Est.B - 2026
I 3/22
253
B.71

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE ANALYSIS

MIT ANWENDUNGEN AUF GEOMETRIE, MECHANIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSLEHRE

VON

Dr. J. M. C. BARTELS,

STAATSRATH, ORDENTL. PROFESSOR DER MATHEMATIK ZU DORPAT, UND CORRESP. MITGL. DER KAISERL. ACAD. DER WISSENSCHAFTEN ZU ST. PETERSBURG.

ERSTER BAND.

DORPAT, 1833.

GEDRUCKT BEI J. C. SCHÜNMANN.

UNIVERSITÄTS - BUCHDRUCKER.

Tartu Ülikooli Tähetorni Raamatukogu

ENSV Teaduste Akadeemia
Tartu Astronoomia Observatoorium
No 1787

57/XX-3

Zum Druck befördert in Gemäfsheit des §. 217 des Allerhöchsten Statuts der Universität Dorpat vom 4. Juni 1820.

Dorpat, den 2ten Februar 1833.

Der Verfasser.

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

N 35931255

VORREDE.

Da diese Vorlesungen vorzüglich auf den Wunsch meiner ehemaligen und gegenwärtigen Zuhörer geschrieben sind und zugleich zu einer Art von Rechenschaft über meine fünf und zwanzig jährige Thätigkeit als mathematischer Lehrer auf den beiden russischen Universitäten Kasan und Dorpat dienen sollen, so werden ein paar Worte über meinen frühern Bildungsgang vielleicht hier nicht am unrechten Orte sein.

Ich wurde am 12ten August 1769 in Braunschweig geboren. Von meinen Eltern zu einem bürgerlichen Gewerbe bestimmt, erhielt ich meine frühere Ausbildung in der sogenannten Waisenhausschule, einer Art Realschule, an welcher der Unterricht von mehreren Lehrern, meistens Candidaten der Theologie, besorgt wurde. Späterhin besuchte ich eine der beiden Schreib- und Rechenschulen, worin über hundert Schüler fast einzig im kalligraphisch und ortographisch Schreiben, im Rechnen und in der Religion von einem von der Braunschw. Schulbehörde angestellten Lehrer und dem von ihm gewählten Gehülfen Unterricht ertheilt wurde. In dieser Schule hat auch späterhin unser grofse Geometer Gaufs seine erste Bildung erhalten.

Noch nicht vierzehn Jahre alt, übernahm ich die Stelle des abgehenden Gehülfen, eines Mannes von dreifsig Jahren. Sieben Stunden täglich in der Schule, die übrige Zeit mit Kopieren und späterhin selbst mit Ausfertigung der Vormundschafts- und Kirchenrechnungen, welche die beiden Rechenmeister der Stadt zu besorgen hatten, beschäftigt, blieb mir zur eigenen Verfügung täglich kaum eine Stunde übrig, die ich nebst einigen dem Schlafe entzogenen Stunden den Studien widmen konnte. So vortheilhaft diese Lage nun

auch für meinen damaligen Plan war, mich zu einem geschickten Rechnungsführer zu bilden, so wäre ich doch, bei dem unnatürlichen Verhältnisse als Knabe die Stelle des Lehrers und Aufsehers einer ziemlich rohen Jugend, zum Theil mit mir von gleichem Alter, spielen zu müssen, und bei den vielen meiner Neigung nach und nach weniger entsprechenden Arbeiten, geistig und körperlich fast unterlegen.

Dieser Umstand bestimmte mich meine Verhältnisse, in denen ich fünf Jahre zugebracht, aufzugeben, und, ohne Rücksicht auf meine beschränkten äufsern Hülfsmittel und auf den gänzlichen Mangel an nöthigen Schulkenntnissen, es zu wagen, mich unter die Zahl der auf dem Collegio Carolino Studierenden aufnehmen zu lassen.

Glücklicherweise für mich hatte jeder unbescholtene Jüngling, ohne sich einer Prüfung unterwerfen zu müssen, Zutritt zu den Vorlesungen, wenn er sie nicht etwa unentgeltlich besuchen wollte; auferdem würde ich auf die Ausführung meines Planes haben verzichten müssen. Durch angestrengten Fleifs brachte ich es indefs bald dahin, dafs ich die Vorträge der Professoren Gärtner, Schmidt, Ebert, Emperius, Wagner über lateinische und selbst griechische Auctoren mit Nutzen besuchen konnte. Das Griechische gab ich jedoch, weil die Zeit nicht ausreichen wollte, späterhin auf. Aufserdem nahm ich auch an den wissenschaftlichen Vorträgen von Eschenburg, Zimmermann, Lüder, Knoch, Moll, u. a. Antheil. Im Französischen, Englischen und selbst Italiänischen brachte ich es ziemlich bald so weit, dafs ich ohne grofse Mühe einen Prosaiker lesen und sogar diese Sprachen als Erwerbsmittel gebrauchen konnte, indem ich an der Übersetzung ins deutsche von *Smellis Philosophie of the natural history, Youngs travels* und mehrerer Aufsätze für die von Zimmermann herausgegebenen geographischen Annalen Theil nahm, und zugleich dort studierenden jungen Engländern, die kein deutsch verstanden, Privatunterricht in der Mathematik gab. Der mathematische Unterricht, welcher auf dem Carolino von dem damaligen Hof. v. Zimmermann und dem Ingenieurmajor Moll ertheilt wurde, an welchem auch einige Officiere und Cadetten vom Artilleriecorps Theil nahmen, beschränkte sich auf Algebra, Geometrie und Trigonometrie. Da ich nun bereits in meinen frühern Verhältnissen Fertigkeit im Rechnen und einige Gewandheit in der Auflösung algebraischer und geometrischer Aufgaben erworben hatte, so gewann ich gar bald die Gunst und das Zutrauen meines Lehrers Zimmermann, dessen Andenken mir, wegen des wohlthätigen Einflusses, den derselbe auf meine ganze Bildung und Verhältnisse gehabt hat, unvergefslich sein wird. Nicht minder wohlthätig auf meine Ausbildung einwirkend war, ein von den Studierenden gestifteter Verein von etwa acht Mitgliedern, welche sich abwechselnd alle vierzehn Tage bei einem derselben zur Beurtheilung eines von diesem eingelieferten deutschen Aufsatzes und zur frohen geselligen Unterhaltung versammelten. Alle haben einen nützlichen und ehrenvollen Platz, theils als Geschäftsmänner, theils als Schriftsteller und academische Lehrer, in der bürgerlichen Gesellschaft eingenommen; der gröfsere Theil derselben hat jedoch bereits seine Laufbahn hienieden vollendet.

Nachdem ich drei Jahre den Unterricht auf dem Colleg. Carolino bestmöglichst benutzt hatte, bezog ich die Universität Helmstedt, woselbst ich unter Oelze, Häberlin, Günter, Schmelzer einen vollständigen juristischen Cursus hörte. Aufserdem besuchte ich noch die Vorlesungen von Remer, Beireis, u. a. Besonders nützlich aber war mir bei meinem noch immer mit Vorliebe fortgesetzten mathematischen Studium der freundschaftliche Umgang des in Halle verstorbenen ausgezeichneten Analytikers Prof. Pfaff, bei dem ich auch mit dem nachherigen Professor der Mathem. Stahl zu Jena ein Privatissimum über Integralrechnung hörte.

Auf Pfaff's Rath ging ich nach zweijährigem Aufenthalt in Helmstedt nach Göttingen, um mich ganz der Mathematik zu widmen, und nach erlangter philos. Doctorwürde mich als Privatdocent dort niederzulassen. Hier besuchte ich Lichtenbergs und Kästners Vorlesungen, hörte über Chemie und einige andere Gegenstände. Zu einem einigermafsen vollständigen Cursus über höhere Mathematik war hier damals, wie vielleicht überall auf deutschen Universitäten, keine Gelegenheit; daher alle deutsche Mathematiker aus jener Zeit mehr oder minder Autodidacten sind. Auch waren der Studierenden, die sich vorzugsweise den mathematischen Wissenschaften widmeten, obwohl die Zahl der Studierenden sich auf tausend belaufen mogte, nur sehr wenige, kaum sechs. Unter diesen befand sich der unlängst verstorbene berühmte Mathematiker und Astronom Bohnenberger und der noch lebende Geometer und Astronom Hassler aus Aarau in Newjork, der sich durch die Vermessung der nordamerikanischen Ostseeküste und durch seine vortrefflichen mathematischen Lehrbücher um sein neues Vaterland grofse Verdienste erworben hat. Ungeachtet durch Privatunterricht, den ich in der Mathematik zu geben hinlänglich Gelegenheit hatte, meine Subsistenz so ziemlich gesichert war, und ich auf die Unterstützung Kästners und Lichtenbergs bei der Ausführung meines frühern Planes mit Sicherheit rechnen durfte, so liefs ich mich doch durch Bedenklichkeiten wegen des Gelingens desselben bestimmen, einen Antrag zu einer Lehrerstelle an dem Seminar in Reichenau in Graubündten anzunehmen, den ich durch die Vermittelung meines verehrungswürdigen Freundes und Gönners, des noch lebenden Herrn Abts Pott, erhielt. Diefs Institut war von den Eigenthümern der Herrschaft und des Schlosses Reichenau gestiftet, und stand unter der Direction des alten würdigen Nesemann, von welchem früher das durch Dr. Barth bekannte Marschlinser Philantropin begründet war. Das Schlofs Reichenau hat an dem Zusammenflusse des Vorder-

und Hinterrheins eine äufserst romantische Lage und ist historisch merkwürdig, weil der jetzige König von Frankreich während der Schreckenszeit als Professor daselbst unter einem fremden Namen angestellt war. Ich fand bei meiner Ankunft daselbst noch mehrere seiner Schüler vor, die den bei ihm angefangenen mathematischen Unterricht bei mir fortsetzten. Späterhin wurde mein verehrter Freund, der deutsche Lieblingsschriftsteller Dr. H. Zschokke, Eigenthümer des Instituts. Unter ihm gedieh die Anstalt ganz vorzüglich, lösete sich aber gänzlich auf, als auch Graubündten der Schauplatz des Krieges wurde. Hier gab ich auch meine Übersetzung der Geschichte der neuern Astronomie, als Fortsetzung der Übersetzung der ältern Astronomie von Wünsch heraus. Es sind jedoch nur zwei Octavbände erschienen.

Im Jahre 1800 kehrte ich, nach einem kurzen Aufenthalte in meiner Heimath, nach der Schweiz zurück, und nahm eine Lehrstelle in Aarau an. Um diese Zeit entstand durch die vereinte Bemühung und edelmüthige Aufopferung der Aarauer Bürgerschaft die Kantonsschule daselbst, an deren Einrichtung und Aufblühen ich thätigen Antheil nahm. Diese Anstalt war auf das Bedürfnifs der Schweiz berechnet und mehr eine höhere Realschule als eine sogenannte gelehrte Schule, fand auch bald so allgemeinen Beifall, dafs die Menge der daselbst Studierenden in kurzem die Zahl von zweihundert übertraf. Veränderungen die einige Jahre nachher mit der Anstalt, wohl nicht zu ihrem Vortheile, unternommen wurden, und meinen Ansichten nicht entsprachen, bestimmten mich, einer Einladung meines Landesfürsten, des verewigten Herzogs Carl Wilhelm Ferdinand zufolge ins Vaterland zurückzukehren.

Über den Wirkungskreis, für welchen mich der Herzog bestimmen würde, war zwar noch nichts entschieden; indefs erhielt ich bis dahin als Wartegeld eine jährliche Pension von 800 Thalern nebst andern

Emolumenten, und konnte ganz nach Gefallen über die Anwendung meiner Zeit verfügen. Zu gleicher Zeit erhielt ich auch durch die Empfehlung des seligen Staatsrath v. Fufs einen Ruf zu einer mathematischen Professur in Kasan, den ich aber jetzt ablehnen mufste. Durch den damals schon wegen seiner grofsen arithmetischen und astronomischen Entdeckungen berühmten Dr. Gaufs veranlafst, hatte der Herzog den Bau einer mit den vorzüglichsten Instrumenten auszurüstenden Sternwarte beschlossen, deren Direction dem Dr. Gaufs übertragen werden sollte. Mit diesem Institute wollte man eine höhere mathematische Lehranstalt verbinden, die zugleich als eine Erweiterung der bereits existirenden Lehranstalt des Collegii Carolini betrachtet werden konnte. Die zum Baue der Sternwarte und zum Ankaufe der nöthigen Instrumente erforderlichen Gelder waren bereit. Der Bau sollte im nächsten Jahre angefangen werden. Auf die Weise schien einer meiner schönsten Jugendträumer in Erfüllung gegangen zu sein, an derselben Anstalt, der ich hauptsächlich meine Ausbildung und die glücklichsten Tage meines Lebens verdankte, im Verein mit Männern, für die ich als meine ehemaligen Lehrer und wegen ihrer ausgezeichneten Herzensgüte die innigste Hochachtung hegte, einen meiner Neigung angemessenen Wirkungskreis zu finden. Diese schönen Aussichten verschwanden jedoch mit einemmale durch den unglücklichen Ausgang des Krieges von 1806. Braunschweigs geliebter Landesfürst wurde tödtlich verwundet aus der Schlacht zurückgebracht, um die wenigen letzten Tage seines glorreichen Lebens in der Mitte seiner geliebten Unterthanen zu vollbringen. Allein diefs wurde ihm nicht vergönnt, er mufste fliehen, und starb in Ottensen unweit Hamburg. Diese unglücklichen Ereignisse bestimmten mich meine Verhältnisse, worin ich als correspondirendes Mitglied der Kasanischen Universität mit dem Curator derselben dem wirkl. Staatsrathe Rumovski stand, zu benutzen.

Ehe ich jedoch Braunschweig verlasse, kann ich nicht umhin hier des edeln Verfahrens der nach der Restauration eingesetzten Braunschweigischen Vormundschaftlichen Regierung dankbarlichst zu erwähnen. Mit dem Einrücken der französischen Truppen in Braunschweig hörte nämlich die Zahlung meiner Gage, wie die so vieler andern im Herzoglichen Dienste stehenden, auf. Zehn Jahre später wurde mir, jedoch ohne alle Bemühung von meiner Seite, mein noch in Braunschweig bis zum Tage meiner Abreise rückständiger Gehalt von dort ganz unerwartet mit 700 Thaler in Kasan ausgezahlt. Ungefähr um dieselbe Zeit erhielt ich auch von Seiten der Braunschw. Vormundschaftlichen Regierung die Zusicherung, dafs der vom Hochsel. reg. Herzog Friedrich Wilhelm kurz vor der Schlacht von Waterloo an mich ergangene Antrag einer Professur am Colleg. Carolino mit 800 Thaler Gehalt in Kraft bliebe, und es nur von mir abhinge, ob und wann ich davon Gebrauch machen wolle.

Im Juni 1807 erhielt ich die Bestätigung als Professor in Kasan; reisete aber erst im October mit meiner Familie dahin ab, und langte nach einer beschwerlichen und kostspieligen Reise im Anfange des folgenden Jahres daselbst an. Zu meiner grofsen Freude fand ich ungeachtet der damals noch kleinen Zahl der Studierenden ungemein viel Sinn für das Studium der mathematischen Wissenschaften, so dafs ich in meinen Vorlesungen über höhere Analysis auf wenigstens zwanzig Zuhörer rechnen durfte und sich allmählig eine kleine mathematische Schule bildete, aus welcher eine Menge geschickter mathematischer Lehrer für die Gymnasien und Universitäten Rufslands, besonders des Kasanischen Lehrbezirks, hervorgegangen sind, die nun schon seit zwanzig Jahren das Studium der mathematischen Wissenschaften noch mehr verbreitet haben.

Im Jahre 1820 erging an mich von der Universität Dorpat der Ruf zu der daselbst erledigten mathematischen Lehrstelle, den ich auch mit Bewilligung

der Hohen Obern annahm. Obwohl ich hier ungeachtet der bereits gröfsern Menge der Studierenden als in Kasan, weit weniger Liebhaber für das mathematische Studium vorfand, und ich meine Vorträge gröfstentheils auf Elementar-Mathematik beschränken mufste, so hat doch allmählig der Sinn für diese Wissenschaft auch hier zugenommen, und ich darf schon seit mehrern Jahren für meine Vorlesungen über höhere Mathematik auf wenigstens 10—12 Zuhörer rechnen. Auch sind hier bereits mehrere geschickte junge Mathematiker gebildet worden, die theils in den hiesigen Ostseeprovinzen und in dem übrigen Rufsland als Lehrer angestellt sind, theils an den Arbeiten auf der hiesigen Sternwarte und an den über die entferntesten Gegenden Rufslands sich erstreckenden geographischen Ortsbestimmungen Theil nehmen. Dafs das mathematische Studium hieselbst durch unsere reichbegabte Sternwarte und unsern Astronomen meinen verehrten Collegen den Prof. und Acad. H. Staatsr. Struve gar sehr befördert wird, bedarf kaum einer Erwähnung.

Jetzt noch einige Worte über Inhalt, Zweck und Veranlassung dieses Werkes, wovon diefs der erste Band ist, dem noch zwei andere folgen sollen, so dafs das Ganze 160 Bogen stark werden wird, und einen vollständigen Cursus der mathematischen Analysis mit Anwendung auf Geometrie, Mechanik und Wahrscheinlichkeitslehre, und ungefähr alles das enthalten soll, was ich seit 25 Jahren auf den Universitäten Kasan und Dorpat über diese Gegenstände gelehrt habe. Es ist eine schon längst bekannte Sache, dafs der mündliche Unterricht in Sprachen sowohl als Wissenschaften, besonders gilt diefs aber von der Mathematik, nur dann erst von Nutzen ist, und vor dem Selbstunterricht durch Bücher den Vorzug hat, wenn derselbe so eingerichtet ist, dafs der Zuhörer auf eine thätige Weise daran Theil nehmen und wenigstens augenblicklich in die Täuschung versetzt werden kann, als habe er die vorgetragenen Sätze selbst erfunden. Der geordnetste und deutlichste mathematische Vortrag, der

nicht von Seiten der Zuhörer durch Fragen und Einwürfe unterbrochen werden darf, kann entbehrlich gemacht werden, wenn der Professor seinen Vortrag zu Papier bringt und ihn Heftweise auf irgend eine Art seinen Zuhörern mittheilt. Bei der eben angeführten Unterrichtsmethode hingegen wird der Zuhörer in den Stand gesetzt, vielleicht mit Hülfe einiger in den Vorlesungen niedergeschriebenen Notizen von Formeln oder Zahlen den Vortrag zu Hause zu entwickeln und sich ein Collegienheft selbst auszuarbeiten, das, wenn es auch an Ordnung in der Zusammenstellung dem des Professors nachstehen mag, doch den Vorzug vor demselben hat, dafs es wenigstens zum Theil durch Selbstdenken erworbenes Eigenthum enthält. Diejenigen Zuhörer, die weniger vorbereitet oder mit geringern Talenten begabt sind, müssen sich freilich in dieser Hinsicht bei ihren Commilitonen oder beim Professor Raths erholen oder gelegentlich über denselben Gegenstand einen abermaligen Vortrag hören. Solche auf die Weise ausgearbeiteten Hefte können denjenigen meiner Zuhörer, welche die Mathematik zu ihrem Hauptfache machen, noch dazu dienen, theils sich auf das am Ende eines dreijährigen Cursus zu bestehende Examen vorzubereiten, theils auch um einen Stoff für die Bearbeitung einer zur Erlangung einer Academ. Würde einzuliefernden Abhandlung daraus zu nehmen. Zuweilen ist auch die Bearbeitung einer Vorlesung zum Gegenstande einer Preisaufgabe gemacht worden. Dahin gehören die beiden auf Kosten der Universität gedruckten Abhandlungen: *Systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Raume*, von C. J. Senff 1829, welche d. 12. Dec. 1827 den Preis der silb. Med. erhielt; *Theoremata Principalia e theoria Curv. et Superf. conscr.* C. E. Senff, die d. 12. Dec. 1830 den Preis der gold. Med. erhielt.

Auf den Wunsch meiner gegenwärtigen und mehrerer meiner ehemaligen Zuhörer würde ich mich schon früher entschlossen haben, den Inhalt meiner gehaltenen Vorträge unter irgend einem Titel ins Publikum zu bringen,

wenn ich nicht theils durch den Gedanken, dafs der Nutzen, der dadurch der litterärischen Welt erwachsen dürfe, zu unbedeutend sein würde, theils aber auch durch die mit der Herausgabe eines solchen Werkes verbundenen Schwierigkeiten abgehalten wäre. Da jedoch Se. Durchlaucht, der Herr Minister der Volks-Aufklärung Fürst Lieven, dessen hohen Schutzes sich die Wissenschaften in Rufsland erfreuen, diefs Unternehmen gnädigst zu unterstützen geruht hat, so ist mir die Herausgabe dieses Werkes gewissermafsen zur Pflicht geworden. Die Erfüllung derselben ist mir um so angenehmer, weil ich dadurch Gelegenheit erhalte, Rechenschaft abzulegen, wie ich zum Theil das mir gnädigst anvertraute Lehramt fünf und zwanzig Jahre hindurch verwaltet habe, und zugleich dadurch in den Stand gesetzt werde, wenn auch nicht mündlich, doch schriftlich vielleicht noch einige Decennien in meinem neuen Vaterlande fortwirken und mich in freundlichem Andenken erhalten zu können.

Über das ganze Werk im Allgemeinen ist bereits gesprochen worden. Es bleibt hier nur noch einiges über den speciellen Inhalt der vier in diesem ersten Bande enthaltenen Vorlesungen hinzuzufügen übrig. In der ersten Vorlesung sind die Grundwahrheiten der allgemeinen Elementar-Arithmetik nach Euklids Beispiele, wie ich glaube, mit möglichster Strenge, vorgetragen. Aufserdem enthält dieselbe viel practisch Nützliches für den Cameralisten und kann zum Theil als eine Ergänzung des ersten Elementarunterrichts in der Arithmetik betrachtet werden.

Die zweite Vorlesung ist eine Fortsetzung der ersten, und enthält eine umständliche Ausführung der Entwickelung der logarithmischen und trigonometrischen Functionen in Reihen und zugleich das nothwendigste von der Theorie der sogenannten imaginären Gröfsen, wobei mir besonders Cauchy's *Cours d'Analyse 1re Partie 1821* und Poinsot's *Recherches sur l'Analyse des sections angulaires 4to Paris 1823* von Nutzen gewesen ist.

Die dritte Vorlesung handelt von der analytischen ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Die vierte Vorlesung enthält die analytische allgemeine Elementargeometrie oder die sogenannte Geometrie mit drei Abmessungen (*Geometrie à trois dimensions*). Ich schmeichle mir durch die abgekürzte Benennung und Bezeichnung der Cosinusse der Winkel, die eine gerade Linie mit den drei rechtwinklichten Hauptaxen macht zur Erleichterung des Studiums dieser Geometrie einiges beigetragen zu haben. Das Wesentliche derselben habe ich bereits in einer in der St. Petersb. Acad. d. 14. Dec. 1825 vorgelesenen Abhandlung: *Aperçu abregé des formules fondamentales de la Geometrié à trois dimensions* mitgetheilt. Diese diente zur Einleitung in zwei andere zugleich eingereichte Abhandlungen: die eine über die Bestimmung der Sonnenparallaxe, die andere über die drei Hauptaxen in einem festen Körper. Von der letzten habe ich einen Theil als Beispiel der Anwendung der vorgetragenen Methode in den §§. 97—102 beigebracht. Es sei mir erlaubt, hier ein paar Worte über die Veranlassung zu dieser Abhandlung zu sagen. Es lassen sich bekanntlich, wie Euler zuerst bewiesen hat, in jedem festen Körper von irgend einer Gestalt und Beschaffenheit durch jeden beliebigen Punct rechtwinklichte Axen legen, so dafs, um jede derselben der Körper sich frei und gleichförmig bewegen kann. Der Beweis dieses Satzes führt auf eine cubische Gleichung, von der man zeigen mufs, dafs ihre drei Wurzeln reell sind. Wegen der Natur der Aufgabe schien es mir jedoch nothwendig zu sein, zu zeigen, dafs diese drei Wurzeln nicht nur reell, sondern auch positiv sein müssen. Bei dieser Gelegenheit kam ich auf die Entdeckung der in §. 98, 99, 100 erwiesenen merkwürdigen Eigenschaften der drei Coefficienten der cubischen Gleichung. Ich hielt diese Sätze für neu, (auch scheinen sie la Grange nach einer Stelle in seiner *Mecanique analytique p. 276 — 277 Tome 1er* vom Jahre 1811 unbekannt gewesen zu sein,) und theilte sie

deshalb der St. Petersburger Academie mit. Einige Zeit nachher ersah ich jedoch aus dem *Journal de l'École polytechnique*, in dessen Besitz ich früher hier nicht war, dafs der franz. Academiker Herr Binet diesen Satz schon mehrere Jahre vorher entdeckt und bekannt gemacht hatte. Die Abhandlung selbst über diesen Gegenstand ist mir bis jetzt nicht zu Gesichte gekommen, weil gerade die Hefte von dem *Bulletin des sciences*, worin dieselbe enthalten, fehlen. Sollte man übrigens zufällig meine vierte Vorlesung mit der Einleitung (*Preliminaires*) zu Cauchys *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la Géometrie* vergleichen, worin man mehrere Sätze auf eine ähnliche Weise, wie bei mir behandelt finden wird, so bemerke man, dafs meine oben angeführte Abhandlung bei der St. Petersb. Acad. der Wissensch. bereits im Jahre 1825 vorgelesen, die *Leçons* von Cauchy aber ein Jahr später erschienen sind. Noch glaube ich auf die von mir seit langem gebrauchten Zeichen n^r_c, und $n^{\underline{r}}_c$, wo ersterer die rte durch 1. 2. 3...r dividirte Potenz von n, und letzteres den rten Binomialcoefficienten der nten Potenz bedeutet, aufmerksam machen zu dürfen. Wie ungemein durch den Gebrauch dieser Zeichen der Calcul abgekürzt und vereinfacht wird, kann man an mehreren Beispielen am Ende der ersten und im Anfange der zweiten Vorlesung sehen. Auch verdient vielleicht die von mir S. 6 u. 91 gemachte Anwendung der Euclidischen Definition von der Proportion, wodurch auch der Beweis für die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes für irrationale Exponenten vervollständigt wird, einige Aufmerksamkeit.

Sollte dieser erste Band meiner Vorlesungen von Sachkennern mit einigem Beifall aufgenommen werden, so darf ich hoffen, dafs die noch folgenden Bände dieses Werkes, weil ich die darin vorkommenden Gegenstände mit besonderer Vorliebe vorgetragen habe, sich eines ähnlichen Glücks erfreuen werden.

Dorpat, den 21. Januar 1833.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnifs des ersten Bandes.

Erste Vorlesung.

Über Verhältnisse, Proportionen, Potenzen und Logarithmen S. 1.

Erklärungen der Begriffe, Messen, Verhältnifs, Proportion, Exponent des Verhältnisses, Multiplication, Division etc. §. 1. — Was eine Function ist §. 6. — Wenn $\varphi x+\varphi y=\varphi(x+y)$, so ist $\varphi x:\varphi y=x:y$ §. 7. — Anwendungen dieses Satzes §. 8. — Lehrsätze, die Proportionen betreffend §. 9. — Beweis des Lehrsatzes, dafs ein Product einer beliebigen Menge rationaler oder irrationaler Zahlen immer dasselbe sei, in welcher Ordnung auch die Factoren mit einander multiplicirt werden mögen §. 15. — Was zusammengesetzte Verhältnisse, vielfache und aliquote Theile der Verhältnisse sind §. 20. — Wie Verhältnisse als mathematische Gröfsen betrachtet mit einander gemessen werden §. 22. — Potenz im allgemeinsten Sinne des Worts §. 26. — Dahingehörige Lehrsätze §. 27. — Logarithmen, Briggische und natürliche §. 31. — Elementar-Methoden, den briggischen Logarithmen einer gegebenen Zahl zu berechnen §. 34. — Logarithmen-Täfelchen auf 10 Decimalstellen und dessen Gebrauch §. 42. — Binomischer Lehrsatz für positive ganze Exponenten bewiesen §. 50. — Anwendung desselben auf Wurzelextractionen und Rentenrechnung §. 53. — Entwickelung der Functionen a^x und $log.\ x$ in Reihen nebst Anwendung derselben auf wirkliche Berechnung von Logarithmen §. 60. — Über den Gebrauch der in Callets logarithmischen Tafeln enthaltenen briggischen Logarithmen mit 61 und der natürlichen mit 48 Decimalstellen §. 74. — Merkwürdiges Resultat der Berechnung der Menge der Ziffern, woraus die Zahl $2^{2^{100}}$ besteht §. 80. — Berechnung der Potenz $1{,}05^{\frac{1}{365}}$ auf 61 Decimalstellen und einige andere Beispiele von der Anwendung der Sharpschen und Wolframschen Tafeln §. 81. — Ähnliches Logarithmen-Täfelchen, wie das §. 42, nebst Anwendungen §. 85. — Beispiele von Rentenberechnungen vermittelst des binomischen Lehrsatzes und der Logarithmen §. 87. — Beispiele von unglaublich beschleunigender Zunahme des Werthes eines Kapitals, wenn die Zinsen alljährlich zum Kapitale geschlagen werden §. 94. — Tabelle zum bequemen Gebrauche in der Rentenrechnung §. 106. p. 87.

Zweite Vorlesung.

Über die Entwickelung der logarithmischen Functionen in Reihen S. 89.

Beweis des binomischen Lehrsatzes für jeden beliebigen positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Exponenten §. 1. — Strenger Beweis für die Entwickelung der Function a^x und $log.\, x$ in Reihen §. 5. — Entwickelung einer beliebigen Potenz der Wurzel z der Gleichung $\omega x^y - z + 1 = 0$ in eine nach den steigenden Potenzen von ω fortlaufenden Reihe §. 8. — Verwandlung des Ausdrucks $(\omega + \sqrt{1+\omega^2})^x$ in eine Reihe §. 15. — Entwickelung von $l(\omega + \sqrt{1+\omega^2})$ in eine Reihe §. 17. — Quadratur der gleichseitigen Hyperbel §. 18. — Formeln und Gleichungen zwischen Abscissen und Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel, ihre Summation etc. §. 25. — Erklärung und Formeln der trigonometrischen Functionen §. 35. — Ihre Entwickelung in Reihen §. 51. — Leibnitzische Reihe zur Berechnung des Bogens aus seiner Tangente §. 59. — Entwickelung der Gröfsen $cos\, xs$, $sin\, xs$, für jede beliebige Zahl x in nach den Potenzen von $sin\, s$ fortlaufenden Reihen §. 60. — Reihe zur Berechnung des Bogens aus dem Sinus §. 64. — Zerlegung der Cosinusse und Sinusse vielfacher Bogen in Factoren §. 71. — Cotesischer und Moivrescher Lehrsatz §. 83. — Hyperbolische Cosinusse, Sinusse. Ihre Entwickelung in Reihen und Producte §. 85. — Summation einiger interessanten Reihen deren Glieder trigonometrische Functionen sind §. 93. — Unmögliche Gröfsen und ihre Anwendung §. 107. — Strenger Beweis der (§. 16.) entwickelten Reihe von $\sqrt{(1+\omega^2+\omega)^x}$ §. 112. — Beweis des Satzes, dafs jede rationale ganze Function $x^n + A'x^{n-1} + A''x^{n-2} \ldots + A'''$ sich in binomische und trigonometrische Factoren von den Formen $x + a$, $x^2 + ax + b$ zerlegen läfst §. 133.

Dritte Vorlesung.

Über ebene und sphärische Trigonometrie S. 193.

Erklärungen §. 1. — Formeln für die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von 5° §. 3. — Elementar-Methode der Berechnung der Verhältnifszahl π des Kreis-Umfangs zum Durchmesser §. 8. — Dieselbe Berechnung, vermittelst der Reihe des Bogens durch seine Tangente auf 72 Decimalen §. 8. — Vermittelst der Zerlegung der Leibnitzischen Reihe auf 140 Decimalstellen §. 10. — Reihen zur numerischen Berechnung der Sinusse, Cosinusse, Tangente, Cotangente §. 12. — Reihen zur numerischen Berechnung der natürlichen und briggischen Logarithmen von $cos\frac{x\pi}{2}$, $sin\frac{x\pi}{2}$ §. 19. — Verwandlung der Sexagesimal- und Decimaleintheilung der Winkel und Kreisbogen §. 21. — Lehrsätze, die rechtwinklichten ebenen Dreiecke betreffend §. 22. — Trigonometrische zur Auflösung der ebenen Dreiecke nützliche Formeln §. 23. — Auflösung der ebenen Dreiecke im Allgemeinen §. 42. — Beispiele zur Berechnung ebener Dreiecke §. 46. — Grundformeln zur Auflösung sphärischer Dreiecke §. 52. — Gaufsische und Neppersche Formeln §. 67. — Formeln für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks §. 72. — Umschriebener und eingeschriebener Kreis eines sphärischen Dreiecks §. 73. — Auflösung des rechtwinklichten sphärischen Dreiecks §. 75. — Auflösung der sphärischen Dreiecke im Allgemeinen §. 85. — Beispiele zur Berechnung sphärischer Dreiecke §. 93.

Vierte Vorlesung.

Über analytische allgemeine Elementargeometrie S. 255.

Axensystem, Coordinaten, Determinanten, Projectionen §. 1. — Analytische Formeln und Lehrsätze §. 9. — Lehrsätze und Aufgaben, die gerade Linie betreffend §. 16. — Gleichungen der Ebene §. 26. — Lehrsätze, die Ebene und ihre Durchschnitte betreffend §. 29. — Bestimmung des Flächeninhalts eines geradlinigten Dreiecks, vermittelst der Coordinaten der Winkelpuncte §. 33. — Analytische Ausdrücke des Volumens einer dreiseitigen Pyramide, deren Spitze im Mittelpunkte der Coordinaten §. 36. — Das Quadrat des Flächeninhalts einer geradlinigten Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen in den drei Hauptebenen §. 38. — Fundamental-Sätze der sphärischen Trigonometrie, vermittelst der Methode der Coordinaten und Determinanten hergeleitet §. 39. — Aus den gegebenen Örtern dreier Puncte auf einer Kugelfläche und den gegenseitigen Verhältnissen der Cosinusse ihrer Winkelentfernungen von einem vierten Puncte den Ort dieses Punctes zu bestimmen §. 41. — Analytischer Ausdruck des Durchmessers einer um eine dreiseitige Pyramide beschriebenen Kugel. Ebendaselbst. — Von der Verwandlung der Coordinaten §. 42. — Von den ebenen Curven des zweiten Grades §. 49. — Einfachste Form der Gleichungen für die Ellipse, Hyperbel, Parabel §. 54. — Parameter und Brennpuncte dieser Linien §. 54. — Polargleichung derselben §. 60. (g) — Gleichung zwischen den schiefwinklichten Coordinaten der Hyperbel, die Asymptoten zu Axen derselben genommen §. 63. (i) — Normale, Tangente, Subnormale, Subtangente der Kegelschnitte §. 67. — Warum die Linien des zweiten Grades Kegelschnitte genannt werden §. 70. — Quadratur der Kegelschnitte §. 72. — Einiges über die Flächen des zweiten Grades S. 320. — Allgemeinste Form der Gleichung für Flächen des zweiten Grades §. 84. — Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten derselben §. 87. — Jede Gleichung der Flächen des zweiten Grades läfst sich auf die Form $\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{E}x = 0$ zurückführen §. 92. — Allgemeine gegenseitige Beziehung der conjungirten Axen eines Ellipsoids §. 96. — Beweis des Satzes, dafs durch jeden Punct eines festen Systems materieller Puncte drei rechtwinklichte Axen gelegt werden können, um welche das System frei und gleichförmig sich bewegt §. 97. — Auflösung einer von Euler gegebenen Aufgabe die Drehungsaxen eines festen Körpers betreffend §. 103.

Verbesserungen und Zusätze.

Seite.	Zeile.		statt:	lies:
IV	3	v. u.	Philosophie	Philosophy
VI	10	v. o.	die Zahl der Studierenden	die Gesammtzahl.
VII	3	v. o.	daselbst	bei dieser Anstalt.
—	10	v. o.	der Geschichte	von Bailly's Geschichte.
4	9	v. o.	4 Ellen = 5 Arschinen	5 Ellen = 4 Arschinen.
7	12	v. u.	$y+y$	$x+y$.
9	8	v. u.	Zahl	Anzahl.

16 9 v. o. Zur Erläuterung des dort Vorgetragenen diene folgendes. Es seien X, x, x_1, x_2, x_3, etc. gleichartige Gröfsen, von denen jede kleiner ist als die nächstvorhergehende, und so von einander abhängen, dafs $X = \mu x + x_1$, $x = \mu_1 x_1 + x_2$, $x_1 = \mu_2 x_2 + x_3$, etc., wo μ, μ_1, μ_2, μ_3, etc. irgend positive ganze Zahlen bedeuten, so läfst sich die Verhältnifszahl $\frac{X}{x} = k$, wenn

$$A = \mu, \quad A_1 = \mu\mu_1 + 1, \quad A_2 = \mu_2 A_1 + A, \quad A_3 = \mu_3 A_2 + A_1, \quad \text{etc.}$$
$$B = 1, \quad B_1 = \mu_1 \qquad B_2 = \mu_2 B_1 + B, \quad B_3 = \mu_3 B_2 + B_1, \quad \text{etc.}$$

näherungsweise mit beliebiger Genauigkeit durch die Brüche $\frac{A}{B}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}$, ausdrücken.

Bezeichnet man nämlich die Verhältnifszahlen $\frac{X}{x}, \frac{x}{x_1}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, etc. respective durch k, k_1, k_2, k_3, etc., so hat man:

$k = \mu + \frac{1}{k_1}$, $k_1 = \mu_1 + \frac{1}{k_2}$, $k_2 = \mu_2 + \frac{1}{k_3}$, $k_3 = \mu_3 + \frac{1}{k_4}$, etc., so dafs sich k unter einer Form des continuirlichen Bruchs darstellen läfst: $\mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cfrac{1}{\mu_4 + \text{etc.}}}}}$

Es ist aber $k = \mu + \frac{1}{k_1} = \frac{\mu k_1 + 1}{k_1} = \cfrac{\mu(\mu_1 + \frac{1}{k_2}) + 1}{\mu_1 + \frac{1}{k_2}}$

$$= \frac{k_2(\mu_1\mu + 1) + \mu}{k_2\mu_1 + 1} = \frac{k_2 A_1 + A}{k_2 B_1 + B} = \frac{(\mu_2 + \frac{1}{k_3}) A_1 + A}{(\mu_2 + \frac{1}{k_3}) B_1 + B}$$

$= \frac{k_3(\mu_2 A_1 + A) + A_1}{k_3(\mu_2 B_1 + B) + B_1} = \frac{k_3 A_2 + A_1}{k_3 B_2 + B_1}$, etc., so dafs allgemein $k = \frac{k_{\lambda+1} A_\lambda + A_{\lambda-1}}{k_{\lambda+1} B_\lambda + B_{\lambda-1}}$.

Daher $\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - k = \frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{k_{\lambda+1} A_\lambda + A_{\lambda-1}}{k_{\lambda+1} B_\lambda + B_{\lambda-1}} = \frac{A_\lambda B_{\lambda-1} - B_\lambda A_{\lambda-1}}{B_\lambda(k_{\lambda+1} B_\lambda + B_{\lambda-1})}$. Da nun $A_{\lambda+1} B_\lambda - B_{\lambda+1} A_\lambda = (\mu_{\lambda+1} A_\lambda + A_{\lambda-1}) B_\lambda - (\mu_{\lambda+1} B_\lambda + B_{\lambda-1}) A_{\lambda-1}$ $= A_{\lambda-1} B_\lambda - B_{\lambda-1} A_{\lambda-1}$, so ist, weil $A_1 B - B_1 A = 1$, $A_2 B_1 - B_2 A_1 = -1$, $A_3 B_2 - B_3 A_2 = 1$, etc., und allgemein $A_\lambda B_{\lambda-1} - B_\lambda A_{\lambda-1} = \pm 1$, und folglich $\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - k = \frac{\pm 1}{B_\lambda(k_{\lambda+1} B_\lambda + B_{\lambda-1})}$, wo das Zeichen + oder − gilt, je nachdem λ ungerade oder gerade ist. Die Brüche $\frac{A}{B}$, $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, $\frac{A_3}{B_3}$, etc. sind demnach abwechselnd kleiner oder gröfser als der Exponent k des Verhältnisses $\frac{X}{x}$, und weil der Unterschied $\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - k$ absolute genommen $< \frac{1}{B_\lambda^2}$, so kann derselbe kleiner werden als jede gegebene Gröfse.

Seite.	Zeile.		statt:	lies:
30	10	v. u.	$-\log. 3$	$-2\log. 3$.
35	13	v. o.	0,00900 00434	0,00000 00434.
40	6 u. 7	v. u.	$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{y}{x} A$, $\frac{n-2}{3} \frac{y}{x} A$	$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{y}{x} A_1$, $\frac{n-2}{3} \frac{y}{x} A_2$.
42	7	v. u.	$- = \frac{3m-1}{4m} \cdot \frac{y}{x} A_3$	$= -\frac{3m-1}{4m} \frac{y}{x} A_3$.
43	12	v. o.	$y = 8$, $x = 2$	$x = 8$, $y = 2$.
45	nach 3	v. o.	lies: Auf die Weise ist, wenn $N = a^n + b$, $\sqrt[n]{N} = a(1+\frac{b}{a^n})^{\frac{1}{n}} = a(\frac{a^n}{N})^{-\frac{1}{n}}$ $= a(1-N)^{-\frac{1}{n}} = a(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{N} + \frac{1.(1+n)}{n.2n} \cdot (\frac{b}{N})^2 + \frac{1.(1+n)(1+2n)}{n.2n.3n} \cdot (\frac{b}{N})^3 + \text{etc.})$	
	10	v. o.	$\frac{y}{z}$	$\frac{y}{x}$.
48	7 u. 1	v. u.	$n(1 - y^{\frac{1}{n}})$, fand	$n(y^{\frac{1}{n}} - 1)$, fand Briggs.
50	2	v. o.	$-(1 - \frac{1}{n}) \frac{\omega^2}{3}$	$-(1 - \frac{1}{n}) \frac{\omega^2}{2}$.
54	1	v. u.	$\frac{1}{8}(\frac{u-1}{u+1})^3$	$\frac{1}{3}(\frac{u-1}{u+1})^3$.
	6	v. u.	$\log.(\frac{y+z}{2} - \frac{y+z}{2})$	$\log.(\frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2})$.
	6	v. u.	$-(\frac{y-z}{2}))^2$	$-(\frac{y-z}{2})^2)$.

Seite.	Zeile.		statt:	lies:
63	4	v. u.	30 000000 000000	3 000000 000000.
	3	v. u.	28 000000 000000	280 000000 000000.
73	2	v. o.	$log.A_n = log.A - n log.(1+\omega)$	$log.A = log.A_n - n log.(1+\omega)$.
75	8	v. o.	15 Rubel 69,5 Kopeken	15 Rubel 96,5 Kopeken.
86	8	v. o.	$\frac{4}{(1+\omega)^2}$	$-\frac{4}{(1+\omega)^2}$
92	15	v. o.	$1 + x\|\omega$	$1 + x\|\omega$ $+ y\|$
	4	v. o.	$\varphi(x+y)y$	$\varphi(x+y)$, y.
94	9	v. o.	$(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)\omega_2$	$(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)\omega^2$.
95	8	v. u.	$\nu\omega + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^2 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)^1\omega^3$	$\nu\omega^2 + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^3 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^2\omega^4$ + etc.
97	9	v. o.	y_n (am Ende)	x_n.
	5	v. u.	$x\omega$	$y\omega$
99	7	v. u.	$z^{n,x}$	$z^{n,\alpha}$
100	7	v. u.	Zahlen	Zahl
101	6	v. u.	$\Gamma(1+\omega)^{\frac{1}{2}}$	$\Gamma(1+\omega^2)$
—	5	v. o.	$x^2(x^4-4)$	$x^2(x^2-4)$
—	6	v. o.	$\frac{x}{4}(x+3)_c^{4,2}$	$\frac{x}{5}(x+3)_c^{4,2}$.
—	7	v. o.	(zweimal) $\frac{x}{4}$	(beidemal) $\frac{x}{6}$
—	9	v. o.	$\frac{1}{4}.3_c^{2,2}$	$\frac{1}{4}3_c^{3,2}$.
102	10	v. o.	x^2-9	(x^2-9)
103	6	v. o.	$\omega + \Gamma(1+\omega^2)^x$	$(\omega + \Gamma(1+\omega^2))^x$
104	4	v. u.	ψt^2	φt^2.
—	2	v. o.	Hyperpel	Hyperbel
105	5	v. u.	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$
106	3	v. u.	$\frac{1}{2}$ *log. nat.* $\frac{1+\frac{\xi}{\eta}}{1+\frac{\xi}{\eta}}$	$\frac{1}{2}$ *log. nat.* $\frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{1-\frac{\eta}{\xi}}$
109	7 u. 8	v. o.	*Absc.* $(m-1)$, *Ord.* $(m-1)$	*Abs.* $(m-1)s$, *Ord.* $(m-1)s$
110	14	v. o.	Q_{m-2}, $\frac{m-1}{2}(m-4)_c^{:2}$	Q_{m-1}, $\frac{m-1}{2}(m-4)$
111	12	v. u.	v	η.

Seite.	Zeile.		statt:	lies:
117	2	v. u.	$cos = \xi$	$cos s = \xi$
—	11	v. u.	PO	PQ
119	11	v. o.	von B	von P
126	4	v. u.	$\frac{\varphi x}{\Gamma\psi^2 1 + \varphi^2 1}$	$\frac{\varphi x}{\Gamma\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x$
127	7	v. o.	$\frac{\varphi x}{\Gamma\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x = \psi' x$	$\frac{\psi x}{\Gamma\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x$
—	14	v. o.	$\psi'(x+y)$	$\varphi'(x+y)$.
128	6	v. o.	*sin Arc. tan* $\frac{\varphi 1}{\psi 1}$	*sin x Arc. tan* $\frac{\varphi 1}{\psi 1}$.
130	6	v. u.	Bernonlli	Bernoulli
133	10	v. o.	$cos\frac{g\pi}{2}$	$cos\frac{x\pi}{2}$
142	10 u. 11	v. o.	ξ^3, ξ und $\frac{x}{3}(x+1)_c^{3,2}$	(resp.) ξ^2, ξ^6 und $\frac{x}{3}(x+1)_c^{2,2}$

144 nach 6 v. u. Anm. Es verdient hier bemerkt zu werden, dafs die algebraische Function $z = x^{2r-1} - (2r+1)x^{2r-1} + \frac{2r+1}{2}(2r-2)x^{2r-5} - \frac{2r+1}{3}(2r-3)_c^{:2}x^{2r-5} \ldots - 2$ unter der Form $(x\text{-}2)[x^r + x^{r-1} - (r\text{-}1)x^{r-2} - (r\text{-}2)x^{r-3} + (r\text{-}2)_c^{:2}x^{r-4} + (r\text{-}3)_c^{:2}x^{r-5}$ — etc.$]^2 = (x-2)y^2$ dargestellt werden kann. Setzt man nämlich $x = 2\,cos s$, so ist

$$z = 2\,cos(2r+1)s - 2 = -4\,sin^2\frac{2r+1}{2}s = -\frac{4\,sin^2\frac{2r+1}{2}s.cos^2\frac{s}{2}}{cos^2\frac{s}{2}}$$

$$= -\frac{(sin(r+1)s + sinrs)^2}{cos^2\frac{s}{2}} = (2cos s - 2)\frac{(sin(r+1)s + sinrs)^2}{4\,cos^2\frac{s}{2}\,sin^2\frac{s}{2}} = (2cos s - 2)\frac{(sin(r+1)s + sinrs)^2}{sin^2 s}$$

$= (x-2)\,[x^r + x^{r-1} - (r-1)x^{r-2} - (r-2)x^{r-3} + (r-2)_c^{:2}x^{r-4} + (r-3)^{:2}x^{r-5}$ — etc.$]^2$

Es ist also $y = \frac{sin(r+1)s + sinrs}{sins}$, und wird $= 0$, wenn $s = \frac{2\pi}{2r+1}$. Daraus ergiebt sich, dafs $2\,cos s$, $2\,cos 2s$, $2\,cos 3s$, . . . $2\,cos rs$, die r Wurzeln der Gleichung $x^r + x^{r-1} - (r-1)x^{r-2} - (r-2)x^{r-3} + (r-2)_c^{:2}x^{r-4}$ + etc. $= 0$ sind, und sich folglich die Theilung des Kreises in $2r+1$ Theile auf die Auflösung einer Gleichung vom $r$ten Grade zurückführen läfst. So hängt z. B. die Theilung des Kreises in 3, 5, 7, 9, 11, Theile resp. von den Gleichungen $x+1=0$, $x^2+x-1=0$, $x^3+x^2-2x-1=0$, $x^4+x^3-3x^2-2x+1=0$, $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ ab.

Ist die Zahl $2r+1$ eine Primzahl und $r = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, wo a, b, c, etc. ebenfalls Primzahlen, so läfst sich die Theilung des Kreises auf α Gleichungen vom $a$ten, β Gleichungen vom $b$ten etc. zurückführen. So läfst sich z. B. die Theilung des Kreises in 13, 17, 19, 73 Theile, weil r resp. 2.3, 2^3, 3^2, $2^2 3^2$ resp. auf eine quadratische und cubische, drei quadratische, zwei cubische, zwei quadratische und zwei cubische zurückführen. Ich will versuchen, das Wesentliche dieses von Gaufs entdeckten merkwürdigen Satzes, soviel es die Beschränktheit des Raumes erlaubt, hier mitzutheilen.

Zuförderst bemerke man, dafs jede positive ganze Zahl N unter der Form $\mu(2r+1) \pm \lambda$ dargestellt werden kann, wo μ, λ ganze Zahlen und λ nicht $> r$. Man nennt alsdann λ den kleinsten Rest von N nach dem Modulus $2r+1$. Bedeutet ferner g eine solche positive ganze Zahl, dafs die kleinsten Reste von $1, g, g^2, g^3, \ldots g^{r-1}$ alle von einander verschieden sind, so wird g eine Primitivwurzel von $2r+1$ genannt. So ist z. B. 2 eine Primitivwurzel von 19; ebenso 10. Im ersten Falle sind die kleinsten Reste der Ordnung nach 1, 2, 4, 8, 3, 6, 7, 5, 9; im letztern 1, 9, 5, 7, 6, 3, 8, 4, 2. Für 17 ist 2 keine Primitivwurzel, denn die kleinsten Reste sind 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8; wohl aber 10, deren kleinste Reste 1, 7, 2, 3, 4, 6, 8, 5; eben so auch 3, deren kleinste Reste für 17 folgende sind: 1, 3, 8, 7, 4, 5, 2, 6.

Wir wollen jetzt zeigen, wie die Constr. des 19 Ecks von der Auflösung zweier cub. Gleichungen abhängt. Es sei $\frac{360^\circ}{19} = \varphi$, so ist, wenn man $2\cos\varphi$, $2\cos 2\varphi$, $2\cos 3\varphi$ etc. resp. durch (1), (2), (3), etc. bezeichnet, zufolge (p. 168, §. 101.) (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) $= -1$ oder die Gröfsen (1), (2), etc. nach der Ordnung der kleinsten Reste für irgend eine Primitivwurzel, wozu wir die Zahl 2 nehmen wollen, geschrieben (1) + (2) + (4) + (8) + (3) + (6) + (7) + (7) + (9) $= -1$. Setzt man nun (1) + (8) + (7) $= \beta$, (2) + (3) + (5) $= \beta'$, (4) + (6) + (9) $= \beta''$, so ergiebt sich $\beta\beta' = -1 + \beta' + 2\beta''$, $\beta'\beta'' = -1 + \beta'' + 2\beta$, $\beta''\beta = -1 + \beta + 2\beta'$. Daher $\beta\beta' + \beta'\beta'' + \beta''\beta = -6$ und $\beta\beta'\beta'' = -\beta'' + \beta'\beta'' + 2\beta''\beta'' = -1 + 2\beta + 2\beta''\beta''$. Man findet aber $\beta''\beta'' = 5 + \beta' + \beta''$, also $\beta\beta'\beta'' = 9 + 2(\beta + \beta' + \beta'') = 7$. Es sind also β, β', β'' die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$.

Die eine dieser drei Wurzeln findet man $= -1{,}2218761623$. Man überzeugt sich leicht, wenn man nun obenhin die Sinustafeln zu Rathe zieht, dafs β diese Wurzel ist. Daraus folgt, weil $\beta^2 = 4 - \beta'$ und $\beta'^2 = 4 - \beta''$, dafs $\beta' = 2{,}5070186441$, $\beta'' = -2{,}2851424818$. Weil nun endlich (1) + (8) + (7) $= \beta = -1{,}2218761625$, (1) (8) + (1) (7) + (8) (7) $= \beta + \beta' = -3{,}5070186441$ und (1) (3) (7) $= \beta' + 2 = 4{,}50186441$, so ist $\cos\frac{360^\circ}{17}$ eine der drei Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + 1{,}2218761625\, x^2 - 3{,}5070186441\, x - 4{,}5070186441 = 0$ und diese ist 1,8916344834.

Um die Construction des 17 Ecks zu bewerkstelligen, ordne man zunächst die Gröfsen $2\cos\varphi$, $2\cos 2\varphi$, $2\cos 3\varphi$, $\ldots 2\cos 8\varphi$, wo $\varphi = \frac{360^\circ}{17}$, indem man für irgend eine Primitivwurzel g die kleinsten Reste von $1, g, g^2$, etc. nach dem Modulus 17 hinschreibt. Setzen wir $g = 3$, und bezeichnen wieder $2\cos\varphi$, $2\cos 2\varphi$, $2\cos 3\varphi$, etc. resp. durch (1), (2), (3), etc., so haben wir (1) + (3) + (8) + (7) + (4) + (5) + (2) + (6) $= -1$. Setzt man nun (1) + (8) + (4) + (2) $= \beta$, (3) + (7) + (5) + (6) $= \beta'$, so erhält man $\beta\beta' = -4$. Es sind also β, β' die beiden Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 4 = 0$, deren beide Wurzeln $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$ die Gröfsen β, β' sind. Es ist demnach $\beta = 1{,}5615528128$, $\beta' = -2{,}5615528128$. Setzt man ferner (1) + (4) $= \alpha_0$, (8) + (2) $= \alpha_1$, so hat man $\alpha_0 + \alpha_1 = \beta$, $\alpha_0 \alpha_1 = -1$. Es sind also α_0 und α_1 die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1{,}5615528128x - 1 = 0$, daher $\alpha_0 = 2{,}0494811777$, $\alpha_1 = -0{,}487928364$. Eben so findet man, wenn (3) + (5) $= \alpha'_0$, (7) + (6) $= \alpha'$, also $\alpha'_0 + \alpha'_1 = \beta'$, $\alpha'_0 \alpha'_1 = -1$ vermittelst der Gleichung $x^2 + 2{,}5615528128x - 1 = 0$, $\alpha'_0 = 0{,}34441507314$; $\alpha'_1 = -2{,}9057035442$. Endlich erhält man, weil (1) + (4) $= \alpha_0$, (1) (4) $= \alpha'_0$ vermittelst der Gleichung $x^2 - 2{,}0494811777x + 0{,}3441507314 = 0$, (1) oder $2\cos\frac{360^\circ}{17} = 1{,}8649444588$. Daraus Ch. $\frac{360^\circ}{17} = 2\sin\frac{180^\circ}{17} = \sqrt{(2 - 2\cos\frac{360^\circ}{17})} = \sqrt{0{,}1350555412} = 0{,}3674990358$.

Seite.	Zeile.	statt:	lies:
136	10 v. o.	$\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\,3.\,3}\sin^4 s$	$\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\,3.\,4}\sin^4 s$
149	5 v. u.	$(\sqrt{1+\eta^2} - \eta)^m -$	$(\sqrt{1+\eta^2} + \eta)^m -$
150	1 v. u.	$\sin^2\frac{(n-2)\pi}{n}$	$\sin^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$.
154	8 v. u.	$\pm\sin\frac{3\pi-\varphi}{r} \ldots \pm\sin\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}$	$\pm\sin\frac{3\pi+\varphi}{r} \ldots \pm\sin\frac{(r-1)\pi+\varphi}{r}$
160	2 v. o.	$\frac{e^s + e^{-s}}{2}$	$\frac{e^s - e^{-s}}{2}$.
—	11 v. u.	$2\,Cinh^2 s$	$Sinh^2 s$.
190	1 v. u.	$A_2 x^{n-3}$	$A_2 x^{n-2}$.
—	11 v. o.	$\mu_c^2 x_c^1$	$\mu_c^2 x^2$.
196	7 v. u.	$\frac{1}{1.\,2.\,3 \ldots n}(\frac{\pi}{2})_c^n$	$\frac{1}{1.\,2.\,3 \ldots n}(\frac{\pi}{2})^2$.
—	1 v. u.	$q' = \sqrt{p'q}$	$q_1 = \sqrt{p_1 q}$.
201	13 v. o.	$\sin\frac{x\pi}{2} = 1 \quad \cos\frac{x\pi}{2} = 1$	$\sin\frac{x\pi}{2} = \quad \cos\frac{x\pi}{2} =$
202	13 v. o.	$-s_c^2$	$-s_c^2$.
211	1 v. o.	der 60ste Theil	der 90ste Theil.

Seite.	Zeile.		statt:	lies:
211	7	v. o.	0,21319827	0,21318827
—	8	v. o.	19° 11 13	19° 11′ 13
—	13	v. o.	37‴	27‴
—	17	v. o.	28‴	27‴
215	2	v. u.	$+ \sin\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}B$	$+ \cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B$
—	6	v. o.	$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}-a)}{bc}}$	$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s-a)}{bc}}$.
220	8	v. u.	Winkel B	Winkel C
—	7	v. u.	$\cot\frac{1}{2}B$	$\cot\frac{1}{2}C$
223	10	v. o.	BC	AB
225	9	v. u.	$AF = \frac{CA}{\sin CBA}$	$AF = \frac{CA}{\sin CFA}$
229	2	v. o.	$2\cos a\ \cos c\ \cos c$	$2\cos a\ \cos b\ \cos c$
—	3	v. u.	$\sin A\ \sin C\ \cos a$	$\sin A\ \sin C'\ \cos a$.
233	3 u. 4	v. u.	$\cos(\frac{1}{2}a+b)$, $\sin(\frac{1}{2}a+b)$	$\cos\frac{1}{2}(a+b)$, $\sin\frac{1}{2}(a+b)$
246	1	v. o.	58° 37′ 17″	58° 22′ 43″
—	11	v. o.	3° 35′ 59″	3° 35′ 39″
257	6	v. o.	Ayensystem	Axensystem
—	9	v. u.	Winkel, den	Winkel, die
258	7	v. u.	$x''Y+y''Y+z''Y$	$x''X+y''Y+z''Z$
—	2	v. u.	$Q^{0,2}$	$Q^{0,1}$
261	8	v. u.	$-Z''Z$	$Z''Y$
264	2	v. o.	Linien	Linie
267	10	v. u.	$\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=1$	$\xi=1,\ \eta=0,\ \zeta=0$
273	10	v. o.	$-\xi'\eta''\xi-\xi'\eta\zeta$	$-\zeta'\eta''\xi-\zeta''\eta\xi$.
276	12	v. o.	$\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''-\mathfrak{Y}'\mathfrak{X}''=\xi\mathfrak{K}$	$\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''-\mathfrak{Y}'\mathfrak{X}''=\zeta\mathfrak{K}$.
278	10	v. u.	$f, g, h,$	$f:g:h.$
287	14	v. o.	$+ 2\mathfrak{CEF}, + 2CEF$	$-2\mathfrak{CEF}, - 2CEF.$
305	10	v. o.	lassen sich nun die in $\xi, \eta; \xi, \eta$	läfst sich nun der in $\xi, \eta; \xi', \eta'$.
320	12	v. u.	$E(\eta''\zeta''+\zeta'\eta'')$	$E(\eta'\zeta''+\zeta\eta'')$.
321	12	v. u.	$2E'\mathfrak{X}''\mathfrak{Z}''$	$2E'\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z}''$.
—	1	v. u.	statt: $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''+\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'') + \mathfrak{F}(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}+\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'+\mathfrak{X}\mathfrak{Y}')$	
			lies: $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''+\mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'') + \mathfrak{F}(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}''\mathfrak{X}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Y}\mathfrak{X}')$.	
323	9 u. 10	v. o.	statt: $\mathfrak{L}-L$ lies: $\mathfrak{L}'-L$.	

Erste Vorlesung.

Über Verhältnisse, Proportionen, Potenzen und Logarithmen.

§. 1. Eine Gröfse wird mit einer andern gleichartigen Gröfse gemessen, wenn man untersucht, wie viel mal diese oder ein aliquoter Theil derselben in der ersten oder auch wie oft die andere in einem Vielfachen der ersten enthalten ist.

Nimmt man nämlich irgend ein Vielfaches der Gröfse X, welches wir durch mX bezeichnen wollen, so wird darin die Gröfse x mehrere mal genau oder mit einem Reste $<$ x enthalten sein, so dafs entweder $mX = nx$, oder $= nx + \xi$ ist, wo n eine ganze Zahl und ξ eine Gröfse $<$ x bedeutet, dafs also im erstern Falle $X = \frac{n}{m}x$, im letztern $X > \frac{n}{m}x$ und $< \frac{n+1}{m}x$ ist. Je gröfser die Zahl m ist, desto kleiner ist der Fehler, den man begeht, wenn man $X = \frac{n}{m}x$ oder $= \frac{n+1}{m}x$ setzt. Man kann sich dieses Verfahrens mit Nutzen bedienen, um zwei verschiedene Längenmafsen mit einander zu vergleichen. Gesetzt man wollte die russische Sashene, welche 7 engl. Schuh enthält, mit dem französischen Mètre messen, so dürfte man nur auf einer Ebene eine Standlinie von einigen Wersten mit der Sashene abmessen, und alsdann untersuchen, wie viel mal der Mètre in dieser Länge enthalten sei. Hätte man z. B. eine Standlinie von 1000 Sashenen abgesteckt und

gefunden, dafs in dieser Länge der Mètre etwas mehr als 2133 mal aber nicht ganz 2134 mal enthalten sei, so würde daraus folgen, dafs die russische Sashene $>$ 2,133 und $<$ 2,134 franz. Mètres sei. Eben so läfst sich mit ziemlicher Genauigkeit auf dem Reifsbrette die Gröfse eines Kreisbogens mit dem Umfange desselben Kreises vergleichen. Trägt man nämlich mit Hülfe eines Zirkels den Kreisbogen auf dem ganzen Umfange so oft herum, bis der eine Fufs des Zirkels entweder genau oder ziemlich nahe auf den Anfangspunkt fällt, so wird sich aus der Vergleichung der Menge der Umläufe und der Menge der Wendungen des Zirkels die Gröfse des Bogens ziemlich genau bestimmen lassen.

