A. Vihman

ALGEBRA ÕPIK

Gümnaasiumi II klassile

Tartu Eesti Kirjastus

A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

GÜMNAASIUMI II KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE

PEATOIMETAJA: O. SILDE

A. **Vihman**: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.

E. **Etverk**: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.

A. **Vihman**: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.

E. **Etverk**: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.

K. **Maasik**: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.

K. **Ratassepp**: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.

K. **Ratassepp**: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

E. **Etverk**: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

G. **Rägo**: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.

L. **Ruumet-G. Rägo**: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.

L. **Ruumet-G. Rägo**: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.

K. **Ratassepp**: Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Kindlam.

AfV nr. I/0045. Trükiarv 2650 eks. Paber: 56×79 cm, ETK paberivabrik, Tallinn. Trükk ja brošeerimine: K. Mattieseni trükikoda, Tartu. Ilmunud oktoobris 1943. Hind Rmk. 1.80.

SISUKORD.

Peatükk I.

Arvutamise abivalemid.

§ 1. Kaksliikmete korrutamine.

Olgu antud kaksliikmed $a+b$ ja $c+d$. Nende korrutis on

$$(a+b)\cdot(c+d).$$

Et saada seda korrutist sulgudeta avaldisena ehk arendatud kujul, rakendame summa korrutamise seadust:

$$m\cdot(c+d)=mc+md.$$

Kõnesoleval juhul $m=a+b$. Seega

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d.$$

Rakendades viimase võrduse paremal poolel uuesti sama seadust, saame

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

Samal viisil saame

$$(a+b)\cdot(c-d)=ac+bc-ad-bd$$

ja

$$(a-b)\cdot(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

kaksliikmete korrutise arendamiseks korrutame ühe kaksliikme kummagi liikme teise kaksliikme kummagi liikmega ja liidame saadused.

N ä i t e d.

1. $(x+1)(x+2)=x^2+x+2x+2=x^2+3x+2.$
2. $(2a+u)(a-3u)=2a^2+au-6au-3u^2=$
$$=2a^2-5au-3u^2.$$

Ülesanded.

1. Arenda järgmised kaksliikmete korrutised:

1.		2.	
	$(x+2)(x+1)$		$(f-3)(f+2)$
	$(x+4)(x+2)$		$(g-5)(g-8)$
	$(x-2)(x+3)$		$(h+6)(h-10)$
	$(x+4)(x-3)$		$(i-7)(i+13)$
	$(x-5)(x-1)$		$(k+12)(k-5)$

2. Arenda järgmised korrutised:

1.		2.	
	$(7-v)(v-6)$		$(3+u)(5-u)$
	$(y-\frac{3}{4})(y+\frac{2}{5})$		$(x+\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})$
	$(z-3)(z-\frac{5}{6})$		$(4-w)(w+9)$
	$(g+3)(g-0{,}5)$		$(a+1)(3{,}4-a)$
	$(h-2{,}5)(h+1{,}4)$		$(0{,}8+b)(b-2{,}5)$

3. Arenda järgmised korrutised:

1.		2.	
	$(a+2b)(3a-b)$		$(2x+3)(3x+2)$
	$(c+5d)(c-12d)$		$(3y+5)(2y-4)$
	$(s-4t)(s+t)$		$(5z-1)(2z-7)$
	$(s-7t)(s+6t)$		$(8f-4)(f+3)$
	$(p-5q)(p+5q)$		$(3g-2h)(2g-3h)$

4. Arenda järgmised korrutised:

1.		2.	
	$(x+2a)(x-a)$		$(m-x)(3m+x)$
	$(x+3a)(x+8a)$		$(n+x)(n-x)$
	$(x-9{,}5)(x-2{,}2)$		$(6{,}5-x)(1{,}2+x)$

3. $(x - 7p)(x - 5p)$ 4. $(x - 3q)(q + x)$
$(x - h)(x + 2k)$ $(-x + v)(5x - v)$
$(x + l)(m - 2x)$ $(-x - 5s)(x + s)$

5. Rakenda binoomide korrutamise eeskirja järgmiste korrutiste arvutamiseks, kujutades tegureid summana või vahena:

1. $97 \cdot 98$ 2. $499 \cdot 505$
$103 \cdot 104$ $12\frac{1}{2} \cdot 12\frac{1}{3}$
$104 \cdot 99$ $4\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{4}$
$198 \cdot 203$ $15{,}5 \cdot 16{,}5$
$299 \cdot 302$ $9{,}7 \cdot 10{,}2$

6. Jalgrattasõitjal kulus lähemasse linna sõiduks t tundi, kui ta sõitis keskmise kiirusega v km tunnis. Alevikku sõiduks kulus tal 1 tund 30 minutit vähem aega, olgugi et ta kiirust 3 km võrra tunnis vähendas. Mitme km võrra on tee linna pikem kui tee alevikku?

7. Talumehe ristkülikutaolise viljapuu-aia pikkus oli p meetrit ja laius l meetrit. Aia suurendamise otstarbel lisati pikkusele 15 m ja laiusele 8 m. Kui palju suurenes aia pindala?

8. Asunik sai oma põllult a tsentnerit linu ja müüs nad b marka tsentner. Järgmisel aastal sai ta külvipinna suurendamise tõttu linu 3 tsentnerit rohkem, kuid hindade languse tõttu oli ta sunnitud tsentneri linu müüma 18 marka odavamalt. Mitme marga võrra muutus linadest saadud sissetulek?

9. Maja põhijooniseks on ristkülik, mille mõõtmed on a ja b meetrit. Maja ümber jäetakse x meetri laiune mururiba. Kui suur pindala jääb muru alla?

10. Koolis oli seni n õpilast ja õppemaksuks k marka aastas. Lähema kooli sulgemise tõttu võeti a õpilast juurde; õppemaksu tõsteti t marga võrra. Kui palju suurenes kooli aastane sissetulek?

11. Kavatseti ehitada maja suurusega v kuupmeetrit. Ehituskuludeks arvestati k marka kuupmeetri kohta. Enne ehituse algust langes aga ehitusmaterjali hind seevõrra, et kuupmeetri hinna võis arvestada nüüd d marka madalamalt; maja ehitati aga s kuupmeetrit suurem, kui algul kavatseti. Kui palju ületasid maja ehituskulud varemini-tehtud eelarve?

§ 2. Summa ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu summa $a+b$. Selle ruut on

$$(a+b)^2.$$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; see annab:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2;$$

sellest järeldub, et

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ruudu arendamiseks tuleb liita esimese arvu ruut, esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja teise arvu ruut.

Näited.

1. $(a+3)^2=a^2+2\cdot a\cdot 3+3^2=a^2+6a+9.$

2. $(4a + 7b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 =$
$= 16a^2 + 56ab + 49b^2.$

3. $108^2 = (100 + 8)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 8 + 8^2 =$
$= 10000 + 1600 + 64 = 11664.$

Ülesanded.

12. Arenda järgmiste avaldiste ruudud:

1.	2.	3.
$a + 1$	$m + 6$	$11 + x$
$a + 2$	$m + 7$	$12 + x$
$a + 3$	$m + 8$	$13 + x$
$a + 4$	$m + 9$	$14 + x$
$a + 5$	$m + 10$	$15 + x$

4.	5.	6.
$b + \frac{1}{2}$	$n + 0,1$	$y + a$
$b + \frac{1}{3}$	$n + 0,3$	$y + b$
$b + \frac{1}{4}$	$n + 1,5$	$y + c$
$b + 1\frac{2}{3}$	$n + 2,7$	$y + d$
$b + 2\frac{4}{5}$	$n + 3,9$	$y + e$

7.	8.
$2a + b$	$2x + 5a$
$3x + 2$	$4a + 5b$
$5 + 4n$	$3m + 6n$
$10n + m$	$7x + 2y$
$16m + 2$	$9c + 10d$

13. Arvuta järgmised väärtused, tarvitades summa ruudu valemit:

1.	51^2	71^2	102^2	803^2	1010^2
2.	62^2	43^2	104^2	502^2	2005^2

§ 3. Vahe ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu vahe $a - b$. Selle ruut on

$$(a-b)^2.$$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; see annab:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2,$$

millest järeldub, et

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu vahe ruudu arendamiseks tuleb esimese arvu ruudust lahutada esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja saadusega liita teise arvu ruut.

Näited.

1. $(a-5)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot 5 + 5^2 = a^2 - 10a + 25.$
2. $(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 2b + (2b)^2 =$
   $= 9a^2 - 12ab + 4b^2.$
3. $97^2 = (100-3)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 3 + 3^2 =$
   $= 10000 - 600 + 9 = 9409.$

Ülesanded.

14. Arenda järgmiste avaldiste ruudud:

1.		2.		3.	
	$c-1$		$2-k$		$\frac{1}{2}-p$
	$c-3$		$4-k$		$\frac{1}{3}-p$
	$c-5$		$6-k$		$1\frac{1}{4}-p$
	$c-7$		$8-k$		$2\frac{2}{3}-p$

4. $d-0{,}1$	5. $x-a$	6. $2w-1$
$d-0{,}2$	$x-b$	$3w-2$
$d-1{,}3$	$x-c$	$4w-3$
$d-2{,}4$	$x-d$	$5w-4$
$d-3{,}5$	$x-e$	$6w-5$

7. $2c+1$	8. $2p+\frac{1}{2}$	9. $4z+7a$
$3c+2$	$3p+\frac{2}{3}$	$3z+b$
$4c+3$	$4p+1\frac{1}{4}$	$5z+3c$
$5c+4$	$5p+\frac{3}{10}$	$6z+d$
$6c+5$	$6p+2\frac{1}{3}$	$7z+2e$

15. Arvuta valemi abil järgmised väärtused:

1. 39^2	99^2	18^2	197^2	1990^2
2. 37^2	89^2	68^2	998^2	1999^2

§ 4. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valem.

Kahe arvu a ja b summa ja vahe korrutis avaldub kujul

$$(a+b)(a-b).$$

Selle avaldise arendamine kaksliikmete korrutamise eeskirja järgi annab:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2,$$

millest saame

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ja vahe korrutise arendamiseks tuleb esimese arvu ruudust lahutada teise arvu ruut.

Näited.

1. $(x+5)(x-5)=x^2-25.$

2. $(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2.$

3. $(a+x)(a-x)(a^2+x^2)=$
$=(a^2-x^2)(a^2+x^2)=a^4-x^4.$

Märkus. Ülaltuletatud valemites võib vahetada pooled. See laiendab veelgi nende valemite kasutamise võimalust arvutamisel ja avaldiste teisendamisel.

Näited.

1. $1+2x+x^2=(1+x)^2.$

2. $4u^2-u+\frac{1}{16}=\left(2u-\frac{1}{4}\right)^2.$

3. $93^2-7^2=(93+7)(93-7)=100\cdot 86=8600.$

Ülesanded.

16. Arenda järgmised avaldised:

1.	2.
$(x+1)(x-1)$	$(a+5)(a-5)$
$(x+3)(x-3)$	$(b-1{,}7)(b+1{,}7)$
$(x+6)(x-6)$	$(6+c)(6-c)$
$(x-9)(x+9)$	$(13-d)(d+13)$
$(x+12)(x-12)$	$(0{,}4+f)(f-0{,}4)$

17. Arvuta järgmised väärtused, tarvitades kohaselt summa ja vahe ruudu valemeid:

1.	41^2	83^2	29^2	299^2	890^2
2.	72^2	47^2	38^2	603^2	999^2

18. Rakenda ruutude vahe valemit järgmiste väärtuste arvutamiseks:

1.	$21^2 - 19^2$	2.	$157^2 - 143^2$	3.	$202^2 - 198^2$
	$62^2 - 58^2$		$25{,}1^2 - 24{,}9^2$		$315^2 - 285^2$
	$101^2 - 99^2$		$1{,}55^2 - 1{,}45^2$		$1017^2 - 983^2$
	$11^2 - 9^2$		$1{,}65^2 - 1{,}35^2$		$1018^2 - 982^2$
	$33^2 - 27^2$		$2{,}75^2 - 2{,}25^2$		$1019^2 - 981^2$

§ 5. Hulkliikmete korrutamine.

Hulkliikme korrutamine hulkliikmega taandub summa korrutamise seaduse rakendamisel hulkliikme korrutamisele üksliikmetega ja saadud korrutiste liitmisele. Hulkliikmete korrutamise eeskirja sõnastame nii:

kahe hulkliikme korrutise saamiseks tuleb korrutada esimese hulkliikme iga liige teise hulkliikme iga liikmega ja liita saadused.

Korrutise anname koondatud kujul.

N ä i d e 1.

$$(x^2 - 2x + 3)(x + 4) =$$
$$= x^3 - 2x^2 + 3x + 4x^2 - 8x + 12 =$$
$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 12.$$

N ä i d e 2.

$$(3ax^2 + 4bu^2)(ax + bu) =$$
$$= 3a^2x^3 + 4abu^2x + 3abux^2 + 4b^2u^3.$$

Polünoomide korral on ülevaatlikkuse mõttes otstarbekohane osakorrutisi kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid samas veerus. Puuduvate astmete kohad jäetakse tühjaks. Võte on sama, mida rakendame arvude korrutamisel.

N ä i d e 3.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{c}{(x^3-2x+3)(x^2+x-1)} \\
\hline
x^5 & & -2x^3 & +3x^2 & & \\
 & +x^4 & & -2x^2 & +3x & \\
 & & -x^3 & & +2x & -3 \\
\hline
x^5 & +x^4 & -3x^3 & +x^2 & +5x & -3
\end{array}
$$

Ülesanded.

19. Järgnevais avaldisis ava sulud ja koonda tulemused:

$$(a+b)(a+2b)-(a-b)(a-2b)$$
$$3n(n+2)-(1-4n)(n-5)$$
$$(4R-r)(R-r)-5r(r-R)$$
$$(Q-q)(q-1)-(Q+q)(q+1)$$
$$(1-p)(q-1)-(1-q)(p-1)$$

20. Korruta

polünoom	polünoomiga
h^2+3	$3h+4$
h^2-h+1	$5h-3$
$7h^2-5h-2$	$h-2$
$3-4h-5h^2$	$3h-1$
$h^2-7h+12$	$2h+3$

ja kontrolli saadust, asetades andmeisse ja tulemustesse mingi h eriväärtuse, näiteks $h=2$ või $h=3$ või $h=10$.

21. Igas alljärgnevas reas on kaks avaldist. Arenda nende avaldiste korrutis ja koonda saadused:

$$
\begin{array}{ll}
x^2 + 2x + 1 & x + 1 \\
x^2 - 3x - 9 & x - 3 \\
2x^2 - 5x + 7 & 4x + 1 \\
3x^2 + 4x - 6 & 2x - 5 \\
1 - 7x + 15x^2 & 1 - 6x
\end{array}
$$

22. Arenda järgmised korrutised:

$$
\begin{array}{l}
(3m + n + 1)(3m - n + 1) \\
(7p^2 - 8p + 3)(5p^2 + 3p + 4) \\
(a^3 + a^2 + a + 1)(a^2 + a + 1) \\
(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(3x^3 + 2) \\
(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)(y^2 - 1)
\end{array}
$$

23. Arenda järgmised korrutised:

$$
\begin{array}{l}
(2x - 1)(x - 2)(x - 4) \\
(3x - 2)(2x + 7)(x - 1) \\
(4x - 3)^2(3x - 1) \\
(5x - 4)(1 + 2x)^2 \\
(6x - 5)(5 - x)(x + 2)
\end{array}
$$

§ 6. Summa kuubi ja vahe kuubi valemid.

Olgu antud kahe arvu summa $a + b$. Selle kuup on

$$(a + b)^3.$$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, kirjutame:

$$
\begin{aligned}
(a + b)^3 &= (a + b)\,(a + b)^2 = \\
&= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

ehk lühemalt:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Samal teel leiame, et

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Sõnastame tulemused nõnda:

kahe arvu summa kuubi arendamiseks tuleb liita esimese arvu kuup, esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis ning teise arvu kuup;

kahe arvu vahe kuubi arendamiseks tuleb esimese arvu kuubist lahutada esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, vahega liita esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis ning saadusest lahutada teise arvu kuup.

Näited.

1. $(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$

2. $(10{,}1)^3 = (10 + 0{,}1)^3 =$
$= 1000 + 3 \cdot 100 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 10 \cdot 0{,}01 + 0{,}001 =$
$= 1000 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}001 = 1030{,}301.$

Märkus. Arvutamise abivalemid hõlbustavad tunduvalt arvutamist, võimaldades seda mõnikord toimetada peast. Need valemid on ka tähtsaks abinõuks avaldiste teisendamisel.

Näited.

1. $45^2 = (40 + 5)^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025.$

2. $87^2 - 13^2 = (87 + 13)\,(87 - 13) = 100 \cdot 74 = 7400.$

3. $(3a + b)^2 - (3a - b)^2 =$
$= 9a^2 + 6ab + b^2 - 9a^2 + 6ab - b^2 = 12ab$

või teisiti:

$$(3a+b)^2-(3a-b)^2=$$
$$=(3a+b+3a-b)(3a+b-3a+b)=$$
$$=6a\cdot 2b=12ab.$$

4. $(x+3)(x-4)-(x-2)^2=$
$$=(x^2+3x-4x-12)-(x^2-4x+4)=$$
$$=x^2-x-12-x^2+4x-4=3x-16.$$

Ülesanded.

24. Arenda järgmiste kaksliikmete kuubid:

1.	2.	3.
$x+1$	$3m+4$	$3a+2x$
$a+1$	$2n+3$	$5b+4y$
$4+c$	$4p+q$	$4c+z$
$d+5$	$5r+2$	$d+3u$
$7+f$	$6u+5$	$5e+6v$

25. Arenda järgmiste kaksliikmete kuubid:

1.	2.	3.
$x+\frac{1}{2}$	$0{,}7+e$	$3m+\frac{n}{3}$
$a-\frac{1}{3}$	$2f+0{,}3$	$1-\frac{pq}{4}$
$\frac{c}{2}-2$	$3g-0{,}5$	$4c-\frac{u}{2}$
$\frac{c}{2}-\frac{1}{2}$	$2k+\frac{1}{2}$	$5n-\frac{h}{10}$
$d-0{,}1$	$\frac{1}{2}l-4$	$0{,}1-10z$

§ 7. Ülesandeid kordamiseks.

26. Arenda järgmiste kaksliikmete ruudud:

1.	2.	3.
$3u-5v$	$0{,}9-w$	$2f+\frac{1}{2}g$
$\frac{3}{4}-x$	$1-\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{3}h-\frac{3}{5}k$
$N-0{,}7$	$\frac{2}{3}H+6$	$ax-3by$
$x+\frac{x}{3}$	$2u-\frac{u}{3}$	$pq-\frac{pq}{10}$

27. Arenda järgmised korrutised:

1. $(a^2+a)(a-1)$
$(m^3-n)(m-n)$
$(a+2)(a^2-a-2)$
$(m+n+3)(m-n)$
$(c^2+c+3)(c^2-1)$

2. $(n-2)(n-3)(n-8)$
$(x+1)(x-5)(x+6)$
$(u+7)(u-9)(u-4)$
$(H-1)(H-2)(H-3)$
$(D-2)(D+5)(D-7)$

3. $(2a+b+1)(2a-b-1)$
$(m^2-mn+n^2)(m^2+mn+n^2)$
$(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$
$(2u^2-6u+7)(3u^2+9u-1)$
$(N^4-N^3+N^2-N+1)(N^2+2N+1)$

28. Ava sulud järgmistes avaldistes ja koonda, kus võimalik, tulemus:

1. $(5x-1)(2x+1)(2x-1)-20x^3$
$8a^3-b^3-(2a-b)^3$
$(2F-5)^3-2F(4F^2+3F-6)$
$(u^3-1)-(u-1)(u^2+u+1)$
$(2N+1)(4N^2+2N+1)-(2N-1)^3$

2. $(2a^2+3)(2a^2-3)-(2a^2-1)^2$
$2(b+2u)(b-2u)-2(b-2u)^2$
$(3m-n)^2-2(3m-n)(m-3n)+(m-3n)^2$
$[(3x^2-x)+1]^2-(3x^2-x)^2+2x(1-3x)$
$[x^2+(x+2)]^2+[x^2-(x-2)]^2-$
$-2(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

29. Arenda järgmiste kaksliikmete kuubid:

1. $2a - 1$	2. $0{,}4 - n$	3. $2f + g$
$\frac{1}{2} - c$	$1 - \frac{1}{3}p$	$\frac{1}{2}h - \frac{2}{3}k$
$F - 0{,}1$	$\frac{3}{4}q + 2$	$lx - 2y$
$hk + l$	$st - u$	$2au + \frac{1}{2}$
$m + \frac{1}{3}m$	$2v - \frac{v}{3}$	$w - \frac{2}{3}w$

30. Ruudu külg on a cm b mm. Avalda ruudu pindala ruutmillimeetrites.

31. Ruudu külg on m jalga ja n tolli. Teades, et 1 jalg on 12 tolli, avalda ruudu pindala ruuttollides.

Peatükk II.

Arvude ja üksliikmete jaguvus.

§ 8. Arvu jagaja.

Selles ja järgmistes sama peatüki paragrahvides me tegeleme täisarvudega. Sõna arv ja tähised a, b, N, $q\ldots$ tähendavad siin täisarve.

Iga arv jagub arvuga 1, näiteks

$$4:1=4, \qquad 237:1=237, \qquad a:1=a;$$

samuti iga arv jagub arvu enesega, näiteks

$$10:10=1, \qquad 198:198=1, \qquad a:a=1.$$

Arvu a jagamisel mõne arvuga b, kus $b>1$ ja $a>b$, võib esineda kaks juhtu: arv a annab jagamisel arvuga b jäägi või arv a jagub arvuga b.

Kui arv *a* jagub arvuga *b*, siis ütleme, et

arv *b* on arvu *a* jagajaks,

ehk

arv *b* on arvu *a* teguriks,

ehk

arv *a* on arvu *b* kordne.

Näiteks arv 210 jagub arvuga 42, seega arv 42 on arvu 210 jagaja ehk arv 42 on arvu 210 teguriks ehk arv 210 on arvu 42 kordne.

Arvu jagajate leidmine võib toimuda proovimise teel. Nii leiame arvu 20 puhul, et tema jagajaiks on

1, 2, 4, 5, 10, 20;

jagajaiks pole

3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, ... 19.

§ 9. Algarv. Kordarv.

Täisarvude reas

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

leidub arve, millel pole teisi jagajaid peale arvu 1 ja arvu enda. Niisuguseks arvuks on näiteks 7: ta jagub 1-ga ja 7-ga, ei jagu aga 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga, 6-ga.

Arve, milledel ei ole muid jagajaid kui 1 ja arv ise, nimetame algarvudeks.

Arvu 1 me ei loe arvu jagajate hulka.

Vahemikus 1-st 100-ni leiame proovimise teel järgmised algarvud:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Vastandiks algarvudele on arvud, milledel leidub ühest suuremaid ja arvust enesest väiksemaid jagajaid.

Arve, milledel on ühest suuremaid ja arvust enesest väiksemaid jagajaid, nimetame kordarvudeks.

Kordarvudeks on näiteks arvud 6, 15, 28.

§ 10. Jaguvuse tunnused.

Küsimust, kas antud arv jagub mõne teise arvuga või mitte, on igal juhul võimalik otsustada, tegelikult jagades antud arvu selle teisega. Näiteks arv 495 ei jagu arvuga 17, sest jagamisel tekib jääk 2.

Jagamise tegelik läbiviimine on küllaltki tülikas. Paljude sageli esinevate jagajate puhul, nagu 2, 3, 4, 5, 9, saame jaguvuse küsimust otsustada tunduvalt väiksema vaevaga, rakendades j a g u v u s e   t u n n u s e i d. Jaguvuse tunnuste tuletamisel toetume järgmistele lausetele:

1. Kui kumbki kahest liidetavast jagub mõne arvuga, siis jagub sellega ka nende summa.

2. Kui üks liidetavaist jagub mõne arvuga, teine aga annab selle arvuga jagamisel jäägi, siis liidetavate summa annab selle arvuga jagamisel sama jäägi.

Esimese lause tõestamiseks arutame järgmiselt:

Olgu lauses nimetatud liidetavad märgitud tähtedega a ja b, nende summa tähega N:

$$N = a + b.$$

Jagugu arvud a ja b arvuga c; siis on a ja b arvu c kordsed ja me võime kirjutada:

$$a = p \cdot c$$
$$b = q \cdot c,$$

kus p ja q on täisarvud. Liitmisaksioomi põhjal saame:

$$a + b = p \cdot c + q \cdot c$$

ehk

$$N = (p + q) \cdot c.$$

Siit näeme, et N on arvu c kordne, seega jaguv arvuga c. Lause jääb kehtima ka 3, 4, 5 jne. liidetava puhul.

