

**TALLINNA POLÜTEHNILINE  
INSTITUUT**

**H.RELVIK O.SILDE**

**SÜSTEEMI  
KINEETILINE  
MOMENT**

**TALLINN 1963**



ARH A - 37663

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

---

Teoreetilise mehhaanika kateeder

H. Relvik, O. Silde

S Ü S T E E M I K I N E E T I L I N E

M O M E N T

(liikumishulkade peamoment)

Tallinn, 1963

Рельвик Х.А., Сильде О,М.

Кинетический момент системы.

На эстонском языке

Таллинский Политехнический институт

Таллин, ул. Калинина дом 101 .

Tartu Ülikooli Raamatukogu  
ARHIIVKOGU

TPI rotaprint, 1963. Trükiõõgnaid 6,25

Tiraaž 1200 eks. MB 01609. Tell nr. 35

Hind 19 kop.

S Ü S T E E M I   K I N E E T I L I N E   M O M E N T  
( L I I K U M I S H U L K A D E   P E A M O M E N T )

1. Eelnevaid märkusi

Klassikalise mehhaanika teine põhiseadus (aksioom) annab seose masspunkti liikumishulga ja masspunktile mõjuva jõu (mitme jõu mõjumisel nende resultandi) vahel:

$$(1) \quad \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F},$$

milles  $m$  on masspunkti mass,

$\bar{v}$  - tema kiirusvektor,

$\bar{F}$  - masspunktile mõjuvate jõudude resultant,

$m\bar{v}$  - masspunkti liikumishulk,

$\bar{v}$  ja  $\bar{F}$  on vektorid.

Sellest tuletakse analoogiline seos masspunkti liikumishulga momendi ja temale mõjuva jõu momendi vahel:

$$(2) \quad \frac{d\bar{\ell}_O}{dt} = M_O(\bar{F}),$$

milles  $\bar{\ell}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$  on masspunkti liikumishulga moment punkti  $O$  suhtes,

$\bar{r}$  - punktist  $O$  masspunktini viiv kohavektor, ja

$M_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$  - jõu  $\bar{F}$  momentvektor punkti  $O$  suhtes.

Valemite (1) ja (2) analoogia seisneb selles, et valemis (1) ettetulevad vektorid  $m\bar{v}$  ja  $\bar{F}$  on valemis (2) asendatud nende momentidega ruumi vabalt võetud punkti suhtes.

Masspunktide süsteemi puhul saadakse valemile (1) vastav valem.

Koosnegu süsteem  $n$  masspunktist ja olgu

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$$

süsteemi liikumishulk (süsteemi masspunktide liikumishulkade peavektor). Siis kehtib seos

$$(3) \quad \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{F}(e), \text{ milles}$$

$\bar{F}(e) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(e)}$  on süsteemi masspunktidele mõjuvate välisjõudude peavektor ( $\bar{F}_i^{(e)}$  on  $i$ -ndale masspunktile mõjuvate välisjõudude resultant).

Tuletame veel meelde valemit:

$$(4) \quad \bar{K} = M \bar{v}_c, \text{ milles}$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \text{ on süsteemi kogumass ja}$$

$\bar{v}_c$  - selle süsteemi massikeskme kiirusvektor.

## 2. Masspunktide süsteemi kineetiline moment (süsteemi masspunktide liikumishulkade peamoment)

Süsteemi kineetiline moment ruumi mingi punkti  $O$  suhtes  $\bar{L}_O$  võrdub süsteemi kuuluvate masspunktide liikumishulkade sama punkti  $O$  suhtes võetud momentide summaga:

$$(5) \quad \bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\ell}_{oi} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i,$$

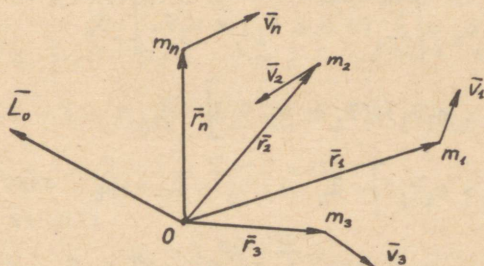
milles  $\bar{\ell}_{oi}$  on  $i$ -nda masspunkti liikumishulga moment punkti  $O$  suhtes.

Nimetust "süsteemi liikumishulga moment" ei tarvita, sest sellega võiks mõelda suurust

$$\bar{r}_c \times \bar{K} = \bar{r}_c \times M \bar{v}_c \neq \bar{L}_O$$

ja sattuda eksiteele ( $\bar{r}_c$  on punktist  $O$  süsteemi masskeskmeni viiv kohavektor)

Vektori  $\bar{L}_O$  rakenduspunktiks on O.



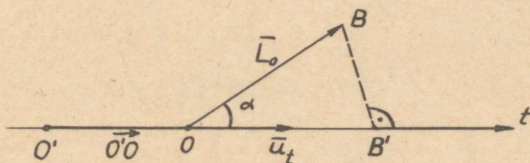
Joon. 1

Süsteemi kineetiline moment mingi telje t suhtes  $L_t$  (skalaar) võrdub selle telje mingi punkti O suhtes võetud süsteemi kineetilise momendi  $\bar{L}_O$  (vektori) projektsiooniga teljel t:

$$L_t = \text{proj}_t (\bar{L}_O) = \bar{L}_O \cdot \bar{u}_t ,$$

milles  $\bar{u}_t$  on telje t suunaline ühikvektor;

punkt  $\bar{L}_O$  ja  $\bar{u}_t$  vahel - skalaar-korrutise tähis.



Joon. 2.

$$L_t = OB' = \bar{L}_O \cdot \bar{u}_t = OB \cdot \cos \alpha ,$$

$\alpha$  on nurk vektorite  $\bar{L}_O$  ja  $\bar{u}_t$  vahel ( $\bar{L}_O, \bar{u}_t$ ),

$OB'$  - algebraalne suurus.

Näitame, et  $L_t$  ei sõltu punkti O valikust teljel.

Olgu  $O'$  mõni teine teljepunkt, siis

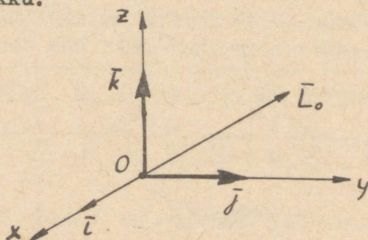
$$\begin{aligned}
 L_t' &= \bar{L}_{O'} \cdot \bar{u}_t = \left[ \sum_{i=1}^n (\vec{O'O} + \bar{r}_i) \times m_i \bar{v}_i \right] \cdot \bar{u}_t = \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^n (\vec{O'O} \times m_i \bar{v}_i) + (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \right] \cdot \bar{u}_t = \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^n \vec{O'O} \times m_i \bar{v}_i \right] \cdot \bar{u}_t + \bar{L}_O \cdot \bar{u}_t = L_t, \text{ sest} \\
 \left[ \sum_{i=1}^n \vec{O'O} \times m_i \bar{v}_i \right] \cdot \bar{u}_t &= \sum_{i=1}^n (\vec{O'O} \times m_i \bar{v}_i) \cdot \bar{u}_t = 0,
 \end{aligned}$$

kuna vektorid  $\vec{O'O}$  ja  $\bar{u}_t$  on kolineaarsed (kolme vektori ruumkorrutis on võrdne 0-ga, kui kaks tegurit on kolineaarsed).

Kineetilise momendi ühikud:  $\left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} \right] = [\text{ergsec}]$  (CGS-süsteem),  
 $[\text{kGm sec}]$  (tehniline süsteem).

### 3. Kineetiline moment koordinaattelgede suhtes

Meie kasutame alati paremakäelist täisnurkset Cartesiusse koordinaadistikku.



Joon. 3.

Sel puhul  $\bar{L}_O = L_{Ox} \bar{i} + L_{Oy} \bar{j} + L_{Oz} \bar{k}$ ,

milles  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  on telgedesuunalised ühikvektorid,

$L_{Ox}, L_{Oy}, L_{Oz}$  vektori  $\bar{L}_O$  (koordinaatide alguspunkti suhtes võetud kineetilise momendi) projektsioonid telgedele.

Olgu  $L_x, L_y, L_z$  süsteemi kineetilised momendid telgede  $x, y$  ja  $z$  suhtes. Siis eelneva punkti kohaselt

$$\begin{aligned} \bar{L}_x &= \bar{L}_0 \cdot \bar{l} = (L_{ox} \bar{l} + L_{oy} \bar{j} + L_{oz} \bar{k}) \cdot \bar{l} = \\ &= L_{ox} \bar{l} \cdot \bar{l} + L_{oy} \bar{j} \cdot \bar{l} + L_{oz} \bar{k} \cdot \bar{l} = L_{ox}, \end{aligned}$$

sest  $\bar{l} \cdot \bar{l} = 1, \bar{j} \cdot \bar{l} = \bar{k} \cdot \bar{l} = 0$ .

Samal viisil:

$$L_y = \bar{L}_0 \cdot \bar{j} = L_{oy},$$

$$L_z = \bar{L}_0 \cdot \bar{k} = L_{oz}.$$

Seega: kineetiline moment koordinaattelje suhtes võrdub koordinaatide alguspunkti suhtes võetud kineetilise momendi vektori projektsiooniga sellel teljel.

Seepärast võime kirjutada

$$\bar{L}_0 = L_x \bar{l} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k}.$$

#### 4. Kineetilise momendi arvutamine

Olgu koordinaatide alguspunkt  $O$ ,

$$\bar{r}_i = x_i \bar{l} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k},$$

$$\bar{v}_i = v_{ix} \bar{l} + v_{iy} \bar{j} + v_{iz} \bar{k}, \text{ siis}$$

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_{0i} = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i &= \begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ m_i v_{ix} & m_i v_{iy} & m_i v_{iz} \end{vmatrix} = \\ &= m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) \bar{l} + m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) \bar{j} + \\ &+ m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) \bar{k}. \end{aligned}$$

Kuna  $\bar{L}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{\ell}_{0i}$  ja  $L_x = L_{ox} = \bar{L}_0 \cdot \bar{l}$  jne., siis

$$(6) \left\{ \begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), \\ L_y &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) = \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i), \\ L_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i), \end{aligned} \right.$$

sest  $v_{ix} = \dot{x}_i$ , jne. (punkt muutuja tähise peal tähistab tuletist aja järgi:  $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ , jne).

Need valemid tuletavad meelde staatikast teada olevaid jõusüsteemi peamomentide arvutamise valemeid ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  on jõusüsteemi peamomendid telgede suhtes):

$$(7) \left\{ \begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M_y &= \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z &= \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i), \end{aligned} \right.$$

$$(\bar{F}_i = X_i \bar{l} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k}).$$

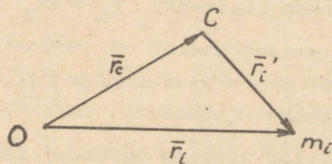
Kuid valemid (6) on mitmel juhtumil kineetilise momendi leidmiseks ebamugavad, eriti pideva massjaotusega absoluutselt kõva keha puhul. Seepärast tuletame mõned seosed, mis hõlbustavad kineetilise momendi leidmist.

### 5. Kineetiline moment ja massikeskpunkt

Olgu  $O$  meelevaldne punkt ja  $C$  süsteemi massikeskpunkt,  $\bar{r}'_i$  masskeskmest  $i$ -nda masspunktini viiv kohavektor,  $\bar{v}'_i$  masspunkti kiirusvektor massikeskme suhtes (relatiivne kiirusvektor), siis  $\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{r}'_i$  ja  $\bar{v}_i = \bar{v}_C + \bar{v}'_i$ .

Järelikult

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_C + \bar{r}'_i) \times m_i (\bar{v}_C + \bar{v}'_i) .$$



Joon.4.

Kasutades vektorkorrutise distributiivsust, saame viimases avaldises avada sulud ja kirjutada ta nelja summa summana (võttes konstantsed tegurid summa tähisest välja):

$$\begin{aligned} \bar{L}_O &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_C \times m_i \bar{v}_C + \sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}_C + \sum_{i=1}^n \bar{r}_C \times m_i \bar{v}'_i + \sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i = \\ &= \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i \right) \times \bar{v}_C + \bar{r}_C \times \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}'_i + \sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i , \end{aligned}$$

milles  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  .

Et aga  $\bar{r}'_C = \frac{\sum m_i \bar{r}'_i}{M}$  (massikeskme definitsiooni kohaselt) ja  $\bar{r}'_C = \bar{0}$  (punktist C massikeskmeni viiv kohavektor),

siis  $\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i = \bar{0}$  ja samuti  $\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{r}}'_i = 0$ . Seega viimasest  $\bar{L}_O$  avaldisest langevad välja teine ja kolmas liige ning võttes tarvitusele tähise

$$\bar{L}'_C = \sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i , \quad \text{saame}$$

$$(8) \quad \bar{L}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{L}'_C .$$

Selles avaldises esimene liidetav  $\bar{r}_C \times M\bar{v}_C$  on niisuguse masspunkti liikumishulga moment punkti O suhtes, mis asetseb süsteemi massikeskmes, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja kiirus massikeskme kiirusega; teine liidetav  $\bar{L}'_C$  on aga massikeskme suhtes võetuna süsteemi kineetiline moment süsteemi relatiivsel liikumisel massikeskme ümber (massikeskme suhtes).

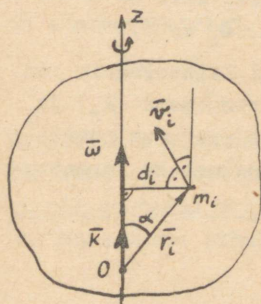
Saame teoreemi: Süsteemi kineetiline moment mingi punkti suhtes võrdub summaga, mille üheks liidetavaks on süsteemi massikeskmesse kujutletud (süsteemi kogumassiga võrdse massiga ja süsteemi massikeskme kiirusega liikuva) masspunkti kineetiline moment sama punkti suhtes ja teiseks liidetavaks süsteemi kineetiline moment massikeskme suhtes süsteemi relatiivsel liikumisel selle massikeskme ümber (suhtes).

Siit järgneb:

Süsteemi kineetiline moment mingi telje suhtes võrdub summaga, mille üheks liidetavaks on süsteemi massikeskmesse kujutletud (süsteemi kogumassiga võrdse massiga ja süsteemi massikeskme kiirusega liikuva) masspunkti kineetiline moment sama telje suhtes ja ja teiseks liidetavaks massikeskme suhtes võetud süsteemi relatiivse (massikeskme suhtes) liikumise kineetilise momendi projektsioon samal teljel.

## 6. Kõva keha kineetiline moment pöörlemistelje suhtes

Olgu pöörlemisteljeks  $z$ -telg, pöörlemise nurkkiiruseks  $\omega$  ja koordinaatide alguspunktiks  $O$ :



Joon. 5.

$$L_z = \bar{L}_O \cdot \bar{k} = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \cdot \bar{k}.$$

Selle asemel, et korrutada skalaarselt ühikvektoriga  $\bar{k}$  tervet summat, korrutame temaga iga liidetava eraldi ja tulemused liidame (skalaarkorrutise distributiivsus).

Arvestades ruumkorrutise omadust  $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$ , ja võttes arvesse, et kõva keha pöörlemisel

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad \text{ehk} \quad \bar{v}_i = \omega \bar{k} \times \bar{r}_i$$

(sest  $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$ ), saame (võttes ühise

teguri  $\omega$  summa märgi ette):

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^n m_i (\bar{k} \times \bar{r}_i) \cdot (\bar{k} \times \bar{r}_i) = \omega \sum_{i=1}^n m_i |\bar{k} \times \bar{r}_i|^2.$$

$|\bar{k} \times \bar{r}_i| = 1 \cdot r_i \sin \alpha = d_i$  (masspunkti kaugus pöörlemisteljest), järelikult

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Suurus  $\mathcal{J}_z = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$  on kõva keha inertsmoment  $z$ -telje suhtes, järelikult

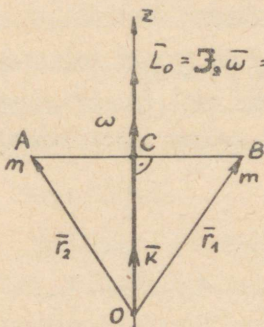
$$(9) \quad L_z = \mathcal{J}_z \omega.$$

Seega kõva keha kineetiline moment pöörlemistelje suhtes võrdub keha selle telje suhtes võetud inertsmomenti ja pöörlemise nurkkiiruse korrutisega.

Kui telje positiivselt poolelt vaadates pöörleb keha kellaosutite liikumisele vastassuunaliselt, siis  $\omega > 0$  ja ka  $L_z > 0$ , vastupidisel juhtumil on  $L_z < 0$ .

Teatavasti teljel liikuva masspunkti liikumishulk on  $m\mathbf{v}$ . Valemis (9) vastab massile  $m$  inertsmoment  $\mathcal{J}_z$  ja ja kiirusele  $v$  nurkkiirus  $\omega$ . Niisugune vastavus punkti liikumise ja kõva keha pöörlemise vahel esineb ka järgnevatel valemites.

7. Sümmetriatelje ümber pöörleva keha kineetiline moment pöörlemistelje mingi punkti suhtes



Joon.6.

Vastuse leidmiseks piisab, kui vaatleme ainult kaht pöörlemistelje suhtes sümmetriliselt asetsevat (võrdsete massidega) masspunkti.

$$\bar{L}_0 = \bar{r}_1 \times m\bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times m\bar{v}_2 =$$

$$= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times m\bar{v}_1, \text{ sest selles valemis võib lugeda, et } \bar{v}_2 = -\bar{v}_1, \text{ (mõlemad kiirused on}$$

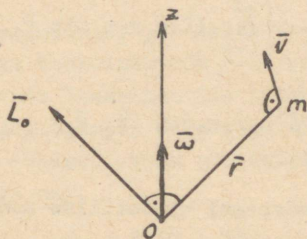
joonise pinnaga risti: üks on suunatud ette, teine taha. Kuna

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \text{ siis, arvestades seost } \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c},$$

$\vec{L}_O = m(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) = m[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_1] \vec{\omega} -$   
 $- [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{\omega}] \vec{r}_1 = m(\vec{AB} \cdot \vec{r}_1) \vec{\omega} - (\vec{AB} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} = 2m CB^2 \vec{\omega} =$   
 $= \vec{J}_Z \vec{\omega}$ . Seega üldjuhtumil sümmeetrilise keha puhul (z-telg  
 on sümmeetriatelg)

$$(10) \quad \vec{L}_O = \vec{J}_Z \vec{\omega} = \vec{J}_Z \omega \vec{k} = L_Z \vec{k}.$$

Kineetilise momendi vektor on suunatud piki pöörlemistelge.  
 Kui keha pole pöörlemistelje suhtes sümmeetriline, siis  $\vec{L}_O$   
ei ole suunatud piki pöörlemistelge, nagu see selgub juba  
 ühe masspunkti puhul.



Joon.7.

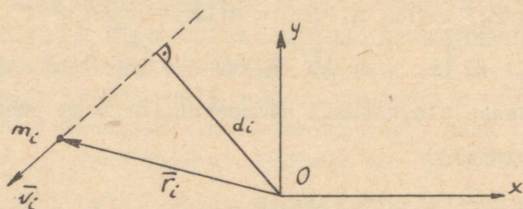
$$\vec{L}_O \perp \vec{r} \quad \text{ja} \quad \vec{L}_O \perp \vec{v},$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m[r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}].$$

### 8. Tasapinnalise süsteemi kineetiline moment

Tasapinnalise süsteemi puhul tasapinna mingi punkti  
 O suhtes on  $\vec{L}_O$  alati risti tasapinnaga. Seega võib kinee-  
 tilist momenti käsitleda algebralise suurusena (üksikute  
 masspunktide kineetilised momendid liidetakse algebraliselt).  
 Masspunkti kineetiline moment loetakse positiivseks, kui  
 punktist O masspunktini viiv kohavektor pöörleb vastassuu-  
 nas kellaosutite liikumise suunale, vastupidisel juhtumil on  
 moment negatiivne.

Siin on täielik analoogia jõusüsteemi peamomendiga.



Joon. 8.

Juuresoleval joonisel on z-telg risti joonise tasapinnaga ja suumatud ette.

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \left[ \sum_{i=1}^n (\pm) m_i r_i v_i \sin(\bar{r}_i, \bar{v}_i) \right] \bar{k},$$

$$L_z = \bar{L}_O \cdot \bar{k} = \sum_{i=1}^n (\pm) m_i r_i v_i \sin(\bar{r}_i, \bar{v}_i).$$

$L_z$  ongi võrdne süsteemi kineetilise momendi  $L_O$ -ga punkti O suhtes (tasapinnal xy), järelikult

$$(11) \quad L_O = \sum_{i=1}^n (\pm) m_i r_i v_i \sin(\bar{r}_i, \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\pm) m_i v_i d_i.$$

Märgid + ja - on sulgudes seepärast, et iga masspunkti jaoks tuleb sobiv märk valida.

Masspunktide koordinaatide ja nende aja suhtes võetud tuletiste järgi saadakse seos (valemid (6) p.4):

$$(12) \quad L_O = L_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Tasapinnalise kõva kujundi puhul  $\bar{J}_O = \bar{J}_z$  ja

$$(13) \quad L_O = L_z = \bar{J}_O \omega \quad \text{ehk} \quad \bar{J}_z \omega.$$

## 9. Näiteid kineetilise momendi arvutamisest

Näide 1. (Ülesande M 311<sub>3</sub> (293<sub>3</sub>) alusel.)

Punkt massiga  $m = 5$  g liigub vastavalt võrrandele

$$x = 5 + 3 \cos t$$

$$y = 4 \sin t.$$

( $x, y$  - sentimeetrites,  $t$  - sekundites). Leiada punkti liikumishulga moment koordinaatide alguspunkti suhtes.

Tegemist on tasapinnalise liikumisega ja liikumishulga momentvektor alguspunkti suhtes on risti tasapinnaga  $xy$  (suunatud piki  $z$ -telge). Tema projektsioon  $z$ -teljel p.8 valemi (12) järgi on

$$l_z = m(\dot{x}y - x\dot{y}).$$

$$x = 5 + 3 \cos t, \quad \dot{y} = 4 \cos t, \quad \text{järelikult}$$

$$l_z = m[(5 + 3 \cos t) \cdot 4 \cos t - 4 \sin t (-3 \sin t)] =$$

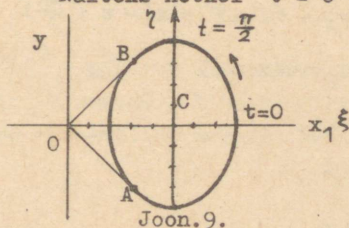
$$= m(20 \cos t + 12) = 4m(5 \cos t + 3).$$

$$\text{Et } m = 5, \text{ siis } l_z = 20(5 \cos t + 3) \left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} \right].$$

Kuna tasapinnal momenti punkti suhtes käsitletakse skalaarina, siis

$$l_o = l_z = 20(5 \cos t + 3) \left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} \right]$$

$$\text{Näiteks hetkel } t = 0 \quad l_o = 160 \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}}.$$



Liikumisel punktist A punkti-  
ni B on  $l_o > 0$  (kohavektor pöör-  
dub positiivses suunas), punk-  
tist B punkti A  $l_o < 0$ .  
Punktides A ja B on  $l_o = 0$ .  
Sellele vastavad ajahetked

saadakse valemist  $\cos t = -\frac{3}{5}$ .

