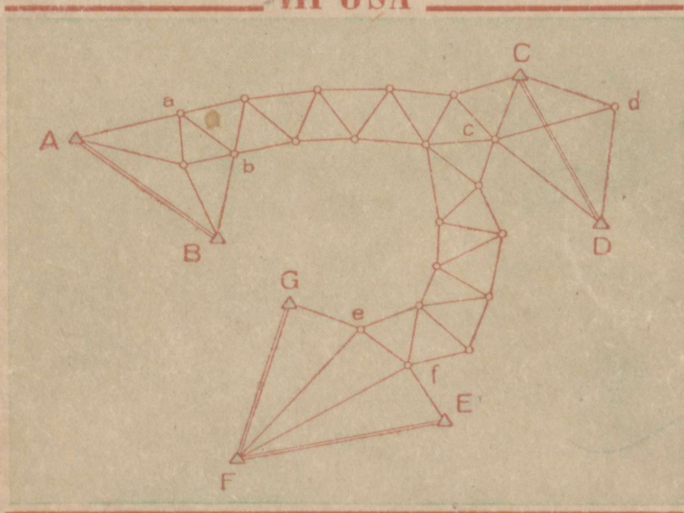

N. NAZAROV

GEODEESIA

III OSA



RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“ · TALLINN

16279 III
ÕPIKUD JA ÕPPEVAHENDID
PÕLLUMAJANDUSLIKELE TEHNIKUMIDELE

N. A. NAZAROV

GEODEESIA

III OSA

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1948

NSVL Põllutööministeeriumi
Kõrgemate Õppeasutiste ja Tehnikumide Peavalitsuse
poolt kinnitatud õpikuna maakorralduse
tehnikumidele

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

17192



**MÕISTEID VIGADE TEOORIAST. LIHTSAIMAD TASANDAMISE MEETODID. V JA VI KLASSI POLUGONOMEETRILISED KÄIGUD. V KLASSI TRIGONOMEETRILINE VÕRK, TÕELISE ASIMUUDI MÄÄRAMINE.
GAUSS-KRUGERI KOORDINAADID.**

I peatükk.

PÕHILISED MÕISTED JA VALEMID VIGADE TEOORIAST.

§ 1. Vigade teooria ülesanded — tasandamine ja hindamine.

Geodeetiliste toimingute juures mõõdetakse väga sageli ühte ja sama suurust mitu korda. Seejuures tekib loomulikult küsimus mitmest mõõdetud suuruse väärtusest parima valimise kohta. Suuruse parimaks väärtuseks peetakse muidugi seda, mis kõige enam läheneb tema tõelisele väärtusele. Teiste väärtuste hulgas on see, nagu öeldakse, *tõenäolisim*. Vigade teooria seabki oma esimeseks ülesandeks mitmest mõõdetud väärtusest tõenäolisima suuruse leidmise.

Suuruse tõenäolisimate väärtuste määramist nimetatakse nende tasandamiseks.

Vigade teooria teiseks ülesandeks on suuruste väljavalitud väärtuste hindamine.

Need mõlemad ülesanded on tihedalt seotud mõõtmiste vigadega. Tõepoolest, tasandamisel me peame üles otsima suuruse selliseid väärtusi, mis sisaldavad väiksemaid vigu. Täpselt samuti sõltub mõõtmise väärtuslikkus mõõtmistel tehtud vigade suurusest: mida suuremad on vead, seda halvem on mõõtmine. Tähendab, vigade teoorias meil tuleb uurida mõõtmistel esinevaid vigu ja kindlaks määrata tundemärke, mille järgi me võiksime otsustada, sõltuvalt antud mõõtmiste vigade suurusest, mõõtmiste omaduste üle.

§ 2. Jämedad ja süstemaatilised vead.

On endastmõistetav, et vigade uurimisel ei tegelda niimimetatud *jämedate vigadega*, mis ületavad selle suurima vea suuruse, mida võib oodata mõõtmiste antud tingimuste juures. Neid vigu koos eksimustega mõõtmistel üldse ei pea olema ja geodeesia õpetab mõõtmisi korraldama nii, et need vead oleksid tingimata avastatud.

Süstemaatilisteks nimetatakse selliseid vigu, mis ühtede ja samade tingimuste juures ühesuguselt mõjutavad mõõtmise resultaati, s. t. sisenevad sellesse alati ühe ja sama märgiga. Need on instrumentaalsed, isikulised ja välisoludest tingitud vead.

Süstemaatilised vead kõrvaldatakse mõõtmisresultaadist kahe-suguselt:

1) Resultaatidele vastavate paranduste andmisega, milleks on vaja teada süstemaatilise vea tekkimise reeglit. Näiteks mõõdulindi viga saab määrata lindi võrdlemisel normaalsega.

2) Neid vigu kompenseeriva mõõtmisvõtte kasutamisega. Näiteks alidaadi ekstsentrilisusest tingitud viga kompenseerub lugemitega kahe nooniuise järgi, kollimatsiooniviga — kahes ringi seisus mõõtmise võttega jne.

§ 3. Juhuslikud vead ja nende omadused.

Juhuslikeks ehk paratamatuiks vigadeks nimetatakse niisuguseid vigu, millede tekkimise põhjused on meile vähe tuntud. Nad tekiavad kas vaatluste sise- või välistingimustest. Sisemised asjaolud on järgmised: meie meele-elundite ebatäiuslikkus, instrumentide ebatäiuslikkus jne. Välised — tuul, õhu võnkumine, mitteküllaldane õhu läbipaistvus, temperatuuri võnkumine, ebaõige valgustus jne.

Juhuslikud vead on mõõtmiste juures vältimatud. Nad on nii mitmekesised ja rohkearvulised, et ei allu üksikasjalisele uurimisele, ent üldmassis, teatavais grupeeringuis muutuvad nad märgatavaks ning uuritavaks.

Edasise mõistmiseks märgime juhuslike vigade järgmised omadused:

1. *Mida väiksemad on vead, seda sagedamini nad esinevad.* Tõepoolest, iga mõõtmise juures me seame endale ülesandeks vigu hoopiski mitte teha, ja kui nad sellest hoolimata ikkagi esinevad, siis johtub see eranditult nende märkamatusesest ja väiksusest. Mida suurem on viga, seda rutem me võime teda märgata, ja lõppeks, kui viga saavutab enam või vähem tunduva suuruse, saab ta meile

selgesti märgatavaks, — ta muutub jämedaks. Siit järeldub teine omadus:

2. *Mõningast piirist suuremaid vigu ei tohi üldse esineda.* Nime- tus — „juhuslikud“ — ise juba tähendab, et need vead ei või evida reeglipärasest (süsteemaatilist) iseloomu. Mingi üks juhuslik põhjus võib-olla suurendas mõõtmisresultaati, teine võib-olla vähendas seda, — kummagi selle põhjuse võimalikkus on ühesuguselt tõenäoline. Teiste sõnadega, negatiivsete ja positiivsete vigade esinemine on ühesuguselt tõenäoline, ja kui mõõtmisi on tehtud küllaldaselt hulgal, siis on meil õigus oodata positiivseid vigu ligikaudu niisama palju kui negatiivseidki. See omadus ilmneb seda paremini, mida suurem arv on tehtud vaatlusi (mõõtmisi), ja piiri juures loetakse, et lõpmata suure vaatluste arvu juures positiivsete vigade arv võrdub negatiivsete vigade arvuga. Seejuures mistahes positiivse vea jaoks võib leida temaga absoluutselt suuruselt võrdse vea negatiivsete vigade lõpmatust jadast ja vastupidi; seepärast kõik vead vastastikku kompenseeruvad. Siit järeldub järgmine põhi- line omadus:

3. *Juhuslike vigade summa mõõtmiste arvu lõpmatu suurene- mise juures läheneb nullile.*

Märgime juhuslikud vead tähtedega $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Siis kol- manda omaduse võime avaldada valemiga nii:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) = 0.$$

Vigade teoorias märgitakse ühesuguse tähendusega liidetavate summa tavaliselt sümboliga $[\]$, mille sisse asetatakse liidetavate üldine märgis. Nüüsiis eelnenud valemi võib ümber kirjutada nii:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\Delta] = 0. \quad (1)$$

§ 4. Mõõtmise tõelised vead. Aritmeetilise keskmise printsiip.

Juhuslikud vead kujutavad endast ilmselt vahet mõõdetava suu- ruse tõelise väärtuse ja selle mõõtmisel saadud resultaate vahel.

Märgime mõõdetava suuruse tõelise väärtuse tähega X , selle mõõtmise resultaadid aga x_1, x_2, \dots, x_n . Siis vead avalduvad nii:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= X - x_1 \\ \Delta_2 &= X - x_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \Delta_n &= X - x_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Vigade teoorias on nendele vigadele antud mõõtmise tõeliste vigade nimetus.

Liidame liikmeti kõik võrdsuste (valem 2) vasakud osad ja kõik nende parempoolsed osad. Võrdsuste aksiomide põhjal tulemused peavad olema võrdsed, s. t.

$$[\Delta] = nX - [x].$$

Kui selles võrdsuses n piiramatult kasvab, siis valemi (1) kohaselt suurus $[\Delta]$ läheneb nullile ja me saame (võrdsuse parema poole kirjutame ette):

$$nX - [x] = 0,$$

kust leiame:

$$X = \frac{[x]}{n}. \quad (3)$$

Avaldis $\frac{[x]}{n}$ kujutab endast suurustest x_1, x_2, \dots, x_n aritmeetilist keskmist, mis arvutatakse väga lihtsalt. Kuid saadud valemit ei või mõista muidugi nii, et me saame leida mõõdetava suuruse *tõelise* väärtuse, kas või sellepärast, et valem eeldab lõpmata suurt mõõtmiste arvu, mida ei ole võimalik teha. Valemit (3) peab käsutama nii, et mõõdetava suuruse võimalikult täpse väärtuse saamiseks on vaja teostada võimalikult rohkem mõõtmisi ja neist tulemustest võtta aritmeetiline keskmine. See on printsiip, s. t. reegel, mille kohaselt tuleb toimida mõõtmiste juures, et saada häid resultate. Valemit (3) nimetataksegi aritmeetilise keskmise printsiibiiks.

§ 5. Ühe suuruse võrdtäpsete mõõtmiste tasandamine.

Suuruse võrdtäpseiks mõõtmiseks nimetatakse selliseid mõõtmisi, mis on teostatud ühe ja sama instrumendiga, ühe ja sama vaatleja poolt ning ühtedes ja samades tingimustes.

Mitmest võrdtäpsest mõõtmisest ühe parima väärtusega suuruse valikuks, s. t. selle suuruse tasandamiseks, me juba omame eelmises paragrahvis esitatud aritmeetilise keskmise printsiipi: kui on olemas ühe ja sama suuruse mitu võrdtäpset mõõtmist, siis selle suuruse tõenäolisim väärtus saadakse aritmeetilise keskmisena kõigist neist mõõtmistest. Nüüd peaks olema arusaadav, miks kogu geodeesia käsitlusel on soovitatud talitada selle reegli järgi.

Märgime mõõtmiste resultaadid endiselt tähtedega x_1, x_2, \dots, x_n (nüüd on n meil juba mingi lõplik täisarv) ja tõenäolisima väärtuse tähega a .

Eeltoodud kaalutluste põhjal saame tõenäolisima väärtuse järgmise valemi kohaselt:

$$a = \frac{[x]}{n} \quad (4)$$

§ 6. Aritmeetilise keskmise arvutamise praktika.

Aritmeetilise keskmise arvutamisel ei ole vaja mõõtmisresultaatidest võtta kõigi resultaate väärtusi täielikult, neid liita ja summa jagada mõõtmiste arvuga. Lihtsam on võtta mingi ligikaudne väärtus ja leida aritmeetiline keskmine antud väärtuste ja mainitud ligikaudse väärtuse vahedest. Olgu näiteks vaja leida aritmeetilise keskmise väärtus ühe nurga mõõtmistest, kus saadi $85^{\circ}42',4$; $85^{\circ}42',7$; $85^{\circ}42',0$ ja $85^{\circ}42',9$. Selleks võtame tema ligikaudse väärtuse $85^{\circ}42'$ ja moodustame vahed selle ligikaudse väärtuse ja antud väärtuste vahel. Need vahed saadakse vastavalt: $0',4$; $0',7$, $0',0$ ja $0',9$. Aritmeetiline keskmine nendest on: $\frac{1}{4} (0',4 + 0',7 + 0',0 + 0',9) = 0',5$. Järelikult otsitav aritmeetiline keskmine on: $85^{\circ}42' + 0',5 = 85^{\circ}42',5$.

Teine näide: on vaja leida aritmeetiline keskmine arvudest $317,7$; $317,8$; $316,7$; $317,4$. Siin võtame ligikaudseks väärtuseks $317,0$, vahed on $+0,7$; $+0,8$; $-0,3$; $+0,4$. Keskmine aritmeetiline vahedest on $\frac{1}{4} (+0,7 + 0,8 - 0,3 + 0,8) = +0,4$. Tähendab, otsitav aritmeetiline keskmine on $317,0 + 0,4 = 317,4$.

§ 7. Ühe suuruse võrdtäpsete mõõtmiste hindamine. Uksiku mõõtmise keskmine ruutviga, selle seos äärmise veaga.

Nagu juba tähendatud, hinnatakse mõõtmiste resultaate nende vigade suuruse järgi: mida väiksem on viga, seda parem on mõõtmine.

Tõenäosuse teoorias käsitletavate paljude kaalutluste kohaselt rakendatakse mõõtmiste täpsuse hindamiseks niinimetatud *keskmist ruutviga*. Nõnda nimetatakse avaldist

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (5)$$

s. t. ruutjuurt juhuslike (tõeliste) vigade ruutude aritmeetilisest keskmisest. See viga kui mõõtmiste täpsuse mõõt tugevdab (ruutu

tõstmisega) absoluutselt suuruselt suuremate vigade väärtusi, mis tagab resultaaside usutavuse üle otsustamise õigsuse. Peale selle keskmine ruutviga on lihtsas sõltuvuses äärmise veaga, mille suur praktiline tähtsus on meile juba teada. Kui äärmise vea märgime sümboliga $\Delta_{\text{äärm}}$, siis see sõltuvus, nagu on kindlaks määratud tõenäosuse teoorias, avaldub niisuguse lihtsa valemiga:

$$\Delta_{\text{äärm}} = 3m, \quad (6)$$

s. t. *äärmeline viga võrdub kolmekordse keskmise ruutveaga.*

Edaspidi me ütleme sageli termini „keskmine ruutviga“ asemel lihtsalt „keskmine viga“.

§ 8. Aritmeetilise keskmise keskmine ruutviga.

Valemi (5) järgi arvutatud keskmine ruutviga iseloomustab eranditult *kõiki* mõõtmisandmeid, s. t. teda võib omistada ühesuguse tõenäosuse astmega igale üksikule mõõtmisele.

Me teame juba, et aritmeetiline keskmine on parem ja täpsem igast esitatud mõõtmisest. Tähendab, tema keskmine ruutviga peab omama vähemat suurust. Ja tõepoolest, teoorias määratakse kindlaks, *et aritmeetilise keskmise keskmine ruutviga on üksiku mõõtmise keskmisest veast väiksem mõõtmiste arvust võetud ruutjuur korda.* Kui aritmeetilise keskmise keskmine ruutvea märgime tähega M , siis tema seos üksiku mõõtmise keskmine ruutveaga m väljendub nii:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (7)$$

§ 9. Tõenäolisimad vead.

Suuruse tõenäolisima väärtuse vahesid tema üksikute väärtustega, teisiti — mõõdetud suuruste kõrvalekaldumisi nende aritmeetilisest keskmisest — nimetatakse tõenäolisimaiks (ehk näilisteks) vigadeks.

Märkinud tõenäolisimad vead tähtedega $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ saame vastavalt nende definitsioonile:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a - x_1 \\ \delta_2 &= a - x_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= a - x_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

kus x_1, x_2, \dots, x_n on endiselt suuruse mõõdetud väärtused ja a nende aritmeetiline keskmine (tõenäolisim väärtus).

Tõenäolisimad vead evivad järgmist omadust: *tõenäolisimate vigade summa võrdub alati nulliga*. Tõepoolest, liites liikmeti valemi (8) võrdsused saame:

$$[\delta] = na - [x] = n \left(a - \frac{[x]}{n} \right).$$

Ent valemi (4) kohaselt $\frac{[x]}{n} = a$. Teinud selle asenduse, saame:

$$[\delta] = n(a - a) = 0, \quad (9)$$

sest n käesoleval juhtumil on lõplik arv.

Seda tõenäolisimate vigade omadust tuleb kasutada kontrollinade vigade arvutamisel.

§ 10. Keskmise ruutvea määramine tõenäolisimate vigade järgi.

Keskmise ruutvea määramiseks kasutatakse harva valemit (5), sest sellesse kuuluvad tõelised vead on meile enamasti tundmata. Praktikas määratakse keskmine ruutviga sagedamini tõenäolisimate vigade järgi, sest neid saab alati arvutada. Selleks on järgmine valem:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \quad (10)$$

Näited:

1. Joon mõõdeti 5 korda. Leida ühe mõõtmise keskmine ruutviga ja aritmeetilise keskmise keskmine ruutviga.

Vaatlused	δ	δ^2
578,16	+0,06	0,0036
578,28	-0,06	0,0036
578,14	+0,08	0,0064
578,22	0	0
578,30	-0,08	0,0064
$a = 578,22$	$[\delta] = 0$	$[\delta^2] = 0,02$

$$m = \pm \sqrt{\frac{0,02}{4}} = \pm 0,07$$

$$M = \pm \frac{0,07}{\sqrt{5}} = \pm 0,03$$

2. Nurk mõõdeti 4 korda. Leida ühe mõõtmise keskmine ruutviga ja aritmeetilise keskmine keskmine ruutviga.

Vaatlused	δ	δ^2	
119°35',5	-0,1	0,01	$m = \pm 0,48$ $M = \pm 0,24$
119°35',3	+0,1	0,01	
119°36',0	-0,6	0,36	
119°34',8	+0,6	0,36	
119°35',4	0	0,74	

§ 11. Lihtsaimate funktsioonide keskmiste ruutvigade leidmine.

Sageli tuleb leida niisuguste suuruste ruutvigu, mida ei mõõdata otseselt, vaid mis saadakse teiste otseselt mõõdetud suurustega tehtud matemaatiliste tehete tulemusena. Näiteks ristküliku pindala määramiseks on küllaldane mõõta tema 2 külge a ja b , ning nende järgi leiame pindala F nii:

$$F = a \cdot b.$$

Selles avaldises me võime saada suuruste a ja b ruutvead otseste mõõtmiste andmeist, näiteks arvutada tõenäolisimate vigade järgi, ja küsimus seisneb selles, kuidas nende vigade järgi võib saada nendele vastava pindala keskmine ruutvea.

Pindala F on suuruste a ja b funktsioon, suurused a ja b aga on argumendid. Seepärast selliseil juhtumel räägitakse funktsiooni vea arvutamises, oletades, et argumentide vead on meile nii või teisiti teada.

Funktsiooni ja argumentide keskmiste ruutvigade vahelise sõltuvuse leidmise menetluse me jaotame 2 osaks: esialgu leiame sõltuvuse nende tõeliste vigade vahel, siis aga siirdume nendest keskmistele ruutvigadele.

Et aga tõelised vead on võrdlemisi väga väikesed, siis nende vahelise seose võime leida funktsiooni diferentsiaali leidmise reeglite kohaselt, võttes funktsiooni diferentsiaali asemele funktsiooni vea ja argumentide diferentsiaalide asemele argumentide vead.

Võtame näiteks funktsiooni:

$$U = x_1 \pm x_2$$

ja olgu argumentide x_1 ja x_2 tõelised vead vastavalt Δ_1 , ja Δ_2 .

funktsiooni viga aga olgu Δ_u . Lugeses Δ_u , Δ_1 ja Δ_2 diferentsiaalideks saame diferentseerimise reeglite järgi:

$$\Delta_u = \Delta_1 \pm \Delta_2. \quad (a)$$

Keskmete ruutvigade vahelise sõltuvuse juurde siirdumiseks on vaja saada tõeliste vigade ruudud ja siis nende summad jagada mõõtmiste arvuga.

Kui antud argumente on vaadeldud (mõõdetud) n korda, siis me saame (a) kujulisi võrdsusi arvult n . Tõstes neist igäihe ruutu ja liites vastavalt vasakud ning paremad osad saame niisuguse avaldise:

$$[\Delta_u^2] = [\Delta_1^2] + [\Delta_2^2] \pm 2 [\Delta_1 \Delta_2]. \quad (b)$$

Selles avaldises võib suuruse $\pm 2 [\Delta_1 \Delta_2]$ jätta tähele panemata, sest selle summa liidetavad evivad erinevaid märke ning järelikult kompenseeruvad enam või vähem täielikult. Niisiis avaldisest (b) saame:

$$[\Delta_u^2] = [\Delta_1^2] + [\Delta_2^2]. \quad (c)$$

Kui avaldise (c) mõlemad pooled jagada n -ga, siis saame võrdsuse tuttavate liikmetega:

$$\frac{[\Delta_u^2]}{n} = \frac{[\Delta_1^2]}{n} + \frac{[\Delta_2^2]}{n},$$

ja nimelt, valemi (5) kohaselt on siin võrdsuse liikmed funktsiooni ja argumentide keskmete ruutvigade ruudud. Märkinud need vastavalt m_u , m_1 ja m_2 , saame:

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 \quad (11)$$

$$\text{ehk} \quad m_u = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \quad (12)$$

Võrreldes valemit (11) avaldisega (a) märkame, et selle valemi võime saada mehaaniliselt avaldisest (a), tõstes viimases kummagi poole liikmed üksikult ruutu ning jättes ära märgi miinus (mis ongi loomulik ruutu tõstmise juures). Niisiis funktsioonide ruutvigade leidmiseks võib rakendada sellist reeglit:

Funktsiooni keskmise ruutvea leidmiseks on vaja kirjutada võrdsus funktsiooni diferentsiaali leidmise reeglite kohaselt, lugeses diferentsiaalideks vead, ja siis tõsta ruutu kõik saadava avaldise liikmed.

Rakendame selle reegli lihtsaimaile funktsioonidele.

$$1. \quad U = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$$

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 = [m^2]$$

$$\text{ehk} \quad m_u = \pm \sqrt{[m^2]}. \quad (13)$$

Erijuhtumil, kui kõik argumentide vead on omavahel võrdsed, s. t. $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, saame:

$$m_u^2 = m^2 + m^2 + \dots = nm^2$$

ehk

$$m_u = \pm m \sqrt{n}. \quad (14)$$

Valem (12) esineb ilmselt valemi (13) erijuhtumina.

$$2. \quad U = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \dots \pm k_n x_n.$$

kus k_1, k_2 jne. on mingid muutumatud määratud suurused. Sel juh- tumil:

$$m_u^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \dots + k_n^2 m_n^2 = [k^2 m^2]$$

ehk

$$m_u = \pm \sqrt{[k^2 m^2]}. \quad (15)$$

Erijuhtumil, kui esimeses osas on ainult üks liige, saame:

$$m_u^2 = k^2 m^2,$$

ehk

$$m_u = k m. \quad (16)$$

Näide 1. Teatavasti saadakse nurk kahe lugemi (suuna) vahena. Millega võrdub üheminutilise teodoliidiga mõõdetud nurga keskmine ruutviga?

Üheminutilise teodoliidi juures ühe lugemi keskmiseks veaks võetakse 0,5. Võttes $n = 2$ saame valemi (14) kohaselt nurga keskmise ruutvea jaoks:

$$m_u = \pm m \sqrt{2} = \pm 0,5 \sqrt{2} = \pm 0,7.$$

Ülesanne 1. Määrata kümnesekundilise teodoliidiga mõõdetud nurga keskmine viga.

Vastus: $m_u = \pm 7''$.

Näide 2. Määrata planšetile konstrueeritud nurga keskmine viga, võttes tsentreerimise vea = 2', tähiste mittevertikaalsest asendist tingitud vea = 2', orienteerimise vea = 3,5 ja joonetõmbamise vea = 3,5.

Suuna viga on $\pm \sqrt{2^2 + 2^2 + 3,5^2 + 3,5^2} = \pm 5,7$. Nurga viga võrdub $\pm 5,7 \sqrt{2} = \pm 8'$.

Ülesanne 2. Joon oli jagatud mõõtmise jaoks kaheks osaks, kusjuures saadi järgmised resultaadid:

Mõõtmised	1. osa	2. osa
1	317,76	401,51
2	318,00	401,69
3	317,64	401,24
4	317,86	401,32

Leida kogu joone pikkus ja selle keskmine ruutvigä.

Vastus: $719,26 \pm 0,12$.

Ulesanne 3. Polügooni pindala graafiliseks arvutamiseks jagati ta viieks lihtsaimaks figuuriks, mille pindalad saadi järgmised:

1. $87,58 \pm 0,42$
2. $137,75 \pm 0,74$
3. $114,15 \pm 0,51$
4. $34,12 \pm 0,14$
5. $78,16 \pm 0,19$

Arvutada kogu polügooni pindala ja leida selle määramise täpsuse hinne.

Vastus: $451,76 \pm 1,02$.

Ulesanne 4. Leida sirkliga plaanil mõõdetava joone pikkuse äärmine viga.

Juhend. Joone mõõtmist plaanil mõjutavad neli sõltumatut viga: kaks viga sirkli teravike ühtistamisel plaani punktidega, üks viga sirkli teraviku ühtistamisel mõõtkavaga ja üks viga lugemisel mõõtkava täpsusega ($0,1$ mm).

Vastus: $\pm 0,2$ mm.

Ulesanne 5. Kolmnurgas mõõdeti kaks nurka. Leida mõõdetud nurkade järgi arvutatud kolmanda nurga keskmine viga, kui lugemi keskmine täpsus on $\pm t$.

Ulesanne 6. Leida ühe kõrgusvahe keskmine viga ja kauguse s ulatusel olevate kõrgusvahede summa keskmine viga, kui ühe vaate keskmine viga on $\pm t$ mm ja pikettide vaheline kaugus on 75 m.

Ulesanne 7. Kaugusemõõtja valem on $S = 100 n$, ühe niidi järgi tehtava lugemi keskmine viga on $\pm t$. Leida kauguse viga:

- a) tavalise viisi juures;
- b) keskmise ja ülemise niidi järgi lugemise ja lugemite vahe kahekordistamise meetodi juures;
- c) keskmise ja ülemise, siis alumise ja keskmise niidi järgi lugemise ning vastavate lugemite vahede liitmise meetodi juures.

Ulesanne 8. Määrata ristküliku pindala, kui ristküliku küljed on $1245,5 \pm 0,4$ ja $564,4 \pm 0,2$ m, ning hinnata määramise täpsus.

Vastus: $70,30 \pm 0,03$ ha.

§ 12. Keskmiste ruutvigade määramine kahekordsete mõõtmiste vahede järgi.

Olgu antud jada üheliigiliste suuruste, näiteks nurkade või joonte võrdtäpseid kahekordseid (paariti) vaatlusi: a_1 ja a_2 , b_1 ja b_2 ... k_1 ja k_2 .

Moodustame nende vahed:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= a_1 - a_2 \\ d_2 &= b_1 - b_2 \\ \dots \dots \dots \\ d_n &= k_1 - k_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Kui mõõtmised oluksid sooritatud absoluutselt täpselt, siis iga vahe oleks olnud võrdne nulliga: *null on iga vahe tõeline väärtus.*

Siit järgneb, et suurustele d_1 d_2 ... d_n võib vaadata kui vahede tõelistele vigadele. Nende järgi valemi (5) kohaselt saame ühe vahe keskmise ruutvea m_u nii:

$$m_u = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad (b)$$

Märgime üksiku mõõtmise keskmise ruutvea tähega m . Siis valemi (14) põhjal, eeldades selles $n = 2$, saame:

$$m_u = \pm m \sqrt{2} \quad (c)$$

Võrreldes avaldusi (b) ja (c) saame antud jada jaoks ühe mõõtmise keskmisele ruutveale järgmise valemi:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad (17)$$

Küllalt suure paariti vaatluste arvu juures võib oodata, et vahede summas juhuslikud vead kompenseeruvad ja süstemaatilised summeeruvad, seepärast $[d]$ väljendab ainult süstemaatiliste vigade summat. Tähenab, süstemaatilise vea keskmine väärtus s saadakse järgmise avaldise kohaselt:

$$s = \frac{[d]}{n} \quad (d)$$

Süstemaatiliste vigade olelusele mõõtmistes osutab see, et vahedes on ülekaalus üks märk, samuti ka see, et $[d]$ ei võrdu nulliga.

Kõrvaldades igast vahest avaldise (d) kohase süstemaatilise vea väärtuse saame nende vahede tõenäolisimad väärtused:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= d_1 - s \\ \delta_2 &= d_2 - s \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= d_n - s\end{aligned}$$

Igaühte niiviisi saadud suurusist $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ võime nüüd vaadelda kui vahe tõenäolisimat viga ja valemi (10) kohaselt nende vahede keskmise ruutvea jaoks leiame:

$$m_u = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}},$$

kust valemi (14) alusel ühe mõõtmise keskmise ruutvea jaoks saame:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2(n-1)}} \quad (18)$$

Näide 1. Skaalalise lindiga teostatakse joone mõõtmist 2 korda, edasi ja tagasi, kusjuures lugemid võetakse millimeetris. Allapoole on paigutatud mõõtmiste resultaadid ja nende hinded vahede järgi ühes seksioonis, s. t. ühes joone osas, kuhu lint mahtus 10 korda.

Lintide nr.	Keskmised väärtused		d	δ (d-s)	δ^2
	edasi	tagasi			
1	42,0	42,6	-0,6	+0,2	0,04
2	15,4	16,6	-1,2	-0,4	0,16
3	61,1	63,8	-2,7	-1,9	3,61
4	70,0	70,8	-0,8	0,0	0,00
5	29,9	29,0	+0,9	+1,7	2,89
6	13,3	15,6	-2,3	-1,5	2,25
7	24,5	24,4	+0,1	+0,9	0,81
8	30,0	31,2	-1,2	-0,4	0,16
9	44,4	44,8	-0,4	+0,4	0,16
10	57,8	57,6	+0,2	+1,0	1,00
	388,4	396,4	-8,0	0	11,08

$$\text{Ühe lindi süstemaatiline viga } s = -\frac{8}{10} = -0,8 \text{ mm.}$$

Ühe lindi keskmine ruutviga valemi (18) kohaselt:

$$m = \pm \sqrt{\frac{11,08}{18}} = \pm 0,8 \text{ mm.}$$

§ 13. Mittevõrdtäpsed mõõtmised. Mittevõrdtäpsete mõõtmiste kaalud.

Ühe ja sama suuruse mittevõrdtäpseliks mõõtmisteks nimetatakse selliseid mõõtmisi, mida teostati erinevate instrumentidega, või olgugi samade instrumentidega, kuid erinevate viisidega, erinev arv kordi või mitmesuguste tingimuste juures. Kui näiteks üks ja sama nurk mõõdeti 2 korda ühe ja sama teodoliidiga kordusviisiga, kusjuures esimene kord tehti 3 kordust, teine kord aga 4, siis resultaadid saadakse mittevõrdse täpsusega.

Mittevõrdtäpsete mõõtmiste usaldatavuse määr ei saa olla ühesugune. Nende suhtelise väärtuslikkuse väljendamiseks on tarvitusele võetud kaalu mõiste.

Resultaatide väärtuslikkuse üle me otsustame, nagu juba varem märgitud, vigade järgi: mida väiksem on viga, seda väärtuslikum on resultaat. Et me kõigi mõõtmiste jaoks tuletame keskmised ruutvead, siis arvud, mis väljendavad mittevõrdtäpsete mõõtmiste suhtelist väärtuslikkust, s. t. kaalud, loomulikult saadakse nendest vigadest.

Mõõtmiste kaaludeks nimetatakse keskmiste ruutvigade ruutudega pöördvõrdelisi arve.

Niisiis, kui mõõtmised omavad keskmisi ruutvigu m_1, m_2, \dots, m_n , siis nende kaaludeks võetakse vastavalt p_1, p_2, \dots, p_n , mis arvutatakse nii:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{k}{m_1^2} \\ p_2 &= \frac{k}{m_2^2} \\ \dots &\dots \dots \\ p_n &= \frac{k}{m_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

kus k -ks võib võtta, silmas pidades kaalude suhtelisust, mistahes muutumatu arvu, kõige lihtsamalt ühe. Näiteks kui meil on 2 sellist nurga mittevõrdtäpselt väärtust

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 145^\circ 17,5 \pm 0,3, \\ \beta_2 &= 145^\circ 17,1 \pm 0,5, \end{aligned}$$

siis nende kaaludeks võib võtta vastavalt

$$p_1 = \frac{1}{0,3^2} = \frac{100}{9};$$

$$p_2 = \frac{1}{0,5^2} = \frac{100}{25}.$$

Lihtsustamiseks võib need mõlemad arvud jagada 100-ga, pärast mida saame:

$$p_1 = \frac{1}{9};$$

$$p_2 = \frac{1}{25}.$$

Murrulisi väärtusi võib asendada täisarvudega, milleks on vaja murru tuua ühisele nimetajale ja viimane ära jätta (mis on samaväärne iga murru korrutamisele ühe ja sama arvuga, nimelt ühise nimetajaga). Näites me saame:

$$p_1 = 25;$$

$$p_2 = 9.$$

§ 14. Kaalu teine tähendus.

Me teame, et kui iga üksiku võrdtäpse mõõtmise keskmine ruutviga on m , siis nendest võetud aritmeetilise keskmise keskmine

ruutviga on $\frac{m}{\sqrt{n}}$, kus n on mõõtmiste arv. Üksiku mõõtmise kaalu

p ja aritmeetilise keskmise kaalu P saame käesoleval juhtumil

$$p = \frac{1}{m^2};$$

$$P = 1 : \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{n}{m^2}.$$

Ära jätnud siin ühise nimetaja m^2 , saame

$$p = 1;$$

$$P = n.$$

Siit näeme, et aritmeetilise keskmise kaal on suurem igast üksiku mõõtmise kaalust nii mitu korda, kui mitmest mõõtmisest on saadud aritmeetiline keskmine. Teiste sõnadega: kaaludeks võib võtta arvud, mis on võrdelised nende võrdtäpsete mõõtmiste arvuga, milledest aritmeetilise keskmisena saadi antud mittevõrdtäpsed väärtused.

§ 15. Kaalutud aritmeetiline keskmine ja tema kaal.

Olgu meil mitu ühe ja sama suuruse mittevõrdtäpset väärtust: a_1, a_2, \dots, a_n vastavate kaaludega p_1, p_2, \dots, p_n . Lugesdes kaalud mõningate selliste kujuteldavate võrdtäpsete mõõtmiste arvudeks, milledest on saadud antud mittevõrdtäpsed väärtused aritmeetiliste keskmistena, me omame kokku niisuguseid võrdtäpseid mõõtmisi:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = P.$$

Suuruse tõenäolisima väärtuse leidmiseks olnuks vaja kõik võrdtäpsed väärtused liita ja jagada P -ga. Ent võrdtäpsed mõõtmised ei ole meile üksikult antud, vaid antud on ainult nendest aritmeetiliste keskmised.

Oletagem, et väärtuse a saamisest võtsid osa x_1', x_2' jne., kokku arvalt p_1 .

Järelikult

$$a_1 = \frac{[x']}{p_1}.$$

Siit määrame:

$$[x'] = a_1 p_1.$$

Täpselt samuti võib suuruse a_2 moodustamisest osavõtnud võrdtäpsete väärtuste summa $[x']$ asemel võtta korrutise $a_2 p_2$ jne. Sellisel tõenäolisima väärtuse, mille me siin märgime tähega A , saamiseks on vaja liita korrutised $a_1 b_1, a_2 b_2$ jne. ning saadav summa jagada summaga $p_1 + p_2 + \dots + p_n$:

$$A = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = \frac{[ap]}{[p]} \quad (20)$$

See valem annab kaalutud aritmeetilise keskmise. Valemi (4) võime saada valemist (20), asendades $p_1 = p_2 = \dots = 1$.

On ilmne, et tõenäolisima väärtuse kaal võrdub üksikute väärtuste kaalude summaga.

$$P = [p]. \quad (21)$$

§ 16. Mitme liidetava summa kaal.

Olgu meil antud mitme liidetava funktsioon:

$$U = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n.$$

Kui argumentide keskmised ruutvead on m_1, m_2, \dots, m_n ja funktsiooni keskmine ruutviga on m_u , siis valemi (13) kohaselt saame vahekorra:

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2. \quad (a)$$

Teisest küljest, märkides funktsiooni ja argumentide kaalud vastavalt $p_u, p_1, p_2, \dots, p_n$ saame valemi (19) järgi:

$$p_u = \frac{k}{m_u^2}, \text{ kust } m_u^2 = \frac{k}{p_u}$$

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2}, \text{ kust } m_1^2 = \frac{k}{p_1},$$

.

$$p_n = \frac{k}{m_n^2}, \text{ kust } m_n^2 = \frac{k}{p_n}.$$

Asendades need vigade väärtused võrdsusse (a) ja koondades k -ga, saame funktsiooni kaalu ning argumentide kaalude vahel järgmise olenevuse:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}. \quad (22)$$

Erijuhtumil, kui argumentide kaalud on võrdsed, s. t. $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, saame sellest valemist pärast lihtsaid ümberkujundamisi niisuguse valemi:

$$p_u = \frac{p}{n}, \quad (23)$$

s. t. võrdtäpsete liidetavate summa kaal võrdub ühe liidetava väärtuse kaaluga (kõigile liidetavaile ühise kaaluga) jagatult liidetavate arvuga.

Näide 1. Määrata nurga kaal ja nurka moodustava iga suuna kaal.

Olgu iga suuna keskmine ruutviga m . Siis valemi (14) kohaselt on nurga keskmine viga $m\sqrt{2}$.

Valemi (19) järgi saame otsitavad kaalud $\frac{1}{m^2}$ ja $\frac{1}{2m^2}$ ehk korrutades kumbagi $2m^2$ -ga, — 2 ja 1.

Ulesanne 1. Leida nurkade kaalud, kui nurkade keskmised ruutvead on $\pm 2''$ ja $\pm 8''$.

Vastus: 16 ja 1.

Näide 2. Leida korrutise $4x$ kaal, võttes x jaoks kaalu 1.

Kui x -i keskmine viga on m , siis valemi (16) kohaselt on korrutise $4x$ jaoks keskmine viga $4m$, nii et kaaludeks võib võtta

$$\frac{1}{m_2} \text{ ja } \frac{1}{16m^2}. \text{ Ulesande kohaselt } \frac{1}{m^2} = 1, \text{ kust } m^2 = 1;$$

järelikult korrutise kaal on $\frac{1}{16 \text{ m}^2} = \frac{1}{16}$.

Näide 3. Leida 10 nurga summa kaal, võttes iga nurga kaaluks 1.

Valemi (23) järgi saame korruga $p_u = 0,1$.

Näide 4. Leida teineteisest 3,5 km kaugusel asetsevate punktide vaheline kõrgusvahe kaal, kui nivellimisel piketid võeti 75 m tagant.

Antud juhtumil oli kokku $3500 : 75 = 47$ jaama. Võttes iga kahe piketi vahelise kõrgusvahe kaalu võrdseks 1-ga, saadakse nende summa kaal, s. t. kogu kõrgusvahe kaal valemi (23) järgi $\frac{1}{47}$ näol.

§ 17. Mittevõrdtäpsete mõõtmiste hindamine.