Teise lause tõestamiseks arutame järgmiselt:

Olgu liidetavad nagu varemalt tähistatud a ja b. Jagugu arv a arvuga c ja andku arv b jagamisel arvuga c jagatise q ja jäägi r. Siis on

$$a = p \cdot c$$
$$b = q \cdot c + r.$$

Liitmisaksioomi põhjal saame

$$a + b = p \cdot c + q \cdot c + r,$$

ehk

$$N = (p + q) \cdot c + r.$$

Siit näeme, et arvu N jagamisel arvuga c tekib jääk r, m. o. t. t.

Jaguvuse tunnused jagajate 2, 5 ja 10 puhul.

Olgu antud mingi arv N; olgu temas kümneid k ja ühelisi u; siis on

$$N = 10k + u.$$

Viimase summa esimene liige on arvude 10 ja k korrutis; tegur 10 on 2-ga jaguv, seega on $10k$ korrutise jagamise seaduse põhjal jaguv 2-ga. Teise lause põhjal arv N annab jagamisel 2-ga sama jäägi, mis annab üheliste arv u jagamisel 2-ga. Järelikult arv N on jaguv või mittejaguv 2-ga vastavalt sellele, kas tema ühelised on 2-ga jaguvad või mitte. 2-ga jaguvad ühtedest vaid 0, 2, 4, 6, 8. Seega:

arv on jaguv 2-ga, kui tema kirjutis lõpeb nulli või paarisnumbriga.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 5-ga, kui tema kirjutis lõpeb numbriga 0 või 5.

Samal viisil arutades leiame ka, et

arv on jaguv 10-ga, kui tema kirjutis lõpeb numbriga 0.

Jaguvuse tunnused jagajate 4 ja 25 puhul.

Olgu antud mingi arv N; olgu temas sadu s, kümnelisi k ja ühelisi u; siis on

$$N = 100s + 10k + u,$$

ehk

$$N = 100s + (10k + u).$$

Viimase summa esimene liige on korrutise jagamise seaduse põhjal jaguv 4-ga. Teise lause põhjal arvud N ja $10k + u$ annavad jagamisel 4-ga ühe ja sama jäägi. Järelikult arv N on jaguv või mittejaguv 4-ga vastavalt sellele, kas $10k + u$ on jaguv 4-ga või mitte. Seega:

arv on jaguv 4-ga, kui ta kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 4-ga jaguvat arvu.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 25-ga, kui ta kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 25-ga jaguvat arvu.

Jaguvuse tunnused jagajate 9 ja 3 puhul.

Olgu tegemist mingi arvuga N; olgu tema numbrid paremalt vasakule poole n_1, n_2, $n_3, \ldots$ Siis on selles arvus n_1 ühelist, n_2 kümnelist, n_3 sajalist jne. Näiteks arvu 7509 puhul $n_1 = 9$, $n_2 = 0$, $n_3 = 5$ ja $n_4 = 7$. Oma numbrite kaudu arv N avaldub kujul:

$$N = n_1 + 10n_2 + 100n_3 + \ldots$$

Selle summa võime kirjutada ka nii:

$$N = n_1 + (9n_2 + n_2) + (99n_3 + n_3) + \ldots$$

ehk, avades sulud ja liikmed teisiti rühmitades,

$$N = (9n_2 + 99n_3 + \ldots) + (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots).$$

Esimeses suluavaldises on iga liige ilmsesti 9-ga jaguv; esimese lause põhjal on seega suluavaldis ise 9-ga jaguv. Teise lause põhjal annab arv N jagamisel 9-ga sama jäägi, mille annab jagamisel 9-ga avaldis

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$$

ehk arvu N „numbrite summa". Järelikult on arv N jaguv või mittejaguv 9-ga vastavalt sellele, kas arvu numbrite summa on jaguv 9-ga või mitte. Arvu numbrite summat nimetame *arvu ristsummaks.*

Kokkuvõttes:

arv on jaguv 9-ga, kui arvu ristsumma on jaguv 9-ga.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 3-ga, kui arvu ristsumma on jaguv 3-ga.

Näide. Arv 780126 on jaguv 2-ga, sest 6 on jaguv 2-ga; arv pole jaguv 4-ga, sest 26 pole jaguv 4-ga; arv pole jaguv 5-ga, sest 6 pole jaguv 5-ga. Arvu ristsumma

$$7 + 8 + 0 + 1 + 2 + 6 = 24$$

on jaguv 3-ga, pole aga jaguv 9-ga; seega antud arv on jaguv 3-ga, mitte aga 9-ga.

Ülesanded.

32. Missugused järgmistest arvudest jaguvad 2-ga, missugused mitte?

1.	45	58	89	2.	1246	1872	2000
	111	182	210		3451	3892	4056
	383	470	894		5177	6145	7309

33. Missugused järgmistest arvudest jaguvad 5-ga, missugused mitte?

1.	25	72	80	2.	2457	2572	2995
	126	157	163		4960	4999	5050
	275	314	340		5785	6120	8005

34. Missugused järgmistest arvudest jaguvad 3-ga, missugused mitte?

1.	71	84	88	2.	1111	2220	3003
	102	115	117		4119	5640	6720
	195	222	375		7009	8118	9369

35. Missugused järgmistest arvudest jaguvad 4-ga, missugused mitte?

1.	112	526	672	2.	1728	1696	2300
	256	874	932		2452	3080	6566
	544	735	980		7113	8224	9318

36. Missugused järgmistest arvudest jaguvad 9-ga, missugused mitte?

1.	792	801	954	2.	17825	20754	34201
	1265	4320	5319		45936	51030	67608
	6309	7892	8010		70020	80109	90333

37. On antud arvud

825 3672 85481 94641.

Missugused neist jaguvad 2-ga? Missugused jaguvad 3-ga? Missugused 4-ga? Missugused 5-ga? Missugused 9-ga? Missugused 25-ga?

38. On antud arvud

729484756 749250 107811000.

Missugused neist jaguvad 2-ga? 3-ga? 4-ga? 5-ga? 9-ga? 10-ga? 25-ga?

39. Missuguste arvudega reast

2 3 4 5 9 10 25

jagub arv 137610?

§ 11. Arvude lahutamine algtegureiks.

Olgu antud mõni kordarv a; olgu b üks selle arvu tegureist; siis on

$$a = b \cdot q.$$

Selles võrduses arv a esineb korrutisena. Kui arvud b ja q on algarvud, siis meie võrdus annab arvu a tema algtegurite korrutisena, ehk, nagu ütleme, algtegureiks lahutatud kujul.

Näiteks esinevad võrdustes

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 77 = 11 \cdot 7 \qquad 611 = 13 \cdot 47$$

arvud 15, 77 ja 611 lahutatult oma algtegureiks.

Olgu võrduses

$$a = b \cdot q$$

üks tegureist, näiteks b, *kordarv*. Siis peab temale leiduma jagaja, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui b; olgu see jagaja c. Sel puhul võime kirjutada

$$b = c \cdot p,$$

seega

$$a = c \cdot p \cdot q.$$

Nõnda edasi minnes ja kordarvulisi tegureid järjest korrutistena kirjutades jõuame viimaks niikaugele, et kõik paremal poolel seisvad tegurid on *algarvud*: arv a esineb siis oma algtegurite korrutisena ehk lahutatult algtegureiks.

Võib juhtuda, et ükski arvust a väiksem algarv ei ole arvu a teguriks; *siis on a ise algarv.* Vastasel korral leidub arv t, mis on arvu a teguriks. Sel puhul määrame arvu a ja leitud teguri t jagatise b, kirjutame $a = t \cdot b$ ja toimetame edasi arvuga b, nagu eespool arvu a puhul seletatud.

Näide. Lahutame arvu 396 algtegureiks.

Talitades eespool-seletatud viisil saame:

$$396 = 2 \cdot 198 = 2 \cdot 2 \cdot 99 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Sobivat skeemi arvu algtegureiks lahutamiseks õpime järgmisist näiteist:

Näide 1.

$$\begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \end{array}$$

$$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \end{array}$$

$$3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Kontrolliks jääb vaid teostada paremal pool märgitud korrutamised.

Üksliikme algtegureiks nimetame kordaja algtegureid ja kõiki ühetäheliste tegurite astendatavaid.

Näiteks on üksliikme $70ab^2x^3$ algtegurid

$$2, \quad 5, \quad 7, \quad a, \quad b, \quad x.$$

Oma algtegurite korrutisena esineb antud üksliige kujul:

$$70ab^2x^3 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^3.$$

Ülesanded.

40. Kirjuta järgmised arvud algarvuliste tegurite korrutistena:

1.	104	126	215	310	399
2.	106	182	253	553	1495

41. Kirjuta järgmised arvud algtegurite korrutistena:

1.	510	2.	791	3.	594	4.	1001	5.	4214
	671		837		765		1111		7259
	713		950		966		1218		13489

42. Kirjuta kõik arvud 90-st 100-ni nende algarvuliste tegurite korrutistena, tehes tarvilised arvutused peast.

43. Kirjuta järgmised arvud algtegurite korrutistena:

$$28^2 \qquad 36^3 \qquad 98^2 \qquad 165^2 \qquad 189^2$$

§ 12. Arvu jagajate leidmine.

Kui arv on lahutatud algtegureiks, saab kergesti leida tema jagajad, võttes arvu algtegureid üksikult, siis korrutades neid paarikaupa, kolmekaupa jne. Näiteks on

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

siit arvu 60 jagajad on

2	3	5	
$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$3 \cdot 5$
$2 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

ehk lühemalt 2, 3, 5; 4, 6, 10, 15; 12, 20, 30; 60; kõigi nende jagajatega seltsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Ülesanne.

44. Määra iga järgmise arvu puhul kõik tema jagajad:

1.	6	16	24	35	42
2.	10	18	27	36	52
3.	12	20	30	40	62

§ 13. Antud arvude suurim ühistegur.

Olgu antud kaks arvu, näiteks 30 ja 42. Nende arvude jagajad on vastavalt

	1	2	3	5	6		10		15		30
ja	1	2	3		6	7		14		21	42.

Nagu näeme, omavad arvud 30 ja 42 ühisjagajaid; nendeks on arvud

1, 2, 3 ja 6.

Seega on antud arvude suurimaks ühisjagajaks arv 6. Arvude suurimat ühisjagajat nimetame ka arvude suurimaks ühisteguriks. Niisiis:

antud arvude suurimaks ühisteguriks nimetame suurimat arvu, millega jagub igaüks antud arvudest.

Olgu kaks arvu lahutatud algtegureiks. Kirjutame välja mõlema arvu ühised algtegurid. Võttes neid tegureid üksikult, siis korrutatult paarikaupa, kolmekaupa jne., saame kõik meie arvude ühisjagajad; suurima neist saame, arvutades kõigi ühiste algtegurite korrutise.

Näide. Olgu antud arvud 420 ja 2700. Lahutades need algtegureiks saame:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 2700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Antud arvudel on järgmised ühised algtegurid:

$$2, \ 2, \ 3, \ 5;$$

seega on antud arvude ühiseiks jagajaiks arvud

$$2, \ 3, \ 5; \ 2 \cdot 2, \ 2 \cdot 3, \ 2 \cdot 5, \ 3 \cdot 5;$$
$$2 \cdot 2 \cdot 3, \ 2 \cdot 2 \cdot 5, \ 2 \cdot 3 \cdot 5; \ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Neid arve võime kirjutada lühemalt nii:

$$2, \ 3, \ 5; \ 4, \ 6, \ 10, \ 15; \ 12, \ 20, \ 30; \ 60;$$

nendega seltsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Arvude 420 ja 2700 suurim ühisjagaja ehk suurim ühistegur on 60.

Eespool-öeldut üldistades jõuame järgmisele reeglile:

selleks, et saada antud arvude suurimat ühistegurit, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja arvude ühised algtegurid ja leiame nende korrutise.

N ä i d e. Leiame arvude 1452, 1980 ja 6600 suurima ühisteguri.

Korraldame töö nii:

1452	2
726	2
363	3
121	11
11	11

$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$

1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11

$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

6600	2
3300	2
1650	2
825	3
275	5
55	5
11	11

$6600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$

Arvude 1452, 1980 ja 6600 suurim ühistegur on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132.$$

Ülesanded.

45. Leia peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurimad ühistegurid.

1.	2.	3.
9 ja 12	54 ja 63	6, 12 ja 20
10 ja 15	27 ja 48	9, 18 ja 45
21 ja 14	65 ja 85	7, 14 ja 24
15 ja 35	63 ja 81	10, 35 ja 50
39 ja 52	72 ja 96	18, 30 ja 42

46. Leia järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurimad ühistegurid:

1.	2.
112 ja 176	121, 154 ja 165
132 ja 364	102, 136 ja 170
308 ja 392	144, 162 ja 198
360 ja 450	264, 360 ja 600
468 ja 624	104, 525 ja 712

47. Ühe nööri pikkus on 210 m, teise oma 180 m. Kui suur on pikim nöörilõik, mis mahub nii esimesse kui teise täisarv korda?

48. Ühes korvis on 56 õuna, teises 84 pirni. Mitmele isikule saaks neid jaotada nõnda, et igaüks saaks võrdpalju õunu ja võrdpalju pirne? Kui suur on ülim isikute hulk, mille puhul on säärane jagamine veel võimalik?

49. Ühes klassis on 24 õpilast, teises 40. Kui suured on rühmad, milleks saab jaotada nii esimese kui ka teise klassi õpilasi, kõigis rühmades võrdpalju õpilasi? Mitu õpilast on suurimates niisugustes rühmades?

§ 14. Antud üksliikmete suurim ühistegur.

Antud avaldiste suurimaks ühisteguriks nimetame avaldiste kõigi ühiste algtegurite korrutist.

Olgu antud üksliikmed

$$42a^3b^2x \text{ ja } 105ab^2x^2$$

ehk, lahutatult algtegureiks:

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^3b^2x \text{ ja } 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^2.$$

Nende avaldiste suurim ühistegur on

$$3 \cdot 7 \cdot ab^2x$$

ehk lühemalt

$$21ab^2x.$$

Ülesanded.

50. Leia allpool-antud avaldispaaride suurimad ühistegurid:

1.	$6a$	$7ab$	$18abc$	$42pqr$
	8	$12ac$	$12ac$	$35mpq$
2.	P^4	$14Q^3$	$35R^4$	$72s^3$
	P^2	$7Q$	$84R^3$	$120s^5$
3.	$14ax^2$	$44cy^3$	$30m^2p^3q$	$22h^2k^3l^2$
	$21a^2x$	$77c^2y^2$	$65mp^2q^3$	$121h^3kl$

51. Leia allpool-antud avaldiskolmikute suurimad ühistegurid:

$15ab^2$	$16x^3y^2z$	$12mn$	$26p^3q^2$
$21a^2b$	$24xy^2z^3$	$18n^2$	$65a^2p^2q^3$
$12ab$	$6x^2y^2z^2$	$30mn^2$	$39p^2q^3$

§ 15. Antud arvude väikseim ühiskordne.

Olgu antud arvud 12 ja 15. Nende ühe-, kahe-, kolme-, ... k o r d s e d on vastavalt

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132 . . .
15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 180 . . .

Kordsete ridades leidub ü h i s e i d arve, näiteks

60, 120 ja edasi 180, 240, . . .

Neist ü h i s k o r d s e i s t on üks v ä i k s e i m; meie juhul 60; teised on selle ühe-, kahe-, kolme- jne. kordsed.

Antud arvude väikseimaks ühiskordseks nimetame väikseimat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Olgu kaks arvu a ja b lahutatud algtegureiks. Olgu nende arvude väikseim ühiskordne k. Vaadeldes arvu k arvu a kordsena, näeme, et temas peavad leiduma kõik arvu a algtegurid; vaadeldes teda arvu b kordsena, näeme, et temas peavad leiduma samuti kõik arvu b algtegurid. Järelikult saame arvu k, kui kirjutame välja kõik arvu a algtegurid, lisaks neile veel need arvu b algtegurid, mis arvus a ei esine, ja moodustame väljakirjutatud tegurite korrutise.

Näide. Leiame arvude 126 ja 56 väikseima ühiskordse.

Korraldame töö nii:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{56 = 2^3 \cdot 7} \end{array}$$

Arvude 126 ja 56 väikseim ühiskordne on

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504.$$

Eespool-öeldut üldistades jõuame järgmisele reeglile:

selleks, et saada antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja ühe arvu algtegurid, nendele lisaks teiste arvude need algtegurid, mis veel puuduvad, ja leiame kõigi väljakirjutatud algtegurite korrutise.

Antud arvude väikseima ühiskordse leidmise reegli võib sõnastada ka nii:

selleks, et saada antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutame arvud algtegureiks ja korrutame ühe antud arvudest teiste arvude nende algteguritega, mis võetud arvus ei esine.

Ülesanded.

52. Leia peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute väikseimad ühiskordsed:

1.		2.		3.	
	8 ja 12		3, 5 ja 11		2, 14 ja 35
	12 ja 15		4, 10 ja 16		3, 12 ja 15
	21 ja 14		5, 12 ja 18		6, 10 ja 15
	33 ja 22		9, 15 ja 25		8, 14 ja 16
	24 ja 100		7, 10 ja 21		9, 18 ja 20

53. Leia järgmistes arvuridades väikseimad ühiskordsed:

1.		2.	
	14, 20, 28 ja 30		42, 56 ja 98
	12, 28, 35 ja 40		54, 72 ja 126
	12, 20, 36 ja 54		504, 686 ja 1890
	18, 24, 32 ja 48		720, 945 ja 3969
	12, 18, 96 ja 144		240, 810 ja 6300

54. Kui suur on väikseim kuulide arv, mille puhul neid on võimalik korraldada rühmiti kas 14, 15, 21 või 35 kuuli rühmas?

55. Kooli õpilasi saab täpselt rühmitada 4-, 6-, 9-, 12-, 15-, 24-, 40- ja 90-kaupa. Kui suur on väikseim õpilaste hulk, mille puhul on seesugune rühmitus võimalik?

§ 16. Antud üksliikmete väikseim ühiskordne.

Antud avaldiste väikseimaks ühiskordseks nimetame ühe avaldise korrutist teiste avaldiste nende algteguritega, mis võetud avaldises ei esine.

Olgu antud üksliikmed

$$40m^2n^3p \text{ ja } 84mnq^2$$

ehk, lahutatult algtegureiks:

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \text{ ja } 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2.$$

Nende avaldiste väikseim ühiskordne on

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2$$

ehk

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot q^2$$

ehk

$$840m^2n^3pq^2.$$

Antud üksliikmete väikseima ühiskordse leidmise juhise võib sõnastada nii:

selleks, et saada antud üksliikmete väikseimat ühiskordset, võtame ühe neist üksliikmeist ja korrutame selle teiste üksliikmete nende algteguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.

Ülesanded.

56. Leia järgmiste avaldispaaride väikseimad ühiskordsed:

1.	$10b$	$40n$	cx	$14a^2$
	12	$64n$	dx	$21af$
2.	$44mx^2$	$15b^2y^3$	$6m^2nz$	$39pq^2h^3$
	$33m^2x^2$	$12b^3y^2$	$18mnz^3$	$52p^2q^2h^2$

57. Leia järgmiste avaldispaaride suurimad ühistegurid ja väikseimad ühiskordsed:

1.	$6x$	k^2	cv	p^2q
	$3x$	$7k$	v^2	pq^2
2.	$2m^2$	$4np$	$6a^2b$	$7t^5$
	$3mn$	$2pz$	$9b^2$	$3t^2$
3.	$12r$	$7lmn^2$	$12w^4$	$18h^2k^4$
	$18rp$	$14lmn$	$27w^6$	$12h^3k^5$
4.	$15a^2u^3$	$24p^3q^2$	$16au^2v$	$27cm^2q^3$
	$35a^3u$	$30pq^4$	$15au^3v^2$	$45mq^2r$

58. Leia lühima nööri pikkus, mida saab lõigata nii 12 cm kui ka 15 cm pikkusteks tükkideks.

§ 17. Ülesandeid kordamiseks.

59. Avalda üldkujul arv, mis jagamisel 7-ga annab jäägi 4.

60. Avalda üldkujul arv, mis jagamisel 5-ga annab jäägi 3.

61. Leia arvude 667 ja 899 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

62. Lahuta arv 4199 algteguriteks.

63. Missugused arvudest

2 3 4 5 9 10 25

on arvu 1234560 jagajaiks?

64. Leia avaldiste

$15pqr \qquad 33p^2q^2r \qquad 55pq^3$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

65. Leia avaldiste

$36f^3g^3h^6 \qquad 24f^2g^4h^5 \qquad 60f^4g^5h^4$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

Peatükk III.

Algebraline murd.

Esimene tsükkel.

§ 18. Murd.

Murdu $\frac{5}{7}$ mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame 7-ks võrdseks osaks ja neid osi võtame 5. Üldistame seda mõtet. Olgu m ja n kaks positiivset täisarvu. Murdu $\frac{m}{n}$ mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame n võrdseks osaks ja neid osi võtame m.

Arvu, mis näitab, mitmeks osaks on jaotatud tervik, nimetame murru n i m e t a j a k s; arvu, mis näitab, mitu niisugust osa on võetud, nimetame murru l u g e j a k s.

Selle asemel, et enne jaotada üks tervik n võrdseks osaks ja siis võtta m niisugust osa, võime enne võtta m tervikut kokku ja saaduse jaotada n võrdseks osaks. Öeldu põhjal võime murdu $\frac{m}{n}$ tõlgendada jagatisena, mille saame, jagades arvu m arvuga n. Seega

murd $\frac{m}{n}$ on niisugune arv, mis korrutamisel arvuga n annab arvu m.

Sümbolites avaldub see definitsioon kujul:

$$n \cdot \frac{m}{n} = m.$$

Olgu p ja q kaks positiivset täisarvu. Murru esimese tõlgenduse järgi sümbolitel

$$\frac{-p}{q} \text{ ja } \frac{p}{-q}$$

pole mõtet, küll aga omavad nad mõtet praegu-antud definitsiooni järgi. Viimasest nähtub, et kumbagi neist sümboleist tuleb mõista murruna $-\frac{p}{q}$:

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}.$$

Sellest järeldub, et pole vajadust eraldi uurida murdu, mille lugejaks või nimetajaks on negatiivne arv, vaid murru omaduste tuletamisel ja murdudega tehete käsitlemisel võime eeldada, et murru lugeja ja nimetaja on positiivsed.

Ülesanded.

66. Pudelitäie õli puhaskaal on p grammi; sama pudelitäie vee puhaskaal g grammi. Kui suur on õli erikaal e?

67. Masina hooratas teeb n tiiru sekundis. Mitu sekundit kulub rattal ühe tiiru tegemiseks?

68. Lennuk tõuseb kiirusega v meetrit sekundis. Mitu sekundit pärast tõusmist on lennuk 200 m kõrgusel?

69. Mootorratta bensiinikulu on k liitrit kilomeetri kohta; bensiinitagavara on v liitrit. Kui pika tee saab sõita selle bensiinitagavaraga?

70. Taksiauto sõidab kiirusega a kilomeetrit tunnis. Kui kaugele ta jõuab m minuti jooksul? Mitu meetrit see on?

71. Raamatus on n lehekülge. Tema paksus, kaasi ühes arvamata, on p mm. Kui paks on raamatu lehe paber?

72. Äri andis aastas m marka puhaskasu, mis moodustas $p\%$ ärisse mahutatud kapitalist. Kui suur see kapital oli?

73. Kaupmees ostis a tosinat nuge ja niisama palju kahvleid, makstes nende eest kokku m marka. Kui kallis tuli noa-kahvli paar?

74. Ristkülikutaoline ehituskrunt, mille mõõtmed on p ja q meetrit, maksab k marka. Kui kallilt hinnati 1 ruutmeeter seda krunti?

75. Mitme protsendiga on hoiul kapital k marka, kui ta t aastas kannab i marka intressi?

76. Arvuta kapital, mis intressimääraga $p\%$ kannab t aastas i marka intressi.

77. Laua mõõtmed on m ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

78. Ruudukujulise, a meetri pikkuse küljega põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$?

79. Tinast kuup, mille serv on a cm, kaalub k grammi. Kui suur on tina erikaal?

80. Töötamisel mootor tarvitab t tunnis k marga eest petrooleumi ja l marga eest määrdeõli. Kui suur on mootori kasutamise kulu tunnis?

81. Perenaine ostis a kg võid ja maksis selle eest k marka s penni. Kui kallilt arvestati kg võid?

82. Joonistusblokk maksab m penni. Mitu niisugust blokki saab osta a marga ja b penni eest?

83. Tosin pliiatseid maksab p marka ja q penni. Mitu penni maksab pliiats?

84. Rätsep ostis a meetrit siidi ja b meetrit linast riiet, makstes kokku c marka. Kui palju maksis meeter siidi, kui linane riie maksis d marka meeter?

85. Raamatukapi laius seestpoolt on l cm. Kapil on r riiulit, neile on asetatud m raamatut, igaüks p cm paks. Mitu raamatut, igaüks q cm paks, mahub ülimalt veel kappi?

§ 19. Murru põhiomadus.