Kui tahame leida punkti kineetilist momenti ellipsi keskpunkti C suhtes, võtame uued teljed ( $\xi; \eta$ ) läbi p. C. Sel juhtumil  $\xi = 3 \cos t$ ,  $\eta = 4 \sin t$  (kasutame valemit (12) p.8) ja

$$l_c = 60 \left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} \right] = \text{const}.$$

Seega  $\dot{l}_c = 0$ . Kuid valemi (2) p.1 järgi  $\dot{l}_c = M_c |\bar{F}|$  (masspunktile mõjuva jõu punkti C suhtes võetud momendiga), millest järeleb, et masspunktile mõjuva jõu moment võrdub 0-ga. Kuna jõud F ei saa võrduda nulliga (sel juhtumil peaks liikumine olema ühtlane sirgjooneline), peab jõu  $\bar{F}$  kandesirge kogu liikumise vältel läbima punkti C ( $\bar{F}$  on tsentraalne jõud jõusentriga punktis C).

Näidata, et jõud  $\bar{F}$  on suunatud punkti C ja tema tugevus on võrdeline kaugusega sellest punktist (dünaamika esimene põhiülesanne).

Näide 2. Ülesandes M 1104 arvutada süsteemi kineetilist moment p. O suhtes.

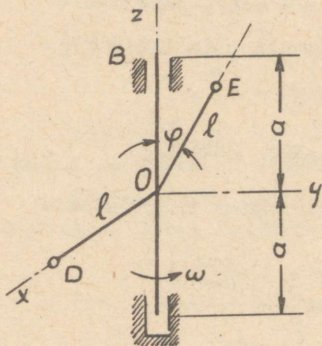
Olgu p. D ja E koordinaadid vastavalt  $x_1, y_1, z_1$ , ja  $x_2, y_2, z_2$ .

Siis p. D liikumisvõrrandid on:

$$\begin{cases} x_1 = l \cos \omega t \\ y_1 = l \sin \omega t \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ja}$$

p. E liikumisvõrrandid on:

$$\begin{cases} x_2 = l \sin \varphi \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ y_2 = l \sin \varphi \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ z_2 = l \cos \varphi \end{cases} \quad \text{ehk}$$



Joon.

$$\begin{cases} x_2 = -l \sin \varphi \sin \omega t \\ y_2 = l \sin \varphi \cos \omega t \\ z_2 = l \cos \varphi \end{cases}$$

Arvutame ka koordinaatide tuletised aja järgi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l\omega \sin\omega t \\ \dot{y}_1 = l\omega \cos\omega t \\ \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -l\omega \sin\varphi \cos\omega t \\ \dot{y}_2 = -l\omega \sin\varphi \sin\omega t \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases}$$

P. 4 valemite ( 6 ) põhjal:

$$L_x = L_{Ox} = m [y_1 \dot{z}_1 - z_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2]$$

$$L_y = L_{Oy} = m [z_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2]$$

$$L_z = L_{Oz} = m [x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2]$$

Asendades  $x_1, y_1, \dots, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2$

vastavate avaldistega saame

$$L_x = m l^2 \omega \sin\varphi \cos\varphi \sin\omega t,$$

$$L_y = -m l^2 \omega \sin\varphi \cos\varphi \cos\omega t,$$

$$L_z = m [l^2 \omega \cos^2\omega t + l^2 \omega \sin^2\omega t + l^2 \omega \sin^2\varphi \sin^2\omega t + l^2 \omega \sin^2\varphi \cos^2\omega t] = m l^2 \omega (1 + \sin^2\varphi).$$

$$(a) \bar{L}_O = m l^2 \omega \sin\varphi \cos\varphi (\sin\omega t \bar{i} - \cos\omega t \bar{j}) + m l^2 \omega (1 + \sin^2\varphi) \bar{k}$$

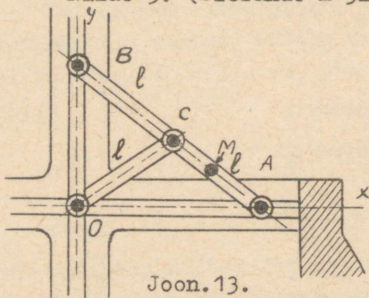
$\bar{L}_O$  on konstantse absoluutväärtusega vektor, mis asetseb tasapinnas BOE, ja mis z-teljega moodustab nurga  $\alpha$ , nii et

$$\tan \alpha = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{1 + \sin^2\varphi}$$

$\bar{L}_O$  pöörleb ühes masspunktidega ümber z-telje (on nendega jäigalt seotud). Lihtsamini saab vastuse kätte, kui lähtuda otse kineetilise momendi definitsioonist.

Vastus: valem (a)

Näide 3. (Ülesande M 327 (312) alusel.)



Joon.13.

Ellipsograafi joonlauda pikkus  $AB = 40$  cm, vända pikkus  $OC = 20$  cm,  $AC = CB$ . Vânt pöörleb ühtlaselt nurkkiirusega  $\omega$  ümber telje O. Leida ellipsograafi kineetilise moment punkti O suhtes. Vânt ja joonlaud lugeda ühtlaseks varras- teks; esimese kaal  $P = 0,1$  kg, teise kaal  $Q = 0,2$  kg. (Üles-

andes M 327 esineva masspunkti M kaal on võrdne nulliga.)

Kuna liikumine on tasapinnaline, siis kineetilise momendi vektor on risti tasapinnaga  $xy$  ja  $L_O = L_Z$ .

Otsitavat momenti vaadelda kolme momendi summana:

- 1) vända kineetiline moment  $L_{Ov}$  (punkti O suhtes),
- 2) punkti C (joonlauda massikeskme) liikumishulga moment  $L_{Oc}$  punkti O suhtes, kui p.C mass lugeda võrdseks joonlauda massiga, ja
- 3) joonlauda kineetiline moment  $L_{Oj}$  p. C suhtes joonlauda relatiivsel liikumisel ümber massikeskme C.

Joonlauda relatiivne liikumine ümber massikeskme C on pöörlemine nurkkiirusega  $-\omega$  (kuna pöörleb vastupidises suunas).

$$1) L_{Ov} = J_{Ov} \omega \quad (\text{p. 6 valem 9}).$$

Vända inertsmoment  $J_{Ov} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2$  (Voronkov, § 137, valem 144), seega

$$L_{Ov} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega$$

2)  $L_{Oc} = \frac{Q}{g} l v_c \sin(\vec{OC}, \vec{v}_c)$  (valem 8 1. liige), milles  $v_c = l\omega$  ja  $\sin(\vec{OC}, \vec{v}_c) = 1$ , sest  $\vec{OC} \perp \vec{v}_c$ . Seega

$$L_{Oc} = \frac{Q}{g} l^2 \omega$$

Tuleb märkida, et viimases valemis suurus  $\frac{Q}{g} \ell^2$  on (joonlaua massiga varustatud) punkti C inertsmoment punkti O (z-telje) suhtes.

$$3) L'_{Cj} = - J_{Cj} \omega .$$

Joonlaua inertsmomenti  $J_{Cj}$  (punkti C suhtes) arvutamiseks vaatleme joonlauda koosnevana kahest tükist CA ja CB ja kasutame kummagi tüki kohta p. 1) nimetatud valemit.

Saame

$$J_{Cj} = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 = \frac{2}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \quad \text{ja}$$

$$L'_C = - \frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \omega$$

Liites

$$L_O = L_{Ov} + L_{Oc} + L'_{Cj} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} \ell^2 \omega + \frac{2}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \omega \quad \text{ehk}$$

$$L_O = \frac{(P + 2Q) \ell^2 \omega}{3g} .$$

Märkus. Inertsmomenti  $J_{Cj}$  võib arvutada, kasutades Voronkovi õpiku valemeid § 137, valem (144) ja § 138, valem (154).

Numbrilise vastuse leidmiseks valime tehnilise ühikute süsteemi. Siis  $\ell = 0,2$  m ja

$$L_O = \frac{0,04(0,1 + 0,4)}{3 \cdot 9,81} \omega \approx 0,00068 \omega \quad [\text{kG m sec}]$$

CGS - süsteemis saame:

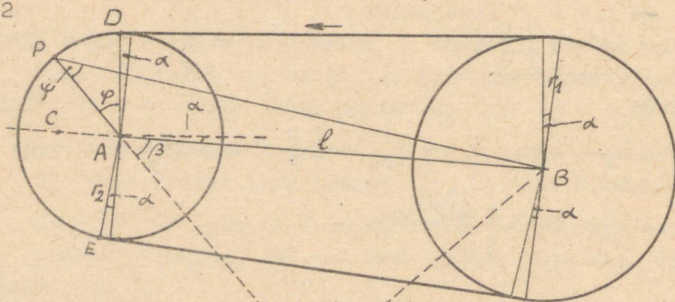
$$L_O = \frac{400(100 + 400)}{3} \omega = 66700 \omega \quad \left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} \right] .$$

Vastus:  $L_O = 0,00068 \omega \quad \text{kGm sec} \quad \text{ehk}$

$$L_O = 66700 \omega \quad \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}} .$$

Näide 4. (Ülesande M 398(384) alusel)

Leida süsteemi kineetiline moment telje suhtes, mis läbib punkti B ja on risti joonise tasapinnaga, kui selle telje ümber pöörleva keha kaal on  $P_1$  ja inertsraadius pöörlemistelje suhtes  $\vartheta_1$ . Läbi punkti A (risti joonise tasapinnaga) mineva telje ümber pöörleva keha kaal on  $P_2$  ja inertsraadius pöörlemistelje suhtes  $\vartheta_2$ . Rihm on ühtlase massijaotusega ja tema kaal võrdne P.  $AB = \ell$ . Pöörlevate kehade massikeskmed on pöörlemistelgedel. Ratta B nurkkiirus on  $\omega_1$ ,  $\frac{r_1}{r_2} = k$ . Ülesanne lahendada üldkujul.



$$PQ = PB \cos \psi$$

$$PQ = PA + AQ = r_2 + \ell \cos \beta$$

$$\beta = \pi - \psi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \psi)$$

$$PQ = r_2 + \ell \sin(\psi + \alpha)$$

$$\cos \psi = \frac{r_2 + \ell \sin(\psi + \alpha)}{PB}$$

Joon. 14

Tähistame punkti, kus rihma ülemine sirge osa puutub ratast A, tähega D (AD on vertikaalne raadius) ja punkti, kus rihma alumine sirge osa puutub ratast, tähega E. Nurk AB ja rihma sirge osa vahel olgu  $\alpha$ . Siis  $\angle DAE = \pi - 2\alpha$ .

Pöörlemine toimugu positiivses suunas.

Kineetilise momendi  $L_B$  võib jaotada neljaks osaks:

1) Koos rattaga B pöörleva keha kineetiline moment

$$L_{B1} = \frac{P_1}{g} \vartheta_1^2 \omega_1$$

2) Koos rattaga A pöörleva keha kineetiline moment p. B

suhtes  $L_{B2}$ . Kuna keha massikese seisab paigal, siis arvestada ainult kineetilist momenti telje A suhtes:

$$L_{B2} = L_{A2} = \frac{P_2}{g} \varrho_2^2 \omega_2 = \frac{P_2}{g} \varrho_2^2 \kappa \omega_1,$$

3) Rihma osa, mis asetseb punktide D ja E paremal, kineetiline moment  $L_{B3}$  on kerge arvutada, kuna igal pool kiirusvektori kandesirge kaugus punktist B on võrdne  $r_1$ -ga. Selle rihmaosa pikkus on  $2\ell \cos \alpha + r_1(\pi + 2\alpha)$ . Olgu  $\lambda$  rihma joontihedus (pikkuse ühiku mass). Siis selle rihmaosa kogumass on  $\lambda (2\ell \cos \alpha + r_1(\pi + 2\alpha))$  ja iga punkti kiirus  $v = r_1 \omega_1$ . Seega

$$L_{B3} = \lambda (2\ell \cos \alpha + r_1(\pi + 2\alpha)) r_1^2 \omega_1.$$

4) Kõige raskem on arvutada punktide D ja E vasakul oleva rihmaosa kineetilist momenti  $L_{B4}$ . Võtame sellel osal mingi punkti P. Olgu  $\angle DAP = \varphi$  ja  $\angle APB = \psi$ , siis

$$dL_{B4} = dm \cdot v \cdot BP \sin \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right).$$

Elementaarne mass  $dm = \lambda r_2 d\varphi$ ,  $\sin \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right) = \cos \psi$ . Kolmnurgast PQB (tuletamine joonise nr. 14 kõrval) leiame, et

$$\cos \psi = \frac{r_2 + \ell \sin(\varphi + \alpha)}{BP}.$$

Järelikult

$$dL_{B4} = \lambda r_2 v (r_2 + \ell \sin(\varphi + \alpha)) d\varphi.$$

Seda avaldist integreerides saame (arvestades, et rajad on  $\varphi_0 = 0$  ja  $\varphi = \pi - 2\alpha$  ning  $v = r_1 \omega_1$ )

$$L_{B4} = \lambda r_1 \omega_1 r_2 (r_2 (\pi - 2\alpha) + 2\ell \cos \alpha).$$

Kuna rihma mass

$$\frac{P}{g} = \lambda (r_1(\pi + 2\alpha) + r_2(\pi - 2\alpha) + 2\ell \cos \alpha),$$

võib siit  $\lambda$  kõrvaldada ning saame:

$$L_{B3} + L_{B4} = \frac{Pr_1 \omega_1 [2(r_1 + r_2)l \cos \alpha + r_1^2(\pi + 2\alpha) + r_2^2(\pi - 2\alpha)]}{g[2l \cos \alpha + r_1(\pi + 2\alpha) + r_2(\pi - 2\alpha)]}$$

Märgime, et  $\sin \alpha = \frac{r_1 - r_2}{l}$ .

Seega

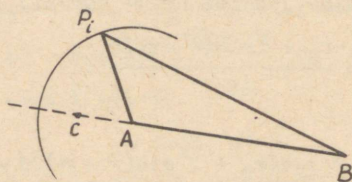
$$L_B = L_{B1} + L_{B2} + L_{B3} + L_{B4} =$$

$$(a) = \frac{\omega_1}{g} \left[ P_1 \vartheta_1^2 + P_2 \vartheta_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Pr_1(2(r_1 + r_2)l \cos \alpha + r_1^2(\pi + 2\alpha) + r_2^2(\pi - 2\alpha))}{2l \cos \alpha + r_1(\pi + 2\alpha) + r_2(\pi - 2\alpha)} \right]$$

Märkus: rihma vasakpoolse osa DPE kineetilise momendi  $L_{B4}$  võib ka teisiti arvutada.

Olgu B ja A kaks liikumatut punkti,  $P_i$  masspunkt.



$$\vec{BP}_i = \vec{BA} + \vec{AP}_i$$

Joon. 15

$$\bar{L}_B = \sum_{i=1}^n \vec{BP}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \times m_i \vec{v}_i =$$

$$= \vec{BA} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{BA} \times M\vec{v}_C + \bar{L}_A$$

Antud juhtumil rihma osa DFE kohta ( $\bar{v}_c \perp AB$ ):

$$L_{B4} = \ell \lambda r_2 (\pi - 2\alpha) v_c + \lambda r_2 (\pi - 2\alpha) v r_2 .$$

Rihma osa DFE massikese asetseb joonel AB punktist A kaugusel

$$\frac{r_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\frac{\pi}{2} - \alpha}$$

(Voronkov, lhk. 191, valem:  $OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  ) .

Järelikult

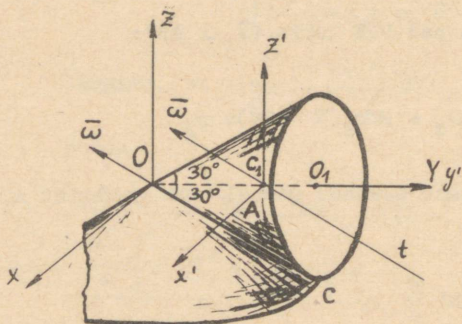
$$v_c = \frac{r_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \omega_2 = \frac{r_1 \omega_1 \cos \alpha}{\frac{\pi}{2} - \alpha} .$$

Seega

$$\begin{aligned} L_{B4} &= 2 \ell \lambda r_1 r_2 \omega_1 \cos \alpha + \lambda r_1 r_2^2 \omega_1 (\pi - 2\alpha) = \\ &= \lambda r_1 r_2 \omega_1 (r_2 (\pi - 2\alpha) + 2 \ell \cos \alpha) . \end{aligned}$$

Vastus: valem (a).

Näide 5 (Ülesande M 598 alusel.)



Joon. 16.

Koonus A teeb 120 pöret minutis paigalseisva koonuse B ümber (koonuse kaasaliikumise nurkkiirus ümber z-telje  $\omega_e = 4\pi \text{ sec}^{-1}$ , relatiivne nurkkiirus ümber telje  $OO_1 \omega_r = 4\sqrt{3} \text{ sec}^{-1}$  ja absoluutne nurkkiirus  $\omega_a = 8 \text{ sec}^{-1}$ ). Koonuse

A kõrgus  $OO_1 = 10 \text{ cm}$ . Leida koonuse A kineetiline moment p.o.suhtes hetkel, mil  $OO_1$  on y-teljel (positiivsel poolel).

Koonus lugeda ühtlaseks, tema kaal  $P = 2 \text{ kg}$ .

Koonuse massikeske  $C_1$  (täht C on juba ära kasutatud) asetseb lõigul  $OO_1$  nii et  $OC_1 = h_1 = \frac{3}{4} OO_1$ . Olgu  $OO_1 = h$ , siis  $h_1 = \frac{3}{4} h$ .

P. 5 valemi(8)järgi

$$\bar{L}_O = \bar{r}_{C_1} \times M\bar{v}_{C_1} + \bar{L}'_{C_1},$$

$$r_{C_1} = h_1, v_{C_1} = \omega_e h_1 = 4\pi h_1, \bar{v}_{C_1} = -4\pi h_1 \bar{k} \perp \bar{r}_{C_1}.$$

$$\text{Järelikult } \bar{r}_{C_1} \times M\bar{v}_{C_1} = \frac{P}{g} h_1 \cdot 4\pi h_1 \bar{k} = \frac{4\pi P h_1^2}{g} \bar{k}.$$

( $\bar{k}$  on z-telje suunaline ühikvektor).

Koonus pöörleb ümber hetkelise telje OC (absoluutne pöörlemistelg) nurkkiirusega  $\omega_a = \omega = 8\pi$ . Nurkkiirusvektor  $\bar{\omega}$  on suunatud piki telge OC vasakule üles. Järelikult koonuse pöörlemine ümber  $C_1$  (relatiivne pöörlemine) on pöörlemine ümber telje t, mis läbib p. $C_1$  ja on paralleelne teljega OC. Nurkkiirusvektori  $\bar{\omega}$  võib üle kanda p. $C_1$ .

Ekslik oleks arvata, et pöörlemine ümber  $p.C_1$  on telje  $OO_1$  ümber pöörlemine. Selle telje ümber pöörleb koonus teljestiku suhtes, mis ise pöörleb  $z$ -telje ümber koos koonuse teljega. Pöörlemist massikeskme ümber tuleb vaadelda teljestiku suhtes, mille teljed oma suundi ruumis ei muuda. Seega peab telg läbi massikeskme, mille ümber relatiivset pöörlemist vaadeldakse, olema alati paralleelne absoluutse pöörlemisteljega (hetkelise kruviteljega) ja nurkkiirus võrdne absoluutse nurkkiirusega.

Kuid koonus ei asetse telje  $t$  suhtes sümmeetriliselt ja see teeb  $\bar{L}'_{C_1}$  arvutamise raskeks.

$$\bar{L}'_{C_1} = \sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i \quad (\text{p. 5 valemile (8) eelnev valem)},$$

$$\bar{v}'_i = \bar{\omega} \times \bar{r}'_i. \quad \text{Seega} \quad \bar{L}'_{C_1} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_i),$$

kuid  $\bar{\omega} = \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$  ( $\omega_x = 0$  vaadeldaval hetkel).

Võtame kasutamisele teljestiku  $C_1$   $x'$   $y'$   $z'$ , milles teljed  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  on paralleelsed vastavalt telgedega  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Uute telgede ühikvektorite tähised  $\bar{i}' = \bar{i}$ ,  $\bar{j}' = \bar{j}$ ,  $\bar{k}' = \bar{k}$  võib jätta endisteks.

Vektorkorrutise distributiivsuse tõttu võib seega pöörlemise ümber telje  $t$  lahutada pöörlemisteks ümber telgede  $y'$  ja  $z'$ . Vastavad nurkkiirusvektorid on:

$\omega_y \bar{j}' = -\omega \cos 30^\circ \bar{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega \bar{j}'$  ( - märk on seepärast, et  $\bar{\omega}$  projektsioon  $y$ -teljel on negatiivne) ja

$$\omega_z \bar{k}' = \omega \cos 60^\circ \bar{k}' = \frac{1}{2} \omega \bar{k}'.$$

Seega  $\bar{L}'_C = \bar{L}'_{y'} + \bar{L}'_{z'}$ .

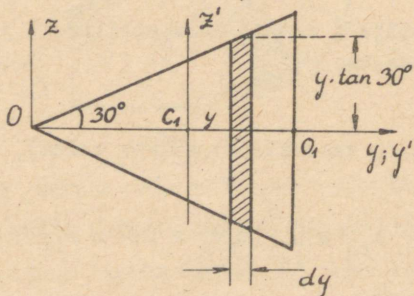
Kuna  $y'$  - telg on koonuse sümmeetriatelg, siis (valem (10), p.7)

$$(b) \quad \bar{L}'_{y'} = \bar{r}'_y \omega_y \bar{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{r}'_y \omega \bar{j}'$$

( $\bar{J}_y$ , on koonuse inertsmoment  $y'$ -telje suhtes).

$z'$ -telg pole aga koonuse sümmeetriatelg ja seepärast ei saa küllaldaste teadmisteta väita, et  $\bar{L}'_z$ , on  $z'$ -telje sihiline (ta siiski on seda, sest, nagu hiljem selgub,  $z'$ -telg on nn. tsentraalpainertstelg).