Mittevõrdtäpsete mõõtmiste hindamiseks olelevad valemid keskmiste ruutvigade arvutamiseks tõeliste, tõenäolisimate vigade kui ka kahekordsete mõõtmiste vahede järgi. Need valemid on analoogilised vastavate valemitega võrdtäpsete mõõtmiste jaoks, ent kõik nad on keerustatud kaalu kaaslemisega. Me toome siin need valemid tõestamata.

Kui märgime suuruste tõelised väärtused tähega x , tõenäolisimad väärtused tähega A , antud üksikud mittevõrdtäpsed väärtused aga a_1, a_2, \dots, a_n , siis vahesid

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x - a_1, \\ \Delta_2 &= x - a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_n &= x - a_n \end{aligned}$$

nimetatakse tõelisteks vigadeks, ent vahesid

$$\begin{aligned} \delta_1 &= A - a_1, \\ \delta_2 &= A - a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= A - a_n \end{aligned}$$

nimetatakse tõenäolisimaiks vigadeks.

Tõenäolisimad vead evivad omadust:

$$[p^\delta] = 0,$$

s. t. tõenäolisimate vigade ja vastavate kaalude korrutiste summa võrdub nulliga.

Seda omadust kasutatakse tõenäolisimate vigade arvutuse õigsuse kontrolliks.

Mittevõrdtäpsete mõõtmiste hindamise juures leitakse tavaliselt niinimetatud kaaluühiku keskmine ruutviga.

Kaaluühiku keskmiseks ruutveaks nimetatakse iga sellise kujuteldava või tegelikult sooritatud mõõtmise keskmist ruutviga, milledest me endale kujutleme saanud olevat mittevõrdtäpseid andmeid.

Märgime kaaluühiku keskmise ruutvea tähega e . Tema arvutamiseks olelevad järgmised valemid:

a) Tõeliste vigade järgi:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[p \Delta^2]}{n}}; \quad (25)$$

siin n on mittevõrdtäpsete mõõtmiste arv.

b) Tõenäolisimate vigade järgi:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[p \delta^2]}{n-1}}. \quad (26)$$

c) Kahekordsete mõõtmiste vahede järgi:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \quad (27)$$

Kui vahede summa saadakse üsna suur, siis võib eeldada süstemaatiliste vigade kuhjumist, mis tuleb vahedest kõrvaldada. Selleks on vaja leida esialgu iga vaatluse süstemaatiline viga:

$$s = \frac{[d]}{r},$$

kus r on kõigi vaatluste arv (näiteks jaamade arv nivellimisel), siis aga määrata vahede tõenäolisimad väärtused:

$$\delta = d - s.$$

Pärast seda leitakse kaaluühiku keskmine ruutviga valemi järgi:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[p \delta^2]}{2(n-1)}}. \quad (28)$$

Tõenäolisima väärtuse keskmine ruutviga määratakse kõigil juhtumel järgmise valemi kohaselt:

$$M = \pm \frac{e}{\sqrt{[p]}}. \quad (29)$$

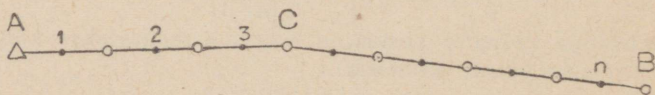
II peatükk.

LIHTSAIMAD TASANDAMISE MEETODID.

§ 18. Kahe kindelpunkti vahele rajatud üksiku käigu või üksiku kinnise polügooni tasandamine.

Juba korduvalt me oleme pööranud tähelepanu rajatavate (teodoliit-, nivellimis-, mensuli-, tahhümeetriliste) käikude aluspunktidega sidumise suurele tähtsusele. Seejuures eeldatakse, et aluspunktid on määratud seotavaist käikudest täpsemini. Seepärast peetakse tasandamisel aluspunktide koordinaate *kindlaiks, s. t.* muutmistele mittekuuluvaiks.

Lihtsaim käikude süsteem on kindel- (alus-) punktide vahele rajatud üksik käik ja üksik kinnine polügoon. Varem on käsiteldud selliste käikude ja polügoonide tasandamise meetodeid kõigi tööliikide juures, ent põhjendite näitamiseta. Eespoolkäsiteldud mõisted vigade teooriast lubavad selle lünga täita ja näidata käikude ning polügoonide keerukamate süsteemide tasandamise meetodeid. Need meetodid, olles oma ideelt ühesugused kõigi geodeetiliste tööde jaoks, selguvad kõige hõlpsamini nivellimise käikude tasandamisel.



Joonis 1.

Olgu kindelpunktide A ja B (joonis 1) vahele rajatud nivellimiskäik arvult n jaamaga; olgu kindelpunktide kõrgused vastavalt H_a ja H_b . Võtame käigu keskel mingi punkti C, milleni on mõõdetud

arvult k kõrgusvahet (nivellitud k jaama, joonisel $k = 3$). Selle punkti kõrguse võib saada 2 korda:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_a + \sum_1^k h \\ H_2 &= H_b + \sum_{k+1}^n h \end{aligned} \right\},$$

kus sümboliga $\sum_1^k h$ on märgitud punktist A kuni punktini C mõõdetud kõrgusvahede summa ja sümboliga $\sum_{k+1}^n h$ — samasuguste kõrgusvahede summa punktist C kuni punktini B.

Punkti C kõrguse tõenäolisima väärtuse saame, võttes H_1 -st ja H_2 -st keskmise aritmeetilise. Ent neid kõrgusi ei saa pidada võrdtäpseiks, sest et esimene neist on saadud arvult k mõõdetud kõrgusvahede summa läbi, teine aga ($n - k$) mõõdetud kõrgusvahede summa kaudu. Silmanähtavalt on kõrgustele vaja juurde kirjutada mainitud summade kaalud.

Võtame kaaluühikuks kõrgusvahe mõõtmise täpsuse ühes jaamas. Siis valemi (23) põhjal saame kõrguste H_1 ja H_2 kaalud:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{k} \\ p_2 &= \frac{1}{n-k} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Punkti C tõenäolisima väärtuse saame kaalutud aritmeetilise keskmise valemi järgi:

$$H = \frac{H_1 p_1 + H_2 p_2}{p_1 + p_2} \quad (c)$$

Suuruse H_2 võib avaldada H_1 kaudu. Selleks võtame vahe $H_1 - H_2$ ja avaldame selle võrdsuse (a) kohaselt:

$$H_1 - H_2 = H_a + \sum_1^k h - H_b + \sum_{k+1}^n h.$$

Siin kaks kõrgusvahede summat $\sum_1^k h$ ja $\sum_{k+1}^n h$ annavad kõrgusvahedele ühe üldise summa A-st kuni B-ni, mida märgime $\sum_1^n h$ kaudu; seepärast:

$$H_1 - H_2 = \sum_1^n h - (H_b - H_a).$$

Selle võrdsuse paremale poolele, nagu näeme, kujunes kõigu sulgemisviga (vt. II osa, § 81). Märgime selle tähega w ; saame:

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= w, \\ H_2 &= H_1 - w. \end{aligned}$$

Asendame selle H_2 väärtuse võrdsusse (c):

$$H = \frac{H_1 p_1 + (H_1 - w) p_2}{p_1 + p_2} = \frac{H_1 p_1 + H_1 p_2 - w p_2}{p_1 + p_2} = \frac{H_1 (p_1 + p_2) - w p_2}{p_1 + p_2}$$

ehk
$$H = H_1 - w \cdot \frac{p_2}{p_1 + p_2}. \quad (d)$$

Paremas osas oleva murru kujundame ümber võrdsuse (b) põhjal:

$$\frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{1}{n - k} : \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) = \frac{k}{n}.$$

Asendades murru selle väärtuse võrdsusse (d) saame:

$$H = H_1 - w \cdot \frac{k}{n} = H_1 - \frac{w}{n} \cdot k$$

ehk pärast H_1 väärtuse siia asendamist võrdsusest (a):

$$H = H_a + \sum_1^k h - \frac{w}{n} \cdot k. \quad (30)$$

Saadud valemist näeme, et mingi punkti kõrguse tõenäolisima väärtuse määramiseks on vaja selle kõrguse arvutamiseks kasutatud kõrgusvahede summale anda parandus $-\frac{w}{n} \cdot k$. Vaadeldes

seda parandust märkame, et temas olev tegur $-\frac{w}{n}$ saadakse vastupidise märgiga võetud sulgemisvea jagamisest kõigi käigus mõõdetud kõrgusvahede arvuga, suurus k on punkti kõrguse määramiseks kasutatud kõrgusvahede arv.

On silmanähtav, et tulemused saadakse ühesugused, olenemata sellest, kas me punktide kõrgused arvutame valemi (30) kohaselt

või parandame enne kõik kõrgusvahed suurusega $-\frac{w}{n}$ -ga ja siis

arvutame punktide kõrgused tavalisel viisil — liites selliselt parandatud kõrgusvahed eelnenud kõrgustega, alates lähtepunktist. Siit tuletataksegi see reegel, et üksiku nivellimiskäigu kõrgusvahede võrdtäpsete mõõtmiste tasandamiseks tuleb käigu sulgemisviga jaotada vastupidise märgiga kõigile kõrgusvahedele. See reegel on õige ka üksiku kinnise polügooni jaoks.

Täiesti analoogiliselt võib tõestada, et see reegel on rakendatav ka üksiku lahtise käigu või üksiku kinnise polügooni nurkade tasandamiseks.

Koordinaatide juurdekasvude tasandamise juures lihtsamail juhumeil eeldatakse, et juurdekasvude täpsus sõltub eranditult vastavate külgede pikkusest ja tasandamine ise teostatakse lahus icside ja igrekite juurdekasvude jaoks. Sellise oletuse juures võetakse juurdekasvude kaaludeks küljepikkuste pöördarvud (kaaluühikuks võetakse mingile teatavale määratud pikkusele, näiteks sajale meetrile või kilomeetrile vastava juurdekasvu täpsus). Nende tingimuste kohaselt on üksiku käigu või polügooni juurdekasvude tasandamisel õige sama reegel, s. t. et ka siin tuleb sulgemisviga jaotada juurdekasvudele vastupidise märgiga, kuid *mitte võrdselt, vaid võrdeliselt vastavate külgede pikkustega* (võrdselt võrdsete pikkustega).

Sedasama tuleb märkida ka üksikute käikude või polügoonide kõrgusvahede tasandamisel, kui kõrgusvahed on määratud trigonomeetrilise nivellimisega (kaldkiire abil). Nagu tõestatakse erikäsi-raamatuis, on seejuures täpsem võtta kaaludeks vastavate joonepikkuste ruutude pöördarvud. Sel juhtumil *peab ka sulgemisvead jaotama üksikuile kõrgusvahedele võrdeliselt vastavate joonte pikkuste ruutudega*.

Sulgemisvigade jaotamise selle või teise viisi (võrdselt või võrdeliselt külje pikkustega või võrdeliselt pikkuste ruutudega) seose võetud mõõtmiskaaludega võib kindlaks määrata ka järgmiste kaalutluste põhjal.

Kaalud väljendavad mõõtmiste väärtuslikkust mõõtmiste täpsuse mõttes. Kui kaalud on ühesugused, siis mõõtmisi loetakse *võrdtäpsseiks* ja võib eeldada, et igaüks neist võttis osa sulgemisvea kogunemisest võrdsel määral. Seepärast on loomulik pidada ka nende parandusi võrdseiks.

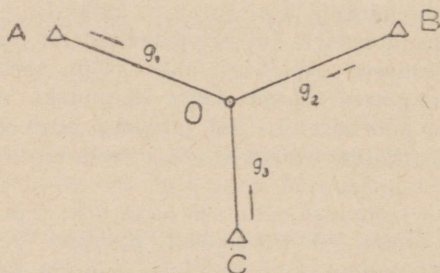
Kui mõõtmiste kaalud ei ole ühesugused, siis mõõtmised on *mitte-võrdtäpsed*. Kahest sellisest mõõtmisest mõjustub ilmselt vigade kuhjumisest suuremal määral see mõõtmine, mille kaal on väiksem. Seepärast on siin loomulik teha suurem parandus väiksema kaaluga mõõtmisele ja vastupidi. Siit tuleneb järgmine tasandamise reegel: *parandused peavad olema pöördvõrdelised kaaludega* (ehk *võrdelised kaalude pöördarvudega*).

See reegel täidetaksegi koordinaatide juurdekasvude kui ka trigonomeetrilise nivellimise kõrgusvahede tasandamise juures.

§ 19. Sõlmpunktide meetod.

Praktikas esineb sageli juhtumeid, kus mitme kindelpunkti vahele rajatakse mitu käiku niiviisi, et nad kõik lõikuvad ühes punktis. Selliste käikude ühine lõikepunkt kannab *sõlmpunkti* nimetust. Neil juhtumel on mugav rakendada erilist tasandamise meetodit, mida nimetatakse sõlmpunktide meetodiks. Selle meetodi olemus seisneb selles, et algul määratakse sõlmpunkti jaoks nende või teiste elementide (kõrguste, koordinaatide või sõlmpunktini ulatuva mingi joone — *sõlmjoone* — asimuutide) tõenäolisim väärtus, siis aga loetakse see sõlmpunkt kindelpunktiks ja üksiku sõlmpunkti ning teiste kindelpunktide vahelised käigud tasandatakse üksikute käikude tasandamise reeglite järgi.

Olgu reeperite A, B ja C vahele (joonis 2) rajatud käigud, mis lõikuvad punktis O.



Joonis 2.

Kuidas need käigud tegelikult rajatud ongi, tasandamiseks me jagame nad kolmeks üksikuks käiguks g_1 , g_2 ja g_3 , mis kulgevad kindelpunktidest sõlmpunkti. Neid käike mööda me võime sõlmpunkti O kõrguse saada 3 korda ja nimelt:

$$H_1 = H_a + \Sigma h_1,$$

$$H_2 = H_b + \Sigma h_2,$$

$$H_3 = H_c + \Sigma h_3,$$

kus H_a , H_b ja H_c on antud reeperite kõrgused ja Σh_1 , Σh_2 ja Σh_3 on kõrgusvahed vastavalt käikudele g_1 , g_2 ja g_3 .

Saadud kõrgustest H_1 , H_2 ja H_3 on hõlpus arvutada sõlmpunkti kõrguse tõenäolisimat väärtust. Seejuures on vaja tähele panna, et saadud kõrgused on mittevõrdtäpsed, sest käigud g_1 , g_2 ja g_3 ei

ole võrdsete pikkustega, ja järelikult igaüks neist sisaldab erineva arvu jaamu. Seepärast tõenäolisima väärtuse saamiseks on vaja teada kõrguste H_1 , H_2 ja H_3 kaalusid.

Olgu käiku g_1 mööda n_1 jaama, käiku g_2 mööda n_2 jaama ja lõpuks käiku g_3 mööda n_3 jaama. Eelmises paragrahvis esitatud kaalutluste põhjal kõrguste H_1 , H_2 ja H_3 kaaludeks tuleb võtta arvud:

$$p_1 = \frac{1}{n_1}$$

$$p_2 = \frac{1}{n_2}$$

$$p_3 = \frac{1}{n_3}$$

Sõlmpunkti kõrguse H tõenäolisima väärtuse arvutamiseks kasutame kaalutud aritmeetilise keskmise valemit:

$$H = \frac{H_1 p_1 + H_2 p_2 + H_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Selle väärtuse me loeme kindlaks ja kooskõlastame kõik käigud selle väärtuse ning vastavate reeperite kõrguste vahel. Sulgemisvead käikudes saame nii (praktiline suurus miinus teoreetiline suurus):

$$w_1 = H_1 - H$$

$$w_2 = H_2 - H$$

$$w_3 = H_3 - H.$$

Kõik need sulgemisvead peab tarviduse korral käikudes ära jao-tama vastupidise märgiga võrdset kõigile jaamadele (kõigile kõrgusvahedele).

Et pikettide vahelised kaugused võetakse võrdse pikkusega, siis käikude pikkused on võrdelised jaamade arvuga ning järelikult kaaludeks võib võtta käikude pikkuste pöördarvud, s. t. suurused:

$$p_1 = \frac{1}{s_1}, p_2 = \frac{1}{s_2}, p_3 = \frac{1}{s_3},$$

kus s_1 , s_2 ja s_3 on vastavalt käikude g_1 , g_2 ja g_3 pikkused.

Seejuures võetakse väga sagedasti kaaluühikuks 1 km-i kaal, s. t. kaalude saamiseks väljendatakse pikkused kilomeetris. Täpselt samuti võetakse sageli kaaluühikuks mitte üks jaam, vaid mingi muu jaamade arv, näiteks 10 jaama.

On ilmne, et sulgemisvead w_1 , w_2 ja w_3 kõnesoleval juhtumil esinevad tõenäolisimate vigadena. Nende järgi määrame kaaluühiku keskmise ruutvea valemi (20) kohaselt:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[pw^2]}{n-1}}$$

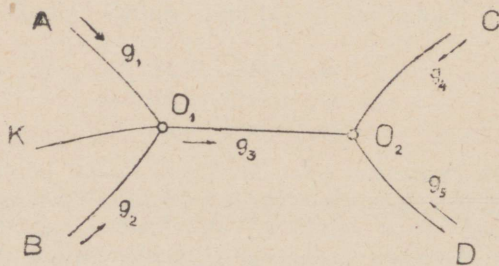
U l e s a n n e. Kohaldatult joonisele 2 on järgmised andmed:

Käikude nimetused	n	Σh	Reeperid	Reeperite kõrgused
g_1	20	+1,250	A	147,496
g_2	50	-4,085	B	152,843
g_3	40	-5,091	C	153,842

Määrata käikude parandused ja leida ühe jaama keskmine ruutviga.
Vastus: $m = \pm 1,03$.

§ 20. Ekvivalentse asenduse meetod.

Kui nivellimise käigid moodustavad 2 sõlmpunkti O_1 ja O_2 (joonis 3), siis tasandamine võib teostuda nii: käikude g_1 ja g_2 järgi



Joonis 3.

määrame punkti O_1 üksikud kõrgused $H_1 = H_a + \Sigma h_1$ ja $H_2 = H_b + \Sigma h_2$, siis määrame punkti O_1 kõrguse tõenäolisima väärtuse:

$$H_{1,2} = \frac{H_1 p_1 + H_2 p_2}{p_1 + p_2},$$

kusjuures p_1 ja p_2 on arvude n_1 ja n_2 pöördarvud.

Sellisel arvutatud tõenäolisima väärtuse $H_{1,2}$ kaal võrdub valemi (21) kohaselt käikude g_1 ja g_2 kaalude summaga.

Märgime selle kaalu sümboliga $p_{1,2}$, nii et:

$$p_{1,2} = p_1 + p_2.$$

Ent meil on kaal ja jaamade arv vastastikku pöördarvud ning kaalu $p_{1,2}$ järgi me võime arvutada sellise nivellimiskäigu jaamade arvu, mis annab punkti O_1 kõrguse kaaluga $p_{1,2}$. Märkinud selle jaamade arvu sümboliga $n_{1,2}$, saame:

$$n_{1,2} = \frac{1}{p_{1,2}}.$$

Niiviisi käikude g_1 ja g_2 , jaamade arvuga n_1 ja n_2 , asemele me võinuksime võtta ühe käigu KO_1 jaamade arvuga $n_{1,2}$ ja selle järgi saanuksime punkti O_1 kõrguse sama kaaluga, järelikult ka sama täpsusega, nagu kahe käigu g_1 ja g_2 järgi. Seda kujuteldavat käiku KO_1 nimetatakse käikudega g_1 ja g_2 ekvivalentseks (samaväärseks) käiguks. Märgime selle käigu sümboliga $g_{1,2}$.

Nüüd on ülesanne viidud ühe sõlmpunkti juhtumi alla. Tõepoolest, ühte sõlmpunkti O_2 jooksevad meil nüüd kokku 3 käiku: g_4 , g_5 ja käik, mis endast kujutab ekvivalentse käigu ning käigu g_3 summat. Märgime selle summaarse käigu sümboliga $g_{1,2,3}$.

Nende käikude kaalud on:

$$p_{1,2,3} = \frac{1}{n_{1,2} + n_3},$$

$$p_4 = \frac{1}{n_4}, \quad p_5 = \frac{1}{n_5}.$$

Nende kaalude järgi on hõlpus leida punkti O_2 kõrguse tõenäolisimat väärtust. Kõrguste üksikud väärtused käikudest g_4 ja g_5 saadakse:

$$H_4 = H_c + \Sigma h_4,$$

$$H_5 = H_d + \Sigma h_5,$$

kõrgus käigu $g_{1,2,3}$ järgi aga saadakse, kui liidetakse käikudest g_1 ja g_2 varem arvatatud punkti O_1 tõenäolisima kõrgusega käigu g_3 kõrgusvahede summa:

$$H_{1,2,3} = H_{1,2} + \Sigma h_3.$$

Punkti O_2 kõrguse tõenäolisim väärtus saadakse:

$$H = \frac{H_{1,2,3} \cdot p_{1,2,3} + H_4 \cdot p_4 + H_5 \cdot p_5}{p_{1,2,3} + p_4 + p_5}.$$

Pärast seda leiame käikude sulgemisvead:

$$w_{1,2,3} = H_{1,2,3} - H,$$

$$w_4 = H_4 - H,$$

$$w_5 = H_5 - H.$$

Viimased 2 sulgemisviga jaotatakse käikudele g_4 ja g_5 tavalise viisiga. Mis puutub sulgemisveasse $w_{1, 2, 3}$, siis see esialgu peab jaotatama käikudele $g_{1, 2}$ ja g_3 võrdeliselt nende jaamade arvuga. Selleks arvutatakse algul parandus a ühele jaamale:

$$a = - \frac{w_{1, 2, 3}}{n_{1, 2} + n_3}.$$

Parandus kogu käigule g_3 on $a \cdot n_3$ ja parandus kõrgusele $H_{1, 2}$ saadakse $a \cdot n_{1, 2}$, nii et punkti O_1 kõrguse lõplik väärtus saadakse:

$$H_0 = H_{1, 2} + a \cdot n_{1, 2}.$$

Nüüd on hõlpus määrata käikude g_1 ja g_2 sulgemisvead:

$$\begin{aligned} w_1 &= H_1 - H_0 \\ w_2 &= H_2 - H_0. \end{aligned}$$

Sel juhtumil võib samuti kõikjal kaaludeks võtta käigu pikkuste pöördarvud.

Seda meetodit võinuks laiendada ka näiteile kolme või rohkem sõlmpunktiga, siiski neil juhtumel on mugavam rakendada niinimetatud kaudsete mõõtmiste meetodit, mille käsitlemisele me siirdumegi.

§ 21. Tasandamine kaudsete mõõtmiste meetodi järgi.

Kaudsete mõõtmiste meetodi juures (võrrandite lihtsustatud koostamisega) leitakse esialgu sel või teisel teel sõlmpunkti elementide *ligikaudsed* väärtused, siis aga otsitakse neile niisugused parandused, millede arvestamise resultaadina saadakse samade elementide *tõenäolisimad* väärtused. Viimased võetakse siis kindlateks ning nende ja antud kindelpunktide vahel tasandatakse kõik käigud üksikute käikude tasandamise reeglite kohaselt.

Paranduste määramiseks koostatakse ja lahendatakse niinimetatud *normaalvõrrandid*, millede arv võrdub otsitavate paranduste arvuga.

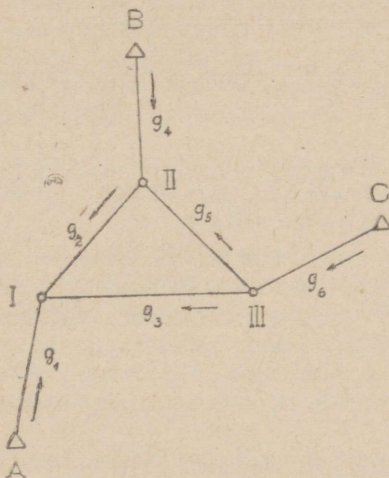
Olgu, nagu skeemilisel joonisel (joonis 4) näidatud, kindelpunktide A, B ja C vahele rajatud 6 käiku, mis moodustavad kolm sõlmpunkti I, II ja III. Märgime kindelpunktide kõrgused vastavalt H_a, H_b ja H_c , summaarsed kõrgusvahed käikude järgi (noolte näitamise kohaselt) h_1, h_2, \dots, h_6 , iga käigu jaamade arvu (või käigu perimeetri) tähtedega n_1, n_2, \dots, n_6 , summaarsete kõrgusvahede kaalud p_1, p_2, \dots, p_6 , ja sõlmpunktide lõplikud kõrgused H_1, H_2 ja H_3 .

Sõlmpunktide ligikaudsed kõrgused võib saada näiteks nii:

$$H_1' = H_a + h_1,$$

$$H_2' = H_b + h_4,$$

$$H_3' = H_c + h_6.$$



Joonis 4.

Tähendame, et ligikaudsete kõrguste määramisel on ükskõik, millistest kindelpunktidest me lähtume ning missuguseid jooni mööda võtame kõrgusvahed. Kui kindelpunkte hoopiski ei ole, siis võib võtta ühele sõlmpunktidest mistahes (tingitud) kõrguse ja temast lähtudes sel või teisel teel arvutada ülejäänud punktide ligikaudsed kõrgused.

Märgime ülalmainitud parandused ligikaudseile väärtusile vastavalt x_1 , x_2 ja x_3 ; saame:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_1' + x_1 \\ H_2 &= H_2' + x_2 \\ H_3 &= H_3' + x_3 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Võtame ühe sõlmpunkti I. Kui me teaksime lähimate, teda ümbritsevate sõlmpunktide ja kindelpunktide lõplikke kõrgusi, s. t. kui antud juhtumil oleksid teada suurused H_2 , H_3 ja H_a (see viimane on meie juhtumil tõepoolest teada), siis tema lõpliku kõrguse H_1 me leiaksime kaalutud aritmeetilise keskmise kohaselt nii:

$$H_1 = \frac{(H_a + h_1) p_1 + (H_2 + h_2) p_2 + (H_3 + h_3) p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Asendanud selles avalduses H_1 , H_2 ja H_3 nende väärtustega võrd-
susest (a) ja vabanenud paremal pool nimetajast, saame:

$$(H_1' + x_1) (p_1 + p_2 + p_3) = (H_a + h_1) p_1 + (H_2' + x_2 + h_2) p_2 + (H_3' + x_3 + h_3) p_3$$

ehk

$$p_1 H_1' + p_2 H_1' + p_3 H_1' + (p_1 + p_2 + p_3) x_1 = p_1 (H_a + h_1) + p_2 (H_2' + h_2) + p_2 x_2 + p_3 (H_3' + h_3) + p_3 x_3$$

Summa $(p_1 + p_2 + p_3)$ kujutab endast võetud punkti kõrguse tõe-
näolisima väärtuse kaalu (*ühte punkti kokkujooksvate kõigi käikude kaalude summat*). Märgime selle A_1 :

$$A_1 = p_1 + p_2 + p_3$$

Võtnud seda arvesse ja viinud kõik liikmed üle vasakule, saame
(grupeerinud eraldi tundmatud ja tuntud liikmed ning kogunud vii-
mased kaalude järgi):

$$A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 + p_1 H_1' - p_1 (H_a + h_1) + p_2 H_1' - p_2 (H_2' + h_2) + p_3 H_1' - p_3 (H_3' + h_3) = 0$$

ehk

$$A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - \{p_1 [(H_a + h_1) - H_1'] + p_2 [(H_2' + h_2) - H_1'] + p_3 [(H_3' + h_3) - H_1']\} = 0$$

Vaatame nurksulgudesse asetatud vahesid, näiteks $[(H_3' + h_3) - H_1']$. Siin on summa $H_3' + h_3$ punkti I see kõrgus, mis oleks saadud, kui me oleksime selle kõrguse arvutanud mõõdetud kõrgusvahe h_3 järgi, lähtudes punkti III ligikaudsest kõrgusest. H_1' on sama punkti I ligikaudne kõrgus. Vahe $[(H_3' + h_3) - H_1']$ aga kujutab endast silmanähtavalt punkti I kahe mainitud kõrguse võrdlemisel saadavat vahet. Ülejäänud, nurksulgudesse asetatud vahed on samasugused sulgemisvead, mis on saadud võrrandi koostamist vajava punkti ligikaudse kõrguse võrdlemisest sama punkti kõrgusega, mis on siirdud teistelt ümbritsevailt punktidelt; seejuures sulgemisviga $[(H_a + h_1) - H_1']$ võrdub ilmselt nulliga, sest et ligikaudne kõrgus H_1' ise on saadud siirmisega H_a -st.

Märgime mainitud iseloomuga sulgemisvead kõigis käikudes tähtedega w_1, w_2, \dots, w_6 . Siis viimane võrrand kujuneb järgmiseks:

$$A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - (p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3) = 0$$

ehk lühemalt:

$$A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - [pw] = 0. \quad (b)$$

Kõik sõlmpunkti I suhtes tehtud kaalutlused on täielikult raken-
datavad iga ülejäänud sõlmpunkti kohta. Niiviisi me saame võr-
randiga (b) sarnaseid võrrandeid nii palju, kui palju on käikudes
sõlmpunkte (ka niisama palju tundmatutega). Nendes suurusi A ja
p nimetatakse *võrrandi koefitsientideks*, [pw] — *vabaliikmeiks*.
Võrrandeid endid nimetatakse *normaalvõrrandeks*.

Võrrandid koostatakse mehaaniliselt, varem valmistatud skeemi
kohaselt, millel eelkõige iga käigu jaoks valitakse ja näidatakse
noolega mistahes suund, mida kogu tasandamise menetluses enam
ei või muuta. Siis arvutatakse kõigi sõlmpunktide ligikaudsed kõr-
gused ja erilisse tabelleisse (või skeemile endale iga käigu vastu)
kirjutatakse välja kõik võrrandite koostamiseks tarvilikud andmed.

Esitame lühidalt võrrandite koefitsientide ja vabaliikmete
tähendused.

1. Koefitsient A on võrrandi koostamist vajavasse punkti kokku-
jooksvate käikude kaalude summa. See koefitsient saadakse kõige
suurem. Teda nimetatakse *ruutkoefitsiendiks*.

2. Koefitsiendid p_2, p_3 on võrrandi koostamist vajavasse punkti
kokkujooksvate üksikute käikude kaalud. Nad on koefitsientideks
vastavate käikude lähtepunktide parandusi tähendavate tundmatute
juures.

3. Vabaliige [pw] on kaalude ja võrrandi koostamist vajavasse
punkti kokkujooksvate kõigi käikude sulgemisvigade korrutiste
summa.

Sulgemisvead w_1, w_2, \dots, w_6 arvutatakse välja aegsasti noolte
näitamise kohaselt. Et käikude kaalud on alati positiivsed, siis kor-
rutiste pw märgid sõltuvad sulgemisvigade märkidest. Korrutiste
arvutamisel ei või ära unustada *varem arvutatud sulgemisvigade*
märkide muutmist vastupidisteks sel juhtumil, kui skeemil käigu
suund ei ole näidatud võrrandi koostamist vajavasse punkti, vaid
on märgitud sellest punktist väljuvana.

Kohaldatult joonisele 4 saame võrrandid üldisel kujul:

$$A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - [pw]_1 = 0$$

$$A_2 x_2 - p_2 x_1 - p_5 x_3 - [pw]_2 = 0$$

$$A_3 x_3 - p_3 x_1 - p_5 x_2 - [pw]_3 = 0.$$

Võrrandite liikmed kirjutatakse välja niisuguses järjekorras, et
ühesugused tundmatud asetuksid ühte tulpa, s. t. nii:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - [pw]_1 &= 0 \\ - p_2 x_1 + A_2 x_2 - p_5 x_3 - [pw]_2 &= 0 \\ - p_3 x_1 - p_5 x_2 + A_3 x_3 - [pw]_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Seejuures ruutkoefitsiendid asetuvad diagonaali mööda (ülalt alla, vasakult paremale), ülejäävad koefitsiendid aga — sümmeetriliselt selle diagonaali suhtes.

Võrrandite koostamise näitena kasutame alljärgnevaid andmeid (tabelid 1, 2 ja 3) kohaldatult joonisele 4.

Tabel 1.

Punktide nr.	Kindlad kõrgused	Ligikaudsed kõrgused
A	201,574	
B	210,635	
C	196,664	
I		195,890
II		202,801
III		203,420

Tabel 2.

Käigud	n	h	p	w	pw
g_1	20	-5 684	0,50	0	0
g_2	25	-6 890	0,40	+21	+8,40
g_3	30	-7 520	0,33	+10	+3,30
g_4	12	-7 834	0,83	0	0
g_5	16	- 630	0,62	-11	-6,82
g_6	10	+6 756	1,00	0	0

Tabel 3.

Punktide nr.	A	[pw]
I	$0,50 + 0,40 + 0,33 = 1,23$	$0 + 8,40 + 3,30 = + 11,70$
II	$0,40 + 0,83 + 0,62 = 1,85$	$-8,40 + 0 - 6,82 = - 15,22$
III	$0,33 + 0,62 + 1,00 = 1,95$	$-3,30 + 6,82 + 0 = + 3,52$

Kasutades neid tabelleid on kerge kirjutada järgmised võrrandid:

$$+ 1,23 x_1 - 0,40 x_2 - 0,33 x_3 - 11,70 = 0$$

$$- 0,40 x_1 + 1,85 x_2 - 0,62 x_3 + 15,22 = 0$$

$$- 0,33 x_1 - 0,62 x_2 + 1,95 x_3 - 3,52 = 0$$

Arvutamise hõlbustamiseks paigutatakse koefitsiendid ja vabaliikmed tavaliselt erilisse skeemi, kus iga tundmatu jaoks varutakse eri lahter. Lahtreisse kirjutatakse koefitsiendid üksi, nende juurde oletatakse tundmatud, milledega on märgitud lahtrid. Ülaltoodud võrrandite jaoks võtab skeem järgmise kuju:

Võrrandite nr.	x_1	x_2	x_3	[pw]
I	+1,23	-0,40	-0,33	-11,70
II	-0,40	+1,85	-0,62	+15,22
III	-0,33	-0,62	+1,95	- 3,52

Kaaluühiku keskmine ruutviga saadakse valemi järgi:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[pw^2] + [[pw] x]}{m - n}} \quad (32)$$

Siin $[pw^2]$ on kõigi käikude kaalude ja nende käikude sulgemisvigade korrutiste summa; $[[pw] x]$ on võrrandite vabaliikmete ja vastavate paranduste korrutiste summa; m on joonte arv skeemil (summaarsete kõrgusvahede arv käikude järgi); n on sõlmpunktide arv.

§ 22. Võrrandite lahendamine järk-järguliste lähenduste meetodiga.

Võtame eelmise paragrahvi võrrandid (31) ja määrame esimesest x_1 , teisest x_2 ning kolmandast x_3 .

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{[pw]_1}{A_1} + \frac{p_2}{A_1} x_2 + \frac{p_3}{A_1} x_3 \\ x_2 &= \frac{[pw]_2}{A_2} + \frac{p_2}{A_2} x_1 + \frac{p_5}{A_2} x_3 \\ x_3 &= \frac{[pw]_3}{A_3} + \frac{p_3}{A_3} x_1 + \frac{p_5}{A_3} x_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Saadud avaldustes koefitsiendid $\frac{p_2}{A_1}, \frac{p_3}{A_1}, \frac{p_2}{A_2}$, jne. kujutavad endast lihtmurde (ühest väiksemaid). Järelikult avaldised

$$\frac{p_2}{A_1} x_2, \frac{p_3}{A_1} x_3, \frac{p_2}{A_2} x_1 \text{ jne.}$$

on tundmatute x_2, x_3, x_1 osad. Esimese lähenduse jaoks need osad jäetakse tähele panemata. Niisiis tundmatute esimeste lähenduste jaoks võetakse väärtused:

$$x_1' = \frac{[pw]_1}{A_1}, x_2' = \frac{[pw]_2}{A_2}, x_3' = \frac{[pw]_3}{A_3} \quad (33)$$

s. t. tundmatute esimeste lähenduste jaoks võetakse jagatiseid vaba-
liikmete (vastupidise märgiga) jagamisest ruutkoefitsientidega.

Võtnud tundmatute niisugused väärtused, me, nagu nähtub võr-
dusest (a), teeme vead, mis avalduvad nende võrdsuste parempool-
sete osade kahe viimase liikme summana. Tundmatute ligikaudsete
väärtuste täpsustamiseks on vaja nendele anda järgmised parand-
dused:

$$\left. \begin{aligned} \text{tundmatule } x_1\text{-le } \dots \Delta_1 &= \frac{P_2}{A_1} x_2 + \frac{P_3}{A_1} x_3, \\ \text{,, } x_2\text{-le } \dots \Delta_2 &= \frac{P_2}{A_2} x_1 + \frac{P_5}{A_2} x_3, \\ \text{,, } x_3\text{-le } \dots \Delta_3 &= \frac{P_3}{A_3} x_1 + \frac{P_5}{A_3} x_2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Nende paranduste ligikaudseid väärtusi on hõlpus arvutada tund-
matute ligikaudsete väärtuste järgi. Selleks on vaja leida jagati-

sed $\frac{P_2}{A_1}, \frac{P_3}{A_1}, \frac{P_2}{A_2}$, jne. ning need korrutada tundmatute ligikaudsete

väärtustega. Mainitud jagatiseid koostatakse ühe ja sama reegli
järgi: iga tundmatu jaoks kujutavad need jagatiseid endast ligi-
kaudse väärtuse saamiseks kasutatud võrrandi kõigi koefitsientide
jagamise tulemust sama võrrandi ruutkoefitsientidega. Jagatiseid võ-
takse vastupidise märgiga. Need on sobiv leida varakult ja kirju-
tada erilisse skeemi, sest neid tuleb kasutada mitu korda. Selline
skeem on toodud leheküljel 37 (skeem, kus lahendatakse eelmise
paragrahvi näide).

Skeemi esimesse ossa on välja kirjutatud võrrandid ning laht-
risse s — iga võrrandi koefitsientide summa.

Skeemi teise osa vastavasse lahtresse on kirjutatud ülalmainitud
jagatiseid vastupidise märgiga:

$$\begin{aligned} \text{I võrrandi jaoks } & -\left(\frac{-0,40}{1,23}\right) = +0,32 \text{ ja } -\left(\frac{-0,33}{1,23}\right) = +0,27 \\ \text{II } \text{,, } \text{,, } & -\left(\frac{-0,40}{1,85}\right) = +0,22 \text{ ja } -\left(\frac{-0,62}{1,85}\right) = +0,33 \\ \text{III } \text{,, } \text{,, } & -\left(\frac{-0,33}{1,95}\right) = +0,17 \text{ ja } -\left(\frac{-0,62}{1,95}\right) = +0,32 \end{aligned}$$

Siasamasse, lahtrisse s on kirjutatud ka selle lahtri summade
jagatiseid ruutkoefitsientidega (otseste märkidega). Need jagatiseid

on ülejäänud jagatiste kontrolliks antud reas. Kontroll seisneb selles, et antud rea kõigi arvude summa peab võrduma ühega. Nii saame I võrrandi jaoks:

$$0,32 + 0,27 + 0,41 = 1,00.$$

Skeemi osad	Võrrandite nr.	x_1	x_2	x_3	s	[pw]
I	1	1,23	-0,40	-0,33	+0,50	-11,70
	2	-0,40	1,85	-0,62	+0,83	+15,22
	3	-0,33	-0,62	1,95	+1,00	-3,52
II	1		+0,32	+0,27	+0,41 (1,00)	
	2	+0,22		+0,33	+0,45 (1,00)	
	3	+0,17	+0,32		+0,51 (1,00)	
III	x'	+9,51	-8,23	+1,81		
	Δ_1	-2,15	+2,22	-0,67		
	x''	+7,36	-6,01	+1,14		
	Δ_2	+0,53	-0,10	+0,06		
	x'''	+7,89	-6,11	+1,20		
Δ_3	-0,02	+0,02	0			
	x	+7,9	-6,1	+1,2		

Need summad kirjutatakse klambreis viivitamatult lahtrisse s.