Murru põhiomaduse tuletamisel lähtume silmanähtavast tõest, et murru $\frac{a}{b}$ väärtus m korda suureneb, kui lugejat korrutame arvuga m, ja m korda väheneb, kui arvuga m korrutame nimetajat. Siit järeldub, et

murru väärtus ei muutu, kui korrutame ühe ja sama arvuga nii murru lugejat kui ka tema nimetajat.

Sümbolites avaldub see tõsiasi nõnda:

$$\frac{a}{b}=\frac{m \cdot a}{m \cdot b}.$$

Lugedes sama võrdust paremalt poolt vasakule näeme, et

murru väärtus ei muutu, kui jagame ühe ja sama arvuga murru lugejat ja nimetajat.

Ülaltoodud võrduses peituvat murru omadust loeme murru p õ h i o m a d u s e k s.

§ 20. Murru teisendamine: laiendamine ja taandamine.

Korrutades murru $\frac{3}{4}$ lugejat ja nimetajat arvudega 5, 7, 9, 10 ja 13, saame murrud

$$\frac{15}{20} \quad \frac{21}{28} \quad \frac{27}{36} \quad \frac{30}{40} \quad \frac{39}{52}.$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus $\frac{3}{4}$; seega kõik need murrud on murru $\frac{3}{4}$ teisendid.

Jagades murru $\frac{840}{1120}$ lugejat ja nimetajat arvudega 2, 10, 20, 140 ja 280, saame murrud

$$\frac{420}{560} \quad \frac{84}{112} \quad \frac{42}{56} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{3}{4}.$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus $\frac{420}{560}$; seega kõik need murrud on murru $\frac{420}{560}$ teisendid.

Teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat korrutame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru laiendamiseks; teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat jagame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru taandamiseks.

Murru laiendamiseks pole tõket; murru taandamist on aga võimalik teostada vaid niikaua, kui murru lugejal ja nimetajal on veel ühiseid tegureid.

Murdu, mille lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid, nimetame taandumatuks.

Näiteks murrud

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{13}{18} \quad \frac{23}{41}$$

ja

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{m}{n^2} \qquad \frac{2p}{3q} \qquad \frac{x+1}{a^3}$$

on taandumatud.

Murru taandamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Taanda murd $\frac{234}{306}$.

Lahendus.

$$\underset{\text{taandades kahega}}{\frac{234}{306}} = \underset{\text{taandades kolmega}}{\frac{117}{153}} = \underset{\text{taandades kolmega}}{\frac{39}{51}} = \frac{13}{17}.$$

Saadud murd $\frac{13}{17}$ on taandumatu, sest tema lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid.

Selle asemel, et taandamist toimetada samm-sammult, võib seda teha ühekorraga, jagades lugejat ja nimetajat nende suurima ühisteguriga.

Ülesanne 2. Taanda murd $\frac{832}{864}$.

Lahendus. Lugeja ja nimetaja algtegureiks lahutamine annab $832 = 2^6 \cdot 13$ ja $864 = 2^5 \cdot 3^3$, seega nende arvude suurim ühistegur on 2^5. Jagades lugejat ja nimetajat arvuga 2^5 leiame, et $832 : 2^5 = 2 \cdot 13 = 26$ ja $864 : 2^5 = 3^3 = 27$, järelikult

$$\frac{832}{864} = \frac{26}{27}.$$

Murd $\frac{26}{27}$ on taandumatu, sest tema lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid peale arvu 1, teiste sõnadega, lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud.

Samal viisil toimetame taandamist täheliste murdude puhul.

Ülesanne 3. Taanda murd

$$\frac{132a^4b^2c^3}{165ab^3c^4d}.$$

Lahendus. Kirjutame antud murru kujul

$$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot a^4b^2c^3}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot ab^3c^4d}.$$

Lugejal ja nimetajal on järgmised ühised tegurid:

$$3,\ 11,\ a,\ b^2,\ c^3.$$

Järelikult lugeja ja nimetaja suurim ühistegur on

$$33ab^2c^3.$$

Jagades sellega antud murru lugejat ja nimetajat saame:

$$\frac{132a^4b^2c^3}{156ab^3c^4d} = \frac{4a^3}{5bcd}.$$

Ülesanded.

86. Taanda, kui võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{16}{40}$	**2.** $\frac{12}{64}$	**3.** $\frac{14}{35}$	**4.** $\frac{24}{66}$	**5.** $\frac{28}{72}$	**6.** $\frac{21}{63}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{27}{72}$
$\frac{40}{88}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{35}{63}$	$\frac{88}{121}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{24}{70}$
$\frac{27}{63}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{39}{91}$	$\frac{60}{84}$	$\frac{42}{72}$	$\frac{84}{220}$
$\frac{57}{243}$	$\frac{115}{320}$	$\frac{117}{130}$	$\frac{132}{143}$	$\frac{112}{176}$	$\frac{308}{392}$

87. Taanda järgmised murrud:

1. $\frac{15a^2}{35ab}$ 2. $\frac{51a^2c^2}{85a^2b^2}$ 3. $\frac{96m^2n^2p^2}{72m^3n^3}$

$\frac{26ab^2}{65a^2b}$ $\frac{63mn^2p^3}{81m^3n^2p}$ $\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$

$\frac{48a^2bc}{72abc^2}$ $\frac{45p^2}{48mnp^3}$ $\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$

88. Taanda järgmised murrud:

1. $\frac{-33m^2nx^2}{48mnx}$ 2. $\frac{52EF^2G^7}{-91EF^4G^5}$ 3. $\frac{57c^5u^6v^7}{190c^3u^6v^5}$

$\frac{h^4i^3k^5}{2h^2i^2k^2}$ $\frac{70h^2i^3k^4}{112h^4i^3k^2}$ $\frac{-105fx^2z^2}{360f^2x^3z}$

$\frac{-74np^3q^5}{60np^2q^6}$ $\frac{-85a^3s^2t^3}{-34a^2s^3t^4}$ $\frac{657P^4QR^3}{876P^5Q^3R}$

§ 21. Murdude ühenimelisteks teisendamine.

Murde, milledel on üks ja seesama nimetaja, nimetame ühenimelisteks; niisuguste murdude nimetajat — nende ühisnimetajaks.

Näiteks

$$\frac{3}{17} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{13}{17} \quad \frac{16}{17}$$

on ühenimelised murrud; samuti on

$$\frac{a}{2mn} \quad \frac{b^2}{2mn} \quad \frac{cd}{2mn} \quad \frac{h}{2mn}$$

ühenimelised murrud.

Antud murde on alati võimalik teisendada ühenimelisteks, võttes nende ühisnimetajaks antud nimetajate mingi ühiskordse. Lihtsuse mõttes võtame selleks ühisnimetajaks harilikult antud nimetajate väikseima ühiskordse. Murdude ühenimelisteks teisendamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Teisenda murrud $\frac{11}{12}$ ja $\frac{13}{15}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Arvude 12 ja 15 väikseimaks ühiskordseks on 60; see on 5 korda suurem kui 12 ja 4 korda suurem kui 15. Järelikult murru põhiomaduse järgi

$$\frac{11}{12}=\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{55}{60} \text{ ja } \frac{13}{15}=\frac{13\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{52}{60}.$$

Arvu, mis näitab, mitu korda murru laiendamisel suureneb murru lugeja ja nimetaja, nimetame murru laiendusteguriks.

Eelmises ülesandes olid murdude laiendustegurid vastavalt 5 ja 4.

Üldine reegel, mille järgi murde teisendame ühenimelisteks, on järgmine:

selleks, et erinevate nimetajatega murde teisendada ühenimelisteks, määrame nende nimetajate väikseima ühiskordse ning võtame selle murdude ühisnimetajaks; murdude uued lugejad saame, korrutades antud lugejad vastavate laiendusteguritega.

Ülesanne 2. Teisenda murrud $\frac{9}{14}$, $\frac{3}{35}$ ja $\frac{11}{24}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks saame

$$14=2\cdot 7 \qquad 35=5\cdot 7 \qquad 24=2^3\cdot 3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$$

ning vastavad laiendustegurid on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 2^3 \cdot 3 \qquad 5 \cdot 7$$

ehk

$$60 \qquad 24 \qquad 35.$$

Järelikult

$$\frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 60}{14 \cdot 60} = \frac{540}{840} \qquad \frac{3}{35} = \frac{3 \cdot 24}{35 \cdot 24} = \frac{72}{840}$$

$$\frac{11}{24} = \frac{11 \cdot 35}{24 \cdot 35} = \frac{385}{840}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude ühenimelisteks teisendamisel.

Ülesanne 3. Teisenda murrud

$$\frac{7c}{12abx} \qquad \frac{13x}{20ab^2} \qquad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \qquad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \qquad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3,$$

ehk

$$60a^2b^2x^3.$$

Murdude laiendustegurid on vastavalt

$$5abx^2 \qquad 3ax^3 \qquad 4b^2.$$

Järelikult võime antud murrud asendada murdudega

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{60a^2b^2x^3} \qquad \frac{13x \cdot 3ax^3}{60a^2b^2x^3} \qquad \frac{8b \cdot 4b^2}{60a^2b^2x^3}$$

ehk, lühemalt kirjutades, murdudega

$$\frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3}\quad \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3}\quad \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

Ülesanded.

89. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1. $\frac{2}{3}$	**2.** $\frac{2}{7}$	**3.** $\frac{4}{5}$	**4.** $\frac{6}{11}$	**5.** $\frac{11}{50}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{23}{125}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{29}{150}$
		$\frac{11}{12}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{34}{225}$

90. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1. $\frac{a}{b}$	**2.** $\frac{a}{36}$	**3.** $\frac{a}{b^2}$	**4.** $\frac{p}{a^2}$
$\frac{c}{d}$	$\frac{c}{4d}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{q}{2ab}$
5. $\frac{2a^2}{x}$	**6.** $\frac{4x}{a^2}$	**7.** $\frac{2m}{3a^3}$	**8.** $\frac{p}{4m^2n}$
$\frac{3b}{y}$	$\frac{3y}{2b^2}$	$\frac{n}{12a^2b}$	$\frac{3p^2}{2mn^3}$
$\frac{4c}{z}$	$\frac{5y}{4ab}$	$\frac{5n}{18ab^2}$	$\frac{5}{14m^3n^2}$

91. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1. $\frac{x}{a}$	**2.** $2b$	**3.** $\frac{2p}{3m^2}$	**4.** $\frac{5b}{24a^2c^3}$
a^2	$\frac{a}{3x^2}$	$\frac{5p^2}{6m^2n^2}$	$5d$
$\frac{y}{3a^3b}$	$\frac{3ab}{5xy}$	$3mn$	$\frac{7a}{36c^2}$

§ 22. Murdude võrdlemine.

Lähtume silmanähtavast tõest, et

võrdsete nimetajate puhul on see murd suurem, millel on suurem lugeja; võrdsete lugejate puhul on see murd suurem, millel on väiksem nimetaja.

Näiteks murdude reas $\frac{4}{15}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}$ on suurimaks murruks $\frac{11}{15}$; murdude reas $\frac{7}{12}, \frac{7}{16}, \frac{7}{9}, \frac{7}{20}$ on suurimaks murruks $\frac{7}{9}$.

Juhul, kui võrdlemiseks antud murrud erinevad nii lugejailt kui ka nimetajailt, teisendame nad ühenimelisteks.

Ülesanne. Järjesta murrud $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$ nende suuruse järgi.

Lahendus. Asendame antud murrud murdudega

$$\frac{10}{20} \quad \frac{8}{20} \quad \frac{15}{20};$$

tähele pannes, et

$$\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{15}{20},$$

järeldame, et

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

Ülesanne.

92. Järjesta ühes reas seisvad murrud nende suuruse järgi.

1. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$
2. $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$
3. $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{6}$
4. $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$
5. $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{10}$
6. $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{5}{12}$
7. $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{13}{25}$
8. $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{19}{20}$
9. $\frac{6}{11}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{9}{14}$
10. $\frac{11}{17}$ $\frac{10}{16}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{8}{14}$

§ 23. Kahe arvu suhe.

Kahe arvu suhte mõtte selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ülesanne. Ärimees on mahutanud ühte ettevõttesse 1200 marka, teise 6000 marka ja saab aastas kasu esimesest ettevõttest 120 marka, teisest ettevõttest 400 marka. Kumba ettevõttesse on kapitali mahutamine kasulikum?

Lahendus. Esimene ettevõte annab ühelt margalt kasu $\frac{120}{1200}$ ehk $\frac{1}{10}$ marka, teine ettevõte seevastu $\frac{400}{6000}$ ehk $\frac{1}{15}$ marka. Saadud murdudest on esimene suurem kui teine; järelikult on kasulikum mahutada kapitali esimesse ettevõttesse. Murrud $\frac{120}{1200}$ ja $\frac{400}{6000}$ annavad kummagi ettevõtte kohta kasu suhte kapitalisse.

Üldiselt defineerime suhet nõnda:

arvu a suhteks arvusse b nimetame murdu $\frac{a}{b}$ ehk jagatist $a:b$.

Sageli antakse kahe arvu suhe protsentides; näiteks suhe $1 : 10 = 10 : 100 = 10\%$

ja suhe $1 : 15 = 6\frac{2}{3} : 100 = 6\frac{2}{3}\ \%$.

Ülesanded.

93. Allpool on antud rida suurustepaare. Märgi iga paari puhul suuruste suhe ja avalda see võimalikult lihtsate arvude kaudu:

1. 3 kg ja 10 kg
   50 l ja 300 l
   240 m ja 40 m
   56 rmk. ja 48 rmk.

2. 1,40 m ja 25 cm
   80 p. ja 1,20 rmk.
   1 kg ja 750 g
   1 tund ja $12\frac{1}{2}$ minutit

3. 0,72 m ja 88 cm
   400 g ja $\frac{3}{5}$ kg
   25 cm^3 ja 0,875 l
   $16\frac{2}{3}$ minutit ja 1,2 tundi.

94. Avalda järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude kaudu:

1.		2.		3.	
	$198 : 55$		$91 : 65$		$85 : 102$
	$304 : 950$		$155 : 186$		$651 : 868$

95. Anna järgmised suhted võimalikult lihtsalt:

1.		2.		3.	
	$4\frac{1}{2} : 3\frac{3}{5}$		$9\frac{1}{4} : 15\frac{6}{7}$		$10{,}56 : 13{,}20$
	$6 : 7\frac{1}{2}$		$17\frac{1}{3} : 19\frac{2}{7}$		$0{,}2412 : 14{,}07$

96. Avalda järgmised suhted protsentides:

1. 15 : 100	2. 60 : 700	3. 1 : 2	4. $1 : n$
34 : 100	72 : 900	3 : 4	$a : x$
80 : 200	6 : 10	4 : 5	$c : 2u$
27 : 200	9 : 20	7 : 3	$2h : 25H$
50 : 300	13 : 50	5 : 6	$p : 1$

97. Avalda järgmised andmed kahe võimalikult väikese täisarvu suhte näol:

1. 80%	2. 100%	3. $12\frac{1}{2}$ %	4. $16\frac{2}{3}$ %
60%	75%	$3\frac{1}{3}$ %	140%
40%	25%	$6\frac{1}{4}$ %	$66\frac{2}{3}$ %
20%	10%	$8\frac{4}{5}$ %	5,6%
0%	8%	$7\frac{1}{2}$ %	0,09%

98. Klassis oli 36 õpilast, paralleelklassis 42 õpilast. Klassikursuse lõpetasid vastavalt 30 ja 36 õpilast. Missuguse klassi lõpetas suhteliselt suurem arv õpilasi?

99. Ühele põllule külvati 12,4 hl nisu, teisele 8,6 hl rukist. Esimeselt põllult oli saak 57,8 hl, teiselt 51,6 hl. Missugune siinnimetatud kahest viljasordist andis suhteliselt külviga suurema saagi?

100. Võimleja, kelle keha pikkus on 160 cm, hüppab kaugust 5,8 m, heinaritsikas kehapikkusega 25 mm hüppab 1 m, 2 mm kehapikkusega kirp hüppab 20 cm. Kes neist kolmest hüppab suhteliselt kehapikkusega suurimat kaugust?

101. Rahvaloenduse andmeil oli 1922. a. Eestis meessoost elanikke 520 239, naissoost elanikke 586 820. Aastal

1934 olid vastavad arvud 528 888 ja 597 525. Kas naissoost elanikkude suhteline ülekaal näitab kasvamist või kahanemist?

§ 24. Võrre.

Võrde mõtte selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ülesanne. Õpilane mõõdab mõõtpaelaga klassi pikkust ja leiab selle olevat 10 m, veaga mitte üle 25 mm; teine õpilane mõõdab oma töölaua pikkust ja leiab selle olevat 0,80 m, veaga mitte üle 2 mm. Kumb mõõtmissaadus on täpsem?

Lahendus. Esimese mõõtmise puhul tuleb ühe meetri kohta viga kuni $\frac{25}{10}$ ehk 2,5 mm, teise mõõtmise puhul viga kuni $\frac{2}{0,80}$ ehk samuti 2,5 mm. Seega on mõlemad mõõtmised võrdtäpsed. Murrud $\frac{25}{10}$ ja $\frac{2}{0,80}$ annavad kummagi mõõtmisvea suhte mõõtmissaadusse ja kujutavad mõõtmiste relatiivseid vigu. Need murrud on võrdsed:

$$\frac{25}{10}=\frac{2}{0,80}.$$

Võrdust, nagu kõnesolev, nimetame võrdeks.

Üldiselt defineerime võrret nõnda:

võrdeks nimetame niisugust võrdust, mille kumbki pool on kahe arvu suhe.

Näiteks võrdused

$$\frac{4}{6}=\frac{20}{30} \qquad \frac{a}{x}=\frac{x}{b} \qquad \frac{a-u}{a+u}=\frac{1}{a}$$

on võrded.

Neli arvu, millest võrre $a : b = c : d$ ehk

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

koosneb, on võrde liikmed; neist b ja c on siseliikmed, a ja d on välisliikmed.

Võrretega puutume sagedasti kokku nn. võrdeliste suuruste puhul. Olgu näiteks kaks suhkruhulka kilogrammides märgitud c ja d, nende suhkruhulkade väärtused markades a ja b. Siis a on nii mitu korda suurem b-st, kui palju korda c on suurem d-st; sümbolites:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Me ütleme, et kauba hulk ja selle väärtus on võrdelised suurused. Niisugusteks suurusteks on ka hoiusumma ja selle kantud intress, ruudu külg ja ruudu ümbermõõt, piima ruumala ja piima kaal.

Üldiselt defineerime nii:

suurusi, mille vastavate väärtuste suhted on võrdsed, nimetame võrdelisteks suurusteks.

Näiteks hapniku hulk ja vesiniku hulk vees on võrdelised suurused, sest igasuguse veehulga puhul on temas leiduva vesiniku hulga ja hapniku hulga suhe üks ja seesama, nimelt 1 : 8.

§ 25. Võrde põhiomadus.

Väidame:

võrde siseliikmete korrutis on võrdne sama võrde välisliikmete korrutisega.

Tõepoolest, olgu tegemist võrdega

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

kirjutades need murrud ühise nimetajaga saame:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd};$$

korrutades võrduse kumbagi poolt avaldisega bd, leiame:

$$ad=bc,$$

m. o. t. t.

Ümberpöördult:

kui neli arvu a, b, c, d rahuldavad tingimust $ad=bc$, siis võib neist moodustada võrde.

Tõepoolest, olgu

$$ad=bc;$$

jagades mõlemad korrutised bd-ga leiame:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

ehk taandades

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

m. o. t. t.

Praegu-tõestatud lause annab meile murdude võrdumise tingimuse: kui $ad=bc$, siis

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Võrduses $ad=bc$ on võimalik vahetada tegurite järjekorda paremal poolel, vahetada tegurite järjekorda vasemal poolel ja ka vahetada võrduse pooli. Sellest järeldub, et ühteaegu võrdega $a:b=c:d$ on kehtivad võrded

$$a:c=b:d \qquad d:b=c:a \qquad b:a=d:c.$$

See tähendab, et

võrdes võib siseliikmed isekeskis ümber paigutada;

võrdes võib välisliikmed isekeskis ümber paigutada;

võrdes võib siseliikmed võtta välisliikmeteks ja välisliikmed siseliikmeteks.

Ülesanded.

102. Kas on kehtivad järgmised võrded:

1. $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}=1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$

$80:1\frac{4}{11}=14\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$

$\frac{3}{5}:\frac{7}{15}=4\frac{5}{7}:1\frac{17}{20}$

$\frac{5}{13}:\frac{4}{15}=3\frac{3}{4}:2\frac{3}{5}$

$1\frac{5}{8}:2\frac{3}{4}=\frac{44}{165}:\frac{120}{95}$

2. $0{,}16:0{,}4=1:2{,}5$

$0{,}65:1{,}3=0{,}7:1{,}4$

$5{,}2:0{,}140=1{,}3:0{,}035$

$3{,}5:0{,}8=1\frac{17}{18}:\frac{5}{9}$

$9{,}2:2{,}9=3\frac{5}{29}:1$

103. Olgu $3x=5a$. Kirjuta arvude x ja a vaheline seos võrdena.

104. Määra järgmisist võrdeist arv x:

1. $x:10=5:8$

$1:x=4:7$

$10:32=x:9{,}6$

$0{,}5:0{,}3=0{,}6:x$

$x:1=1:4$

2. $x:a=n:b$

$a^2:x=b^2:c$

$ab:bc=x:5$

$\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=\frac{1}{p}:x$

$\frac{1}{x}:\frac{1}{a}=\frac{1}{b}:\frac{1}{2}$

105. Määra järgmisist võrdeist arv x:

1. $\frac{x}{3} = \frac{5}{27}$	**2.** $\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$	**3.** $\frac{x}{3a} = \frac{3}{4b}$
$\frac{2}{x} = \frac{3}{10}$	$\frac{a}{x} = \frac{2m}{n}$	$\frac{m}{x} = \frac{7n}{2m}$
$\frac{7}{16} = \frac{x}{5}$	$\frac{a^2}{bx} = \frac{c}{a}$	$\frac{p}{x} = \frac{q^2}{4p^2}$
$\frac{9}{24} = \frac{1}{x}$	$\frac{m^2}{np} = \frac{np}{x}$	$\frac{hk}{lm} = \frac{lm}{x}$
$\frac{x}{7} = \frac{8}{9}$	$\frac{x}{2p} = \frac{p}{3q}$	$\frac{x}{5cd} = \frac{5d}{c}$

106. Leia võrde neljas liige, kui kolm esimest liiget on vastavalt:

1.	2	5	4	2.	a	b	c
	5	4	2		$6a$	$2b$	c
	7	3	14		a^2	b^2	1
	35	20	14		ab	bc	ca
	4	8	16		a^2	ab	ab^2

§ 26. Murdude liitmine.

Ülesanne 1. Liida murrud $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ ja $\frac{5}{7}$.

Lahendus. Kõigil liidetavail on ühine nimetaja. On selge, et

2 seitsmendikku + 3 seitsmendikku + 5 seitsmendikku =
= (2 + 3 + 5) seitsmendikku

ehk teisiti:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{2+3+5}{7}.$$

Saaduse võime kirjutada lühemalt $\frac{10}{7}$ ehk $1\frac{3}{7}$.

Samal viisil saame, et

$$\frac{3a}{5N^2}+\frac{2b}{5N^2}=\frac{3a+2b}{5N^2}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude summa on murd, millel on seesama nimetaja mis liidetavailgi, lugeja aga on antud murdude lugejate summa.

Ülesanne 2. Liida murrud $\frac{12}{35}$, $\frac{29}{42}$, $\frac{61}{70}$.

Lahendus. Teisendame murrud ühenimelisteks. Ühisnimetajaks võtame väikseima võimalikest, see on, nimetajate väikseima ühiskordse. Et

$$35=5\cdot 7 \qquad 42=2\cdot 3\cdot 7 \qquad 70=2\cdot 5\cdot 7,$$

siis on ühisnimetajaks arv

$$2\cdot 5\cdot 7\cdot 3 \text{ ehk } 210$$

ja laiendustegureiks arvud

$$2\cdot 3,\quad 5\quad \text{ja}\quad 3\quad \text{ehk}\quad 6,\quad 5\quad \text{ja}\quad 3.$$

Seega

$$\frac{12}{35}+\frac{29}{42}+\frac{61}{70}=\frac{12\cdot 6}{35\cdot 6}+\frac{29\cdot 5}{42\cdot 5}+\frac{61\cdot 3}{70\cdot 3}=\frac{72}{210}+\frac{145}{210}+\frac{183}{210}=$$

$$=\frac{72+145+183}{210}=\frac{400}{210}=\frac{40}{21}=1\frac{19}{21}.$$

Samal viisil talitame täheliste murdude liitmisel.