$\bar{L}'_z$ , leidmiseks arvutame tema ühe elemendi  $d\bar{L}'_z$ , kineetilise momendi p.C<sub>1</sub> suhtes. Koonuse telje punktis, mille ordinaat on  $y$ , lõikame koonusest risti  $y$ -teljega õhukese ketta paksusega  $dy$ . Olgu koonuse massitihedus  $D$ , siis ketta elementaarne mass



Joon. 17.

ketta inertsmoment diameetri suhtes, mis on paralleelne  $z$ -teljega, võrdub:

$$(a) \quad dm = D \pi (y \tan 30^\circ)^2 dy$$

$$\frac{1}{4} dm (y \tan 30^\circ)^2 \quad (\text{vt. Voronkovi } \S 137, \text{ valemit (150)}).$$

Ketta kineetiline moment pöörlemisel ümber vertikaalse diameetri (ketta keskpunkti suhtes) võrdub seega

$$(b) \quad \frac{1}{4} (y \tan 30^\circ)^2 dm \omega_z \bar{K} \quad (\text{valem (10), p.7}).$$

Ketta massikeskme kineetiline moment (kui sinna mõelda koondatuna kogu ketta mass) keskpunkti  $C_1$  suhtes (ketta relatiivsel liikumisel ümber p.C<sub>1</sub>) on

$$(c) \quad dm (y - h_1)^2 \omega_z \bar{K}.$$

Asendades  $dm$  avaldisega (a') ning liites (b') ja (c'), saame

$$d\bar{L}'_z = \frac{\pi}{4} D (y \tan 30^\circ)^4 \omega_z dy \bar{K} + \pi D (y \tan 30^\circ)^2 (y - h_1)^2 \omega_z dy \bar{K}.$$

Järelikult

$$\bar{L}'_z = \pi D (\tan 30^\circ)^2 \omega_z k \left( \frac{1}{4} (\tan 30^\circ)^2 \int_0^h y^4 dy + \int_0^h y^2 (y-h_1)^2 dy \right) =$$

$$= \pi D (\tan 30^\circ)^2 \omega_z k \left( \frac{1}{20} (\tan 30^\circ)^2 h^5 + \frac{h^5}{5} - 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{h^5}{4} + \frac{9}{16 \cdot 3} h^5 \right) k$$

(sest  $h_1 = \frac{3}{4} h$ ). Kuna  $(\tan 30^\circ)^2 = \frac{1}{3}$  ja

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{9}{48} = \frac{4 + 48 - 90 + 45}{240} = \frac{7}{240}, \text{ siis}$$

$$\bar{L}'_z = \frac{7}{240} \pi D h^5 \omega_z k.$$

Koonuse mass

$$\frac{P}{g} = D \frac{\pi (h \tan 30^\circ)^2 h}{3}, \text{ millest}$$

$$(d') \quad D = \frac{3P}{g \pi h^3 (\tan 30^\circ)^2}. \text{ Asendades saame}$$

$$(c') \quad \bar{L}'_z = \frac{7 P h^2 \omega_z}{80 g} k, \quad \left( \frac{7 P h^2}{80 g} = J_{z'} \right).$$

Arvutada veel valemis (b) esinev  $J_y$ . Kasutades eespool olnud elementaarset ketast, saame

$$dJ_y = \frac{1}{2} dm (y \tan 30^\circ)^2 \quad (\text{Voronkov § 137, valem (149)}).$$

Asendades (a') saame:

$$dJ_y = \frac{1}{2} D \pi (y \tan 30^\circ)^4 dy \text{ ja integreerides}$$

$$J_y = \frac{1}{2} D \pi (\tan 30^\circ)^4 \frac{h^5}{5} = \frac{1 \cdot 3 P \pi (\tan 30^\circ)^4 h^5}{2 g \pi h^3 (\tan 30^\circ)^2 \cdot 5} = \frac{Ph^2}{10 g}.$$

Liites (a), (c) ja (b) ning võttes arvesse, et  $h_1 = \frac{3}{4} h$  ja

$$\omega_z = \frac{1}{2} \omega = 4\pi, \text{ saame}$$

$$\bar{L}_O = \left( \frac{9\pi Ph^2}{4g} + \frac{7Ph^2\pi}{20g} \right) \bar{k} - \frac{\sqrt{3} Ph^2 \cdot 8\pi}{2 \cdot 10g} \bar{j} \quad \text{enh}$$

$$\bar{L}_O = \frac{13\pi Ph^2}{5g} \bar{k} - \frac{2\sqrt{3}\pi Ph^2}{5g} \bar{j}.$$

Asendades  $P = 2\text{kG}$  ja  $h = 0,1 \text{ m}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ,

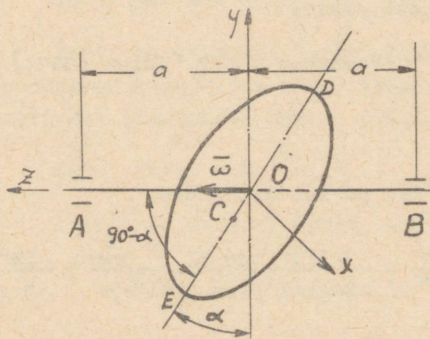
saame lõplikult:

$$\bar{L}_O = -0,00444 \bar{j} + 0,01666 \bar{k} \quad [\text{kGmsec}].$$

Koonuse edasisel pöörlemisel jääb vektor  $\bar{L}_O$  tasapinda, mis läbib z-telje, koonuse telje  $OO_1$ ,  $|\bar{L}_O| = \text{const}$  ja  $L_{Oz} = 0,01666 = \text{const}$ . Ühe sõnaga, vektor  $\bar{L}_O$  pöörleb ümber z-telje nurkkiirusega  $\omega_e = 4\pi$ . Tema lõpp-punkt liigub mööda ringjoont, mille keskpunkt on z-teljel, tasapind risti z-teljega ja raadius  $0,00444 \text{ m}$ . Kokkuvõetult: vektor  $\bar{L}_O$  on jäigalt seotud koonuse kaasamineku-liikumisega (pöörlemisega z-telje ümber).

Vastus:  $\bar{L}_O = -0,00444 \bar{j} + 0,01666 \bar{k} \quad \text{kGmsec}$ .

Näide 6 (Ülesande M 1110 alusel.)



Joon. 18.

Ühtlane õhuke ketas on paigutatud horisontaalse võlli keskohta ekstsentrilisusega  $OC = e$  ja nurga  $90^\circ - \alpha$  all võlli telje suhtes. Ketta kaal on  $P$ , raadius  $r$ . Leida ketta kineetilise moment laagri punkti  $B$  suhtes ketta ja võlli ühtlasel pöörlemisel nurkkiirusega  $\omega$ . Laagrite vahetähekaugus  $AB = 2a$ .

$$\vec{L}_B = \vec{BC} \times M\vec{v}_C + \vec{L}_C \quad (\text{p.5 valem(8)}).$$

Punkti B koordinaadid on 0, 0, -a, punkti C koordinaadid -e, -e cos α, e sin α. Järelikult  $\vec{BC} = -e \cos \alpha \vec{j} + (e \sin \alpha + a) \vec{k}$ . Olgu pöörlemine positiivne (s.o. p.C liigub ettepoole), siis

$$\vec{v}_C = e \cos \alpha \cdot \omega \vec{i}.$$

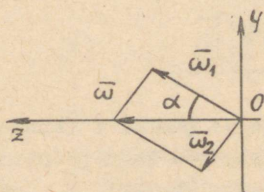
$$M = \frac{P}{g}, \text{ seega}$$

$$\vec{BC} \times M\vec{v}_C = \frac{P}{g} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -e \cos \alpha & (e \sin \alpha + a) \\ e \cos \alpha \cdot \omega & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(a)

$$= \frac{P}{g} (e \sin \alpha + a) e \cos \alpha \omega \vec{j} + \frac{P}{g} (e \cos \alpha)^2 \omega \vec{k}.$$

Nurkkiiruse vektori  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  (mille kanname punkti C) lahutame kaheks komponendiks:



1) risti kettaga

$$\vec{\omega}_1 = \omega \cos^2 \alpha \vec{k} + \omega \cos \alpha \sin \alpha \vec{j},$$

2) ketta diameetri DE sihile

$$\vec{\omega}_2 = \omega \sin^2 \alpha \vec{k} - \omega \sin \alpha \cos \alpha \vec{j}.$$

Joon. 19.

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{C_1} + \vec{L}_{C_2}, \text{ milles } \vec{L}_{C_1} \text{ on kineetiline moment}$$

p. C suhtes relatiivsel pöörlemisel ümber telje, mis läbib p. C ja on kettaga risti, ja  $\vec{L}_{C_2}$  - pöörlemisel ümber

diameetri DE. Kuna mõlema telje suhtes on ketas sümmeetriline, siis p.7 valem (10) järgi

$$(b) \quad \vec{L}_{C_1} = \int_{C_1} \vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \vec{\omega}_1,$$

$$(c) \quad \bar{L}_{c_2}' = J_{c_2} \bar{\omega}_1 = \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \bar{\omega}_2 .$$

( $J_{c_1}$  ja  $J_{c_2}$  arvutatud Voronkovi raamatust § 137 valemite (149) ja (150) järgi). Liites (a), (b), (c) ja kasutades valemeid  $\bar{\omega}_1$  ja  $\bar{\omega}_2$  jaoks, saame

$$\begin{aligned} \bar{L}_B = & \left[ \frac{P}{g} (e \sin \alpha + a) e \cos \alpha \cdot \omega + \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \omega \cos \alpha \sin \alpha - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \omega \sin \alpha \cos \alpha \right] \bar{j} + \left[ + \frac{P}{g} (e \cos \alpha)^2 \omega + \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \omega \cos^2 \alpha + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \omega \sin^2 \alpha \right] \bar{k} = \frac{P}{g} \omega \cos \alpha \left[ (e^2 + \frac{1}{4} r^2) \sin \alpha + ae \right] \bar{j} + \\ & + \frac{P}{g} \omega \left[ (\frac{1}{4} r^2 + e^2) \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} r^2 \right] \bar{k} . \end{aligned}$$

Löplikult:

$$(d) \quad \bar{L}_B = \frac{P}{g} \left[ a e \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} (e^2 + \frac{1}{4} r^2) \right] \bar{j} + \\ + \frac{P}{g} \omega \left[ \frac{1}{4} r^2 + (\frac{1}{4} r^2 + e^2) \cos^2 \alpha \right] \bar{k} .$$

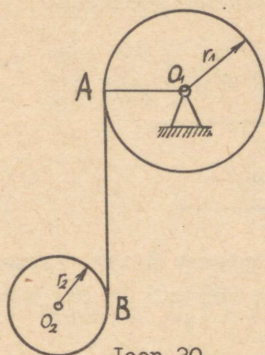
$\bar{L}_B$  asetseb tasapinnas läbi  $z$ -telje ja punkti  $C$  (suuna- ga vasakule üles) ning jääb sellesse tasapinda kogu pöörlemise vältel.  $|\bar{L}_B| = \text{const}$ , samuti  $L_{By} = \text{const}$ . Vektori  $\bar{L}_B$  ots- punkt liigub ringjoonel, mille tsenter on  $z$ -teljel ja mille raadiuseks on  $L_{By}$ . Vektor  $\bar{L}_B$  pöörleb  $z$ -telje ümber nurk- kiirusega  $\omega$ .

Kokkuvõtlikult: vektor  $\bar{L}_B$  on kettaga jäigalt seotud.

Vastus: valem (d).

Näide 7. (Ülesande M 1114 (995) alusel.)

Kahe ühtlase pöördsilindri  $A$  ja  $B$  kaalud on vasta- valt  $P_1$  ja  $P_2$ , raadiused aga  $r_1$  ja  $r_2$ . Silindrite ümber



Joon.20.

on keritud niidid, mille keerud asetsevad silindrite põhjadega paralleelsete kesktasapindadega sümmeetriliselt: silindrite teljed on horisontaalsed ja rööbikud. Silindri A telg on paigal; silinder B langeb paigalseisust raskusjõu mõjul.

Arvutada süsteemi kineetiline moment punkti  $O_1$  suhtes (telje suhtes, mis läbib p.  $O_1$  ja on risti joonise tasapinnaga).

Süsteemi kineetiline moment  $L_{O_1}$  p.  $O_1$  suhtes on kolme kineetilise momendi summa:

1) Silindri  $O_1$  kineetiline moment

$$(a) \quad \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r_1^2 \omega_1,$$

2) silindri  $O_2$  kineetiline moment pöörlemisel ümber raskuskeskme (ümber telje, mis läbib p.  $O_2$  ja on joonise tasapinnaga risti)

$$(b) \quad \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2 \omega_2 \quad \text{ja}$$

3) Silindri massikeskme  $O_2$  kineetiline moment (kui oletada, et sinna on koondatud silindri kogu mass):

$$(c) \quad \frac{P_2}{g} v_{O_2} (r_1 + r_2).$$

Arvestades, et punktid A ja B liiguvad võrdse kiirusega, saame

$$v_{o2} = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 \text{ ja}$$

$$(d) \quad L_{o_1} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r_1^2 \omega_1 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2 \omega_2 +$$


---


$$+ \frac{P_2}{g} (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)(r_1 + r_2) .$$

On kasutatud valemit Voronkovi õpikust § 137, valem (149) ja käesoleva kirjutise valemeid (9) p.6 ja (8) p.5.

Vastus: valem (d).

#### 10. Süsteemi kineetilise momendi teoreem (vektoriaalselt)

Kineetilise momendi teoreemi saamiseks arvutame  $\bar{L}_O$  tuletise aja järgi (liikumatu punkt O on võetud inertsiaal-süsteemis alguseks):

$$\frac{d \bar{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^n \left[ (\dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i) + (\bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{v}}_i) \right].$$

Kuid  $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i$  ja  $\dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i = m_i (\bar{v}_i \times \bar{v}_i) = \bar{0}$ .

$\dot{\bar{v}}_i = \bar{w}_i$  on masspunkti kiirendus. Seega

$$(14) \quad \frac{d \bar{L}_O}{dt} = \dot{L}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{w}_i) .$$

Et saadud avaldist siduda süsteemile mõjuvate jõududega, kasutame mehhaanika teist põhiseadust.

Olgu  $\bar{F}_i^{(e)}$  i-ndale masspunktile mõjuvate välisjõudude resultant ja  $\bar{F}_i^{(i)}$  - sisejõudude resultant, siis (teise põhiseaduse järgi)

$$m_i \bar{w}_i = \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)} .$$

Asendades valemisse (14), saame

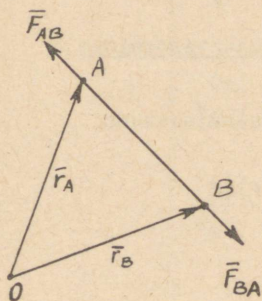
$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{-(e)} + \vec{F}_i^{-(i)}) \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(e)} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(i)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(e)} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(i)}. \end{aligned}$$

Suurust  $M_0^{-(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(e)}$  nimetatakse süsteemile

mõjuvate välisjõudude peamomendiks punkti O suhtes. Analoogiline suurus sisejõudude kohta

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{-(i)}$$

võrdub nullvektoriga.



Joon.21.

Selle tõestamiseks vaatleme kahe masspunkti teineteist vastastikku mõjutavate jõudude momente. Nende momentide summa

$$M_{O,AB}^{-(i)} = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} + \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA}^{-(i)}.$$

Selles avaldises  $\vec{F}_{BA}^{-(i)} = -\vec{F}_{AB}^{-(i)}$  (mehaanika kolmanda põhiseaduse põhjal) ja

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}, \text{ seega}$$

$$M_{O,AB}^{-(i)} = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} + (\vec{r}_A + \vec{AB}) \times (-\vec{F}_{AB}^{-(i)}) = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} -$$

$$-\vec{r}_A \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} - \vec{AB} \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} = 0,$$

sest  $\vec{AB} \times \vec{F}_{AB}^{-(i)} = 0$  (kolineaarsete vektorite vektorkorrutis).

Süsteemis mõjuvaid sisejõude on kõiki võimalik niisugusteks paarideks rühmitada ja

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times F_i^{(i)} = \bar{0} .$$

Võttes kokku arutluse tulemuse, saame

$$(15) \quad \boxed{\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^{(e)}}$$

Tuletis aja järgi süsteemi kineetilisesest momendist mingi liikumatu punkti suhtes võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude sama punkti suhtes võetud peamomendiga (süsteemi kineetilise momendi teoreem).

$$\text{Suuruse } \frac{d\bar{L}_O}{dt} \text{ ühikud: } \left[ \frac{\text{gcm}^2}{\text{sec}^2} \right] = \left[ \text{erg} \right] ; \left[ \text{kGm} \right] .$$

#### 11. Kineetilise momendi teoreem projektsioonides

Koordinaadisüsteem Oxyz on inertsiaalsüsteem.

$$\text{Olgu } \bar{L}_O = L_x \bar{i} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k} , \text{ siis}$$

$$\dot{\bar{L}}_O = \dot{L}_x \bar{i} + \dot{L}_y \bar{j} + \dot{L}_z \bar{k} ,$$

$$\bar{w}_i = w_{ix} \bar{i} + w_{iy} \bar{j} + w_{iz} \bar{k} = \ddot{x}_i \bar{i} + \ddot{y}_i \bar{j} + \ddot{z}_i \bar{k} .$$

p. 10 valem (14) järgi:

$$\dot{\bar{L}}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ m_i \ddot{x}_i & m_i \ddot{y}_i & m_i \ddot{z}_i \end{vmatrix} .$$

Arvutades saame

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{L}_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i) , \\ \dot{L}_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i) , \\ \dot{L}_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) . \end{cases}$$

Analoogiliselt

$$M_o^{(e)} = M_x^{(e)} \bar{i} + M_y^{(e)} \bar{j} + M_z^{(e)} \bar{k} \quad \text{ja}$$

$$(17) \quad \begin{cases} M_x^{(e)} = \sum_{i=1}^n (y_i z_i^{(e)} - z_i y_i^{(e)}) \\ M_y^{(e)} = \sum_{i=1}^n (z_i x_i^{(e)} - x_i z_i^{(e)}) \\ M_z^{(e)} = \sum_{i=1}^n (x_i y_i^{(e)} - y_i x_i^{(e)}) . \end{cases}$$

$$F_i^{(e)} = X_i^{(e)} \bar{i} + Y_i^{(e)} \bar{j} + Z_i^{(e)} \bar{k} .$$

Eelnevates tähistes võib otsekohe avaldada kineetilise momendi teoreemi projektsioonides:

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{L}_x = M_x^{(e)} \\ \dot{L}_y = M_y^{(e)} \\ \dot{L}_z = M_z^{(e)} \end{cases}$$

Tuletis aja järgi süsteemi kineetilise momendist mingi liikumatu telje suhtes võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude sama telje suhtes võetud peamomendiga.

Nii siin kui ka eelnevas p. 10 teoreemis tuleb rõhutada punkti või telje liikumatust, mille suhtes võetakse momendid. Jättes selle nõudmise täitmata muutub kineetilise momendi tuletise arvutamine hoopis teistsuguseks.

## 12. Süsteemi kineetilise momendi jäävus

Süsteemi liikumine on määratud, kui on teada kõigi tema punktide koordinaadid igal ajahetkel. Seega võib neid koordinaate vaadelda aja  $t$  funktsioonidena, samuti ka neist tuletatud suurusi (kiirusi, kiirendusi, liikumishulka, kineetilist momenti, jne.):

$$\bar{L}_0 = \bar{L}_0(t), \quad L_x = L_x(t), \quad \text{jne.}$$

1) Oletame nüüd, et süsteemile mõjuvate välisjõudude peamoment mingi liikumatu telje suhtes (mida loeme  $z$ -teljeks) võrdub kogu liikumise vältel nulliga:

$$M_z^{(e)} = 0.$$

P. 11 valemi (18) järgi ka  $\dot{L}_z = 0$  ehk  $\frac{dL_z}{dt} = 0$ .

Sellest järeldub matemaatilise analüüsi seaduste järgi, et

$$(19) \quad \underline{L_z = \text{const, s.o.}}$$

kui süsteemile mõjuvate välisjõudude peamoment mingi liikumatu telje suhtes kogu liikumise vältel võrdub nulliga, siis süsteemi kineetiline moment selle telje suhtes on konstantne.

2) Olgu süsteemile mõjuvate välisjõudude peamoment mingi liikumatu punkti  $O$  suhtes (mida loeme koordinaatide alguspunktiks) kogu liikumise vältel võrdne nulliga:

$$M_O^{(e)} = M_X^{(e)} \bar{c} + M_Y^{(e)} \bar{f} + M_Z^{(e)} \bar{k} = 0,$$

järelikult ka  $M_X^{(e)} = M_Y^{(e)} = M_Z^{(e)} = 0$ .

P. 11 valemite (18) järgi siis

$$\dot{\bar{L}}_X = \dot{\bar{L}}_Y = \dot{\bar{L}}_Z = 0 \quad \text{ehk} \quad \dot{\bar{L}}_O = 0.$$

Siit järgneb, et  $L_X$ ,  $L_Y$  ja  $L_Z$  on konstandid, seega ka

$$(20) \quad \bar{L}_O = \text{const},$$

kui süsteemile mõjuvate välisjõudude peamoment mingi liikumatu punkti suhtes kogu liikumise vältel võrdub nulliga, siis süsteemi kineetiline moment sama punkti suhtes on konstantne.

Päikesesüsteemi raskuskeskpunkt seisab mingis inertsiaal-süsteemis paigal (kui jätta arvestamata teiste, kaugete taevakehade mõju), seega päikesesüsteemi kineetiline moment süsteemi massikeskme suhtes on konstantne. Tasapind läbi massikeskme, mis on risti kineetilise momendi vektoriga, ei muuda oma asendit ruumis.

### 13. Kineetilise momendi teoreemi kinemaatiline interpretatsioon (Réali teoreem)

Süsteemi kineetilise momendi vektori  $\bar{L}_O$  algus on liikumatus punktis  $O$ , mille suhtes see moment on võetud. See vektor muutub ajaga (välja arvatud p.12 vaadeldud juhtum).

Seega vektor  $\bar{L}_O$  lõpp-punkt liigub ruumis. Vektorit  $\bar{L}_O$  võib vaadelda kohavektorina, millest selgub, et tema lõpp-punkti kiirus  $\bar{u}$  avaldub kujul (kui kineetilise momendi ühikut kujutab pikkuse ühik):

$$\bar{u} = \frac{d\bar{L}_O}{dt} \quad (\text{nagu } \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}).$$

kasutades seost (15) p. 10, saame:

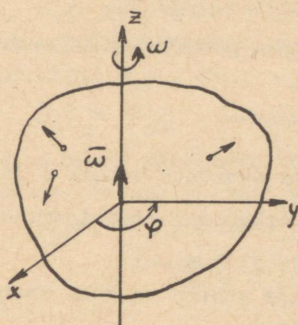
$$(21) \quad \bar{u} = \frac{-(e)}{M_O}, \text{ s.o.}$$

ruumi mingi liikumatu punkti suhtes võetud süsteemi kineetilise momendi vektori lõpp-punkti kiirus (kui vektor) võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude sama punkti suhtes võetud peamomendiga.

Tuleb märkida, et  $\bar{u}$  ühikuks on jõumomendi (töö) ühik. Kui kineetilise momendi ühik esitada löiguga, mis võrdub pikkuse ühikuga, siis  $\bar{L}_O$  otspunkti kiirus (kiiruse ühikut) võrdub  $|\bar{u}|$ .

Kineetilise momendi jäävuse teoreemil põhjeneb, näiteks, võimalus muuta raketi pikitelje suunda raketi liikumisel maailmaruumis. Oletame, et raketil asetseb elektrimootor, mille telg on risti raketi teljega, ja et viimane telg ei oma pöörlemist. Seega mootori seismisel süsteemi kineetiline moment telje suhtes, mis läbib massikeset ja on paralleelne mootori teljega, võrdub 0-ga. Kui panna mootor pöörlema, siis tema kineetiline moment eelmises lauses nimetatud telje suhtes saab nullist erinevaks. Kuna aga välisjõude mõjumas pole, peab raketit hakkama pöörlema mootoriga vastupidises suunas nii, et kogu kineetiline moment edaspidigi püsiks võrdne nulliga. Kui raketit on pöördunud vajaliku nurga võrra, jätta mootor seisma.

14. Kinnistelje ümber pöörleva kõva keha liikumise  
diferentsiaalvõrrand



Olgu pöörlemisteljeks  $z$ -telg. Kehale mõjugu välisjõud, mille pea-moment telje suhtes on  $M_z^{(e)}$ .

Keha kineetiline moment  $z$ -telje suhtes

$$L_z = J_z \omega \quad (\text{valem (9) p.6}).$$

Seega

$$\dot{L}_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} \quad \text{ehk}$$

Joon. 22.

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{ehk} \quad J_z \varepsilon$$

(sest  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , milles  $\varphi$  on keha pöördenurk,  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  -

nurkkiirendus). Kõva keha inertsmoment kehaga kindlalt seotud telje suhtes ( $J_z$ ) on konstantne suurus.

P. 11 valemi (18) järgi võib kirjutada liikumise dife-rentsiaalvõrrandi:

$$(22) \quad \begin{cases} J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(e)} & \text{ehk} \\ J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^{(e)} & \text{ehk} \quad J_z \ddot{\varphi} = M_z^{(e)} & \text{ehk} \\ J_z \varepsilon = M_z^{(e)} \end{cases}$$

Viimast varianti kasutatakse harilikult siis, kui  $\varepsilon = \text{const}$  (ühtlaselt muutuv pöörlemine), s.o. kui ka  $M_z^{(e)} = \text{const}$ .

