&\, \{\overline{BCA}\} \rightarrow \overline{(A = D)}$;

(I_1) $\quad \overline{(A = D)} \rightarrow (\exists\, E)\, \langle ADE\rangle$;

(I_6) $\quad \{\overline{ADB}\} \,\&\, \langle ADE\rangle \,\&\, \langle DCB\rangle \rightarrow (\exists\, F)(\langle ECF\rangle \,\&\, \langle AFB\rangle).$



Joonis 9.

Tähendab, $F \in (AB)$ - ühe punkti - olemasolu vahemikus (AB) on tõestatud.

Täpselt samuti leidub punkt G, nii et $G \in (AF)$, ehk teisiti, $\langle AGF \rangle$ on tõene.

(24) $\langle AGF \rangle \,\&\, \langle AFB \rangle \rightarrow \langle AGB \rangle$.

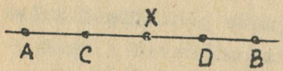
Seega $G \in (AB)$. Niisamuti punkt H, mis kuulub vahemikku (AG) asub ka vahemikus (AF), seega ka vahemikus (AB) jne. Me võime järjest näidata uusi punkte vahemikus (AB), ilma et protsess lõpeks. Teoreem 5 on tõestatud.

T e o r e e m 6. Kui lõigu otspunktid kuuluvad mingisse vahemikku, siis kuulub sellesse vahemikku lõigu iga punkt.

T õ e s t u s. Eeldame, et

$$\langle ACB \rangle \,\&\, \langle ADB \rangle \,\&\, \overline{(C = D)} \,\&\, \langle CXD \rangle$$

on tõene (joonis 10).



Joonis 10.

Siis on lemma (28) põhjal tõene ka

$$\langle ACD \rangle \vee \langle ADC \rangle .$$

Esimesel juhul saame

(24) $\langle DXC \rangle \,\&\, \langle DCA \rangle \rightarrow \langle DXA \rangle$,

(24) $\langle AXD \rangle \,\&\, \langle ADB \rangle \rightarrow \langle AXB \rangle$.

Teisel juhul on tõestus analoogiline.

Lugejale iseseisvaks tõestamiseks jääb järgmine teoreem.

T e o r e e m 7. Vahemiku iga punkt jagab vahemiku kaheks osavahemikuks:

(29) $\langle ACB \rangle \,\&\, \langle AXB \rangle \,\&\, (\overline{X = C}) \rightarrow \langle AXC \rangle \vee \langle CXB \rangle$.

Toome nüüd sisse sirge mõiste.

Olgu $\overline{A = B}$. Sel korral kõigi niisuguste punktide X hulka, mille puhul $\{ABX\}$ on tõene, nimetatakse sirgeks AB:

(30) $AB \equiv \{X : \{ABX\}\}$.

Sirge on ilmselt lõpmatu punktihulk.

T e o r e e m 8. Kui sirgele AB kuulub punkt C, mis ei ühti punktiga A, siis sirged AC ja AB ühtivad.

T õ e s t u s: Väide on ilmne, kui C = B. Vastupidisel juhul

$$(2) \quad \{ABC\} \ \& \ \overline{(A = B)} \ \& \ \overline{(B = C)} \ \& \ \overline{(C = A)} \rightarrow [ABC],$$

$$(I_4) \quad [ABC] \ \& \ \{ABX\} \rightarrow \{ACX\},$$

tähendab, sirge AB iga punkt X kuulub sirgele AC. Täpselt samuti

$$[ACB] \ \& \ \{ACY\} \rightarrow \{ABY\}$$

- sirge AC iga punkt Y kuulub sirgele AB. Sirged ühtivad.

Selle teoreemi kahekordne rakendamine annab järgmise tulemuse.

T e o r e e m 9. Kui kaks erinevat punkti C ja D kuuluvad sirgel AB, siis sirged CD ja AB ühtivad.

Tulemus näitab, et punktid A ja B sirgel AB ei erine millegi poolest selle sirge ülejäänud punktidest. Neid võib asendada sirge ükskõik missuguse kahe punktiga.

§ 13. P o o l s i r g e d.

Fikseerime hulgas $\mathcal{X}$ punkti O ja määrame hulgal $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ predikaadi

$$f(X,Y) \equiv \langle OXY \rangle \vee \langle OYX \rangle \vee (X = Y)$$

(punktiga O kollineaarselt ühel pool asetsemise predikaadi).

Näitame, et see predikaat rahuldab §-s 6 formuleeritud ekvivalentsuse aksioome: samaselt tõesed on 1^o $f(X,X)$, 2^o $f(X,Y) \rightarrow f(Y,X)$, 3^o $f(X,Y) \ \& \ f(Y,Z) \rightarrow f(X,Z)$.

Aksioomide 1^o ja 2^o kehtivus antud juhul on ilmne. Aksioom 3^o nõuab praegu, et samaselt tõene oleks

$$(\langle OXY \rangle \vee \langle OYX \rangle \vee (X = Y)) \ \& \ (\langle OYZ \rangle \vee \langle OZY \rangle \vee (Y = Z)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \langle OXZ \rangle \vee \langle OZX \rangle \vee (X = Z).$$

Vastav tõestus on järgmine:

(24) $\quad \langle OXY \rangle \ \& \ \langle OYZ \rangle \rightarrow \langle OXZ \rangle$,

(28) $\quad \langle OXY \rangle \ \& \ \langle OZY \rangle \rightarrow \langle OXZ \rangle \vee \langle OZX \rangle \vee (X = Z)$,

(26) $\quad \langle OYX \rangle \ \& \ \langle OYZ \rangle \rightarrow \langle OXZ \rangle \vee \langle OZX \rangle \vee (X = Z)$,

(24) $\quad \langle OYX \rangle \ \& \ \langle OZY \rangle \rightarrow \langle OZX \rangle$.

Ülejäänud juhtudel on tõestus veelgi lihtsam, näiteks:

$$(X = Y) \ \& \ \langle OYZ \rangle \rightarrow \langle OXZ \rangle.$$

Sellega ongi näidatud, et ülaldefineeritud predikaat rahuldab ekvivalentsuse aksioomide 1°-3° nõudeid. Kasutame nüüd §-s 6 saadud tulemust ekvivalentsusklasside kohta. Me võime öelda, et punktide hulk $\mathfrak{X}$ lahutub mittelõikuvateks mittetühjadeks ekvivalentsusklassideks, millede ühendiks on terve hulk $\mathfrak{X}$. Iga niisugust ekvivalentsusklassi nimetame antud juhul poolsirgeks alguspunktiga σ.

Seda nimetust õigustavad järgmised teoreemid.

T e o r e e m 10. Iga poolsirge alguspunktiga σ on alamhulgaks teataval punkti σ läbival sirgel.

T õ e s t u s. Poolsirge kui ekvivalentsusklassi võib määrata oma ükskõik missuguse punktiga A (klassi esindajaga). Klassi kuuluvad kõik punktiga A ekvivalentsed punktid - tähendab need, mis muudavad tõeseks predikaadi

$$f(A,X) \equiv \langle OAX \rangle \vee \langle OXA \rangle \vee (A = X).$$

Sel puhul on aga ilmselt tõene ka $\{OAX\}$, ning X kuulub sirgele OA. Teoreem on tõestatud.

Punkti A sisaldavat poolsirget alguspunktiga σ tähistame $(\sigma A$. Nagu näha, kuulub ta sirgele OA.

T e o r e e m 11. Iga punkt σ sirgel lahutab selle sirge ülejäänud punktide hulga kaheks poolsirgeks.

T õ e s t u s. Valime sirgel OA vabalt punktist σ erineva punkti A. Sel puhul on määratud poolsirge (OA, mis asetseb sirgel OA. Aksioomi I_1 põhjal nähtub, et tõene on $\langle AOB \rangle$, kusjuures B kuulub ilmselt sirgele OA, kuid mitte poolsirgele (OA. Tähendab, OA sisaldab endas vähemalt kaht poolsirget (OA ja (OB.

Näitame, et sirgel OA rohkem poolsirgeid pole, et sirgel OA vabalt võetud punkt C, mis erineb punktidest O ja A, kuulub ühele mainitud kahest poolsirgest. Tõepoolest, OAC on korrektne punktikolmik, nii et tõene on

$$[OAC] \equiv \langle OAC \rangle \vee \langle ACO \rangle \vee \langle COA \rangle.$$

Siin $\langle OAC \rangle \vee \langle ACO \rangle$ tõesuse puhul võime öelda, et C kuulub poolsirgele (OA. Tähendab, (OA ja (OB ühendiks on terve punktist σ erinevate punktide hulk sirgel OA. Teoreem on tõestatud.

Poolsirgeid (OA ja (OB, mille korral on tõene $\langle AOB \rangle$, nimetatakse teineteist täiendavateks poolsirgeteks.

Kerge on kindlaks teha, et kaks punkti, A ja B sirgel AB lahutavad selle sirge ülejäänud punktide hulga vahemikuks (AB) ja kaheks poolsirgeks - poolsirgete (AB ja (BA täiendpoolsirgeteks. Esimest nimetatakse lõigu [AB] pikendiks üle otspunkti A, teist selle lõigu pikendiks üle otspunkti B.

Osutub, et poolsirgel (OA võib defineerida teatava predikaadi, mis rahuldab järjestuse aksioome 1"-3" (§ 6) ja muudab seega poolsirge järjestatud hulgaks. Selliseks predikaadiks on

$$g(X,Y) \equiv \langle OXY \rangle.$$

Tõepoolest, aksioomi 1" kehtivus järeldub otsekohe valemist (11), aksioom 3" kehtib valemi (24) põhjal:

$$\langle OXY \rangle \,\&\, \langle OYZ \rangle \rightarrow \langle OXZ \rangle.$$

Aksioomi 2" kehtivuses veendumiseks on küllalt märkida, et X, Y kui (OA punktid muudavad tõeseks

$$\langle OXY \rangle \vee \langle OYX \rangle \vee (X = Y),$$

kusjuures aksioomi eelduse kohaselt X = Y tõesus on võimatu.

Tähendab, predikaat $\langle OXY \rangle$ muudab poolsirge (OA järjestatud hulgaks. Kui $\langle OXY \rangle$ täislause on tõene, siis kõneleme, et X eelneb punktile Y poolsirgel (OA.

Toome nüüd sisse järjestuse sirgel OA. Punkt O lahutab selle sirge kaheks teineteist täiendavaks poolsirgeks (OA ja (OB. Nimetame üht neist ülem-, teist alampoolsirgeks.

Kõneldakse, et sirge OA kahe punkti X ja Y korral X eelneb Y-le, kui

(1) X eelneb Y-le ülempoolsirgel või

(2) X = O ja Y on ülempoolsirgel või

(3) X on alampoolsirgel ja Y on ülempoolsirgel või

(4) X on alampoolsirgel ja Y = O või

(5) Y eelneb X-le alampoolsirgel.

Võib jällegi veenduda, et kehtivad järjestatud hulga aksioomid 1"-3":

1" ükski punkt ei eelne iseendale,

2" kahest erinevast punktist vähemalt üks eelneb teisele,

3" kui X eelneb Y-le ja Y eelneb Z-le, siis X eelneb Z-le.

Kontrollimise jätame siin lugeja hooleks.

Kui toodud definitsioonis vahetada poolsirgete osad, saame sirgel OA teise, eelmisega vastupidise järjestuse.

Kui punkt σ sirgel OA asendada selle sirge mingi teise punktiga σ', siis saame samuti kaks teineteisele vastupidist järjestust sirgel. On võimalik näidata, et need kaks järjestust ühtivad varem punkti σ abil määratud kahe järjestusega. Siinkohal me seda aga tõestama ei hakka.

§ 14. K o l m n u r k.

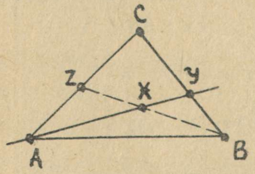
Aksioomi I_5 põhjal eksisteerib kolm mittekollineaarset punkti - punktid A,B ja C, nii et $\{\overline{ABC}\}$ on tõene.

Kolme mittekollineaarse punkti A,B,C korral kõneldakse, et on antud kolmnurk $\triangle ABC$. Punkte A,B,C nimetatakse kolmnurga tippudeks, vahemikke (AB), (BC), (CA) - külgedeks. Kolmnurga tippude ja külgede ühendit nimetatakse kolmnurga piirdeks.

Tavalisel viisil võib sisse tuua tipu vastaskülje mõiste.

Kolmnurgaga $\triangle ABC$ võib siduda veel rea punktihulki.

Poolsirget, mis on poolsirge (AB täiendiks sirgel AB, nimetatakse külje AB pikendiks üle tipu A. Kolmnurga $\triangle ABC$ tippude, külgede ja külgede pikendite ühendit (s.t. sirgete AB, BC ja CA ühendit) nimetatakse kolmnurga ülepiirdeks.



Joonis 11.

Punktihulka (joonis 11)

(31) $(ABC) = \{X : (\exists Y)(<AXY> \,\&\, <BYC>)\}$

(s.t. niisugust X hulka, mis muudavad tõeseks sulgudes $\{\}$ näidatud predikaadi) nimetatakse kolmnurga $\triangle ABC$ sisepiirkonnaks, punktihulka

(32) $(BC)A = \{X : (\exists Y)(<AYX> \,\&\, <BYC>)\}$ - laiendiks üle külje (BC), punktihulka

(33) $(A)BC = \{X : (\exists Y)(<YAX> \,\&\, <BYC>)\}$

- laiendiks üle tipu A.

T e o r e e m 12. Kolmnurga ABC sisepiirkond ei muutu tippude suvalisel ümberjärjestamisel
$(ABC) = (BCA) = (CAB) = (ACB) = (CBA) = (BAC)$.

T õ e s t u s: Punktid C ja B predikaadis (31) võib I_2 põhjal ära vahetada, ilma et midagi muutuks. Seetõttu tuleb läbi vaadata tippude A ja B ümbervahetamine. Olgu $X \in (ABC)$, s.t. definitsioonis (31) antud predikaat olgu X puhul tõene.

(15) $\{\overline{ABC}\} \,\&\, \langle BYC\rangle \to [CBY] \,\&\, \{\overline{CBA}\} \to \{\overline{CYA}\}$,

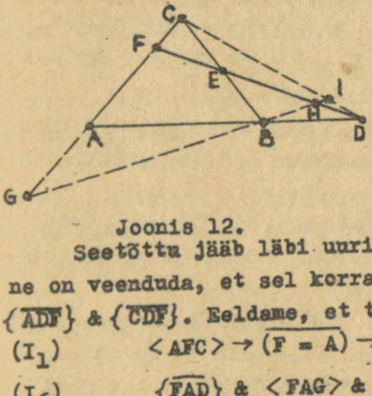
(I_6) $\{\overline{CYA}\} \,\&\, \langle CYB\rangle \,\&\, \langle YXA\rangle \to (\exists Z)(\langle CZA\rangle \,\&\, \langle BXZ\rangle)$.

Siit nähtub, et tõepoolest $X \in (BAC)$. Teoreem on tõestatud.

Kõneldakse, et sirge lõikab vahemikku või poolsirget, kui tal on selle vahemiku või poolsirgega üks ja ainult üks ühine (sisemine) punkt.

T e o r e e m 13. Kui sirge lõikab kolmnurga üht külge ja teise külje pikendit, siis ta lõikab ka kolmandat külge.

T õ e s t u s: Kui sirge lõikab üht külge (BC) ja teise külje (AB) pikendit selliselt, et külje (BC) üks otspunktidest B on teise külje (AB) pikendi alguspunktiks (joonis 12), siis teoreemi väide järeldub vahetult aksioomist I_6 ja sirge definitsioonist.



Joonis 12.

Seetõttu jääb läbi uurida teine võimalik olukord. Lihtne on veenduda, et sel korral on (15) põhjal tõene ka $\{\overline{ADF}\} \,\&\, \{\overline{CDF}\}$. Eeldame, et tõene on $\{\overline{ABC}\} \,\&\, \langle ABD\rangle \,\&\, \langle AFC\rangle$.

(I_1) $\langle AFC\rangle \to \overline{(F = A)} \to (\exists G) \langle FAG\rangle$;

(I_6) $\{\overline{FAD}\} \,\&\, \langle FAG\rangle \,\&\, \langle ABD\rangle \to (\exists H)(\langle FHD\rangle \,\&\, \langle GBH\rangle)$;

(21) $\langle CFA\rangle \,\&\, \langle FAG\rangle \to \langle CFG\rangle$;

(I_6) $\{\overline{CFD}\} \,\&\, \langle CFG\rangle \,\&\, \langle FDH\rangle \to (\exists I)(\langle CID\rangle \,\&\, \langle GHI\rangle)$;

(25) $\langle GBH\rangle \,\&\, \langle GHI\rangle \to \langle BHI\rangle$.

Edasi võib (15) abil veenduda, et tõene on $\{\overline{CIB}\}$.

(I_6) $\{\overline{CIB}\} \,\&\, \langle CID\rangle \,\&\, \langle IHB\rangle \to (\exists J)(\langle CJB\rangle \,\&\, \langle DHJ\rangle)$.

9.

Nii nagu teoreemi 3 tõestuses, võib nüüd kindlaks teha, et $J = E$, ning jõuda sel viisil tulemuseni, et $\langle CEB \rangle$ & $\langle DHE \rangle$ on tõene. Aksioomist I_6 järeldub nüüd $\langle DEF \rangle$ tõesus. Teoreem on tõestatud.

Tõestuse kokkuvõtteks on valem, mis on mõnevõrra analoogiline aksioomiga I_6:

(34) $\{\overline{ABC}\}$ & $\langle ABD \rangle$ & $\langle AFC \rangle \rightarrow (\exists E)(\langle BEC \rangle$ & $\langle DEF \rangle)$.

Kolmnurga ja sirge mõiste abil on võimalik teoreemile 2 anda järgmine lihtne sõnastus.

T e o r e e m 14. Ükski sirge ei saa lõigata kolmnurga kõiki kolme külge.

§ 15. T a s a n d.

Kolme mittekollineaarse punkti A,B,C korral nimetatakse tasandiks ABC selliste punktide X hulka, mis on kollineaarsed mingi kahe punktiga kolmnurga $\triangle ABC$ piirdel:

(35) $$ABC \equiv \{X : (\exists Y,Z)[\{XYZ\} \mathbin{\&} (\langle AYB \rangle \vee \langle BYC \rangle \vee \langle CYA \rangle \vee (Y = A) \vee (Y = B) \vee (Y = C)) \mathbin{\&} (\langle AZB \rangle \vee \langle BZC \rangle \vee \langle CZA \rangle \vee (Z = A) \vee (Z = B) \vee (Z = C))]\}.$$

Predikaadi sümmeetriast tippude A,B,C ümberpaigutuste suhtes järeldub, et tasand ei sõltu teda määrava kolme punkti järjestusest.

Võib öelda, et tasandi ABC saame, kui laseme sirget liikuda niiviisi, et tema kaks punkti libisevad mööda kolmnurga $\triangle ABC$ piiret.

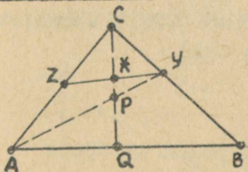
T e o r e e m 15. Tasand ABC ühtib kolmnurga $\triangle ABC$ ülepiirde, sisepiirkonna ja kõigi kuue laiendi ühendiga.

T õ e s t u s: Et viimati mainitud ühendi iga punkt asub tasandil ABC, selgub järgnevast. Ülepiirde iga punkt on kollineaarne kahe tipuga, sisepiirkonna ja ükskõik missuguse laiendi iga punkt on aga kollineaarne ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu vastasküljel.

Märksa keerukam on tõestada, et tasandi ABC iga punkt kuulub kolmnurga $\triangle ABC$ kas ülepiirdele, sisepiirkonda või ühele laiendeist. Tasandi ABC punkti X korral leidub kaks punkti Y,Z kolmnurga ΔABC piirdel, nii et X,Y,Z on kollineaarsed. Kui kasvõi üks punktidest Y,Z ühtib kolmnurga ΔABC ühe tipuga, siis on väide ilmne. Seetõttu eeldame järgnevalt, et mõlemad punktid Y ja Z asuvad külgedel. Vaatame kordamööda läbi kõik võimalikud olukorrad.

(a) Kui Y ja Z kuuluvad kolmnurga ühele ja samale küljele, siis X asub ilmselt ühel sirgetest AB, BC või CA - tähendab, kuulub kolmnurga <u>ülepiirdele.</u>

(b) Kui Y ja Z kuuluvad kolmnurga eri külgedele ja tõene on $\langle YXZ \rangle$, siis on kerge näidata, et X kuulub kolmnurga <u>sisepiirkonda.</u> Tõepoolest, aksioomi I_6 põhjal leidub punkt P, nii et (joonis 13) $\langle APY \rangle \,\&\, \langle CXP \rangle$ on tõene ning edasi punkt Q, nii et $\langle AQB \rangle \,\&\, \langle CPQ \rangle$ on tõene. (24) põhjal on siis tõene $\langle AQB \rangle \,\&\, \&\, \langle CXQ \rangle$ - tähendab, $X \in (ABC)$.



Joonis 13.

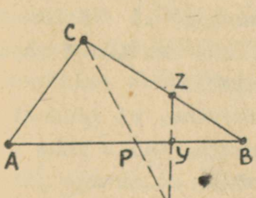
(c) Jääb vaadelda juht, mil Y ja Z kuuluvad kolmnurga eri külgedele ja tõene on $\{XYZ\} \,\&\, \langle \overline{YXZ} \rangle$. Triviaalne on siin olukord, kui X = Y või X = Z - sel korral X kuulub kolmnurga piirdele. Ülejäänud juhul on (1) ja (2) põhjal tõene

$$\langle XYZ \rangle \vee \langle XZY \rangle .$$

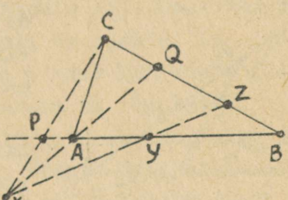
Et me punktide Y ja Z tähiseid ja kolmnurga tippude tähiseid võime vabalt muuta, siis võime üldsust kitsendamata eeldada, et tõene on

$$\langle XYZ \rangle \,\&\, \langle AYB \rangle \,\&\, \langle BZC \rangle$$

(joonis 14).



Joonis 14 a)



Joonis 14 b)

(15) abil on kerge näidata, et C,Z ja X on mittekollineaarsed punktid.

(I_6) $\quad \{\overline{CZX}\} \,\&\, \langle CZB\rangle \,\&\, \langle ZYX\rangle \to (\exists\, P)(\langle CPX\rangle \,\&\, \langle BYP\rangle)$.

Lemma (26) põhjal nüüd $\langle BYA\rangle \,\&\, \langle BYP\rangle$ tõesusest järeldub, et tõene on kas 1) $P = A$ või 2) $\langle BPA\rangle$ või 3) $\langle BAP\rangle$.

Esimesel juhul saame ilmselt punkti ülepiiridel. Teisel juhul on tegemist punktiga X, mille puhul on tõene

$$(\exists\, P)(\langle APB\rangle \,\&\, \langle CPX\rangle),$$

ja seega $X \in (AB)C$.

Kolmandal juhul on tõene $\langle XYZ\rangle \,\&\, \langle XPC\rangle \,\&\, \langle YAP\rangle$ (viimane järeldub $\langle BYA\rangle \,\&\, \langle BAP\rangle$ tõesusest ja valemist (25)) - - tähendab, A on kolmnurga $\triangle CZX$ kahele eri küljele toetuva vahemiku punkt ning (b) põhjal seega $A \in (CZX)$. Järelikult leidub punkt Q, nii et tõene on $\langle CQZ\rangle \,\&\, \langle XAQ\rangle$.

Et

(24) $\qquad \langle CQZ\rangle \,\&\, \langle CZB\rangle \to \langle CQB\rangle$,

siis on meil tegemist punktiga X, mille puhul on tõene

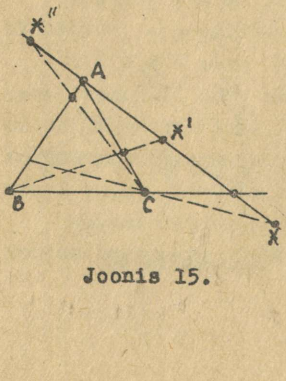
$$(\exists\, Q)(\langle CQB\rangle \,\&\, \langle XAQ\rangle),$$

ja seega $X \in (A)BC$. Teoreem on tõestatud.

Teoreemist järeldub, et tasandi ABC võib defineerida ka selliste punktide X hulgana, mis on kollineaarsed kolmnurga $\triangle ABC$ kas mingi kahe tipuga või mingi tipuga ja selle tipu vastaskülje mingi punktiga.

Seda tulemust võib mõnevõrra laiendada.

T e o r e e m 16. Punkt, mis on kollineaarne kolmnurga $\triangle ABC$ mingi tipuga ja ülejäänud kaht tippu läbiva sirge mingi punktiga, asub tasandil ABC.



Joonis 15.

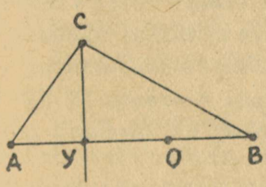
T õ e s t u s e k s tuleb rakendada teoreemi 13 joonisel 15 näidatud viisil. Üksikasjalikud arutlused jätame siin lugeja hooleks.

Eespool me märkisime, et tasandi kirjeldab liikuv sirge, mille kaks punkti libisevad mööda kolmnurga piiret. Osutub, et ühe neist punktidest võib hoida paigal kolmnurga ühel küljel. Teda läbiv sirge kirjeldab sel korral ikkagi sama tasandi, kui teine punkt libiseb mööda kolmnurga piiret. Kehtib nimelt järgnev teoreem.

T e o r e e m 17. Tasandi ABC võib defineerida ka selliste punktide X hulgana, mis on kollineaarsed fikseeritud punktidega σ kolmnurga Δ ABC ühel küljel (näiteks küljel (AB)) ja mingi punktiga W kolmnurga piirdel.

T õ e s t u s: Iga niisugune punkt X asub ilmselt tasandil ABC. Tuleb näidata, et vastupidi, tasandi ABC iga punkt X osutub sedalaadi punktiks. Eelmise teoreemi põhjal võime eraldi vaadelda kolmnurga Δ ABC ülepiirde, sisepiirkonna ja laiendite punkte.

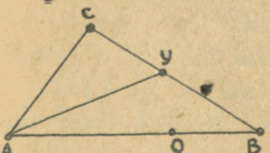
(a) Olgu X kolmnurga Δ ABC ülepiirdel. Kui X asub sirgel AB, siis punktiks W võib võtta külje (AB) ükskõik missuguse punkti. Kui X asub küljel (BC) või (CA), siis võib võtta W = X; kui X asub selle külje ükskõik kummal pikendil, siis soovitud punkti W olemasolu järeldub teoreemist 13.



Joonis 16.

(b) Kui X asub kolmnurga Δ ABC sisepiirkonnas (ABC) või laiendis (AB)C, (C)AB, siis leidub Y, nii et <AYB> & $\{CXY\}$ on tõene (joonis 16). Kui Y = σ, siis võtame W = C. Kui $\overline{Y = \sigma}$, siis (28) põhjal on tõene kas <AYσ> või <AσY>. Mõlemal juhul järeldub soovitud punkti W olemasolu teoreemist 13, kui teisel juhul kasutada eelnevalt lemmat (25).

(c) Kui X asub laiendeis (BC)A või (A)BC, siis leidub Y, nii et <BYC> & $\{AYX\}$ on tõene (joonis 17). Soovitud punkti W olemasolu järeldub sel korral samuti teoreemist 12. Analoogilise olukorraga on tegemist kui X asub laiendeis (CA)B või (B)AC. Teoreem on tõestatud.



Joonis 17.

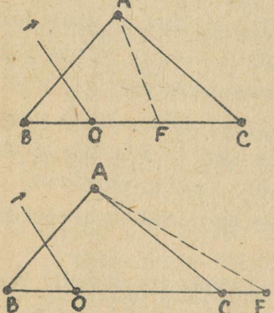
Tasandi võib defineerida, nagu näha, mitmel viisil. Kõigis definatsioonides etendab erilist osa kolmnurk Δ ABC. Meie eesmärgiks on järgnevalt näidata, et see kolmnurk ei ole millegi poolest eelistatud võrreldes teiste kolmnurkadega tasandil - lühidalt öeldes, näidata, et tasand on homogeenne.

Tõestame nimelt järgmise teoreemi.

T e o r e e m 18. Kui kolm mittelineaarset punkti D,E,F kuuluvad tasandile ABC, siis tasandid ABC ja DEF ühtivad.

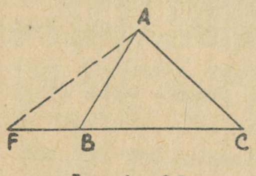
T õ e s t u s 1. Tõestame teoreemi esmalt sellel erijuhul, kui D = A, E = B ja tõene on $[BCF]$ - tähendab, kui tipp C on asendatud sirge BC mingi punktiga F.

(a) Kui tõene on $\langle BFC\rangle \vee \langle BCF\rangle$, siis valime punkti O selliselt, et tõene oleks $\langle BOC\rangle$ & $\langle FOC\rangle$ (joonis 18). Mõlemal alajuhul on see võimalik - $\langle BFC\rangle$ tõesuse puhul tuleb O valida vahemikus (BF) ja rakendada lemmat (24), $\langle BFC\rangle$ tõesuse puhul tuleb O valida vahemikus (BC) ja rakendada lemmat (25). Edasi tuleb kasutada teoreeme 17 ja 13. Tulemuseks saame, et tasandid ABC ja ABF ühtivad.



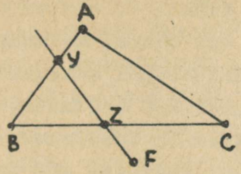
Joonis 18.

(b) Kui tõene on $\langle CBF\rangle$, siis on vahe võrreldes eelmise juhu teise alajuhuga selles, et C ja B on vahetanud osad (joonis 19). Tähendab, sel korral võib väita, et ühtivad tasandid ACB ja ACF. Kolmnurkade $\triangle AFC$ ja $\triangle AFB$ puhul on nüüd tõene $\langle FBC\rangle$. Eelmise juhu esimesel alajuhul saadud tulemuse põhjal võime öelda, et ühtivad tasandid AFC ja AFB. Kokkuvõttes olemegi saanud soovitud tulemuse: tasandid ABC ja ABF ühtivad.



Joonis 19.

2. Järgnevalt tõestame teoreemi erijuhul, kui D = A, E = B ja F on tasandi ABC vabalt võetud punkt. Sel korral eksisteerivad punktid Y ja Z kolmnurga $\triangle ABC$ külgedel (näiteks külgedel (AB) ja (BC)(joonis 20), nii et Y,Z ja F on kollineaarsed. Eelmise etapi tulemuse põhjal tasand ABC ühtib tasandiga ABZ ehk ZAB, vii-



Joonis 20.

mane ühtib tasandiga ZAY ehk AYZ, viimane omakorda ühtib tasandiga AYF ehk FAY ning, lõpuks, viimane ühtib tasandiga FAB ehk ABF. Kokkuvõttes, tasandid ABC ja ABF ühtivad.