Ülesanne 3. Liida murrud

$$\frac{f}{3a^2},\quad \frac{g}{10ab},\quad \frac{h}{15b^2}.$$

Lahendus. Ühisnimetajaks on avaldis

$$30a^2b^2$$

ja laiendustegureiks vastavalt

$$10b^2,\ 3ab,\ 2a^2;$$

seega

$$\frac{f}{3a^2}+\frac{g}{10ab}+\frac{h}{15b^2}=\frac{f\cdot 10b^2}{3a^2\cdot 10b^2}+\frac{g\cdot 3ab}{10ab\cdot 3ab}+\frac{h\cdot 2a^2}{15b^2\cdot 2a^2}=$$

$$=\frac{10b^2f}{30a^2b^2}+\frac{3abg}{30a^2b^2}+\frac{2a^2h}{30a^2b^2}=\frac{10b^2f+3abg+2a^2h}{30a^2b^2}.$$

Vajalikke abiarvutusi peast tehes võib eelseisvas võrduste ahelas kaks vahepealset lüli kirjutamata jätta.

Ülesanne 4. Liida segaarvud $4\frac{3}{8}$, $2\frac{2}{5}$ ja $1\frac{7}{10}$.

Lahendus. Arvestades seda, et

$$4\frac{3}{8}=4+\frac{3}{8},\quad 2\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5}\quad \text{ja}\quad 1\frac{7}{10}=1+\frac{7}{10},$$

leiame:

$$4\frac{3}{8}+2\frac{2}{5}+1\frac{7}{10}=(4+2+1)+\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{7}{10}\right)=$$

$$=7+\left(\frac{15}{40}+\frac{16}{40}+\frac{28}{40}\right)=7+\frac{59}{40}=7+1\frac{19}{40}=8\frac{19}{40}.$$

Kokkuvõttes:

segaarvude liitmisel liidame täisosade summa murdosade summaga.

Märkus. Mõnikord on otstarbekohane kirjutada algebralist segaavaldist murdavaldise kujul. Küsimus taandub murdude liitmisele, kui arvestame tõsiasja, et iga täisavaldist võime kujutada murdavaldisena, mille nimetaja on 1.

Näide.

$$2a+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{2a}{1}+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{2a\cdot 5c^2}{5c^2}+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{10ac^2+b^3}{5c^2}.$$

Ülesanded.

107. Teosta järgmised liitmised:

1. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ **2.** $\frac{4}{a}+\frac{5}{a}$ **3.** $\frac{-p}{q}+\frac{2p}{q}$

$\frac{8}{15}+\frac{2}{15}$ $\frac{3a}{k}+\frac{a}{k}$ $\frac{r}{10s}+\frac{1}{10s}$

$\frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}$ $\frac{5u^3}{b}+\frac{u^3}{b}$ $\frac{-3u}{5v}+\frac{2u}{5v}$

$\frac{4R}{9}+\frac{R}{9}$ $\frac{7}{2h}+\frac{k}{2h}$ $\frac{92a^2}{35y}+\frac{8ab}{35y}$

$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}$ $\frac{4m^2}{3n}+\frac{1}{3n}$ $\frac{a}{z^2}+\frac{1}{z^2}$

108. Teosta järgmised liitmised:

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **3.** $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ $\frac{1}{5a}+\frac{1}{7b}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$ $\frac{1}{4m}+\frac{1}{5n}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$ $\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{8u}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ $\frac{1}{m}+\frac{1}{z}$ $\frac{1}{2f}+\frac{1}{g}$

109. Teosta järgmised liitmised:

1. $1+\frac{a}{3}$ **2.** $a+\frac{b}{c}$

$5+\frac{b}{5}$ $m+\frac{2m+3n}{2}$

$1+\frac{2}{x}$ $4+\frac{a+x}{2}$

$4+\frac{3}{x}$ $8+\frac{a-x}{4}$

$3+\frac{a}{b}$ $2a+\frac{2a+3b}{2b}$

§ 27. Murdude lahutamine.

Ülesanne 1. Lahuta murrust $\frac{7}{9}$ murd $\frac{5}{9}$.

Lahendus. On selge, et

7 üheksandikku — 5 üheksandikku =
= (7 — 5) üheksandikku

ehk teisiti kirjutades

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9},$$

mida võime kirjutada lühemalt $\frac{2}{9}$.

Samal viisil lahutame ühenimelisi tähelisi murde.

Näide.

$$\frac{9b^3}{10H^2u}-\frac{a^2c}{10H^2u}=\frac{9b^3-a^2c}{10H^2u}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude vahe on murd, millel on seesama nimetaja mis antud murdudelgi, lugeja aga on antud murdude lugejate vahe.

Ülesanne 2. Lahuta murrust $\frac{5}{6}$ murd $\frac{3}{8}$.

Lahendus. Teisendades antud murrud ühenimelisteks, saame

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}-\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{20-9}{24}=\frac{11}{24}.$$

Samal viisil lahutame tähelisi murde.

N ä i d e 1.

$$\frac{5a}{14cu^2}-\frac{9b}{35c^2u}=\frac{5a\cdot 5c}{70c^2u^2}-\frac{9b\cdot 2u}{70c^2u^2}=\frac{25ac-18bu}{70c^2u^2}.$$

N ä i d e 2.

$$mh-\frac{2a^2b^2c}{5nh^2}=\frac{mh}{1}-\frac{2a^2b^2c}{5nh^2}=\frac{5mnh^3}{5nh^2}-\frac{2a^2b^2c}{5nh^2}=$$

$$=\frac{5mnh^3-2a^2b^2c}{5nh^2}.$$

N ä i d e 3.

$$\frac{3a-b}{2m}-\frac{2a-b}{3n}=\frac{3n(3a-b)}{6mn}-\frac{2m(2a-b)}{6mn}=$$

$$=\frac{3n(3a-b)-2m(2a-b)}{6mn}=\frac{9an-3bn-4am+2bm}{6mn}.$$

Ü l e s a n n e 3. Lahuta arvust $3\frac{7}{12}$ arv $1\frac{19}{20}$.

L a h e n d u s. Teisendades murdosad ühenimelisteks saame:

$$3\frac{7}{12}-1\frac{19}{20}=3\frac{35}{60}-1\frac{57}{60}.$$

Et 35-st pole võimalik lahutada 57, siis võtame 3-st täisühikust ühe ja peenendame ta 60-ndikeks; saame:

$$2\frac{95}{60}-1\frac{57}{60}=(2-1)+\frac{95-57}{60}=1+\frac{38}{60}=1\frac{38}{60}=1\frac{19}{30}.$$

Sõnastame oma mõttekäigu tulemuse nõnda:

segaarvude lahutamisel lahutame täisosad omaette ja murdosad omaette ning liidame tulemused; tarbe korral peenendame murruks ühe vähendatava ühtedest.

Käsiteldud juhule ei leidu vastet täheliste murdudega töötamisel.

Ülesanded.

110. Teosta järgmised lahutamised:

1. $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$	2. $\frac{2}{3x} - \frac{3}{2y}$	3. $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab}$
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$	$\frac{4}{5a} - \frac{6}{7b}$	$\frac{m}{x^2y} - \frac{n}{xy^2}$
$\frac{3}{a} - \frac{1}{2a}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$	$\frac{3x}{4a^2b} - \frac{5y}{6ab^2}$
$\frac{5}{a} - \frac{2}{3a}$	$\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$	$\frac{5n}{9m^2} - \frac{7p}{6mn^2}$
$\frac{y}{x} - \frac{z}{mx}$	$\frac{2}{b} - \frac{3}{ab}$	$\frac{3ab}{10c^2d} - \frac{2c}{15d^2}$

4. $1 - \frac{a}{3}$	5. $5 - \frac{a+x}{3}$
$5 - \frac{b}{5}$	$7 - \frac{a-x}{6}$
$1 - \frac{2}{x}$	$3m - \frac{4m+5n}{3}$
$4 - \frac{3}{x}$	$3a - \frac{8a+3c}{2b}$
$3 - \frac{2}{a}$	$4 - \frac{2+a}{3}$

111. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$	2. $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$	3. $\frac{a}{2b} + \frac{c}{d}$
$\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$	$\frac{9}{10m} + \frac{1}{n}$	$\frac{2f}{3g} - \frac{1}{5h}$
$\frac{2}{3} + \frac{7}{8}$	$\frac{2}{5p} - \frac{4}{7q}$	$\frac{u}{7} - \frac{2}{v}$
$\frac{5}{8} - \frac{2}{5}$	$\frac{11}{4x} - \frac{4}{11y}$	$\frac{m}{4} - \frac{6}{7n}$
$\frac{3}{7} - \frac{5}{6}$	$\frac{17}{2u} - \frac{13}{3v}$	$\frac{x}{4l} - \frac{1}{3m}$

112. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$	2. $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}$	3. $\frac{2m}{ar}-\frac{u}{r}$
$\frac{8}{15}+\frac{2}{5}$	$\frac{c}{3}-\frac{c}{6}$	$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}$
$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}$	$\frac{4u}{6a^2}-\frac{u}{3a}$
$\frac{9}{10}-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4q}-\frac{3}{2q}$	$\frac{5}{a^2}-\frac{4}{a^2b^2}$
$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$	$\frac{1}{a}+\frac{2}{ab}$	$\frac{7}{4x^3}+\frac{3}{x^2}$

113. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{4a+b}{8}+\frac{2a-b}{8}$	2. $\frac{5a+b}{4}-\frac{a+b}{4}$
$\frac{a+b}{10}+\frac{a-b}{10}$	$\frac{c+nd}{2}-\frac{c-nd}{2}$
$\frac{a+y}{3m}+\frac{2a-y}{3m}$	$\frac{6x-32}{2R^2}-\frac{4x-37}{2R^2}$
$\frac{5c-3u}{6n^2}+\frac{7c+12u}{6n^2}$	$\frac{58a^2-81}{27D^2}-\frac{58a^2}{27D^2}$
$\frac{2r-t}{s^2}+\frac{t-r}{s^2}$	$\frac{19N-23}{8h^3}-\frac{1+19N}{8h^3}$

114. Kirjuta järgmised segaarvud liigmurdudena:

1.	$4\frac{2}{5}$	$6\frac{11}{13}$	$14\frac{4}{15}$	$33\frac{3}{14}$	$66\frac{2}{3}$
2.	$8\frac{7}{9}$	$12\frac{5}{12}$	$19\frac{5}{18}$	$10\frac{17}{25}$	$12\frac{5}{16}$

115. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

1.	$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}$	$\frac{5}{6}+\frac{7}{15}$	$\frac{7}{9}+\frac{11}{21}$	$\frac{19}{30}+\frac{11}{18}$
2.	$\frac{7}{15}-\frac{3}{20}$	$\frac{11}{12}-\frac{5}{14}$	$\frac{17}{28}-\frac{11}{35}$	$\frac{22}{25}-\frac{7}{15}$

116. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

1. $a+\frac{1}{3}$ 2. $\frac{x+1}{2}-1$

$\frac{c}{4}-1$ $\frac{5x+a}{7}-a$

$2m-\frac{n}{5}$ $4R-\frac{Rr-7}{3r}$

$3N+\frac{N^2}{b}$ $5+\frac{3u^2-10c^2}{4u^2}$

$\frac{m}{n^2}-5n$ $\frac{7z^3-xy^2}{4xy}+2y$

117. Teosta järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{a}{2N}+\frac{q}{3N}$ 2. $\frac{4x}{ab}-\frac{5b}{ax}$

$\frac{3c}{5D}-\frac{u}{12D}$ $\frac{17}{24pq}-\frac{9}{16p^2}$

$\frac{15mn}{28}+\frac{27mn}{35}$ $\frac{3c}{14x^2u}-\frac{5d}{21xu^2}$

$\frac{5}{8x}-\frac{1}{6y}$ $\frac{18x^3}{m}+\frac{30ax^2}{2n}$

$\frac{19m}{12n}-\frac{8n}{28m}$ $\frac{5p}{15u^3}-\frac{5q}{18uv^2}$

§ 28. Murdude korrutamine.

Ütlust „Korruta arv A täisarvuga t“ mõistame nii, et tuleb võtta arv A liidetavana nii mitu korda, kui palju ühtesid on arvus t. Näiteks tähendab kirjutis

$$3\cdot 4\frac{2}{5}$$

sedasama, mis kirjutis

$$4\frac{2}{5}+4\frac{2}{5}+4\frac{2}{5}\cdot$$

Seega korrutamine täisarvuga taandub liitmisele ega paku sisuliselt uut. Küsime, kuidas mõista ütlust „Korruta arv A murruga $\frac{m}{n}$". Sellel ütlusel endises tõlgenduses pole mõtet. Sellele ütlusele sisu leidmiseks võtame järgmise ülesande.

Ülesanne. Kauba kilogrammi hind on A marka. Kui palju maksab t (täisarv) kilogrammi seda kaupa? Kui palju maksab $\frac{m}{n}$ (murdarv) kilogrammi seda kaupa?

Lahendus. Esimesele küsimusele saame vastuse: t kilogrammi kaupa maksab markades

$$t \cdot A.$$

Teise küsimuse lahendame nõnda:

1 kg	kaupa	maksab		A	marka
$\frac{1}{n}$ „	„	„	n korda vähem, seega	$\frac{A}{n}$	„
$\frac{m}{n}$ „	„	„	m korda enam, seega	$\frac{m \cdot A}{n}$	„

Esimese küsimuse lahendame, korrutades arvu A täisarvuga t; teise — leides arvust A kui tervikust osa $\frac{m}{n}$. Et mõlemad küsimused on oma laadilt samased, siis on loomulik nimetada ühe ja sama nimega ka toiminguid nende lahendamiseks. Sel kaalutlusel nimetame osa $\frac{m}{n}$ leidmist arvust A kui tervikust arvu A korrutamiseks murruga $\frac{m}{n}$. Järelikult:

korrutada arv A murruga $\frac{m}{n}$ tähendab leida arvust A kui tervikust osa $\frac{m}{n}$.

Selle definitsiooni järgi on

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{n \cdot b}.$$

See tähendab:

kahe murru korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks antud murdude nimetajate korrutis.

N ä i d e.

$$\frac{35}{78} \cdot \frac{13}{140} = \frac{35 \cdot 13}{78 \cdot 140} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude korrutamisel.

N ä i d e.

$$\frac{15a^2c^2x}{84mn^2y^3} \cdot \frac{24my^2}{35c^2} = \frac{15 \cdot 24 \cdot a^2c^2mxy^2}{84 \cdot 35 \cdot mn^2c^2y^3} = \frac{3 \cdot 2a^2x}{7 \cdot 7n^2y} = \frac{6a^2x}{49n^2y}.$$

Kui tegurina esineb segaarv, teisendame selle murruks ja arvutame korrutise, nagu ülal seletatud.

N ä i d e.

$$1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{15 \cdot 16}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6.$$

Samal viisil toimime täheliste avaldiste puhul.

N ä i d e.

$$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(k + \frac{m}{n}\right) = \frac{ac + b}{c} \cdot \frac{kn + m}{n} = \frac{(ac + b)(kn + m)}{cn}.$$

Ülesanded.

118. Teosta järgmised korrutamised ja taanda, kus võimalik, saadused:

1. $\frac{3}{4}\cdot 8$ 2. $\frac{7}{8}\cdot 12$ 3. $21\cdot\frac{5}{7}$ 4. $65\cdot\frac{19}{30}$

$\frac{5}{6}\cdot 24$ $\frac{3}{5}\cdot 15$ $39\cdot\frac{11}{13}$ $78\cdot\frac{7}{12}$

$\frac{7}{12}\cdot 60$ $\frac{9}{10}\cdot 35$ $48\cdot\frac{5}{8}$ $30\cdot\frac{23}{42}$

$\frac{11}{15}\cdot 90$ $\frac{13}{18}\cdot 27$ $85\cdot\frac{12}{17}$ $56\cdot\frac{9}{16}$

$\frac{9}{17}\cdot 112$ $\frac{11}{24}\cdot 32$ $95\cdot\frac{15}{19}$ $63\cdot\frac{25}{27}$

5. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ 6. $\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{35}$ 7. $1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{14}$ 8. $\frac{11}{12}\cdot 4\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$ $\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{55}$ $3\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{15}$ $\frac{5}{16}\cdot 7\frac{1}{9}$

$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$ $\frac{11}{13}\cdot\frac{65}{33}$ $2\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{22}$ $\frac{7}{10}\cdot 3\frac{1}{3}$

$\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}$ $\frac{17}{15}\cdot\frac{25}{6}$ $7\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}$ $\frac{8}{13}\cdot 3\frac{1}{4}$

$\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{9}$ $\frac{18}{35}\cdot\frac{77}{24}$ $9\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}$ $\frac{11}{17}\cdot 5\frac{2}{3}$

119. **Teosta järgmised korrutamised:**

1. $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{15}$ 3. $1\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{12}$

$4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}$ $\frac{0}{8}\cdot\frac{20}{49}\cdot\frac{35}{13}$ $2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}$

$7\frac{3}{5}\cdot 1\frac{6}{19}$ $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{12}{13}$ $3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 5\frac{1}{2}$

$8\frac{1}{4}\cdot 1\frac{5}{11}$ $12\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{11}{21}$ $7\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{25}$

$10\frac{4}{5}\cdot 4\frac{4}{9}$ $52\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{12}{13}$ $5\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{29}\cdot 4\frac{3}{4}$

120. Teosta järgmised korrutamised:

1. $\frac{5}{9}\cdot 21$	**2.** $12\cdot\frac{5}{9}$	**3.** $\frac{2n^2}{pq^2}\cdot np^2q^3$
$\frac{3}{x}\cdot a$	$6\cdot\frac{a}{3b}$	$3\frac{ax}{n^2}\cdot an^2x$
$\frac{c}{u^2}\cdot 2u$	$7m\cdot\frac{5}{u^2}$	$4a^2u^3\cdot\frac{3b}{8a^3u^4}$
$\frac{h}{ab}\cdot a$	$20c\cdot\frac{4ab}{5c}$	$5h^2l^3\cdot\frac{2k}{15h^2l^3}$
$\frac{4f}{g^2h}\cdot fgh$	$9hx^2\cdot\frac{a}{hx^2}$	$3\frac{1}{2}mn^2\cdot\frac{2m^2n}{7k^3}$

121. Teosta järgmised korrutamised:

1. $\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{15}$	**2.** $1\frac{2}{5}\cdot\frac{a}{n^2}\cdot\frac{3}{7}a^2n^2$
$\frac{4}{7}\cdot\frac{a}{n^2}$	$2\frac{1}{4}\frac{c^3}{x}\cdot 1\frac{1}{3}\frac{x^2}{c^2}$
$\frac{4a}{b}\cdot\frac{3c}{8a}$	$\frac{3a}{5b}\cdot\frac{10b}{21c}\cdot\frac{7c}{4a}$
$\frac{ab}{6}\cdot\frac{3a}{4b}$	$\frac{8a^2}{21b^2}\cdot\frac{14b}{15c}\cdot\frac{c}{4a^2}$
$\frac{x^2u^3}{7}\cdot\frac{14}{x^2u}$	$1\frac{3}{4}N^2u^2\cdot\frac{8u}{15N^2}\cdot\frac{3N}{4u^2}$

122. Teosta järgmised korrutamised:

1. $(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$	**2.** $\frac{5a}{16b^2}\cdot(-32ab^2c)$
$nx\cdot\left(-\frac{x}{n}\right)$	$\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right)\cdot\left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$
$(-15m^3p)\cdot\frac{3x}{10m^2p}$	$\left(-\frac{N}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{5N^3}$
$(-4at)\cdot\left(-\frac{5a^2u}{8t^2}\right)$	$\frac{-a^2x^3}{13}\cdot\frac{52c}{-ax}$
$\left(-3\frac{qw}{r}\right)\cdot qwr$	$\frac{h}{5u^2}\cdot\left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$

3. $\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(2+\frac{3}{a}\right)$

$\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(3-\frac{a}{2}\right)$

$\left(5-\frac{3}{x}\right)\left(4+\frac{2}{x}\right)$

$\left(7+\frac{2}{a}\right)\left(7-\frac{2}{a}\right)$

$\left(5+\frac{a}{x}\right)\left(5-\frac{a}{x}\right)$

4. $\left(a+\frac{m}{n}\right)\left(b+\frac{c}{d}\right)$

$\left(2+\frac{a}{5}\right)\left(x+\frac{c}{7}\right)$

$\left(k+\frac{l}{m}\right)\left(m+\frac{n}{l}\right)$

$\left(a+\frac{3}{x}\right)\left(a-\frac{3}{x}\right)$

$\left(b+\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{x}{2}\right)$

§ 29. Murdude jagamine.

Olgu antud kaks arvu a ja b. Ütlust „Jaga arv a arvuga b“ mõistame nõudena leida niisugune arv x, mis korrutamisel jagajaga b annaks jagatava a; sümbolites

$$b \cdot x = a.$$

Võtame lähemale vaatlusele juhu, et jagaja b on murd, näiteks $\frac{m}{n}$. Sel puhul on

$$\frac{m}{n} \cdot x = a,$$

jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$\frac{1}{n} \cdot x = \frac{a}{m},$$

ja korrutades arvuga n, saame

$$x = \frac{a \cdot n}{m},$$

ehk

$$x = a \cdot \frac{n}{m}.$$

Näeme:

selleks, et saada arvu a ja murru $\frac{m}{n}$ jagatist, tuleb moodustada arvu a ja murru $\frac{n}{m}$ korrutis. Murd $\frac{n}{m}$ on saadud antud murrust $\frac{m}{n}$, vahetades temas lugeja ja nimetaja. Lugeja ja nimetaja vahetamise teel saadud murdu nimetame antud murru p ö ö r d e k s. Näiteks murru $\frac{4}{7}$ pööre on $\frac{7}{4}$ ja arvu 5 ehk $\frac{5}{1}$ pööre on $\frac{1}{5}$.

Kokkuvõttes ütleme:

selleks, et jagada arvu murruga, korrutame selle arvu murru pöördega.

N ä i t e d.

1. $$\frac{22}{39}:\frac{55}{104}=\frac{22}{39}\cdot\frac{104}{55}=\frac{22\cdot 104}{39\cdot 55}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}.$$

2. $$\frac{a^2bx^3}{2nz}:\frac{ax^2}{3bz^2}=\frac{a^2bx^3}{2nz}\cdot\frac{3bz^2}{ax^2}=\frac{a^2bx^3\cdot 3bz^2}{2nz\cdot ax^2}=$$
$$=\frac{abx\cdot 3bz}{2n\cdot 1}=\frac{3ab^2xz}{2n}.$$

M ä r k u s. Skeem, mille abil tuletasime arvu a ja murru $\frac{m}{n}$ jagatise x, on tõeliselt terviku leidmise skeem, kui on teada terviku osa $\frac{m}{n}$. Seega võime öelda:

jagada arv a murruga $\frac{m}{n}$ tähendab leida tervik, mille osa $\frac{m}{n}$ on arv a.

Ülesanded.

123. Teosta järgmised jagamised ja taanda, kus võimalik, saadused:

1.	2.	3.	4.
$\frac{12}{35}:6$	$\frac{3}{5}:5$	$\frac{15}{16}:10$	$28:\frac{7}{10}$
$\frac{14}{15}:7$	$\frac{6}{7}:3$	$\frac{28}{33}:35$	$16:\frac{8}{13}$
$\frac{27}{48}:9$	$\frac{3}{8}:7$	$\frac{63}{50}:14$	$20:\frac{4}{5}$
$\frac{36}{55}:12$	$\frac{7}{16}:2$	$\frac{52}{105}:12$	$64:\frac{16}{17}$
$\frac{65}{72}:13$	$\frac{5}{21}:4$	$\frac{84}{95}:60$	$80:\frac{10}{11}$

5.	6.	7.	8.
$\frac{2}{3}:\frac{4}{7}$	$\frac{5}{24}:\frac{35}{12}$	$1\frac{14}{15}:\frac{29}{45}$	$2\frac{3}{5}:6\frac{1}{2}$
$\frac{3}{5}:\frac{6}{11}$	$\frac{27}{55}:\frac{3}{22}$	$5\frac{11}{14}:\frac{18}{35}$	$4\frac{3}{8}:2\frac{5}{8}$
$\frac{5}{16}:\frac{5}{7}$	$\frac{24}{65}:\frac{12}{91}$	$3\frac{5}{12}:\frac{5}{16}$	$5\frac{4}{9}:4\frac{2}{3}$
$\frac{9}{14}:\frac{11}{35}$	$\frac{4}{9}:\frac{8}{27}$	$9\frac{3}{8}:\frac{15}{24}$	$7\frac{7}{8}:5\frac{1}{4}$
$\frac{7}{12}:\frac{31}{24}$	$\frac{1}{3}:\frac{7}{30}$	$2\frac{3}{5}:\frac{13}{15}$	$8\frac{1}{4}:3\frac{2}{3}$

124. Teosta järgmised jagamised:

1.	2.
$\frac{b^2}{a}:3a$	$\left(-\frac{a^2}{b}\right):5n$
$\left(-\frac{2a^3}{n}\right):a^2$	$\left(\frac{-a}{b}\right):7ac^2$
$\frac{16b}{a^2}:4b^3$	$\frac{16b}{m^2}:(-4b^3)$
$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right):(-5m^2)$	$\frac{4ax}{b}:(-5ax^2)$
$1\frac{2}{5}\frac{c^2}{x}:(-14c^3x)$	$\left(-\frac{8c^2n}{3f}\right):(-4cf)$

125. Teosta järgmised jagamised:

1. $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$ **2.** $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$ $\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\frac{x^3}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$ $\left(-\frac{156}{17}\frac{a^4b^3}{m}\right) : \left(-\frac{12}{17}\frac{a^2b}{m}\right)$

$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$ $\frac{72u^5}{v^2} : 84\frac{u^3}{v^2}$

$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$ $\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$

§ 30. Murru astendamine.