Vorläufig ist auch hier ein Verfahren zu bemerken, eine Gröfse genau oder näherungsweise mit einer andern gleichartigen zu messen, das sich am natürlichsten darzubieten scheint. Es seien die beide Gröfsen X, x und $X > x$ so wird x in X ein oder mehrere mal genau oder mit einem Reste $x_1 < x$ enthalten, also $X = \mu x$ oder $= \mu x + x_1$ sein, wo μ irgend eine ganze Zahl und x_1 eine Gröfse $< x$ bedeutet. Im erstern Falle ist die Arbeit vollendet; im letztern aber wird x_1 wieder in x ein oder mehrere mal genau oder mit einem Reste $x_2 < x_1$ enthalten sein, so dafs $x = \mu_1 x_1$ oder $= \mu_1 x_1 + x_2$. Im letztern Falle untersuche man wieder, wie oft x_2 in x_1 enthalten ist, und man wird $x_1 = \mu_2 x_2$ oder $\mu_2 x_2 + x_3$ finden. Diese Operation setze man so lange fort bis man auf einen Rest kömmt, der entweder $= 0$, oder so klein ist, dafs man ihn vernachlässigen zu dürfen glaubt. Es sei z. B. $X = 3x + x_1$, $x = 7x_1 + x_2$, $x_1 = 15x_2 + x_3$, $x_2 = x_3 + x_4$; vernachlässigt man den letzten Rest x_4 und setzt $x_2 = x_3$, so wird $x_1 = 16x_3$, $x = 113x_3$ und $X = 355x_3 = 355\frac{x}{113} = \frac{355}{113}x$. Ist der Rest $x_3 > \frac{1}{2}x_3$ und setzt man denselben, statt ihn zu vernachlässigen, $= x_3$, so dafs $x_2 = 2x_3$, so wird $x_1 = 31x_3$, $x = 219x_3$ und $X = 688x_3 = \frac{688}{219}x$. Der wahre Werth von X liegt zwischen $\frac{355}{113}x$ und $\frac{668}{219}x$, und weil der Unterschied dieser beiden Gröfsen $= \frac{1}{24747}x$ ist, so kann jeder derselben für den wahren Werth von X bis auf einen Fehler $< \frac{1}{24747}x$ genommen werden. Der Beweis dieses Satzes und die weitere Ausführung des Gegenstandes überhaupt wird in der Lehre von den continuirlichen Brüchen vorkommen.

§. 2. Verhältnifs ist die quantitative oder durch Messen bestimmbare gegenseitige Beziehung zweier gleichartigen Gröfsen. Diese Beziehung wird durch das zwischen beide Gröfsen gesetzte Zeichen: ausgedrückt. So bedeutet $X : x$ das Verhältnifs X zu x. Die Gröfsen X, x selbst werden die Glieder des Verhältnisses $X : x$ genannt, und zwar X das Vorderglied und x das Hinterglied. Verwechselt man diese beiden Glieder und macht das Hinterglied zum Vordergliede, und das Vorderglied zum Hintergliede, oder verwandelt man $X : x$ in $x : X$, so wird $x : X$ das umgekehrte Verhältnifs von $X : x$ genannt.

Man unterscheidet in den Lehrbüchern arithmetisches und geometrisches Verhältnifs von einander. Hier ist vom sogenannten geometrischen Verhältnisse die Rede, wie wir überhaupt immer, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, das Wort Verhältnifs nur in diesem Sinne gebrauchen werden.

§. 3. Zwei Verhältnisse $X : x$ und $Y : y$ sind, nach Euklid, einander gleich oder es ist $X : x = Y : y$ wenn für jede zwei beliebige ganze Zahlen m, n

zugleich	$mX > nx$	und	$mY > ny$
oder	$mX < nx$	und	$mY < ny$
oder	$mX = nx$	und	$mY = ny$.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse $X : x = Y : y$ wird auch eine Proportion und die Gröfsen X, x, Y, y werden die Glieder derselben, und zwar x, Y die mittlern, und X, y die äufsern Glieder genannt.

§. 4. Wird das Hinterglied des einen Verhältnisses einer Proportion zur Einheit angenommen, so wird sein Vorderglied der Exponent oder die Verhältnifszahl des andern Verhältnisses genannt. So ist z. B., wenn $X : x = k : 1$ oder wenn

$k : 1 = X : x$, k der Exponent des Verhältnisses $X : x$ oder seine Verhältnifszahl. Läfst sich dieser Exponent von $X : x$ genau durch eine Zahl, sie mag eine zusammengesetzte oder eine einfache, ganze oder gebrochene Zahl sein, darstellen, so wird X in Bezug auf x eine **commensurable** Gröfse genannt; im Gegentheil, wenn sich X durch kein Vielfaches irgend eines aliquoten Theils von x, so klein man denselben auch annehmen mag, sondern nur näherungsweise darstellen läfst, so heifst X in Bezug auf x eine **incommensurable** Gröfse. Im ersten Falle ist der Exponent k eine **rationale** im letztern eine **irrationale** Zahl. So ist z. B. der Exponent des Verhältnisses der Elle zur Arschine, weil 4 Ellen = 5 Arschinen, eine rationale Zahl, nämlich $\frac{4}{5}$. Hingegen die Verhältnifszahl des Kreisumfanges zum Durchmesser, welche man gewöhnlich durch den Buchstaben π bezeichnet, eine irrationale Zahl, und wird näherungsweise durch $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ oder 3,14159265... ausgedrückt.

§. 5. Zufolge der Proportion $X : x = Y : y$ ist X eine Gröfse, die sich zu x verhält, wie Y zu y. Man drückt dieſs durch $X = \frac{xY}{y}$ aus. Ist $y = 1$ und $Y = k$, eine abstracte Zahl, so dafs X eine Gröfse bedeutet, die sich zu x verhält, wie k zur Einheit, so schreibt man dieſs so: $X = kx$ und kx wird das **Product** aus der Gröfse x mit der Zahl k **multiplicirt** genannt. Die Gröfse x ist alsdann der **Multiplicand**, und die Zahl k der **Multiplicator**. Dafs k der Exponent des Verhältnisses $X : x$ ist, wird durch $k = \frac{X}{x}$ angedeutet. Um anzuzeigen, dafs x eine Gröfse sei, die sich zu der gleichartigen X verhält, wie die Einheit zu k, schreibt man $x = \frac{X}{k}$. Alsdann nennt man x den **Quotienten**, welcher herauskömmt, wenn man X, den **Dividend**, mit der Zahl k, dem **Divisor**, dividirt.

§. 6. **Function** nennt man jede Gröfse, in sofern dieselbe zu einer andern veränderlichen Gröfse in einer solchen Beziehung gedacht wird, dafs wenn der Werth der letztern gegeben ist, der Werth der erstern sich bestimmen läfst. Um die reciproke Beziehung der letztern veränderlichen Gröfse zu ihrer Function auszudrücken, werden wir sie das **Argument** der Function nennen. So ist z. B. die Sehne eine

Function des dazu gehörigen Kreisbogens, und alsdann ist der Kreisbogen das Argument der Sehne. Man kann aber auch den Kreisbogen als Function der Sehne betrachten, und alsdann ist die Sehne das Argument des dazu gehörigen Kreisbogens. Um anzuzeigen, dafs eine veränderliche Gröfse X eine Function einer andern x seie, bedient man sich gewöhnlich eines der Buchstaben f, F, φ, ψ, und schreibt dieſs so $X = \varphi x$. X ist hier die Function, x ihr Argument und der vor x stehende Buchstabe φ bezeichnet die Art der Abhängigkeit der Gröfse X von x oder die Form der Function, so dafs, wenn zugleich $X = \varphi x$ und $Y = \varphi y$, dadurch angedeutet wird, dafs X durch x eben so bestimmt wird, wie Y durch y. Bedeutet also z. B. $X = \varphi x$, die Sehne eines Kreisbogens x für einen gegebenen Halbmesser, so mufs man die zum Bogen y desselben Kreises gehörige Sehne Y durch φy ausdrücken. Dieſs vorausgeschickt, wollen wir folgenden Lehrsatz beweisen.

§. 7. Wenn φx eine solche Function von x bedeutet, dafs $\varphi x + \varphi y = \varphi(x+y)$ so wird $\varphi x : \varphi y = x : y$ sein.

Aus der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \varphi(x+y)$ folgt nämlich zunächst, wenn man $y = x$ setzt

dafs $2\varphi x = \varphi x + \varphi x = \varphi 2x$

daraus $3\varphi x = \varphi x + 2\varphi x = \varphi x + \varphi 2x = \varphi 3x$

$4\varphi x = \varphi x + 3\varphi x = \varphi x + \varphi 3x = \varphi 4x$

$5\varphi x = \varphi x + 4\varphi x = \varphi x + \varphi 4x = \varphi 5x$

etc. etc.

so dafs, wie man leicht übersieht, wenn m, n irgend zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten

$$m\varphi x = \varphi mx \quad \text{und} \quad n\varphi y = \varphi ny.$$

Aus der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \varphi(x+y)$ folgt aber auch, dafs wenn $z = x + y$, also $z > x$, auch $\varphi z > \varphi x$ sein mufs.

Ist also für jede zwei beliebige ganze Zahlen m, n

$$mx > \text{oder} < \text{oder} = ny$$

so mufs auch respective $\varphi m x >$ oder $<$ oder $= \varphi n y$

und folglich auch $m\varphi x >$ oder $<$ oder $= n\varphi y$ sein.

Es mufs also, zufolge der Euklidischen Definition von der Proportion (§. 3.), $\varphi x : \varphi y = x : y$, und weil diefs für alle mögliche Werthe von y gelten mufs

auch $\varphi x : \varphi 1 = x : 1$ und folglich (§. 5.), $\varphi x = x\varphi 1$ sein.

Lagrange beweiset diesen Satz, in seinen Leçons sur le calcul des fonctions, Seite 18 — 20, auf eine etwas künstliche Art vermittelst der Differenzialrechnung oder der Theorie der abgeleiteten Functionen. Ich bemerke dies nur, um auf die Nützlichkeit der Euklidischen Def. von den Proportionen auch in der höhern Analysis aufmerksam zu machen.

§. 8. Der so eben bewiesene Satz führt auf einen sehr eleganten und strengen Beweis der beiden geometrischen Lehrsätze, dafs die Bögen eines Kreises sich wie die dazu gehörigen Winkel und dafs Rechtecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten. Bezeichnet man nämlich den Bogen, dessen Winkel x und dessen Radius $=$ r ist durch Arc. (x, r) so hat man Arc. (x, r) $+$ Arc. (y, r) $=$ Arc. (x + y, r). Eben so erhält man, wenn man das Rechteck dessen Höhe h, und dessen Grundlinie x, durch Rect. (x, h) ausdrückt,

$$\text{Rect. } (x, h) + \text{Rect. } (y, h) = \text{Rect. } (x + y, h).$$

Diese beiden Gleichungen sind, wenn man sowohl Arc. (x, r) als auch Rect. (x, h) durch φx andeutet in der Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \varphi(x + y) \quad \text{begriffen,}$$

so dafs also, weil alsdann, wie wir gesehen haben

$$\varphi x : \varphi y = x : y,$$

$$\text{Arc. } (x, r) : \text{Arc. } (y, r) = x : y$$

und eben so Rect. (x, h) : Rect. (y, h) $=$ x : y sein mufs.

Man vergleiche damit die Beweise dieser beiden Sätze in den Eléments de Géometrie von Legendre p. 45 und p. 63. Auch gehört dahin der Beweis des Satzes in le Gendre p. 177.

§. 9. Wenn zwei Verhältnisse einander gleich sind, so müssen auch ihre umgekehrten Verhältnisse einander gleich sein, oder wenn $X : x = Y : y$, so mufs auch $x : X = y : Y$ sein.

Aus $X : x = Y : y$ folgt (§. 3.), dafs für jede zwei beliebige ganze Zahlen m, n zugleich respective

$$mX > \text{oder} < \text{oder} = nx$$

$$\text{und} \quad mY > \text{oder} < \text{oder} = ny$$

und also auch zugleich

$$nx > \text{oder} < \text{oder} = mX$$

$$\text{und} \quad ny > \text{oder} < \text{oder} = mY$$

und folglich $x : X = y : Y$ sein mufs.

§. 10. Wenn alle vier Glieder einer Proportion gleichartig sind, so verhält sich das Aggregat der Vorderglieder der beiden gleichen Verhältnisse zum Aggregate ihrer Hinterglieder, wie die respectiven Vorderglieder zu den Hintergliedern der beiden gleichen Verhältnisse, oder wenn

$$X : x = Y : y \quad \text{so ist auch}$$

$$X + Y : y + y = X : x = Y : y.$$

Weil nämlich $X : x = Y : y$, so mufs für jede zwei beliebige ganze Zahlen m, n zugleich

$$mX > \text{oder} < \text{oder} = nx$$

$$\text{und} \quad mY > \text{oder} < \text{oder} = ny$$

$$\text{und folglich auch} \quad m(X+Y) > \text{oder} < \text{oder} = n(x+y)$$

$$\text{und deshalb} \quad X+Y : x+y = X : x = Y : y \text{ sein.}$$

Aus $X+Y : x+y = X : x = Y : y$ ergiebt sich dafs der Exponent dieser drei Verhältnisse derselbe sein mufs, dafs also, wenn man denselben durch k bezeichnet

$$X+Y = k(x+y), \; X = kx, \; Y = ky$$

$$\text{und folglich} \quad kx + ky = k(x+y) \text{ sein wird.}$$

Daraus folgt auch, wenn $x > y$, dafs $k(x-y) + ky = kx$ und demnach $kx - ky = k(x-y)$, oder, weil $kx = X$, $ky = Y$, dafs $X - Y = k(x-y)$ und folglich

$$X - Y : x - y = k : 1 = X : x = Y : y \text{ ist.}$$

Es ist also das Verhältnifs der Summe oder des Unterschiedes der Vorderglieder zweier gleichen Verhältnisse zu der Summe oder dem Unterschiede der beiden Hinterglieder derselben, jedem dieser beiden Verhältnisse gleich,

oder es ist $X \pm Y : x \pm y = X : x = Y : y$.

§. 11. Die Gleichung $kx + ky = k(x + y)$ ist, wenn man $kx = \varphi x$ setzt, mit der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \varphi(x + y)$ identisch, folglich ist auch $kx : ky = x : y$.

Wenn daher das Vorder- und Hinterglied eines Verhältnisses mit einer und derselben rationalen oder irrationalen Zahl multiplicirt wird, so bleibt das Verhältnifs ungeändert.

§. 12. Wenn die vier Glieder einer Proportion gleichartig sind, so kann man die beiden mittlern oder die beiden äufsern Glieder mit einander verwechseln, ohne dafs die vier Glieder aufhören eine Proportion zu bilden.

Es sei wieder $X : x = Y : y$ und $X = kx$, so wird

$Y = ky$ und $X + Y = k(x + y)$ und wie wir eben gesehen haben $kx : ky = x : y$ oder $X : Y = x : y$, und folglich auch $y : x = Y : X$ sein.

§. 13. Da der Satz, dafs $kx : ky = x : y$, für jede beliebige abstracte Zahl k gilt, so mufs auch, wenn $\acute{k}$ irgend eine von k verschiedene Zahl bedeutet, $\acute{k}x : \acute{k}y = x : y$ und folglich auch $kx : ky = \acute{k}x : \acute{k}y$ sein; woraus sich (§. 10.) ergiebt, dafs $(kx + \acute{k}x) : (ky + \acute{k}y) = kx : ky = x : y$, und $y = 1$ gesetzt, $kx + \acute{k}x : k + \acute{k} = x : 1$ oder $kx + \acute{k}x = (k + \acute{k})\,x$.

Ist $\acute{k} < k$, so ist auch $(k - \acute{k})\,x + \acute{k}x = kx$ und folglich $kx - \acute{k}x = (k - \acute{k})\,x$.

§. 14. Es lassen sich die beiden Sätze $kx \pm ky = k(x \pm y)$ und $kx \pm \acute{k}x = (k \pm \acute{k})\,x$, wo entweder die beiden obern oder die beiden untern Zeichen zugleich gelten, jener auf mehrere Gröfsen x, $\acute{x}$, $\acute{\acute{x}}$, $\acute{\acute{\acute{x}}}$, etc., dieser auf mehrere Zahlen k, $\acute{k}$, $\acute{\acute{k}}$, $\acute{\acute{\acute{k}}}$, etc. ausdehnen, so dafs

$$kx + k\acute{x} + k\acute{\acute{x}} + k\acute{\acute{\acute{x}}} + \text{etc.} = k(x + \acute{x} + \acute{\acute{x}} + \acute{\acute{\acute{x}}} + \text{etc.})$$

und $kx + \acute{k}x + \acute{\acute{k}}x + \acute{\acute{\acute{k}}}x + \text{etc.} = (k + \acute{k} + \acute{\acute{k}} + \acute{\acute{\acute{k}}} + \text{etc.})\,x$

wo man nach Gefallen das Additionszeichen + mit dem Subtractionszeichen — in den correspondirenden Theilen der Glieder beider Gleichungen vertauschen kann.

Da nämlich $kx + k\acute{x} = k(x + \acute{x})$ so ist

$$kx + k\acute{x} + k\acute{\acute{x}} = k(x + \acute{x}) + k\acute{\acute{x}} = k(x + \acute{x} + \acute{\acute{x}})$$

und $kx + k\acute{x} - k\acute{\acute{x}} = k(x + \acute{x}) - k\acute{\acute{x}} = k(x + \acute{x} - \acute{\acute{x}})$.

So wie hier der Satz für drei Gröfsen x, $\acute{x}$, $\acute{\acute{x}}$, aus demselben Satze für zwei Gröfsen x, $\acute{x}$ hergeleitet ist, so kann man ihn auch auf vier, fünf etc. Gröfsen ausdehnen.

Eben so folgt aus $kx \pm \acute{k}x = (k \pm \acute{k})\,x$

dafs $kx + \acute{k}x \pm \acute{\acute{k}}x = (k + \acute{k})\,x \pm \acute{\acute{k}}x = (k + \acute{k} \pm \acute{\acute{k}})\,x$, etc.

§. 15. Zu den Sätzen, die man in der Elementar-Arithmetik entweder gar nicht oder nicht mit genügender Strenge beweiset, gehört der Lehrsatz dafs ein Product aus einer beliebigen Zahl Factoren immer dasselbe bleibt, in welcher Ordnung auch immer die Factoren mit einander multiplicirt werden. Legendre beweiset diesen Satz gleich anfangs in seiner Theorie des Nombres, doch nur für ganze Zahlen. Ich werde denselben mit Benutzung des bereits Vorgetragenen allgemein für alle mögliche Factoren, wenn dieselben auch Irrational-Zahlen sind, darthun.

§. 16. Wir wollen zuerst für irgend zwei Zahlen a, b zeigen, dafs $a \times b = b \times a$ oder $ab = ba$ ist.

Es bedeutet nämlich a $\times$ b oder ab das Product der Zahl a mit der Zahl b multiplicirt oder eine Zahl, die sich zu a verhält, wie b zur Einheit.

Demnach ist a $\times$ b : a = b : 1 und folglich (§. 12.) a $\times$ b : b = a : 1. Es ist aber auch b $\times$ a : b = a : 1. Also a $\times$ b : b = b $\times$ a : b und deshalb a $\times$ b = b $\times$ a oder ab = ba.

§. 17. Wenn man eine Zahl a mit der Zahl b multiplicirt, und das Product nochmals mit der Zahl c multiplicirt, so ist das Resultat dieser Operation dasselbe, als wenn man das Product bc durch eine Zahl darstellt, und die Zahl a mit derselben multiplicirt, oder es ist abc = a $\times$ bc.

Es ist nämlich abc : ab oder ab $\times$ c : ab = c : 1, und, weil bc : b = c : 1, auch ab $\times$ c : ab = bc : b, deshalb auch (§. 12.) ab $\times$ c : bc = ab : b oder abc : bc = ab : b. Aber ba : b = a : 1 oder, weil ba = ab, ab : b = a : 1. Demnach abc : bc = a : 1 und (§. 12.) abc : a = bc : 1. Folglich abc = a$\times$bc.

§. 18. Der Werth eines Productes aus einer beliebigen Anzahl Factoren bleibt derselbe, wie man auch die Stelle eines dieser Factoren verändern mag, vorausgesetzt, dafs die übrigen ihre Rangordnung untereinander beibehalten. So wird z. B. abcdef = abcdfe = abcfde = abfcde = afbcde = fabcde. Es wird genug sein, den Satz für das obige aus sechs Factoren bestehende Product zu beweisen, weil sich daraus leicht die Allgemeinheit für ein Product aus jeder beliebigen Anzahl von Factoren ergiebt.

Aus dem so eben bewiesenen Satze folgt, dafs abcdef = abcd $\times$ ef und abcdfe = abcd $\times$ fe. Weil nun ef = fe, so mufs auch abcd $\times$ ef = abcd $\times$ fe sein.

Es ist demnach	. . . . .		abcdef	= abcdfe
Eben so ist	abcdf	= abcfd	also abcdfe	= abcfde
- - -	abcf	= abfc	- abcfde	= abfcde
- - -	abf	= afb	- abfcde	= afbcde
- - -	af	= fa	- afbcde	= fabcde.

§. 19. Gesetzt nun der Satz, dafs der Werth eines Products aus einer beliebigen Anzahl von Factoren, wie auch die Ordnung derselben verändert werden mag, unveränderlich bleibt, seie wahr für ein Product aus n Factoren, so dürfen wir nur zeigen, dafs derselbe auch für ein Product von n + 1 Factoren wahr sein müsse. Denn weil der Satz wahr ist für n = 2, so wird er auch für n = 3, und deshalb für n = 4 u. s. w. für jede beliebige ganze Zahl n wahr sein müssen. Um diefs anschaulich zu machen, wollen wir die dem Werthe nach unter sich gleichen Producte aus n Factoren, insofern sie durch ihre combinatorische Form verschieden sind, durch P, P′, P″, P‴ etc. unterscheiden. Ist nun der neu hinzukommende (n + 1)te Factor = k, so ist zuerst klar, dafs Pk = P′k = P″k = P‴k etc. sein wird. Giebt man jetzt dem neu hinzugekommenen Factor k irgend eine andere Stelle, als die letzte, so wird das Product unter dieser neuen Form jedem der obigen unter sich gleichen Werthe gleich sein.

Dafs die Menge der möglichen combinatorischen Formen eines Productes von n Factoren = 2. 3. 4. 5 . . . . n sei, übersieht man ebenfalls hieraus leicht.

§. 20. Wenn man von mehrern gleichartigen Gröfsen jede derselben als im Verhältnisse zur nächstfolgenden betrachtet, so sagt man, dafs das Verhältnifs der ersten zur letzten zusammengesetzt sei aus den Verhältnissen, der 1sten zur 2ten, der 2ten zur 3ten u. s. w. bis zur letzten.

Es sei z. B. X′ : X = x : y, X′ : X″ = x′ : y′, X″ : X‴ = x″ : y″, X‴ : X⁗ = x‴ : y‴ etc., so sagt man, das Verhältnifs X : X⁗ ist aus den Verhältnissen x : y, x′ : y′, x″ : y″, x‴ : y‴ zusammengesetzt. Man kann diefs durch Zeichen so ausdrücken [X : X⁗] = [x : y] + [x′ : y′] + [x″ : y″] + [x‴ : y‴].

So ist z. B., wenn Rect. (x, y) den Flächeninhalt eines Rechtecks bedeutet, dessen Grundlinie x und dessen Höhe y (§. 8.)

Rect. (x, y) : Rect. (x′, y) = x : x′

Rect. (x′, y) : Rect. (x′, y′) = y : y′

Daraus ergiebt sich also der geometrische Lehrsatz, dafs

$$[\text{Rect.}(x, y) : \text{Rect.}(x', y')] = [x : x'] + [y : y']$$

oder dafs das Verhältnifs zweier Rechtecke aus den Verhältnissen ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusammengesetzt ist.

Eben so hat man, wenn $P(x, y, z)$ das Volumen eines rechtwinklichten Parallelepipedums bedeutet, dessen Länge, Breite und Höhe resp. durch x, y, z bezeichnet wird (§. 8.)

$$P(x, y, z) : P(x', y, z) = x : x'$$
$$P(x', y, z) : P(x', y', z) = y : y'$$
$$P(x', y', z) : P(x', y', z') = z : z'$$

Es ergiebt sich demnach, dafs

$$[P(x, y, z) : P(x', y', z')] = [x : x'] + [y : y'] + [z : z']$$

oder das Verhältnifs der Volumina zweier rechtwinklichten Parallelepipeda ist aus den Verhältnissen ihrer Längen, Breiten und Höhen zusammengesetzt.

Auf ähnliche Weise läfst sich auch beweisen, dafs das Verhältnifs eines Productes zur Einheit aus den Verhältnissen der einzelnen Factoren zur Einheit zusammengesetzt ist. Betrachten wir z. B. das Product $abcdef$, so ist

$$\begin{aligned} fedcba : fedcb &= a : 1 \\ fedcb : fedc &= b : 1 \\ fedc : fed &= c : 1 \\ fed : fe &= d : 1 \\ fe : f &= e : 1 \\ f : 1 &= f : 1 \end{aligned}$$

Es ist also das Verhältnifs $fedcba : 1$ oder, weil $fedcba = abcdef$, $[abcdef : 1] = [a : 1] + [b : 1] + [c : 1] + [d : 1] + [e : 1] + [f : 1]$.

§. 21. Sind die einzelnen Verhältnisse, woraus ein zusammengesetztes Verhältnifs besteht, unter sich gleich, so wird dasselbe ein Vielfaches eines dieser einzelnen Verhältnisse genannt. So ist z. B. das Verhältnifs zweier Würfel das dreifache Verhältnifs ihrer Seiten; oder, wenn die Gröfsen $x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ eine geometrische Reihe bilden, die Verhältnisse $x : x_1$, $x_1 : x_2$, $x_2 : x_3$, etc. also unter sich gleich sind, so ist dafs Verhältnifs des ersten Gliedes zum letzten Gliede $x : x_5$ das Fünffache des Verhältnisses $x : x_1$.

Dafs ein Verhältnifs $X : Y$ irgend ein Vielfaches des Verhältnisses $x : y$ sei, wollen wir so bezeichnen $[X : Y] = m\,[x : y]$.

Wenn das Verhältnifs $X : Y$ ein Vielfaches des Verhältnisses $x : y$ ist, so kann man das letztere $x : y$ als aliquoten Theil des Verhältnisses $X : Y$ betrachten, und dieſs so ausdrücken, $[x : y] = \frac{1}{m}\,[X : Y]$, woraus sich dann von selbst die Bedeutung von $[x : y] = \frac{n}{m}\,[X : Y]$ ergiebt, wo n, m beliebige ganze Zahlen bedeuten. So ist z. B. $[1000 : 1] = \frac{3}{4}\,[10000 : 1]$. Es ist nämlich $4\,[10 : 1] = [10000 : 1]$ also $10 : 1 = \frac{3}{4}\,[10000 : 1]$ und $[1000 : 1] = 3\,[10 : 1] = \frac{3}{4}\,[10000 : 1]$.

§. 22. Da Verhältnisse einander gleich sind, wenn sie gleiche Exponenten haben, so scheint es natürlich zu sein, ein Verhältnifs für gröfser anzunehmen als ein anderes, wenn des erstern Exponent gröfser ist als der des letztern. Damit stimmt auch die 7te Definition im 5ten Buche Euklids überein, zufolge deren man sagt, dafs das Verhältnifs $a : b$ gröfser sei als das Verhältnifs $c : d$, wenn für irgend zwei beliebige ganze Zahlen m, n für welche $ma > nb$ nicht auch zugleich $mc > nd$ ist. Weil wir jedoch die Verhältnisse als mathematische Gröfsen betrachten wollen, so mufs ihre Quantität auf eine Weise bestimmt werden, dafs alles, was von mathematischen Gröfsen überhaupt gilt, auch auf Verhältnisse angewandt werden kann. Dahin gehört der allgemeine Grundsatz, dafs das Ganze gröfser ist als seine Theile, wie auch die 4te Def. des 5ten B. Euklids, dafs man von Gröfsen sagt, sie haben ein Verhältnifs zu einander, wenn die kleinere so oft genommen werden kann, dafs sie die gröfsere übertrifft. Wollte man nun, da $[ab : 1] = [a : 1] + [b : 1]$, das Verhältnifs $[ab : 1]$ als das Ganze, und $[a : 1]$, $[b : 1]$ als dessen Theile be-

trachten, so müfste $[ab : 1] > [a : 1]$ und auch $> [b : 1]$ sein. Diefs ist auch der Fall, wenn sowohl a als $b > 1$ ist. Ist aber eine von diesen beiden Zahlen, z. B. $b < 1$, so ist auch $ab < a$, und es wäre alsdann $[ab : 1] < [a : 1]$ oder das Ganze kleiner als sein Theil. Eben so würde, wenn $a > 1$ und $b < 1$, das doppelte dreifache, und überhaupt mehrfache Verhältnifs von $[b : 1]$ oder $m\,[b : 1]$ nicht nur nicht gröfser als $[a : 1]$ sondern um so kleiner werden je gröfser m ist. Man vermeidet jedoch diesen Widerspruch, wenn man alle Verhältnisse, deren Exponenten gröfser als die Einheit sind, als unter sich gleichartige und positive, die übrigen aber, deren Exponent < 1 als den erstern entgegengesetzte und negative Gröfsen betrachtet. Da nun das aus zwei Verhältnissen, von denen das eine das umgekehrte des andern ist, zusammengesetzte Verhältnifs, wie $[a : b] + [b : a] = [a : a]$, dem Verhältnisse $[1 : 1]$ gleich, aber $[a : b] = [a : b] + [1 : 1]$ also auch $[a : b] - [a : b] = [1 : 1]$ ist, so sind die beiden Verhältnisse $[a : b]$ und $[b : a]$ als gleiche aber entgegengesetzte Gröfsen zu betrachten, und das Verhältnifs $[a : a]$ oder $[1 : 1]$ ist als ein relatives Null anzusehen.

§. 23. So wie das Verhältnifs eines Products zur Einheit aus den Verhältnissen der einzelnen Factoren zur Einheit zusammengesetzt ist, und als das Aggregat oder die Summe derselben angesehen werden kann, so läfst sich auch das Verhältnifs eines Quotienten zur Einheit, als die Differenz des Verhältnisses des Dividends zur Einheit weniger dem Verhältnisse des Divisors zur Einheit betrachten. Es ist nämlich der Quotient $\frac{a}{b} = q$ eine Zahl die sich zur Einheit verhält, wie der Dividend a zum Divisor b oder es ist $a : b = q : 1$ also $a = bq$ und $[a : 1] = [b : 1] + [q : 1]$ folglich $[a : 1] - [b : 1] = [\frac{a}{b} : 1]$.

Wenn man also von einem Verhältnisse $[a : 1]$ ein anderes $[b : 1]$ wegnimmt oder subtrahirt, so ist das Verhältnifs des Quotienten $\frac{a}{b}$ zur Einheit als der Rest zu betrachten. Sind die Verhältnisse $[a : 1]$ und $[b : 1]$ beide gleichartige und zwar positive Verhältnisse, so dafs a sowohl als $b > 1$ und ist $a > b$ und folglich auch

$[a : 1] > [b : 1]$, so wird man durch ein oder mehrmaliges Subtrahiren des Verhältnisses $[b : 1]$ von $[a : 1]$, wie klein auch $[b : 1]$ sein mag, auf ein Restverhältnifs $[c : 1] < [b : 1]$ kommen, wo $c = 1$ oder > 1 ist, so dafs $[a : 1] = \mu[b : 1] + [c : 1]$ gesetzt werden kann, wo μ eine ganze Zahl bedeutet, und $[c : 1] < [b : 1]$ ist. Es sei z. B. $a = 1{,}25$, $b = 1{,}024$. Dividirt man alsdann 1,25 durch 1,024, den Quotienten wieder durch 1,024 und setzt diese Operation so lange fort bis man auf den Quotienten 1 oder $< 1{,}024$ kömmt, so erhält man der Reihe nach die Quotienten,

1,22070312500; 1,19209289551; 1,16415321828; 1,13686837723;
1,11022302464; 1,08420217250; 1,05879118384; 1,03397576547;
1,00974195846.

Es läfst sich also das Verhältnifs $[1{,}024 : 1]$ neun mal von dem Verhältnisse $[1{,}25 : 1]$ wegnehmen, bis man auf ein Verhältnifs $[1{,}00974195846 : 1] < [1{,}024 : 1]$ kömmt, so dafs:

$$[1{,}25 : 1] = 9\,[1{,}024 : 1] + [1{,}00974195846 : 1] \text{ ist.}$$

§. 24. Diefs vorausgeschickt, bietet sich uns das (§. 1.) erwähnte Verfahren, das Verhältnifs zweier Gröfsen näherungsweise zu bestimmen, als sehr vortheilhaft dar, um die quantitative Beziehung zweier gleichartigen Verhältnisse zu berechnen. Es sei das positive Verhältnifs $[X : 1]$ durch das kleinere gleichartige $[x : 1]$ zu messen, so lassen sich nach dem so eben gegebenen Beispiele folgende Gleichungen finden:

$$\begin{aligned}
[X : 1] &= \mu\,[x : 1] + [x_1 : 1] \\
[x : 1] &= \mu_1[x_1 : 1] + [x_2 : 1] \\
[x_1 : 1] &= \mu_2[x_2 : 1] + [x_3 : 1] \\
[x_2 : 1] &= \mu_3[x_3 : 1] + [x_4 : 1] \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo μ, μ_1, μ_2, etc. ganze Zahlen bedeuten, und in der Zahlenreihe x, x_1, x_2, x_3, etc. jedes Glied kleiner ist als das nächstvorhergehende aber nicht < 1.

Es sei z. B. $X = 10$, $x = 5$, so erhält man

$$\begin{aligned}
[10{,}000000000000 : 1] &= [5{,}000000000000 : 1] + [2{,}000000000000 : 1]\\
[5{,}000000000000 : 1] &= 2\,[2{,}000000000000 : 1] + [1{,}250000000000 : 1]\\
[2{,}000000000000 : 1] &= 3\,[1{,}250000000000 : 1] + [1{,}024000000000 : 1]\\
[1{,}250000000000 : 1] &= 9\,[1{,}024000000000 : 1] + [1{,}009741958683 : 1]\\
[1{,}024000000000 : 1] &= 2\,[1{,}009741958683 : 1] + [1{,}004336277668 : 1]\\
[1{,}009741958683 : 1] &= 2\,[1{,}004336277668 : 1] + [1{,}001041547584 : 1]\\
[1{,}004336277668 : 1] &= 4\,[1{,}001041547584 : 1] + [1{,}000162894178 : 1]\\
[1{,}001041547584 : 1] &= 6\,[1{,}000162894178 : 1] + [1{,}000063722117 : 1]\\
[1{,}000162894187 : 1] &= 2\,[1{,}000063722117 : 1] + [1{,}000035441368 : 1]\\
[1{,}000063722117 : 1] &= [1{,}000035441368 : 1] + [1{,}000028279748 : 1]\\
[1{,}000035441368 : 1] &= [1{,}000028279748 : 1] + [1{,}000007166419 : 1]\\
[1{,}000028279748 : 1] &= 3\,[1{,}000007161419 : 1] + [1{,}000006795193 : 1]\\
[1{,}900007161419 : 1] &= [1{,}000006795193 : 1] + [1{,}000000366224 : 1]\\
[1{,}000006795193 : 1] &= 18\,[1{,}000000366224 : 1] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn nun $[X : 1] : [x : 1] = k : 1$, so lassen sich für die Verhältnifszahl k Näherungswerthe $\frac{A}{B}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \frac{A_4}{B_4}$, etc. finden, die auf folgende Weise aus den ganzen Zahlen μ, μ_1, μ_2, μ_3, etc. hergeleitet werden. Es ist nämlich

$$A = \mu, \quad A_1 = \mu_1 A + 1, \quad A_2 = \mu_2 A_1 + A, \quad A_3 = \mu_3 A_2 + A_1, \text{ etc.}$$
$$B = 1, \quad B_1 = \mu_1 B, \quad B_2 = \mu_2 B_1 + B, \quad B_3 = \mu_3 B_2 + B_1 \text{ etc.}$$

Die Brüche $\frac{A}{B}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}$, etc. sind abwechselnd kleiner und gröfser als k und haben noch die merkwürdige Eigenschaft, dafs $\frac{A_1}{B_1} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B_1 B}$, $\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{B_1 B_2}$, $\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{B_2 B_3}$, $\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_4}{B_4} = \frac{1}{B_3 B_4}$, etc. Den Beweis dieses Satzes und die weitere Ausführung des Gegenstandes versparen wir für die Lehre von den continuirlichen Brüchen, und begnügen uns damit die Anwendung davon auf das vorliegende Beispiel zu zeigen. Setzen wir für μ, μ_1, μ_2, etc., die gefundenen Zahlen 1, 2, 3, 9, 2, etc., so wird $\frac{A}{B} = \frac{1}{1}$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{A_2}{B_2} = \frac{10}{7}$, $\frac{A_3}{B_3} = \frac{93}{65}$, so dafs wir, wenn wir alle oben gefundene Zahlen benutzen, folgende Brüche erhalten,

1	2	3	9	2	2	4	6	2	1	1	3	1	18
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{93}{65}$	$\frac{196}{137}$	$\frac{485}{339}$	$\frac{2136}{1493}$	$\frac{13301}{9297}$	$\frac{28738}{20087}$	$\frac{42039}{29384}$	$\frac{70777}{49471}$	$\frac{254370}{177797}$	$\frac{325147}{227268}$	$\frac{6107016}{4268621}$

Nimmt man den letzten Bruch für k, so ist $[10 : 1] = \frac{6107016}{4268621}[5 : 1]$ und $[5 : 1] = \frac{4268621}{6107016}[10 : 1] = 0{,}698970004335596\,[10 : 1]$, wo der Coefficient von $[10 : 1]$ um keine Einheit der 13ten Decimalstelle unrichtig ist.

Zu bemerken ist übrigens, dafs in Betreff einer Zahl der Reihe X, x, x_1, x_2, x_3, etc., wenn auch die Rechnung an und für sich ganz richtig ist, man für die Richtigkeit der Ziffern ihres Decimalbruches immer weniger und weniger bürgen kann, je weiter ein solches Glied x_n vom ersten entfernt ist. Multiplicirt oder dividirt man nämlich zwei auf einander folgende Glieder der obigen Reihe, so ist soviel klar, dafs, wenn der Fehler jedes derselben kleiner als die halbe Einheit der letzten Decimale ist, der Fehler des Products oder Quotienten beinahe die Einheit der letzten Stelle ausmachen kann. So können in der Zahl x_{13} vielleicht die letzten 4 oder 5 Ziffern unrichtig sein. Man würde also, wenn man die bis zur Zahl x_{13} angestellte Berechnung noch weiter fortsetzte, vielleicht lauter unrichtige Zahlen μ_{14}, μ_{15}, etc. erhalten, durch deren Gebrauch man Brüche finden würde, die der Zahl k nicht näher kommen könnten, als die oben gefundenen.

§. 25. Alle Sätze, welche bis jetzt von den Gröfsen überhaupt bewiesen sind, gelten auch von den Verhältnissen, insofern dieselben als mathematische Gröfsen betrachtet werden.

So ist, weil, wenn x und y zwei gleichartige Gröfsen und k, k' irgend abstracte Zahlen bedeuten (§. 10, 11, 12),

$$kx + ky = k(x + y), \quad kx : ky = x : y, \quad \text{und } kx + k'x = (k + k')x,$$

ENSV Teaduste Akadeemia
Tartu Astronoomia Observatoorium
No

ebenfalls auch $k[a:b] + k[c:d] = k([a:b] + [c:d])$

$k[a:b] : k[c:d] = [a:b] : [c:d]$

und $k[a:b] + \acute{k}[a:b] = (k+\acute{k})\,[a:b]$.

§. 26. **Potenz** nennt man jede Zahl, insofern ihr Verhältnifs zur Einheit in quantitativer Beziehung zu dem geraden oder umgekehrten Verhältnisse einer andern Zahl zur Einheit gedacht wird. Wenn daher $[X:1] : [x:1] = k:1$, so ist X eine Potenz von x. Die Zahl x wird die Wurzel, und k der Exponent der Potenz genannt. Man drückt diefs durch $X = x^k$ aus. So ist z. B., weil $[1024:1] = 5\,[4:1]$ und $[4096:1] = 6\,[4:1]$, $[1024:1] = \frac{5}{6}\,[4096:1]$ und $[4096:1] = \frac{6}{5}\,[1024:1]$, folglich $1024 = 4096^{\frac{5}{6}}$ und $4096 = 1024^{\frac{6}{5}}$. Im erstern Falle wird 1024 als die Potenz von 4096 betrachtet, deren Exponent $= \frac{5}{6}$, im letztern hingegen ist 4096 die Potenz und 1024 die Wurzel.

Ist $[X:1] : [1:x] = k:1$, so ist auch dann noch X eine Potenz von x. Da aber $[X:1]$ nicht durch das gerade Verhältnifs $[x:1]$, sondern durch das umgekehrte oder entgegengesetzte Verhältnifs $[1:x]$ gemessen wird, so drückt man diefs durch $X = x^{-k}$ aus. Es wird demnach $\frac{1}{4096} = 1024^{-\frac{6}{5}}$ sein, weil das Verhältnifs $\left[\frac{1}{4096} : 1\right] = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{1024} : 1\right] = \frac{6}{5}\,[1:1024] = -\frac{6}{5}\,[1024:1]$.

Man bezeichnet die Potenzen $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, etc. gewöhnlich durch $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, etc.; sie heifsen alsdann Quadratwurzel, Kubikwurzel, Biquadratwurzel, Wurzel der 5ten, der 6ten etc. Potenz. Eben so wird auch wohl $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{3}{4}}$ etc. durch $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, etc. bezeichnet.

Wie schwierig und mühsam es ist, aus der Potenz $X = x^k$ und der Wurzel x den Exponenten k, der im allgemeinen eine Irrational-Zahl ist, mit einiger Genauigkeit zu finden, haben wir an dem (§. 24.) berechneten Beispiele $10 = 5^k$ gesehen, wo $k = 0{,}69897000433596\ldots$ bis auf die letzte Ziffer genau gefunden wurde. Es werden sich in der Folge Mittel darbieten, diese Arbeit ungemein zu erleichtern.

§. 27. **Das Product zweier Potenzen von gleichen Wurzeln, ist**

gleich einer Potenz derselben Wurzel, deren Exponent die Summe der Exponenten der beiden Factoren ist.

Est ist nämlich (§. 20.) $[a^x . a^y : 1] = [a^x : 1] + [a^y : 1] = x\,[a:1] + y\,[a:1]$ (§. 25.) $= (x+y)\,[a:1]$ oder $[a^x . a^y : 1] : [a:1] = x+y:1$. Folglich $a^x . a^y = a^{x+y}$.

Eben so läfst sich zeigen, dafs $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, **oder dafs der Quotient zweier Potenzen derselben Wurzel gleich ist einer Potenz derselben Wurzel, deren Exponent der Unterschied des Exponenten des Dividendus und des Divisors ist.**

Es ist nämlich (§. 23.) $\left[\frac{a^x}{a^y} : 1\right] = [a^x : 1] - [a^y : 1] = x\,[a:1] - y\,[a:1]$ $= (x-y)\,[a:1] = [a^{x-y} : 1]$, folglich $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. Dieser Satz gilt für alle mögliche Zahlwerthe von x und y, y mag kleiner oder gröfser sein als x. Dehnt man ihn nun auf den Fall, dafs $x = y$, aus, so ergiebt sich, dafs $\frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0 = 1$.

Dieser Ausdruck rechtfertigt sich aber auch dadurch, dafs, weil in $[a^x : 1] : [a:1] = x:1$, $x = o$ gesetzt, $[a^o : 1] : [a:1] = o:1$ ist, und demnach das Verhältnifs $[a^o : 1]$ als mathematische Gröfse behandelt, wie o zu betrachten, und diefs Verhältnifs, wie wir (§. 22.) gesehen haben, mit $[1:1]$ identisch ist, $[a^o : 1] = [1:1]$, und folglich $a^o = 1$ sein mufs.

§. 28. **Das Product zweier Potenzen, deren Exponenten gleich, ihre Wurzeln aber verschieden sind, ist der Potenz des Products der beiden Wurzeln mit demselben Exponenten gleich.**

Es ist nämlich $[a^x b^x : 1] = [a^x : 1] + [b^x : 1] = x\,[a:1] + x\,[b:1] = x\,([a:1] + [b:1]) = x\,[ab:1] = [(ab)^x : 1]$. Folglich $a^x b^x = (ab)^x$.

Was von dem Producte zweier Potenzen bewiesen ist, gilt auch von einem Producte aus mehreren Potenzen.

Weil nämlich $a^x b^x = (ab)^x$, so ist auch $a^x b^x c^x = (ab)^x c^x = (abc)^x$, eben so $a^x b^x c^x d^x = (abc)^x d^x = (abcd)^x$, etc.

§. 29. Auf ähnliche Weise zeigt man auch, dafs $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Es ist nämlich (§. 23.) $\left[\frac{a^x}{b^x} : 1\right] = [a^x : 1] - [b^x : 1] = x\,[a : 1] - x\,[b : 1] = x\,([a : 1] - [b : 1]) = x\left[\frac{a}{b} : 1\right] = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x : 1\right]$. Demnach $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Weil $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$, so ist auch $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m}$ und $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$.

§. 30. Die Potenz einer Zahl wiederum zu einer Potenz erhoben, ist der Potenz derselben Zahl gleich, deren Exponent aus dem Producte der beiden Exponenten besteht, oder $(a^x)^y = a^{xy}$.

Es ist nämlich $[(a^x)^y : 1] = y\,[a^x : 1]$ aber $[a^x : 1] = x\,[a : 1]$. Daher $[(a^x)^y : 1] : [a^x : 1] = y : 1$, $[a^x : 1] : [a : 1] = x : 1$, also $[(a^x)^y : 1] : [a : 1] = xy : 1$ oder $[(a^x)^y : 1] = xy\,[a : 1]$, und folglich $(a^x)^y = a^{xy}$.

Dafs der Beweis dieses Satzes für alle Werthe von x, y gilt, sie mögen positive oder negative, ganze oder gebrochne, rationale oder irrationale Zahlen sein, bedarf wohl keiner Erinnerung. So ist z. B. $(a^{\frac{3}{4}})^5 = a^{\frac{15}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}$; $\sqrt[5]{a^{\frac{3}{4}}} = (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{20}} = \sqrt[\infty]{a^3}$; $\sqrt[3]{(a^{-\frac{3}{4}})^7} = (a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{7}{3}} = a^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$.

§. 31. Bedient man sich, um Verhältnisse zu messen, eines gemeinschaftlichen Grundverhältnisses, oder betrachtet man jede positive Zahl als eine Potenz einer und derselben Wurzel oder Grundzahl, so wird der Exponent dieser Potenz der Logarithme der dazu gehörigen Zahl, und die gemeinschaftliche Grundzahl die logarithmische Basis genannt. Bedeutet z. B. y jede beliebige positive, rationale oder irrationale Zahl, a irgend eine bestimmte Zahl, und wäre $y = a^x$, so würde x der Logarithme von y und a die logarithmische Basis sein. Man drückt diefs durch

$\log y = x$ aus. Um, wenn es nöthig wäre, anzudeuten, dafs a die logarithmische Basis, könnte man auch so schreiben, $\overset{a}{\log}\, y = x$.

Weil wegen der (§. 27, 30.) bewiesenen Sätze $a^x a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; so ist, wenn $a^x = u$, $a^y = v$ und a die Basis des logarithmischen Systems bedeutet, $\log uv = \log u + \log v$; $\log \frac{u}{v} = \log u - \log v$, und $\log u^y = y \log u$. Die Multiplication der Zahlen läfst sich also vermittelst der Logarithmen auf Addition, die Division auf Subtraction, und die Elevation und Extraction auf Multiplication und Division zurück führen. Man begreift also, wie äusserst nützlich eine für irgend eine Basis berechnete Logarithmentafel zur Erleichterung der Rechnung sein mufs. Man hat zu dieser Basis die Zahl 10 gewählt, die wegen des dekadischen Zahlensystems, wovon wir Gebrauch machen, die bequemste ist. Die Logarithmen nach dieser Basis berechnet, heifsen die Briggischen Logarithmen, weil Henry Briggs, ein englischer Mathematiker sie zuerst berechnet und im Jahre 1618 bekannt gemacht hat. Aufserdem kommen auch noch die sogenannten natürlichen Logarithmen vor, von denen erst späterhin wird gehandelt werden. Vorläufig wollen wir nur bemerken, dafs die Basis derselben eine Irrationalzahl ist, uud durch die Berechnung des Ausdrucks $(1 + \frac{1}{n})^n$ bis auf die m te Decimalstelle genau gefunden wird, wenn man für n eine Zahl gröfser als 10^m setzt. Sie ist der Näherungswerth der unendlichen Reihe $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.} = 2{,}718281828459045\ldots\ldots$

§. 32. Jede positive Zahl läfst sich durch Division oder Multiplication mit einer Potenz von 10, deren Exponent eine ganze Zahl ist, auf eine Zahl zurückführen, welche kleiner als 10, aber nicht kleiner als 1 ist, so dafs sie unter einer der beiden Formen $10^n . z$ oder $\frac{z}{10^n}$, wo n eine positive ganze Zahl, und z irgend eine Zahl < 10 aber nicht < 1, begriffen ist. Daraus folgt, weil $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$, dafs, wenn $\log z = \zeta$, ζ eine positive Zahl < 1 ist. Es läfst sich also der Logarithme jeder Zahl unter der Form $n + \zeta$ oder $-n + \zeta$ darstellen, wo n irgend eine positive ganze

Zahl auch 0, und ζ eine positive Zahl < 1, bedeutet. Die ganze Zahl $+n$ oder $-n$ wird die Charakteristik, und die Zahl ζ durch einen Decimalbruch ausgedrückt, die Mantisse des Logarithmen genannt. Ist die Charakteristik des Logarithmen einer Zahl $+n$, so ist die dazu gehörige Zahl $> 10^n$ und $< 10^{n+1}$; ist sie hingegen $-n$ so ist sie $> 10^{-n}$ und $< 10^{-n+1}$ oder $> \frac{1}{10^n}$ und $< \frac{1}{10^{n-1}}$.

§. 33. Da der Logarithme einer Zahl, der (§. 31.) gegebenen Erklärung zufolge der Exponent der quantitativen Beziehung des Verhältnisses dieser Zahl zur Einheit zu dem Verhältnifs der logarithmischen Basis zur Einheit ist, so könnte man zur Berechnung desselben sich des (§. 24.) gelehrten Verfahrens bedienen. So hat man dort, wenn $[5:1] = k\,[10:1]$, $k = 0{,}69897000433596$ gefunden, welches, weil $5 = 10^k$, der briggische Logarithme von 5 ist. Daraus ergiebt sich der Logarithme für 50, 500, 5000, etc. oder für 0,5; 0,05; 0,005 etc., wenn man mit Beibehaltung der Mantisse von log 5, die Charakteristik 0 in 1, 2, 3, etc. oder in -1, -2, -3 etc. verwandelt.

§. 34. Wenn $c = \sqrt{ab}$, so ist $\log c = \frac{\log a + \log b}{2}$ oder der Logarithmus des geometrischen Mittels zweier Zahlen, ist gleich dem arithmetischen Mittel der Logarithmen derselben. Dieser Satz giebt ebenfalls ein Mittel an die Hand den Logarithmen jeder beliebigen Zahl durch Näherung zu finden. Es sei die Zahl, deren Logarithmen man sucht, gröfser als die Einheit, so wird sie zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der geometrischen Reihe 1, 10, 100, 1000, etc. deren Logarithmen 0, 1, 2, 3, etc. gegeben sind, liegen. Gesetzt, die Zahl läge zwischen 1 und 10 und sei 5, so ist das geometrische Mittel derselben $= \sqrt{10} = 3{,}162277\ldots$ und der Logarithme dieser Zahl $= 0{,}50000000$. Jetzt liegt die Zahl 5 zwischen 3,162277 und 10, deren Logarithmen bekannt sind. Das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen oder $\sqrt{31{,}62277}$ ist $= 5{,}623413$, dessen Logarithme $\frac{1 + 0{,}5}{2} = 0{,}75$. Nunmehr ist 5 schon in die engern Grenzen 3,162277 und 5,623413, deren Logarithmen bekannt sind, eingeschlossen. Auf diese Weise kann man, wenn man von den letzten beiden Zahlen wiederum das geometrische Mittel sucht, die Zahl

5 nach und nach in engere und engere Grenzen einschliefsen, so dafs das zuletzt gefundene geometrische Mittel um weniger als die Einheit der sechsten Stelle von der 5 abweicht, wie dies aus beikommender Tabelle, die ich aus Eulers Einl. in die Analysis des Unendl. §. 105. genommen habe, zu ersehen ist.

	Logarithmen.		Logarithmen.
A = 10,000000	1,0000000	$\sqrt{KM} = N = 4{,}997242$	0,6987304
B = 1,000000	0,0000000	$\sqrt{KN} = O = 5{,}000052$	0,6989745
$\sqrt{AB} = C = 3{,}162277$	0,5000000	$\sqrt{ON} = P = 4{,}998647$	0,6988525
$\sqrt{AC} = D = 5{,}623413$	0,7500000	$\sqrt{OP} = Q = 4{,}999350$	0,6989135
$\sqrt{CD} = E = 4{,}216964$	0,6250000	$\sqrt{OQ} = R = 4{,}999701$	0,6989440
$\sqrt{DE} = F = 4{,}869674$	0,6875000	$\sqrt{OR} = S = 4{,}999876$	0,6989592
$\sqrt{DF} = G = 5{,}252991$	0,7187500	$\sqrt{OS} = T = 4{,}999963$	0,6989668
$\sqrt{FG} = H = 5{,}048065$	0,7031250	$\sqrt{OT} = V = 5{,}000008$	0,6989707
$\sqrt{FH} = I = 4{,}958069$	0,6953125	$\sqrt{TV} = W = 4{,}999984$	0,0989687
$\sqrt{HI} = K = 5{,}002865$	0,6992187	$\sqrt{VW} = X = 4{,}999997$	0,6989697
$\sqrt{IK} = L = 4{,}980416$	0,6972656	$\sqrt{VX} = Y = 5{,}000003$	0,6989702
$\sqrt{KL} = M = 4{,}991627$	0,6982421	$\sqrt{XY} = Z = 5{,}000000$	0,6989700

Auf die Weise erhält man, indem man immer von den nächsten beiden Grenzen der Zahl 5 das geometrische Mittel sucht, endlich $Z = 5{,}000000$. Es ist also der gesuchte briggische Logarithme von $5 = 0{,}68989700$. Auf diesem und ähnlichen äusserst mühsamen Wegen sind die ersten logarithmischen Tabellen von Briggs und Vlacq berechnet worden.

§. 35. Man kann die Arbeit bedeutend erleichtern, wenn man sich folgender Tabelle, welche die Zahlen 10, $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, etc., die wir Kürze halber durch x, x_1, x_2, x_3, etc. bezeichnet haben, nebst ihren Logarithmen enthält, bedienen will.

	Logarithmen.		Logarithmen.
$x = 10,00000\ 00000$	1,00000 00000 0	$x_{17} = 1,00001\ 75675$	0,00000 76293 9
$x_1 = 3,16227\ 76602$	0,50000 00000 0	$x_{18} = 1,00000\ 87837$	0,00000 38146 9
$x_2 = 1,77827\ 94100$	0,25000 00000 0	$x_{19} = 1,00000\ 43918$	0,00000 19073 4
$x_3 = 1,33352\ 14322$	0,12500 00000 0	$x_{20} = 1,00000\ 21959$	0,00000 09536 7
$x_4 = 1,15478\ 19847$	0,06250 00000 0	$x_{21} = 1,00000\ 10979$	0,00000 04768 3
$x_5 = 1,07460\ 78283$	0,03125 00000 0	$x_{22} = 1,00000\ 05490$	0,00000 02384 1
$x_6 = 1,03663\ 29284$	0,01562 50000 0	$x_{23} = 1,00000\ 02745$	0,00000 01192 0
$x_7 = 1,01815\ 17217$	0,00781 25000 0	$x_{24} = 1,00000\ 01372$	0,00000 00596 0
$x_8 = 1,00903\ 50448$	0,00390 62500 0	$x_{25} = 1,00000\ 00686$	0,00000 00298 0
$x_9 = 1,00450\ 73643$	0,00195 31250 0	$x_{26} = 1,00000\ 00343$	0,00000 00149 0
$x_{10} = 1,00225\ 11483$	0,00097 65625 0	$x_{27} = 1,00000\ 00171$	0,00000 00074 5
$x_{11} = 1,00112\ 49414$	0,00048 82812 5	$x_{28} = 1,00000\ 00085$	0,00000 00037 2
$x_{12} = 1,00056\ 23126$	0,00024 41406 2	$x_{29} = 1,00000\ 00042$	0,00000 00018 6
$x_{13} = 1,00028\ 11168$	0,00012 20703 1	$x_{30} = 1,00000\ 00021$	0,00000 00009 3
$x_{14} = 1,00014\ 05485$	0,00006 10351 5	$x_{31} = 1,00000\ 00010$	0,00000 00004 6
$x_{15} = 1,00007\ 02718$	0,00003 05175 7	$x_{32} = 1,00000\ 00005$	0,00000 00002 3
$x_{16} = 1,00003\ 51353$	0,00001 52587 8	$x_{33} = 1,00000\ 00002$	0,00000 00001 2

Vermittelst dieser Tabelle läfst sich nun gar leicht der Briggische Logarithme jeder Zahl, die kleiner als 10 und gröfser als 1 ist, bis auf die 10te Decimalstelle genau, finden. Eine solche Zahl liegt nämlich, wenn sie nicht eine der Zahlen x, x_1, x_2, x_3, etc. selbst ist, zwischen zwei nächstaufeinanderfolgenden derselben. Dividirt man sie nun durch die nächst kleinere, so erhält man einen Quotienten, der kleiner ist als der Divisor. Diesen Quotienten wieder durch die nächst kleinere Zahl der obigen Reihe dividirt, die ebenfalls kleiner ist als der letzte Divisor, und diese Operation gehörig fortgesetzt, wird man zuletzt auf eine Zahl, kleiner als 1,0000000001 kommen, so dafs das Product aller gebrauchten Divisoren der Zahl, deren Logarithmen man sucht, gleich sein wird. Die Logarithmen dieser Factoren, aus der obigen Tabelle genommen und addirt, erhält man den gesuchten Logarithmen. Ist die Zahl, deren Logarithmen man sucht, > 10 oder < 1, so kann man sie im erstern Falle durch die Division, im letztern durch die Multiplication mit einer positiven ganzen Potenz von 10 auf eine solche zurückführen, die < 10 und > 1 ist.

§. 36. Um von dem Gebrauche der obigen Tabelle ein Beispiel zu geben, folgt hier die Übersicht der Berechnung des Logarithmen der Zahl 5.

Dividenden.	Divisoren.	Logarithmen.
5,00000 00000	3,166217 76602	0,50000 00000 0
1,58113 88301	1,33352 14322	0,12500 00000 0
1,18568 68530	1,15478 19847	0,06250 00000 0
1,02672 51430	1,01815 17217	0,00781 25000 0
1,00845 57278	1,00450 73643	0,00195 31250 0
1,00393 21902	1,00225 11483	0,00097 65625 0
1,00167 72662	1,00112 49414	0,00048 82812 5
1,00055 17037	1,00028 11168	0,00012 20703 1
1,00027 05109	1,00014 05485	0,00006 10351 5
1,00012 99441	1,00007 02718	0,00003 05175 7
1,00005 96682	1,00003 51353	0,00001 52587 8
1,00002 45315	1,00001 75675	0,00000 76293 9
1,00000 69639	1,00000 43918	0,00000 19073 5
1,00000 25721	1,00000 21959	0,00000 09536 7
1,00000 03762	1,00000 02745	0,00000 01192 1
1,00000 01017	1,00000 00686	0,00000 00298 0
1,00000 00331	1,00000 00171	0,00000 00074 5
1,00000 00160	1,00000 00085	0,00000 00037 2
1,00000 00075	1,00000 00042	0,00000 00018 6
1,00000 00033	1,00000 00021	0,00000 00009 3
1,00000 00012	1,00000 00010	0,00000 00004 6
1,00000 00002	1,00000 00002	0,00000 00001 2
		0,69897 00045 2

§. 37. Weil $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$ und $10 \log 5 = 10 - 10 \log 2 = 10$

$-\log 2^{10} = 10 - \log 1024 = 10 - \log. 1{,}024 \times 1000 = 7 - \log 1{,}024$, und folglich $\log 5 = \frac{1}{10}(7 - \log 1{,}024)$ so kann man, um log 5 zu erhalten zuvor log 1,024 berechnen und daraus log 5 herleiten, wodurch man schon drei Divisionen erspart. Zugleich bemerkt man aber gar leicht, dafs in der mitgetheilten Tabelle die Mantissen aller Wurzeln von $x_{18} = 1{,}0000087837$ an, deren Logarithme $= 0{,}00000381469$, den dazu gehörigen Logarithmen proportional sind, so dafs der Exponent des Verhältnisses eines Logarithmen zu der dazu gehörigen Zahl, wenn dieselbe $< 1{,}00001$ bis auf die Einheit in der 10ten Stelle immer der elbe, nämlich $= \frac{381469}{87837} = 0{,}43429$ ist. Es ist also $\log(1+\omega)$, wenn $1+\omega < 1{,}00001$ bis auf die 10te Decimalstelle $= \omega . 0{,}43429$. Diese Bemerkungen benutzend kann man log 5 auf folgende Art berechnen.