Punkti liikumisel mööda x-telge omab liikumisel diferentsiaalvõrrand järgmise kuju:

$$m \ddot{x} = X.$$

Kui sellega seada vastavusse kõva keha pöörlemise diferentsiaalvõrrand

$$\bar{J}_Z \ddot{\varphi} = M_Z^{(e)},$$

siis näeme, et vastavus on järgmiste suuruste vahel:  $m$  ja  $\bar{J}_Z$ ,  $\ddot{x}$  ja  $\ddot{\varphi}$ ,  $X$  ja  $M_Z^{(e)}$ . Seega keha pöörlemisel omab inertsmoment sama tähendust, mis mass punkti liikumisel:

keha inertsmoment pöörlemistelje suhtes on keha inertsi mõõduks ümber selle telje pöörlemisel.

15. N.E. Žukovski pink kineetilise momendi jäävuse demonstreerimiseks

Žukovski pink on kolmejalgsele alusele asetatud rõhtne ringikujuline platvorm, mis võib (võimalikult hõrdevabalt) pöörelda vertikaalse telje (z-telje) ümber. Selle platvormi keskele on sageli kinnitatud pink istumiseks. Pingile istuv inimene võtab kummassegi kätte raske keha (vihi) ja viib need pöörlemisteljest võimalikult kaugemale (hoides käsi rõhtsalt õlgade kõrgusel). Pink pannakse pöörlema (nurkkiirusega  $\omega_1$ ). Kui nüüd pingil istuv inimene tõmbab vihid võimalikult keha ligi, suureneb pöörlemise nurkkiirus (oletame väärtuseni  $\omega_2$ ). Kuidas nähtust seletada? Arvestamata õhutakistust ja hõõrdjõudu laagrites mõjuvad süsteemile (platvorm, inimene, vihid) kaalud ja laagrireaktsioonid. Viimaste kandesirged läbivad z-telje, seega nende momendid telje suhtes võrduvad nulliga. Kaalud aga on suunatud vertikaalselt alla (paralleelselt teljega), järelikult ka nende momendid telje suhtes võrduvad nulliga. Seega

$$M_Z^{(e)} = 0 \text{ ja valemi (19) p.12 kohaselt}$$

$$L_z = \text{const}$$

$$L_z = J_z \omega \quad (\text{valem (9), p.6}).$$

Olgu pöörlemise algul (kui käed on kehast eemaldatud) süsteemi inertsmoment  $J_{z1}$ , ja lõpul (kui käed on tõmmatud keha ligi)  $J_{z2}$ , siis

$J_{z1} > J_{z2}$  seepärast, et pöörlemise algul vihid (ja ka käed) asetsevad teljest kaugemal kui lõpul, muude kehaosaade kaugus teljest aga ei muutunud.

Kineetiline moment on algul

$$L_{z1} = J_{z1} \omega_1 \quad \text{ja lõpul}$$

$$L_{z2} = J_{z2} \omega_2.$$

Kuna kineetiline moment kogu liikumise vältel on const, siis peab

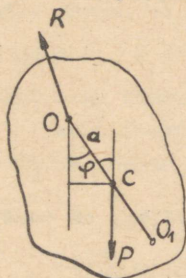
$$J_{z1} \omega_1 = J_{z2} \omega_2 \quad \text{ehk}$$

$$\omega_2 = \frac{J_{z1}}{J_{z2}} \omega_1 > \omega_1, \quad \text{sest} \quad \frac{J_{z1}}{J_{z2}} > 1.$$

Tekib küsimus, kas pingil istuja võib iseennast koos pingiga pöörlema panna ilma väliseid tugesid kasutamata. Võib küll. Näiteks siis, kui ta võtab kätte mingi raske eseme ja hakkab seda keerutama pea kohal nii, et ese liiguks teljest teatud kaugusel (umbes ringjoont mööda). Selle tagajärjel hakkab ping vastupidises suunas pöörlema (sest kogu kineetiline moment telje suhtes peab jääma nulliga võrdseks). Kui nüüd teatud hetkel, mil raske ese on teljest hästi kaugel, lasta ta vabaks, siis jääb pingi pöörlemine püsima (seepärast, et jääb püsima ka eseme kineetiline moment telje suhtes). Kui aga lõpetada eseme keerutamine nii, et ese jääb pingil istuja kätte, siis lõpeb ka pingi pöörlemine (sest kogu süsteemi kineetiline moment peab võrduma nulliga).

## 16. Füüsikaline pendel

Füüsikaliseks pendliks nimetatakse kõva keha, mis võib vabalt pöörelda rõhtsa telje ümber, kusjuures kehale mõjuvaks aktiivseks jõuks on tema kaal.



Joon.23.

Läbige pöörlemistelg (mida loeme z-teljeks) keha punkti O ja olgu risti joonestuse tasapinnaga. Punkt C on pendli massikeske,  $OC = a$ . Kehale mõjuv raskusjõud P on rakendatud p. C. Peale selle mõjuvad pendlile laagrite reaktsioonid, mille resultandi R kandesirge läbige p.O.  $\varphi$  on pendli hälbenurk vertikaalst (joonisel positiivne).

P.14, valemi (22) järgi

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z^{(e)}$$

Kuna reaktsioonijõu R kandesirge läbib z-telje, siis tema moment selle telje suhtes on 0. Seega

$$M_z^{(e)} = M_z^-(P) = -P a \sin \varphi = -Mga \sin \varphi.$$

Saame diferentsiaalvõrrandi

$$J_z \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi \quad \text{ehk}$$

$$(23) \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mga}{J_z} \sin \varphi = 0$$

(füüsikalise pendli liikumise diferentsiaalvõrrand).

Selle võrrandi lahend ei avaldu elementaarsete funktsioonide abil. Tuleb võtta kasutusele nn. elliptilised funktsioonid. Võib saada ligikaudseid lahendeid soovitava täpsu-

sega, kui arendada  $\sin \varphi$  Taylori ritta:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 - \dots$$

Kui piirduda reaksarenduse esimese liikmega, s.o. võtta  $\sin \varphi = \varphi$  (mida võib pidada lubatavaks siis, kui  $\varphi$  väärtused jäävad väikesteks, näit., kui amplituud ei ületa nelja, viit kraadi), siis saadakse ligikaudne füüsikalise pendli diferentsiaalvõrrand

$$(24) \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mga}{J_z} \varphi = 0$$

See on harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrand (tuletame meelde:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 - x\text{-i asemele on tulnud } \varphi \text{ ja } k^2 \text{ asemele } \frac{Mga}{J_z} ) .$$

Selle võrrandi üldlahend on

$$(25) \quad \varphi = A \sin (kt + \alpha), \text{ milles}$$

$k = \sqrt{\frac{Mga}{J_z}}$ . Võib leida ka võnkumise perioodi

$$(26) \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mga}} .$$

Matemaatilise pendli perioodi valem on:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

( $l$  - pendli pikkus) .

Antud füüsikalise pendliga võrdse perioodiga matemaatilise pendli pikkust nimetatakse füüsikalise pendli taandatud (reduitseeritud) pikkuseks. Teda leitakse tingimusest  $T = T'$  ehk

$$\frac{l}{g} = \frac{J_z}{Mga}, \text{ kust}$$

$$(27) \quad \ell = \frac{J}{Ma} .$$

Punkt  $O_1$ , mis saadakse, kui punktist  $O$  mööda sirget  $OC$  möödetakse pikkus  $\ell : OO_1 = \ell$ , nimetatakse füüs. pendli võnkumiste tsentriks. Punktid  $O$  ja  $O_1$  on vahetatavad, s.o. kui paneme pendli telje läbi  $p.O_1$  (risti joonise tasapinnaga), siis võnkumise periood jääb samaks. Seda asjaolu kasutatakse nn. reversioonpendlite puhul, mille abil määratakse täpsed raskuskiirenduse  $g$  väärtused vajalikes kohtades.

### 17. Kineetilise momendi teoreem massikeskme suhtes

P.5 valem (8) järgi

$$\bar{L}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{L}_C' . \text{ Seega}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \dot{\bar{r}}_C \times M\bar{v}_C + \bar{r}_C \times M\dot{\bar{v}}_C + \bar{L}_C' ,$$

$$\dot{\bar{r}}_C = \bar{v}_C \text{ ja } \dot{\bar{v}}_C = \bar{w}_C \text{ (massikeskme kiirendus),}$$

$$\bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0, \text{ millest}$$

$$(28) \quad \frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{r}_C \times M\bar{w}_C + \frac{d\bar{L}_C'}{dt} .$$

Seejuures  $\frac{d\bar{L}_C'}{dt} = \bar{u}'$  on vektori  $\bar{L}_C'$  lõpp-punkti relatiivne kiirus massikeskme  $C$  suhtes.

Arvutame analoogiliselt ka  $M_O^{-(e)}$  (vt. p.5 algus)

$$\begin{aligned} M_O^{-(e)} &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times F_i^{-(e)} = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_C + \bar{r}_i') \times F_i^{-(e)} = \\ &= \bar{r}_C \times \sum_{i=1}^n F_i^{-(e)} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i' \times F_i^{-(e)} . \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{-(e)} = \vec{F}^{-(e)} \quad \text{on välisjõudude peavektor,}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{-(e)} = \vec{M}_c^{-(e)} \quad \text{on välisjõudude peamoment raskus-}$$

keskme suhtes. Seega

$$(29) \quad \vec{M}_o^{-(e)} = \vec{r}_c \times \vec{F}^{-(e)} + \vec{M}_c^{-(e)} .$$

Süsteemi massikeskme liikumise teoreemi järgi

$$M\vec{w}_c = \vec{F}^{-(e)}$$

(süsteemi massikeskme liigub nagu masspunkt, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja millele on rakendatud kõik süsteemile mõjuvad välisjõud)

Järelikult ka

$$\vec{r}_c \times M\vec{w}_c = \vec{r}_c \times \vec{F}^{-(e)} \quad \text{ja}$$

valemite (28) ja (29) võrdsustamisest saame (vasakud pooled võrdsed, p.10 valem(15)):

$$(30) \quad \frac{dL_c}{dt} = M_c^{-(e)}, \quad \text{s.o.}$$

süsteemi relatiivsel liikumisel massikeskme ümber selle keskmes suhtes võetud kineetilise momendi tuletis aja järgi võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude sama punkti suhtes võetud peamomendiga.

$$\text{Teisiti: } \vec{u}' = M_c^{-(e)}, \quad \text{s.o.}$$

süsteemi relatiivsel liikumisel massikeskme ümber selle keskmes suhtes võetud kineetilise momendi vektori lõpp-punkti relatiivne kiirus (massikeskme suhtes) võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude sama punkti suhtes võetud peamomendiga.

Seega kehtib erandina kineetilise momendi teoreem ka massikeskme suhtes vaatamata sellele, et see punkt üldiselt võib ruumis liikuda meelevaidselt.

18. Köva keha liikumise üldjuhtum. Tasaparalleelne liikumine

Köva keha liikumine on kinemaatilisel määratud, kui on teada

1) tema ühe punkti A liikumine (liikumise võrrandid  $x_A = f_1(t)$ ,  $y_A = f_2(t)$  ja  $z_A = f_3(t)$ ) ja

2) pöörlemine selle punkti ümber (Euleri nurgad kui aja funktsioonid:  $\Psi = f_4(t)$ ,  $\vartheta = f_5(t)$  ja  $\varphi = f_6(t)$ ).

Dünaamikas saab eelnimetatud keha liikumist määrata diferentsiaalvõrrandite abil. Vastavalt kuuele vabadusastmele peaks neid diferentsiaalvõrrandeid olema kuus (üksteisest sõltumatud).

Nendeks võib valida järgmised:

1) massikeskme teoreemi järgi kolm diferentsiaalvõrrandit (vektoriaalsel kujul võib võtta kokku üheks):

$$1) \quad M \ddot{\bar{r}}_c = \bar{F}^{(e)} \quad \text{ehk} \quad M \ddot{\bar{w}}_c = \bar{F}^{(e)} .$$

Need võrrandid (koos algtingimustega) määravad massikeskme liikumise.

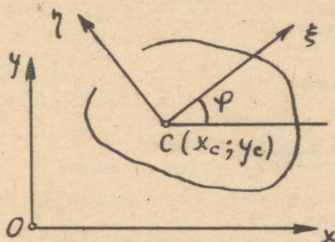
2) Määrata pöörlemine ümber massikeskme, milleks sobivad p. 17 valemis(30) esinevad võrrandid:

$$2) \quad \frac{d\bar{L}_c}{dt} = \bar{M}_c^{(e)} .$$

Kokkuvõetult: köva keha liikumise üldjuhtumil määravad järgmised vektoriaalsel kujul antud diferentsiaalvõrrandid (koos algtingimustega):

$$(31) \quad \begin{cases} 1) \quad M \ddot{\bar{w}}_c = \bar{F}^{(e)} \\ 2) \quad \frac{d\bar{L}_c}{dt} = \bar{M}_c^{(e)} \end{cases}$$

Rakendusena käsitleme kõva keha tasaparalleelset liikumist ( $xy$ -tasapinnal). Keha tasaparalleelse liikumise eelduseks on tingimused:



$$1) z^{(e)} = 0,$$

$$2) x^{(e)} = 0,$$

$$3) M_y^{(e)} = 0.$$

Joon. 24.

Jäävad  $X^{(e)}$ ,  $Y^{(e)}$  ja  $M_z^{(e)}$ .

Valemist (31) 1) saadakse massikeskme liikumise diferentsiaalvõrrandid:

$$1) M \ddot{x}_c = X^{(e)},$$

$$2) M \ddot{y}_c = Y^{(e)}.$$

Liikumine massikeskme suhtes on pöörlemine ümber telje, mis läbib massikeskme ja on  $xy$ -tasapinnaga risti.

Olgu keha inertsmoment selle telje suhtes  $J_{c\omega}$  (inertsmoment telje suhtes, mis läbib massikeskme ja on paralleelne nurkkiirusvektoriga  $\vec{\omega}$ ) ja välisjõudude moment sama telje suhtes  $M_{c\omega}^{(e)}$ .

$$\text{Siis } L_c = L_{c\omega} = J_{c\omega} \omega \text{ ja}$$

$$\dot{L}_{c\omega} = J_{c\omega} \dot{\omega} = J_{c\omega} \varepsilon \text{ ehk } J_{c\omega} \ddot{\varphi}.$$

Vastavalt valemile (31) 2) saadakse diferentsiaalvõrrand:

$$3) J_{c\omega} \ddot{\varphi} = M_{c\omega}^{(e)}$$

Seega on kõva keha tasaparalleelne (tasapinnaline) liikumine määratud järgmise kolme diferentsiaalvõrrandiga (vastavalt tasaparalleelse liikumise kolmele vabadusastmele):

$$(32) \quad \begin{aligned} 1) \quad M \ddot{x}_c &= X^{(e)} \\ 2) \quad M \ddot{y}_c &= Y^{(e)} \\ 3) \quad I_c \ddot{\varphi} &= M_c^{(e)} \end{aligned}$$

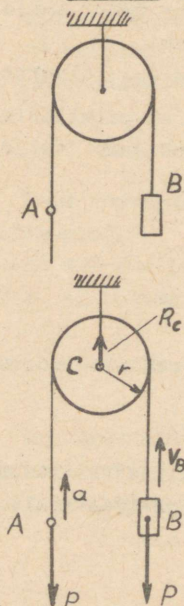
Neile lisanduvad liikumise algtingimused.

### 19. Kõva keha inertsmomendi katseline määramine

Kõva keha inertsmomendi katselist määramist käsitlevad p. 20 näited 9, 10.

### 20. Näiteid süsteemi kineetilise momendi teoreemide rakendamise kohta

Näide 1. Ümber ploki on pandud nõör, punktis A hoiab nõörist kinni inimene kaaluga P, punktis B ripub aga niisama palju kaaluv raskus. Mis toimub raskusega, kui inimene hakkab mööda nõöri üles ronima suhtelise kiirusega a? Arvestada ka ploki kaalu, mis on neli korda väiksem inimese omast. Ploki mass on ühtlaselt jaotatud mööda ploki pöida.



$$P_A = P$$

$$P_B = P$$

$$P_c = \frac{1}{4} P$$

$$\frac{v_{Ar}}{v_B} = a$$

Kuna  $v_B$  suund ei ole teada, siis tuleb see oletada. Muidu ei ole võimalik võrrandit koostada. Oletame siis, et punkt B saab kiiruse suunaga üles.

Lähtevalemis

$$\frac{dL_c}{dt} = M_c^{(e)}$$

võime loobuda vektorite kasutamisest, sest need on kõik samasihilised - risti joonisega.

Saame

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C^{(e)} \quad \text{ehk} \quad \dot{L}_C = M_C^{(e)}$$

Punkt C on valitud momentide moodustamiseks seepärast, et tundmatu toereaktsioon ploki völli läbib seda punkti. Pealegi on ploki kineetilist momenti kõige kergem väljendada just selle punkti suhtes.

Süsteemi kineetiline moment koosneb kolmest liidetavast:

$$L_C = l_{1C} + l_{2C} + L_{3C}$$

milles  $l_{1C}$  on inimese liikumishulga moment

$l_{2C}$  - raskuse B liikumishulga moment ja

$L_{3C}$  - ploki kineetiline moment.

$v_B$  suuna järgi saame ploki pöörlemise suuna; inimese absoluutse kiiruse suund tuleb aga oletada. Võtame selle üles. Arvuliselt  $v_{Aa} = a - v_B$ ,

$$L_C = -\frac{P}{g}(a - v_B)r + \frac{P}{g}v_B r + \frac{1}{4}\frac{P}{g}r^2\omega$$

Viimases liikmes  $\frac{1}{4}\frac{P}{g}r^2$  on ploki inertsmoment pöörlemistelje suhtes ja  $\omega$  võib asendada  $\frac{v_B}{r}$ .

$$L_C = \frac{P}{g}(-a + 2v_B + \frac{1}{4}v_B)r$$

Vaatleme nüüd lähtevelemi paremat poolt.

$$M_C^{(e)} = P_A \cdot r - P_B \cdot r = (P_A - P_B)r = 0$$

millest ilmneb veel üks eelis punkti C valiku kasuks.

Nüüd on

$$\dot{L}_C = 0 \quad \text{ja} \quad L_C = \text{const} = D$$

Konstandi  $D$  määrame algtingimustest:  $L_{OC} = 0$ , sest kõik süsteemi kuuluvad massid seisid alghetkel paigal ja ka plokk ei pöörelnud.

$D = L_{OC} = 0$  ja ka  $L_C = 0$  ehk  $-a + \frac{9}{4} v_B = 0$ , millest

$$v_B = \frac{4}{9} a .$$

V a s t u s: Raskus punktis  $B$  hakkab liikuma ülespoole kiirusega  $\frac{4}{9} a$ .

Esitatud lahenduskäigus võib tekitada kahtlusi  $v_B$  ja  $v_{Aa}$  suundade oletamine. Vastus nendest aga ei sõltu. Veendumise selles, oletades vastavad suurused teisiti:  $v_B$  üles, kuid  $v_{Aa}$  alla,

$$+ \frac{P}{g} (v_B - a)r + \frac{P}{g} v_B r + \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \frac{v_B}{r} = 0 ,$$

$$v_B - a + v_B + \frac{1}{4} v_B = 0 ,$$

$$v_B = \frac{4}{9} a .$$

Lõpuks veel oletus:  $v_B$  on suunatud alla. Siis  $v_{Aa} = a + v_B$

$$- \frac{P}{g} (a + v_B)r - \frac{P}{g} v_B r - \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \frac{v_B}{r} = 0 ,$$

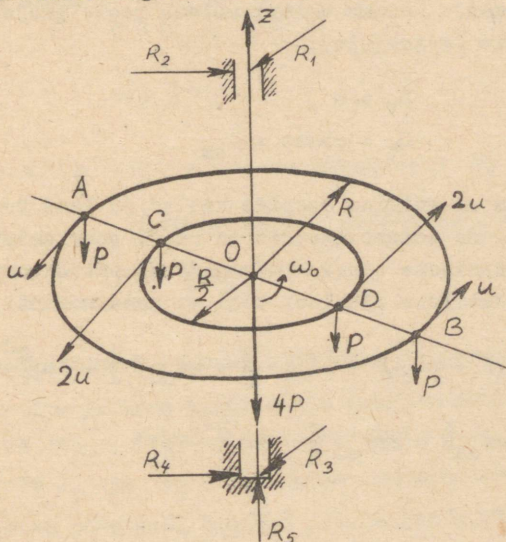
$$a + v_B + v_B + \frac{1}{4} v_B$$

$$v_B = - \frac{4}{9} a .$$

Viimane vastus korrigeerib isegi oletust, nagu oleks  $v_B$  suunatud alla. Miinusmärk annab oletatule vastupidise suuna.

Näide 2. Horisontaalne ümmargune platvorm pöörleb ilma hõõrdumiseta konstantse nurkkiirusega  $\omega_0$  ümber oma raskus-

keset läbiva vertikaalse telje; platvormil seisab neli ühesuguse raskusega inimest: kaks - platvormi äärel, kaks aga pöörlemisteljest platvormi poole raadiuse kaugusel. Kuidas muutub platvormi nurkkiirus, kui kõik inimesed liiguvad platvormil pöörlemise suunas, äärel seisnud inimesed - kiirusega  $u$  ning teljest poole raadiuse kaugusel seisnud - kiirusega  $2u$  mööda ringjoont. Inimesed lugeda masspunktideks ning platvorm ühtlaseks kettaks raadiusega  $R$  ja massiga, mis on neli korda suurem iga inimese massist.