Skeemi III osa esimesse ritta kirjutatakse valemi (33) kohaselt arvutatud tundmatute ligikaudsed väärtused. Meie juhtumil:

$$x_1' = - \left(\frac{-11,70}{1,23} \right) = + 9,51$$

$$x_2' = - \left(\frac{15,22}{1,85} \right) = - 8,23$$

$$x_3' = - \left(\frac{-3,52}{1,95} \right) = + 1,81.$$

Ligikaudsete väärtuste alla kirjutatakse esimesed parandused.

Esimene parandus x_1' jaoks leitakse, nagu juba mainitud, x_2' ja x_3' korrutamisele nende vastavate, skeemi teise ossa kirjutatud jagatistega (need jagatised seisavad vastavate tundmatutega ühes lahtris). x_1' jaoks saadakse parandus Δ_1 :

$$\Delta_1 = -8,23 \cdot 0,32 + 1,81 \cdot 0,27 = -2,15.$$

See parandus leitud, tuleb temaga viivitamata parandada x_1' , et teise tundmatu jaoks paranduse arvutamisel ära kasutada esimese tundmatu x_1' täpsem väärtus, meie juhtumil 7,36 (mitte aga 9,51), Niiviisi x_2' jaoks saame paranduse nii:

$$\Delta_1 = 7,36 \cdot 0,22 + 1,81 \cdot 0,33 = +2,22.$$

Kolmanda tundmatu jaoks paranduse arvutamiseks samal viisil kasutatakse parandatud x_1' ja x_2' .

Saanud tundmatute teised lähendused, võib neid samuti kasutada täpsemate paranduste arvutamiseks, mis tulnuks anda tundmatute esimese lähenduse väärtustele. Siiski arvutuste kiirendamiseks leitakse esimeste paranduste muutused, mis tekivad valemi (34) paremas osas ühtede ligikaudsete väärtuste asendamisest teistega. Neid muutusi hakkamegi pidama teisteks parandusteks ning nendega parandame tundmatute mitte esimesi, vaid teisi lähendusi.

Selliste teiste paranduste arvutamine toimub täiesti analoogiliselt sellega, kuidas arvutati esimesed parandused, ainult selle erinevusega, et skeemi II osas olevate jagatistega on vaja korrutada mitte tundmatute ligikaudseid väärtusi, vaid esimesi parandusi. Nõnda teise paranduse arvutamiseks x_1 jaoks (x_1'' jaoks) võtame $\Delta_2 = +2,22 \cdot 0,32 + (-0,67) \cdot 0,27 = +0,53$.

Teise paranduse arvutamiseks teise tundmatu jaoks tuleb viivitamata ära kasutada esimese tundmatu jaoks leitud teine parandus (0,53, kuid mitte -2,15) jne. Sellise võtte tõttu toimub paranduste arvutamine kiiremalt. Nii omavad meie näites kolmandad parandused juba väärtusi -0,02, +0,02 ja 0, järgmised aga saavad silmanähtavalt veelgi väiksemad. Et meie juhtumil on vaja teada parandusi terveis millimeetris, siis võib täiesti piirduda leitud kolmandate parandustega.

Kaaluühiku keskmise ruutvea arvutamiseks koostame järgmised tabelid:

Käigud	p	w	w ²	pw ²
g_1	0,50	0	0	0
g_2	0,40	21	441	176,40
g_3	0,33	10	100	33,00
g_4	0,83	0	0	0
g_5	0,62	-11	121	75,02
g_6	1,00	0	0	0
			[pw ²]	284,42

Võrrandid	[pw]	x	[pw] x
I	-11,70	8	-93,60
II	+15,22	-6	-91,32
III	-3,52	1	-3,52
		[[pw] x]	-188,44

Joonte arv skeemil on $m = 6$.

Sõlmpunktide arv on $n = 3$.

$$e = \pm \sqrt{\frac{284,42 - 188,44}{6-3}} = \pm 5,6 \text{ mm.}$$

Meil on kaaluühikuks võetud 10 jaamas mõõdetud kõrgusvahede summa. Uhes jaamas mõõdetud kõrgusvahe keskmine ruutviga on:

$$e_1 = \pm \frac{5,6}{\sqrt{10}} = \pm 1,8 \text{ mm.}$$

§ 23. Võrrandite lahendamine täielikus astronoomilises skeemis.

Võrrandite lahendamine täielikus astronoomilises skeemis teostub tundmatute järk-järgulise kõrvaldamisega (elimineerimisega). Selleks kirjutame alltoodud skeemi kõik antud võrrandid ning nende alla moodustame veel niinimetatud *summalise võrrandi*, mis saadakse kõigi antud võrrandite vastavate koefitsientide liitmisest. See summaline võrrand on vajalik arvutuste kontrollimiseks. Pärast iga võrrandit jätame ühe rea vabaks.

Lahendamine skeemis algab sellest, et kõik esimese võrrandi koefitsiendid jagatakse esimese tundmatu juures oleva koefitsiendiga, meie näites 1,23-ga. Tulemusena saadakse niinimetatud esimene *eliminatsioonivõrrand*, mis kirjutatakse esimese võrrandi alla ja tõmmatakse alla punase tindiga (meil on ta alla tõmmatud kahe joonega). Edasi kõigi järgmiste võrrandite esimese tundmatu juures olevad koefitsiendid korrutatakse eliminatsioonivõrrandi koefitsientidega ja tulemused kirjutatakse vastavate võrrandite alla (meil 2', 3' ja s₁').

Lahutades nüüd igast ülemisest reast sellele allkirjutatud alumise rea saame võrrandid, milledes esimene tundmatu juba puudub. Täheleb, meie juhtumil saadakse 2 võrrandit kahe tundmatuga,

	x_1	x_2	x_3	[pw]	Märkusi
I	+1,23	-0,40	-0,33	-11,70	I eliminatsiooni- võrrand
	+1,00	-0,325	-0,27	-9,51	
II	-0,40	+1,85	-0,62	+15,22	II eliminatsiooni- võrrand
2'	-0,40	+0,13	+0,11	+3,80	
III	-0,33	-0,62	+1,95	-3,52	I summaline võrrand
3'	-0,33	+0,11	+0,09	+3,14	
s_1	+0,50	+0,83	+1,00	0,00	II summaline võrrand
s_1'	+0,50	-0,16	+0,13	-4,76	
II		+1,72	-0,73	+11,42	II eliminatsiooni- võrrand
		1,00	-0,42	+6,64	
III		-0,73	+1,86	-6,66	II summaline võrrand
		-0,73	+0,31	-4,85	
s_2		+0,99	+1,13	+4,76	
		+0,99	-0,42	+6,57	
III			+1,55	-1,81	Astmik
s_3			+1,55	-1,81	
			+1,17		Astmik
		-6,15	-0,49	+6,64	
	+7,83	+2,00	-0,32	-9,51	Kontroll
	+3,92	-5,10	+1,17	-0,01	

mis me kirjutame skeemis allapoole, ridadesse II, III ja s_2 . Teise tundmatu kõrvaldamiseks on vaja II võrrandist saada teine eliminatsioonivõrrand ning siis kasutada seda samuti nagu ülevalgi.

Skeemi lõpus jõuame ainult ühte viimast tundmatut sisaldava ühe võrrandini, mis saadakse vahenditult (meil III) ja summalise võrrandi (s_3) näol. On ilmne, et kummalgi neist võrrandeist peavad olema ühesugused koefitsiendid, mis ongi arvutuse õigsuse kontrolliks.

Kontroll summalise võrrandi järgi peab toimuma ka arvutuse keskel. Nii võib saada summalise võrrandi s_2 lahutamiseks $s_1 - s_1'$ kui ka skeemi teise osa võrrandite koefitsientide liitmisega, — need mõlemad võrrandid peavad olema ühesugused. Meil näiteks tundmatu x_2 juures olevate koefitsientide vahe on $s_1 - s_1' = 0,99$, nende summa on $1,72 - 0,73 = 0,99$, erinevust ei ole.

Viimast saadavat võrrandit tuleb mõista nii: $1,55 x_3 - 1,81 = 0$. Siit määrame $x_3 = +1,17$ ja kirjutame selle vastavas lahtriisse allapoole. Järgmises selle all olevas reas teostame teise eliminatsioonivõrrandi lahendamise, milleks 1,17 tuleb korrutada $-0,42$ -ga,

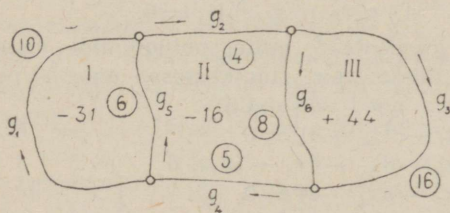
mis korrutisena annab $-0,49$. Liites selle tulemuse kõrvuti kirjutatud vabaliikmega $+6,64$ (mis on teisest eliminatsioonivõrrandist ümber kirjutatud) saame $+6,15$. Teise eliminatsioonivõrrandi kohaselt tuleb seda mõista nii: $x_2 + 6,15 = 0$, kust $x_2 = -6,15$, mis kirjutataksegi vastavasse lahtrisse. Edasi arvutatakse samal viisil ka x_1 esimesest eliminatsioonivõrrandist. Niisugust tundmatute määramise viisi nimetatakse „astmikuks“.

Lõppeks tuleb sooritada kontroll, asetades tundmatute leitud väärtused esimesse summalisse võrrandisse. On ilmne, et asetuse resultaadina peab saadama vabaliige vastupidise märgiga (meie saime 0 asemel $-0,01$).

§ 24. Võrrandite koostamine piirnevate polügoonide jaoks.

Mitme piirneva kinnise polügooni tasandamisel võib võrrandid koostada järgmisel viisil.

Olgu nad sõmpunktide vahel üksikuiks käikudeks. Kokku saame niisuguseid käike 6. Märgime nad tähtedega g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 ja g_6 .



Joonis 5.

Naaberpolügoonide ühiseid käike nimetame *sidekäikudeks*; niisugused on meil käigud g_5 ja g_6 . Ulejäänud (välised) käigud nimetame *vahekäikudeks*.

Märgime sulgemisvead polügoonides I, II ja III vastavalt w_1, w_2 ja w_3 , mõõdetud kõrgusvahede arvu käikudes g_1, g_2, \dots (või käikude perimeetri) vastavalt n_1, n_2, n_3, \dots

Kui iga polügoon olnuks üksik, siis selle kõigi kõrgusvahede parandused oleksid ühesugused ja nimelt võrduksid vastupidise mär-

giga võetud ning kõigi kõrgusvahede arvuga (või perimeetriga) jagatud sulgemisveaga, näiteks I polügoonis — jagatud $(n_1 + n_5)$ -ga. Märgime sellised parandused I polügoonis tähega x_1 , II — tähega x_2 ja III — tähega x_3 .

Sel viisil polügoonide jaoks oleksid õiged niisugused võrrandid (paranduste summa peab võrduma sulgemisveaga, võetult vastupidise märgiga, teisiti öelduna — paranduste summa liidetult sulgemisveaga peab võrduma nulliga):

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_5) x_1 + w_1 &= 0 \\ (n_5 + n_2 + n_6 + n_4) x_2 + w_2 &= 0 \\ (n_6 + n_3) x_3 + w_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Kõigi kolme polügooni naabruse tingimus ei luba juhendada ainult võrranditest (a). Asi seisneb selles, et kõrgusvahede parandamine mingis polügoonis kajastub sidekäikude kaudu naaberpolügooni sulgemisveale, muutes sulgemisviga vastassuunaliselt. Käigu g_5 iga kõrgusvahe muutmine II polügoonis muudab sulgemisviga I polügoonis suuruse — x_2 võrra, kokku aga — $n_5 x_2$ võrra, seepärast I polügooni tasandamise tingimuse saame:

$$(n_1 + n_5) x_1 - n_5 x_2 + w_1 = 0.$$

Rakendades samaseid kaalutlusi ka II ja III polügooni suhtes saame järgmise võrrandite süsteemi:

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_5) x_1 - n_5 x_2 + w_1 &= 0 \\ (n_5 + n_2 + n_6 + n_4) x_2 - n_5 x_1 - n_6 x_3 + w_2 &= 0 \\ (n_6 + n_3) x_3 - n_6 x_2 + w_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Kohtaldatuna joonisele 5, millel polügoonide sisse on kirjutatud sulgemisvead millimeetris, ringikestesse aga — perimeetrid kilomeetris, saadakse need võrrandid:

$$\begin{aligned} 16x_1 - 6x_2 - 31 &= 0 \\ 23x_2 - 6x_1 - 8x_3 - 16 &= 0 \\ 24x_3 - 8x_2 + 44 &= 0 \end{aligned}$$

ehk skeemis:

Võrrandite nr.	x_1	x_2	x_3	w
I	16	-6	0	-31
II	-6	23	-8	-16
III	0	-8	24	+44

Selliste võrrandite saamisviis on selge ja silmanähtavalt saab võrrandeid arvult niisama palju kui on polügoone.

Lahendanud need võrrandid, saame käigu 1 km-le kuuluva paranduse igas polügoonis tema üksikuse tingimisel.

On ilmne, et nende parandustega võib parandada vahenditult vastavaid vahekäike.

Sidekäikude jaoks aga saame parandused (1 km-le) nii:

Käiku	g_5	mööda	I	polügoonis	$x_1 - x_2$
"	g_5	"	II	"	$x_2 - x_1$
"	g_6	"	II	"	$x_2 - x_3$
"	g_6	"	III	"	$x_3 - x_2$

Praktiliselt võib saada terveile käikudele summaarsed parandused:

käigule	$g_1 \dots$	$n_1 x_1$
"	$g_5 \dots$	$n_5 (x_1 - x_2)$
"	$g_2 \dots$	$n_2 x_2$
"	$g_3 \dots$	$n_3 x_3$
"	$g_4 \dots$	$n_4 x_2$
"	$g_6 \dots$	$n_6 (x_2 - x_3)$

Nende edasine jaotamine üksikuile käikudele võib toimuda ka mittevõrdselt, sest et seejuures tuleb neid ümardada antud täpsusega.

Kaaluühiku keskmise ruutvea võib sel juhtumil saada valemi

$$e = \pm \sqrt{\frac{[wx]}{n}} \quad (36)$$

kohaselt, kus n on polügoonide arv (võrrandite arv), w — polügoonide sulgemisvead, x — leitud parandused. Meie näites viimased on: $x_1 = +2,2$; $x_2 = +0,7$; $x_3 = -1,6$. Sellisel juhtumil

$$[wx] = -31 \cdot 2,2 + (-16) \cdot 0,7 + 44 \cdot (-1,6) = -149,8 \text{ ja}$$

$$e = \pm \sqrt{\frac{149,8}{3}} = \pm 7,1 \text{ mm.}$$

See on 1 km pikkuse käigu kõrgusvahede summa keskmine ruutviga.

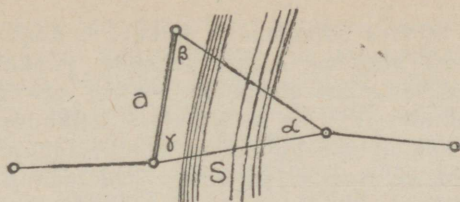
III peatükk.

V JA VI KLASSI POLUGONOMEETRILISED KÄIGUD.

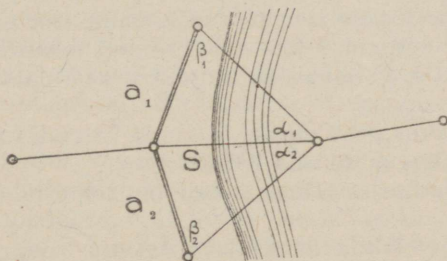
§ 25. Uldmõisted.

Me teame juba, et põhimine alus mensuli mõõdistamise jaoks luuakse trigonomeetriliste käikude rajamisega (vt. II osa § 70). Samuti on mainitud, et kinnises maastikus rakendatakse erilist aluse loomise meetodit — polügonomeetriat. See meetod seisneb selles, et maastikul rajatakse käigud, millel mõõdetakse kõik küljed ja nende vahelised nurgad. Sõltuvalt külgede ja nurkade mõõtmise täpsusest jagatakse käigud 6 klassi. Siin on esitatud kahe viimase, V ja VI klassi polügonomeetriliste käikude rajamine (vt. „Geodeetilise põhitamise ja mõõtkavas 1 : 10 000 topograafilise mõõdistamise teostamise instruksioon“, 1936. a. väljaanne).

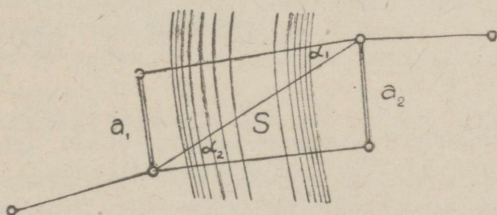
Koht polügonomeetrilise käigu rajamiseks tuleb valida tasane (külgede kaldnurgad on instruksiooniga lubatud mitte üle 5°), soodus mõõtmiseks, — mööda mitut liiki teid, piiripeenraid, tasaseid heinamaid jms. Kui käik tuleb viia üle järsu kuristiku või jõe või üldse üle otseseks mõõtmiseks ebasoodsa koha, siis käigu vastav külj määratakse ligipääsmatu kaugusena. Selleks rajatakse maastikule kolmnurk, mille üheks küljeks võetakse käigu mainitud külj. Selles kolmnurgas mõõdetakse baas a (joonis 6) ja kõik kolm nurka α , β ja γ (nurk α on baasi vastas). Kolmnurk valitakse nii, et nurk α ei oleks mitte alla 30° . Kui maastiku tingimused ei luba valida sellist kolmnurka, siis otsitav külj võetakse kahe naaberkolmnurga ühiseks küljeks (joonis 7 ja 8). Sel juhtumil nurgad α_1 ja α_2 võivad olla kuni 20° , otsitav külj arvutatakse 2 korda ja külje lõplikuks väärtuseks võetakse nende aritmeetiline keskmine. Erinevus mõlemate väärtuste vahel ei või ületada 1 : 5000 ligipääsmatu kauguse pikkusest.



Joonis 6.



Joonis 7.



Joonis 8.

Vormilt peavad käigud olema võimalikult sirgekujulised, s. t. käigu külgedevahelised nurgad peavad olema 180° lähedased. Polügonomeetrilisi käike võib rajada järgmiste süsteemide näol.

1. Uksikud käigud kõrgema klassi kahe punkti vahel. Sel juhul võetakse käikude üldpikkus: V klassi käikudes mitte üle 15 km ja VI klassi käikudes mitte üle 7 km.

2. Ühes või mitmes sõlmpunktis lõikuvate käikude võrk, mille käigud tuginevad kõrgema klassi mitmele punktile. Siin sõlmpunktide kaugus lähimaist aluspunktidest ei või ületada: 10 km — V klassi käikudes ja 5 km — VI klassi käikudes.

3. Rippuvad käigud, mis tuginevad (ühe otsaga) ainult ühele kõrgema klassi punktile. Nende pikkus ei või ületada: 6 km — V klassi ja 3 km — VI klassi käikudes.

4. Kinnised käigud, mis tuginevad ühele kõrgema klassi punktile.

5. Kinnised käigud, mis ei tugine kõrgema klassi punktile.

Kõigil juhtumeil, kui käigu pikkus ületab 7 km, teostatakse selle keskel ühe külje tõelise asimuudi määramine (tõelise asimuudi määramise esitamise eespool § 110—124). Samuti määratakse tõeline asimuut sõlmpunktist väljuva ühe külje kui ka rippuva käigu viimase külje jaoks.

Ühe külje pikkus peab olema: V klassi käikudes mitte alla 150 m, VI klassi käikudes mitte alla 75 m.

Äärmised relatiivsed sulgemisvead on kehtestatud järgmiselt:

V klassi käikudes pikkusega kuni 2 km	—	$\frac{1}{3000}$
V " " " 2—7 km	—	$\frac{1}{4000}$
V " " " üle 7 km	—	$\frac{1}{5000}$
VI " " "	—	$\frac{1}{2000}$

Ühe nurga mõõtmise keskmine ruutviga ei või ületada: $\pm 10''$ — V klassi käikudes ja $\pm 25''$ — VI klassi käikudes.

§ 26. Eelprojekti koostamine. Rekognostseerimine.

Enne välistööde teostamist on vaja uurida olemasoleva plaani materjali põhjal maastikku, millel kavatakse rajada käike, ja koguda arvulised andmed siin olemasolevate kõigi kõrgema järgu aluse punktide kohta. Resultaadina tuleb koostada käikude rajamise rajooni kaart võimalikult suures mõõtkavas ja kanda sellele käigu rajamise kava, arvestades kõiki eelmises paragrahvis esitatud näpunäiteid käigu kuju, külgede pikkuse jne. kohta.

Pärast eelprojekti koostamist teostatakse maastikul rekognostseerimine. Seejuures kontrollitakse ja täpsustatakse eelprojekti koostamise õigsust, valitakse lõplikult punktide asukohad, arvestades igas punktis head nähtavust mõlemale naaberpunktile, igas sõlmpunktis aga — head nähtavust kõigile naaberpunktidele. Seejuures võetakse samuti arvesse soodsamat maastikku joonte mõõtmiseks ja märkide asetamiseks (kindel krunt, kui koht, sõidukõlbmatu teeosa). Samuti on tähtis, et kõik valitud punktid oleksid maastikul märgatavad, et neid edaspidi oleks hõlpus üles leida.

Kohtades, kus kavatakse teostada käikude sidumist kõrgema järje aluse punktidega, on vaja uurida viimaseis tsentrite seisukorda ja nähtavust nendest aluse naaberpunktidele. Juhtumil, kui sidumiseks kasutataval aluspunktil — tugipunktil — instrumendiga seista ei saa, teostatakse koordinaatide ülekandmine maapinnale (vt. edasi, § 35).

Rekognostseerimisel kavatakse ka kolmnurgad ligipääsmatute kauguste määramiseks ning valitakse vastavad baasid.

Mõõdistamise töodel on erakordselt tähtis ära kasutada aluspunktidenä *maastiku alalisi esemeid* (vabrikukorstnaid, ehitiste teravikke jms., vt. II osa, § 79). Sellise eseme koordinaatide määramiseks, nagu allpool näeme, piisab käigu punktides nurkade mõõtmisest esemele kulgeva kahe suuna ja käigu mingite joonte vahel. Nii-sugust punktide määramise viisi nimetatakse *otse- või külglõikeks*. Rekognostseerimise ülesande hulka kuulub ka lõigete jaoks niisuguste esemete valimine. Valikul on vaja arvestada järgmisi momente:

1. Valitud esemed peavad asetsema käigust mitte üle 3 km kaugusel.

2. Lõiked nendele tuleb teha vähemalt kolmest käigupunktist.

3. Lõikenurk (nurk, mille tipuks on lõigatav ese) peab saadama mitte alla 30° , kusjuures kolmas suund ühega kahest esimesest peab moodustama nurga mitte alla 45° .

Esemeid võib lõigata ka kahest punktist, kuid tingimusel, et lõikenurk ei oleks väiksem 40° -st ja et see nurk oleks otseselt mõõdetud.

Kui alalisi esemeid maastikul ei leidu, siis lõigete jaoks püstitatakse vajalikel juhtumel käigust kõrvale, kõrgemaile kohtadele, erilised hästi nähtavad tähised.

Lõikenurkade ligikaudseks määramiseks, samuti aga ka ligipääsmatute kauguste juurde rajatud kolmnurkade nurkade määramiseks on vaja maastikule kaasa võtta bussool.

Kõik lõplikult valitud käigupunktid, samuti ka baasid ligipääsmatute kauguste määramiseks kindlustatakse 0,5 m pikkade ja 10 cm läbimõõduliste vaiadega. Vaiad taotakse maapinnaga tasa. Vaia ülemisse otsa lüüakse raudnael, mille peale viilitakse ristikujuliselt 2 kriipsu — nende kriipsude lõikepunkt ongi punkti tsentriks. Tsentrist 0,2 m kaugusele taotakse maasse pooleni teine samade mõõdetega vai — numbrivai. Iga 2—3 km tagant kindlustatakse kahe naaberkülje otsad (s. t. järjestikku 3 punkti) tugevamini (vt. § 27).

V klassi käikudes enne nende punktide kindlustamist nõutakse instruksiooni kohaselt oletatava käigu relatiivse sulgemisvea arvutamist järgmise valemi kaudu:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P \cdot 10^4} \sqrt{0,841 P + \Sigma D^2}. \quad (37)$$

Selles valemis on tähega P märgitud kilomeetreis väljendatud käigu perimeeter, tähtedega $D_1, D_2 \dots$ kaugused käigu punktidest kuni käigu raskuskeskpunktini. Nende suuruste määramiseks on vaja rekognostseerimise ajal kanda käik kaardile või koostada käigu joonis, milleks on vaja käik enne mõõdistada silmamõõduliselt. Pärast seda mõõdetakse P ja D jooniselt sirkliga. Raskuskeskpunkti asend määratakse koordinaatidest, mis mõõdetakse käigu otsi ühendava sirge suhtes (see joon võetakse abstsisside teljeks). Eelkõige määratakse käigu kõigi punktide koordinaadid, milleks neist punktidest tõmmatakse ristjooned mainitud sirgele ning mõõdetakse sirkliga ristjoonte pikkused (ordinaadid) kui ka nende ristjoonte aluste kaugused algpunktist (abstsissid). Ilmselt on esimese punkti koordinaadid nullid. Pärast seda saadakse raskuspunkti koordinaadid aritmeetilise keskmisena käigu kõigi punktide koordinaatidest.

Oletatava relatiivse sulgemisvea määramise küsimus on üksikasjaliselt käsitletud „Geodeetilise põhitamise ja mõõtkavas 1 : 10 000 topograafilise mõõdistamise instruksioonis“ (1936. a. väljaanne, lisa 39, lk 222—225).

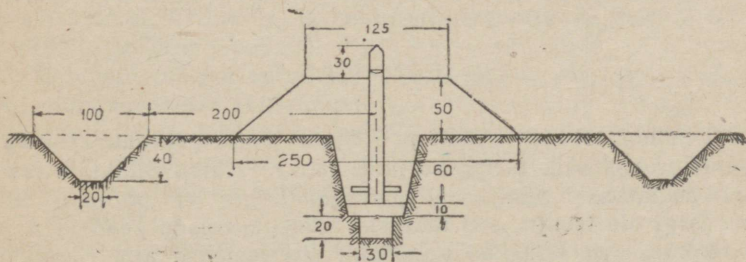
§ 27. Polügonomeetriliste käikude punktide kindlustamine. Lihtsaim tsentriir.

Punktide vastupidav kindlustamine teostatakse maastikul kahe tsentri asetamisega. Uks neist kaevatakse maasse ja nimetatakse alustsentriks, teine asetatakse maapinnale ja nimetatakse pealis-

tsentriks. On ilmne, et alus- ja pealistsentri punktid peavad asetema ühel ja samal vertikaaljoonel.

Mõõtkavas 1 : 10 000 topograafilise mõõdistamise instruksioon soovib polügonomeetriliste käikude ja V klassi trigonomeetriliste võrkude punkte kindlustada joonisel 9 toodud tsentri näidise kohaselt.

Alustsenter valmistatakse rööptahuka kujuline, milleks koostatakse tsemendi, liiva ja kruusa segu vahekorras 1 : 5 : 4. Alustsentri võib teha ka mitte alla 80 kg-lisest kivirahnust või tellistest. Alustsentri ülemisele tahule tõmmatakse 2 lõikuvat diagonaali, millede lõikepunkt ongi õigupoolest tsentriks (märgiks).



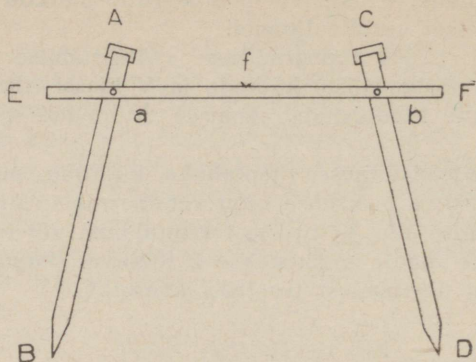
Joonis 9.

Tsenter kaevatakse maasse 0,8 m sügavusele (**kuni pealmise pin-nani**). Pärast seda ta kaetakse vähemalt 0,1 m paksuse $0,4 \times 0,4$ m pindalase sillutise kihiga. Sellele kihile asetatakse pealistsenter.

Pealistsenter kujutab enesest posti, diameetriga mitte alla 15 cm ja pikkusega 1,4 m. Tema tipp tahutakse koonuseks, millesse lüüakse raudnael. Posti ülemise otsa ühele küljele tahutakse laba, kuhu pan-nakse märgis. Posti alumisse ossa saetakse sisse 2 põikpuud, et takistada posti väljakiskumist maast. Puupostide asemele soovi-tatakse asetada ka raudteeropaad või raudbetoonist poste.

Post jäetakse üle maapinna 0,8 m kõrguselt. Maapinnale posti ümber kaevatakse ruudukujuliselt kraav, ruudukülje pikkusega 3,5 m.

Posti ülemises otsas raudnaelaga märgitud punkti asetamiseks ühele vertikaaljoonele alustsentriga kasutatakse erilisi riistu, mida nimetatakse *tsentriirideks*. Lihtsaima tsentriiri võib valmistada kahe 1,5 m pikkuse ja sentimeetrit 5 jämeduse vaia AB ja CD kujul (joo-nis 10). Nende külge on kinnitatud põikpuu EF selliselt, et ühenduste



Joonis 10.

a ja b ümber ta võib vabalt pöörduda. Selle põikpuu keskele on lõigatud noaga sälk f ripploe niidi jaoks. Antud punkti ülesseadmisel asetatakse riista mõlemad jalad nii, et põikpuu tuleks silma järgi üle tsentri, siis taotakse kirvega vaiade peadele A ja C seni, kuni vaiad seisavad tugevasti, siis lastakse alla ripplood ja kirve vahelduvate hoopidega tsentri kummalegi jalale taotellakse, et riista tugevalt seistes ripplood täpselt ühtiks alustsentri diagonaalide löikepunktiga. Pärast seda tõstetakse ripplood üles ja post kaevatakse maasse nii, et tema tipp tuleks täpselt ripploe alla.

§ 28. Külgede mõõtmine.

VI klassi polügonomeetrilistes käikudes mõõdetakse küljed lihtsate terasest kahekümne meetriliste lintidega edasi- ja tagasisuunas. Joonte kallaku juures üle 2° on vaja mõõta teodoliidi vertikaalringiga joonte kaldnurgad ja arvestada vastavaid, kallakusest ole-

nevaid parandusi valemi $\Delta = 2s \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ kohaselt. Need parandused võetakse tavaliselt tabelleist (vt. lisa 1, tabel 1).

V klassi polügonomeetrilistes käikudes mõõdetakse küljed teraslintidega *vaiadele kriipsude fikseerimise viisiga*. Selleks asetatakse täpselt joont mööda (teodoliidi järgi) sihtasapinda hästi saetud peadega vaiad sellise arvestusega, et lint pingutatud olekus laskuks

oma kriipsudega kahe naabervaia pea keskkoha. Mõõtmise alguses lindi tagumise otsa kriips seatakse kohastikku tsentriga, lint pingutatakse erilise seadeldise abil sama pingega, millega teda pingutati kompareerimisel (vaata allpool), ning lindi eesmises otsas oleva kriipsu vastu torgatakse vaia peasse nuga (või kriipsu asend märgitakse hästi teritatud pliiatsiga). Seejuures peab jälgima, et noa torkamise ajal tagumine kriips oleks täpselt tsentri kohal. Pärast seda kantakse lint edasi ja asetatakse oma tagumise kriipsuga noa juurde, järgmise vajja aga torgatakse lindi eesmise kriipsu vastu teine nuga jne. Jääk viimasest vaiast kuni joone lõpuni mõõdetakse Genfi joonlauaga võrreldud terasruletiga (Genfi joonlaud kujutab enesest vaskjoonlauda, mille lamestatud servale on kantud 0,5 või 0,2 millimeetrilised jaotused).

Lindi pingutamiseks antud pinge kohaselt kinnitatakse lindi otsa külge dünamomeeter (vedrukaal).

Iga lindihaarde jaoks (iga kahe naabervaia vahel) mõõdetakse lindi temperatuur, mis on vajalik temperatuurist tingitud paranduse arvestamiseks. Selleks on lindile 1 m kaugusele otsadest kinnitatud 2 termomeetrit.

Mõõtmisest võtavad osa 2 vaatlejat ja 2 töölist. Iga kohale asetatud lint registreeritakse väliraamatusse, mille vorm on toodud leheküljel 52.

Joone parandamata pikkus saadakse järgmise valemi kohaselt:

$$d_1 = n l + r, \quad (38)$$

kus n on lintide arv, l — lindi pikkus ja r — jääk.

Sellele pikkusele on tarvis anda parandused:

1. Temperatuurist tingitud parandus:

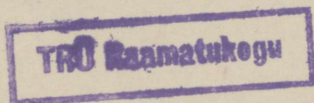
$$\Delta t = k d_1 (t - t_0), \quad (39)$$

kus k on terase paisumise koefitsient $= 0,000\ 011$, t — keskmine mõõtmisaegne temperatuur ja t_0 — lindi kompareerimise aegne temperatuur (vt. allpool).

2. Kallakusest tingitud parandus $\Delta\alpha$, mis võrdub üksikute lindihaarete samasuguste paranduste summaga (toodud väliraamatus $\Delta\alpha = 48,9$ mm). See parandus antakse alati miinus-märgiga.

Niisiis parandatud joone pikkus on:

$$d = d_1 + \Delta t - \Delta\alpha, \quad (40)$$



*Polügonomeetriliste käikude joonemõõtmise
väliraamat.*

Joone nimetus

Krunt

Ilm

Lindi pikkus on 20,0000 m t = 20° juures.

Lindihaarde nr.	Temperatuur		Kaldnurgad		Märkusi
	Edasi	Tagasi	Nurgad	Parandused mm-eis	
1	21,4	23,0	0°34'	1,0	
2	21,6	23,0	0°26'	0,6	
3	21,8	23,0	0°15'	0,2	
4	22,2	23,5	0°55'	2,5	
5	22,0	23,0	1°10'	4,1	
6	22,5	23,0	1°35'	7,7	
7	22,5	23,5	1°50'	10,2	
8	22,5	23,5	1°40'	8,5	
9	22,8	23,2	1°05'	3,6	
10	22,5	23,0	1°00'	3,0	
11	23,0	23,0	0°50'	2,1	
12	22,5	22,5	0°45'	1,8	Jääk:
13	22,8	23,0	0°20'	0,3	edasi 13,412
14	23,0	23,0	0°35'	1,1	tagasi 13,429
15	23,0	23,0	0°40'	1,4	
Jääk	23,0	23,0	0°40'	0,8	
Σ	359,1	369,2		48,9	
kesk. t	22,4	23,1			

Pikkuse arvutamist võib teostada näiteks niisuguses skeemis:

Lugem	n	nl	r	d ₁	Parandused mm-eis		d	Kesk- mine	Rela- tiivne viga
					Δt	Δα			
Edasi	15	300	13,412	313,412	+8,3	-48,9	313,371,4	313,381	1
Tagasi	15	300	13,429	313,429	+10,7	-48,9	313,390,8		31 338

Relatiivne viga arvutatakse valemi järgi (vt. § 53):

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d_{ed} - d_{tag}}{2d} \quad (41)$$

Enne tööd on lint vaja *kompareerida*, s. t. määrata lindi kriipsude vaheline täpne kaugus teatava pinge ja temperatuuri juures.

Kompareerimine baasi järgi teostatakse järgmisel viisil.

Tasasel kindla põhjaga maastikul valitakse 5—6 täislindi pikkune joon ning selle otsad kindlustatakse hästi tasaseks saetud pealiste vaiadega. Nende põhivaiade peadele märgitakse tsentrid peenikeste raudnaeltega või kahe joone lõikepunktiga. Selliselt kindlustatud joon ongi baasiks.

Töölindi pikkuse määramiseks on vaja mõõta sellega kui ka normaallindiga baasiks võetud pikkus. Baas mõõdetakse vaheldumisi selle ja teise lindiga kokku 7 korda, alates ja lõpetades normaallindiga.

Märgime baasi keskmise pikkuse neljast normaallindiga mõõtmisest d_0 ja kolmest tööлиндiga mõõtmisest d . Siis tööлиндiga parandus saadakse nii:

$$\Delta l = \frac{d_0 - d}{n}, \quad (42)$$

kus n on lintide arv baasis.

See parandus antakse kas otseselt lindi pikkusele või mõõdetud joone pikkusele.

§ 29. Nurkade mõõtmine.

V klassi käikudes teostatakse nurkade mõõtmist pooleminutilise (kolmekümne-sekundilise) või üheminutilise teodoliidiga kordusviisil (kordusviisi käsitletakse §-s 30). Esimesel juhtumil rakendatakse ühte täisvõtet kolme kordusega, teisel juhtumil — kahte täisvõtet, kusjuures iga võtte koosneb neljast kordusest. Nurkade lõplikud väärtused ümardatakse kuni ühe sekundini. Nurgad poolvõtteis ei või üksteisest erineda esimesel juhtumil üle 15'', teisel juhtumil üle 20''.

Kui ühest punktist lähtub rohkem kui kaks suunda, mis tuleb ette näiteks sõlmpunktides või antud punktides otselõike jaoks nurkade mõõtmisel, siis peale nõutavate nurkade mõõdetakse veel ka nende täiendus kuni 360°-ni. On ilmne, et sel puhul kõigi mõõdetud nurkade summa peab võrduma 360° (*horisondi tingimus*):

$$\begin{aligned} \Sigma \gamma &= 360^\circ \\ \Sigma \gamma - 360^\circ &= 0. \end{aligned}$$

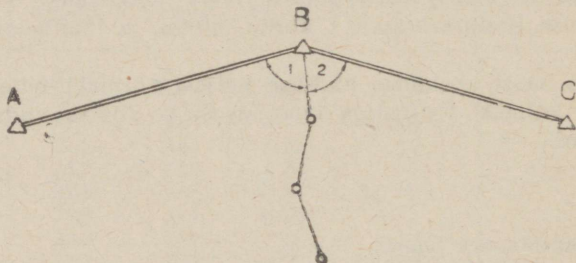
ehk

Viimase võrdse parempoolses osas saadakse tegelikult mitte null, vaid mingi sulgemisviga w :

$$w = \Sigma\gamma - 360^\circ.$$

See sulgemisviga ei tohi ületada $\pm 15'' \sqrt{n}$, kus n on mõõdetud nurkade arv.

Käikude sidumisel aluspunktidega peab mõõtma veel 2 külgnevat nurka, kui sidumiseks võetud punktilt on näha 2 teist aluspunkti (joonis 11). Kui aga sidumiseks kasutatavast aluspunktist on näha ainult üks aluspunkt, siis tuleb mõõta külgnev nurk ja selle täiendusnurk kuni 360° .



Joonis 11.

On ilmne, et esimesel juhtumil mõlema mõõdetud nurga summa peab võrduma kindelpunktide A, B ja C vahelise kindla nurgaga. Märgive selle kindla nurga A (nurk $ABC = A$). Siis peab olema:

$$1 + 2 = A \text{ (summade tingimus)}$$

ehk

$$(1 + 2) - A = 0.$$

Tegelikult saadakse sulgemisviga w :

$$w = (1 + 2) - A.$$

See sulgemisviga ei tohi ületada $\pm 21''$.