Divid. u. Quot.	Divisoren.	Logarithmen.
1,024	1,01815 17217	0,00781 25000 0
1,00574 40146	1,00450 73643	0,00195 31250 0
1,00123 11013	1,00112 49414	0,00048 82812 5
1,00010 60407	1,00007 02718	0,00003 05175 7
1,00003 57662	1,00003 51353	0,00001 52587 8
1,00000 06309	1,00000 06309	0,00000 02740 0
	Folglich log 1,024 =	0,01029 99566 0

Also $\log 5 = \frac{1}{10}(7 - \log 1{,}024) = \frac{1}{10} . 6{,}98970004340 = 0{,}69897000434$ wie oben. Der log. von $1{,}0000006309 = 0{,}00000827416$ ist hier unmittelbar durch die Multiplication des Decimalbruchs 0,0000006309 mit 0,43429 gefunden worden.

§. 38. So wie $\log(1+\omega)$, wenn $\omega < 0{,}00001$, bis auf die 10te Decimalstelle genau $= \omega \times 0{,}43429$ ist, so wird überhaupt, wenn $\omega < 10^{-n}$, $\log(1+\omega)$ bis auf die 2nte Decimalstelle genau $= M\omega$ sein, wo M einen Decimalbruch bedeutet, dessen erste fünf Ziffern 0,43429 sind. Man findet diese Zahl überhaupt bis auf n Decimalen genau, wenn man die Quadratwurzeln auf 2n Decimalstellen berechnet, und die Extraction so lange fortsetzt bis hinter dem Komma n Nullen kommen. So hat Briggs durch 60 nacheinanderfolgende Quadratwurzel-Extractionen der Zahl 10 gefunden, dafs $\sqrt[2^{60}]{10} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ 03251$, deren Logarithme $= \frac{1}{2^{60}}$.

Es ist aber $\frac{1}{2^{60}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 83617\ 37988\ 40354$, und folglich

$$M = \frac{86\ 73617\ 37988\ 40354}{199\ 71742\ 08125\ 50527{,}03215} = 0{,}434294481903251828.$$

Hätte man statt 10 eine andere Zahl e zur logarithmischen Basis angenommen, so würde man auch für M eine andere Zahl und zwar eine gröfsere oder kleinere gefunden haben, je nachdem e < oder > 10. Die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen, deren wir (§. 28.) erwähnt haben, oder die Zahl $e = 2{,}718281828\ldots$ würde auf die Zahl $M = 1{,}00000000\ldots$ geführt haben.

§. 39. Auch vermittelst des folgenden Kubikwurzeltäfelchen läfst sich der Logarithme jeder Zahl < 10 und > 1, ohne grofse Weitläuftigkeit berechnen. Es sind hier die Zahlen 10, $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{1}{9}}$, $10^{\frac{1}{27}}$, etc. Kürze halber durch y, y_1, y_2, y_3, y_4, etc. bezeichnet.

	Logarithmen.
$y = 10{,}00000\ 00000\ 0$	1,00000 00000 0
$y_1 = 2{,}15443\ 46900\ 3$	0,33333 33333 3
$y_2 = 1{,}29154\ 96650\ 1$	0,11111 11111 1
$y_3 = 1{,}08902\ 29622\ 6$	0,03703 70370 4
$y_4 = 1{,}02883\ 48789\ 2$	0,01234 56790 1
$y_5 = 1{,}00952\ 06950\ 1$	0,00411 52263 4
$y_6 = 1{,}00316\ 35464\ 2$	0,00137 17421 1
$y_7 = 1{,}00105\ 34054\ 3$	0,00045 72473 7
$y_8 = 1{,}00035\ 10119\ 2$	0,00015 24157 9
$y_9 = 1{,}00011\ 69902\ 9$	0,00005 08052 6
$y_{10} = 1{,}00003\ 89952\ 4$	0,00001 69350 9
$y_{11} = 1{,}00001\ 29982\ 5$	0,00000 56450 3
$y_{12} = 1{,}00000\ 43327\ 3$	0,00000 18816 8
$y_{13} = 1{,}00000\ 14442\ 4$	0,00000 06272 3

§. 40. Um ein Beispiel von der Anwendung dieses Täfelchens zu geben, folgt hier die Uebersicht der Berechnung des bereits bekannten log 5.

$$[5{,}00000\ 000000 : 1] = [y : 1] - [2{,}00000\ 000000 : 1]$$
$$[2{,}00000\ 000000 : 1] = [y_1 : 1] - [1{,}07721\ 734501 : 1]$$
$$[1{,}07721\ 734501 : 1] = [y_3 : 1] - [1{,}01095\ 936425 : 1]$$
$$[1{,}01095\ 936425 : 1] = [y_5 : 1] + [1{,}00142\ 510131 : 1]$$
$$[1{,}00142\ 510131 : 1] = [y_7 : 1] + [1{,}00037\ 130474 : 1]$$
$$[1{,}00073\ 130474 : 1] = [y_8 : 1] + [1{,}00002\ 028570 : 1]$$
$$[1{,}00002\ 028570 : 1] = [y_{11} : 1] + [1{,}00000\ 728738 : 1]$$

Daraus folgt: $[5 : 1] = [y : 1] - [y_1 : 1] + [y_3 : 1] - [y_5 : 1] - [y_7 : 1] - [y_8 : 1] - [y_{11} : 1] - [1{,}00000\ 72836 : 1]$,

und daher ist $5 = \dfrac{y\ y_3}{y_1\ y_5\ y_7\ y_8\ y_{11} \cdot 1{,}00000\ 728738}$.

Weil $\log 1{,}00000\ 072838 = 0{,}00000\ 072838 \times 0{,}434294$

$= 0{,}00000\ 316487$

$\log y_1$	$= 0{,}33333\ 333333$	$\log y$	$= 1{,}00000\ 000000$
$\log y_5$	$= 0{,}00411\ 522634$	$\log y_3$	$= 1{,}03703\ 703704$
$\log y_7$	$= 0{,}00045\ 724737$		$1{,}03703\ 703704$
$\log y_8$	$= 0{,}00015\ 241579$	Davon subtr.	$0{,}33806\ 703273$
$\log y_{11}$	$= 0{,}00000\ 564503$	so ist $\log 5$	$= 0{,}69897\ 000431$
	$0{,}33806\ 703273$		

Zweites Beispiel. Es sei log. 1,0077696 zu berechnen.

$$[1{,}00776\ 960000 : 1] = [y_5 : 1] - [1{,}00173\ 759462 : 1]$$
$$[1{,}00173\ 759462 : 1] = [y_7 : 1] + [1{,}00068\ 346923 : 1]$$
$$[1{,}00068\ 346923 : 1] = [y_8 : 1] + [1{,}00033\ 234066 : 1]$$
$$[1{,}00033\ 234066 : 1] = [y_8 : 1] - [1{,}00001\ 866506 : 1]$$
$$[1{,}00001\ 866506 : 1] = [y_{11} : 1] + [1{,}00000\ 566674 : 1]$$
$$[1{,}00000\ 566674 : 1] = [y_{12} : 1] + [1{,}00000\ 133401 : 1]$$

Demnach $1{,}0077696 = \dfrac{y_5\ y_{11}\ y_{12} \cdot 1{,}00000\ 133401}{y_7\ y_8\ y_8}$

$\log y_5$	$= 0{,}00411\ 522634$	$\log y_7$	$= 0{,}00045\ 724737$
$\log y_{11}$	$= 0{,}00000\ 564503$	$2 \log y_8$	$= 0{,}00030\ 483158$
$\log y_{12}$	$= 0{,}00000\ 188168$		$0{,}00076\ 207895$
$\log 1{,}00000\ 133401$	$= 0{,}00000\ 043429$		$0{,}00412\ 333240$
	13029	Also	$0{,}00336\ 125345$
	1303		$= \log 1{,}0077696$
	174		
	$0{,}00412\ 333240$		

Weil $1007796 = 6^9$ also $1{,}0077696 = \dfrac{6^9}{10^6}$, so ist $9 \log 6 = 6 + \log 1{,}0077696$ und

$\log 6 = \dfrac{6{,}00336125345}{9} = 0{,}77815125037$.

§. 41. Oft kann auch der vereinigte Gebrauch der beiden Wurzeltäfelchen zur Abkürzung der Berechnung beitragen. So findet man z. B. $\log\left(1 + \frac{1}{2400}\right) = \log 1{,}00041\ 66666$ auf folgende Weise:

$$[1{,}00041\ 66666 : 1] = [y_8 : 1] + [1{,}00006\ 56317 : 1]$$
$$[1{,}00006\ 56317 : 1] = [x_{15} : 1] - [1{,}00000\ 46398 : 1]$$

Also $\log\left(1 + \frac{1}{2400}\right) = \log y_8 + \log x_{15} - \log 1{,}00000\ 46398$

$=$	$0{,}00015\ 241579$	$-$	$0{,}00000\ 173718$
$+$	$0{,}00003\ 051757$		26058
	$0{,}00018\ 293336$		1303
$+$	$0{,}00000\ 201506$		391
$=$	$0{,}00018\ 091830$		36
			$0{,}00000\ 201506$

Weil $7^4 = 2401 = 2400\left(1 + \frac{1}{2400}\right)$, also $4 \log 7 = 2 + 3 \log 2 + \log 3 +$

$\log (1 + \frac{1}{2400})$, so erhält man daraus, wenn man die bereits gefundenen Logarithmen von 2 und 3 substituirt, $\log 7 = 0{,}8450980400$.

Weil $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ und $x^2 = (x^2 - 1)\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)$ so hat man $\log x = \frac{1}{2}\left[\log (x - 1) + \log (x + 1) + \log \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\right]$. Diese Formel läfst sich mit Nutzen auf die Berechnung einer Primzahl x anwenden, wenn die Logarithmen aller Primzahlen von 2 an bis auf x exclus. schon berechnet sind. Betrachten wir z. B. die Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, die wir in den vorigen §. gefunden haben, als bekannt, so brauchen wir nur, um $\log 11$ zu haben, weil $\log 11 = \frac{1}{2}\left[\log 10 + \log 12 + \log (1 + \frac{1}{120})\right]$, noch $\log (1 + \frac{1}{120}) = \log 1{,}00833\ 33333$ zu berechnen. Läfst sich eine Zahl m, die nicht $> x$ ist, finden, die so beschaffen ist, dafs $mx + 1$ und $mx - 1$, nur aus Primzahlen $< x$ zusammengesetzt sind, so wird die Arbeit noch leichter. So ist z. B. für die Primzahl 11 die Zahl 9 von dieser Beschaffenheit, denn $99 - 1 = 98 = 2.7^3$ und $99 + 1 = 100$.

Also $\log 99 = \frac{1}{2}\left[\log 98 + 2 + \log (1 + \frac{1}{9860})\right]$, und $\log 11 = \frac{1}{2}$ [log 98 + 2 + log 1,00010 20408] — log 3.

Eben so ist $\log 13 = \frac{1}{2}\left[\log 64 + \log 66 + \log (1 + \frac{1}{4224})\right] - \log 5$

- - - $\log 17 = \frac{1}{2}\left[\log 50 + \log 52 + \log (1 + \frac{1}{2600})\right] - \log 3$

- - - $\log 19 = \frac{1}{2}\left[\log 208 + \log 210 + \log (1 + \frac{1}{43680})\right] - \log 11$.

Die Gleichung $2 \log x = \log (x - 1) + \log (x + 1) + \log \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)$ läfst sich auch so darstellen,

$$\log (x + 1) = 2 \log x - \log (x - 1) - \log \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right).$$

Unter dieser Form kann sie dazu dienen, aus den Logarithmen zweier nächst aufeinanderfolgender ganzen Zahlen, den Logarithmen der darauf folgenden dritten Zahl zu finden. So erhält man z. B.

$$\log 101 = 2 \log 100 - \log 99 - \log (1 + \frac{1}{9900})$$
$$= 4 - 2 \log 3 - \log 11 - \log 1{,}00010\ 10101.$$

Auf die Weise lassen sich die Logarithmen der Zahlen 1,01; 1,02; 1,03 .... 1,09, und eben so von $1{,}001 = \frac{7.11.13}{1000}$, 1,002; 1,003; .... etc. ohne gar grofse Mühe auf eine elementarische Weise, vermittelst unserer beiden (§. 35, 39.) mitgetheilten Wurzeltäfelchen berechnen.

§. 42. Das in den vorhergehenden §§. Vorgetragene ist hinreichend um die Möglichkeit der Berechnung der hier folgenden kleinen logarithmischen Tabelle zu begreifen, vermittelst welcher die Briggischen Logarithmen von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und aller unter der Form $1 + x.10^{-n}$ begriffenen Zahlen, wo x eine der neun Ziffern, 1, 2, ... 9 und n alle Zahlen von $n = 1$ bis $n = 6$ bedeuten, bis auf eine halbe Einheit der 10te Decimalstelle genau, gegeben sind. Für jede andere Zahl $< 1{,}009001$ läfst sich, wie wir oben (§. 37.) gesehen haben, der briggische Logarithme bis auf die zehnte Decimalstelle finden, indem man den Ueberschufs dieser Zahl über 1 mit 0,43429 multiplicirt. Man kann zu diesem Zwecke die letzte Columne der Tabelle als Multiplications-Täfelchen gebrauchen. Der über der letzte Decimalstelle der Logarithmen befindliche Punct zeigt an, dafs der Logarithme zu grofs ist; die übrigen sind zu klein, doch ist die Abweichung von dem wahren Werthe immer kleiner als die Hälfte der Einheit der letzten Decimale.

x	x	1, x	1,0 x	1,00 x	1,000 x	1,0000 x	1,00000 x	
1	0,00000 00000	0,04139 26852	0,00432 13738	0,00043 40775	0,00004 34273	0,00000 43429	0,00000 04343	1
2	0,30102 99957	0,07918 12460	0,00860 01718	0,00086 77215	0,00008 68502	0,00000 86858	0,00000 08686	2
3	0,47712 12547	0,11394 33523	0,01283 72247	0,00130 09330	0,00013 02688	0,00001 30286	0,00000 13029	3
4	0,60205 99913	0,14612 80357	0,01703 33393	0,00173 37128	0,00017 36831	0,00001 73714	0,00000 17372	4
5	0,69897 00043	0,17609 12591	0,02118 92991	0,00216 60618	0,00021 70930	0,00002 17142	0,00000 21715	5
6	0,77815 12504	0,20411 99827	0,02530 58653	0,00259 79807	0,00026 04985	0,00002 60569	0,00000 26058	6
7	0,84509 80400	0,23044 89214	0,02938 37777	0,00302 94706	0,00030 38998	0,00003 03995	0,00000 30401	7
8	0,90308 99870	0,25527 25051	0,03342 37555	0,00346 05321	0,00034 72967	0,00003 47422	0,00000 34743	8
9	0,95424 25094	0,27875 36010	0,03742 64979	0,00389 11662	0,00039 06892	0,00003 90847	0,00000 39086	9

§. 43. Will man mit Hülfe dieser Tabelle den Logarithmen irgend einer Zahl suchen, so kann man sie zuvor durch Division oder Multiplication mit einer Potenz von 10 in eine Zahl N $<$ 10 und $>$ 1 verwandeln. Diese läfst sich nun durch aufeinanderfolgende Divisionen mit der in der Tabelle vorkommenden Zahlen auf eine Zahl $<$ 1,000001 zurückführen, so dafs die Zahl N als ein Product von Factoren, deren Logarithmen in der Tabelle gegeben sind, dargestellt werden kann.

§. 44. Man kann aber auch die Zahl N durh nacheinander folgende Multiplicationen mit Factoren, deren Logarithmen die Tabelle giebt, auf eine Zahl M $>$ 9,9999 und $<$ 10 bringen. Die Zahl N ist nämlich entweder $<$ oder $>$ 5; im ersten Falle bringt man sie durch eine der Zahlen 2, 3, 4....9 auf eine Zahl $>$ 5. Diese läfst sich nun, wenn sie nicht schon $>$ 9 ist, durch die Multiplication mit einem unter der Form $1+\frac{x}{10}$, wo x eine der neun reellen Ziffern bedeutet, enthaltenen Factor in eine solche verwandeln, die $>$ 9 nnd $<$ 10 ist. Ist sie auch $<$ 9,9, so multiplicire man sie durch $1+\frac{x}{100}$, wo x die Ergänzung der 1sten Decimalziffer zu 9 ist, alsdann wird man im Allgemeinen eine Zahl $>$ 9,9 aber $<$ 10 erhalten, wo nicht, so darf man nur x um 1 vermehren. Das Product multiplicire man wieder mit $1+\frac{x}{1000}$, wo x die Ergänzung seiner 2ten Decimalziffer, und man wird allgemein wieder ein Product $>$ 9,99 und $<$ 10 erhalten. Diefs multiplicire man abermals mit $1+\frac{x}{10000}$, oder, wenu es nöthig, mit $1+\frac{x+1}{10000}$, wo x die Ergänzung der 3ten Decimale ist. Diese Multiplication setze man so lange fort, bis man auf eine Zahl M $>$ 9,9999 kömmt. Diese multiplicire man mit einer Zahl $<$ 1,00001, deren Ziffern von der 6ten Stelle an, die resp. Ergänzungen zu 9 der nach den 5 Neunen folgenden Ziffern der Zahl M sind, so wird man das Product $=$ 9,9999999999 erhalten, so dafs die Zahl N als ein Quotient der Zahl 10 dividirt durch ein Product aus Factoren, deren Logarithmen in dem Logarithmen-Täfelchen gegeben sind, und deren Summe von 1 subtrahirt, der Logarithme von N ist, dargestellt werden kann.

§. 45. Als Beispiel der §. 43 gegebenen Methode wollen wir den Logarithmen der Zahl 2,71828182846 berechnen.

Dividenden.	Divisoren.	Logarithmen.
2,71828 182846	2	0,30102 99957
1,35914 091423	1,3	0,11394 33523
1,04549 301095	1,04	0,01703 33393
1,00528 174130	1,005	0,00216 60618
1,00028 033960	1,0002	0,00008 68502
1,00008 032354	1,00008	0,00003 47422
1,00000 032354	1,00000 032354	0,00000 01303
		87
		13
		2

Daraus log 2,71828 182846 $=$ 0,43429 44820

Dafs in der ersten Columne jeder Dividend der Quotient des nächstvorgehenden Dividends durch den beistehenden Divisor dividirt ist, bedarf wohl keiner Erinnerung.

§. 46. Um ein Beispiel von der Multiplications-Methode (§. 44.) zu geben, mag hier abermals der Logarithme von 2,718381828 gesucht werden.

Multiplicanden.	Multiplicatoren.	Logarithmen.
2,71828 1828	3	0,47712 12547
8,15484 5485	1,2	0,07918 12460
9,78581 4582	1,02	0,00860 01718
9,98153 0874	1,001	0,00043 40775
9,99151 2405	1,0008	0,00034 72967
9,99950 5614	1,00004	0,00001 73714
9,99990 5595	1,00000 94405	0,00000 39086
		1737
		174
		2
		0,56570 55180

Es ist also log 2,71828 1828 + 0,56570 55180 = log 10 = 1, und log 2,71828 1828 = 0,43429 44820.

§. 47. Will man vermittelst des obigen Täfelchens aus dem gegebenen Logarithmen die Zahl finden, so ziehe man von demselben den nächst kleinern Logarithmen der Tabelle ab, von dem Reste wiederum den nächst kleinern, bis man auf einen Rest < 0,00000 04343 kommt. Die zu diesem Reste gehörige Zahl, welche man erhält, wenn man zur Einheit den durch Division des Restes mit der Zahl 0,43429 erhaltenen Quotienten addirt, multiplicire man nach und nach mit den zu den abgezogenen Logarithmen aus der Tafel genommenen Zahlen, so wird das herauskommende Product die gesuchte Zahl sein.

Es sei z. B. der gegebene Logarithme 6,02294 28837, so erhält man durch folgende Rechnung die einzelnen Factoren.

Logarithmen.	Factoren.
0,02294 28837	
0,02118 92991	1,05
0,00175 35846	
0,00173 37128	1,004
0,00001 98718	
0,00001 73714	1,00004
0,00000 25004	
0,00000 25004	1,00000 57597
0,00000 00000	

Folglich die zu dem Logarithmen 0,02294 28337 gehörige Zahl = 1,00000 57597 × 1,00004 × 1,004 × 1,05 = 1,05424 82400 und 6,02294 28837 = log 1054248, 24.

Diese äusserst sinnreiche Methode aus einer Zahl den Logarithmen und umgekehrt aus dem Logarithmen die Zahl zu finden, lernte ich schon vor mehr als 20 Jahren aus einer kleinen deutschen Schrift kennen. Der Name des Verfassers ist mir leider entfallen. Eine solche Tabelle auf 16 Decimalen für briggische und natürliche

Logarithmen nebst der Anweisung zu ihrem Gebrauche, findet sich in Westphals Logarithmischen Tafeln, Königsberg 1821. In Klügels Mathem. Wörterbuche 3ter Theil 1808 wird dieser Methode nicht erwähnt.

§. 48. Hier folgen noch einige Exempel zur Uebung.

Exempel I. Den Logarithmen von 105424 82375 findet man auf folgende Art:

Multiplicanden.	Multiplicatoren.	Logarithmen.
1,05424 82375	9	0,95424 25094
9,48823 41375	1,05	0,02118 92991
9,96264 58444	1,003	0,00130 09330
9,99253 37819	1,0007	0,00030 38998
9,99952 85555	1,00004	0,00001 73714
9,99992 85366	1,000007	0,00000 30401
9,99999 85361	1,000000 014639	0,00900 00434
		174
		26
		2
		0,97705 71164

Also log 1,05424 82375 = 0,02294 28836
und log 105424 42375 = 10,02294 28836.

Für die Richtigkeit dieses Logarithmen kann man bis auf die 9te Decimalstelle bürgen. Die letzte bleibt immer unsicher.

Exempel II. Es sei der Logarithme der Zahl 100973 8504923 zu suchen.

Multiplicanden.	Multiplicatoren.	Logarithmen.
1,009738 504923	9	0,95424 25094
9,087646 544307	1,1	0,04139 26852
9,996411 198738	1,0003	0,00013 02688
9,999410 122098	1,00005	0,00002 17142
9,999910 092604	1,000009	0,00000 39086
10,000000 091794		0,99579 10862
		0,00420 89138
		35
		1
		0,00420 89174

Folglich log 100973 8504923 = 12,00420 89174.

Aus der Rechnung ergiebt sich nämlich, dafs 1,00973 8504923 × 9 × 1,1 × 1,0003 × 1,00005 × 1,000009 = 10,00000 0091794. Es ist aber log 10,00000 0091794 = 1,00000 00036. Davon die Summe der Logarithmen abgezogen und dazu 12 addirt erhält man den gesuchten Logarithmen.

Exempel III. Es werde die 5te Wurzel von 161900 oder $\sqrt[5]{161900}$ gesucht. Man berechne zuerst log 1,619, wie folgt:

Multiplicanden.	Multiplicatoren.	Logarithmen.
1,619	6	0,77815 12504
9,714	1,02	0,00860 01718
9,90828	1,009	0,00389 11662
9,99745 452	1,0002	0,00008 68502
9,99945 40109	1,00005	0,00002 17142
9,99995 39836	1,000004	0,00000 17372
9,99999 39834	1,00000 06017	0,00000 02606
		4
		3
		0,79075 31513

Also log 161900 = 5,20924 68487.

Demnach log $\sqrt[5]{161900}$ = 1,04184 93697

Davon subtrahirt log 11 = 1,04139 26852

0,00045 66845

log 1,001 = 0,00043 40775

0,00002 26070

log 1,00005 = 0,00002 17142

0,00000 08929

Diesen Rest durch 0,4329 dividirt und dazu 1 addirt, erhält man die dazu gehörige Zahl 1,00000 20557. Es ist also $\sqrt[5]{161900}$ = 1,00000 20557 × 1,00005 × 1,001 × 11 = 11,011573186.

§. 49. Das von §. 34. an über die Berechnung der Logarithmen Vorgetragene enthält das Wesentliche der Hülfsmittel, die den Mathematikern vor Entdeckung des binomischen Lehrsatzes in dieser Hinsicht bekannt waren oder bekannt sein konnte.

Vermittelst dieses Satzes läfst sich jede Potenz einer zweitheiligen Zahl x + y, der Exponent der Potenz mag eine positive oder negative, eine ganze oder gebrochne, eine rationale oder irrationale Zahl sein, durch eine endliche oder unendliche Reihe von Gliedern, die aus den Potenzen der einzelnen Gröfsen x, y zusammengesetzt sind, darstellen. Da dieser Satz gehörig benutzt, zugleich unmittelbar auf die Entwickelung der Logarithmen durch Reihen führt, wodurch die Berechnung derselben so ungemein erleichtert wird, so wird es wohl nicht unzweckmäfsig sein, denselben nebst seiner Anwendung auf die Logarithmen vorläufig schon hier beizubringen, den strengen Beweis davon aber, weil derselbe hier noch zu schwierig sein möchte, für eine spätere Vorlesung zu versparen.

§. 50. Man erhält durch einfache Multiplication

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$
$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$
$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^5 + y^7.$$

etc. etc.

Abstrahirt man von den Zahlencoeffienten, so bemerkt man sogleich, dafs jede dieser Reihen eine geometrische Reihe bildet, deren Gliederzahl um die Einheit gröfser ist als der Exponent der Potenz, und für welche das Verhältnifs jedes Gliedes zu dem nächstfolgenden = x : y ist.

§. 51. Bezeichnet man die dividirten Potenzen $\frac{x^2}{1.2}$, $\frac{x^3}{1.2.3}$, $\frac{x^4}{1.2.3.4}$, etc. durch x^2_c, x^3_c, x^4_c, etc., eben so durch y^2_c, y^3_c, etc. $(x+y)^2_c$, $(x+y)^3_c$, etc. die Gröfsen $\frac{y^2}{1.2}$, $\frac{y^3}{1.2.3}$, etc. $\frac{(x+y)^2}{1.2}$, $\frac{(x+y)^3}{1.2.3}$, etc., so erhält man aus den im vorigen §. gegebenen Ausdrücken für $(x+y)^2$, $(x+y)^3$, $(x+y)^4$, etc. folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x+y &= x + y\\
(x+y)_c^2 &= x_c^2 + xy + y_c^2\\
(x+y)_c^3 &= x_c^3 + x_c^2 y + x y_c^2 + y_c^3\\
(x+y)_c^4 &= x_c^4 + x_c^3 y + x_c^2 y_c^2 + x y_c^3 + y_c^4\\
(x+y)_c^5 &= x_c^5 + x_c^4 y + x_c^3 y_c^2 + x_c^2 y_c^3 + x y_c^4 + y_c^5\\
(x+y)_c^6 &= x_c^6 + x_c^5 y + x_c^4 y_c^2 + x_c^3 y_c^3 + x_c^2 y_c^4 + x y_c^5 + y_c^6
\end{aligned}
$$

etc. etc. etc.

Woraus sich auf die Allgemeinheit des Satzes schliefsen läfst, so dafs, wenn n eine positive ganze Zahl, $(x+y)_c^n = x_c^n + x_c^{n-1} y + x_c^{n-2} y_c^2 \ldots + x_c^2 y_c^{n-2} + x y_c^{n-1} + y_c^n$.

Multiplicirt man diese Gleichung durch $1.2.3.4\ldots.(n-1)n$, so verwandelt sich dieselbe, weil $(x+y)_c^n . 1.2.3.4\ldots.(n-1)n = (x+y)^n$

$$
\begin{aligned}
x_c^n .\ & 1.2.3.4\ldots.(n-1)n = \ldots\ldots\ldots x^n\\
x_c^{n-1} y .\ & 1.2.3.4\ldots.(n-1)n = \ldots\ldots\ldots n x^{n-1} y\\
x_c^{n-2} y_c^2 .\ & 1.2.3.4\ldots.(n-1)n = (n-1)n\, x^{n-2} y_c^2 = \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2\\
x_c^{n-3} y_c^3 .\ & 1.2.3\ldots n = (n-2)(n-1)n\, x^{n-3} y_c^3 = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} y^3
\end{aligned}
$$

etc. etc. etc.

in folgende $(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.\ 3}\frac{n-2}{} x^{n-3} y^3 + \text{etc.}$, welche den binomischen Lehrsatz enthält.

Wir werden die Coefficienten n, $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, etc., welche man die Binomialcoefficienten nennt und deren Gebrauch in der gesammten Analysis vom gröfsten Nutzen ist, durch die Zeichen n, $n_c^{:2}$, $n_c^{:3}$, $n_c^{:4}$, etc. ausdrücken, so dafs, $n^{:r}$ ein Product aus n Factoren $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)$ und $n_c^{:r}$ dasselbe Product durch $1.\ 2.\ 3\ldots r$ dividirt, bedeutet.

Schon Briggs kannte den binomischen Lehrsatz für Potenzen, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist, nur drückt er die Regel, wornach die Binomialcoefficienten unabhängig von einander gefunden werden, in Worten aus, ohne eine analytische Formel dafür zu geben. Newton entdeckte zuerst, dafs dieser Satz nicht nur für ganze sondern für alle Arten von Exponenten wahr sei, weshalb man diesen Lehrsatz auch den Newtonischen Lehrsatz nennt. Diese Methode sich durch die Betrachtung einzelner Fälle zu allgemeinen Gesetzen zu erheben, wird Induction genannt. Ihr verdanken wir alle Entdeckungen in der Analyse und in der Natur, deren Erscheinungen die mathematischen Resultate einer kleinen Anzahl unveränderlicher Gesetze sind. Man mufs sich jedoch wohl hüten zu schnell aus einzelnen Fällen aufs Allgemeine zu schliefsen.

So hatte z. B. Fermat, einer der ersten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, durch Induction verleitet, weil die ersten 5 unter der Form $2^{2^r}+1$, enthaltenen Zahlen, 3, 5, 17, 257, 65537, Primzahlen sind, geschlossen, dafs alle unter dieser Form begriffenen Zahlen Primzahlen sein müfsten. Euler fand diese Regel schon für $r = 5$ unrichtig und bemerkte zuerst, dafs $2^{2^r}+1$ oder $2^{32}+1 = 4294967297$ den Factor 641 enthalte. (Gauss Disq. arithm. p. 663).

§. 52. Der Beweis für die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist, hat übrigens keine Schwierigkeit, und wir wollen ihn deshalb schon hier mittheilen. Da derselbe, wie wir gesehen haben, unmittelbar aus dem Satze, dafs $(x+y)_c^n = x_c^n + x_c^{n-1} y + x_c^{n-2} y_c^2 \ldots + x^2 y_c^{n-2} + x y_c^{n-1} + y_c^n$, folgt, so brauchen wir nur die Allgemeinheit des letztern zu beweisen. Wir dürfen in dieser Hinsicht nur zeigen, dafs, wenn derselbe für irgend eine positive ganze Zahl n wahr ist, er auch für $n+1$ wahr sein müsse. Nun ist aber

$(x+y)_c^{n+1} = (x+y)_c^n (\frac{x}{n+1} + \frac{y}{n+1})$, $\frac{x}{n+1} . x_c^n = x_c^{n+1}$, $\frac{x}{n+1} . x_c^{n-1} = \frac{n}{n+1} x_c^n$,

$\frac{x}{n+1} x_c^{n-2} = \frac{n-1}{n+1} x_c^{n-1}$, $\frac{y}{n+1} y = \frac{2}{n+1} y_c^2$, $\frac{y}{n+1} . y_c^2 = \frac{3}{n+1} y_c^3$, etc.

Ist also $(x+y)_c^n = x_c^n + x_c^{n-1} y + x_c^{n-2} y_c^2 \ldots + x_c^2 y_c^{n-2} + x y_c^{n-1} + y_c^n$,

so wird $(x+y)_c^{n+1} = x_c^{n+1} + \frac{n}{n+1} x_c^{n} y + \frac{n-1}{n+1} x_c^{n-1} y_c^{2} \cdots + \frac{2}{n+1} x_c^{2} y_c^{n-1} + \frac{1}{n+1} x y_c^{n}$

$$\frac{1}{n+1} x_c^{n} y + \frac{2}{n+1} x_c^{n-1} y_c^{2} \cdots + \frac{n-1}{n+1} x^{2} y_c^{n-1} + \frac{n}{n+1} x y_c^{n} + y_c^{n+1}$$

$$= x_c^{n+1} + x_c^{n} y + x_c^{n-1} y_c^{2} + x_c^{n-2} y_c^{3} \cdots + x^{2} y_c^{n-1} + x y_c^{n} + y_c^{n+1} \text{ sein.}$$

Da nun der Satz, wie wir uns durch Rechnung überzeugt haben, für $n = 1, 2, \ldots 6$ wahr ist, so mufs er auch für $n = 7$ und deshalb für $n = 8$, 9, etc., und überhaupt für jede positive ganze Zahl bis ins unendliche wahr sein.

Aus dem Satze

$$(x+y)_c^{n} = x_c^{n} + x_c^{n-1} y + x_c^{n-2} y_c^{2} \cdots\cdots + x_c y_c^{n-1} + x y_c^{n-1} + y_c^{n}$$

folgt aber, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $1.2.3 \ldots (n-1)\,n$ multiplicirt

$$(x+y)^{n} = x^{n} + n x^{n-1} y + n_c^{:2} x^{n-2} y^{2} + n_c^{:3} x^{n-3} y^{4} + n_c^{:4} x^{n-4} y^{4} + \text{etc.}$$

Es ist also dieser Satz für alle positive ganze Zahlen n bewiesen. Newton entdeckte jedoch, wie schon bemerkt worden, dafs derselbe für jeden positiven oder negativen, ganzen oder gebrochnen, rationalen oder irrationalen Exponenten wahr sei, ohne indefs einen Beweis zu geben. Da der allgemeine Beweis hier noch zu schwierig sein mögte, so wollen wir uns vorerst begnügen, die Wahrheit des Satzes an einigen Beispielen zu zeigen.

§. 53. Bezeichnet man die Glieder obiger Reihe durch A, A_1, A_2, A_3, etc. so dafs $(x+y)^n = A + A_1 + A_2 + A_3 +$ etc., so ist $A_1 = n.\frac{y}{x}.A$, $A_2 = \frac{n-1}{2}.\frac{y}{x}A$, $A_3 = \frac{n-2}{3}.\frac{y}{x}A$, etc. und allgemein $A_{r+1} = \frac{n-r}{r+1}.\frac{y}{x}A_r$. Ist der Exponent n eine positive ganze Zahl, so ist, wenn $r = n$, $A_{r+1} = A_{n+1} = 0$ und die in einer Reihe entwickelte Potenz $(x+y)^n$ besteht aus $n+1$ Gliedern $A + A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A_n$. In jedem andern Falle, wenn n keine positive ganze Zahl ist, läuft die obige Reihe ins unendliche fort. In beiden Fällen läfst sich dieselbe, wenn ihre Glieder stark genug abnehmen, mit Nutzen dazu gebrauchen, den Näherungswerth von $(x+y)^n$ zu

finden. Dafs die Glieder der Reihe A, A_1, A_2, etc. abnehmen, oder dafs sie eine convergente Reihe bilden, dazu ist zunächst nöthig, dafs $\frac{y}{x} < 1$ oder dafs $x > y$ ist. Zur Erläuterung wollen wir hier die 15te Potenz von 1,05 oder $1 + \frac{1}{20}$, bis auf die achte Decimalstelle excl. genau, berechnen. Hier ist $x = 1$, $y = \frac{1}{20}$. Es ist also

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}00000\,000$$

$$A_1 = \frac{n}{1}.\frac{y}{x}A = \tfrac{15}{20}\,A = 0{,}75000\,000$$

$$A_2 = \frac{n-1}{2}.\frac{y}{x}A_1 = \tfrac{14}{40}\,A_1 = 0{,}26250\,000$$

$$A_3 = \frac{n-2}{3}.\frac{y}{x}A_2 = \tfrac{13}{60}\,A_2 = 0{,}05687\,500$$

$$A_4 = \frac{n-3}{4}.\frac{y}{x}A_3 = \tfrac{12}{80}\,A_3 = 0{,}00853\,125$$

$$A_5 = \frac{n-4}{5}.\frac{y}{x}A_4 = \tfrac{11}{100}\,A_4 = 0{,}00093\,844$$

$$A_6 = \frac{n-5}{6}.\frac{y}{x}A_5 = \tfrac{10}{120}\,A_5 = 0{,}00007\,820$$

$$A_7 = \frac{n-6}{7}.\frac{y}{x}A_6 = \tfrac{9}{140}\,A_6 = 0{,}00000\,503$$

$$A_8 = \frac{n-7}{8}.\frac{y}{x}A_7 = \tfrac{8}{160}\,A_7 = 0{,}00000\,025$$

$$A_9 = \frac{n-8}{9}.\frac{y}{x}A_8 = \tfrac{7}{180}\,A_8 = 0{,}00000\,001$$

Folglich $1{,}05^{15} = 2{,}07892\,818$

§. 54. Ist der Exponent der Potenz $(x+y)^n$ eine negative Zahl oder $n = -m$, wo m eine positive Zahl bedeutet, so ist $A_1 = -m\frac{y}{x}A$, $A_2 = -\frac{m+1}{2}.\frac{y}{x}A_1$, $A_3 = -\frac{m+2}{3}.\frac{y}{x}A_2$, und allgemein $A_{r+1} = -\frac{m+r}{r+1}.\frac{y}{x}A_r$, und es werden die Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ.

Beispiel. Es sei $(1+\frac{1}{20})^{-15}$ bis auf die achte Decimalstelle zu berechnen. Hier ist wieder $x = 1$ und $\frac{y}{x} = \frac{1}{20}$. Es ist also

$A = \ldots\ldots\ldots 1{,}00000\ 000$ $\quad A_1 = -\frac{15}{20} A = -0{,}75000\ 000$

$A_2 = -\frac{16}{40} A_1 = 0{,}30000\ 000$ $\quad A_3 = -\frac{17}{60} A_2 = -0{,}08500\ 000$

$A_4 = -\frac{18}{80} A_3 = 0{,}01912\ 500$ $\quad A_5 = -\frac{19}{100} A_4 = -0{,}00363\ 375$

$A_6 = -\frac{20}{120} A_5 = 0{,}00060\ 562$ $\quad A_7 = -\frac{21}{140} A_6 = -0{,}00009\ 084$

$A_8 = -\frac{22}{160} A_7 = 0{,}00001\ 249$ $\quad A_9 = -\frac{23}{180} A_8 = -0{,}00000\ 160$

$A_{10} = -\frac{24}{200} A_9 = 0{,}00000\ 019$ $\quad A_{11} = -\frac{25}{220} A_{10} = -0{,}00000\ 002$

$+ 1{,}31974\ 330$ $\quad - 0{,}83872\ 621$

$- 0{,}83872\ 621$

$0{,}48101\ 709 = (1+\frac{1}{20})^{-15}$

Multiplicirt man diese Zahl mit der im vorigen §. für $(1+\frac{1}{20})^{15}$ gefundenen Zahl 2,07892818, so erhält man bis auf die 7te Ziffer genau den Werth des Productes = 1, wodurch die Wahrheit des binomischen Lehrsatzes auch für negative ganze Zahlen bestätigt wird.

§. 55. Man kann sich des Ausdrucks für $(x+y)^n$ auch bedienen, um die Wurzel irgend einer Potenz m aus einer Zahl N zu ziehen. Man zerlege nämlich diese Zahl in zwei Theile $x+y$, so dafs $x = a^m$ und $\frac{y}{x}$ eine möglichst kleine gebrochene Zahl sei. Setzt man nun wieder $\sqrt[m]{(x+y)} = A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, so wird $A = \sqrt[m]{x}$, $A_1 = \frac{1}{m}.\frac{y}{x} A$, $A_2 = \frac{\frac{1}{m}-1}{2}.\frac{y}{x} A_1 = -\frac{m-1}{2m}.\frac{y}{x} A_1$, $A_3 = \frac{\frac{1}{m}-2}{3}.\frac{y}{x} A_2 = -\frac{2m-1}{3m}.\frac{y}{x} A_2$; $A_4 = \frac{\frac{1}{m}-3}{4}.\frac{y}{x} A_3 - = \frac{3m-1}{4m}.\frac{y}{x} A_3$, etc. Es sind also die Glieder der Reihe A, A_1, A_2, A_3, etc., in diesem Falle, von dem zweiten Gliede A_1 an, abwechselnd positiv und negativ.

Exempel I. Die Quadratwurzel aus 10 bis auf die 11te Decimalstelle zu finden.

Es ist $10 = 3^2 + 1$, folglich wird in $(x+y)^n$, $x=9$, $y=1$, $n=\frac{1}{2}$, $x^n = 3$. Demnach

$A = 9^{\frac{1}{2}} = 3{,}00000\ 00000\ 00$

$A_1 = \frac{1}{2.9} A = 0{,}16666\ 66666\ 66$ $\quad A_2 = -\frac{1}{4.9} A_1 = -0{,}00462\ 96296\ 29$

$A_3 = -\frac{3}{6.9} A_2 = 0{,}00025\ 72016\ 46$ $\quad A_4 = -\frac{5}{8.9} A_3 = -0{,}00001\ 78612\ 25$

$A_5 = -\frac{7}{10.9} A_4 = 0{,}00000\ 13892\ 06$ $\quad A_6 = -\frac{9}{12.9} A_5 = -0{,}00000\ 01157\ 67$

$A_7 = -\frac{11}{14.9} A_6 = 0{,}00000\ 00101\ 07$ $\quad A_8 = -\frac{13}{16.9} A_7 = -0{,}00000\ 00009\ 12$

$A_9 = -\frac{15}{18.9} A_8 = 0{,}00000\ 00000\ 85$ $\quad A_{10} = -\frac{17}{20.9} A_9 = -0{,}00000\ 00000\ 08$

$+ 3{,}16692\ 52677\ 10$ $\quad - 0{,}00464\ 76075\ 41$

$- 0{,}00464\ 76075\ 41$

$3{,}16227\ 76601\ 69 = \sqrt{10}$

Exempel II. Man soll die Kubikwurzel von 10 bis auf die 11te Decimalstelle berechnen.

Setzt man $y=8$, $x=2$, so ist $(x+y)^n = (8+2)^{\frac{1}{3}}$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$.

$A = 8^{\frac{1}{3}} = 2{,}00000\ 00000\ 00$

$A_1 = \frac{1}{3.4} A = 0{,}16666\ 66666\ 66$ $\quad A_2 = -\frac{2}{6.4} A_1 = 0{,}01388\ 88888\ 88$

$A_3 = -\frac{5}{9.4} A_2 = 0{,}00192\ 90123\ 45$ $\quad A_4 = -\frac{8}{12.4} A_3 = 0{,}00032\ 15020\ 57$

$A_5 = -\frac{11}{15.4} A_4 = 0{,}00005\ 89420\ 44$ $\quad A_6 = -\frac{14}{18.4} A_5 = 0{,}00001\ 14609\ 53$

$A_7 = -\frac{17}{21.4} A_6 = 0{,}00000\ 23194\ 79$ $\quad A_8 = -\frac{20}{24.4} A_7 = 0{,}00000\ 04832\ 23$

$A_9 = -\frac{23}{27.4} A_8 = 0{,}00000\ 01029\ 09$ $\quad A_{10} = -\frac{26}{30.4} A_9 = 0{,}00000\ 00222\ 95$

$A_{11} = -\frac{29}{33.4} A_{10} = 0{,}00000\ 00048\ 98$ $\quad A_{12} = -\frac{32}{36.4} A_{11} = 0{,}00000\ 00010\ 88$

$A_{13} = -\frac{35}{39.4} A_{12} = 0{,}00000\ 00002\ 44$ $\quad A_{14} = -\frac{38}{42.4} A_{13} = 0{,}00000\ 00000\ 55$

$A_{15} = -\frac{41}{45.4} A_{14} = 0{,}00000\ 00000\ 13$ $\quad A_{16} = -\frac{44}{48.4} A_{15} = 0{,}00000\ 00000\ 03$

$2{,}16865\ 70485\ 98$ $\quad 0{,}01422\ 23585\ 63$

$0{,}01422\ 23585\ 63$

$2{,}15443\ 46900\ 35 = \sqrt[3]{10}$

Exempel III. Es sei $\sqrt[5]{161900}$ bis auf die 12te Decimalstelle zu berechnen.

Wir haben bereits oben (§. 48.) gefunden, dafs diese Wurzel > 11,011 und < 11,012.

Nun ist aber $11{,}011^5 = 161857{,}86712\ 13154\ 16051$. Setzen wir also $\sqrt[5]{161900} = 11{,}011 \times (1+x)^{\frac{1}{5}}$, so ist $1+x = \frac{16{,}1900}{11{,}011^5} = 1{,}00026\ 03078\ 82692$ und $x = 0{,}00026\ 03078\ 82692$.

Da nun, wenn $\sqrt[5]{161900} = A + A_1 - A_2 + A_3$, etc.

$A = \ldots\ldots 11{,}011$

$A_1 = \frac{1}{5} \times A = 0{,}00057\ 32500\ 19239$ $\qquad A_2 = \frac{4}{10} \times A_1 = 0{,}00000\ 00596\ 88599$

$A_3 = \frac{2}{15} \times A_2 = 0{,}00000\ 00000\ 09332$ $\qquad A_4 = \frac{14}{20} \times A_3 = 0{,}00000\ 00000\ 00001$

$11{,}01157\ 32500\ 28581$

Davon subtr. $0{,}00000\ 00596\ 88600$

Bleibt $11{,}01157\ 31903\ 39971 = \sqrt[5]{161900}$ wie (§. 48.)

§. 56. Setzt man in der Gleichung $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + n_c^{:2} x^{n-2}y^2 + \text{etc.}$ (A) $x = 1$, $y = z$, so hat man

$$(1+z)^n = 1 + nz + n_c^{:2} z^2 + n_c^{:3} z^3 + n_c^{:4} z^4 + \text{etc.} \quad (B)$$

wo $n_c^{:2} = \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}$, $n_c^{:3} = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, $n_c^{:4} = \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ etc.

Substituirt man in (B) $\frac{y}{x}$ für z, und multiplicirt alsdann mit x^n, so erhält man wieder die Gleichung (A).

Setzt man in (B) $-z$ für z, so wird

$$(1-z)^n = 1 - nz + n_c^{:2} z^2 - n_c^{:3} z^3 + n_c^{:4} z^4 - \text{etc.} \quad (C).$$

§. 57. Substituirt man in (C) $-m$ für n, so wird $n = -m$, $n_c^{:2} = \frac{m.(m+1)}{1.\ 2} = (m+1)_c^{:2}$, $n_c^{:3} = -\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} = -(m+2)_c^{:3}$ .... und allgemein $n_c^{:r} = (-m)_c^{:r} = \pm (m+r-1)_c^{:r}$, wo das Zeichen + oder − gilt, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es ist also

$$(1-z)^{-m} = 1 + mz + (m+1)_c^{:2} z^2 + (m+2)_c^{:3} z^3 + (m+3)_c^{:4} z^4 + \text{etc.} \quad (D)$$

§. 58. Weil $(x+y)^n = x^n.(1+\frac{y}{x})^n = x^n.(\frac{x+y}{x})^n = x^n.(\frac{x}{x+y})^{-n} = x^n.(1-\frac{y}{x+y})^{-n}$,

so erhält man, wenn man in (D) $\frac{y}{x+y}$ für z, und n für m setzt, und dann mit x^n multiplicirt

$$(x+y)^n = x^n\ (1 + \frac{ny}{x+y} + (n+1)_c^{:2} \frac{y^2}{(x+y)^2} + (n+2)_c^{:3} \frac{y^3}{(x+y)^3} + \text{etc.}) \quad (E)$$

In dieser Reihe nehmen die Potenzen von $\frac{y}{x+y}$ stärker ab als die von $\frac{y}{x}$, die in der Gleichung (B) mit x^n multiplicirt sind.

§. 59. Setzt man in der Reihe (E) $-n$ für n, so verwandelt sich dieselbe in:

$$(x+y)^{-n} = x^{-n}\ (1 - n\frac{y}{x+y} + n_c^{:2} \frac{y^2}{(x+y)^2} - n_c^{:3} \frac{y^3}{(x+y)^3} + n_c^{:4} \frac{y^4}{(x+y)^4} + \text{etc.}) \quad (F)$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so besteht diese Reihe (F) aus einer endlichen Anzahl, nämlich $n+1$ Glieder, dahingegen der Ausdruck von $(x+y)^{-n}$ nach den Potenzen von $\frac{y}{z}$ entwickelt

$$= x^n\ (1 - n\frac{y}{x} + (n+1)_c^{:2} \frac{y^2}{x^2} - (n+2)_c^{:3} \frac{y^3}{x^3} + (n+3)_c^{:4} \frac{y^4}{x^4} - \text{etc.})$$

ins Unendliche fortläuft.

Als Beispiel wollen wir die (§. 53.) bereits berechnete Potenz $(1+\frac{1}{20})^{-15}$ nochmals nach der obigen Formel (F) entwickeln.

Setzen wir $(x+y)^{-n} = A - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - \text{etc.}$, so ist, weil $x = 1$, $y = \frac{1}{20}$ also $\frac{y}{x+y} = \frac{1}{21}$,

$A = 1 = 1{,}00000\ 000$ $\qquad A_1 = \frac{15}{21} A = 0{,}71428\ 571$

$A_2 = \frac{14}{42} A_1 = 0{,}23809\ 524$ $\qquad A_3 = \frac{13}{63} A_2 = 0{,}04913\ 077$

$A_4 = \frac{12}{84} A_3 = 0{,}00701\ 868$ $\qquad A_5 = \frac{11}{105} A_4 = 0{,}00073\ 529$

$A_6 = \frac{10}{126} A_5 = 0{,}00005\ 836$ $\qquad A_7 = \frac{9}{147} A_6 = 0{,}00000\ 357$

$A_8 = \frac{8}{168} A_7 = 0{,}00000\ 017$ $\qquad A_9 = \frac{7}{189} A_8 = 0{,}00000\ 001$

$1{,}24517\ 245$ $\qquad 0{,}76415\ 535$

$-\ 0{,}76415\ 535$

$0{,}48101\ 710$

mit der (§. 54.) gefundenen Zahl bis auf die 7te Decimalstelle übereinstimmend.

Auf die Weise läfst sich auch die Kubikwurzel aus 10, die wir (§. 54.) durch die Entwickelung von $2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$ gefunden haben, in $2(1-\frac{1}{5})^{-\frac{1}{3}}$ verwandeln, welche $= 2[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.4}{3.6}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1.4.7}{3.6.9}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}\frac{1}{5^4} + \text{etc.}]$, so dafs, wenn man dieselbe durch $A + A_1 + A_2 + A_3 + \text{etc.}$ ausdrückt, $A = 2$, $A_1 = \frac{1}{3.5}\cdot A$, $A_2 = \frac{4}{30}A_1$, $A_3 = \frac{7}{45}A_2$, $A_4 = \frac{10}{60}A_3$, etc. In dieser Reihe nehmen, wenn man sie mit der (§. 55.) vergleicht, die Glieder offenbar stärker ab, als dort.

§. 60. Wenn man in den Ausdrucke $(1+\frac{x}{n})^n$, wo x irgend eine positive Zahl bedeutet, für n nach und nach 1, 2, 3, 4, etc. setzt, so wird man finden, dafs der Werth desselben immer zunimmt. Man könnte vermuthen, dafs auf diese Weise der Werth von $(1+\frac{x}{n})^n$ über alle Grenzen hinaus wachsen, oder wie man diefs durch eine abgekürzte Redensart auszudrücken pflegt, dafs dieser Werth für ein unendliches n unendlich werden müsse. Der binomische Lehrsatz zeigt jedoch, dafs diefs nicht der Fall ist. Es ist nämlich

$$(1+\tfrac{x}{n})^n = 1 + n.\tfrac{x}{n} + \tfrac{n.(n-1)}{1.2}\tfrac{x^2}{n^2} + \tfrac{n.(n-1(n-2)}{1.2.3}\tfrac{x^3}{n^3} + \tfrac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\tfrac{x^4}{n^4} + \text{etc.}$$

$$= 1 + x + (1-\tfrac{1}{n})x_c^2 + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})x_c^3 + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})(1-\tfrac{3}{n})x_c^4 + \text{etc.},$$

wo x_c^2, x_c^3, x_c^4, etc. nach der (§. 51.) eingeführten Bezeichnungsart die dividirten Potenzen $\frac{x^2}{1.2}$, $\frac{x^3}{1.2.3}$, $\frac{x^4}{1.2.3.4}$, etc. bedeuten. Daraus ergiebt sich also, dafs für jede positive ganze Zahl n der Werth von $(1+\frac{x}{n})^n$ beständig wächst, so wie n gröfser wird, aber nie gröfser als $1 + x + x_c^2 + x_c^3 + x_c^4 + x_c^5 + \text{etc.}$ werden kann.

§. 61. Eben so erhält man

$$(1-\tfrac{x}{n})^{-n} = 1 + n\tfrac{x}{n} + \tfrac{n.(n+1)}{1.2}\tfrac{x^2}{n^2} + \tfrac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3}\tfrac{x^3}{n^3} + \tfrac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\tfrac{x^4}{n^4} + \text{etc.}$$

$$= 1 + x + (1+\tfrac{1}{n})x_c^2 + (1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{2}{n})x_c^3 + (1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{2}{n})(1+\tfrac{3}{n})x_c^4 + \text{etc.}$$

Woraus erhellt, dafs $(1-\frac{x}{n})^{-n}$, von $n > x$ an, wenn n zunimmt, beständig abnimmt, für jeden Werth von n jedoch

$$(1-\tfrac{x}{n})^{-n} > 1 + x + x_c^2 + x_c^3 + x_c^4 + x_c^5 + \text{etc. ist.}$$

Weil nun $(1-\frac{x}{n})^{-n} - (1+\frac{x}{n})^n = (1-\frac{x}{n})^{-n} \times (1-(1-\frac{x^2}{n^2})^n)$, so übersieht man leicht, dafs dieser Unterschied kleiner werden kann als jede gegebene Gröfse. Es ist nämlich

$$1-(1-\tfrac{x^2}{n^2})^n = n.\tfrac{x^2}{n^2} - \tfrac{n.(n-1)}{1.2}\tfrac{x^4}{n^4} + \tfrac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\tfrac{x^6}{n^6} - \text{etc.}$$

$$= \tfrac{x^2}{n} - \tfrac{(1-\frac{1}{n})}{1.2}\tfrac{x^4}{n^2} + \tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}\tfrac{x^6}{n^3} - \tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{1.2.3.4}\tfrac{x^8}{n^4} + \text{etc.}$$

Der Werth dieser Gröfse ist offenbar, wenn n unendlich grofs, unendlich klein. Es ist also für $n = \infty$

$$(1+\tfrac{x}{n})^n = (1+\tfrac{x}{n})^{-n} = 1 + x + x_c^2 + x_c^3 + x_c^4 + \text{etc.}$$

§. 62. Denselben Ausdruck findet man auch, wenn man $(1+\frac{1}{n})^{nx}$ vermittelst des binomischen Lehrsatzes entwickelt und $n = \infty$ oder unendlich grofs annimmt, wo alsdann $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, etc. $= o$ wird. Es ist nämlich

$$(1+\tfrac{1}{n})^{nx} = 1 + nx\tfrac{1}{n} + \tfrac{nx.(nx-1)}{1.2}\tfrac{1}{n^2} + \tfrac{nx.(nx-1)(nx-2)}{1.2.3}\tfrac{1}{n^3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + x + \tfrac{x.(x-\frac{1}{n})}{1.2.} + \tfrac{x.(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})}{1.2.3} + \tfrac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})(x-\frac{3}{n})}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Folglich für $n = \infty$

$$(1+\tfrac{1}{n})^{nx} = 1 + x + \tfrac{x^2}{1.2} + \tfrac{x^3}{1.2.3} + \tfrac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Da nun $(1+\frac{1}{n})^{nx} = [(1+\frac{1}{n})^n]^x$ und

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1 + 1 + (1-\tfrac{1}{n})\tfrac{1}{2} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\tfrac{1}{2.3} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})(1-\tfrac{3}{n})\tfrac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

so ist auch

$$(1+\tfrac{1}{n})^{nx}=\left[1+1+(1-\tfrac{1}{n})\tfrac{1}{2}+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\tfrac{1}{2.3}+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})(1-\tfrac{3}{n})\tfrac{1}{2.3.4}+\text{etc.}\right]^{x}$$

Es ist aber, wenn $n=\infty$,

$$(1+\tfrac{1}{n})^{n}=1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2.3}+\tfrac{1}{2.3.4}+\tfrac{1}{2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Die Summe dieser unendlichen Reihe, deren Näherungswerth 2,71828 18284 59045, ist die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen, die auch wohl in Beziehung auf eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, die hyperbolischen genannt werden. Man bezeichnet diese Zahl gewöhnlich durch den Buchstaben e. Diesemnach ist der Werth von $(1+\frac{1}{n})^{nx}$, für $n=\infty$, $=e^{x}$.

Zugleich ergiebt sich aber auch aus (§. 59, 60.), dafs für jede positive ganze Zahl $n>x$, $(1+\frac{x}{n})^{n}<e^{x}$ und $(1-\frac{x}{n})^{-n}>e^{x}$ und wenn $n=\infty$, so wohl $(1+\frac{x}{n})^{n}$ als auch $(1-\frac{x}{n})^{-n}=e^{x}$ ist.

§. 63. Wenn $y=e^{x}$ so ist $x=\log\text{nat}\,y$. Nun folgt aus $(1+\frac{x}{n})^{n}<y$, $1+\frac{x}{n}<y^{\frac{1}{n}}$ und daraus $x<n(y^{\frac{1}{n}}-1)$, und weil $(1-\frac{x}{n})^{-n}>y$, so erhält man $(1-\frac{x}{n})^{n}<y^{-1}$; daraus $1-\frac{x}{n}<y^{-\frac{1}{n}}$ und deshalb $1-y^{-\frac{1}{n}}<\frac{x}{n}$ also $x>n(1-y^{-\frac{1}{n}})$, oder $>\frac{n(y^{\frac{1}{n}}-1)}{y^{\frac{1}{n}}}$.

Folglich: $n(1-y^{\frac{1}{n}})>\log\text{nat}\,y>\frac{n.(y^{\frac{1}{n}}-1)}{y^{\frac{1}{n}}}$.

Es läfst sich demnach der natürliche Logarithme jeder Zahl y finden, indem man aus y die Quadratwurzel, bis auf 2r Decimalen genau, extrahirt, aus dieser abermals die Quadratwurzel zieht, und diese Operation so lange fortsetzt, bis man auf $\sqrt[2^m]{y}<1+10^{-r}$ kömmt, davon 1 subtrahirt und den Rest durch 2^{m} multiplicirt. Das Resultat dieser Rechnung wird der bis auf die rte Decimalstelle genaue Werth von log nat y sein. Auf diese Weise fand, wie schon oben (§. 38.) bemerkt worden,

$10^{\frac{1}{2^{60}}}=1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ 03251\ldots$ Diese Zahl weniger 1 mit $2^{60}=1152\ 92150\ 46068\ 46976$ oder 1,99717 42081 25505 27032 51 mit 1,15292 15046 06846 976 multiplicirt, erhält man log nat 10 = 2,30258 50929 94045 68401 . . .

§. 64. Hat man auf irgend eine Weise den natürlichen Logarithmen einer Zahl y gefunden, so erhält man daraus den briggischen, indem man jenen durch log nat 10 = 2,30258 50929 94045 . . . dividirt oder mit $\frac{1}{\log\text{nat}\,10}=0{,}43429\ 44819\ 03351\ldots$. multiplicirt. Man nennt diese Zahl gewöhnlich den Modulus, und wenn wir dieselbe durch M bezeichnen, so ist log brigg. $y=M\log\text{nat}\,y$.

Es sei nämlich log nat $y=x$ und log brigg. $y=\xi$, so ist $y=e^{x}=10^{\xi}$. Da nun $\frac{1}{\log\text{nat}\,10}=M$, so ist log nat $10=\frac{1}{M}$, folglich $10=e^{\frac{1}{M}}$ und $y=e^{\frac{\xi}{M}}=e^{x}$. Also $\frac{\xi}{M}=x$ und $\xi=Mx$ oder log brigg $y=M\log\text{nat}\,y$.

Aus $e^{\frac{1}{M}}=10$ folgt zugleich $\frac{1}{M}\log\text{brigg. e}=\log\text{brigg. }10=1$, und daraus $M=\log\text{brigg. e}$.

Es ist demnach der Näherungswerth von log brigg $y=\frac{2^{r}(y^{\frac{1}{2^{r}}}-1)}{2^{r}(10^{\frac{1}{2^{r}}}-1)}=\frac{y^{\frac{1}{2^{r}}}-1}{10^{\frac{1}{2^{r}}}-1}$.

So findet man z. B., wenn man $r=60$ annimmt, weil

$$\sqrt[2^{60}]{3}=1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932\ldots$$

$$\sqrt[2^{60}]{10}=1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ldots$$

$$\log\text{brigg. }3=\frac{95\ 28942\ 64074\ 58932}{199\ 71742\ 08125\ 50527}=0{,}47712\ 12547\ 19662\ldots$$

§. 65. Diese äusserst mühsame Methode, durch eine Menge von Quadratwurzel-Extractionen den Ausdruck $2^{r}(y^{\frac{1}{2^{r}}}-1)$ zu berechnen, läfst sich nun durch den Gebrauch des binomischen Lehrsatzes ungemein vereinfachen und vervollständigen.