Selgitada samuti kui suur peaks olema relatiivne lineaarne kiirus  $u$ , et platvorm lakkaks pöörlemast.

$$v_{Ar} = v_{Br} = u$$

$$v_{Cr} = v_{Dr} = 2u$$

$$m_A = m_B = m_C = m_D = m$$

$$m_{\text{platvorm}} = 4m$$

$$OC = OD = \frac{R}{2}$$

$$OA = OB = R$$

algnurkkiirus -  $\omega_0$

$\omega_1$  ? - lõppnurkkiirus

u ? - kui  $\omega_1 = 0$

Lähtevealem:  $\dot{L}_O = -\dot{M}_O(e)$  (punkti O asemel sobiksid

pöörlemistelje teisedki punktid; punktid väljaspool pöörlemistelje on halvemad). Leiame valemi mõlema poole projektsioonid pöörlemisteljele (z-teljele):

$$\dot{L}_z = 0,$$

$$L_z = \text{const} = L_{Oz}.$$

(Välisjõududeks on kõikide masside kaalud ja kahe toe reaktsioonid. Kaalujõudude momentvektorid on risti pöörlemisteljega, samuti horisontaalsete toereaktsioonide momentvektorid, kuna vertikaalne reaktsioon alumisel toel ei anna momenti.)

$$L_{Oz} = mv_{OA}R + mv_{OB}R + mv_{OC} \cdot \frac{R}{2} + mv_{OD} \cdot \frac{R}{2} + 4m \frac{R^2}{2} \cdot \omega_0,$$

$$L_{Oz} = 2 \cdot mv_{OA}R + 2mv_{OC} \frac{R}{2} + 4m \frac{R^2}{2} \omega_0.$$

Analoogiliselt:

$$L_z = 2 \cdot mv_A R + 2mv_C \frac{R}{2} + 4m \frac{R^2}{2} \omega_1,$$

$$L_z = L_{Oz} \quad \text{tõttu:}$$

$$2v_{OA} + v_{OC} + 2R\omega_0 = 2v_A + v_C + 2R\omega_1.$$

$v_{OA} = \omega_0 R$  on punkti A kiirus algolukorras,

$v_{OC} = \omega_0 \cdot \frac{R}{2}$  - punkti C kiirus algolukorras,

$v_A = u + \omega_1 R$  - punkti A kiirus uues olukorras,

$v_C = \omega_1 \frac{R}{2} + 2u$  - punkti C kiirus uues olukorras.

$$2\omega_0 R + \omega_0 \frac{R}{2} + 2R\omega_0 = 2(u + \omega_1 R) + (2u + \omega_1 \frac{R}{2}) + 2R\omega_1,$$

$$\frac{9}{2}\omega_0 R = 4u + \frac{9}{2}\omega_1 R,$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9} \frac{u}{R}.$$

Ulesande teise küsimuse vastamiseks loeme  $\omega_1$  võrdseks nulliga ja saame

$$0 = \omega_0 - \frac{8}{9} \frac{u}{R}$$

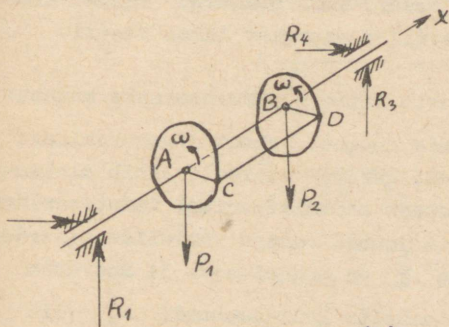
ehk 
$$u = \frac{9}{8} \omega_0 R.$$

V a s t u s. Platvormi uus nurkkiirus  $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9} \frac{u}{R}.$

Platvorm lakkab pöörlemast, kui

$$u = \frac{9}{8} \omega_0 R.$$

Näide 3. Kaks kõva keha pöörlevad teineteisest soltumatult ümber ühe ja sama kinnistelje konstantsete nurkkiirustega  $\omega_1$  ja  $\omega_2$ . Kehade inertsmomendid selle telje suhtes on vastavalt  $J_1$  ja  $J_2$ . Missuguse nurkkiirusega hakkavad mõlemad kehad pöörlema, kui nad pöörlemise ajal ühendada?



Keha A -  $\omega_1$  ;  $J_1$

Keha B -  $\omega_2$  ;  $J_2$

$\omega ?$

Lähtevallem

$$\dot{L}_A = -(\epsilon)$$

$$= M_A$$

Võtame projektsioonid pöörlemisteljele

$$\dot{L}_x = 0 .$$

(Parem pool võrdub nulliga, kuna pöörlemine on ühtlane. Kui pöörlemistelje suhtes võetud välisjõudude peamoment oleks nullist erinev, siis oleks ka pöörlemine kiirenev või aeglustav.) Tähendab

$$L_x = L_{Ox} = \text{const.}$$

Kuna aga

$$L_x = (J_1 + J_2)\omega$$

ja

$$L_{Ox} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 ,$$

siis

$$(J_1 + J_2)\omega = J_1\omega_1 + J_2\omega_2$$

ehk

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} .$$

V a s t u s . Kehad hakkavad koos pöörlema nurkkiirusega

$$= \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} .$$

Märkus. Selles ja paljudes teistes taolistes ülesannetes on lubamatu kasutada hoo teoreemi, kuna puuduvad andmed sisef jõudude töö kohta. Osa kineetilist energiat läheb kaotsi.

Näide 4. Suurte hoorataste kiireks pidurdamiseks kasutatakse elektrilist pidurit, mis koosneb kahest diametraalselt asetatud poolusest. Poolustele keritud mähiseid läbib alalisvool. Hooratta massis poolustest möödaliikumisel indutseeritud voolud tekitavad ratta pöia joonkiirusega võrdelise pidurdamomendi  $M_1 = kv$ , milles  $k$  on magnetvoost ja hooratta mõõtmetest sõltuv kordaja. Laagrite hõõrdemomendi  $M_2$  võib lugeda jäävaks; hooratta läbimõõt on  $D$ , inertsmoment pöörlemistelje suhtes  $J$ . Kui pika aja jooksul jääb hooratas seis-

ma, kui ta algkiirus on  $\omega_0$  ?

Lahendame selle ülesande jooniseta.

$M_1 = kv$  on pidurdav moment,

$v = \omega \frac{D}{2}$  - ratta pöia joonkiirus,

$\omega$  - ratta nurkkiirus,

$M_2 = \text{const.}$  - pidurdav hõõrdemoment.

Lähtevealem  $\dot{L}_O = M_O^{(e)}$ , milles  $O$  on pöörlemistelje mingi punkt. Sama projekteerituna pöörlemisteljele  $z$  :

$$\dot{L}_z = M_z^{(e)} .$$

Lugedes pöörlemise suuna positiivseks, tuleb varustada takistavad momendid miinusmärkidega:

$$\frac{dL_z}{dt} = -k \frac{D}{2} \omega - M_2 .$$

Kuna  $L_z = J\omega$ , siis

$$J \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{D}{2} \omega - M_2 .$$

Edasi ei ole enam sisulisi raskusi.

$$J \frac{d\omega}{\frac{kD}{2}\omega + M_2} = -dt ,$$

$$J \int_{\omega_0}^0 \frac{d\omega}{\frac{kD}{2}\omega + M_2} = - \int_0^T dt .$$

$$T = J \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\frac{kD}{2}\omega + M_2} = \frac{2J}{kD} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega + \frac{2M_2}{kD}} =$$

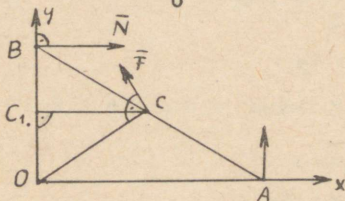
$$= \frac{2J}{kD} \left[ \ln\left(\omega + \frac{2M_2}{kD}\right) \right]_0^{\omega_0} = \frac{2J}{kD} \ln \frac{\omega_0 + \frac{2M_2}{kD}}{\frac{2M_2}{kD}} = \frac{2J}{kD} n \left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right).$$

V a s t u s. Hooratas jääb seisma ajavahemiku

$$T = \frac{2J}{kD} n \left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right) \text{ vältel. Ajaühik}$$

sõltub valitud ühikute süsteemist. Tehnilises ja absoluutses CGS-süsteemis on ühikuks sekund.

Näide 5. Leida p. 9 näites 2 antud ellipsograafi vända nurkkiirendus, kui vända paneb pöörlema jõud, mille moment 0 suhtes  $M_0 = 200$  Gcm.



P. 9 näites 2 saime, et

$$L_0 = \frac{(P + 2Q) l^2 \omega}{3g},$$

kust diferentseerides saame:

$$(a) \quad \dot{L}_0 = \frac{(P + 2Q) l^2 \dot{\omega}}{3g} = \frac{(P + 2Q) l^2 \varepsilon}{3g}, \text{ milles } \varepsilon$$

ongi otsitav nurkkiirendus.

Süsteemi kineetilise momendi teoreemi põhjal (p. 10) süsteemi mingi punkti suhtes võetud kineetilise momendi tuleks aja järgi ( $\dot{L}_0$ ) võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude peamomendiga, mis on võetud sama punkti suhtes. Leiame süsteemile mõjuvate välisjõudude peamomendi p. O suhtes. Selle arvutamisel ei ole tähtis, milline on ja kuhu on tõeliselt rakendatud vända pöörlema panev välisjõud  $\bar{F}$  (neid jõude võib olla isegi mitu), vaid tähtis on teada tema moment  $M_0$  p. O suhtes. Seepärast võime näiteks kujutleda, et jõud  $\bar{F}$  on rakendatud p: C ( $\bar{F} \perp OC$ ).

Siis on aga selge, et jõud  $\bar{F}$  kutsub küll esile vända pöörlemise ja joonlaua massikeskme liikumise, kuid on võimatu tekitama joonlaua pöörlemist ümber p. C. Kuid joonlaud peab hakkama pöörlema, sest tema otspunktid A ja B võivad liikuda vaid telgedel. Tähendab - telgedest tekib (või tekivad) reaktsioonijõud. Massikeskme suhtes kasutatud kineetilise momendi teoreemi järgi (p. 17, valem (30))

$$\dot{L}_{Cj}^{(e)} = M_{Cj}^{(e)} .$$

$$\text{Kuid } L_{Cj}^{(e)} = -\frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \omega \quad (\text{p.9, näide 2}), \text{ millest } \dot{L}_{Cj}^{(e)} = \\ = -\frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \epsilon .$$

Seega joonlauale mõjuvate välisjõudude moment p.C suhtes

$$M_{Cj}^{(e)} = -\frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \epsilon .$$

Jõu  $\bar{F}$  moment p. C suhtes võrdub 0-ga.

Lihtsuse mõttes kujutleme, et p.A jookseb x-teljel vabalt ja p. B on sunnitud liikuma y-teljel. Telje reaktsioon  $\bar{N}$  on risti y-teljega (kuna eeldame hõõrdevaba liikumist) ja suunatud paremale. Tema moment p. C suhtes

$$M_C(\bar{N}) = -N \cdot C_1B = M_{Oj}^{(e)} = -\frac{1}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 r .$$

Jõu  $\bar{N}$  moment punkti O suhtes on 2 korda suurem (Olgu  $OB = 2 C_1B$ ),

$$M_O(\bar{N}) = 2 M_{Oj}^{(e)} = -\frac{2}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \epsilon .$$

Seega välisjõudude peamoment p.O suhtes on

$$(b) \quad M_O = -\frac{2}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \epsilon .$$

Võrrutades (a) ja (b), saame

$$\frac{(P + 2Q)\ell^2 \epsilon}{3g} = M_O = -\frac{2}{3} \frac{Q}{g} \ell^2 \epsilon \quad \text{ehk}$$

$$\frac{(P + 4Q) \ell^2 \varepsilon}{3g} = M_0, \text{ millest}$$

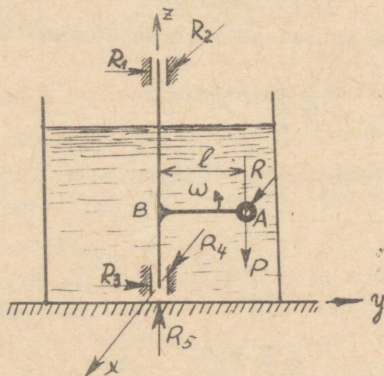
$$\varepsilon = \frac{3g M_0}{(P + 4Q) \ell^2}.$$

$$M_0 = 200 \text{ Gcm} = 0,002 \text{ kGm}$$

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,002}{(0,1 + 0,8) \cdot 0,04} = 1,64$$

$$\text{V a s t u s . } \varepsilon = 1,64 \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Näide 6. Vedelikus oleva varda AB külge, mille pikkus on  $\ell$ , on kinnitatud kerake. Varras AB pannakse pöörlema ümber vertikaalse telje  $O, O_2$  algnurkkiirusega  $\omega_0$ . Vedeliku takistusjõud on võrdeline pöörlemise nurkkiirusega, s.o.  $R = \alpha m \omega$ , kus  $m$  on kerakese mass,  $\alpha$  - võrdetegur. Millise aja jooksul langeb pöörlemise nurkkiirus kaks korda väiksemaks algnurkkiirusest? Mitu pööret teeb varras koos kerakesega selle aja jooksul? Kerakese mass lugeda koondatuks tema tsentrisse, varda mass jätta aga arvesse võtmata.



$$R = \alpha m \omega,$$

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_0.$$

Lähtevalem  $\dot{L}_B = M_B^{(e)}$ . Sama projektsioonides pöörlemis-  
teljele:

$$\dot{L}_z = M_z^{(e)}$$

Parem pool:  $M_z^{(e)} = -Rl = -\alpha m \omega l$ .

Arvutame:

$$\frac{dL_z}{dt} = -\alpha m \omega l,$$

$$L_z = J_z \omega$$

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = -\alpha m \omega l,$$

$$J_z \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha m l dt.$$

Asendades siia  $J_z = m l^2$  saame:  $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l} dt$ .

Kuna meil tuleb leida peale pöörlemiskestuse  $T$  veel selle kestel tehtud pöörete arv, siis on kasulik jätta integreerimisel ülemine raja muutujaks ja alles hiljem asendada kindla väärtusega:

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} t, \quad \ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} t \quad \text{ja}$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l} t}.$$

Nõnda saime  $\omega$  muutumise seaduse ja ka võimaluse pöörlemiskestuse määramiseks. Esiteks, kestus, s.t. lugeda  $t = T$  ja  $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$ :

$$\ln \frac{\frac{1}{2} \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} T$$

ehk  $T = \frac{l}{\alpha} \ln 2$ .

Teiseks,  $\omega$  muutumise seadusest, kuna  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ :

$$d\varphi = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l} t} dt,$$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^T e^{-\frac{\alpha}{l} t} dt,$$

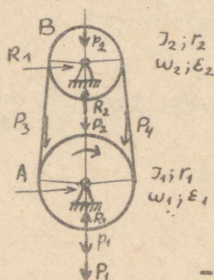
$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot \left(-\frac{l}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{l} t} \Big|_0^T = -\frac{\omega_0 l}{\alpha} (e^{-\frac{\alpha}{l} T} - e^0) = \\ &= \frac{\omega_0 l}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{l} \cdot \frac{l}{\alpha} \ln 2}) = \frac{\omega_0 l}{\alpha} (1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}) = \frac{\omega_0 l}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Jäeb veel üle väljendada  $\varphi$  täispööretes ( $\varphi = 2\pi n$ ).

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 l}{4\pi\alpha}.$$

V a s t u s. Nurkkiirus kahaneb poolele oma algväärtusest ajaga  $T = \frac{l}{\alpha} \ln 2$  ja selle ajaga teeb varras kuulikesega  $n = \frac{\omega_0 l}{4\pi\alpha}$  pööret.

Näide 7. Transmissioonivõlli käitatakse mootorilt lõputu rihma abil. Mootori võllile on rakendatud pöördemoment  $M$ ; mootori võlli ja transmissioonivõlli inertsmomentid koos rihmaratastega on vastavalt  $J_1$  ja  $J_2$ , mootori rihmaratta raadius on  $r_1$ ; transmissiooni ja mootori nurkkiiruste suhe -  $k$ ; lõputu rihma kaal -  $p$ . Jättes arvestamata hõõrdumise võllide laagrites, leida mootori võlli nurkkiirendus.



$M$  on vedav moment.

Mootori võlli andmed:

- $P_1$  on raskus,
- $J_1$  - inertsmoment,
- $r_1$  - raadius,
- $\omega_1$  - nurkkiirus,
- $\epsilon_1$  - nurkkiirendus.

Transmissioonivõlli andmed:

$P_2$  on raskus,  
 $J_2$  - inertsmoment,  
 $r_2$  - raadius  
 $\omega_2$  - nurkkiirus,  
 $\varepsilon_2$  - nurkkiirendus,

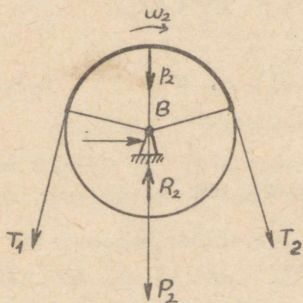
$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$  - rihma kaal,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = k .$$

Leida  $\varepsilon_1$  .

Selle ülesande lahendamisel võiks ära kasutada näite nr. 3 käesoleva konspekti 9-ndast punktist, kus on leitud samasuguse süsteemi kineetiline moment punkti A suhtes. Kuid see avaldis tuli võrdlemisi raskepärane ja teiseks on välisjõudude momendina tarvis arvestada tundmatuttoereaktsiooni  $R_1$  (vt. käesoleva ülesande joonist) momenti, mis teeb ühe teise võtte käepärasemaks. See võtte on süsteemi vaatlemine osadena.

Üheks osaks valime ülemise võlli koos ratta ja sellega kontaktis oleva rihma osaga. Teiseks osaks jääb kõik ülejäänud. Iseenesestki mõista tuleb nüüd arvestada kummagi osa mõju teisele, s.o. rihma tõmbeid  $T_1$  ja  $T_2$  .



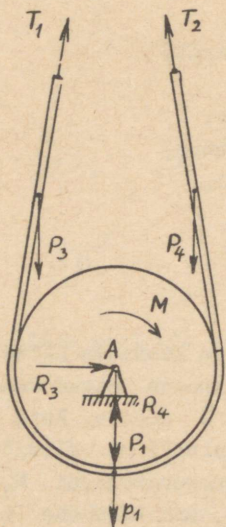
Lähtevaalem:  $\dot{L}_B = M_B^{(e)}$ , millest saame kohe edasi (nagu eelmisteski näidetes):

$$\dot{L}_B = M_B^{(e)} \quad \text{ehk}$$

$$\frac{d}{dt}(-J_2 \omega_2 - \frac{P_2}{g} v r_2) = (T_1 - T_2) r_2 .$$

$v$  on rihma kiirus,

$P_2$  - rihma (kaarekujul. osa) raskus.



$$\text{Lähtevallem: } \dot{L}_A = M_A^{(e)} \quad \text{ja}$$

sellest kohe  $L_A = M_A^{(e)}$  ehk

$$\frac{d}{dt} (-J_1 \omega_1 - \frac{P_3 + P_1 + P_4}{g} vr) =$$

$$= -M - (T_1 - T_2)r_1.$$

Saadud kahe võrrandi süsteemist saab elimineerida  $(T_1 - T_2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (-J_2 \omega_2 - \frac{P_2}{g} vr_2) = (T_1 - T_2)r_2 \quad | \quad \times k \\ \frac{d}{dt} (-J_1 \omega_1 - \frac{P_3 + P_1 + P_4}{g} vr_1) = -M - (T_1 - T_2)r_1 \end{array} \right.$$

$$\omega_2 = k \omega_1$$

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \text{ehk} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = k \quad \text{ehk} \quad r_2 = \frac{r_1}{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (-J_2 k^2 \omega_1 - \frac{P_2}{g} \omega_1 r_1 \cdot r_1) = (T_1 - T_2)r_1 \\ \frac{d}{dt} (-J_1 \omega_1 - \frac{P_3 + P_1 + P_4}{g} \omega_1 r_1^2) = -M - (T_1 - T_2)r_1 \end{array} \right.$$

Liites saame

$$\frac{d}{dt} (J_1 \omega_1 + k^2 J_2 \omega_1 + \frac{P}{g} \omega_1 r_1^2) = M \quad \text{ehk}$$

$$(J_1 + k^2 J_2 + \frac{pr_1^2}{g}) \dot{\varepsilon}_1 = M \quad \text{ehk}$$

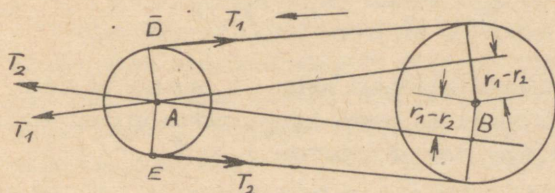
$$\varepsilon_1 = \frac{Mg}{(J_1 + k^2 J_2)g + pr_1^2}$$

V a s t u s . Mootori võlli nurkkiirendus

$$\epsilon_1 = \frac{Mg}{(J_1 + k^2 J_2)g + pr_1^2} .$$

Näide 8. Leida p. 9 näites 3 antud rihmaratta 3 nurkkiirendus, kui rattale mõjub pöörlema panev jõud, mille moment telje B suhtes on  $M_B$ .

Nagu eelmisest näitest näha, on selle ülesande lahendamine kineetilise momendi teoreemi abil mõnevõrra tülikas (hoopis mõnusam on näiteks hooteoreemi rakendamine). Nagu nägime p. 9 näites 3, avaldub süsteemi kineetiline moment üsna keeruliselt. Sellega ühenduses on keeruline ka välisjõudude kindlakstegemine (see käib peamiselt telje A reaktsioonijõu kohta). Lahendamine muutub aga märksa lihtsamaks, kui võtame arvesse, et ühtlane massijaotus rihmal pole oluline ja et tulemus ei muutu, kui jaotame selle massi ebaühtlaselt või koguni koondame ta rihma ühte punkti. Lahendame ülesande kahel viisil.



I. viis. Oletame, et rihm selles osas, mis asetseb punktides D ja E vasakul, on kaaluvaba. Siis rihma tõmmete vahe punktides E ja D  $T_2 - T_1$  kasutatakse ainult rattale A kiirenduse andmiseks. Kõva keha pöörlemise diferentsiaalvorrandi (p. 14 valem (22)) põhjal võime kirjutada (pidades silmas ainult keha A):

$$\frac{P_2}{g} \epsilon_2^2 = r_2 (T_2 - T_1) , \text{ millest}$$

$$(a) \quad T_2 - T_1 = \frac{P_2 \varrho_2^2}{g r_2} \varepsilon_2$$

Et aga keha A massikese seisab paigal, siis (massikeskme liikumise teoreemi järgi) peab temale teljel A olema rakendatud jõud, mis on rihma tõmmetega punktides D ja E tugevuselt võrdsed ja suunalt vastupidised (neid tekitavad laagrireaktsioonid) nii et kehale A mõjuvate välisjõudude peavektor oleks null. Nende teljel A (punktis A) rakendatud jõudude momentide summa telje B suhtes on

$$- T_2(r_1 - r_2) + T_1(r_1 - r_2) = - (T_2 - T_1)(r_1 - r_2) \text{ ehk,}$$

arvestades (a)-d,

$$- \frac{P_2 \varrho_2^2}{g r_2} (r_1 - r_2) \varepsilon_2 .$$

Seega süsteemile mõjuvate välisjõudude peamoment telje B suhtes

$$(e) \quad M_B = M_B - \frac{P_2 \varrho_2^2}{g r_2} (r_1 - r_2) \varepsilon_2 .$$

Süsteemi kineetiline moment telje B suhtes avaldub nüüd lihtsamalt (kuna rihma massi igas punktis kiirusvektori kandesirge kaugus punktist B võrdub  $r_1$ ):

$$L_B = \frac{P_1 \varrho_1^2}{g} \omega_1 + \frac{P_2 \varrho_2^2}{g} k \omega_1 + \frac{P r_1^2}{g} \omega_1 \quad \text{ja}$$

$$\dot{L}_B = \frac{P_1 \varrho_1^2 \varepsilon_1}{g} + \frac{P_2 \varrho_2^2}{g} k \varepsilon_1 + \frac{P r_1^2}{g} \varepsilon_1 .$$

Kineetilise momendi teoreemi põhjal

$$\dot{L}_B = M_B .$$

Seega arvestades, et  $\varepsilon_2 = k \varepsilon_1$  ( $k = \frac{r_1}{r_2}$ ), saame

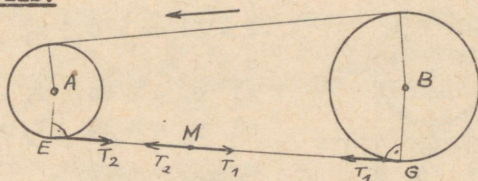
$$\frac{P_1 \varrho_1^2 \varepsilon_1}{g} + \frac{P_2 \varrho_2^2}{g} k \varepsilon_1 + \frac{Pr_1^2}{g} \varepsilon_1 = M_B - \frac{P_2 \varrho_2^2}{gr_2} (r_1 - r_2) k \varepsilon_1 ,$$

ehk peale lihtsustamist

$$\left( \frac{P_1 \varrho_1^2}{g} + \frac{P_2 \varrho_2^2 k^2}{g} + \frac{Pr_1^2}{g} \right) \varepsilon_1 = M_B , \text{ millest}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{M_B g}{P_1 \varrho_1^2 + P_2 \varrho_2^2 k^2 + Pr_1^2} .$$

## II. viis.



Oletame, et rihma kogumass on koondatud punkti M. Siis võime rihma osas EG märkida järgmisi jõude (lihtsuse mõttes oletame, et rihma ülemine osa on pingevaba): 1) rattale B mõjub jõud  $T_1$  vastupidi liikumise suunale 2) rihma kogumassile M jõud  $(T_1 - T_2)$  liikumise suunas ja 3) rattale B jõud  $T_2$  liikumise suunas. Iga keha kohta võime kirjutada vastavalt võrrandi (köva keha pöörlemise diferentsiaalvõrrandi ja teise põhiseaduse põhjal):

$$1) \frac{P_1}{g} \varrho_1^2 \varepsilon_1 = M_B - r_1 T_1 ,$$

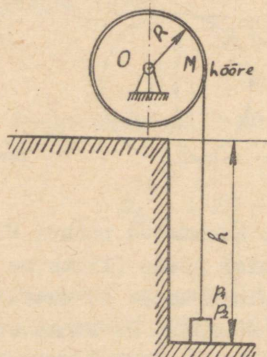
$$2) \frac{P}{g} r_1 \varepsilon_1 = T_1 - T_2 \quad (r_1 \varepsilon_1 \text{ on p. M kiirendus) ,}$$

$$3) \frac{P_1}{g} \varrho_2^2 \varepsilon_2 = r_2 T_2$$

Elimineerides sellest süsteemist  $T_1$  ja  $T_2$  ning arves-

tades, et  $\varepsilon_2 = k \varepsilon_1$ , saame endise avaldise  $\varepsilon_1$  jaoks.