Teisel juhtumil sulgemisviga saadakse nii:

$$w = (1 + 2) - 360^\circ.$$

Ka see viga ei või olla üle $\pm 21''$.

Kogu käigu äärmine sulgemisviga arvutatakse valemi järgi:

$$w_{\text{äärm.}} = \pm 20'' \sqrt{n}, \quad (43)$$

kus n on käigu nurkade arv.

VI klassi käikudes mõõdetakse nurgad ühe ringvõttega, kusjuures poolvõtete vahel keeratakse limbi ligikaudu 90° võrra. Nurkade

lõplikud väärtused ümardatakse kuni 0',1. Poolvõtteis ei tohi nurkade vahed ületada 1', sulgemisviga kogu käigu nurkades ei või olla üle $\pm 1' \sqrt{n}$.

§ 30. Kordusviis.

Kordusviis annab võimaluse nõrgendada lugemisvigade mõju, mis pooleminutilise ja minutilise teodoliidi juures on tunduvad võrreldes teiste vigadega. Nurkade mõõtmine selle viisiga toimub järgmiselt.

Alguses asetatakse limbile nulliga lähedane lugem (parem on asetada 1—2' üle nulli). Kui selles asendis alidaad on kinnitatud limbi külge, juhitakse pikksilm limbi pööramisega vasakule esemele (vaadates nurga tipust nurga sisse) ja sooritatakse esimene lugem *a*. Pärast seda limbi liigutamata, ainult alidaadi pööramisega kellaosuti käigu järgi juhitakse pikksilm paremale punktile. Need kaks toimingut (limbi pööramine vasakule ja alidaadi pööramine paremale punktile) moodustavad ühe korduse.

Pärast esimest kordust, jättes alidaadi kinnitatult limbi külge ja vabastades limbi, pööratakse seda koos alidaadiga kellaosuti käigu vastu ja juhitakse pikksilm teiskordselt vasakule esemele, siis aga kinnitanud limbi, pikksilm juhitakse ainult alidaadi pööramisega kellaosuti käigu suunas paremale esemele; seega lõpeb teine kordus. Tulemusena oleks nagu limbile kantud mõõdetava nurga kahekordne suurus. Kui teha veel kolmas, neljas jne. kordus, siis limbile kandub kolmekordne, neljakordne jne. nurga suurus. Kui neljanda korduse lõpus sooritada lugem *b*, siis nurga saamiseks on vaja vahe $b - a$ jagada 4-ga. Üldiselt *n* korduse juures nurga suurus saadakse nii:

$$u = \frac{b - a}{n},$$

kus *a* ja *b* on lugemid mõõtmise alguses ja lõpus. Nii viisi saadakse, et *n*-kordse nurgamõõtmise juures sooritatakse ainult 2 lugemit, millega nõrgendataksegi lugemise vigade mõju.

Nurga tunduva suuruse juures või korduste suure arvu juures võib juhtuda, et alidaadi null möödub üks või mitu korda limbi nullist. On ilmne, et sellisel juhtumil nurga arvutamiseks on vaja viimase lugemiga liita vastav arv kordi 360° . Selle loendamiseks esimese korduse lõpus tehakse veel *kontroll-lugem* b_1 (ühe nooniusse järgi), mille kohaselt arvutatakse nurga ligikaudne suurus

$u_1 = b_1 - a$. Limbi nullist nooniuise nulli möödumiste arvu saame nii:

$$i = \frac{nu_1}{360}$$

ja nurga arvutamiseks saame:

$$u = \frac{b - a + 360 i}{n} \quad (44)$$

Selleks et kompenseerida kollimatsioonivea ja pikksilma horisontaaltelje limbi tasapinnaga mitteparallelsusest tingitud vea mõju, on vaja nurga mõõtmine sama arvu kordustega teostada ka vertikaalringi teise asendi juures (teine poolvõtte). Teise poolvõtte jaoks pööratakse pikksilm üle seniidi ja lahutamata alidaadi limbist, limbi pööramisega juhitakse pikksilm paremale esemele ning sooritatakse lugem b' (mis ilmselt ühtib ligikaudu esimese poolvõtte viimase lugemiga). Siis, peale alidaadi vabastamist, selle pööramisega *kellaosuti käigu vastu*, juhitakse pikksilm vasakule esemele. Pärast seda, kui limb on vabastatud, juhitakse pikksilm paremale esemele, pöörates limbi koos alidaadiga kellaosuti käigu järgi, jne. Pärast alidaadi pööramisega tehtud viimast juhtimist vasakule esemele sooritatakse lugem a' , mis saadakse ligikaudu võrdne esimese lugemiga esimeses poolvõttes. Nurk saadakse nii:

$$u = \frac{b' - a'}{n}$$

Nurga mõõtmine n kordusega R_p ja R_v juures moodustab täieliku võtte.

Kui niisuguseid täisvõtteid on vaja teha kaks, siis teise võtte algul alidaadi null asetatakse 90° -le. Kolme täisvõtte juures teise võtte algul asetatakse lugem 60° , kolmanda võtte algul aga 120° . Üldiselt m täisvõtte juures suurendatakse pärast iga võtet lugem järgmise võtte alguse jaoks suuruse $\frac{180^\circ}{m}$ võrra.

Kordusviisiga nurgamõõtmise väliraamatul on selline kuju:

Kordusviisiga nurgamõõtmise väliraamat.

Punkt 2

Kuupäev: 9. septembril. Jaam nr. Ilm: selge — vaikne.

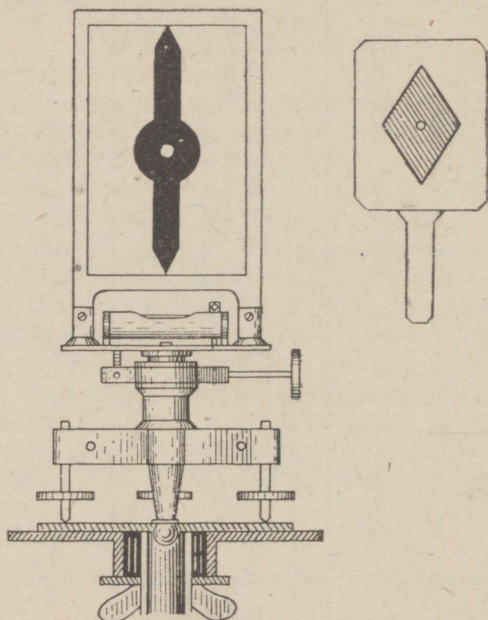
Aeg: kell 9^h 30^m. e = Nähtavus: hea.

θ = Kujutised: rahulikud.

Nurkade nr.	Vaadeldavate punktide nimetus	Korduste arv p	Rv						Δ	Rp						$\frac{Rv + Rp}{2}$	Märkusi					
			Lugemid nooniuuste järgi			$\frac{I + II}{2}$	p-kordne nurk, mõõdetud nurk			Lugemid nooniuuste järgi			$\frac{I + II}{2}$	p-kordne nurk, mõõdetud nurk								
			I	II				I		II												
o	'	"	"	o	'	"	o	'	"	o	'	"	o	'	"							
3(a)			0	$\frac{02}{02}$	$\frac{15}{15}$	02	15	155	39	23		(a')o	$\frac{01}{02}$	$\frac{45}{00}$	01	52	155	39	38			
(b ₁)	4		38	57							-3									38	54	52
1(b)			155	$\frac{41}{41}$	$\frac{45}{30}$	41	38	38	54	51		(b')155	$\frac{41}{41}$	$\frac{45}{15}$	41	30	38	54	54			

§ 31. Kolmestatiiviline süsteem.

Polügonomeetrilistes käikudes nurgamõõtmise juures tuleb erilist tähelepanu pöörata instrumendi tsenteerimisele ja tähiste püstitamisele täpselt tsentri kohale (ühele vertikaaljoonele tsentriga).



Joonis 12.

Viseerimist on kõige parem teha erilistele märklaudadele — *viseerimismärkidele*. Selleks on vaja 3 statiivi: ühele asetatakse instrument, naaberpunktidesse, tagumisse ja eesmise ülesseatud statiivile aga asetatakse viseerimismärgid (joonis 12). Sellise märgi asetamiseks peab statiivi peas olema auk, mille diameeter võrdub märgi jala diameetriga. Pärast vaatluste lõpetamist antud punktis kantakse teodoliit (ilma statiivita, mis jääb kohale ja millele asetatakse viseerimismärk) edasi eesmisele statiivile, kus ta asetatakse märgi asemele, tagumise märgiga statiiv aga kantakse edasi, endisest eesmisest märgist mööda järgmisele eesmiseks tulevale punktile. Sel viisil asetatakse teodoliit automaatselt punkti kohale, millele enne

seada tehti viseerimine, viseerimine uueltpunktilt aga toimub täpselt instrumendi endisele asukohale, millega tunduvalt nõrgendatakse tsentreerimise ja tähisteviltuoleku (*reduktsiooni*) vigade mõju.

Viseerimismärkidega statiivid seatakse üles ripploe järgi nagu instrumendiga statiivgi.

§ 32. Vertikaalnurkade mõõtmine.

Polügonomeetriliste käikude punktidevahelised kõrgusvahed määratakse kaldkiirega nivellimise meetodil (trigonomeetrilise nivellimisega), milleks samaaegselt horisontaalnurkade mõõtmisega teostatakse ka vertikaalnurkade mõõtmist.

Vertikaalnurgad mõõdetakse otse- ja vastusuunaliselt ühe täisvõttega, kusjuures viseerimine märkidele toimub keskmise horisontaalniidiga. On silmanähtav, et kõrgusvahede arvutamiseks on vaja igas jaamas mõõta instrumendi kõrgus ja viseerimismärkide kõrgused üle tsentri.

Otse- ja vastukõrgusvahede omavaheline erinevus ei või ületada 0,04 m 100 m-lise kauguse kohta. Nulliaseme võnkumine ühes jaamas ei tohi ületada 1' piire. Nende lubatavuste arvestamiseks on vaja arvutada nulliaseme ja kõrgusvahed igas jaamas maastikul.

Kahe kindelpunkti vahele rajatud käigus või kinnises polügoonis arvutatakse äärmine sulgemisviga kõrgusvahede summas valemist:

$$w_h = \pm 0,4 \sqrt{Pd}, \quad (45)$$

kus P on käigu pikkus, avaldatud kilomeetris, ja d — keskmine külgede pikkus, ka kilomeetris:

$$d = \frac{P}{n}$$

Järgnevalt tuuakse vertikaalnurkade mõõtmise väliraamat.

Vertikaalnurkade mõõtmise väliraamat.

Kuupäev: 21. juunil.

Punkt nr. 7.

Ilm: pilves.

Aeg: kell 14^h.

i = 1,40.

Nähtavus: hea.

Esemete nimetus	Esemete kõrgused	Lugemid		Keskmine Rv. Rp.	N	α
		Rv.	Rp.			
Nr. 6 ...	1,48	357°10' 10	2°54' 53	357°10' 2 53,5	+1',75	+2°51'8
Nr. 8 ...	1,53	359°59' 59	0°03' 0 04	359°59' 0 03,5	+1,25	+0 02,2

§ 33. Mõõtmisresultaatide läbitöötamine.

Pärast tööde lõpetamist maastikul tuleb eelkõige kontrollida kõik väliraamatus tehtud arvutused, alates kahe nooniuse järgi tehtud lugemitest keskmise väärtuse arvutamisega. Mõõdetud suuruste lõplikud väärtused ja kõik parandused peab kirjutatama tindiga.

Siis teostatakse kõigi joonte pikkuste kui ka ligipääsmatute kauguste arvutamine. Viimased arvutatakse siinuslause järgi. Nii kohandatult joonisele 6 saame, märkides otsitava külje S-ga:

$$\begin{aligned} \text{kust} \quad \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{S}{\sin \beta}, \\ S &= \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Nurgad α , β ja γ parandatakse enne seda (nurgaline sulgemisviga kolmnurgas jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile nurkadele). Arvutused on vaja teha skeemis.

Kõigi lõplike andmete põhjal koostatakse vatmani paberile ja tõmmatakse välja tušis käikude asetuse skeem, millele kantakse nii aluspunktid (koordinaatide järgi) kui ka käikude punktid (malliga) ja kõrvalpunktid.

Skeemile kirjutatakse käikude punktide numbrid ja nimetused, kõik mõõdetud nurgad, lõplikud joonte pikkused ja kõrgusvahed. Sõlm- ja tugipunktide juurde kirjutatakse horisondi (või summade) tingimuse kohaselt parandatud nurgad. Parandamiseks jaotatakse sulgemisviga vastupidise märgiga võrdselt kõigile mõõdetud nurkadele.

Skeemile kantakse samuti vastava planšeti raamid.

Lõppeks kontrollitakse skeem hoolsasti ja siis selle andmete põhjal tehakse käikude tasandamine.

§ 34. Polügonomeetriliste käikude tasandamine.

Üksikute käikude tasandamisega me oleme juba küllalt tutvunud. Meenutagem valemeid sulgemisvea arvutamiseks:

1. Nurgalised sulgemisvead.

a) Lahtise käigu jaoks:

$$\begin{aligned} w_u &= \alpha_2 - \alpha_1 + \sum u - n \cdot 180^\circ - \text{parempoolsete nurkade jaoks,} \\ w_v &= \alpha_1 - \alpha_2 + \sum v - n \cdot 180^\circ - \text{vasakpoolsete nurkade jaoks.} \end{aligned}$$

b) Kinnise käigu jaoks:

$$w_u = \sum u - (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Siin α_1 ja α_2 on lähtejoonte direktsioonnurgad, millede vahele on rajatud kõik, n — käigu mõõdetud nurkade arv, tähega u on märgitud parempoolsed nurgad, tähega λ — vasakpoolsed nurgad.

2. *Sulgemisvead koordinaatide juurdekasvudes.*

a) Lahtise käigu jaoks:

$$w_x = \sum \Delta x - (x_2 - x_1),$$

$$w_y = \sum \Delta y - (y_2 - y_1).$$

b) Kinnise käigu jaoks:

$$w_x = \sum \Delta x,$$

$$w_y = \sum \Delta y.$$

Jooneline sulgemisviga (sulgemisviga perimeetris):

$$\Delta P = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}.$$

Relatiivne sulgemisviga saadakse ΔP jagamisel perimeetriga P ; ta avaldatakse murruna, mille lugejaks on 1.

3. *Sulgemisviga kõrgusvahedes.*

a) Lahtise käigu jaoks:

$$w_h = \sum h - (H_2 - H_1).$$

b) Kinnise käigu jaoks:

$$w_h = \sum h.$$

Nurgalised sulgemisvead jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile nurkadele. Praktiselt, silmas pidades nurkade ümardamise vajadust (V klassi käikudes kuni 1" ja VI klassi käikudes kuni 0,1) printsiipest „võrdselt“ ei peeta täielikult kinni. Niisugusel juhtumil antakse võrdlemisi suuremad parandused suhteliselt lühemate külgedega nurkadele.

Sulgemisvead koordinaatide juurdekasvudes jaotatakse vastupidise märgiga kõigile juurdekasvudele võrdeliselt vastavate küljepikkustega.

Sulgemisvead kõrgusvahedes (trigonomeetrilise nivellimise juures) jaotatakse vastupidise märgiga kõigile kõrgusvahedele võrdeliselt külgede ruutudega.

Kui ühes punktis lõikub mitu käiku, siis nende tasandamine toimub sõlmpunktide meetodi kohaselt (vt. § 19).

Nurkade tasandamisel arvutatakse sõlmjoone direktsioonnurga tõenäolisim väärtus. Selle joone direktsioonnurga üksikud väärtu-

sed, mis saadakse siirmisest üksikuid käike mööda, arvutatakse valemi järgi:

$$\alpha = \alpha_1 + n \cdot 180^\circ - \Sigma u \text{ — parempoolsete nurkade jaoks,}$$

$$\alpha = \alpha_1 - n \cdot 180^\circ + \Sigma \lambda \text{ — vasakpoolsete nurkade jaoks.}$$

Nende väärtuste kaaludeks võetakse direktsioonnurkade arvutamiseks kasutatud nurkade arvude pöördväärtused.

Kui sõlmjoontest ühe jaoks on määratud tõeline asimuut, siis tema järgi arvutatud selle joone direktsioonnurka võib pidada kindlaks ja sellisel juhtumil kõigi käikude direktsioonnurgad tasandatakse selle ning lähte direktsioonnurkade vahel üksikute käikude tasandamise reeglite kohaselt. Kui aga mainitud direktsioonnurka lugeda mittekindlaks, siis tõenäolisima väärtuse arvutamisel tuleb arvestada ka tema kaalu

$$P_o = \frac{1}{0,01 m_o^2} \quad (46)$$

kus m_o on direktsioonnurga arvutamise aluseks olnud tõelise asimuudi määramise keskmine ruutviga, väljendatud sekundeis.

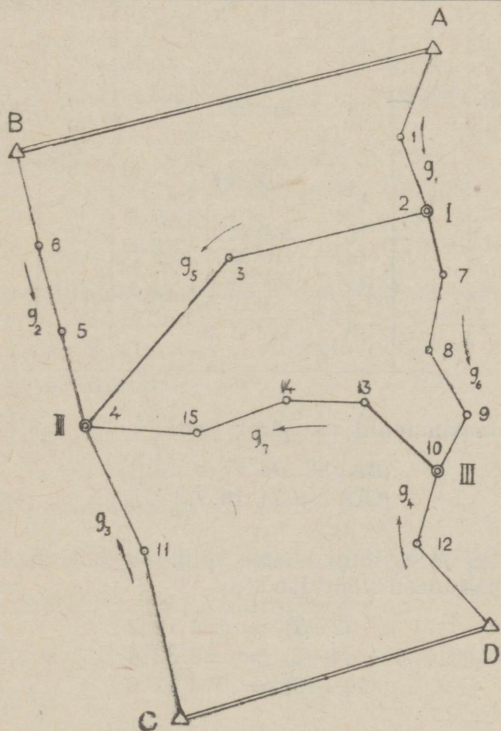
Koordinaatide juurdekasvude tasandamiseks arvutatakse lähtepunktidest kõiki käike mööda siirdud üksikuist väärtusist sõlmepunkti koordinaatide tõenäolisim väärtus. Seejuures võetakse üksikute väärtuste kaaludeks sageli käikude perimeetrite pöördarvud. Peab tähendama, et sel juhtumil on kaaludeks õigem võtta koordinaatide keskmiste ruutvigade ruutude pöördarvud. Ent esialgselt kooskõlastatud nurkadega polügonomeetriliste käikude lõpp-punktide koordinaatide keskmised ruutvead arvutatakse üsna keerukate valemite järgi (mis küll mõningal määral lihtsustuvad sirgekujuliste käikude juures). Seepärast kasutataksegi praktikas ülalmainitud lihtsustust, mis küll sisaldab suvalisuse elementi. Instruksiooni kohaselt soovitatakse koordinaatide kaalud sel juhtumil võtta erilisest tabelist käigu otsapunkte ühendava joone direktsioonnurga A ja käigu külgede arvu järgi. Nurk A määratakse käigu juurdekasvude summast:

$$\tan A = \frac{\Sigma \Delta y}{\Sigma \Delta x}$$

või mõõdetakse malliga skeemiliselt jooniselt. Mainitud tabel on toodud lisa 1 (tabel 2).

Käigu kõrgusvahede tasandamisel võetakse sõlmepunkti üksikute kõrgusväärtuste kaaludeks vastavate käikude perimeetrite ruutude pöördarvud. Seejuures on mugav kasutada järgmist tabelit (d — perimeeter):

d	d ²	$P = \frac{10}{d^2}$	d	d ²	$P = \frac{10}{d^2}$
1,0	1,00	10,00	2,6	6,76	1,48
1,1	1,21	8,26	2,7	7,29	1,37
1,2	1,44	6,94	2,8	7,84	1,28
1,3	1,69	5,92	2,9	8,41	1,19
1,4	1,96	5,10	3,0	9,00	1,11
1,5	2,25	4,44	3,1	9,61	1,04
1,6	2,56	3,90	3,2	10,24	0,98
1,7	2,89	3,46	3,3	10,89	0,92
1,8	3,24	3,09	3,4	11,56	0,87
1,9	3,61	2,77	3,5	12,25	0,82
2,0	4,00	2,50	3,6	12,96	0,77
2,1	4,41	2,27	3,7	13,69	0,73
2,2	4,84	2,07	3,8	14,44	0,69
2,3	5,29	1,89	3,9	15,21	0,66
2,4	5,76	1,74	4,0	16,00	0,62
2,5	6,25	1,60	4,1	16,81	0,59



Joonis 13.

Kui on olemas mitu sõlmpunkti, siis teostatakse tasandamine kaudsete mõõtmiste meetodiga (§ 21—24).

Näitena korraldame nurkade tasandamise joonise 13 kohaselt.

Mõõtmise andmed grupeerime alljärgnevasse tabelisse.

Nr.	Mõõdetud nurgad	Küljed	Nr.	Mõõdetud nurgad	Küljed	Nr.	Mõõdetud nurgad	Küljed
	<u>Käik g₁</u>			<u>Käik g₂</u>			<u>Käik g₃</u>	
B			A			D		
A	65°12',2	381,21	B	278°59',9	362,72	C	89°10',7	381,29
1	206°50',6	275,45	6	181°27',6	353,49	11	195°55',2	448,04
2	169°02',5		5	180°25',0	330,24	4	107°37',6	
7	441°05',3		4	294°52',6		3	392°43',5	
			3	935°45',1				
	<u>Käik g₄</u>			<u>Käik g₅</u>			<u>Käik g₆</u>	
C			7			2		152,39
D	288°01',6	405,79	2	284°00',5	593,75	7	166°23',2	282,49
12	126°35',7	390,34	3	210°38',7	588,40	8	216°16',1	332,25
10	241°26',6		4	494°39',2		9	125°54',0	255,78
13	656°03',9			<u>Käik g₇</u>		10	69°26',3	
			10			13	577°59',6	
			13	204°23',0	357,82			
			14	216°30',0	258,93			
			15	161°35',9	272,74			
			4	54°12',6	206,76			
			3	636°41',5				

Kindlad lähteasimuudid on järgmised:

$$(BA) = 74^{\circ}17',5$$

$$(CD) = 71^{\circ}16',7.$$

Käikude g₁, g₂ ja g₄ järgi leiame sõlmjoonte 2—7, 4—3 ja 10—13 asimuutide ligikaudsed väärtused.

$$(2-7) = 173^{\circ}12',2$$

$$(4-3) = 38^{\circ}32',4$$

$$(10-13) = 315^{\circ}12',8.$$

Võrrandite koostamiseks kirjutame vajalikud andmed tabelisse (kaaluühikuks võtame 12 nurga summa kaalu):

Käigud	Nurkade arv	P	w	pw	w ²	pw ²
g ₁	3	4	0	0	0	0
g ₂	4	3	0	0	0	0
g ₃	3	4	+0',8	+3,2	0,64	2,56
g ₄	3	4	0	0	0	0
g ₅	2	6	+0',6	+3,6	0,36	2,16
g ₆	4	3	-0',2	-0,6	0,04	0,12
g ₇	4	3	-1',1	-3,3	1,21	3,63
					[pw ²]	8,47

Punktid	A	[pw]	Vaba- liikmed	x	[pw]x
I	13	-3,0	+3,0	0	0
II	16	+3,5	-3,5	+0,3	-1,05
III	10	+2,7	-2,7	+0,4	-1,08
				[pw] x	-2,13

Nende andmetega koostame 3 võrrandit:

$$\begin{aligned} 13x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 3,0 &= 0 \\ -6x_1 + 16x_2 - 3x_3 - 3,5 &= 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 2,7 &= 0. \end{aligned}$$

Nende võrrandite lahendamise tulemusena saame:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = +0,3; \quad x_3 = +0,4.$$

Parandanud nendega vastavad asimuudid, saame asimuutide lõplikud (kindlad) väärtused:

$$\begin{aligned} (2-7) &= 173^\circ 12',2 \\ (4-3) &= 38^\circ 32',7 \\ (10-13) &= 315^\circ 13',2. \end{aligned}$$

Kaaluühiku keskmise ruutvea saame:

$$e_1 = \pm \sqrt{\frac{8,47 - 2,13}{7 - 3}} = \pm 1',26.$$

Uhe nurga mõõtmise keskmine ruutviga on:

$$e = \pm \frac{1,26}{\sqrt{12}} = \pm 0',36.$$

Koordinaatide juurdekasvude tasandamiseks tuuakse alljärgnevas tabelis lähtepunktide koordinaadid.

Punktid	x	y
A	+64 514,36	-38 488,41
B	+64 180,96	-39 673,85
C	+62 469,15	-39 020,06
D	+62 222,67	-38 292,60

Näitena määrame käigu g_2 juurdekasvude kaalud; juurdekasvude summa käigus on: $\Sigma\Delta x = -976,44$; $\Sigma\Delta y = 287,76$. Nende andmete põhjal leiame nurga A:

$$\tan A = \frac{287,76}{976,44} = 0,294 \ 70.$$

$$A \approx 16^\circ,4.$$

Selle nurga ja käigu joonte arvu (kolm joont) järgi leiame tabelist 2, lisa 1 (andmed on vähendatud 100 korda):

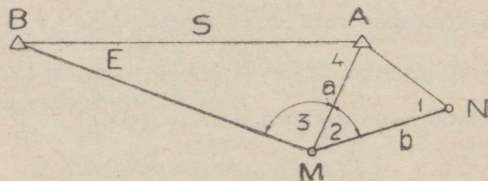
$$P_x = 1,46.$$

$$P_y = 6,14.$$

§ 35. Koordinaatide allakandmine maapinnale.

Kindelpunktidega sidumise juures on võimalikud niisugused juhtumid, kus ei saa instrumendiga asuda punktile (kui näiteks punktiks on vabrikukorsten või tuuleveski jms.).

Selleks et koordinaadid siirda kõrgelt punktilt A maapinnale punkti M (joonis 14), on vaja kõrval valida selline baas $MN = b$, et tema otsast M on näha antud punkt A ja veel mingi kindelpunkt B, otsast N aga on näha ainult antud punkt A (ja muidugi ka baasi



Joonis 14.

teine ots, s. t. punkt M). Punkti M koordinaatide arvutamiseks on küllalt mõõta hoolsasti see baas ja nurgad 1, 2 ja 3, kusjuures kumbki kahest esimesest nurgast ei tohi olla alla 30° .

Märgime punkti A koordinaadid x_1 ja y_1 , punkti B koordinaadid x_2 ja y_2 ning punkti M koordinaadid x ja y .

Punktide A ja B tuntud koordinaatide järgi võib alati saada suuna (BA) ja selle pikkuse s , seepärast need suurused me loeme antuiks.

Kolmnurgast MAN külje a jaoks siinuslause kohaselt saame:

$$a = \frac{b \sin 1}{\sin (1 + 2)}$$

Kolmnurgas MBA on meil nüüd teada 2 külge (a ja s) ning nurk 3. Nende andmete järgi määrame siinuslause kohaselt nurga E:

$$\sin E = \frac{a \sin 3}{s}$$

või silmas pidades nurga E vähesust:

$$E' = \frac{a \sin 3}{s \sin 1'} = \frac{3\,438 \sin 3}{s}$$

ehk sekundeis

$$E'' = \frac{206\,265}{s} \cdot a \sin 3.$$

Niiviisi on meil kolmnurgas MBA teada 2 nurka ja nende järgi leiame nurga 4:

$$\text{nurk } 4 = 180^\circ - (3 + E).$$

Nüüd arvutame suuna (AM) = (BA) + $180^\circ - 4$ = (BA) + $180^\circ - [180^\circ - (3 + E)]$, ehk

$$(AM) = (BA) + 3 + E.$$

Saanud suuna (AM), on hõlpus arvutada juurdekasvud punktilt A punktile M, siis aga ka punkti M koordinaadid:

$$\Delta x = a \cos (AM)$$

$$\Delta y = a \sin (AM)$$

$$x = x_1 + \Delta x$$

$$y = y_1 + \Delta y.$$

Arvutuse õigsuse kontrolliks on vaja määrata suund (BM) ja moodustada vahe (BM) — (BA), mis peab võrduma nurgaga E:

$$\tan (BM) = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$$(BM) - (BA) = E.$$

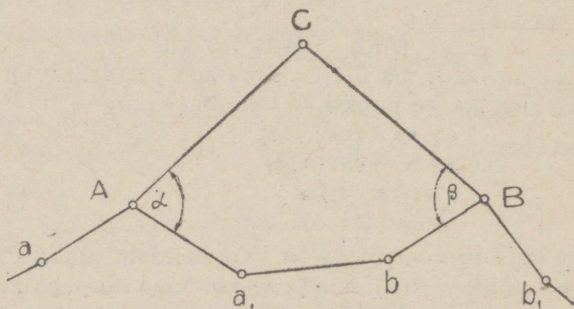
Niisiis koordinaatide allakandmisel maapinnale tuleb lahendada järgmised valemid:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{b \sin 1}{\sin (1+2)} \\
 E'' &= \frac{206\,265}{s} \cdot a \sin 3 \\
 (AM) &= (BA) + 3 + E \\
 \Delta x &= a \cos (AM) \\
 \Delta y &= a \sin (AM) \\
 x &= x_1 + \Delta x \\
 y &= y_1 + \Delta y \\
 (BM) - (BA) &= E \text{ (kontroll)}
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

§ 36. Otselõiked (külglõiked).

Polügonomeetriliste käikude rajamisel, nagu juba tähendatud, kõigist punktidest, kust on näha käigu kõrval mingid maastiku alalised püsivad esemed (vabrikukorstnad, tuletõrje vahitornid, tuuleveskid jms.), tuleb mõõta nurgad — neile esemeile kulgevate suundade ja käigu järgmise või eelmise joone vahel. Seda nimetatakse *maastiku alalise eseme lõikamiseks* ja sellist lõiget nimetatakse otse- või külglõikeks. Niisuguste lõigete eesmärk seisneb selles, et lõigetega määratud punkti hiljem mõõdistamisel kasutada aluspunktidena.

Olgu näiteks käigu kahest punktist A ja B (joonis 15) lõigatud punkt C, s. t. mõõdetud nurgad α ja β . Nende nurkadega võib siirda



Joonis 15.

käigu külgedelt a_1 A või a A ja b B või b_1 B asimuudid joontele AC ja BC, nii et suunad (AC) ja (BC) me loeme antuiks. Punktide A ja B koordinaadid on samuti tuntud. Märgime nad vastavalt x_1, y_1 ja x_2, y_2 . Punkti C koordinaadid märgime x ja y . Nende koordinaatide määramine moodustabki meie ülesande.

Ülesande lihtsustamiseks kanname koordinaatide alguspunkti üle punkti A, jättes telgede suunad muutmata. Sellisel juhtumil on punkti A koordinaatideks vahed $(x_1 - x_1)$ ja $(y_1 - y_1)$, st. nullid, punkti B koordinaatideks aga on vahed $(x_2 - x_1)$ ja $(y_2 - y_1)$. Punkti C koordinaadid aga ühtivad ilmsesti koordinaatide juurdekasvudega punktist A punktile C (joont AC mööda). Märgime need juurdekasvud Δx_1 ja Δy_1 .

Geodeetilise vastuülesande valemite kohaselt kirjutame:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \tan(\text{AC})$$

ehk

$$\Delta y_1 = \Delta x_1 \tan(\text{AC}). \quad (a)$$

$$\frac{\Delta y_1 - (y_2 - y_1)}{\Delta x_1 - (x_2 - x_1)} = \tan(\text{BC})$$

ehk

$$\Delta y_1 - (y_2 - y_1) = \Delta x_1 \tan(\text{BC}) - (x_2 - x_1) \tan(\text{BC}).$$

Asendades Δy_1 väärtuse võrdsusest (a) viimasesse võrdsusse, saame:

$\Delta x_1 \tan(\text{AC}) - (y_2 - y_1) = \Delta x_1 \tan(\text{BC}) - (x_2 - x_1) \tan(\text{BC})$, kust leiame Δx_1 väärtuse:

$$\Delta x_1 = \frac{(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \tan(\text{BC})}{\tan(\text{AC}) - \tan(\text{BC})} = \frac{B}{K}. \quad (48)$$

Kandes täiesti analoogiliselt koordinaatide alguse üle punkti B leiame juurdekasvu Δx_2 punktist B punktile C:

$$\Delta x_2 = \frac{(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \tan(\text{AC})}{\tan(\text{AC}) - \tan(\text{BC})} = \frac{A}{K}. \quad (49)$$

Juurdekasvude määramiseks igrekite järgi võib nüüd vahenditult kasutada võrdsust (a), sest et Δx_1 ja Δx_2 me juba leidsime valemite (48) ja (49) järgi:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= \Delta x_1 \tan(\text{AC}) \\ \Delta y_2 &= \Delta x_2 \tan(\text{BC}) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Pärast juurdekasvude leidmist sellisel viisil on hõlpus leida ka koordinaate endid:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \Delta x_1 = x_2 + \Delta x_2 \\ y &= y_1 + \Delta y_1 = y_2 + \Delta y_2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Niiviisi me saame kaks korda x ja kaks korda y , mis on arvutuste kontrolliks. Lõplikuks väärtuseks võtame nendest aritmeetilise keskmise.

Tegelikult tehakse löiked siiski igale esemele vähemalt käigu kolmest punktist. Kombineerides suundi kahekaupa me võime kolme löike puhul ühtekokku saada 3 lahenduse paari ja järelikult kolm keskmist väärtust. Nendest kolmest väärtusest on siis vaja määrata tõenäolisim väärtus kaalude kohaselt. Uksikute väärtuste kaalude määramiseks meenutagem, et löike viga on pöördvõrdeline löikenurga siinusega (vt. II osa, § 35), s. t.

$$\Delta = \frac{n}{\sin C}$$

Kui arvestada ainult seda viga, võttes selle keskmise ruutveana, on kaalude jaoks vaja võtta valemi (19) kohaselt selle vea ruudu pöördväärtused:

$$P = 1 : \frac{n^2}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 C}{n^2}$$

Kaalude vahekorras võrdelisuse koefitsient n võib jääda tähele panemata; seetõttu jõuame järelduseni, et kaaludeks tuleb võtta löikenurkade siinuste ruudud. Löikenurgad omakorda võime saada määratavalt punktist väljuvate (või määratavasse punkti kokkuvate) suundade vahedena.

Järelikult kaalud saame valemi järgi:

$$P = \sin^2 [(AC) - (BC)]. \quad (52)$$

Allpool on esitatud näide kahest suunast koosneva otselõike lahendamisest aritmomeetriga.

Otselõike arvutamine tuleb teostada muidugi pärast polügonomeetrilise käigu tasandamist ja käigu kõigi punktide koordinaatide arvutamist.

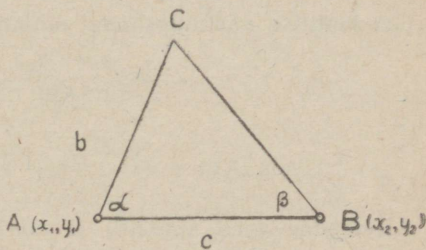
Otselõike lahendamine

(aritmomeetril)

Tähendid	Arvutused	Tähendid	Arvutused
x_2	-2 334,82	y_2	+8 251,16
x_1	+ 874,38	y_1	+6 478,35
$x_2 - x_1$	-3 209,20	$y_2 - y_1$	+1 772,81
(AC)	38°17',5	tan (AC)	+ 0,78952
(BC)	352°51',4	tan (BC)	- 0,12532
(AC) - (BC)	45°26',1	k	+ 0,91484
$(x_2 - x_1) \tan (BC)$	+402,19	$(x_2 - x_1) \tan (AC)$	-2 533,71
B	+1 370,62	A	+4 306,52
Δx_1	+1 498,21	Δx_2	+4 707,40
x_1	874,38	x_2	-2 334,82
x	2 372,59	x	2 372,58
Δy_1	+1 182,86	Δy_2	- 589,95
y_1	6 478,35	y_2	8 251,16
$\sin^2 [(AC) - (BC)]$	7 661,21 0,51	Y	7 661,21

§ 37. Jungi valemid.

Kui lõike juures mõõdetud nurgad α ja β (joonis 16) on ühe külje juures (kui punkt C määratakse kahest, ühe ja sama külje otsapunktideks olevast naaberpunktist), siis koordinaatide arvutamiseks on mugavam rakendada Jungi valemeid, mis võimaldavad koordinaatide vahendit arvutamist mõõdetud nurkade järgi. Jungi valemitel on järgmine kuju (tähen- did on samad, mis otselõike juureski):



Joonis 16.

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1 &= \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha + (y_2 - y_1)}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{A_1}{K} \\
 \Delta y_1 &= \frac{(y_2 - y_1) \cot \alpha - (x_2 - x_1)}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{B_1}{K} \\
 \Delta x_2 &= \frac{-(x_2 - x_1) \cot \beta + (y_2 - y_1)}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{A_2}{K} \\
 \Delta y_2 &= \frac{-(y_2 - y_1) \cot \beta - (x_2 - x_1)}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{B_2}{K}
 \end{aligned} \tag{53}$$

Jungi valemid saadakse järgmiselt.

Külje $AC = b$ jaoks siinuslause kohaselt saame (lähtudes $AB = c$ -st):

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Suuna (AC) saame nii:

$$(AC) = (AB) - \alpha.$$

Järelikult juurdekasvu Δx_1 (punktist A punktile C) jaoks saame:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1 &= b \cos (AC) = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \cos [(AB) - \alpha] = \\
 &= \frac{c \sin \beta [\cos (AB) \cos \alpha + \sin (AB) \sin \alpha]}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \\
 &= \frac{c \sin \beta \cos \alpha \cos (AB) + c \sin \beta \sin \alpha \sin (AB)}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}. \tag{a)
 \end{aligned}$$

Geodeetilise vastuülesande valemi järgi saame külje c jaoks:

$$c = \frac{y_2 - y_1}{\sin (AB)} = \frac{x_2 - x_1}{\cos (AB)},$$

kust

$$\sin (AB) = \frac{y_2 - y_1}{c}; \quad \cos (AB) = \frac{x_2 - x_1}{c}.$$

Asendades need $\sin (AB)$ ja $\cos (AB)$ väärtused võrdsusse (a) saame:

$$\Delta x_1 = \frac{c \sin \beta \cos \alpha \cdot \frac{x_2 - x_1}{c} + c \sin \beta \sin \alpha \cdot \frac{y_2 - y_1}{c}}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1) \sin \beta \cos \alpha + (y_2 - y_1) \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}$$

Jagades saadud avaldises lugeja ja nimetaja korrutisega $\sin \alpha \sin \beta$ ja pannes $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ asemele $\cot \alpha$ ning $\frac{\cos \beta}{\sin \beta}$ asemele $\cot \beta$, saame lõplikult:

$$\Delta x_1 = \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha + (y_2 - y_1)}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

Täiesti analoogiliselt tuletatakse ka ülejäänud valemid.

IV peatükk.

V KLASSI TRIGONOMEETRILINE VÕRK. ULDMÕISTED.

§ 38. Triangulatsioonj skeem. Trigonomeetriliste võrkude klassifikatsioon.

Aluspunktide määramise trigonomeetriline viis (triangulatsioon) on põhimine. Tema olemus, nagu juba varem mainitud, seisneb selles, et maastikule rajatakse niinimetatud trigonomeetriline võrk, s. t. kolmnurkade süsteem, kusjuures kolmnurkade küljepikkused on 1 kuni 40 km. Peale selle valitakse üks otseseks mõõtmiseks sobiv joon pikkusega 1 kuni 10 km. Seda joont nimetatakse baasiks. Kui mõõta baas ja kõigi kolmnurkade kõik nurgad, siis arvutamise teel võib saada kõigi kolmnurkade kõik küljed, nende asimuudid ja kõigi tippude koordinaadid; need kolmnurkade tipud ongi aluspunktideks.