3. Viimaks tõestame teoreemi üldjuhul. Eelmise etapi tulemuse põhjal tasand ABC ühtib tasandiga ABF ehk FAB, viimane ühtib tasandiga FAE ehk FEA, viimane aga ühtib tasandiga FED ehk DEF. Kokkuvõttes, tasandid ABC ja DEF ühtivad. Teoreem on tõestatud.

Teoreemist nähtub, et punktid A,B ja C on tasandi ABC kõige tavalisemad punktid, mida võib asendada tasandi ükskõik missuguse kolme mittekollineaarse punktiga, ilma et tasand seejuures muutuks.

Seoses tasandi mõistega formuleerime järgmise aksioomi.

Planimeetria dimensiooniaksioom: Iga neli punkti on ühel tasandil.

Selle aksioomi võib esitada ka kasutatava sümboolika abil. Selleks tuleb nõuda, et kirjutises (35) nurksulgudes kooloni järel esinev predikaat oleks samaselt tõene (s.t. oleks tõene igasuguste X,A,B,C puhul).

Eeltoodust selgub, et kui rahuldatud on planimeetria dimensiooniaksioom, siis punktihulk $\mathfrak{X}$ kujutab endast lihtsalt üht tasandit.

Uut aksioomi rakendame peaasjalikult IV peatükis. Järgmises peatükis me koguni loobume temast.

§ 16. Pooltasand ja nurk.

Anname järgnevalt tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et sirge oleks tasandi alamhulgaks, ehk, nagu tavaliselt kõneldakse, asuks sellel tasandil.

T e o r e e m 19. Kui sirge AB kaks erinevat punkti A ja B kuuluvad tasandile, siis selle sirge iga punkt kuulub tasandile.

T õ e s t u s. Tasandil võib leida punkti C, mis ei ole kollineaarne punktidega A,B ning määrata see tasand kolmnurga Δ ABC abil. Sirge AB iga punkt X on definitsiooni kohaselt kollineaarne punktidega A ja B, ning tasandi ABC definitsiooni järgi kuulub seega tasandile ABC. Teoreem on tõestatud.

T e o r e e m 20. (Paschi lause). Kui tasandil ABC asuv sirge lõikab kolmnurga ΔABC üht külge ja ei läbi ühtegi tippu, siis ta lõikab veel teist kolmnurga külge, kusjuures kolmandat külge ta enam lõigata ei saa.

T õ e s t u s. Lõigaku sirge näiteks kolmnurga külge(AB) punktis O. Valime sellel sirgel vabalt punkti X. Kuna sirge asub tasandil ABC, siis X kuulub tasandile ABC, mistõttu ta teoreemi 16 põhjal on kollineaarne punktiga O ja mingi punktiga W kolmnurga ΔABC piirdel. Punkti W ühtimine kolmnurga tipuga on teoreemi eeldustes välja suletud. Järelikult on W ühe külje punkt. Kolmandat külge ei saa sirge enam lõigata teoreemi 14 põhjal.

Tõestatud teoreem laseb end mõnevõrra üldistada.

T e o r e e m 21. Kui sirge asub punktidega A, B ja C ühel tasandil, ei läbi ühtegi neist punktidest ning lõikab üht vahemikest (AB), (BC) ja (CA), siis ta lõikab veel üht ja ei lõika teist ülejäänud kahest vahemikust.

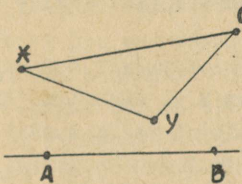
T õ e s t u s. Mittekollineaarsete A, B ja C korral on tegemist teoreemiga 20. Kollineaarsete A, B ja C korral võib üldistust kitsendamata eeldada, et $\langle ABC \rangle$ on tõene. Kui sirge lõikab vahemikku (AB) punktis O, nii et tõene on $\langle AOB \rangle$, siis (23) põhjal see sirge lõikab veel vahemikku (AC), kuid vahemikku (BC) ta enam lõigata ei saa. Analoogilise olukorraga on tegemist, kui sirge lõikab vahemikku (BC). Kui sirge lõikab vahemikku (AC) punktis O ,siis väide järeldub valemist (29).

Kui sirge AB kuulub tasandile, siis kõneldakse, et kaks punkti X ja Y, mis kuuluvad tasandile, kuid mitte sirgele AB, on sellest sirgest ühel pool, kui sirge AB ei lõika vahemikku (XY). Kui AB lõikab vahemikku (XY), siis kõneldakse, et X ja Y on teine teisel pool sirget AB.

T e o r e e m 22. Tasandil asuv sirge AB lahutab selle tasandi kõik ülejäänud punktid kahte klassi, nii et iga kaks punkti ühest klassist en sirgest AB ühel pool ja iga kaks punkti erinevatest klassidest on teine teisel pool sirget AB.

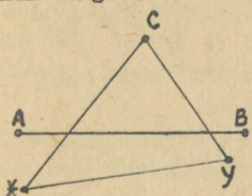
T õ e s t u s. Tasandil võib leida punkti C, mis ei kuulu sirgele AB. Loeme esimesse klassi kõik need punktid tasandil, mis on koos punktiga C sirgest AB ühel pool, ja teise klassi punktid, mis on punktiga C võrreldes teisel pool sirget AB.

Võtame vabalt kaks punkti X ja Y esimesest klassist (joonis 21). Need punktid ei saa olla teine teisel pool sirget AB, sest siis sirge AB lõikaks vahemikku (XY) ning teoreemi 21 põhjal peaks lõikama veel ühte vahemikest (CX) ja (YC), mis on aga antud juhul võimatu. Järelikult on X ja Y sirgest AB ühel pool.



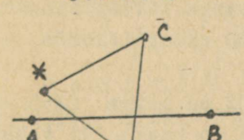
Joonis 21.

Võtame vabalt kaks punkti X ja Y teisest klassist (joonis 22). Punktid X ja Y on siin sirgest AB samuti ühel pool, sest vastupidisel juhul sirge AB lõikaks kõiki kolme vahemikku (CX),(XY) ja (YC), mis on võimatu.



Joonis 22.

Lõpuks võtame vabalt punkti X esimesest klassist ja punkti Y teisest klassist (joonis 23) - tähendab sirge AB lõikab vahemikku (YC), vahemikku (CX) ta aga ei lõika. Järelikult peab sirge a lõikama vahemikku (XY) ning punktid X ja Y on seega teine teisel pool sirget AB. Teoreem on tõestatud.

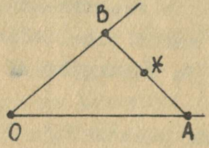


Joonis 23.

Kumbagi klassi, milleks tasandil asuv sirge AB lahutab selle tasandi ülejäänud punktid, nimetatakse <u>pooltasandiks</u> (täpsemalt: sirgega AB äärnevaks pooltasandiks). Sirget AB nimetatakse pooltasandi <u>ääreks</u>. Sirgega AB äärnevat pooltasandit, mis sisaldab punkti C, tähistame (AB|C.

Kui on antud kaks ühest punktist lähtuvat poolsirget (OA ja (OB, mis ei kuulu ühele sirgele, siis kõneldakse, et on määratud nurk ∠AOB. Punkti O nimetatakse nurga ∠AOB <u>tipuks</u>, poolsirgeid (OA ja (OB nurga <u>haaradeks</u>, pooltasandite (OA|B ja (OB|A ühisosa - nurga <u>sisepiirkonnaks</u>. <u>Nurgaks</u> ∠AOB loetakse tipu, haarade ja sisepiirkonna ühendit. Punktihulka, mis tähistab nurka ∠AOB tasandini OAB nimetatakse nurga ∠AOB välispiirkonnaks.

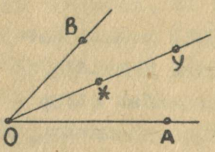
T e o r e e m 23. Kui A ja B on vabalt võetud punktid nurga ∠AOB haaradel (OA ja (OB, siis vahemik (AB) kuulub nurga ∠AOB sisepiirkonda (joonis 24).



Joonis 24.

T õ e s t u s: Pooltasandi definitsiooni järgi punkt B ja vahemiku (AB) mingi punkt X kuuluvad pooltasandile (OA|B; punktid A ja X aga kuuluvad pooltasandile (OB|A. Teoreem on tõestatud.

T e o r e e m 24. Kui punkt X asub nurga ∠AOB sisepiirkonnas, siis on selles sisepiirkonnas ka poolsirge (OX (joonis 25).



Joonis 25.

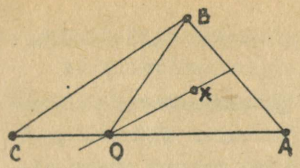
T õ e s t u s: Valime poolsirgel (OX vabalt punkti Y. See on koos punktiga X nii pooltasandil (OA|B kui (OB|A. Teoreem on tõestatud.

Sellest teoreemist järeldub, et nurga ∠AOB tipust O lähtuv poolsirge (OX kas 1) kuulub nurga sisepiirkonda, 2) ühtib ühega haaradest või 3) kuulub nurga välispiirkonda.

Kui poolsirge (OX kuulub nurga ∠AOB sisepiirkonda, siis kõneldakse, et ta on nurga ∠AOB sees.

T e o r e e m 25. Kui poolsirge (OX on nurga ∠AOB sees, siis ta lõikab iga vahemikku (AB), kus A on haara (OA vabalt võetud punkt ja B on haara (OB vabalt võetud punkt.

T õ e s t u s: Leidub C, nii et ⟨AOC⟩ on tõene (joonis 26). Sirge OX ja kolmnurga ▲ABC puhul on rahuldatud teoreemi 18 (Paschi lause) eeldused: sirge OX asub tasandil ABC, lõikab külge (AC) ja ei läbi ühtegi tippu. Järelikult peab see



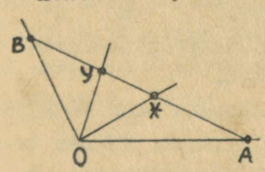
Joonis 26.

sirge lõikama veel teist külge. Näitame, et ta külge (BC) lõigata ei saa.

Vahemik (BC) kuulub mitte pooltasandile (OB|A, vaid seda täiendavale pooltasandile (OB|C ja seega nurga ∠AOB välispiirkonda. Siit järeldub, et poolsirge (OX teda lõigata ei saa. Teiselt poolt on vahemik (BC) koos poolsirgega (OX ühel pooltasandil (OA|B, mistõttu viimast täiendaval pooltasandil asuv poolsirge (OX' (kus X' puhul on tõene ⟨XOX'⟩)ei saa samuti teda lõigata. Lõpuks on selge, et ka O ei saa kuuluda vahemikule (BC) (sest vastupidisel juhul poolsirged (OA ja (OB satuksid ühele sirgele). Tähendab, sirge OX vahemikku (BC) lõigata ei saa ja seetõttu lõikab vahemikku (AB). Lõikepunkt kui nurga ∠AOB sisemine punkt kuulub poolsirgele (OX. Teoreem on tõestatud.

Nurga ∠AOB tipust O nurga sisse kulgevate poolsirgete hulgas võime nüüd sisse tuua järjestuse, kui eelnevalt järjestada nurga haarade paar, lugedes (OA esimeseks haaraks.

Kõneldakse, et nurga ∠AOB sisepiirkonda kuuluvatest poolsirgetest (OX ja (OY esimene eelneb teisele, kui poolsirge (OX on nurga ∠AOY sees (joonis 27).



Joonis 27.

Võtame haaradel (OA ja (OB vabalt punktid A ja B. Teoreemi 25 kohaselt poolsirged (OX ja (OY lõikavad vahemikku (AB) mingites punktides X ja Y.

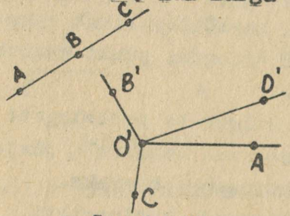
T e o r e e m 26. Poolsirge (OX eelneb poolsirgele (OY nurga ∠AOB sees parajasti siis, kui punktidest X ja Y, milles need poolsirgel lõikavad vahemikku (AB), X eelneb punktile Y poolsirgel (AB.

Tõestus on lihtne, me jätame ta lugeja hooleks.

Siit järeldub, et ülal defineeritud järjestussuhe nurga ∠AOB tipust O nurga sisse kulgevate poolsirgete hulgas rahuldab järjestatud hulga aksioome 1°-3° ja muudab selle hulga järjestatud hulgaks.

Ilmneb huvitav analoogia lõikude ja nurkade vahel - esimesed koosnevad kahest punktist ja nende vahel olevate punktide järjestatud hulgast, teised koosnevad kahest ühise alguspunktiga poolsirgest ja nende vahel olevate sama alguspunktiga poolsirgete järjestatud hulgast.

Selle analoogia põhjal on aga märgatav ka oluline erinevus. Lõik $[AB]$ on jätkatav sirgel AB üle otspunkti B tõkestamatult - võib võtta vabalt lõigu $[BC]$, nii et $\langle ABC \rangle$ oleks tõene, ikkagi saame teatava lõigu AC, mis punktihulgana on $[AB]$ ja $[BC]$ ühend (joonis 28). Nurkade puhul on olukord erinev. Kui nurga $\angle A'O'B'$ puhul võtta nurk $\angle B'O'C'$ nii, et haar $(O'C'$ asuks pooltasandi $(O'B'|A'$ täiendpooltasandil, siis võib osutuda, et nurk $\angle A'O'C'$ ülal defineeritud mõttes üldse ei eksisteeri (kui A', O', C' on kollineaarsed) või ei osutu nurkade $\angle A'O'B'$ ja $\angle B'O'C'$ ühendiks (kui $(O'C'$ on $(O'A'|B'$ ja $(O'B'|A'$ täiendpooltasandite ühisosas; joonis 28).



Joonis 28.

Selleks, et kaotada see erinevus lõikude ja nurkade vahel, üldistame järgnevalt nurga mõistet.

Võtame n eksemplari üht ja sama tasandit ning nummerdame need eksemplarid naturaalarvudega $1, 2, \ldots, n$. Võtame tasandi esimesel eksemplaril nurgad $\angle AOB$ ja $\angle BOC$, nii et $\angle AOC$ ei oleks nende ühendiks. Sel korral võib leida nurga $\angle COD$, nii et $\angle AOB$, $\angle BOC$ ja $\angle COD$ ühendiks on terve tasand, kusjuures selles ühendis nurk $\angle AOD$ esineb n.-ö. kahes eksemplaris (joonis 28). Lepime kokku, et loeme nurga $\angle AOD$ teise eksemplari, mis lisandus kirjeldatud protsessis, kuuluvaks tasandi teisele eksemplarile. Sellel teisel eksemplaril võime minna edasi: võtta nurgad $\angle DOE$ ja $\angle EOF$ nii, et $\angle DOF$ ei osutuks nende ühendiks ja seejärel leida $\angle EOG$ nii, et teatav nurk $\angle AOG$ läheks juba tasandi kolmandale eksemplarile. Seda protsessi võime jätkata lõpmatult, lisades vajaduse korral tasandi uusi eksemplare.

Punktihulka, mille me sel puhul saame (k korda võetud tasandi ja sama tasandi (k+1)-sel eksemplaril asuva punktihulga ühendit) nimetamegi __üldistatud nurgaks__ tipuga O.

Antud tasandi korral nimetatakse kõigi selliste üldistatud nurkade ühendit __lõpmatukordseks tasandiks.__

Teda, samuti nagu üldistatud nurka, võib vaadelda koosnevana poolsirgetest alguspunktiga O, kusjuures sellise poolsirgete hulgana ta on ilmselt järjestatud hulk.

III p e a t ü k k.

R U U M I S T R U K T U U R.

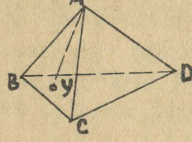
Käesolevas peatükis teeme edasigi järeldusi aksioomidest I_1 - I_6 eeldusel, et planimeetria dimensiooniaksioom (§ 15) ei ole rahuldatud. Peatüki lõpus formuleerime kaks uut aksioomi - stereomeetria dimensiooniaksioomi ja pidevuse aksioomi.

§ 17. T e t r a e e d e r.

Nelja mitte ühel tasandil asetseva punkti A, B, C, D korral kõneldakse, et on antud __tetraeeder__ $\Delta ABCD$. Punkte A, B, C, D nimetatakse tetraeedri __tippudeks__, vahemikke (AB), (BC), (CA), (AD), (BD), (CD) - __servadeks__, kolmnurkade sisepiirkondi (ABC), (ABD), (BCD), (CAD) - __tahkudeks__. Tetraeedri tippude, servade ja tahkude ühendit nimetatakse tetraeedri __piirdeks__. Tasandite ABC, ABD, BCD ja CAD ühendit nimetatakse tetraeedri $\Delta ABCD$ __ülepiirdeks__.

Tuntud viisil võib sisse tuua tipu vastastahu, tahu vastastipu ja vastasservade mõisted.

Tetraeedriga võib täiendavalt siduda veel rea punktihulki: hulka (joonis 29)

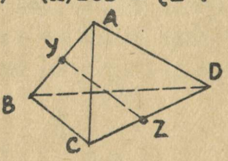


Joonis 29.

(36) $(ABCD) = \{X : (\exists Y)(\langle AXY\rangle \,\&\, [Y \in (BCD)])\}$ nimetatakse tetraeedri $\triangle ABCD$ sisepiirkonnaks, hulka

(37) $(BCD)A = \{X : (\exists Y)(\langle AYX\rangle \,\&\, [Y \in (BCD)])\}$ - laiendiks üle tahu (BCD), hulka

(38) $(A)BCD = \{X : (\exists Y)(\langle XAY\rangle \,\&\, [Y \in (BCD)])\}$ - laiendiks üle tipu A, hulka (joonis 30)



Joonis 30.

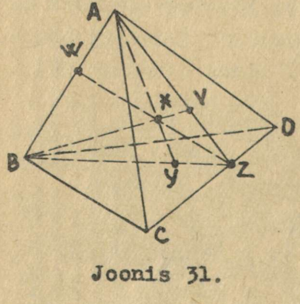
(39) $(AB)CD = \{X : (\exists Y,Z)(\langle XYZ\rangle \,\&\, \langle AYB\rangle \,\&\, \langle CZD\rangle)$ - laiendiks üle serva (AB).

Tetraeedri $\triangle ABCD$ sisepiirkond (ABCD) on defineeritud esialgu tipuga A ja tahu (BCD) mingi punktiga Y määratud vahemike (AY) ühendina.

T e o r e e m 27. Tetraeedri sisepiirkond on ükskõik missuguse tipuga ja selle tipu vastastahu mingi punktiga määratud vahemike ühend, aga samuti ükskõik missuguse serva mingi punktiga ja selle serva vastasserva mingi punktiga määratud vahemike ühend.

T õ e s t u s: Kui $X \in (ABCD)$, siis leiduvad Y ja Z, nii et tõene on (joonis 31)

$$\langle AXY\rangle \,\&\, \langle BYZ\rangle \,\&\, \langle CZD\rangle .$$



Joonis 31.

Sel korral on tõene ka $X \in (ABZ)$ ning järelikult (teoreem 12) leidub V, nii et tõeseks saab

$$\langle BXV\rangle \,\&\, \langle AVZ\rangle \,\&\, \langle CZD\rangle$$

ehk $\langle BXV\rangle \,\&\, \{V \in (ACD)\}$.

Täpselt samuti leidub W, nii et tõeseks saab

$$\langle ZXW\rangle \,\&\, \langle CZD\rangle \,\&\, \langle AWB\rangle .$$

Viimane mõttekäik on seejuures pööratav. Teoreem on tõestatud.

§ 18. R u u m i m õ i s t e.

Nelja mittekomplanaarse punkti A, B, C, D korral nimetatakse ruumiks ABCD selliste punktide X hulka, mis on kollineaarsed mingi kahe erineva punktiga tetraeedri Δ ABCD piirdel.

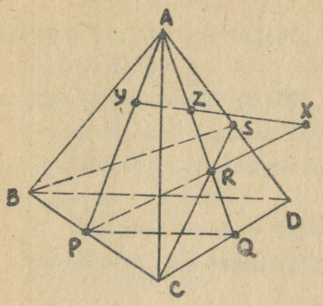
T e o r e e m 28. Ruum ABCD kujutab endast ühendit tetraeedri Δ ABCD ülepiirdest, sisepiirkonnast ja laiendeist üle kõigi tippude, tahkude ja servade.

T õ e s t u s: Olgu X niisuguse ühendi mingi punkt. Kui X asub ülepiirdel, siis ta on kollineaarne kas kahe tipuga või ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu mingil vastasküljel. Kui X on sisepiirkonnas või ühes laiendeist, siis ta on kollineaarne kas ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu vastastahul või mingi kahe punktiga vastasservadel. Kõigil neil juhtudel X on kollineaarne kahe punktiga tetraeedri Δ ABCD piirdel ja kuulub seega ruumi ABCD.

Olgu nüüd, vastupidi, X ruumi ABCD mingi punkt. Ta on siis kollineaarne kahe punktiga Y ja Z tetraeedri Δ ABCD piirdel. Kui kasvõi üks punktidest Y, Z ühtib mõne tipuga või mõlemad on servadel, siis on väide ilmne. Seetõttu jääb uurida kaks juhtu: 1) X ja Y on mõlemad tahkudel, 2) üks neist on serval, teine tahul.

Näitame esmalt, et esimene juht on taandatav teisele. Tõepoolest, olgu Y ja Z näiteks tahkudel (ABC) ja (ACD) (joonis 32). Sel korral A vastaskülgedel leiduvad punktid P ja Q nii, et tõene on $\langle AYP \rangle$ & $\langle AZQ \rangle$. Punkt X kuulub tasandile APQ, järelikult on kollineaarne ühega kolmnurga Δ APQ tippudest P, Q - olgu selleks näiteks P - ja selle tipu vastaskülje mingi punktiga R, mis on ilmselt tahu (ACD) punktiks. Esimene juht ongi taandatud teisele.

Edasine tõestus on järgmine. Küljel (AD) leidub punkt S, nii et tõene on $\langle CRS \rangle$. Punkt X asub nüüd tasandil BCS ja seetõttu kuulub kolmnurga Δ BCS kas sisepiirkonda või mingisse laiendisse - tähendab, ta on kollineaarne kolmnurga Δ BCS



Joonis 32.

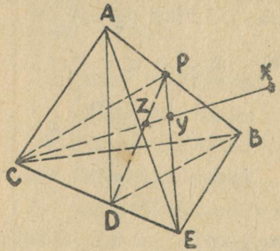
mingi tipuga ja selle tipu vastakülje mingi punktiga. Sellest aga järeldubki, et X kuulub tetraeedri Δ ABCD kas sisepiirkonda või mingisse laiendisse.

Nüüd võime tõestada teoreemi ruumi homogeensusest.

T e o r e e m 29. Ükskõik missugused neli mitte ühel tasandil asuvat punkti E, F, G, H ruumis ABCD võtta, ruum EFGH ühtib alati ruumiga ABCD.

T õ e s t u s: Tõestame esmalt, et iga punkti E korral ruumis ABCD ruumid ABCD ja ABCE ühtivad. Punkt E on seejuures kollineaarne mingi kahe punktiga tetraeedri Δ ABCD piirdel.

Alustame juhuga, kus E on kollineaarne mingi kahe tipuga, näiteks tippudega C ja D. Oletame, et tõene on $\langle CDE \rangle$ (joonis 33). Ülejäänud kaks võimalust - $\langle ECD \rangle$ tõesus ja $\langle CED \rangle$ tõesus - taanduvad sellele kas C ja D või D ja E osade vahetamisega.



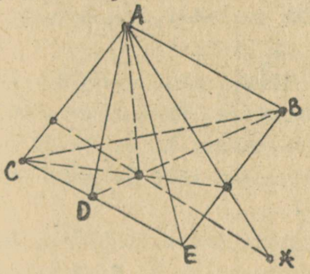
Joonis 33.

Kuulugu X ruumi ABCD. Sel korral ta on kollineaarne tetraeedri Δ ABCD kas 1) kahe tipuga või 2) ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu mingil vastasserval või 3) ühe tipuga ja selle tipu vastastahu mingi punktiga või 4) mingi kahe punktiga vastasservadel. Kerge on veenduda, et kõigil neil juhtudel X on kollineaarne mingi kahe punktiga tetraeedri Δ ABCD piirdel ja kuulub seega ruumi ABCE. Juhtudel 1), 2) ja 4) on see ilmne. Juhul 3) võib kahtlusi tekkida, kui tegemist on tipuga C. Sel korral võime aga tasandil CDX kolmnurga Δ DEP (joonis 33) ja sirge CX suhtes rakendada teoreemi 13.

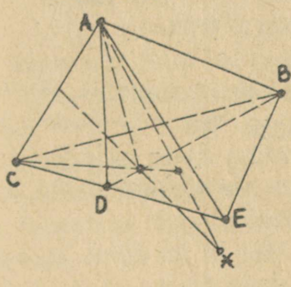
Kuulugu X ruumi ABCE. Sel korral on jällegi tegemist võimalustega 1) - 4), ainult et seekord seoses tetraeedriga $\triangle$ABCE. Ka siin võib veenduda, kuigi mitte enam nii lihtsalt, et kõigil juhtudel X on kollineaarne mingi kahe punktiga tetraeedri $\triangle$ABCD piirdel.

Juhul 1) asub punkt X tetraeedri $\triangle$ABCD mingi kolme tipuga määratud tasandil ja on seega kollineaarne mingi kahe punktiga selle tetraeedri servadel või tippudes. Juhul 2) võib sama öelda tetraeedri $\triangle$ABCE kõigi tippude puhul, välja arvatud tipp A ja serv (BE) ning tipp E ja serv (AB), millal võib aga rakendada teoreemi 16 vastavalt tasandeil ACX (joonis 34) ja CEX.

Juhul 3) tippu C vastastahu punktiga Y ühendav sirge CY (joonis 33) lõikab teoreemi 13 põhjal ka kolmnurga $\triangle$DEP külge PD punktis Z, mis asub ilmselt tahul (ABD). Analoogilise olukorraga on tegemist tipu E puhul. Tipu A puhul vajab küsimus analüüsimist seoses hulga (BDE) punktidega. Siin tuleb rakendada teoreemi 16 tasandil ACX (joonis 35). Tipu B ja hulga (ADE) puhul on olukord analoogiline.



Joonis 34.

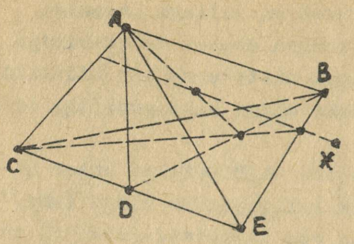


Joonis 35.

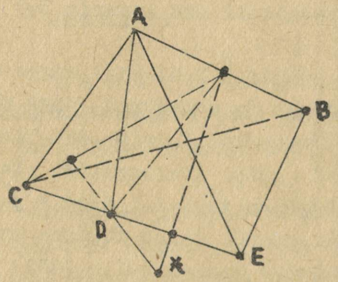
Juhul 4) servade (AC) ja (BE) puhul tuleb rakendada teoreemi 13 tasandil ACX (joonis 36). Samasugune on olukord servade (AE) ja (BC) puhul. Servade (AB) ja (CE) puhul on vahemiku (CD) osas asi ilmne, vahemiku (DE) osas tuleb aga rakendada teoreemi 16 tasandil CDX (joonis 37).

Kokkuvõttes olemegi tõestanud, et kui E on kollineaarne tetraeedri $\triangle$ABCD mingi kahe tipuga, siis ruumid ABCD ja ABCE ühtivad.

Kui E on kollineaarne ühe tipuga (näiteks tipuga A) ja



Joonis 36.



Joonis 37.

punktiga P selle tipu vastasserval (näiteks serval (CD)), siis eespool tõestatu põhjal

ABCD = ABCP = ABCE,

kus võrdusmärk tähendab vastavate ruumide ühtimist.

Kui E on kollineaarne tipuga A ja punktiga P selle vastastahul, siis leidub serval (CD) punkt Q, nii et B, P, Q on kollineaarsed ning

ABCD = ABCQ = ABCP = ABCE.

Kui E on kollineaarne kahe punktiga P ja Q vastasservadel (näiteks servadel, vastavalt, (AB) ja (CD)), siis

ABCD = ABCQ = APCQ = APCE = ABCE.

Kokkuvõttes ongi tõestatud, et iga viie punkti A, B, C, D, E korral ruumid ABCD ja ABCE ühtivad.

Olgu nüüd nelja mitte ühel tasandil asuva punkti A, B, C, D kõrval antud veel teine samasugune nelik E, F, G, H ruumis ABCD. Sel korral

ABCD = ABCH = ABGH = AFGH = EFGH.

Teoreem on tõestatud.

Seoses selle teoreemiga formuleerime järgmise aksioomi.

Stereomeetria dimensiooniaksioom. Iga viis punkti on ühes ruumis.

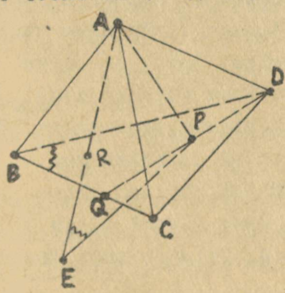
Teoreemist 29 järeldub, et sel korral punktihulk X kujutab endast lihtsalt üht ruumi.

§ 19. T a s a n d i d r u u m i s.

Käesolevas paragrahvis eeldame, et stereomeetria dimensiooniaksioom on rahuldatud. Vaatleme sel korral teoreeme kahe tasandi lõikumisest ja ruumi lahutamisest tasandiga kaheks poolruumiks.

T e o r e e m 30. Kui kahel tasandil on üks ühine punkt, siis neil on veel teine ühine punkt ja seega ka ühine sirge. Kui tasandid on erinevad, siis kõik nende ühised punktid asuvad sellel sirgel.

T õ e s t u s: Olgu kahel tasandil ühine punkt P. Määrame esimese tasandi punktidega PBD ja teise tasandi punktidega PAE ning leiame esimesel neist punktid Q ja C selliselt, et tõene on ⟨DPQ⟩ & ⟨BQC⟩ (joonis 38).

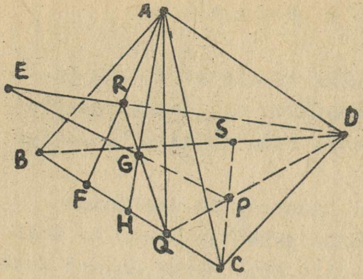


Joonis 38.

Punktid A, B, C, D, E, P, Q on siis kõik ühes ja samas ruumis, mille võime määrata näiteks tetraeedriga △ABCD. Punkti E osas on järgmised võimalused: ta on kollineaarne tetraeedri △ABCD kas 1) kahe tipuga või 2) ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu mingil vastasserval või 3) ühe tipuga ja mingi punktiga selle tipu vastastahul või 4) mingi kahe punktiga vastasservadel.