Näide 9. Hooratta A raadius  $R = 50$  cm. Selleks et määrata inertsimomenti tema raskuskesest läbiva telje suhtes, määriti rattale peenike traat, mille külge seoti viht B kaaluga  $p_1 = 8$  kg, ja leiti, et vihi laskumiseks kõrguselt  $h = 2$  m kulus aega  $T = 16$  sec. Laagrites esineva hõõrdumise arvestamiseks tehti teine katse vihiga, mille kaal  $p_2 = 4$  kg, kusjuures vihi laskumise kestus endiselt kõrguselt oli  $T_2 = 25$  sec. Eeldades, et hõõrdejõu moment on konstantne ning ei olene vihi raskusest, arvutada inertsimoment  $J$ .



$$R = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m},$$

$$h = 2 \text{ m},$$

$$\text{a) } p_1 = 8 \text{ kG}, \quad T_1 = 16 \text{ sec},$$

$$\text{b) } p_2 = 4 \text{ kG}, \quad T_2 = 25 \text{ sec},$$

$$M_{\text{hõõre}} = \text{const.}$$

Leida  $J$  - inertsimoment pöörlemistelje suhtes.

Ulesandes käsitletakse inertsimomendi katselist määramist. Lahendus kineetilise momendi abil on väga sarnane eelnevate näidete omaga, mistõttu loobume pikkadest selgitustest. ( $L_{10}$  - süsteemi kineetiline moment p. O suhtes I katsel,  $L_{20}$  - sama II katsel.)

$$\text{Valem } p_1\text{-le: } \dot{L}_{10} = -p_1 R + M_{\text{hõõre}}.$$

$$\text{Samuti } p_2\text{-le: } \dot{L}_{20} = -p_2 R + M_{\text{hõõre}}.$$

$$\text{Lahutades: } \dot{L}_{20} - \dot{L}_{10} = (p_1 - p_2)R.$$

Kineetiline moment arvutatakse:

$$L_{10} = -J\omega_1 - \frac{p_1}{g} v_{1R} \quad \text{ja} \quad L_{20} = -J\omega_2 - \frac{p_2}{g} v_{2R},$$

$$\frac{d}{dt} \left( -J \frac{v_2}{R} - \frac{p_2}{g} v_{2R} + J \frac{v_1}{R} + \frac{p_1}{g} v_{1R} \right) = (p_1 - p_2)R,$$

$$\frac{J}{R} (\omega_1 - \omega_2) + \frac{R}{g} (p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2) = (p_1 - p_2)R,$$

$$J = \frac{(p_1 - p_2)R^2 - \frac{1}{g} (p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2)R^2}{\omega_1 - \omega_2}.$$

$\omega_1$  ja  $\omega_2$  saab arvutada ühtlaselt kiireneva liikumise teepikkuse  $h$  abil. ( $\omega_1$  ja  $\omega_2$  on vihi kiirendused, kuid ühtlasi ka hooratta pöia tangentsiaalkiirendused.)

$$h = \frac{\omega_1 T_1^2}{2} = \frac{\omega_2 T_2^2}{2}, \quad \text{millest} \quad \omega_1 = \frac{2h}{T_1^2} \quad \text{ja} \quad \omega_2 = \frac{2h}{T_2^2}$$

$$J = \frac{(p_1 - p_2)R^2 - \frac{R^2}{g} \left( \frac{p_1}{T_1^2} \cdot 2h - \frac{p_2}{T_2^2} \cdot 2h \right)}{2h \left( \frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right)}$$

$$J = R^2 \frac{\frac{1}{2h} (p_1 - p_2) - \frac{1}{g} \left( \frac{p_1}{T_1^2} - \frac{p_2}{T_2^2} \right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

Asendame arvulised väärtused.

$$J = 0,5^2 \frac{\frac{1}{2 \cdot 2} (8 - 4) - \frac{1}{9,81} \left( \frac{8}{16^2} - \frac{4}{25^2} \right)}{\frac{1}{16^2} - \frac{1}{25^2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{4}{9,81} \left( \frac{2}{256} - \frac{1}{625} \right)}{\frac{1}{256} - \frac{1}{625}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16^2 \cdot 625 - \frac{4}{9,81} (1250 - 256)}{625 - 256} =$$

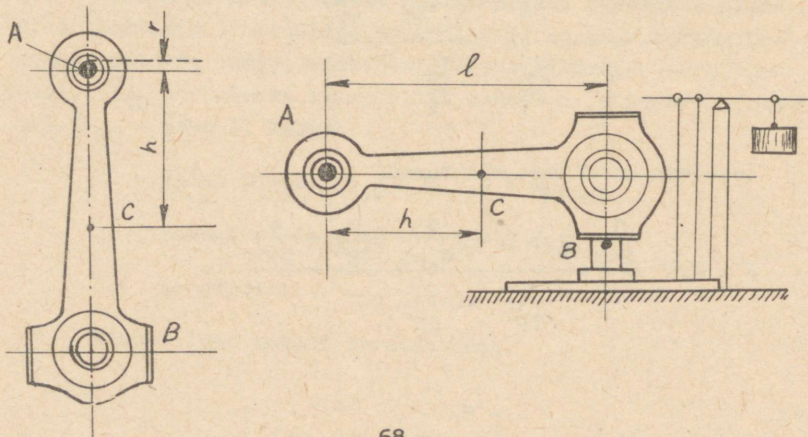
$$= \frac{64 \cdot 625 \cdot 9,81 - 994}{9,81 \cdot 369} = \frac{64 \cdot 625}{369} - \frac{994}{9,81 \cdot 369} \approx 108.$$

$$J = 108 \text{ kGmsec}^2.$$

V a s t u s . Hooratta inertsmoment

$$J = R^2 \frac{\frac{1}{2h}(p_1 - p_2) - \frac{1}{g} \left( \frac{p_1}{T_1^2} - \frac{p_2}{T_2^2} \right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}} = 108 \text{ kGmsec}^2$$

Näide 10. Kepsu inertsmomenti määramiseks lastakse teda võnkuda ümber horisontaalse telje, milleks ristpea puksi asetatakse peenike silindriline varras. Saja löögi kestus  $100 T = 100 \text{ sec}$ , milles  $T$  on poolperiood. Raskuskeskme  $C$  kauguse  $AC = h$  leidmiseks puksi tsentrist  $A$  riputati keps punktist  $A$  üles ning tõsteti punkt  $B$  detsimaalkaalu platvormile, nii



et ta jäi horisontaalseks. Surve kaalule oli  $P = 50$  kg. Leida kepsu tsentraalinertsmoment telje suhtes, mis on risti joonise tasapinnaga, teades, et kepsu kaal  $Q = 80$  kg, punkte A ja B läbivate vertikaalide vahekaugus  $l = 1$  m, ristpea tapi raadius  $r = 4$  cm.

$$100 T = 100 \text{ sec,}$$

Leida  $J_c$

$$P = 50 \text{ kG}$$

$$Q = 80 \text{ kG}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

Kasutame füüsikalise pendli perioodi valemist

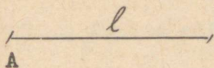
$$T_{\text{täis}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mga}} \quad \text{ehk} \quad T = \pi \sqrt{\frac{J_z}{Mga}},$$

milles  $J_z$  on inertsmoment pöörlemistelje suhtes ja  $a$  on pöörlemistelje kaugus masskeskmest. Avaldame sellest valemist

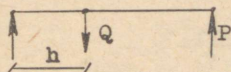
$J_z$  :

$$J_z = \frac{T^2 Mga}{\pi^2} = \frac{T^2 Q (h+r)}{\pi^2}.$$

$h$  saab määrata jooniselt:



$$- Qh + Pl = 0,$$



$$h = \frac{P}{Q} l.$$

Telsalt teame inertsmomentidest paralleelsete telgede suhtes:

$$J_z = J_c + \frac{Q}{g} (h+r)^2, \text{ milles}$$

$J_c$  ongi otsitav. Kahest  $J_z$  avaldisest saame:

$$J_c = \frac{T^2 Q (h+r)}{\pi^2} - \frac{Q}{g} (h+r)^2 = \frac{Q}{g} (h+r) \left[ \frac{T^2 g}{\pi^2} - h - r \right] =$$

$$= \frac{Q}{g} \left( \frac{P}{Q} \ell + r \right) \left( \frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{P}{Q} \ell - r \right) = \frac{P\ell + Qr}{g} \left( \frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{P}{Q} \ell - r \right).$$

Asendame arvulised väärtused:

$$J_c = \frac{50 \cdot 1 + 80 \cdot 0,04}{9,81} \left( \frac{9,81}{3,14^2} \cdot 1 - \frac{50}{80} \cdot 1 - 0,04 \right) \approx 1,77$$

V a s t u s . Kepsu tsentraalinertsmoment telje suhtes, mis on risti joonise tasapinnaga

$$J_c = \frac{P\ell + Qr}{g} \left( \frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{P}{Q} \ell - r \right) = 1,77 \text{ kGmsec}^2.$$

Näide 11. P. 9 näites 3 leida reaktsioonid liigendis O ja punktis C (oletades, et aluse rõhumine, mis tegelikult jaotub moodustajale OC, on tervelt rakendatud p. C), lugedes viimase jõu koonuse pinnaga ristiolevaks.

P. 9 näites 3 saime, et koonuse kiirõetiline moment p. O suhtes

$$\bar{L}_O = L_{Oy} \bar{j} + L_{Oz} \bar{k} = - \frac{2\sqrt{3}\pi Ph^2}{5\sqrt{3}g} \bar{j} + \frac{13\pi Ph^2}{5g} \bar{k}.$$

Kuna  $\bar{L}_O$  pöörleb ümber z-telje nagu kõva keha nurkkiirusega  $\omega_z$ , siis võib  $\bar{L}_O$  arvutamiseks kinemaatika vastavat valemit kasutada (Voronkov, § 73, valem 54):

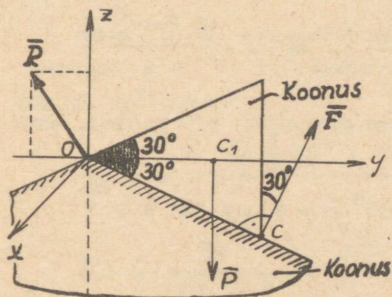
$$\dot{\bar{L}}_O = \omega_z \bar{k} \times \bar{L}_O = - L_{Oy} \omega_z \bar{i} = \frac{2\sqrt{3}\pi Ph^2}{5\sqrt{3}g} \omega_z \bar{i}.$$

Selle valemi saab ka lihtsamini leida. Kuna vektori  $\bar{L}_O$  lõpp-punkt liigub mööda ringjoont, mille raadius on  $|L_{Oy}| =$

$$= \frac{4\sqrt{3} Ph^2}{10g}, \text{ nurkkiirusega } \omega_z, \text{ siis}$$

$$|\dot{\bar{L}}_O| = |L_{Oy}| \omega_z.$$

Pole raske kindlaks teha, et  $\dot{\bar{L}}_O$  on  $x$ -telje (ühikvektori  $\bar{c}$ ) suunaline.



Koonusele mõjuvad välisjõud:

- 1) Kaal  $\bar{P}$ ,
- 2) aluse reaktsioon punktis  $C$   $\bar{F}$ ,
- 3) liigendi  $O$  reaktsioon  $\bar{R}$  (mõjub  $x$ - $y$ -tasapinnas).

Välisjõudude peamoment

$$M^{-(e)} = -OC_1 P \bar{c} + OC \cdot F \bar{c} + \bar{O} = (OC \cdot F - OC_1 P) \bar{c} \quad \text{ehk}$$

$$M_O^{-(e)} = \left( \frac{h}{\cos 30^\circ} \cdot F - \frac{3}{4} h P \right) \bar{c} = h \left( \frac{2}{\sqrt{3}} F - \frac{3}{4} P \right) \bar{c}.$$

Kuna  $\dot{\bar{L}}_O = M_O^{-(e)}$ , siis

$$\frac{2\sqrt{3}\pi Ph^2}{5g} \omega_z = h \left( \frac{2}{\sqrt{3}} F - \frac{3}{4} P \right),$$

$$\text{millest } F = \frac{3\pi Ph \omega_z}{5g} + \frac{3\sqrt{3} P}{8}.$$

---

Asendades  $P = 2 \text{ kG}$ ,  $h = 0,1 \text{ m}$ ,  $\omega_z = 4\pi \frac{1}{\text{sec}}$ ,  $g = 9,8 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$

saame

$$F = \frac{3 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 4\pi}{5 \cdot 9,81} + \frac{3 \cdot 1,732 \cdot 2}{8} = 1,78 \text{ [kG]}$$

$\bar{R}$  leidmiseks kasutame massikeskme liikumise teoreemi:

$$M \bar{w}_c = \bar{F}^{(e)} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{R},$$

$$M |\bar{w}_c| = M h_1 \omega_z^2 = \frac{3Ph \omega_z^2}{4g}; \quad M \bar{w}_c = - \frac{3Ph \omega_z^2}{4g} \bar{j}.$$

(kuna massikeskme kiirendus on suunatud p.0 poole). Avaldame jõud ühikvektorite kaudu:

$$\bar{P} = -P \bar{k}; \quad \bar{F} = F \sin 30^\circ \bar{j} + F \cos 30^\circ \bar{k},$$

$$\bar{R} = R_y \bar{j} + R_z \bar{k}.$$

Saame:

$$1) F \sin 30^\circ + R_y = - \frac{3Ph \omega_z^2}{4g}, \quad (\text{projektsioonid } y\text{-teljele})$$

$$2) -P + F \cos 30^\circ + R_z = 0. \quad (\text{projektsioonid } z\text{-teljele})$$

$$\text{Siit: } R_y = - \frac{3Ph \omega_z^2}{4g} - F \sin 30^\circ,$$

$$R_z = P - F \cos 30^\circ,$$

$$\text{ehk } R_y = -3,3 \text{ kG},$$

$$R_z = 0,46 \text{ kG}$$

Näide 12. Kui kaugele raskuskeskmest tuleks riputada füüsikaline pendel, et ta vonkeperiood oleks väikseim?

Kasutame füüsikalise pendli täisperioodi valemit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mga}}, \quad \text{milles } J_z = J_c + Ma^2 = M(\rho^2 + a^2)$$

$\rho$  on inertsraadius,   
 $a$  - riputamispunkti kaugus raskuskeskmest,   
 $J_z$  - inertsmoment riputamispunkti läbiva telje suhtes,   
 $J_c$  - tsentraalinertsmoment.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M(\rho^2 + a^2)}{Mga}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{a}} = C f(a).$$

Siin on  $T$  väljendatud  $a$  funktsioonina. Nõutakse  $a$  väärtust, kui  $T$  on väiksem ehk kui  $T$  tuletis  $a$  järgi võrdub nulliga:

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{\sqrt{a} \frac{d}{da} \sqrt{\rho^2 + a^2} - \sqrt{\rho^2 + a^2} \frac{d}{da} \sqrt{a}}{a} = 0;$$

$$\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} - \sqrt{\rho^2 + a^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} = 0;$$

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2}}{2\sqrt{a}};$$

$$2a^2 = \rho^2 + a^2 \quad \text{ehk} \quad a = \pm \rho.$$

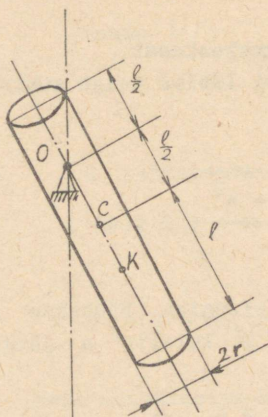
Kasutame ainult  $a = +\rho$ .

**V a s t u s .** Tuleb riputada inertsraadiuse kaugusel raskuskeskmest.

Näide 13. Pöördesilinder massiga  $M$ , pikkusega  $2l$  ja raadiusega  $r = \frac{l}{6}$  võngub ümber joonise tasapinnaga risti oleva telje  $O$ . Kuidas muutub silindri vonkeperiood, kui talle kaugusele  $OK = \frac{85}{72}l$  kinnitada masspunkt  $m$ ?

$$OK = \frac{85}{72}l,$$

$$R = \frac{l}{6}.$$



Leida vönkeperioodi muutus ehk leida vönkeperiood enne ja pärast liisamassi kinnitamist.

Kasutame füüsikalise pendli perioodi valemit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mga}}, \text{ milles enne}$$

massi  $m$  kinnitamist tuleb tähti mõista järgnevalt:

$J_z = J_o$  on silindri inertsmoment punkti  $O$  läbiva joonisega risti oleva telje suhtes,

$M$  - silindri mass,

$a = \frac{l}{2}$  - riputuspunkti kaugus raskuskeskmest.

Pärast massi  $m$  kinnitamist on need suurused muutunud:

$$J_z = J_o + m \cdot OK^2,$$

$M$  asendab  $(M + m)$ -ga,

$a = OA$ , milles punkt  $A$  asetseb punktide  $C$  ja  $K$  vahel.

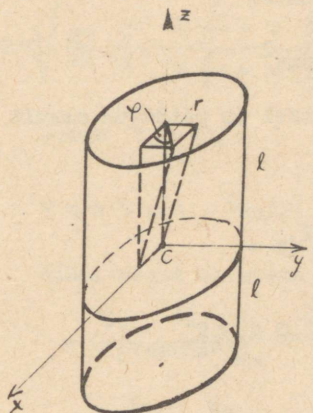
Nende suuruste asendamine perioodi valemisse annab, kui tähistada  $T_o$  -ga periood enne ja  $T_1$  -ga pärast massi  $m$  kinnitamist:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{Mg \frac{l}{2}}} \quad \text{ja} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_o + m \cdot OK^2}{(M + m)g \cdot OA}}.$$

$T_o$  ja  $T_1$  avaldistes puuduvad veel  $OA$  ja  $J_o$  avaldised. Arvutame need.

$$OA = \frac{M \cdot OC + m \cdot OK}{M + m} \quad - \text{ raskuskeskme koordinaadi üldtuntud valemist (vt. staatika kursusest).}$$

$$J_x = D \iiint_V h^2 dV = D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (y^2 + z^2) r d\varphi$$



$$y = r \sin \varphi \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{2}$$

D on materjali tihedus.

$$\begin{aligned} J_x &= D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r d\varphi = \\ &= D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R dr \left( \frac{r^3}{2} - \frac{r^3 \cos 2\varphi}{2} + rz^2 \right) d\varphi = \\ &= D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R \left[ \left( \frac{r^3}{2} + rz^2 \right) \varphi - \frac{r^3 \sin 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

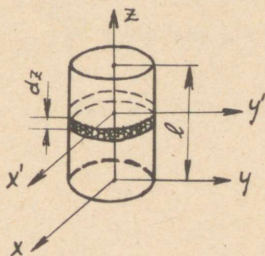
$$= D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R dr \left[ \frac{r^3}{2} + rz^2 \right] 2\pi = 2\pi D \int_{-l}^{+l} dz \int_0^R \left( \frac{r^3}{2} + rz^2 \right) dr =$$

$$= 2\pi D \int_{-l}^{+l} dz \left( \frac{R^4}{8} + \frac{R^2 z^2}{2} \right) = \pi D \left[ \frac{R^4 z}{4} + \frac{R^2 z^3}{3} \right]_{-l}^{+l} =$$

$$= \frac{\pi D R^4}{4} \cdot 2l + \frac{\pi D R^2}{3} \cdot 2l^3 = 2\pi R^2 l D \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$$

$$J_x = \frac{M}{12} (3R^2 + 4l^2).$$

$J_x$  võib arvutada ka lihtsamini, sest silindri sümmeetria ja materjali homogeensus võimaldavad rakendada p.9 näitega 4 analoogilist vötet.



Vaatleme silindri kihti, paksusega  $d_z$  ja massiga

$$dm = D \cdot \pi R^2 dz.$$

Selle kihi inertsmoment oma diameetri suhtes

$$dJ_{x'} = \frac{1}{4} dm R^2$$

ja diameetriga paralleelne telje suhtes

$$dJ_{\mathbf{x}} = dJ_{\mathbf{x}'} + dmz^2 = \frac{1}{4} dmR^2 + dmz^2,$$

millest saame (arvestades, et joonisel on näidatud ainult silindri ülemine pool):

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{x}} &= 2 \int_0^{\ell} \frac{1}{4} D\pi R^4 dz + 2 \int_0^{\ell} D\pi R^2 z^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} D\pi R^4 \ell + 2D\pi R^2 \frac{\ell^3}{3} = D\pi R^2 \cdot 2\ell \left( \frac{R^2}{4} + \frac{\ell^2}{3} \right) = \\ &= M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{\ell^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Ülesandes vajalik  $J_0$  on arvutatav  $J_{\mathbf{x}}$  abil:

$$J_0 = J_{\mathbf{x}} + M \cdot \left( \frac{\ell}{2} \right)^2;$$

$$J_0 = \frac{M}{12} (3R^2 + 4\ell^2) + M \frac{\ell^2}{4} = \frac{M}{12} (3R^2 + 7\ell^2).$$

Arvestades, et  $R = \frac{\ell}{6}$ :

$$J_0 = \frac{M}{12} \left( 3 \cdot \frac{\ell^2}{6^2} + 7\ell^2 \right) = \frac{M\ell^2}{12} \left( \frac{1}{12} + 7 \right) = \frac{85}{144} M \ell^2.$$

Nüüd on võimalik perioodid lõplikult arvutada:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{85}{144} M \ell^2}{Mg \frac{\ell}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{85}{72} \frac{\ell}{g}} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{170\ell}{g}};$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{85}{144} M \ell^2 + m \cdot \left( \frac{85}{72} \ell \right)^2}{(M+m)g \cdot \frac{M \cdot \frac{\ell}{2} + m \cdot \frac{85}{72} \ell}{M+m}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{85}{72} \cdot \frac{l}{g} \cdot \frac{M \frac{l}{2} + m \cdot \frac{85}{72} l}{M \frac{l}{2} + m \cdot \frac{85}{72} l}} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{170l}{g}}$$

Seega  $T_0 = T_1$ .

V a s t u s . Pendli vönkeperiood ei muutu

Kinnituseks arvutame veel pendli taandatud pikkuse:

$$l_{\text{taand.}} = \frac{J_z}{M a} = \frac{85}{144} \frac{M l^2}{M \cdot \frac{l}{2}} = \frac{85}{72} l.$$

Seega on perioodi muutumatus igati põhjendatud - mass  $m$  kinnitati täpselt taandatud pikkuse kaugusele riputuspunktist.