Sõltuvalt võrgu külgede keskmisest pikkusest ja mõõtmise täpsusest jagatakse võrgud eelkõige kaheks järjeks: kõrgemaks ja alamaks järjeks.

Kõrgema järje võrgud, teisiti riiklikeks alusvõrkudeks ehk riiklikuks triangulatsiooniks nimetatud võrgud, esinevad geodeetilise aluse algallikaina, mis ühendavad erinevaid mõõdistamisi ja annavad võimaluse teostada mõõdistamiste kasutamist üleriigiliseks otstarbeiks.

Riiklikud alusvõrgud omakorda jagatakse 2 klassiks — esimeseks ja teiseks.

I klassi võrkudes võetakse küljed mitte alla 25 km; mägisel maastikul ulatuvad need kuni 80 km ja rohkem.

Baasid võetakse pikkusega 6—15 km ja mõõdetakse relatiivse veaga mitte üle 0,000 001. Baasi mõõtmist teostatakse eriti täpsete riistadega (Jäderin-Guillaume'i riist). Nurgad mõõdetakse mikro-

meeter-mikroskoobiliste universaalidega, ühe lugemi keskmise veaga 0",5—0",7.

II klassi võrkude küljepikkused on 10—20 km. Siin võetakse üldreegli kohaselt baasideks või põhilisteks külgedeks I klassi võrkude küljed ehk, nagu öeldakse, II klassi võrgud arendatakse I klassi punktidest. Sageli rajatakse siiski II klassi võrke iseseisvalt oma baasi mõõtmisega.

Alama järje võrgud rajatakse tavaliselt mitmesuguste asutiste poolt omiks tarvidusteks, mispärast neid mõnikord nimetatakse ka asutiste (kohalikeks) triangulatsioonideks. Need on III, IV ja V klassi võrgud.

Üldreegli kohaselt arendatakse III klassi võrgud riiklike alusvõrkude punktidele peamiselt kolmnurkade ahelate rajamise (ülilimise) meetodiga ja mõnikord üksikute punktide määramise (põimimise) meetodiga (vt. allpool). Kui riiklikke triangulatsioone rajoonis ei ole, siis nad tuginevad astronoomilistele punktidele. Kui rajoonis ei leidu ka viimaseid, siis rajatakse iseseisvad III klassi võrgud.

III klassi võrgu külgede mõõteiks on 5—10 km.

IV klassi võrgud moodustuvad III klassi võrkude täiendavaist punktidest. Selliste punktidenä kasutatakse maastiku alalisi punkte (vabrikute ja tehaste korstnaid jne.), mis määratakse otselõigetega III klassi punktidest.

V klassi võrk arendatakse üldreeglina III ja IV klassi võrkude punktidest peamiselt kolmnurkade ahelate rajamise meetodiga või ka üksikute punktide määramise meetodiga. Kus ei ole III ega IV klassi võrke, rajatakse V klassi võrk iseseisvalt. V klassi võrgu külgede mõõde on 1—3 km.

§ 39. Võrkude süsteemid. Vabad võrgud.

Triangulatsiooni kolmnurgad asetatakse kas lausavõrguna, mis katab kogu mõõdistatava maa-ala, või kolmnurkade üksikute ridadena, mida nimetatakse ahelaiks.

Sõltuvalt kolmnurkade asetuse iseloomust eristatakse mitmesuguseid võrkude süsteeme. Võrkude lihtsaimad süsteemid on järgmised:

1. Ahel antud nurga sees.
2. Tsentraalsüsteem.
3. Geodeetiline nelinurk.
4. Lihtahel.

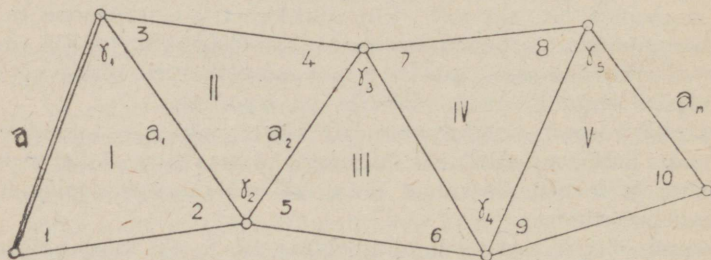
5. Ahel kahe kõrgema järje punkti vahel.

6. Ahel kahe baasi (lähtekülje) vahel.

Kõigi nende süsteemidega me tutvume allpool. Kui võrk tugi-
neb ainult ühele baasile või üldiselt ühele lähteküljele, siis seda
nimetatakse vabavõrguks.

§ 40. Side- ja vaheküljed, side- ja vahenurgad ning nende märkimine.

Olgu antud lihtahel baasiga b (joonis 17).



Joonis 17.

Joonisest näeme, et ahela II kolmnurga lahendamiseks on vaja teada I kolmnurgast ainult nende kolmnurkade ühist külge a_1 ; III kolmnurga lahendamiseks on vaja teada II kolmnurgast nende ühist külge a_2 jne. Kolmnurkade neid külgi nimetatakse sidekülgedeks, teisi aga vahekülgedeks.

Samuti ka sidekülgede vastasnurki nimetatakse sidenurkadeks, ülejäänuid aga vahenurkadeks.

Lepime kokku märkida sidenurki edaspidi alati järjestikku araabia numbritega, vahenurki aga — tähega γ , mille juures all märke näitajana kolmnurga numbri.

Igas kolmnurgas on 2 sidenurka. Hakkame neid eristama numbrit järgi — paaritud ja paaris sidenurgad ehk paaritu-märgisega nurgad ja paaris-märgisega nurgad.

§ 41. Kolmnurkade külgede arvutamine.

Triangulatsiooni kolmnurkade külgede arvutamist toimetatakse siinuslause järgi.

I kolmnurgast joonisel 17 saame:

$$\frac{b}{\sin 2} = \frac{a_1}{\sin 1};$$

kust

$$a_1 = b \cdot \frac{\sin 1}{\sin 2}. \quad (a)$$

Nüüd on II kolmnurgas teada külge a_1 . Lähtudes temast arvutame külge a_2 , mille jaoks saame (a)-ga analoogilise avaldise:

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{\sin 3}{\sin 4}.$$

Asetanud sija a_1 väärtuse võrdsusest (a), saame:

$$a_2 = b \cdot \frac{\sin 1 \sin 3}{\sin 2 \sin 4}.$$

Jätkates samal viisil järgmiste sidekülgede arvutamist saame külge a_n jaoks:

$$a_n = b \cdot \frac{\sin 1 \sin 3 \dots \sin (2n-1)}{\sin 2 \sin 4 \dots \sin 2n}. \quad (54)$$

Saadud valem on meie poolt tarvituselevõetud märgiste juures hõlpsasti meelespeetav, sest valemi parempoolses osas kujutab murru lugeja enesest järjekorras kõigi paaritute sidenurkade siinuste korrutist, nimetaja aga — paaris-märgisega sidenurkade siinuste korrutist.

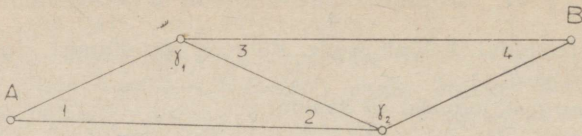
Logaritmilisel kujul esineb valem (54) nii:

$$\log a_n = \log b + \log \sin 1 + \dots - \log \sin 2 - \dots \text{ ehk lühemalt:} \\ \log a_n = \log b + \Sigma \log \sin 1 - \Sigma \log \sin 2. \quad (55)$$

Siin on sümboliga $\Sigma \log \sin 1$ märgitud paaritute sidenurkade siinuste logaritmide summa ja sümboliga $\Sigma \log \sin 2$ — paaris side-
nurkade siinuste logaritmide summa.

§ 42. Kolmnurkade soodsaim kuju.

Et triangulatsiooni mõõdetud sidenurgad igal juhtumil sisaldavad paratamatuid vigu, siis on arvutatud külgede täpsuse jaoks kasulik, kui neid nurki on võimalikult vähem.



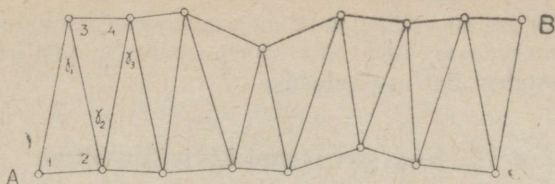
Joonis 18.

Olgu meil vaja katta võrguga pindala punktide A ja B vahel (joonis 18). Me võime sellele maa-alale mahutada väga vähe kolmnurki, kui neid hakkame venitada A-st B suunas. Sel juhtumil saame ka väga vähe sidenurki, seepärast baasist kõige kaugem arvutatud külge saadakse eeltoodud kaalutluste põhjal küllaldaselt täpne. Kuid sellise meetodi juures saadakse sidenurgad, nagu joonisel näha, väga väikesed. Väikeste nurkade siinused ja nende logaritmid muutuvad väga kiiresti, s. t. nende vahed on nurga muutumisel ühe ja sama suuruse võrra võrdlemisi suured, mida võib näha järgmisest tabelist:

Nurgad	Tabeli vahed nurga muutumisel 1' võrra	
	$\Delta \sin$	$\Delta \log \sin$
1°	0,00029	0,00713
5°	0,00029	0,00144
10°	0,00028	0,00072
20°	0,00027	0,00035
40°	0,00022	0,00015
60°	0,00014	0,00007
80°	0,00005	0,00002

Selle tagajärjel ühed ja samad vead väikestes nurkades mõjuvad tunduvalt tugevamini ja tulemusel arvutatud külgede täpsus langeb uuesti.

Lähtudes sellest vaatepunktist on parem teha sidenurgad 90° lähedased, s. t. ahel kokku suruda (joonis 19), ehk teisiti öeldult, teha vahenurgad väikesteks. Kuid sel juhtumil, nagu näha joonisest, saadakse väga palju kolmnurki, mis on vasturääkivuses esimese tingimusega. Sel viisil kujuneb, et nii side- kui ka vahenurgad peavad olema võimalikult suured. Et rahuldada seda tingimust,



Joonis 19.

püütakse kolmnurgad rajada sellised, millel nii side- kui ka vahenurgad oleksid 60° , s. t. püütakse rajada võrdkülgseid kolmnurki.

Võrdkülgseid kolmnurki triangulatsioonis nimetatakse normaalseiks ehk eeskujulikeks kolmnurkadeks.

Praktiliselt ei ole võimalik kõiki kolmnurki teha normaalseiks, — selle poole aga on vaja püüda kui ideaali poole. Siiski nendest kõrvalekaldumiseks on olemas teatav piir. Kõrgema järje võrkudes ei lubata sidenurki alla 40° , alama järje võrkudes aga mitte alla 30° .

§ 43. Triangulatsiooni nurkade keskmine ruutviga.

Igas kolmnurgas mõõdetud kolme nurga järgi võib määrata kolmnurga sulgemisvea:

$$f_1 = 1 + 2 + \gamma_1 - 180^\circ,$$

$$f_2 = 3 + 4 + \gamma_2 - 180^\circ.$$

Iga niisugune sulgemisviga on kolme nurga summa tõeliseks veaks. Kui selle summa keskmise ruutvea määrgime f , siis saame

$$f = \pm \sqrt{\frac{[f^2]}{n}}. \quad (a)$$

Määrgime ühe nurga keskmise ruutvea m kaudu. Et aga f esineb kolme niisuguse nurga summa keskmise ruutveana, siis:

$$f = \pm m \sqrt{3},$$

kust

$$m = \pm \frac{f}{\sqrt{3}}.$$

Asendanud sellesse võrdsusse f väärtuse võrdsusest (a), saame:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[f^2]}{3n}}. \quad (56)$$

Valem (56) annab võimaluse triangulatsioonis mõõdetud ühe nurga keskmise ruutvea arvutamiseks kolmnurkade sulgemisvigade järgi. Seda nimetatakse Ferrero valemiks.

§ 44. Viga arvutatud külje logaritmis.

Valemi (55) järgi arvutatud sidekülje logaritmi vea uurimine annab vigade teooria reeglite kohaselt selle logaritmi vea jaoks järgmise avaldise:

$$m_{\log} = m \sqrt{\frac{2}{3} \sum_1^n (\Delta_1^2 + \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2^2)} = m \sqrt{\frac{2}{3} \sum_1^n Q}. \quad (57)$$

Siin on m — nurga mõõtmise keskmine ruutviga, mida saab arvutada valemi (56) järgi; Δ_1 ja Δ_2 on sidenurkade siinuste logaritmid vahed; n — kolmnurga number, mille jaoks arvutatakse sidekülg.

Selles valemis suurused $Q = \Delta_1^2 + \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2^2$ sõltuvad kolmnurkade sidenurkadest, s. t. iseloomustavad kolmnurkade kuju. Nende summa suuruse järgi saab otsustada projektitud võrgu väärtuslikkuse üle. V klassi triangulatsiooni-instruktsioonis („Geodeetilise põhitamise ja mõõtkavas 1 : 10 000 topograafilise mõõdistamise instruktsioon“ 1936. a. väljaanne) on kehtestatud, et kahe baasi vahel (või kõrgema klassi kahe külje vahel) olevas reas summa $\sum Q$ ei või ületada logaritmi 6-nda märgi 100 ühikut. See summa arvutatakse pärast rekognostseerimist võimalikult suuremõõtkavalisele kaardile kantud võrgu projekti järgi, kusjuures sidenurgad mõõdetakse malliga. Uksikuis kolmnurkades Q suuruste määramiseks on olemas eritabelid (vt. tabel 3, lisa 1). Kui projektitud võrk ei rahulda mainitud tingimusi, siis on projekt vaja muuta, vähendades kolmnurkade arvu või muutes nende kuju sidenurkade suurendamise suunas.

Et mitte võimaldada arvutatavate külgede suuri vigu, on V klassi võrkude jaoks kehtestatud nõue mõõta baasid vähemalt iga 15 kolmnurga tagant.

V peatükk.

VÕRGU REKOGNOSTSEERIMINE JA KINDLUSTAMINE.

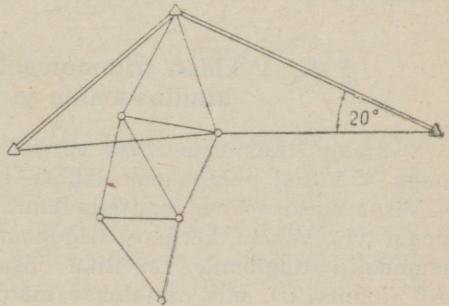
§ 45. Rekognostseerimine.

Et aegsasti kujutella tulevase võrgu iseloomu, koostatakse algses kaardil võrgu projekt, s. t. kavastatakse punktide võimalikud asukohad ja määratakse kindlaks nende ülevaatuse järgsus. Projekt koostatakse nii, et aegsasti oleks teada, kuidas seotakse võrgu kolmnurgad, missugused nurgad esinevad siin sidenurkadena, missugused vahenurkadena jne.

Rekognostseerimine (maastiku ülevaatus) evib kahesugust eesmärki: 1) baasi jaoks koha valimine, kui võrk on iseseisev; 2) punktide jaoks kohtade valimine.

Baasi jaoks on vaja valida tasane koht (üksikute lindihaarete kaldnurk ei tohi ületada 3°) kõva põhjaga. Baasi on sobiv asetada raudtee muldkehale, tavalisele maanteele, suurele rullitud teele jms. Baasi pikkus olgu 1 kuni 3 km piires.

Kui võrk arendatakse kõrgema klassi triangulatsiooni külgedest, siis tuleb rekognostseerimist alustada nendest. Kõrgema klassi külgedest üleminek tuleb teostada geodeetiliste nelinurkade või tsentraalsüsteemide rajamise teel. Seondada võib ka kahe



Joonis 20.

naaberkolmnurga külgnemise teel kõrgema klassi võrgu kahe küljega (joonis 20). Sel juhtumil lähtekülgedega külgnevate kolmnurkade nurki võib lubada kuni 20° .

Punktide jaoks kohtade valikul on vaja eelkõige juhendada kolmnurkade soodsaimast kujust (vt. ülalpool).

Muidugi on vaja võtta arvesse ka kolmnurkade külgede pikkust, mis oleneb võrgu klassist.

Kohad punktide jaoks on vaja valida kõige kõrgemad ja lahtised, et evida võimalust teiste punktide vaatlemiseks vahenditult maapinnalt või äärmisel juhtumil väikese kõrgusega vaatluspõrandalt. Peale selle tuleb hoiduda koha valikust põllule. Tuleb taotella, et punktid asetseksid piiripeenrail, teede juures, kõlbmata maadel, karjamaadel jms.

Uheaegselt rekognostseerimisega kavastatakse maastikul täiendavaid punkte (otselõigete jaoks).

Rekognostseerimisel peetakse väliraamatut, kuhu kirjutatakse põhjalikud teated iga valitud punkti kohta: nimetus, asetuse kirjeldus, kas on tarvis ehitustöid jms. Igas punktis joonestatakse ümbritsev situatsioon, märgitakse ära instrumendi kavatsetav ülesseadmise koht ja koostatakse teistele nähtavaile punktidele võimalike suundade tabel, kusjuures bussooli järgi määratakse jämedalt nende suundade asimuudid.

Pärast rekognostseerimist koostatakse võrgu lõplik projekt, kuhu sisse võetakse kõik punktid, milledest võib moodustada soodsaima kujuga võrgu.

§ 46. V klassi trigonomeetrilise võrgu punktide kindlustamine ja tähistamine.

V klassi trigonomeetrilise võrgu punktid kindlustatakse samuti nagu V klassi polügonomeetriliste käikude punktidki (vt. § 27).

Viseerimise võimaldamiseks punktilt punktile tähistatakse nad enam või vähem kõrgete trigonomeetriliste signaalidega. Märgi (signaali) tingimata tarviliku osana esineb viseerimissilinder AB (joonis 21), mis asetatakse märgi ülemisse tippu. Viseerimissilindri telg peab paigutatama ühele vertikaaljoonele tsentriga. See pärast püstitatakse signaalid tavaliselt enne tsentrite asetamist; tsentrid asetatakse siis viseerimissilindri telgede projektsioone kujutavasse punktidesse. Projektimist teostatakse seejuures hästi justeeritud teodoliidiga, mis asetatakse 20—30 m kaugusele, vähemalt kolmest

seisupunktist, nii et tsepter saadakse kolme sirge lõikumise tulemusena.

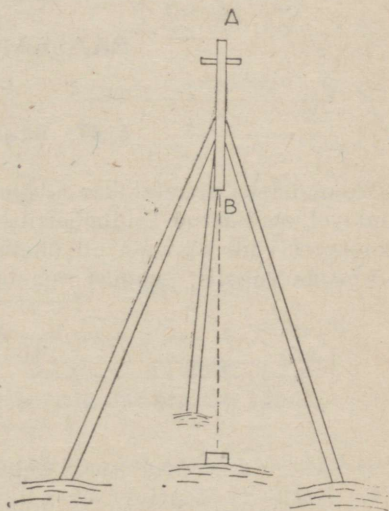
Kõige lihtsam märk on lihtne ehk ordinaarne püramiid; sellele järgneb kahekordne püramiid. Viimane ehitatakse sel juhtumil, kui antud punktist ei ole näha teistes ümbritsevais punktides püstitatud signaale. Sel juhtumil ehitatakse põhipüramiidi sisse teine püramiid instrumendi ülesseadmiseks.

Ordinaarne püramiid V klassi võrkude jaoks ehitatakse palkidest 10—15 cm-lise lõikediametriga ja 6—8 m pikkusega. Viseerimis-silinder tehakse palgi lõigust pikkusega 3,5 m ümber, kusjuures püramiidi jalgadest ülespoole ulatuv osa, kuni 1 m, peab evima õiget silindrilist kuju.

Stepimaastikus võib V klassi punkte tähistada 6—8 m kõrguste tähistega. Tähise otsa, ligikaudu 0,3 m kaugusele tipust, kinnitatakse 0,25—0,40 m pikkune põikpuu ja seotakse nõõriga õletuust. Tähis kaevatakse maasse posti kõrvale 0,7 m sügavuselt. Alla, maapinnaga tasa, lüüakse tähise külge teine põikpuu, pikkusega 30—40 cm.

Vaatluste tulemusena arvutatakse tähiste koordinaadid. Et neilt lihtsam oleks siirduda punkti koordinaatidele, tuleb tähised asetada tulba põhjapoolsele küljele ning mõõta kaugus tähise keskelt kuni tulba tseptrini. Sel juhtumil kuuluvad parandamisele ainuüksi abstsissid ja parandamine ise seisneb mainitud kauguste liitmisel abstsissidega.

Kõrgusvahede arvutamise võimaldamiseks on vaja mõõta ka tähiste pikkused alumisest põikpuust ülemiseni.



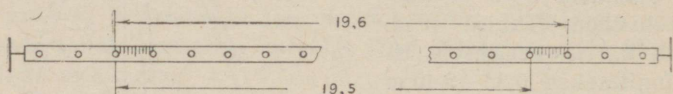
Joonis 21.

VI peatükk.

BAASI MÕÕTMINE.

§ 47. Skaalaline lint.

Skaalaliseks nimetatakse niisugust linti, mille otsadele 1 või 2 dm ulatusel on kantud millimeetrilised skaalad. Jaotuste numeratsioon skaaladel võib kasvada nii ühele poole kui ka erisuunaliselt. Nullkriipsude vahelist kaugust nimetatakse skaalalise lindi pikkuseks.



Joonis 22.

Skaalad võib söövitada tavalisele teraslindile. Selleks on ilmselt vaja kinnitamiseks kasutatud lindiotsadest nähtuke taanduda ja skaalad kanda näiteks otsadest kolmandate detsimeetrite ulatuses (joonis 22). Kui siinjuures jaotuste numeratsioon suunata ühele poole, siis lindi pikkus jääb ümmarguselt 19,5 m; kui aga skaala jaotuste numeratsioon kasvab üksteise vastu, siis on lindi pikkus ligikaudu 19,6 m.

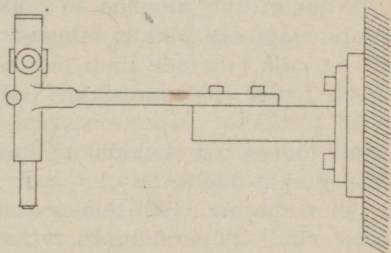
Enne tööd tuleb lint kompareerida. Linti võib kompareerida baasi järgi, nagu see on esitatud § 28, või aga erilisel komparaatoril.

§ 48. Komparaator.

Riistu täpseks pikkuse määramiseks nimetatakse komparaatoreiks. Täpne komparaator koosneb mitmest mikroskoobist, mis kinnita-

takse liikumatult vertikaalsesse asendisse erilistele kivi- või betoonpostidesse pandud kroonsteinidele (tugedele), normaalmõõdu pikkuse kaugusega üksteisest (joonis 23). Kroonsteinide all samuti betoneeritud alusel liigub rööpmeid mööda vanker normaalmõõduga, mille abil määratakse mikroskoopide nullpunktide vaheline kaugus.

Äärmiste mikroskoopide nullpunktide vaheline kaugus võrdub ilmselt naabermikroskoopide vaheliste kauguste summaga. Võrreldav lint seatakse sama skaaladega äärmiste mikroskoopide alla, pingutatakse nõutava pingega ja teostatakse tema pikkuse määramine. On ilmne, et äärmiste mikroskoopide vaheline kaugus seejuures peab ligikaudu võrduma lindi pikkusega.



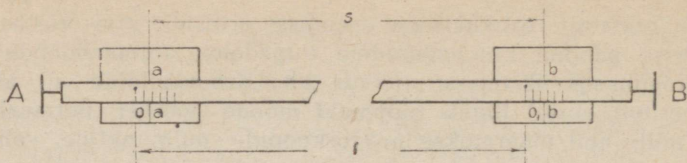
Joonis 23.

§ 49. Skaalalise lindiga joonte mõõtmise idee.

Joone mõõtmiseks skaalalise lindiga joont mööda, lindi skaalade keskkochtade vahelise kaugusega ligikaudu võrdseile (1—2 cm pike- maile) kaugusile, kas taotakse sihitasapinda hoolikalt saetud peadega vaiad, mis ulatuvad üle maapinna 2—3 cm võrra, või asetatakse erilised alused (kingad) sihikutega, milledesse on lõigatud ristikujulised kriipsud. Vaiade peadesse lüüakse rauast ribad või sepanaelad nendele lõigatud ristidega. Äärmisel juhtumil võib selle asemel pliiatsiga tõmmata peenikesed jooned otseselt vaiade peadele.

Skaalalise lindi abil mõõdetakse kaugused aluste kriipsude või ristjoonte lõikepunktide vahel.

Olgu lint võtnud vaiadel asendi AB (joonis 24). Kui lindi tagumine nullkriips olnuks ühtinud tagumisele vaiale tõmmatud kriipsuga aa, siis määratav kaugus $ab = s$ olnuks võrdne $l + E$, kus l on lindi pikkus tema nullpunktide o ja o_1 vahel ning E on pikkusega $o_1 b$ võrdne lugem eesmiselt otsalt. Et aga tegelikult lindi tagumine



Joonis 24.

nullkriips ei ühti joonega aa pikkuse oa võrra, siis mainitud suurusel on vaja see pikkus lahutada, teiste sõnadega, mainitud suurusel on vaja lahutada lindi tagumise otsa lugem, mida me nimetame tähega T. Sel viisil on pikkus vaiadele tõmmatud kriipsude vahel:

$$s = l + (E - T). \quad (58)$$

Kui joones on kokku n lindihaaret (linti), siis on ilmne, et joone pikkus saadakse $nl + \Sigma (E - T)$ pluss lõppjäak, millesse terve lint ei mahtunud. Sellisele joone suurusele tuleb peale selle anda kõik tarvilikud parandused (vt. edasi).

Kui jaotuste numeratsioon skaaladel kasvab erisuunaliselt, siis valem (58) võtab ilmselt sellise kuju:

$$s = l - (E + T). \quad (58-a)$$

§ 50. Baasi mõõtmine.

Enne baasi mõõtmist on baas vaja puhastada põõsaist ja rohust ning tasandada kõik konarused. Kui baasimõõtmist ei ole võimalik lõpetada ühel päeval, siis jagatakse ta sektsioonideks arvestusega, et iga sektsiooni mõõtmine (edasi ja tagasi) on teostatav ühe päevaga. Sektsiooni otsad kindlustatakse 20—30 cm pikkuste vaiadega, mis taotakse 20—30 cm allapoole maapinda.

Pärast seda tähistatakse baas teodoliidiga, asetades iga 10 lindi tagant tähised pikkusega 3—4 m ja nende vahelisele sihile asetatakse ka teodoliidi järgi eelmises paragrahvis tähendatud vaiad (või alused).

Baasi mõõtmine algab baasi otsadesse paigutatud tsentrite maapinnale väljakandmisega. Tsentri võib kanda lauale, mis on tsentri kohale kinnitatud kahe maaga tasa taotud vaia küljes. Selleks asutakse hästi justeeritud teodoliidiga üsna lähedale ja juhitakse niitide lõikepunkt tsentriks, milleks sellele asetatakse varras või pliats, siis aga tõstetakse pikksilma ja vaatleja näitamise järgi tõmmatakse joon. Niiviisi tsenter projekteeritakse lauale teodoliidi kol-

mest seisupunktist, kusjuures igakord teostatakse projektimist Rp ja Rv juures. Projektivad tasapinnad peavad lõikuma ligikaudu 120°-lise nurga all. Tsentri projektsioon saadakse kolme joone lõikepunktina. Edasine tööde kord on järgmine:

1. Töölised asetavad lindi kriipsudega baasi tsentrile ja esimesele puust vaiale (alusele) nii, et kriipsude numeratsioonid kasvaksid eesmise otsa suunas. Üks vaatileja asub ette, teine taha.

2. Eesmine vaatileja tõmbab pliatsiga vaia peale 2 joont — ühe lindi äärt mööda, teise sellega risti.

Aluste või sepanaelte juures pole muidugi tarvis mingeid joone-tõmbamisi (on valmis sihikud).

3. Eesmine tööline pingutab lindi dünamomeetri järgi nõutava pingega (pingega, mida tarvitati kompareerimisel, tavaliselt 15 kg) ja mõlemad vaatilejad teevad kiiresti ja üheaegselt lugemid skaaladelt täpsusega kuni 0,1 mm, tagumine — punkti tsentri ja eesmine — vaia tsentri (või sihiku) järgi. Lugemid tehakse valju häälega.

4. Pärast seda töölised nihutavad lindi veidi edasi (või tagasi), pingutavad uuesti ja vaatilejad dikteerivad uued lugemid. Niisugust nihutamist tehakse 2—3 korda.

5. Protokollija arvutab vahed (eesmine miinus tagumine), ja veendunud, et need ei erine üle 1 mm, käskleb edasi. Töölised kannavad lindi järgmisele haardele, eesmine vaatileja jääb kohale, tagumine aga siirdub järgmisele vaiale (uuele sihikule) ja mõõtmist tehakse endises korras.

Baasi mõõtmist igas sektsioonis teostatakse edasi- ja tagasisuunas. Erinevust edasi ja tagasi mõõtmistes koos temperatuuri arvestamisega lubatakse mitte üle $\pm 1,2 \sqrt{n}$ mm (n on lintide arv).

Temperatuur mõõdetakse igas lindihaardes. Selleks kinnitatakse lindile selle otsadest 1 m kaugusel isoleeriva paelaga 2 termomeetrit.

Baasi jääk, millesse terve lint ei mahu, mõõdetakse kompareeritud terasruletiga. Seda mõõtmist korratakse 2—3 korda.

Terasrulett kompareeritakse Genfi joonlaua järgi. Selleks liigutatakse joonlauda piki 10 kg-ga pingutatud ruletti, algusest lõpuni ja tagasi, määrates ruleti iga meetrilise intervalli joonlaua otsade järgi üheaegselt tehtud kolme paari lugemitega. Lugemite iga paari vahel nihutatakse veidi joonlauda. Tagasiliikumise eel vahetuvad vaatilejad (neid peab ilmselt olema kaks) kohtadel. Selline edasi ja tagasi liikumine moodustab ühe täisvõtte. Kompareerimise alguses, keskel ja lõpus loetakse temperatuur.

Pärast ruleti kogupikkuse määramist sama joonlauaga kontrollitakse sentimeetri kriipsud iga meetri ulatuses.

V klassi võrkudes võib baasi mõõta ka kriipsulise lindiga. Kahe või kolme lugemi meetodi säilitamiseks võib kasutada puust, lamendatud äärtega millimeeter-joonlauda. Need joonlauad asetatakse vaiadele piki lindi äärt, ühtistades joonlaua nullid vaiade kriipsudega. Lugemid tehakse lindi indeksite järgi.

Võib ka vastupidi — joonlaua nullid ühtistada lindi indeksitega, lugemid aga teha vaiadel olevate kriipsude järgi.

§ 51. Baasi mõõtmise väliraamat.

Baasi mõõtmisel peetakse väliraamatut järgmise vormi kohaselt:

Baasi mõõtmise väliraamatu vorm.

Kuu ja päev: 17. mail.

Ilmastiku olukord: pilves

Vaatlejad

Mõõtmiste algus:

Mõõtmiste lõpp:

Protokollija

Lindiharete nr.	Edasi				Tagasi			
	E	T	$E \pm T$	t°	E	T	$E \pm T$	t°
23	80,0	17,0	97,0	14°5	69,0	28,0	97,0	13°5
	57,5	39,5	97,0		45,0	52,0	97,0	
	33,5	63,0	96,5		51,5	46,0	97,5	
			96,8				97,2	
24	43,0	50,0	93,0	14°0	31,0	62,0	93,0	13°0
	55,5	37,5	93,0		46,0	46,0	92,0	
	62,0	31,5	93,5		57,0	35,5	92,5	
			93,2				92,5	
25	37,5	47,0	84,5	13°3	20,5	64,0	84,5	12°0
	52,0	32,5	84,5		57,0	27,0	84,0	
	64,0	19,5	83,5		42,0	41,5	83,5	
			84,2				84,0	
26	5,5	77,5	83,0	12°0	33,0	50,0	83,0	12°0
	17,5	65,5	83,0		44,0	39,5	83,5	
	33,0	50,5	83,5		6,5	76,0	82,5	
			83,2				83,0	

§ 52. Baasi pikkuse arvutamine.

Valemist (58) me saame ühe lindihaarde pikkuse $l + (E - T)$. Kui niisuguseid haardeid oli kokku n , siis pikkus avaldub $nl + \Sigma (E - T)$. Liitnud siia veel jäägi r , saame baasi esialgse pikkuse s_1 sellisel kujul:

$$s_1 = nl + \Sigma (E - T) + r. \quad (59)$$

Sellisel määratud pikkusele on vaja anda rida parandusi.

Esimene, *temperatuurist tingitud parandus* väljendub kujul:

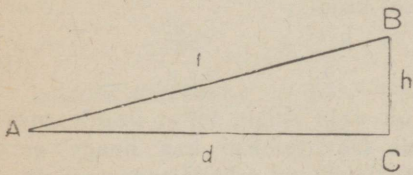
$$s_1 \cdot k (t - t_0), \quad (1)$$

kus k on terase joonelise paisumise koeffitsient, võrdne 0,000 012. Tähega t märgitakse baasimõõtmise aegne lindi temperatuur, t_0 — lindi kompareerimise aegne temperatuur. Kui t_0 on suurem t -st, siis vahe $t - t_0$ saadakse negatiivne, seepärast tuleb parandus s_1 -st aritmeetiliselt lahutada.

Temperatuurist tingitud paranduse saamiseks piisab võtta s_1 ümar-
datult kuni tervete meetriteni.

Teine, *lindi kallakusest tingitud parandus* saadakse järgmisel viisil.

Olgu kõrgusvahe lindi otsade A ja B vahel h (joonis 25). Märgime antud lindihaarde horisontaalprojektiooni d kaudu ($AC = d$). Täisnurksest kolmnurgast ACB saame:



Joonis 25.

$$d = \sqrt{l^2 - h^2} = l \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} = l \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{1/2} \quad (a)$$

Klambreis oleva avaldise arendame Newtoni binoomi järgi reaks:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot 1^3 \cdot \left(\frac{h^2}{l^2}\right)^2 \dots = \\ &= 1 - \frac{h^2}{2l^2} - \frac{h^4}{8l^4} - \dots \end{aligned}$$

Selles avaldises viimane kirjutatud liige on väga väike, sest baasides on kallakused väga väikesed, ja järelikult kõrgusvahe h võr-

reldes lindi pikkusega l on tühine, mille tõttu murd $\frac{h}{1}$ iseendast

on väike, tema 4. aste aga, ja veel jagatud 8-ga, on ammuigi väike. Järgnevad liikmed on veel väiksemad, sest et nendesse kuulub sama murd kõrgemais astmeis. Niisiis kõik need liikmed võib jätta arvestamata ja me saame:

$$\left(1 - \frac{h^2}{1^2}\right) \frac{1}{2} = 1 - \frac{h^2}{2 \cdot 1^2}$$

Asetanud kaksliikme selle väärtuse avaldusse (a) saame:

$$d = 1 \left(1 - \frac{h^2}{2 \cdot 1^2}\right) = 1 - \frac{h^2}{2 \cdot 1}$$

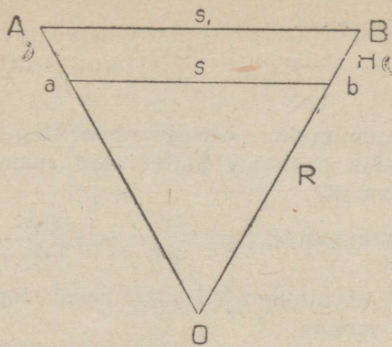
Niisiis lindihaarde horisontaalprojektsiooni saamiseks on vaja lindi pikkusest lahutada murd $\frac{h^2}{2 \cdot 1}$, teiste sõnadega — on vaja igale haardele anda parandus $-\frac{h^2}{2 \cdot 1}$. Kui lindihaardeid oli n , siis summaarne parandus avaldub niisugusel kujul:

$$-\left(\frac{h_1^2}{2 \cdot 1} + \frac{h_2^2}{2 \cdot 1} + \dots + \frac{h_n^2}{2 \cdot 1}\right) = -\frac{\sum h^2}{2 \cdot 1}. \quad (II)$$

Selle paranduse arvutamiseks on vaja saada kõigi lihtsade otsade omavahelised kõrgusvahed, mis saavutatakse kas nende geomeetrilise nivellimisega või vertikaalnurkade mõõtmisega teodoliidi abil, kusjuures ei ole vajadust teodoliidiga igale vaiale (alusele) asumiseks, vaid seistakse ainult ühel vaial sektsiooni keskel. Määratud sellelt vaialt kõrgusvahed kõigile teistele vaiadele, saadakse vaiade omavahelised kõrgusvahed kui jaamast võetud kõrgusvahede vahed.

Mitmete triangulatsioonide taandamiseks omavahelisse seosesse on vaja nad redutseerida mingile ühele pinnale, sest et erinevail pindadel on kahe vertikaaljoone vaheline kaugus erinev. Loomulikem on kõik jooned projektida keskmisele merepinnale ehk nullnivoole, kust järgneb vajadus anda baasile *merepinnale redutseerimisest tingitud parandus*.

Kui baasi keskmine kõrgus üle keskmise merepinna on H , baasi mõõdetud pikkus s_1 ja selle projektsiooni pikkus merepinnal s (joonis 26), siis kolmnurkade ABO ja abO sarnasusest saame (Maa-
kera raadiuse märgime R)



Joonis 26.

$$\frac{s_1}{s} = \frac{R + H}{R},$$

kust

$$s = \frac{s_1 R}{R + H} = s_1 \cdot \frac{R}{R + H}.$$

Jagades paremas osas oleva murru lugeja ja jagaja R-ga saame

$$s = s_1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{H}{R}} = s_1 \cdot \left(1 + \frac{R}{H} \right)^{-1}. \quad (a)$$

Arendame klambreis oleva avalduse Newtoni binoomi järgi, kusjuures piirdume ainult liikme $\frac{H}{R}$ esimeste astmetega, sest et see kujutab enesest väga väikest murdu:

$$\left(1 + \frac{H}{R} \right)^{-1} = 1 - \frac{H}{R}.$$

Asendades selle väärtuse avaldises (a) saame:

$$s = s_1 \left(1 - \frac{H}{R} \right) = s_1 - \frac{s_1 H}{R}.$$

On silmanähtav, et murd

$$- \frac{s_1 H}{R} \quad (III)$$

väljendab baasi merepinnale redutseerimisest tingitud parandust.

Võttes arvesse kõik eriteldud parandused saame baasi lõpliku pikkuse s järgmisel kujul:

$$s = s_1 + s_1 k (t - t_0) - \frac{\Sigma h^2}{2l} - \frac{s_1 H}{R} \quad (60)$$

Kõik parandused arvutatagu 0,1 mm, baasi lõplik pikkus aga ümardatagu kuni 1 mm-ni.

§ 53. Baasi mõõtmise resultaate hindamine.

Kahekordse mõõtmise juures võrduvad tõenäolisimad vead oma absoluutselt suuruselt resultaate poole vahega (järelikult on nad võrdsed ka omavahel). Tõepoolest, märkides mõõtmiste resultaadid

a_1 ja a_2 kaudu saame nendest tõenäolisima väärtuse $a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)$

kujul, ja tõenäolisimad vead saadakse:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - a_1 = - \frac{1}{2} (a_1 - a_2),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - a_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2).$$

Tõenäolisimate vigade märgid, nagu näeme, on vastupidised.