Astme definitsiooni järgi on

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}}.$$

Murdude korrutamise eeskirja järgi võime võrduse parema poole asendada avaldisega

$$\frac{a \cdot a \cdot a \ldots a}{b \cdot b \cdot b \ldots b} \text{ ehk } \frac{a^n}{b^n};$$

seega

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

murru *n*-es aste on murd, mille lugeja ja nimetaja on vastavalt antud murru lugeja ja nimetaja *n*-ndad astmed.

Näide.

$$\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^3 = \frac{(3a^2)^3}{(4b^3)^3} = \frac{27a^6}{64b^9}.$$

Ülesanne.

126. Teosta järgmised murdude astendamised:

1. $\left(\frac{a}{3}\right)^2$	2. $\left(\frac{4a}{5}\right)^2$	3. $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$
$\left(\frac{b}{10}\right)^3$	$\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$	$\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$
$\left(\frac{c}{0,5}\right)^4$	$\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$	$\left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^3$
$\left(\frac{10}{d}\right)^2$	$\left(\frac{9d}{10}\right)^3$	$\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$
$\left(\frac{7}{c}\right)^3$	$\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2m^2x}\right)^3$.

§ 31. Arvutamise põhiseadused murdarvude vallas.

Eespool on antud mitmeid eeskirju tehete sooritamiseks murdarvudega. Tekib küsimus, kas need eeskirjad on kokkukõlas arvutamise põhiseadustega. Veendume mõne näite varal, et antud arvutamise eeskirjad tagavad arvutamise põhiseaduste kehtivust ka murdarvude vallas.

N ä i d e 1. Summa liitmise seadus väidab, et

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Näitame, et see seadus on kehtiv ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q} \text{ ja } \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise eeskirja järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n} + \frac{ps + qr}{qs} = \frac{mqs + nps + nqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt saame, et

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}=\frac{mq+np}{nq}+\frac{r}{s}=\frac{mqs+nps+nqr}{nqs}.$$

Et tulemused on võrdsed, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et summa liitmise seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

N ä i d e 2. Summa korrutamise seadus väidab, et

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Näitame, et see seadus kehtib ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n},\quad \frac{p}{q}\ \text{ja}\ \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise ja korrutamise eeskirjade järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{ps+qr}{qs}=\frac{m(ps+qr)}{nqs}=\frac{mps+mqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt on

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}=\frac{mp}{nq}+\frac{mr}{ns}=\frac{mps+mqr}{nqs}.$$

Et tulemused on võrdsed, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et summa korrutamise seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

Analoogiliselt võime veenduda ka teiste arvutamise põhiseaduste kehtivuses murdarvude puhul.

Et murdarvud alluvad samadele arvutamise põhiseadustele, mis täisarvudki, siis võime nii ühtesid kui teisi kokku võtta ühiseks täis- ja murdarvude vallaks ehk *ratsionaalsete arvude vallaks.*

Negatiivsete arvude loomisel positiivsete arvude kõrvale oleme *laiendanud* ennemalt tuntud arvuvalda: arvudega 1, 2, 3, ... seltsisid arvud 0 ja —1, —2, —3, ... Nende täisarvude vallas iga kahe teineteisele järgneva arvu vahe on *üks.* Murdarvude loomisega oleme *tihendanud* arvuvalda; näiteks arvude 2 ja 3 vahele on asetunud arvud $2\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{7}{10}$ ja kuitahes palju teisi.

§ 32. Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrand.

Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel toimime järgmiselt:

1. **avame sulud, kui võrrandis esineb suluavaldisi;**
2. **teisendame võrrandi liikmed ühenimelisteks;**
3. **korrutame kõik võrrandi liikmed ühise nimetajaga ja koondame;**
4. **kanname kõik otsitavaga liikmed võrrandi ühele poolele ja kõik otsitavast vabad liikmed teisele poolele;**
5. **koondame;**
6. **jagame mõlemad pooled otsitava kordajaga ja taandame saaduse;**
7. **leitud lahendit kontrollime, asetades selle algvõrrandisse otsitava asemele.**

Näide.

$$\frac{7x+18}{3}-\frac{4}{5}(x+3)=\frac{3}{2}(x+2)+\frac{2}{3}$$

$$\frac{7x+18}{3}-\frac{4x+12}{5}=\frac{3x+6}{2}+\frac{2}{3}$$

$$\text{ü. n.} = 30$$

$$\frac{70x+180}{30}-\frac{24x+72}{30}=\frac{45x+90}{30}+\frac{20}{30}$$

$$70x+180-24x-72=45x+90+20$$

$$70x-24x-45x=90+20-180+72$$

$$x=2.$$

Kontroll:

$$\frac{7\cdot 2+18}{3}-\frac{4}{5}(2+3)=\frac{3}{2}(2+2)+\frac{2}{3}$$

$$\frac{32}{3}-4=6+\frac{2}{3}$$

$$\frac{20}{3}=\frac{20}{3}.$$

Ülesanded.

127. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1$

$x+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=23$

$\frac{3x}{4}+\frac{5x}{6}=19$

$2=\frac{2x}{5}-\frac{x}{5}$

$2x+\frac{3}{4}=3x+\frac{7}{8}$

2. $2\frac{1}{2}+\frac{5x}{3}=0$

$\frac{x}{6}+\frac{x}{7}=\frac{x}{8}$

$\frac{2x}{x}-\frac{4x}{9}=31-\frac{3}{2}x$

$\frac{x}{2}-1\frac{1}{2}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

$\frac{3x}{5}+\frac{x}{6}+\frac{1}{3}=x-2$

3. $\frac{x}{2}+1=\frac{x}{3}-1$

$\frac{x}{3}-\frac{1}{6}=\frac{x}{5}-\frac{1}{4}$

$1+\frac{x}{2}=3-\left(1-\frac{x}{3}\right)$

$4+\frac{x-4}{5}=5+\frac{x-5}{4}$

$\frac{x-3}{6}=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$

4. $\frac{3}{4}(2-3x)=\frac{2}{5}(1-7x)$

$\frac{5}{2}(3x-1)=3(2x-1)$

$\frac{1}{6}(x-0{,}3)=\frac{1}{9}(2x+0{,}1)$

$4-\frac{1}{4}(1-x)=\frac{3}{8}(5-x)$

$\frac{2}{3}(2x+1)=\frac{3}{4}(2x-1)+1\frac{1}{2}$

128. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2(4x+3)-\frac{3}{4}(8x+1)=4$

$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{2}{3}(x+2)=\frac{3}{4}(x+3)$

$\frac{3}{2}(x-1)=\frac{1}{4}(5x-3)$

$\frac{1}{5}(3x-4)=\frac{1}{7}(5x-6)$

$\frac{1}{2}(3-x)=1\frac{1}{4}-\frac{3}{8}(1-x)$

2. $\frac{2x-3}{5}=\frac{x}{4}$

$\frac{x-2}{3}=\frac{x-3}{2}$

$\frac{3x+2}{4}=\frac{5x-2}{6}+1$

$\frac{2x+3}{2}-3=\frac{4x-5}{3}$

$\frac{x}{3}-\frac{x-7}{4}=\frac{x}{5}$

3. $\frac{3x}{4}-\frac{x-4}{5}=1\frac{4}{5}-\frac{x+6}{6}$

$\frac{3x-2}{4}=\frac{5x}{21}-\frac{9(8-3x)}{35}$

$\frac{x}{5}+\frac{5(3x-1)}{6}=\frac{40x-11}{15}$

$\frac{10x-1}{3}-\frac{x}{2}-\frac{8(x+4)}{9}=0$

$\frac{5x-1}{3}-\frac{x}{3}=\frac{4(x+8)}{9}$

129. Raamatukaupmees müüs 5 vihikut ja andis ühe vihiku pealekauba. Mitmeprotsendise hinnaalanduse tegi seega kaupmees vihikuid müües?

130. Tühjalt kaalus võianum $\frac{3}{4}$ kg, täidetult aga 5 korda niipalju. Mitu kilogrammi oli nõus võid?

131. Kui päriti Pythagoras'elt, mitu õpilast tal on, siis vastas ta: „Pool minu õpilasist uurib matemaatikat, neljandik looduslugu, seitsmes osa õpib vaikimist ning peale nende on mul veel 3 päris väikest poissi." Mitu õpilast tal oli? (Schwenter, a. 1636.)

132. 3 sõpra on võitnud teatava summa raha; esimene saab $\frac{1}{4}$ sellest, teine $\frac{1}{7}$, kolmas saab 17 kuldnat, mis järele jäid. Kui palju nad võitsid? (Riese, a. 1524.)

133. Demochares elas $\frac{1}{4}$ oma elueast poisikesena, $\frac{1}{5}$ noormehena, $\frac{1}{3}$ täisealise mehena ja puhkab 13 aastat oma tööst. Kui vana ta on? (Metrodorus, a. 300 ümber.)

134. Valmisriieteäri laskis riidekangast valmistada ühesuguseid ülikondi. Igasse ülikonda läks 3 meetrit riiet; riide meeter maksis 11,5 marka; lisandid igale ülikonnale maksid 12 marka; rätsep võttis tööraha 13 marka ülikonnalt. Valmis ülikonnad läksid ärile maksma kokku 476 marka. Mitu meetrit riiet oli kangas?

135. Veduri ratta ümbermõõt on 4 meetrit ja vaguni ratta ümbermõõt on 3 meetrit. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 5000 tiiru enam kui veduri ratas?

136. Missugune kapital kasvab $3\frac{1}{3}$-%-ga 9 kuu jooksul 8200 marga suuruseks?

137. Poiss palgati 1. maist 10. septembrini maale karjaseks järgmise tasu eest: prii ülalpidamine, 60 marka ja ühe ülikonna riie. Tervislikel põhjusil pidi poiss lahkuma kohalt 10. augustil ja sai tasuks lubatud ülikonnariide ja 30 marka. Kui kallilt hinnati ülikond?

138. Samal ajal, kui alevikust sõitis omnibus linna kiirusega 30 km tunnis, sõitis samasse linna talust, mis asetseb sama tee ääres 10 km linna poole, jalgrattur kiirusega 12 km tunnis. Kui kaugel alevikust jõudis omnibus jalgratturile järele?

139. Alevikust ehitatakse linna uus telefoniliin. Kui postid üles seada 50-meetrise vahega, siis tuleb valmismuretsetud postidest 60 tükki puudu; kui aga postide vahemaad suurendada 10 meetri võrra, siis jääb 80 posti üle. Kui kaugel asetseb alevik linnast?

140. Jääkelder tuleb jääga täita. Üks tööliste paar lubas selle töö teha 6 päevaga. Tööle võeti aga veel teine tööliste paar ja nüüd valmis töö 4 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud tööks, kui oleks töötanud ainult teine tööliste paar?

141. Antud töö jõuab mees lõpetada 10, naine aga 15 päevaga. Tööle asusid 2 meest ja kahe päeva pärast veel 4 naist. Mitu päeva kulub töö lõpetamiseks?

§ 33. Ülesandeid kordamiseks.

142. Tara ehitamiseks kulub n latti, kui need paigutada a-sentimeetriste vahedega. Mitu latti kulub tara ehitamiseks, kui lattide vaheks valida b sentimeetrit?

143. Magustoidu valmistamise eeskiri nõuab m muna kohta j grammi jahu. Kui palju jahu tuleb võtta n muna kohta?

144. Joonisel on kujutatud torn, mille kõrgus on H meetrit ja läbimõõt D meetrit. Torni läbimõõt on kujutatud lõiguna d millimeetrit. Kui pikk lõik kujutab joonisel torni kõrgust?

145. Ajalehekandja teenib nädalas 12,60 marka, varustades 90 tellijat. Mitme tellija puhul ta teeniks nädalas 14 marka?

146. Perenaine ostis p pakki tikke ja maksis nende eest s penni. Kui palju maksis toos tikke, kui pakis on n toosi?

147. Õpilane ostis p raamatut paberit, makstes s penni. Kui kallis oli keskmiselt poogen paberit, kui ühes raamatus on 24 poognat?

148. n grossi niidirulle maksab s penni. Avalda üksiku niidirulli hind, teades, et 1 gross on 12 tosinat.

149. Ristkülikukujulise põranda mõõtmed on a ja b meetrit. Kui pikk riba linoleumi kulub põranda katteks, kui linoleumiriba laius on c meetrit?

150. Ristkülikukujulise põranda värvimine maksis a marka. Kui kallis oli keskmiselt ruutmeetri värvimine, kui põranda mõõtmed on p ja q meetrit?

151. Risttahukakujulise maja ehitus maksis k marka. Kui kallis tuli keskmiselt 1 kuupmeeter tema ruumist, kui maja mõõtmed on a, a ja b meetrit?

152. Ettevõtte laiendamiseks on tarvis p marka, millest q marka on juba koos. Puuduoleva summa otsustavad anda ettevõtte N osanikku, makstes igaüks sama suure summa. Kui palju peab maksma iga osanik?

153. Järjesta järgmised murrud nende suuruse järgi:

1. $\frac{4}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3}{7}$ **2.** $\frac{3}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{11}{16}$

3. $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{11}$ **4.** $\frac{2}{3}$ $\frac{16}{25}$ $\frac{5}{8}$

154. Lihtsusta vahe $\left(1\frac{7}{18}-\frac{2c}{3}\right)-\left(2\frac{5}{6}-\frac{7c}{9}\right)$.

155. Liida murrud $\frac{q+2}{2}$, $\frac{3q+4}{5}$ ja $\frac{9q-8}{10}$.

156. Liida avaldised $\frac{4u+7}{6}$ ja $\frac{4}{15}(2u-1)$.

157. Lihtsusta avaldis $\frac{5}{24}+\frac{7t+5}{6}-\frac{5t-7}{12}$.

158. Jaga avaldis $\frac{2}{3}\cdot\frac{A}{l}$ avaldisega $\frac{3}{4}\cdot\frac{V}{lb}$.

159. Jaga avaldis $\left(\frac{2m}{3x}\right)^3$ avaldisega $\left(\frac{8n}{9x}\right)^2$.

160. Kui suur on täisnurga ja 60^0-se nurga suhe?

161. Anna järgmised suhted võimalikult lihtsate arvude kaudu:

$162:27$ $\quad 13\frac{7}{8}:4\frac{5}{8}$ $\quad 62{,}8:1{,}57$

162. Kirjuta järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude kaudu:

$7455:4260$ $\quad 6912:5184$ $\quad 10\,265:14\,371$

163. Gümnaasiumi sisseastumiskatseile ilmus 560 meeskandidaati ja 320 naiskandidaati. Esimestest sooritasid katsed 528, teistest 290. Kes olid edukamad, kas mees- või naiskandidaadid?

164. Otsusta, kas on kehtivad järgmised võrded:

$\frac{323}{437}=\frac{17}{23}$ $\quad \frac{231}{323}=\frac{13}{19}$ $\quad \frac{697}{527}=\frac{41}{21}$

165. Määra a, teades, et $\frac{W}{g}=\frac{F}{a}$.

166. $m\%$ teatavast rahasummast on a marka. Mitu marka on $n\%$ samast rahasummast?

167. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x - 1$

2. $1 - \frac{x}{3} = x - \frac{5}{3}$

3. $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} - \frac{4x}{5} = 6\frac{1}{2}$

4. $1 - \frac{x}{2} = \frac{3}{4}(x + 3)$

5. $\frac{2}{3}\left(\frac{3x}{4} + \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{18}$

6. $5 + \frac{3}{5}(3x - 5) = -\frac{2}{3}(2x - 3)$

7. $x + \frac{x+2}{3} = 5 + \frac{x+3}{2}$

8. $\frac{1-x}{2} + \frac{1-2x}{3} = \frac{1-3x}{4}$

9. $\frac{2x+1}{4} + \frac{4x}{5} = x + 2\frac{1}{2}$

10. $\frac{x-2}{2} - \frac{x-4}{4} = \frac{x-8}{8}$

11. $(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4}) = (x - \frac{1}{6})(x + 3)$

12. $2 + \frac{x-1}{2} = 10 - \frac{3x-1}{5}$

13. $(x + 4)(x - 4) = (x - 2)^2$

14. $(1 + x)^3 = x(3x + x^2) + 10$

15. $\frac{3x-1}{4} + \frac{4x-3}{6} + \frac{5x-7}{28} + 1 = 0$

168. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $(2x+3)^2-(5-2x)^2=3x+71$

2. $(2x+5)(x+2)-(x+3)(x-1)=x(x+20)+13$

3. $(x-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})-\frac{1}{2}(x-2\frac{1}{3})$

4. $(4+\frac{x}{2})^2+(3-\frac{x}{2})(3+\frac{x}{2})=0$

5. $(\frac{x}{2}-3)^2-(\frac{x}{3}-2)^2-\frac{5}{36}x^2=0$

169. Kaks poissi jooksid võidu, kusjuures üks andis teisele 100 m ette. Üks poistest jooksis kiirusega 11 km tunnis, teine 9 km tunnis. Mitme minutiga jõudis esimene teisele järele?

170. Karjapoiss palgati viieks kuuks ja palgaks lubati paar saapaid ja 55 marka raha. Poiss läks aga kolme kuu pärast ära, olles saanud kätte saapad ja 29 marka raha. Kui kallilt arvestati saapapaar?

171. Anum, mille põhjas on auk, täitub veega kraanist 8 minutiga. Täis anum jookseb põhjas oleva augu kaudu tühjaks 24 minutiga. Mitme minutiga täitub anum kraanist, kui auk anuma põhjas sulgeda?

172. Isa pärandas oma neljale pojale 16100 marka tingimusega, jaotada pärand nii, et alates vanemast pojast iga järgmine poeg saaks $\frac{1}{3}$ võrra rohkem kui eelmine. Kui palju päris iga poeg?

Peatükk IV.

Ruutjuur. Kuupjuur.

§ 34. Seose $y = x^2$ graafiku kasutamine arvutamisel.

Olgu antud ruut, mille külg on x sentimeetrit. Selle ruudu pindala y on siis x^2 ruutsentimeetrit:

$$y = x^2.$$

Viimane võrdus kujutab seost ruudu külje ja ruudu pindala vahel. Uurime seda seost lähemalt, arvestamata tema päritolu.

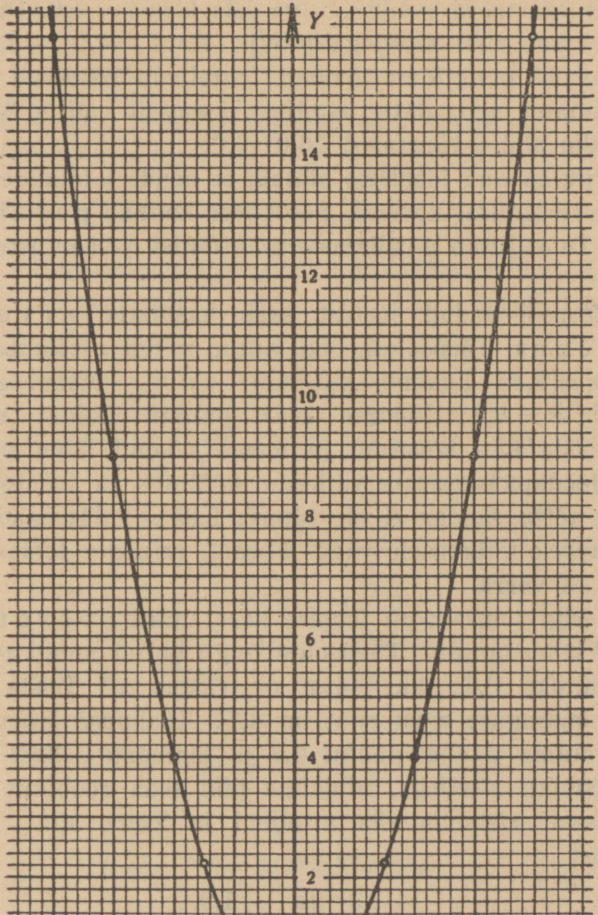
Andes x-le rea väärtusi, näiteks 0; 0,4; 0,8;... ja arvutades nende väärtuste ruudud, saame kokkukuuluvate x ja y väärtuste tabeli:

x	0	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
y	0	0,16	0,64	1,0	2,25	4,0	9,0	16,0

Näeme, et igale x-väärtusele vastab oma kindel y-väärtus.

Andes x-le väärtused —0,4; —0,8;... saame, nagu enneminigi, y jaoks 0,16; 0,64;...

Arvude x ja y vahelist seost saab esitada näitlikumal viisil, kujutades y-väärtuste muutumist graafiliselt. Selleks võtame lehe millimeeter-paberit, valime x-telje, võtame sellel alguse O, valime sobiva kujutamisühiku ja kujutame



Parabool.

x-teljel väärtused —4,0; ... 0; 0,4; 0,8; ... 4,0. Punktist O tõmbame risti x-teljega y-telje. Arve —4,0; —3,0; ... kujutavaist punktidest tõmbame y-teljega rööbikud sirged ja kujutame neil, alates x-teljest, kohaselt valitud kujutamisühiku abil y-väärtused 16,0; 9,0; ...

Pilk saadud joonisele näitab, et nende y-lõikude lõpud asetsevad ladusal kõveral. See kõver kannab parabooli nime. Ta kujutab y-väärtuste muutumist x-väärtuste muutudes.

Eespool-saadud joonist saab kasutada arvutusabinõuna. Tõepoolest, olgu antud mingi x-väärtus, näiteks $x = 2,8$; küsime, kui suur on x^2. Otsime x-teljel punkti $x = 2,8$; liigume seda punkti läbivat ristsirget mööda üles kõverani ja loeme saadud lõigu pikkuse 7,8. Möödapääsematute väikeste mõõtmis- ja joonestamisvigade tõttu saadus ei ole täpne: $2,8^2 = 7,84$; saadus on aga täpsele väärtusele väga lähedal, erinedes temast kõigest 0,04 võrra.

Veelgi tulusam on joonise kasutamine pöördülesande lahendamisel. Tõepoolest, olgu antud mingi y-väärtus, näiteks 3,7; kui suur on vastav x? Teiste sõnadega: missuguse arvu ruut on 3,7? Küsimuse lahendamiseks võtame y-teljel punkti 3,7 ja tõmbame sellest punktist rööbiku x-teljega, nihkume piki seda rööbikut kõverani, sealt ristsihis alla x-teljeni ja loeme siin kaks väärtust

$$-1,9 \quad \text{ja} \quad +1,9.$$

Kontroll annab

$$(-1,9)^2 = (+1,9)^2 = 3,61,$$

mis on antud väärtusest umbes 0,1 võrra väiksem.

Esimeses ülesandes oli antud x, otsiti selle ruutu y; tehet, mille abil see y saadakse, nimetatakse x-i ruudu l e i d m i s e k s. Teises ülesandes oli antud x-i ruut y; otsiti arvu x; tehet, mille abil see x saadakse, nimetatakse y-i r u u t j u u r e l e i d m i s e k s.

Leida ruutjuur arvust A tähendab leida niisugune arv, mille ruut on võrdne A-ga.

Ülesanded.

173. Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määra järgmiste arvude ruudud:

1.	1,6	0,5	1,8	2,5	2,9
2.	3,2	3,8	4,2	4,4	4,5

174. Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määra järgmiste arvude ruutjuured:

1.	1,44	1,56	1,69	1,90	2,00
2.	2,50	2,90	3,24	3,60	4,40
3.	5,00	6,52	7,00	7,50	8,40

175. Kui pikk peab olema ruudukujulise näitelina äär, et lina pindala oleks 10 ruutmeetrit?

176. Ristküliku mõõtmed on 3 ja 5 sentimeetrit. Kui pikk on selle ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg?

§ 35. Ruutjuure sümbol.

Nõudeid liita, lahutada, korrutada ja jagada me oleme märkinud sümbolitega $+$, —, $\cdot$, : ; nõuet „leida ruutjuur arvust A“ märgime sümboliga $\sqrt{A}$, loe: ruutjuur arvust A.