Esimesel juhul on tasandite ühiseks punktiks üks tippudest B, C, D, teisel juhul üks servade (BC), (CD), (DB) punktidest.

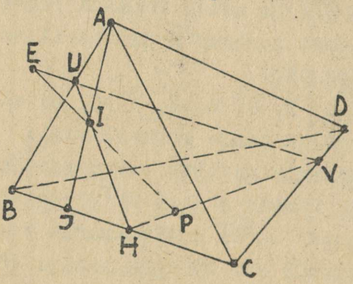
Kolmandal juhul tuleb vaadelda tippe eraldi. Tipu A puhul vastastahu punkt R, mis on kollineaarne punktidega A ja E, ongi tasandite ühiseks punktiks (joonis 38). Tipu D puhul tähistame sirge ED ja tahu (ABC) lõikepunkti tähega R (joonis 39). Teoreemi 13 põhjal on sirgel EP ja kolmnurga △RDQ küljel (RQ) ühine punkt G ning sirgel AG ja kolmnurga △RQF küljel (FQ) ühine punkt H. Viimane ongi tasandite ühiseks



Joonis 39.

punktiks. Ülejäänud kahe tipu puhul on olukord analoogiline, sest meil P on tahu (BCD) punkt ja näiteks C korral leidub punkt S, nii et tõene on ⟨CPS⟩ & ⟨BSD⟩.

Neljandal juhul olgu E kollineaarne punktidega U ja V vastavalt servadel (AB) ja (CD) (joonis 40). Sel korral sirge PV on tasandil BCD ja teoreemi 20 põhjal kas läbib tippu B või lõikab üht servadest (BC), (DB). Lõigaku ta näiteks serva (BC) punktis H. Esimesel juhul B ongi tasandite ühiseks punktiks. Teisel juhul on kerge kindlaks teha ⟨HPV⟩tõesust. Edasi järeldame teoreemist 13, et sirgel EP ja kolmnurga △UVH küljel (HU) on ühine punkt I ning sirgel AI ja kolmnurga △BUH küljel (BH) on ühine punkt J. Viimane ongi tasandite ühine punkt.



Joonis 40.

Mis puutub ülejäänud kahe vastasservapaari juhte, siis need võib taandada vaadeldud juhule tippude B, C, D omavahelise ümbertähistamise teel.

Koos kahe punktiga on tasandeile teoreemi 19 põhjal ühine ka neid punkte ühendav sirge. Kui oletaksime, et tasandeil on veel ühiseid punkte väljaspool seda sirget, siis tasandid peaksid ühtima. Teoreem on tõestatud.

Kõneldakse, et kaks punkti X ja Y, mis ei asu teataval tasandil, on sellest tasandist ühel pool, kui tasand ei lõika vahemikku (XY). Vastupidisel juhul kõneldakse, et X ja Y on teine teisel pool seda tasandit.

T e o r e e m 31. Tasand lahutab kõigi temast väljaspool olevate punktide hulga kahte klassi, nii et iga kaks punkti ühest klassist on tasandist ühel pool ja iga kaks punkti erinevatest klassidest on teine teisel pool tasandit.

Tõestuseks märgime, et teoreem 30 võimaldab rakendada samu mõttekäike, mis leidsid kasutamist teoreemi 22 tõestuses. Üksikasjad jätame siin lugeja hooleks.

§ 20. Desargues'i teoreem sirgete sidumis.

Käesolevas paragrahvis eeldame samuti, et stereomeetria dimensiooniaksioom on rahuldatud.

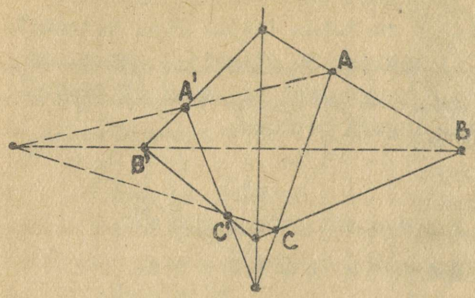
Üht punkti O läbivate sirgete hulka ruumis nimetatakse sirgete <u>sidumiks.</u> Punkti O nimetatakse sidumi <u>keskpunktiks</u>, teda läbivaid tasandeid sidumi tasandeiks.

Märgime, et sidumi iga kaht sirget läbib parajasti üks sidumi tasand ja iga kaks sidumi tasandit lõikuvad teoreemi 30 põhjal mööda teatavat sidumi sirget.

Sidumi kolme mitte ühel tasandil asetseva sirge OA, OB, OC korral kõneldakse, et on antud <u>kolmsirge</u> $O|ABC$. Punkti O nimetatakse selle kolmsirge <u>tipuks</u>, sirgeid OA, OB, OC - <u>servasirgeteks</u>, kolme neid sirgeid paarikaupa sisaldavaid tasandeid OAB, OBC, OCA - <u>tahutasandeiks.</u>

T e o r e e m 32 (Desargues'i teoreem). Kui kahe ühise tipuga kolmsirge $O|ABC$ ja $O|A'B'C'$ servasirgete vahel on korraldatud üksühene vastavus, nii et vastavate servasirgete poolt määratud tasandid OAA', OBB' ja OCC' lõikuvad ühel sirgel OD, siis vastavate tahutasandite lõikesirged asuvad ühel ja samal tasandil.

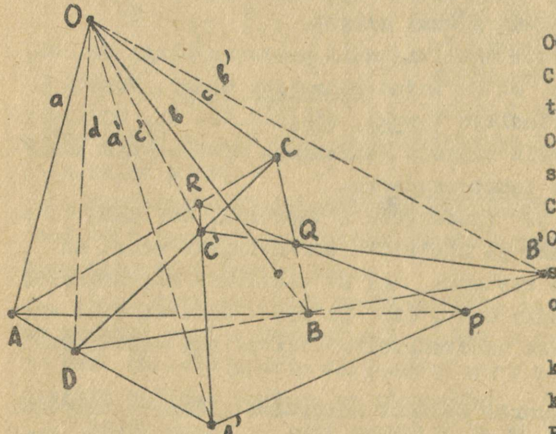
Enne tõestuse juurde asumist selgitame lähemalt teoreemi sisu. Kui me lõikaksime sidumi sirgeid tasandiga, mis ei läbi kolmsirgete ühist tippu O ning lõikab nende kõiki servasirgeid ja sirget OD (oletades, et selline tasand leidub), siis saaksime teoreemi eeldusi rahuldavate kolmsirgete puhul joonisel 41 näidatud pildi - saaksime projektiivse tasandi geomeetriast tuntud Desargues'i teoreemi, millel on selles geomeetrias etendada põhjapanev osa.



Joonis 41.

Asume nüüd meie teoreemi - Desargues'i teoreemi ruumilise variandi tõestuse juurde. Huvitav on märkida, et ka planimeetrilise Desargues'i teoreemi tõestamisel on üleminek ruumi paratamatu, nagu näitas D. Hilbert 1899.a.

T õ e s t u s: Valime sirgetel OA ja OA' punktid A ja A', nii et nad oleksid teine teisel pool sirget OD. Nende vahel asub siis sirge OD mingi punkt D (joonis 42). Sirgel OB' valime punkti B', nii et B' ja D oleksid teine teisel pool sirget OB. Nende vahel on siis sirge OB punkt B.



Joonis 42.

Edasi valime sirgel OC punkti C, nii et C ja D oleksid teine teisel pool sirget OC' ja C ei asuks tasandil ABD. Sel korral C ja D vahel on sirge OC' punkt C' ja tasandid ABC ja A'B'C' on erinevad.

Sirge AB lõikab kolmnurga $\triangle A'B'D$ külge (B'D) punktis B ja külje (DA') pikendit (DA punktis A. Teoreemi 13 põhjal sirged AB ja A'B' lõikuvad mingis punktis P.

Sirge $B'C'$ lõikab kolmnurga ΔBCD külge (CD) punktis C' ning külje (DB) pikendit $(BB'$ punktis B'. Järelikult sirged BC ja $B'C'$ lõikuvad mingis punktis Q. Lõpuks sirge $C'A'$ lõikab kolmnurga ΔACD külge (CD) punktis C' ja külje DA pikendit $(DA'$ punktis A'. Järelikult sirged CA ja $C'A'$ lõikuvad mingis punktis R.

Punktid P, Q ja R on tasandite ABC ja $A'B'C'$ ühised punktid. Et tasandid on erinevad, siis need punktid asetsevad teoreemi 30 põhjal ühel sirgel. Sirged OP, OQ ja OR on aga vastavate tahutasandite lõikesirged – nad asetsevad tõepoolest ühel tasandil. Teoreem on tõestatud.

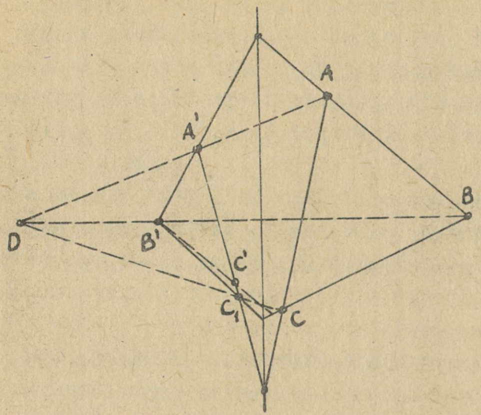
Täpsemalt kõneldes on teoreem tõestatud eeldusel, et sirge d ei ühti ühegagi kolmsirgete servasirgetest. Teoreem kehtib aga ka vastupidisel juhul. Tõestuse jätame siin lugeja hooleks.

Kehtib ka pöördteoreem.

T e o r e e m 33. Kui kahe ühise tipuga kolmsirge $O|ABC$ ja $O|A'B'C'$ servasirgete vahel on korraldatud üksühene vastavus, nii et vastavate tahutasandite lõikesirged asuvad ühel ja samal tasandil, siis vastavate servasirgete poolt määratud tasandid OAA', OBB' ja OCC' lõikuvad ühel sirgel OD.

T õ e s t u s: Tähistame tasandite OAA' ja OBB' lõikesirge tähega OD. Tuleb kindlaks teha, et teoreemi eelduste korral ka tasand OCC' läbib seda sirget. Selleks tähistame tasandite ODC ja $OA'C'$ lõikesirge OC_1 (vt. joonis 43, millel esitatud kujund on saadud sidumi lõikamisel sobivalt valitud tasandiga). Teoreemi tõestamiseks on küllalt näidata, et $OC_1 = OC'$.

Vaatleme kolmsirgeid $O|ABC$ ja $O|A'B'C_1$. Nende vastavaid servasirgeid sisaldavad tasandid OAA', OBB' ja OCC_1 lõikuvad sirgel OD. Teoreemi 26 põhjal vastavate tahutasandite OAB ja $OA'B'$, OAC ja $OA'C_1 = OA'C'$ ning OBC ja $OB'C_1$ lõikesirged asetsevad ühel tasandil. Teoreemi eelduse kohaselt on samal tasandil ka tasutasandite OBC ja $OB'C'$ lõikesirge. Tähendab, tasandid $OB'C'$ ja $OB'C_1$ lõikavad tasandit OBC mööda üht ja sama sirget ning seetõttu ühtivad. Järelikult ühtivad ka sir-

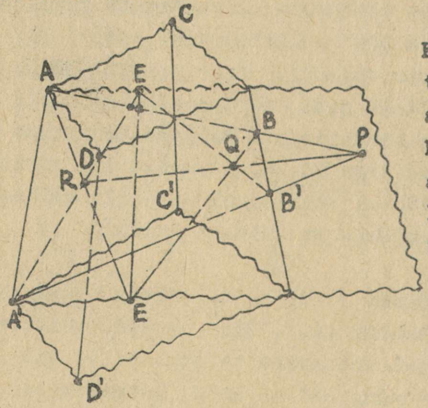


Joonis 43.

ged OC' ja OC_1 ning teoreem on tõestatud. (Olukorra kolmservade erandlike vastastikuste asendite puhul jätame asjast huvitatud lugeja analüüsida).

Oluliseks järelduseks Desargues'i teoreemist ja selle pöördteoreemist on järgmine tulemus.

T e o r e e m 34. Kui sirged AA' ja BB' on ühel tasandil ja punktid C ja D on teine teisel pool seda tasandit, siis tasandite AA'C ja BB'C lõikesirge CC' ning tasandite AA'D ja BB'D lõikesirge DD' asetsevad ühel tasandil.



Joonis 44.

T õ e s t u s: Kui punktid A ja A' asuvad teine teisel pool sirget BB', siis sirged AA' ja BB' lõikuvad mingis punktis O, mis asub igal sirget AA' ja BB' lõikuvad mingis punktis O, mis asub igal sirget AA' või BB' läbival tasandil ning on seega tasandite AA'C ja BB'C ühine punkt. Teoreemi 30 järgi nende tasandite lõikesirge läbib punkti O. Sama võib öelda ka tasandite AA'D ja BB'D lõikesirge kohta. Selle juhu jaoks on teoreem tõestatud.

Olgu A ja A' sirgest BB' ühel pool. Valime tasandil AA'B punkti P, nii et A ja P oleksid teine teisel pool sirget

BB'. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punktid B ja B' sirgel BB' on valitud selliselt, et tõene on ⟨ABP⟩ & ⟨A'B'P⟩ (joonis 44). Tasand CC'D lõikab tasandit AA'B mööda teatavat sirget, millel valime punktid E ja E', nii et E ja B' oleksid teine teisel pool sirget BE'. Sel korral E ja B' vahel on sirge BE' punkt Q. Aksioomi I_6 põhjal nüüd A' ja E vahel on sirge PQ punkt R.

Vaatleme kolmservi C|ABE' ja C|A'B'E. Nende vastavaid servasirgeid sisaldavad tasandid lõikuvad ühel sirgel CC'. Teoreemi 32 põhjal vastavate tahutasandite lõikesirged asuvad ühel tasandil. Siit järeldame, et ka sirge AE' läbib punkti R. Tähendab, kolmservade D|ABE' ja D|A'B'E vastavate tahutasandite lõikesirged asetsevad ühel tasandil DPQ. Teoreemi 33 põhjal vastavaid servasirgeid sisaldavad tasandid lõikuvad ühel sirgel DD'. Nende seas on ka tasand DEE', millel asetsevadki nii sirge CC' kui sirge DD'. Teoreem on tõestatud.

§ 21. Mudel lineaarses ruumis.

Eelmises paragrahvis lõpetasime järelduste tegemise aksioomidest I_1 - I_6. Teooria edasine jätkamine väljuks juba geomeetria aluste raamidest.

Käesolevas paragrahvis tutvume põgusalt matemaatika ühe hästituntud objektiga, milles on võimalik realiseerida aksioome I_1 - I_6 rahuldavat predikaati, ehk nagu kõneldakse, konstrueerida aksiomaatika I_1 - I_6 mudeleid (interpretatsioone). Nende mudelite abil on võimalik ühtlasi selgitada, missuguseid järeldusi aksioomidest I_1 - I_6 kindlasti teha ei saa.

Me märkisime juba § 9 lõpus, et lineaarruumis üle järjestatud korpuse võib sisse tuua aksioome I_1 - I_6 rahuldava vahel-predikaadi. Näitame nüüd, kuidas seda teha.

Järjestatud korpuse all mõistame siin hulka, milles on defineeritud kaks operatsiooni* - liitmine a + b ja korruta-

* Vrd. G. Kangro, Kõrgem algebra, Tallinn 1962, § 13. J.Hion, Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt I, Algebra, TRÜ rotaprint, Tartu 1962, I ptk. , § 5.

mine ab - ning järjestus $a \leqslant b$, nii et 1) hulk moodustab kummagi operatsiooni suhtes kommutatiivse rühma, 2) kehtib distributiivsuse seadus: $(a + b)c = ac + bc$ ning 3) järjestus on operatsioonide suhtes stabiilne: kui $a \leqslant b$, siis $a + c \leqslant b + c$; kui $a \leqslant b$ ja $0 \leqslant c$, siis $ac \leqslant bc$.

Lihtsateks näideteks on ratsionaalarvude ja reaalarvude järjestatud korpused.

Teeme ühe edaspidi vajaliku järelduse tingimustest 1) - 3). Kui $0 \leqslant a$, siis 3) põhjal $0a \leqslant aa$ ehk $0 \leqslant a^2$. Kui $a \leqslant 0$, siis 3) põhjal $a + (-a) \leqslant 0 + (-a)$ ehk $0 \leqslant -a$ ja seega $0 \leqslant (-a)^2 = a^2$. Tähendab, järjestatud korpuse iga elemendi a puhul $0 \leqslant a^2$ (kusjuures võrdus esineb ainult $a = 0$ korral). Iga kahe elemendi a, b puhul saame tänu $0 \leqslant b^2$ kehtivusele tingimuse 3) abil: $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2$. Siinjuures võrdus esineb ainult $a = b = 0$ korral, sest kui $a^2 + b^2 = 0$, siis $a^2 = -b^2 \leqslant 0$, samal ajal kui $0 \leqslant a^2$.

Vaatleme nüüd lineaarruumi L üle järjestatud korpuse K (näiteks üle ratsionaalarvude või reaalarvude korpuse). Korpuse K elemente (skalaare) tähistame endiselt väikeste ladina tähtedega a, b,..., x, ..., lineaarruumi L elemente (vektoreid) - suurte ladina tähtedega A, B, ..., X, ...

Lepime kokku lugeda täislauset $\langle ABC \rangle$ tõeseks parajasti siis, kui <u>A, B, C on kolm erinevat elementi ja leiduvad niisugused skalaarid a, b, c, et</u>

(40) $\underline{aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad ac > 0}$.

Juba esimest kahte tingimust rahuldavad skalaarid on, nagu kerge veenduda, määratud ühise kordaja täpsusega, nii et iga erinevatest elementidest koosneva kolmiku A, B, C korral on predikaadil kindel ühene tõeväärtus, mis määratakse kolmanda tingimusega. Märgime veel, et a ja c on nullist erinevad ja samamärgilised ning b on seega samuti nullist erinev ja nendega võrreldes erimärgiline. Järelikult, (40) kehtivusest järeldub

(41) $B = \lambda A + \mu C, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda + \mu = 1$

kehtivus (siin $\lambda = -\frac{a}{b}$, $\mu = -\frac{c}{b}$). Ilmne on, et ka vastupidi, (41) kehtivusest järeldub (40) kehtivus. Tingimused (41) võib kirjutada ka kujul

(42) $B = \lambda A + (1 - \lambda)C, \ 0 < \lambda < 1.$

Siin piisab nõuda näiteks A ja C erinevust.

Näitame, et niiviisi defineeritud predikaat rahuldab aksioome $I_1 - I_6$.

Aksioomi I_1 nõude rahuldamiseks on küllalt valida vabalt a ja c, nii et $ac > 0$, seejärel leida $b = -(a + c) \neq 0$ ja $C = -\frac{1}{c}(aA + bB)$.

Aksioomi I_2 kehtivus on ilmne.

Aksioomi I_3 kehtivuse kontrollimiseks oletame vastuväiteliselt $\langle ABC \rangle$ & $\langle ACB \rangle$ tõesust:

$$aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad ac > 0, \quad ab > 0.$$

Nagu näha, peaksid a ja c ning a ja b olema nullist erinevad samamärgilised skalaarid ning võrdus $a + b + c = 0$ oleks võimatu.

Selleks, et kontrollida aksioomi I_4, tuleb eelnevalt selgitada punktikolmiku korrektsuse ja kollineaarsuse praegune tähendus.

Predikaadi $[ABC] \equiv \langle ABC \rangle \vee \langle BCA \rangle \vee \langle CAB \rangle$ tõesus tähendab antud juhul ilmselt seoste

$$aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \ c \neq 0$$

kehtivust. Sel korral tõesti skalaaride a, b, c seas mingid kaks on ühemärgilised.

Predikaadi $\{ABC\} \equiv [ABC] \vee (A = B) \vee (B = C) \vee (C = A)$ tõesus tähendab antud juhul ilmselt seoste

$$aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

kehtivust (a, b, c seas ainult üks võib võrduda nulliga). Märgime, et kui näiteks $c = 0$, siis $b = -a \neq 0$ ja $A = B$.

Aksioomi I_4 kehtivuse kontrollimiseks oletame $[ABC]$ & & $\{ABD\}$ tõesust:

$$aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0,$$
$$a_1A + b_1B + d_1D = 0, \quad a_1 + b_1 + d_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + d_1^2 \neq 0.$$

Siit järeldame, et

$$(ab_1 - a_1b)A + cb_1C - bd_1D = 0, \quad (ab_1 - a_1b) + b_1c - - bd_1 = 0.$$

Jääb näidata, et kordajad ei või siin kõik olla võrdsed nulliga. Oletame vastuväiteliselt, et $ab_1 - a_1b = cb_1 = bd_1 = 0$. Et $b \neq 0$, $c \neq 0$, siis $b_1 = d_1 = 0$. Järelikult a_1 peab olema nullist erinev. Teiselt poolt peaks aga olema $ab_1 - a_1b = -a_1b = 0$!

Aksioomi I_5 puhul oletame vastuväiteliselt $\overline{(A = B)}$ & & $(\forall C)\{ABC\}$ tõesust. Sel korral

$$aA + bB + cC = 0, \quad a + b + c = 0, \quad c \neq 0$$

(kui $c = 0$, siis $A = B$, nagu ülal näidatud). Järelikult,

$$C = \lambda A + \mu B, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (\lambda = -\frac{a}{c}, \mu = -\frac{b}{c})$$

iga $C \in L$ korral, muuhulgas ka $C = 0$ puhul:

$$\lambda A + \mu B = 0, \quad \lambda + \mu = 1.$$

Tähendab, A ja B on lineaarselt sõltuvad ja iga $C \in L$ avaldub nende lineaarse kombinatsioonina – L on ühedimensionaalne. Aksioom I_5 nõuab seega, et L oleks vähemalt kahedimensionaalne.

Aksioomi I_6 kehtivuse kontrollimiseks oletame, et A, B, C on kolm mittekollineaarset (ja seetõttu paarikaupa mitte ühtivat) elementi. Olgu D ja E sellised, et

$$B = \lambda A + (1 - \lambda) D, \quad E = \mu B + (1 - \mu)C, \quad 0 < \lambda, \mu < 1.$$

Sel korral D ja E on erinevad elemendid (sest nende ühtimine tooks endaga kaasa, nagu kerge veenduda, A, B, C kollineaarsuse). Tähistame $\tau = \mu(1 - \lambda)$; sel korral $0 < \tau$, $1 - \tau < 1$ (sest $0 < \mu$, $1 - \lambda < 1$) ning me võime leida F, nii et

$$E = \tau D + (1 - \tau) F, \quad 0 < \tau < 1.$$

E ja D mitteühtimise tõttu ka D ja F ei ühti omavahel.

Seejuures

$$F = \frac{1}{1-\tau} E - \frac{\tau}{1-\tau} D = \frac{1}{1-\tau}\{\mu[\lambda A + (1 - \lambda)D] + (1 - \mu)C\} - \frac{\mu(1-\lambda)}{1-\tau} D = \frac{\mu\lambda}{1-\tau} A + \frac{1-\mu}{1-\tau} C = \sigma A + (1 - \sigma) C,$$

kus $\sigma = \frac{\mu\lambda}{1-\tau} = \frac{\mu\lambda}{1-\mu+\mu\lambda}$. Et $0 < \mu\lambda$, $1 - \mu < 1$, siis $0 < \sigma < 1$. Aksioomi I_6 kehtivus on kontrollitud.

Järelikult võib igas lineaarruumis sisse tuua kõik teises ja kolmandas peatükis defineeritud mõisted. Kollineaarsuspredikaadi praegusest tähendusest selgub näiteks kohe, et sirge AB kujutab endast elementide

$$X = \lambda A + \mu B, \quad \lambda + \mu = 1$$

hulka. Poolsirge (AB, vahemik (AB) ja lõik [AB] eraldatakse seejuures välja vastavalt võrratustega $\lambda < 1$, $0 < \lambda < 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, lõigu [AB] pikendid üle otspunktide A ja B vastavalt võrratustega $\lambda > 1$, $\lambda < 0$.

Mittekollineaarsete elementidega A, B, C määratud tasandiks ABC osutub elementide

$$X = \rho A + \sigma B + \tau C, \quad \rho + \sigma + \tau = 1$$

hulk.

Selle näitamiseks uurime punktihulki (ABC), (BC)A, (A)BC (§ 14). Kõik need koosnevad punktidest

$$X = \lambda A + \mu[\lambda' B + \mu' C] = \rho A + \sigma B + \tau C$$

$$\lambda + \mu = \lambda' + \mu' = 1, \ \lambda', \mu' > 0$$

(siin $\rho = \lambda$, $\sigma = \mu\lambda'$, $\tau = \mu\mu'$, $\rho + \sigma + \tau = \lambda + \mu(\lambda' + \mu') = 1$).

(ABC) puhul on $\lambda, \mu > 0$, nii et (ABC) koosneb punktidest

$$X = \rho A + \sigma B + \tau C; \quad \rho, \sigma, \tau > 0; \quad \rho + \sigma + \tau = 1.$$

(BC)A puhul on $\lambda < 0$, ning järelikult $\mu = 1 - \lambda > 1$, nii et (BC)A koosneb punktidest

$$X = \rho A + \sigma B + \tau C; \quad \rho < 0; \quad \sigma, \tau > 0; \quad \rho + \sigma + \tau = 1.$$

(A)BC puhul on $\lambda > 1$, ning järelikult $\mu = 1 - \lambda < 0$, nii et (BC)A koosneb punktidest

$$X = \rho A + \sigma B + \tau C; \quad \sigma, \tau < 0; \quad \rho + \sigma + \tau = 1.$$

Tasand ABC koosneb kõigist sedalaadi laiendeist ja sirgeist AB, BC, CA ning kokkuvõttes tõepoolest punktidest

$$X = \rho A + \sigma B + \tau C; \quad \rho + \sigma + \tau = 1.$$

Vastupidi, iga niisugune punkt kuulub kas ühele sirgetest AB, BC või CA (kui kordajatest ρ, σ, τ mõni on võrdne nulliga) või ühele kolmnurga Δ ABC laiendeist ning seega alati tasandile ABC. Tõepoolest, kolmnurga Δ ABC tipud võib alati tähistada nii, et elemendi X avaldises samamärgiliste kordajatega on B ja C. Kui $\sigma, \tau > 0$, siis $\rho > 0$ puhul $X \in (ABC)$, $\rho < 0$ puhul $X \in (BC)A$; kui $\sigma, \tau < 0$, siis $X \in (A)BC$.

Märgime muuhulgas, et kordajaid ρ, σ, τ elemendi X avaldises tuntakse barütsentriliste koordinaatide nime all (tasandil ABC baaskolmnurga $\triangle ABC$ puhul). Nimetus on tulnud sellest, et punktidesse A, B, C paigutatud masside vastavalt ρ, σ, τ korral masssüsteemi raskuskese asub parajasti punktis X (kr. k. barüs - raske).

Lineaarruumis L ülaltoodud viisil defineeritud vahelpredikaat on määratud ka L igal alamhulgal. Kerge on kindlaks teha, et ta rahuldab planaarstruktuuri aksioome $I_1 - I_6$ mitte üksnes tervel ruumil L, vaid ka selle ruumi igal (vähemalt kahedimensionaalsel) lahtisel kumeral alamhulgal (s.t. niisugusel alamhulgal, millesse koos iga kahe elemendiga A, B kuulub ka teatav neid elemente sisaldav vahemik). Kontrollimist vajavad ainult aksioomid I_1, I_5 ja I_6; kontroll on lihtne, me jätame selle lugeja hooleks.

§ 22. P i d e v u s.

Eespool (§-s 6) me tõime sisse järjestatud hulga pidevuse mõiste (Dedekindi järgi). Teiselt poolt on meil aksioomide $I_1 - I_6$ alusel sisse toodud eriline järjestatud punktihulk - sirge. Käesolevas paragrahvis uurime sirge pidevuse küsimust. Alustame eelmises paragrahvis konstrueeritud mudelist.

Vaatleme sirget AB lineaarruumis L üle järjestatud korpuse K elementide

$$X = \lambda A + \mu B, \quad \lambda + \mu = 1$$

hulka. Elemendi X võime esitada ka kujul

$$X = A + \mu(B - A).$$

Tekib üksühene vastavus $X \leftrightarrow \mu$ sirge AB punktide ja korpuse K elementide vahel. Näitame, et see vastavus säilitab järjestuse: $X \leftrightarrow \mu$, $Y \leftrightarrow \nu$ puhul X eelneb Y-le poolsirgel (AB parajasti siis, kui $0 < \mu < \nu$

Tõepoolest, poolsirge (AB on elementide

$$X = A + \mu(B - A), \quad \mu > 0$$

hulk. X eelneb elemendile $Y = A + \nu(B - A)$, $\nu > 0$, sellel poolsirgel parajasti siis, kui tõene on $\langle AXY \rangle$ (§ 13), s.t. kui leidub λ, nii et

$$A + \mu(B - A) = \lambda[A + \nu(B - A)] + (1 - \lambda)A,$$
$$0 < \lambda < 1$$

ehk

$$\mu(B - A) = \lambda\nu\ (B - A), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Elementide A ja B erinevuse tõttu on selleks tõesti tarvilik ja piisav, et $0 < \mu < \nu$.

Tähendab, sirge kui järjestatud hulk lineaarruumis L üle K on järjestuse suhtes isomorfne järjestatud korpusega K.

Planaarstruktuuri aksiomaatika mudel lineaarruumis L üle K on seega oma järjestusega seotud omaduste osas oluliselt sõltuv korpuses K aset leidvast järjestusest.

Sellise korpuse K lihtsamateks näideteks on:

A. Reaalarvude korpus.

B. Ratsionaalarvude korpus - reaalarvude korpuse selline alamkorpus, mis saadakse arvust 1 nelja põhitehte - liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise - rakendamise teel lõplik arv korda.

C. Korpus Σ - reaalarvude korpuse selline alamkorpus, mis tekib, kui lähtuda arvust 1 ja rakendada lõplik arv korda nelja põhitehet ning viiendat tehet $\sqrt{1 \pm \sigma^2}$, kus σ on varem mainitud viie operatsiooni teel saadud arv.

D. Korpus $\Sigma(t)$ - selliste algebraliste funktsioonide korpus, mis saadakse, kui lähtudes muutujast t rakendada näite C puhul kirjeldatud viit operatsiooni, ning kus järjestus on sisse toodud järgmise kokkuleppega. Korpuse $\Sigma(t)$ iga element on muutuja t algebraline funktsioon ja tal on seetõttu ainult lõplik arv nullkohti, nii et küllalt suurte t väärtuste korral funktsiooniväärtused on kogu aeg kas positiivsed või negatiivsed. Elementide λ ja μ puhul korpusest $\Sigma(t)$ loeme, et $\lambda < \mu$, kui $\nu = \mu - \lambda$ muutuja t funktsioonina on küllalt suurte t väärtuste korral kogu aeg positiivne. Kerge on kindlaks teha, et sel puhul $\Sigma(t)$ muutub järjestatud korpuseks.