Tõenäolisimate vigade absoluutsete suuruste võrdsuse tõttu võib neid mõlemaid märkida ühe ja sama tähega, näiteks δ ja $-\delta$. Ühe vaatluse keskmise ruutvea leiame nende järgi nii:

$$m = \pm \sqrt{\frac{2\delta^2}{2-1}} = \pm \delta \sqrt{2}$$

tõenäolisima väärtuse keskmise ruutvea jaoks aga saame:

$$M = \pm \frac{\delta \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm \delta.$$

Niisiis kahest mõõtmisest tõenäolisima suuruse keskmine ruutviga võrdub nende resultaate poole vahega.

Selle põhjal arvutatakse edasi ja tagasi mõõtmisest saadud baasi tõenäolisima väärtuse keskmine ruutviga nii:

$$\Delta s = \pm \frac{1}{2} (s_{ed} - s_{tag}).$$

Baasi mõõtmise relatiivne viga on:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{s_{ed} - s_{tag}}{2s}.$$

See viga ei tohi V klassi võrkudes ületada suurust

$$\frac{1}{18\,000 \sqrt{n}},$$

kus n on baasi lindiharete arv.

VII peatükk.

NURKADE MÕÕTMINE.

§. 54. Horisontaalnurkade mõõtmise instrumendid ja meetodid.

V klassi võrkudes mõõdetakse horisontaalnurgad pooleminutilise või üheminutilise teodoliidiga, eranditult kordusmeetodil. Pooleminutilise teodoliidiga tehakse kolm kordust ühe täisvõtte juures, üheminutilise teodoliidiga 4 kordust kahe täisvõtte juures. Suunad täiendavaile punktidele mõõdetakse ringvõtete meetodil kahe täisvõttega.

Horisontaalnurki on kõige parem vaadelda hommikul kuni kella 9—10-ni või õhtul kella 15-st alates, millal ei ole tähiste kujutiste võnkumisi pikksilmas. Aega päeva keskel kasutatakse vertikaalnurkade vaatlemiseks.

Instrumendi ülesseadmisel tsentri kohale on vaja ettevaatlikult eemaldada tähis ja selle asemele auku asetada vai, diameetrilt võrdne tähisega. Instrument tsentreeritakse selle vaia tsentri kohale.

Viseerida tuleb tähiste aluseile.

Üheaegselt tähiste vaatlemisega vaadeldagu ka kõiki maastiku esemeid, millede jaoks hiljem on kavatsus arvutada koordinaadid otselõike meetodi kohaselt. Niisuguseid punkte on vaja lõigata vähemalt kolmest punktist.

Kui oleuvad võrgu omade punktide hulka võetud alatised esemed, siis üheaegselt nendel nurkade vaatlemisega on vaja teostada ka koordinaatide allakandmine maapinnale, kusjuures allakantud koordinaadid maapinnal kindlustatakse V klassi punktidenä.

Igas jaamas peab mõõdetama niihästi nurk ise kui ka tema täiendus kuni 360° -ni.

Erinevused nurkade väärtuste vahel üksikuis poolvõtteis ei tohi ületada 15" pooleminutilise teodoliidiga mõõtmisel ja 20" üheminutilise teodoliidiga mõõtmisel.

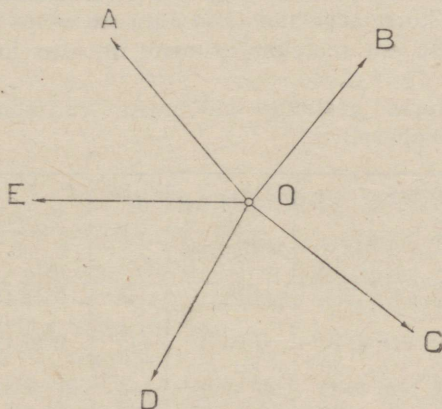
Horisondi sulgemisviga ei või ületada $15'' \sqrt{n}$, kus n on mõõdetud nurkade arv.

Ringvõtete viisiga mõõtmisel ei või üksikuist võtteist tuletatud suundade erinevused ületada instrumendi täpsust.

Sulgemisviga kolmnurga nurkade summas ei või ületada $\pm 0,5$. Ferrero valemi järgi arvatatud ühe nurga mõõtmise keskmine ruutviga, kolmnurkade arvu juures mitte alla 12, ei tohi ületada $\pm 12''$.

§ 55. Ringvõtete viis.

Olgu tipu O juures vaja mõõta punktidele A , B , C , D ja E (joonis 27) kulgevate suundade vahelised nurgad. Alguseks seame esi-



Joonis 27.

mese nooniusse nullile lähedasele lugemile (parem — veidi üle nulli), kinnitame alidaadi limbi külge ja limbi pööramisega viseerime punktile A . Kinnitanud selles asendis limbi, võtame lugemid mõlema nooniusse järgi ja siis alidaadi pööramisega *kellaosuti käigu suunas* juhime pikksilma järjestikku punktidele B , C , D , E ja lõppeks uuesti punktile A , kusjuures igale punktile viseerimise juures teeme lugemid mõlemate nooniusse järgi. Teine viseerimine algpunktile A on vajalik limbi liikumatuse kontrolliks. Seega lõpeb *esimene poolvõte* (R_p juures).

Pärast seda pöörame pikksilma üle seniidi, ja limbi liigutamata, alidaadi pööramisega *kellaosuti käigu vastu*, juhime pikksilma jär-

jestikku kõigile punktidele, alustades ja lõpetades punktiga A. Iga pealejuhtimise juures tehakse lugemid mõlema nooniuse järgi, kusjuures kraadid võetakse esimese nooniuse järgi (nad erinevad esimese poolvõtte vastavaist lugemeist 180° võrra). See on *teine poolvõtte* (Rv).

Enne *teise võtte* algust on esimene noonius vaja sättida lugemile b, mis arvutatakse valemist:

$$b = \frac{180^\circ}{m} \quad (61)$$

kus m on kõigi võtete arv. Seda tehakse selleks, et lugemid kõigis võtteis toimuksid ühtlaselt üle kogu limbi. Pärast seda juhitakse pikksilm uuesti limbi pööramisega esimesele punktile, limb kinnitatakse jne., — korratakse täielikult esimese võtte toimingud.

Kolmanda võtte eel seatakse esimene noonius lugemile 2 b, siis 3 b jne.

Mõõtmiste juures peetakse mõõtmiste väliraamatut näitlikult järgmise vormi kohaselt:

Esemete nimetus	Lugemid		Keskmine Rp RV ± 180	2 c	$\frac{Rp + Rv}{2}$	Taandatud suunad
	Rp	Rv				
A	0°03'10" 10"	180°03'10" 20"	0°03'10" 15"	—5"	0°03'11",2	0°00'00"
B	90°46'30" 40"	270°46'40" 40"	90°46'35" 40"	—5"	90°46'37",5	90°43'26",3
C	134°54'00" 53'50"	314°54'10" 20"	134°53'55" 54'15"	—20"	134°54'05",0	134°50'53",8
A	0°03'00" 10"	180°03'20" 10"	0°03'05" 15"	—10"	0°03'10",0	—

Et algesele tehakse 2 vaatlust (alguses ja lõpus), siis lõplikuks võetakse keskmine neist; esitatud väliraamatus see saadi 0°03'11",2.

Lahutades selle arvu kõigist suundadest saadakse *nullile taandatud suunad*, mis kirjutataksegi väliraamatu viimasesse lahtrisse.

Pärast kõigi võtete lõpetamist arvutatakse taandatud suundade keskmised väärtused ja nende järgi tehakse hinnang vigade teooria kohaselt.

Keskmete väärtuste arvutamiseks grupeeritakse kõik võtted näiteks sellisesse tabelisse:

Võtted	A	B	δ	δ^2	C	δ	δ^2
I	0°00'00"	90°43'26",3	+4,5	20,25	134°50'53",8	-2,2	4,84
II		31",3	-0,5	0,25	59",0	-7,4	54,76
III		25",4	+5,4	29,16	45",7	+5,9	34,81
IV		40",0	-9,2	84,64	48",0	+3,6	12,96
	0	90°43'30",8	+0,2	134,30	134°50'51",6	-0,1	107,37

Suuna B keskmine ruutviga.

$$m = \pm \sqrt{\frac{134,30}{3}} = \pm 6",7.$$

Aritmeetilise keskmise keskmine ruutviga

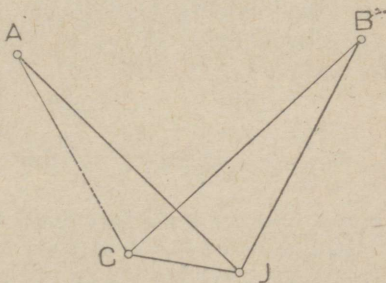
$$M = \pm \frac{6,7}{\sqrt{4}} = \pm 3",4.$$

§ 56. Vaatluste taandamine tsentrile.

Nurkade vaatlemisel ilmneb sageli, et instrumenti ei saa asetada tsentri kohale, olgu see kindla koha puudumise tõttu või sellepärast, et kõrvalised esemed katavad vaadeldavaid punkte jne. Selliseil juhtumel asetatakse instrument tsentrist C kõrvale mingisse punkti J, mis valitakse võimalikult tsentri lähedale. Sel puhul me saame suundade CA ja CB asemel suunad JA ja JB (joonis 28), mispärast järgnevalt on vaja vaadeldud suunad taandada tsentrist väljuvaks suundadeks.

Parandusi, mis antakse suundadele või nurkadele instrumendi asetsedes tsentrist väljaspool, nimetatakse tsentreerimisparandusteks.

Sageli tuleb teha vaatlusi ka signaalile, mille viseerimise silinder ei asetse ühel vertikaaljoonel tsentriga. Sel juhtumil tuleb suundadele anda eriliiki parandusi, mida nimetatakse redutseerimisparandusteks.

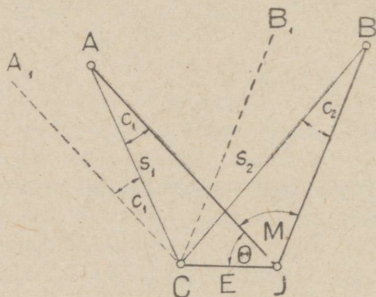


Joonis 28.

§ 57. Tsentreerimisparandused.

Tsentreerimisparanduste määramiseks on vaja looduses mõõta tsentreerimis-elementid, mis on:

1. kaugus instrumendi tsentrist kuni signaali tsentrini C , mida märgime tähega E (joonis 29);



Joonis 29.

2. horisontaalnurk (θ), mida loetakse kellaosuti käigu järgi tsentritele kulgevast suunast kuni ühele ümbritsevaist trigonomeetristest punktidest, näiteks punktile A , mineva suunani.

Kui suund JA nihutada iseendaga paralleelselt tsentrisse C , asendisse CA_1 , siis nurk $ACA_1 = c_1$ on punktile A kulgeva suuna veaks.

On silmanähtav, et nurk $ACA_1 =$ nurgaga CAJ . Kolmnurgast CAJ saame:

$$\frac{\sin c_1}{E} = \frac{\sin \theta}{s_1},$$

kus s_1 on külje AC pikkus.

$$\text{Siit} \quad \sin c_1 = \frac{E}{s_1} \sin \theta. \quad (a)$$

Märkides külje CB tähega s_2 , suuna JB vea c_2 kaudu ja mõõdetud nurga BJA tähega M saame vea c_2 jaoks analoogiliselt:

$$\sin c_2 = \frac{E}{s_2} \sin (M + \theta). \quad (b)$$

Avaldis (b) on üldvalem tsentreerimisparanduse arvutamiseks. Avaldise (a) saame temast pärast $M = 0^\circ$ asendamist.

Niisiis, märkides külgede pikkused tähega s ja tsentreerimisparandused tähega c , saame sellise üldvalemi:

$$\sin c = \frac{E}{s} \sin (M + \theta).$$

Et nurk c on väike, siis selle asemele võime kirjutada:

$$c' \sin l' = \frac{E}{s} \sin (M + \theta),$$

kust tsentreerimisparanduste jaoks saame lõplikult:

$$c' = \frac{E \sin (M + \theta)}{s \sin l'}. \quad (62)$$

Kui tsentreerimisparandus arvutatakse sekundeis, siis selle valemi parema poole nimetajas on vaja võtta $\sin l'$.

See tsentreerimisparandus antakse suunale.

Nurk M on siin nurk, mis tekib θ määramise juures võetud suuna ja tsentreerimisparandust vajava suuna vahel.

Kui nurgad mõõdeti ringvõtete viisiga, siis nurga θ määramise jaoks võetakse suund punktile, mille taandatud suund võetakse võrdseks nulliga. Sellisel juhtumil nurk M on suunaks vastavale punktile.

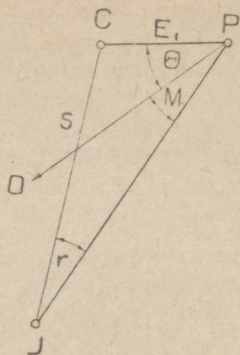
Et nurk saadakse alati kahe suuna vahena, ja nimelt parempoolne miinus vasakpoolne, siis nurga tsentreerimisparandus saadakse ka samade suundade tsentreerimisparanduste vahena;

$$c_{\text{nurga}}^1 = c_{\text{par}} - c_{\text{vas}}. \quad (63)$$

§ 58. Redutseerimisparandused.

Kui signaali viseerimise silinder projekteerub mitte tsentrile, vaid mingile punktile P , siis vaatlustel punktist J saadakse suunas viga nurga $CJP = r$ näol (joonis 30).

Seda viga või parandust nimetatakse, nagu juba öeldud, redutseerimisveaks või -paranduseks. Redutseerimisparanduse arvutamiseks on vaja looduses mõõta redutseerimiselementid, milledena esinevad kaugus E_1 märgi tsentrist kuni viseerimise silindri projektioonini ja nurk θ mingile punktile O kulgeva suuna ja tsentrile mineva suuna vahel.



Joonis 30.

Kolmnurgast CJP saame redutseerimisparanduse jaoks täiesti analoogiliselt tsentreerimisparandusega:

$$r'' = \frac{E_1 \sin(M + \theta)}{s \sin l''} \quad (64)$$

§ 59. Tsentreerimis- ja redutseerimiselementide (keskenduselementide) määramine.

Kui elemendid E ja E_1 ei ole suured, siis nende määramist on kõige lihtsam teha graafilise konstrueerimise abil. Selleks kleebitakse niinimetatud keskenduslauale paber ja laud asetatakse märgi tsentri kohale. Siis hoolikalt justeeritud ja tsentrist 20—30 m kaugusele ülesseatud teodoliidi abil projekteeritakse sellele lauale punktid J, C ja P. Projektimine sooritatakse teodoliidi kolmest seisupunktist, nii et igaüks punktide J, C ja P saadakse kolme sirgjoone lõikumise tulemusena. Teodoliit tuleb üles seada nii, et mainitud 3 joont lõikuksid võimalikult võrdsete nurkade all, s. t. 120° -liste nurkade all. Tavaliselt ei lõiku need jooned ühes punktis; kui vigadekolmnurk saadakse väike, siis lõplik punkt märgitakse kolmnurga keskele.

Saanud paberile punktid J, C ja P, määratakse elemendid E ja E_1 sirkliga, θ aga malli järgi.

Kui elemendid E või E_1 on suured, siis punktid projektitakse maapinnale ning kaugus E mõõdetakse pärast seda ruletiga, nurk θ aga teodoliidiga, kusjuures siis, kui kaugus E on niivõrd lühike, et ei ole võimalust pikksilma fokuseerimiseks, võib sihtimisel vaadata üle pikksilma.

Uurimised näitavad, et mida lühemad on kolmnurga küljed, seda täpsemini peab määrama E ja θ . Lühikeste külgede juures tuleb vähendada võimalust mööda E, sel puhul võib elemente määrata jämedamalt. Kui E on suur, siis niihästi E kui ka θ tuleb mõõta võrgu nurkade mõõtmise täpsusest mitte väiksema täpsusega. Sel juhtumil on vaja ka keskendusparanduste arvutamised teha täpsemalt.

§ 60. Tsentreerimis- ja redutseerimisparanduste (keskendusparanduste) arvutamine.

Tsentreerimis- ja redutseerimisparanduste arvutamist on hõlpus sooritada aritmomeetril. Selleks asendame valemisse (62) sin l' arvulise väärtuse, pärast mida saame:

$$c' = \frac{3438}{s} \cdot E \sin (M + \theta).$$

Arvutuse võime paigutada näiteks sellisesse skeemi:

$$E = 2,26 \text{ m}$$

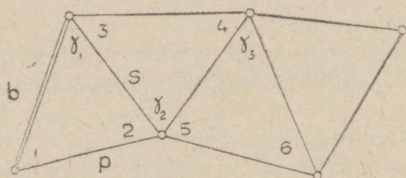
$$\theta = 198^\circ 16',1$$

Märgid	Tähis nr. 2 s = 1 453	Tähis nr. 3 s = 1 112
M	0°00',0	24°04',4
θ	198°16',1	198°16',1
M + θ	198°16',1	222°20',5
sin (M + θ)	—0,3134	—0,6736
E sin (M + θ)	—0,7083	—1,5223
$\frac{3438}{s}$	2,3664	3,0917
c'	—1',7	—4',7
c par — c vas		—3',0
M tsentreeritud	0°00'	24°01',4

§ 61. Kolmnurkade külgede eelarvutused.

Nagu eelnenust nähtub, on tsentreerimis- ja redutseerimisparanduste arvutamiseks vaja teada kolmnurga vastavate külgede pikusi. Kuna aga otsitakse väga väikesi parandusi, siis külgede pikused võib võtta jämedalt, täpsusega kuni 10 m. Niisuguse täpsusega võib küljed saada mõõdetud nurkade järgi vahenditult, ilma nurkade parandamiseta.

Võtame näiteks lihtsa ahela baasiga (joonis 31). Märkides sideküljed tähega s ja vah küljed tähega p saame esimesest kolmnurgast siinuslause järgi:



Joonis 31.

$$s = \frac{b}{\sin 2} \cdot \sin 1 \quad (65)$$

$$p = \frac{b}{\sin 2} \cdot \sin \gamma_1, \quad (66)$$

s. t. mõlemate külgede saamiseks korrutatakse üks ja sama suurus ($b : \sin 2$) vastasnurga siinusega.

Kui arvutamist teostatakse aritmomeetriga, siis alguses leitakse igas kolmnurgas see abisuurus ja siis korrutatakse ta vastava nurga siinusega.

Logaritmiliseks arvutamiseks saame vastavalt:

$$\left. \begin{aligned} \log s &= (\log b - \log \sin 2) + \log \sin 1 \\ \log p &= (\log b - \log \sin 2) + \log \sin \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Arvutusi aritmomeetriga võib korraldada sellises skeemis:

Nr.	Nurgad	Siinused	Küljed
			1 563,87
2	108°51'	0,94637	1 480,00
γ_1	27°18'	0,45865	717,27
1	43°51'	0,69277	1 083,40
			1 498,13
4	46°19'	0,72317	1 083,40
γ_2	63°15'	0,89298	1 337,80
3	70°25'	0,94216	1 411,48
			1 417,77
6	84°36'	0,99556	1 411,48
γ_3	60°24'	0,86949	1 232,74
5	34°59'	0,57334	812,86

Arvutused logaritmidel abil toimetatakse samasse skeemi nagu aritmomeetri juureski, ainult lahtrid „siinused“ ja „küljed“ asendatakse lahtritega „log sin“ ja „külje log“.

Külgede ligikaudseid pikkusi võib saada ka baasi ja mõõdetud nurkade järgi graafilisest võrgu konstruktsioonist. Selleks kantakse paberile mingis mõõtkavas baas ja selle otsade juurde konstrueeritakse vastavad nurgad, millede haarad, pikendatult kuni lõikumiseni, koos baasiga annavad I kolmnurga; siis konstrueeritakse selle juurde samuti II kolmnurk jne. Vajalikud küljed mõõdetakse pärast seda baasi mõõtkava järgi sirkliga.

§ 62. Vertikaalnurkade mõõtmine.

V klassi võrkude punktidevahelised kõrgusvahed määratakse kaldvaatekiirega nivellimise kaudu. Selleks mõõdetakse igast punktist igale punktile (otse ja vastu) vertikaalnurgad. Otse- ja vastukõrgusvahede omavaheline erinevus ei või ületada 0,25 m kauguse iga kilomeetri kohta.

Mõõtmist teostatakse sama instrumendiga, millega mõõdeti ka horisontaalnurgad, kui instrumendi vertikaalringi noonuse täpsus ei ole alla ühe minuti.

Pooleminutilise vertikaalringi puhul mõõdetakse vertikaalnurgad ühe täisvõttega ringi mõlemas asendis. Üheminutilise vertikaalringi juures tehakse iga nurga mõõtmist kolmekordselt, juhtides

vaadeldavale esemele järjestikku kõik kolm horisontaalniiti. Seejuures ei tohi unustada, et pärast pikksilma pööramist üle seniidi vahetuvad äärmised niidid kohtadel (olnud ülemine niit muutub alumiseks ja vastupidi). Sellise mõõtmise juures nulliasse (N) tuletakse iga niidi jaoks eraldi. Nulliaseme kõikumised iga niidi kohta ei või ületada 1',5. Nurga lõplik väärtus saadakse kui keskmine kolmest eriniitide järgi saadud väärtustest.

Parim aeg mõõtmisteks on kella 10-st kuni kella 15-ni.

Otselõike valemite järgi määrata kavatsetavaile punktidele saadakse kõrgusvahed ühekülgsel nivellimisega, kusjuures vaatlused tuleb neile toimetada vähemalt kolmest punktist.

Vertikaalnurkade mõõtmise juures peetakse väliraamatut, mille vorm on toodud § 32.

Kolmnurkade sulgemisvea äärmine väärtus saadakse valemist:

$$\Delta h = \pm 0,12 \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}, \quad (63)$$

kus d_1 , d_2 ja d_3 on kolmnurga külgede pikkused, väljendatud kilomeetris.

§ 63. Välismaterjali kontrollimine ja eelarvutused.

Pärast välistööde lõpetamist tuleb kõik väliraamatud hoolega kontrollida, kusjuures kõik mõõdetud suuruste parandused ja lõplikud väärtused kirjutatakse välja tindiga.

Kui mõningail punktidel on olemas horisondi või summade tingimused, siis vastavad sulgemisvead jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile nurkadele.

Siis arvutatakse baaside pikkused ja tsentreerimise ning redutseerimise parandused, milleks tehakse vajalikke kolmnurkade eelarvutusi. Ringvõtete viisiga nurgamõõtmisel koostatakse taandatud suundade tabelid.

Pärast nurkade lõplike väärtuste saamist arvutatakse kolmnurkade sulgemisvead ja määratakse ühe nurga mõõtmise keskmine ruutviga Ferrero valemi järgi.

Lõppeks koostatakse võrgu skeem. Sellele kantakse tippude nimetused ja numbrid, kolmnurkade nurgalised sulgemisvead, täienduspunktid ja suunad nende, külgnemis- ja lähteandmed, baaside pikkused, astronoomiliselt määratud asimuudid ja mõõdistustrapetsite raamid, samuti ka koordinaatide võrk külgedega 5 km.

Pärast neid eelarvutusi asutakse võrgu tasandamisele ja koordinaatide arvutamisele. Tasandamise lihtsaimad võtted tuuakse allpool.

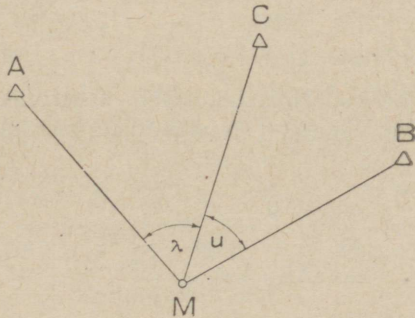
VIII peatükk.

ÜKSIKUTE PUNKTIDE MÄÄRAMINE.

§ 64. Pothénot' ülesanne.

Kõige lihtsamaks aluspunktide saamise viisiks vaatluste ja arvutuste koguse mõttes on maastikul juba olelevailt kõrgema klassi punktidelt koordinaatide siirmine üksikuile punktidele. Selliseks siirmiseks piisab ainult mõningate nurkade mõõtmisest. Seejuures eristatakse 2 viisi. Esimese viisi puhul mõõdetakse nurgad antud punktidel — see on, nagu me juba teame, otselõige. Määratava punkti koordinaadid arvutatakse sel juhtumil otselõike valemite järgi või Jungi valemite kohaselt.

Teise viisi juures toimub nurkade mõõtmine ainult määrataval punktil — see on tagasilõige. Kui seejuures vaadeldakse 3 aluspunkti, siis määratava punkti koordinaatide arvutamine nende punktide ja mõõdetud nurkade järgi kannab Pothénot' ülesande (analüütilise) nimetust.



Joonis 32.

Olgu maastikul aluspunktid A, B ja C (joonis 32) nende antud koordinaatidega

punkti A (vasakpoolne) jaoks x_1 ja y_1
 punkti B (parempoolne) „ x_2 ja y_2
 punkti C (keskmine) „ x_3 ja y_3 .

Punkti M koordinaatide x ja y määramiseks Pothénot' ülesande järgi piisab nurkade λ (vasakpoolne) ja u (parempoolne) mõõtmisest.

Pothénot' ülesande lahendamiseks on olemas palju erinevaid viise. Aritmomeetril arvutamiseks on üheks lihtsaimaist viisidest alljärgnev, mille juures arvutatakse koordinaatide juurdekasvud Δx ja Δy keskmiselt punktil C määratavale punktile (valemite mõninga teisendamise juures võib saada juurdekasvud ka vasakpoolsest või parempoolsest punktilt).

Antud koordinaatide ja mõõdetud nurkade järgi arvutatakse alguses järgmised neli suurust:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cot \lambda \\ k_2 &= (y_1 - y_2) - (x_1 - x_2) \cot \lambda \\ k_3 &= (x_3 - x_2) - (y_3 - y_2) \cot u \\ k_4 &= (y_3 - y_2) + (x_3 - x_2) \cot u \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Nende suuruste järgi arvutatakse — suund (CM), juurdekasvud ja koordinaadid järgmisist valemeist:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_4} = \tan(\text{CM}) \\ \Delta x &= \frac{k_1 + ck_2}{1 + c^2} = \frac{k_3 + ck_4}{1 + c^2} \\ \Delta y &= c\Delta x \\ x &= x_2 + \Delta x; \quad y = y_2 + \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Saanud punkti M koordinaadid, tuleb kontrolliks arvutada üks suundadest — (BM) või (AM) geodeetilise vastuülesande valemite järgi:

$$\begin{aligned} \tan(\text{BM}) &= \frac{y - y_3}{x - x_3} \\ \tan(\text{AM}) &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \end{aligned}$$

Ilmselt

$$(\text{BM}) - (\text{CM}) = u$$

või

$$(CM) - (AM) = \lambda.$$

Nende nurkade saamine ongi arvutuste kontrolliks.

Mis puutub suunda (CM), siis see on saadud varem Pothénot' ülesande lahendamise protsessis. Selle suuna veerandit on hõlpus kindlaks määrata arvutatud juurdekasvude Δx ja Δy järgi.

Pothénot ülesande lahendamiseks toodud valemid võib saada järgmisel viisil.

Kanname koordinaatide alguse üle keskmisse punkti C, jättes muutmata telgede suunad. Siis saadakse antud punktide koordinaadid:

$$A(x_1 - x_2; y_1 - y_2); B(x_3 - x_2; y_3 - y_2); C(0; 0).$$

Määratava punkti koordinaadid aga selle tingimuse juures on Δx ja Δy . Geodeetilise vastuülesande valemite järgi saame 3 järgmist võrdsust:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(CM),$$

$$\frac{\Delta y - (y_1 - y_2)}{\Delta x - (x_1 - x_2)} = \tan(AM) = \tan[(CM) - \lambda] = \frac{\tan(CM) - \tan \lambda}{1 + \tan(CM) \tan \lambda},$$

$$\frac{\Delta y - (y_3 - y_2)}{\Delta x - (x_3 - x_2)} = \tan(BM) = \tan[(CM) + u] = \frac{\tan(CM) + \tan u}{1 - \tan(CM) \tan u}$$

Asetanud kahte viimasesse võrdsusse $\tan(CM)$ väärtuse esimesest võrdsusest, saame pärast hõlpsaid ümberkujundusi:

$$\frac{\Delta y - (y_1 - y_2)}{\Delta x - (x_1 - x_2)} = \frac{\Delta y - \Delta x \tan \lambda}{\Delta x + \Delta y \tan \lambda}$$

$$\frac{\Delta y - (y_3 - y_2)}{\Delta x - (x_3 - x_2)} = \frac{\Delta y + \Delta x \tan u}{\Delta x - \Delta y \tan u}.$$

Pärast nimetajaist vabanemist ja sarnaste liikmete koondamist saame:

$$\begin{aligned} \Delta y^2 \tan \lambda - (y_1 - y_2) \Delta x - (y_1 - y_2) \Delta y \tan \lambda &= \\ = - (x_1 - x_2) \Delta y - \Delta x^2 \tan \lambda + (x_1 - x_2) \Delta x \tan \lambda; \\ - \Delta y^2 \tan u - (y_3 - y_2) \Delta x + (y_3 - y_2) \Delta y \tan u &= \\ = - (x_3 - x_2) \Delta y + \Delta x^2 \tan u - (x_3 - x_2) \Delta x \tan u. \end{aligned}$$

Viime juurdekasvude ruutudega liikmed paremale poole, ülejäänud aga vasakule poole; üheaegselt jagame esimese võrrandi —

-- tan λ -ga ja teise tan u -ga ($\frac{1}{\tan \lambda}$ ja $\frac{1}{\tan u}$ asendame vastavalt $\cot \lambda$ ja $\cot u$ -ga):

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) \Delta x + (y_1 - y_2) \cot \lambda \Delta x + (y_1 - y_2) \Delta y - (x_1 - x_2) \cot \lambda \Delta y &= \\ = \Delta x^2 + \Delta y^2 (x_3 - x_2) \Delta x - (y_3 - y_2) \cot u \Delta x + (y_3 - y_2) \Delta y + \\ + (x_3 - x_2) \cot u \Delta y &= \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned}$$

Võtame vasakuis pooltes Δx ja Δy klambrite ette:

$$\begin{aligned} [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cot \lambda] \Delta x + [(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2) \cot \lambda] \Delta y &= \\ = \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2) \cot u] \Delta x + [(y_3 - y_2) + (x_3 - x_2) \cot u] \Delta y &= \\ = \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{aligned}$$

Nurkklabreis olevad koefitsiendid märgime järjestikku k_1 , k_2 , k_3 ja k_4 , siis võime võrdsused ümber kirjutada nii:

$$k_1 \Delta x + k_2 \Delta y = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (a)$$

$$k_3 \Delta x + k_4 \Delta y = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (b)$$

Võrreldes võrdsusi (a) ja (b) saame:

$$k_1 \Delta x + k_2 \Delta y = k_3 \Delta x + k_4 \Delta y$$

ehk

$$(k_2 - k_4) \Delta y = (k_3 - k_1) \Delta x$$

ehk jagades võrdsuse mõlemad osad Δx -ga:

$$(k_2 - k_4) \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_3 - k_1. \quad (c)$$

Suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on tan (CM). Märgime ta c kaudu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan (\text{CM}) = c. \quad (d)$$

Asendanud selle võrdsusse (c), saame:

$$(k_2 - k_4) c = k_3 - k_1,$$

kust

$$c = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_4}. \quad (e)$$

Võrdsusest (d) saame:

$$\Delta y = c \Delta x. \quad (f)$$

Asendame selle Δy väärtuse võrdsustesse (a) ja (b):

$$k_1 \Delta x + ck_2 \Delta x = \Delta x^2 + c^2 \Delta x^2, \quad (a_1)$$

$$k_3 \Delta x + ck_4 \Delta x = \Delta x^2 + c^2 \Delta x^2. \quad (b_1)$$

Viimaseist võrdsustest, koondanud nad Δx -ga, leiame:

$$\Delta x = \frac{k_1 + ck_2}{1 + c^2} = \frac{k_3 + ck_4}{1 + c^2}$$

Siit järgneb, et

$$k_1 + ck_2 = k_3 + ck_4,$$

mida kasutatakse vahepealse kontrollina.

Pothénot' ülesande lahendamine aritmomeetri abil võib toimuda näiteks sellises skeemis:

Märgid	Resultaadid	Märgid	Resultaadid
Ohhotševka x_1	209 602,96	Ohhotševka y_1	46 546,16
Patepnik x_2	204 259,46	Patepnik y_2	50 650,29
Morozova x_3	196 908,27	Morozova y_3	66 919,84
λ	$75^\circ 30',9$	$\cot \lambda$	+0,25834
u	$46^\circ 35',2$	$\cot u$	+0,94609
$x_1 - x_2$	+5 343,50	$y_1 - y_2$	-4 104,13
+ $(y_1 - y_2) \cot \lambda$	-1 060,26	- $(x_1 - x_2) \cot \lambda$	+1 380,44
k_1	+4 283,24	k_2	-5 484,57
- $x_3 - x_2$	-7 351,19	+ $y_3 - y_2$	+16 269,55
- $(y_3 - y_2) \cot u$	+15 392,46	+ $(x_3 - x_2) \cot u$	-6 954,89
k_3	-22 743,55	k_4	+9 314,66
$k_3 - k_1$	-27 026,89	$k_2 - k_4$	-14 799,23
c	+1,82624	c^2	3,33514
ck_2	-10 016,12	ck_4	+17 010,77
$k_1 + ck_2$	-5 732,88	$k_3 - ck_1$	-5 732,88
Δx	-1 322,42	Δy	-2 415,05
x_2	204 259,46	y_2	50 650,29
x	202 937,04	y	48 235,24
Kontroll			
$x - x_3$	+6 028,77	$y - y_3$	-18 684,60
$\tan (BM)$	-3,09924	(BM)	$287^\circ 53',0$
$\tan (CM)$	+1,82624	(CM)	$241^\circ 17',8$
		u	$46^\circ 35',2$

§ 65. Määratava punkti soodsaim asend.

Mensulilise mõõdistamise käsitlemisel me arutasime läbi määratava punkti kuus asendit antud punktide suhtes. Järeldused, milleni me jõudsim, laienevad muidugi ka arutatud ülesande analüütilisele lahendusele. On vaja meeles pidada, et kõige paremaid resultate saadakse esimesel ja kuuendal juhtumil, s. t. siis, kui punkt asetseb kas antud punktidest moodustatud kolmnurga sees või väljaspool seda — nurga vastas.

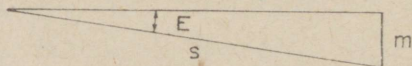
§ 66. Praktilisi märkmeid Pothénot' ülesande juurde.

Pothénot' ülesande nõrgimaks küljeks on see, et temas ei ole vaatluste kontrolli. See kohustab nurki mõõtma eriti hoolikalt.

Punktide tunduva kauguse juures esineb sageli juhtumeid, kus ei vaadelda mitte seda punkti, milleks teda peetakse, mistõttu arvatud koordinaadid ei vasta tegelikkusele. Selle vältimiseks on vaja võtta tarvitusele kõik võimalikud abinõud vaadeldavate punktide nimetuste veenvalt kindlakstegemiseks. Kui neist punktidest mööda sõidetakse, siis on vaja kasutada juhust ja neid järele vaadata, küsitella kohalikke elanikke teiste läheduses olevate punktide üle ja isegi asuda punktile instrumendiga ning mõõta punktide vahelisi kontrollnurki ja võimaluse korral teha vaatlusi ka määratavale punktile.

Kui määratavast punktist on näha rohkem kui kolm punkti, siis on vaja mõõta ka kolmas nurk, mis annab võimaluse arvutuste ajal kontrollida kõiki punkte, järjestikku välja jättes igauhte neist.

On vaja ka silmas pidada, et mida kaugemal asetsevad kindelpunktid määratavast punktist, seda jämedamalt saadakse viimase koordinaadid. Tõepoolest, kui näiteks nurgamõõtmise viga saadi E , siis võimalik punkti jooneline nihkumine m saadakse nii (joonis 33):



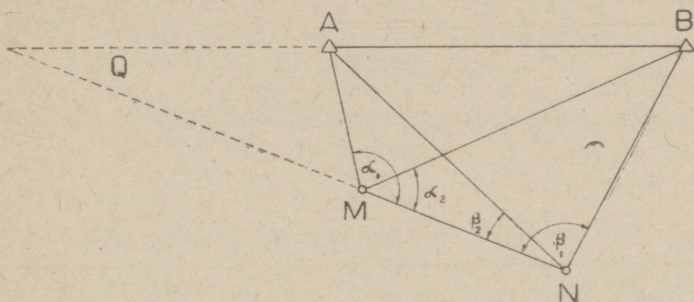
Joonis 33.

$$m = s \sin E = \frac{s E'}{3438}$$

s. t. nihkumine on võrdeline pikkusega s . $s = 6$ km ja $E = 0,4$ juures saame $m = 0,7$ m.

§ 67. Hanseni ülesanne.

Selleks et saada määratava punkti M koordinaadid kahe antud punkti vaatluste järgi, on vaja vaatlusi teha ka veel abipunktil N (joonis 34).



Joonis 34.

Olgu antud punktide A ja B koordinaadid vastavalt X_1, Y_1 ja X_2, Y_2 ; määratavate punktide koordinaadid märgime vastavalt X_m, Y_m ja X_n, Y_n .

Nende koordinaatide arvutamiseks on vaja mõõta mõlemal määrataval punktil kokku 4 nurka — $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ja β_2 . Ülesannet võib taandada suuna (MN) määramisele. Sõltuvalt sellest suunast leiame ülejäänud suunad nii:

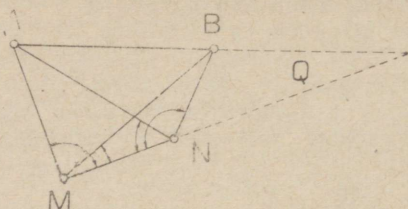
$$\left. \begin{aligned} (MA) &= (MN) - \alpha_1 \\ (MB) &= (MN) - \alpha_2 \\ (NA) &= (NM) + \beta_2 \\ (NB) &= (NM) + \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Suuna (MN) määramiseks on olemas valem, mille järgi leitakse nurk Q, mille moodustab joon MN antud joonega AB:

$$\left. \begin{aligned} \tan Q &= \frac{(\cot \alpha_2 + \cot \beta_1) - (\cot \alpha_1 + \cot \beta_2)}{(\cot \alpha_1 \cot \beta_1 - \cot \alpha_2 \cot \beta_2)} \\ (MN) &= (AB) + Q. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Nurka Q tuleb siin lugeda suunast AB kuni suunani MN kellaosuti käiku mööda. Tema suurus on vaja võtta esimese veerandi piires algebraliseks, s. t. kui tangens saadakse negatiivne, siis nurk

loetakse negatiivseks, — see vastab juhtumile, kui joon MN läheb joonele AB paremal pool (joonis 35)



Joonis 35.