Oleme aga kirjutisi

$$a + b \qquad a - b \qquad a \cdot b \qquad a : b$$

mõistnud mitte ainult nõuetena toimetada liitmise, lahutamise jne. tehted, vaid ka sümbolitena nende tehete tulemuste tähistamiseks. Nii tähendab näiteks kirjutis $a+b$ arvude a ja b summat, kirjutis $a \cdot b$ arvude a ja b korrutist. Samuti näeme ka sümbolis

$$\sqrt{A}$$

mitte ainult ruutjuure leidmise nõuet, vaid ka selle tehte tulemuse tähist. Nii kirjutame:

$$\sqrt{16}=4 \qquad \sqrt{49}=7 \qquad \sqrt{3{,}7}\approx 1{,}93.$$

Summa, vahe, korrutise ja jagatise määramisel jõudsime ikka ühele ja ainsale tulemusele. Ruutjuure määramine seevastu viib meid alati kahele tulemusele. Tõepoolest, nõutagu arvu, mille ruut on A. Märgime otsitava tähega x; siis peab olema

$$x^2=A.$$

Rahuldagu seda nõuet positiivne arv a, nii et

$$a^2=A;$$

siis rahuldab seda nõuet ka negatiivne arv $-a$; tõepoolest

$$(-a)^2=a^2,$$

seega ka

$$(-a)^2=A.$$

Niisiis peaksime kirjutama

$$\sqrt{A}=a \quad \text{ja ka} \quad \sqrt{A}=-a.$$

See tähendab aga, et sümbolil $\sqrt{A}$ on kaks tähendust. Kõiki seni tarvitusel olnud kirjutisi, nagu

$$A+2, \qquad A-2, \qquad 2A, \ \frac{A}{2}\,, \qquad A^2$$

tuli ikka mõista vaid ü h e s tähenduses. Tahtes ka sümbolit

$$\sqrt{A}$$

mõista ü h e s a i n s a s tähenduses, lepime kokku tähistada sellega ikka vaid võrrandi $x^2 = A$ p o s i t i i v s e t lahendit. Nii kirjutame, et võrrandi

$$x^2 = 64$$

lahendid on

$$x_1 = \sqrt{64} = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{64} = -8\ ^*).$$

§ 36. Ruutjuure leidmine ruutude tabeli abil.

Ü l e s a n n e. Olgu kasutada arvude ruutude tabel:

x	1	2	3	...	10	11	12	...	18	19	20	..
x^2	1	4	9	...	100	121	144	...	324	361	400	...

Leia ruutjuur arvust 350.

L a h e n d u s. Arv 350 asetseb 324 ja 361 vahel. Järelikult otsitav ruutjuur asetseb 18 ja 19 vahel. Võime teda kirjutada kujul $18 + \alpha$, vaadeldes arvu α p a r a n-

---

*) Olgu tähendatud, et teaduslikus kirjanduses sümbolit $\sqrt{A}$ sageli mõistetakse k a h e s e n a; sel puhul võrrandi $x^2 = 64$ lahendid esinevad kujul

$$x = \sqrt{64},$$

ehk, täielikumalt,

$$x_1 = |\sqrt{64}| = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -|\sqrt{64}| = -8.$$

On kokkuleppe asi, kuidas mõista üht või teist sümbolit.

d u s e n a, mis tuleb lisandada arvule 18 ruutjuure õige väärtuse saamiseks. Ülevaate kergendamiseks kirjutame abitabeli:

x	$y=x^2$
18	324
$18+\alpha$	$350=324+26$
19	361

Näeme: x-i kasvades α võrra y kasvab 26 võrra, x-i kasvades 1 võrra y kasvab 37 võrra. K u i x- ja y - k a s - v u d o l e k s i d v õ r d e l i s e d, siis oleks

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{26}{37}.$$

Tegelikult on see vaid ligikaudu nõnda; seepärast

$$\frac{\alpha}{1}\approx\frac{26}{37}\approx 0{,}7$$

ja seega parandatud x-i väärtus on 18,7.

Kontroll: saadud arvu ruutu tõstes leiame $18{,}7^2 = 349{,}69$, mis erineb antud arvust 350 umbes 0,3 võrra.

Niisiis

$$\sqrt{350}\approx 18{,}7.$$

Võtet veel kord rakendades saaksime nõutava ruutjuure suurema täpsusega.

Käsiteldud võtet nimetatakse võõrkeelse sõnaga i n t e r p o l a t s i o o n i k s.

M ä r k u s. Tavaliselt abitabeleid välja ei kirjutata. Vajalikud arvutused toimetatakse, kus võimalik, peast.

Ülesanded.

177. Kasutades interpolatsioonivõtet leia ruutude tabeli abil ruutjuured järgmistest arvudest veaga alla 0,1:

1.	3	13	39	72	110
2.	5	15	44	77	128
3.	7	17	51	80	139
4.	8	18	59	93	146
5.	10	20	63	99	180

178. Ringi raadius on 3,5 sentimeetrit. Kui pikk on selle ringiga pindvõrdse ruudu külg?

179. Kasutades ruutude tabelit leia ruutjuured järgmistest arvudest, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis ligikaudu, veaga alla üht:

1.	9	2.	31	3.	59	4.	81
	13		36		64		85
	19		42		69		90
	25		49		71		92
	28		54		76		98

§ 37. Ruutjuure leidmise algoritm *).

Ruutjuure leidmise algoritm on võte ruutjuure kiireks määramiseks. Võtte käsitlemist toimetame kahes osas: esimeses selgitame, mitu numbrit on ruutjuures, teises —

*) Sõna *algoritm* on tuletatud matemaatik Al-Khwārizmī nimest ning tähendab arvutuseeskirja.

Keskajal nimetati *algorithmus*'eks araablasilt õpitud arvutamiskunsti nn. araabia numbritega; uue arvutusviisi tundjaid nimetati algoritmikuiks, vastandina abatsistidele, kelleks nimetati arvutuslaual (*abacus*) arvutavaid aritmeetikuid.

missugused on ruutjuure numbrid. Asume esimese küsimuse käsitlemisele.

Iga ühekohaline arv a rahuldab tingimust

$$1 \leqslant a < 10\ ^{*)};$$

sellest järeldub, et

$$1 \leqslant a^2 < 100;$$

see tähendab, et ühekohalise arvu ruut on ühe või kahekohaline arv. Iga kahekohaline arv b rahuldab tingimust

$$10 \leqslant b < 100;$$

sellest järeldub, et

$$100 \leqslant b^2 < 10000;$$

see tähendab, et kahekohalise arvu ruut on kolme- või neljakohaline arv. Mõttekäiku üldistades näeme, et n-kohalise arvu ruudul on kas $2n - 1$ või $2n$ numbrit. Ümberpöördult: ruutjuur arvust, millel on $2n - 1$ või $2n$ numbrit, on n-kohaline arv.

Siit järeldub võte numbrite arvu määramiseks arvu ruutjuures:

rühmitame juuritava arvu numbrid, alates ühelistega, kahenumbrilisteks rühmadeks, kusjuures viimasesse rühma võib jääda ka üksainus number; siis tekkinud numbrirühmade hulk annab ruutjuure kohtade arvu.

N ä i d e. $\sqrt{190873454}$ on viiekohaline arv. Tõepoolest, juuritava arvu numbrite rühmitamine annab

$$1'90'87'34'54,$$

seega 5 rühma.

Asume nüüd ruutjuure numbrite otsimisele. Selgitame küsimust näitel $\sqrt{1369}$. Rühmitades juuritava arvu numbreid, saame 13'69; numbrirühmi on 2, seega $\sqrt{1369}$

*) „⩽“ tähendab: on väiksem või võrdne.

on k a h e k o h a l i n e a r v. Olgu temas kümnelisi x ja ühelisi y. Otsitav arv esineb siis kujul

$$10 \cdot x + y$$

ja tema ruut on

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2,$$

järelikult

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 1369.$$

Kirjutades selle võrduse kujul

$$x^2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 13 \cdot 100 + 69$$

näeme, et paremal poolel sadade arv on 13, vasakul poolel aga x^2, milledele võivad lisanduda veel mõned sajad liikmeist $2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2$. Seega x^2 ei saa olla suurem kui 13. Et x^2 on r u u t a r v, 13 aga seda ei ole, siis ei saa x^2 olla võrdne 13-ga; seega peab olema $x^2 < 13$. Võtame x-i väärtuseks s u u r i m a arvu, mis viimast võrratust rahuldab. Et suurimaks ruutarvuks, mis arvude reas seisab enne 13, on 9, siis $x^2 = 9$ ja otsitav kümneliste arv $x = \sqrt{9}$, ehk $x = 3$.

Asetades võrduses

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 1369$$

x-i asemele 3, saame

$$100 \cdot 9 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 1369,$$

ehk

$$2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 469,$$

ehk

$$2 \cdot 3 \cdot y \cdot 10 + y^2 = 46 \cdot 10 + 9.$$

See võrdus lubab määrata tundmatut y.

Selleks arutame nii: vasakul poolel on näha $2 \cdot 3 \cdot y$ kümmet; neile võivad lisanduda veel mõned kümned arvust y^2; seega igal juhul

$$2 \cdot 3 \cdot y \leqslant 46, \text{ ehk } y \leqslant \frac{46}{2 \cdot 3}, \text{ ehk } y \leqslant 7;$$

see tähendab, et y on 7 või sellest väiksem. Missugune see y tõepoolest on, seda otsustame proovimise teel, alates suurimast võimalikust väärtusest. Võttes katseks $y = 7$, leiame

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + 7^2 = 420 + 49 = 469,$$

just nagu peab olema; seega $y = 7$, $10x + y = 37$ ja

$$\sqrt{1369} = 37.$$

Üheliste leidmist võib kergendada tähele pannes, et neid määravat võrrandit

$$2 \cdot 3 \cdot y \cdot 10 + y^2 = 469$$

saab kirjutada kujus

$$(2 \cdot 3 \cdot 10 + y) \cdot y = 469.$$

See ütleb: kui kahekordsele kümneliste arvule juurde kirjutame üheliste arvu ja tulemuse üheliste arvuga korrutame, peame saama 469. Kümneliste arv oli 3; selle kahekordne on 6. Võttes juurdekirjutatavaks arvuks 7, saame arvu 67, mis korrutamisel 7-ga annab $67 \cdot 7 = 469$, nagu peab olema.

Tööd võib korraldada ülevaatlikult alljärgnevate skeemide järgi, millest esimeses on kasutatud täielikumat, teises aga lühemat kirjutusviisi:

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{1369} = 30 + 7 \\ & \phantom{\sqrt{}}900 \\ \hline 2 \cdot 30 + 7 & \phantom{\sqrt{}}469 \\ 7 & \phantom{\sqrt{}}469 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1369} = 37} \\ \multicolumn{2}{l}{\phantom{\sqrt{}}9} \\ \hline 67 & 469 \\ 7 & 469 \end{array}$$

Võte lubab üldistamist juhule, kus ruutjuur on 3-, 4-, 5- jne. kohaline arv.

N ä i d e. Leiame $\sqrt{289567}$.

Rühmitame juuritavas numbrid paarikaupa, sammudes paremalt poolt vasakule; saame

$$28'95'67;$$

siit näeme, et otsitav ruutjuur on kolmekohaline arv. Selle leidmine võib toimuda nii, nagu allpool näha:

$$\begin{array}{l}\sqrt{28'95'67} = 538 \text{ puudusega} \\ \quad\; 25 \qquad\quad \text{või } 539 \text{ liiaga.}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
103 & 395 \\
3 & 309 \\ \hline
1068 & 8667 \\
8 & 8544 \\ \hline
 & +123
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r}
1069 & 8667 \\
9 & 9621 \\ \hline
 & -954
\end{array}$$

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

M ä r k u s. Eelmises näites ruutjuure leidmisel me ei saanud otsitavat juurt t ä p s e l t; leidsime ainult kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mille vahel asetseb otsitav ruutjuur:

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Neid kaht arvu nimetame otsitava ruutjuure **l ä h e n d e i k s**; esimene neist on **p u u d u s e g a**, teine **l i i a g a**.

Arvude 538 ja 539 vahe on 1. Et $\sqrt{289567}$ asetseb nende arvude vahel, siis ta erineb kummastki vähem kui ühe võrra. Seega võrduste

$$\sqrt{289567} = 538 \quad \text{ja} \quad \sqrt{289567} = 539$$

viga ei küüni üheni.

§ 38. Ruutjuure leidmine etteantud täpsusega.

Leida arvu a ruutjuur veaga alla $\frac{1}{n}$ tähendab leida 2 arvu, mille vahe on $\frac{1}{n}$ ja mille ruutude vahel asetseb arv a.

Kõnesolevaid arve võime tähistada $\frac{x}{n}$ ja $\frac{x+1}{n}$. Nad peavad rahuldama nõuet, et

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Korrutades võrratuste kõiki liikmeid ühe ja sama arvuga n^2, saame

$$x^2 < an^2 < (x+1)^2.$$

Arvud x ja $x+1$ erinevad 1 võrra ja nende ruutude vahel asetseb arv an^2. Seega on meie ülesanne taandunud arvu an^2 ruutjuure leidmisele veaga alla 1. Viimast ülesannet oskame aga juba lahendada ruutjuure leidmise algoritmiga.

N ä i d e. Leiame ruutjuure arvust 2 veaga alla 0,0001.

Meie juhul on $a = 2$, $n = 10\,000$; seega

$$n^2 = 100\,000\,000 \quad \text{ja} \quad an^2 = 200\,000\,000.$$

Ruutjuure leidmise algoritm annab:

$$\sqrt{200000000} = 14142 \text{ puudusega}$$
$$\text{või } 14143 \text{ liiaga.}$$

Jagades leitud arvud 10 000-ga saame:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \text{ puudusega}$$
$$\text{või } 1{,}4143 \text{ liiaga.}$$

Kontroll annab:

$$1{,}4142^2 = 1{,}99996164;$$

see on väiksem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0001 võrra;

$$1{,}4143^2 = 2{,}00024449;$$

see on suurem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0003 võrra.

§ 39. Irratsionaalarv.

Ülesanne. Kui pika peab võtma ruudu külje, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus x meetrit. Siis on tema pindala x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on 3^2, 4^2, 5^2 jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murruga $\frac{a}{b}$. Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on, taandatud kujul; sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algteguriteks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \ldots n}{p \cdot q \cdot r \ldots v};$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \ldots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \ldots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega peab meie nõudes peituma viga. See tähendab, et **ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.**

Ülaltoodust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2 = 2$ **täpselt** rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada **ligikaudu**, ja pealegi nii hästi kui iganes soovime. Rakendades ruutjuure leidmise algoritmi ja järk-järgult viga vähendades näeme, et

$$1 < x < 2$$
$$1{,}4 < x < 1{,}5$$
$$1{,}41 < x < 1{,}42$$
$$1{,}414 < x < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < x < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < x < 1{,}41422$$
jne.

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasempoolses tulbas seisavad x-i lähendid puudusega, parempoolses tulbas x-i lähendid liiaga. Vastavate lähendite viga järjest väheneb: esimeses reas ei küüni viga 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad meid x-i väärtusele:

$$x = 1{,}41421\ldots$$

Selles kirjutises numbrite jada e i l õ p e.

Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespool-tõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x l õ p u t a k ü m n e n d m u r d. Seda lõputa kümnendmurdu pole võimalik kirjutada ühegi hariliku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Täisarve ja harilikke murde nimetasime koos ratsionaalseteks arvudeks.

Arve, mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetame irratsionaalseteks arvudeks.

Murru 1,41421... saamislugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1{,}41421\ldots)^2 = 2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputa kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Üldiselt:

kujutagu sümbol $\sqrt{A}$ ratsionaalset või irratsionaalset arvu, ikka on $(\sqrt{A})^2 = A$.

Nagu $\sqrt{2}$, nii kujutavad ka $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ irratsionaalseid arve.

§ 40. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega.

Omal ajal laiendasime arvude valda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalda murdarvudega ja saime nii ratsionaalsete arvude valla. Irratsionaalsete arvude loomisega ratsionaalsete arvude vahele tihendame arvuvalda veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

$$-1, \quad -5, \quad -7\frac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid nagu

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5\frac{1}{2}},$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas. On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka irratsionaalsete arvude puhul. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud moodustavad koos reaalarvude valla.

Ülesanded.

180. Kasutades ruutjuure leidmise algoritmi määra järgmiste juurte väärtused:

1. $\sqrt{256}$	2. $\sqrt{1089}$	3. $\sqrt{4096}$
$\sqrt{361}$	$\sqrt{1369}$	$\sqrt{4761}$
$\sqrt{484}$	$\sqrt{1936}$	$\sqrt{5776}$
$\sqrt{676}$	$\sqrt{2401}$	$\sqrt{6561}$
$\sqrt{841}$	$\sqrt{3025}$	$\sqrt{7396}$

181. Kasutades ruutjuure leidmise algoritmi määra järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis veaga alla üht:

1. $\sqrt{2809}$	2. $\sqrt{112896}$	3. $\sqrt{1752976}$
$\sqrt{16641}$	$\sqrt{582169}$	$\sqrt{5527201}$
$\sqrt{42849}$	$\sqrt{654481}$	$\sqrt{15186609}$
$\sqrt{45369}$	$\sqrt{879844}$	$\sqrt{228795876}$
$\sqrt{90601}$	$\sqrt{931225}$	$\sqrt{100060009}$

182. Leia järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, täpselt; kui mitte, siis ligikaudu veaga alla üht. Kontrolli tulemusi.

1. $\sqrt{3136}$	2. $\sqrt{111556}$	3. $\sqrt{1755625}$
$\sqrt{17161}$	$\sqrt{589824}$	$\sqrt{5531904}$
$\sqrt{42025}$	$\sqrt{651249}$	$\sqrt{20966741}$
$\sqrt{44944}$	$\sqrt{881721}$	$\sqrt{176517796}$
$\sqrt{91809}$	$\sqrt{918521}$	$\sqrt{100080016}$

183. Leia järgmiste juurte väärtused kümnetuhandikeni:

1. $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$
2. $\sqrt{13}$ $\sqrt{19}$ $\sqrt{29}$ $\sqrt{37}$ $\sqrt{41}$

184. Leia järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis ligikaudu veaga alla 0,0001:

1.	2.	3.
$\sqrt{3{,}61}$	$\sqrt{19{,}0969}$	$\sqrt{0{,}6489}$
$\sqrt{9{,}99}$	$\sqrt{235{,}6981}$	$\sqrt{0{,}494209}$
$\sqrt{53{,}37}$	$\sqrt{9{,}740769}$	$\sqrt{0{,}09102289}$
$\sqrt{77{,}45}$	$\sqrt{4774{,}44}$	$\sqrt{0{,}00857476}$
$\sqrt{83{,}22}$	$\sqrt{678{,}72}$	$\sqrt{0{,}00036782}$

185. Leia järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, täpselt; kui mitte, siis ligikaudu nelja kohaga koma järel:

1.	2.	3.
$\sqrt{5{,}34}$	$\sqrt{17{,}0748}$	$\sqrt{0{,}9956}$
$\sqrt{7{,}89}$	$\sqrt{145{,}0378}$	$\sqrt{0{,}434241}$
$\sqrt{63{,}73}$	$\sqrt{5{,}149470}$	$\sqrt{0{,}01703045}$
$\sqrt{82{,}46}$	$\sqrt{473{,}506}$	$\sqrt{0{,}00190969}$
$\sqrt{91{,}37}$	$\sqrt{8738{,}02}$	$\sqrt{0{,}000634582}$

186. Leia järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis ligikaudu nelja kohaga koma järel:

1.	2.	3.
$\sqrt{32400}$	$\sqrt{96100}$	$\sqrt{980100}$
$\sqrt{48400}$	$\sqrt{28900}$	$\sqrt{291600}$
$\sqrt{200}$	$\sqrt{500}$	$\sqrt{5200}$
$\sqrt{130}$	$\sqrt{250}$	$\sqrt{720000}$
$\sqrt{1000}$	$\sqrt{2000}$	$\sqrt{300000}$

§ 41. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest.

Näitame, et

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Väite tõestamiseks oletame vastupidist, nimelt, et

$$\sqrt{ab} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Võrratuse kummalgi poolel seisavad positiivsed arvud. Kui kaks positiivset arvu pole võrdsed, siis pole võrdsed ka nende ruudud. Seega

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$$

ehk

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$$

ehk

$$ab \neq a \cdot b,$$

mis on võimatu. Tehtud oletusest järeldub võimatu tulemus; järelikult on see oletus vale ja seega meie väide õige.

Samal viisil saame näidata, et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestatud võrdustes võib vahetada pooled. Nii tõestatud võrdused kui ka need, mis saame poolte vahetamisel, leiavad kasutamist avaldiste teisendamisel, eriti teguri juuremärgi alla toomisel ja teguri juuremärgi ette toomisel.

Olgu näiteks tegemist juurega $\sqrt{n^2a}$. Tõestatud lause põhjal saame

$$\sqrt{n^2a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = n\sqrt{a}.$$

Samu võrdusi vastupidises suunas lugedes saame

$$n\sqrt{a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{n^2 a}.$$

Kokkuvõttes:

arvu, mille ruut esineb tegurina ruutjuure märgi all, võib võtta tegurina juuremärgi ette; arvu, mis seisab tegurina juuremärgi ees, võib võtta ruutu tõstetult tegurina juuremärgi alla.

N ä i t e d.

1. $\sqrt{81 \cdot 169} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{169} = 9 \cdot 13.$
2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$
3. $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$
4. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$
5. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$
6. $3\sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{9 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{10}.$

Ülesanded.

187. Too tegur juuremärgi ette:

1. $\sqrt{12}$ $\quad\sqrt{72}$ $\quad\sqrt{200}$ $\quad\sqrt{288}$ $\quad\sqrt{32}$
2. $\sqrt{18}$ $\quad\sqrt{75}$ $\quad\sqrt{300}$ $\quad\sqrt{125}$ $\quad\sqrt{162}$

188. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt{9 \cdot 144}$
$\sqrt{25 \cdot 100}$
$\sqrt{169 \cdot 4}$
$\sqrt{225 \cdot 16}$
$\sqrt{49 \cdot 64}$

2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

3. $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 4. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{\frac{36}{25}}$ $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$

$\sqrt{\frac{9}{100}}$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{121}{144}}$ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{225}{64}}$ $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

189. Vii tegur juuremärgi alla:

1. $2\sqrt{5}$ $5\sqrt{2}$ $10\sqrt{7}$ $6\sqrt{1{,}5}$ $12\sqrt{2{,}5}$
2. $12\sqrt{0{,}5}$ $3\sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$ $7\sqrt{10}$ $10\sqrt{0{,}2}$

§ 42. Kuupjuure leidmine kuupide tabelist.

Kuupjuureks arvust *A* nimetame niisugust arvu, mille kuup on *A*.

Kuupjuure sümboliks on $\sqrt[3]{\ }$. Näiteks on

$$\sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{27}=3 \qquad \sqrt[3]{125}=5.$$

Nagu ruutjuurt saime leida ruutude tabeli abil, nii saame kuupjuurt leida kuupide tabeli abil.

Näide. Olgu kasutada arvude kuupide tabel:

x	1	2	3	4	5	...	10	...
x^3	1	8	27	64	125	...	1000	...

Leiame kuupjuure arvust 41.

Kasutame selleks meile juba tuttavat interpolatsioonivõtet. Arv 41 asetseb arvude 27 ja 64 vahel. Järelikult otsitav kuupjuur asetseb 3 ja 4 vahel. Lähisväärtusele 3 lisatava paranduse α määramiseks koostame abitabeli:

x	x^3
3	27
$3+\alpha$	$41=27+14$
4	64

Kui oletada, et arvu ja selle kuubi kasvud on võrdelised, saame:

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{14}{37},$$

millest

$$\alpha\approx 0{,}4.$$

Seega otsitav kuupjuur on ligikaudu $3+0{,}4$ ehk 3,4. Selle arvu kontrolliks kuupi tõstes leiame $3{,}4^3\approx 39{,}3$, mis erineb antud väärtusest 41 umbes 1,7 võrra. Võtte veelkordsel rakendamisel saame otsitava kuupjuure jaoks täpsema väärtuse ning võtet üha uuesti korrates võime otsitava kuupjuure leida nii täpselt kui soovime.

Abitabelit vajasime ülal interpolatsioonivõtte seletamiseks. Kui võtte rakendamise viis on selge, jätame abitabelite koostamise ära ja arvutame paranduse peast.

Võib näidata, et $\sqrt[3]{41}$ ei ole täpselt avaldatav ühegi murru $\frac{a}{b}$ kaudu. Nagu $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5}$, nii on ka $\sqrt[3]{41}$ irratsionaalne arv.

Ülesanded.

190. Kasutades interpolatsioonivõtet leia kuupide tabelist kuupjuured järgmistest arvudest veaga alla 0,1:

1. 9	2. 37	3. 85	4. 152
13	42	92	163
18	51	111	178
22	59	120	191
25	63	129	200

§ 43. Ülesandeid kordamiseks.