Järjestatud hulga üks olulisemaid iseloomustajaid on temas vabalt tehtud lõike tüüp (§ 6). Vaatleme sellelt seisukohalt näiteid A. - D.

Reaalarvude teooriast on teada, et reaalarvude korpus kui järjestatud hulk on pidev - iga lõige temas kujutab endast Dedekindi lõiget.*

Seda ei või aga öelda ratsionaalarvude korpuse ja korpuse Σ kohta: näiteks lõige $a \leq \pi < b$ nendes on mõra (π transtsendentsuse tõttu) - need korpused on mittepidevad.

Mis puutub korpusse $\Sigma(t)$, siis see on samuti mittepidev (nagu selgub hiljem) ning erinevalt eelmistest näidetest "mittearhimeediline": võib näidata kaks elementi, näiteks 1 ja t, nii et esimese ükski kordne ei ületa teist (tõepoolest, n.1 - t on küllalt suurte t väärtuste korral alati negatiivne, ükskõik kui suur n ka võtta).

Esitatud näidetest nähtub, et aksiomaatikal $I_1 - I_6$ on nii pidevaid kui mittepidevaid mudeleid. Siit järeldame, et sirge kui järjestatud punktihulga pidevus ei järeldu veel aksioomidest $I_1 - I_6$ ning seda tuleb, kui see meid huvitab, garanteerida spetsiaalse aksioomiga.

IV (p i d e v u s e   a k s i o o m): Kui vahemik (AB) on lahutatud kahte klassi, nii et esimese klassi iga punkt eelneb teise klassi igale punktile poolsirgel (AB, siis kas esimeses klassis leidub viimane punkt või teises klassis leidub esimene punkt.

Märgime siinjuures, et mis tahes hulga klassijaotuse mõiste on defineeritud §-s 6, punktide järjestus poolsirgel aga §-s 13. Pidevuse aksioomi on võimalik formuleerida ka ainuüksi vahel-predikaadi abil hulgateooria lihtsaid mõisteid kasutades, kuid vastav sõnastus tuleks keerukas ja väheülevaatlik.

Paragrahvis 6 arendatud terminoloogia abil võime öelda, et ülaltoodud aksioom postuleerib vahemiku (AB) pidevuse

---

* Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra I, Tartu 1948, § 4.
J. Hion, Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt I, Algebra, TRÜ rotaprint, Tartu 1962, V ptk., § 3.

(sellest ka nimetus). Kerge on järeldada, et temast tuleneb ka poolsirge ja sirge kui järjestatud punktihulga pidevus. Teoreemist 26 võib järeldada koguni seda, et pidevuse aksioomi kehtivuse korral osutuvad pidevaiks ka nurk ning üldistatud nurk kui poolsirgete järjestatud hulgad - teist spetsiaalset pidevuse aksioomi ühise alguspunktiga poolsirgete järjestatud hulga jaoks tarvis ei ole.

IV peatükk.

ABSOLUUTNE PLANIMEETRIA.

Käesolevas peatükis eeldame endiselt, et teatava hulga $\mathfrak{X}$ (punktide hulga) puhul on hulgal $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ defineeritud aksioome I_{1-6} rahuldav vahel-predikaat $\langle XYZ \rangle$. Seejuures nõuame nüüd, et täidetud oleks ka planimeetria dimensiooniaksioomi nõue (§ 15). Punktihulga $\mathfrak{X}$ (tasandi) kõrval võtame vaatlusse teatava rühma Ω - liikumiste rühma - ning formuleerime hulgal $\mathfrak{X} \times \Omega \times \mathfrak{X}$ määratud predikaadi jaoks seitse aksioomi II_{1-5}, $III_{1,2}$ (mida pidevuse aksioomist loobumise korral tuleb täiendada veel kahe lausega). Kõigi loetletud aksioomidest tulenevate järelduste süsteemi nimetatakse absoluutseks planimeetriaks.*

* Nimetuse pani 1832.a. ette mitteeukleidilise geomeetria üks loojaid János Bolyai. Absoluutne on see planimeetria selles mõttes, et ta ei olene eukleidilise paralleelsuseaksioomi kehtivusest või mittekehtivusest - ta on eukleidilise planimeetria ja Lobatševski-Bolyai planimeetria ühine osa.

13.

§ 23. L i i k u m i s t e r ü h m.

Rühma Ω (§ 7) nimetatakse tasandi $\mathfrak{X}$ __kollineatsioonide rühmaks__, kui hulgal $\mathfrak{X} \times \Omega \times \mathfrak{X}$ on võimalik määrata predikaat, mille me tähistame $X \circ \varphi = Y$, nii et samaselt tõesed on:

II_1 $(\exists B)(A \circ \varphi = B)$,

II_2 $(A \circ \varphi = B) \,\&\, (A \circ \varphi = C) \rightarrow (B = C)$,

II_3 $(A \circ \varphi = B) \,\&\, (B \circ \psi = C) \rightarrow (A \circ (\varphi\psi) = C)$,

II_4 $(A \circ \varphi = B) \rightarrow (B \circ \varphi^{-1} = A)$,

II_5 $\langle ABC \rangle \,\&\, (A \circ \varphi = D) \,\&\, (B \circ \varphi = E) \,\&\, (C \circ \varphi = F) \rightarrow \langle DEF \rangle$.

Rühma Ω elemente nimetame sel puhul tasandi __kollineatsioonideks.__

Selgitame lähemalt, milles seisneb formuleeritud viie aksioomi tähendus.

Predikaat $X \circ \varphi = Y$ võimaldab iga konkreetse $\varphi \in \Omega$ puhul korraldada tasandi punktide vahelise vastavuse: loeme, et punktile A vastab punkt B, kui täislause $A \circ \varphi = B$ on tõene. Aksioomidest II_1 ja II_2 nähtub, et see vastavus on tasandi $\mathfrak{X}$ kujutus iseendaks: igale $A \in \mathfrak{X}$ vastab üks ja ainult üks $B \in \mathfrak{X}$. Aksioomi II_5 abil võib tõestada, et see kujutus on üks-ühene: erinevatele punktidele vastavad erinevad punktid. Tõepoolest,

(I_1) $\overline{(A = B)} \rightarrow (\exists C) \langle ABC \rangle$,

(II_5) $\langle ABC \rangle \,\&\, (A \circ \varphi = D) \,\&\, (B \circ \varphi = E) \,\&\, (C \circ \varphi = F) \rightarrow \langle DEF \rangle$,

(12) $\langle DEF \rangle \rightarrow \overline{D = E}$;

kokkuvõttes: $\overline{(A = B)} \,\&\, (A \circ \varphi = D) \,\&\, (B \circ \varphi = E) \rightarrow \overline{(D = E)}$.

Aksioom II_5 nõuab ühtlasi, et vaadeldav kujutus säilitab vahel-predikaadi tõesuse ning koos sellega tasandi struktuuri: vahemik kujutub vahemikuks, sirge sirgeks, poolsirge poolsirgeks, pooltasand pooltasandiks jne. Sellest, et sirged kujutuvad sirgeteks, on tulnudki nimetus "kollineatsioon" rühma Ω elemendi jaoks.

Aksioomid II_3 ja II_4 näitavad, et kui rühma Ω elemendiga φ seada ülalkirjeldatud viisil vastavusse tasandi $\mathfrak{X}$ üksühene vahel-predikaadi tõesust säilitav kujutus, siis saame rühma Ω esituse sedalaadi kujutuste rühmas: korrutisele $\varphi\psi$ vastab elementidele φ ja ψ vastavate kujutuste järjest teostamise (ehk korrutamise) tulemus, pöördelemendile φ^{-1} vastab elemendile φ vastava kujutuse pöördkujutus. Siit võib muide kergesti järeldada, et rühma Ω ühikelemendile ι vastav kujutus jätab iga punkti paigale: et $\varphi\varphi^{-1} = \iota$, siis II_3 ja II_4 põhjal

$$(A \circ \varphi = B) \ \& \ (B \circ \varphi^{-1} = A) \rightarrow (A \circ \iota = A).$$

Samuti on lihtne kindlaks teha, et kollineatsioonile φ vastab tasandi $\mathfrak{X}$ kujutus iseendale: iga punkti B puhul võib leida punkti A, mis kujutab punkti B - selleks on nimelt B kujutis φ^{-1} puhul.

Lepime kokku antud A ja φ korral punkti B, mis muudab tõeseks täislause $A \circ \varphi = B$, tähistada vajaduse korral lihtsalt $A \circ \varphi$. Näiteks aksioomid II_3 ja II_4 võime siis esitada sel kujul

$$II_3' \quad (A \circ \varphi) \circ \psi = A \circ (\varphi\psi),$$

$$II_4' \quad (A \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = A,$$

nagu nad leiavad tavaliselt kasutamist rühma esituste teoorias.

Selleks, et kollineatsioonide rühma muuta liikumiste rühmaks, tuleb täiendavalt formuleerida kaks aksioomi.

Kirjutiste lihtsustamiseks toome tasandil $\mathfrak{X}$ sisse punktihulga, mis koosneb kiirest [AB ja sirgega AB äärnevast pooltasandist (AB|C, nimetades seda punktihulka <u>reeperiks</u> ja tähistades R(ABC) ehk lihtsalt R. Näitlikult on reeperit R(ABC) kõige lihtsam esitada lipukese abil, mille varda alguspunkt on reeperi alguspunktis A, varras ise suundub mööda poolsirget (AB ja lipu pind asub pooltasandil (AB|C (joonis 45).

Võtame vaatlusse kõigi reeperite hulga $\{R\}$ tasandil $\mathfrak{X}$ ning defineerime hulgal $\{R\} \times \Omega \times \{R\}$ predikaadi

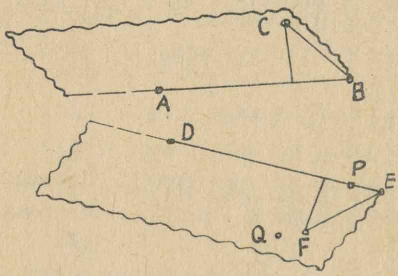
$$R(ABC) \circ \varphi = R'(DEF),$$

lugedes selle täislause tõeseks parajasti siis, kui tõene on (joonis 45)

$(A \circ \varphi = D)$ & $[(B \circ \varphi = P) \rightarrow \{DEP\}$ & $\langle PDE \rangle]$ &

& $[(C \circ \varphi = Q) \rightarrow (\exists H)(\{DEH\}$ & $\langle FHQ \rangle)]$.

Sel korral aksioomi II_5 põhjal reeper R(ABC) kui punktihulk kujutub φ korral reeperiks R(DEF), nii et A kujutiseks on D, B kujutiseks poolsirge (DE mingi punkt P, C kujutiseks pooltasandi (DE|F mingi punkt Q. Aksioomidele II_1 - II_5 tuginedes on kerge kindlaks teha, et kui niisuguse predikaadi $R \circ \varphi = R'$ abil määrata vastavus reeperite vahel, lugedes reeperile R vastavaks sellise reeperi R', mis muudab tõeseks täislause $R \circ \varphi = R'$ (tähistades vajaduse korral seda reeperit lihtsalt $R \circ \varphi$), siis saame hulga $\{R\}$ üksühese kujutuse hulgale $\{R\}$, mille puhul on rahuldatud aksioomid II_3', II_4' (kui nendes punktid asendada reeperitega) - tähendab, saame rühma Ω esituse reeperite hulga $\{R\}$ teisenduste rühmas.



Joonis 45.

Formuleerime nüüd viimased kaks aksioomi.

Tasandi kollineatsioonide rühma Ω nimetatakse <u>liikumiste rühmaks</u> tasandil, kui predikaadi $R \circ \varphi = R'$ puhul on samaselt tõesed

III_1 $(\exists \varphi)(R \circ \varphi = R')$,

III_2 $(R \circ \varphi = R')$ & $(R \circ \psi = R') \rightarrow \varphi = \psi$,

s.t., kui iga kahe reeperi R ja R' korral leidub parajasti üks rühma Ω element, mis muudab tõeseks täislause $R \circ \varphi = R'$. Märgime, et aksioome III_1, III_2 on põhimõtteliselt võimalik formuleerida ka ainuüksi predikaatide $\langle XYZ \rangle$ ja $X \circ \varphi = Y$ (ning ühtimis-predikaadi) abil, kuid vastavad kirjutised tuleksid siis üpris keerukad ja seetõttu vähe ülevaatlikud.

Edaspidi hakkame aksioomide II_1 - II_5, III_1, III_2 nõudeid rahuldava rühma Ω elemente nimetama <u>liikumisteks</u>. Kui tõene on täislause $A \circ \varphi = B$ või $R \circ \varphi = R'$, siis kõneleme vastavalt, et "liikumine φ kannab A punkti B (ehk punkti $A \circ \varphi$)" või "liikumine φ kannab R reeperiks R' (ehk reeperiks $R \circ \varphi$)". Rühma Ω ühikelementi ι nimetame ühikliikumiseks. Ta kannab iga punkti ja reeperi iseendaks (teisiti öeldud, jätab nad paigale). Aksioomist III_2 on lihtne järeldada, et iga liikumine, mis jätab paigale reeperi, ühtib ühikliikumisega ja jätab seetõttu paigale iga punkti.

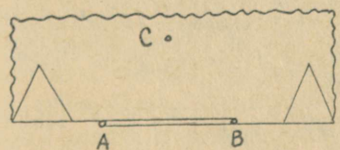
§ 24. Lõigu ja nurga ümberpööramine.

Aksioomidest II_{1-5}, $III_{1,2}$ ei piisa veel liikumiste ja kongruentsuse teooria täielikuks ülesehitamiseks. Neid tuleb täiendada järgmise kahe lausega:

X_1 $\quad [R(ABC) \circ \varphi = R'(BAC)] \to (B \circ \varphi = A)$,

X_2 $\quad [R(OAB) \circ \varphi = R'(OBA)]$ & $(B \circ \varphi = C) \to \{OAC\}$.

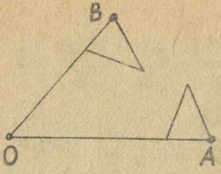
Selgitame kohe nende lausete sisulise tähenduse. Implikatsiooni X_1 eesliikme tõesus tähendab seda, et liikumine φ kannab A punktiks B, poolsirge (AB poolsirgeks (BA, pooltasandi (AB|C aga säilitab (joonis 46). Lause X_1 tõesus tähendab seda, et B kantakse sel puhul täpselt punkti A, nii et seda lauset võib nimetada lauseks lõigu [AB] ümberpööramisest.



Joonis 46.

Implikatsiooni X_2 eesliikme tõesus tähendab seda, et liikumine φ jätab paigale punkti O, kannab (OA poolsirgeks (OB ning (OA|B pooltasandiks (OB|A. Lause X_2 tõesus tähendab seda, et sel puhul B kantakse sirgele OA (joonis 47). Et B teiselt poolt kandub pooltasandile (OB|A, siis punkt $B \circ \varphi$ asub poolsirgel (OA. Lauset X_2 võib seega nimetada lauseks nurga $\angle AOB$ ümberpööramisest.

Lausetega X_1 ja X_2 on lugu selline, et praeguseni ei ole



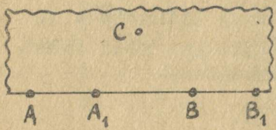
Joonis 47.

õnnestunud anda neile tõestust, mis tugineks üksnes aksioomidele I_{1-6}, II_{1-5}, $III_{1,2}$, ning on vähe usutav, et niisugust tõestust üldse on võimalik anda.* Küll saab aga neid lauseid tõestada pidevuse aksioomi kaasabil.

Järgnevalt esitamegi lausete X_1 ja X_2 vastavad tõestused. Neid tõestusi ei saa nimetada lihtsateks ning lugeja, kes ei ole huvitatud sedalaadi peensustest, võib jätta nad vahele, võttes laused X_1 ja X_2 lihtsalt aksioomideks.

T e o r e e m 35 (joonis 48).

(43) $[R(ABC)\circ\varphi = R'(A_1BC)]$ & $\langle AA_1B\rangle$ & $(B\circ\varphi = B_1)\rightarrow\langle A_1BB_1\rangle$.



Joonis 48.

T õ e s t u s: Implikatsiooni eesliikme tõesusest järeldub, et B_1 asetseb poolsirgel $(A_1B$, nii et tõene on (§ 13)

$(B_1 = B)\vee\langle A_1B_1B\rangle\vee\langle A_1BB_1\rangle$.

Meie ülesandeks on näidata, et selle disjunktsiooni esimesed kaks liiget viivad vastuoluni.

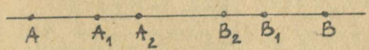
Esimese liikme puhul on seda võrdlemisi lihtne teha. Tõepoolest, kui B_1 ja B ühtiksid, siis φ säilitaks reeperi $R''(BAC)$ ning peaks seega olema ühikliikumine ι, mis antud juhul on muidugi võimatu.

Teise liikme tõesuse vastuolulisust eespool formuleeritud aksioomidega ei ole enam nii lihtne näidata. Siin tulebki kasutada pidevuse aksioomi (§ 22).

Niisiis, olgu tõene $\langle A_1B_1B\rangle$. Punktid $A_1\circ\varphi$ ja $B_1\circ\varphi$ tähistame vastavalt A_2, B_2. Sel korral II_5 põhjal $\langle AA_1B\rangle$ & $\langle A_1B_1B\rangle$ tõesusest järeldub $\langle A_1A_2B_1\rangle$ & $\langle A_2B_2B_1\rangle$ tõesus, sellest kõigest aga (20) ja (23) põhjal $\langle AA_1A_2\rangle$ tõesus (joonis 48).

---

* Lause X_2 kohta võib näiteks kindlasti öelda, et ta ei ole tõestatav ainuüksi aksioomide I_{1-6}, II_{1-5}, $III_{1,2}$ alusel. See järeldub ühest D. Hilberti tööst (Д.Гильберт, Основания геометрии, Москва-Ленинград 1948, Добавление II).



Joonis 48a.

Edasi tähistame punktid $A_2 \circ \varphi$, $B_2 \circ \varphi$ vastavalt A_3 ja B_3. Analoogiliselt leiame, et tõene on $\langle A_2A_3B_2 \rangle$ & $\langle A_3B_3B_2 \rangle$, millest järeldame $\langle AA_2A_3 \rangle$ tõesuse.

Seda protsessi võime jätkata tõkestamatult. Tekib lõpmatu punktide jada $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, mille kõik punktid asuvad vahemikus (AB) ja on selles järjestatud nii, et iga punkt A_i eelneb kõigile jada suurema indeksiväärtusega punktidele $A_j (i < j)$. Seejuures on tõene

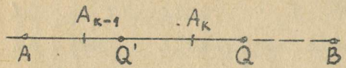
$$(*) \qquad A_n \circ \varphi = A_{n+1} \ .$$

Jaotame vahemiku (AB) punktid kahte klassi. Alamklassi loeme iga niisuguse punkti X, mis eelneb kasvõi ühele jada punktidest A_n, s.t., mille korral on tõene $\langle AXA_n \rangle$. Ülemklassi loeme vahemiku kõik ülejäänud punktid – tähendab, niisugused Y, mis järgnevad jada kõikidele punktidele. Klassijaotuse nõuded on siin ilmselt rahuldatud: kumbki klass pole tühi, nad ei lõiku ning nende ühendiks on terve vahemik (AB). Edasi on kerge veenduda, et pidevuse aksioomi eeldus on rahuldatud (s.t. tegemist on lõikega). Tõepoolest, kui X kuulub alam- ja Y ülemklassi, siis on tõene $\langle AXA_n \rangle$ & $\langle AA_nY \rangle$ ning (24) põhjal ka $\langle AXY \rangle$ – tähendab, X eelneb punktile Y vahemikus (AB).

Pidevuse aksioomi põhjal eksisteerib kas alamklassis punkt P, nii et selle klassi iga punkt X on A ja P vahel, või ülemklassis punkt Q, mis on punkti A ja selle klassi iga punkti vahel. Osutub, et punkti P olemasolu on antud juhul võimatu. Tõepoolest, alamklassi ülal antud definitsiooni kohaselt peaks punkti P korral leiduma A_n, nii et tõene on $\langle APA_n \rangle$. Kuid siinjuures A_n ise on samuti alamklassi punkt, nagu järeldub $\langle AA_nA_{n+1} \rangle$ tõesusest, nii et olemegi jõudnud vastuolule.

Järelikult leidub ülemklassis punkt Q, mis on A ja ülemklassi iga punkti vahel. Kui punkt $Q \circ \varphi$ tähistada Q', siis võivad kõne alla tulla järgmised võimalused: tõene on kas 1) $\langle AQ'Q \rangle$ või 2) $\langle AQQ' \rangle$ või 3) $Q' = Q$. Näitame, et kõik need võimalused viivad samuti vastuolule. Sellega me tõestamegi teoreemi.

Alustame esimese võimalusega (joonis 49). Punkt Q' ei saa sel korral olla ülemklassi punkt (sest siis peaks olema tõene $\langle AQQ'\rangle$ ehk I_3 põhjal $\overline{\langle AQ'Q\rangle}$ ning Q' kuulub seega alamklassi. Järelikult leidub A_n, nii et tõene on $\langle AQ'A_n\rangle$. Teoreemi 7 järjestikuse rakendamise teel võib veenduda, et Q' langeb ühte vahemikest $(A_{k-1}A_k)$, s.t. tõene on $\langle A_{k-1}Q'A_k\rangle$.



Joonis 49.

Võtame vaatluse alla lükke φ pöördliikumise φ^{-1}, mille korral (*) ja II_4 põhjal on tõesed $A_{n+1}\circ\varphi^{-1} = A_n$ ning $Q'\circ\varphi^{-1} = Q$. Aksioomist II_5 ja $\langle A_{k-1}Q'A_k\rangle$ tõesusest järeldub nüüd $\langle A_{k-2}QA_{k-1}\rangle$ tõesus. Viimane on aga võimatu, sest temast tuleneks Q kuuluvus alamklassi, samal ajal kui on teada, et Q on ülemklassi punkt. Seega esimene võimalus - $\langle AQ'Q\rangle$ tõesus - viib vastuoluni.

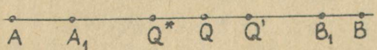
Analüüsime teist võimalust - $\langle AQQ'\rangle$ tõesust. Tähistame $Q\circ\varphi^{-1} = Q^*$ ja näitame, et tõene on siis $\langle Q^*QB\rangle$ (joonis 50):

(25) $\langle AA_1Q\rangle \,\&\, \langle AQQ'\rangle \rightarrow \langle A_1QQ'\rangle$,

II_5 $\langle AQB\rangle \,\&\, (A\circ\varphi = A_1) \,\&\, (Q\circ\varphi = Q') \,\&\, (B\circ\varphi = B_1) \rightarrow$
$\rightarrow \langle A_1Q'B_1\rangle$,

(25) $\langle A_1QQ'\rangle \,\&\, \langle A_1Q'B_1\rangle \rightarrow \langle QQ'B_1\rangle$,

II_5 $\langle QQ'B_1\rangle \,\&\, (Q\circ\varphi^{-1} = Q^*) \,\&\, (Q'\circ\varphi^{-1} = Q) \,\&$
$\& \, (B_1\circ\varphi = B) \rightarrow \langle Q^*QB\rangle$.



Joonis 50.

Tähendab, Q^* kuulub poolsirgele (QA ning tõene on $\langle AQ^*Q\rangle \vee \langle Q^*AQ\rangle \vee (Q^* = A)$. Siin $\langle AQ^*Q\rangle$ tõesuse puhul Q^* kuulub alamklassi, mistõttu leiduvad A_{k-1} ja A_k, nii et $\langle A_{k-1}Q^*A_k\rangle$ on tõene. Aksioomi II_5 rakendamisel φ puhul jõuame nüüd $\langle A_kQA_{k+1}\rangle$ tõesuseni, see aga, nii nagu varemgi, viib vastuoluni. Ka $\langle Q^*AQ\rangle \vee (Q^* = A)$ tõesus annab vastuolu - II_5 põhjal peaks tõene olema $\langle QA_1Q'\rangle \vee (Q = A_1)$. Teine võimalus on seega samuti võimatu.

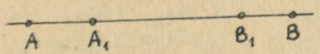
Kolmanda võimaluse - $Q' = Q$ tõesuse puhul liikumine φ säilitaks punkti Q, poolsirge $(OA$ ja pooltasandi $(QA|C$, kokkuvõttes reeperi $R^*(QAC)$, ning peaks seetõttu ühtima ühikliikumisega ι. See on aga vastuolus eeldusega $\langle AA_1B\rangle$ & & $(A\circ\varphi = A_1)$ tõesuse kohta.

Nüüd võimegi tõestada lause X_1 lõigu $[AB]$ ümberpööramisest.

T e o r e e m 36. Liikumine ψ, mis kannab reeperi $R(ABC)$ reeperiks $R'(BAC)$, kannab B punkti A.

T õ e s t u s: Tähistame punkti, kuhu liikumine ψ kannab punkti B, tähega A_1, ning oletame vastuväiteliselt, et $A_1 \neq A$. Sel korral on kaks võimalust: tõene on kas 1) $\langle AA_1B\rangle$ või 2) $\langle A_1AB\rangle$.

Analüüsime esimest võimalust. Liikumine ψ kandku A_1 punkti B_1. Aksioomi II_5 põhjal $\langle AA_1B\rangle$ tõesusest järeldub $\langle BB_1A_1\rangle$ tõesus, sellest aga ühelt poolt poolsirgete $(A_1B_1$ ja $(A_1B$ ühtimine, teiselt poolt $\langle AB_1B\rangle$ tõesus (joonis 51).



Joonis 51.

Vaatleme liikumist $\varphi = \psi\circ\psi$. Paragrahvis 24 tehtud kokkuleppe põhjal võime siis kirjutada

$$A\circ\varphi = A\circ(\psi\psi) = (A\circ\psi)\circ\psi = B\circ\psi = A_1,$$
$$B\circ\varphi = B\circ(\psi\psi) = (B\circ\psi)\circ\psi = A_1\circ\psi = B_1,$$

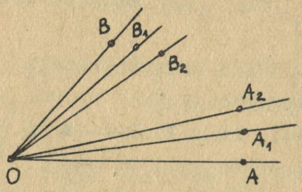
nii et liikumine φ kannab poolsirge $(AB$ poolsirgeks $(A_1B_1$ ehk $(A_1B$ - tähendab, kannab poolsirge $(AB$ iseendasse, säilitades pooltasandi $(AB|C$. Järelikult on tõene $[R(ABC)\circ\varphi = R'(A_1BC)]$ & $\langle AA_1B\rangle$ & $(B\circ\varphi = B_1)$. Teoreemi 35 põhjal peaks B olema A ja B_1 vahel, samal ajal kui on teada, et tõene on $\langle AB_1B\rangle$. Esimene võimalus viib vastuoluni.

Teisel juhul, kui tõene on $\langle A_1AB\rangle$, saame II_5 põhjal $\langle B_1BA_1\rangle$ tõesuse. Selle juhu saame taandada eelmisele, kui vahetame A ja B_1 ning B ja A_1 osad, ning asendame ψ liikumisega ψ^{-1}.

Teoreem on tõestatud.

Analoogiliselt võib pidevuse aksioomi abil tõestada lause X_2. Selleks veendume kõigepealt järgmise teoreemi kehtivuses.

T e o r e e m 37. Kui poolsirge $(OA_1$ asub nurga $\angle AOB$ sees, siis liikumine φ, mis kannab reeperi $R(OAB)$ reeperiks $R(OA_1B)$, ei saa säilitada poolsirget $(OB$ ega kanda teda nurga $\angle AOB$ sisse (joonis 52).



Joonis 52.

T õ e s t u s: Kui φ säilitaks poolsirge $(OB$, siis ta säilitaks ka pooltasandi $(OB|A$ ning peaks olema ühikliikumine ε, mis antud juhul on muidugi võimatu.

Kui φ kannaks $(OB$ nurga $\angle AOB$ sisse poolsirgeks $(OB_1$, siis $(OB_1$ saaks asetseda ainult nurga $\angle A_1OB$ sees (sest pooltasand $(OA|B$ kantakse pooltasandiks $(OA_1|B)$. Sel puhul φ kannaks poolsirge $(OA_1$ nurga $\angle A_1OB_1$ sisse poolsirgeks $(OA_2$, poolsirge $(OB_1$ aga nurga $\angle A_2OB_1$ sisse poolsirgeks $(OB_2$ jne. Sel viisil jätkates saaksime poolsirgete jada $(OA_1$, $(OA_2$, ..., kusjuures nende poolsirgete järjestus nurga $\angle AOB$ sees ühtiks nende järjestusega jadas.

Edasine mõttekäik kopeerib tunduval määral teoreemi 35 tõestust ja me ei hakka teda enam siin kordama. Kasutada tuleb samuti pidevust, mis § 22 lõpus tehtud märkuse põhjal leiab aset ka nurga sees kulgevate poolsirgete järjestatud hulgas.

Nüüd võib tõestada lause X_2 nurga ümberpööramise kohta.

T e o r e e m 38. Liikumine ψ, mis kannab reeperi $R(OAB)$ reeperiks $R'(OBA)$, kannab poolsirge $(OB$ poolsirgeks $(OA$, vahetades sellega nurga $\angle AOB$ haarad.

Tõestus erineb teoreemi 36 tõestusest ainult mõningate ebaoluliste üksikasjade poolest, mistõttu puudub vajadus teda siin korrata.

§ 25. D e s c a r t e s'i m u d e l.*

Käesolevas paragrahvis konstrueerime absoluutse planimeetria ühe mudeli. Selleks vaatleme kahedimensionaalset lineaarruumi L üle järjestatud korpuse K, ehitame temas planaarstruktuuri aksiomaatika mudeli (§ 21), täiendame seda sobivalt valitud rühmaga Ω (liikumiste rühmaga), defineerime predikaadi $X \circ \varphi = Y$ ja kontrollime aksioomide II_{1-5}, $III_{1,2}$ kehtivust.

Kahemõõtmelise lineaarruumi L element A on teatavasti samastatav korpuse K elementidest a_1, a_2 moodustatud reaga:

$$A = (a_1, a_2),$$

nii et $A + B = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$, $\lambda A = (\lambda a_1,\ \lambda a_2)$.

Rühma Ω elementideks (liikumisteks) valime paarid $\varphi = (\Phi, \varphi_0)$, kus

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

on ortogonaalmaatriks (s.t. niisugune maatriks, et $\Phi\Phi' = E$) ja $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02})$ on rida (s.t. üherealine maatriks). Paaride φ ja $\psi = (\Psi, \psi_0)$ korrutiseks loeme paari

$$\varphi\psi = (\Phi\Psi,\ \varphi_0\Psi + \psi_0),$$

kus sulgude sees on tegemist tavalise maatriksalgebra operatsioonidega; ühikelemendiks (ühikliikumiseks) loeme paari $\varepsilon = (E, 0)$, kus E on ühikmaatriks; φ pöördelemendiks loeme paari $\varphi^{-1} = (\Phi^{-1}, -\varphi_0\Phi^{-1})$, kus Φ^{-1} on Φ pöördmaatriks. Et ortogonaalmaatriksid moodustavad rühma**, siis moodustavad rühma ka vaadeldavad paarid, nagu kerge kontrollida.