Es sei $y=1+\omega$, so ist

$$n\,(y^{\frac{1}{n}}-1) = n\,[(1+\omega)^{\frac{1}{n}}-1] = \omega + (\tfrac{1}{n}-1)\tfrac{\omega^2}{1.2} + (\tfrac{1}{n}-1)(\tfrac{1}{n}-2)\tfrac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= \omega - (1-\tfrac{1}{n})\tfrac{\omega^2}{3} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{1}{2n})\tfrac{\omega^3}{3} - (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{1}{2n})(1-\tfrac{1}{3n})\tfrac{\omega^4}{4} + \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck wird, wenn man $n = \infty$ annimmt,

$$\text{(A) log nat } (1+\omega) = \omega - \tfrac{\omega^2}{2} + \tfrac{\omega^3}{3} - \tfrac{\omega^4}{4} + \tfrac{\omega^5}{5} - \text{etc.}$$

Die Summe dieser unendlichen Reihe hat jedoch nur dann einen reellen endlichen Werth, wen ω nicht > 1.

Eben so erhält man (B) log nat $(1-\omega) = -\omega - \tfrac{\omega^2}{2} - \tfrac{\omega^3}{3} - \tfrac{\omega^4}{4} - \tfrac{\omega^5}{5} - \text{etc.}$ wo $\omega < 1$.

Weil nun log $(1+\omega)$ — log $(1-\omega) = \log \tfrac{1+\omega}{1-\omega}$, so erhält man zugleich

$$\text{(C) log nat } \tfrac{1+\omega}{1-\omega} = 2\left(\omega + \tfrac{\omega^3}{3} + \tfrac{\omega^5}{5} + \tfrac{\omega^7}{7} + \text{etc.}\right)$$

Setzt man nun $\frac{1+\omega}{1-\omega} = y$, so wird $\omega = \frac{y-1}{y+1}$ und

$$\text{(D) log nat } y = 2\left(\tfrac{y-1}{y+1} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right)^7 + \text{etc.}\right)$$

Die Glieder dieser Reihe nehmen ab für jeden Werth von y, wie grofs derselbe auch sein mag, und die Summe derselben hat immer einen reellen Werth. Wenn jedoch y nur mäfsig grofs ist, so convergirt die Reihe so langsam, dafs die Berechnung des Logarithmen von y noch immer äusserst beschwerlich ist. Es sei z. B. $y = 10$, so ist

$$\text{log nat } 10 = 2\left(\tfrac{9}{11} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{9}{11}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{9}{11}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{9}{11}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{9}{11}\right)^9 + \text{etc.}\right)$$

Wollte man nun diesen Logarithmen bis auf die 10te Decimalstelle genau haben, so müfste man beinahe 70 Glieder bis auf die 12te Decimalstelle berechnen. Es müfste nämlich, wenn $\left(\frac{9}{11}\right)^{2x+1} < 10^{-12}$ sein sollte $\left(\frac{11}{9}\right)^{2x+1} > 10^{12}$, also $(2x+1) \asymp \log \text{brig } \frac{11}{9} > 12$ und folglich $2x+1 > \frac{12}{\log \frac{11}{9}}$ sein. Nun ist aber, wie man aus jeder

logarithmischen, auch aus unserer kleinen Tabelle (§. 42.) ersehen kann, $\log \frac{11}{9} < 0{,}088$. Es müfste also $2x+1 > \frac{12}{0{,}088}$ oder > 136, also $x > 67$ sein.

§. 66. Ist die Zahl y von der Beschaffenheit, dafs die Convergenz der Reihe (D) sehr gering ist, wie im obigen Beispiele, wo $y = 10$ ist, so mufs man dieselbe in zwei oder mehrere andere Reihen zu zerlegen suchen, deren Glieder schnell genug abnehmen, um mit hinlänglicher Bequemlichkeit die Rechnung anzustellen. So läfst sich z. B. die Reihe für log nat 10, weil $\log 10 = 3 \log 2 + \log \frac{5}{4}$ auf folgende Weise zerlegen.

$$\begin{aligned}
\text{log nat } 10 = 3.\ & 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{3^9} + \text{etc.}\right) \\
+ & \ 2\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{9^5} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{9^7} + \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{9^9} + \text{etc.}\right) \\
= & \ 2\left(1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{9^4} + \text{etc.}\right) \\
+ & \ 2\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{9^5} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{9^7} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{9^9} + \text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

§. 67. Hier folgt die Übersicht der Berechnung von log nat 10 bis auf die 20ste Decimalstelle genau.

	$= 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00$
$9^{-1} = 0{,}11111\ 11111\ 11111\ 11111\ 11$	$\frac{1}{3}.9^{-1} = 0{,}03703\ 70370\ 37037\ 03703\ 70$
$9^{-2} = 0{,}01234\ 56790\ 12345\ 67901\ 24$	$\frac{1}{5}\,9^{-2} = 0{,}00246\ 91358\ 02469\ 13580\ 25$
$9^{-3} = 0{,}00137\ 17421\ 12482\ 85322\ 36$	$\frac{1}{7}.9^{-3} = 0{,}00019\ 59631\ 58926\ 12188\ 91$
$9^{-4} = 0{,}00015\ 24157\ 90275\ 87258\ 04$	$\frac{1}{9}.9^{-4} = 0{,}00001\ 69350\ 87808\ 43028\ 67$
$9^{-5} = 0{,}00001\ 69350\ 87808\ 43028\ 67$	$\frac{1}{11}\,9^{-5} = 0{,}00000\ 15395\ 53437\ 13002\ 61$
$9^{-6} = 0{,}00000\ 18816\ 76423\ 15892\ 07$	$\frac{1}{13}.9^{-6} = 0{,}00000\ 01447\ 44340\ 24299\ 39$
$9^{-7} = 0{,}00000\ 02090\ 75158\ 12876\ 90$	$\frac{1}{15}\,9^{-7} = 0{,}00000\ 00139\ 38343\ 87525\ 13$
$9^{-8} = 0{,}00000\ 00232\ 30573\ 12541\ 88$	$\frac{1}{17}\,9^{-8} = 0{,}00000\ 00013\ 66504\ 30149\ 52$
	$s = 1{,}03972\ 07706\ 88866\ 27478\ 18$

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

$9^{-9} = 0{,}00000\ 00025\ 91174\ 79171\ 32$

$9^{-10} = 0{,}00000\ 00002\ 86797\ 19907\ 92$

$9^{-11} = 0{,}00000\ 00000\ 31866\ 35545\ 32$

$9^{-12} = 0{,}00000\ 00000\ 03540\ 70616\ 15$

$9^{-13} = 0{,}00000\ 00000\ 00393\ 41179\ 57$

$9^{-14} = 0{,}00000\ 00000\ 00043\ 71242\ 17$

$9^{-15} = 0{,}00000\ 00000\ 00004\ 85693\ 37$

$9^{-16} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 53965\ 95$

$9^{-17} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05996\ 22$

$9^{-18} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00666\ 25$

$9^{-19} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00074\ 03$

$9^{-20} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 23$

$9^{-21} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 92$

$s = 1{,}03972\ 07706\ 88866\ 27478\ 18$

$\frac{1}{10}9^{-9} = 0{,}00000\ 00001\ 35851\ 30482\ 70$

$\frac{1}{21}9^{-10} = 0{,}00000\ 00000\ 15657\ 00948\ 00$

$\frac{1}{23}.9^{-11} = 0{,}00000\ 00000\ 01385\ 49371\ 54$

$\frac{1}{25}9^{-12} = 0{,}00000\ 00000\ 00141\ 62824\ 65$

$\frac{1}{27}9^{-13} = 0{,}00000\ 00000\ 00014\ 57080\ 72$

$\frac{1}{29}9^{-14} = 0{,}00000\ 00000\ 00001\ 50732\ 49$

$\frac{1}{31}9^{-15} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 15667\ 53$

$\frac{1}{33}9^{-16} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01635\ 33$

$\frac{1}{35}9^{-17} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00171\ 32$

$\frac{1}{37}9^{-18} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00018\ 01$

$\frac{1}{39}9^{-19} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001\ 90$

$\frac{1}{41}9^{-20} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 20$

$\frac{1}{43}9^{-21} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 02$

Demnach $1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.9^2}+\frac{1}{7.9^3}+$ etc. $= \frac{1}{2}\log 2 = 1{,}03972\ 07708\ 39917\ 96412\ 59$

Eben so erhält man die Summe von $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}.\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{9^5}+$ etc., indem man die berechneten reciproken Potenzen von 9 benutzt.

$9^{-1} = 0{,}11111\ 11111\ 11111\ 11111\ 11$

$\frac{1}{3}9^{-3} = 0{,}00045\ 72473\ 70827\ 61774\ 12$

$\frac{1}{5}9^{-5} = 0{,}00000\ 33870\ 17561\ 68605\ 73$

$\frac{1}{7}9^{-7} = 0{,}00000\ 00298\ 67879\ 73268\ 13$

$\frac{1}{9}9^{-9} = 0{,}00000\ 00002\ 86797\ 19907\ 92$

$\frac{1}{11}9^{-11} = 0{,}00000\ 00000\ 02896\ 94140\ 48$

$\frac{1}{13}9^{-13} = 0{,}00000\ 00000\ 00030\ 26244\ 58$

$s = 0{,}11157\ 17756\ 57104\ 55052\ 07$

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU

$s = 0{,}11157\ 17756\ 57104\ 55052\ 07$

$\frac{1}{15}.9^{-15} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 32579\ 57$

$\frac{1}{17}9^{-17} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00352\ 72$

$\frac{1}{19}9^{-19} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00003\ 90$

$\frac{1}{21}9^{-21} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 04$

$0{,}11157\ 17756\ 57104\ 87788\ 30 = \frac{3}{2}\log\text{nat}\frac{5}{4}$

dazu $1{,}03972\ 07708\ 39917\ 96412\ 59 = \frac{3}{2}\log\text{nat}\ 2$

erhält man $1{,}15129\ 25464\ 97022\ 84200\ 89 = \frac{1}{2}\log\text{nat}\ 10$

und log nat $10 = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 78$

Zugleich hat man log nat $2 = 0{,}69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 77$

und log nat $5 = 2\log 2 + \log\frac{5}{4} = 1{,}60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 08$

§. 68. Man hätte den natürlichen Logarithmen von 2, weil $\log 2 = \text{l.}\frac{3}{2} + \text{l.}\frac{4}{3}$, durch die Berechnung der beiden Reihen

$$2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}.\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}.\frac{1}{5^9}+\text{etc.}\right)$$

$$+\ 2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}.\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{7^5}+\frac{1}{7}.\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9}.\frac{1}{7^9}+\text{etc.}\right)$$

auch auf folgende Art finden können.

$.2^{2}.10^{-1} = 0{,}40000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00$

$\frac{1}{3}.2^{4}.10^{-3} = 0{,}00533\ 33333\ 33333\ 33333\ 33$

$\frac{1}{5}.2^{6}.10^{-5} = 0{,}00012\ 80000\ 00000\ 00000\ 00$

$\frac{1}{7}.2^{8}.10^{-7} = 0{,}00000\ 36571\ 42857\ 14285\ 71$

$\frac{1}{9}.2^{10}.10^{-9} = 0{,}00000\ 01137\ 77777\ 77777\ 77$

$\frac{1}{11}.2^{12}.10^{-11} = 0{,}00000\ 00037\ 23636\ 36363\ 64$

$\frac{1}{13}.2^{14}.10^{-13} = 0{,}00000\ 00001\ 26030\ 76923\ 08$

$\frac{1}{15}.2^{16}.10^{-15} = 0{,}00000\ 00000\ 04369\ 06666\ 67$

$\frac{1}{17}.2^{18}.10^{-17} = 0{,}00000\ 00000\ 00154\ 20235\ 29$

$s = 0{,}40546\ 51081\ 08158\ 65585\ 49$

$2.7^{-1} = 0{,}28571\ 42857\ 14285\ 71428\ 57$

$\frac{2}{3}7^{-3} = 0{,}00194\ 36345\ 96695\ 82118\ 56$

$\frac{2}{5}7^{-5} = 0{,}00002\ 37996\ 07306\ 47944\ 31$

$\frac{2}{7}.7^{-7} = 0{,}00000\ 03469\ 33051\ 11486\ 07$

$\frac{2}{9}7^{-9} = 0{,}00000\ 00055\ 06873\ 82722\ 00$

$\frac{2}{11}7^{-11} = 0{,}00000\ 00000\ 91951\ 51102\ 96$

$\frac{2}{13}.7^{-13} = 0{,}00000\ 00000\ 01587\ 85968\ 81$

$\frac{2}{15}7^{-15} = 0{,}00000\ 00000\ 00028\ 08459\ 31$

$\frac{2}{17}7^{-17} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 50572\ 50$

$S = 0{,}28768\ 20724\ 51780\ 91803\ 09$

$s = 0{,}40546\ 51081\ 08158\ 65585\ 49$	$S = 0{,}28768\ 20724\ 51780\ 91803\ 09$
$\frac{1}{19}2^{20}.10^{-19} = 0{,}00000\ 00000\ 00005\ 51882\ 11$	$\frac{2}{19}7^{-19} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00923\ 45$
$\frac{1}{21}2^{22}.10^{-21} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 19972\ 86$	$\frac{2}{21}7^{-21} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00017\ 05$
$\frac{1}{23}2^{24}.10^{-23} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00729\ 44$	$\frac{2}{23}7^{-23} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 32$
$\frac{1}{23}2^{26}.10^{-25} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00026\ 84$	$\frac{2}{25}7^{-25} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 01$
$\frac{1}{25}9^{28}.10^{-27} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 99$	
$\frac{1}{29}9^{30}.10^{-29} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 04$	
$\log\text{nat}\,\frac{3}{2} = 0{,}40546\ 51081\ 08164\ 38197\ 77$	$\log\text{nat}\,\frac{4}{3} = 0{,}28768\ 20724\ 51780\ 92743\ 92$

Daraus log nat 2 = log nat $\frac{3}{2}$ + log nat $\frac{4}{3}$ = 0,69314 71805 59945 30941 69 bis auf die 20ste Stelle wie oben. Zugleich hat man aber auch log 3 = log $\frac{3}{2}$ + log 2 oder = 2 log 2 — log $\frac{4}{3}$ = 1,09861 22886 68109 69139 46 bis auf die 20ste Stelle genau.

§. 69. Wenn die Logarithmen zweier Zahlen y, z gegeben sind, so findet man daraus den Logarithmen ihres arithmetischen Mittels.

$$\log\frac{y+z}{2} = \frac{\log y + \log z}{2} + M\left(\frac{1}{2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1\right)^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1\right)^5} + \text{etc.}\right)$$

Beweis. Weil $\frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2} = y$, $\frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2} = z$, so ist

$$\log y + \log z = \log.\left(\tfrac{y+z}{2} + \tfrac{y-z}{2}\right) + \log\left(\tfrac{y+z}{2} - \tfrac{y+z}{2}\right) = \log\left(\left(\tfrac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{y-z}{2}\right)^2\right),$$

$$= \log\left(\tfrac{y+z}{2}\right)^2 + \log\left(1-\left(\tfrac{y-z}{y+z}\right)^2\right) = 2\log\tfrac{y+z}{2} + \log\left(1-\left(\tfrac{y-z}{y+z}\right)^2\right).$$

Daraus folgt: $\log\frac{y+z}{2} = \frac{\log y + \log z}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1-\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2\right)$.

Aber $-\frac{1}{2}\log\left(1-\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{(y+z)^2} = \frac{1}{2}\log\frac{(y+z)^2}{(y+z)^2-(y-z)^2}$,

und wenn $\frac{(y+z)^2}{(y+z)^2-(y-z)^2} = u$, so ist (§. 65.) (D)

$$\tfrac{1}{2}\log u = M\left(\frac{u-1}{u+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \text{etc.}\right)$$

und $\frac{u-1}{u+1} = \frac{(y-z)^2}{2(y+z)^2-(y-z)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1}$.

Demnach

$$\log\frac{y+z}{2} = \frac{\log y + \log z}{2} + M\left(\frac{1}{2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1\right)^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(2\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^2-1\right)^5} + \text{etc.}\right)$$

§. 70. Setzt man $y = x+1$ und $z = x-1$, so dafs $\frac{y+z}{2}$ und $\frac{y+z}{y-z} = x$, so erhält man

$$\log x = \tfrac{1}{2}\log(x+1) + \tfrac{1}{2}\log(x-1) + M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5(2x^2-1)^5} + \text{etc.}\right)$$

Diese Formel kann dazu dienen den Logarithmen jeder Primzahl p, wenn die Logarithmen aller Primzahlen < p gegeben sind, durch sehr convergente Reihen zu berechnen.

Ist nämlich $x = p$, so sind die Zahlen $x+1$ und $x-1$ gerade Zahlen, die ausser der 2 nur noch Primzahlen < p als Factoren enthalten können, dafs also nach der Voraussetzung log $(x+1)$ und log $(x-1$ als bekannt anzusehen sind.

Nimmt man z. B. den Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5 als bekannt an, so erhält man

$$\log 7 = \tfrac{1}{2}\log 6 + \tfrac{1}{2}\log 8 + M\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3.97^3} + \frac{1}{5.97^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 11 = \tfrac{1}{2}\log 10 + \tfrac{1}{2}\log 12 + M\left(\frac{1}{241} + \frac{1}{3.241^3} + \frac{1}{5.241^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 13 = \tfrac{1}{2}\log 12 + \tfrac{1}{2}\log 14 + M\left(\frac{1}{337} + \frac{1}{3.337^3} + \frac{1}{5.337^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 17 = \tfrac{1}{2}\log 16 + \tfrac{1}{2}\log 18 + M\left(\frac{1}{577} + \frac{1}{3.577^3} + \frac{1}{5.577^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 19 = \tfrac{1}{2}\log 18 + \tfrac{1}{2}\log 20 + M\left(\frac{1}{721} + \frac{1}{3.721^3} + \frac{1}{5.721^5} + \text{etc.}\right)$$

etc. etc. etc.

Ist von briggischen Logarithmen die Rede, so mufs man für M den (§. 64.) gefundenen Modulus 0,43429 41819 ..... setzen. Für natürliche Logarithmen wird M = 1.

§. 71. So sehr die so eben mitgetheilte Reihen zur Berechnung der Logarithmen der Primzahlen auch convergiren, so lassen sich zu diesem Zwecke doch noch ungleich convergentere Reihen finden, wenn man statt die Primzahl $p = x$ zu setzen, sie zuvor mit einer Zahl m, je gröfser je besser, multiplicirt und $pm = x$ setzt; nur mufs die Zahl m so ausgewählt werden, dafs sie keine Primzahl $> p$ als Factor enthält, und dafs, wenn $pm = x$ weder in $x - 1$ noch $x + 1$ Primzahlen, die nicht kleiner als p sind, als Factoren vorkommmen.

So erhält man z. B., wenn $p = 7$ und $m = 7$, $x = 49$, $x-1 = 48$, $x+1 = 50$

$$\log 49 = \tfrac{1}{2}\log 48 + \tfrac{1}{2}\log 50 + M\left(\frac{1}{4801} + \frac{1}{3.4801^3} + \frac{1}{5.4801^5} + \text{etc.}\right)$$

und daraus $\log 7 = \frac{1}{2}\log 49$.

Eben so wird, wenn $p = 11$ und $m = 9$, $x = 99$, $x-1 = 98$, und $x+1 = 100$,

$$\log 99 = \tfrac{1}{2}\log 98 + \tfrac{1}{2}\log 100 + M\left(\frac{1}{19601} + \frac{1}{3.19601^3} + \frac{1}{5.19601^5} + \text{etc.}\right)$$

und daraus $\log 11 = \log 99 - \log 9$.

§. 72. So findet man durch Versuche oder mit Hülfe einer Factorentafel der natürlichen Zahlen für die successive Berechnung der Logarithmen der folgenden Primzahlen, die Logarithmen der vorhergehenden als gegeben betrachtet, folgende ungemein convergente Reihen

$$\log 13.27 = \tfrac{1}{2}\log 350 + \tfrac{1}{2}\log 352 + M\left(\frac{1}{246401} + \frac{1}{3.246401^3} + \frac{1}{5.246401^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 17.3 = \tfrac{1}{2}\log 50 + \tfrac{1}{2}\log 52 + M\left(\frac{1}{5201} + \frac{1}{3.5201^3} + \frac{1}{5.5201^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 19.11 = \tfrac{1}{2}\log 208 + \tfrac{1}{2}\log 210 + M\left(\frac{1}{87361} + \frac{1}{3.87361^3} + \frac{1}{5.87361^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 23.17 = \tfrac{1}{2}\log 550 + \tfrac{1}{2}\log 552 + M\left(\frac{1}{607201} + \frac{1}{3.607201^3} + \frac{1}{5.607201^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 29.27 = \tfrac{1}{2}\log 782 + \tfrac{1}{2}\log 784 + M\left(\frac{1}{1226177} + \frac{1}{3.1226177^3} + \frac{1}{5.1226177^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 31.11 = \tfrac{1}{2}\log 340 + \tfrac{1}{2}\log 342 + M\left(\frac{1}{232561} + \frac{1}{3.232561^3} + \frac{1}{5.232561^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log 37.19 = \tfrac{1}{2}\log 702 + \tfrac{1}{3}\log 704 + M\left(\frac{1}{988417} + \frac{1}{3.988417^3} + \frac{1}{5.988417^5} + \text{etc.}\right)$$

Will man zur Übung die Reihen für die Logarithmen der übrigen Primzahlen, z. B. bis 109 entwickeln, so darf man nur, indem man

$p = 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109$ setzt,

$m = 41, 43, 47, 53, 41, 43, 37, 67, 73, 91, 83, 73, 83, 97, 67, 43, 89$ annehmen.

§. 73. In den so eben mitgetheilten Beispielen zur Berechnung des Logarithmen einer Primzahl p, wenn die Logarithmen aller Primzahlen $< p$ bekannt sind, wurde der Factor m so gewählt, dafs für $pm = x$, sowohl $x-1$ als auch $x+1$ nur Primzahlen $< p$ zu Factoren hatte. Zuweilen kann aber auch $pm = x-1$ oder $= x+1$ gesetzt werden, dafs im ersten Falle x und $x+1$, und im letztern x und $x-1$ nur Primzahlen $< p$ als Factoren enthalten, alsdann kann man die Formel

$$\log(x-1) = 2\log x - \log(x+1) - 2M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x^2-1)^3} + \tfrac{1}{5}\frac{1}{(2x^2-1)^5} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$\log(x+1) = 2\log x - \log(x-1) - 2M\left(\frac{1}{2x^2-1} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{(2x^2-1)^3} + \text{etc.}\right)$$ gebrauchen.

Nimmt man z. B. für $p = 17$, $m = 26$, so ist $pm = 442$. Hier mufs man $442 = x+1$ setzen, so dafs $441 = 9.49 = x$ und $440 = x-1$, und man erhält

$$\log 17.26 = 2\log 441 - \log 440 - 2M\left(\frac{1}{388961} + \frac{1}{3.388961^3} + \text{etc.}\right)$$

Setzt man für $p = 19$, $m = 128$, so dafs $pm = 2432$, so ist $2431 = 11.13.17$, $2430 = 27.90$. Daher

$$\log 19,128 = 2\log 2431 - \log 2430 - 2M\left(\frac{1}{11819521} + \frac{1}{3,11819521^3} + \text{etc.}\right)$$

Desgleichen erhält man, wenn für $p = 37$, $m = 27$, also $pm = 999 = x-1$, $1000 = x$, $1001 = 7.11.10 = x+1$

$$\log 37.27 = 2\log 1000 - \log 1001 - 2M\left(\frac{1}{1999999} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{1999999^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 74. In Callets Logarithmischen Tafeln (Pariser Ausg. 1795) findet man die briggischen Logarithmen auf 61 Decimalstellen, nebst den natürlichen auf 48 Stellen für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100, und für alle Primzahlen bis 1097. Zugleich sind noch zwei Tafeln für beiderlei Logarithmen von 41 Zahlen, von 999980

bis 1000021 hinzugefügt. In der Tafel der briggischen Logarithmen müssen die zehn ersten Ziffern aus einer vorhergehenden Tafel auf 20 Decimalstellen ergänzt werden. Die briggischen Logarithmen sind von Abraham Scharp, dem gröfsten Rechner seiner Zeit (gest. 1742 im 91sten Jahre seines Alters) berechnet worden, und wurden in Sherwin's mathematical tables p. 36—39 aufgenommen. Die natürlichen Logarithmen hat Wolfram ein holländischer Artillerie-Officier für alle Primzahlen unter 10000 bis zur 48sten Decimalstelle berechnet. Sie sind in Schulzens Sammlung mathematischer Tafeln und daraus in Vega's Tabellen in Folio mit Ergänzungen und Berichtigungen abgedruckt.

§. 75. Die von Sharp berechnete Tafel der briggischen Logarithmen auf 61 Decimalstellen kann dazu dienen, den briggischen Logarithmen jeder Zahl auf eine beliebige Menge von Decimalen, welche die Zahl 61 nicht übersteigt, und umgekehrt aus jedem gegebenen briggischen Logarithmen, mit einer beliebigen Anzahl von Decimalen < 61, die dazu gehörige Zahl auf eben so viel Decimalen zu berechnen. Diese Tabelle, so wie sie sich bei Callet findet, besteht, wie schon bemerkt worden, aus zwei Theilen, wovon der erstere die Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und aller Primzahlen bis 1097, und der zweite die Logarithmen der 41aufeinanderfolgenden Zahlen von 999980 bis 1000021 enthält.

Mit Hülfe der ersten Tabelle findet man den Logarithmen jeder Zahl, wenn sie entweder unmittelbar in derselben enthalten ist, oder sich als ein Product aus Zahlen, die darin vorkommen, darstellen läfst. Das Verfahren, dessen man sich dabei zu bedienen hat, ist von selbst klar und bedarf keiner Erläuterung.

Läfst sich die Zahl, deren Logarithmen man sucht, durch Multiplication oder Division mit einer Potenz von 10 auf eine Zahl bringen, die innerhalb der Grenzen 999980 und 1000021 liegt, so kann man mit Hülfe des 2ten Theils der Sharpschen Tafeln den Logarithmen derselben auf folgende Weise finden:

Es sei die gegebene Zahl b. Man nehme aus der Tabelle die Zahl a, welche der b am nächsten kömmt. Ist nun $a > b$, so hat man

$$\log b = \log a - \log \frac{a}{b} = \S.(65, D)\ \log a - 2M\left(\frac{a-b}{a+b} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \text{etc.}\right)$$

Für $a < b$ erhält man

$$\log b = \log a + \log \frac{a}{b} = \log a + 2M\left(\frac{b-a}{b+a} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \text{etc.}\right)$$

Weil $a-b$ oder $b-a < \frac{1}{2}$ und $a+b > 2 \times 999980$, also $\frac{a-b}{a+b}$ oder $\frac{b-a}{b+a} < \frac{1}{3999920}$, so übersieht man leicht, dafs alle Glieder der mit 2M multiplicirten Reihen, von $\frac{1}{11}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{11}$ an, zusammengenommen, bei weitem kleiner als eine Einheit der 61sten Decimale sein müssen, und folglich vernachläfsigt werden können.

§. 76. Ist die gegebene Zahl, deren Logarithmen man sucht, von der Beschaffenheit, dafs sie sich weder als ein Product aus Factoren, deren Logarithmen in dem ersten Theile der Sharpschen Tabelle enthalten sind, darstellen, noch auf eine innerhalb der Grenzen des zweiten Theils der Tabelle liegende Zahl bringen läfst, so mufs man dieselbe in ein Product aus zwei solchen Factoren zu verwandeln suchen, dafs der Logarithme des ersten vermittelst des ersten Theils, und der Logarithme des andern Factors, mit Hülfe des zweiten Theils der Sharpschen Tafel berechnet werden kann. Diefs geschieht aber auf folgende Weise: Man verwandle die Zahl, deren Logarithmen man berechnen will, durch Multiplication oder Division mit einer Potenz der 10 in eine Zahl $b > 10^6$ und $< 10^7$. Nun suche man eine zwischen 1,000020. b und 0,999980. b liegende ganze Zahl c, welche sich in Factoren zerlegen läfst, deren Logarithmen in der 1sten Tafel von Scharp enthalten sind. Mit dieser dividire man die Zahl b, so wird der Quotient $q > 0{,}999980$ und $< 1{,}000021$ sein.

Es ist nämlich $\frac{b}{0{,}999980\,b} = 1 + 2.10^{-5} + \frac{4.10^{-10}}{0{,}999980} < 1 + 21.10^{-6}$ und

$$\frac{b}{1{,}000020\,b} = 1 - 2.10^{-5} + \frac{4.10^{-10}}{1{,}000020} > 1 - 20.10^{-6}.$$

Da nun $c > 0{,}999980.\,b$ und $< 1{,}000020\,b$, so mufs auch $\frac{b}{c} < \frac{b}{0{,}999980.b}$ und $> \frac{b}{1{,}000020\,b}$

und folglich auch $< 1 + 21.10^{-6}$ und $> 1 - 20.10^{-6}$ oder zwischen den Grenzen 1,000021 und 0,999980 liegen. Es läfst sich demnach jede Zahl b, deren Logarithme nicht unmittelbar weder vermittelst der einen noch der andern Tabelle von Scharp gefunden werden kann, als ein Product aus zwei Factoren cq darstellen, so dafs c sich in Factoren zerlegen läfst, deren Logarithme im ersten Theile der Sharpschen Tabelle, und q innerhalb der Grenzen 1,000021 und 0,999980 liegt, und folglich mit Hülfe des zweiten Theils derselben Tafeln gefunden werden kann.

§. 77. Exempel. Man soll den briggischen Logarithmen der Verhältnifszahl $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83$ etc. des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser, bis auf die 60ste Decimale genau, berechnen.

Durch die Multiplication der Zahl π mit 10^6 erhält man
b = 3141592, 65358 97932 38462 64338 3 etc. Daher b. 1,00002 = 3141655, 485 . . . . und b. 0,99998 = 3141529, 82 . . . . .

Man hat also nur eine Zahl zu suchen, die zwischen 3141656 und 3141529 liegt, und in Factoren, welche in der Tabelle von Sharp vorkommen, zerlegbar ist. Eine solche Zahl ist 3141600 = 168. 187. 100. Dividirt man nun b durch diese Zahl, so erhält man den Quotienten q = 0,99999 76615 70471 49174 . . . . . und es wird

$$\log \text{brig } b = \log 168 + \log 187 + 2 + \log q, \text{ und weil } \pi = \frac{b}{10^6}$$

$$\log \text{brig } \pi = \log 168 + \log 187 - 4 + \log q.$$

Um log q zu berechnen, nehme man in der 2ten Tafel von Sharp die Zahl, welche sich von q am wenigsten unterscheidet, diese ist 0,999998. Bezeichnet man dieselbe durch r, so hat man $r - q = 0{,}00000\ 03384\ 29528\ 50825\ldots$, $r + q = 1{,}99999\ 56615\ 70471\ 49174$ und folglich $\frac{r-q}{r+q} = 0{,}00000\ 01692\ 15131\ 2\ldots$

Den Werth von $\frac{r-q}{r+q}$, bis auf die 61ste Decimale genau berechnet, in

$\log 0{,}999998 - 2M\left(\frac{r-q}{r+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{r-q}{r+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{r-q}{r+q}\right)^5 + \text{etc.}\right)$ substituirt, erhält man log q mit der verlangten Genauigkeit. Die wirkliche Berechnung ist indefs noch immer sehr beschwerlich, weil man, um 60 Decimalen zu haben, wenigstens 4 Glieder der Reihe berechnen mufs.

§. 78. Um aus dem gegebenen briggischen Logarithmen L die dazu gehörige Zahl N auf 61 Decimalen zu finden, verfahre man auf folgende Weise: Man nehme die ersten sieben Ziffern der Mantisse des Logarithmen, und suche, vermittelst der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln mit sieben Decimalen, die dazu gehörige nächste Zahl b bis auf die 7te Decimale. Den Logarithmen einer zwischen 0,999980 b und 1,000021 b liegenden Zahl, nach der Methode des vorigen §. auf 61 Decimalen berechnet, subtrahire man von dem gegebenen Logarithmen, so wird der Rest log brig $\frac{N}{n}$ sein. Von diesem subtrahire man den nächsten Logarithmen der 2ten Sharpschen Tabelle, deren Zahl wir durch v bezeichnen wollen, so ist der Rest = log brig $\frac{N}{nv}$. Diesen mit $\frac{1}{M}$ = log nat 10 = 2,30258 50929 94055 68401 . . . multiplicirt, erhält man log nat $\frac{N}{nv}$. Bezeichnen wir diesen Logarithmen durch ξ, dafs also $\frac{N}{nv} = e^{\xi}$, so hat man (§. 62.)

$$\frac{N}{nv} = 1 + \xi + \xi_c^2 + \xi_c^3 + \xi_c^4 + \text{etc.}$$

Da nun, wie man leicht übersieht, $\xi < 10^{-6}$, so sind in jedem Falle die ersten zehn Glieder der Reihe hinlänglich, um $\frac{N}{nv}$, und folglich auch nv. $\frac{N}{nv} = N$ bis auf die 61ste Stelle genau zu bekommen.

§. 79. Exempel I. Es sei 0,35895 60839 36766 12053 08149 69966 der gegebene Logarithme. Man soll die dazu gehörige Zahl auf eben so viel Decimalen finden. Mit Hülfe der Logarithmen-Tafel auf sieben Decimalen findet man die zum Logarithmen 0,3589560 gehörige Zahl 2,285367. Nun ist aber 228536 = 49. 53. 88 und vermittelst der Calletschen Tafel, auf 61 Decimalen erhält man

log 49 = 1,69019 60800 28513 66142 44325 17185 272

log 53 = 1,72427 58696 00789 04563 29922 91627 256

log 88 = 1,94448 26721 50168 62639 14166 55416 503

Also log 2,28536 = 0,35895 46217 79471 33344 88414 64229 031.

Diesen Logarithmen von dem gegebenen Logarithmen subtrahirt, erhält man

0,00000 14621 57294 78709 19735 05737

Davon subtr. log 1,000003 = 0,00000 13028 81491 38849 55598 62849

bleibt 0,00000 01592 75803 39859 64136 42888.

Diefs ist, wenn N die gesuchte Zahl des oben gegebenen Logarithmen bedeutet,

$\log \text{brig} \frac{N}{2{,}28536.\,1{,}000003}$ Diesen mit $\log \text{nat}\, 10 = \frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots$ multiplicirt, erhält man

$\log \text{nat} \frac{N}{2{,}28536.\,1{,}000003}$ = 0,00000 03667 46090 58025 84607 15652

Es ist also $1 + \xi$ = 1,00000 03667 46090 58025 84607 15652

$\frac{\xi^2}{1.2}$ = 0,00000 00000 00067 25134 74779 51572

$\frac{\xi^3}{1.2.3}$ = 0,00000 00000 00000 00000 82213 89594

$\frac{\xi^4}{1.2.3.4}$ = 0,00000 00000 00000 00000 00000 00754

Also $\frac{N}{2{,}28536.\,1.000003}$ = 1,00000 03667 46157 83161 41600 57572

und folglich N = 2,28536 76942 29513 70305 55230 02382

deren Ziffern alle bei richtig geführter Rechnung bis auf die beiden letzten verbürgt werden können.

§. 80. Die so eben gefundene Zahl N enthält die ersten 29 Ziffern einer Zahl, welche das 100te Glied der Reihe 4, 16, 256, 65536, etc. ausmacht, in welcher jedes Glied des Quadrat des vorhergehenden ist. Man kann nämlich diese Reihe so schreiben 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, etc. oder 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^3}, 2^{2^4}, 2^{2^5}, etc., so dafs das 100te Glied derselben $2^{2^{100}}$ ist. Um diese Zahl zu berechnen, suche man ihren Logarithmen. Dieser ist 2^{100} log 2. Nun findet man aber 2^{100} = 126765 06002 28229 40149 67032 05376.

Diese Zahl besteht aus 31 Ziffern. Man mufs also um auch nur einige der ersten Ziffern der gesuchten Zahl zu erhalten, den Logarithmen von 2 auf mehr als 30 Decimalstellen haben. Nun findet man in Callets Tabellen den briggischen Logarithmen von 2 auf 61 Decimalstellen =

0,30102 99956 63981 19521 37388 94724 49302 67681 89881 46210 85413 10427 5.

Multiplicirt man denselben durch die für 2^{100} gefundene Zahl, so erhält man den briggischen Logarithmen von $2^{2^{100}}$

= 38160 08546 90147 05624 43588 27360, 35895 60839 36766 12053 08149 69966 1.

Dieser Logarithme, kann die Richtigkeit von log brig 2 vorausgesetzt, bis auf die 30ste Decimale verbürgt werden. Die ersten 30 Ziffern der zu demselben gehörigen Zahl sind also, zufolge der im vorigen §. angestellten Rechnung, 228536 76942 29513 79829 49228 1644. Aus der Charakteristik ersieht man, dafs diese Zahl aus 38160 08546 90147 05624 43588 27361 Ziffern bestehen würde.

Sich von der Menge der Einheiten, welche diese Zahl enthält, durch einen körperlichen Raum eine Vorstellung machen wollen, wie klein man auch die Einheiten annehmen mögte, z. B. Millionen- oder Billionentheile eines Kubik-Millimètre, würde vergebliche Mühe sein. Wir wollen uns damit begnügen, die Länge der Linie auszumessen, welche die Ziffern dieser Zahl, in einer Reihe geschrieben, bilden würden. Nehmen wir die Ziffern so klein an, dafs zwanzig derselben auf einen russischen Werschock gehen, so werden, weil ziemlich genau $22\frac{1}{2}$ Werschock einen Mètre ausmachen, 450 solcher Ziffern die Länge eines Mètre, und alle Ziffern der besagten Zahl, wie man leicht übersieht, eine Länge L = 848 001899 311437 902765 241838 Mètres einnehmen. Nun ist die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde ungefähr 152900 000000 Mètres, welche mit 19,1836 multiplicirt, die halbe grofse Axe der Uranus-Bahn giebt, also nicht völlig 30 000000 000000 Mètres grofs ist. Die Länge der Linie L würde demnach weit über 28 000000 000000 mal die Axe der Bahn des Uranus enthalten.

Da das Licht in 8 Minuten 13 Sekunden von der Sonne bis zur Erde gelangt,

also in der Zeit von 493 Sek. einen Raum von 152960 000000 Mètres, und folglich in einer Sekunde mehr als 310 000000 Mètres durchläuft, so wird es, um einen Weg = L zurückzulegen, eine Zeit von mehr als 2 700000 000000 000000 Sekunden, oder, weil das Jahr von 365 T. 5 St. 48′ 49″ = 31 556929 Sekunden, mehr als 86tausend Millionen Jahre brauchen.

§. 81. Exempel II. Man soll die Potenz $1{,}06^{\frac{1}{365}} = N$ bis auf die 61ste Decimalstelle entwickeln.

Mit Hülfe der Sharpschen Tabelle findet man $\log 1{,}06^{\frac{1}{365}} = \frac{1}{365} \log 1{,}06 =$

0,00006 93311 37711 69928 99910 44346 16917 70396 26554 19933 43734 84669 9 = L.

Vermittelst der gewöhnlichen Tabellen mit 7 Decimalen erhält man für den Logarithme 0,0000693 die Zahl $1{,}00016 = \frac{28.\ 47.\ 76}{100000} = a$, deren Logarithme aus der Scharpschen Tafel genommen =

0,00006 94815 58728 03751 77247 12696 73825 86672 64357 99684 49976 89493 1 = L′.

Von diesem Logarithmen L′ den Logarithmen L subtrahirt, erhält man zum Reste L′ — L =

0,00000 01504 21016 33822 77336 68350 56908 16276 37803 79751 06242 04823 2.

Dieser Rest ist der briggische Logarithme von $\frac{a}{N}$. Diesen mit $\frac{1}{M} = \log \text{nat } 10 = 2{,}30258$ etc. multiplicirt, erhält man $\log \text{nat } \frac{a}{N} =$

0,00000 03463 57189 89341 69713 22305 54835 82225 32861 41751 01028 01330 6 = ξ.

Es ist also $\frac{a}{N} = e^{\xi}$ oder $\frac{N}{a} = e^{-\xi}$ und folglich $N = 1{,}00016\,(1 - \xi + \xi_c^2 - \xi_c^3 + \xi_c^4 + \text{etc.})$

$\xi_c^2 =$ 0,00000 00000 00059 98165 14954 32251 69118 43050 51818 18882 09783 26858 8

$\xi_c^3 =$ 69250 25419 04139 54832 19404 56566 02823 14448 8

$\xi_c^4 =$ 599 63308 60199 15012 60377 82567 31397 7

$\xi_c^5 =$ 4 15374 46128 19506 74801 80838 9

$\xi_c^6 =$ 2397 79885 27184 72755 4

$\xi_c^7 =$ 11 86421 24651 1

$\xi_c^8 =$ 5136 6

Daraus erhält man $e^{-\xi} = 1 - \xi + \xi_c^2 - \xi_c^3 + \xi_c^4 - \xi_c^5 + \text{etc.} =$

0,99999 96536 42870 08822 75990 85126 73447 50817 70834 41309 54461 14878 9

und endlich 1,00016. $e^{-\xi}$ oder die gesuchte Zahl N =

1,00015 96535 87452 94744 17155 00980 35475 25977 83917 74660 15413 86257 3.

Obiges Exempel ist aus Sherwins Matematical tables Einl. p. 43 entlehnt worden.

§. 82. Wir erwähnten im Anfange dieser Vorlesung (§. 1.) und später (§. 24.) eines Verfahrens den Exponenten des Verhältnisses zweier gleichartigen Gröfsen näherungsweise durch eine Reihe gewöhnlicher Brüche darzustellen, die von dem wahren Werthe des Exponenten, um so wenig als man will, verschieden sind. Diefs Verfahren kann auch dazu dienen, für jede Zahl $N > 1$ und < 10, deren Logarithmen man berechnen will, einen Bruch $\frac{m}{n}$ zu finden, dessen Logarithme durch die Sharpsche Tabelle gegeben, und von der Beschaffenheit ist, dafs wenn N durch denselben dividirt wird, der Quotient q um weniger als 10^{-6} von 1 abweicht, so dafs sich N als ein Product $\frac{m}{n}.(1+\omega)$, oder $\frac{m}{n}(1-\omega)$, wo $\omega < 10^{-6}$, darstellen läfst, und folglich (§. 65.)

$$\log \text{brig } N = \log \frac{m}{n} + 2M\left(\frac{\omega}{2+\omega} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\omega}{2+\omega}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\omega}{2+\omega}\right)^5 + \text{etc.}\right)$$

oder $\log \text{brig } N = \log \frac{m}{n} - 2M\left(\frac{\omega}{2-\omega} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\omega}{2-\omega}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\omega}{2-\omega}\right)^5 + \text{etc.}\right)$ ist.

Entwickelt man nämlich nach der (§. 24.) gegebenen Vorschrift die Näherungswerthe $\frac{A}{B}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}$, etc., so übersieht man leicht, dafs, wenn man zwei nächst aufeinanderfolgende Brüche dieser Reihe durch $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ bezeichnet, und $N = \frac{m}{n}.q$ setzt, $q = 1+\omega$ oder $1-\omega$ sein wird, wo $\omega < \frac{1}{mn'}$. Die Reihe der Brüche $\frac{A}{B}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}$, etc., ist nämlich von der Beschaffenheit, dafs sie abwechselnd kleiner und gröfser als N sind; und dafs der Unterschied zweier nächst aufeinanderfolgender Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'} = \frac{1}{nn'}$, und folglich der Unterschied der Zahl N und des Näherungswerthes $\frac{m}{n} < \frac{1}{nn'}$ sein mufs. Da nun $N = \frac{m}{n}.q$, so ist $q = \frac{n}{m}N$ und weil N zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ liegt, aber

$\frac{m^I}{n_I} = \frac{m}{n} \pm \frac{1}{nn^I}$ ist, so mufs auch q zwischen $\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}$ und $\frac{n}{m}\left(\frac{m}{n} \pm \frac{1}{nn_I}\right)$, also zwischen 1 und $1 \pm \frac{1}{mn^I}$ liegen. Weil nun die Logarithmen aller Brüche der Reihe $\frac{A}{B}, \frac{A_I}{B_I}, \frac{A_2}{B_2}$, etc. deren Zähler und Nenner nicht mehr als drei Ziffern enthalten, in der Sharpschen Tabellen gefunden werden, so darf man nur den letzten derselben $\frac{m}{n}$, dessen Logarithme gegeben ist, auswählen, und man wird in den meisten Fällen $\frac{1}{mn^I} < 10^{-6}$ finden, so dafs alsdann für die Berechnung von log brig q die 2te Tafel von Sharp völlig entbehrlich ist.

Nehmen wir z. B. N = 3,14159 26535 89792 2 . . . so erhält man, wenn man den Bruch $\frac{31415\ 9265}{10000\ 0000}$ so behandelt, als ob man den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler seines Zählers und Nenners suchte, die Quotienten 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, etc., und daraus ergeben sich, durch das (§. 24.) erwähnte Verfahren für die Näherungswerthe der Zahl N folgende Brüche $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$, etc. Der letzte dieser Brüche, dessen Logarithmen man in der Tafel von Sharp findet, ist $\frac{355}{113}$. Setzt man also $N = \frac{335}{113} \cdot q$, so wird, weil die Brüche $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}$, etc. abwechselnd kleiner und gröfser sind als N, $\frac{355}{113} > N$ und $q = 1 - \omega$ sein, wo $\omega < \frac{1}{355 \cdot 33102}$, also $< 10^{-6}$ sein. Dieses bestätigt sich auch, indem N mit $\frac{355}{113}$ dividirt den Decimalbruch 0,99999 99150 86328 27 giebt. Diesen $= 1 - \omega$ gesetzt, hat man $\omega = 0{,}00000\ 00849\ 13671\ 72$. Man erhält also, wenn man log N nur auf 15 Stellen berechnen will,

$$\log N = \log 355 - \log 113 - 2\,M \cdot \frac{0{,}00000\ 00849\ 13671\ 72}{1.99999\ 99150\ 86328\ 28} = 0{,}49714\ 98726\ 94133\ 92.$$

Die Glieder nach $\frac{\omega}{2-\omega}$ sind, weil schon $\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{2-\omega}\right)^3 < 10^{-17}$, hier alle vernachlässigt werden.

§. 83. Um die zu einem gegebenen briggischen Logarithmen gehörige Zahl zu berechnen, kann man auf ähnliche Weise verfahren. Es sei z. B. der gegebene bereits oben (§. 79.) vorgekommene Logarithme 0,35895 60839 36766; man soll die dazu gehörige Zahl N auf eben so viel Decimalen berechnen. Vermittelst der gewöhnlichen Logarithmen findet man 0,35895 608 = log 2,285367. Nimmt man nun mit dem Bruche $\frac{2285367}{1000000}$ dieselbe Operation vor, als ob man den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler seines Zählers und Nenners finden wollte, so erhält man die Quotienten 2, 3, 1, 1, 58, 5, etc., und daraus (§. 24.) die Näherungswerthe des obigen Bruches $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{7}, \frac{937}{410}, \frac{1701}{2057}$, etc. Setzt man also $N = \frac{937}{410}$ q, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
\log N &= 0{,}35895\ 60839\ 36766\ 12\\
\log 410 &= 2{,}61278\ 38567\ 19735\ 49\\
&\quad 2{,}97173\ 99406\ 56501\ 61\\
\log 937 &= 2{,}97173\ 95908\ 87778\ 28\\
\log \text{brig } q &= 0{,}00000\ 03497\ 68723\ 33
\end{aligned}$$

und diesen mit $\frac{1}{M} = \log \text{nat } 10 = 2{,}30258\ 50929\ 93045\ 68$ multiplicirt

$$\begin{aligned}
\text{erhält man } \log \text{nat } q &= 0{,}00000\ 08053\ 72248\ 33\\
\text{und } \tfrac{1}{2}(\log \text{nat } q)^2 &= 0{,}00000\ 00000\ 00324\ 31\\
\text{und deshalb } q &= 1{,}00000\ 08053\ 72572\ 64\\
\text{und folglich } N = \tfrac{937}{410}\, q &= 2{,}28536\ 76942\ 29513\ 8.
\end{aligned}$$

§. 84. Aus dem, von (§. 73.) an, Vorgetragenen wird man hinlänglich den Gebrauch der Sharpschen Tabelle kennen gelernt haben, um den briggischen Logarithmen jeder Zahl auf eine beliebige Menge von Decimalstellen, welche jedoch die Zahl 61 nicht übersteigen darf, zu berechnen, und umgekehrt für jeden briggischen Logarithmen die dazu gehörige Zahl auf eben so viel Decimalen als der Logarithme enthält, zu finden. Das Verfahren für natürliche Logarithmen ist ganz dasselbe; nur mufs man den Modulus M = 1 setzen, und wenn man aus dem Logarithmen die Zahl herleiten soll, den ersten Theil desselben mit sieben Decimalen durch die Multiplication mit M = 0,43429 448 in einen Briggischen verwandeln, und zu diesem, die Charakteristik = o angenommen, vermittelst der gewöhnlichen Tafeln mit sieben Decimalen, die Zahl auf eben so viele Decimalen suchen, und übrigens ganz *nach* (§. 73.) verfahren.

Es sei z. B. auf jede Anzahl von Decimalen < 48 die Zahl des natürlichen Log. 1,14472 98858 49400 17414 34723 51353 05871 16472 94812 916 zu berechnen. Man nehme die ersten acht Ziffern desselben 1,14472 988, so erhält man durch die Multiplication dieser Zahl mit 0,43429 448, das Product 0,4971 499. Die dazu gehörige Zahl ist 3,141593, dessen Näherungswerth $\frac{355}{113}$. Nun findet man in den Calletschen Tafeln log nat $\frac{355}{113} = \text{l. } 5 + \text{l. } 71 - \text{l. } 113 = 1{,}14472\ 99707\ 63075\ 22734\ 80723\ 72123\ 20006\ 42558\ 47492\ 277$. Von diesem den gegebenen Logarithmen subtrahirt, erhält man zum Reste $\xi = 0{,}00000\ 00849\ 13675\ 05320\ 46000\ 20770\ 14135\ 26085\ 52679\ 361$. Substituirt man diesen Werth in $e^{-\xi} = 1 - \xi + \xi_c^2 - \xi_c^3 + \text{etc.}$, und multiplicirt das Resultat durch $\frac{355}{113}$, so erhält man die gesuchte Zahl $= \pi$ (§. 77.)

§. 85. Eine ähnliche Tabelle, wie die (§. 42.) mitgetheilte, sowohl für briggische als natürliche Logarithmen auf eben so viel Decimalstellen berechnet, wie die Sharpsche und Wolframsche würde die Berechnung des Logarithmen einer Zahl oder der umgekehrten Aufgabe auf eine grofse Menge Decimalen sehr vereinfachen und erleichtern. Für die natürlichen Logarithmen habe ich eine Tabelle auf 48 Decimalen berechnet, die ich gelegentlich mittheilen werde, unterdefs erlaube ich mir hier eine solche Tabelle für briggische Logarithmen, aus 16 Decimalen aus der am Ende von Westphals Logarithmischen Tafeln befindlichen Hülfstafel entlehnt, beizufügen. Den Gebrauch derselben lernt man aus (§. 42.) Die Berechnung einer solchen Tabelle, sowohl für briggische als auch für natürliche Logarithmen, hat übrigens keine grofse Schwierigkeit. Die Logarithmen der ersten 36 Zahlen derselben findet man schon in den Calletschen Tafeln. Die Logarithmen der übrigen Zahlen, von 1,0001 an, lassen sich am bequemsten vermittelst der Formel $\log(1 + x.10^{-n}) = Mx.10^{-2n} - \frac{Mx^2}{2}.10^{-2n} + \frac{M}{3}x^3\,10^{-3n} -$ etc. berechnen, wozu man sich einer zu diesem Behufe berechneten Tabelle der Werthe von Mx, $\frac{Mx^2}{2}$, $\frac{Mx^3}{3}$, etc. für 1, 2, 3, ... bis 9 bedienen kann.

x	log brig x	log brig 1,x	log brig 1,0x	log brig 1,00x	x
1	0,00000 00000 00000 0	0,04139 26851 58225 0	0,00432 13737 82642 6	0,00043 40774 79318 6	1
2	0,30102 99956 63981 2	0,07918 12460 47624 8	0,00860 01717 61917 6	0,00086 77215 31226 9	2
3	0,47712 12547 19662 4	0,11394 33523 06836 8	0,01283 72247 05172 2	0,00130 09350 20418 1	3
4	0,60205 99913 27962 4	0,14612 80356 78238 0	0,01703 33392 98780 4	0,00173 37128 09000 5	4
5	0,69897 00043 36018 8	0,17609 12590 55681 2	0,02118 92990 69938 1	0,00216 60617 56507 7	5
6	0,77815 12503 83643 6	0,20411 99826 55924 8	0,02530 58652 64770 2	0,00259 79807 19908 6	6
7	0,84509 80400 14256 8	0,23044 89213 78273 9	0,02938 37776 85209 6	0,00302 94705 53618 0	7
8	0,90308 99869 91943 6	0,25527 25051 03306 1	0,03342 37554 86949 7	0,00346 05321 09506 5	8
9	0,95424 25094 39324 9	0,27875 36009 52829 0	0,03742 64979 40623 6	0,00389 11662 36910 5	9

x	log brig 1,000x	log brig 1,0000x	log brig 1,00000x	log brig 1,00000 0x	x
1	0,00004 34272 76862 7	0,00000 43429 23104 5	0,00000 04342 94264 8	0,00000 00434 29446 6	1
2	0,00008 68502 11649 0	0,00000 86858 02780 3	0,00000 08685 88095 2	0,00000 00868 58887 7	2
3	0,00013 02688 05227 1	0,00001 30286 39028 5	0,00000 13028 81491 4	0,00000 01302 88325 0	3
4	0,00017 36830 58464 9	0,00001 73714 51849 8	0,00000 17371 74453 3	0,00000 01737 17758 0	4
5	0,00021 70929 72230 2	0,00002 17141 81245 2	0,00000 21714 66980 9	0,00000 02171 47186 7	5
6	0,00026 04985 47590 3	0,00002 60568 87215 4	0,00000 26057 59074 2	0,00000 02605 76611 0	6
7	0,00030 38997 84812 5	0,00003 03995 49761 4	0,00000 30400 50733 2	0,00000 03040 06030 9	7
8	0,00034 72966 85363 5	0,00003 47421 68884 0	0,00000 34743 41957 9	0,00000 03474 35446 5	8
9	0,00039 06892 49910 1	0,00003 90847 44584 2	0,00000 39086 32748 3	0,00000 03908 64857 8	9

x	log brig 1,00000 00x	log brig 1,00000 000x	Vielfache des Modulus	Vielfache von l. nat 10	x
1	0,00000 00043 42944 8	0,00000 00004 34294 5	0,43429 44819 03251 8	2,30258 50929 94045 7	1
2	0,00000 00086 85889 6	0,00000 00008 68589 0	0,86858 89638 06503 7	4,60517 01859 88091 4	2
3	0,00000 00130 28834 3	0,00000 00013 02883 4	1,30288 34457 09755 5	6,90775 52789 82137 1	3
4	0,00000 00173 71778 9	0,00000 00017 37177 9	1,73717 79276 13007 3	9,21034 03719 76182 7	4
5	0,00000 00217 14723 6	0,00000 00021 71472 4	2,17147 24095 16259 1	11,51292 54649 70228 4	5
6	0,00000 00260 57668 1	0,00000 00026 05766 9	2,60576 68914 19511 0	13,81551 05579 64274 1	6
7	0,00000 00304 00612 7	0,00000 00030 40061 4	3,04006 13733 22762 8	16,11809 56509 58319 7	7
8	0,00000 00347 43557 2	0,00000 00034 74355 8	3,47435 58552 26014 6	18,42068 07439 52365 5	8
9	0,00000 00390 86501 6	0,00000 00039 08650 3	3,90865 03371 29266 4	20,72326 58369 46411 2	9

§. 86. Um den Gebrauch der obigen Tabelle mit der Sharpschen zu vergleichen, folgt hier die Übersicht der Berechnung zweier bereits (§. 77, 79.) vorgekommenen Exempel.

Exempel I. Den Logarithmen der Zahl $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 238$ zu finden.

Multiplicanden.	Multiplicatoren.	Logarithmen.
3,14159 26535 89793 238	3	0,47712 12547 19662 4
0,42477 79607 69379 714	1,06	0,02530 58652 64770 2
0,99026 46384 15542 497	1,0009	0,00039 06892 49910 1
0,99925 58765 90116 485	1,00007	0,00003 03995 49761 4
0,99995 58245 01577 793	1,00000 4	0,00000 17371 74453 3
0,99999 58243 24765 799	1,00000 04	0,00000 01737 17758 0
0,99999 98243 23095 529	1,00000 001	0,00000 00043 42944 8
0,99999 99243 23093 772	1,00000 0007	0,00000 00030 40061 4
0,99999 99943 23093 242	1,00000 00056 76906 7	0,00000 00024 65449 3
		0,50285 01295 24870 9

Folglich $\log \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94133\ 4$

Exempel II. Man sucht die zu dem briggischen Logarithmen 0,35895 60839 36766 1 gehörige Zahl.

Logarithmen.	Zahlen.	Multiplicanden.	Multiplicatoren.
0,35895 60839 36766 1		1,00000 00014 17896 5	1,00000 002
		200 00000 0	
0,30102 99956 63981 2	2	1,00000 00214 17898 5	1,00000 07
0,04139 26851 58225 0	1,1	7000 00015 0	
0,01283 72247 05172 2	1,03	1,00000 07214 17913 5	1,00000 2
0,00346 05321 09506 5	1,008	20000 01442 8	
0,35872 04376 36884 9		1,00000 27214 19356 3	1,00004
		4 00001 08856 8	
0,00023 56462 99881 2		1,00004 27215 28213 1	1,0005
		50 00213 60764 1	
0,00021 70929 72230 2	1,0005	1,00054 27428 88977 2	1,008
0,00001 73714 31849 8	1,00004	800 43419 43111 8	
0,00000 08685 88093 2	1,00000 2	1,00854 70848 32089 0	1,03
0,00000 03040 06030 9	1,00000 07	3025 64125 44962 7	
0,00000 00086 85889 6	1,00000 002	1,03880 34973 77051 7	1,1
0,00023 56456 84093 7		10388 03497 37705 2	
0,00000 00006 15785 5	1,00000 00014 17898 5	1,14268 38471 14757 9	2
		2,28536 76942 29513 8	

Also die gesuchte Zahl = 2,28536 76942 29513 8.

Dafs in dem ersten Exempel log brig 1,00000 00056 76907 = 0,00000 00024 65449 3 durch die Multiplication von 0,00000 00056 76907 mit dem Modulus, und in dem 2ten die zu dem briggischen Logarithmen 0,00000 00006 15785 5 gehörige Zahl = 1,00000 00014 17898 5 durch die Multiplication desselben mit log nat 10 gefunden, und dazu die beiden Täfelchen der Vielfachen von M und log nat 10 gebraucht worden, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

§. 87. Da der binomische Lehrsatz und die Logarithmen mit besondern Nutzen in der Lehre von der Rentenrechnung gebraucht werden können, so wird es nicht unzweckmäfsig sein, diesen Gegenstand hier zum Beschlusse dieser Vorlesung mit einiger Umständlichkeit abzuhandeln.

Unter Rente versteht man jede Geldeinnahme, die nach bestimmten gleichen Zwischenzeiten erhoben wird. Sie ist eine jährliche, halbjährliche, vierteljährliche, monatliche etc. Rente, je nachdem sie alle Jahr, alle halbe, alle Vierteljahr oder monatlich bezahlt wird. Wird sie auf eine bestimmte Zeit von Terminen bezahlt, so heifst sie eine Zeitrente. Hängt ihre Auszahlung aber von der Lebensdauer einer oder mehrerer Personen ab, so wird sie eine Leibrente oder Lebensrente genannt.

Ein Kapital, dessen einjähriger Zins der Einheit gleich ist, wollen wir mit Tetens das Grundkapital schlechtweg, oder auch das Grundkapital des jährlichen, halbjährlichen etc. Zinses a, nennen, wenn dasselbe jährlich, halbjährlich, etc. den Zins a einträgt.

Eben so soll die mit dem Jahreszinse angewachsene Einheit der Zinsfufs heifsen. So ist z. B., wenn 3, 4 oder 5 Procent Zinsen gezahlt werden, das respective Grundkapital $33\frac{1}{3}$, 25, 20, und der respective Zinsfufs 1,03; 1,04; 1,05.

§. 88. Die Gröfse eines, mehrere Jahre hindurch durch die alljährlich zum Kapitale hinzugefügten Zinsen, angewachsenen Kapitals ist gleich dem Producte aus dem anfänglichen Kapitale multiplicirt mit einer Potenz des Zinsfufses, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich

ist, oder wenn $1+\omega$ der Zinsfufs, so ist $A.(1+\omega)^n$ der Werth des anfänglichen Kapitals A nach n Jahren.

Die verschiedenen Werthe A, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. des Kapitals im Anfange, nach einem, zwei, drei, etc., Jahren, bilden nämlich eine geometrische Reihe, in welcher jedes Glied sich zu dem nächstfolgenden verhält, wie 1 zum Zinsfufse $1+\omega$, oder in welcher jedes Glied aus dem nächstvorhergehenden entsteht, indem man dasselbe mit $1+\omega$ multiplicirt, so dafs $A_1 = (1+\omega)A$, $A_2 = (1+\omega)A_1 = (1+\omega)^2 A$, $A_3 = (1+\omega)A_2 = (1+\omega)^3 A$, und allgemein $A_n = (1+\omega)^n A$.

Wie man A_n mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes berechnet, ist schon (§. 53.) an einigen Beispielen gezeigt werden.

Vermittelt der Logarithmen findet man den Werth von A_n, wenn man den Logarithmen von $1+\omega$ mit n multiplicirt, und dazu den Logarithmen von A addirt. Man erhält alsdann log A_n, wozu die Zahl A_n aus den Tafeln gefunden wird.

Bequemer aber ist es, wenn man viele dergleichen Rechnungen zu machen hat, sich einer Tabelle, wie der am Ende dieser Vorlesung abgedruckten Tabelle (A) zu bedienen. Das Verfahren dabei bedarf kaum einer Erläuterung. Soll man z. B. den Werth eines Kapitals von 15000 Rubel nach 19 Jahren berechnen, wenn die Zinsen mit 4 Procent zum Kapitale geschlagen werden, so darf man nur die in der Tabelle beim 19ten Jahre unter 4 Procent stehende Zahl 2,10684 91760 durch 15000 multipliciren. Man erhält alsdann 31602,7376 Rubel oder 31602 Rubel 74 Kopeken.