191. Olgu teada, et $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{p}{q}}$. Määra siit q.

192. On antud võrre $\frac{P^2}{m^2} = \frac{Q}{n^2}$. Määra m.

193. Olgu teada, et $u = \frac{a}{b}\sqrt{f}$. Avalda siit f.

194. Avalda valemist $T = \sqrt{\frac{u}{v}}$ suurus u.

195. Olgu võrdes $\frac{px}{q} = \frac{r}{sx}$ kõik arvud positiivsed. Avalda x.

196. Olgu $qh = \sqrt{\frac{q^3}{k}}$. Avalda siit q.

197. Määra valemist $t = \frac{3}{4}\sqrt{h}$ suurus h.

198. Olgu $z = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{u}}$. Avalda u.

199. Olgu teada, et $v = \left(\frac{Mu}{h}\right)^2$. Avalda siit h.

200. Olgu teada, et $p\sqrt{q} = r\sqrt{s}$. Avalda siit s.

201. Arvuta $\sqrt{17}$ veaga alla 0,00001.

202. Arvuta $\sqrt[3]{10}$ veaga alla 0,01.

203. Kasutades ruutjuurte ja kuupjuurte tabelit arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$	2. $7\sqrt{12}$	3. $\sqrt{31}:4$
$\sqrt{7}-\sqrt{5}$	$12\sqrt{15}$	$\sqrt{55}:12$
$\sqrt{12}+\sqrt{15}$	$0{,}3\sqrt{19}$	$\sqrt{63}:0{,}3$
$\sqrt{23}-\sqrt{19}$	$1{,}8\sqrt{23}$	$\sqrt{92}:1{,}7$
$\sqrt{100}-\sqrt{75}$	$0{,}01\sqrt{37}$	$\sqrt{111}:8{,}9$

4. $\sqrt[3]{5}+\sqrt{8}$	5. $3\sqrt{17}+2\sqrt{15}-0{,}5\sqrt{8}$
$\sqrt{7}-\sqrt[3]{4}$	$4\sqrt[3]{2}+7\sqrt{2}-2$
$\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{11}$	$5\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{11}+3\sqrt[3]{19}\cdot\sqrt{21}$
$\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{14}$	$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{5}$
$\sqrt[3]{10}+\sqrt{20}$	$\sqrt[2]{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{6}$

Peatükk V.

Ruutvõrrand.

§ 44. Ruutvõrrandi üldkuju.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks üksainus liige null; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole;

kui peale sulgude avamist ja koondamist kõrgeim aste, milles esineb otsitav, on teine aste, siis nimetame võrrandit teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile. Nii on võrrandid

$$x^2 = 7 \qquad 4x^2 = 9 \qquad \frac{1}{2}x^2 = x + 10$$

$$5x^2 - 4 = x \qquad 0{,}3x^2 + 0{,}7x - 10 = 0$$

kõik ruutvõrrandid. Seevastu võrrandid

$$\frac{4}{x^2} - x = 7 \qquad \frac{2x}{x-3} = 5 \qquad x^3 = 2x^2 + 10$$

pole ruutvõrrandid.

Ruutvõrrandis peab esinema liige otsitava ruuduga; peale selle võib esineda liige otsitava esimese astmega ning otsitavast vaba liige. Kui need liikmed tähistame ax^2, bx ja c, saame võrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

See on **ruutvõrrandi üldkuju.** Selles võrrandis a ei saa olla null, sest vastasel korral, kui $a = 0$, võrrand poleks enam ruutvõrrand.

Võime ikka oletada, et $a > 0$; kui see poleks nii, saavutaksime selle, korrutades võrrandi kumbagi poolt —1-ga.

Jagades viimase võrrandi kõiki liikmeid arvuga a, saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

valides kordajate $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ jaoks uued tähised p ja q, saame võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sel kujul kirjutatud ruutvõrrandit nimetame **taandatud ruutvõrrandiks.**

Kokkuvõttes:

võrrandit $ax^2 + bx + c = 0$ nimetame üldkujuliseks ruutvõrrandiks, võrrandit $x^2 + px + q = 0$ taandatud ruutvõrrandiks.

Võib juhtuda, et ruutvõrrandis puudub teine või kolmas liige või mõlemad;

kui ruutvõrrandis puudub otsitavast vaba liige või liige otsitava esimese astmega, siis nimetame ruutvõrrandit mittetäielikuks.

§ 45. Mittetäielikkude ruutvõrrandite lahendamine.

1. juhtum. Kui ruutvõrrandi vaba liige on null, omab võrrand kuju

$$ax^2 + bx = 0.$$

Selle lahendamiseks võtame vasakul poolel otsitava sulgude ette; saame:

$$x(ax+b)=0.$$

Viimane võrdus nõuab, et tegurite x ja $ax+b$ korrutis oleks 0. Seda nõuet saab rahuldada ainult võttes

$$\text{kas} \quad x=0 \text{ või } ax+b=0,$$

see tähendab, võttes

$$\text{kas } x=0 \text{ või } x=-\frac{b}{a}.$$

Teisi võrrandit rahuldavaid x-väärtusi pole; võrrandil on kaks lahendit.

Ülesanne. Lahenda võrrand $4x^2+3x=0$.

Lahendus. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$x(4x+3)=0.$$

Siit järeldame, et

$$\text{kas } x=0 \text{ või } 4x+3=0,$$

see tähendab, võrrandi lahendeiks on

$$x_1=0 \text{ ja } x_2=-\frac{3}{4}.$$

2. juhtum. Kui ruutvõrrandis puudub liige otsitava esimese astmega, omab võrrand kuju

$$ax^2+c=0.$$

Siit saame

$$ax^2=-c$$

ja

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Kui avaldis $-\frac{c}{a}$ on positiivne, saame k a k s lahendit:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Kui avaldis $-\frac{c}{a}$ on negatiivne, siis meie võrrandil e i o l e lahendit; tõepoolest, nõuet

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

sel juhul täita ei saa, sest vasakul poolel seisab oma loomult p o s i t i i v n e suurus, paremal aga n e g a t i i v n e.

Kui $c = 0$, siis on ka $-\frac{c}{a} = 0$, seega ka $x^2 = 0$, ja võrrandil on 2 teineteisega v õ r d s e t lahendit:

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_2 = 0.$$

N ä i t e d.

1. $9x^2 - 16 = 0 \quad x^2 = \frac{16}{9} \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$

Võrrandil on k a k s lahendit.

2. $x^2 + 10 = 0 \quad x^2 = -10.$

Võrrandil p o l e lahendit.

Ülesanded.

204. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2 = 529$	2. $x^2 = \frac{16}{81}$	3. $5x^2 = 0{,}0716$
$x^2 = 343$	$x^2 = 0{,}64$	$6x^2 = 25{,}1001$
$x^2 = 363$	$x^2 = 0{,}5776$	$1{,}3x^2 = 2{,}873$
$x^2 = 1116$	$x^2 = 0{,}0275$	$0{,}16x^2 = 0{,}261$
$x^2 = 2701$	$x^2 = 0{,}8464$	$0{,}75x^2 = 0{,}111$

205. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, rakendades korrutise nulliks taandumise tingimust:

1. $x(x+2)=0$	2. $x^2-13x=0$
$(x-4)(x+5)=0$	$6x^2+8x=0$
$(x-3)(x-7)=0$	$9x^2-2x=0$
$3x(7x-8)=0$	$5x^2+12x=0$
$5(x+1)x=0$	$2x^2+\frac{4}{3}x=0$

§ 46. Ruutvõrrandi $(x+m)^2=n$ lahendamine.

Võrrandi $(x+m)^2=n$ vasak pool on täisruut. Kui $n<0$, pole võimalik seatud nõuet rahuldada, sest vasakul poolel seisab oma loomult positiivne suurus, paremal aga oletuse järgi negatiivne. Sel juhul võrrandil pole lahendit.

Kui $n=0$, siis ka $(x+m)^2=0$,

seega

$$(x+m)(x+m)=0,$$

niisiis

$$x_1=-m \text{ ja } x_2=-m,$$

seega on võrrandil 2 teineteisega võrdset lahendit.

Kui $n>0$, saame

$$x+m=\pm\sqrt{n},$$

seega

$$x=-m\pm\sqrt{n},$$

millest leiame võrrandi kaks lahendit:

$$x_1=-m+\sqrt{n} \quad \text{ja} \quad x_2=-m-\sqrt{n}.$$

Ülesanne. Lahenda võrrand

$$(x+3)^2=25.$$

L a h e n d u s. Saame

$$x+3=\pm\sqrt{25}$$

ehk

$$x+3=\pm 5;$$

seega $x_1=-3+5=2$ ja $x_2=-3-5=-8$.

Ülesanded.

206. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $(x-2)^2=16$

$(x+5)^2=25$

$(x-9)^2=529$

$(x-0{,}3)^2=1{,}69$

$(x-1{,}2)^2=1{,}44$

2. $(x-1{,}4)^2=33{,}64$

$\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{81}$

$\left(x-\frac{6}{7}\right)^2=\frac{16}{49}$

$\left(x+8\frac{1}{2}\right)^2=52\frac{9}{16}$

$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=28\frac{4}{9}$

207. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $(x-3)^2=8$

$(x+4)^2=12$

$(x+10)^2=10$

$(x-1)^2=3$

$(x+7)^2=17$

2. $(x-1{,}2)^2=1{,}43$

$(x-0{,}2)^2=0{,}5$

$(x+0{,}5)^2=2{,}27$

$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=1\frac{2}{9}$

$\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=3\frac{1}{4}$

§ 47. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine.

Ü l e s a n n e 1. Lahenda võrrand $x^2+6x+9=49$.

L a h e n d u s. Kirjutades antud võrrandi kujul

$$(x+3)^2=49$$

näeme, et ta kuulub eespool-käsiteldud võrrandiliiki. Lahendades saame

$$x + 3 = \pm\sqrt{49},$$

seega

$$x + 3 = \pm 7,$$

niisiis

$$x = -3 \pm 7,$$

järelikult

$$x_1 = -3 + 7 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 7$$

ehk

$$x_1 = 4 \quad \text{ja} \quad x_2 = -10.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand $x^2 + 6x = 55$.

Lahendus. Võrreldes seda võrrandit eelmises ülesandes esinenud võrrandiga paneme tähele, et vasakud pooled erinevad vaid vabaliikme 9 võrra. Liidame selle arvu vasaku poolega ja teeme sama ka parema poolega, et võrdus jääks jõusse; saame:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

ehk

$$(x + 3)^2 = 64;$$

siit

$$x + 3 = \pm\sqrt{64}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 8$$

ehk

$$x = -3 \pm 8$$

ehk

$$x_1 = -3 + 8 = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 8 = -11.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand $x^2+3x-10=0$.

Lahendus. Teisendame antud võrrandi nii, et võrrandi vasak pool on täisruut. Selleks viime vabaliikme paremale poolele; saame:

$$x^2+3x=10.$$

Tähele pannes, et avaldist $3x$ võime kirjutada kujul $2\cdot\frac{3}{2}\cdot x$, näeme, et vasak pool saab täisruuduks, kui temaga liidame $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, tuleb sedasama teha ka parema poolega; nii saame:

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=10+\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Seega on

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=10+\frac{9}{4}$$

ehk

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4};$$

siit

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2},$$

see tähendab

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2},$$

seega

$$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=2 \quad \text{ja} \quad x_2=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-5.$$

Praegu-arendatud mõttekäik leiab rakendamist järgmises paragrahvis taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemi tuletamisel.

Ülesanded.

208. Täienda järgmised avaldised täisruutudeni:

1.	2.	3.
$x^2 + 14x$	$x^2 + 7x$	$x^2 + \frac{2}{3}x$
$x^2 + 8x$	$x^2 - 0{,}8x$	$x^2 - \frac{3x}{4}$
$x^2 - 100x$	$x^2 + 1{,}4x$	$x^2 - 0{,}2x$
$x^2 - 5x$	$x^2 + \frac{1}{2}x$	$x^2 + 7{,}2x$
$x^2 + x$	$x^2 - \frac{4}{5}x$	$x^2 - 0{,}04x$

209. Täienda järgmised avaldised täisruutudeni:

1.	2.	3.
$a^2 + 6a$	$f^2 + 7f$	$m^2 - 11m$
$b^2 + 2b$	$g^2 - 9g$	$n^2 + 1{,}4n$
$c^2 - 8c$	$h^2 - 3h$	$p^2 + \frac{2}{3}p$
$d^2 - 16d$	$i^2 + 0{,}46i$	$q^2 - q$
$c^2 + 24c$	$k^2 - \frac{5}{6}k$	$r^2 - \frac{3r}{4}$

210. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, tarvitades täisruuduni täiendamise võtet:

1.	2.
$x^2 - 2x = 3$	$p^2 + 3p - 18 = 0$
$y^2 + 4y = 5$	$q^2 - 7q + 10 = 0$
$z^2 - 6z = -8$	$r^2 - r - 12 = 0$
$u^2 - 8u = 9$	$s^2 + 5s + 6 = 0$
$v^2 - 10v = 11$	$t^2 - 3t - 9 = 0$

§ 48. Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalem.

Kirjutame antud võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kujul

$$x^2 + px = -q$$

ja täiendame vasaku poole täisruuduni; selleks liidame vasaku poolega liikme $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, teeme seda ka parema poolega; nii saame:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

seega

$$\boldsymbol{x = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}.$$

Saadud võrdust nimetame taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemiks; sõnastame selle järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordaja pool $\pm$ ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

Ülesanne. Lahenda võrrand $x^2 - x - 20 = 0$.

Lahendus. Siin on $p = -1$, $q = -20$, seega

$$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Järelikult

$$x = -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Leitud arvude 5 ja —4 asetamine x-i asemele võrrandi vasakusse poolde kinnitab, et need arvud tõesti on antud võrrandi lahendid.

Saadud lahendusvalemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0,$$

see tähendab, kui

$$p^2 - 4q \geqslant 0.$$

Kui

$$p^2 - 4q > 0,$$

siis on võrrandil 2 e r i n e v a t l a h e n d i t:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kui

$$p^2 - 4q = 0,$$

siis on võrrandil 2 teineteisega võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{p}{2}.$$

Kui

$$p^2 - 4q < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit.

Avaldist $p^2 - 4q$ nimetame taandatud ruutvõrrandi diskriminandiks.

Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendeid või mitte. Diskriminant tähistatakse sageli tähega *d*.

Diskriminandi *d* kaudu võime taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemi kirjutada kujul

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{d}}{2}.$$

Ülesanded.

211. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1.
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 + 8x + 15 = 0$

2.
$x^2 - 7x + 12 = 0$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$x^2 + 8x + 7 = 0$
$x^2 + 15x + 56 = 0$

212. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1.
$x^2 - 6x + 4 = 0$
$x^2 + 8x + 13 = 0$
$x^2 - 5x + 3 = 0$
$x^2 - x - 50 = 0$
$x^2 + 7x - 5 = 0$

2.
$x^2 + 5x + 4 = 0$
$x^2 - 9x - 1 = 0$
$x^2 + 2x + 0{,}7 = 0$
$x^2 + 0{,}8x - 1 = 0$
$x^2 + 5x + 6{,}5 = 0$

213. Lahenda järgmised ruutvõrrandid. Kus lahendit täpselt leida ei saa, määra ta veaga alla 0,01. Kontrolli saadusi.

1. $x^2 - 9x - 36 = 0$	2. $x^2 - 8x + 9 = 0$
$x^2 + 7x - 7 = 0$	$x^2 + 5x - 66 = 0$
$x^2 - x - 20 = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$
$x^2 + 2x - 2 = 0$	$x^2 + 7x - 120 = 0$
$x^2 - 20x + 91 = 0$	$x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} = 0$
3. $x^2 + 3x - 19 = 0$	4. $u^2 - 6u + 4 = 0$
$x^2 - 11x + 10 = 0$	$u^2 + 13u - 14 = 0$
$y^2 - 4y + 6 = 0$	$v^2 - v + 42 = 0$
$y^2 + 9y + 12 = 0$	$v^2 - 9v + 7 = 0$
$z^2 - 7z - 8 = 0$	$w^2 + 15w - 1 = 0$

214. Jaota lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nõnda, et suurema osa jagatis kogu lõiguga on sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

215. Kahe arvu vahe on 6; samade arvude ruutude summa on 260. Mis arvud need on?

216. Üks täisnurkse kolmnurga kaatet on 7 ühiku võrra pikem kui teine. Hüpotenuus on 17 ühikut pikk. Leia kaatetid.

217. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

218. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

219. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

220. Jaota arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

221. Kahe teineteisele järgneva paarituarvu korrutis on 1295. Mis arvud need on?

222. Kahest arvust on üks sajast niipalju suurem, kui teine on sajast väiksem. Arvude korrutis on 9639. Mis arvud need on?

§ 49. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalem.

Nagu ülalpool nägime, ruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Et kordaja $a \neq 0$, siis võime võrrandi kummagi poole jagada selle kordajaga; saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Rakendades taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemit, saame

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Juuremärgi all seisva avaldise võib kirjutada kujul

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \text{ehk} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

võttes ruutjuure sellest avaldisest, saame:

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

See on üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalem; selle võime sõnastada järgmiselt:

üldkujulise ruutvõrrandi lahend on murd; selle nimetaja on otsitava ruudu kordaja kahekordne; lugeja aga on vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordaja $\pm$ ruutjuur selle kordaja ruudu ja neljakordse otsitava ruudu kordaja ja vabaliikme korrutise vahest.

Saadud valemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null.

Kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

siis on kõnesoleval ruutvõrrandil 2 erinevat lahendit:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis on võrrandil 2 võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ ja } x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil üldse pole lahendit.

Avaldist $b^2 - 4ac$ nimetame üldkujulise ruutvõrrandi diskriminandiks.

Seda diskriminanti tähistatakse sageli tähega D. Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendeid või mitte.

Diskriminandi D kaudu võime üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalemi kirjutada kujul:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Ülesanne 1. Lahenda võrrand $6x^2 + 7x - 3 = 0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 49 + 72 = 121;$$

D on positiivne; seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendi valem annab:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ja

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand $3x^2 - x - 1 = 0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13;$$

D on positiivne; seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendi valem annab:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand $5x^2 - 4x + 7 = 0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 16 - 140 = -124;$$

D on negatiivne; seega võrrandil lahendit pole.

Ülesanded.

223. Leia järgmiste ruutvõrrandite lahendid, rakendades võrrandi lahendusvalemit, ja kontrolli saadusi:

1. $3x^2 - 2x - 8 = 0$
$2x^2 + 9x + 10 = 0$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$
$2x^2 - 5x + 2 = 0$
$3x^2 - 8x - 3 = 0$

2. $13x^2 - 11x - 2 = 0$
$9x^2 + 12x - 5 = 0$
$4x^2 - 4x - 3 = 0$
$8 + 11x - 10x^2 = 0$
$2 + 3x - 2x^2 = 0$

224. Leia järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,1, tarvitades lahendusvalemit, ja kontrolli saadusi:

1. $x^2 + 9x - 5 = 0$
$2y^2 + y - 7 = 0$
$3z^2 - 8z + 4 = 0$
$2u^2 + 3u - 1 = 0$
$3v^2 - 10v + 10 = 0$

2. $5a^2 - 11a + 3 = 0$
$3b^2 + 12b - 17 = 0$
$6c^2 - 13c - 15 = 0$
$d^2 - 14d + 4 = 0$
$e^2 - 16e + 11 = 0$

225. Allpool järgneb 10 ruutvõrrandit. Anna nende ratsionaalsed lahendid täpselt, nende irratsionaalsed lahendid aga ligikaudu veaga alla 0,01.

1. $3x^2 + 5x - 2 = 0$
$2u^2 + 5u + 2 = 0$
$s + 6 = 2s^2$
$6a^2 - 17a - 14 = 0$
$10p - 21 = 6p^2 - 13p$

2. $4m^2 + 45m - 36 = 0$
$10n^2 + 21n - 10 = 0$
$9q^2 + 30q - 24 = 0$
$1{,}4z^2 + 5z = 2{,}4$
$w^2 - 1{,}6w + 0{,}3 = 0$

226. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $2x^2 - 7x + 5 = 0$
$x^2 + 23x - 10 = 0$
$6x^2 + 4x - 3 = 0$
$3x^2 + 18x - 8 = 0$
$4x^2 - 13x - 17 = 0$

2. $7x^2 - 42x + 36 = 0$
$69x^2 - x - 55 = 0$
$9x^2 + 50x - 121 = 0$
$1{,}2x^2 + 8{,}3x - 23{,}6 = 0$
$3{,}4x^2 - 2{,}5x - 6 = 0$

227. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $x(x+2)=35$
$x^2=3(2x-3)$
$2(x^2-9)=5(x-4)$
$(x-1)^2=x+1$
$(1+2x)(1-2x)=3x$

2. $(x+7)^2=28x$
$4=(x-5)^2$
$(x-5)(7-x)=1$
$x^2=2(x+8)(x-6)$
$(2x-7)(x-3)=4x$

3. $9x(x+1)=2(6x+1)$
$(1+x)^2=(1-2x)^2$
$(3x-2)(2x-1)=x$
$(3-x)^2=(1+3x)(9-x)$
$(2x+3)^2=(3x-2)(x+8)$

4. $(3x-1)(x-2)=(x+2)(x-1)$
$(4x-1)^2=(4x+1)(8x-5)$
$(5x+7)^2-(2x+1)^2=0$
$2(x-1)(2x+1)=(4x-1)(2x-3)$
$(8x+3)(4x+1)=2(x+1)(4x+3)$

228. Allpool on antud 10 ruutvõrrandit. Ilma võrrandit lahendamata otsusta, kas võrrandi lahendid on reaalsed, kas nad on ratsionaalsed ja kas nad on teineteisega võrdsed või mitte.

1. $3x^2-8x+5=0$
$x^2-4x+8=0$
$a^2+3a-1=0$
$5c^2-3c=2$
$3n^2=7n+6$

2. $9x^2+12x+4=0$
$7z^2+3z=0$
$u^2+2u+3=0$
$5v^2+7v+3=0$
$w^2-6w+4=0$

§ 50. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid.

Ülesanne 1. Ristkülikukujuline spordiväljak on 88 aari suur. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

L a h e n d u s. Olgu ruudu külg x meetrit. Siis on ristküliku küljed meetrites $x+2$ ja $x-10$. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x+2)(x-10)$$

ehk

$$x^2-8x-20.$$

Teiselt poolt see pindala on 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$$x^2-8x-20=8800$$

ehk

$$x^2-8x-8820=0.$$

Võrrandi lahendusvalem annab:

$$x=4\pm\sqrt{8836}$$

ehk

$$x=4\pm 94;$$

seega

$$x_1=4+94=98 \quad \text{ja} \quad x_2=4-94=-90.$$

Et ruudu külg on oma loomult p o s i t i i v n e suurus, siis x_2 meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks ülesande lahendiks jääb $x=98$; see tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

K o n t r o l l: väljaku küljed on meetrites $98+2=$ $=100$ ja $98-10=88$; seega väljaku pindala on $100\cdot 88$ ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

Ü l e s a n n e 2. Ema kingib tütrele 21,60 marka taskurättide ostmiseks. Poes selgub, et rätid on vahepeal hinnas langenud 10 penni tükilt, mille tõttu neid rätte saaks kingitud raha eest osta 3 tükki enam kui kavatseti. Mitu rätti kavatseti osta?

L a h e n d u s. Olgu osta soovitud rättide arv x. Nende eelarvestatud tükihind oleks siis $\frac{2160}{x}$ penni. Räti hind poes on sellest 10 penni madalam, seega

$$\frac{2160}{x} - 10$$

penni. Selle tükihinna puhul saaks rätte osta 3 tükki enam kui kavatseti, niisiis

$$x + 3 .$$

Rättide koguhinna pennides saame kujul

$$(x + 3) \left(\frac{2160}{x} - 10\right) ;$$

see koguhind oli 2160 penni, järelikult

$$(x + 3) \left(\frac{2160}{x} - 10\right) = 2160 .$$

Et $x \neq 0$, siis võime x-ga korrutada võrrandi kummagi poole; saame:

$$(x + 3) (2160 - 10x) = 2160x$$

ehk

$$2160x + 6480 - 10x^2 - 30x = 2160x$$

ehk

$$-10x^2 - 30x + 6480 = 0$$

ehk, jagades võrrandi kumbagi poolt -10-ga,

$$x^2 + 3x - 648 = 0 .$$

Otsitava x määramine nõuab taandatud ruutvõrrandi lahendamist. See annab:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 648} = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2}$$

ehk

$$x_1 = \frac{-3+51}{2} = 24 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-3-51}{2} = -27.$$

Et rättide arv on oma loomult positiivne, siis teine lahend ei tule arvesse. Seega kavatseti osta taskurätte 24 tükki ehk 2 tosinat. Räti eelarvestatud hinna saame jagades 21,60 marka 24-ga; nii leiame:

$$21{,}60 \text{ marka} : 24 = 2160 \text{ penni} : 24 = 90 \text{ penni}.$$

Kontroll: $90 - 10 = 80$; nii mitu penni maksab rätt poes; $2160 : 80 = 27$; nii mitu rätti saaks osta; see arv on just kolme võrra suurem 24-st, nagu peab olema.

Ülesanne 3. Kahe koha A ja B vaheline kaugus on 349 km. Kohast A lahkub sõiduk koha B suunas. Üks tund hiljem lahkub kohast B teine sõiduk koha A suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel kohast A. Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus v kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus $(v-8)$ kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel $349 - 216$ ehk 133 km. Selleks kulus aega

esimesel $\quad \frac{216}{v}$ tundi,

teisel $\quad \frac{133}{v-8}$ tundi.