Defineerime nüüd hulgal $\mathfrak{X} \times \Omega \times \mathfrak{X}$ predikaadi $X \circ \varphi = Y$, lugedes selle täislause $A \circ \varphi = B$ tõeseks parajasti siis, kui

---

* Käesolev ja järgmine paragrahv on siinkohal mõeldud lugeja silmaringi laiendamiseks. Soovi korral võib nende sisuga tutvumise lükata edasi, sest otseselt kasutamist leiab vastav materjal alles §-s 32.

** Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra, Tallinn 1962, lk. 441.

$$B = A\Phi + \varphi_0 .$$

Siin on paremal pool tegemist tavalise maatriksalgebra operatsioonidega.

Näitame, et sel viisil defineeritud predikaadi puhul on rahuldatud aksioomid II_{1-5}, $III_{1,2}$.

Aksioomide II_1 ja II_2 puhul on see ilmne. Aksioome II_3 ja II_4 kontrollime nende teisendatud kujude II_3' ja II_4' järgi, arvestades, et antud juhul

$$A\circ\varphi = A\Phi + \varphi_0 ,$$

mistõttu tõepoolest

$$(A\circ\varphi)\circ\psi = (A\Phi+\varphi_0)\circ\psi = (A\Phi+\varphi_0)\Psi + \psi_0 = A(\Phi\Psi) + (\varphi_0\Psi + \psi_0) =$$
$$= A\circ(\varphi\psi),$$

$$(A\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = (A\Phi+\varphi_0)\circ\varphi^{-1} = (A\Phi + \varphi_0)\Phi^{-1} - \varphi_0\Phi^{-1} = A\Phi\Phi^{-1} = A.$$

Aksioomi II_5 kontrollimiseks oletame $\langle ABC\rangle$ tõesust ehk võrduse

$$B = \lambda A + (1-\lambda)C, \quad 0 < \lambda < 1$$

kehtivust ja näitame, et sama võrdust samasuguse λ väärtusega rahuldavad ka $A\circ\varphi$, $B\circ\varphi$ ja $C\circ\varphi$. Tõepoolest,

$$B\circ\varphi = [\lambda A + (1-\lambda)C]\Phi + \varphi_0 = \lambda[A\Phi + \varphi_0] + (1-\lambda)[C\Phi + \varphi_0] =$$
$$= \lambda(A\circ\varphi) + (1-\lambda)(C\circ\varphi).$$

Aksioomide $III_{1,2}$ kontrollimine on mõnevõrra keerukam. Tähelepanelik lugeja on muidugi juba märganud analoogiat käsitletava mudeli ja tavalise analüütilise geomeetria vahel tasandil. See analoogia aitab meid ka edaspidi, kuid et me järjestatud korpuse K all ei mõtle just tingimata reaalarvude korpust ja teiselt poolt soovime täielikult välja sulgeda näitlikkuse momenti, siis esitame järgnevad arutlused puht-formaalsel kujul. Lugeja ise peab leidma analoogia n.-ö. "näitliku" analüütilise geomeetria vastavate võtetega.

Aksioomi III_1 puhul vaatleme reepereid $R_0(OIJ)$ ja $R(ABC)$, kus $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$, $J = (0, 1)$, ning näitame esmalt, kuidas leida φ, nii et $R\circ\varphi = R_0$ oleks tõene.

Kõigepealt võtame paari $\psi = (E, -A)$, mille korral

$$A\circ\psi = AE - A = 0$$

ning seetõttu $R\circ\psi = R'(ODE)$, kus $D = B\circ\psi = (d_1, d_2)$, $E = C\circ\psi$. Seejärel moodustame paari $\varphi_0 = (\Phi_0, 0)$, kus

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} & -\frac{d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \\ \frac{d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} & \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \end{pmatrix}$$

on, nagu kerge kontrollida, teatav eriline, paari D komponentide abil moodustatud ortogonaalmaatriks. Märgime, et Φ_0 elemendid kuuluvad korpusse K nende ja ainult nende korpuste puhul, mis on kinnised operatsiooni $\sqrt{1 + \omega^2}$ suhtes (s.t. võrrandi $x^2 = 1 + \omega^2$ lahendamise suhtes; vt. näiteid §-s 22), nii et meil tuleb siin piirduda ainult sedalaadi korpustega.

Näitame, et $D \circ \varphi_0 = D^*$ asetseb poolsirgel (OI. Tõepoolest,

$$D \circ \varphi_0 = D\Phi_0 = (\sqrt{d_1^2 + d_2^2}, 0) = \lambda O + (1 - \lambda)I,$$

kus $1 - \lambda = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} > 0$ seega tõesti $\lambda < 1$ (vrd. § 21).

Tähistame $E \circ \varphi_0 = E^* = (e_1^*, e_2^*)$ ja määrame paari η järgmiselt: kui $e_2^* > 0$ (s.t., kui E^* juba asub pooltasandil (OI|J , siis võtame $\eta = \iota$; kui $e_2^* < 0$, siis võtame $\eta = (E', 0)$, kus

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kokkuvõttes on kindlaks tehtud, et tõesed on

$$R \circ \psi = R', \quad R' \circ \varphi_0 = R^*(OD^*E^*), \quad R^* \circ \eta = R_0 ,$$

mistõttu on tõene ka

$$((R \circ \psi) \circ \varphi_0) \circ \eta = R_0$$

ehk

$$R \circ \varphi = R_0,$$

kus $\varphi = \psi \varphi_0 \eta$.

Olgu nüüd antud vabalt kaks reeperit R ja R_1. Nagu äsja näitasime, leiduvad φ ja φ_1 selliselt, et tõesed on $R \circ \varphi = R_0$ ja $R_1 \circ \varphi_1 = R_0$. Sel korral on tõesed ka $R_0 \circ \varphi_1^{-1} = R_1$, $(R \circ \varphi) \circ \varphi_1^{-1} = R_1$ ning

$$R \circ \chi = R_1,$$

kus $\chi = \varphi\varphi_1^{-1}$. Aksioomi III_1 kehtivus antud juhul on kontrollitud.

Aksioomi III_2 kehtivuses veendumiseks näitame kõigepealt, et iga φ, mille korral on tõene $R_0(OIJ)\circ\varphi = R_0(OIJ)$, ühtib ühikelemendiga $\varepsilon = (E, 0)$. Tõepoolest, niisuguse φ puhul on tõene $O\circ\varphi = O$ ehk kehtib

$$O\Phi + \varphi_0 = 0;$$

siit

$$\varphi_0 = 0.$$

Edasi peab $I = (1, 0)$ jääma poolsirgele $(OI$.

Et

$$I\circ\varphi = I\Phi + \varphi_0 = (1, 0)\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix} = (\varphi_{11}, \varphi_{12})$$

ja poolsirge $(OI$, nagu eespool selgus, koosneb elementidest $\lambda O + (1 - \lambda)I = (1 - \lambda)(1, 0)$, $\lambda < 1$, s.t. ridadest $(\mu, 0)$, $\mu > 0$, siis

$$\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{11} > 0.$$

Tingimusest $\Phi\Phi' = E$ ehk

$$\begin{pmatrix}\varphi_{11} & 0\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21}\\ 0 & \varphi_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

saame nüüd seosed

$$\varphi_{11}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{21} = 0, \quad \varphi_{21}^2 + \varphi_{22}^2 = 1,$$

millest eelnevat arvestades järeldame:

$$\varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \varphi_{22} = \pm 1.$$

Et $J\circ\varphi = (0, 1)\Phi = (0, \varphi_{22})$ peab asuma pooltasandil $(OI|J$, siis $\varphi_{22} > 0$ ja seega $\varphi_{22} = +1$.

Kokkuvõttes $\Phi = E$, $\varphi_0 = 0$, nii et tõesti, paar φ, mille puhul on tõene

$$R_0\circ\varphi = R_0,$$

ühtib ühikpaariga $\varepsilon = (E, 0)$: $\varphi = \varepsilon$.

Olgu nüüd kahe vabalt võetud reeperi R ja R' korral tõene

$$(R\circ\varphi = R') \;\&\; (R\circ\psi = R').$$

Sel korral on tõesed ka $R'\circ\psi^{-1} = R$, $(R\circ\varphi)\circ\psi^{-1} = R$ ehk

$$R \circ (\varphi\psi^{-1}) = R.$$

Juba kontrollitud III_1 põhjal leidub χ, nii et $R \circ \chi = R_0$, $R_0 \circ \chi^{-1} = R$. Tähendab,

$$(R_0 \circ \chi^{-1}) \circ (\varphi\psi^{-1}) = R_0 \circ \chi^{-1}$$

ehk

$$R_0 \circ (\chi^{-1}\varphi\psi^{-1}\chi) = R_0.$$

Siit

$$\chi^{-1}\varphi\psi^{-1}\chi = \varepsilon$$

ehk

$$\varphi = \psi.$$

Sellega on aksioomide kontrollimine ja ühtlasi mudeli konstrueerimine lõpule viidud. Mittepideva korpuse K puhul tuleks õieti kontrollida veel lausete X_1, X_2 kehtivust selles mudelis, selle kontrolli aga jätame asjast huvitatud lugeja enda hooleks.

Et konstrueeritud mudel reaalarvude korpuse K puhul kopeerib Descartes'i poolt XVII sajandil rajatud tasandilist analüütilist geomeetriat, siis on teda kohane nimetada Descartes'i mudeliks.

§ 26. Beltrami-Kleini[*] mudel.

Märksa suuremat huvi pakub absoluutse planimeetria teine mudel, mis geomeetria ajaloos etendas olulist osa Lobatševski geomeetria vasturääkimatuse probleemi lahendamisel.

Selle mudeli seos tavalise analüütilise geomeetriaga on juba keerukam. Enne kui asuda mudeli formaalsele ülesehitamisele, kirjeldame lühidalt näitlikke lähtekohti.

Vaatleme tasandil ringi ning piirdume punktidega selle ringi sisemusest. Kui vahel-predikaati mõista tavalisel näitlikul kujul, siis "sirgeks" tuleb lugeda selle ringi kõõl. Peamine raskus on siin seotud liikumiste tõlgendamisega. Et

---

[*] Vt. allmärkus § 25 alguses.

liikumiste puhul vahel-predikaadi tõesus säilib, siis tulevad kõne alla ainult sellised ringi sisemuse üksühesed kujutused iseendale, mille puhul suvaline kõõl kujutub jällegi teatavaks kõõluks. Analüütilisest geomeetriast on teada punktide kollineaarsust säilitavad teisendused - projektiivsed teisendused (kollineatsioonid) murdlineaarsete teisendusvalemitega.

$$(44)\qquad x_i' = \frac{x_1\varphi_{1i} + x_2\varphi_{2i} + \varphi_{3i}}{x_1\varphi_{13} + x_2\varphi_{23} + \varphi_{33}} \quad (i = 1,2).$$

Tuleb garanteerida, et need teisendused säilitaksid ringi sisemuse. Kui koordinaadistik tasandil valida selliselt, et vaadeldava ringjoone võrrandiks on

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

siis kergesti kontrollitava võrduse

$$\begin{aligned}(45)\qquad x_1'^2 + x_2'^2 - 1 = (x_1\varphi_{13} + x_2\varphi_{23} + \varphi_{33})^{-2}\{&x_1^2(\varphi_{11}^2 + \varphi_{12}^2 - \\ &-\varphi_{13}^2) + x_2^2(\varphi_{21}^2 + \varphi_{22}^2 - \varphi_{23}^2) + \\ &+ 2x_1x_2(\varphi_{11}\varphi_{21} + \varphi_{12}\varphi_{22} - \varphi_{13}\varphi_{23}) + \\ &+ 2x_1(\varphi_{11}\varphi_{31} + \varphi_{12}\varphi_{32} - \varphi_{13}\varphi_{33}) + \\ &+ 2x_2(\varphi_{21}\varphi_{31} + \varphi_{22}\varphi_{32} - \varphi_{23}\varphi_{33}) + \\ &+ (\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2 - \varphi_{33}^2)\}\end{aligned}$$

alusel on loomulik teisenduse (44) kordajatele seada järgmised kitsendused:

$$\begin{aligned}(46)\qquad &\varphi_{11}^2 + \varphi_{12}^2 - \varphi_{13}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{21} + \varphi_{12}\varphi_{22} - \varphi_{13}\varphi_{23} = 0,\\ &\varphi_{21}^2 + \varphi_{22}^2 - \varphi_{23}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{31} + \varphi_{12}\varphi_{32} - \varphi_{13}\varphi_{33} = 0,\\ &\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2 - \varphi_{33}^2 = -1, \quad \varphi_{21}\varphi_{31} + \varphi_{22}\varphi_{32} - \varphi_{23}\varphi_{33} = 0.\end{aligned}$$

Maatrikseid

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix}$$

mille elemendid rahuldavad seoseid (46), nimetatakse <u>pseudoortogonaalseteks.</u> Nende lihtsamaks defineerimiseks toome sisse maatriksi φ pseudotransponeerimise operatsiooni - üleminek maatriksilt φ maatriksile

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & -\varphi_{31} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & -\varphi_{32} \\ -\varphi_{13} & -\varphi_{23} & \varphi_{33} \end{pmatrix}$$

(siin on tegemist tavalise transponeerimisega ja märkide vahetamisega viimases reas ja seejärel viimases veerus). Seosed (46) võib nüüd maatrikskujul kirja panna järgmiselt:

$$\varphi\varphi^* = E. \tag{47}$$

See võrdus on teatavasti samaväärne võrdusega

$$\varphi^*\varphi = E \tag{48}$$

ehk seostega

$$\begin{aligned} &\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 - \varphi_{31}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{12} + \varphi_{21}\varphi_{22} - \varphi_{31}\varphi_{32} = 0 \\ (49)\quad &\varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 - \varphi_{32}^2 = 1, \quad \varphi_{11}\varphi_{13} + \varphi_{21}\varphi_{23} - \varphi_{31}\varphi_{33} = 0, \\ &\varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^2 - \varphi_{33}^2 = -1, \quad \varphi_{12}\varphi_{13} + \varphi_{22}\varphi_{23} - \varphi_{32}\varphi_{33} = 0. \end{aligned}$$

Kerge on veenduda, et pseudoortogonaalmaatriksid moodustavad rühma. Selleks teeme kõigepealt kindlaks järgmise kergesti kontrollitava võrduse

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$$

ning märgime, et kui $\varphi\varphi^* = E$, $\psi\psi^* = E$, siis $\varphi^* = \varphi^{-1}$ ja seega

$$(\varphi\psi)(\varphi\psi)^* = \varphi\psi\psi^*\varphi^* = \varphi E \varphi^* = E,$$

$$(\varphi^{-1})(\varphi^{-1})^* = \varphi^*\varphi^{**} = (\varphi^*\varphi)^* = E^* = E.$$

Pseudoortogonaalmaatriksite rühma nimetatakse sageli <u>Cayley-</u>

Kleini rühmaks (ka Lorentzi rühmaks, eriti kui on tegemist neljandat järku maatriksitega).

Edaspidi tuleb piirduda niisuguste pseudoortogonaalmaatriksitega φ, milledes alumine parempoolne element on positiivne: $\varphi_{33} > 0$. Näitame, et ka need moodustavad rühma. Selleks on tarvis tõestada, et võrratus $\varphi_{33} > 0$ säilib pseudoortogonaalmaatriksite korrutamisel. Maatriksite φ ja ψ korrutise $\chi = \varphi\psi$ alumiseks parempoolseks elemendiks on

$$\chi_{33} = \varphi_{31}\psi_{13} + \varphi_{32}\psi_{23} + \varphi_{33}\psi_{33}.$$

Kui $\varphi_{33} > 0$, $\psi_{33} > 0$, siis võrratuse $\chi_{33} > 0$ tõestamiseks on tarvis näidata, et

$$|\varphi_{31}\psi_{13} + \varphi_{32}\psi_{23}| < \varphi_{33}\psi_{33}.$$

Lähtume seostest (46) ja (49) järelduvatest võrratustest

$$\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2 < \varphi_{33}^3,$$

$$\psi_{13}^2 + \psi_{23}^2 < \psi_{33}^2,$$

milledest Cauchy võrratuse abil saamegi

$$(\varphi_{31}\psi_{13} + \varphi_{32}\psi_{23})^2 \leq (\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2)(\psi_{13}^2 + \psi_{23}^2) < \varphi_{33}^2\psi_{33}^2 .$$

Peale neid ettevalmistusi asume nüüd absoluutse geomeetria uue mudeli konstrueerimisele.

Hulga $\mathfrak{X}$ elementideks - punktideks - valime niisugused järjestatud korpuse K elementidest moodustatud read

$$A = (a_1, a_2),$$

mille korral

$$a_1^2 + a_2^2 < 1.$$

Nende ridade puhul defineerime lineaarsed tehted:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2), \lambda \in K,$$

ja skalaarkorrutise

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2;$$

täislause $\langle ABC \rangle$ loeme tõeseks parajasti siis, kui

$$B = \lambda A + (1 - \lambda)C, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Sel puhul read A, mille korral $A^2 = a_1^2 + a_2^2 < 1$, moodustavad lahtise kumera hulga kõigi ridade (x_1, x_2) kahedimensionaalses eukleidilises ruumis $(x_i \in K)$. Tõepoolest, Cauchy võrratuse järgi $(AC) \leq A^2C^2$, mistõttu $A^2 < 1$, $C^2 < 1$ puhul $(AC) < 1$ ja seega

$$B^2 = [\lambda A + (1 - \lambda)C]^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda(1 - \lambda)AC + (1 - \lambda)^2 C^2 <$$
$$< \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 = 1.$$

Järelikult, hulk $\mathfrak{X}$ ülaldefineeritud vahel-predikaadiga kujutab endast planaarstruktuuri aksiomaatika I_{1-6} mudelit (§ 21). Täiendame seda mudelit niisuguste pseudoortogonaalmaatriksite rühmaga Ω, milledes $\varphi_{33} > 0$ ja defineerime hulgal $\mathfrak{X} \times \Omega \times \mathfrak{X}$ predikaadi $X \circ \varphi = Y$ lugedes selle täislause $A \circ \varphi = B$ tõeseks parajasti siis, kui

$$(50) \quad b_i = \frac{a_1 \varphi_{1i} + a_2 \varphi_{2i} + \varphi_{3i}}{a_1 \varphi_{13} + a_2 \varphi_{23} + \varphi_{33}} \quad (i = 1,2).$$

Asume aksioomide II_{1-5} kontrollimisele.

Aksioomi II_1 kontroll tugineb seostest (46) tulenevale võrdusele (vrd. (45))

$$(51) \quad b_1^2 + b_2^2 - 1 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{(a_1 \varphi_{13} + a_2 \varphi_{23} + \varphi_{33})^2}.$$

Kui $a_1^2 + a_2^2 - 1 < 0$, siis ka $b_1^2 + b_2^2 - 1 < 0$.

Aksioomi II_2 kehtivus on ilmne.

Aksioomide $II_{3,4}$ lihtsamaks kontrollimiseks esitame seosed (50) homogeensel kujul, leides $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ja $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \neq 0$ selliselt, et

$$a_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_3}, \quad b_i = \frac{\beta_i}{\beta_3} \quad (i = 1,2).$$

Seosed (50) - täislause $A \circ \varphi = B$ tõesuse kriteeriumid - võime siis esitada kompaktsel kujul

$$(51) \quad \rho\beta = \alpha\varphi,$$

kus α ja β on vastavalt read $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, φ on pseudoortogonaalmaatriks $\varphi = (\varphi_{pq})$ $(p,q = 1,2,3)$, ρ aga on korpuse K teatav element - võrdetegur.

Olgu tõene ka $B \circ \psi = C$, s.t.

$$\sigma\gamma = \beta\psi,$$

kus $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ on elemendile $C = (c_1, c_2)$ vastav rida, $\psi = (\psi_{pq})$ on teine pseudoortogonaalmaatriks ja $\sigma \in K$ on uus võrdetegur. Sel korral

$$\rho\sigma\gamma = (\rho\beta)\psi = (\alpha\varphi)\psi = \alpha(\varphi\psi),$$

nii et tõene on $A \circ (\varphi\psi) = C$, milles oligi tarvis veenduda.

Edasi järeldame seosest (51) võrduse

$$\rho^{-1}\alpha = \beta\varphi^{-1}$$

ehk teisiti, $B \circ \varphi^{-1} = A$ tõesuse. Aksioomid $II_{3,4}$ ongi kontrollitud.

Läheme üle aksioomi II_5 juurde.

Olgu $\langle ABC \rangle$ tõene, s.t.

$$B = \lambda A + (1 - \lambda)C, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Sel korral, nagu kerge kindlaks teha,

$$B \circ \varphi = \left(\frac{\lambda(A'\Phi_1) + (1-\lambda)(C'\Phi_1)}{\lambda(A'\Phi_3) + (1-\lambda)(C'\Phi_3)}, \frac{\lambda(A'\Phi_2) + (1-\lambda)(C'\Phi_2)}{\lambda(A'\Phi_3) + (1-\lambda)(C'\Phi_3)} \right) =$$

$$= \left(\lambda' \frac{(A'\Phi_1)}{(A'\Phi_3)} + \mu' \frac{(C'\Phi_1)}{(C'\Phi_3)}, \lambda' \frac{(A'\Phi_2)}{(A'\Phi_3)} + \mu' \frac{(C'\Phi_2)}{(C'\Phi_3)} \right) =$$

$$= \lambda'(A \circ \varphi) + \mu'(C \circ \varphi)$$

(siin näiteks $(A'\Phi_1)$ tähendab rea $A' = (a_1, a_2, 1)$ ja veeru $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31} \end{pmatrix}$ korrutist: $(A'\Phi_1) = a_1\varphi_{11} + a_2\varphi_{21} + \varphi_{31}$), kusjuures

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda}{\lambda + (1-\lambda)\nu} + \frac{(1-\lambda)\nu}{\lambda + (1-\lambda)\nu} = 1, \quad \nu = \frac{(C'\Phi_3)}{(A'\Phi_3)}.$$

Selleks, et me võiksime saadud seosest

(52) $\quad B \circ \varphi = \lambda'(A \circ \varphi) + (1 - \lambda')(C \circ \varphi)$

järeldada $B \circ \varphi$ asetsemise $A \circ \varphi$ ja $C \circ \varphi$ vahel, tuleb veel näidata, et

(53) $\quad 0 < \lambda' = \dfrac{\lambda}{\lambda + (1-\lambda)\nu} < 1, \quad \nu = \dfrac{(C'\Phi_3)}{(A'\Phi_3)}.$

Et siin $0<\lambda<1$, siis on küllalt, kui veendume, et $V>0$. Näitame, et

$$(A'\Phi_3) = a_1\varphi_{13} + a_2\varphi_{23} + \varphi_{33}$$

on antud juhul kehtivate seoste

$$a_1^2 + a_2^2 < 1,$$

$$\varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^2 - \varphi_{33}^2 = -1, \quad \varphi_{33} > 0$$

puhul alati positiivne. Tõepoolest, teisest seosest $\varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^2 < \varphi_{33}^2$ ning võrratuste poolte korrutamisel saame

$$(a_1^2 + a_2^2)(\varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^2) < \varphi_{33}^2 .$$

Teiselt poolt, Cauchy võrratuse järgi

$$(a_1\varphi_{13} + a_2\varphi_{23})^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(\varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^3) < \varphi_{33}^2 .$$

Et siin $\varphi_{33} > 0$, siis

$$-\varphi_{33} < a_1\varphi_{13} + a_2\varphi_{23} < \varphi_{33};$$

ja tõepoolest $(A'\Phi_3) > 0$. Täpselt samuti ka $(C'\Phi_3) > 0$, nii et tõesti $V>0$. Aksioomi II_5 kehtivus antud juhul on kontrollitud.

On jäänud kontrollida veel III_1 ja III_2. Alustame esimesest. Vaatleme reepereid $R_0(OIJ)$ ja $R(ABC)$, kus $O=(0,0)$, $I=(\frac{1}{2}, 0)$, $J=(0, \frac{1}{2})$ ning näitame esmalt, kuidas leida φ, nii et $R\circ\varphi = R_0$ oleks tõene. Me arutleme siin puhtformaalselt, lugejal aga soovitame kõike järgnevat tõlgendada tavalise analüütilise geomeetria vahendite abil ühikringis $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Võtame kasutusele järgmised konkreetsed pseudoortogonaalmaatriksid:

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nende puhul on tõesti rahuldatud seosed (46). Seejuures tuleb piirduda korpustega K, mis on kinnised operatsiooni $\sqrt{1 \pm \omega^2}$ suhtes, selleks et vaadeldavate maatriksite elemendid kuuluksid endiselt korpusse K.

Vahetult on kerge veenduda, et

$$A \circ \varphi_0(A) = (-\lambda,\ 0),$$

kus $-\lambda = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} < 1$, ning et

$$[A \circ \varphi_0(A)] \circ \varphi_1(\lambda) = 0 = (0,\ 0).$$

Kui tähistada $\varphi_0(A)\varphi_1(\lambda) = \psi$ ja $B \circ \psi = D = (d_1,\ d_2)$, $C \circ \psi = E$, siis kokkuvõttes

$$R \circ \psi = R'(ODE).$$

Edasi on lihtne kindlaks teha, et

$$D \circ \varphi_0(D) = (\sqrt{d_1^2 + d_2^2},\ 0);$$

tähendab, $D \circ \varphi_0(D) = D^*$ asetseb poolsirgel (OI (vrd. § 25) Tähistame $E \circ \varphi_0(D) = E^* = (e_1^*,\ e_2^*)$ ja määrame maatriksi η järgmiselt: kui $e_2^* > 0$, siis võtame $\eta = \varepsilon$, kui $e_2^* < 0$, siis võtame $\eta = \varphi_2$ (vrd. § 25).

Kokkuvõttes võime öelda, et tõesed on

$$R \circ \psi = R', \quad R' \circ \varphi_0(D) = R^*(OD^*E^*), \quad R^* \circ \eta = R_0,$$

nii et tõene on ka

$$R \circ \varphi = R_0,$$

kus $\varphi = \psi\, \varphi_0(D)\, \eta$.

Aksioomi III_1 kontroll tuleb nüüd lõpule viia täpselt samuti nagu Descartes'i mudeli puhul.

Viimaks on jäänud kontrollida veel aksioom III_2. Näitame kõigepealt, et iga φ, mille korral on tõene $R_0(OIJ) \circ \varphi = R_0(OIJ)$, ühtib ühikmaatriksiga E. Tõepoolest, niisuguse φ puhul on tõene $O \circ \varphi = O$, s.t. kehtib (50) $a_i = 0$ ja $b_i = 0$ korral. Järelikult

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} = 0.$$

Seoste (46) vasakpoolse tulba viimasest reast järeldame nüüd, et $\varphi_{33} = 1$, mistõttu seoste (49) samal kohal olevast reast tulenevad võrdused (§ 21)

$$\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0.$$

Edasi peab $I \circ \varphi = (\frac{1}{2}\varphi_{11}, \frac{1}{2}\varphi_{12})$ olema poolsirgel (OI, s.t.

$$\varphi_{11} > 0, \quad \varphi_{12} = 0.$$

Seoste (49) vasakpoolse tulba teisest reast järeldame nüüd, et $\varphi_{22} = \pm 1$ ja seoste (46) samal kohal olevast reast, et $\varphi_{21} = 0$.

Et nüüd $J \circ \varphi = (0, \frac{1}{2}\varphi_{22})$ peab asuma pooltasandil (OI|J, siis $\varphi_{22} > 0$ ja seega $\varphi_{22} = 1$. Kokkuvõttes ongi näidatud, et kui φ puhul on tõene $R_0 \circ \varphi = R_0$, siis $\varphi = E$.

Aksioomi III_2 edasine kontroll kordab vastavat mõttekäiku Descartes'i mudeli korral.

Pideva korpuse K puhul on mudeli konstrueerimine viidud sellega lõpule. Mittepideva korpuse K korral tuleks veenduda veel lausete X_1, X_2 kehtivuses antud juhul, selle aga jätame lugeja hooleks.

Absoluutse geomeetria mudelit, mille me käesolevas paragrahvis konstrueerisime, nimetatakse <u>Beltrami-Kleini mudeliks</u> (ta anti esimesena 1868. aastal E. Beltrami poolt ja leidis täiendamist 1871. aastal F. Kleini poolt).

Nii selle mudeli kui ka Descartes'i mudeli (§ 25) tähtsus absoluutse planimeetria aksiomaatika jaoks seisneb selles, et nende mudelite olemasolust järeldub selle aksiomaatika vasturääkimatus - võimatus teha sellest aksiomaatikast kaht teineteist välja sulgevat järeldust. Tõepoolest, kui oletada, et niisuguste järelduste tegemine on võimalik, siis saaksime ka näiteks Beltrami-Kleini mudelis, kui konstrueerida see üle reaalarvude korpuse K, teatavad kaks lauset reaalarvuliste elementidega ridade ja pseudoortogonaalmaatriksite vahel, mis räägiksid teineteisele vastu - tekiks vasturääkivus reaalarvude aritmeetikas. Tähendab, kui reaalarvude aritmeetika lugeda vasturääkimatuks, siis on vasturääkimatu ka absoluutne geomeetria.

§ 27. Peegeldused sirge suhtes.

Absoluutse geomeetria sisu järkjärgulist väljaarendamist alustame lihtsaimate liikumiste uurimisega. Esmalt vaatleme nn. peegeldusi sirge suhtes.

Asetsegu punktid C ja D teine teisel pool sirget AB. Määrame reeperid R(ABC) ja R'(ABD). Aksioomide III_1 ja III_2 põhjal leidub parajasti üks liikumine φ, mis kannab reeperi R(ABC) reeperiks R'(ABD). See liikumine, nagu näha, jätab paigale punkti A ja sellest punktist lähtuva poolsirge (AB, sirgega AB äärneva pooltasandi (AB|C) aga kannab täiendpooltasandiks (AB|D). Niisugust liikumist φ nimetataksegi peegelduseks sirge AB suhtes. Sirget AB nimetatakse sel puhul teljeks.

Peegeldusel φ on rühma Ω seisukohalt huvitav omadus - ta ühtib oma pöördliikumisega. Tõepoolest, φ pöördliikumine φ^{-1} viib reeperi R'(ABD) tagasi reeperiks R(ABC), sedasama teeb aga ilmselt ka φ ise, mistõttu II_7 põhjal saamegi $\varphi^{-1} = \varphi$. Järelikult $\varphi\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \varepsilon$.

Peegelduse see omadus võimaldab kergesti tõestada järgmist teoreemi.

T e o r e e m 39. Peegeldus säilitab telje iga punkti.