§. 89. Weil $A_n = (1+\omega)^n A$, so ist $A = A_n \cdot \frac{1}{(1+\omega)^n} = A_n(1+\omega)^{-n}$ oder der gegenwärtige Werth eines nach mehreren Jahren zahlbaren Kapitals ist gleich, dem zu zahlenden Kapitale durch eine Potenz des Zinsfufses, dessen Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, dividirt.

Die Summe, A_n in A verwandeln, heifst sie auf n Jahre zurückdiscontiren.

Beispiele von der Berechnung dieser Aufgabe, vermittelst des binomischen Lehrsatzes findet man (§. 53.)

Der Gebrauch der Logarithmen zu diesem Zwecke ist in der Gleichung log A_n = log A — n log $(1+\omega)$ enthalten.

Die am Ende der Vorlesung in dieser Absicht mitgetheilte Tabelle ist aber am bequemsten. So erhält man z. B. den gegenwärtigen Werth eines nach 19 Jahren zahlbaren Kapitals von 15000 Rubel, wenn 4 Procent Zinses-Zinsen gerechnet werden, = 15000 × 0,47464 24240 = 7119 Rubel 63,6 Kopeken.

§. 90. Werden die Zinsen eines Kapitals statt jährlich alle halbe Jahre gezahlt, und können sogleich wieder untergebracht werden, so bekömmt der Gläubiger auf die Weise offenbar mehr Zinsen als im ersten Falle. Ist nämlich der Zinsfufs $1+\omega$, also der jährliche Zins für die Einheit ω, und der halbjährliche $= \frac{\omega}{2}$, so verwandelt sich die Einheit nach einem halben Jahre in $1+\frac{\omega}{2}$, und wird am Ende des 2ten halben Jahres $(1+\frac{\omega}{2})^2 = 1+\omega+\frac{\omega^2}{4}$. Es ist also in diesem Falle der Zins des Kapitals A nach einem Jahre um $\frac{A\omega^2}{4}$ gröfser, als wenn er alljährlich gezahlt wurde. Bei 5 Procent beträgt dieser Unterschied $\frac{A.0{,}05^2}{4} = \frac{A}{1600}$.

Wächst das Kapital A alle Tertial in dem Verhältnifs 1 zu $1+\frac{\omega}{3}$, so verwandelt es sich nach einem Jahre in $(1+\frac{\omega}{3})^3 A = (1+\omega+\frac{\omega^2}{3}+\frac{\omega^3}{27})A$.

Überhaupt wird ein Kapital A, welches am Ende eines jeden Zeittheils, deren m unter sich gleiche ein Jahr ausmachen, in dem Verhältnisse 1 zu $1+\frac{\omega}{m}$ zunimmt, am Ende des Jahres auf $(1+\frac{\omega}{m})^m A$ angewachsen sein. Dieser Werth ist, wie wir (§. 60.) gesehen haben,

$$= 1+\omega+(1-\tfrac{1}{m})\omega_c^2+(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m})\omega_c^3+(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m})(1-\tfrac{3}{m})\omega_c^4+\text{etc.},$$

nimmt zu, wenn m gröfser wird, und nähert sich immer mehr dem Werthe von $1+\omega+\omega_c^2+\omega_c^3+\omega_c^4+\text{etc.} = e^\omega$, ohne ihn jedoch zu erreichen. Wie grofs also auch die Zahl m der in einem Jahre enthaltenen Zahlungstermine sein mag, so beträgt der Zins am Ende des Jahres doch nicht völlig $\omega+\omega_c^2+\omega_c^3+\text{etc.}$ oder nicht völlig so viel, als ob die Zinsen alljährlich nach dem Zinsfufse e^ω gezahlt würden. Dieser Zinsfufs e^ω

ist übrigens nur um sehr weniges von dem Zinsfufse $1+\omega$, nämlich um $\omega_c^2+\omega_c^3+\omega_c^4+$ etc. verschieden. Ist z. B. $\omega = 0{,}05$, so beträgt dieser Unterschied nur 0,00127 11 . . . .

§. 91. Wenn die Hälfte der jährlichen Zinsen halbjährlich eingenommen, und sogleich wieder zum Kapitale geschlagen wird, so ist der Werth eines Kapitals A nach n Jahren, wenn der Zinsfufs $1+\omega$, $(1+\frac{\omega}{2})^{2n}A=[(1+\frac{\omega}{2})^2]^nA=(1+\omega+\frac{\omega^2}{4})^nA$, also eben so grofs als wenn die Zinsen jährlich, nach dem Zinsfufse $1+\omega+\frac{\omega^2}{4}$, gezahlt würden. Eben so wird ein Kapital A in n Jahren, die Zinsen alle Tertial, oder alle Quartal ausgezahlt, resp. zu $(1+\frac{\omega}{3})^{3n}A$ oder $(1+\frac{\omega}{4})^{4n}A$, folglich eben so anwachsen, als wenn der Zinsfufs $(1+\frac{\omega}{3})^3=1+\omega+\frac{\omega^2}{3}+\frac{\omega^3}{27}$, oder $(1+\frac{\omega}{4})^4=1+\omega+\frac{3}{8}\omega^2+\frac{1}{16}\omega^3+\frac{\omega^4}{64}$, wäre. Überhaupt wird, wenn, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, die Zinsen in m gleich weit von einander abstehenden Terminen alljährlich gezahlt werden, so dafs auf jeden Termin $\frac{\omega}{m}$, als Zins für die Einheit kömmt, der Werth des Kapitals A nach n Jahren $(1+\frac{\omega}{m})^{mn}A$ oder $[(1+\frac{\omega}{m})^m]^nA$, folglich eben so grofs sein, als würden die Zinsen am Ende eines jeden Jahres nach dem Zinsfufse $(1+\frac{\omega}{m})^m$

$$= 1+\omega+(1-\frac{1}{m})\omega_c^2+(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\omega_c^3+\text{ etc. gezahlt.}$$

Diese Zahl ist um so gröfser, je gröfser die Menge der Jahrestermine m ist, und nähert sich immer mehr dem Werthe der unendlichen Reihe

$1+\omega+\omega_c^2+\omega_c^3+\omega_c^4+$ etc. $=e^\omega$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, welche (§. 62.) = 2,71828 18284 59045 . . . ist.

Auf die Weise würde ein Kapital, welches in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen, $\frac{1}{m}$ Jahr, in dem Verhältnisse 1 zu $1+\frac{\omega}{m}$ anwächst, in mehreren Jahren so zunehmen, als ob es alljährlich in dem Verhältnisse $1:e^\omega$ oder nach dem Zinsfufse e^ω anwüchse, wie bereits im vorigen §. bemerkt worden.

§. 92. Aufgabe. Den Zins eines Kapitals A zu bestimmen, der in jedem nten

Theil des Jahres bezahlt werden mufs, damit, wenn dieser Zins jedesmal wieder zum Kapital geschlagen wird, der jährliche Zinsfufs $1+\omega$ sei

Es sei der gesuchte Zins = x, so wird die Einheit nach 1, 2, 3, 4, etc. ntel Jahr auf $1+\frac{x}{A}$, $(1+\frac{x}{A})^2$, $(1+\frac{x}{A})^3$, etc. und folglich nach n solschen Theilen oder nach einem Jahre zu $(1+\frac{x}{A})^n$ angewachsen sein. Setzt man nun $(1+\frac{x}{A})^n = 1+\omega$, so erhält man $x = A(1+\omega)^{\frac{1}{n}}-A$.

So findet man, weil nach der Berechnung von (§. 81.) $1{,}06^{\frac{1}{365}}=1{,}00015\,9653\ldots$, dafs der tägliche Zins eines Kapitals von 100000 Rubel, 15 Rubel 69,5 Kopeken beträgt. Würden statt dessen täglich $\frac{0{,}06}{365}\cdot 100000 = 16$ Rubel 43,9 Kopeken gezahlt, so wäre dies eben so gut, als ob man das Kapital nach einem jährlichen Zinsfufse von $(1+\frac{0{,}06}{365})^{365} = 1+0{,}06+(1-\frac{1}{365})\frac{0{,}0036}{2}+(1-\frac{1}{365})(1-\frac{2}{365})\frac{0{,}000216}{2.3}+$ etc. also ungefähr zu 6,18 Procent verzinsete.

§. 93. Wir haben so eben gesehen, dafs ein Kapital A in dem nten Theile eines Jahres, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, auf $A(1+\omega)^{\frac{1}{n}}$, und allgemein in m solchen Theilen des Jahres auf $A(1+\omega)^{\frac{m}{n}}$ anwächst, vorausgesetzt, dafs die Zinsen für jedes ntel Jahr wieder zum Kapitale hinzugefügt werden. Diefs gilt übrigens für alle beliebige ganze Zahlen n und m, wie grofs dieselben auch sein mögen, so dafs allgemein der Werth eines Kapitals A naeh t Jahren, t mag eine ganze oder gebrochene Zahl sein, bei dem Zinsfufse $1+\omega$ zu $A(1+\omega)^t$ anwachsen wird. Daraus folgt denn auch umgekehrt, dafs der gegenwärtige Werth eines Kapitals A nach t Jahren zahlbar, $A(1+\omega)^{-t}$ oder $\frac{A}{(1+\omega)^t}$ sein mufs.

In den öffentlichen Leihbanken pflegt man, wenn die Zinsen alljährlich zu Kapital gerechnet werden, die Zinsen, für kleinere Zeiträume als das Jahr, auf folgende Weise zu berechnen. Das Jahr wird zu 360 Tage, jeder Monat zu 30 Tage angenommen. Um nun den Werth eines Bankbillets nach n Jahren r Tagen zu bestimmen, kömmt es darauf an, ob r > oder nicht > 180 Tage. Im ersten Falle werden

zu dem Werthe eines Kapitals A, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, nach n Jahren $= A(1+\omega)^n$, noch die Zinsen von $A(1+\omega)^n$ für r Tage $= A(1+\omega)^n . \frac{r\omega}{360}$ hinzugefügt, so dafs der Werth des Kapitals A nach n Jahren r Tagen $= A(1+\omega)^n (1+\frac{r\omega}{360})$. Ist r nicht > 180 Tage, so berechnet man zuerst den Werth des Kapitals A für $n-1$ Jahre $= A(1+\omega)^{n-1}$, und addirt dazu den Zins des so angewachsenen Kapitals für $360+r$ Tagen $= A(1+\omega)^{n-1} \frac{360+r}{360}\omega$, und man erhält auf die Weise den Werth des Kapitals nach n Jahren r Tagen $= A(1+\omega)^{n-1}.(1+\frac{360+r}{360}\omega) = A(1+\omega)^n + A(1+\omega)^{n-1} . \frac{r\omega}{360}$. Für $n=o$ ist der letzte Theil $=o$, und die Bank giebt gegen Einlieferung des Bankbillets blofs das Kapital A ohne Zinsen zurück.

So erhielt man, für ein Kommerzbank-Billet von 5000 Rubel vom 7. Februar 1823, am 2. April 1828, wo noch 5 Procent gezahlt wurden, aus der Bank 6427 Rbl. 82. Kp. Die Zeit vom 7. Februar 1823 bis 2. April 1828 ist nämlich 5 Jahre 2 Monate weniger 5 Tage oder 5 Jahre 55 Tage. Nun ist Tab. (A) der Werth des Kapitals von 5000 Rbl. nach 4 Jahren zu 5 Procent $=$ 6077 Rubel 53 Kopeken. Dazu den Zins von $360+55 = 415$ Tagen, welcher 6077,53 Rubel $\times \frac{415}{360.20} = 350$ Rubel 30 Kopeken beträgt, addirt, erhält man 6427 Rubel 83 Kopeken als den Werth des Bankbillets am 2ten April 1828.

Ein anderes Bankbillet von 1000 Rubel vom 7. April 1823 wurde am 2ten April 1828 mit 1275 Rubel 43 Kopeken eingelöset. Das Alter dieses Billets war nämlich 5 Jahre weniger 5 Tage oder 4 Jahre 355 Tage, der Werth des Kapitals von 1000 Rubel nach 4 Jahren ist $1000.1{,}05^4 = 1215$ Rubel 50 Kopeken. Dazu die Zinsen von 355 Tagen $= 1215{,}50 . \frac{355}{7200} = 59$ Rubel 93 Kopeken, erhält man 1275 Rbl. 43 Kop.

Berechnet man diese beiden Billete nach der für den Werth eines Kapitals A nach t Jahren gegebenen Formel $A(1+\omega)^t$, und nimmt jedes Jahr zu 365 an, so dafs man den 29sten Februar im Schaltjahr nicht achtet, so ist der Werth des 1sten Billets $5000.1{,}05^{5+\frac{5}{365}}$, und des 2ten $= 1000.1{,}05^{4+\frac{360}{365}}$. Berechnet man diese beiden Werthe mit Hülfe der gewöhnlichen Logarithmen, so erhält man, weil log 1,05 $= 0{,}02118\ 92991$.

Fürs erste Bankbillet.		Fürs zweite Bankbillet.	
5 log 1,05	= 0,10594 64955	5 log 1,05	= 0,10594 64955
$\frac{1}{73}$ log 1,05	= 0,00319 29081	$-\frac{1}{73}$ log 1,05	= 0,00029 02644
	0,10913 94036.		0,10565 62311.
Die dazu gehörige Zahl 1,28570 mit 5000 multiplicirt, erhält man 6428 R. 50 K.		Die dazu gehörige Zahl 1,275427 mit 1000 multiplicirt, giebt 1275 Rbl. 42,7 Kp.	

Aus diesen beiden Beispielen ersieht man, was sich auch voraussehen liefs, dafs eine Leihbank, wenn sie nach den oben vorausgesetzten Princip die Zinsen bezahlt, gewinnt, wenn in der Zeit von n Jahren r Tagen $r < 180$; hingegen verliert, wenn $r > 180$ und zwar um so mehr, je kleiner der Unterschied von r und 180.

§. 94. Dafs ein Kapital, dessen Zinsen beständig wieder in Kapital verwandelt werden, während die Zeit gleichförmig fortschreitet in geometrischer Progression zunimmt und mit stets wachsender Geschwindigkeit zu einer verhältnifsmäfsig bedeutenden Summe anwächst, davon überzeugt schon ein Blick auf Tabelle (A) am Ende dieser Vorlesung. Indefs bleibt diese Summe doch noch immer im Verhältnisse mit dem anfänglichen Kapitale sehr beschränkt, so lange die Zeit nicht über die gröfste menschliche Lebensdauer hinausreicht. Allein diese Grenze einmal überschritten, kann das Kapital zu einer, alle Vorstellung übersteigbaren, Gröfse anwachsen. Folgende Beispiele, die zugleich zur Übung im Rechnen dienen können, werden in dieser Hinsicht vielleicht nicht unwillkommen sein.

Exempel I. Wie lange mufs ein Kapital zu 5 Procent Zinsen auf Zinsen ausstehen, damit es 900 mal gröfser wird. Aus der Formel $(1+\omega)^t = s$ folgt $t \log(1+\omega) = \log s$. Folglich, weil $1+\omega = 1{,}05$, $s = 900$, $t \log 1{,}05 = \log 900$, ist $t = \frac{\log 900}{\log 1{,}05} = \frac{2{,}9542425}{0{,}0211893} = 139{,}42$ Jahr.

Eine Million Pfund Sterling würde demnach in 140 Jahren zu einer Summe von

900 Millionen Pf. St. anwachsen, einer Summe, welcher die englische Staatsschuld bereits sehr nahe ist.

Exempel II. In wie viel Zeit wird ein russischer Imperial zu 5 Procent Zinsen auf Zinsen zu einer solchen Summe anwachsen, dafs das Volumen der dazu erforderlichen Masse reines Gold, das Volumen unserer Erdkugel übertrifft?

Betrachten wir die Erde als eine Kugel, so ist, wenn π die Verhältnifszahl des Kreisumfanges zum Durchmesser, r den Halbmesser, D den Durchmesser und P den Meridian der Erdkugel bedeutet, das Volumen derselben $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{P^3}{6\pi^2}$. Da nun der vierte Theil des Erdmeridians zehn Millionen Mètres hält, also $P = 40.10^6$ Mètres, und $\pi = 3{,}14159265$ etc. ist, so ist $\frac{P^3}{6\pi^2} = \frac{64000.10^{18}}{6\pi^2}$ $> 1080.10^{18}$ und $< 1081 .10^{18}$ Kubikmètres.

Nun wird aber bekanntlich das absolute Gewicht des Würfels des hunderten Theils des Mètre des destilirten Wasser in seiner gröfsten Dichtigkeit ein Gramme genannt, dafs also ein Kubikmètre solches Wasser 100^3 oder eine Million Grammen $= 1000$ Kilogrammen wiegt. Da nun das specifische Gewicht des Goldes 19,258 ist, so wird das Gewicht eines Kubikmètre Gold $= 19258$ Kilogrammen sein.

Es enthalten aber nach Nelkenbrecher $19\frac{7}{11}$ Imperialen eine kölnische Mark fein Gold, und weil ein Kilogramme ungefähr $4\frac{9}{32}$ köln. Mark ausmacht, so ist der Werth eines Kilogrammes fein Gold ungefähr 84 Imperialen. Aus einem Kubikmètre reines Gold können demnach 19258×84 oder 1617672 Imperialen geprägt werden. Da nun das Volumen der Erdkugel < 1081 Trillionen Kubikmètres und $1081 \times 1617672 = 1748\ 703432 < 1749$ Millionen, so ist eine Masse Gold von diesem Volumen zu 1749 Quatrillionen Imperialen noch nicht zureichend. Setzt man aber $1{,}05^t = 1749.10^{24}$, so erhält man $t = \frac{24 + \log 1749}{\log 1{,}05} = \frac{27{,}2427898}{0{,}0211893} = 1285$.

Ein Imperial würde demnach zu 5 Procent Zinsen auf Zinsen in 1300 Jahren zu einem solchen Kapitale anwachsen, dafs das Volumen des dazu erforderlichen reinen Goldes gröfser als das Volumen unserer Erdkugel sein würde.

Exempel III. Den Werth eines Kapitals von einem Imperial, die Zinsen zu 5 Procent alljährlich zu Kapital gemacht, nach 6500 Jahren zahlbar, zu berechnen.

Der Ausdruck für die Menge der Einheiten, wozu die Einheit in 6500 Jahren zu 5 Procent anwächst, ist $1{,}05^{6500}$. Da nun, wie bereits in dem 2ten Exempel gezeigt worden, eine Kubikmètre reines Gold 1617672 Imperialen enthält, so ist das Volumen der Masse Gold, wozu der Imperial in 6500 Jahren zu 5 Procent anwächst $= \frac{1{,}05^{6500}}{1617672}$ Kubikmètres. Verwandelt man diefs Volumen in eine Kugel, oder setzt $\frac{1{,}05^{6500}}{1617672} = \frac{4}{3}\pi r^3$, wo π die bekannte Verhältnifszahl des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser, und r den Radius der Kugel bedeutet, so erhält man $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}.\frac{1{,}05^{6500}}{1617672}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}05^{6500}}{2156896\pi}}$. Nun ist log 1,05 = 0,02118 92990 7.

Also 6500 log 1,05	=	137,73044 39
Compl. log 2156896	=	3,66617 07
Compl. log π	=	9,50285 01
Daher log $\frac{1{,}05^{6500}}{2156896\pi}$	=	130,89946 47
und log r	=	43,63315 49.

Demnach $r = 4{,}29689 \times 10^{43} = 429689.10^{38}$ Mètres. Statt log 2156896 und log π von 6500 log 1,05 zu subtrahiren, haben wir die logarithmischen Complemente der beiden Zahlen 2156896 und π addirt; die Charakteristik der Summe 150, aber um 2×10 vermindert. Das logarithmische Complement einer Zahl N ist nämlich $= 10 -$ log N. Es ist also einerlei, ob man compl. log N addirt oder log N subtrahirt, wenn man nur nicht vergifst, die Charakteristik der Summe um 10 zu vermindern.

Da nun das Licht in ungefähr 493 Sekunden den Weg von der Sonne bis zur Erde, also etwa 152900 000000 Mètres, und folglich in einer Sekunde weniger als 320 Millionen Mètres durchläuft, so wird es in einem Jahre $= 31\ 556929$ Sekunden noch nicht völlig 10000 Billionen Mètres zurücklegen, also mehr als $\frac{429689.10^{38}}{10^{16}}$ oder 4296,89 Quatrillionen Jahre gebrauchen, um den Halbmesser der Kugel zu durchlau-

laufen, welche dem Volumen der Masse Gold, wozu ein Imperial in 6500 Jahren zu 5 Procent Zinseszinsen anwächst, gleich ist.

§. 95. Der baare Werth einer Zeitrente mehrere Jahre hindurch am Ende jedes Jahres zahlbar, ist gleich dem Grundkapitale der Zeitrente (§. 87.) weniger dem baaren Werthe desselben am Ende des letzten Zahlungs-Jahres zahlbar.

Indem sich nämlich der Unternehmer verpflichtet, dem Rentenirer n Jahre hindurch am Ende jedes Jahres eine bestimmte Rente a auszuzahlen, giebt er ihm gleichsam ein Kapital in die Hände, das alljährlich den Zins a trägt, welches (§. 87.) das Grundkapital der Rente a genannt wurde. Dieses Kapital $\frac{a}{\omega}$, wenn $1+\omega$ der Zinsfufs ist, mufs der Rentenirer, nachdem er n Jahre hindurch die Zinsen davon benutzt hat, am Ende dieser Zeit dem Unternehmer zurückzahlen. Statt dessen kann er ihm aber gleich den baaren Werth von $\frac{a}{\omega} = \frac{a}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n}$ zurückzahlen, dafs er also eigentlich nur $\frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n}$ als das Äquivalent der n Jahre hindurch zahlbaren jährlichen Rente a empfangen würde.

§. 96. Da diese Summe $\frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n}$ n Jahre hindurch mit den Zinseszinsen (§. 88.) auf $\left(\frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^n}\right)(1+\omega)^n = \frac{a}{\omega}(1+\omega)^n - \frac{a}{\omega}$ anwächst, so folgt daraus zugleich der Satz:

Der Werth einer n Jahre hindurch alljährlich zu Kapital gemachten Summe a, am Ende des nten Jahres, ist gleich dem n Jahre hindurch mit den Zinseszinsen angewachsenen Grundkapitale von a weniger dem anfänglichen Werthe dieses Grundkapitals.

§. 97. Zur Berechnung des Werthes einer Zeitrente, wenn der Zinsfufs 1,03; 1,04; 1,05 oder 1,06 ist, kann man sich der beiden Tabellen am Ende dieser Vorlesung bedienen.

Exempel. Es sei der baare Werth einer Jahresrente zon 1000 Rubel bei dem Zinsfufse 1,04 am Eude jedes Jahres 15 Jahre hindurch zahlbar zu berechnen. Das

Grundkapital von 1000 Rubel ist $\frac{1000}{0,04} = 25000$. Nach Tab. (B) ist der baare Werth der Einheit, nach 15 Jahren zahlbar, = 0,55526 450. Diese Zahl mit 25000 multiplicirt, erhält man den baaren Werth des nach 15 Jahren zahlbaren Grundkapitals von 25000 Rubel = 13881,612 Rubel, welcher von 25000 Rubel abgezogen, den verlangten baaren Werth einer Jahresrente von 1000 Rubel auf 15 Jahre = 11118 Rubel 39 Kopeken giebt.

Nach Tabelle (A) ist das mit den Zinseszinsen in 15 Jahren angewachsene Grundkapital = 25000. 1,80094 351 = 45023,587 Rubel. Davon das Grundkapital 25000 Rubel subtrahirt, erhält man die Summe von 20023,587 Rubel, welche man erspart haben wird, wenn man 15 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres 1000 Rubel auf Zinseszinsen zu 4 Procent unterbringt.

Multiplicirt man diese Zahl 20023,587 durch $\frac{1}{1,04^{15}} = 0,55526\ 450$, so erhält man den baaren Werth derselben, wie oben = 11118,39.

§. 98. Wird die n Jahre hindurch zahlbare Jahresrente statt am Ende jedes Jahres im Anfange desselben gezahlt, so übersieht man leicht, dafs alsdann der Werth einer solchen Rente in dem Verhältnisse $1+\omega : 1$ vergröfsert werden mufs. So würde in dem vorigen Exempel der baare Werth einer 15 Jahre hindurch im Anfange jedes Jahres zahlbaren Rente nicht 11118,39 Rubel sondern $11118{,}39 \times 1{,}04 = 11563{,}14$ Rubel sein. Auf gleiche Weise würde man durch die 15 Jahre hindurch im Anfange jedes Jahres eingenommene und auf Zinseszinsen untergebrachte Einnahme von 1000 Rubel am Ende des 15ten Jahres eine Summe von $20023{,}59 \times 1{,}04 = 20824{,}43$ Rubel erspart haben.

§. 99. Ist die Rente nicht gleich am Ende des ersten Jahres, sondern zum erstenmale am Ende des n + 1ten Jahres m Jahre hindurch zahlbar, so ist der baare Werth derselben gleich dem Unterschiede des baaren Werthes des Grundkapitals der Rente nach n Jahren zahlbar, weniger dem baaren Werthe des nach n + m Jahren zahlbaren Grundkapitals.

Es ist nämlich der baare Werth einer n + m Jahre hindurch am Ende jedes Jahres bei $1+\omega$ Zinsfufs zahlbaren Rente $= \frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^{n+m}}$. Subtrahirt man nun davon den baaren Werth der Rente a auf n Jahre $= \frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^{n}}$, so erhält man $\frac{a}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^{n}} - \frac{a}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^{n+m}}$, wie bewiesen werden sollte.

So findet man z. B. den baaren Werth einer jährlichen Rente von 1000 Rubel für 10 aufeinander folgende Jahre, wenn der Zinsfufs 1,04, und die Rente zum ersten Male am Ende des zehnten Jahres gezahlt werden soll, auf folgende Art: Das Grundkapital von 1000 Rubel ist = 25000 Rubel. Der baare Werth dieses Kapitals nach 9 Jahren zahlbar = 25000 × 0,70258674 Rubel = 17564,67 Rubel. Davon den baaren Werth des Grundkapitals nach 19 Jahren zahlbar = 25000 × 0,47464 2424 = 11866 abgezogen, erhält man 5698,60 Rubel, als den gesuchten Werth der obigen Jahresrente.

§. 100. Vermittelst der Gleichung (§. 95.) $s = \frac{a}{\omega}(1 - \frac{1}{(1+\omega)^{n}})$ läfst sich auch die Gröfse der Jahresrente a, wenn der baare Werth derselben gegeben ist, berechnen, indem $a = \frac{s\omega}{1-(\frac{1}{1+\omega})^{n}}$.

Es sei z. B. s = 10000 Rubel, ω = 0,04, n = 20, so erhält man Tabelle (B) $\frac{1}{(1+\omega)^{n}} = \frac{1}{1,04^{20}}$ = 0,45638 695 und $1 - \frac{1}{(1+\omega)^{n}}$ = 0,54361 305, $s\omega$ = 400, folglich $a = \frac{400}{0,543613}$ = 735,82 Rubel.

§. 101. Aus $s = \frac{a}{\omega}(1-\frac{1}{(1+\omega)^{n}})$ folgt auch $\frac{s\omega}{a} = 1 - \frac{1}{(1+\omega)^{n}}$ und $\frac{1}{(1+\omega)^{n}} = 1 - \frac{s\omega}{a} = \frac{a-s\omega}{a}$, demnach $(1+\omega)^{n} = \frac{a}{a-s\omega}$ und $n \log(1+\omega) = \log a - \log(a - s\omega)$, folglich $n = \frac{\log a - \log(a - s\omega)}{\log(1+\omega)}$.

Damit der Werth von n möglich sei, mufs $s\omega < a$ oder der Jahreszins der Kaufsumme der Rente kleiner als die Rente sein, weil sonst $a - s\omega$ negativ und $\log(a - s\omega)$ unmöglich sein würde.

Die obige Formel kann dienen, die Zeit zu berechnen, in welcher eine Schuld s

durch eine alljährlich gezahlte Summe, welche den Jahreszins der Schuld übertrifft, getilgt werden kann. Es sei z. B. s = 400000 Rubel eine Schuld, auf welche man jährlich 25000 Rubel abbezahlt, so dafs der Überschufs derselben über die jährlichen Zinsen 20000 Rubel zu 5 Procent zur Tilgung der Schuld gebraucht wird. In wie viel Jahren wird die Schuld abgetragen sein?

Hier ist $n = \frac{\log 25000 - \log 5000}{\log 1,05} = \frac{\log 5}{\log 1,05} = \frac{0,6989700}{0,0211893} = 32,987$. Nach 33 Jahren wird nämlich nicht nur die ganze Schuld abgetragen sein, sondern der Gläubiger mufs dem Schuldner noch eine Summe zurückzahlen, die wir jetzt bestimmen wollen. Der Werth der 33 Jahre hindurch abgetragenen 25000 Rubel beträgt nämlich am Ende dieser Zeit $\frac{25000}{0,05}.(10,5^{33} - 1)$. Von diesem den Werth der 400000 Rubel Schuld nach derselben Zeit $= 400000.105^{33}$ abgezogen, bleibt nach $100000.1,05^{33} - 5000000 = 100000\ (1,05^{33} - 5)$ = (Tabelle (A)) 100000.0,00318854 = 318 Rubel 85 Kopeken.

§. 102. Verlangt der Rentenirer für dieselbe Summe statt der jährlichen Rente a eine mtel jährliche, so mufs dieselbe, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, $= \frac{a}{\omega}((1+\omega)^{\frac{1}{m}} - 1)$ sein.

Weil nämlich die jährliche Rente a als der Jahreszins des Grundkapitals $\frac{a}{\omega}$, und eben so die mtel jährliche Rente als der mtel jährliche Zins, desselben Kapitals betrachtet werden kann; das Kapital $\frac{a}{\omega}$ aber in einem Jahre zu $\frac{a}{\omega}(1+\omega)$ und folglich (§. 92.) in einem mtel Jahr zu $\frac{a}{\omega}(1+\omega)^{\frac{1}{m}}$ anwächst, so mufs der mtel jährliche Zins von $\frac{a}{\omega}$ oder die gesuchte mtel jährliche Rente $= \frac{a}{\omega}(1+\omega)^{\frac{1}{m}} - \frac{a}{\omega} = \frac{a}{\omega}((1+\omega)^{\frac{1}{m}} - 1)$ sein.

Ist z. B. der Zinsfufs 1,04, so kann statt der Jahresrente von 1000 Rubel, halbjährlich nur $\frac{1000}{0,04}(1,04^{\frac{1}{2}} - 1) = 495,1$, und vierteljährlich $\frac{1000}{0,04}(1,04^{\frac{1}{4}} - 1) = 246,3$ Rubel verlangt werden.

§. 103. Ist der Werth s einer unveränderlichen Jahresrente a be-

kannt, so findet man daraus, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, den Werth einer mtel jährigen Rente von $\frac{a}{m} = \frac{s\,\omega}{m\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)}$.

Wir haben so eben gesehen, dafs die mtel jährliche Rente $\frac{a'}{\omega}\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)$ der Jahresrente a' äquivalent sei. Ist also $\frac{a'}{\omega}\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)=\frac{a}{m}$, so mufs $a' = \frac{a\,\omega}{m\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)}$ sein. Da nun der Werth zweier verschiedenen Jahresrenten, bei übrigens gleichen Umständen, sich wie die jährlichen Renten verhalten, oder $s' : s = a' : a$, so ist $s' = s\frac{\omega}{m\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)}$.

Exempel. Der baare Werth einer jährlichen Rente von 1200 Rubel auf 15 Jahre beim Zinsfufse 1,04 ist 13342,07 Rubel. Man soll den baaren Werth einer Monats-Rente von 100 Rubel finden.

Es ist log 1,04 = 0,01703 33, und $\frac{1}{12}$ log 1,04 = 0,00141 94 also $1{,}04^{\frac{1}{12}}=1{,}003274$ und $s' = 13342{,}07 \cdot \frac{0{,}04}{12.\,0{,}003274} = \frac{13342{,}07}{0{,}9822} = 13584$ Rubel.

§. 104. Setzt man, in der Gleichung $s' = s\frac{\omega}{m\left((1+\omega)^{\frac{1}{m}}-1\right)}$, $m = \infty$, so wird (§. 63.) $s' = \frac{s\,\omega}{\log\text{nat}\,(1+\omega)}$; oder, weil $s = \frac{a}{\omega}\left(1-\frac{1}{(1+\omega)^n}\right)$, $s' = \frac{a\left(1-\frac{1}{(1+\omega)^n}\right)}{\log\text{nat}\,(1+\omega)}$. Diese Summe müfste der Rentenirer dem Unternehmer, bei dem Zinsfufse $1+\omega$, für eine jährliche Rente a auf n Jahre zahlen, wenn er sich zugleich ausbedingen wollte, dafs ihm in jedem Augenblicke der Zwischenzeit der jährlichen Zahlung, auf Verlangen ein Theil der jährlichen Rente im Verhältnisse der Zeit ausgezahlt würde.

Exempel. Es sei die Jahresrente = 1200 Rubel, n = 15 Jahre, $1+\omega = 1{,}04$, so ist $s' = 1200.\frac{0{,}44473\;55}{0{,}03922\;07} = 13607{,}17$ Rubel.

§. 105. Wenn eine jährliche Rente a, statt unveränderlich zu sein, n Jahre hindurch in einem geometrischen Verhältnisse 1 : k zu oder

abnimmt, so ist der baare Werth derselben bei dem Zinsfufse $1+\omega$ $s = \frac{a}{1+\omega-k}\left(1-\left(\frac{k}{1+\omega}\right)^n\right)$ oder $\frac{a}{k-1-\omega}\left(\left(\frac{k}{1+\omega}\right)^n-1\right)$, je nachdem $k < 1+\omega$ oder $> 1+\omega$ ist.

Es ist nämlich $s = \frac{a}{1+\omega} + \frac{ak}{(1+\omega)^2} + \frac{ak^2}{(1+\omega)^3} + \frac{ak^3}{(1+\omega)^4} \ldots \frac{ak^{n-1}}{(1+\omega)^n}$, oder die Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern, deren erstes Glied $\frac{a}{1+\omega}$, und der Exponent des Verhältnisses $\frac{k}{1+\omega}$. Nun findet man aber bekanntlich die Summe einer geometrischen Reihe, indem man das gröfste Glied derselben mit dem Exponenten des Verhältnisses multiplicirt oder dividirt, je nachdem derselbe gröfser oder kleiner als 1, alsdann das kleinste Glied subtrahirt und den Rest durch den Exponenten des Verhältnisses, wenn derselbe > 1, oder des umgekehrten, wenn er < 1, weniger 1 dividirt. Es sei nun $\frac{k}{1+\omega} < 1$, so ist $\frac{a}{1+\omega}$ das gröfste Glied; dieses mit $\frac{k}{1+\omega}$ dividirt, erhält man $\frac{a}{k}$, davon das kleinste $\frac{ak^{n-1}}{(1+\omega)^n}$ abgezogen und durch $\frac{1+\omega}{k}-1$ dividirt, giebt

$$s = \left(\frac{a}{k} - \frac{ak^{n-1}}{(1+\omega)^n}\right) : \left(\frac{1+\omega}{k}-1\right) = \frac{a}{1+\omega-k}\cdot\left(1-\left(\frac{k}{1+\omega}\right)^n\right).$$

Diese Summe ist aber, wie man leicht übersieht, gleich dem baaren Werthe einer unveränderlichen n Jahre hindurch zahlbaren Jahresrente $\frac{a}{k}$ beim Zinsfufse $\frac{1+\omega}{k}$.

Wenn $\frac{k}{1+\omega} > 1$, so ist $\frac{ak^{n-1}}{(1+\omega)^n}$ das gröfste Glied; dieses mit $\frac{k}{1+\omega}$ multiplicirt, erhält man $\frac{ak^n}{(1+\omega)^{n+1}}$; davon das kleinste $\frac{a}{1+\omega}$ subtrahirt und durch $\frac{k}{1+\omega}-1$ dividirt, ergiebt sich:

$$s = \left(\frac{ak^n}{(1+\omega)^{n+1}} - \frac{a}{1+\omega}\right) : \left(\frac{k}{1+\omega}-1\right) = \frac{a}{k-1-\omega}\left(\left(\frac{k}{1+\omega}\right)^n-1\right).$$

Diese Summe ist der Werth einer unveränderlichen Rente $\frac{a}{k}$ auf n Jahre am Ende des nten Jahres nach dem Zinsfufse $\frac{k}{1+\omega}$.

§. 106. Der baare Werth s einer Jahresrente auf n Jahre, die am Ende

des ersten Jahres mit a zu zählen ist und in jedem folgenden Jahre um d vermehrt wird, ist bei dem Zinsfufse $1+\omega$, gleich dem baaren Werthe einer unveränderliche Jahresrente von $a+\frac{d}{\omega}$ auf n Jahre weniger dem baaren Werthe von $\frac{nd}{\omega}$ nach n Jahren zahlbar.

Es ist nämlich $s = \frac{a}{1+\omega} + \frac{a+d}{(1+\omega)^2} + \frac{a+2d}{(1+\omega)^3} + \frac{a+3d}{(1+\omega)^4} \cdots + \frac{a+(n-1)d}{(1+\omega)^n}$

$= \frac{a}{\omega}(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n}) + \frac{d}{(1+\omega)^2}(1 + \frac{2}{1+\omega} + \frac{3}{(1+\omega)^2} \cdots + \frac{n-1}{(1+\omega)^{n-2}})$.

Nun sei $q = 1 + \frac{2}{1+\omega} + \frac{3}{(1+\omega)^2} + \frac{4}{(1+\omega)^3} \cdots + \frac{n-1}{(1+\omega)^{n-2}}$

so ist $-\frac{2q}{1+\omega} = -\frac{2}{1+\omega} + \frac{4}{(1+\omega)^2} - \frac{6}{(1+\omega)^3} \cdots - \frac{2(n-2)}{(1+\omega)^{n-2}} - \frac{2(n-1)}{(1+\omega)^{n-1}}$

und $\frac{q}{(1+\omega)^2} = + \frac{1}{(1+\omega)^2} + \frac{2}{(1+\omega)^3} \cdots + \frac{n-3}{(1+\omega)^{n-2}} + \frac{n-2}{(1+\omega)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+\omega)^n}$.

Also $q.(1 - \frac{2}{1+\omega} + \frac{1}{(1+\omega)^2}) = 1 - \frac{n}{(1+\omega)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+\omega)^n}$

und $q = (\frac{1+\omega}{\omega})^2.(1 - \frac{n}{(1+\omega)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+\omega)^n}) = (\frac{1+\omega}{\omega})^2.(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{n\omega}{(1+\omega)^n})$.

Folglich $s = \frac{a}{\omega}(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n}) + \frac{d}{\omega^2}(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{n\omega}{(1+\omega)^n})$

$= \frac{a+\frac{d}{\omega}}{\omega}(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n}) - \frac{nd}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n}$ oder auch $= \frac{a+\frac{d}{\omega}}{\omega} - \frac{a+(n+\frac{1}{\omega})d}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n}$.

Exempel. Es sei nach dem Zinsfufse 1,04 der baare Werth einer Jahresrente auf 20 Jahre zu berechnen, die am Ende des ersten Jahres mit 1000 Rubel zu zahlen ist, und jedes nachfolgende Jahr um 100 Rubel vermehrt wird.

Es ist hier $a = 1000$, $d = 100$, $\omega = 0{,}04$, $n = 20$, also $\frac{a+\frac{d}{\omega}}{\omega} = \frac{3500}{0{,}04} = 87500$

$\frac{a+(n+\frac{1}{\omega})d}{\omega} = \frac{5500}{0{,}04} = 137500$, und weil Tab. (B) $\frac{1}{(1+\omega)^n} = \frac{1}{0{,}04^{20}} = 0{,}45638695$,

so ist $\frac{a+\frac{d}{\omega}}{\omega} - \frac{a+(n+\frac{1}{\omega})d}{\omega}.\frac{1}{(1+\omega)^n} = 87500 - 137500.\ 0{,}45638695 = 87500 - \frac{11.\ 45638{,}695}{8} = 87500 - 62753{,}21 = 24746$ Rubel 79 Kopeken.

Tabelle (A).
Werth eines mehrere Jahre hindurch mit den Zinseszinsen angewachsenen Kapitals 1.

J.	3 pc.	4 pc.	5 pc.	6 pc.
1	1,03000 000	1,04000 000	1,05000 000	1,06000 000
2	1,06090 000	1,08160 000	1,10250 000	1,12360 000
3	1,09272 700	1,12486 400	1,15762 500	1,19101 600
4	1,12550 881	1,16985 856	1,21550 625	1,26247 696
5	1,15927 407	1,21665 290	1,27628 156	1,33822 558
6	1,19405 230	1,26531 902	1,34009 564	1,41851 911
7	1,22987 387	1,31593 178	1,40710 423	1,50363 026
8	1,26677 008	1,36856 905	1,47745 544	1,59384 807
9	1,30477 318	1,42331 181	1,55132 821	1,68947 896
10	1,34391 638	1,48024 428	1,62889 463	1,79084 770
11	1,38423 387	1,53945 406	1,71033 936	1,89829 856
12	1,42576 089	1,60103 222	1,79585 633	2,01219 647
13	1,46853 371	1,66507 351	1,88564 914	2,13292 826
14	1,51258 972	1,73167 645	1,97993 160	2,26090 396
15	1,55796 742	1,80094 351	2,07892 818	2,39655 819
16	1,60470 644	1,87298 125	2,18287 459	2,54035 168
17	1,65284 763	1,94790 050	2,29201 832	2,69277 279
18	1,70243 306	2,02581 652	2,40661 923	2,85433 915
19	1,75350 605	2,10684 918	2,52695 020	2,02559 950
20	1,80611 123	2,19112 314	2,65329 771	3,20713 547
21	1,86029 457	2,27876 807	2,78596 259	3,39956 360
22	1,91610 341	2,36991 879	2,92526 072	3,60353 742
23	1,97358 651	2,46471 554	3,07152 376	3,81974 966
24	2,03279 411	2,56330 416	3,22509 994	4,04893 464
25	2,09377 793	2,66583 633	3,38635 494	4,29187 072

Tabelle (B).
Baarer Werth einer nach mehreren Jahren zahlbaren Summe 1.

J.	3 pc.	4 pc.	5 pc.	6 pc.
1	0,97087 379	0,96153 846	0,95238 095	0,94339 6
2	0,94259 591	0,92455 621	0,90702 948	0,88999 6
3	0,91514 166	0,88899 636	0,86383 760	0,85961 9
4	0,88848 705	0,85480 419	0,82270 247	0,79209 4
5	0,86260 878	0,82192 711	0,78352 617	0,74725 9
6	0,83748 426	0,79031 453	0,74621 540	0,70496 1
7	0,81309 151	0,75991 781	0,71068 133	0,66505 7
8	0,78940 923	0,73069 021	0,67683 936	0,62741 2
9	0,76641 673	0,70258 674	0,64460 892	0,59189 8
10	0,74409 391	0,67556 417	0,61391 325	0,55839 5
11	0,72242 128	0,64958 093	0,58467 929	0,52678 8
12	0,70137 988	0,62459 705	0,55683 742	0,49696 9
13	0,68095 134	0,60057 409	0,53032 135	0,46883 9
14	0,66111 781	0,57747 508	0,50506 795	0,44230 1
15	0,64186 195	0,55526 450	0,48101 710	0,41726 5
16	0,62316 694	0,53390 818	0,45811 152	0,39364 6
17	0,60501 645	0,51337 325	0,43629 669	0,37136 4
18	0,58739 461	0,49362 812	0,41552 065	0,35034 4
19	0,57028 603	0,47464 242	0,39573 396	0,33051 3
20	0,55367 575	0,45638 695	0,37688 948	0,31180 5
21	0,53754 928	0,43883 360	0,35894 236	0,29415 5
22	0,52189 250	0,42195 539	0,34184 987	0,27750 5
23	0,50669 175	0,40572 633	0,32557 131	0,26179 7
24	0,49193 374	0,39012 147	0,31006 791	0,24697 9
25	0,47760 557	0,37511 680	0,29530 277	0,23299 9

J.	3 pc.	4 pc.	5 pc.	6 pc.	J.	3 pc.	4 pc.	5 pc.	6 pc.
26	2,15659 127	2,77246 978	3,55567 269	4,54938 296	26	0,46369 473	0,36068 923	0,28124 073	0,21981 0
27	2,22128 901	2,88336 858	3,73345 632	4,82234 594	27	0,45018 906	0,34681 657	0,26784 832	0,20736 8
28	2,28792 768	2,99870 332	3,92012 914	5,11168 670	28	0,43707 675	0,33347 747	0,25509 364	0,19563 0
29	2,35656 551	3,11865 145	4,11613 560	5,41838 790	29	0,42434 636	0,32065 141	0,24294 632	0,18455 7
30	2,42726 247	3,23339 751	4,32194 238	5,74349 117	30	0,41198 676	0,30851 867	0,23137 745	0,17411 0
31	2,50008 035	3,37313 341	4,53803 949	6,08810 064	31	0,39998 715	0,29646 026	0,22035 947	0,16425 5
32	2,57508 276	3,50805 875	4,76494 147	6,45338 668	32	0,38833 703	0,28505 794	0,30986 617	0,15495 7
33	2,65233 524	3,64838 110	5,00318 854	6,84058 988	33	0,37702 625	0,27409 417	0,19987 254	0,14618 6
34	2,73190 530	3,79431 634	5,25334 797	7,25102 528	34	0,36604 490	0,26355 209	0,19035 480	0,13791 2
35	2,81386 245	3,94608 900	5,51601 537	7,68608 679	35	0,35538 340	0,25341 547	0,18129 029	0,13010 5
36	2,89827 833	4,10393 255	5,79181 614	8,14725 200	36	0,34503 243	0,24366 872	0,17265 741	0,12274 1
37	2,98522 668	4,26808 986	6,08140 694	8,63608 712	37	0,33498 294	0,23429 685	0,16443 563	0,11579 3
38	3,07478 348	4,43887 345	6,38547 730	9,15425 235	38	0,32522 615	0,22528 543	0,15660 536	0,10923 9
39	3,16702 698	4,61636 599	6,70475 115	9,70350 749	39	0,31575 355	0,21662 061	0,14914 797	0,10306 56
40	3,26203 779	4,80102 063	7,03998 871	10,28571 794	40	0,30655 684	0,20828 904	0,14204 568	0,09722 2
41	3,35989 893	4,99306 145	7,39198 815	10,90286 102	41	0,29762 800	0,20027 793	0,13528 160	0,091 719
42	3,46069 589	5,19278 391	7,76158 756	11,55703 268	42	0,28895 922	0,19257 493	0,12883 962	0,08652 7
43	3,56451 677	5,40049 527	8,14966 693	12,25045 464	43	0,28054 294	0,18516 820	0,12270 440	0,08163 0
44	3,67145 227	5,61651 508	8,55715 028	12,98548 192	44	0,27237 178	0,17804 635	0,11686 133	0,07700 9
45	3,78159 584	5,48117 568	8,98500 779	13,76461 084	45	0,26443 862	0,17119 841	0,11129 651	0,07265 0
46	3,89504 372	6,07482 271	9,43425 818	14,59048 749	46	0,25673 653	0,16461 386	0,10599 668	0,06853 8
47	4,01189 503	6,31781 562	9,90597 109	15,46591 674	47	0,24925 877	0,15828 256	0,10094 921	0,06465 8
48	4,13225 188	6,57052 824	10,40126 965	16,39387 174	48	0,24199 880	0,15219 476	0,09614 211	0,06099 8
49	4,25621 944	3,83334 937	10,92133 313	17,37750 404	49	0,23495 029	0,14634 112	0,09156 391	0,05764 6
50	4,38390 602	7,10668 335	11,46739 979	18,42015 428	50	0,22810 708	0,14071 262	0,08720 373	0,05422 8

Zweite Vorlesung.

Über die Entwickelung der logarithmischen und trigonometrischen Functionen in Reihen.

§. 1. Wenn der Satz $(1+\omega)^x = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + x_c^{:4}\omega^4 +$ etc., wo $x_c^{:r} = \frac{x.(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{1.\ 2\ \ 3\ldots.\ r}$, den wir (Vorl. 1. §. 56.) für positive ganze Exponenten bewiesen haben, allgemein für jeden beliebigen Werth des Exponenten x, er mag eine ganze oder gebrochne, eine rationale oder irrationale, eine positive oder negative Zahl sein, wahr ist, so mufs, weil $(1+\omega)^{x+y} = (1+\omega)^x.(1+\omega)^y$,

$$1 + (x+y)\omega + (x+y)_c^{:2}\omega^2 + (x+y)_c^{:3}\omega^3 + (x+y)_c^{:4}\omega^4 + \text{etc.}$$

$$= \begin{array}{l|l|l|l|l} 1 + x & \omega + x_c^{:2} & \omega^2 + x_c^{:3} & \omega^3 + x^{:4} & \omega^4 + \text{etc. sein.} \\ + y & + xy & + x_c^{:2}y & + x_c^{:3}y & \\ & + y_c^{:2} & + xy_c^{:2} & + x_c^{:2}y_c^{:2} & \\ & & + y_c^{:3} & + xy_c^{:3} & \\ & & & + y_c^{:4} & \end{array}$$

Daraus folgt:

$(x+y) = x + y$

$(x+y)_c^{:2} = x_c^{:2} + xy + y_c^{:2}$

$(x+y)_c^{:3} = x_c^{:3} + x_c^{:2}y + xy_c^{:2} + y_c^{:3}$

etc. etc. etc.

und allgemein

$$(x+y)_c^{:n} = x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} \ldots\ldots + x_c^{:2}y_c^{:n-2} + xy_c^{:n-1} + y_c^{:n}$$

§. 2. Wir wollen jetzt die Wahrheit des Satzes, dafs

$$(x+y)_c^{:n} = x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} + x_c^{:n-3}y_c^{:3} \ldots\ldots + xy_c^{:n-1} + y_c^{:n},$$

für alle beliebigen Werthe x, y beweisen.

Es sei $x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} \ldots\ldots + xy_c^{:n-1} + y_c^{:n} = Q_n$. Es soll zunächst gezeigt werden, dafs $Q_n \frac{x+y-n}{n+1}$

$= x_c^{:n+1} + x_c^{:n}y + x_c^{:n-1}y_c^{:2} \ldots\ldots + x_c^{:2}y_c^{:n-1} + xy_c^{:n} + y_c^{:n+1} = Q_{n+1}$ ist.

Das allgemeine Glied der Reihe Q_n ist nämlich

$$x_c^{:n-r}y_c^{:r} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-n+r+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n-r} \cdot \frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-r+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots r}.$$

Also $x_c^{:n-r}y_c^{:r}\frac{x+y-n}{n+1} = x_c^{:n-r}y_c^{:r}\frac{(x-n+r)}{n+1} + x_c^{:n-r}y_c^{:r}\frac{y-r}{n+1}$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-n+r+1)(x-n+r)}{1.\ 2.\ 3\qquad\qquad (n-r)\qquad n+1} y_c^{:r} + x_c^{:n-r}\frac{y\cdot(y-1)\ldots\ldots(y-r+1)(y-r)}{1.\ 2.\qquad\qquad r\qquad n+1}$$

$$= \frac{n-r+1}{n+1} \cdot x_c^{:(n-r+1)}y_c^{:r} + \frac{r+1}{n+1}x_c^{:n-r}y_c^{:r+1}.$$

Daraus

$$x_c^{:n}\cdot\frac{x+y-n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\cdot x_c^{:n+1} + \frac{1}{n+1}x_c^{:n}y$$

$$+ x_c^{:n-1}y\cdot\frac{x+y-n}{n+1} = \frac{n}{n+1}x_c^{:n}y + \frac{2}{n+1}x_c^{:n-1}y_c^{:2}$$

$$+ x_c^{:n-2}y_c^{:2}\cdot\frac{x+y-n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}x_c^{:n-1}y_c^{:2} + \frac{3}{n+1}x_c^{:n-2}y_c^{:3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ xy_c^{:n-1}\cdot\frac{x+y-n}{n+1} = \frac{2}{n+1}x_c^{:2}y_c^{:n-1} + \frac{n}{n+1}xy_c^{:n}$$

$$+ y_c^{:n}\cdot\frac{x+y-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}xy_c^{:n} + \frac{n+1}{n+1}y_c^{:n+1},$$

und folglich

$$Q_n\frac{x+y-n}{n+1} = x_c^{:n+1} + x_c^{:n}y + x_c^{:n-1}y_c^{:2} \ldots\ldots + xy_c^{:n} + y_c^{:n+1} = Q_{n+1}.$$

Die Gröfsen Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, etc. bilden also eine Reihe, in welcher jedes Glied Q_{n+1} aus dem nächst vorhergehenden Q_n entsteht, indem man es durch $\frac{x+y-n}{n+1}$ multiplicirt.

Auf gleiche Weise wird jedes Glied der Reihe

$$(x+y),\ (x+y)_c^{:1},\ (x+y)_c^{:2},\ (x+y)_c^{:3},\ (x+y)_c^{:4} \text{ etc.}$$

aus dem nächst vorhergehenden abgeleitet, indem $(x+y)_c^{:n+1} = (x+y)_c^{:n}\frac{x+y-n}{n+1}$ ist. Da nun die ersten Glieder der beiden Reihen der Q_r und der $(x+y)_c^{:r}$ einander gleich sind, so müssen auch alle übrigen Glieder mit gleichen Anzeigern einander gleich sein oder es mufs allgemein

$$(x+y)_c^{:n} = Q_n = x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} \ldots + xy_c^{:n-2} + y_c^{:n} \text{ sein.}$$

§. 3. Die Reihe $1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + x_c^{:4}\omega^4 +$ etc. ist, wenn man ω als eine unveränderliche, x aber als eine veränderliche Gröfse betrachtet, eine solche Function von x, dafs, wenn man sie mit einer ähnlichen von y multiplicirt, das Product eine ähnliche Function von $x+y$ ist.

Bezeichnet man nämlich $1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 +$ etc. durch φx, so wird $1 + y\omega + y_c^{:2}\omega^2 + y_c^{:3}\omega^3 +$ etc. $= \varphi y$, und

$$1 + (x+y)\omega + (x+y)_c^{:2}\omega^3 + (x+y)_c^{:3}\omega^4 + \text{etc.} = \varphi(x+y).$$

Es ist also (§. 1.) $\varphi x \cdot \varphi y = \varphi(x+y)$.

§. 4. Sind x, y, ω positive Gröfsen, so ist φx, φy und $\varphi(x+y)$ gröfser als 1, und folglich sind auch ihre Logarithmen positive Gröfsen. Da nun $\varphi x \cdot \varphi y = \varphi(x+y)$, so ist $\log \varphi x + \log \varphi y = \log \varphi(x+y)$. Setzt man nun $\log \varphi x = \psi x$, so dafs, $\log \varphi y = \psi y$, und $\log \varphi(x+y) = \psi(x+y)$, so hat man $\psi x + \psi y = \psi(x+y)$, woraus (Vorl. 1. §. 7.) folgt, dafs $\psi x = x\psi 1$, oder dafs $\log \varphi x = x \log \varphi 1$, und folglich $\varphi x = (\varphi 1)^x$.

Es ist aber $\varphi x = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + x_c^{:4}\omega^4 +$ etc. folglich, weil für $x = 1$, $x_c^{:2} = 0$, $x_c^{:3} = 0$, etc., $\varphi 1 = 1 + \omega$, also

$$\varphi x \text{ oder } 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + \text{etc.} = (1+\omega)^x$$

wo x jede beliebige positive ganze oder gebrochne oder auch irrationale Zahl sein kann.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung $\varphi x \,.\, \varphi y = \varphi(x+y)$ $y = -x$, so erhält man $\varphi x \,.\, \varphi(-x) = \varphi(x-x) = \varphi o$. Es ist aber der Werth von φx, für $x = o$, $= 1$. Demnach

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi x} = \frac{1}{(1+\omega)^x} = (1+\omega)^{-x}.$$

Es ist also der Satz $(1+\omega)^x = \varphi x$ für jeden beliebigen positiven und negativen Werth bewiesen, woraus sich, wenn man $\omega = \frac{b}{a}$ setzt, und auf beiden Seiten der Gleichung $(1+\omega)^x = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + \text{etc.}$ mit a^x multiplicirt, der binomische Lehrsatz unter der bekannten Form $(a+b)^x = a^x + xa^{x-1}b + x_c^{:2}a^{x-2}b^2 + x_c^{:3}a^{x-3}b^3 + \text{etc.}$ ergiebt.

§. 5. Wenn $\varphi x = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + x_c^{:4}\omega^4 + \text{etc.}$

so ist $\varphi y = 1 + y\omega + y_c^{:2}\omega^2 + y_c^{:3}\omega^3 + y_c^{:4}\omega^4 + \text{etc.}$

und

$$\varphi x \,.\, \varphi y = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}y\omega^3 + x_c^{:4}\omega^4 + \text{etc.}$$
$$+ xy \quad + x_c^{:2}y \quad + x_c^{:3}y$$
$$+ y_c^{:2} \quad + xy_c^{:2} \quad + x_c^{:2}y_c^{:2}$$
$$+ y_c^{:3} \quad + xy_c^{:3}$$
$$+ y_c^{:4}$$

$= $ (Vorl. 1. §. 51.) $1 + (x+y)\omega + (x+y)_c^{:2}\omega^2 + (x+y)_c^{:3}\omega^3 + (x+y)_c^{:4}\omega^4 + \text{etc.} = \varphi(x+y)$.

Daraus folgt, wie im vorigen §., $\varphi x = (\varphi 1)^x$ oder

$$\varphi x = (1 + \omega + \omega_c^{:2} + \omega_c^{:3} + \omega_c^{:4} + \text{etc.})^x$$

Setzt man $\omega = 1$, so wird

$$1 + \omega + \omega_c^{:2} + \omega_c^{:3} + \text{etc.} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

= der Basis e der natürlichen Logarithmen, die bereits (Vorl. 1. §. 62.) gefunden worden, indem man $(1+\frac{1}{n})^n$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelte, und $n = \infty$ setzte, und es ist, wie dort $e^x = 1 + x + x_c^2 + x_c^3 + x_c^4 + x_c^5 + \text{etc.}$, und weil wenn wir Kürze halber log nat a durch *la* bezeichnen, $a^x = e^{x\,la}$, so ist

$$a^x = 1 + x\,la + x_c^2(la)^2 + x_c^3(la)^3 + x_c^4(la)^4 + \text{etc.}$$

§. 6. Weil $(1+\omega)^x = 1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + \text{etc.}$

$$= 1 + x\,l(1+\omega) + x_c^2(l(1+\omega))^2 + x_c^3(l(1+\omega))^3 + \text{etc.}$$

so erhält man, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung 1 subtrahirt und alsdann mit x dividirt,

$$l(1+\omega) + \frac{x}{2}(l(1+\omega))^2 + \frac{x^2}{2.3}(l(1+\omega))^3 + \text{etc.} = \omega - (1-x)\frac{\omega^2}{2} + (1-x)(1-\frac{x}{2})\frac{\omega^3}{3} - \text{etc.}$$

Daraus, für $x = o$,

$$l(1+\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \frac{\omega^5}{5} - \text{etc.}$$

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes findet man (Vorl. 1. §. 65. etc.)

§. 8. So wie wir vermittelst der beiden Sätze $(x+y)_c^n = x_c^n + x_c^{n-1}y + x_c^{n-2}y_c^2 \ldots\ldots xy_c^{n-1} + y_c^n$ und $(x+y)_c^{:n} = x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} \ldots\ldots + y_c^{:n}$ bewiesen haben, dafs, wenn man $1 + x\omega + x_c^2\omega^2 + x_c^3\omega^3 + \text{etc.}$ oder $1 + x\omega + x_c^{:2}\omega^2 + x_c^{:3}\omega^3 + \text{etc.}$ durch φx bezeichnet, $\varphi x = (\varphi 1)^x$ sein mufs, so übersieht man leicht, wenn x_r eine Function der beliebigen Zahl x und der positiven ganzen Zahl r bedeutet, welche die Eigenschaft hat, dafs

$(x+y)_n = x_n + x_{n-1}y + x_{n-2}y_2 + x_{n-3}y_3 \ldots\ldots + xy_{n-1} + y_n$ ist, dafs alsdann $1 + x_1\omega + x_2\omega^2 + x_3\omega^3 + \text{etc.} = \varphi x$ gesetzt, ebenfalls $\varphi x = (\varphi 1)^x$ sein mufs. Die Auflösung einer Aufgabe, die wir im folgenden §. vornehmen wollen, wird uns auf eine solche Function x_n führen, welche zugleich die beiden Functionen x_c^n und $x_c^{:n}$ als specielle Fälle unter sich enthält.

§. 8. Es sei die Gleichung $\omega z^\nu - z + 1 = o$ gegeben, man soll die Wurzel z derselben durch eine Reihe darstellen.

Setzt man $z = a + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \text{etc.}$, so erhält man, wenn man diesen Werth von z in der gegebenen Gleichung substituirt, und alsdann $\omega = o$ setzt, $a = 1$.