Esimene aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v-8} = 1.$$

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v-8) - 133v = v(v-8)\ ;$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v\ ;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame —1-ga; see annab:

$$v^2 - 91v + 1728 = 0\,.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369\ ;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendusvalem annab:

$$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2} \quad \text{ehk} \quad v = \frac{91 \pm 37}{2}\ ;$$

seega

$$v_1 = 64 \quad \text{ja} \quad v_2 = 27.$$

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 km tunnis või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 km tunnis või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$\frac{216}{64}$ ehk $3\frac{3}{8}$ tundi, teine seevastu $\frac{133}{56}$ ehk $2\frac{3}{8}$ tundi;

aegade vahe on $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$ ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$\frac{216}{27}$ ehk 8 tundi, teine seevastu $\frac{133}{19}$ ehk 7 tundi;

aegade vahe on $8 - 7$ ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid kõlbavad.

§ 51. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid.

229. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 8 dm^3. Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud küljepikkusega 5 cm. Missuguse küljepikkusega on papitükk?

230. Oja ääres, mille laius on 4 m, kasvas pappel. Torm on ta murdnud 3 m kõrguselt, nii et latv just risti üle oja teisele kaldale ulatub. Kui kõrge oli pappel? (B h a s k a r a, 1150. a. ümber.)

231. Kui ruudu üht külge suurendada 3 korda ja teist vähendada 2 m võrra, siis ruudu pindala suureneb 2 korda. Kui pikk on ruudu külg?

232. Kas on olemas kolm järjestikust paarisarvu, mis võiksid olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks?

233. 13 jala pikkune redel seisab seina ääres, nii et tema alumine ots on seinast 5 jalga eemal. Kui palju langeb redeli ülemine ots seina mööda alla, kui alumist otsa tõmmata veel 7 jalga seinast kaugemale? (XV sajandist pärinevast käsikirjast.)

234. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?

235. Kahe järjestikuse arvu ruutude vahe on 49. Mis arvud need on?

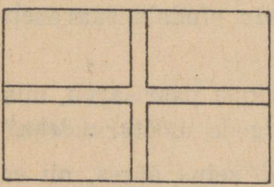
236. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?

237. Kiht pingpongi-palle katab karbi ruudukujulise põhja. Peale ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

238. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leia ristküliku mõõtmed.

239. Võõrastetoa põrandat, mille kuju on ristkülik ja mõõtmed 4,8 ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põrandapindalast. Kui suur peab vaip olema?

240. Mootorratas, mille hind on 1200 marka, müüakse $x\%$-se hinnaalandusega. Ostja müüb ratta edasi $x\%$-se kasuga 1197 marga eest. Kui suur on x?



241. Aia suurus on 160 korda 240 ruutmeetrit. Pikuti ja risti minevate teede alla (vaata joonist!) tahetakse võtta osa aiast, kuid mitte rohkem kui 2% kogu aia maa-alast. Kui suure võib valida ülimalt tee laiuse?

242. Kahe arvu vahe on 7; nende arvude korrutis on 368. Leia need arvud.

243. Mänguväli on ristkülikukujuline, mõõtmetega 8 m ja 4 m. Mänguväli tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt pikkust ja laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi?

244. Paberitükist, mille mõõtmed on 24 ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdlaiused ribad. Ülejäänud ristkülikukujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?

245. Pilt, mille mõõtmed on 20 ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2. Kui lai on pildi raam?

246. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem tema laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm³. Kui suured on papitüki mõõtmed?

§ 52. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused.

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Moodustame lahendite summa; et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Moodustame lahendite korrutise; saame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p$$

ja

$$x_1 \cdot x_2 = q\,.$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa on võrdne vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordajaga; lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.

Ülesanne.

247. Allpool järgneb rida võrrandeid. Otsusta, neid võrrandeid lahendamata, missugused on lahenduvad, missugused mitte:

1. $x^2 - 11x + 28 = 0$	2. $x^2 - 12x + 61 = 0$
$x^2 + 4x - 227 = 0$	$x^2 + 14x + 48 = 0$
$x^2 + 13x + 59 = 0$	$x^2 - 16x + 63 = 0$
$x^2 - 13x + 36 = 0$	$x^2 - 17x - 38 = 0$
$x^2 + 8x - 105 = 0$	$x^2 - 19x + 92 = 0$

§ 53. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi.

Ülesanne. Koosta ruutvõrrand, millel on antud lahendid x_1 ja x_2.

Lahendus. Eespool-tuletatud lause põhjal on

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ehk teisiti

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ ja } q = x_1 \cdot x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Näide. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $-\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{6}$.

Antud lahendite summa

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$.

Järelikult $p = \frac{1}{3}$ ja $q = -\frac{1}{12}$ ning seega otsitav ruut-võrrand on

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Korrutades kummagi poole 12-ga saame samade lahenditega üldkujulise ruutvõrrandi

$$12x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Ülesanded.

248. Kirjuta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1. 3 ja 4	2. $\frac{1}{2}$ ja 0
-5 ja 10	$\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$
-2 ja -6	$2{,}3$ ja $-1{,}1$
-9 ja 7	$4{,}5$ ja $-0{,}9$
2 ja -2	3 ja $-\frac{1}{3}$.

249. Kirjuta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1. a^2 ja $-b^2$	2. m ja $m+1$
a ja $\frac{1}{a}$	$\frac{a}{b^2}$ ja $\frac{b^2}{a}$
$2n-1$ ja $2n+1$	p^2-1 ja p^2+1
ma^2 ja nb^2	$a+b$ ja $a-b$
n^2 ja n^2-1	1 ja $c:d$

§ 54. Ülesandeid kordamiseks.

250. Valemis $F = \frac{Mm}{r^2}$ kõik tähed tähendavad positiivseid suurusi. Avalda r.

251. Olgu teada, et $P = (3aL)^2$, kus kõik tähed tähendavad positiivseid arve. Avalda L.

252. Missugused kaks x-i väärtust rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2 + 8x + 7}{4} = 2(x + 2)?$$

253. Lahenda järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2 = 3(2x - 3)$
   $x(x + 8) = 8(x + 2)$
   $3(x + 4) = x(x - 4)$
   $5(4x + 5) - 4x(x + 5) = 0$
   $x^2 = 2(x + 8)(x - 6)$

2. $9x(x + 1) = 2(6x + 1)$
   $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$
   $(3x - 2)(2x - 1) = x$
   $(2x - 1)(x + 3) = (x + 1)^2$
   $(3 - x)^2 = (1 + 3x)(9 - x)$

3. $(2x - 1)^2 = (2x + 1)(4x - 3) + 2$
   $(2x - 2)^2 = (x + 1)(x - 1)$
   $(2x - 1)(1 - 2x) = (2x + 5)(1 - x)$
   $2(x - 1)(2x + 1) = (4x - 1)(2x - 3)$
   $(8x + 3)(4x + 1) = 2(x + 1)(4x + 3)$

254. Moodusta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1.		2.	
-3 ja -7		$\frac{2}{3}$ ja $-\frac{1}{5}$	
$-\frac{3}{4}$ ja 5		$\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ ja $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$	
$\sqrt{\frac{3}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{3}{7}}$		$\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$ ja $\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$	
$-0{,}5$ ja $0{,}8$		$1{,}4 + \sqrt{0{,}96}$ ja $1{,}4 - \sqrt{0{,}96}$	
$-1{,}4$ ja $-1{,}5$		$\frac{6 + \sqrt{6}}{5}$ ja $\frac{6 - \sqrt{6}}{5}$	

255. Arvutusvahendite vabrikule läheb valmis arvutusmasin maksma 400 marka. Vabrik müüb neid masinaid $x\%$-se kasuga kontoritarveteärile. See laseb masinad müügile 576 margaga, saades omakorda $x\%$ kasu. Kui suur on x?

256. x-margast arvet vähendati x penni iga marga pealt. Arve lõppsumma oli 7 marka 36 penni. Mitu % vähendati arvet?

257. Heinamaa sees on ristkülikukujuline põld, mõõtmetega 190 ja 120 m. Kui laial ribal peab põllu äärt mööda heina maha niitma, et niidetud riba moodustaks 10 aari?

258. Kui risttahukakujulise paku servi suurendada vastavalt 3, 4 ja 5 cm võrra, saab ta kuubiks ja tema ruumala kasvab 2380 cm^3 võrra. Leia risttahuka mõõtmed.

259. Traaditükist, mille pikkus on 20 cm, painutati ristkülik pindalaga 22 cm^2. Kui pikad on selle ristküliku küljed?

260. Kahe järjestikuse arvu ruutude summa on 113. Mis arvud need on?

261. Ristkülikukujulisel muruplatsil, mille mõõtmed on 36 m ja 20 m, on tarvis ääred kaevata peenraks, mis ümbritseks muruplatsi. Kui lai tuleks kaevata peenar, et peenra pindala moodustaks 15% muruplatsi endisest pindalast?

262. Kahe arvu summa on 75 ja korrutis 1376. Leia need arvud.

263. Ristküliku pindala on 84 cm^2; selle ristküliku ümbermõõt on 40 cm. Leia ristküliku pikkus ja laius.

264. Liida avaldised

$$\frac{5}{6}(u+2) \qquad \frac{4}{9}(u-4) \qquad \frac{7}{18}(u+8).$$

265. Lahuta avaldisest $\frac{5}{6}(D-4)$ avaldis $\frac{4}{3}(D+2)$.

266. Lihtsusta avaldised:

$$\frac{1}{2}(t+2)+\frac{2}{3}(2t+3)+\frac{5}{6}(5t+6)$$

$$\frac{6p}{7}+\frac{4q}{3}-\frac{5}{21}(7q-2p)$$

$$1\frac{5}{6}-\frac{3s}{8}-\frac{5}{12}(2-3s)$$

$$\frac{7}{10}(1+9R)+\frac{4}{5}(1-6R)$$

$$x-\frac{1-x}{2}-\frac{5}{6}(1+x)$$

267. Arenda korrutis

$$(3h+5k)(2h-13k).$$

268. Arenda järgmised binoomide ruudud:

$(2n-1)^2$ $\quad(4k+1)^2$ $\quad(2p-3q)^2$ $\quad(5ax-2b)^2$

269. Arenda järgmised korrutised ja astmed:

1. $(7m-2n)(3m+n)$
$(1+5p)(1-5p)$
$\left(\frac{1}{4}-q\right)^2$
$\left(1-\frac{v}{2}\right)^2$
$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)$

2. $\left(\frac{2}{3}t+9\right)^2$
$(1+st)^2$
$(0{,}3+2u)(0{,}3-2u)$
$(1-0{,}2z)(1-0{,}2z)$
$\left(\frac{2}{3}h-\frac{3}{4}k\right)^2$

3. $(kx+1)^2$
$(3m-0{,}1n)^3$
$\left(1+\frac{x}{a}\right)^3$
$\left(\frac{1}{2}ab-u\right)^2$
$\left(1+\frac{nz}{5}\right)^2$

4. $\left(x-\frac{1}{2}x\right)^3$
$(1-ax)(1+ax)$
$\left(\frac{1}{3}+n\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)$
$\left(a-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{x}{3}\right)$
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

270. Näita, et

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a(a+1)+\frac{1}{4}.$$

Seda valemit sobivalt rakendades arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$\left(5\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left(13\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left(8\frac{1}{2}\right)^2$$

$$19{,}5^2 \qquad 7{,}5^2 \qquad 40{,}5^2$$

271. Arenda avaldis

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2.$$

272. Lihtsusta avaldis

$$(A+B)^2+(A+B)(A-B)+(A-B)^2.$$

273. Näita, et

$$(10k+5)^2 = 100k(k+1)+25.$$

Seda valemit sobivalt rakendades arvuta järgmised ruudud:

$$25^2 \qquad 55^2 \qquad 65^2 \qquad 85^2$$

274. Ristküliku ümbermõõt on u cm; ühe külje pikkus on p cm. Kui suur on ristküliku pindala?

275. Arv a on jaotatud kahte ossa, millest üks on x. Avalda nende osade ruutude summa.

276. Arenda avaldis

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{4}\right)^3.$$

277. Arenda korrutis

$$(P+3Q-7)(P+3Q+9).$$

278. Arenda korrutis

$$(N^2+2N+3)(N-4).$$

279. Esialgu kavatseti maja ehitada ruudukujulise põhiplaaniga. Hiljemini otsustati aga pikkust suurendada a meetrit ja laiust vähendada niisama palju; kõrguseks jäeti endiselt h meetrit. Kas maja ruumala suurenes või vähenes ja kui palju?

280. Leia avaldiste

$$28a^2x^3 \qquad 42a^3x^2 \qquad 70a^2cx^2$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

281. Leia avaldiste

$$6a^2b^3x^5 \qquad 12a^5b^4x \qquad 9a^4b^5x^2$$

väikseim ühiskordne.

282. Avalda järgmised murrud protsentides:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{m}{n} \qquad \frac{1}{k} \qquad \frac{a}{a+b}.$$

283. Lihtsusta vahe

$$\frac{h+k}{k} - \frac{h-k}{k}.$$

284. Soorita nõutavad tehted ja anna tulemused võimalikult lihtsal kujul:

$$\frac{a^2b}{p^2q} : \frac{a}{p} \qquad \frac{4c^2x^2}{9u^2} : \frac{2cx}{3u}$$

$$\left(\frac{2ab^2}{3p^2q}\right)^2 \qquad (2pq)^2 \cdot (3p^2qr)^3 : 9(pq^2)^2$$

285. Määra avaldiste

$$\left(\frac{5p}{6q}\right)^2 \quad \text{ja} \quad \frac{0{,}8q}{p}$$

korrutis.

286. Korruta avaldised

$$\frac{2u}{v}, \qquad \left(\frac{v}{4w}\right)^2 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{2w}{u}\right)^3.$$

287. Jaga murd $\frac{4\pi r^2}{kR}$ murruga $\frac{4\pi R^2}{kr}$.

288. Kirjuta avaldis

$$\left(\frac{2p}{3q^2}\right)^4$$

sulgusid kasutamata.

289. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$
2. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$
3. $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{6}=18$
4. $2=\frac{2x}{3}-\frac{x}{3}$
5. $\frac{6}{7}x-\frac{8}{9}x=2x$
6. $\frac{16}{27}x=10+\frac{x}{9}$
7. $\frac{2x}{3}-\frac{4x}{9}=31-\frac{3x}{2}$
8. $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{x}{3}-13$
9. $\frac{3x}{5}+\frac{x}{6}+\frac{1}{3}=x-2$
10. $\frac{3x}{4}-11\frac{x}{8}=-x+\frac{1}{2}$

290. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{x+2}{5}=\frac{2x-10}{3}$
2. $\frac{x+3}{4}+\frac{1-3x}{7}=0$
3. $\frac{3x-2}{7}+\frac{x-2}{2}=1\frac{1}{2}$
4. $\frac{x+5}{4}-\frac{1-x}{6}=4$
5. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-3}{3}=5+x$
6. $\frac{19x}{25}-\frac{13x+2}{15}=2$
7. $4x+\frac{6x}{7}=\frac{3x+2}{2}+46$
8. $\frac{x-15}{18}-\frac{6x+5}{14}=\frac{x}{7}$
9. $\frac{1}{2}+\frac{5x}{11}=\frac{4-x}{23}$
10. $\frac{2x+5}{3}-\frac{3x+7}{4}=\frac{1}{4}$

291. Veepaaki suubub 4 toru; esimese töötamisel täituks paak ühe tunniga, teise töötamisel 2, kolmanda töötamisel 3 ja neljanda töötamisel 4 tunniga. Kui kiiresti täitub ta, kui tööl on kõik neli toru korraga? (Maximus Planudes, a. 1350.)

292. Mesilasteparvest asus $\frac{1}{5}$ kadamba õitele, $\frac{1}{3}$ silindha õitele. Kolmekordne nende osade vahe lendas kutaja õitele; ainult üks mesilane jäi järele, hõljudes õhus üles ja alla, meelitatuna jasmiini ja pandaani magusast lõhnast. Kui palju mesilasi oli parves? (Bhaskara, a. 1150 ümber.)

293. Lootoslillede hulgast ohverdati jumal Šiva'le $\frac{1}{3}$ Višnu'le $\frac{1}{5}$, Päikesele $\frac{1}{6}$, Bhavan'ile $\frac{1}{4}$. Ülejäänud 6 lille sai austamisväärne õpetaja. Kui palju oli lilli? (Bhaskara, a. 1150 ümber.)

294. Laiskleja on alates 18. eluaastast $\frac{3}{8}$ oma ajast maganud, $\frac{1}{16}$ söönud ja joonud, $\frac{1}{4}$ jalutanud, $\frac{3}{16}$ mänge mänginud, $\frac{1}{16}$ kiiktoolis haigutanud ja ikkagi 2 aastat töötanud. Kui vanalt ta suri? (Heis, 1880.)

295. Jaanil on 90 marka, Reinul 70. Üks on teisele võlgu. Võla tasumise järel oleks Jaanil $\frac{5}{3}$ Reinu rahast. Kui suur on võlg? Kes on võlgnik?

296. Linnavolikogus anti viinamüügi keelumääruse poolt $\frac{3}{5}$ häältest, vastu $\frac{1}{4}$ ja 3 liiget jäid erapooletuks. Kui palju oli koos linnavolinikke?

297. Tallinnast Tartu ja tagasi sõiduks kulus autol kokku 10 tundi 20 minutit. Mitu km on maanteed mööda Tallinnast Tartu, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 kilomeetrit tunnis ja tagasisõidul 40 kilomeetrit tunnis ja Tartus peatuti 2 tundi?

298. Kell on kolme ja nelja vahel ja minutinäitaja katab tunninäitajat. Kui palju on kell?

299. 19,5 tonni kaupa veeti kohale hobusega ja veoautoga, hobusega 20 ja veoautoga 10 koormat. Mitu tonni kaalus keskmiselt hobusekoorem ja mitu tonni autokoorem, kui viimane oli esimesest $4\frac{1}{2}$ korda raskem?

300. Kodu kaunistamiseks otsustati tee talust maanteele muuta puiesteeks. Taheti istutada paplipuid kummalegi poole teed, puust puuni 10 meetrit. Noori papleid saadi aga nii vähe, et nii istutades oleks tulnud neid 17 tükki puudu. Seepärast istutati puud vahega 12 meetrit ja nii võis koguni 7 kõige viletsamat puud istutamata jätta. Kui pikk on tee talust maanteeni?

301. Poiss käis jalgrattaga raudteejaamas. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit kiirusega 18 km tunnis. Jaamas kulus tal aega $\frac{1}{2}$ tundi. Kogu reis aga kestis 3 tundi. Kui kaugel raudteejaamast elas poiss?

302. Lasnamäe lennuväljalt lendas lennuk Narva suunas kiirusega 100 km tunnis. 20 minutit hiljem lendas sellele järele teine lennuk kiirusega 120 km tunnis. Tallinn—Narva lennuliini pikkus on 200 km. Kui kaugel Narva linnast jõudis teine lennuk esimesele järele?

303. Leia kolme arvu aritmeetiline keskmine, teades, et see keskmine ületab üht arvu 3 võrra ja kahe teise arvu summa on 29.

304. Teatav töö peab olema lõpetatud 24 päevaga. Tööline *T* lõpetaks töö üksinda töötades 18 päevaga; tööline *U* lõpetaks töö üksinda töötades 30 päevaga. Töö on niisugune, et korraga saab rakendada tööle ainult ühe töölise. Kui kaua peab töötama tööline *T*, et selle järel tööline *U* võiks lõpetada töö täpselt tähtpäevaks?

305. Kaks teineteisele järgnevat täisarvu rahuldavad tingimust, et $\frac{5}{9}$ suuremast on ühe võrra väiksem kui $\frac{3}{5}$ väiksemast. Mis arvud need on?

306. Lahenda järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

1. $x+a=b$	2. $4x-b=2b$
$x-c=n$	$7x+n=3n+n$
$p=q-x$	$\frac{1}{2}x+b=2a$
$h+2x=k+x$	$4a=\frac{2}{3}x-3b$
$x+a=2x+a$	$0{,}6x+0{,}5a=x-0{,}7a$

307. Lahenda järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

1. $ax+b=6b$	2. $g=\frac{hx}{g}$
$px+q=q$	$\frac{ax}{n}=an+a$
$mx=m^2-m$	$3x-\frac{1}{2a}=2x+\frac{1}{3a}$
$\frac{x}{c}=1$	$7x=\frac{4}{a}-\frac{2}{b}+5x$
$\frac{x}{a}=b+a$	$a(x-b)=0$
$\frac{x}{3n}=0$	$3(c-1)x=3c^2-3$

308. Tööstuse meister saab 42 töötunni eest nädalas iga töötunni tasuks a marka ja iga ületunni eest b marka. Mitu ületundi peab ta tegema, et saada nädala tasuks c marka?

309. Olgu $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Avalda y.

310. Määra l, teades, et $S=\frac{n}{2}(a+l)$.

311. On antud valem $F=\frac{Wv^2}{rg}$. Määra siit suurus v.

312. Olgu teada, et $w=(m-\frac{1}{2}q)^3$. Avalda siit m.

313. Olgu teada, et $q=c\sqrt{cn}$. Avalda siit n.

314. Olgu teada, et $u=s\sqrt{a-t^2}$. Avalda a.

315. Määra H, teades, et

$$n=\sqrt{\frac{3H}{7k}}.$$

316. Valemis $p=\frac{5k}{7h^2}$ tähed k, h ja p tähendavad positiivseid arve. Avalda h.

317. Üks kaatet on 120 cm pikk ja teine 80 cm lühem kui hüpotenuus. Kui pikk on hüpotenuus?

318. Pool rombi pikemast diagonaalist on 2 cm lühem kui rombi külg; lühem diagonaal on 12 cm pikk. Kui pikk on külg?

319. Ruudukujulise tiigi keskpaigas kasvab pilliroo-kõrs, mille veepealne osa on 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõmmati tiigi külje keskkohta, puudutas tipp just veepinda. Tiigi külje pikkus on 10 jalga. Eeldades, et pillirookõrs jäi sirgeks, leia, kui sügav on tiik. (Tsin Kiu Tšaou, umbes 2600 a. e. Kr.)

320. Arvuta $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, määrates ruut-juured veaga alla 0,001.

321. Märgime $\sqrt{10}$ tähega a. Kuidas siis avalduvad arvud

$$\sqrt{90} \qquad \sqrt{0,1} \qquad \sqrt{3\tfrac{1}{3}}\,?$$

322. Lahenda võrrandid:

1. $2x^2 + 3x = 2$
$5x^2 = 15x - 11$
$3x^2 - 2x = 8$
$3x^2 + 5x + 2 = 0$
$2x^2 - 3x + 1 = 0$

2. $30x^2 + 49x + 20 = 0$
$77(x^2 - 1) = 72x$
$18x^2 - 23x = 6$
$3x^2 - 17x + 10 = 0$
$0,3x^2 - 1,2x = 0,6$

3. $(x - 2)(x - 3) = 3x^2 - 5x - 156$
$(3x + 4)^2 = (x + 1)(x + 25)$
$x^2 - 8x + 72 = (12 - x)(x + 6)$
$(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = x(x + 12) - 18(x - 1)$
$(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = (x + 2)(x + 3)$.

§ 55. Biruutvõrrandi lahendamine.

Ruutvõrrandi kaudu lahenevad ka mõned võrrandid, mille aste on kõrgem kui 2, näiteks biruutvõrrand

$$az^4 + bz^2 + c = 0.$$

Tõepoolest:

Tähistades z^2 tähega x näeme, et

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Olgu selle ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2. Nõutavad z-väärtused saame lahendades võrrandid

$$z^2 = x_1 \quad \text{ja} \quad z^2 = x_2.$$

Ülesanne. Lahenda võrrand:

$$z^4 - 14z^2 - 32 = 0.$$

Lahendus. Võttes $z^2 = x$ saame:

$$x^2 - 14x - 32 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on

$$x_1 = 16 \quad \text{ja} \quad x_2 = -2.$$

Tähendab:

$$\text{kas } z^2 = 16 \text{ või } z^2 = -2.$$

Teist nõuet rahuldada ei saa, sest z^2 on positiivne. Esimesest aga saame

$$z_1 = 4 \quad \text{ja} \quad z_2 = -4.$$

Kontroll: $4^4 - 14 \cdot 4^2 - 32 = 256 - 224 - 32 = 0$ ja samuti $(-4)^4 - 14 \cdot (-4)^2 - 32 = 0$, nagu peab olema.

Ülesanne.

323. Lahenda võrrandid:

1.	2.
$x^4 - 625 = 0$	$x^4 - 125x^2 + 2500 = 0$
$x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$	$x^4 - 641x^2 + 5000 = 0$
$16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$	$100x^4 - 161x^2 - 144 = 0$
$3x^4 - 28x^2 - 20 = 0$	$16x^4 - 73x^2 + 36 = 0$
$2x^4 - 7x^2 - 99 = 0$	$36x^4 - 109x^2 + 3 = 0$

Hind Rmk. 1.80