Näide 14. Elastse traadi külge riputatud ketas sooritab väändevönkumise vedelikus. Ketta inertsmoment traadi telje suhtes on  $J$ . Traadi väänamiseks ühe radiaani võrra on tarvis jõupaari momendiga  $c$ . Liikumistakistuse moment on  $\alpha S \omega$ , kus  $\alpha$  on vedeliku viskoossus,  $S$  - ketta ülemise ja alumise külje pindalade summa,  $\omega$  - ketta nurkkiirus. Leida ketta vönkeperiood vedelikus.

Ülesanne lahendub ilma jooniseta.

Lähtevalem:  $L_z = M_z^{(e)}$  ( $z$ -teljeks on pöörlemistelg, s.t. telg läheb piki traati.)

$$L_z = J \omega.$$

Möjub kaks takistavat välisjõudude momenti:  $\alpha S \omega$  ja  $c \varphi$ , mis oma mõjumissuuna tõttu tuleb kirjutada miinusega.

$$\frac{dL_z}{dt} = -\alpha S \omega - c \varphi;$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\alpha S \omega - c \varphi;$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha S \frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = 0 ;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha S}{J} \dot{\varphi} + \frac{c}{J} \varphi = 0 .$$

Saime teist järku lineaarse homogeenise diferentsiaalvõrrandi, mis üldise teooria järgi kirjutatakse

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

ja mille lahendamisel saadakse  $\varphi$  muutumise seaduseks sumbuv võnkumine perioodiga

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} .$$

Kuna käesolevas ülesandes  $k^2 = \frac{c}{J}$  ja

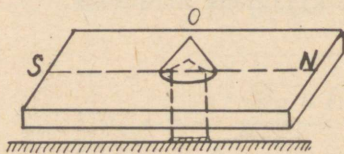
$$2n = \frac{\alpha S}{J} \quad \text{ehk} \quad n^2 = \frac{\alpha^2 S^2}{4J^2} , \quad \text{siis}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{J} - \frac{\alpha^2 S^2}{4J^2}}} = \frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}} .$$

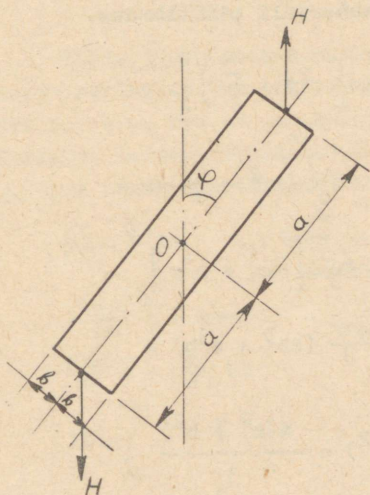
V a s t u s. Ketta võnkeperiood

$$T = \frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}$$

Näide 15. Prismaatiline magnetpulk massiga  $m$  grammi, pikkusega  $2a$  ja laiusega  $2b$  sentimeetrit võib Maa magnetvälja mõjul võnkuda ümber oma raskuskeset läbiva vertikaalse telje. Magnetpulga poolused on tema otstes. Viinud magnetpulga tasakaaluasendist  $SN$  kõrvale üsna väikese nurga võrra, jäetakse ta omapead. Leida magnetpulga liikumise seadus, kui on teada, et



Maa magnetvälja horisontaalne komponent mõjub magnetismi ühikule jõuga  $H$  düüni, magnetpulga magneetiline moment, s.o. poolustesse koondatud magnetismi hulga korrutis poolustevahelise kaugusega  $2a$  on aga  $A$  ühikut CGS-süsteemis.



Magnetil. mom. = magn.hulk  $\times$   
 $\times 2a = A$

$M_0^{(e)} = -HA \sin \varphi$  (miinusmärk seepärast, et jõud ja nurk on erimärgilised).

Lähtevaalem:  $\dot{L}_0 = M_0^{(e)}$

$\frac{dL_0}{dt} = -HA \sin \varphi$ , milles

$$L_0 = J_0 \omega.$$

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + AH \sin \varphi = 0.$$

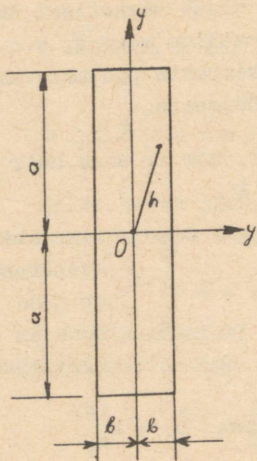
Kuna ülesande tingimuste järgi nurk  $\varphi$  on väike, siis asendame  $\sin \varphi$   $\varphi$ -ga ja saame lineaarse homogeense teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \text{ milles } k^2 = \frac{AH}{J}.$$

Selle võrrandi lahend annab magnetpulga liikumiseks harmoonilise võnkumise perioodiga

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{AH}{J_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{AH}}, \text{ milles meil puudub veel}$$

$J_0$ , s.o. magnetpulga inertsmoment punkti  $O$  läbiva joonise-ga risti oleva telje suhtes.



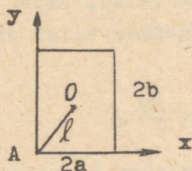
$$J_0 = \iint_S \sigma dS = \sigma \int_{-b}^{+b} dx \int_{-a}^{+a} (x^2 + y^2) dy,$$

$\sigma$  on materjali pindtihedus.

$$\begin{aligned} J_0 &= \sigma \int dx \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \\ &= 2 \sigma \int_{-b}^{+b} \left( ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{2\sigma}{3} \left[ ax^3 + a^3 x \right]_{-b}^{+b} = \\ &= \frac{4\sigma}{3} (ab^3 + a^3 b) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma \cdot 2a \cdot 2b}{3} (a^2 + b^2) = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}.$$

Veelgi lihtsamalt saab vajaliku inertsmomenti, kui kasutada valemit ristküliku inertsmomentide arvutamiseks tema tippu O läbiva joonisega risti oleva telje suhtes:



$$J_A = \frac{M}{3} [(2a)^2 + (2b)^2] = \frac{4}{3} M (a^2 + b^2)$$

ja seost paralleelsete telgede suhtes arvatatud inertsmomentide kohta:

$$J_A = J_0 + M \ell^2 = J_0 + M(a^2 + b^2),$$

Saame:

$$J_0 = J_A - M(a^2 + b^2) = M(a^2 + b^2) \left( \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$$

Avaldame T lõplikul kujul:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M(a^2 + b^2)}{3 \Delta H}}.$$

V a s t u s . Magnetpulk võngub harmooniliselt perioodiga

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M(a^2 + b^2)}{3AH}}$$

Näide 16. Lendava mürsu pöörlemine ümber oma sümmeetriatelje aegluatub õhu takistusjõudude momendi mõjul. Õhutakistus on  $k\omega$ , kus  $\omega$  on mürsu pöörlemise nurkkiirus,  $k$  - vördetegur. Leida nurkkiiruse muutumise seadus, kui algnurkkiirus on  $\omega_0$  ja mürsu inertsmoment sümmeetriatelje suhtes on  $J$ .

$$\frac{dL}{dt} = -k\omega \quad (\text{miinus sellest, et moment on nurkkiirusega vastasmärgiline}).$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -k\omega:$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{J} dt :$$

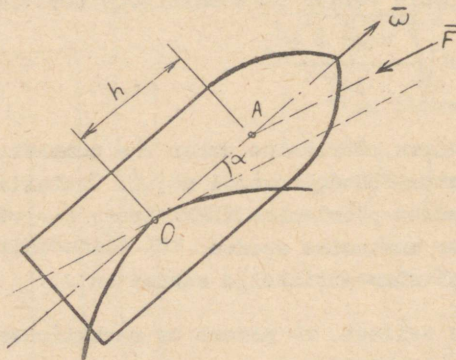
$$\ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -\frac{k}{J} t \Big|_0^t ;$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J} t} .$$

V a s t u s . Mürsu nurkkiirus muutub seaduse järgi

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J} t}$$

Näide 17. Leida suurtükimürsu sümmeetriatelje täispöörde aeg ümber mürsu raskuskeskme trajektoori puutuja, kui seda põhjustab õhutakistus  $F = 2140$  kg. Õhutakistus on paralleelne puutujaga ja on rakendatud mürsu teljele kaugusel  $h = 0,2$  m mürsu raskuskeskmest. Mürsu liikumishulga moment sümmeetriatelje suhtes on 590 kgmsec.



$$F = 2140 \text{ kG,}$$

$$OA = h = 0,2 \text{ m,}$$

$$L \approx J\omega = 590 \text{ kGmsec.}$$

Leida sümmeetriatelje päispöörde kestus.

Käesolev ülesanne käsitleb küll mürsku nagu ülesanne nr. M 1026, kuid tingimused on siin hoopis erinevad - välisjõudude peamomentvektor

ei lange enam suunalt kokku nurkkiirusvektoriga. Seepärast ei saa ka lahendamisel lähtevalemiks valida kineetilise momendi teoreemi projektsioonides, vaid vektorkujus:

$$\frac{d}{dt} \bar{L}_0 = \bar{M}_0 \quad - (e)$$

Peab tunnistama, et joonis pole täielik. Näitaksime nurkkiirusvektori  $\bar{\omega}$ , kuid teksti järgi peab esinema veel teine nurkkiirusvektor, sest sümmeetriatelg pöörleb ümber trajektoori puutuja. Lahendame ülesande ligikaudu, lugedes selle viimase pöörlemise aeglaseks, võrreldes pöörlemisega ümber sümmeetriatelje. Sel eeldusel võib ütelda, et kineetilise momendi vektor  $\bar{L}_0$  langeb suunalt ühte vektoriga  $\bar{\omega}$  ja  $\bar{L}_0 \approx J \bar{\omega}$ .

(Võiks ka väita, et me pole teadlikud sellest, et teine pöörlemine üldse esineb, kui tekstis seda ei mainitaks. Siis võiks juhtuda, et avastame selle pöörlemise lahendamise käigus.)

Kuna välisjõudude peamoment punkti O suhtes väljendub vektoriga  $\vec{OA} \times \bar{F}$ , siis

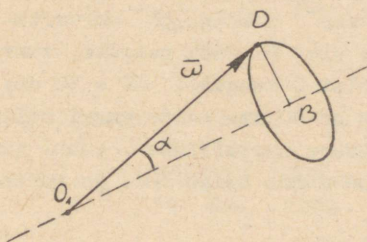
$$\frac{d}{dt}(J \bar{\omega}) = \vec{OA} \times \bar{F}$$

ehk  $J \bar{\epsilon} = \vec{OA} \times \bar{F}$ , millest nähtub, et nurkkiirendusvektor  $\bar{\epsilon}$  on olemas ja on suunatud joonise ette, sest võrduse paremal poolel on nullist erinev vektor suunaga joonise ette. Võrdsete vektorite modulite võrdsus annab:

$$J\varepsilon = h \cdot F \cdot \sin\alpha = \text{const},$$

seega ka  $\varepsilon = \text{const}$ . Lisaks on veel  $\omega = \text{const}$ .

Teame, et vektori tuletise väärtus on arvuliselt võrdne kiirusega, millega selle vektori tipp liigub oma hodograafil. Siin  $\vec{\omega}$  tipp liigub ringjoonel (mitte ruumis spiraalil, sest hodograafi moodustamisel tuleb vektori algus asetada liikumatusse punkti), kusjuures tema kohavektor  $\vec{BD}$  pöörleb mingi nurkkiirusega  $\omega_1$ , mis ei ole meil teada. Selle tipu D kiirus on



$\varepsilon = v_D = \omega_1 \cdot BD$ .

Näib, et saadud võrduses ei ole dimensioonid õiged, kuid

see pole nii.  $BD$  on lõik, mille dimensiooniks ei ole pikkus, vaid  $\text{sec}^{-1}$ , sest kogu joonis kujutab nurkkiirusi ja mitte pikkusi. Jooniselt saamegi, et  $BD = \omega \sin\alpha$ .

Seega

$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin\alpha.$$

Asendame selle tulemuse:

$$J\omega_1 \cdot \sin\alpha = h \cdot F \sin\alpha$$

ehk

$$\omega_1 = \frac{hF}{J\omega} = \frac{hF}{L} = \text{const}.$$

Lõpuks leiame mürsu sümmeetriatelje täispöörde kestuse.

Kuna  $\omega_1 = \text{const}$ , siis hodograafi raadius  $BD$  moodustab nurga

$$\varphi = \omega_1 t.$$

Leiame siit  $t$  väärtuse  $T$ , kui  $\varphi = 2\pi$ :

$$t = \frac{\varphi}{\omega_1} \quad \text{ja} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ehk}$$

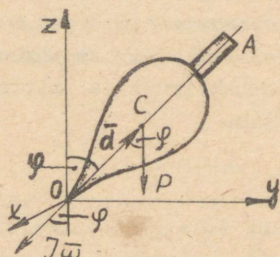
$$T = \frac{2\pi L}{hF}.$$

Asendame arvud:

$$T = \frac{2\pi \cdot 590}{0,2 \cdot 2140} = \frac{\pi \cdot 295}{107} = 8,65 ; \quad T = 8,65 \text{ sec.}$$

V a s t u s . Mürsu sümmeetriatelg teeb täispöörde ümber trajektoori puutuja 8,65 sekundiga.

Näide 18. Vurr pöörleb päripäeva ümber oma telje OA konstantse nurkkiirusega  $\omega = 600 \text{ sec}^{-1}$ ; telg OA on vertikaali suhtes kaldu; telje alumine ots O jääb paigale; vurri raskuskese C on teljel OA punktist O kaugusel  $OC = 30 \text{ cm}$ ; vurri inertsiraadius telje suhtes on 10 cm. Leida vurri telje OA liikumine, oletades, et üsna suure nurkkiiruse  $\omega$  puhul vurri liikumishulga moment on sihitud mööda telge OA ja võrdne  $J\omega$ .



$$J = M \varrho^2 ,$$

$$\omega = 600 \text{ sec}^{-1} ,$$

$$OC = d = 30 \text{ cm} ,$$

$$\varrho = 10 \text{ cm} ,$$

$$\bar{L} = J \bar{\omega}$$

Leida telje OA liikumine.

Lähtevealem:  $\dot{\bar{L}} = \bar{M}_O(e)$ ,

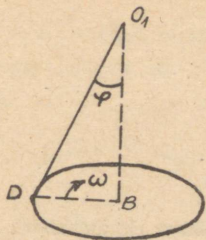
ka siin  $J \bar{\omega} \approx \bar{L}_O$ ,

$$\frac{d}{dt}(J \bar{\omega}) = \bar{d} \times \bar{P} ,$$

$$J \bar{\epsilon} = \bar{d} \times \bar{P} , \quad J \epsilon = d P \sin \varphi .$$

Kuna  $\bar{\epsilon} \perp \bar{\omega}$ , siis  $|\bar{\omega}| = \text{const}$ .  $\bar{\epsilon}$  on alati risti punktist C z-teljele tõmmatud ristjoonega, sest seda on ka jõumoment. Seega  $\bar{\omega}$  lõpp-punkt peab liikuma ringjoonel, mille keskpunkt on z-teljel ja tasapind on risti z-teljega.

Vektori  $\bar{\omega}$  hodograaf on ringjoon ja  $\epsilon$  võrdub vektori  $\bar{\omega}$  tipu kiirusega sellel. Tähistame vektori  $\bar{\omega}$  pöörlemise nurkkiiruse tähega  $\omega_1$ . Siis



$$\epsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin \varphi \quad \text{ja}$$

asendamine annab:

$$J \omega_1 \omega \sin \varphi = d P \sin \varphi ,$$

$$\omega_1 = \frac{d P}{J \omega} = \frac{d M g}{M \varrho^2 \omega} = \frac{d g}{\varrho^2 \omega} = \text{const},$$

$$\omega_1 = \frac{d g}{\varrho^2 \omega} .$$

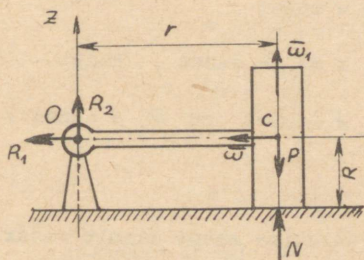
Asendame arvud:

$$\omega_1 = \frac{30 \cdot 981}{10^2 \cdot 600} = \frac{981}{2000} = 0,49 ; \quad \omega_1 = 0,49 \text{ sec}^{-1} .$$

V a s t u s . Telg OA pöörleb päripäeva ümber vertikaalli, nurkkiirusega  $\omega_1 = \frac{d g}{\varrho^2 \omega} = 0,49 \text{ sec}^{-1}$  .

Näide 19. Purustamiseadme iga jooksuratta kaal

$P = 1200$  kg, inertsiraadius telje suhtes  $\varrho = 0,4$  m, raadius  $R = 0,5$  m, seadme pöörlemise hetkeline telg läbib jooksurattaste ja kausi põhja kokkupuutepunkti ühendava sirge keskohta. Leida jooksuratta surve kausi horisontaalsele põhjale, kui jooksuratta kaasaliikumise kiirus ümber vertikaalse telje on 60 p/min.



$$P = 1200 \text{ kG} ,$$

$$\varrho = 0,4 \text{ m} ,$$

$$R = 0,5 \text{ m} =$$

$$n = 60 \text{ p/min (ümbes } z\text{-telje)}$$

Leida  $N$  .

$$\text{Lähtevaalem. } L_O = M_O^{(e)} .$$

Käesolevas ülesandes koosneb süsteemi kineetiline moment osadest:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{L}'_C,$$

$\vec{r}_C$  on punkti C kohavektor  $\vec{OC}$ ,

$M$  - ratta mass,

$\vec{v}_C$  - punkti C kiirusvektor,

$\vec{L}'_C$  - süsteemi kineetilise momendi vektor liikumisel ümber punkti C.

$$\vec{L}'_C = J\vec{\omega} + J_1\vec{\omega}_1,$$

$J$  - ratta inertsmoment ümber telje CO,

$J_1$  - ratta inertsmoment ümber vertikaalse diameetri,

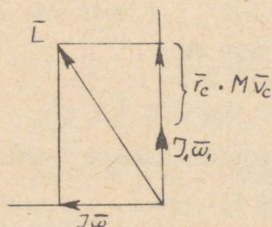
$\vec{\omega}$  - ratta nurkkiirusvektor pöörlemisel ümber telje CO,

$\vec{\omega}_1$  - ratta nurkkiirusvektor pöörlemisel ümber vertikaalse diameetri (süsteemi pöörlemisega ümber z-telje kaasneb ka ratta pöörlemine ümber vertikaalse diameetri sama nurkkiirusega).

Lähtevõrrandisse asendamisel saame:

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt} [\vec{r}_C \times M\vec{v}_C + J\vec{\omega} + J_1\vec{\omega}_1] = \vec{OC} \times (\vec{P} + \vec{N}).$$

Vaatleme vasaku poole sulgavaldist:



$$\vec{\omega}_1 = \text{const},$$

$$\vec{r}_C \times M\vec{v}_C = \text{const}, \text{ kuigi}$$

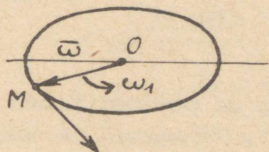
$$\vec{r}_C \neq \text{const} \text{ ja } \vec{v}_C \neq \text{const}.$$

Näeme, et nullist erineva tuletise saame ainult vasakul keskmisest liikmest:

$$\frac{d}{dt} (J\vec{\omega}) = \vec{OC} \times (\vec{P} + \vec{N}),$$

$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{OC} \times (\vec{P} + \vec{N}).$$

$\varepsilon$  võrdub vektori  $\vec{\omega}$  tipu kiirusega hodograafil, hodo-  
graafiks aga on ringjoon ja vektor  $\vec{\omega}$  pöörleb nurkkiirusega  
 $\omega_1$ .



$$\varepsilon = v_M = \omega_1 \cdot OM = \omega_1 \omega \neq 0.$$

Kuna  $\varepsilon \neq 0$ , siis  $\vec{OC} \times (\vec{P} + \vec{N}) \neq 0$ ,  
millest ilmneb, et  $P \neq N$ , nagu  
lahenduse alguses ekslikult oleksime  
võinud arvata. Punkti M liikumis-  
suuna järgi otsustades on  $\vec{\varepsilon}$  suund  
joonise ette ja ka  $\vec{OC} \times (\vec{P} + \vec{N})$  suund peab olema joonise et-  
te. Teiste sõnadega  $N > P$  ja

$$J\varepsilon = OC \cdot (N - P) = r(N - P) \text{ ehk}$$

$$J\omega_1 \omega = r(N - P), \text{ millest}$$

$$N = P + \frac{J\omega_1 \omega}{r}.$$

Arvutame vajalikud suurused:

$$J = M \varrho^2 = \frac{P}{g} \varrho^2$$

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 60}{30} = 2\pi.$$

Punkti C kiiruse kaudu saame:

$$v_C = r \cdot \omega_1 = R \cdot \omega \text{ ehk}$$

$$\frac{\omega}{R} = \frac{\omega_1}{R}.$$

Nüüd:

$$N = P + \frac{P}{g} \varrho^2 \frac{\omega_1^2}{R} = P \left( 1 + \frac{\varrho^2 \omega_1^2}{gR} \right).$$

Asendame arvud:

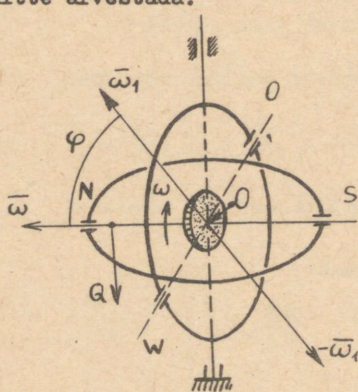
$$N = 1200 \left( 1 + \frac{0,4^2 \cdot 4\pi^2}{g \cdot 0,5} \right) = 1200(1 + 1,28) = 2740$$

$$N = 2740 \text{ kg.}$$

V a s t u s . Ratta surve pörandale

$$N = P \left( 1 + \frac{\rho^2 \omega_1^2}{gR} \right) = 2740 \text{ kg.}$$

Näide 20. Tasakaalustatud güroskoop on kardaanliigendi abil üles seatud Maakera põhjalaiusel  $\varphi$ . Güroskoobi rootori telg asetseb horisontaalselt antud koha meridiaani tasapinnas. Leida vastukaalu raskus  $Q$ , teades, et vastukaal on kinnitatud seadise sisemise rõnga külge rootori telje pikendusel nii, et pööreldes koos Maaga, jääb rootori telg meridiaani tasapinda. Rootori pöörlemise nurkkiirus ümber oma telje on  $\omega$ , rootori inertsmoment selle telje suhtes  $J$ , seadise sisemise rõnga raadius  $a$  ning Maa nurkkiirus  $\omega_1$ . Höördumist ja rataste masse mitte arvestada.



Antud:  $\omega$ ,  $J$ ,  $ON = a$ ,

$\omega_1$  - Maa nurkkiirus.

Leida  $Q$  väärtus, nii et  $ON$  jääks meridiaani tasapinda.

$$\text{Lähtevealem: } L_0 = M_0 \cdot \frac{d}{dt} \dots$$

Lähene me küsimusele nõnda: rootoril on suur nurkkiirus  $\omega$  ja väike nurkkiirus  $\omega_1$

Maakera pöörlemisele vastassuunas, s.t. ( $-\omega_1$ ).

nas, s.t. ( $-\omega_1$ ).

$$\vec{L}_0 = J \vec{\omega} - J \omega_1 \cos \varphi \frac{\vec{\omega}}{\omega} - J_1 \omega_1 \sin \varphi \vec{u}_{1\omega},$$

$\frac{J \vec{\omega}}{\omega}$  on  $\vec{\omega}$  - suunaline ühikvektor,

$\vec{u}_{1\omega}$  - ühikvektor, mis on risti  $\vec{\omega}$  -ga.