Bezeichnet man nun $a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 + \text{etc.}$ durch ζ, so dafs $z = 1 + \omega\zeta$ wird, so erhält man, wenn man $1 + \omega\zeta$ in der Gleichung $z^\nu - \frac{z-1}{\omega} = o$ substituirt,

$$1 + \nu\omega\zeta + \nu_c^{:2}\omega^2\zeta^2 + \nu_c^{:3}\omega^3\zeta^3 + \nu_c^{:4}\omega^4\zeta^4 + \text{etc.} = \zeta \text{ (A)}.$$

Da nun $\zeta = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 + \text{etc.}$, so ist

$\zeta^2 = a_1^2 + 2a_1a_2\omega + (a_2^2 + 2a_1a_3)\omega^2 + (2a_1a_4 + 2a_2a_3)\omega^3 + \text{etc.}$

$\zeta^3 = a_1^3 + 3a_1^2a_2\omega + (3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)\omega_2 + \text{etc.}$ $\zeta^4 = a_1^4 + 3a_1^3a_2\omega + \text{etc.}$

Diese Werthe in (A) substituirt, erhält man:

$1 + \nu\omega(a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 + \text{etc.}) + \nu_c^{:2}\omega^2(a_1^2 + 2a_1a_2\omega + (a_2^2 + 2a_1a_3)\omega^2 + \text{etc.})$
$+ \nu_c^{:3}\omega^3(a_1^3 + 3a_1^2a_2\omega + \text{etc.}) + \text{etc.} = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 + a_5\omega^4 + \text{etc.}$

oder auch

$$\begin{array}{l|l|l|l} 1 + \nu a_1\omega + \nu a_2 & \omega^2 + \nu a_3 & \omega^3 + \nu a_4 & \omega^4 + \text{etc.} = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + \text{etc.} \\ \quad + \nu_c^{:2}a_1^2 & \quad + \nu_c^{:2}2a_1a_2 & \quad + \nu_c^{:2}(a_2^2 + 2a_1a_3) & \\ & \quad + \nu_c^{:3}a_1^3 & \quad + \nu_c^{:3}3a_1^2a_2 & \\ & & \quad + \nu_c^{:4}a_1^4 & \end{array}$$

Daraus ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten a_1, a_2, a_3, etc. folgende Gleichungen $a_1 = 1$, $a_2 = \nu a_1$, $a_3 = \nu a_2 + \nu_c^{:2}a_1^2$, $a_4 = \nu a_3 + \nu_c^{:2}2a_1a_2 + \nu_c^{:3}a_1^3$, $a_5 = \nu a_4 + \nu_c^{:2}(a_2^2 + 2a_1a_3) + \nu_c^{:3}3a_1^2a_2 + \nu_c^{:4}a_1^4$ etc. Demnach $a_1 = 1$, $a_2 = \nu$, $a_3 = \nu\nu + \nu_c^{:2} = \frac{\nu}{2}(3\nu - 1)$,

$a_4 = \nu\frac{\nu}{2}(3\nu-1) + \nu^{:2}\nu + \nu_c^{:3} = \frac{\nu}{2.3}(3\nu(3\nu-1) + 6\nu(\nu-1) + \nu^2 - 3\nu + 2)$
$= \frac{\nu}{2.3}(16\nu^2 - 12\nu + 2) = \frac{\nu}{2.3}(4\nu-1)(4\nu-2)$. Aus den beiden für a_3, a_4 gefundenen Ausdrücken $\frac{\nu}{2}.(3\nu-1)$, $\frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}$, läfst sich vermuthen, dafs $a_5 = \frac{\nu}{4}(5\nu-1)_c^{:3}$ und

allgemein, dafs $a_r = \frac{\nu}{r}((r+1)\nu-1)_c^{:r-1}$, und folglich die Wurzel der Gleichung $\omega z^\nu - z + 1 = o$,

$$z = 1 + \omega + \nu\omega^2 + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^3 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^4 + \frac{\nu}{4}(5\nu-1)_c^{:3}\omega^5 + \text{etc.}$$

sein wird.

Setzt man nun $z^x = 1 + x_1\omega + x_2\omega^2 + x_3\omega^3 + x_4\omega^4 + \text{etc.}$, so ist, weil

$z^x = (1+\zeta\omega)^x = 1 + x(a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \text{etc.}) + x_c^{:2}(a_1\omega + a_2\omega^2 + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$
$= 1 + xa_1\omega + (xa_2 + x_c^{:2}a_1^2)\omega^2 + (xa_3 + x_c^{:2}2a_1a_2 + x_c^{:3}a_1^3)\omega^3 + \text{etc.}$
$= 1 + x\omega + (x\nu + x_c^{:2})\omega^2 + (x\frac{\nu}{2}(3\nu-1) + x_c^{:2}2\nu + x_c^{:3})\omega^3 + \text{etc.},$

$x_1 = x$, $x_2 = x\nu + x_c^{:2} = \frac{x}{2}(x+2\nu-1)$, $x_3 = x\frac{\nu}{2}(3\nu-1) + x_c^{:2}2\nu + x_c^{:3}$
$= \frac{x}{2.3}(3\nu(3\nu-1) + (x-1).6\nu + (x-1)(x-2)) = \frac{x}{2.3}(x+3\nu-1)(x+3\nu-2)$.

Die hier gefundenen Ausdrücke für die drei ersten Coefficienten x_1, x_2, x_3, etc. sind unter der allgemeinen Formel $x_r = \frac{x}{r}(x+r\nu-1)_c^{:r-1}$ begriffen, so dafs

$$z^x = 1 + x\omega + \frac{x}{2}(x+2\nu-1)\omega^2 + \frac{x}{3}(x+3\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \frac{x}{4}(x+4\nu-1)_c^{:3}\omega^4 + \text{etc.}$$

Substituirt man nun in dieser Gleichung ν für x, und multiplicirt dieselbe durch ω, so erhält man

$$\omega z^\nu = \omega + \nu\omega + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^2 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \text{etc.} = z - 1,$$

wodurch die Richtigkeit der Ausdrücke a_1, a_2, a_3, etc. x_1, x_2, x_3, etc. bestätigt wird.

§. 9. Um die im vorigen §. vorgetragenen Sätze mit aller Strenge zu beweisen, wollen wir jetzt zeigen, dafs, wenn allgemein

$\frac{x}{r}(x+r\nu-1)_c^{:r-1} = x_r$ folglich $\frac{y}{r}(y+r\nu-1)_c^{:r-1} = y_r$ und $\frac{x+y}{r}(x+y+r\nu-1)_c^{:r-1} = (x+y)_r$,

dafs alsdann $(x+y)_n = x_n + x_{n-1}y_1 + x_{n-2}y_2 + x_{n-3}y_3 \ldots + x_1y_{n-1} + y_n$.

Es ist nämlich $\frac{x+y}{n}(x+y+n\nu-\ldots)_c^{:n-1} = \frac{x+y+n\nu}{n}(x+y+n\nu-\ldots)_c^{:n-1}$

$-\nu(x+y+n\nu-1)_c^{:n-1} = (x+y+n\nu)_c^{:n} - \nu(x+y+n\nu-1)_c^{:n-1}$; ferner (§. 2.)

$(x+y+n\nu)_c^{:n} = (y+n\nu)_c^{:n} + x(y+n\nu)_c^{:n-1} + x_c^{:2}(y+n\nu)_c^{:n-2} \ldots\ldots\ldots + x_c^{:n}$

$-\nu(x+y+n\nu-1)_c^{:n-1} = -\nu(y+n\nu-1)_c^{:n-1} - \nu x(y+n\nu-1)_c^{:n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots - \nu x_c^{:n-1}$

und $(y+n\nu)_c^{:n-r} - \nu(y+n\nu-1)_c^{:n-r-1} = (\frac{y+n\nu}{n-r} - \nu)(y+n\nu-1)_c^{:n-r-1}$

$= \frac{y+r\nu}{n-r}(y+n\nu-1)_c^{:n-r-1} = \frac{y+r\nu}{n-r}(y+r\nu+(n-r)\nu-1)_c^{:n-r-1} = (y+r\nu)_{n-r}$,

folglich $(x+y)_n = y_n + x(y+\nu)_{n-1} + x_c^{:2}(y+2\nu)_{n-2} + x_c^{:3}(y+3\nu)_{n-3} \ldots + x_c^{:n}$.

Nimmt man nun an, dafs der zu beweisende Satz wahr sei für n = 1, 2, 3 ... bis n — 1, so hat man

$(y+\nu)_{n-1} = y_{n-1} + \nu y_{n-2} + \nu_2 y_{n-3} + \nu_3 y_{n-4} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \nu_{n-1}$

$(y+2\nu)_{n-2} = y_{n-2} + (2\nu)y_{n-3} + (2\nu)_2 y_{n-4} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + (2\nu)_{n-2}$

$(y+3\nu)_{n-3} = y_{n-3} + (3\nu)y_{n-4} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + (3\nu)_{n-3}$

etc. etc. etc.

Diese Werthe in dem Ausdrucke $(x+y)_n$ substituirt, erhält man:

$$(x+y)_n = y_n + xy_{n-1} + x\nu\,|\,y_{n-2} + x\nu_2\,|\,y_{n-3} + x\nu_3\,|\,y_{n-4} \cdot\cdot\cdot\cdot + x\nu_{n-1}$$
$$+ x_c^{:2}\,|\,+ x_c^{:2}2\nu\,|\,+ x_c^{:2}(2\nu)_2\,|\,\cdot\cdot\cdot\cdot + x_c^{:2}(2\nu)_{n-2}$$
$$+ x_c^{:3}\,|\,+ x_c^{:3}(3\nu)\,|\,\cdot\cdot\cdot\cdot + x_c^{:3}(3\nu)_{n-3}$$
$$+ x_c^{:4}\,|\,\cdot\cdot\cdot\cdot + x_c^{:4}(4\nu)_{n-4}$$
$$\vdots$$
$$+ x_c^{:n}$$

Da aber, wenn $m < r$, $(m\nu)_{r-m} = \frac{m\nu}{r-m}.(m\nu+(r-m)\nu-1)_c^{:r-m-1}$

$= \frac{m\nu}{r-m}(r\nu-1)_c^{:r-m-1} = \frac{m}{r}.\frac{r\nu}{r-m}(r\nu-1)_c^{:r-m-1} = \frac{m}{r}(r\nu)_c^{:r-m}$

so ist $x\nu_{r-1} + x_c^{:2}(2\nu)_{r-2} + x_c^{:3}(3\nu)_{r-3} + x_c^{:4}(4\nu)_{r-4} + x_c^{:5}(5\nu)_{r-5} \ldots + x_c^{:r}$

$= \frac{1}{r}x(r\nu)^{:r-1} + \frac{2}{r}x_c^{:2}(r\nu)_c^{:r-2} + \frac{3}{r}x_c^{:3}(r\nu)_c^{:r-3} + \frac{4}{r}x_c^{:4}(r\nu)_c^{:r-4} \ldots + \frac{r}{r}.x_c^{:r}$

$= \frac{x}{r}[(r\nu)_c^{:r-1} + (x-1)(r\nu)_c^{:r-2} + (x-1)_c^{:2}(r\nu)_c^{:r-3} + (x-1)_c^{:3}(r\nu)_c^{:r-4} + \ldots (x-1)_c^{:r-1}]$

$= (\S.\,2.)\ \frac{x}{r}(x+r\nu-1)_c^{:r-1} = x_r$

Daher $x\nu + x_c^{:2} = \frac{x}{2}(x+2\nu-1) = x_2$

$x\nu_2 + x_c^{:2}2\nu + x_c^{:3} = \frac{x}{3}(x+3\nu-1)_c^{:2} = x_3$

$x\nu_3 + x_c^{:2}(2\nu)_2 + x_c^{:3}(3\nu) + x_c^{:4} = \frac{x}{4}(x+4\nu-1)_c^{:3} = x_4$

etc. etc. etc.

und folglich $(x+y)_n = y_n + xy_{n-1} + x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} \ldots + x_{n-1}y + y_n$.

Weil aber $(x+y)_1 = x_1 + y_1$, und

$\frac{x+y}{2}(x+y+2\nu-1) = \frac{y}{2}(y+2\nu-1) + xy + \frac{x}{2}(x+2\nu-1)$,

oder weil der Satz wahr ist, für $n = 1$, $n = 2$, so mufs er auch für $n = 3$ wahr sein. Daraus folgt wieder, dafs er auch für $n = 4$, 5, 6, etc., und überhaupt für jede ganze Zahl n wahr sein mufs.

§. 10. Setzt man also $1 + x\omega + \frac{x}{2}(x+2\nu-1)\omega^2 + \frac{x}{3}(x+3\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \text{etc.} = \varphi x$,

so dafs $1 + x\omega + \frac{y}{2}(y+2\nu-1)\omega^2 + \frac{y}{3}(y+3\omega-1)_c^{:2}\omega^3 + \text{etc.} = \varphi y$, und

$1 + (x+y)\omega + \frac{x+y}{2}(x+y+2\nu-1)\omega^2 + \frac{x+y}{3}(x+y+3\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \text{etc.} = \varphi(x+y)$,

so wird $\varphi x . \varphi y = \varphi(x+y)$, und allgemein $\varphi x = (\varphi 1)^x$, oder

$1 + x\omega + \frac{x}{2}(x+2\nu-1)\omega^2 + \frac{x}{3}(x+3\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \frac{x}{4}(x+4\nu-1)_c^{:3}\omega^4 + \text{etc.}$

$= (1 + \omega + \nu\omega^2 + \frac{1}{3}.(3\nu)_c^{:2}\omega^3 + \frac{1}{4}(4\nu)_c^{:3}\omega^4 + \frac{1}{5}(5\nu)_c^{:4}\omega^5 + \text{etc.})^x$ oder

$= (1 + \omega + \nu\omega^2 + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^3 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^4 + \frac{\nu}{4}(5\nu-1)_c^{:3}\omega^5 + \text{etc.})^x$ sein.

Nimmt man $x = \nu$ an, so wird

$$1 + \nu\omega + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^2 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \frac{\nu}{4}(5\nu-1)_c^{:3}\omega^4 + \text{etc.}$$

$$= (1 + \omega + \nu\omega^2 + \frac{\nu}{2}.(3\nu-1)\omega^3 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^4 + \frac{\nu}{4}(5\nu-1)_c^{:3} + \text{etc.})^\nu,$$

und wenn man $1 + \omega + \nu\omega^2 + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\omega^3 + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\omega^4 + \text{etc.} = z$ setzt, so verwandelt sich diese Gleichung in $\frac{z-1}{\omega} = z^\nu$ oder in $\omega z^\nu - z + 1 = o$.

§. 11. Exempel. I. Es sei die Gleichung $ay^\nu - by + c = o$ gegeben, deren Wurzel y man durch eine Reihe darstellen soll.

Aus $ay^\nu - by + c = o$ folgt $\frac{a}{c}y^\nu - \frac{b}{c}y + 1 = o$. Setzt man also $\frac{b}{c}y = z$, so dafs $y = \frac{cz}{b}$ und $y^\nu = \frac{c^\nu z^\nu}{b^\nu}$, so erhält man $\frac{ac^{\nu-1}}{b^\nu}.z^\nu - z + 1 = o$; und wenn man diese Gleichung als identisch mit der Gleichung $\omega z^\nu - z + 1 = o$ betrachtet, so ist $\omega = \frac{ac^{\nu-1}}{b^\nu}$. Man hat also:

$$y = \frac{c}{b}z = \frac{c}{b}(1 + \frac{ac^{\nu-1}}{b^\nu} + \frac{\nu a^2c^{2(\nu-1)}}{b^{2\nu}} + \frac{\nu}{2}(3\nu-1)\frac{a^3c^{3(\nu-1)}}{b^{3\nu}} + \frac{\nu}{3}(4\nu-1)_c^{:2}\frac{a^4c^{4(\nu-1)}}{b^{4\nu}} + \text{etc.})$$

und

$$y^x = \frac{c^x}{b^x}z^x = \frac{c^x}{b^x}(1 + x.\frac{ac^{\nu-1}}{b^\nu} + \frac{x}{2}(x+2\nu-1).\frac{a^2c^{2(\nu-1)}}{b^{2\nu}} + \frac{x}{2}(x+3\nu-1)_c^{:2}\frac{a^3c^{3(\nu-1)}}{b^{3\nu}} + \text{etc.})$$

§. 12. Exempel II. Man soll die Wurzel y der Gleichung $ay^n - by^{n-1} + c = o$ durch eine Reihe entwickeln.

Dividirt man die gegebene Gleichung durch ay^n so erhält man $\frac{c}{a}y^{-n} - \frac{b}{a}y^{-1} + 1 = o$; und $\frac{b}{a}y^{-1} = z$ gesetzt, verwandelt sich dieselbe, weil alsdann $y^{-1} = \frac{az}{b}$ und $y^{-n} = \frac{a^nz^n}{b^n}$

in $\frac{ca^{n-1}}{b^n}z^n - z + 1 = o$. Diese Gleichung als identisch mit $\omega z^\nu - z + 1 = o$ betrachtet, erhält man,

$$\text{weil } z^x = 1 + x\omega + \frac{x}{2}(x+2\nu-1)\omega^2 + \frac{x}{3}(x+3\nu-1)_c^{:2}\omega^3 + \text{etc.},$$

wenn man $z = \frac{b}{a}y^{-1}$, $\omega = \frac{ca^{n-1}}{b^n}$, $\nu = n$, $x = -m$ setzt,

$$\frac{a^m}{b^n}y^m = 1 - m\frac{ca^{n-1}}{b^n} + \frac{m}{2}(m-2n+1)\frac{c^2a^{2n-2}}{b^{2n}} - \frac{m}{3}(m-3n+2)_c^{:2}\frac{c^3a^{3n-3}}{b^{3n}} + \text{etc.},$$

und

$$y^m = \frac{b^m}{a^m} - \frac{mcb^{m-n}}{a^{m-n+1}} + \frac{m}{2}.(m-2n+1).\frac{c^2b^{m-2n}}{a^{m-2n+2}} - \frac{m}{3}(m-3n+2)_c^{:2}\frac{c^3b^{m-3n}}{a^{m-3n+3}} + \text{etc.}$$

Diese Formel ist dieselbe, welche schon Lambert, doch ohne Beweis, Lagrange mittheilte.

§. 13. Setzt man in dem Ausdrucke $\frac{x}{r}(x + r\nu - 1)_c^{:r-1}\frac{x}{\alpha}$ für x, $\frac{\beta}{\alpha}$ für ν, und multiplicirt alsdann denselben mit α^r, so erhält man

$$\frac{x}{r}.\frac{(x+r\beta-\alpha)(x+r\beta-2\alpha)(x+r\beta-3\alpha)\ldots\ldots(x+r\beta-(r-1)\alpha)}{1.\quad 2.\quad 3\quad\ldots\ldots\quad(r-1)}.$$

Diese Gröfse wollen wir Kürze halber durch $\frac{x}{r}(x + r\beta - \alpha)_c^{r-1,\alpha}$ ausdrücken, indem wir allgemein durch $z^{n,x}$ ein Product aus n Factoren, wovon der erste Factor z, der 2te $z-\alpha$, der 3te $z-2\alpha$, etc. und durch $z_c^{n,\alpha}$, dasselbe Product durch $1.2.3\ldots n$ dividirt, andeuten wollen. Da nun, wie §. 9 bewiesen worden,

$$\frac{x+y}{n}(x+y+n\nu-1)_c^{:n-1} = \frac{x}{n}(x+n\nu-1)_c^{:n-1} + \frac{x}{n-1}(x+(n-1)\nu-1)_c^{:n-2}y$$

$$+ \frac{x}{n-2}(x+(n-2)\nu-1)_c^{:n-3}.\frac{y}{2}(y+2\nu-1) + \frac{x}{n-3}(x+(n-3)\nu-1)_c^{:n-4}.\frac{y}{3}(y+3\nu-1)_c^{:2}$$

$$\ldots\ldots + x\frac{y}{n-1}(y+(n-1)\nu-1)_c^{:n-2} + \frac{y}{n}(y+n\nu-1)_c^{:n-1},$$

so verwandelt sich diese Gleichung, wie man leicht übersieht, wenn man überall

$\frac{x}{\alpha}$, $\frac{y}{\alpha}$, $\frac{x+y}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ resp. für x, y, $x+y$, ν substituirt, und auf beiden Seiten derselben durch α^n multiplicirt, in folgende:

$$\frac{x+y}{n}(x+y+n\beta-\alpha)_c^{n-1,\alpha} = \frac{x}{n}(x+n\beta-\alpha)_c^{n-1,\alpha} + \frac{x}{n-1}(x+(n-1)\beta-\alpha)_c^{n-2,\alpha}.y$$

$$+\frac{x}{n-2}(x+(n-2)\beta-\alpha)_c^{n-3,\alpha}.\frac{y}{2}(y+2\beta-\alpha)+\frac{x}{n-3}(x+(n-3)\beta-\alpha)_c^{n-4,\alpha}.\frac{y}{3}(y+3\beta-\alpha)_c^{2,\alpha}$$

$$\ldots\ldots\ldots + x\frac{y}{n-1}.(y+(n-1)\beta-\alpha)_c^{n-2,\alpha}+\frac{y}{n}(y+n\beta-\alpha)_c^{n-1,\alpha}.$$

Daraus folgt nun (§. 8,a) dafs

$$1+x\omega+\frac{x}{2}(x+2\beta-\alpha)\omega^2+\frac{x}{3}(x+3\beta-\alpha)_c^{2,\alpha}\omega^3+\frac{x}{4}(x+4\beta-\alpha)_c^{3,\alpha}\omega^4+\text{etc.}$$

$$=(1+\omega+(1+2\beta-\alpha)\frac{\omega^2}{2}+(1+3\beta-\alpha)_c^{2,\alpha}\frac{\omega^3}{3}+(1+4\beta-\alpha)_c^{3,\alpha}\frac{\omega^4}{4}+\text{etc.})^x$$

§. 14. Dieser allgemeine Satz enthält die bereits (§. 4,5,10.) bewiesenen Sätze als specielle Fälle. Setzt man nämlich $\alpha=1$, $\beta=0$, so wird derselbe

$$1+x\omega+x_c^{:2}\omega^2+x_c^{:3}\omega^3+x_c^{:4}\omega^4+\text{etc.}=(1+\omega)^x.$$

Für $\alpha=0$, $\beta=0$, ergiebt sich

$$1+x\omega+x_c^2\omega^2+x_c^3\omega^3+\text{etc.}=(1+\omega+\omega_c^2+\omega_c^3+\text{etc.})^x.$$

Nimmt man $\alpha=1$, und für β irgend eine beliebige Zahlen, so hat man

$$1+x\omega+\frac{x}{2}(x+2\beta-1)\omega^2+\frac{x}{3}(x+3\beta-1)_c^{:2}\omega^3+\frac{x}{4}(x+4\beta-1)_c^{:3}\omega^4+\text{etc.}$$

$$=(1+\omega+2\beta\frac{\omega^2}{2}+(3\beta)_c^{:2}\frac{\omega^3}{3}+(4\beta)_c^{:3}\frac{\omega^4}{4}+(5\beta)_c^{:4}\frac{\omega^5}{5}+\text{etc.})^x$$

oder $=z^x$, wo z eine der Wurzeln der Gleichung $\omega z^\beta - z + 1 = 0$.

§. 15. Aufserdem ist auch noch die Gleichung von besondern Nutzen, welche sich ergiebt, wenn man in der allgemeinen Gleicqung (§. 14.) $\alpha=2$, $\beta=1$ setzt. Man hat alsdann:

$$1+x\omega+\frac{x^2}{2}\omega^2+\frac{x}{3}(x+1)_c^{2,2}\omega^3+\frac{x}{4}(x+2)_c^{3,2}\omega^4+\frac{x}{5}(x+3)_c^{4,2}\omega^5+\text{etc.}$$

$$=(1+\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}2_c^{2,2}\omega^3+\frac{1}{4}3_c^{3,2}\omega^4+\frac{1}{5}4_c^{4,2}\omega^5+\text{etc.})^x.$$

Oder, weil

$$\frac{x}{3}(x+1)_c^{2,2}=\frac{x}{3}\frac{(x+1)(x-1)}{1.\ 2}=\frac{x.(x^2-1)}{2.\ 3}$$

$$\frac{x}{4}(x+2)_c^{3,2}=\frac{x}{4}\frac{(x+2)x(x-2)}{1.\ 2.\ 3}=\frac{x^2(x^4-4)}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\frac{x}{4}(x+3)_c^{4,2}=\frac{x}{5}\frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}=\frac{x.(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

$$\frac{x}{4}(x+4)_c^{5,2}=\frac{x}{4}\frac{(x+4)(x+2)x(x-2)(x-4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}=\frac{x^2.(x^2-4)(x^2-16)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$

etc. etc. etc.

und folglich $\frac{1}{3}2_c^{2,2}=0$, $\frac{1}{4}3_c^{3,2}=-\frac{3}{2.3.4}=-\frac{1}{2.4}$, $\frac{1}{5}4_c^{3,2}=0$,

$\frac{1}{6}5_c^{5,2}=\frac{3.\ 15}{2.3.4.5.6}=\frac{1.\ 3}{2.\ 4.\ 6}$, $\frac{1}{7}6_c^{6,2}=0$, $\frac{1}{8}7_c^{7,2}=-\frac{1.3.15.35}{2.3.4.5.6.7.8}=-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}$ etc.,

so ist auch

$$1+x\omega+\tfrac{1}{2}x^2\omega^2+\frac{x(x^2-1)}{2.\ 3}\omega^3+\frac{x^2(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\omega^4+\frac{x(x^2-1)(x-9)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\omega^5+\text{etc.}$$

$$=(1+\omega+\tfrac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2.4}\omega^4+\frac{1.3}{2.4.6}\omega^6-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\omega^8+\text{etc.})^x.$$

Es ist aber $\Upsilon(1+\omega)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}\omega^2+\left(\frac{1}{2}\right)_c^{:2}\omega^4+\left(\frac{1}{2}\right)_c^{:3}\omega^6+\text{etc.}$

$$=1+\tfrac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2.4}\omega^4+\frac{1.3}{2.4.6}\omega^6-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\omega^8+\text{etc.}$$

Folglich

$$(\omega+\Upsilon(1+\omega^2))^x=1+x\omega+\tfrac{1}{2}x^2\omega^2+\frac{x(x^2-1)}{2.\ 3}\omega^3+\frac{x^2(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\omega^4+\text{etc.}\ (A)$$

§. 16. Es läfst sich aber die so eben gefundene Gleichung auch auf folgende Art darstellen:

$$(\omega+\sqrt{1+\omega^2})^x=\sqrt{(1+\omega^2)}.(1+x\omega+(x+1)_c^{2/2}\omega^2+(x+2)_c^{3/2}\omega^3+\text{etc.})$$

$$\text{oder}\quad =\sqrt{(1+\omega^2)}.(1+x\omega+\frac{x^2-1}{2}\omega^2+\frac{x(x^2-4)}{2.\ 3}\omega^3+\text{etc.})\quad\text{(B)}$$

Multiplicirt man nämlich

$$1+x\omega+\frac{x^2-1}{2}\omega^2+\frac{x(x^2-4)}{2.\ 3}\omega^3+\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 4.}\omega^4+\text{etc.}$$

durch $\sqrt{(1+\omega^2)}=1+\frac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2.4}\omega^4+\frac{1.3}{2.4.6}\omega^6-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\omega^8+\text{etc.}$

so erhält man,

$$1+x\omega+\frac{x^2-1}{2}\left|\begin{array}{l}\omega^2+\frac{x(x^2-4)}{2.\ 3}\\ +\frac{1}{2}\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}\omega^3+\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 4}\\ +\frac{1}{2}x\\ +\frac{1}{2}\frac{(x^2-1)}{2}\\ -\frac{1}{2.4}\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}\omega^4+\frac{x(x^2-4)(x^2-16)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\\ +\frac{1}{2}\frac{x(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\\ -\frac{1}{2.4}x\end{array}\right|\omega^5+\text{etc.}$$

$$=1+x\omega+\frac{x^2}{2}\omega^2+\frac{x(x^2-1)}{2.\ 3}\omega^3+\frac{x^2(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\omega^4+\frac{x(x^2-1)\,x^2-9}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\omega^5+\text{etc.}$$

Um den obigen Satz mit aller Strenge zu beweisen, wäre es nöthig zu zeigen, dafs für jede beliebige ganze Zahl n,

$$\frac{x}{n}(x+n-2)_c^{n-1/2}=(x+n-1)_c^{n/2}+\frac{1}{2}(x+n-3)_c^{n-2/2}+\left(\frac{1}{2}\right)_c^{2}(x+n-5)_c^{n-4/2}+\text{etc.}$$

sein mufs. Die Wahrheit dieses Satzes findet man bestätigt, wenn man nach und nach $n=1,\ 2,\ 3,$ etc. setzt. Ein strenger elementarischer Beweis desselben ist mir jetzt nicht gegenwärtig.

Übrigens läfst sich der letzte Ausdruck von $(\omega+\sqrt{1+\omega^2})^x$ (B) aus dem erstern (A) auf eine äusserst einfache Weise herleiten, wenn man mit den ersten Gründen der Differential-Rechnung bekannt ist. Differencirt man nämlich die Gleichung

$$(\omega+\sqrt{1+\omega^2})^x=1+x\omega+\tfrac{1}{2}x^2\omega^2+\frac{x}{3}.(x+1)_c^{2/2}\omega^3+\frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\omega^4+\text{etc.}$$

auf beiden Seiten in Bezug auf ω, indem man x als constant betrachtet, und dividirt alsdann durch $x\,d\omega$, so erhält man

$$\frac{(\omega+\sqrt{1+\omega^2})^x}{\sqrt{(1+\omega^2)}}=1+x\omega+(x+1)_c^{2/2}\omega^2+(x+2)_c^{3/2}\omega^3+(x+3)_c^{4/2}\omega^4+\text{etc.}$$

§. 17. Weil (§. 6.) $a^x=1+xla+x_c^2(la)^2+x_c^3(la)^3+\text{etc.}$, wo la den natürlichen Logarithmen von a bedeutet, so hat man auch

$$(\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}^x=1+xl(\omega+\sqrt{1+\omega^2})+x_c^2(l(\omega+\sqrt{1+\omega^2}))^2+\text{etc.}$$

Da aber auch

$$(\omega+\sqrt{(1+\omega^2)})^x=1+x\omega+\frac{x^2}{2}\omega^2+\frac{x(x^2-1)}{2.\ 3}\omega^3+\frac{x^2(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\omega^4+\text{etc.},$$

so erhält man, wenn man die beiden Werthe von $(\omega+\sqrt{1+\omega^2})^x$ einander gleich setzt, auf beiden Seiten 1 subtrahirt, und alsdann durch x dividirt,

$$l.(\omega+\sqrt{(1+\omega^2)})+\tfrac{1}{2}x(l(x+\sqrt{1+\omega^2}))^2+\tfrac{1}{3}x_c^2(l(\omega+\sqrt{1+\omega^2}))^3+\text{etc.}$$

$$=\omega+\frac{x}{2}\omega^2+\frac{x^2-1}{2.\ 3}\omega^3+\frac{x.(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\omega^4+\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\omega^5+\text{etc.}$$

Setzt man nun $x=o$, so hat man

$$l(\omega+\sqrt{1+\omega^2})=\omega-\frac{1}{2.3}\omega^3+\frac{1.9}{2.3.4.5}\omega^5-\frac{1.9.25}{2.3.4.5.6.7}\omega^7+\text{etc.}$$

$$=\omega-\tfrac{1}{2}\frac{\omega^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\omega^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\omega^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\omega^9}{9}+\text{etc.}$$

Es ist zu bemerken, dafs man diese Gleichung auch erhält, wenn man $(1+\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$ vermittelst des binomischen Lehrsatz in eine Reihe entwickelt, diese mit ω multiplicirt, und das allgemeine Glied derselben $\pm\frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....2r}\omega^{2r+1}$ noch durch $2r+1$ dividirt.

§. 18. Wir haben schon oben (Vorl. 1. §. 62.) bemerkt, dafs die natürlichen Logarithmen wegen einer Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel auch die hyperbolischen Logarithmen genannt werden. Eine etwas umständliche Betrachtung die-

ser Curve in dieser Hinsicht wird daher hier nicht am unrechten Orte sein. Die Natur der gleichseitigen Hyperpel wird durch die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ ausgedrückt, wo x, y die rechtwinklichten Koordinaten eines beliebigen Punctes der Hyperbel, und a irgend eine unveränderliche gerade Linie, die Axe der Hyperbel genannt, bedeuten. Für den Kreis hat man bekanntlich die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$, wo x, y ebenfalls die rechtwinklichten Koordinaten eines Punctes des Kreisumfanges, und a den Halbmesser des Kreises bedeutet. Um die beiden Koordinaten x, y zu unterscheiden, nennt man auch wohl x die Abscisse, und y die Ordinate eines Punctes der Curve.

§. 19. Man kann die rechtwinklichten Koordinaten x, y der gleichseitigen Hyperbel als gemeinschaftliche Functionen einer dritten veränderlichen Gröfse t betrachten, oder man kann $x = \psi t$, $y = \varphi t$ setzen. Diese beiden Functionen können jede beliebige Form haben; nur müssen sie so beschaffen sein, dafs $\psi t^2 - \varphi t^2 = a^2$ ist.

So kann man z. B. $\psi t = a.\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\varphi t = a\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ annehmen. Denn weil

$$\psi t^2 = a^2.\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4},\ \varphi t^2 = a^2.\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}$$

so ist $\psi t^2 - \varphi t^2$ oder $x^2 - y^2 = a^2$.

Eben so hätte man $\psi t = a.\frac{(1+\alpha)^t + (1-\alpha)^t}{2\sqrt{1-\alpha^2}^t}$, $\varphi t = a\,\frac{(1+\alpha)^t - (1-\alpha)^t}{2\sqrt{1-\alpha^2}^t}$ setzen können. Man würde alsdann

$$\psi t^2 = a^2\,\frac{(1+\alpha)^{2t} + 2(1-\alpha^2)^t + (1-\alpha)^{2t}}{4(1-\alpha^2)^t}$$

$$\psi t^2 = a^2\,\frac{(1+\alpha)^{2t} - 2(1-\alpha^2)^t + (1-\alpha)^{2t}}{4(1-\alpha^2)^t}$$

und folglich auch $\psi t^2 - \varphi t^2 = a^2$ erhalten haben.

§. 20. Nimmt man in der gleichseitigen Hyperbel, oder im Kreisumfange zwei Puncte P, Ṕ an, deren resp. Koordinaten x, y; x', y', so wird, wie man sich

leicht überzeugen kann, wenn die Koordinaten positiv sind und $y' > y$, der Flächeninhalt des Dreiecks, welches die beiden Puncte P, Ṕ, und der Anfangspunct der Koordinaten O bestimmen $= \frac{xy' - yx'}{2}$ sein. Wendet man diefs auf die gleichseitige Hyperbel an und setzt $x = a\,\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = a\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}$, so dafs $x' = a\,\frac{e^{t'} + e^{-t'}}{2}$, $y' = a\,\frac{e^{t'} - e^{-t'}}{2}$, so erhält man für den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Scheitel im Mittelpuncte der Hyperbel liegt, und dessen Basis die Sehne des hyperbolischen Bogens P Ṕ ist,

$$\frac{xy' - yx'}{2} = \frac{a^2}{8}\left[(e^t + e^{-t})(e^{t'} - e^{-t'}) - (e^t - e^{-t})(e^{t'} + e^{-t'})\right] = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{e^{(t'-t)} - e^{-(t'-t)}}{2}.$$

§. 21. Denkt man sich nun vom Scheitel A der gleichs. Hyperbel bis zum Puncte P, dessen Abscisse $= a\,\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, und dessen Ordinate $= a\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $m - 1$ Puncte P_1, P_2, P_3, ... P_{m-1},

deren resp. Abscissen $a\frac{e^{\frac{t}{m}} + e^{-\frac{t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{2t}{m}} + e^{-\frac{2t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{3t}{m}} + e^{-\frac{3t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{4t}{m}} + e^{-\frac{4t}{m}}}{2}$, etc.

und deren Ordinaten $a\frac{e^{\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{2t}{m}} - e^{-\frac{2t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{3t}{m}} + e^{-\frac{3t}{m}}}{2}$, $a\frac{e^{\frac{4t}{m}} - e^{-\frac{4t}{m}}}{2}$, etc.

sind, so werden alle m Dreiecke, welche von je zwei nächst aufeinanderfolgenden Puncten vom Scheitelpuncte A an bis zum Puncte P, und dem Mittelpuncte der Hyperbel gebildet werden, unter sich gleich, und zwar $= \frac{a}{2}.\frac{e^{\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{m}}}{2}$ sein. Der Flächeninhalt einer Figur, welche von der halben Axe OA der gleichs. Hyperbel, dem Radiusvector OP des Punctes P, und der aus den m Sehnen der Hyperbel zusammengesetzten gebrochnen Linie A P_1 P_2 P_3 ... P_{n-1} P eingeschlossen ist, wird demnach $= \frac{a^2}{2}.m\frac{(e^{\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{m}})}{2}$ sein. Diese Fläche nähert sich aber immer mehr und mehr

dem hyperbolischen von der halben Axe AO, dem Radiusvector OP, und dem Bogen AP begränzten Sector. Man erhält also den Flächeninhalt desselben, wenn man in $\frac{a^2}{2} m \frac{(e^{\frac{t}{m}} - e^{\frac{t}{m}})}{2}$ m unendlich grofs annimmt. Es ist aber, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet,

$$e^{\frac{t}{m}} = 1 + \frac{t}{m} + \frac{t^2_c}{m^2} + \frac{t^3_c}{m^3} + \frac{t^4_c}{m^4} + \text{etc.}$$

$$e^{-\frac{t}{m}} = 1 - \frac{t}{m} + \frac{t^2_c}{m^2} - \frac{t^3_c}{m^3} + \frac{t^4_c}{m^4} + \text{etc.}$$

Daher $m \frac{e^{\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{m}}}{2} = t + \frac{t^3_c}{m^2} + \frac{t^5_c}{m^4} + \text{etc.}$, und wenn $m = \infty$, $= t$.

Es ist also der hyperbolische Sector AOP, weil $x = a \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = a \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, folglich $e^t = \frac{x+y}{a}$, und $t = \log \text{nat} \frac{x+y}{a}$, $= \frac{a^2}{2} \cdot t = \frac{a^2}{2} \cdot \log \text{nat} \frac{x+y}{a}$.

Nimmt man die halbe Axe a der gleichseitigen Hyperbel zur Einheit an, und bezeichnet die Abscisse und Ordinate eines Punctes P der Hyperbel durch ξ, η, so dafs $\xi^2 - \eta^2 = 1$, so erhält man, wenn der zu ξ, η gehörige Sector OAP durch s ausgedrückt wird, $s = \frac{1}{2} \log \text{nat} (\xi + \eta)$, oder weil $\xi^2 = 1 + \eta^2$, $2s = \log \text{nat} (\sqrt{1+\eta^2} + \eta)$; und wenn wir diesen Logarithmen nach (§. 17.) durch eine nach den natürlichen Potenzen von η fortlaufenden Reihe ausdrücken,

$$2s = \eta - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\eta^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\eta^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\eta^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{\eta^9}{9} + \text{etc.}$$

§. 22. Weil $\log \text{nat} (\xi + \eta) = \frac{1}{2} \log \text{nat} (\xi + \eta)^2$, oder auch wegen

$$\xi^2 - \eta^2 = 1, = \tfrac{1}{2} \log \text{nat} \frac{(\xi+\eta)^2}{\xi^2 - \eta^2} = \tfrac{1}{2} \log \text{nat} \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} = \tfrac{1}{2} \log \text{nat} \frac{1 + \frac{\xi}{\eta}}{1 + \frac{\xi}{\eta}},$$

so hat man (Vorl. 1. §. 65.)

$$2s = \frac{\eta}{\xi} + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^3 + \tfrac{1}{5} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^5 + \tfrac{1}{7} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^7 + \tfrac{1}{9} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^9 + \text{etc.}$$

§. 23. Aus $2s = \log \text{nat} (\xi + \eta)$ folgt $e^{2s} = \xi + \eta$, wo e die bekannte Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Da nun $\xi^2 - \eta^2 = 1$, so erhält man $e^{-2s} = \frac{1}{\xi + \eta} = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi + \eta} = \xi - \eta$. Es ist also $\xi + \eta = e^{2s}$ und $\xi - \eta = e^{-2s}$, folglich $\xi = \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{2}$, und $\eta = \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}$.

Es ist aber (§. 5.) $e^{2s} = 1 + 2s + (2s)^2_c + (2s)^3_c + (2s)^4_c + (2s)^5_c + \text{etc.}$

und $e^{-2s} = 1 - 2s + (2s)^2_c - (2s)^3_c + (2s)^4_c - (2s)^5_c + \text{etc.}$

folglich $\frac{e^{2s} + e^{-2s}}{2}$, oder $\xi = 1 + (2s)^2_c + (2s)^4_c + (2s)^6_c + \text{etc.}$

und $\frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}$, oder $\eta = 2s + (2s)^3_c + (2s)^5_c + (2s)^7_c + \text{etc.}$

§. 24. Hätte man in der (§. 21.) gefundenen Gleichung $S = \frac{1}{2} a^2 \cdot \log \text{nat} \frac{x+y}{a}$, $\frac{x}{a} = \xi$ $\frac{y}{a} = \eta$, $\frac{S}{a^2} = s$ gesetzt, so würden sich, auf gleiche Weise, die so eben gefundenen Ausdrücke für $2s$, ξ, η ergeben haben. Substituirt man daher in denselben $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$ und $\frac{S}{a^2}$ resp. für ξ, η, s, so erhält man

$$2S = a^2 \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2.3} \left(\frac{y}{a}\right)^3 + \frac{1.3.}{2.4.5} \left(\frac{y}{a}\right)^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \left(\frac{y}{a}\right)^7 + \text{etc.}\right)$$

$$= a^2 \left(\frac{y}{x} + \tfrac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \tfrac{1}{5} \left(\frac{y}{x}\right)^5 + \tfrac{1}{7} \left(\frac{y}{x}\right)^7 + \tfrac{1}{9} \left(\frac{y}{x}\right)^9 + \text{etc.}\right)$$

$$x = a \left(1 + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^2_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^4_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^6_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^8_c + \text{etc.}\right),$$

$$y = a \left(\frac{2S}{a^2} + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^3_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^5_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^7_c + \left(\frac{2S}{a^2}\right)^9_c + \text{etc.}\right).$$

§. 25. Aus den beiden (§. 23.) gefundenen Gleichungen ergeben sich mehrere andere interessante Sätze, von denen wir die wichtigsten entwickeln wollen.

Weil nämlich *Abse.* $s = \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{2}$, *Ord.* $s = \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}$

also auch *Abse.* $t = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$, *Ord.* $t = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$

so ist

$$Absc.\ s\ .\ Absc.\ t = \tfrac{1}{4}(e^{2s+2t} + e^{2s-2t} + e^{2t-2s} + e^{-(2s+2t)})$$
$$Ord.\ s\ .\ Ord.\ t = \tfrac{1}{4}(e^{2s+2t} - e^{2s-2t} - e^{2t-2s} + e^{-(2s+2t)})$$
$$Ord.\ s\ .\ Absc.\ t = \tfrac{1}{4}(e^{2s+2t} + e^{2s-2t} - e^{2t-2s} - e^{-(2s+2t)})$$
$$Absc.\ s\ .\ Ord.\ t = \tfrac{1}{4}(e^{2s+2t} - e^{2s-2t} + e^{2t-2s} - e^{-(2s+2t)})$$

Daraus folgt:

$$Absc.\ s\,.Absc.\ t + Ord.\ s\,.Ord.\,t = \frac{e^{2s+2t} + e^{-(2s+2t)}}{2} = Absc.\ (s+t)$$

$$Absc.\ s\,.Absc.\ t - Ord.\ s\,.Ord.\,t = \frac{e^{2s-2t} + e^{2t-2s}}{2} = Absc.\ (s-t)$$

$$Ord.\ \ s\,.Absc.\ t + Absc.s\,.Ord.\,t = \frac{e^{2s+2t} - e^{-(2s+2t)}}{2} = Ord.\ \ (s+t)$$

$$Ord.\ \ s\,.Absc.\ t - Absc.s\,.Ord.\,t = \frac{e^{2s-2t} - e^{2t-2s}}{2} = Ord.\ \ (s-t)$$

§. 26. Aus den so eben gefundenen vier Gleichungen ergeben sich unmittelbar folgende:

$$Absc.\ (s+t) + Absc.\ (s-t) = 2\ Absc.\ s\ .\ Absc.\ t$$
$$Absc.\ (s-t) - Absc.\ (s-t) = 2\ Ord.\ \ s\ .\ Ord.\ \ t$$
$$Ord.\ \ (s+t) + Ord.\ \ (s-t) = 2\ Ord.\ \ s\ .\ Absc.\ t$$
$$Ord.\ \ (s+t) - Ord.\ \ (s-t) = 2\ Absc.\ s\ .\ Ord.\ \ t$$

Oder wenn man $s+t=\alpha$, $s-t=\beta$ setzt, so dafs

$s = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t = \frac{\alpha-\beta}{2}$, so erhält man:

$$Absc.\ \alpha + Absc.\ \beta = 2\ Absc.\ \frac{\alpha+\beta}{2}\ .\ Absc.\ \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$Absc.\ \alpha - Absc.\ \beta = 2\ Ord.\ \ \frac{\alpha+\beta}{2}\ .\ Ord.\ \ \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$Ord.\ \ \alpha + Ord.\ \ \beta = 2\ Ord.\ \ \frac{\alpha+\beta}{2}\ .\ Absc.\ \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$Ord.\ \ \alpha - Ord.\ \ \beta = 2\ Absc.\ \frac{\alpha+\beta}{2}\ .\ Ord.\ \ \frac{\alpha-\beta}{2}$$

§. 27. Setzt man in den ersten beiden der vier letzten Gleichungen $\beta = o$, so erhält man, weil Absc. $o = 1$.

$$Absc.\ \alpha + 1 = 2\ Absc.^2\tfrac{\alpha}{2}, \quad Absc.\ \alpha - 1 = 2\ Ord.^2\tfrac{\alpha}{2}$$

$$Absc.\ \tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Absc.\ \alpha + 1}{2}}, \quad Ord.\ \tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Absc.\ \alpha - 1}{2}}$$

§. 28. Wird in der ersten und 3ten der (§. 26.) gefundenen Gleichungen $\alpha = (m+1)s$, $\beta = (m-1)s$ gesetzt, so verwandeln sich dieselben in

$$Absc.\ (m+1)s + Absc.\ (m-1) = 2\ Absc.\ ms\ .\ Absc.\ s$$
$$Ord.\ \ (m+1)s + Ord.\ \ (m-1) = 2\ Ord.\ \ ms\ .\ Absc.\ s$$

oder man hat, wenn wir (§. 21.) Absc. $s = \xi$, Ord. $s = \eta$ setzen,

$$Absc.\ (m+1)s = 2\xi\ .\ Absc.\ ms - Absc.\ (m-1)s$$
$$Ord.\ \ (m+1)s = 2\xi\ .\ Ord.\ \ ms - Ord.\ \ (m-1)s$$

Bedeutet nun m eine positive ganze Zahl, so bilden sowohl die Abscissen als die Ordinaten der vielfachen Sectoren zwei sogenannte wiederkehrende Reihen

$$Absc.\ s,\quad Absc.\ 2s,\quad Absc.\ 3s,\quad Absc.\ 4s,\quad Absc.\ 5s,\quad \text{etc.}$$
$$Ord.\ \ s,\quad Ord.\ \ 2s,\quad Ord.\ \ 3s,\quad Ord.\ \ 4s,\quad Ord.\ \ 5s,\quad \text{etc.}$$

in welchen jedes Glied aus den zwei nächst vorhergehenden abgeleitet werden kann, indem man das nächst vorhergehende Glied mit 2ξ multiplicirt, und das 2te vorhergehende von dem Producte abzieht. Diefs gilt auch von den doppelten Gliedern. Demnach ist

$$2\ Absc.\ o = 2$$
$$2\ Absc.\ s = 2\xi$$
$$2\ Absc.\ 2s = (2\xi)^2 - 2$$
$$2\ Absc.\ 3s = (2\xi)^3 - 3(2\xi)$$
$$2\ Absc.\ 4s = (2\xi)^4 - 4(2\xi)^2 + 2$$
$$2\ Absc.\ 5s = (2\xi)^5 - 5(2\xi)^3 + 5(2\xi)$$
$$2\ Absc.\ 6s = (2\xi)^6 - 6(2\xi)^4 + 9(2\xi)^2 - 2$$
$$2\ Absc.\ 7s = (2\xi)^7 - 7(2\xi)^5 + 14(2\xi)^3 - 7(2\xi)$$
$$2\ Absc.\ 8s = (2\xi)^8 - 8(2\xi)^6 + 20(2\xi)^4 - 16(2\xi)^2 + 2$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Alle diese Ausdrücke für die Abscissen der vielfachen Sectoren sind, wie man sich leicht durch Versuche überzeugen kann, unter folgender allgemeinen Gleichung begriffen,

$$2\ Absc.\ ms = (2\xi)^m - m(2\xi)^{m-2} + \frac{m}{2}\cdot(m-3)(2\xi)^{m-4} - \frac{m}{3}(m-4)_c^{:2}(2\xi)^{m-6} + \text{etc.}$$

Um diesen Satz zu beweisen, darf man nur noch zeigen, dafs

$$(2\xi)^m - m(2\xi)^{m-2} + \frac{m}{2}(m-3)(2\xi)^{m-4} - \frac{m}{3}(m-4)_c^{:3}(2\xi)^{m-6} + \text{etc.} = Q_m$$

gesetzt, die Glieder der Reihe Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, etc. eine wiederkehrende Reihe bilden, deren Beziehungsgleichung dieselbe ist, wie die der Reihe 2 Absc. s, 2 Absc. $2s$, 2 Absc. $3s$, etc. Es ist aber:

$$Q_{m+1} = (2\xi)^{m+1} - (m+1)(2\xi)^{m-1} + \frac{m+1}{2}(m-2)(2\xi)^{m-3} - \frac{m+1}{3}(m-3)_c^{:2}(2\xi)^{m-5} + \text{etc.}$$

$$Q_{m-2} = \qquad (2\xi)^{m-1} - (m-1)(2\xi)^{m-3} + \frac{m-1}{2}(m-4)_c^{:2}(2\xi)^{m-5} + \text{etc.}$$

und weil

$$\frac{m+1}{r}\cdot(m-r)_c^{:r-1} - \frac{m-1}{r-1}(m-r-1)_c^{:r-2} = \left(\frac{m+1}{r}\cdot\frac{m-r}{r-1} - \frac{m-1}{r-1}\right)(m-r-1)^{:r-2}$$

$$= \frac{m\ (m-2r+1)}{r.\ (r-1)}\cdot(m-r-1)_c^{:r-2} = \frac{m}{r}\cdot(m-r-1)_c^{:r-1},$$

so erhält man:

$$Q_{m+1} + Q_{m-1} = (2\xi)^{m+1} - m(2\xi)^{m-1} + \frac{m}{2}(m-3)(2\xi)^{m-3} - \frac{m}{3}(m-4)_c^{:2}(2\xi)^{m-5} + \text{etc.}$$

$$= 2\xi\ Q_m.$$

Es bilden also die Gröfsen Q_1, Q_2, Q_3, etc. eine Reihe, in welcher jedes Glied aus den zwei nächst vorhergehenden abgeleitet sind, wie das correspondirende Glied der Reihe: 2 Absc. s, 2 Absc. $2s$, 2 Absc. $3s$, etc. aus den zwei nächst vorhergehenden Gliedern. Da nun $Q_1 = 2\xi = 2$ Absc. s, $Q_2 = (2\xi)^2 - 2 = 2$ Absc. $2s$, so müssen auch alle übrigen Glieder der Reihe Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, etc. den resp.

Gliedern der Reihe: 2 Absc. s, 2 Absc. $2s$, 2 Absc. $3s$, etc. gleich, oder es mufs allgemein sein:

$$2\ Absc.\ ms = Q_m = (2\xi)^m - m(2\xi)^{m-2} + \frac{m}{2}(m-3)(2\xi)^{m-4} - \text{etc.}$$

§. 29. Auf ähnliche Weise erhält man vermittelst der Gleichung Ord. $(m+1)s = 2\xi$ Ord. ms — Ord. $(m-1)s$

$$Ord.\ s = \eta$$
$$Ord.\ 2s = \eta(2\xi)$$
$$Ord.\ 3s = \eta((2\xi)^2 - 1)$$
$$Ord.\ 4s = \eta((2\xi)^3 - 2(2\xi))$$
$$Ord.\ 5s = \eta((2\xi)^4 - 3(2\xi)^2 + 1)$$
$$Ord.\ 6s = \eta((2\xi)^5 - 4(2\xi)^3 + 3(2\xi))$$
$$Ord.\ 7s = \eta((2\xi)^6 - 5(2\xi)^4 + 6(2\xi)^2 - 1)$$
$$Ord.\ 8s = \eta((2\xi)^7 - 6(2\xi)^5 + 10(2\xi)^3 - 4(2\xi))$$
$$Ord.\ 9s = \upsilon((2\xi)^8 - 7(2\xi)^6 + 15(2\xi)^4 - 10(2\xi))^2 + 1)$$
etc. etc. etc.

und allgemein

$$Ord.\ ms = \eta((2\xi)^{m-1} - (m-2)(2\xi)^{m-3} + (m-3)_c^{:2}(2\xi)^{m-5} - (m-4)_c^{:3}(2\xi)^{m-7} + \text{etc.})$$

Setze man nämlich

$$\eta((2\xi)^{m-1} - (m-2)(2\xi)^{m-3} + (m-3)_c^{:2}(2\xi)^{m-5} - (m-4)_c^{:3}(2\xi)^{m-7} + \text{etc.}) = P_m$$

so dafs

$$P_{m+1} = \eta((2\xi)^m - (m-1)(2\xi)^{m-2} + (m-2)_c^{:2}(2\xi)^{m-4} - (m-3)_c^{:3}(2\xi)^{m-6} + \text{etc.})$$

$$P_{m-1} = \qquad \eta((2\xi)^{m-2} - (m-3)(2\xi)^{m-4} + (m-4)_c^{:2}(2\xi)^{m-6} + \text{etc.})$$

so erhält man, weil

$$(m-r)_c^{:r} - (m-r-1)_c^{:r-1} = \left(\frac{m-r}{r} - 1\right).(m-r-1)_c^{:r-1} = \frac{m-2r}{r}.(m-r-1)_c^{:r-1}$$

$$= (m-r-1)_c^{:r},$$

$$P_{m+1} + P_{m-1} = \eta((2\xi)^m - (m-2)(2\xi)^{m-2} + (m-3)^{:2}_c(2\xi)^{m-4} - (m-4)^{:3}_c(2\xi)^{m-6} + \text{etc.}$$
$$= 2\xi\ P_m$$

Es bilden also, weil Ord. $(m+1)s$ + Ord. $(m-1)s = 2\xi$ Ord. ms, die Grösen P_1, P_2, P_3, P_4, etc. eine wiederkehrende Reihe, deren Beziehungsgleichung dieselbe ist, wie die der Ordinaten der vielfachen Sectoren.

Da nun die ersten correspondirenden Glieder beider Reihen einander gleich sind, so müssen auch alle übrigen einander gleich sein, oder es mufs allgemein Ord. $ms = P_m$ sein.

§. 29. Wir haben (§. 23.) gesehen, dafs für jeden beliebigen, von der halben Axe $OA = 1$, dem Radiusvector OP, und dem Bogen AP, begränzten Sector der gleichseitigen Hyperbel

$$\xi \quad \text{oder} \quad Absc.\ s = \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{2}$$

$$\text{und } \eta \quad \text{oder} \quad Ord.\ s = \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}.$$

Daher ist auch

$$Absc.\ xs = \frac{e^{2xs} + e^{-2xs}}{2}, \text{ und } Ord.\ xs = \frac{e^{2xs} - e^{-2xs}}{2},$$

oder, weil (§. 23.) $\xi + \eta = e^{2s}$ $\xi - \eta = e^{-2s}$,

$$Abcs.\ xs = \frac{(\xi+\eta)^x + (\xi-\eta)^x}{2}$$

$$Ord.\ xs = \frac{(\xi+\eta)^x - (\xi-\eta)^x}{2}.$$

Es ist aber

$$(\xi+\eta)^x = \xi^x + x\xi^{x-1}\eta + x^{:2}_c\xi^{x-2}\eta^2 + x^{:3}_c\xi^{x-3}\eta^3 + x^{:4}_c\xi^{x-4}\eta^4 + \text{etc.}$$
$$(\xi-\eta)^x = \xi^x - x\xi^{x-1}\eta + x^{:2}_c\xi^{x-2}\eta^2 - x^{:3}_c\xi^{x-3}\eta^3 + x^{:4}_c\xi^{x-4}\eta^4 - \text{etc.}$$

Folglich

$$Absc.\ xs = \xi^x + x^{:2}_c\xi^{x-2}\eta^2 + x^{:4}_c\xi^{x-4}\eta^4 + x^{:6}_c\xi^{x-6}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$Ord.\ xs = x\xi^{x-1}\eta + x^{:3}_c\xi^{x-3}\eta^3 + x^{:5}_c\xi^{x-5}\eta^5 + x^{:7}_c\xi^{x-7}\eta^7 + \text{etc.}$$

Oder, wenn man $\frac{\eta}{\xi} = \theta$ setzt,

$$Absc.\ xs = \xi^x(1 + x^{:2}_c\theta^2 + x^{:4}_c\theta^4 + x^{:6}_c\theta^6 + \text{etc.})$$

$$Ord.\ xs = \xi^x(x\theta + x^{:3}_c\theta^3 + x^{:5}_c\theta^5 + x^{:7}_c\theta^7 + \text{etc.})$$

Man übersieht leicht, dafs, wenn man am Ende der halben Axe OA der gleichseitigen Hyperbel oder im Scheitel A auf OA ein Perpendikel errichtet, welches den Radiusvector in Q schneidet, diefs Perpendikel $AQ = \theta$ sein wird. Weil, wegen der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$, $\eta^2 = \xi^2 - 1$, so mufs $\frac{\eta}{\xi}$ oder $\theta = \sqrt{(1 - \frac{1}{\xi^2})}$ sein. Je gröfser demnach die Abscisse ξ wird, desto kleiner wird $\frac{1}{\xi^2}$, und desto gröfser $\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}$ oder θ; kann aber nie $= 1$ werden. Macht man also das Perpendikel AQ der halben Axe AO gleich, und zieht vom Mittelpuncte O der Hyperbel die grade Linie OQ, so wird diese, wie weit man sie auch verlängern mag, sich der Hyperbel immer mehr nähern, sie aber nie schneiden. Man nennt diese Linie die Asymptote der Hyperbel. Sie macht in der gleichseitigen Hyperbel mit der Axe einen Winkel von 45°.

§. 31. Setzt man in den beiden Ausdrücken

$$Absc.\ xs = \frac{(\xi+\eta)^x + (\xi-\eta)^x}{2},\quad Ord.\ xs = \frac{(\xi+\eta)^x - (\xi-\eta)^x}{2},$$

wegen $\xi^2 - \eta^2 = 1$, $\xi = \sqrt{1+\eta^2}$, so erhält man:

$$Absc.\ xs = \frac{(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)^x + (\sqrt{1+\eta^2}-\eta)^x}{2}$$

$$Ord.\ xs = \frac{(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)^x - (\sqrt{1+\eta^2}-\eta)^x}{2}$$

Nun ist (§. 15.)

$$(\gamma\overline{1+\eta^2}+\eta)^x = 1 + x\eta + \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x(x^2-1)}{2.3}\eta^3 + \frac{x^2(x^2-4)}{2.3.4}\eta^4 + \frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4.5}\eta^5 + \text{etc.}$$

$$(\gamma\overline{1+\eta^2}-\eta)^x = 1 - x\eta + \frac{x^2}{2}\eta^2 - \frac{x(x^2-1)}{2.3}\eta^3 + \frac{x^2(x^2-4)}{2.3.4}\eta^4 - \frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4.5}\eta^5 + \text{etc.}$$

Demnach:

$$Absc.\ x\,s = 1 + \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x^2(x^2-4)}{2.3.4}\eta^4 + \frac{x^2(x^2-4)(x^2-16)}{2.3.4.5}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$Ord.\ x\,s = x\eta + \frac{x(x^2-1)}{2.3}\eta^3 + \frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4.5}\eta^5 + \frac{x(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\eta^7 + \text{etc.}$$

oder auch

$$Absc.\ x\,s = 1 + \frac{x}{2}.x\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 + \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$Ord.\ x\,s = x\eta + \frac{x}{3}(x+1)_c^{3/2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\eta^5 + \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\eta^7 + \text{etc.}$$

wo wegen der Bedeutung der Coefficienten in (§. 15.) nachzusehen ist.