T õ e s t u s: Olgu tõene $[R(ABC)\circ\varphi = R(ABD)]$ ning olgu C ja D teine teisel pool sirget AB. Valime teljel vabalt punkti X, mis kantagu φ poolt punktiks X'. Sel korral

$$X' \circ \varphi = (X \circ \varphi) \circ \varphi = X \circ (\varphi \cdot \varphi) = X \circ \iota = X.$$

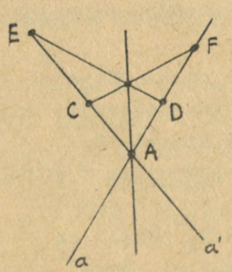
Et poolsirged alguspunktidega A sirgel AB säilivad, siis on kolm võimalust: tõene on kas 1) $\langle AX'X \rangle$ või 2) $\langle AXX' \rangle$ või 3) $X' = X$.

Meie ülesandeks on näidata, et esimesed kaks juhtu on võimatud. Selleks rakendame aksioomi II_5 arvestades $(A \circ \varphi = A)$ & $(X \circ \varphi = X')$ & $(X' \circ \varphi = X)$ tõesust. Esimesel juhul jõuame $\langle AXX' \rangle$ tõesuseni, teisel juhul $\langle AX'X \rangle$ tõesuseni. Mõlemal juhul tekib vastuolu! Teoreem on tõestatud.

Üldiselt liikumist φ, mis ühtib oma pöördliikumisega, s.t. mille puhul $\varphi\varphi = \iota$, nimetatakse <u>involutiivseks</u>. Peegeldus on seega näide involutiivse liikumise kohta.

T e o r e e m 40. Iga involutiivne liikumine φ, mis kannab mingi sirge a teiseks, teda lõikavaks sirgeks a', on peegeldus (teljega sirgete a ja a' tasandil).

T õ e s t u s: Liikumise φ involutiivsuse tõttu sirge a' kantakse tagasi sirgeks a. Sirgete a ja a' lõikepunkt – tähistame selle A – säilib järelikult φ puhul (joonis 53). Sirgel a võtame punktid C ja E selliselt, et oleks tõene $\langle ACE \rangle$. Liikumine φ kandku need punktid vastavalt punktidesse D ja F. Sel korral II_3 põhjal on tõene $\langle ADF \rangle$. Teoreemi 13 põhjal vahemikel (CF) ja (DE) on ühine punkt B. Kuna vahemikud φ involutiivsuse tõttu vahetuvad, siis punkt B samuti nagu A, jääb φ puhul liikumatuks. Järelikult reeper R(ABC) kantakse reeperiks R(ABD), kus C ja D on ilmselt teine teisel pool sirget AB. Teoreem on tõestatud.



Joonis 53.

Sellest teoreemist võib teha mitmeid olulisi järeldusi. Vahetult on näiteks selge järgmise teoreemi kehtivus.

T e o r e e m 41. Nurga $\angle AOB$ ümberpööramine kujutab endast peegeldust.

Tõepoolest, lausest X_2 järeldub vahetult, et kui tõene on $R(OAB)\circ\varphi = R'(OBA)$, siis on tõene ka $R'(OBA)\circ\varphi = R(OAB)$ ning järelikult ka

$$R(OAB)\circ(\varphi\varphi) = R(OAB),$$

mistõttu φ on involutiivne ja me võime rakendada teoreemi 40.

Kehtib ka järgmine teoreem.

T e o r e e m 42. Liikumine φ, mis jätab paigale punkti A, kannab poolsirge (AB täiendpoolsirgeks (AB' (nii et tõene on $\langle BAB' \rangle$) ning säilitab pooltasandi (AB|C, kujutab endast peegeldust, mille telg läbib punkti A.

T õ e s t u s: Vaadeldav liikumine φ on, nagu kerge veenduda, involutiivne. Valime tasandil ABC vabalt ühe punkti A läbiva sirge a, mis liikumise φ puhul teisenegu sirgeks a' - samuti punkti A läbivaks.

Kui a ja a' ühtivad, siis võime kindlad olla, et φ puhul kantakse iseendaks ka poolsirged, milledeks A lahutab sirge a, sest säilib pooltasand (AB|C. Järelikult reeper R(ADB), kus D on punkt, mis asub samaaegselt sirgel a ja pooltasandil (AB|C, kantakse reeperiks R(ADB') ning φ on seega poolpööre sirge a ümber.

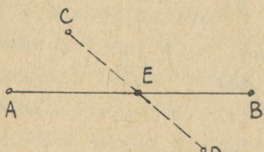
Kui sirged a ja a' ei ühti, siis võime rakendada eelmist teoreemi 40. Teoreem on tõestatud.

Teoreemide 39 ja 40 järelduseks on ka järgmine teoreem.

T e o r e e m 43. Lõigu [AB] ümberpööramine kujutab endast peegeldust, mille telg lõikab sirget AB.

T õ e s t u s: Lõigu [AB] ümberpööramise φ puhul on tõene

$$R(ABC)\circ\varphi = R'(BAC).$$



Joonis 54.

Et lause X_1 põhjal ka $B\circ\varphi = A$ on sel korral tõene, siis on tõene ühtlasi

$$R'(BAC)\circ\varphi = R(ABC),$$

nii et φ on involutiivne: $\varphi\varphi = \varepsilon$.

Toome veel sisse reeperi $R_1(BAD)$, nii et C ja D on teine teisel pool sirget (joonis 54), ja liikumised ψ ja χ, mille puhul on tõesed

$$R(ABC)\circ\psi = R_1(BAD),$$

$$R_1(BAD)\circ\chi = R'(BAC).$$

Siin, nagu näha, χ on peegeldus BA suhtes, kusjuures

$$R\circ(\psi\chi) = (R\circ\psi)\circ\chi = R_1\circ\chi = R',$$

nii et III_2 põhjal $\varphi = \psi\chi$, millest χ involutiivsuse tõttu

$$\psi = \varphi\chi.$$

Näitame, et $\varphi\chi = \chi\varphi$. Tõepoolest, $R\circ(\varphi\chi) = (R\circ\varphi)\circ\chi = R'\circ\chi = R_1$. Teiselt poolt, teoreemi 39 põhjal $A\circ\chi = A$, nii et $R(ABC)\circ\chi = R^*(ABD)$, kusjuures ilmselt $R^*(ABD)\circ\varphi = R_1(BAD)$; tähendab $R\circ(\chi\varphi) = (R\circ\chi)\circ\varphi = R^*\circ\varphi = R_1$. Jääb veel rakendada aksioomi III_2.

Liikumiste φ ja χ involutiivsusest järeldub nüüd ψ involutiivsus:

$$\psi\psi = \varphi\chi\varphi\chi = \varphi\chi\chi\varphi = \varphi\varepsilon\varphi = \varphi\varphi = \varepsilon.$$

Tähistame $C\circ\psi = D$; sel korral $D\circ\psi = C$. Et C ja D on teine teisel pool sirget AB, siis nende vahel on AB punkt E; et ψ, nagu kerge näha, säilitab sirged AB ja CD, siis

$$E\circ\psi = E.$$

Edasi on tõene ka

$$E\circ\varphi = E,$$

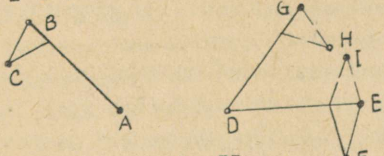
sest $E\circ\varphi = E\circ(\psi\chi) = (E\circ\psi)\circ\chi = E\circ\chi$, χ kui peegeldus aga säilitab teoreemi 39 põhjal AB iga punkti, sealhulgas ka E, nii et $E\circ\chi = E$.

Seejuures on selge, et E on A ja B vahel, sest vastupidisel juhul poolsirged (EA ja (EB ühtiksid ning φ säilitaks reeperi R(EAC) ja oleks ühikliikumine ε, mis antud juhul on mugugi võimatu. Tähendab, liikumise φ puhul võib rakendada teoreemi 42 - φ on peegeldus, mille telg läbib punkti E. Teoreem on tõestatud.

Lõpuks tõestame järgmise huvitava teoreemi.

T e o r e e m 44. Iga liikumine φ tasandil kujutab endast mitte rohkem kui kolme peegelduse korrutist.

T õ e s t u s: Võtame vabalt reeperi R(ABC), mille φ kandku reeperiks R'(DEF) (joonis 55). Sooritame lõigu [AD] ümberpööramise ψ; olgu $R(ABC)\circ\psi = R_1(DGH)$. Edasi sooritame nurga $\angle GDE$



Joonis 55.

ümberpööramise χ; olgu $R_1(DGH)\cdot\chi = R_2(DEI)$. Lõpuks määrame liikumise ω järgmiselt: kui pooltasandid $(DE|F$ ja $(DE|I$ ühtivad, siis võtame $\omega = \iota$; kui need pooltasandid ei ühti, siis liikumiseks ω võtame peegelduse sirge DE suhtes. Kerge on veenduda, et

$$R(ABC)\circ(\psi\chi\omega) = R(DEF),$$

mistõttu III_2 põhjal

$$\varphi = \psi\chi\omega.$$

Et ψ ja χ on teoreemide 43 ja 41 põhjal peegeldused, siis käsiteldav teoreem ongi sellega tõestatud.

§ 28. Lõikude kongruentsus ja liitmine.

Punktihulka (ehk kujundit) F_1 nimetatakse kongruentseks kujundiga F_2 ja tähistatakse $F_1 \equiv F_2$, kui leidub liikumine φ, mis kannab kujundi F_1 kujundiks F_2:

$$F_1 \circ \varphi = F_2.$$

Kujundite kongruentsus on

1° refleksiivne: $F \equiv F$,

2° sümmeetriline: kui $F_1 \equiv F_2$, siis $F_2 \equiv F_1$,

3° transitiivne: kui $F_1 \equiv F_2$ ja $F_2 \equiv F_3$, siis $F_1 \equiv F_3$.

Omadus 1° järeldub ühikliikumise ι olemasolust, omadused 2° ja 3° on lihtsateks järeldusteks vastavalt aksioomidest II_4 ja II_5.

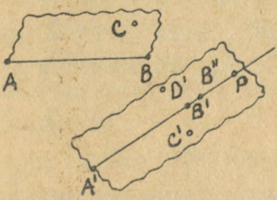
Kujundite kongruentsuse predikaat rahuldab seega ekvivalentsuse aksioome (§ 6). Siit järeldub, et kõigi kujundite hulk lahutub omavahel mittelõikuvateks ekvivalentsusklassideks, millest igaüks sisaldab omavahel kongruentsed kujundid. Neid klasse hakkame edaspidi nimetama kujundite kongruentsusklassideks.

Ühe kongruentsusklassi moodustavad näiteks kõik reeperid, nagu nähtub aksioomist III_1. Siit järeldub juba edasi, et ka kõik punktid, sirged, tasandid, poolsirged ja pooltasandid moodustavad omaette kongruentsusklasse.

Teisiti on lugu näiteks lõikude korral. Tõestame järgmise teoreemi, mis näitab, missuguse vabadusega võib määrata lõiku antud kongruentsusklassis.

T e o r e e m 45. Antud poolsirgel $(A'P$ leidub üks ja ainult üks punkt B', nii et lõik $[A'B']$ on kongruentne antud lõiguga $[AB]$.

T õ e s t u s: Valime vabalt punktid C ja C', nii et tekiksid reeperid $R(ABC)$ ja $R'(A'PC')$. Aksioomi III_1 põhjal leidub φ selliselt, et $R\circ\varphi = R'$. Soovitud punktiks B' on $B\circ\varphi$ (joonis 56).



Joonis 56.

Oletame, et leidub veel teine punkt B'' poolsirgel $(A'P$, nii et $[A'B''] \equiv [AB]$. Sel korral leidub kas ψ selliselt, et $A\circ\psi = A'$, $B\circ\psi = B''$ või χ selliselt, et $B\circ\chi = A'$, $A\circ\chi = B''$. Näitame, et mõlemal juhul $B'' = B$.

Liikumine ψ võib kanda reeperi R kas reeperiks R' või selle täiendreeperiks $R_1'(A'PD')$ (kus C' ja D' on teine teisel pool sirget $A'P$). Esimesel juhul III_2 põhjal $\psi = \varphi$ ja seega $B'' = B\circ\psi = B\circ\varphi = B'$. Teisel juhul $\psi = \varphi\omega$, kus ω on peegeldus sirge $A'P$ suhtes ning samuti $B'' = B\circ\psi = B\circ(\varphi\omega) = (B\circ\varphi)\circ\omega = B'\circ\omega = B'$, sest ω säilitab teoreemi 39 põhjal telje $A'P$ iga punkti, sealhulgas ka B'.

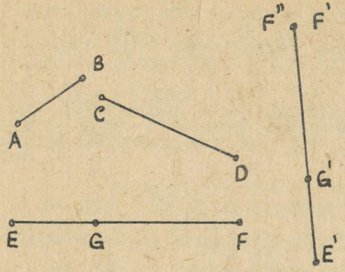
Liikumise χ puhul sooritame eelnevalt lõigu $[AB]$ ümberpööramise ζ: $A\circ\zeta = B$, $B\circ\zeta = A$. Liikumise $\psi = \zeta\chi$ puhul nüüd $A\circ\psi = (A\circ\zeta)\circ\chi = B\circ\chi = A'$, $B\circ\psi = (B\circ\zeta)\circ\chi = A\circ\chi = B''$, nii et me saame eelnenud olukorra, millal, nagu näidatud, $B'' = B'$. Teoreem on tõestatud.

Muuhulgas järeldub siit, et iga lõigu $[AB]$ korral $[AB] \equiv [BA]$.

Defineerime lõikude liitmise operatsiooni.

Kõneldakse, et $[EF]$ on lõikude $[AB]$ ja $[CD]$ summa, kui leidub punkt G, nii et on tõene (joonis 57)

$$\langle EGF\rangle \mathbin{\&} ([AB] \equiv [EG]) \mathbin{\&} ([CD] \equiv [FG]).$$



Joonis 57.

Veendume järgnevalt, et defineeritud operatsioon seob mitte niivõrd üksikuid lõike, kui just lõikude kongruentsusklasse.

Näitame nimelt, et paarikaupa kongruentsetel lõikudel on kongruentsed summad.

Tõepoolest, olgu lisaks eelnevale $[E'F']$ lõikude $[A'B']$ ja $[C'D']$ summaks, s.t. leidugu G' nii, et on tõene

$$\langle E'G'F'\rangle \;\&\; ([A'B'] \equiv [E'G']) \;\&\; ([C'D'] \equiv [F'G']).$$

Näitame, et kui $[A'B'] \equiv [AB]$ ja $[C'D'] \equiv [CD]$, siis $[E'F'] \equiv [EF]$. Kongruentsussuhte transitiivsusest järeldub, et antud eeldustel

$$[E'G'] \equiv [EG], \; [G'F'] \equiv [GF].$$

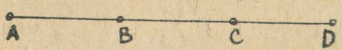
Järelikult leidub liikumine φ, nii et $E \circ \varphi = E'$, $G \circ \varphi = G'$. Tähistame $F \circ \varphi = F''$ (joonis 57), siis $\langle EGF\rangle$ tõesusest järeldub II_5 põhjal $\langle E'G'F''\rangle$ tõesus; seejuures $[GF] \equiv [G'F'']$. Et F' ja F'' on ühel ja samal poolsirgel alguspunktiga G', siis teoreemi 45 põhjal $F'' = F'$, nii et φ tõesti määrab kongruentsuse $[EF] \equiv [E'F']$.

Lõikude kongruentsusklasse hakkame edaspidi tähistama väikeste ladina tähtedega: a, b, ...

Me võime kõnelda kahe kongruentsusklassi a ja b summast $a + b$, lugedes selleks seda kongruentsusklassi, kuhu kuulub antud klassidest a ja b vabalt valitud kahe lõigu summa. Klass $a + b$ ülalnäidatu põhjal ei sõltu esindajate valikust antud klassidest a ja b ning vastavus $a, b \to a + b$ on seega ühene.

Tähendab, liitmise operatsioon lõikude kongruentsusklasside hulgas muudab selle hulga vähemalt grupoidiks (§ 7). Näitame, et tegelikult tekib poolrühm, s.t., et operatsioon on assotsiatiivne:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$



Joonis 58.

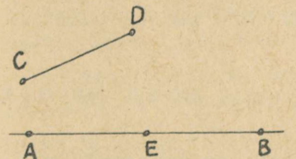
Selleks võtame klassidest a, b, c vabalt esindajad $[AB] \in a$, $[EF] \in b$, $[GH] \in c$ ning määrame [AB] pikendil üle B (§ 13) punkti C, nii et [BC] ≡ [EF] (joonis 58). Sel korral [AC] ∈ a + b. Edasi leiame [AC] pikendil üle C punkti D, nii et [CD] ≡ [GH]. Sel korral [AD] ∈ (a + b) + + c. Teiselt poolt, et [BC] ∈ b, [CD] ∈ c ja tõene on ‹BCD›, siis [BD] ∈ b + c, ning et tõene on ka ‹ABD›, siis [AD] ∈ a + (b + c). Üht ja sama lõiku sisaldavad kongruentsusklassid aga ühtivad: (a + b) + c = a + (b + c).

Et lõikude [AB] ja [CD] summa definitsioonis võib vahetada lõikude osad (kui samaaegselt vahetada tähised E ja F), ilma et midagi muutuks, siis lõikude kongruentsusklassid moodustavad <u>kommutatiivse poolrühma</u> $\mathfrak{A}$.

Sellesse poolrühma $\mathfrak{A}$ võib sisse viia ka järjestuse.

Kõneldakse, et lõik [CD] on väiksem lõigust [AB] ja tähistatakse [CD] < [AB], kui leidub punkt E, nii et tõene on (joonis 59)

‹AEB› & ([CD] ≡ [AE]).



Joonis 59.

Siin võib jällegi näidata, et niisugune järjestus seob õieti kongruentsusklasse: kui [C'D'] ≡ [CD], [A'B'] ≡ [AB] ja [CD] < [AB], siis ka [C'D'] < [A'B'].

Tõestus on lihtne, me ei hakka teda siin esitama.

Kongruentsusklasside puhul on see järjestus vastavusse viidav punktide järjestusega poolsirgel. Tõepoolest, teoreemi 45 kohaselt leidub antud poolsirgel (OP igast klassist a parajasti üks esindaja [OA]. Seejuures a < b parajasti siis, kui klasside a, b esindajate [OA], [OB] puhul on tõene ‹OAB›, s.t. kui A eelneb punktile B poolsirgel (OP.

Siit järeldub, et lõikude kongruentsusklassid moodustavad järjestatud hulga, mis pidevuse aksioomi kehtivuse korral kujutab endast pidevat järjestatud hulka.

Kontrollime viimaks, et järjestus poolrühmas $\mathfrak{A}$ on operatsiooni + suhtes stabiilne (§ 7): kui a < b, siis c + a < c + b. Selleks võtame klassist c vabalt esindaja [OC] ja klassidest a ja b esindajad [CA] ja [CB] lõigu [OC] pikendil üle C. Sel korral on tõene $\langle OCA \rangle$ & $\langle CAB \rangle$, (viimane $a < b$ põhjal) ning valemist (22) järeldub, et tõene on ka $\langle OAB \rangle$. Et $[OA] \in c + a$, $[OB] \in c + b$, siis tõesti $c + a < c + b$.

Kommutatiivsuse tõttu parempoolset stabiilsust pole enam tarvis kontrollida (§ 7).

Kokkuvõttes võime kõnelda lõikude kongruentsusklasside järjestatud poolrühmast $\mathfrak{A}$.

Osutub, et selle poolrühma puhul on rahuldatud §-s 8 formuleeritud täiendavad aksioomid A - C. Aksioomide A ja B korral on see ilmne. Aksioomi C kehtivus järeldub teoreemist 43, mille kohaselt iga lõigu $[AB]$ ümberpööramine φ on peegeldus sirget AB mingis punktis E lõikava teljega, nii et tõene on $A \circ \varphi = B$, $B \circ \varphi = A$, $E \circ \varphi = E$. Järelikult, $[AE] \equiv [BE]$, kusjuures $[AB]$ on $[AE]$ ja $[BE]$ summa. Kui lõike $[AB]$ ja $[AE]$ sisaldavad kongruentsusklassid tähistada vastavalt e ja e_1, siis

$$e = e_1 + e_1 = 2e_1.$$

Et $[AB]$ võib olla suvaline lõik, siis võib samuti talitada lõiguga $[AE]$; saame $e_1 = 2e_2$ jne.

Märgime, et punkti E sirgel AB, mille korral $[AE] \equiv [BE]$, nimetatakse lõigu $[AB]$ <u>keskpunktiks.</u>

T e o r e e m 46. Igal lõigul $[AB]$ on parajasti üks keskpunkt E, mis osutub selle lõigu sisemiseks punktiks.

T õ e s t u s: Keskpunkti olemasolu on eespool seoses aksioomi C kontrollimisega juba tõestatud.

Oletame nüüd, et leidub veel teine keskpunkt E', s.t. niisugune punkt E' sirgel AB, et $[AE'] \equiv [BE']$. Keskpunkt E' on alati lõigu $[AB]$ sees, sest kui oletada näiteks, et E on $[AB]$ pikendil üle B, siis kongruentsust $[AE] \equiv [BE]$ määrav liikumine säilitaks poolsirge (EA, oleks seega kas ühikliikumine või peegeldus AB suhtes ning seega säilitaks AB iga punkti, mis antud juhul on muidugi võimatu.

Teeme lõigu $[AB]$ ümberpööramise φ, mis, nagu eespool selgus, säilitab punkti E. Olgu $E' \circ \varphi = E''$; siis E" on samuti $[AB]$ sees, kusjuures $[AE'] \equiv [BE'']$. Et E' ja E" on mõlemad poolsirgel (BA, ja transitiivsuse põhjal $[BE'] \equiv [BE'']$, siis teoreemi 45 põhjal $E' = E''$. Kuna φ saab säilitada ainult ühe punkti sirgel AB, siis E' = E.

Teoreem on tõestatud.

Nüüd on tehtud kõik selleks, et me võiksime rakendada §-s 8 tõestatud teoreemi. Järelikult, kui nõuda ka pidevuse aksioomi kehtivust, siis lõikude kongruentsusklasside järjestatud poolrühm $\mathfrak{A}$ on isomorfne positiivsete reaalarvude järjestatud poolrühmaga R^+ liitmise suhtes.

Selles isomorfismis lõikude kongruentsusklassile vastavat positiivset reaalarvu nimetatakse selle klassi kõigi omavahel kongruentsete lõikude ühiseks pikkuseks. Lõigu [AB] pikkust tähistame $|AB|$; teda nimetatakse tihti ka punktide A ja B vaheliseks kauguseks.

Lõiku pikkusega 1 nimetatakse ühiklõiguks (ehk pikkusühikuks). Selle valik on üsna vaba. Kui ühiklõik asendada lõiguga, mille pikkus on k, siis suvalise lõigu pikkus korrutub teguriga $\frac{1}{k}$ - mastaabikordaja (§ 8).

Eespool selgus, et vabalt võetud poolsirge (OP korral on võimalik korraldada üksühene järjestust säilitav vastavus $a \leftrightarrow A$ lõikude kongruentsusklasside a ja poolsirge (OP punktide A vahel. Klassi a lõikude ühist pikkust nimetatakse punkti A abstsissiks poolsirgel (OP. Punkti A abstsissiks järjestatud sirgel OP (ülempoolsirgega (OP, § 13) nimetatakse: kui A on ülempoolsirgel (OP - A abstsissi sellel poolsirgel, kui A = 0 - arvu 0, kui A on alampoolsirgel (OQ - vastandarvu A abstsissile sellel poolsirgel. Tekib üksühene järjestust säilitav vastavus s i r g e OP punktide hulga ja k õ i g i reaalarvude hulga vahel.

Kui pidevuse aksioomi kehtivust mitte nõuda (vt. § 22, näide D), laused X_1, X_2 aga võtta aksioomideks, siis lõikude kongruentsusklassid moodustavad lihtsalt teatava aksioome A - C rahuldava järjestatud poolrühma $\mathfrak{A}$. Sel puhul tekkivad nn. mittearhimeedilised geomeetriad[x] moodustavad aine ühele huvitavale suunale geomeetria alustes, mille üksikasjalik väljaarendamine aga paraku ei mahu käesoleva kursuse raamidesse. Meil tuleb siin selles osas piirduda ainult teoreemidega, mis on

---

[x] vt. Д.Гильберт, Основания геометрии, М.-Л. 1948.

ühised pidevale ja mittearhimeedilisele geomeetriale. Märgime, et nendeks on siiski enamik käsiteldavaid teoreeme, sest pidevuse aksioomi me ei kasuta, kui selleks puudub otsene vajadus.

§ 29. Nurkade kongruentsus ja liitmine.

Analoogilised tulemused kehtivad ka nurkade korral. Tõestame kõigepealt teoreemi, mis näitab, missuguse vabadusega võib määrata nurka antud kongruentsusklassis.

T e o r e e m 47. Antud reeperi R'(O'A'C') korral pooltasandil (O'A'|C' leidub üks ja ainult üks poolsirge (O'B', nii et nurk ∠A'O'B' on kongruentne etteantud nurgaga ∠AOB.

T õ e s t u s: Seome nurgaga ∠AOB reeperi R(OAB) ja leiame aksioomile III_1 tuginedes φ, nii et $R\circ\varphi = R'$. Tähistame $B\circ\varphi = B'$; soovitud poolsirgeks on (O'B'.

Oletame, et leidub teine poolsirge (O'B" pooltasandil (O'A'|C', nii et ∠A'O'B" ≡ ∠AOB. Sel korral leidub kas ψ, nii et $A\circ\psi$ on poolsirgel (O'A' ja $B\circ\psi$ poolsirgel (O'B", või χ, nii et $A\circ\chi$ ja $B\circ\chi$ on vastavalt poolsirgetel (O'B" ja (O'A'. Esimesel juhul kannab ψ reeperi R(OAB) reeperiks R'(O'A'B"), mis ilmselt ühtib reeperiga R'(O'A'C'), nii et III_2 põhjal $\psi = \varphi$ ja seega poolsirged (O'B' ja (O'B" ühtivad. Teisel juhul sooritame eelnevalt nurga AOB ümberpööramise ε; liikumise $\psi = \varepsilon\chi$ puhul saame nüüd eelnenud juhu (vrd. teoreemi 45 tõestusega).

Teoreemist järeldub muuhulgas, et iga nurga ∠AOB korral ∠AOB ≡ ∠BOA.

Analoogiliselt lõikude liitmisega toome sisse nurkade liitmise operatsiooni, minnes kohe üle üldistatud nurkadele (§ 16), et mitte korrata ühetaolisi sõnastusi.

Üldistatud nurka tipuga O nimetatakse kahe antud üldistatud nurga summaks, kui temas leidub punktist O lähtuv poolsirge, mis lahutab ta kaheks punktihulgaks, millest kumbki on kongruentne ühega kahest antud üldistatud nurgast.

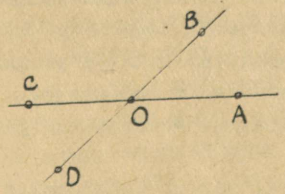
Üldistatud nurkade kongruentsusklasse hakkame tähistama väikeste kreeka tähtedega: α, β, ... Samuti nagu lõikude puhul võib tõestada, et defineeritud operatsioon seob tegelikult terveid klasse α, β jne., nii et võib kõnelda summast $\alpha + \beta$. Tekib üldistatud nurkade kongruentsusklasside kommutatiivne poolrühm.

Ka sellesse võib, samuti nagu lõikude korral, sisse viia operatsiooni suhtes stabiilse järjestuse, mis on vastavusse seatav poolsirgete järjestusega lõpmatukordsel tasandil kui poolsirgete järjestatud hulgas (§ 16).

Pidevuse aksioomi kehtivuse puhul saame üldistatud nurkade pideva järjestatud poolrühma, milles osutuvad kehtivaks aksioomid A-C (tõestused on analoogilised eelmise paragrahvi omadele). See poolrühm on järelikult samuti isomorfne positiivsete reaalarvude järjestatud poolrühmaga R^+ liitmise suhtes.

Selles isomorfismis üldistatud nurkade kongruentsusklassile vastavat positiivset reaalarvu nimetatakse selle klassi üldistatud nurkade ühiseks mõõduks (ehk suuruseks).

Üldistatud nurka mõõduga 1 nimetatakse ühiknurgaks (ehk nurgaühikuks). Tavaliselt võetakse selleks teatav nurk. Selle valik on siin samuti vaba, kuid erinevalt lõikude puhul esinevast olukorrast on siin võimalik kergesti määratleda üks eriline nurkade kongruentsusklass, mis on eristatav kõigi teiste klasside seast ainuüksi absoluutse geomeetria aksioomide alusel.



Joonis 60.

Nurki $\angle AOB$ ja $\angle BOC$, mille ühed haarad ühtivad, teised on aga teineteise täiendpoolsirgeteks (s.t. mille korral on tõene $\langle AOC \rangle$ joonisel 60), nimetatakse kõrvunurkadeks.

Ühe ja sama nurga kaht kõrvunurka nimetatakse tippnurkadeks (näiteks $\angle AOB$ ja $\angle COD$ joonisel 60).

Vahetult on selge, et kongruentsete nurkade kõrvunurgad on samuti kongruentsed. Kongruentsuse $\angle AOB \equiv \angle BOA$ põhjal järeldub siit kohe, et tippnurgad on kongruentsed.

Nurka, mis on kongruentne oma kõrvunurgaga, nimetatakse <u>täisnurgaks.</u>

Meie ülesandeks on näidata järgnevalt, et täisnurgad eksisteerivad ja moodustavad parajasti ühe kongruentsusklassi.

Veendume kõigepealt täisnurkade olemasolus.

T e o r e e m 48. Reeperi $R(OAD)$ puhul pooltasandil $(OA|D$ leidub parajasti üks poolsirge $(OB$, nii et $\angle AOB$ on täisnurk.

T õ e s t u s: Valime $(OA$ täiendpoolsirgel vabalt punkti C ja vaatleme liikumist φ, nii et

$$R(OAD)\circ\varphi = R'(OCD).$$

Teoreemi 42 põhjal on tegemist peegeldusega punkti O läbiva telje OB suhtes, kusjuures on selge, et φ määrab kongruentsuse

$$\angle AOB \equiv \angle COB$$

nii, et $\angle AOB$ on täisnurk.

Oletame, et pooltasandil $(OA|D$ leidub veel teine poolsirge $(OB'$, nii et $\angle AOB'$ on täisnurk, s.t. nii, et $\angle AOB' \equiv \angle COB'$. Peegeldus φ kannab selle mingiks poolsirgeks $(OB''$ samal pooltasandil, määrates kongruentsuse $\angle AOB' \equiv \angle COB''$. Transitiivsuse põhjal

$$\angle COB' \equiv \angle COB''.$$

Järelikult, poolsirged $(OB'$ ja $(OB''$ ei saa olla erinevad, sest vastupidisel juhul satuksime vastuollu teoreemiga 47, mistõttu nad mõlemad, nagu kerge veenduda, ühtivad peegelduse φ teljel oleva poolsirgega $(OB$. Teoreem on tõestatud.