Kuna  $\omega_1$  on  $\omega$ -ga võrreldes väike suurus, siis loobume sellest:

$$\vec{L}_O \approx J \vec{\omega} .$$

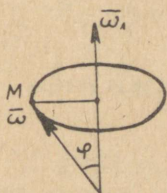
Sarniiride süsteemi tõttu ei ole rootorile võimalik üle kanda toereaktsioonide momente. Välisjõududest annab momendi ainult  $Q$ .

$$\frac{d}{dt} (J \vec{\omega}) = \vec{ON} \times \vec{Q} ;$$

$$J \vec{\varepsilon} = \vec{ON} \times \vec{Q} ;$$

$$J \varepsilon = ON \cdot Q \cdot \sin(\vec{ON}, \vec{Q}) = ON \cdot Q \left[ \begin{array}{l} \text{teksti järgi} \\ \sin(\vec{ON}, Q) = 1 \end{array} \right]$$

Vektor  $\vec{\omega}$  kujundab ööpäeva jooksul pöördkoonuse pinna ümber Maakera nurkkiirusvektoriga paralleelse sirge.  $\varepsilon$  võrdub  $\vec{\omega}$  tipu kiirusega:



$$\varepsilon = v_M = \omega_1 \cdot \omega \sin \varphi .$$

$$J \varepsilon = ON \cdot Q = a \cdot Q ,$$

$$J \omega_1 \omega \sin \varphi = a Q \quad \text{ja}$$

$$Q = \frac{J \omega_1 \omega \sin \varphi}{a} .$$

V a s t u s . Kinnitatakse lisaraskus on

$$Q = \frac{J \omega_1 \omega \sin \varphi}{a} .$$

Näide 21. Lahendada lõpuni ülesanne M 1110 (991).

Süsteemi kineetiline moment  $\vec{L}_B$  punkti B suhtes on arvatud p. 9 n.5.

1) Staatilised reaktsioonid  $N'_A$  ja  $N'_B$  on need laagri-reaktsioonid, mis tekivad ketta paigalseisus. Aktiivseks jõuks on ketta kaal  $P$ , mis on rakendatud punkti C. Kui telg on hõõrdevaba, siis laagrireaktsioonid on suunatud vertikaalselt üles.

$N'_A$  leidmiseks arvutame jõudude momentide summa (peamomendi) punkti B suhtes (mis peab võrduma nulliga):

$$M_B = (a + e \sin \alpha)P - 2a N_A' = 0, \text{ kust}$$

$$N_A' = \frac{(a + e \sin \alpha)P}{2a}$$

$N_B'$  leitakse analoogiliselt (leida peamoment p. A suhtes) või tingimusest, et  $N_A' + N_B' = P$

2) Dünaamilised laagrireaktsioonid  $\bar{N}_A''$  ja  $\bar{N}_B''$  on need laagrireaktsioonid, mis lisanduavad staatilistele süsteemi pöörlemise tagajärjel. Lihtsamini saab neid leida, kui oletada, et kettal on küll mass, aga puudub kaal (mis teatavasti tasakaalustatakse staatiliste laagrireaktsioonidega).

Seega

$$(a) \quad \dot{\bar{L}}_B = \bar{M}_B(\bar{N}_A'')$$

Kuna  $\bar{L}_B$  on kettaga jäigalt seotud absoluutselt konstantne vektor, siis

$$(b) \quad \dot{\bar{L}}_B = \bar{\omega} \times \bar{L}_B = -\omega L_{By} \bar{t} =$$

$$- \frac{P}{g} \omega^2 \left[ a e \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^2 + \frac{1}{4} r^2) \right] \bar{t}.$$

Niisugune valem jääb õigeks kogu ketta liikumise vältel, kui oletada, et teljestik  $Oxyz$  pöörleb ühes kettaga. Samal tingimusel jääb ka  $\bar{L}_B$  avaldis muutumatuks.

$$(c) \quad \bar{M}_B(\bar{N}_A'') = -2a \cdot N_A^v \bar{t}$$

(- märk on võetud seepärast, et ta esineb ka  $\dot{\bar{L}}_B$  ees,  $N_A'' = |\bar{N}_A''|$ ).

(b) ja (c) võrdlusest saame, arvestades (a)-d,

$$\bar{N}_A'' = \frac{P \omega^2}{2ag} \left[ a e \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^2 + \frac{1}{4} r^2) \right] \bar{t}$$

ja  $\bar{N}_A''$  on y-telje sumaline.

$\bar{N}_B''$  leidmiseks arvutada kineetiline moment p. A suhtes  $\bar{L}_A$ . Selle arvutamisel tuleb  $\bar{L}_B$  valemis olev a asendada (- a) - ga.

$$\text{Saame } N_B'' = - \frac{P \omega^2}{2ag} \left[ - a \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^2 + \frac{1}{4} r^2) \right].$$

$\bar{N}_B''$  on y-telje suunaline kui viimane [ ] suluvaldis on negatiivne. Vastasel juhtumil on  $\bar{N}_B''$  y-teljega vastassuunaline (valem annab negatiivse  $N_B''$ ).

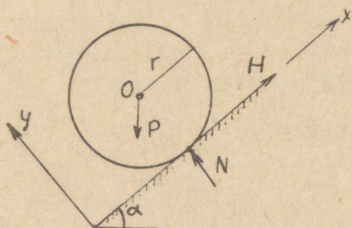
$N_A''$  võib arvutada ka massikeskme liikumise teoreemist:

$$N_B'' + N_A'' = \frac{P}{g} e \cos \alpha \cdot \omega^2, \text{ millest}$$

$$N_A'' = \frac{P}{g} e \cos \alpha \omega^2 - N_B''.$$

V a s t u s on antud ülesannetekogus.

Näide 22. Ühtlane horisontaalse teljega silinder veereb oma raskuse mõjul alla mööda karedat kaldpinda, mille hõõrdetegur on f. Eeldades, et silindri liikumisel ei esine libisemist, leida kaldpinna kaldenurk horisondi suhtes ja silindri telje kiirendus. Veeretakistust mitte arvestada.



Antud: f; libisemata veerimine.

Leida  $\alpha$ ;  $w_0 = w$ .

On tegemist tasaparalleelse liikumisega, mille lähtevõrrandid on:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_O = X(e) \\ \ddot{y}_O = Y(e) \\ \frac{dL_O}{dt} = M_0(e) \end{cases}$$

$$\text{ehk } \begin{cases} mw_{0x} = - P \sin \alpha + H \\ 0 = - P \cos \alpha + N \\ J_O \varepsilon = Hr \end{cases}$$

Tasaparalleelse liikumise teooria kirjeldab kehade liikumist tavaliselt Cartesiuse koordinaadistikus. Seepärast tuleb hoolega jälgida kasutatavate suuruste märke.  $w_{OX}$  on negatiivne, kuna ta on x-teljele vastassuunaline;  $\epsilon$  on positiivne, kuna ta on vastupäeva. Seepärast:

$$\epsilon = - \frac{w_{OX}}{r} .$$

Uhtlase silindri inertsmoment silindri telje suhtes on  $J_0 = \frac{mr^2}{2}$ . Kirjutame esimese ja kolmanda lähtevõrrandi ümber:

$$\begin{cases} mw_{OX} r = - mg \sin \alpha \cdot r + Hr \\ - J_0 \frac{w_{OX}}{r} = Hr \end{cases}$$

ehk 
$$mw_{OX} r = - mg \sin \alpha \cdot r - \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{w_{OX}}{r} ,$$

$$w_{OX} = - \frac{2}{3} g \sin \alpha \text{ ehk } w_0 = \frac{2}{3} g \sin \alpha .$$

Teisele küsimusele vastamiseks on meil kasutada teisest lähtevõrrandist

$$N = P \cos \alpha ,$$

esimesest lähtevõrrandist  $H = mw_{OX} + mg \sin \alpha$  ja lisaseos hõõrdejõu kohta

$$H \leq fN .$$

Nendest saame:

$$mw_{OX} + mg \sin \alpha \leq fmg \cos \alpha ,$$

$$- \frac{2}{3} g \sin \alpha + g \sin \alpha \leq f g \cos \alpha ,$$

$$\frac{1}{3} \sin \alpha \leq f \cos \alpha ,$$

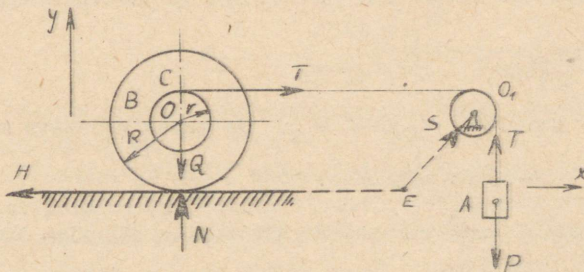
$$\tan \alpha \leq 3f .$$

Viimase tulemuse võime kirjutada veel:

$$\alpha \leq \arctan 3f .$$

V a s t u s . Silindri telje kiirendus  $w_0 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$   
 ja libisemata veeremise tingimustele  
 vastav kaldenurk  $\alpha \leq \arctan 3 f$ .

Näide 23. Raskus A kaaluga P, laskudes alla, paneb üle ploki D heidetud ja trumlile B keritud kaalutu ning venimatu niidi abil mööda horisontaalset rööbast libisemata veerema rattaga C. Trummel B raadiusega r on järgalt kinnitatud rattaga C, mille raadius on R. Nende summaarne kaal on Q, inertsiraadius horisontaalse telje O suhtes on aga  $\varphi$ . Leida raskuse A kiirendus.



Antud: P; Q; r; R;  $\varphi$ .

Leida:  $w_A$ .

Ulesanne lahendub kõva keha tasaparalleelse liikumise teooria abil, kui vaadelda süsteemi koosnevana kahest osast ja asendada nööri mõju kummalegi osale jõuga T.

Lähtevõrrandid rattale:

$$\begin{cases} M \bar{w}_{\text{rattas}} = \bar{F}(e) & \bar{F}(e) \text{ on välisjõudude peavektor} \\ \frac{dL_O}{dt} = M_O(e) & M_O(e) \text{ - välisjõudude peamoment punkti O suhtes.} \end{cases}$$

Lähtevõrrand raskusele A:

$$\frac{dK_A}{dt} = \bar{F}_1 \quad \bar{F}_1 \text{ - välisjõudude peavektor}$$

Viime kõigisse lähtevõrrandisse antud ülesande andmed:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{g} v_{ox} \right) = T - H$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{g} v_{oy} \right) = 0 = -Q + N$$

$$\frac{d}{dt} (J \omega) = -Tr - HR$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P}{g} v_{Ay} \right) = T - P$$

$v_{ox}$  ja  $v_{Ay}$  on omavahel seotud:

$\frac{v_{ox}}{R} = -\frac{v_{Ay}}{R+r}$ , sest  $v_A$  on võrdne ratta ja nööri puutepunkti kiirusega, suunad aga on vastupidised. Siit:

$$v_{ox} = -\frac{R}{R+r} v_{Ay}.$$

$\omega$  saab avaldada  $v_{Ay}$  (või  $v_{ox}$ ) ja ratta möötmete kaudu:

$$\omega = -\frac{v_{Ay}}{R+r} \quad (\text{veenduda miinuses!}) \quad J = \frac{Q}{g} \rho^2.$$

Nende abil saame võrrandite süsteemile järgmise kuju:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{QR}{g(R+r)} w_{Ay} = T - H \\ N = Q \quad - \text{see polegi edasises vajalik} \\ -\frac{Q}{g} \rho^2 \frac{w_{Ay}}{R+r} = Tr + HR \\ \frac{P}{g} w_A = T - P \end{array} \right.$$

Korrutame esimese võrrandi kõik liikmed  $R$ -ga ja liidame tulemusele kolmanda võrrandi vastavad pooled:

$$-\frac{Q}{g(R+r)} (R^2 + \rho^2) w_{Ay} = T(R+r).$$

Asendades siia neljandast võrrandist

$$T = P \left( 1 + \frac{w_A}{g} \right),$$

saame

$$-\frac{Q}{g(R+r)} (R^2 + \rho^2) w_{Ay} = P \left( 1 + \frac{w_{Ay}}{g} \right) (R+r),$$

$$-\frac{Q}{g}(R^2 + \rho^2)w_A - \frac{P}{g}(R+r)^2w_A = P(R+r)^2,$$

$$w_{Ay} = -g \frac{P(R+r)^2}{Q(R^2 + \rho^2) + P(R+r)^2} \quad \text{ehk}$$

$$w_A = g \frac{P(R+r)^2}{Q(R^2 + \rho^2) + P(R+r)^2}.$$

( $w_{Ay}$  on projektsioon,  $w_A$  - arvuline väärtus)

V a s t u s . Raskus A hakkab langema kiirendusega

$$w_A = g \frac{P(R+r)^2}{Q(R^2 + \rho^2) + P(R+r)^2}.$$

Näide 24. Lahendada eelmine ülesanne süsteemi kineetilise momendi abil.

Ülesanne lahendub väga lühidalt üheainsa võrrandi abil, kui arvestada, et nõõride võrdsed tõmbed kutsuvad ploki teljel esile reaktsiooni  $S$ , mille siht moodustab kummagi nõõri sihiga võrdse  $45^\circ$ -se nurga ja et  $N = Q$ , sest rattal puudub vertikaalne kiirendus (seda näitas meile eelmise lahenduskäigu teine võrrand  $0 = -Q + N$ ).

Võtame nimelt punktiks, mille suhtes kasutada kineetilise momendi teoreemi, jõudude  $H$  ja  $S$  löikepunkti  $E$ :

$$\frac{dL_E}{dt} = M_E^{(e)},$$

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{P}{g} v_A(r+R) - \frac{Q}{g} v_O R - \frac{Q}{g} \rho^2 \omega \right) = -P(r+R)$$

$$v_O = \frac{R}{R+r} v_A$$

$$\omega = \frac{v_O}{R} = \frac{v_A}{R+r}$$

siin ei ole tarvis miinusmärki, sest seostes esinevad absoluutväärtused.

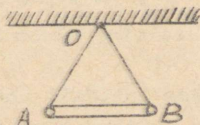
$$\left[ \frac{P}{g}(r+R) + \frac{Q}{g} \frac{R^2}{R+r} + \frac{Q}{g} \rho^2 \frac{1}{R+r} \right] \frac{dv_A}{dt} = P(r+R),$$

$$\frac{1}{E} \left[ P(r + R)^2 + Q(R^2 + \rho^2) \right] w_A = P(r + R)^2,$$

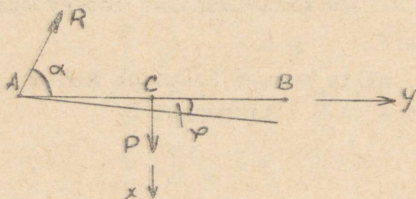
$$w_A = E \frac{P(r + R)^2}{P(r + R)^2 + Q(R^2 + \rho^2)}.$$

Tulemus ühtib eelmise lahenduse vastusega.

Näide 25. Ühtlane varras AB kaaluga P on riputatud punkti O kahe niidi abil, mille pikkused on võrdsed varda pikkusega. Leida ühe niidi tõmme momendil, kui teine katkeb. Koostame varda liikumise diferentsiaalvõrrandid niidi rebemise hetkele järgneva väga väikese ajavahemiku kohta, jättes arvestamata varda sihi ning varda raskuskeskme ja teise niidi vahelise kauguse muutumise.



Vahetult pärast parempoolse niidi katkemist teeme uue joonise:



Antud:  $P$ ;  $\alpha = 60^\circ$ .

Leida: niidi tõmme  $R$ .

Tasaparalleelse liikumise teooria järgi:

$$m\ddot{x}_C = P - R \sin 60^\circ$$

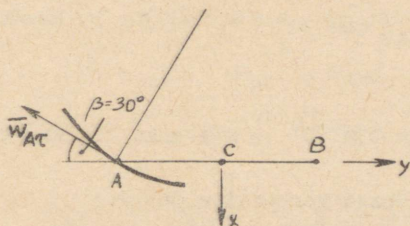
$$m\ddot{y}_C = R \cos 60^\circ$$

$$J_C \ddot{\varphi} = -R \sin 60^\circ \cdot \frac{l}{2}$$

$l$  on varda pikkus,

$$J_C = \frac{m l^2}{12} \text{ - varda inertsmoment keskpunkti C suhtes.}$$

Saadud kolmes võrrandis on neli tundmatut:  $\ddot{x}_C$ ,  $\ddot{y}_C$ ,  $\ddot{\varphi}$  ja R. Seepärast vajame lisatingimusi. Need saame



punkti A vaatlusest. Nimelt ei ole punkti A liikumine vaba, vaid seda reguleerib nõör, sundides punkti püsima ringjoonel. Kuna vaatleme olukorda vahetult pärast parempoolse niidi katkemist, siis varda kõikide punktide

kiirused on alles võrdsed nulliga, kuid kiirendused on neil juba olemas. Punktis A tähendab see seda, et normaalkiirendus  $w_n$ , mille siht ühtib vasakpoolse niidi sihiga, pole veel jõudnud nullist erinevaid väärtusi saada, kuid tangentsiaal-kiirendus  $w_A$  on olemas. Köva keha tasaparalleelsel liikumisel väljendub punktide A ja C kiirenduste vaheline seos järgnevalt:

$$\bar{w}_A = \bar{w}_C + \bar{w}_{AC}, \text{ milles}$$

$$\bar{w}_C = w_{Cx} \bar{u}_1 + w_{Cy} \bar{u}_2 \quad \text{ja}$$

$w_{AC} = \varepsilon \cdot AC = \varepsilon \cdot \frac{\ell}{2}$  ja on varda oletatud pöörlemissuuna puhul (päripäeva!) suunatud üles:

$$\bar{w}_{AC} = -w_{AC} \bar{u}_1 = + \frac{\varepsilon \ell}{2} \bar{u}_1.$$

(Märkus: indeks AC on siin võetud samas tähenduses nagu Voronkovi õpikus, s.t. tuleb lugeda: punkti A kiirendus pöörlemisel punkti C ümber.) \*

Märgi muutsime seepärast, et  $\varepsilon$  on suunatud päripäeva ja seega negatiivne.

Seega:

$$\bar{w}_A = (w_{Cx} + \frac{\varepsilon \ell}{2}) \bar{u}_1 + w_{Cy} \bar{u}_2.$$

Kuid jooniselt selgub, et

$$\bar{w}_A = -w_{AC} \sin 30^\circ \bar{u}_1 - w_{AC} \cos 30^\circ \bar{u}_2$$

ja me saame veel kaks võrrandit

$$\begin{cases} w_{Cx} + \frac{\epsilon \ell}{2} = -w_{A\tau} \sin 30^\circ \\ w_{Cy} = -w_{A\tau} \cos 30^\circ \end{cases}$$

ehk 
$$\frac{\ddot{x}_c + \frac{\ddot{\varphi} \ell}{2}}{\ddot{y}_c} = \tan 30^\circ$$
, mis ongi lisatingi-

museks tasaparalleelse liikumise võrrandite juurde:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = P - \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ m\ddot{y}_c = \frac{R}{2} \\ J_c \ddot{\varphi} = -\frac{R\ell\sqrt{3}}{4} \\ \ddot{x}_c + \frac{\ddot{\varphi} \ell}{2} = \frac{\ddot{y}_c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Asendame esimesest kolmest võrrandist neljandasse  $\ddot{x}_c$ ;  $\ddot{y}_c$  ja  $\ddot{\varphi}$ :

$$\frac{P}{m} - \frac{R\sqrt{3}}{2m} - \frac{R\ell^2\sqrt{3}}{8 \cdot \frac{m\ell^2}{12}} = \frac{R}{2m\sqrt{3}}$$

$$P = R \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right),$$

$$P = R \frac{3 + 3 \cdot 3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{13R}{2\sqrt{3}}, \text{ millest}$$

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{13} P = 0,266 P.$$

V a s t u s . Tõmme niidis vahetult pärast teise niidi katkemist on 0,266 P.

Näide 26. Lahendada ülesanne M 1114 (995) lõpuni.

P. 9 näites 6 on arvutatud süsteemi kineetiline moment  $L_{O_1}$ .

-(e)

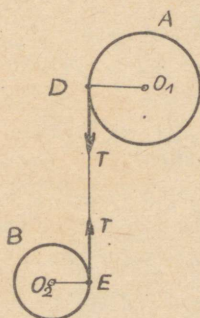
Arvutame  $M_{O_1}$ . Ainukeseks välisjõuks, mille moment p.  $O_1$  suhtes on nullist erinev, on silindri B kaal. Järelikult

$$M_{O_1}^{(e)} = P_2(r_1 + r_2).$$

Tingimusest  $\dot{L}_{O_1} = M_{O_1}^{(e)}$  saame

$$(a) \quad \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r_1^2 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2 \varepsilon_2 + \frac{P_2}{g} (\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2) (r_1 + r_2) = P_2(r_1 + r_2).$$

Sellest võrrandist ei saa leida kaht tundmatut  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$ . Teise seose leidmiseks arvestame niidi tõmmet T, mis punktis D mõjub kettale A ja on suunatud alla, punktis E aga kettale B suunaga üles.



Ketta A kohta võime kirjutada kõva keha pöörlemise diferentsiaalvõrrandi põhjal (p. 14 valem (22)):

$$(b) \quad \frac{1}{2} P_1 r_1^2 \varepsilon_1 = r_1 T \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{2} P_1 r_1 \varepsilon_1 = T,$$

ketta B jaoks aga massikeskme kohta rakendatud kineetilise momendi teoreemi põhjal (p.17 valem (30)):

$$(c) \quad \frac{1}{2} P_2 r_2^2 \varepsilon_2 = r_2 T \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{2} P_2 r_2 \varepsilon_2 = T.$$

Võrrandid (a), (b) ja (c) koos võimaldavad leida  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ja T. Siis

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t, \quad \omega_2 = \varepsilon_2 t \quad \text{ja}$$

$$s = \frac{(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2) t^2}{2}$$

V a s t u s . Antud ülesannetekogus.

## S i s u k o r d

	lk.
1. Eelnevaid märkusi	3
2. Masspunktide süsteemi kineetiline moment	4
3. Kineetiline moment koordinaattelgede suhtes	6
4. Kineetilise momendi arvutamine	7
5. Kineetiline moment ja massikeskpunkt	8
6. Köva keha kineetiline moment pöörlemistelje suhtes	11
7. Sümmetriatelje ümber pöörleva keha kineetiline moment pöörlemistelje mingi punkti suhtes	12
8. Tasapinnalise süsteemi kineetiline moment	13
9. Näiteid kineetilise momendi arvutamisest	15
10. Süsteemi kineetilise momendi teoreem (vektoriaalselt)	32
11. Kineetilise momendi teoreem projektsioonides	34
12. Süsteemi kineetilise momendi jäävus	36
13. Kineetilise momendi teoreemi kinemaatilise interpretatsioon (Rešali teoreem)	37
14. Kinnistelje ümber pöörleva köva keha liikumise diferentsiaalvõrrand	39
15. N.E. Žukovski pink kineetilise momendi jäävuse demonsteerimiseks	40
16. Füüsikaline pendel	42
17. Kineetilise momendi teoreem massikeskme suhtes	44
18. Köva keha liikumise üldjuhtum. Tasaparalleelne liikumine	46
19. Köva keha inertsmomendi katseline määramine	48
20. Näiteid süsteemi kineetilise momendi teoreemide rakendamise kohta	48



Hind 19 kop.