Weil $\xi = \gamma\overline{1+\eta^2}$, so ist auch

$$Absc.\ x\,s = \frac{\xi}{2}.\left(\frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}+\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}} + \frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}-\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}}\right)$$

$$Ord.\ x\,s = \frac{\xi}{2}.\left(\frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}+\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}} - \frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}-\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}}\right).$$

Es ist aber §. 16.

$$\frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}+\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}} = 1 + x\eta + (x+1)_c^{2/2}\eta^2 + (x+2)_c^{3/2}\eta^3 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{(\gamma\overline{1+\eta^2}-\eta)^x}{\gamma\overline{1+\eta^2}} = 1 - x\eta + (x+1)_c^{2/2}\eta^2 - (x+2)_c^{3/2}\eta^3 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 + \text{etc.}$$

Folglich

$$Absc.\ x\,s = \xi\,(1 + (x+1)_c^{2/2}\eta^2 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 + (x+5)_c^{6/2}\eta^6 + \text{etc.})$$

$$Ord.\ x\,s = \xi\,(x\eta + (x+2)_c^{3/2}\eta^3 + (x+4)_c^{5/2}\eta^5 + (x+6)_c^{7/2}\eta^7 + \text{etc.})$$

oder auch

$$Absc.\ x\,s = \xi\,(1 + \frac{x^2-1}{2}\eta^2 + \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4}\eta^4 + \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.3.4.5.6}\eta^6 + \text{etc.})$$

$$Ord.\ x\,s = \xi\,(x\eta + \frac{x(x^2-4)}{2.3.}\eta^3 + \frac{x(x^2-4)(x^2-16)}{2.3.4.5}\eta^5 + \text{etc.})$$

§. 32. Bezeichnet man die Summe der geometrischen Reihe:

$e^{2\alpha} + e^{2(\alpha+\beta)} + e^{2(\alpha+2\beta)} + e^{2(\alpha+3\beta)} \ldots\ldots + e^{2(\alpha+n\beta)}$ durch $S^{(n)}$

und $e^{-2\alpha} + e^{-2(\alpha+\beta)} + e^{-2(\alpha+2\beta)} + e^{-2(\alpha+3\beta)} \ldots\ldots + e^{-2(\alpha+n\beta)}$ durch S_n,

so erhält man

$$Absc.\ \alpha + Absc.\ (\alpha+\beta) + Absc.\ (\alpha+2\beta) \ldots + Absc.\ (\alpha+n\beta) = \frac{S^{(n)}+S_n}{2}$$

und

$$Ord.\ \alpha + Ord.\ (\alpha+\beta) + Ord.\ (\alpha+2\beta) + Ord.\ (\alpha+3\beta) \ldots + Ord.\ (\alpha+n\beta) = \frac{S^n - S_n}{2}$$

Nun ist aber $S^{(n)} = \frac{e^{2(\alpha+(n+1)\beta)} - e^{2\alpha}}{e^{2\beta}-1} = \frac{e^{2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)} - e^{2\alpha-\beta}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}$

und $S_n = \frac{e^{-2\alpha+2\beta} - e^{-2(\alpha+n\beta)}}{e^{2\beta}-1} = \frac{e^{-2\alpha+\beta} - e^{-2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}.$

Also $\frac{S^n + S_n}{2} = \frac{e^{2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)} - e^{-2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)} - (e^{2\alpha-\beta} - e^{-2\alpha+\beta})}{2\,(e^{\beta}-e^{-\beta})}$

$$= \frac{Ord.\ (\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta) - Ord.\ (\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\ Ord.\ \frac{1}{2}\beta} = (\text{§. 26.})\ \frac{Absc.\ (\alpha+\frac{n}{2}\beta)\ Ord.\ (n+1)\frac{\beta}{2}}{Ord.\ \frac{1}{2}\beta}$$

und $\frac{S^n - S_n}{2} = \frac{e^{2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)} + e^{-2(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)} - (e^{2\alpha-\beta} + e^{-2\alpha+\beta})}{2\,(e^{\beta}-e^{-\beta})}$

$$= \frac{Absc.\ (\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta) - Absc.\ (\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\ Ord.\ \frac{1}{2}\beta} = (\text{§. 26.})\ \frac{Ord.\ (\alpha+\frac{n}{2}\beta)\ Ord.\ \frac{(n+1)}{2}\beta}{Ord.\ \frac{1}{2}\beta}.$$

Demnach

$$Absc.\ \alpha + Absc.\ (\alpha+\beta) + Absc.\ (\alpha+2\beta) \ldots + Absc.\ (\alpha+n\beta) = \frac{Absc.\ (\alpha+\frac{n}{2}\beta)\ Ord.\ (n+1)\frac{\beta}{2}}{Ord.\ \frac{1}{2}\beta}$$

und

$$Ord.\ \alpha + Ord.\ (\alpha+\beta) + Ord.\ (\alpha+2\beta) \ldots + Ord.\ (\alpha+n\beta) = \frac{Ord.\ (\alpha+\frac{n}{2}\beta)\ Ord.\ (n+1)\frac{\beta}{2}}{Ord.\ \frac{1}{2}\beta}$$

§. 33. Weil $2\xi = e^{2s} + e^{-2s} = e^{2s}(1 + e^{-4s})$

so ist $(2\xi)^m = e^{2ms}(1 + me^{-4s} + m_c^{:2} e^{-8s} + m_c^{:4} e^{-12s} + \text{etc.})$

$= e^{2ms} + me^{2(m-2)s} + m_c^{:2} e^{2(m-4)s} + m_c^{:3} e^{2(m-6)s} + \text{etc.}$

Diese Reihe ist endlich, wenn m eine positive ganze Zahl ist, und wird, wenn man sie umkehrt,

$= e^{-2ms} + me^{-2(m-2)s} + m_c^{:2} e^{-2(m-4)s} + m_c^{:3} e^{-2(m-6)s} + \text{etc.}$

so dafs

$(2\xi)^m = e^{2ms} + e^{-2ms} + m(e^{2(m-2)s} + e^{-2(m-2)s}) + m_c^{:2}(e^{2(m-4)s} + e^{-2(m-4)s})$

$= 2(Absc.\ ms + m\ Absc.(m-2)s + m_c^{:2}\ Absc.(m-4) + \text{etc.})$

wo das letzte Glied $\frac{1}{2} m_c^{:r}$ oder $m_c^{:r}\ Absc.\ s$ ist, je nachdem $m = 2r$ oder $= 2r+1$ ist.

Man hat demnach

$Absc.\ s = Absc.\ s$

$2\ Absc.^2 s = Absc.\ 2s + 1$

$2^2\ Absc.^3 s = Absc.\ 2s + 3\ Absc.\ s$

$2^3\ Absc.^4 s = Absc.\ 4s + 4\ Absc.\ 2s + 3$

$2^4\ Absc.^5 s = Absc.\ 5s + 5\ Absc.\ 3s + 10\ Absc.\ s$

$2^5\ Absc.^6 s = Absc.\ 6s + 6\ Absc.\ 4s + 15\ Absc.\ 2s + 10$

$2^6\ Absc.^5 s = Absc.\ 7s + 7\ Absc.\ 5s + 21\ Absc.\ 3s + 35\ Absc.\ s$

etc. etc. etc.

§. 34. Eben so erhält man ähnliche Ausdrücke für die Potenzen der Ordinate η des Sectors s.

Es ist nämlich:

$2\eta = e^{2s} - e^{-2s}$

$(2\eta)^2 = e^{4s} - 2 + e^{-4s}$

$(2\eta)^3 = e^{6s} - 3e^{2s} + 3e^{-2s} - e^{-6s}$

$(2\eta)^4 = e^{8s} - 4e^{4s} + 6 - 4e^{-4s} + e^{-8s}$

$(2\eta)^5 = e^{10s} - 5e^{6s} + 10e^{2s} - 10e^{-2s} + 5e^{-6s} - e^{-10s}$.

etc. etc. etc.

Demnach

$Ord.\ s = Ord.\ s$

$2\ Ord.^2 s = Absc.\ 2s - 1$

$2^2\ Ord.^3 s = Ord.\ 3s - 3\ Ord.\ s$

$2^3\ Ord.^4 s = Absc.\ 4s - 4\ Absc.\ 2s + 3$

$2^4\ Ord.^5 s = Ord.\ 5s - 5\ Ord.\ 3s + 10\ Ord.\ s$

$2^5\ Ord.^6 s = Absc.\ 6s - 6\ Absc.\ 4s + 15\ Absc.\ 2s - 10$

$2^6\ Ord.^7 s = Ord.\ 7s - 7\ Ord.\ 5s + 21\ Ord.\ 3s - 35\ Ord.\ s$

etc. etc. etc.

und allgemein

$2^{m-1}\ Ord.^m s = Absc.\ ms - m\ Absc.(m-2)s + m_c^{:2}\ Absc.(m-4) \ldots \pm m_c^{:\frac{m}{2}}$

oder $= Ord.\ ms - m\ Ord.\ (m-2)s + m_c^{:2}\ Ord.\ (m-4) \ldots \pm m_c^{:\frac{m-1}{2}}\ Ord.\ s,$

je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 35. Ein Perpendikel PQ $= \eta$ vom Endpuncte eines Kreisbogens AP $= s$, dessen Mittelpunct O und dessen Halbmesser $= 1$, auf den Halbmesser OA oder dessen Verlängerung gezogen, wird der Sinus des Bogens AP $= s$ oder des dazu gehörigen Winkels AOP genannt, nnd die Entfernuug des Fufses Q des Perpendikels PO vom Mittelpuncte O oder OQ $= \xi$, heifst der Cosinus des Bogens s. Man drückt diefs durch Zeichen so aus: $\eta = sin\ s$, $\xi = cos\ s$. Wird der auf beiden Seiten von O verlängerte Halbmesser AO zur Abscissenlinie und der Mittelpunct des Kreises zum Anfangspuncte der Abscissen angenommen, so ist auch η oder PQ die Ordinate, und ξ oder QO die Abscisse desselben Punctes P in dem Umfange des Kreises, dessen Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich zugleich, dafs $sin\ s$ und $cos\ s$ für jeden Werth von s eine solche gegenseitige Beziehung zu einander haben, dafs

$cos^2 s + sin^2 s = 1$.

Man übersieht leicht, wenn $sin\ s = \eta$, $cos = \xi$ und $s < \frac{1}{2}\pi$, wo π den halben Umfang des Kreises bedeutet, dessen Halbmesser $= 1$, dafs alsdann $sin(\pi - s) = \eta$,

$sin(\pi + s) = -\eta$, $sin(2\pi - s) = -\eta$; $cos(\pi - s) = -\xi$, $cos(\pi + s) = -\xi$, $cos(2\pi - s) = \xi$ sein mufs. Nimmt man den Bogen AP als positiv an, so mufs der Bogen AP′, wenn P′ auf der entgegengesetzten Seite von A liegt, als negativ betrachtet werden. Nun überzeugt man sich leicht, dafs die Sinusse zweier gleichen aber entgegengesetzten Bögen gleich aber entgegengesetzt, die Cosinusse aber gleich und gleichartig sein müssen.

§. 36. Die Exponenten der Verhältnisse je zweier der drei Gröfsen η, ξ, 1 werden ebenfalls durch eigene Namen und Zeichen ausgedrückt. Es wird nämlich $\frac{\eta}{\xi}$ die Tangente, $\frac{\xi}{\eta}$ die Cotangente, $\frac{1}{\xi}$ die Secante und $\frac{1}{\eta}$ die Cosecante des Bogens s genannt. Man drückt diefs durch Zeichen auf folgende Art aus: $\frac{\eta}{\xi} = tan\, s$, $\frac{\xi}{\eta} = cot\, s$, $\frac{1}{\xi} = sec\, s$, $\frac{1}{\eta} = cosec\, s$.

Aus diesen vier Gleichungen folgt unmittelbar

$\frac{sin\, s}{cos\, s} = tan\, s$, $\frac{cos\, s}{sin\, s} = cot\, s$, $\frac{1}{cos\, s} = sec\, s$, $\frac{1}{sin\, s} = cosec\, s$, und daraus wieder:

$sin\, s = cos\, s\, tan\, s$, $cos\, s = sin\, s\, cot\, s$, $1 = cos\, s\, sec\, s = sin\, s\, cosec\, s = cot\, s\, tan\, s$.

Überdiefs findet man daraus noch mit Hülfe der Gleichung $cos^2 s + sin^2 s = 1$, die beiden Gleichungen $1 + tan^2 s = sec^2 s$, $1 + cot^2 s = cosec^2 s$.

Zugleich ergiebt sich aber auch aus denselben, weil

$$\begin{aligned} sin(\pi - s) &= \eta, & sin(\pi + s) &= -\eta, & sin(2\pi - s) &= -\eta \\ cos(\pi - s) &= -\xi, & cos(\pi + s) &= -\xi, & cos(2\pi - s) &= \xi \end{aligned}$$

dafs

$$\begin{aligned} tan(\pi - s) &= -tan\, s, & tan(\pi + s) &= tan\, s, & tan(2\pi - s) &= -tan\, s \\ cot(\pi - s) &= -cot\, s, & cot(\pi + s) &= cot\, s, & cot(2\pi - s) &= -cot\, s \\ sec(\pi - s) &= -sec\, s, & sec(\pi + s) &= -sec\, s, & sec(2\pi - s) &= sec\, s \\ cosec(\pi - s) &= cosec\, s, & cosec(\pi + s) &= -cosec\, s, & cosec(2\pi - s) &= -cosec\, s. \end{aligned}$$

Aus den vier Gleichungen $\frac{sin\, s}{cos\, s} = tan\, s$, $\frac{cos\, s}{sin\, s} = cot\, s$, $\frac{1}{cos\, s} = sec\, s$, $\frac{1}{sin\, s} = cosec\, s$ verbunden mit dem Satze, dafs $Sin - s = -Sin\, s$, $cos - s = cos\, s$ folgt auch, dafs

die Secanten zweier gleichen aber entgegengesetzten Bögen gleich und gleichartig, die Tangenten, Cotangenten und Cosecanten, aber gleich und entgegengesetzt sind.

Noch ist zu bemerken, dafs alle Bögen desselben Kreises, deren gemeinschaftlicher Anfangspunct A ist, und welche um ein Vielfaches des ganzen Umfanges verschieden sind, zugleich denselben Endpunct P haben; dafs folglich die trigonometrischen Gröfsen: Sinus, Cosinus, Tangente etc. aller Bögen, die um ein Vielfaches des Kreisumfanges verschieden sind, resp. einander gleich und gleichartig, oder dafs $sin(2r\pi + s) = sin\, s$, $cos(2r\pi + s) = cos\, s$, $tan(2r\pi + s) = tan\, s$, etc. sein müssen.

§. 37. Nimmt man in dem Kreisumfange einen Punct B so an, dafs AB positiv und $= \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist das Perpendikel PR, von B auf den Halbmesser OB gezogen, der Sinus des Bogens BP. Es ist aber PR = OQ, folglich sin BP = cos AP, die Linie RO aber ist der Cosinus von BP, und weil RO = PQ, so hat man cos BP = sin AP. Nun ist aber Bogen AP + Bogen PB = $\frac{1}{2}\pi$, oder BP ist das Complement von AP, und umgekehrt AP ist das Complement von BP. Es ist demnach der Sinus und Cosinus eines Bogens resp. dem Cosinus und Sinus seines Complements gleich. Liegt der Punct P, von A nach B zu, über B hinaus, so dafs AP > $\frac{1}{2}\pi$, so mufs man den Bogen PB als einen negativen Bogen betrachten, weil um von P nach B zu kommen, die Bewegung der anfänglichen entgegengesetzt sein mufs. In diesem Sinne ist also immer AP + PB = $\frac{1}{2}\pi$, und AP kann auch jetzt von PB, und umgekehrt PB von AP als Complement betrachtet werden. Es ist also allgemein für jeden beliebigen Bogen AP = s, $sin\, s = cos(\frac{1}{2}\pi - s)$ und $cos\, s = sin(\frac{1}{2}\pi - s)$, oder der Sinus und Cosinus irgend eines Bogens ist resp. gleich dem Cosinus und Sinus seines Complements.

Daraus ergiebt sich nun leicht der Satz, dafs die Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante irgend eines Bogens respective gleich ist, der Cotangente, Tangente, Cosecante, Secante des Complements.

§. 38. Die trigonometrischen Functionen $tan\, s$, $cot\, s$, $sec\, s$, $cosec\, s$ lassen sich

ebenfalls wie $\sin s$ und $\cos s$, sowohl in Bezug auf ihre absolute Gröfse als auch ihrer durch ihre Vorzeichen + und − angedeuteten Beschaffenheit geometrisch darstellen. Man ziehe nämlich durch den Punct A eine auf OA auf beiden Seiten von A unbestimmt verlängerte senkrechte Linie. Diese wird den Kreis in A berühren. Eben so lege man durch den Punct B eine Berührungslinie.

Bezeichnet man nun die resp. Puncte, in welchen der verlängerte Halbmesser OP die Berührungslinien von A, und B schneidet durch S und T, so ist, wenn $AP = s$, $AS = \tan s$, $OS = \sec s$, $BT = \cot s$, $OT = \operatorname{cosec} s$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OPQ, OSA, OTB ist $AS : OA = PQ : OQ$ oder $AS : 1 = \sin s : \cos s$. Demnach $AS = \frac{\sin s}{\cos s} = \tan s$. Ferner ist $OS : OA = OP : OQ$ oder $OS : 1 = 1 : \cos s$. Also $OS = \frac{1}{\cos s} = \sec s$. Eben so hat man $BT : OB = OQ : PQ$ oder $BT : 1 = \cos s : \sin s$. Daher $BT = \frac{\cos s}{\sin s} = \cot s$. Endlich ist $OT : OB = OP : PQ$ oder $OT : 1 = 1 : \sin s$. Folglich $OT = \frac{1}{\sin s} = \operatorname{cosec} s$.

§. 39. Nimmt man die trigonometrischen Functionen $\sin s$, $\cos s$, $\tan s$, etc. für alle positiven Werth von s, von $s = o$ bis $s = \frac{1}{2}\pi$, als positiv an, so mufs die Seite der Berührungslinie von A, sowohl als von B, in welcher alsdann resp. der Durchschnittspunct S, T liegt, als die positive und die andere entgegengesetzte als die negative betrachtet werden.

Eben so ist, weil für AP oder $s < \frac{1}{2}\pi$, der Punct S sowohl als der Punct T in der Verlängerung des Radius OP, von O nach P zu liegt, diese Seite als die positive Seite, und die entgegengesetzte Verlängerung als die negative Seite des auf beiden Seiten unbestimmt verlängerten Halbmessers zu betrachten. Befindet sich also der Punct P im ersten Quadranten, so schneidet der verlängerte Halbmesser mit seiner positiven Seite die Berührungslinie von A sowohl als von B auf der positiven Seite. Liegt P im zweiten Quadranten, oder ist $AP = s > \frac{1}{2}\pi$ und $< \pi$, so schneidet der verlängerte Halbmesser mit der negativen Seite die negative Seite der

Berührungslinie von A. Eben so schneidet er, aber mit der positiven Seite, die negative Seite der Berührungslinie von B, so dafs, wie wir bereits oben gesehen haben, $\tan(\pi - s) = -\tan s$, $\sec(\pi - s) = -\sec s$, $\cot(\pi - s) = -\cot s$, $\operatorname{cosec}(\pi - s) = \operatorname{cosec} s$ sein mufs.

Kömmt der Punct P in den dritten Quadranten, so schneidet der verlängerte Halbmesser mit der negativen Seite die Berührungslinien, sowohl von A als von B, auf ihren positiven Seiten. Daher $\tan(\pi + s) = \tan s$, $\cot(\pi + s, = \cot s$, aber $\sec(\pi + s) = -\sec s$ und $\operatorname{cosec}(\pi + s) = -\operatorname{cosec} s$.

Im 4ten Quadranten trifft die positive Seite des verlängerten Halbmessers mit der negativen Seite der Berührungslinie von A, und die negative Seite des Halbmessers mit der negativen Seite der Berührungslinie von B zusammen, so dafs $\tan(2\pi - s) = -\tan s$, $\sec(2\pi - s) = \sec s$, $\cot(2\pi - s) = -\cot s$ und $\operatorname{cosec}(2\pi - s) = -\operatorname{cosec} s$.

Es wächst demnach $\tan s$, von $s = o$ an, zugleich mit s; geht, wie man sich auszudrücken pflegt, aus dem Positiven durchs Unendliche ins Negative über; nimmt dann wieder ab und geht aus dem Negativen durch Null ins Positive; dann wieder aus dem Positiven durchs Unendliche ins Negative u. s. f.

Die Secante ist, für $s = o$, $= 1$, wächst, und geht aus + durch ∞ in − über; nimmt dann wieder ab bis -1. Von jetzt an wächst sie wieder, bleibt aber negativ, und geht durch ∞ aus − in + über. Nun nimmt sie ab bis auf + 1 u. s. w.

$\operatorname{Cot} s$ ist, für $s = o$, unendlich; und, für jedes positive $s < \frac{1}{2}\pi$, positiv, nimmt ab und geht durch o ins Negative über, wächst alsdann bis ins Unendliche uud wird darauf positiv u. s. f.

$\operatorname{Cosec} s$ ist, für $s = o$, unendlich, nimmt ab, wenn s zunimmt, wird $= 1$, wenn $s = \frac{1}{2}\pi$; nimmt alsdann wieder zu und geht, für $s = \pi$, durchs Unendliche aus dem Positiven ins Negative über, bleibt nun negativ und nimmt für $s = \frac{3}{2}\pi$ bis auf -1 ab; nimmt jetzt wieder bis ins negative Unendliche zu u. s. f.

§. 40. Werden zwei Puncte P und P′ im ersten Quadranten des Kreises so angenommen, dafs $AP' > AP$; und bezeichnet man ihre resp. Abscissen und Ordinaten

durch ξ, η; ξ', η', so ist, wie man sich leicht überzeugen kann, der Flächeninhalt des Dreiecks $OPP' = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{2}$. Nimmt man nun in dem Umfange einen dritten Punct P_I so an, dafs der Bogen AP_I = dem Bogen PP' gleich ist, so mufs die Sehne AP_I auch der Sehne PP', und das Dreieck OAP_I dem Dreiecke OPP' gleich sein. Es ist aber , wenn $AP = s$, $AP' = s'$, also PP' und folglich auch $AP_I = s' - s$, das Perpendikel von dem Puncte P_I auf den Halbmesser OA, oder die Höhe des Dreiecks $OAP_I = sin(s' - s)$; diese, mit der halben Grundlinie $AO = \frac{1}{2}$, multiplicirt, giebt den Flächeninhalt des Dreiecks OAP_I oder $OPP' = \frac{1}{2} Sin(s' - s)$. Demnach ist $\frac{Sin(s' - s)}{2} = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{2}$, und folglich $Sin(s' - s) = cos\, s\ sin\, s' - sin\, s\ cos\, s'$.

§. 41. Weil $cos^2(s' - s) + sin^2(s' - s) = 1$, so ist $Cos^2(s' - s) = 1 - Sin^2(s' - s) = 1 - (\xi\eta' - \eta\xi')^2$. Da nun $\xi^2 + \eta^2 = 1$, und $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$, so ist auch

$$cos^2(s' - s) = (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2) - (\xi\eta' - \eta\xi')^2 = (\xi\xi' + \eta\eta')^2.$$

Es ist also $cos(s' - s) = \pm(\xi\xi' + \eta\eta')$, wo, weil ξ, η; ξ', η', und auch $cos(s' - s)$ positive Gröfsen sind, wenn die Puncte P, P' im ersten Quadranten liegen, das Zeichen + genommen werden mufs. Man hat demnach

$$Cos(s' - s) = cos\, s'\ cos\, s + sin\, s'\ sin\, s.$$

§. 42. Setzt man $s' - s = \sigma$, so werden die beiden so eben gefundenen Gleichungen folgende:

$$Cos\, \sigma = cos\, s\ cos(s + \sigma) + sin\, s\ sin(s + \sigma)$$
$$sin\, \sigma = -sin\, s\ cos(s + \sigma) + cos\, s\ sin(s + \sigma).$$

Daraus ergiebt sich, wenn man die obere Gleichung mit $cos\, s$, die untere mit $sin\, s$ multiplicirt, das letztere Product vom ersten abzieht, und dann $cos^2 s + sin^2 s = 1$ setzt,

$$Cos\, \sigma\ cos\, s - sin\, \sigma\ sin\, s = cos(s + \sigma).$$

Eben so erhält man, wenn man die obere mit $sin\, s$, die untere mit $cos\, s$ multiplicirt, und in der Summe beider Producte $cos^2 s + sin^2 s = 1$ setzt,

$$cos\, \sigma\ .\ sin\, s + sin\, \sigma\ cos\, s = sin(s + \sigma).$$

§. 43. Die so eben gefundenen vier Fundamental-Gleichungen

$$\begin{aligned} cos(x + y) &= cos\, x\ cos\, y - sin\, x\ sin\, y \\ cos(x - y) &= cos\, x\ coe\, y + sin\, x\ sin\, y \\ sin(x + y) &= sin\, x\ cos\, y + cos\, x\ sin\, y \\ sin(x - y) &= sin\, x\ cos\, y - cos\, x\ sin\, y \end{aligned} \qquad (A)$$

sind unter der Voraussetzung bewiesen worden, dafs x, y positive Bogen bedeuten, und dafs $x + y < \frac{1}{2}\pi$. Wir wollen jetzt zeigen, dafs diese Gleichungen allgemein für alle beliebigen Werthe von x, y wahr sind.

Substituirt man in den Ausdrücken rechter Hand dieser Gleichungen $\pi - x$ für x, so erhält man mit Berücksichtigung der Sätze (§. 35.):

$cos(\pi - x)\ cos\, y - sin(\pi - x)\ sin\, y = -cos\, x\ cos\, y - sin\, x\ sin\, y = -cos(x - y) = cos(\pi - x + y)$
$cos(\pi - x)\ cos\, y + sin(\pi - x)\ sin\, y = -cos\, x\ cos\, y + sin\, x\ sin\, y = -cos(x + y) = cos(\pi - x - y)$
$sin(\pi - x)\ cos\, y + cos(\pi - x)\ sin\, y = sin\, x\ cos\, y - cos\, x\ sin\, y = sin(x - y) = sin(\pi - x + y)$
$sin(\pi - x)\ cos\, y - cos(\pi - x)\ sin\, y = sin\, x\ cos\, y + cos\, x\ sin\, y = sin(x + y) = sin(\pi - x - y)$

Die obigen vier Gleichungen (A) gelten demnach für alle positive Werthe von x, y von denen der eine $< \frac{1}{2}\pi$, und der andere $> \frac{1}{2}\pi$ und $< \pi$.

Auf ähnliche Weise wird man auch finden, indem man $\pi + x$ für x, $2\pi - x$ für x substituirt, dafs die vier obigen Gleichungen für alle positive Werthe von x, y wahr sind, von denen der eine $< \frac{1}{2}\pi$, und der andere $> \pi$ und $< 2\pi$ ist.

Nimmt man nun die vier Gleichungen (A) als bewiesen an, wenn x positiv und $< \frac{1}{2}\pi$ und für jeden positiven Werth $y < 2\pi$, so ergiebt sich daraus, indem man wieder zuerst $\pi - x$, dann $\pi + x$, und endlich $2\pi - x$ in den Ausdrücken rechter Hand der Gleichungen (A) für x substituirt, dafs dieselben, für alle mögliche positive Werthe x, $y < 2\pi$ wahr sein müssen.

Substituirt man endlich in den Gleichungen (A) $2n\pi + x$ für x und $2n\pi + y$ für y, wo n

jede positive oder negative ganze Zahl, und x, y alle positive Bogen $< 2\pi$ bedeuten, so ergiebt sich, weil (§. 36.) $cos\,(2n\pi + x) = cos\,x$, $sin\,(2n\pi + x) = sin\,x$, dafs die vier Gleichungen (A) für alle beliebige positive und negative Werthe von x, y wahr sein müssen.

§. 44. Aus den Gleichungen (A) erhält man unmittelbar:

$$\begin{aligned} cos\,(x+y) &+ cos\,(x-y) = 2\,cos\,x\,cos\,y \\ cos\,(x+y) &- cos\,(x-y) = -2\,sin\,x\,sin\,y \\ sin\,(x+y) &+ sin\,(x-y) = 2\,sin\,x\,cos\,y \\ sin\,(x+y) &- sin\,(x-y) = 2\,cos\,x\,sin\,y. \end{aligned} \qquad (B)$$

§. 45. Setzt man $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, so dafs $x=\frac{\alpha+\beta}{2}, y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, und substituirt nachher wieder x für α, y für β, so bekömmt man:

$$\begin{aligned} cos\,x &+ cos\,y = 2\,cos\,\frac{x+y}{2}\,cos\,\frac{x-y}{2} \\ cos\,x &- cos\,y = -2\,sin\,\frac{x+y}{2}\,sin\,\frac{x-y}{2} \\ sin\,x &+ sin\,y = 2\,sin\,\frac{x+y}{2}\,cos\,\frac{x-y}{2} \\ sin\,x &- sin\,y = 2\,cos\,\frac{x+y}{2}\,sin\,\frac{x-y}{2}. \end{aligned} \qquad (C)$$

§. 46. Weil $\frac{sin\,s}{cos\,s} = tan\,s$, $\frac{cos\,s}{sin\,s} = cot\,s$, so ergeben sich aus den Gleichungen (A) durch Division der dritten durch die erste, der vierten durch die zweite folgende Formeln:

$$\begin{aligned} tan\,(x+y) &= \frac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y} = \frac{cot\,y + cot\,x}{cot\,x\,cot\,y - 1} \\ tan\,(x-y) &= \frac{tan\,x - tan\,y}{1 + tan\,x\,tan\,y} = \frac{cot\,y - cot\,x}{cot\,x\,cot\,y + 1} \end{aligned} \qquad (D)$$

Eben so erhält man durch Division der ersten Gleichung (A) durch die zweite, der dritten durch die vierte:

$$\begin{aligned} \frac{cos\,(x+y)}{cos\,(x-y)} &= \frac{cot\,x - tan\,y}{cot\,x + tan\,y} = \frac{cot\,y - tan\,x}{cot\,y + tan\,x} \\ \frac{sin\,(x+y)}{sin\,(x-y)} &= \frac{tan\,x + tan\,y}{tan\,x - tan\,y} = \frac{cot\,y + cot\,x}{cot\,y - cot\,x} \end{aligned} \qquad (E)$$

§. 47. Setzt man in der ersten und dritten Gleichung (A) $x=y$, so hat man $cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x$, und $sin\,2x = 2\,cos\,x\,sin\,x$, und aus der ersten dieser beiden Gleichungen, weil $1 = cos^2 x + sin^2 x$, ergiebt sich

$$1 + cos\,2x = 2\,cos^2 x, \quad 1 - cos\,2x = 2\,sin^2 x,$$

oder wenn man $\frac{x}{2}$ für x substituirt,

$$1 + cos\,x = 2\,cos^2\frac{x}{2}, \quad 1 - cos\,x = 2\,sin^2\frac{x}{2}.$$

Demnach $cos\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}$, $sin\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,x}{2}}$. (F)

Der Ausdruck $1 - cos\,x$ kömmt auch unter dem Namen Sinusversus oder Quersinus vor. Es ist demnach $Sin\,v\,x = 2\,sin^2\frac{1}{2}x$.

§. 48. Aus der ersten der beiden Gleichungen (D) ergiebt sich, $x=y$ gesetzt,

$$tan\,2x = \frac{2\,tan\,x}{1 - tan^2 x} = \frac{2\,cot\,x}{cot^2 x - 1} = \frac{2}{cot\,x - tan\,x},$$

und daraus

$cot\,2x = \frac{1}{2}\,cot\,x - \frac{1}{2}\,tan\,x$, oder auch $cot\,x = \frac{1}{2}\,cot\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,tan\,\frac{1}{2}x$.

Folglich $tan\,\frac{1}{2}x = cot\,\frac{1}{2}x - 2\,cot\,x$. (G)

§. 49. Aus $1 + cos\,x = 2\,cos^2\frac{1}{2}x$, $1 - cos\,x = 2\,sin^2\frac{1}{2}x$, und $sin\,x = 2\,cos\,\frac{1}{2}x\,sin\,\frac{1}{2}x$ ergiebt sich

$$tan\,\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} = \frac{sin\,x}{1+cos\,x} = \frac{1-cos\,x}{sin\,x}. \qquad (H)$$

§. 50. Man bemerke noch folgende beide Gleichungen:

$$tan\,x \pm tan\,y = \frac{sin\,(x \pm y)}{cos\,x\,.\,cos\,y}, \quad cot\,x \pm cot\,y = \frac{sin\,(y \pm x)}{sin\,x\,.\,sin\,y} \qquad (I)$$

deren Beweis keine Schwierigkeit hat.

§. 51. Wir haben oben (§. 13.) bewiesen, dafs die Function $\frac{x}{r}(x + r\beta - \alpha)_c^{r-1/\alpha}$, wenn man sie Kürze halber durch x_r bezeichnet, die Eigenschaft hat, dafs

$$(x+y)_n = x_n + x_{n-1}y + x_{n-2}y_2 + x_{n-3}y_3 \ldots + x\,y_{n-1} + y_n.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dafs, wenn

$$1 - x_2\omega^2 + x_4\omega^4 - x_6\omega^6 + x_8\omega^8 - \text{etc.} = \psi x$$

$$\text{und } x\omega - x_3\omega^3 + x_5\omega^5 - x_7\omega^7 + x_9\omega^9 - \text{etc.} = \varphi x,$$

$$\psi x\ \psi y - \varphi x\ \varphi y = \psi(x+y)$$

$$\varphi x\ \psi y + \psi x\ \varphi y = \varphi(x+y) \text{ sein mufs.}$$

Setzt man $x_r + x_{r-2}y_2 + x_{r-4}y_4 + x_{r-6}y_6 + \text{etc.} = u_r$

und $x_{r-1}y + x_{r-3}y_3 + x_{r-5}y_5 + x_{r-7}y_7 + \text{etc.} = v_r$

wo u_r alle Theile der Reihe $(x+y)_r$, in welchen die Factoren y_s mit einem geraden Anzeiger, und v_r die übrigen Theile enthält, worin y_s mit ungeradem Anzeiger vorkommt, so dafs $(x+y)_r = u_r + v_r$ so überzeugt man sich leicht durch wirkliche Multiplication, dafs

$$\psi x\ \psi y = 1 - u_2\omega^2 + u_4\omega^4 - u_6\omega^6 + u_8\omega^8 - \text{etc.}$$

$$\varphi x\ \varphi y = v_2\omega^2 - v_4\omega^4 + v_6\omega^6 - v_8\omega^8 + v_{10}\omega^{10} - \text{etc.}$$

$$\varphi x\ \psi y = x\omega - u_3\omega^3 + u_5\omega^5 - u_7\omega^7 + u_9\omega^9 - \text{etc.}$$

$$\psi x\ \varphi y = y\omega - v_3\omega^3 + v_5\omega^5 - v_7\omega^7 + v_9\omega^9 - \text{etc.}$$

Daraus folgt:

$$\psi x\ \psi y - \varphi x\ \varphi y = 1 - (u_2+v_2)\omega^2 + (u_4+v_4)\omega^4 - (u_6+v_6)\omega^6 + \text{etc.}$$

$$= 1 - (x+y)_2\omega^2 + (x+y)_4\omega^4 - (x+y)_6\omega^6 + \text{etc.} = \psi(x+y),$$

und

$$\varphi x\ \psi y + \psi x\ \varphi y = (x+y)\omega - (u_3+v_3)\omega^3 + (u_5+v_5)\omega^5 - (u_7+v_7)\omega^7 + \text{etc.}$$

$$= (x+y)\omega - (x+y)_3\omega^3 + (x+y)_5\omega^5 - (x+y)_7\omega^7 + \text{etc.} = \varphi(x+y),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 52. Wird die Bedeutung der Zeichen ψx, ψy des vorigen §. beibehalten, so ist

$$\frac{\psi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = cos\ x\,s \quad \text{und} \quad \frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}} = sin\ x\,s$$

wo der Bogen s so bestimmt werden mufs, dafs $tan\ s = \frac{\varphi 1}{\psi 1}$, oder $s = \text{Arc. } tan. \frac{\varphi 1}{\psi 1}$.

Weil $\psi x\ \psi y - \varphi x\ \varphi y = \psi(x+y)$

und $\varphi x\ \psi y + \psi x\ \varphi y = \varphi(x+y)$

so ist auch, wie man leicht übersieht,

$$(\psi^2 x + \varphi^2 x)(\psi^2 y + \varphi^2 y) = \psi^2(x+y) + \varphi^2(x+y).$$

Es ist also $\psi^2 x + \varphi^2 x$ eine solche Function von x, die für $x = o$, 1 wird und so beschaffen ist, dafs, wenn man sie mit einer ähnlichen von y multiplicirt, dafs Product eine ähnliche Function von $x+y$ ist. Daher ist (§. 3.)

$\psi^2 x + \varphi^2 x = (\psi^2 1 + \varphi^2 1)^x$. Setzt man nun

$$\frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = \psi' x, \text{ und } \frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = \varphi' x, \text{ so erhält man}$$

$$\psi' x\ \psi' y - \varphi' x\ \varphi' y = \psi'(x+y)$$

$$\varphi' x\ \psi' y + \psi' x\ \varphi' y = \varphi'(x+y),$$

und $\psi'^2 x + \varphi'^2 x = 1.$

Es ist also sowohl $\psi'^2 x$ als auch $\varphi'^2 x < 1$. Man darf daher $\psi' x = cos\ \xi$, $\psi' y = cos\ \eta$ setzen, woraus $\varphi' x = sin\ \xi$ und $\varphi' y = sin\ \eta$. Es ergiebt sich demnach

$$\psi' x\ .\ \psi' y - \varphi' x\ \varphi' y = cos\ \xi\ cos\ \eta - sin\ \xi\ sin\ \eta = cos(\eta+\xi) = \psi'(x+y)$$

$$\varphi' x\ .\ \psi' y + \psi' x\ \varphi' y = sin\ \xi\ cos\ \eta - cos\ \xi\ sin\ \eta = sin(\xi+\eta) = \varphi'(x+y).$$

Weil $cos\ \xi = \psi' x$, $cos\ \eta = \psi' y$, $cos(\xi+\eta) = \psi'(x+y)$, so ist, wenn man $\xi = \mathrm{F}x$ setzt, $\eta = \mathrm{F}y$, $\xi+\eta = \mathrm{F}(x+y)$, und folglich $\mathrm{F}x + \mathrm{F}y = \mathrm{F}(x+y)$. Es ist daher (Vorl. 1. §. 7.) $\mathrm{F}x = x\,\mathrm{F}1$, oder, weil $cos\ \xi = \psi' x$ und $sin\ \xi = \varphi' x$, ξ oder

$$\mathrm{F}x = \text{Arc. } cos.\psi' x = \text{Arc. } sin.\varphi' x \text{ oder auch} = \text{Arc. } tan.\frac{\varphi' x}{\psi' x}$$

Demnach $Cos\ \xi$ oder $\psi' x = Cos$ Arc. $tan.\frac{\varphi' x}{\psi' x}$

und $Sin\ \xi$ oder $\varphi' x = Sin$ Arc. $tan.\frac{\varphi' x}{\psi' x}$

oder auch

$$\frac{\psi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = cos \text{ Arc. } tan.\frac{\varphi x}{\psi x} \text{ und } \frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = sin \text{ Arc. } tan.\frac{\varphi x}{\psi x}.$$

§. 53. Lehrsatz. Bedeutet x irgend einen Kreisbogen, so ist

$$cos\,x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + x_c^8 - \text{etc.}$$

$$sin\,x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + x_c^9 - \text{etc.}$$

Beweis. Wenn $1 - x_c^2\omega^2 + x_c^4\omega^4 - x_c^6\omega^6 + \text{etc.} = \psi x$

und $x\omega - x_c^3\omega^3 + x_c^5\omega^5 - x_c^7\omega^7 + \text{etc.} = \varphi x$,

so ist, weil $(x+y)_c^n = x_c^n + x_c^{n-1}y + x_c^{n-2}y^2 \ldots + x\,y_c^{n-1} + y_c^n$,

$\frac{\psi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = cos\,x$ Arc. $tan. \frac{\varphi 1}{\psi 1}$ und $\frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = sin$ Arc. $tan. \frac{\varphi 1}{\psi 1}$.

Es ist aber, wie man leicht übersieht, $\psi x = \psi(-x)$, $-\varphi x = \varphi(-x)$; folglich mufs, weil für alle beliebige Werthe von x, y, $\psi x\,\psi y - \varphi x\,\varphi y = \psi(x+y)$, auch $\psi x \,.\, \psi(-x) - \varphi x\,\varphi(-x)$ oder $\psi^2 x + \varphi^2 x = \psi(x-x) = \psi o = 1$ sein. Demnach $\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x = 1$ und, wenn $\frac{\varphi 1}{\psi 1} = tan\,s$, $\psi x = cos\,xs$, $\varphi x = sin\,xs$ oder

$$1 - x_c^2\omega^2 + x_c^4\omega^4 - x_c^6\omega^6 + x_c^8\omega^8 - \text{etc.} = cos\,xs$$

$$x\omega - x_c^3\omega^3 + x_c^5\omega^5 - x_c^7\omega^7 + x_c^9\omega^9 - \text{etc.} = sin\,xs.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man $\frac{x}{s}$ statt x substituirt,

$$cos\,x = 1 - x_c^2\frac{\omega^2}{s^2} + x_c^4\frac{\omega^4}{s^4} - x_c^6\frac{\omega^6}{s^6} + \text{etc.}$$

$$sin\,x = x\frac{\omega}{s} - x_c^3\frac{\omega^3}{s^3} + x_c^5\frac{\omega^5}{s^5} - x_c^7\frac{\omega^7}{s^7} + \text{etc.}$$

Es ist noch darum zu thun, die beständige Gröfse $\frac{\omega}{s}$ zu bestimmen. Wir wollen jetzt zeigen dafs diese Gröfse weder gröfser noch kleiner als 1 sein kann, und folglich $\frac{\omega}{s} = 1$ sein mufs.

Aus einem Grundsatze von Archimedes folgt, dafs $sin\,x < x < tan\,x$ ist. Nimmt man nun x so an, dafs $\frac{x\omega}{s} < 1$, so mufs jedes Glied der beiden Reihen für $cos\,x$ und $sin\,x$ kleiner sein als das nächst vorhergehende. Daher ist $\frac{x\omega}{s} > sin\,x$ und $\frac{x\omega}{s} - x_c^3\frac{\omega^3}{s^3} < sin\,x$. Aus der ersten Relation folgt $\frac{\omega}{s} > \frac{sin\,x}{x}$ und weil $x < tan\,x$

$\frac{\omega}{s} > \frac{sin\,x}{tan\,x}$, oder, weil $tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$, $\frac{\omega}{s} > cos\,x$. Es ist aber $cos\,x > 1 - x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$, folglich $\frac{\omega}{s} > 1 - x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$.

Aus $\frac{x\omega}{s} - x_c^3\frac{\omega^3}{s^3} < sin\,x$ ergiebt sich, weil $sin\,x < x$, $\frac{x\omega}{s} - x_c^3\frac{\omega^3}{s^3} < x$, und folglich $\frac{\omega}{s} < 1 + \frac{1}{3}x_c^2\frac{\omega^3}{s^3}$. Wir haben demnach $\frac{\omega}{s} > 1 - x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$ und $< 1 + \frac{1}{3}x_c^2\frac{\omega^3}{s^3}$.

Wäre nun $\frac{\omega}{s}$ um eine gegebene Gröfse α kleiner als 1, oder wäre $\frac{\omega}{s} = 1 - \alpha$, so müfste $1 - \alpha > 1 - x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$, und folglich $\alpha < x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$ sein. Eben so müfste, wenn $\frac{\omega}{s}$ um eine gegebene Gröfse α gröfser als 1 wäre, $\frac{\omega}{s} = 1 + \alpha$ und $1 + \alpha < 1 + \frac{1}{3}x_c^2\frac{\omega^3}{s^3}$ also $\alpha < \frac{1}{3}x_c^2\frac{\omega^3}{s^3}$ sein. Da nun sowohl $x_c^2\frac{\omega^2}{s^2}$ als auch $\frac{1}{3}x_c^2\frac{\omega^3}{s^3}$ kleiner werden kann, als jede gegebene Gröfse, so müfste in beiden Fällen $\alpha <$ als gegebene Gröfse sein, was der Voraussetzung, dafs α eine gegebene Gröfse ist, widerspricht. Es kann demnach $\frac{\omega}{s}$ weder gröfser noch kleiner als 1, und mufs folglich $= 1$ sein.

Demnach ist

$$(A)\quad cos\,x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + x_c^8 - x_c^{10} + \text{etc.}$$

$$sin\,x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + x_c^9 - x_c^{11} + \text{etc.}$$

Diese beiden Reihen haben für jedes gegebene x, es mag $<$ oder >1 sein, einen reellen Werth. Im ersten Falle ist die Sache von selbst klar. Im letztern divergirt zwar die Reihe, doch nur so lange bis man zu einem Gliede x_c^n kömmt, wo $n > x$. Alsdann nehmen die Glieder ab und der Theil der Reihe, von x_c^n an, $\pm(x_c^n - x_c^{n+1} + x_c^{n+2} - x_c^{n+3} + \text{etc.})$ oder $\pm x_c^n(1 - \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} - \text{etc.})$ hat einen endlichen Werth, und ist absolute genommen, wie man leicht übersieht, kleiner als x_c^n.

Zur wirklichen Berechnung von $cos\,x$, $sin\,x$ sind jedoch die beiden Reihen nur branchbar, wenn $x < 1$.

§. 54. Lehrsatz. Wenn $\xi = \cos s$, $\eta = \sin s$, $\frac{\eta}{\xi} = \theta = \tan s$, so ist für jedes beliebige x,

$$\cos\, x\, s = \xi^x\,(1 - x_c^{:2}\theta^2 + x_c^{:4}\theta^4 - x_c^{:6}\theta^6 + x_c^{:8}\theta^8 - \text{etc.})$$

$$\sin\, x\, s = \xi^x\,(x\theta - x_c^{:3}\theta^3 + x_c^{:5}\theta^5 - x_c^{:7}\theta^7 + x_c^{:9}\theta^9 - \text{etc.})$$

Beweis. Es sei $1 - x_c^{:2}\theta^2 + x_c^{:4}\theta^4 - x_c^{:6}\theta^7 + \text{etc.} = \psi x$,

$$x\theta - x_c^{:3}\theta^3 + x_c^{:5}\theta^5 - x_c^{:7}\theta^7 + \text{etc.} = \varphi x,$$

so ist, weil (§. 2.) $x_c^{:n} + x_c^{:n-1}y + x_c^{:n-2}y_c^{:2} \ldots + xy_c^{:n-3} + y_c^{:n} = (x+y)_c^{:n}$,

(§. 52.) $\frac{\psi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = \cos \text{Arc. } tan. \frac{\varphi 1}{\psi 1}$, $\frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = \sin \text{Arc. } tan. \frac{\psi 1}{\varphi 1}$.

Da nun, für $x = 1$, $x_c^{:2}$, $x_c^{:3}$, $x_c^{:4}$, etc. $= o$, so ist

$\psi 1 = 1$, $\varphi 1 = \theta$, also $\frac{\varphi 1}{\psi 1} = \theta$ und Arc. $tan. \frac{\varphi 1}{\psi 1} =$ Arc. $tan. \theta = s$,

$\psi^2 1 + \varphi^2 1 = 1 + \theta^2 = 1 + \frac{\eta^2}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}$. Folglich $\frac{1}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}} = \xi = \cos s$.

Demnach

$$\cos^x s.(1 - x_c^{:2}\tan^2 s + x_c^{:4}\tan^4 s - x_c^{:6}\tan^6 s + x_c^{:8}\tan^8 s + \text{etc.}) = \cos xs$$

(B)

$$\cos^x s.(x\tan s - x_c^{:3}\tan^3 s + x_c^{:5}\tan^5 s - x_c^{:7}\tan^7 s + \text{etc.}) = \sin xs$$

Oder auch, weil

$\cos s = \xi$, $\sin s = \eta$, und folglich $\cos^x s.\tan^r s = \frac{\cos^x s.\sin^r s}{\cos^r s} = \cos^{x-r} s.\sin^r s = \xi^{x-r}\eta^r$,

$$\cos x\, s = \xi^x - x_c^{:2}\xi^{x-2}\eta^2 + x_c^{:4}\xi^{x-4}\eta^4 - x_c^{:6}\xi^{x-6}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$\sin x\, s = x\xi^{x-1} - x_c^{:3}\xi^{x-3}\eta^3 + x_c^{:5}\xi^{x-5}\eta^5 - x_c^{:7}\xi^{x-7}\eta^7 + \text{etc.}$$

§. 55. Diese beiden Formeln wurden zuerst 1701, von Johann Bernoulli in den Leipziger *Actis eruditorum* aber ohne Beweis, mitgetheilt. Er kam auf dieselben, indem er nach und nach mit Hülfe der beiden Ausdrücke für $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$, (§. 43.) die Werthe der Cosinusse und Sinusse der doppelten, dreifachen, vierfachen etc. Bogen suchte, und die Übereinstimmung der dabei vorkommenden Zahlencoefficienten mit den Binomialcoefficienten entdeckte. Setzt man nämlich nach

und nach in den Ausdrücken für $\cos(s+t)$, $\sin(s+t)$, $t = s, 2s, 3s$, etc. und substituirt zugleich die vorhergehenden Werthe von $\cos 2s$, $\cos 3s$, etc. $\sin 2s$, $\sin 3s$, etc. so erhält man, $\cos s = \xi$, $\sin s = \eta$ gesetzt,

$\cos 2s = \xi^2 - \eta^2$	$\sin 2s = 2\xi\eta$
$\cos 3s = \xi\cos 2s - \eta\sin 2s$	$\sin 3s = \eta\cos 2s + \xi\sin 2s$
$= \xi^3 - 3\xi\eta^2$	$= 3\xi^2\eta - \eta^3$
$\cos 4s = \xi\cos 3s - \eta\sin 3s$	$\sin 4s = \eta\cos 3s + \xi\sin 3s$
$= \xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4$	$= 4\xi^3\eta - 4\xi\eta^3$.
etc.	etc.

Erst zwanzig Jahre später gab Moivre, ein englischer Mathematiker, einen allgemeinen Beweis dieser beiden Formeln, der jedoch den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit als bewiesen voraussetzt, und übrigens mit Hülfe der sogenannten imaginären Gröfsen geführt wird. Der im vorigen §. gegebene Beweis ist mit aller Strenge für jeden beliebigen positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Werth x in den Ausdrücken $\cos xs$, $\sin xs$ geführt, und wird vielleicht Sachverständigen nicht ganz unwillkommen sein. Übrigens sind diese Ausdrücke für $\cos xs$, $\sin xs$ nur unter der Voraussetzung bewiesen worden, dafs $s < \frac{1}{2}\pi$, wo π die halbe Peripherie des Kreises bedeutet, dessen Halbmesser $= 1$; und haben nur für $s < \frac{1}{4}\pi$ reelle Werthe, weil die beiden Reihen

$1 - x_c^{:2}\tan^2 s + x_c^{:4}\tan^4 s -$ etc., und $x\tan s - x_c^{:3}\tan^3 s +$ etc.,

wenn x keine positive ganze Zahl ist, unendlich sind, und nur convergiren, wenn $\tan s < 1$ also $s < \frac{1}{4}\pi$. Sie gelten aber auch, wie man leicht übersieht, wenn s ein negativer Bogen und $< \frac{\pi}{4}$.

§. 56. Es lassen sich aber auch für den Fall, wenn $s > \frac{1}{4}\pi$, also $\tan s > 1$, $\cos xs$, $\sin xs$ durch convergente Reihen darstellen, welche reelle Werthe haben. Ist nämlich $s > \frac{1}{4}\pi$, so ist $\frac{1}{2}\pi - s < \frac{1}{4}\pi$, und $\tan(\frac{1}{2}\pi - s)$ oder $\cot s < 1$, und man hat, weil $\cos(\frac{1}{2}\pi - s) = \sin s$,

$$\cos x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) = \sin^x s\,(1 - x_c^{:2}\cot^2 s + x_c^{:4}\cot^4 s - x_c^{:6}\cot^6 s + \text{etc.})$$
$$\sin x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) = \sin^x s\,(x\cot s - x_c^{:3}\cot^3 s + x_c^{:5}\cot^5 s - \text{etc.})$$

Da nun

$$\cos\frac{x\pi}{2}\,.\,\cos x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) + \sin\frac{x\pi}{2}\,.\sin x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) = \cos\left(\frac{x\pi}{2} - x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s)\right) = \cos x\,s,$$
$$\sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\cos x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) - \cos\frac{x\pi}{2}\,.\sin x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s) = \sin\left(\frac{x\pi}{2} - x\,(\tfrac{1}{2}\pi - s)\right) = \sin x\,s,$$

so erhält man

$$\cos x\,s = \cos\frac{x\pi}{2}\,.\,\sin^x s\,(1 - x_c^{:2}\cot^2 s + x_c^{:4}\cot^4 s - x_c^{:6}\cot^6 s + \text{etc.})$$
$$+ \sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\sin^x s\,(x\cot s - x_c^{:3}\cot^3 s + x_c^{:5}\cot^5 s - \text{etc.})$$

(C)

$$\sin x\,s = \sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\sin^x s\,(1 - x_c^{:2}\cot^2 s + x_c^{:4}\cot^4 s - x_c^{:6}\cos^6 s + \text{etc.})$$
$$- \cos\frac{x\pi}{2}\,.\,\sin^x s\,(x\cot s - x_c^{:3}\cot^3 s + x_c^{:5}\cot^5 s - \text{etc.})$$

§. 57. Wenn man in den beiden Gleichungen

$$\cos x\lambda\pi\,\cos x\,s - \sin x\,s\,\sin x\lambda\pi = \cos x\,(\lambda\pi + s),$$
$$\sin x\lambda\pi\,\cos x\,s + \sin x\,s\,\cos x\lambda\pi = \sin x\,(\lambda\pi + s),$$

die Werthe (B) von $\cos x\,s$ und $\sin x\,s$ substituirt, so erhält man, weil, wenn λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, $\tan s = \tan(\lambda\pi + s)$, s mag positiv oder negativ sein, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos x\,(\lambda\pi + s) = \xi^x\,.\,\cos x\lambda\pi\,(1 - x_c^{:2}\tan^2(\lambda\pi + s) + x_c^{:4}\tan^4(\lambda\pi + s) - \text{etc.})$$
$$- \xi^x\,.\,\sin x\lambda\pi\,(x\tan(\lambda\pi+s) - x_c^{:3}\tan^3(\lambda\pi+s) + x_c^{:5}\tan^5(\lambda\pi+s) - \text{etc.})$$

(D)

$$\sin x\,(\lambda\pi + s) = \xi^x\,.\,\sin x\lambda\pi\,(1 - x_c^{:2}\tan^2(\lambda\pi+s) + x_c^{:4}\tan^4(\lambda\pi+s) - \text{etc.})$$
$$+ \xi^x\,.\,\cos x\lambda\pi\,(x\tan(\lambda\pi+s) - x_c^{:3}\tan^3(\lambda\pi+s) + x_c^{:5}\tan^5(\lambda\pi+s) - \text{etc.})$$

§. 58. Weil jeder Kreisbogen, er sei positiv oder negativ, unter der allgemeinen Form $\lambda\pi + s$, wo λ eine positive oder negative ganze Zahl, und s jeden positiven oder negativen Bogen $< \frac{\pi}{2}$ bedeutet, begriffen ist, so haben die beiden Gleichungen

(D) die gröfste Allgemeinheit. Wenn jedoch x keine positive ganze Zahl ist, und alsdann die Ausdrücke für $\cos x\,s$, $\sin x\,s$ unendliche Reihen enthalten, die nur dann convergiren und reelle Werthe haben, wenn $s < \frac{\pi}{4}$, weil $\tan(\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}) = \pm 1$, so wollen wir für den Fall, wenn $s < \frac{1}{2}\pi$, aber $> \frac{1}{4}\pi$ für $\cos x(\lambda\pi + s)$ und $\sin x(\lambda\pi + s)$ zwei andere Ausdrücke mittheilen, welche nur convergente summirbare Reihen enthalten.

Setzen wir, Kürze halber, wenn $\eta = \sin s$, $\theta' = \cot s$ und folglich auch $= \cot(\lambda\pi + s)$,

$$1 - x_c^{:2}\theta'^2 + x_c^{:4}\theta'^4 - \text{etc.} = \psi x,\quad x\theta' - x_c^{:3}\theta'^3 + x_c^{:5}\theta'^5 - \text{etc.} = \varphi x,$$

so werden die beiden Gleichungen (C):

$$\cos x\,s = \eta^x\,.\,(\cos\frac{x\pi}{2}\,.\,\psi x + \sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\varphi x)$$
$$\sin x\,s = \eta^x\,.\,(\sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\psi x - \cos\frac{x\pi}{2}\,.\,\varphi x).$$

Substituirt man diese beiden Ausdrücke in

$$\cos x\lambda\pi\,.\,\cos x\,s - \sin x\lambda\pi\,.\,\sin x\,s = \cos x\,(\lambda\pi + s),$$
$$\sin x\lambda\pi\,.\,\cos x\,s + \cos x\lambda\pi\,.\,\sin x\,s = \sin x\,(\lambda\pi + s),$$

so ergeben sich daraus die folgenden beiden Gleichungen:

$$\cos x\,(\lambda\pi + s) = \eta^x\,(\cos x\,(2\lambda + 1)\tfrac{\pi}{2}\,.\,\psi x + \sin x\,(2\lambda + 1)\tfrac{\pi}{2}\,.\,\varphi x)$$

(E)

$$\sin x\,(\lambda\pi + s) = \eta^x\,(\sin x\,(2\lambda + 1)\tfrac{\pi}{2}\,.\,\psi x - \cos x\,(2\lambda + 1)\tfrac{\pi}{2}\,.\,\varphi x)$$

§. 59. Aus den beiden Gleichungen (B) ergiebt sich

$$\tan x\,s = \frac{x\tan s - x_c^{:3}\tan^3 s + x_c^{:5}\tan^5 s - x_c^{:7}\tan^7 s + \text{etc.}}{1 - x_c^{:2}\tan^2 s + x_c^{:4}\tan^4 s - x_c^{:6}\tan^6 s + \text{etc.}}.$$

Eben so erhält man vermittelst der beiden Gleichungen (A)

$$\tan x\,s = \frac{x\,s - x^3\,s_c^3 + x^5\,s_c^5 - x^7\,s_c^7 + \text{etc.}}{1 - x^2\,s_c^2 + x^4\,s_c^4 - x^6\,s_c^6 + \text{etc.}}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für $\tan x\,s$ einander gleich, und dividirt auf beiden Seiten durch x, so erhält man, weil $x_c^{:n} = \frac{x}{n}\,(x-1)_c^{:n-1}$,

$$\frac{s - x^2 s_c^3 + x^4 s_c^5 - \text{etc.}}{1 - x^2 s_c^2 + x^4 s_c^4 - \text{etc.}} = \frac{tan\, s - \frac{1}{3}(x-1)_c^{1/2} tan^3 s + \frac{1}{5}(x-1)_c^{2} tan^5 s - \text{etc.}}{1 - x_c^{:2} tan^2 s + x_c^{:4} tan^4 s - \text{etc.}}$$

Diese Gleichung gilt für alle positive und negative Werthe von x, also auch für $x = o$. Setzt man aber $x = o$, so verwandelt sich dieselbe, weil alsdann $(x-1)_c^{:2r} = 1$ und $x_c^{:n} = o$ in folgende

$$(F) \qquad s = tan\, s - \tfrac{1}{3} tan^3 s + \tfrac{1}{5} tan^5 s - \tfrac{1}{7} tan^7 s + \text{etc.}$$

Diese äufserst elegante Formel verdanken wir **Leibnitzen**, weshalb man sie auch die **Leibnitzische** Reihe nennt. Sie kann besonders dazu dienen, wie wir weiter unten zeigen werden, die Verhältnifszahl π des Kreisumfanges zum Durchmesser ohne viele Mühe mit der gröfsten Genauigkeit zu berechnen.

§. 60. **Lehrsatz.** Es sei wie vorhin $cos\, s = \xi$, $sin\, s = \eta$, so hat man für jeden beliebigen Werth von x, und für jeden Werth von $s < \frac{1}{2}\pi$, wenn man die Bedeutung des Zeichens

$$z_c^{r,\alpha} = \frac{z}{r} \frac{(z-\alpha)(z-2\alpha)(z-3\alpha) \ldots\ldots (z-(r-1)\alpha)}{1. \quad 2. \quad 3 \quad \ldots\ldots \quad (r-1)}$$

beibehält, die beiden Gleichungen:

$$(G) \qquad \begin{aligned} cos\, x\, s &= 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\eta^6 + \text{etc.} \\ sin\, x\, s &= x\eta - \frac{x}{2}(x+1)_c^{2/2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\eta^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\eta^7 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Da nämlich, wenn $\frac{x}{r}(x + r\beta - \alpha)_c^{r-1,\alpha} = x_r$, wie (§. 13.) bewiesen worden, $(x+y)_n = x_n + x_{n-1}y + x_{n-2} \ldots\ldots + xy_{n-1} + y_n$, was auch immer die Werthe von α, β sein mögen, so ist dieſs auch der Fall, wenn $\beta = 1$, $\alpha = 2$; oder wenn $x_r = \frac{x}{r}(x + r - 2)_c^{r-1,2}$.

Es ist demnach

$$\frac{x+y}{n} \cdot (x+y+n-2)_c^{n-1,2} = \frac{x}{n}(x+n-2)_c^{n-1,2} + \frac{x}{n-1}(x+n-3)_c^{n-2,2}\, y$$
$$+ \frac{x}{n-2}(x+n-4)_c^{n-3,2}\frac{y}{2}y + \frac{x}{n-3}(x+n-5)_c^{n-4,2}\frac{y}{3}(y+1)_c^{2,2} \ldots\ldots + \frac{y}{n}(y+n-2)_c^{n-1,2}.$$

Daraus folgt (§. 52.) wenn

$$1 - \frac{x}{2}x\,\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\eta^6 + \text{etc.} = \psi x$$
$$x\eta - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\eta^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\eta^7 + \text{etc.} = \varphi x,$$

dafs $\frac{\psi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = cos\, x\, s$, $\frac{\varphi x}{\sqrt{\psi^2 1 + \varphi^2 1}^x} = sin\, x\, s$.

Man erhält aber, wenn man, in dem Ausdrucke für ψx, $x = 1$ setzt,

$$\psi 1 = 1 - \tfrac{1}{2}\eta^2 + \frac{3.1.-1.}{2.3.4}\eta^4 - \frac{5.3.1.-1.-3}{2.3.4.5.6}\eta^6 + \text{etc.}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2.4}\eta^4 - \frac{1.3}{2.4.6}\eta^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\eta^8 - \text{etc.} = (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

und $\varphi 1 = \eta - \frac{2.0}{2.0}\eta^3 + \frac{4.2.0.-2}{2.3.4.5}\eta^4 + \text{etc.} = \eta.$

Demnach $\psi^2 1 + \varphi^2 1 = 1$, und folglich

$$\psi x = cos\, x\, s, \qquad \varphi x = sin\, x\, s,$$

oder auch (§. 15.)

$$(H) \qquad \begin{aligned} cos\, x\, s &= 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x^2(x^2-4)}{2.3.4}\eta^4 - \frac{x^2(x^2-4)(x^2-16)}{2.3.4.5.6}\eta^6 + \text{etc.} \\ sin\, x\, s &= x\eta - \frac{x(x^2-1)}{2.3}\eta^3 + \frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4.5}\eta^5 - \frac{x(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\eta^7 + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 61. Multiplicirt man

$$1 - \frac{x^2-1}{2}\eta^2 + \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4}\eta^4 - \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.3.4.5.6}\eta^6 + \text{etc.}$$

durch $\sqrt{1-\eta^2} = 1 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2.4}\eta^4 - \frac{1.3}{2.4.6}\eta^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\eta^8 - \text{etc.}$,

so erhält man

$1 - \frac{x^2-1}{2}$	$\eta^2 + \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4}$	$\eta^4 - \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.3.4.5.6}$	$\eta^6 + \text{etc.}$
$- \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{2}$	$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.3.4}$	
	$- \frac{1}{2.4}$	$+ \frac{1}{2.4} \cdot \frac{(x^2-1)}{2}$	
		$- \frac{1.3}{2.4.6}$	

und weil (§. 16.)

$$(x+n-1)_c^{n\prime 2} + \tfrac{1}{2}(x+n-3)_c^{n-2\prime 2} + (\tfrac{1}{2})_c^{:2}(x+n-5)_c^{n-4\prime 2} + \text{etc.} = \frac{x}{n}(x+n-2)_c^{n-1\prime 2},$$

so ist dieses Product

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x^2(x^2-4)}{2.\ 3.\ 4}\eta^4 - \frac{x^2(x^2-4)(x^2-16)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\eta^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5\prime 2}\eta^6 + \frac{x}{8}(x+6)_c^{7\prime 2}\eta^8 - \text{etc.} = \cos x s.$$

Eben so erhält man:

$$\sqrt{(1-\eta^2)}\cdot\left(x\eta - \frac{x.(x^2-4)}{2.\ 3}\eta^3 + \frac{x(x^2-4)(x^2-16)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\eta^5 - \frac{x(x^2-4)(x^2-16)(x^2-36)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \text{etc.}\right)$$

$$= x\eta - \frac{x(x^2-1)}{2.\ 3}\eta^3 + \frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\eta^5 - \frac{x(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \text{etc.})$$

Demnach ist, weil $\eta = \sin s$ und $\sqrt{1-\eta^2} = \cos s$

$$\cos x s = \cos s\left(1 - \frac{x^2-1}{2}\sin^2 s + \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{2.\ 3.\ 3}\sin^4 s + \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\sin^6 s + \text{etc.}\right)$$

(I)

$$\sin x s = \cos s\left(x\sin s - \frac{x(x^2-4)}{2.\ 3}\sin^3 s + \frac{x(x^2-4)(x^2-16)}{2.\ 3.\ 4\ 5}\sin^5 s - \text{etc.}\right)$$

Wenn man mit der Differential-Rechnung bekannt ist, so kann man die beiden Formeln (I) aus den Formeln (H) herleiten, indem man die letztern in Bezug auf s differencirt und alsdann mit $x\,ds$ dividirt.