Järgnevalt näitame, et täisnurgad moodustavad parajasti ühe kongruentsusklassi.

T e o r e e m 49. Iga nurk, mis on kongruentne täisnurgaga, on samuti täisnurk. Iga kaks täisnurka on kongruentsed.

T õ e s t u s: Olgu $\angle AOB$ täisnurk, s.t. olgu tõene

$$(\angle AOB \equiv \angle COB) \,\&\, \langle AOC\rangle.$$

Nurk $\angle A'O'B'$ olgu kongruentne nurgaga $\angle AOB$, s.t. leidugu φ, mis kannab $\angle AOB$ nurgaks $\angle A'O'B'$. Sel puhul $\angle COB$ kantakse nurgaks $\angle C'O'B'$, kusjuures $\langle AOC \rangle$ tõesusest järeldub $\langle A'O'C' \rangle$ tõesus – tähendab, $\angle C'O'B'$ on $\angle A'O'B'$ kõrvunurk. Kehtivad kongruentsused

$$\angle A'O'B' \equiv \angle AOB, \quad \angle AOB \equiv \angle COB, \quad \angle COB \equiv \angle C'O'B',$$

millest järeldub, et $\angle A'O'B' \equiv \angle C'O'B'$. Nurk $\angle A'O'B'$ on tõesti täisnurk.

Olgu nüüd antud kaks täisnurka $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$. Seome nendega reeperid $R(OAB)$, $R'(O'A'B')$ ja määrame liikumise φ nii, et $R \circ \varphi = R'$. Nurk $\angle AOB$ kantakse φ poolt teatavaks täisnurgaks $\angle O'B''$:

$$\angle AOB \equiv \angle A'O'B''$$

ning, et teoreemi 48 kohaselt pooltasandil $(O'A'|B'$ leidub ainult üks poolsirge $(O'B'$ nii, et $\angle A'O'B'$ on täisnurk, siis $\angle A'O'B''$ ja $\angle A'O'B'$ ühtivad. Seega tõesti

$$\angle AOB \equiv \angle A'O'B'.$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemist järeldub, et kui $\angle AOB$ on täisnurk ja seega kongruentne ühe oma kõrvunurgaga $\angle COB$ (mis on siis muidugi samuti täisnurk), siis ta on kongruentne ka oma teise kõrvunurgaga $\angle DOA$. Tuleb lihtsalt arvesse võtta, et $\angle AOB \equiv \angle BOA$.

Täisnurkade kongruentsusklassi tähistame d. Kuigi täisnurk on kõige loomulikumaks nurgaühikuks, on praktikas siiski enam läbi löönud ajalooliselt välja kujunenud astronoomilistele vaatlustele toetuv süsteem, mille puhul täisnurga mõõduks on arv 90 (kraadimõõdu süsteem).

Kaht mingis punktis O lõikuvat sirget OA ja OB nimetatakse ristuvaiks, kui nurk $\angle AOB$ (koos sellega ka tema kumbki kõrvunurk) on täisnurk. Vahetult on selge, et sirgete ristumine on nende vastastikune omadus.

Teisiti öeldes, kaks sirget on risti, kui peegeldus ühe suhtes säilitab teise sirge.

Mõlema definitsiooni samaväärsus on ilmne.

T e o r e e m 50. Läbi iga punkti C kulgeb tasandil parajasti üks sirge CD, mis on risti antud sirgega AB (ja tal on sellega järelikult ühine punkt).

T õ e s t u s: Kui C on sirgel AB punktide A ja B vahel (seda on A, B valikuga kerge saavutada), siis liikumine φ, mille korral $R(CAD)\circ\varphi = R(CBD)$, on teoreemi 42 kohaselt peegeldus, mille telg ongi soovitud ristsirgeks sirgele AB läbi C.

Kui C ei ole sirgel AB, siis peegeldus ψ, mille korral $R(ABC)\circ\psi = R'(ABD)$ (kus C ja D on teine teisel pool sirget AB), kannab C mingisse punkti $C\circ\psi = D$ ning oma involutiivsuse tõttu säilitab sirge CD, mis ongi soovitud ristsirgeks.

Ristsirge ainsus järeldub vahetult teoreemist 48.

Ristuvate sirgete abil võib tasandil määrata koordinaatsüsteemi.

Olgu tasandil antud kaks punktis O lõikuvat ristuvat sirget OX_1 ja OX_2. Läbi tasandil vabalt võetud punkti A võib tõmmata parajasti ühe ristsirge sirgele OX_1 ja parajasti ühe ristsirge sirgele OX_2. Lõigaku need ristsirged sirgeid OX_1 ja OX_2 vastavalt punktides A_1 ja A_2. Kui sirged OX_1 ja OX_2 järjestada, võttes ülempoolsirgeteks $(OX_1$ ja $(OX_2$, siis punktidele A_1 ja A_2 nendel vastavad teatavad kindlad reaalarvud* a_1 ja a_2 - punktide A_1 ja A_2 abstsissid (§ 28) sirgetel OX_1 ja OX_2. Arve a_1, a_2 nimetatakse punkti A koordinaatideks teljestiku OX_1OX_2 korral.

§ 30. Kolmnurkade kongruentsus ja võrratused kolmnurgas.

Eelmistes paragrahvides on loodud küllaldane alus geomeetria edasiseks arendamiseks nendesamade võtetega, mis leiavad kasutamist elementaargeomeetrias. Seetõttu on käesoleva paragrahvi ülesandeks lihtsalt meelde tuletada mõningaid neist

* Kui pidevust mitte nõuda, siis nende reaalarvude asemele tulevad teatava järjestatud kommutatiivse rühma $\mathfrak{A}$ elemendid (hiljem see rühm muudetakse korpuseks; vt. D. Hilbert, loc. cit.).

võtetest ning, mis veel olulisem, rõhutada et järgnevad teoreemid kuuluvad absoluutsesse geomeetriasse (s.t. ei sõltu eukleidilise paralleelsuse aksioomi kehtivusest või mittekehtivusest).

Kolmnurga ΔABC puhul on meil tegemist kolme küljega $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ja kolme nurgaga $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$. Viimaseid hakkame nimetama kolmnurga ΔABC sisenurkadeks.

Kui kolmnurgad ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ on kongruentsed (s.t. leidub liikumine φ, mis kannab A, B, C vastavalt punktideks A', B', C'), siis on ilmselt kongruentsed ka vastavad küljed ja sisenurgad, näiteks $[AB] \equiv [A'B']$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ jne.

Vastupidise seose korraldavad järgmised kolm teoreemi. Nendes püstitatakse teatavad piisavad tingimused, mida tuntakse kolmnurkade kongruentsuse tunnuste nime all.

T e o r e e m 51. Kui kahe kolmnurga ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ korral on $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$ ja $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, siis need kolmnurgad on kongruentsed.

T õ e s t u s: Leidub liikumine φ, mis kannab nurga $\angle CAB$ nurgaks $\angle C'A'B'$. Siinjuures võib eeldada, et B kantakse haarale (A'B' punktiks B", C haarale (A'C' punktiks C" (sest vajaduse korral võib teha eelnevalt nurga $\angle CAB$ ümberpööramise). Sel korral $[AB] \equiv [A'B"]$, $[AC] \equiv [A'C"]$ ning teoreemi 45 põhjal B" = B', C" = C'. Tähendab, φ kannab A, B, C punktideks A', B', C' ning seega $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Teoreem on tõestatud.

Analoogiliselt tõestatakse järgnev teoreem.

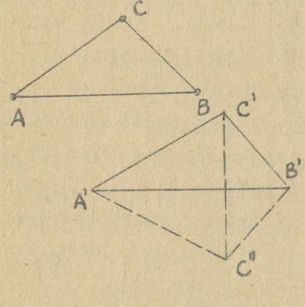
T e o r e e m 52. Kui kahe kolmnurga ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ korral on $[AB] \equiv [A'B']$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ja $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, siis need kolmnurgad on kongruentsed.

Kolmnurkade kongruentsuse kolmanda tunnuse annab järgnev teoreem.

T e o r e e m 53. Kui kahe kolmnurga ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ korral on $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[CA] \equiv [C'A']$, siis need kolmnurgad on kongruentsed.

T õ e s t u s: Tähistame liikumise, mis kannab reeperi R(ABC) reeperiks R'(A'B'D), kus C' ja D on teine teisel pool sirget A'B', tähega φ. Kongruentsuse $[AB]\equiv[A'B']$ ja teoreemi 45 põhjal φ kannab B punkti B'. Kandku ta C punktiks C" nii, et $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C"$ (joonis 61).

Vaatleme nurga $\angle C'A'C"$ ümberpööramist ψ. See kannab C' poolsirge (A'C" mingiks punktiks, mis kongruentsuste $[CA]\equiv$ $\equiv[C'A']$, $[CA]\equiv[C"A']$ ja teoreemi 45. põhjal ühtib punktiga C". Liikumise ψ involutiivsuse tõttu C" kandub tagasi punkti C', mistõttu ψ ühtib lõigu $[C'C"]$ ümberpööramisega. Analoogiliselt võib veenduda, et nurga $\angle C'B'C"$ ümberpööramine ühtib samuti lõigu $[C'C"]$ ümberpööramisega ja seega liikumisega ψ. Järelikult ψ vahetab punktid C' ja C" säilitades A' ja B'. Järelikult on $\Delta A'B'C" \equiv \Delta A'B'C'$ ning kongruentsuse transitiivsuse tõttu $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Teoreem on tõestatud.



Joonis 61.

Nurga $\angle BCA$ ja lõigu $[AB]$ ümberpööramiste abil on kerge tõestada ka järgmist teoreemi.

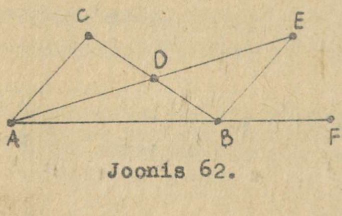
T e o r e e m 54. Kongruentsused $[BC]\equiv[CA]$ ja $\angle ABC \equiv$ $\equiv \angle CAB$ kolmnurgas ΔABC on samaväärsed, s.t. üks on teise järelduseks.

Läheme üle kolmnurkade puhul kehtivate võrratuste juurde.

Kolmnurga sisenurkade kõrvunurki nimetatakse kolmnurga välisnurkadeks.

T e o r e e m 55. Kolmnurga sisenurk on väiksem temaga mitte kõrvu olevast välisnurgast.

T õ e s t u s: Tõestame, et kolmnurgas ΔABC sisenurk $\angle ACB$ on väiksem välisnurgast $\angle CBF$ (joonis 62).



Joonis 62.

Teoreemi 46 põhjal leidub lõigu $[BC]$ keskpunkt D, mis on selle lõigu ja teoreemi 23 järgi ka nurga $\angle BAC$ sisemine punkt. Teoreemi 24 järgi on nurga $\angle BAC$ sees ka punkt E, mille korral on tõesed $\langle ADE \rangle$ ja $[AD] \equiv [DE]$ (niisugune punkt eksisteerib teoreemi 45 põhjal).

Kolmnurkades ΔACD ja ΔEBD on $[AD] \equiv [ED]$, $[CD] \equiv [BD]$, $\angle ADC \equiv \angle EDB$ (kui tippnurgad), mistõttu teoreemi 51 põhjal $\Delta ACD \equiv \Delta EBD$ ja seega $\angle ACB \equiv \angle EBD$.

Teoreemi tõestamiseks jääb näidata, et E asub nurga $\angle CBF$ sees, s.t. on korraga pooltasandeil $(BF|C$ ja $(BC|F$. Eespool selgus et E on $\angle BAC$ ehk $\angle FAC$ sees ja on seega pooltasandil $(AF|C$; viimane aga ühtib pooltasandiga $(BF|C$, nagu kerge näha. Teiselt poolt on teada, et nii E kui F on teisel pool sirget BC, võrreldes punktiga A, ning on seega ühel ja samal pooltasandil $(BC|F$. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et E on korraga pooltasandeil $(BF|C$ ja $(BC|F$. Teoreem on tõestatud.

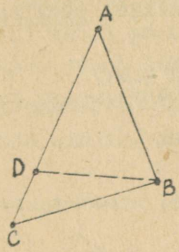
T e o r e e m 56. Kolmnurga kahe sisenurga summa on väiksem kahest täisnurgast.

T õ e s t u s: Et $\angle ACB < \angle CBF$, siis tõesti $\angle ABC + \angle ACB < \angle ABC + \angle CBF \in 2d$.

Tavalisel viisil võib sisse tuua külje vastasnurga ja nurga vastaskülje mõisted kolmnurgas (nurkadeks on muidugi sisenurgad).

T e o r e e m 57. Kolmnurgas on väiksema külje vastas väiksem nurk ja väiksema nurga vastas väiksem külg.

T õ e s t u s: Kolmnurgas ΔABC olgu $[AB] < [AC]$.



Joonis 63.

Näitame, et siis $\angle ACB < \angle ABC$. Eelduse kohaselt leidub D, nii et tõene on $\langle ADC \rangle$ & $([AB] \equiv [AD])$ (joonis 63). Teoreemi 54 järgi $\angle ABD \equiv \angle ADB$, teoreemide 23 ja 24 järgi $\angle ABD < \angle ABC$, teoreemi 55 järgi $\angle BCD \equiv \angle ACB < \angle ADB \equiv \angle ABD$.

Kokkuvõttes $\angle ACB < \angle ABC$.

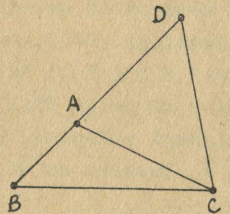
Olgu nüüd, vastupidi, kolmnurga ΔABC puhul kehtiv võrratus $\angle ABC < \angle ACB$. Kui sel korral oleks $[AB] \equiv [AC]$,

18.

siis peaks olema $\angle ACB \equiv \angle ABC$ (teoreem 54); kui oleks $[AB] < [AC]$, siis peaks olema $\angle ACB < \angle ABC$. Järelikult $[AC] < <[AB]$. Teoreem on tõestatud.

T e o r e e m 58. Kolmnurga iga külg on väiksem kahe teise külje summast.

T õ e s t u s: Näitame, et $\triangle ABC$ puhul $[BC] < [AB] + [AC]$. Teoreemi 45 järgi leidub D, nii et tõene on $\langle BAD \rangle$ & $([AD]) \equiv \equiv [AC])$ (joonis 64). Teoreemi 54 põhjal



Joonis 64.

$\angle ADC \equiv \angle ACD$, kusjuures $\langle BAD \rangle$ tõesuse ja teoreemide 23, 24 põhjal $\angle ACD < < \angle BCD$. Järelikult, $\angle ADC < \angle BCD$ ning eelmise teoreemi alusel $[BC] < [BD]$ ehk $[BC] < [AB] + [AC]$. Teoreem on tõestatud.

§ 31. E u k l e i d i l i n e p l a n i m e e t r i a.

Käesolevas paragrahvis täiendame absoluutse planimeetria aksiomaatikat (aksioomid I_{1-6}, II_{1-5}, III_1, III_2, planimeetria dimensiooniaksioom ja kas pidevuse aksioom IV või laused X_1, X_2) veel ühe aksioomiga - eukleidilise paralleelide aksioomiga:

V $\overline{(\exists X)(\{ABX\} \& \{CDX\})} \& \overline{\{CDE\}} \rightarrow (\exists Y)(\{ABY\} \& \{CEY\})$

(ehk tavalises sõnastuses; sirge AB ja sellel mitte asetseva punkti C korral kulgeb läbi C mitte rohkem kui üks sirge, millel ei ole sirgega AB ühist punkti).

Planimeetriat, mille me sel puhul saame, nimetatakse eukleidiliseks.

Aksioom V, nagu näha, käib ainult vahel-predikaadi kohta. Aksioomidest I_{1-6} on ta eraldatud ainult oma erilise osa poolest, mis tal on täita geomeetria ülesehituses. Rõhutame, et ülal antud lihtne kuju on tal ainult planimeetria dimensiooniaksioomi kehtivuse korral.

Sirgeid tasandil, millel ei ole ühist punkti (mis ei lõiku), nimetatakse eukleidilises planimeetrias paralleelseteks (ehk paralleelideks).

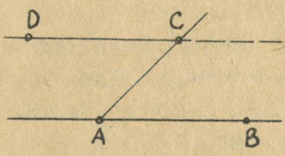
Näitame, et paralleelid eksisteerivad.

T e o r e e m 59. Läbi iga punkti C, mis ei asetse sirgel AB, võib tõmmata sirge CD, mis on paralleelne sirgega AB.

T õ e s t u s: Teoreemi 47 kohaselt võib (AC|B täiendpooltasandil leida parajasti ühe poolsirge (CD selliselt, et

$$\angle ACD \equiv \angle BAC$$

(joonis 65).



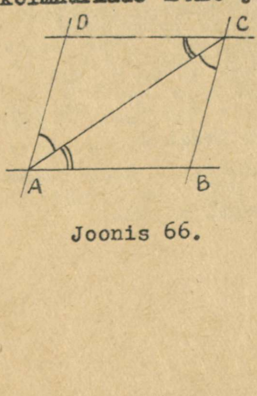
Joonis 65.

Sirged AB ja CD ei saa lõikuda. Tõepoolest, kui oletaksime, et neil sirgeil on ühine punkt P, siis tekiks kolmnurk $\triangle ACP$, milles üks sisenurk oleks võrdne temaga mitte kõrvu oleva välisnurgaga, see aga on vastuolus teoreemiga 54. Teoreem on tõestatud.

Aksioom V, nagu näha, nõuab paralleeli ainsust läbi punkti C sirgele AB. (Siit on tulnudki nimetus "paralleelide aksioom".) Sellest aksioomist ja teoreemi 59 tõestusest järeldub, et sirgete AB ja CD paralleelsuse korral on alati (joonis 65)

$$\angle ACD \equiv \angle BAC.$$

Edasi on kerge tõestada, et paralleelsed sirged lõikavad teisel kahel paralleelsel sirgel välja kongruentsed lõigud. Selleks tuleb lihtsalt rakendada teoreemi 52 joonisel 66 näidatud kolmnurkade $\triangle ABC$ ja $\triangle CDA$ puhul.



Joonis 66.

Lõike [AB], [CD] ja [A'B'], [C'D'] nimetatakse võrdelisteks ja tähistatakse

$$[AB] : [CD] = [A'B'] : [C'D'],$$

kui mingi vabalt võetud ühiklõigu korral nende lõikude pikkuste vahel kehtib seos

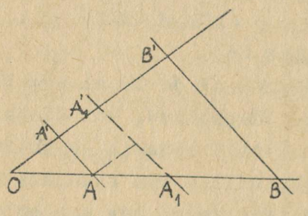
$$|AB| \cdot |C'D'| = |A'B'| \cdot |CD|.$$

Ühiklõigust sõltuvust siin pole, sest üleminekul teisele ühiklõigule kõigi lõikude pikkused korrutuvad ühe ja sama mastaabikordajaga, ning viimane seos jääb kehtima.

T e o r e e m 60. Nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdelised lõigud.

T õ e s t u s: Olgu nurga $\angle AOA'$ haaradel valitud punktid A, A' ja B, B' selliselt, et sirged AA' ja BB' on paralleelsed. Näitame, et siis

$$[OA] : [OB] = [OA'] : [OB'].$$



Joonis 67.

Valime $[OA]$ ühiklõiguks ja mõõdame temaga lõiku $[OB]$. Kooskõlas §-s 8 kirjeldatud protsessiga tuleb leida punktijada

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$$

selliselt, et

1) punktide järjestus jadas ühtiks nende järjestusega poolsirgel $(OB$,

2) $[AA_1] \equiv [A_1A_2] \equiv \ldots \equiv [A_nA_{n+1}]$ ning

3) punkt B kas ühtib punktiga A_n või asetseb vahemikus (A_nA_{n+1}).

Viimasel juhul tuleb vahemik (A_nA_{n+1}) keskpunktiga P_1 poolitada, ning kui B ja P_1 ei ühti, siis valida see pool, kuhu kuulub B, poolitada see keskpunktiga P_2 jne. Jada A, A_1, A_2, ..., A_{n+1} kõrvale tekib veel teine punktijada - keskpunktide jada P_1, P_2, ..., mis üldjuhul on lõpmatu.

Tõmbame läbi kummagi jada vabalt võetud punktide A_i ja P_k sirged, mis on paralleelsed sirgega AA', ning tähistame nende lõikepunktid sirgega OA' tähtede A_i' ja P_k' abil.

Osutub, et jadal A', A_1', A_2', ..., A_n', A_{n+1}' on poolsirgel $(OB'$ samad omadused 1) - 3), mis jadal A, A_1, ..., ning et P_1' on samuti lõigu $A_n'A_{n+1}'$ keskpunkt, P_2' sama lõigu selle poole keskpunkt, mis sisaldab punkti B' jne.

Selles veendumise jätame lugeja enda hooleks. Märgime vaid, et omaduse 2) tõestus jada A', A_1', ... puhul tugineb kolmnurkade $\Delta OAA'$ ja ΔAA_1C kongruentsusel (kus AC ja OA' on paralleelsed) ning eestpoolt järelduval kongruentsusel $[AC] \equiv [A'A_1']$.

Nüüd on selge, et lõigu $[OB']$ mõõtmisel ühiklõiguga $[OA']$ saame pikkuseks sama reaalarvu α, mis osutub lõigu $[OB]$ pikkuseks, kui viimast mõõta ühiklõiguga $[OA]$, sest mõlemad mõõtmisprotsessid ühtivad kõigis üksikasjades.

Üleminekul mingile ühisele ühiklõigule kõikide lõikude mõõtmisel tuleb lõikude $[OA]$ ja $[OB]$ esialgseid pikkusi 1 ja α korrutada mingi mastaabi-kordajaga k (lõigu $[OA]$ uue pikkusega), lõikude $[OA']$ ja $[OB']$ endisi pikkusi 1 ja α mingi mastaabikordajaga ℓ (lõigu $[OA']$ uue pikkusega), nii et

$$|OA| = k, \quad |OB| = \alpha k; \quad |OA'| = \ell, \quad |OB'| = \alpha\ell,$$

ning tõepoolest

$$|OA| \cdot |OB'| = |OA'| \cdot |OB|,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lõikude võrdelisuse ülalantud definitsioon ja teoreemi 60 tõestus tuginevad oluliselt pidevuse aksioomil. Huvitav on märkida, et mitmete matemaatikute uurimuste tulemusena õnnestus möödunud sajandi lõpul lõikude võrdelisuse teooriat üles ehitada ka ilma pidevuse aksioomita (s.t. üksnes aksioomide I_{1-6}, II_{1-5}, III_{1-2}, X_{1-2} ja V alusel) - teisiti öeldes, mittearhimeedilises geomeetrias. Sel puhul reaalarve muidugi kasutada ei saa ning võrdelisuse mõiste tuleb sisse tuua lõikude kongruentsusklasside endi vahel defineeritud korrutamistehte abil.*

Teoreem 60 on aluseks sarnasuse teooriale, sellest aga omakorda järelduvad tavalised meetrilised seosed kolmnurkade jms., mis on tuttavad kooligeomeetria kursusest. Mingeid põhimõttelisi raskusi planimeetria edasine ülesehitamine enam ei valmista.

---

* Vt. Hilbert, loc, cit., III ptk.

§ 32. A k s i o m a a t i k a p õ h i p r o b l e e m i d.

Käesolevas paragrahvis analüüsime lähemalt eukleidilise planimeetria aksiomaatikat, mis meie käsitluses koosneb järgmisest 16 aksioomist:

9 aksioomi vahel-predikaadi $\langle XYZ \rangle$ kohta (aksioomid I_{1-6} (§ 9), planimeetria dimensiooniaksioom (§ 15), pidevuse aksioom (§ 22), paralleelsuse aksioom (§ 31)).

7 aksioomi predikaadi $X \circ \varphi = Y$ kohta (aksioomid II_{1-5}, $III_{1,2}$ (§ 23)).

Iga aksiomaatika puhul kerkib kolm probleemi: 1) aksiomaatika <u>vasturääkimatus</u>, 2) ühe aksioomi <u>sõltumatus</u> ülejäänuist, 3) aksiomaatika <u>täielikkus</u>.

Käsitleme järgnevalt neid probleeme, illustreerides üldisi arutlusi peaasjalikult eukleidilise planimeetria aksiomaatikast võetud näidetega.

Aksiomaatikat nimetatakse <u>vasturääkivaks</u>, kui aksioomide ja nendest deduktsiooni teel saadavate järelduste seas on kaks teineteist täpselt välja sulgevat lauset f ja $\bar{f}$.

Aksiomaatikat, mis ei ole vasturääkiv nimetatakse <u>vasturääkimatuks</u>.

Kuidas teha kindlaks mingi aksiomaatika vasturääkimatust? On ju mõeldamatu läbi analüüsida <u>kõik</u> järeldused aksiomaatikast, et kindlaks teha, kas nende seas on või ei ole teineteist või aksioome välja sulgevaid lauseid - järelduste süsteem on ju lõpmatu ja teooria arendamise ühelgi etapil ei ole võimalik jõuda "viimase" järelduseni.

Vastus sellele küsimusele absoluutse planimeetria aksiomaatika puhul on lühidalt formuleeritud § 26 lõpus ja tugineb võimalusel konstrueerida mudeleid selle aksiomaatika jaoks reaalarvude aritmeetika baasil. Arutlus on seejuures lihtne: kui oletada, et absoluutse planimeetria aksiomaatika on vasturääkiv, siis tekiks vasturääkivus ka mudelis, s.t. reaalarvude aritmeetikas. Kui reaalarvude aritmeetika lugeda vasturääkimatuks, siis on järelikult vasturääkimatu ka absoluutne planimeetria.

Analoogiliselt toimitakse mis tahes aksiomaatika puhul. Võetakse aluseks teatav teooria, mis loetakse vasturääkimatuks. Selle teooria vahenditega antakse konkreetsed tõlgendused nii nende hulkade elementidele kui ka nendele predikaatidele, millega antud aksiomaatika tegeleb. Kui seejuures kõigi aksioomide nõuded on rahuldatud, siis kõneldakse, et on konstrueeritud antud aksiomaatika mudel antud teooria baasil. Aluseks võetud teooria vasturääkimatus toob endaga kaasa uuritava aksiomaatika vasturääkimatuse.

Nagu näha, võimaldab mudelite meetod taandada antud aksiomaatika vasturääkimatuse probleemi teatava teise teooria vasturääkimatuse küsimusele. Kui ka see teooria on aksiomatiseeritud, siis võib viimase küsimuse sobiva mudeli konstrueerimisega taandada edasi ühe uue teooria vasturääkimatuse probleemile jne. Püütakse muidugi saavutada seda, et iga järgnev teooria oleks eelmistest lihtsam ja lähedasem reaalsusest vahetult ammutatud elavale kaemusele. Nii minnakse geomeetrialt üle reaalarvude aritmeetikale, sellelt omakorda täisarvude ja viimaks naturaalarvude aritmeetikale.*

Eelnevas oli juttu absoluutse planimeetria aksiomaatikast. Võib tekkida küsimus, kas eukleidilise paralleelide aksioomi lisamine ei too endaga kaasa vasturääkivust, s.t. kas eukleidiline planimeetria on vasturääkimatu. Lahenduse sellele küsimusele annab Descartes'i mudel reaalarvude aritmeetika baasil. Näitame, et selles mudelis on rahuldatud paralleelsuse aksioomi nõue (§ 31).

Tuletame §-st 21 meelde, et paaride A, B, C kollineaarsus tähendab seoste

$$\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$$

ehk

$$\alpha(a_1 - c_1) + \beta(b_1 - c_1) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

---

* Vt. J. Hion, Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt I, Tartu 1962.

kehtivust; teisiti öeldes, võrdust

$$\begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_1 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Paralleelsuse aksioomi esimene eeldus $\overline{(\exists X)(\{ABX\} \& \{CDX\})}$ tähendab seda, et ei leidu reaalarve α, β, γ, δ, x_i nii, et oleks $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ ja

$$\alpha(x_i - a_i) + \beta(b_i - a_i) = 0$$
$$\gamma(x_i - c_i) + \delta(d_i - c_i) = 0.$$

Kõigepealt on kindel, et $B \neq A$, $D \neq C$, sest vastupidisel juhul ikka leiduks X, nii et on tõene $\{ABX\}$ & $\{CDX\}$. Järelikult soovitud reaalarvude süsteemi ei leidu $\alpha = \gamma = 0$ puhul (sest sel korral peaks olema $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ ja koos sellega $b_i = a_i$, $d_i = c_i$). Seetõttu on eelduse arvestamisel küllalt silmas pidada ainult neid juhte, mil $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Kui tähistada $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\mu = \frac{\delta}{\gamma}$, siis saame tundmatute λ, μ, x_1, x_2 määramiseks järgmise süsteemi

$$(54) \qquad \begin{array}{lllll} x_1 + * & + \lambda(b_1 - a_1) & * & & = a_1, \\ * & x_2 + \lambda(b_2 - a_2) & * & & = a_2, \\ x_1 & * & * & + \mu(d_1 - c_1) & = c_1, \\ * & x_2 & * & + \mu(d_2 - c_2) & = c_2. \end{array}$$

Sellel süsteemil ei tohi olla lahendit - järelikult peab tema determinant, mis on kergesti teisendatav kujusse

$$-\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & d_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 & d_2 - c_2 \end{vmatrix},$$

olema võrdne nulliga. Et esimene veerg on nullist erinev, siis teine veerg on järelikult selle kordne.

Teine eeldus tähendab seda, et

$$\begin{vmatrix} e_1 - c_1 & d_1 - c_1 \\ e_2 - c_2 & d_2 - c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aksioomi väide nõuab, et (54)-taolisel süsteemil (kus D asemel on E) oleks kindlasti lahend. Selleks on küllalt nõuda, et

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & e_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 & e_2 - c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

See nõue on aga eelduste korral tõesti rahuldatud: kui viimane determinant oleks null, siis tema teine veerg oleks esimese kordne, ning eelviimase determinandi veerud oleksid mõlemad ühe veeru kordsed - determinant ei saaks olla nullist erinev nagu eeldatud.

Paralleelide aksioomi kehtivus Descartes'i mudelis reaalarvude korpuse baasil on kontrollitud.

Me võime nüüd öelda, et eukleidilise planimeetria aksiomaatika vasturääkimatus on taandatud reaalarvude aritmeetika (ehk lõppkokkuvõttes naturaalarvude aritmeetika) vasturääkimatusele, viimast aga võib (vähemalt käesolevas kursuses) lugeda ilmseks.

Teine aksiomaatika põhiprobleem on ühe aksioomi teistest <u>sõltumatuse</u> probleem. Selle üheks erijuhuks ongi sissejuhatuses tutvustatud V postulaadi probleem, mille võime nüüd täie selgusega püstitada järgmiselt: teha kindlaks, kas eukleidiline paralleelide aksioom on järeldatav absoluutse planimeetria aksioomidest või mitte.