Suuna (MN) arvutamist võib teha näiteks sellises skeemis:

Märgid	Arvutused	Märgid	Arvutused
Y_2	991,90	X_2	1 373,09
Y_1	2 105,22	X_1	515,86
$Y_2 - Y_1$	-1 113,32	$X_2 - X_1$	+857,23
$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \tan (AB)$	-1,29874	(AB)	$307^\circ 35',7$
α_1	$118^\circ 50',6$	$\cot \alpha_1$	-0,55074
β_1	$132^\circ 14',0$	$\cot \beta_1$	-0,90781
α_2	$36^\circ 55',8$	$\cot \alpha_2$	1,33042
β_2	$46^\circ 08',5$	$\cot \beta_2$	0,96092
$\cot \alpha_2 + \cot \beta_1$	0,42261	$\cot \alpha_1 \cot \beta_1$	0,49997
$\cot \alpha_1 + \cot \beta_2$	0,41018	$\cot \alpha_2 \cot \beta_2$	1,27843
Lugeja	0,01243	Nimetaja	-0,77846
$\tan Q$	-0,01597	Q	$-54',9$
$(AB) + Q = (MN)$	$306^\circ 40',8$	(MN)	$126^\circ 40',8$

Pärast seda leitakse valemi (71) kohaselt kõik ülejäänud suunad ja määratakse punktide M ja N koordinaadid kas otselõike või Jungi valemite järgi (või kolmnurkade lahendamisega).

IX peatükk.

V KLASSI LIHTSAIMATE SUSTEEMIDE LIHTSUSTATUD TASANDAMINE.

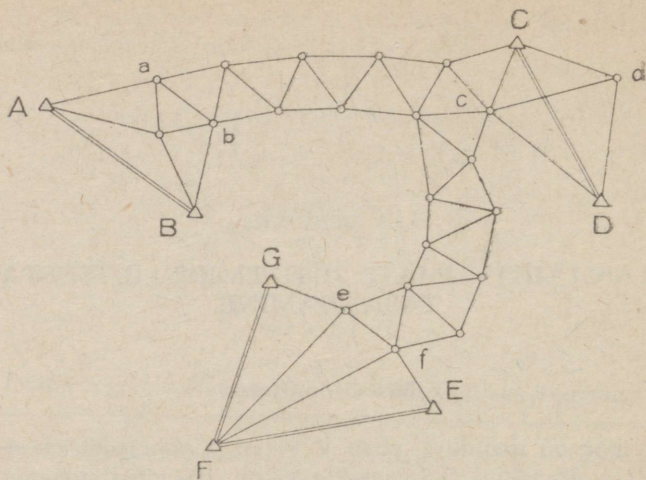
§ 68. Uldmõisted.

Nagu juba on mainitud, peab V klassi trigonomeetrilised võrgud üldreeglina arendama kõrgemaklassiliste triangulatsioonide külgedest. Seejuures siire kõrgema klassi külgedest V klassi külgedele toimub kahe või rohkem piirneva kolmnurga asetamisega antud kindlasse nurka või tsentraalsüsteemide ja geodeetiliste nelinurkade rajamisega külgnemise kohtadesse.

Tsentraalsüsteemiks nimetatakse sellist kolmnurkade asetust, millejuures kõik kolmnurgad evivad ühte ühist tippu, kus selle tipuga nurgad hõlmavad kogu horisondi, s. t. summas moodustavad 360° .

Geodeetiliseks nelinurgaks nimetatakse nelinurka, mille igas tipus on mõõdetud nurgad 3-le ülejäänud tipule kulgevate suundade vahel (nurgad külgede ja diagonaalide vahel), s. t. kokku 8 nurka.

Joonisel (joonis 36) on näidatud V klassi võrgu sidumine: vasakul — kõrgema klassi küljega AB tsentraalsüsteemi AabB kaudu, paremal — küljega CD geodeetilise nelinurga cCdD kaudu ja all — antud nurka EFG kolme kolmnurga asetamisega. Selliste võrkude tasandamise üks lihtsustatud viis seisneb selles, et esialgu tasandatakse külgnevad figuurid eraldi omaette (s. t. ahel antud nurgas või geodeetiline nelinurk või tsentraalsüsteem) ja arvutatakse nende küljed ning koordinaadid. Resultaadina saadakse külgede ab, cC ja ef koordinaadid. Edasisel tasandamisel loetakse neid külgi kindlaiks ja nad võetakse nende vahele rajatud lülide tasandamisel lähtekülgedeks. Sageli õnnestub varustada mõõteilt väikesi pindalasid küllaldase arvu punktidega ainult mainitud lihtsaimaist figuu-



Joonis 36.

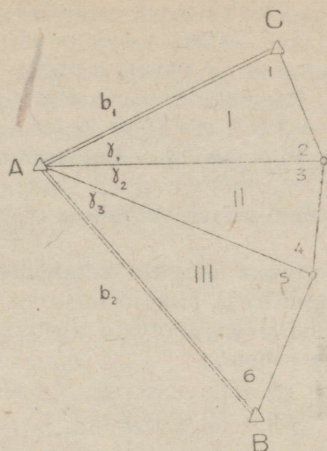
ridest ühe figuuri moodustamisega (ahel nurgas, tsentraalsüsteem või geodeetiline nelinurk). Nende lihtsaimate figuuride tasandamisega ongi vaja tutvuda eelkõige.

§ 69. Ahel antud nurgas.

Olgu kõrgema klassi triangulatsiooni antud kindlasse nurka CAB (joonis 37) rajatud 3 piirnevat kolmnurka I, II ja III, milledest igaühes on mõõdetud kõik 3 nurka. Niisuguste kolmnurkade asetust nimetatakse ahelaks antud nurgas. Nurgad, mille tipud ühtivad antud nurga tipuga, on vahenurgad, teised — sidenurgad.

Matemaatikas on erinevate figuuride suhtes olemas teatavad teoreetilised tingimused, mis antakse võrrandina ja mida nimetatakse nurkade tingimusteks. Selliseid tingimusi me oleme kohanud korduvalt. Näiteks kinnise polügooni nurkade summa jaoks on meil tingimus $\Sigma u = 180^\circ (n - 2)$ jne.

Praktikas saadakse nurkade mõõtmise juures paratamatute vigade tagajärjel lahknevused teoreetilistest tingimustest — sulgemisvead. Viimaste kõrvaldamiseks antakse mõõdetud nurkadele parandusi. Selles seisnebki tasandamine, mida nimetatakse ka kokkukõlasta-



Joonis 37.

miseks (samaaegselt, nagu me teame, seab tasandamine enesele ülesandeks resultaate tõenäolisima väärtuse leidmise). Niisiis tasandamist tuleb alata mõõdetud nurkadele esitatavate tingimuste selgitamisest.

Selgitame, missugused tingimused esitatakse nurkadele meie juhtumil.

§ 70. Figuuride tingimus.

Esimene tingimus seisneb selles, et mõõdetud nurkade summa igas kolmnurgas peab võrduma 180° , igas teises kinnises figuuris aga $— 180^\circ (n-2)$.

Kolmnurkade jaoks avaldatakse see tingimus järgmiste võrranditena (kolmnurgas mõõdetud nurkade summa ilma 180° -ta peab võrduma nulliga):

$$\left. \begin{aligned} 1 + 2 + \gamma_1 - 180^\circ &= 0 \\ 3 + 4 + \gamma_2 - 180^\circ &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Kui nende võrrandite vasakuis osades asendada nurgad mõõdetud nurkadega, siis nullide asemel saadakse mõningad suurused,

mis ongi sulgemisvigadeks. Niisiis figuuride tingimusest tulenevad sulgemisvead arvutatakse selliste valemita järgi:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 1 + 2 + \gamma_1 - 180^\circ \\ f_2 &= 3 + 4 + \gamma_2 - 180^\circ \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

On ilmne, et neid sulgemisvigu saadakse niisama palju, kui on kolmnurki.

Sulgemisvea äärmine suurus V klassi võrkudes on kehtestatud $\pm 0,5$.

Kui nurkade parandused märgime sümbolitega (1), (2), (γ_1) jne., s. t. samuti nagu nurgad isegi, ainult klambreis, siis põhireegli kohaselt paranduste summa peab võrduma vastupidise märgiga võetud sulgemisveaga. Seega saame:

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (\gamma_1) &= -f_1 \\ (3) + (4) + (\gamma_2) &= -f_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

ehk pärast kõigi liikmete ületoomist vasakule poole:

$$\left. \begin{aligned} (1) + (2) + (\gamma_1) + f_1 &= 0 \\ (3) + (4) + (\gamma_2) + f_2 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

On silmanähtav, et selliseid parandusvõrrandeid saadakse niisama palju, kui on kolmnurki.

§ 71. Summade tingimus.

Meie juhtumil me loeme antud nurga kindlaks, s. t. mingile muutmisele mittekuuluvaks. Järelkult temasse konstrueeritud ja mõõdetud vahenurgad peavad summas andma täpselt selle kindla nurga suuruse. See ongi summade tingimus, mis võrrandina avaldub nii:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots = A$$

ehk lühidalt

$$\Sigma\gamma - A = 0. \quad (76)$$

Mõõdetud vahenurgad üldreeglina seda tingimust ei rahulda, nii et ka sel juhtumil saadakse sulgemisviga w, mille arvutamiseks ilmselt on vaja rakendada valemit:

$$w = \Sigma\gamma - A. \quad (77)$$

Siit järgneb summade tingimusest tulenev parandusvõrrand:

$$\Sigma(\gamma) + w = 0. \quad (78)$$

Meie juhtumil niisuguseid võrrandeid on ainult üks.

§ 72. Külgede (baaside) tingimus.

Märgime külje AC pikkuse tähega b_1 ja külje AB pikkuse tähega b_2 . Need mõlemad pikkused on tasandamise juures vaja lugeda kindlaiks. Kui kolmnurkade sidekülgi hakata arvutama küljest b_1 , siis arvutuse lõpus peab saadama külge b_2 . Siiski selle tagajärjel, et sidenurgad, mille siinuste järgi teostatakse arvutus, sisaldavad mõningaid vigu, saadakse arvutuse lõpus b_2 -st mõnesuguselt erinev suurus.

Valemi (54) kohaselt peab olema:

$$b_2 = \frac{b_1 \sin 1 \sin 3 \dots}{\sin 2 \sin 4 \dots} \quad (79)$$

ehk

$$\frac{b_1 \sin 1 \sin 3 \dots}{b_2 \sin 2 \sin 4 \dots} - 1 = 0. \quad (80)$$

Seda võrrandit nimetatakse külgede tingimuseks (või baaside tingimuseks).

Möödetud nurkadega ei ole see tingimus rahuldatud, vaid saadakse sulgemisviga v (külgede tingimusest olenev sulgemisviga):

$$v = \frac{b_1 \sin 1 \sin 3}{b_2 \sin 2 \sin 4} - 1. \quad (81)$$

Pärast paranduste (1), (2), (3) jne. andmist möödetud nurkadele peab see sulgemisviga kaduma, s. t. peab olema:

$$\frac{b_1 \sin [1 + (1)] \sin [3 + (3)] \dots}{b_2 \sin [2 + (2)] \sin [4 + (4)] \dots} = 1 \quad (a)$$

Külgede tingimusest tuleneva parandusvõrrandi saamiseks lihtsamal (lineaarsel) kujul tähendame, et nurkade väikeste muutumiste jaoks loetakse nende siinuste muutumine võrdeliseks nurkade muutumise suurusega. Märgime nurga väikese muutumise ε -ga ja nurga muutumisele $1''$ võrra (või $1'$ võrra, kui nurgad on väljendatud minuteis ja arvutusi tehakse vastavate tabelite järgi) vastava siinuse muutumise Δ -ga. Viimased suurused on tavaliselt antud tabelleis (tabelivahed, diferentsid). Sellisel juhtumil võetakse, et

$$\sin (a + \varepsilon) = \sin a + \varepsilon \Delta.$$

Selle alusel avalduses (a) teeme niisugused asendused:

$$\sin [1 + (1)] = \sin 1 + \Delta_1 \cdot (1) = \sin 1 \left\{ 1 + \frac{\Delta_1}{\sin 1} \cdot (1) \right\}$$

$$\sin [2 + (2)] = \sin 2 + \Delta_2 \cdot (2) = \sin 2 \left\{ 1 + \frac{\Delta_2}{\sin 2} \cdot (2) \right\}$$

jne.

Märgime paranduse koefitsiendid nii:

$$\frac{\Delta_1}{\sin 1} = \alpha_1; \quad \frac{\Delta_2}{\sin 2} = \alpha_2; \quad \frac{\Delta_3}{\sin 3} = \alpha_3; \quad \text{jne.} \quad (82)$$

Teinud vastavad asendused avalduses (a), saame:

$$\frac{b_1 \sin 1 \sin 3 \dots [1 + \alpha_1 (1)] [1 + \alpha_3 (3)] \dots}{b_2 \sin 2 \sin 4 \dots [1 + \alpha_2 (2)] [1 + \alpha_4 (4)] \dots} = 1 \quad (b)$$

Valemi (81) alusel avaldise (b) vasakpoolses osas korrutajad lugejas ja nimetajas enne klambreid annavad suuruse $(1 + v)$. Klambrite korrutised kujutavad endast erinevate teiste liikmetega kaksliikmete korrutist. Selliste kaksliikmete korrutise moodustamise reegel, nagu algebrast teada, on järgmine: võetakse esimene liige astmes, mille näitajaks on kõigi kaksliikmete arv; sellele liidetakse sama liige astmes, mille näitaja on vähendatud ühe võrra ja mille koefitsiendiks on teiste liikmete summa; siis liidetakse sama liige astmes, mille näitaja on vähendatud kahe võrra, koefitsiendiga, mis võrdub kahekaupa võetud teiste liikmete korrutiste (iga liige korrutatud kõigi järgnevatega) summaga; koefitsient neljanda liikme juures võrdub teiste liikmete kolmekaupaga võetud korrutiste summaga jne.

Meie juhtumil esimene liige on 1, seepärast on ta ka mistahes astmes 1. Järelikult korrutamise resultaat kujutab endast summat: 1 (esimene liige kaksliikmete arvuga võrdses astmes) + kõigi järgnevate koefitsientide summa. Et aga teised liikmed on väga väikesed, siis nende korrutisi kahekaupa ja seda enam kolme või rohkema kaupaga võib jätta tähele panemata. Niisiis klambrite korrutamise tulemusena jääb järele ainult kõigi teiste liikmete ja ühe summa.

Teinud vastavad asendused avalduses (b), saame:

$$(1 + v) \frac{[1 + \alpha_1 (1) + \alpha_3 (3) + \dots]}{[1 + \alpha_2 (2) + \alpha_4 (4) + \dots]} = 1.$$

Vabanenud nimetajast ja tehes korrutamise, saame:

$$1 + \alpha_1 (1) + \alpha_3 (3) + \dots + v + v \alpha_1 (1) + v \alpha_3 (3) + \dots = \\ = 1 + \alpha_2 (2) + \alpha_4 (4) + \dots$$

Vasaku osa liikmed $v \alpha_1 (1)$, $v \alpha_3 (3)$ jne. võib nende väiksuse

tõttu ka tähele panemata jätta. Sel viisil külgede tingimusest tule-
nèv parandusvõrrand saab järgmise kuju (pärast kõigi liikmete
toomist vasakule poole ja sarnaste liikmete koondamist):

$$\alpha_1(1) + \alpha_3(3) + \dots - \alpha_2(2) - \alpha_4(4) - \dots + v = 0 \quad (83)$$

ehk lühidalt:

$$\Sigma \alpha_1(1) - \Sigma \alpha_2(2) + v = 0. \quad (84)$$

Logaritmilise arvutamise juures saame külgede tingimuse valemi
(79) logaritmimeisega:

$$\log b_1 - \log b_2 + \Sigma \log \sin 1 - \Sigma \log \sin 2 = 0. \quad (85)$$

Siit saame valemi logaritmidest sulgemisvea arvutamiseks:

$$v = \log b_1 - \log b_2 + \Sigma \log \sin 1 - \Sigma \log \sin 2. \quad (86)$$

Selle sulgemisvea kõrvaldamiseks anname nurkadele parandused
(1), (2), (3) jne., nii et

$$\log b_1 - \log b_2 + \Sigma \log \sin [1 + (1)] - \Sigma \log \sin [2 + (2)] = 0.$$

Paranduste väiksuse tõttu võetakse nagu siinuste loomulikkude
väärtuste juureski:

$$\left. \begin{aligned} \log \sin [1 + (1)] &= \log \sin 1 + \Delta_1(1) \\ \log \sin [2 + (2)] &= \log \sin 2 + \Delta_2(2) \\ \log \sin [3 + (3)] &= \log \sin 3 + \Delta_3(3). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Siin tähtedega $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ jne. on märgitud paarita (Δ_1, Δ_3) ja paaris
(Δ_2, Δ_4) nurkade vahed.

Võrdsusest (c) näeme, et logaritmidest parandustena esinevad
tabelivahed ja nurgaparanduste korrutised. Logaritmidest paranduste
summa peab võrduma logaritmidest sulgemisveaga, võetult vastu-
pidise märgiga, kust saadakse parandusvõrrand:

$$\Sigma \Delta_1(1) - \Sigma \Delta_2(2) + v = 0. \quad (87)$$

Valemid (84) ja (87), milledest esimest rakendatakse aritmeetil-
ril arvutamise juures, teist aga logaritmilisel arvutamisel — evivad
ühesugust kuju. Nad erinevad üksteisest paranduste juures olevate
koefitsientide ja vabaliikmete poolest. Kui võrrandi (84) koefit-
siendid ja vabaliige korrutada kümmandlogaritmidest mooduliga¹, siis
saadakse võrrandi (87) koefitsiendid ja vabaliige.

¹ Kümmand- ehk tavaliste (ehk brigi) logaritmidest mooduliks nimeta-
takse irratsionaalse arvu, $e = 2,7182818 \dots$ kümmandlogaritmi, mis võe-
takse niinimetatud loomulike logaritmidest aluseks.

Moodul $M = \log e = 0,434294 \dots$

§ 73. Summade ja figuuride tingimusest tulenevate paranduste lihtsustatud määramine.

Ulaltoodust on näha, et nurkadele antavad parandused peavad rahuldama rea tingimusi. Meie juhtumil tingimused avalduvad järgmiste võrrandite süsteemiga:

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (\gamma_1) + f_1 &= 0 \\ (3) + (4) + (\gamma_2) + f_2 &= 0 \\ (5) + (6) + (\gamma_3) + f_3 &= 0 \\ (\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + w &= 0 \\ \Sigma\alpha_1 (1) - \Sigma\alpha_2 (2) + v &= 0. \end{aligned}$$

Siin on meil 5 võrrandit 9 tundmatuga. Üldiselt on parandustega tingimusvõrrandite arv alati väiksem otsitavate paranduste arvust. Teatavasti niisuguseid võrrandite süsteeme nimetatakse määramatuiks ja nad omavad lõpmata hulga lahendusi. Määramatuse vältimiseks range tasandamise juures sisestatakse veel tingimus, et paranduste ruutude summa oleks vähim. Niisugust tasandamise viisi nimetatakse vähimruutude viisiks. Seejuures otsitavate paranduste jaoks saadakse rangelt määratud väärtused, kuid nende arvutamise jaoks tuleb lahendada võrrandite süsteeme paljude tundmatutega (3 n võrrandit 3 n tundmatuga, kus n on kolmnurkade arv), milleks kulutatakse palju aega ja arvutustööd.

Lihtsustatud tasandamine erineb rangest selle poolest, et esimese juures iga tingimus täidetakse mitte koos kõigiga, vaid üksikult või gruppidena.

Meie juhtumil eelkõige täidetakse summade tingimus, milleks sulgemisviga w jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile vahenurkadele, s. t. parandused arvutatakse valemist:

$$(\gamma_1) = (\gamma_2) = \dots = -\frac{w}{n}. \quad (88)$$

Üksikult võetud summade tingimuse jaoks annab selline parandamine tõenäolisi resultaate.

Niiviisi parandatud vahenurkadega arvutatakse figuuride tingimusest tulenevad sulgemisvead kolmnurkades ja jaotatakse vastupidiste märkidega võrdselt ainult sidenurkadele (et mitte rikkuda juba täidetud summade tingimust):

$$\left. \begin{aligned} (1) = (2) &= -\frac{1}{2} f_1 \\ (3) = (4) &= -\frac{1}{2} f_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

On silmanähtav, et resultaadis saame mõlemaid tingimusi rahuldavad nurgad. Siiski neid nurki ei või pidada lõplikeks, sest nad võivad mitte rahuldada külgede tingimust.

Nurki pärast summade ja figuuride tingimuste täitumist nimetatakse esialgselt parandatud nurkadeks.

§ 74. Külgede tingimusest tulenevate paranduste määramine.

Külgede tingimusest tulenevaid parandusi kantakse ainult sidenurkadele. Nende paranduste määramiseks tehakse vaba oletus, et kõik nad oma absoluutselt suuruselt on üksteisega võrdsed. Kummagi sidenurga paranduse märgid ühes ja samas kolmnurgas peavad ilmselt olema erinevad, sest muidu rikneks figuuride tingimus.

Oletame, et igas kolmnurgas paaritu sidenurk sai paranduse x . Ülaltoodud kaalutluste põhjal paarisarvulise sidenurga parandus peab olema $-x$ (nad mõlemad koos annavad kolmnurgas summa $x + (-x) = 0$).

Kandes need paranduste väärtused valemisse (83) saame:

$$\alpha_1 x + \alpha_3 x + \dots - \alpha_2 (-x) - \alpha_4 (-x) - \dots + v = 0$$

ehk:

$$x (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots) + x (\alpha_2 + \alpha_4 + \dots) + v = 0$$

ehk

$$x \cdot \Sigma \alpha + v = 0,$$

kust paranduse jaoks leiame

$$x = \frac{-v}{\Sigma \alpha}. \quad (90)$$

Täiesti analoogiliselt saame logaritmilise arvutuse jaoks:

$$x = \frac{-v}{\Sigma \Delta}. \quad (91)$$

Sel viisil külgede tingimusest tulenev missuguse tahes paaritu nurga parandus võrdub vastupidise märgiga sulgemisveega jagatult kõigi sidenurkade jaoks võetud suuruste α (või Δ) summaga. Mistahes paarisarvulise nurga parandus võrdub otsemärgilise sulgemisveega jagatult sama summaga.

§ 75. Kindlasse nurka rajatud ahela rangem tasandamine.

Rangemate resultaaside saamiseks tuleb summade ja figuuride tingimus täita mitte isoleeritult, nagu ülalpool oli mainitud, vaid üheskoos — ühiselt.

Kui oleleks ainuüksi summade tingimus, siis tuleks igale vahenurgale üks ja sama parandus, mille märgime tähega k . Täpselt samuti ainult üheainsa figuuride tingimuse juures kõik 3 nurka igas üksikus kolmnurgas saaksid ühesugused parandused, mis märgime esimese kolmnurga jaoks x_1 , teise kolmnurga jaoks x_2 jne. Nende mõlemate tingimuste ühise täitmise resultaadis iga vahenurk igas kolmnurgas saab 2 parandust, k ja x , nii et:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_1) &= k + x_1 \\ (\gamma)_2 &= k + x_2 \\ \dots & \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Sidenurgad igas kolmnurgas saavad ühesugused parandused:

$$\left. \begin{aligned} (1) &= (2) = x_1 \\ (3) &= (4) = x_2 \\ \dots & \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Asendanud need paranduste väärtused figuuride ja summade tingimusvõrrandesse, saame (pärast lihtsaid teisendamisi):

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + k + f_1 &= 0 \\ 3x_2 + k + f_2 &= 0 \\ \dots & \dots \dots \\ 3x_n + k + f_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{figuuride võrrandid,}$$

$$\Sigma x + nk + w = 0 \text{ summade võrrand.}$$

Kokku saame $(n + 1)$ võrrandit $(n + 1)$ tundmatuga (n — kolmnurkade arv). See on võrrandite määratud süsteem. Nende lahendamiseks toimime nii:

1. Liidame liikmete kaupa kõik figuuride võrrandid, summade võrrandi aga korrutame 3-ga, tulemusena saame:

$$\begin{aligned} 3 \Sigma x + nk + \Sigma f &= 0 \\ 3 \Sigma x + 3nk + 3w &= 0. \end{aligned}$$

2. Ülemisest võrrandist lahutame alumise, saame:

$$\Sigma f - 2nk - 3w = 0.$$

3. Viimasest võrrandist määrame k:

$$k = \frac{\sum f - 3w}{2n}$$

Saadud suurust (k) nimetatakse korreelaadiks.

Omades korreelaati on hõlpus leida figuuride võrrandist sidenurkade parandused:

$$3x_1 = -(k + f_1);$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}(k + f_1);$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}(k + f_2) \text{ jne.}$$

Niiviisi võrrandi (b) alusel saame sidenurkade paranduste jaoks:

$$(1) = (2) = -\frac{1}{3}(k + f_1);$$

$$(3) = (4) = -\frac{1}{3}(k + f_2)$$

.....

Vahenurkade parandused määrame võrdsustest (a), asetanud nendes leitud x väärtused:

$$(\gamma_1) = k + (1) = k + (2)$$

$$(\gamma_2) = k + (3) = k + (4)$$

.....

Külgede tingimusest tulenevate paranduste määramiseks oletame, et need parandused oma absoluutselt suuruselt igas kolmnurgas on endiselt võrdsed ja omavad vastupidiseid märke, ent nende suurused erinevais kolmnurkades ei ole ühesugused. Olgu esimeses kolmnurgas parandused x_1 ja $-x_1$, teises kolmnurgas x_2 ja $-x_2$ jne. Siis paranduste võrrand (84) avatud kujul kirjutatakse nii:

$$\alpha_1 x_1 - \alpha_2 (-x_1) + \alpha_3 x_2 - \alpha_4 (-x_2) + \dots + v = 0$$

ehk

$$x_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + x_2 (\alpha_3 + \alpha_4) + \dots + v = 0. \quad (c)$$

Tasandamisel on vaja taotella, et mõõdetud suurused moonduksid võimalikult vähe. Selleks et parandused $x_1, x_2 \dots$ saaksid võimalikult väikesed väärtused, tuleb nad võtta võrdeliselt summadega $(\alpha_1 + \alpha_2), (\alpha_3 + \alpha_4)$ jne. Märkides võrdelisuse koefitsiendi k-ga saame paranduste jaoks:

$$x_1 = k (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$x_2 = k (\alpha_3 + \alpha_4)$$

(d)

.....

Asendades need paranduste väärtused võrrandisse (c) saame:

$$k (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + k (\alpha_3 + \alpha_4)^2 + \dots + v = 0.$$

Siit leiame võrdelisuse koefitsiendi (korrelaadi):

$$k = \frac{-v}{\sum (\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

Pärast seda on võrdsusest (d) hõlpsasti leitavad ka parandused ise. Nii saame paarituurvuliste nurkade parandused. Paarisarvuliste nurkade jaoks saame parandused vastavalt $-x_1, -x_2$ jne.

Niisiis kindlasse nurka rajatud ahela rangema tasandamise jaoks on valemid:

a) *Nurkade esialgne parandamine*

$$k = \frac{\sum f - 3w}{2n}.$$

Sidenurkade parandused:

$$(1) = (2) = -\frac{1}{3} (k + f_1)$$

$$(3) = (4) = -\frac{1}{3} (k + f_2)$$

.....

Vahenurkade parandused (lõplikud):

$$(\gamma_1) = k + (1) = k + (2)$$

$$(\gamma_2) = k + (3) = k + (4)$$

.....

b) *Nurkade lõplik parandamine.*

$$k = \frac{-v}{\sum (\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$x_1 = k (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$x_2 = k (\alpha_3 + \alpha_4)$$

.....

Logaritmilisel arvutamisel on valemid samad, ainult suuruste α_1, α_2 jne. asemel võetakse sidenurkade siinuste logaritmade tabelivahed (Δ_1, Δ_2 jne.).

§. 76. Kindlasse nurka rajatud ahela tasandamise näide.

Kõigi tuletatud valemite rakendamise illustreerimiseks tasandatakse allpool kolmest kolmnurgast koosnev ahel (kohaldatult joonisele 37).

Antud punktide koordinaadid on siin järgmised (vt. tabel):

Punktid	X	Y
C	+12 645,02	-10 523,25
A	+ 9 848,61	-14 276,59
B	+ 6 714,16	- 8 574,40

Antud koordinaatide järgi leiame külgede direktsioonnurgad, nurga A ja külgede pikkused:

$$(AB) = 118^{\circ}47'50''$$

$$(AC) = 53^{\circ}18'44''$$

$$A = 65^{\circ}29'06''$$

$$AC = b_1 = 4\,680,54;$$

$$\log b_1 = 3,670296$$

$$AB = b_2 = 6\,506,90;$$

$$\log b_2 = 3,813374$$

1. Vahenurkade parandamine.

Tsentriale taandatud nurgad		$\frac{-w}{n}$	Lõplikud nurgad γ'
γ_1	24°15'30"	+4"	24°15'34"
γ_2	20°06'48"	+4"	20°06'52"
γ_3	21°06'36"	+4"	21°06'40"
Σ	65°28'54"		65°29'06"
A	65°29'06"		
	w - 12"		

2. Arvutamine logaritmidel abil.

Kohm- märk. nr.	Nurgad		$\frac{-f}{2}$	Parandatud nurgad	log sin	Δ	$\frac{x}{-x}$	Lõplikud nurgad	log sin
I	2	68°13'54"	-5	68°13'49"	9,967867	0,8	-11"	68°13'38"	9,967858
	γ_1	24°15'34"						24°15'34"	9,613704
	1	87°30'42"	-5	87°30'37"	9,999590	0,1	+11"	87°30'48"	9,999591
	Σ	180°00'10"						180°00'00"	
	f_1	+ 10"							
II	4	74°43'10"	-8"	74°43'02"	9,984364	0,6	-11"	74°42'51"	9,984357
	γ_2	20°06'52"						20°06'52"	9,536428
	3	85°10'15"	-9"	85°10'06"	9,998454	0,2	+11"	85°10'17"	9,998456
	Σ	180°00'17"						180°00'00"	
	f_2	+ 17"							

Kolmn- nurrk. nr.	Nurgad		$\frac{-f}{2}$	Parandatud nurgad	log sin	Δ	$\frac{x}{-x}$	Löplikud nurgad	log sin
III	6	48°33'12"	+4"	48°33'16"	9,874821	1,9	-11"	48°33'05"	9,874800
	γ_3	21°06'40"						21°06'40"	9,556517
	5	110°20'00"	+4"	110°20'04"	9,972055	-0,8	+11"	110°20'15"	9,972046
	Σ	179°59'52"						180°00'00"	
f_3	- 8"								
				Σ log sin 1	9,970099	2,8		Σ log sin 1	9,970093
				Σ log sin 2	9,827052			Σ log sin 2	9,827015

$$+0,143047$$

$$+0,143078$$

$$\log b_1 - \log b_2 = -0,143078$$

$$v = -31$$

$$x = \frac{31}{2,8} = +11''$$

$$\text{Relatiivne sulgemisviga} = \frac{31}{434\,000} = \frac{1}{14\,000}$$

3. Arvutamine aritmomeetril.

Esialgselt parandatud nurgad	sin	Δ	α	x	Löplikud nurgad	sin	Küljed
2	68°13'49"	0,928682	1,8	1,9	68°13'38"	0,928662	5 040,09
γ_1	24°15'34"				24°15'34"	0,410869	4 680,54
1	87°30'37"	0,999056	0,2	0,2	87°30'48"	0,999059	2 070,82
							5 035,35
4	74°43'02"	0,964637	1,3	1,4	74°42'51"	0,964622	5 220,02
γ_2	20°06'52"				20°06'52"	0,343896	5 035,35
3	85°10'06"	0,996446	0,4	0,4	85°10'17"	0,996451	1 795,15
							5 201,49
6	48°33'16"	0,749585	3,2	4,3	48°33'05"	0,749550	6 939,49
γ_3	21°06'40"				21°06'40"	0,360178	5 201,49
5	110°20'04"	0,937680	-1,7	-1,8	110°20'15"	0,937662	2 499,45
							6 506,90
		$\Sigma\alpha$	6,4				

$$b_1 \sin 1 \sin 3 \dots = 4\,369,12$$

$$b_2 \sin 2 \sin 4 \dots = 4\,369,44$$

$$v = 0,999927 - 1 = -0,000073$$

$$x = \frac{73}{6,4} = +11''$$

$$\text{Relatiivne sulgemisviga} = \frac{73}{1\,000\,000} = \frac{1}{13\,900}$$

4. Koordinaatide arvutamine (aritmomeetria).

Punktid	Nurgad	Direktsioon-nurgad	Küljed	Juurdekasvud		Koordinaadid	
				Δ_x	Δ_y	X	Y
A		<u>53°18'44''</u>					
C	87°30'48''					12 645,02	-10 523,25
a	153°23'55''	145°47'56''	2 070,82	-1 712,71	+1 164,01	10 932,31	- 9 359,24
b	185°03'06''	172°24'01''	1 795,15	-1 779,38	+ 237,41	9 152,93	- 9 121,83
B	48°33'05''	167°20'55''	2 499,45	-2 438,77	+ 547,43	6 714,16	- 8 574,40
A		<u>298°47'50''</u>		-5 930,86	+1 948,85		

§ 77. Praktilisi märkmeid. Kontrollid.

Nurkade ümardamise tagajärjel ei peeta praktikas sageli täielikult kinni paranduste võrdsuse printsiibist, kusjuures juhtub, et osa nurki tuleb jätta ilma paranduseta. Kui näiteks summade tingimusest tulenev sulgemisviga moodustab $-6''$, vahenurki aga on 9, siis tervete sekunditeni ümardamise tingimusel 3 nurka jääb ilma paranduseta. Kuni $0'',1$ ümardamise tingimusel 6 nurgale tulnuks anda igaühele $0'',7$ ja 3-st nurgast igaühele $0'',6$. Selliseil juhtumel parandused (või võrdlemisi suuremad parandused) tuleb sisestada niisuguseisse kolmnurkadesse, kus need parandused vähendavad figuuri sulgemisviga.

Korrutiste $b_1 \sin 1 \sin 3 \dots$ ja $b_2 \sin 2 \sin 4 \dots$ arvutamist (aritmomeetria) on mugav toimetada järgnevas skeemis:

Paarituurvulised nurgad		Paarisarvulised nurgad	
b_1	4 680,54	b_2	6 506,90
1	4 676,12	2	6 042,84
3	4 659,50	4	5 829,15
5	4 369,12	6	4 369,44

Trumlile seatakse esimene baas ja korrutatakse esimese nurga siinusega, tulemus kirjutatakse 1-e vastu. Siis seatakse see tulemus trumlile ja korrutatakse kolmanda nurga siinusega, uus tulemus kirjutatakse 3-e vastu jne.

Arvutuste lihtsustamiseks võetakse tabelivahed, suurused α , samuti aga ka sulgemisvead v kuuenda märgi ühikuis (või viiekohaliste tabelite juures viienda märgi ühikuis), mis on võrdne vastavate võrrandite mõlemate osade korrutamisele 10^6 -ga (või 10^5 -ga). Suuruste α arvutamisel on küllaldane võtta nurkade siinused ümardatult kuni sajandik-osadeni.

Arvutuste kestel kasutatakse järgmisi kontrolle:

1. Kui igas kolmnurgas esialgselt parandatud nurgad on välja kirjutatud, moodustatakse nende summa, samuti arvutatakse ka eraldi vahenurkade summa. Esimesed summad peavad kõikjal andma 180° , viimane summa aga — antud nurga.

2. Pärast lõplike nurkade saamist on järgmises lahtris vaja veelkord leida nende siinuste logaritmid (või aritmomeetril arvutamise juures — nende siinused), mis peavad varem leitud logaritmidest erinema paranduste ja tabelivahede korrutiste võrra.

3. Lõplike nurkade siinuste logaritmid järgi arvutatakse veelkord summad $\Sigma \log \sin 1$ ja $\Sigma \log \sin 2$, nende vahe peab andma täpselt baaside logaritmid vahe. Aritmomeetril arvutamise juures peame saama võrdsed korrutised $b_1 \sin 1 \sin 3 \dots$ ja $b_2 \sin 2 \sin 4 \dots$. Kui need tingimused vähesel määral ei täitu, mis on võimalik ümardamisest tulenevate vigade tõttu, siis tuleb reguleerida tulemusi ühekahe vähima nurga siinuste logaritmid (või loomulike siinuste) viimase märgi ühiku lisandamisega tarvilikus suunas.

§ 78. Relatiivne sulgemisviga.

Sulgemisviga v (aritmomeetril arvutamise juures) avaldab esimese baasi ja mõõdetud nurkade järgi arvutatud teise baasi suhtelise sulgemisvea. Tõepoolest, kui võtta teise arvutatud baasi ja antud baasi vahe (teine arvutatud baas miinus antud baas) suhte teise antud baasiga, siis saame:

$$\left(\frac{b_1 \sin 1 \sin 3 \dots}{\sin 2 \sin 4 \dots} - b_2 \right) : b_2 =$$

$$= \frac{b_1 \sin 1 \sin 3 \dots}{b_2 \sin 2 \sin 4 \dots} - 1,$$

s. t. sulgemisvea v .

Sel viisil saadakse ülaltoodud näites relatiivne sulgemisviga 0,000 073 ehk 1 : 13 900.

Logaritmilise arvutamise juures relatiivse sulgemisvea saamiseks

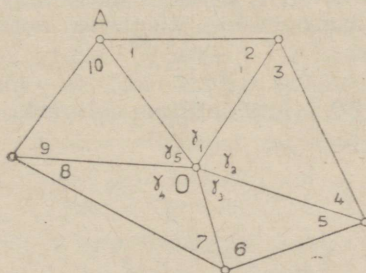
on vaja sulgemisviga v jagada mooduliga $M = 0,43429 \dots$. Kui sulgemisviga v on antud kuuendais märkides, siis relatiivne viga m saadakse

$$m = \frac{v}{434\,000} \quad (92)$$

§ 79. Tsentraalsüsteem.

Tsentraalsüsteemi võib vaadata kui antud nurka rajatud ahela erijuhtumit, nimelt siis, kui antud nurk võrdub 360° .

Kõigile kolmnurkadele ühist tippu O (joonis 38) nimetatakse pooluseks. Pooluse ümber asetsevad nurgad on vahenurgad.



Joonis 38.

Tsentraalsüsteemis on vaja täita järgmised kolm tingimust:

1. *Horisondi tingimus*. See tingimus on analoogiline summade tingimusega. On silmanähtav, et mõõdetud vahenurkade summa peab võrduma 360° , nii et sulgemisvigade arvutamiseks on

$$w = \sum \gamma - 360^\circ \quad (93)$$

Parandused (lihtsustatud tasandamisel) saame nii:

$$(\gamma_1) = (\gamma_2) = \dots = (\gamma_n) = \frac{-w}{n}$$

2. *Figuuride tingimus* — on täiesti ühesugune sama tingimusega kindlasse nurka rajatud ahela juures ning täidetakse samuti.

3. *Pooluse tingimus*. Poolusest väljuvad küljed on kolmnurkade sidekülgedeks. Kui nende arvutamist alustada mingist ühest küljest, näiteks OA-st, siis on vaja üle kõigi kolmnurkade jõuda jälle

temani. Niisiis pooluse tingimus on täiesti analoogiline külgede tingimusega (80), ainult siin on vaja võtta $b_2 = b_1$:

$$\frac{\sin 1 \sin 3 \dots}{\sin 2 \sin 4 \dots} - 1 = 0 \quad (94)$$

Siit saame sulgemisvea arvutamiseks:

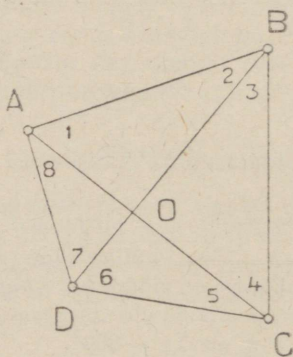
$$v = \frac{\sin 1 \sin 3 \dots}{\sin 2 \sin 4 \dots} - 1. \quad (95)$$

Logaritmilise arvutamise juures pooluse tingimus ja sulgemisviga on vastavalt:

$$\begin{aligned} \Sigma \log \sin 1 - \Sigma \log \sin 2 &= 0 \dots \\ v &= \Sigma \log \sin 1 - \Sigma \log \sin 2 \dots \end{aligned}$$

Pooluse tingimuse täitmine toimub täiesti analoogiliselt külgede tingimuse täitmise teostamisega kindlasse nurka rajatud ahela juures.