§. 62. Die Formeln (H) sowohl als (I) gelten für jeden beliebigen Werth von x, aber nur für jedes positive oder negative $s < \frac{1}{2}\pi$. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{3}$, $s = \pi$, so ist $\cos\frac{1}{3}\pi = \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aus den Formeln (H) aber würde folgen, weil η oder $\sin\pi = o$, $\cos\frac{1}{3}\pi = 1$ und $\sin\frac{1}{3}\pi = o$; und zufolge der Formeln (I) würde $\cos\frac{1}{3}\pi = \cos\pi = -1$ und $\sin\frac{1}{3}\pi = o$ sein. Um die Ausdrücke für $\cos x s$, $\sin x s$ zu vervollständigen, substituire man in den beiden Gleichungen,

$$\cos x\lambda\pi\ \cos x s - \sin x\lambda\pi\ \sin x s = \cos x(\lambda\pi + s)$$
$$\sin x\lambda\pi\ \cos x s + \cos x\lambda\pi\ \sin x s = \sin x(\lambda\pi + s),$$

indem man

$1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\eta^4 - \text{etc.}$ oder $\xi(1 - (x+1)_c^{2\prime 2}\eta^2 + (x+3)_c^{4\prime 2}\eta^4 - \text{etc.}) = \psi x$

und

$x\eta - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4\prime 2}\eta^5 - \text{etc.}$ oder $\xi(x\eta - (x+2)_c^{3\prime 2}\eta^3 + (x+4)_c^{5\prime 2}\eta - \text{etc.}) = \varphi x$

setzt, ψx für $\cos x s$ und φx für $\sin x s$, so erhält man

$$\cos x(\lambda\pi + s) = \cos x\lambda\pi\ .\ \psi x - \sin x\lambda\pi\ .\ \varphi x$$
$$\sin x(\lambda\pi + s) = \sin x\lambda\pi\ .\ \psi x + \cos x\lambda\pi\ .\ \varphi x.$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch mit folgenden beiden:

$$\cos x(\lambda\pi + s) = \cos x\lambda\pi\ .\ \psi x \mp \sin(x-1)\lambda\pi\ .\ \varphi x,$$
$$\sin x(\lambda\pi + s) = \sin x\lambda\pi\ .\ \psi x \pm \cos(x-1)\lambda\pi\ .\ \varphi x,$$

wo die obern oder untern Zeichen gelten, je nachdem λ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es ist nämlich

$$\sin(x-1)\lambda\pi = \sin x\lambda\pi\ .\ \cos\lambda\pi - \cos x\lambda\pi\ \sin\lambda\pi$$
$$\cos(x-1)\lambda\pi = \cos x\lambda\pi\ .\ \cos\lambda\pi + \sin x\lambda\pi\ \sin\lambda\pi.$$

Folglich, weil $\sin\lambda\pi = o$, $\cos\lambda\pi = \pm 1$, je nachdem λ gerade oder ungerade ist, $\sin(x-1)\lambda\pi = \pm\sin x\lambda\pi$, $\cos(x-1)\lambda\pi = \pm\cos x\lambda\pi$.

Nun ist aber, weil $\eta = \sin s = \pm\sin(\lambda\pi + s)$,

$$\psi x = 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \text{etc.} = 1 - \frac{x^2}{2}\sin^2(\lambda\pi + s) + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\sin^4(\lambda\pi + s) - \text{etc.}$$

$$\varphi x = x\eta - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\eta^3 + \text{etc.} = \pm x\sin(\lambda\pi + s) - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^3(\lambda\pi + s) + \text{etc.}$$

Man erhält demnach die beiden allgemeinen vollständigen Formeln: (K)

$$\cos x(\lambda\pi + s) = \cos x\lambda\pi\,.\left(1 - \frac{x^2}{2}\sin^2(\lambda\pi + s) + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\sin^4(\lambda\pi + s) - \text{etc.}\right.$$
$$\left. - \sin(x-1)\lambda\pi.\left(x\sin(\lambda\pi + s) - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^3(\lambda\pi + s) + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4\prime 2}\sin^5(\lambda\pi + s) - \text{etc.}\right)\right.$$

$$\sin x(\lambda\pi + s) = \sin x\lambda\pi\,.\left(1 - \frac{x^2}{2}\sin^2(\lambda\pi + s) + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\sin^4(\lambda\pi + s) - \text{etc.}\right)$$
$$\left. + \cos(x-1)\lambda\pi.\left(x\sin(\lambda\pi + s) - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^3(\lambda\pi + s) + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4\prime 2}\sin^5(\lambda\pi + s) - \text{etc.}\right)\right.$$

oder auch (L)

$$\frac{\cos x(\lambda\pi+s)}{\cos(\lambda\pi+s)} = \cos x\lambda\pi\,(1-(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^2(\lambda\pi+s)+(x+3)_c^{4\prime 2}\sin^4(\lambda\pi+s)-\text{etc.})$$

$$-\sin(x-1)\lambda\pi(x\sin(\lambda\pi+s)-(x+2)_c^{3\prime 2}\sin^3(\lambda\pi+s)+(x+4)_c^{5\prime 2}\sin^5(\lambda\pi+s)-\text{etc.})$$

$$\frac{\sin x(\lambda\pi+s)}{\cos(\lambda\pi+s)} = \sin x\lambda\pi\,(1-(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^2(\lambda\pi+s)+(x+3)_c^{4\prime 2}\sin^4(\lambda\pi+s)-\text{etc.})$$

$$+\cos(x-1)\lambda\pi(x\sin(\lambda\pi+s)-(x+2)_c^{3\prime 2}\sin^3(\lambda\pi+s)+(x+4)_c^{5\prime 2}\sin^5(\lambda\pi+s)-\text{etc.})$$

§. 63. Die Formeln (K), (L) enthalten die vollständigen Ausdrücke für $\cos x(\lambda\pi+s)$, $\sin x(\lambda\pi+s)$, weil λ jede positive oder negative Zahl, und s jeder positive oder negative Bogen $< \frac{1}{2}\pi$, folglich $\lambda\pi+s$ jeder beliebige Kreisbogen sein kann. Der vollständige Ausdruck von $\cos x(\lambda\pi+s)$, sowohl als von $\sin x(\lambda\pi+s)$ enthält, im Allgemeinen immer zwei Reihen, von denen jedoch in speciellen Fällen die eine verschwindet. Diefs ist der Fall, wenn x eine ganze Zahl bedeutet, weil alsdann $\sin x\lambda\pi$ und $\sin(x-1)\lambda\pi = o$ und $\cos x\lambda\pi$, $\cos(x-1)\lambda\pi = \pm 1$ ist. Eben so verschwindet $\sin x\lambda\pi$ und $\sin(x-1)\lambda\pi$ für jeden Werth von x, wenn $\lambda = o$; und auch dann, wenn x ein Bruch $= \frac{r}{n}$, und λ ein Vielfaches von n.

Es lassen sich aber auch die beiden zu den Ausdrücken von $\cos x(\lambda\pi+s)$, $\sin x(\lambda\pi+s)$ erforderlichen Reihen auf eine reduciren, wenn der Coefficient $\cos x\lambda\pi$ oder $\cos\frac{r}{n}\lambda\pi = o$ wird. Diefs kann jedoch nur geschehen, wenn $\frac{r}{n}\lambda\pi$ ein ungerades Vielfaches des Kreisquadranten $\frac{1}{2}\pi$ wird. Es mufs demnach der Nenner n nothwendig eine gerade Zahl, und alsdann $\lambda = (4k+1)\frac{n}{2}$ oder $= (4k+3)\frac{n}{2}$ sein. Diese beiden Werthe sind entweder beide gerade oder beide ungerade, je nachdem n von der Form $4m$ oder $4m+2$ ist.

Es giebt also für jeden Bruch $x = \frac{r}{n}$, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, zwei Bogen $\frac{n}{2}\pi + s$ und $\frac{3n}{2}\pi + s$, wo s positiv oder negativ, und $< \frac{1}{2}\pi$, für welche $\cos x\lambda\pi$, und folglich auch $\cos(x-1)\lambda\pi$ verschwindet.

§. 64. So wie wir oben (§. 59.) durch die Vergleichung der zwei verschiedenen

aus den Formeln (A), (B) hergeleiteten Ausdrücke von $\tan x s$, einen Ausdruck des Bogens s durch $\tan s$ gefunden haben, so läfst sich auch aus den beiden verschiedenen Ausdrücken von $\sin x s$ der Formeln (A) und (H) ein Ausdruck des Bogens s durch eine nach den Potenzen von $\sin s$ fortlaufende Reihe herleiten.

Setzt man nämlich die Theile rechter Hand der beiden Gleichungen

$$\sin x s = x s - x^3 s_c^3 + x^5 s_c^5 - x^7 s_c^7 + \text{etc.}$$

$$\sin x s = x\sin s - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\sin^3 s + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4\prime 2}\sin^5 s - \text{etc.}$$

einander gleich, und dividirt alsdann durch x, so erhält man

$$s - x^2 s_c^3 + x^4 s_c^5 - \text{etc.} = \sin s - (x+1)_c^{2\prime 2}\frac{\sin^3 s}{3} + (x+3)_c^{4\prime 2}\frac{\sin^5 s}{5} - \text{etc.}$$

und wenn man $x = o$ setzt,

$$s = \sin s + \frac{1}{1.2}\frac{\sin^3 s}{3} + \frac{3.1.1.3}{1.2.3.4}\frac{\sin^5 s}{5} + \frac{5.3.1.1.3.5}{1.2.3.4.5.6}\frac{\sin^7 s}{7} + \text{etc.}$$

$$= \sin s + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 s}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 s}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 s}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\sin^9 s}{9} + \text{etc.}$$

Diese Reihe erhält man auch aus der Reihe für

$$(1-\sin^2 s)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 s + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 s + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 s,$$

indem man dieselbe durch $\sin s$ multiplicirt, und alsdann das 1ste, 2te, 3te, 4te etc. Glied des Products resp. durch 1, 3, 5, 7, etc. dividirt.

§. 65. Bezeichnet man der Kürze halber

$1 - \frac{x^2}{2}\cos^2 s + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3\prime 2}\cos^4 s - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5\prime 2}\cos^6 s + \text{etc.}$ durch ψx,

$x\cos s - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2\prime 2}\cos^3 s + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4\prime 2}\cos^5 s - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6\prime 2}\cos^7 s + \text{etc.}$ durch φx,

so erhält man, wenn man in den beiden Gleichungen (H) $\frac{1}{2}\pi - s$ statt s substituirt, weil alsdann n oder $\sin s$ in $\cos s$ übergeht $\cos x(\frac{1}{2}\pi - s) = \psi x$, und $\sin x(\frac{1}{2}\pi - s) = \varphi x$.

Substituirt man nun diese beiden Werthe von $\cos x(\frac{1}{2}\pi - s)$, $\sin x(\frac{1}{2}\pi - s)$ in den beiden Gleichungen

$cos\ x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}.cos\ x(\frac{1}{2}\pi-s)+sin\ x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}\ .\ sin\ x(\frac{1}{2}\pi-s)\ =\ cos\ x(2\lambda\pi+s)$

$sin\ x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}.cos\ x(\frac{1}{2}\pi-s)-cos\ x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}\ .\ sin\ x(\frac{1}{2}\pi-s)\ =\ sin\ x(2\lambda\pi+s)$

und in

$cos\ x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}.cos\ x(\frac{1}{2}\pi-s)-sin\ x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}\ .\ sin\ x(\frac{1}{2}\pi-s)\ =\ cos\ x(2\lambda\pi-s)$

$sin\ x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}.cos\ x(\frac{1}{2}\pi-s)+cos\ x(4\lambda-1)\frac{\pi}{2}\ .\ sin\ x(\frac{1}{2}\pi-s)\ =\ sin\ x(2\lambda\pi-s)$,

so erhält man, wenn s irgend einen positiven Bogen $<\frac{1}{2}\pi$ bedeutet,

$$cos\ x(2\lambda\pi\pm s)\ =\ cos\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\psi x\ \pm\ sin\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\varphi x$$

$$sin\ x(2\lambda\pi\pm s)\ =\ sin\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\psi x\ \mp\ cos\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\varphi x.$$

Weil

$cos\,(x-1)(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}=\pm\ sin\ x(4\lambda\pm1)\pi$, und $sin(x-1)(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}=\pm\ cos\,x(4\lambda\pm1)\pi$

so lassen sich die obigen beiden Gleichungen auch so darstellen:

(M)

$$cos\ x(2\lambda\pi\pm s)=cos\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}\ .\ \psi x\ +\ cos\,(x-1)(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\varphi x$$

$$sin\ x(2\lambda\pi\pm s)=sin\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}\ .\ \psi x\ -\ sin\,(x-1)(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}.\varphi x$$

wo $\psi x\ =\ 1-\frac{x^2}{2}\xi^2\ +\ \frac{x}{4}(x+2)^{3/2}_c\xi^4\ -\ \frac{x}{6}(x+4)^{5/2}_c\xi^6\ +$ etc.

$\varphi x\ =x\xi-\frac{x}{3}(x+1)^{2/2}_c\xi^3\ +\ \frac{x}{5}(x+3)^{4/2}_c\xi^5\ -\ \frac{x}{7}(x+5)^{6/2}_c\xi^7$,

und $\xi\ =\ cos(2\lambda\pi\pm s)$.

Die beiden Formeln (M) sind ganz allgemein, und die beiden Ausdrücke für $cos\ x(2\lambda\pi\pm s)$ und $sin\ x(2\lambda\pi\pm s)$ enthalten im allgemeinen jeder die Reihen ψx und φx, von denen die eine verschwindet, wenn x eine ganze Zahl ist, weil alsdann $cos\ x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}$ und $sin(x-1)(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}$ oder $sin\,x(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}$ und $cos(x-1)(4\lambda+1)\frac{\pi}{2}=o$ wird.

§. 66. Ist aber x keine ganze, sondern eine gebrochne Zahl $=\frac{r}{n}$, deren Nenner ungerade ist, so ist zwar die Vereinigung der beiden Gröfsen ψx, φx im allgemeinen für die Ausdrücke der Gröfsen $cos\ x(2\lambda\pi\pm s)$, $sin\ x(2\lambda\pi\pm s)$ nothwendig, indefs giebt es doch unter den Werthen von $2\lambda\pi\pm s$ zwei Bogen, für welche eine der beiden Reihen verschwindet.

Damit nämlich eine von beiden Reihen ψx oder φx in den Gleichungen verschwinde, so mufs entweder $cos\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}$ oder $sin\ x(4\lambda\pm1)\frac{\pi}{2}$ gleich Null werden. Das erstere kann nur geschehen, wenn $x(4\lambda\pm1)$ eine ungerade, das letztere, wenn es eine gerade Zahl ist. Ist x eine irrationale Zahl, so ist weder das eine noch das andere möglich. Es sei also x ein irreductibler Bruch $=\frac{r}{n}$. Damit nun überhaupt $\frac{r}{n}(4\lambda\pm1)$ eine ganze Zahl sei, so mufs $4\lambda\pm1=(4k+1)n$ oder $=(4k+3)n$ und folglich $\lambda=kn+\frac{n\mp1}{4}$ oder $kn+\frac{3n\mp1}{4}$ sein. Da nun n eine ungerade Zahl, und folglich von der Form $4t+1$ oder $4t-1$ ist, so wird

im ersten Falle $\lambda=kn+\frac{n-1}{4}$ und $=kn+\frac{3n+1}{4}$

im letzten $\lambda=kn+\frac{n+1}{4}$ und $=kn+\frac{3n-1}{4}$ sein.

Es ist demnach in beiden Fällen:

$cos\frac{r}{n}(4k\pm1)\frac{\pi}{2}=cos\ r(4k+1)\frac{\pi}{2}$ und $cos\ r(4k+3)\frac{\pi}{2}$, $=\pm1$ oder $=o$,

$sin\frac{r}{n}(4k+1)\frac{\pi}{2}=sin\ r(4k+1)\frac{\pi}{2}$ und $sin\ r(4k+3)\frac{\pi}{2}$, $=o$ oder $=\pm1$,

je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 67. Zur Erleichterung der Übersicht aller in den vorigen §. §. entwickelten allgemeinen Ausdrücke für $cos\ xs$, $sin\ xs$, wo x jede beliebige Zahl, und s einen Bogen $<\frac{1}{2}\pi$ bedeutet, folgt hier eine tabellarische Zusammenstellung derselben, in welchen, wie oben, $\xi=cos\,s$, $\eta=sin\,s$, $\theta=tan\,s$,

$cos\ xs\ =\ \xi^x\ (1\ -\ x^{:2}_c\theta^2\ +\ x^{:4}_c\theta^4\ -\ x^{:6}_c\theta^6\ +$ etc.)

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\eta^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\eta^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\eta^6 + \text{etc.}$$

$$= \xi(1 - (x+1)_c^{2/2}\eta^2 + (x+3)_c^{4/2}\eta^4 - (x+5)_c^{6/2}\eta^6 + \text{etc.})$$

$$= \cos\frac{x\pi}{2}\,(1 - \frac{x^2}{2}\xi^2 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\xi^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\xi^6 + \text{etc.})$$

$$+ \sin\frac{x\pi}{2}\,(x\xi - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\xi^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\xi^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\xi^7 + \text{etc.})$$

$$= \cos\frac{x\pi}{2}\cdot\eta(1 - (x+1)_c^{2/2}\xi^3 + (x+3)_c^{4/2}\xi^4 - (x+5)_c^{6/2}\xi^6 + \text{etc.})$$

$$+ \sin\frac{x\pi}{2}\cdot\eta(x\xi - (x+2)_c^{3/2}\xi^3 + (x+4)_c^{5/2}\xi^4 - (x+6)_c^{7/2}\xi^7 + \text{etc.})$$

$$\sin x\,s = \xi^x(x\theta - x_c^{:3}\theta^3 + x_c^{:5}\theta^5 - x_c^{:7}\theta^7 + \text{etc.})$$

$$= x\eta - \frac{x}{3}(x+1)_c^{2/2}\eta^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\eta^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\eta^7 + \text{etc.})$$

$$= \xi(x\eta - (x+2)_c^{3/2}\eta^3 + (x+4)_c^{5/2}\eta^5 - (x+6)_c^{7/2}\eta^7 + \text{etc.})$$

$$= \sin\frac{x\pi}{2}\,(1 - \frac{x^2}{2}\xi^3 + \frac{x}{4}(x+2)_c^{3/2}\xi^4 - \frac{x}{6}(x+4)_c^{5/2}\xi + \text{etc.})$$

$$- \cos\frac{x\pi}{2}\,(x\xi - \frac{x}{3}(x+1)_c^{3/2}\xi^3 + \frac{x}{5}(x+3)_c^{4/2}\xi^5 - \frac{x}{7}(x+5)_c^{6/2}\xi^7 + \text{etc.})$$

$$= \sin\frac{x\pi}{2}\cdot\eta(1 - (x+1)_c^{2/2}\xi^3 + (x+3)_c^{4/2}\xi^4 - (x+5)_c^{6/2}\xi^6 + \text{etc.})$$

$$- \cos\frac{x\pi}{2}\cdot\eta(x\xi - (x+2)_c^{3/2}\xi^3 + (x+4)_c^{5/2}\xi^5 - (x+6)_c^{7/2}\xi^7 + \text{etc.})$$

Die ersten beiden Ausdrücke für $\cos x\,s$, $\sin x\,s$ sind für jede positive ganze Zahl x, weil in diesem Falle $x_c^{:r}$, wenn $r > x$, $= o$, endliche Reihen.

§. 68. Die übrigen Ausdrücke, in welchen die Cofficienten

$$(x+r)_c^{r+1/2} = \frac{(x+r)(x+r-2)(x+r-4)\ldots\ldots(x-r)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots r+1} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{r+1}(x+r)_c^{r/2}$$

vorkommen, sind endlich, wenn $x+r$ eine ganze gerade Zahl ist. Es ist nämlich $(x+r)_c^{r+1/2} = (\frac{x+r}{2})_c^{:r+1}\,2^{r+1}$, und zugleich übersieht man leicht, dafs, weil $\frac{x+r}{2}$ eine ganze Zahl ist, $(\frac{x+r}{2})_c^{:r+1} = o$ sein mufs, wenn $r+1 > \frac{x+r}{2}$, oder wenn $r > x-2$.

Noch mufs bemerkt werden, dafs $\sin\frac{x\pi}{2}$ oder $\cos\frac{x\pi}{2} = o$ ist, je nachdem x eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 69. Es ist demnach, 1) für ein gerades $x = n$,

$$\cos n\,s = 1 - \frac{n^2}{2}\eta^2 + \frac{n}{4}(n+2)_c^{3/2}\eta^4 - \frac{n}{6}(n+4)_c^{5/2}\eta^6 \ldots\ldots \pm \frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^n$$

$$= \pm(1 - \frac{n^2}{2}\xi^2 + \frac{n}{4}(n+2)_c^{3/2}\xi^4 - \frac{n}{6}(n+4)_c^{5/2}\xi^6 \ldots\ldots \pm \frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1/2}\xi^n,$$

$$\sin n\,s = \xi(n\eta - (n+2)_c^{3/2}\eta^3 + (n+4)_c^{5/2}\eta^5 \ldots\ldots \mp (2n-2)_c^{n-1/2}\eta^{n-1})$$

$$= \mp\eta(n\xi - (n+2)_c^{3/2}\xi^3 + (n+4)_c^{5/2}\xi^5 \ldots\ldots \mp (2n-2)_c^{n-1/2}\xi^{n-1}),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n unter der Form $4t$ oder $4t+2$ begriffen ist.

2) Für ein ungerades $x = m$,

$$\cos m\,s = \xi(1 - (m+1)_c^{2/2}\eta^2 + (m+3)_c^{4/2}\eta^4 \ldots\ldots \pm (2m-2)_c^{m-1/2}\eta^{m-1})$$

$$= \pm(m\xi - \frac{m}{3}(m+1)_c^{2/2}\xi^3 + \frac{m}{5}(m+3)_c^{4/2}\xi^5 \ldots\ldots \pm \frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1/2}\xi^{m-1})$$

$$\sin m\,s = m\eta - \frac{m}{3}(m+1)_c^{2/2}\eta^3 + \frac{m}{5}(m+3)_c^{4/2}\eta^5 \ldots\ldots \pm \frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1/2}\eta^{m-1})$$

$$= \pm\eta(1 - (m+1)_c^{2/2}\xi^2 + (m+3)_c^{4/2}\xi^4 \ldots\ldots \pm (2m-2)_c^{m-1/2}\xi^{m-1})$$

Das obere Zeichen $+$ gilt, wenn m unter der Form $4t+1$, das untere Zeichen $-$, wenn m unter der Form $4t-1$ enthalten ist.

§. 70. Kehrt man diese Reihen für die Cosinusse und Sinusse der vielfachen Bogen um, so erhält man, weil, wie man leicht übersieht, für jede positive ganze Zahl r

$$(2r-2)_c^{r-1,2} = (r-1)_c^{:r-1}\,2^{r-1} = 2^{r-1}$$

$$(2r-4)_c^{r-3,2} = (r-2)_c^{:r-3}\,2^{r-3} = (r-2)\;2^{r-3}$$

$$(2r-6)_c^{r-5,2} = (r-3)_c^{:r-5}\,2^{r-5} = (r-3)_c^{:2}\,2^{r-5}$$

$$(2r-8)_c^{r-7,2} = (r-4)_c^{:r-7}\,2^{r-7} = (r-4)_c^{:3}\,2^{r-7}$$

etc. etc. etc.

und eben so

$$\frac{r}{r}(2r-2)_c^{r-1,2} = (r-1)_c^{:r-1}\,2^{r-1} = 2^{r-1}$$

$$\frac{r}{r-2}(2r-4)_c^{r-3,2} = \frac{r}{r-2}(r-2)_c^{:r-3}\,2^{r-3} = \frac{r}{r-2}(r-2) \qquad = r\,2^{r-3}$$

$$\frac{r}{r-4}(2r-6)_c^{r-5,2} = \frac{r}{r-4}(r-3)_c^{:r-5}\,2^{r-5} = \frac{r}{r-4}(r-3)_c^{:2}\,2^{r-5} = \frac{r}{2}(r-3)\;2^{r-5}$$

$$\frac{r}{r-6}(2r-8)_c^{r-7,2} = \frac{r}{r-6}(r-4)_c^{:r-7}\,2^{r-7} = \frac{r}{r-6}(r-4)_c^{:3}\,2^{r-7} = \frac{r}{3}(r-4)_c^{:2}\,2^{r-7}$$

etc. etc. etc. ist,

folgende Gleichungen:

I. Für jede gerade oder ungerade Zahl r

$$2\cos rs = (2\xi)^r - r(2\xi)^{r-2} + \frac{r}{2}(r-3)(2\xi)^{r-4} - \frac{r}{3}(r-4)_c^{:2}(2\xi)^{r-6} \quad \text{etc.}$$

$$\sin rs = \eta((2\xi)^{r-1} - (r-2)(2\xi)^{r-3} + (r-3)_c^{:2}(2\xi)^{r-5} - (r-4)_c^{:3}(2\xi)^{r-7} \quad \text{etc.})$$

Diese beiden Formeln lassen sich auch, wie die Formeln (§. 28, 29.) beweisen.

II. Wenn x eine gerade Zahl $= n$ ist

$$\pm 2\cos ns = (2\eta)^n - n(2\eta)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\eta)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_c^{:2}(2\eta)^{n-6} + \text{etc.}$$

$$\mp \sin ns = \xi((2\eta)^{n-1} - (n-2)(2\eta)^{n-3} + (n-3)_c^{:2}(2\eta)^{n-5} - (n-4)_c^{:3}(2\eta)^{n-7} + \text{etc.})$$

wo vor $2\cos ns$, $\sin ns$ das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $n = 4t$ oder $4t+2$.

III. Wenn x eine ungerade Zahl $= m$, so ist

$$\pm \cos ms = \xi((2\eta)^{m-1} - (m-2)(2\eta)^{m-3} + (m-3)_c^{:2}(2\eta)^{m-5} - (m-4)_c^{:3}(2\eta)^{m-7} + \text{etc.})$$

$$\pm 2\sin ms = (2\eta)^m - m(2\eta)^{m-2} + m(m-3)(2\eta)^{m-4} + m(m-4)_c^{:2}(2\eta)^{m-6} + \text{etc.}$$

71. In der Lehre von den Gleichungen wird bewiesen, dafs, wenn $y = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots + a_n x^n$, und die Gleichung $y = o$ n reelle Wurzeln hat, die wir durch α_1, α_2, α_3, α_n bezeichnen wollen, alsdann $y = a\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$ sein mufs. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die Gröfsen $\cos rs$, $\sin rs$, welche in den vorigen §§. durch Reihen entwickelt wurden, auch als Producte darstellen, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen.

§. 72. Betrachten wir zunächst die beiden (§. 54.) bewiesenen Formeln

$$\frac{\cos rs}{\xi^r} = 1 - r_c^{:2}\theta^2 + r_c^{:4}\theta^4 - r_c^{:6}\theta^6 \ldots \pm r_c^{:2\lambda}\theta^{2\lambda}$$

$$\frac{\sin rs}{\xi^r} = r\theta - r_c^{:3}\theta^3 + r_c^{:5}\theta^5 - r_c^{:7}\theta^7 \ldots \mp r_c^{:\mu}\theta^{\mu}$$

wo $2\lambda = r$ oder $= r-1$, $\mu = r-1$ oder $= r$, je nachdem r gerade oder ungerade, und wo $\theta = \tan s$.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs sich beide Gröfsen $\frac{\cos rs}{\xi^r}$, $\frac{\sin rs}{\xi^r}$, wenn r eine ganze Zahl ist, folgendermafsen als Producte darstellen lassen:

$$\frac{\cos rs}{\xi^r} = \left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{3\pi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{5\pi}{2r}}\right)\ldots\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}}\right)$$

(N)

$$\frac{\sin rs}{\xi^r} = r\theta\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{\pi}{r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{2\pi}{r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{3\pi}{r}}\right)\ldots\left(1-\frac{\theta^2}{\tan^2\frac{\mu\pi}{r}}\right)$$

wo $2\lambda = r$ oder $r-1$, $\mu = \lambda - 1$ oder $= \lambda$, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist

Es wird nämlich $cos\ r\,s = o$, wenn $r\,s$ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{\pi}{2}$, oder wenn s unter der Form $\pm\frac{(2t-1)\pi}{2r}$ enthalten ist, wo t jede positive ganze Zahl bedeutet. Demnach wird $\frac{cos\ r\,s}{\xi^r} = o$, wenn $tan\,s$ oder $\theta = \pm\ tan\frac{(2t-1)\pi}{2r}$, den Fall ausgenommen, wenn $\frac{(2t-1)\pi}{2r}$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$. Diefs kann nur geschehen, wenn $\frac{2t-1}{r}$ eine ganze und zwar eine ungerade Zahl ist; dazu ist nöthig, aber auch hinlänglich, dafs r selbst eine ungerade Zahl ist. Nun ist aber $\frac{cos\ r\,s}{\xi^r}$ eine algebraische ganze Function von θ vom $r$ten oder $r-1$ten Grade, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist, und die Gröfsen $\pm\ tan\frac{\pi}{2r}$, $\pm\ tan\frac{3\pi}{2r}$, $\pm\ tan\frac{5\pi}{2r}$, ... $\pm\ tan\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}$, wo $2\lambda = r$ oder $r-1$, je nachdem r gerade oder ungerade, sind alle unter sich verschieden, und machen für θ substituirt $\frac{cos\ r\,s}{\xi^r} = o$ oder sind die reellen Wurzeln dieser Gleichung.

Es ist also $\frac{cos\ r\,s}{\xi^r} = \left(1-\frac{\theta}{tan\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\theta}{tan\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\theta}{tan\frac{3\pi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\theta}{tan\frac{3\pi}{2r}}\right)$ etc.

oder wenn man zwei Factoren in einen zusammenzieht,

$$\frac{cos\ r\,s}{\xi^r} = \left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{3\pi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{5\pi}{2r}}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}}\right)$$

wo $2\lambda = r$ oder $r-1$, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Zu bemerken ist, dafs, wenn man die Reihe $\pm\ tan\frac{\pi}{2r}$, $\pm\ tan\frac{3\pi}{2r}$, $\pm\ tan\frac{5\pi}{2r}$, ... $\pm\ tan\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}$ bis ins Unendliche fortsetzt, man periodisch immer wieder auf die ersten 2λ Werthe kömmt.

Weil $\frac{sin\ r\,s}{\xi^r} = o$ wird, wenn $r\,s = o$ oder irgend ein Vielfaches von $\pm\pi$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung $\frac{sin\ r\,s}{\xi^r} = r\theta - r_c^{:3}\theta^3 \ldots \pm r_c^{:\mu}\theta^\mu = o$

folgende: o, $\pm\ tan\frac{\pi}{r}$, $\pm\ tan\frac{2\pi}{r}$, $\pm\ tan\frac{3\pi}{r}$, $\pm\ tan\frac{4\pi}{r}$ . . . . $\pm\ tan\frac{\lambda\pi}{r}$,

wo $2\lambda = r-2$ oder $r-1$, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Es ist daher

$$\frac{sin\ r\,s}{\xi^r} = r\theta\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{2\pi}{r}}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{3\pi}{r}}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1-\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\lambda\pi}{r}}\right).$$

§. 73. Weil $\frac{(1+\theta^r)+(1-\theta^r)}{2} = 1 + r_c^{:2}\theta^2 + r_c^{:4}\theta^4 + r_c^{:6}\theta^6 +$ etc.

und $\frac{(1+\theta^r)-(1-\theta^r)}{2\theta} = r + r_c^{:3}\theta^2 + r_c^{:5}\theta^4 + r_c^{:7}\theta^6 +$ etc.,

so erhält man diese beiden Reihen, indem man in den, im Anfange des vorigen §. gegebenen, Ausdrücken für $\frac{cos\ r\,s}{\xi^r}$, $\frac{sin\ r\,s}{\xi^r\theta}$, $-\theta^2$ für θ^2 substituirt.

Daraus ergiebt sich, dafs

$$\frac{(1+\theta^r)+(1-\theta^r)}{2} = \left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{3\pi}{2r}}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}}\right)$$

(O)

$$\frac{(1+\theta^r)-(1-\theta^r)}{2} = r\theta\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\pi}{r}}\right)\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{2\pi}{r}}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1+\frac{\theta^2}{tan^2\frac{\lambda\pi}{r}}\right)$$

wo $2\lambda = r$ oder $r-1$, je nachdem r gerade oder ungerade.

§. 74. Die beiden Formeln (§. 67.)

$$cos\ n\,s = 1 - \frac{n^2}{2}\eta^2 + \frac{n}{4}(n+2)_c^{3/2}\eta^4 + \frac{n}{6}(n+4)_c^{5/2}\eta^6 \cdot\cdot\cdot\cdot \pm \frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^n$$

$$sin\ m\,s = m\eta - \frac{m}{3}(m+1)_c^{2/2}\eta^3 + \frac{m}{5}(m+3)_c^{4/2}\eta^5 \cdot\cdot\cdot\cdot \pm \frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1/2}\eta^m$$

wo $\eta = sin\,s$, n eine gerade und m eine ungerade Zahl bedeuten, lassen sich auf ähnliche Weise in folgende beide Gleichungen verwandeln:

$$cos\ ns = \left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{5\pi}{2n}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

(P)

$$sin\,ms = m\eta\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi}{m}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right)$$

Es wird nämlich $cos\ ns = o$, wenn ns ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{\pi}{2}$ oder wenn s unter der allgemeinen Form $\pm\frac{(2t-1)\pi}{2n}$ begriffen ist. Es sind demnach die n Wurzeln der Gleichung $cos\ ns = o$ von der allgemeinen Form $\pm sin\frac{(2t-1)\pi}{2n}$. Setzt man nun nach und nach $t = 1, 2, 3, 4$, etc., so erhält man zwar unendlich viele Werthe dieses Ausdrucks, von diesen sind aber nur, wenn auch das Vorzeichen berücksichtigt wird, n unter sich verschieden. Man erhält dieselben, indem man $t = 1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{n}{2}$ setzt.

Eben so sind die m verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $sin\ ms = o$, wo m eine ungerade Zahl ist,

$$o,\ \pm sin\frac{\pi}{m},\ \pm sin\frac{2\pi}{m},\ \pm sin\frac{3\pi}{m},\ \ldots\ldots\ \pm sin\frac{(m-1)\pi}{2m}.$$

Aus obigen Gründen folgt nun mit Hülfe des (§. 71.) angeführten Satzes die Richtigkeit der beiden Formeln (P).

§. 75. Wird die Multiplication der Factoren der Ausdrücke für $cos\ ns$, $sin\ ms$ wirklich ausgeführt, so ist das letzte Glied des Productes für $cos\ ns$:

$$\pm\frac{\eta^n}{sin^2\frac{\pi}{2n}\ sin^2\frac{3\pi}{2n}sin^2\frac{5\pi}{2n}\ldots sin^2\frac{n-1}{2n}}$$

Da nun aber

$$cos\ ns = 1 - \frac{n^2}{2}\eta^2 + \frac{n}{4}(n+2)_c^{3/2}\eta^4 \ldots\ldots \pm\frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^n$$

und $\quad \frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^n = (n-1)_c^{:n-1}2^{n-1}.\eta^n = 2^{n-1}\eta^n,$

so ergiebt sich, dafs

$$sin^2\frac{\pi}{2n}\ sin^2\frac{3\pi}{2n}\ sin^2\frac{5\pi}{2n}\ sin^2\frac{7\pi}{2n}\ldots\ldots sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

und folglich

$$sin\frac{\pi}{2n}\ sin\frac{3\pi}{2n}\ sin\frac{5\pi}{2n}\ sin\frac{7\pi}{2n}\ldots\ldots sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\Gamma 2}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch, wenn man das aus der Entwickelung des Productes von $sin\ ms$ sich ergebende letzte Glied mit dem letzten Gliede des Ausdrucks

$$sin\ ms = m\eta - \frac{m}{3}(m+1)_c^{2,2}\eta^3 + \frac{m}{5}(m+3)_c^{4,2}\eta^5 \ldots\ldots \pm\frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1,2}\eta^m$$

vergleicht, weil $\frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1,2}\eta^m = (m-1)_c^{:m-1}2^{m-1}\eta^m = 2^{m-1}\eta^m,$

$$sin^2\frac{\pi}{m}.sin^2\frac{2\pi}{m}.sin^2\frac{3\pi}{m}.sin^2\frac{4\pi}{m}\ldots\ldots sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

und folglich

$$sin\frac{\pi}{m}.sin\frac{2\pi}{m}.sin\frac{3\pi}{m}.sin\frac{4\pi}{m}\ldots\ldots sin\frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\Gamma m}{2^{\frac{m-1}{2}}}.$$

§. 76. Aus (§. 31.) ergiebt sich, dafs

$$\frac{(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)^n + (\sqrt{1+\eta^2}-\eta)^n}{2} = 1 + \frac{n^2}{2}\eta^2 + \frac{n}{4}(n+2)_c^{3,2}\eta^4$$
$$+ \frac{n}{6}(n+4)_c^{5,2}\eta^6 \ldots\ldots + \frac{n}{n}(2n-2)_c^{n-1,2}\eta^n$$

$$\frac{(\sqrt{1+\eta^2}-\eta)^m - (\sqrt{1+\eta^2}-\eta)^m}{2} = m\eta + \frac{m}{3}(m+1)_c^{2,2}\eta^3 + \frac{m}{5}(m+3)_c^{4,2}\eta^5$$
$$+ \frac{m}{7}(m+5)_c^{6,2}\eta^7 \ldots\ldots + \frac{m}{m}(2m-2)_c^{m-1}\eta^m.$$

Es bedeutet hier abermals n eine gerade, m eine ungerade Zahl.

Vergleicht man diese beiden Formeln mit den für $cos\ ns$, $sin\ ms$ (§. 74.) gegebenen Ausdrücken, so übersieht man leicht, dafs

$$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^n+(\gamma 1+\eta^2-\eta)^n}{2}=\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)$$

$$\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{5\pi}{2n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{7\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

und $$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^m-(\gamma 1+\eta^2-\eta)^m}{2}=m\eta\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)$$

$$\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{3\pi}{m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{4\pi}{m}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right)$$

sein mufs.

§. 77. Aus den beiden Gleichungen (§. 67.)

$$\frac{\cos ms}{\xi}=1-(m+1)_c^{2/2}\eta^2+(m+3)_c^{4/2}\eta^4-(m+5)_c^{6/2}\eta^6\ldots\pm(2m-2)_c^{m-1/2}\eta^{m-1}$$

(Q)

$$\frac{\sin ns}{\xi}=n\eta-(n+2)_c^{3/2}\eta^3+(n+4)_c^{5/2}\eta^5-(n+6)_c^{7/2}\eta^7\ldots\pm(2n-2)_c^{n-1}\eta^{n-1}$$

in welchen $\xi=\cos s$, $\eta=\sin s$, und n eine gerade, m aber eine ungerade ganze Zahl bedeutet, sieht man, dafs $\frac{\cos ms}{s}$ und $\frac{\sin ns}{s}$ algebraische rationale ganze Functionen von η, jene von $m-1$ten, diese von $n-1$ten Grade sind.

Da nun die $m-1$ verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\frac{\cos ms}{\xi}=0$, wie man leicht übersieht, $\pm\sin\frac{\pi}{2m}$, $\pm\sin\frac{3\pi}{2m}$, $\pm\sin\frac{5\pi}{2m}\ldots\pm\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}$ und eben so 0, $\pm\sin\frac{\pi}{n}$, $\pm\sin\frac{2\pi}{n}$, $\pm\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$, die $n-1$ verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{\sin ns}{\xi}=0$ sind, so erhält man:

$$\frac{\cos ms}{\xi}=\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{5\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)$$

(R)

$$\frac{\sin ns}{\xi}=n\eta\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{3\pi}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(n-2)\pi}{n}}\right).$$

Vergleicht man die beiden letzten Glieder dieser durch Multiplication in Reihen verwandelten Producte mit den resp. letzten Gliedern $\pm(2m-2)_c^{m-1/2}\eta^{m-1}$, $\pm(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^{n-1}$ oder $\pm 2^{m-1}\eta^{m-1}$, $\pm 2^{n-1}\eta^{n-1}$ der Ausdrücke (Q) von $\frac{\cos ms}{\xi}$, $\frac{\sin ns}{\xi}$, so ergiebt sich daraus:

$$\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\sin\frac{5\pi}{2m}\cdot\sin\frac{7\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}=\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}}$$

und $$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}\cdot\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{\gamma 2n}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

§. 78. Wir haben (§. 36.) die beiden Ausdrücke

$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^x\pm(\gamma 1+\eta^2-\eta)^x}{2\gamma 1+\eta^2}$, durch unendliche nach den Potenzen von η fortlaufende Reihen dargestellt. Die erste dieser beiden Reihen bricht ab, und ist unendlich, wenn x eine ungerade Zahl $=m$, und man hat

$$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^m+(\gamma 1+\eta^2-\eta)^m}{2\gamma 1+\eta^2}=1+(m+1)_c^{2/2}\eta^2+(m+3)_c^{4/2}\eta^4\ldots+(2m-2)_c^{m-1/2}\eta^{m-1}.$$

Eben so erhält man für den zweiten Ausdruck eine endliche Reihe, wenn x eine gerade Zahl $=n$, so dafs

$$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^n-(\gamma 1+\eta^2-\eta)^n}{2\gamma 1+\eta^2}=n\eta+(n+2)_c^{3/2}\eta^3+(n+4)_c^{5/2}\eta^5\ldots+(2n-2)_c^{n-1/2}\eta^{n-1}.$$

Die erste dieser beiden Reihen ergiebt sich, indem man $-\eta^2$ für η^2 in dem Ausdrucke für $\frac{\cos ms}{\xi}$ substituirt. Die zweite findet man, wenn man den Ausdruck für $\frac{\sin ns}{\xi}$ durch $n\eta$ dividirt, darauf $-\eta^2$ statt η^2 setzt, und dann wieder mit $n\eta$ multiplicirt. Daraus folgt unmittelbar, dafs

$$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^m+(\gamma 1+\eta^2-\eta)^m}{2\gamma(1+\eta^2)}=\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right)$$

(S)

$$\frac{(\gamma 1+\eta^2+\eta)^n-(\gamma 1+\eta^2-\eta)^n}{2\gamma 1+\eta^2}=n\eta\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{\sin^2\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right).$$

§. 79. Weil $cos(xs+\varphi) = cos\,x\,s\;\; cos\varphi - sin\,xs\;\; sin\varphi$

$cos(xs-\varphi) = cos\;xs\;\; cos\varphi + sin\;xs\;\; sin\varphi$

also $cos(xs+\varphi) \cdot cos(xs-\varphi) = cos^2 xs\;\; cos^2\varphi - sin^2 xs\;\; sin^2\varphi$, und folglich, wenn x eine positive gerade Zahl $= n$, wegen (§. 67.)

$$cos(ns+\varphi)\,cos(ns-\varphi) = (1 - \frac{n^2}{2}\eta^2 + \frac{n}{4}(n+2)^{3/2}_{c}\eta^4 \ldots\ldots \pm 2^{n-1}\eta^n)^2\, cos^2\varphi$$

(T)
$$- (1-\eta^2)\,(n\eta - (n+2)^{3/2}_{c}\eta^3 + (n+4)^{5/2}_{c}\eta^5 \ldots\ldots \pm 2^{n-1}\eta^{n-1})^2\, sin^2\varphi$$

oder, wenn x eine ungerade Zahl $= m$,

$$cos(ms+\varphi)\,cos(ms-\varphi) = (1-\eta^2)(1-(m+1)^{2/2}_{c}\eta^2 + (m+3)^{4/2}_{c}\eta^4 \ldots\ldots \pm 2^{m-1}\eta^{m-1})^2\, cos^2\varphi$$

(U)
$$- (m\eta - \frac{m}{3}(m+1)^{2/2}_{c}\eta^3 + \frac{m}{5}(m+4)^{4/2}_{c}\eta^5 \ldots\ldots \pm 2^{m-1}\eta^m)^2\, sin^2\varphi.$$

Es ist also allgemein für jede positive ganze Zahl r, $cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi)$ eine algebraische ganze Function von η vom $2r$ten Grade. Nun wird aber $cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi) = o$, wenn entweder $rs+\varphi$ oder $rs-\varphi$ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{\pi}{2}$ oder wenn s unter der Form $\frac{(2\lambda-1)\pi \mp \varphi}{2r}$, und folglich η unter der Form $sin\frac{(2\lambda-1)\pi \mp 2\varphi}{2r}$ begriffen ist. Es sind demnach die $2r$ Wurzeln der Gleichung $cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi) = o$ folgende:

$$\pm sin\frac{\pi-2\varphi}{2r},\ \pm sin\frac{3\pi-2\varphi}{2r},\ \pm sin\frac{5\pi-2\varphi}{2r},\ \ldots\ldots \pm sin\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{2r}$$

oder

$$\pm sin\frac{\pi+2\varphi}{2r},\ \pm sin\frac{3\pi+2\varphi}{2r},\ \pm sin\frac{5\pi+2\varphi}{2r},\ \ldots\ldots \pm sin\frac{(2r-1)\pi+2\varphi}{2r}.$$

Dafs die Werthe der Glieder dieser beiden Reihen dieselben sind, übersieht man leicht, wenn man z. B. die letztere in umgekehrter Ordnung unter die erstere schreibt. Es wird alsdann die Summe der Bogen zweier untereinander stehenden Sinusse immer $= \pi$, und folglich werden ihre Sinusse einander gleich sein.

Nun ist aber das erste Glied der algebraischen ganzen Function, welcher $cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi)$ gleich ist, r mag eine gerade oder eine ungerade Zahl sein, $cos^2\varphi$. Demnach ist

$$cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi) = cos^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-2\varphi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi-2\varphi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{5\pi-2\varphi}{2r}}\right)$$

(V)
$$\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{7\pi-2\varphi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{9\pi-2\varphi}{2r}}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{2r}}\right)$$

oder auch $= cos^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi+2\varphi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi+2\varphi}{2r}}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(2r-1)\pi+2\varphi}{2r}}\right)$

§. 80. Denkt man sich jedes der obigen beiden Producte in eine nach den Potenzen von η fortlaufende Reihe entwickelt, so erhält man durch die Vergleichung des letzten Gliedes derselben mit dem letzten Gliede des durch die algebraische ganze Function vom $2r$ten Grade im vorigen §. gefundenen Ausdruckes, welches für ein gerades und ungerades $r = 2^{2r-2}\eta^{2r}$ ist.

$$cos\varphi = 2^{r-1}\,sin\frac{\pi-2\varphi}{2r}\cdot sin\frac{3\pi-2\varphi}{2r}\cdot sin\frac{5\pi-2\varphi}{2r}\cdot\ldots\cdot sin\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{2r}$$

$$\text{oder} = 2^{r-1}\,sin\frac{\pi+2\varphi}{2r}\cdot sin\frac{3\pi+2\varphi}{2r}\cdot sin\frac{5\pi+2\varphi}{2r}\cdot\ldots\cdot sin\frac{(2r-1)\pi+2\varphi}{2r}.$$

§. 81. Das Product $sin(rs+\varphi)\,sin(rs-\varphi)$ läfst sich auf ähnliche Weise, wie $cos(rs+\varphi)\,cos(rs-\varphi)$, als ein Product aus r Factoren darstellen, so dafs

$$sin(rs+\varphi)\,sin(rs-\varphi) = \mp sin^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2\pi-\varphi}{r}}\right)$$

(W)
$$\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi-\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{4\pi-\varphi}{r}}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{2}}\right)$$

$$\text{oder auch} = \pm sin^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi+\varphi}{r}}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi+\varphi}{r}}\right)$$

Es ist nämlich $sin(rs+\varphi)\,sin(rs-\varphi) = sin^2 rs\;\; cos^2\varphi - cos^2 rs\;\; sin^2\varphi$. Es ergiebt sich also (§. 67.), wenn r eine gerade Zahl $= n$,

$$sin(ns+\varphi)sin(ns-\varphi) = (1-\eta^2)(n\eta-(n+2)_c^{3,2}\eta^3+(n+4)_c^{5,2}\eta^5 \ldots \pm 2^{n-1}\eta^{n-1})^2 cos^2\varphi$$

$$-(1-\frac{n^2}{2}\eta^2+\frac{n}{4}(n+2)_c^{3,2}\eta^4-\frac{n}{6}(n+4)_c^{5,2}\eta^6 \ldots \pm 2^{n-1}\eta^n)^2 sin^2\varphi$$

und, wenn r eine ungerade Zahl $= m$,

$$sin(ms+\varphi)sin(ms-\varphi) = (m\eta-\frac{m}{3}(m+1)_c^{2,2}\eta^3+\frac{m}{5}(m+3)_c^{4,2}\eta^5 \ldots \pm 2^{m-1}\eta^m)^2 cos^2\varphi$$

$$-(1-\eta^2)(1-(m+1)_c^{2,2}\eta^2+(m+3)_c^{4,2}\eta^4 \ldots \pm 2^{m-1}\eta^{m-1})^2 sin^2\varphi.$$

In beiden Fällen ist $sin(rs+\varphi)\ sin(rs-\varphi)$ eine algebraische ganze Function von η vom $2r$ten Grade, deren erstes Glied $= sin^2\varphi$ und deren letztes Glied $2^{2r-2}\eta^{2r}$. Nun sind aber, wie man leicht übersieht, die $2r$ verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $sin(rs+\varphi)\ sin(rs-\varphi) = o$, weil $sin(rs\pm\varphi) = o$ wird, wenn $rs\pm\varphi = o$, oder ein Vielfaches von π, folgende:

$$\pm sin\frac{\varphi}{r},\ \pm sin\frac{\pi-\varphi}{r},\ \pm sin\frac{2\pi-\varphi}{r},\ \pm sin\frac{3\pi-\varphi}{r}, \ldots \pm sin\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}$$

oder auch

$$\pm sin\frac{\varphi}{r},\ \pm sin\frac{\pi+\varphi}{r},\ \pm sin\frac{2\pi+\varphi}{r},\ \pm sin\frac{3\pi-\varphi}{r}, \ldots \pm sin\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}.$$

Man erhält also zufolge (§. 71.)

$$sin(rs+\varphi)sin(rs-\varphi) = -sin^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-\varphi}{r}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}}\right)$$

$$\text{oder} = -sin^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi+\varphi}{r}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi+\varphi}{r}}\right).$$

82. Stellt man diese beiden Producte als nach den Potenzen von η fortlaufende Reihen dar, so erhält man durch die Vergleichung des letzten Gliedes derselben mit dem letzten Gliede der oben gegeben algebraischen Function von η vom $2r$ten Grade, welches $= 2^{2r-2}\eta^{2r}$ ist,

$$sin\varphi = 2^{r-1}\ sin\frac{\varphi}{r}\ .\ sin\frac{\pi-\varphi}{r}\ .\ sin\frac{2\pi-\varphi}{r}\ .\ sin\frac{3\pi-\varphi}{r}\ldots sin\frac{(2r-1)\pi-\varphi}{r}$$

$$\text{oder} = 2^{r-1}\ sin\frac{\varphi}{r}\ .\ sin\frac{\pi+\varphi}{r}\ .\ sin\frac{2\pi+\varphi}{r}\ .\ sin\frac{3\pi+\varphi}{r}\ldots sin\frac{(2r-1)\pi+\varphi}{r}.$$

§. 83. Aus dem so eben Vorgetragenen ergiebt sich, dafs

$$(1-\frac{r^2}{2}\eta^2+\frac{r}{4}(r+2)_c^{3,2}\eta^4-\text{etc.})^2 cos^2\varphi-(r\eta-\frac{r}{3}(r+1)_c^{2,2}\eta^3+\frac{r}{5}(r+3)_c^{4,2}\eta^5-\text{etc.})^2 sin^2\varphi$$

$$= cos^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-2\varphi}{2r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi-2\varphi}{2r}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi-2\varphi}{2r}}\right)$$

und

$$(1-\frac{r^2}{2}\eta^2+\frac{r}{4}(r+2)_c^{3,2}\eta^4-\text{etc.})^2 sin^2\varphi-(r\eta-\frac{r}{3}(r+1)_c^{2,2}\eta^3+\frac{r}{5}(r+3)_c^{4,2}\eta^5-\text{etc.})^2 cos^2\varphi$$

$$= sin^2\varphi\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-\varphi}{r}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2\pi-\varphi}{r}}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}}\right).$$

Daraus folgt unmittelbar, indem man $-\eta^2$ statt η^2 setzt,

$$(1+\frac{r^2}{2}\eta^2+\frac{r}{4}(r+2)_c^{3,2}\eta^4+\text{etc.})^2 cos^2\varphi+(r\eta+\frac{r}{3}(r+1)_c^{2,2}\eta^3+\frac{r}{5}(r+3)_c^{4,2}\eta^5-\text{etc.})^2 sin^2\varphi$$

$$= cos^2\varphi\left(+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-2\varphi}{2r}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{3\pi-2\varphi}{2r}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{iin^2\frac{(r-1)\pi-2\varphi}{2r}}\right)$$

und

$$(1+\frac{r^2}{2}\eta^2+\frac{r}{4}(r+2)_c^{3,2}\eta^4-\text{etc.})^2 sin^2\varphi+(r\eta+\frac{r}{3}(r+1)_c^{2,2}\eta^3+\frac{r}{5}(r+3)_c^{4,2}\eta^5+\text{etc.})^2 cos^2\varphi$$

$$= sin^2\varphi\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\varphi}{r}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{\pi-\varphi}{r}}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{2\pi-\varphi}{r}}\right)\cdots\left(1+\frac{\eta^2}{sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}}\right).$$

Die Glieder dieser beiden Gleichungen linker Hand lassen sich nach (§. 31.), wenn man $\sqrt{1+\eta^2} = \xi$ setzt, durch

$$\left(\frac{(\xi+\eta)^r+(\xi-\eta)^r}{2}\right)^2 cos^2\varphi+\left(\frac{(\xi+\eta)^r-(\xi-\eta)^r}{2}\right)^2 sin^2\varphi$$

$$= \tfrac{1}{4}((\xi+\eta)^{2r} + 2(\xi+\eta)^{r}(\xi-\eta)^{r} \cdot \cos 2\varphi + (\xi-\eta)^{2r}). \text{ und}$$

$$\left(\frac{(\xi+\eta)^r + (\xi-\eta)^r}{2}\right)^2 \sin^2\varphi + \left(\frac{(\xi+\eta)^r - (\xi-\eta)^r}{2}\right)^2 \cos^2\varphi$$

$$= \tfrac{1}{4}((\xi+\eta)^{2r} - 2(\xi+\eta)^{r}(\xi-\eta)^{r} \cos 2\varphi + (\xi-\eta)^{2r}) \text{ ausdrücken.}$$

Multiplicirt man nun die Glieder rechter Hand, resp. durch

$$\frac{2^{2r-2}}{\cos^2\varphi} \cdot \sin^2\frac{\pi-2\varphi}{2r} \cdot \sin^2\frac{3\pi-2\varphi}{2r} \cdot \sin^2\frac{5\pi-2\varphi}{2r} \cdot \ldots\ldots\ldots \sin^2\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{2r}$$

und durch

$$\frac{2^{2r-2}}{\sin^2\varphi} \cdot \sin^2\frac{\varphi}{r} \cdot \sin^2\frac{\pi-\varphi}{r} \cdot \sin^2\frac{2\pi-\varphi}{r} \cdot \ldots\ldots\ldots \sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}$$

so erhält man, weil beide Producte zufolge (§. 80, 82.) $= 1$,

$$\tfrac{1}{4}[(\xi+\eta)^{2r} + 2(\xi+\eta)^{r}(\xi-\eta)^{r} \cos 2\varphi + (\xi-\eta)^{2r}]$$

$$= 2^{2r-2}(\sin^2\frac{\pi-2\varphi}{2r}+\eta^2)(\sin^2\frac{3\pi-2\varphi}{2r}+\eta^2)(\sin^2\frac{5\pi-2\varphi}{2r}+\eta^2)\ldots(\sin^2\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{2r}+\eta^2)$$

und $\tfrac{1}{4}[(\xi+\eta)^{2r} - 2(\xi+\eta)^{r}(\xi-\eta)^{r} \cos 2\varphi + (\xi-\eta)^{2r}]$

$$= 2^{2r-2}(\sin^2\frac{\varphi}{r}+\eta^2)(\sin^2\frac{\pi-\varphi}{r}+\eta^2)(\sin^2\frac{2\pi-\varphi}{r}+\eta^2)\ldots(\sin^2\frac{(r-1)\pi-\varphi}{r}+\eta^2).$$

Es ist aber $\sin^2\omega + \eta^2 = \frac{1-\cos 2\omega}{2} + \eta^2 = \frac{1-\cos 2\omega + 2\eta^2}{2}$, und weil

$\sqrt{1+\eta^2} = \xi$, so ist $1+2\eta^2 = \xi^2+\eta^2 = \frac{(\xi+\eta)^2+(\xi-\eta)^2}{2}$ und $1 = \xi^2-\eta^2 = (\xi+\eta)(\xi-\eta)$.

Folglich $\sin^2\omega + \eta^2 = \frac{(\xi+\eta)^2 - 2(\xi+\eta)(\xi-\eta)\cos 2\omega + (\xi-\eta)^2}{4}$.

Daraus ergiebt sich, wenn wir, Kürze halber, $\xi+\eta = \alpha$, $\xi-\eta = \beta$ setzen,

$$\alpha^{2r} + 2\alpha^r\beta^r \cos 2\varphi + \beta^{2r} = (\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{\pi-2\varphi}{r} + \beta^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{3\pi-2\varphi}{r} + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{5\pi-2\varphi}{r} + \beta^2) \ldots (\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{(2r-1)\pi-2\varphi}{r} + \beta^2)$$

$$\alpha^{2r} - 2\alpha^r\beta^r \cos 2\varphi + \beta^{2r} = (\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{2\varphi}{r} + \beta^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{2\pi-2\varphi}{r} + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{4\pi-2\varphi}{r} + \beta^2) \ldots (\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\frac{(2r-2)\pi-2\varphi}{r} + \beta^2).$$

Die beiden in den obigen Gleichungen vorkommenden Gröfsen α, β stehen zwar in einer gegenseitigen Abhängigkeit von einander, welche durch die Gleichung $\xi^2-\eta^2 = 1$ oder $(\xi+\eta)(\xi-\eta) = \alpha\beta = 1$ bestimmt wird. Indefs gelten diese Gleichungen auch dann noch, wenn man irgend zwei beliebige durchaus von einander unabhängige Gröfsen a, b statt α, β substituirt. Was nämlich auch immer a, b für Werthe haben mögen, so kann man $\alpha = \frac{a}{\sqrt{ab}}$, $\beta = \frac{b}{\sqrt{ab}}$ setzen, weil alsdann $\alpha\beta = 1$. Diese Werthe in den obigen beiden Gleichungen substituirt, und alsdann auf beiden Seiten durch $a^r b^r$ multiplicirt, verwandeln sich dieselben in zwei andere, die nur von den erstern darin unterschieden sind, dafs überall a, b statt α, β vorkömmt.

Zugleich ist zu bemerken, dafs man in den obigen Gleichungen φ statt 2φ setzen kann.

§. 84. Nimmt man in den obigen beiden Gleichungen $\varphi = o$ an, so erhält man

$$(a^r + b^r)^2 = (a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{r} + b^2)(a^2 - 2ab\cos\frac{3\pi}{r} + b^2)(a^2 - 2ab\cos\frac{5\pi}{r} + b^2)$$

$$(a^2 - 2ab\cos\frac{7\pi}{r} + b^2) \ldots (a^2 - 2ab\cos\frac{(2r-1)}{r} + b^2)$$

$$(a^r - b^r)^2 = (a-b)^2(a^2 - 2ab\cos\frac{2\pi}{r} + b^2)(a^2 - 2ab\cos\frac{4\pi}{r} + b^2)(a^2 - 2ab\cos\frac{6\pi}{r} + b^2)$$

$$(a^2 - 2ab\cos\frac{8\pi}{r} + b^2) \ldots (a^2 - 2ab\cos\frac{(2r-2)\pi}{r} + b^2).$$

Weil nun die Cosinusse zweier Bogen, deren Summe ein Vielfaches des Kreisumfan-