Analoogiliselt seatakse üldine probleem: aksiomaatika $\mathcal{F}$, F puhul teha kindlaks, kas aksioom F on järeldatav (ehk sõltuv) aksioomidest $\mathcal{F}$ või mitte.

Aksioomi F sõltuvuse näitamiseks on olemas kindel tee - järeldada F deduktsiooni teel aksioomidest $\mathcal{F}$. Kuidas aga teha kindlaks aksioomi sõltumatust? Kui teatava ajahetkeni ei ole veel suudetud lauset F aksioomidest $\mathcal{F}$ järeldada, siis ei või veel öelda, et see on üldse mõeldamatu.

Meetod selle raske küsimuse lahendamiseks, mis leiti tänu Lobatševski, Beltrami ja Kleini töödele, seisneb järgnevas.

Aksioom F tuleb asendada tema eitusega $\overline{F}$. Kui õnnestub tõestada aksiomaatika $(\mathcal{F}, \overline{F})$ vasturääkimatus (s.t. konstrueerida selle aksiomaatika mudel), siis F on sõltumatu (mitte sõltuv) aksioomidest $\mathcal{F}$. Tõepoolest, kui siiski oletaksime et F on $\mathcal{F}$ järelduseks, siis aksiomaatika $(\mathcal{F}, \overline{F})$ ja tema järelduste süsteem peaks sisaldama kaks teineteist välja sulgevat lauset - aksioomidest $\mathcal{F}$ järelduva F ja aksioomi $\bar{F}$ enda ning ei saaks olla vasturääkimatu. Tähendab, kui ($\mathcal{F}$, $\bar{F}$) on vasturääkimatu, siis F on sõltumatu aksioomidest $\mathcal{F}$.

Sel teel lahendatigi V postulaadi probleem. Eukleidilise paralleelide aksioomi F eituseks $\bar{F}$ on Lobatševski aksioom: sirge AB ja sellel mitte asetseva punkti C korral võib läbi C tasandil ABC tõmmata vähemalt kaks sirget, millel ei ole sirgega AB ühist punkti.

Lisame selle aksioomi $\bar{F}$ absoluutse planimeetria aksioomidele $\mathcal{F}$. Saadud uus aksiomaatika ($\mathcal{F}$, $\bar{F}$) omab mudeli reaalarvude aritmeetika baasil - selleks on Beltrami-Kleini mudel* - ning aksiomaatika ($\mathcal{F}$, $\bar{F}$) on seetõttu vasturääkimatu.

Siit järeldubki, et eukleidiline paralleelide aksioom on sõltumatu absoluutse planimeetria aksioomidest (kui aluseks võtta naturaalarvude aritmeetika vasturääkimatus). Selline on lahendus kuulsale V postulaadi probleemile.

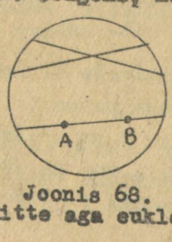
Nagu selgub, võib absoluutse geomeetria aksiomaatikale lisada ka Lobatševski aksioomi - saadud uus aksiomaatika on vasturääkimatu. Sellest tulenevate järelduste süsteem moodustab aine Lobatševski geomeetriale, mida me käsitleme kursuse teises osas.

Aksioomi sõltumatuse probleemi lahendusmeetodi illustreerimiseks märgime veel, et paragrahvis 25 ja 26 konstrueeritud mudeleist selgub ka pidevuse aksioomi sõltumatus nii eukleidilises kui Lobatševski geomeetrias.

Aksiomaatika puhul on ideaalseks olukord, kus iga aksioom on sõltumatu ülejäänuist (aksiomaatika sõltumatuse nõue). Sel

---

* See saab selgeks, kui pidada silmas, et vahel-predikaati puudutavas osas (mis paralleelsuse puhul ongi ainult oluline), on see mudel samaväärne eukleidilise tasandi ringi sisemusega. On selge, et sellises ringis on rahuldatud just Lobatševski aksioom, mitte aga eukleidiline paralleelsuse aksioom (joonis 68).



Joonis 68.

korral aksioomid ei sisalda midagi ülearust, midagi seesugust, mida võiks tõestada. Metoodilistel kaalutlustel loobutakse siiski sageli, eriti keerukamatel juhtudel, aksiomaatika sõltumatuse nõudest, et saavutada lühemat teed aksioomidest teooria sisukate teoreemideni.

Peatume põgusalt ka aksiomaatika kolmanda põhiprobleemi - täielikkuse probleemi juures.

Defineerime kõigepealt mudelite isomorfsuse mõiste. Antud aksiomaatika kaht mudelit nimetatakse isomorfseteks, kui neis mudelis aksiomaatika seisukohalt ühesugust osa etendavate hulkade vahel on võimalik korraldada üksühesed vastavused, nii et nende puhul säilivad aksiomaatika põhipredikaatide täislausete tõesused. Selline isomorfism üldistab algebrast tuntud rühmade, ringide jne. isomorfismi mõistet.

Aksiomaatikat nimetatakse täielikuks, kui iga kaks tema mudelit on isomorfsed.

Märgime, et aksiomaatika täielikkust defineeritakse sageli ka teisiti. On isegi võimalik, et aksiomaatika, mis ühes mõttes on täielik, teise definitsiooni seisukohalt seda enam ei ole (Gödel, 1931). Käesolevas kursuses jääme aksiomaatika täielikkuse ülaltoodud definitsiooni juurde, laskumata probleemi mitmesugustesse peensustesse.

Tutvustame Hilbertilt pärinevat mõttekäiku, mis võimaldab näidata, et meie poolt eukleidilise planimeetria ülesehitamisel aluseks võetud aksiomaatika on täielik. Mõttekäik põhineb asjaolul, et mainitud aksiomaatika iga mudel on isomorfne Descartes'i mudeliga.

Tõepoolest, §-s 29 me märkisime, et juba absoluutses planimeetrias võib sisse tuua koordinaatide mõiste ning järelikult selle planimeetria igas mudelis võib üles ehitada teatava analüütilise geomeetria. Kui lisaks kehtib ka eukleidiline paralleelsuse aksioom, siis, nagu me §-s 31 märkisime, leiavad aset tavalised meetrilised seosed kolmnurkades, ühesõnaga, kehtivad kõik kooligeomeetriast tuntud laused. Analüütiline geomeetria, mille me sel korral mudelis saame, on tavaline ülikooli esimese kursuse analüütiline geomeetria. Kui mudeli iga punktiga A vastavusse seada tema koordinaatide paar (a_1, a_2), siis tekib üksühene vastavus vaadeldava mudeli ja Descartesi mudeli punktide hulga vahel. Analoogiline üksühene vastavus tekib ka liikumiste ja paaride $\varphi = (\Phi, \varphi_0)$ (§ 25) vahel, kusjuures predikaatide $\langle ABC \rangle$ ja $A \circ \varphi = B$ vastavad täislaused on ilmselt korraga kas tõesed või väärad. Vaadeldav mudel on tõepoolest isomorfne Descartes'i mudeliga.

Iga kaks mudelit, mis on isomorfsed kolmandaga on ilmselt ka omavahel isomorfsed. Sellega ongi näidatud eukleidilise planimeetria aksiomaatika täielikkus.

Samasuguse arutlusega, kui arendada ta välja üksikasjalikult, võib veenduda, et täielik on ka Lobatševski planimeetria (s.t. absoluutse planimeetria aksiomaatika koos Lobatševski aksioomiga).

Teistlaadi täieliku aksiomaatika näitena võib tuua lõpliku dimensionaalse vektorruumi aksiomaatika üle reaalarvude korpuse. Lineaaralgebras tõepoolest näidatakse, et iga selle aksiomaatika (s.t. iga niisugune vektorruum) on isomorfne lõplike arvujadade $(x_1, \ldots, x_n)$ lineaarruumiga R^n (s.t. ühe konkreetse mudeliga).

Väga laialt kasutatakse matemaatikas mittetäielikke aksiomaatikaid. Näideteks on rühma aksiomaatika - on ju olemas mitteisomorfseid rühmi, projektiivse tasandi aksiomaatika - on olemas nii desargilisi kui mittedesargilisi projektiivseid tasandeid jne.

Mittetäieliku aksiomaatika puhul saadakse erijuhtude poolest rikkalik teooria, täieliku aksiomaatika puhul aga teooria, mis on arendatav ühesuguselt kõikides mudelites.

V p e a t ü k k.

R U U M I A B S O L U U T S E G E O M E E T R I A A L U S E D.

Kursuse esimese osa viimases peatükis toome sisse liikumise mõiste ruumis. Edasi defineerime sirge ja tasandi ristumise mõiste, tõestame tasandi iga kahe ristsirge asetsemise ühel tasandil ning järgmise olulise teoreemi:

Kui liikumine ruumis säilitab punkti ja sellest punktist lähtuva poolsirge, siis ta jätab paigale selle sirge iga punkti.

See teoreem on aluseks lõikude kongruentsuse põhiteoreemi tõestamisel ruumis. Viimases paragrahvis tutvustame Hilberti aksiomaatikat ning tõmbame mõningaid võrdlusjooni.

§ 33. L i i k u m i n e j a r i s t s e i s r u u m i s.

Rühma Ω nimetatakse ruumi $\mathfrak{X}$ liikumiste rühmaks, kui hulgal $\mathfrak{X} \times \Omega \times \mathfrak{X}$ on võimalik määrata predikaat, mille me tähistame $X \circ \varphi = Y$ selliselt, et on rahuldatud aksioomid II_{1-5}, III_{1-2}. Viimase kahe aksioomi puhul reeperite R ja R' all mõistame, samuti nagu eespool, punktihulki, mis koosnevad punktist, sellest lähtuvast poolsirgest ja viimasega äärnevast pooltasandist. Vahe on ainult selles, et antud sirgega äärnevaid pooltasandeid on mitte kaks, nagu planimeetrias, vaid lõpmata palju.

Liikumist φ, mis kannab reeperi R(ABC) reeperiks R'(ABC'), kus (AB|C ja (AB|C' on teineteist täiendavad pooltasandid, mimetatakse ruumis poolpöördeks sirge AB ümber.

Poolpööre φ sirge AB ümber on ilmselt involutiivne. Sellest võib teoreemi 40 tõestuses kasutatud mõttekäigu abil kergesti järeldada, et φ kannab täiendpooltasandiks mitte üksnes pooltasandi (AB|C, vaid ka iga teise sirgega AB ääreva pooltasandi.

Poolpöörde abil võib samuti nagu §-s 29 defineerida ristuvad sirged: kaht sirget nimetatakse ristuvaiks, kui poolpööre ühe sirge ümber säilitab teise sirge. Sirgete ristseis on seejuures vastastikune (§ 29).

T e o r e e m 61. Kui sirge AB on risti kahe erineva sirgega AC ja AD, siis ta on risti iga sirgega AE, mis läbib punkti A ja asetseb tasandil ACD.

T õ e s t u s: Eelduse järgi poolpööre AB ümber säilitab sirged AC ja AD ning nendega koos ka tasandi ABD. Et seejuures säilib ka tasand ABE, nagu eespool selgus, siis säilib ka tasandite ACD ja ABE lõikesirge AE, mida oligi tarvis näidata.

Sirget a, mis on risti mingi kahe erineva sirge tasandil α, nimetatakse <u>ristuvaks</u> tasandiga α (ehk tasandi α <u>ristsirgeks</u>).

T e o r e e m 62. Iga sirge a iga punkti A läbib parajasti üks tasand α, millega a on risti. Iga tasandi α iga punkti A läbib parajasti üks sirge a, mis on risti tasandiga α.

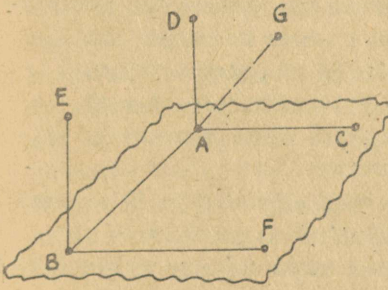
T õ e s t u s: Paneme läbi sirge a kaks erinevat tasandit β ja γ ning tõmbame nendel läbi punkti A sirged b ja c, mis on risti sirgega a. Sirgeid b ja c läbiv tasand ongi soovitud tasand α. Teist sellist tasandit α' olla ei saa, sest tasandeil α' ja β on ühine punkt A, seetõttu ka ühine sirge läbi A, mis peaks olema risti sirgega a. Samuti peaks α' ja γ lõikesirge olema risti sirgega a. Ristsirge ainsusest läbi antud punkti A antud sirgele a tasandeil β ja γ järeldub, et vaadeldavad lõikesirged ühtivad sirgetega b ja c, mistõttu α' ühtib tasandiga α. Teoreemi esimene osa on tõestatud.

Tõmbame tasandil α läbi A kaks erinevat sirget b ja c ning määrame tasandid β' ja γ läbi A, milledega nad on risti. Neil tasandeil on ühine punkt A, seetõttu ka ühine sirge a läbi A, mis ongi risti tasandiga α. Teist sellist sirget a' olla ei saa, sest siis omaks sirgeid a ja a' läbiva tasandi ja tasandi α lõikesirge esimesel tasandil kaks ristsirget läbi sama punkti A.

T e o r e e m 63. Sirge BE, mis on tasandi α mingit ristsirget AD läbival tasandil β risti tasandite α ja β lõikesirgega AB, on risti ka tasandiga α. Tasandi α iga kaks ristsirget on ühel tasandil β .

T õ e s t u s: Tõmbame tasandil α sirgele AB ristsirge AC, mis on risti ka sirgega AD.

Täisnurga $\angle CAD$ ümberpööramine φ tasandil ACD kujutab endast teoreemi 41 põhjal peegeldust teatava sirge AG suhtes, ruumis järelikult poolpööret tasandil ACD asuva sirge AG ümber. Vaatleme liikumist $\chi = \varphi\psi$, kus ψ on poolpööre sirge AD ümber. Liikumine χ kannab poolsirge (AC poolsirgeks (AD, poolsirge (AD viib ta (AC täiendpoolsirgeks, säilitades samal ajal poolsirge (AB. Järelikult χ on poolpööre sirge AB ümber ja seetõttu säilitab punkti B. Siis aga ka χ säilitab B, sest kui oletada $B\circ\varphi = B'$ puhul $\langle ABB'\rangle$ või $\langle AB'B\rangle$ tõesusest, siis peale χ sooritamist saame $B'\circ\chi = (B\circ\chi)\circ\chi = B\circ\chi^2 = B$ põhjal vastavalt $\langle AB'B\rangle$ või $\langle ABB'\rangle$ ja seega tekib vastuolu.



Joonis 69.

Tõmbame tasandil α sirgele BA ristsirge BF. Asetsegu E pooltasandil (AB|D ja F pooltasandil (AB|C. Et χ viib teise pooltasandi esimeseks, siis ta viib ka poolsirge (BF poolsirgeks (BE, sest nad mõlemad on risti sirgega AB ja B säilib. Samal põhjusel poolsirge (BE kantakse χ poolt BF täiendpoolsirgeks.

Tähistame nurga $\angle EBF$ ümberpööramise tähega ω. Liikumine $\chi\omega$ jätab poolsirge (BF muutmatuks, poolsirge (BE aga viib ta selle täiendpoolsirgeks. Siit nähtub, et sirged BE ja BF on risti. Et BE on risti ka sirgega AB, siis ta on ühtlasi risti tasandiga α. Teoreemi esimene osa on tõestatud.

Teoreemi teise osa tõestus on lihtne. Olgu sirged a ja b tasandi α kaheks ristsirgeks vastavalt punktides A ja B. Paneme läbi a ja B tasandi β ja tõmbame sellel ristsirge b' läbi B tasandite α ja β lõikesirgele. Teoreemi juba tõestatud osa põhjal b' on risti tasandiga α punktis B. Ristsirge ainsuse tõttu b ja b' ühtivad, seega a ja b tõesti asuvad ühel tasandil β. Teoreem on tõestatud.

§ 34. Lõikude kongruentsuse põhiteoreem ruumis.

Käesolevas paragrahvis on meie eesmärgiks näidata, et iga lõigu [AB] ja poolsirge (A'B korral võib sellel poolsirgel näidata parajasti ühe punkti B', nii et lõigud [AB] ja [A'B'] on kongruentsed (vrd. teoreem 45 planimeetrias). Kongruentsust mõistame siin täpselt samuti nagu §-s 28.

Selle väite põhjendamine tugineb kahel teoreemil, mille tõestamisele me asume.

T e o r e e m 64. Iga kahe poolpöörde φ ja φ' korral sirgega a punktis A ristuva kahe erineva sirge AB ja AB' ümber sirge a iga punkt X teiseneb üheks ja samaks punktiks Y.

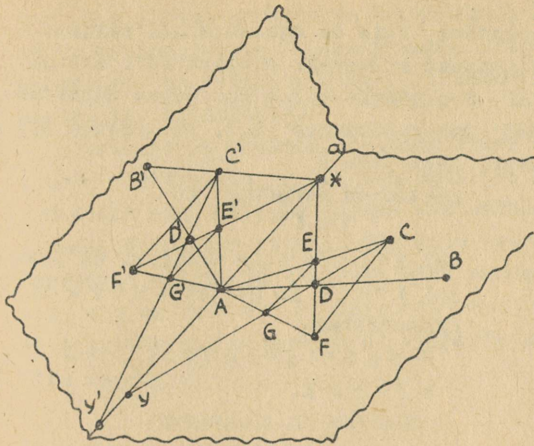
T õ e s t u s: Võtame vabalt punkti C, nii et oleks tõene $\langle BCX\rangle$. Tähistame $X\circ\varphi = Y$. Leiduvad punkt D, nii et on tõene

$$\langle AEC\rangle \ \& \ \langle CDY\rangle,$$

ja edasi punkt E, nii et on tõene

$$\langle AEC\rangle \ \& \ \langle DEX\rangle.$$

On teada, et $A\circ\varphi = A$, $D\circ\varphi = D$ ja $\varphi^2 = \iota$. Tähistame veel $C\circ\varphi = F$, $E\circ\varphi = G$; saame, et tõesed on $\langle FDX\rangle$, $\langle AGF\rangle$, $\langle DGY\rangle$. Tähendab X, E, D, F ning samuti Y, G, D, C on ühel sirgel.



Joonis 70.

Seejuures sirged CF ja EG on risti sirgega AB.

Samasuguse konstruktsiooni viime läbi tasandil AB'X tähistades $X\cdot\varphi' = Y'$. Tuleb näidata, et $Y' = Y$. Selleks on võimalik kasutada teoreemi 34.

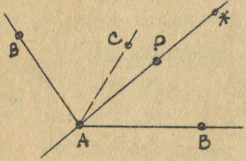
Sirged CF, EG, C'F' ja E'G' on teoreemi 63 põhjal tasandi ABB' ristsirged ja sama teoreemi põhjal asetsevad paarikaupa samadel tasanditel. Paneme läbi sirge EE' tasandi ACC' ja läbi sirge FF' ristsirgete CF ja C'F' ühise tasandi. Tasandid lõikuvad mööda sirget CC'. Järgnevalt paneme läbi sirge EE' ristsirgete EG ja E'G' ühise tasandi ja läbi sirge FF' tasandi AFF'. Tasandid lõikuvad mööda sirget GG'. Et sirged EE' ja FF', mille läbi me tasandeid panime, on ise ühel tasandil XDD', siis teoreemi 34 põhjal lõikesirged CC' ja GG' on ühel tasandil. Meid huvitavad punktid Y ja Y' osutuvad selle tasandi ja sirge a ühisteks punktideks. Kui nad erineksid, siis sirge a asuks viimatisaadud tasandil, kogu konstruktsioon oleks tasandiline ning sirged AB ja AB' ei saaks erineda nagu eeldatud. Järelikult $Y' = Y$, mida oligi tarvis tõestada.

Edasi on lihtne tõestada järgmist olulist teoreemi, mida mõned autorid (näit. Kostin) on võtnud aksioomiks.

T e o r e e m 65. Kui liikumine φ säilitab punkti A ja poolsirge (AP, siis ta jätab paigale sirge AP iga punkti X.

T õ e s t u s: Väide on tõestatud juhul, kui φ on poolpööre sirge AB ümber.

Kui φ ei ole poolpööre, siis ta kannab mingi sirgega AP ristuva sirge AB viimasest erinevaks sirgeks AB', mis on samuti risti sirgega AP. Poolpöörde sirge AB' ümber tähistame tähega ψ, nurga $\angle BAB'$ ümberpööramise (s.t. poolpöörde selle nurga poolitaja AC ümber) tähistame χ.



Joonis 71.

Lihtne on veenduda, et

$$\varphi = \chi\psi.$$

Kui $X \circ \chi = Y$, siis teoreemi 64 põhjal $X \circ \psi = Y$ ja seetõttu $Y \circ \psi = X$. Kokkuvõttes:

$$X \circ \varphi = X \circ (\chi\psi) = (X \circ \chi) \circ \psi =$$
$$= Y \circ \psi = X.$$

Teoreem on tõestatud.

Nüüd on tehtud kõik eeltööd selleks, et tõestada lõikude kongruentsuse põhiteoreemi ruumis (vrd. teoreem 45).

T e o r e e m 66. Antud lõigu [AB] korral võib igal poolsirgel (A'P näidata ühe ja ainult ühe punkti B', nii et lõigud [A'B'] ja [AB] on kongruentsed.

T õ e s t u s: Punkti B' olemasolu järeldub vahetult aksioomist III_1.

Punkti B' ainsuse näitamiseks oletame, et leidub veel üks samu nõudeid rahuldav punkt B". Sel korral on olemas liikumised φ' ja φ'', mis määravad kongruentsused $[AB] \equiv [A'B']$ ja $[AB] \equiv [A'B'']$. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $A \circ \varphi' = A'$, $A \circ \varphi'' = A'$, tehes vajaduse korral eelnevalt lõigu [AB] ümberpööramise. Siis $B \circ \varphi' = B'$, $B \circ \varphi'' = B''$. Liikumisel $\varphi'^{-1}\varphi''$ on omadus säilitada punkt A' ja poolsirge (A'P, punkti B' ta teisendab aga punktiks B". Teoreemi 65 põhjal $B'' = B'$. Teoreem on tõestatud.

Lõikude kongruentsuse edasine käsitlus ruumis on täiesti analoogiline planimeetrilise käsitlusega. Täpselt samuti võib sisse tuua lõigu pikkuse mõiste ja selle abil koordinaadid ruumis.

Mis puutub nurkade ja kolmnurkade kongruentsusse, siis nende küsimuste vaatlemine ruumis, erinevalt lõikude kongruentsusest, ei valmista mingeid lisaraskusi võrreldes planimeetrilise käsitlusega.

Sellega me ühtlasi lõpetame ruumi absoluutse geomeetria aluste käsitlemise. Ruumi eukleidilise geomeetria saame, kui senistele aksioomidele lisame eukleidilise paralleelsuse aksioomi. Tavalisel viisil võib siis sisse tuua paralleelsete tasandite mõiste ja tõestada kõik nende kohta käivad teoreemid, mis on tuttavad kooligeomeetriast. Eukleidilise stereomeetria edasine arenemine ei valmista enam mingeid põhimõttelisi raskusi.

§ 35. H i l b e r t i   a k s i o m a a t i k a.

Käesolevas kursuses absoluutsele ja eukleidilisele geomeetriale aluseks võetud aksiomaatika erineb mitmeski suhtes klassikalisest Hilberti aksiomaatikast, mida kasutavad enamiku praeguseaegsete õpikute autorid. Seetõttu osutub vajalikuks tutvustada siinkohal ka Hilberti aksiomaatikat ning tõmmata mõningaid võrdlusjooni.

Hilberti aksiomaatika puhul tegeldakse järgmiste hulkadega:

a) punktide A, B, C, ... hulk,

b) sirgete a, b, c, ,,, hulk,

c) tasandite α, β, γ, ,,, hulk.

Mida nende hulkade all mõista tuleb, see jääb täiesti lahtiseks. Tähtis on vaid, et nende elementide vahel oleksid määratud järgmised suhted (ehk predikaadid):

1) punkti kuulumine sirgele,

2) punkti kuulumine tasandile,

3) ühe punkti asetsemine kahe teise vahel.

Suhted ehk predikaadid peavad seejuures rahuldama järgmisi aksioome:

I_1 Iga kahe punkti A, B korral leidub sirge a, millele need punktid kuuluvad.

I_2 Kaks erinevat punkti A, B saavad korraga kuuluda mitte rohkem kui ühele sirgele a.

I_3 Iga sirge a korral leidub vähemalt kaks erinevat punkti A, B, mis kuuluvad sellele sirgele.

I_4 Leidub vähemalt kolm punkti, mis ei kuulu korraga ühelegi sirgele.

I_5 Iga kolm punkti A, B, C korral leidub tasand α, millele need punktid kuuluvad.

I_6 Kui kolm punkti A, B, C ei kuulu korraga ühelegi sirgele, siis nad saavad korraga kuuluda mitte rohkem kui ühele tasandile α.

I_7 Iga tasandi α korral leidub vähemalt üks punkt A, mis kuulub sellele tasandile.

I_8 Leidub vähemalt neli punkti, mis ei kuulu korraga ühelegi tasandile.

I_9 Kui kaks erinevat punkti A, B kuuluvad korraga sirgele a ja tasandile α, siis iga punkt X, mis kuulub sirgele a, kuulub ka tasandile α.

I_{10} Kui leidub punkt A, mis kuulub korraga kahele tasandile α, β, siis leidub veel teine, temast erinev punkt B, mis samuti kuulub korraga tasanditele α, β.

II_1 Kui B on A ja C vahel, siis leidub sirge a, millele A, B, C kuuluvad.

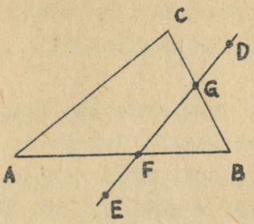
II_2 Kui B on A ja C vahel, siis A, B, C on erinevad punktid.

II_3 Kui B on A ja C vahel, siis ta on ka C ja A vahel.

II_4 Iga kahe erineva punkti A, B korral leidub punkt C, nii et B on A ja C vahel.

II_5 Iga kolme punkti A, B, C seas ainult üks saab olla kahe ülejäänu vahel.

II_6 Kui a) A, B, C, D, E kuuluvad ühele tasandile α, b) D, E ei kuulu ühele sirgele ühegagi punktidest A, B, C, ning c) leidub F, nii et D, E, F kuuluvad ühele sirgele ja F



Joonis 72.

on A ja B vahel, siis leidub G, nii et D, E, G kuuluvad ühele sirgele ja G on kas B ja C või C ja A vahel.

Aksioome I_{1-10} nimetatakse kuuluvuse aksioomideks. Meie käsitluses on nad kõik teoreemideks, välja arvatud I_4, mis sisuliselt ühtib meie aksioomiga I_5, ja I_8, mis tähendab lihtsalt loobumist planimeetria dimensiooniaksioomist.

Aksioome II_{1-6} nimetatakse järjestuse aksioomideks. Nendest esimene järeldub meie käsitluses sirge definitsioonist, teine on tõestatav, viimased neli aga ühtivad sisuliselt meie aksioomidega I_2, I_1, I_3, I_6 (viimased kaks seejuures mitte päris täpselt).

Nagu näha, on Hilberti süsteem selles osas märksa enam komplitseeritud, kui käesolevas kursuses aluseks võetud aksiomaatika. Viimases figureeriva üheainsa hulga - punktihulga - asemel on siin kolm hulka, üheleainsale "vahel"-predikaadile on lisandunud veel kaks "kuulumis"-predikaati. Ka aksioomide süsteem on märksa ulatuslikum: 6 aksioomi asemel 16 aksioomi.

Aksioomide I_{1-10}, II_{1-6} alusel defineerib Hilbert, samuti nagu meiegi eespool, lõigu ja nurga mõisted ning nõuab täiendavalt, et nende mõistete puhul oleksid määratud järgmised suhted:

4) lõik $[AB]$ on kongruentne lõiguga $[A'B']$,

5) nurk $\angle ABC$ on kongruentne nurgaga $\angle A'B'C$, mis peavad rahuldama teatava 5 nn. kongruentsuse aksioomi nõudeid. Nende aksioomide üpris keeruliste sõnastuste toomise asemel märgime lihtsalt, et III_1 ühtib teoreemiga 45, III_2 nõuab kongruentsuse transitiivsust lõikude korral, III_3 nõuab, et paarikaupa kongruentsetel lõikudel oleksid kongruentsed summad (vt. § 28), III_4 ühtib teoreemiga 47 ja lõpuks III_5 nõuab teoreemi 51 eelduste puhul nurkade $\angle ABC$ ja $\angle A'B'C'$ kongruentsust.

Ka selles osas on Hilberti aksiomaatika vähe ülevaatlik ja nõuab märksa rohkem kui eespool toodud aksiomaatika II_{1-5}, III_{1-2}.

Hilberti aksiomaatika kasutamise teeb mugavaks see, et tee aksioomidelt esimeste sisukate teoreemide juurde on märksa lühem kui käesolevas kursuses. Meil tuli näha rohkesti vaeva isegi mõningate Hilberti aksioomide endi juurde jõudmiseks. Seda vaeva aga kompenseerib meil aksiomaatika äärmine lihtsus ja ülevaatlikkus, mille eelised ilmnevad erilise selgusega mudelite konstrueerimisel ja seoses sellega aksiomaatika põhiprobleemide uurimisel (vt. § 32).

K i r j a n d u s.

Õpikud:

Ефимов, Н.В., Высшая геометрия, 1953.
Костин, В.И., Основания геометрии, 1948.
Погорелов, А.В., Лекции по основаниям геометрии, 1959.
Трайнин, Я.Л., Основания геометрии, 1961.

Täiendav kirjandus:

Perepjolkin, D.I., Elementaargeomeetria kursus, I osa – 1951, II osa – 1956.
Делоне, Б.Н., Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, 1953.
Кутузов, Б.В., Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии, 1955.
Норден, А.П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, 1953.
Широков, П.А., Каган, В.Ф., Строение неевклидовой геометрии, 1955.

Monograafiad:

Schur, Fr., Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.
Гильберт, Д., Основания геометрии (перев. с нем.), 1948.
Каган, В.Ф., Основания геометрии, Ч. I– 1949, Ч. II–1956.
Об основаниях геометрии, Сборник классических работ, 1956.

Kasutatud artiklid:

Nuut, J., Einige Bemerkungen über Vierpunktaxiome, Tartu Ülikooli Toimetised, Seeria A., 1932.
Sarv, J., Geomeetria alused, Tartu Ülikooli Toimetised, Seeria A., 1931.

Tudeberg (Humal), A., Über die Beweisbarkeit einiger Anordnungsaussagen in geometrischen Axiomensystem, Tartu Ülikooli Toimetised, Seeia A., 1934.

Veblen, O., A system of axioms for geometry, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5., 1904.

Hind 26 kop.