§ 80. Geodeetiline nelinurk.



Joonis 39.

Nelinurk ABCD (joonis 39), mille igas tipus mõõdetakse kõigi ülejäänud 3 tipu suundade vahelised nurgad (s. t. kokku 8 nurka), kannab geodeetilise nelinurga nimetust. Kui üks tema külgedest (või üks diagonaal) on kõrgema klassi triangulatsiooni küljeks või on mõõdetud baasina iseseisvalt, siis saadakse väga lihtne ja kindel süsteem, mis annab 2 uut punkti.

Mõõdetud nurkadele esitatakse siin järgmised tingimused:

1. *Polügooni nurkade tingimus*. See seisneb selles, et kõigi mõõdetud nurkade summa peab võrduma 360° (kui nelinurga sisenurkade summa):

$$1 + 2 + \dots + 8 - 360^\circ = 0. \quad (96)$$

Siit järgneb polügooni sulgemisviga:

$$w = 1 + 2 + \dots + 8 - 360^\circ \quad (97)$$

ja parandused (lihtsustatud tasandamise juures):

$$(1) = (2) = \dots = (8) = \frac{-w}{8}. \quad (98)$$

2. *Figuuride tingimus*. Geodeetilises nelinurgas on kokku 4 lõikuvat kolmnurka (2 kolmnurka ühest diagonaalist kummalgi pool ja 2 — teisest). Igas kolmnurgas on 4 mõõdetud nurka, kusjuures iga nurk kuulub koostisosana kahte lõikuvasse kolmnurka. Joonisest 39 nähtub, et nurkade summa $1 + 2$ peab võrduma summaga $5 + 6$, sest et igäüks neist summadest täiendab võrdseid tippnurki AOB ja COD kuni 180° -ni. Samal põhjusel summa $3 + 4$ peab võrduma summaga $7 + 8$. Need mõlemad tingimused väljendame nii:

$$\left. \begin{aligned} (1 + 2) - (5 + 6) &= 0 \\ (3 + 4) - (7 + 8) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Siit saame avaldised sulgemisvigade jaoks:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= (1 + 2) - (5 + 6) \\ f_2 &= (3 + 4) - (7 + 8) \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Parandused aga saadakse:

$$\left. \begin{aligned} (1) = (2) = - (5) = - (6) &= -\frac{f_1}{4} \\ (3) = (4) = - (7) = - (8) &= -\frac{f_2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Parandused nurkadele 5, 6, 7 ja 8 võetakse otsese märgiga (sulgemisvea suhtes) sellepärast, et tingimustesse need nurgad lähevad märgiga miinus.

Geodeetilises nelinurgas on ükskõik, kumb esitatud tingimustest täidetakse varem. On vaja vaid jälgida, et teise tingimuse täitmisel võimalike ümardamiste tagajärjel ei rikne varem täidetud tingimus.

3. *Pooluse tingimus*. Geodeetilist nelinurka võib vaadata kui neljast kolmnurgast moodustatud tsentraalsüsteemi, mille pooluseks on diagonaalide lõikepunkt O. Mõõdetud nurgad 1, 2, ... 8 sellest vaatepunktist esinevad sidenurkadena. Selle tagajärjel nendele on

vaja esitada pooluse tingimus, mis siin täidetakse täiesti samuti nagu tsentraalsüsteemi juureski.

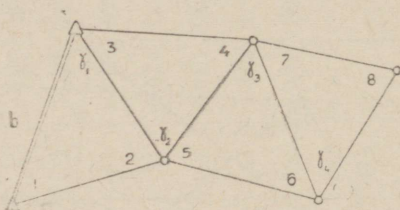
Allpool esitatakse geodeetilise nelinurga tasandamise näide.

Nurkade nr.	Tsentrite taandatud nurgad	$\frac{(1+2)}{(7+8)}$	$\frac{f_1}{f_2}$	Esialgused parandused			Parandatud nurgad	log sin	$\Delta 1'$	$\pm x$	Lõplikud nurgad
				$\frac{f}{4}$	$\frac{-w}{8}$	Σ					
1	71°40',8	120°28',0	+0',2	-0,05	+0,08	+0,03	71°40',83	9,97741	4	+0,01	71°40',8
2	48°47',2			-0,05	+0,08	+0,03	48°47',23	9,87638	11	-0,01	48°47',2
3	45°46',0	59°32',1	+0',6	-0,15	+0,07	-0,08	45°45',92	9,85521	12	+0,01	45°46',0
4	13°46',1			-0,15	+0,07	-0,08	13°46',02	9,37653	51	-0,01	13°46',0
5	13°07',2	120°27',8		+0,05	+0,08	+0,13	13°07',33	9,35608	54	+0,01	13°07',3
6	107°20',6			+0,05	+0,08	+0,13	107°20',73	9,97979	-4	-0,01	107°20',7
7	31°25',2	59°31',5		+0,15	+0,07	+0,22	31°25',42	9,71714	21	+0,01	31°25',5
8	28°06',3			+0,15	+0,07	+0,22	28°06',52	9,67315	24	-0,01	28°06',5
Σ	359°59',4				+0,6		360°00',0		173		
w	-0',6						$\Sigma \log \sin 1$	8,90584			
							$\Sigma \log \sin 2$	8,90585			
						v		-1			

$$x = \frac{1}{173} = 0,01.$$

§ 82. Lihtne ahel (rippuv).

Mõnikord võrgu kõrgema klassi lähteküljele (või mõõdetavale baasile) rajatakse väike ahel 4—5 kolmnurgast, nagu on näidatud joonisel (joonis 41), mis jääb rippuvaks ja mida nimetatakse lihtsaks



Joonis 41.

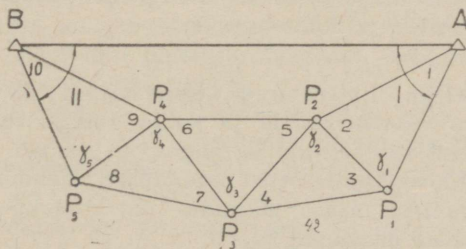
ahelaks. Siin täidetakse ainult vaid figuride tingimus, milleks igas kolmnurgas sulgemisviga jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile kolmele nurgale.

X peatükk.

AHELATE RAJAMINE ANTUD KINDLATE PUNKTIDE VÕI KULGEDE VAHELE.

§ 83. Ahel kahe antud punkti vahel.

Kui ahela lõpp- ja algpunkt ühtivad kahe antud punktiga A ja B (joonis 42 ja 42-a), siis peale kolmnurkade nurkade on vaja mõõta ka külgnevad nurgad I ja II. Kui ahel asetseb väljaspool kindlat (antud) külge AB, siis on külgnevate nurkadega parem siduda väli- sed küljed (otseselt võib muidugi mõõta nurka BAP_2 , kuid arvutu- sis on lihtsam kasutada nurka BAP_1 , mis sel juhtumil on võrdne summaga $BAP_2 + 1$).



Joonis 42.

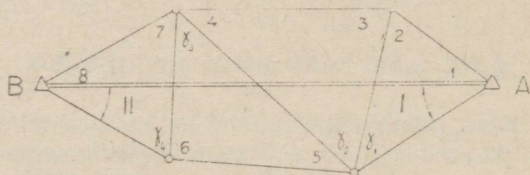
Kahe kindelpunkti vahelisse ahelasse tekib summade tingimuse asemele *direktsioonnurkade tingimus*.

See tingimus kuulub samuti vahenurkadele ja seisneb järgmises.

Sidekülgede direktsioonnurgad saame nende arvutamisel vahe- nurkade järgi kindlast direktsioonnurgast (BA) nii:

$$\begin{aligned} (AP_1) &= (BA) + 180^\circ - I \\ (P_1P_2) &= (AP_1) + 180^\circ - \gamma_1 \\ (P_2P_3) &= (P_1P_2) - 180^\circ + \gamma_2 \\ &\dots \dots \dots \\ (BA) &= (P_5B) + 180^\circ - II \end{aligned}$$

Kõigi nende võrdsuste liitmisel parem- ja vasakpoolseis osades kaovad vastastikku klambreis olevad suunad, nii et summaarse võrrandi vasakule poolele saadakse null. Summaarse võrrandi paremasse ossa jääb järele kõigi vasakpoolsete vahenurkade summa ilma kõigi parempoolsete ja kahe külgneva nurga summata, suurused $\pm 180^\circ$ aga kas hävivad täiesti või annavad mingi täisarvu k poolringe, kusjuures see k on hõlpsasti määratav sõltuvalt eelne-



Joonis 42-a.

nud liikmete summa suurusest. Niisiis summaarne võrrand võtab kuju:

$$0 = \Sigma \gamma_{\text{vas}} - \Sigma \gamma_{\text{par}} - (I + II) \pm 180^\circ k. \quad (104)$$

See ongi direktsioonnurkade tingimus. Sellest saame valemi vahenurkade sulgemisvea w määramiseks:

$$w = \Sigma \gamma_{\text{vas}} - \Sigma \gamma_{\text{par}} - (I + II) \pm 180^\circ k. \quad (105)$$

See sulgemisviga (lihtsustatud tasandamisel) on vaja jaotada võrdselt kõigile vahenurkadele ja kahele külgnevale nurgale. Et aga parempoolsed vahenurgad ja külgnevad nurgad kuuluvad valemisse (105) miinusemärgiga, siis parandused nendele tuleb anda (sulgemisvea suhtes) otsese märgiga, ent vasakpoolseile nurkadele — vastupidise märgiga:

$$(\gamma_{\text{vas}}) = -(\gamma_{\text{par}}) = -(I) = -(II) = \frac{-w}{n+2}. \quad (106)$$

Külgnevad nurgad, sõltudes valitud käigust, võivad olla ka vasakpoolseiks (s. t. kuuluda valemisse 105 märgiga +). Sel juhul tuleb parandused neile anda vastupidise märgiga.

Tasandamine toimub tavalises järjekorras, s. t. algul parandatakse vahenurgad, siis leitakse figuuride sulgemisvead ja parandatakse ainult sidenurgad:

Kahe kindelpunkti vahelise ahela edasine tasandamine toimub mõõtkava muutmise meetodiga (või teisiti, tingitud baasi meetodiga).

§ 84. Mõõtkava muutmise meetod.

Kahe kindelpunkti vahelise ahela kolmnurkade külgede arvutamise juures ei ole võimalik lähtuda vahenditult antud küljest AB sellepärast, et ta ei esine ühegi rajatud kolmnurga küljena. Siiski teda võib kasutada tähendatud otstarbeks järgmisel viisil.

Võtame kolmnurkadest ühe külje, näiteks AP_1 , tingitud baasina, võttes tema pikkuse võrdseks näiteks 1000 m, ja arvutame selle järgi kõigi kolmnurkade külgede tingitud pikkused, siis aga nende järgi kõigi punktide koordinaadid (ka tingitud). Punktide A ja B selliste tingitud koordinaatide järgi arvutame tingitud pikkuse AB. See pikkus saadakse muidugi erinev tegelikust, antud punktide A ja B kindlate koordinaatide järgi arvutatud pikkusest. Määrame, mitu korda joone AB tegelik pikkus on tingitust suurem; suurendades niisama palju kordi kõiki kolmnurkade külgede tingitud pikkusi saame nende tegelikud pikkused.

Praktikas eelistatakse lähtekülje AP_1 pikkuseks võtta tema ligikaudne pikkus, mis saadakse selle mõõtmisest lihtsa lindiga või kolmnurga BAP_1 lahendamisest, milleks kolmnurkade nurgamõõtmisel mõõdetakse ka nurgad BAP_1 ja AP_1B . Sellisel juhtumil, nagu allpool näeme, taandub ülesanne tingitud koordinaatide juurdekasvude väheseks parandamiseks.

Olgu külgede tingitud pikkused arvutatud külje AP_1 ligikaudse väärtuse järgi ja olgu ahel orienteeritud tegeliku direktsioonnurga järgi, mis on siirdud küljelt AB külgneva nurga kaudu. Tingitud külgede järgi arvutame koordinaatide juurdekasvud ja kooskõlastame nad kolmnurkades sulgemisvigade võrdlemise viisiga (tähtsusetud juurdekasvude sulgemisvead kolmnurkade kaupa võivad tekkida ainult ümardamisvigade kuhjumisest). Pärast seda moodustame $\Sigma \Delta x$ ja $\Sigma \Delta y$ punktist A kuni punktini B niisugust käiku mööda, et sellega oleksid haaratud kõik punktid (joonisel 42 käiku $A P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 B$ mööda). Nende summade järgi arvutame direktsioonnurga T ja joone AB tingitud pikkuse S u:

$$\tan T = \frac{\Sigma \Delta y}{\Sigma \Delta x}$$

$$S_u = \frac{\Sigma \Delta x}{\cos T} = \frac{\Sigma \Delta y}{\sin T}$$

Kui tegelik direktsioonnurk ja joone AB pikkus on (AB) ja Si, siis avastame vahed:

$$\Delta S = S_i - S_u \quad (a)$$

$$\Delta T = (AB) - T. \quad (b)$$

Selleks et siirduda tegelikele pikkustele, teeme kindlaks, misguse osa tingitud pikkusest moodustab viga ΔS :

$$\frac{\Delta S}{S_u} = \frac{S_i - S_u}{S_u} = \frac{S_i}{S_u} - 1.$$

Kui baas on võetud küllalt lähedane tegelikkusega, siis saadud avaldus on väga väike positiivne või negatiivne murdarv, mis tuleb arvutada vähemalt kuue kümnendmäärgiga. Märgime selle murru tähega k:

$$k = \frac{S_i}{S_u} - 1. \quad (107)$$

Kõik tingitud pikkused on vaja nendele normaalkuju andmiseks parandada murruga k väljendatud nende osa võrra.

Geomeetrisest vaatepunktist on koordinaatide juurdekasvud vastavaile joontele kui hüpotenuusidele ehitatud täisnurksete kolmnurkade kaatetid, kusjuures nad kõik asetsevad üksteisega paralleelselt. Ka neid tuleb ilmselt parandada nende k osa võrra, s. t. neile tuleb anda järgmised parandused:

$$\begin{cases} \delta_x = k \Delta x \\ \delta_y = k \Delta y \end{cases} \quad (108)$$

Need on mõõtkava moonutusest tingitud parandused.

Vea ΔT parandamiseks on vaja juurdekasvudele anda teine, telgedele pöördest tingitud parandus.

Võrgu orienteerimisel, nagu ülalpool mainitud, on vea ΔT suurus väga väike (igal juhtumil alla 1'). See suurus on ilmselt vaja liita kõigi direktsioonnurkadega. Sellisel juhtumil saame iga mistahes parandatud juurdekasvu jaoks:

$$\Delta x_{\text{par}} = d \cos(\alpha + \Delta T) = d (\cos \alpha \cos \Delta T - \sin \alpha \sin \Delta T).$$

ΔT väiksuse tagajärjel arvame $\cos \Delta T = 1$ ja $\sin \Delta T = \Delta T'' \sin 1'' = = 0,00000485 \Delta T''$ (või kui nurgad tasandatakse minuteis, $\sin \Delta T = = \Delta T' \sin 1' = 0,000291 \Delta T'$). Niisiis:

$$\Delta x_{\text{par}} = d (\cos \alpha - 0,00000485 \Delta T'' \sin \alpha) =$$

$$= d \cos \alpha - d \sin \alpha \cdot 0,00000485 \Delta T''.$$

Kuid $d \cos \alpha = \Delta x$ ja $d \sin \alpha = \Delta y$, nii et:

$$\Delta x_{\text{par}} = \Delta x - 0,00000485 \Delta T'' \cdot \Delta y.$$

Siit näeme, et x mööda parandatud juurdekasvu saamiseks on vaja arvatud juurdekasvule anda parandus $-0,00000485 \Delta T'' \cdot \Delta y$. Täiesti analoogiliselt leiame paranduse juurdekasvule y mööda $+0,00000485 \Delta T'' \cdot \Delta x$. Nende paranduste arvutamiseks leitakse paranduse koefitsient $0,00000485 \Delta T''$, mille märgime tähega k_1 :

$$k_1 = 0,00000485 \Delta T''. \quad (109)$$

Pärast seda saadakse telgede pöördest tingitud parandus nii:

$$\left. \begin{aligned} \delta'_x &= -k_1 \Delta y \\ \delta'_y &= -k_1 \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Parandatud juurdekasvude summad valitud käiku mööda punkti A kuni punkti B peavad võrduma nende punktide vastavate koordinaatide vahedega, mida tuleb kasutada paranduste arvutamise õigsuse kontrolliks. Seejuures siiski on vaja arvestada, et ümardamise vigade kuhjumise tõttu võib täielikku ühtimist ka mitte olla, eriti viiekohaliste tabelitega töötades. Tühised lahknemised reguleeritakse juurdekasvudele kolmandate paranduste andmisega.

§ 85. Kahe kindelpunkti vahelise ahela tasandamise näide.

Allpool tasandatakse 5-st kolmnurgast moodustatud ahel kohaldatult joonisele 42.

1. Direktsioonnurga (AB) ja joone pikkuse arvutus.

x_b	116 809,16	y_b	-59 990,95
x_a	120 614,35	y_a	-55 692,27
$x_b - x_a$	-3 805,19	$y_b - y_a$	-4 298,68
$\tan (AB)$	+1,129689	$\sin r$	0,748779
Rumb r	SW: $48^\circ 29' 05''$	$\cos r$	0,662820
(AB)	$228^\circ 29' 05''$	Si	5 740,91

2. Nurrkade tasandamine ja tingitud külgede arvutamine.

Lindiga mõõdetud joon $AP_1 = 2959,00$ m.

	Tsentsile taandatud nurgad	$\pm \frac{w}{n+2}$	$\frac{-f}{2}$	Parandatud nurgad	Siinused	Küljed
I	76°29'40"	+6"		76°29'46"		
2	108°50'45"		-1"	108°50'44"	0,946393	3 126,61
γ_1	27°18'27"	+6"		27°18'33"	0,458792	2 959,00
1	43°50'43"			43°50'43"	0,692714	1 434,46
	$f_1 = -5"$					2 165,85
4	46°19'25"		+1"	46°19'26"	0,723255	2 994,59
γ_2	63°15'27"	-6"		63°15'21"	0,893025	2 165,85
3	70°25'12"		+1"	70°25'13"	0,942176	2 674,24
	$f_2 = +4"$					2 821,43
6	84°36'07"		+9"	84°36'16"	0,995569	2 833,99
γ_3	60°23'40"	+6"		60°23'46"	0,869461	2 821,43
5	34°59'50"		+8"	34°59'58"	0,573568	2 464,04
	$f_3 = -23"$					1 625,49
γ_4	52°19'26"		+12"	52°19'38"	0,791514	2 053,65
7	51°20'00"	-5"		51°19'55"	0,780779	1 625,49
	76°20'16"		+11"	76°20'27"	0,971718	1 603,45
	$f_4 = -18"$					1 995,57
10	46°47'48"		-1"	46°47'47"	0,728925	2 737,69
γ_5	57°37'30"	+5"		57°37'35"	0,844575	1 995,57
9	75°34'39"		-1"	75°34'38"	0,968485	2 312,18
	$f_5 = -3"$					2 651,41
II	72°45'30"	+6"		72°45'36"		

$$\Sigma \gamma_{\text{par}} = 145^\circ 19' 37''; \quad \Sigma \gamma_{\text{vas}} = 114^\circ 35' 27''; \quad I + II = 149^\circ 15' 10''; \quad w = +40''.$$

3. Koordinaatide juurdekasvude arvutamine ja tasandamine kolmnurkades.

$$(AP_1) = (\gamma_1) = 228^{\circ}29'05'' - 76^{\circ}29'46'' = 151^{\circ}59'19''.$$

Nr.	Nurgad	Direktsioon- nurgad	Küljed	Juurdekasvud	
				Δ_x	Δ_y
1	43°50'43''				
γ_1	27°18'33''	151°59'19''	2 959,00	-2 612,36	+1 389,66
2	108°50'44''	304°40'46''	2 165,85	+1 232,33	-1 781,08
		15°50'02''	1 434,46	+1 380,03	+ 391,41
1				0	-1
γ_2	63°15'21''			-1 232,33	+1 781,08
3	70°25'13''	124°40'46''		-1 562,08	-1
4	46°19'26''	234°15'33''	2 674,24	-1 562,08	-2 170,59
		7°56'07''	2 821,43	+2 794,41	+ 389,52
				0	+1
5	34°59'58''			-2 794,41	- 389,52
γ_3	60°23'46''	187°56'07''		+ 990,42	-1 288,91
6	84°36'16''	307°32'21''	1 625,49	-1	-1 288,91
		42°56'05''	2 464,04	+1 804,00	+1 678,42
5				+1	+1
γ_4	51°19'55''			- 990,42	+1 288,91
7	76°20'27''	127°32'21''		+1	+1 288,91
8	52°19'38''	231°11'54''	1 603,45	-1 004,77	-1 249,60
		358°52'16''	1 995,57	+1 995,18	+1
γ_4				-1	-1
9	75°34'38''			-1 995,18	+ 39,32
γ_5	57°37'35''	178°52'16''		+1 375,27	-2 266,85
10	46°47'47''	301°14'41''	2 651,41	+1 375,27	-2 266,85
		74°26'54''	2 312,18	+ 619,91	+2 227,53
9				0	0

4. Juurdekasvude lõplik tasandamine.

Punktid	Δx	Δx parandused	Δy	Δy parandused	Parandatud	
					Δx	Δy
B	-1 375,27	-0,43	+2 266,85	+0,71	-1 375,67	+2 267,58
P_5	+1 995,18	+0,03	- 39,32	+0,02	+1 995,81	-39,35
P_4	- 990,41	+0,63	+1 288,91	-0,01	- 990,70	+1 289,32
P_3	+2 794,41	0,00	+ 389,52	+0,40	+2 795,29	+ 389,61
P_2	-1 232,33	+0,02	+1 781,07	+0,01	-1 232,70	+1 781,65
P_1	+2 612,36	-0,39	-1 389,66	+0,56	+2 613,16	-1 390,13
A		+0,82		+0,02		
		-0,02		-0,44		
	+3 803,94	+1,25	+4 297,37	+1,31	+3 805,19	+4 298,68
	+3 805,19		+4 298,68			
	-1,25		-1,31			

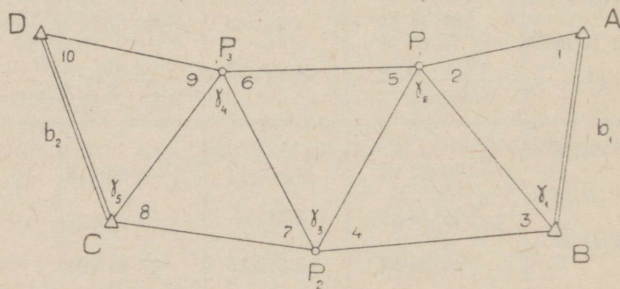
$$\tan T = -\frac{4\,297,37}{3\,803,94} = 1,129716; T = 48^\circ 29' 07'',6; Su = 5\,739,11; k = 0,000314;$$

$$\Delta T = 48^\circ 29' 05'' - 48^\circ 29' 07'',6 = -2'',6.$$

$$k_1 = -0,0000126.$$

§ 86. Ahel kahe antud külje vahel.

Kahe antud külje AB ja CD vahele ahela asetamisel on teada nende külgede otsapunktide kindlad koordinaadid, järelikult on teada direktsioonnurgad (AB) ja (CD), samuti aga ka pikkused



Joonis 43.

§ 88. Koordinaatide tingimus.

Kolme ülalpool esitatud tingimuse (direktsioonnurkade tingimuse, figuuride tingimuse ja külgede tingimuse) täitmine viib selleni, et lõppkülg selle algküljest arvutamise tulemusena evib oma pikkust ja võtab antule paralleelse asendi. Kui aga pärast nende tingimuste täitumist arvutada lõpp-punktide koordinaadid, näiteks punkti C koordinaadid käiku BP_2C mööda ja punkti D koordinaadid käiku AP_1P_3D mööda, siis võib koordinaatides ilmned a mõnesugune sulgemisviga (koordinaatide juurdekasvudes saadakse sulgemisviga mõlemaid käike mööda ühesuurune ja ühesuguste märkidega). Koordinaatide tingimus nõuab, et neid või teisi käike mööda alguskindelpunktidest koordinaatide siirmisel saadaks lõppkindelpunktide koordinaadid. See tingimus on väga keerukas, sest et koordinaatide juurdekasvud sõltuvad direktsioonnurkadest ja külgedest, viimased aga omakorda sõltuvad nurkadest.

Koordinaatide tingimuse lihtsustatud täitmine võib toimuda järgmisel viisil.

Esiailgu arvutatakse kõigi punktide koordinaadid mõlemast antud küljest. Seejuures iga punkti jaoks saadakse kahed erinevad koordinaatide väärtused, milledest tõenäolisim väärtus määratakse kaalude järgi. Lihtsaimail juhtumel võib kaaludeks võtta antud küljest kuni koordinaatidega määratava punktini möödunud kolmnurkade hulga pöördarvud. Täpsemalt arvutatakse kaalud keskmiste ruutvigade järgi. Koordinaatide (abstsisside ja ordinaatide) keskmiste ruutvigade arvutamiseks on „Geodeetilise põhitamise ja topograafilise mõõdistuse, mõõtkavas 1 : 10 000, teostamise instruksioonis“ toodud järgmine valem:

$$m_{x,y} = m \sqrt{\frac{d^2}{18 \rho^2} n(n^2 + 5)},$$

kus d on ahela keskmine küljepikkus, m — nurga keskmine ruutviga sekundeis, $\rho = 206\,265$.

Seda valemit võib kujutada järgmiselt:

$$m_{x,y} = 0,00114272 \sqrt{n(n^2 + 5)} \cdot md,$$

kusjuures d oletatakse siin avaldatud kilomeetreis. Korrutis md on antud ahela jaoks muutumatu suurus. Märkides tema ees oleva koefitsiendi k -ga saame:

$$m_{x,y} = kmd. \tag{113}$$

k väärtused võib võtta argumendi n järgi järgmisest tabelist:

n	k	n	k
1	0,0027	7	0,0222
2	0,0048	8	0,0268
3	0,0074	9	0,0318
4	0,0105	10	0,0370
5	0,0140	11	0,0425
6	0,0179	12	0,0483

Kaalud saame tuntud valemi järgi:

$$P_{x,y} = \frac{1}{m^2_{x,y}}$$

Et vältida ahela külgede ja direktsioonnurkade arvutamist, võib koordinaadid saada Jungi valemi järgi. Nii saame ahelas joonisel 43 nurkade 1 ja γ_1 järgi küljest AB punkti P_1 koordinaadid, siis nurkade γ_2 ja 3 järgi punkti P_2 koordinaadid jne. Küljest CD arvutame algu punkti P_3 koordinaadid nurkade 10 ja γ_5 järgi, siis punkti P_2 koordinaadid nurkade 8 ja γ_4 järgi jne.

§ 89. Ahel kahe baasi vahel.

Mõnikord, kui paikkonnas ei ole olemas kõrgema klassi alust, rajatakse iseseisev V klassi võrk, kusjuures baasid mõõdetakse ahela alguses ja lõpus. Sellise kahe baasi vahelise ahela tasandamine ei erine millegi poolest kahe külje vahele rajatud ahela tasandamisest, — ta ainult lihtsustub seetõttu, et siin puudub koordinaatide tingimus.

Mõlema baasi jaoks üldreeglina määratakse tõelised asimuudid, mis arvutatakse ümber direktsioonnurkadeks. Kui tõeline asimuut on määratud ainult ühe külje jaoks, siis ei ole ka direktsioonnurkade tingimust. On ilmne, et sellisel juhtumil figuride tingimusest tulenev sulgemisviga jaotatakse vastupidise märgiga võrdselt kõigile 3-le nurgale.

§ 90. Kõrgusvahede tasandamine.

Kõrgusvahede tasandamine V klassi võrkudes (trigonomeetrilise nivellimise juures) toimub kaudsete mõõtmiste meetodiga (vt. § 21—23 ja 34). Selleks koostatakse võrgu skeem, arvutatakse kõigi

punktide ligikaudsed kõrgused, arvutatakse vabaliikmed ja siis koostatakse ning lahendatakse normaalvõrrandid.

Antud juhtumil on kõik punktid ilmselt sõlmpunktid ja järelikult võrrandeid saadakse niisama palju, kui on punkte (välistades geomeetrilisel nivellimisel saadud kindlate kõrgustega punktid).

Võrrandite koostamiseks vajalikud sulgemisvead saadakse valemi järgi:

$$w = h - (H_2 - H_1) = H_1 + h - H_2, \quad (114)$$

kus H_2 on joone lõppotsa (punkti, millele näitab joonel olev nool) ligikaudne kõrgus, H_1 — joone algpunkti ligikaudne kõrgus ja h — joone kõrgusvahe noole näitamise kohaselt.

Kõrgusvahede kaaludeks võetakse vastavate joonepikkuste ruutude pöördarvud:

$$p = \frac{k}{d^2} \quad (115)$$

Kaaluühiku keskmine ruutviga saadakse nii:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[pw^2] + [pw]x}{(m - n)k}} \quad (116)$$

(vt. valem 32).

Üksildase punkti, vähemalt kolmest kindelpunktist ühesuunalise nivellimise juhtumil, kõrguse määramine toimub nii: arvutatakse punkti kõrgused kõigi siirmiste järgi, ja kui saadud kõrguste vahelised lahknevused ei ületa lubatud piire, arvutatakse nende järgi kaalutud aritmeetiline keskmine, võttes kaaludeks vastavate joonte ruutude pöördväärtused.

XI peatükk.

TEADMISI SFAÄRILISEST ASTRONOOMIAST. AEG JA SELLE MÕÕTMINE.

§ 91. Maa ööpäevane pöörlemine. Maa teljest sõltuvad konstruktsioonid Maa pinnal.

On teada, et Maa pöörleb oma telje SN (joonis 44) ümber, kusjuures see pöörlemine toimub täiesti ühtlaselt, ilma igasuguse kiirenduseta, aeglustamiseta ja tõukeita. Pöörlemise suund on läänest itta (kui vaadata põhja poole, siis kellaosuti käigu suunas). Täielik pööre teostub 24 tunni (ööpäeva) jooksul.

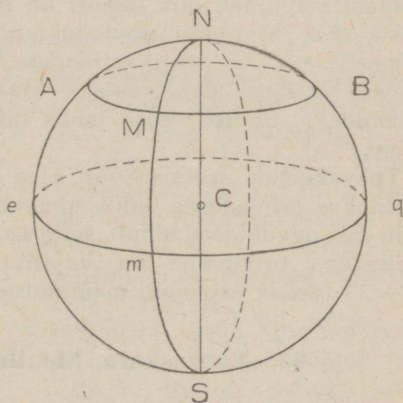
Kõigi Maa pinnal toimuvate konstruktsioonide aluseks on loomulik võtta mainitud Maa telg SN, sest et selle asend Maa sees on muutumatu.

Meenutagem neid konstruktsioone.

Punkte S ja N, kus Maa telg lõikub Maa pinnaga, nimetatakse *Maa poolusteks*, N — põhjapoolus, S — lõunapoolus.

Kui lõigata Maad tsentrit C läbiva ning teljele risti oleva tasapinnaga, siis selle lõikes Maa pinnaga saadakse suuriring emq, mida nimetatakse *Maa ekvaatoriks*. Ekvaatori tasapind lõikab Maa kaheks poolkeraks — põhja- ja lõunapoolkeraks.

Väikeringe, mille tasapinnad on paralleelsed ekvaatori tasapinnaga, nimetatakse *paralleelideks*; selline on näiteks paralleel A M B.



Joonis 44.

Kui lõigata Maad tema telge (pooluseid) läbiva tasapinnaga, siis lõikes saadakse ringjooned, mida nimetatakse *meridiaanideks*; selline on näiteks meridiaan NMmS. On ilmne, et paralleele ja meridiaane võib Maa pinnale tõmmata kuipalju tahes (läbi Maa pinna mistahes punkti võib tõmmata meridiaani ja paralleeli). Ekvaatoreid aga on Maal ainult üks.

Arutatud konstruktsioonid on väärtuslikud seepoolest, et nad on muutumatud. Seepärast on nendest loomulik määrata punktide asukohti Maa pinnal. Selleks, nagu me teame, on olemas geograafilised koordinaadid — pikkus ja laius, joonte orienteerimiseks aga kasutatakse meridiaanide suundi. Siiski nad evivad seda ebamugavust, et nad ei ole millegagi maapinnal märgitud, seepärast ei ole võimalik alustada vaatlusi otseselt neist. Neid saab teostada ainult keerukate vaatluste ja arvutuste tulemusena.

§ 92. Geodeesia seos astronoomiaga.

Kõik geodeetilised vaatlused baseeruvad teatavasti loodijoonel, mis on hõlpsasti teostatav lihtsaima riistaga — ripploega, ja horisontaaltasapinnal, mis samuti on hõlpsasti teostatav vesiloe abil, riista abil, mis nagu ripploodki on sõltuv raskustungist. Ulesanne seisneb selles, et vertikaaljoonele või horisontaaltasapinnale baseeruvaid vaatlusi viia seosesse Maa teljele baseeruvate konstruktsioonidega. Sellise seose jaoks on vahelüliks taevakehade vaatlemine.

Taevakehade asetuse seost Maa pinnal olevate punktide asendiga uuritakse eriteaduses, mida nimetatakse praktiliseks astronoomiaks. Siin me puudutame ainult selle seose elementaarsemaid juhtumeid, milledega tutvumine on vajalik võrdlemisi väikese täpsusega (1'—2') tõelise asimuudi määramise selgitamiseks.

§ 93. Taevaskera. Maailmatelg, taeva poolused.

Maa ööpäevase pöörlemise tagajärjel oma telje ümber näib meile, et ööpäeva jooksul taevakehad liiguvad nii, nagu oleksid nad kinnitatud läbipaistva kera külge. Me teame, et see ei ole muud midagi kui nägemise pete; sellest hoolimata praktikas osutub see kujuteldav kera väga kasulikuks geomeetriliste konstruktsioonide jaoks.

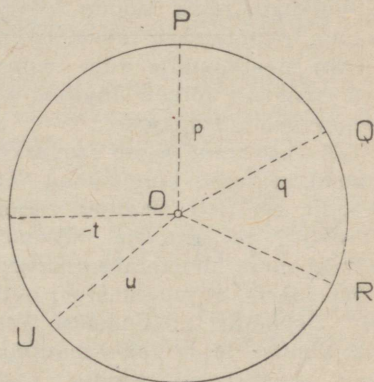
Kujuteldavat kera, millega koos meile näivad Maa ümber liikuvat kõik taevakehad, nimetatakse *taevaskeraks*.

Kõik taevakehad p, q, \dots, u (joonis 45), olenemata nende kaugusest kuni tsentrini O , milles asub vaatleja silm, näivad nagu kinnitatud taevaskera külge punktides P, Q, \dots, U . Need punktid on taevakehade projektsioonid taevaskerale. Tuleb märkida, et ei ole mõtet rääkida jooneliste kauguste üle meist kuni nende projektsioonideni: nad on meist lõpmata kaugel. Võib rääkida ainult nende kulgevate suundade üle.

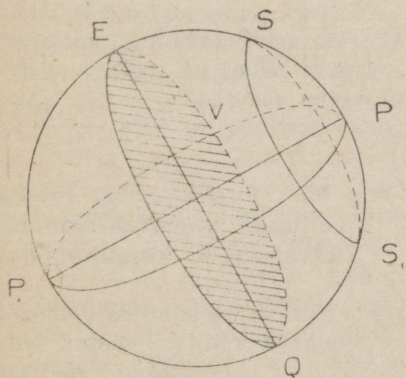
Taevaskera pöörlemine on ööpäevalise pöörlemise peegeldus ja seepärast ta evib kõiki viimase omadusi. Taevaskera pöörlemine toimub idast läände (kui vaadata põhja poole, siis kellaõsuti käigu vastu) mõninga diameetri PP_1 ümber (joonis 46), mida nimetatakse maailmateljeks.

Maailmatelje ja taevaskera kahte lõikepunkti nimetatakse *taeva poolusteks* (punktid P ja P_1).

On ilmne, et maailmatelg on Maa telje pikenduseks. Et aga taeva poolused asetsevad meist lõpmata suures kauguses, siis suund nendele on Maa mistahes punktist paralleelne maailma teljega (lõpmatuses lõikuvad sirgjooned ongi paralleeljooned). Sel viisil võib suuna vaatepunktist pidada maailmatelge vaatleja silma läbivaks.



Joonis 45.



Joonis 46.

Üldiselt, nagu juba mainitud, ei oma joonelised mõõted taevaskera suhtes tähtsust, kogu Maa koondub punktiks, mis ühtib taevaskera tsentriga. Tähendust omab ainult suund sellest punktist ja mugavuse mõttes me loeme selle punkti ühtinuks vaatleja silmaga või üldiselt vaatleja seisupunktiga.

Tõelise horisondi lõikumine taevaskeraga toimub mööda suur-
ringi HWRO, mida nimetatakse *taevahorisondiks*.

Tõelise horisondi tasapinda võib pidada praktiliselt ühtivaks
temaga paralleelse, Maa tsentrit läbiva tasapinnaga.

Ulespoole pikendatud vertikaaljoone ja taevaskera lõikepunkti
Z nimetatakse *seniidiks*. Temale diametraalselt vastasolevat punkti
 Z_1 nimetatakse *nadiiriks*.

Ule seniit-nadiiri joone (üle vertikaaljoone) võib tõmmata lõp-
matu hulga tasapindu, mis lõikes taevaskeraga moodustavad suur-
ringe. Kõiki neid ringjooni nimetatakse *vertikaalideks* ehk *kõrgus-
ringideks*.

Uheaegselt vertikaaljoont ja maailma telge läbivat tasapinda
nimetatakse *meridiaanitasapinnaks*; tema lõige taevaskeraga moo-
dustab *meridiaani* (joonis 47, ringjoon H E Z P R Q Z_1 P₁, joonise
tasapinnal).

Meridiaanitasapinna ja tõelise horisondi lõikejoont nimetatakse
keskpäevajooneks (joon H R), ta määrab punktil põhja- ja lõuna-
suuna.

Seniit-nadiiri joont, risti meridiaanitasapinnaga läbivat tasapinda
nimetatakse esimese vertikaali tasapinnaks. Tema lõige taevas-
keral annab suurringi, mida nimetatakse *esimeseks vertikaaliks*
(ringjoon Z O Z_1 W).

Esimese vertikaali tasapinna lõikejoon tõelise horisondiga (joon
W O) määrab punktil ida- ja läänesuuna.

Kõik loeteldud konstruktsioonid kui vertikaaljoonest sõltuvad
jäävad punkti määramise jaoks muutumatuks, — nad just kuuluvad
Maa pinna antud punktile. Taevaskera ööpäevasest pöörlemisest
nad osa ei võta, ja kui näiteks kujutella antud punkti meridiaan,
siis tuleb kujutella, et see meridiaan seisab paigal, kuid taevakehad,
ilmudes idas ja pidevalt tõustes üle horisondi, liginevad meridiaan-
ile, lõikavad selle ja pärast seda momenti hakkavad langema lääne
poole.

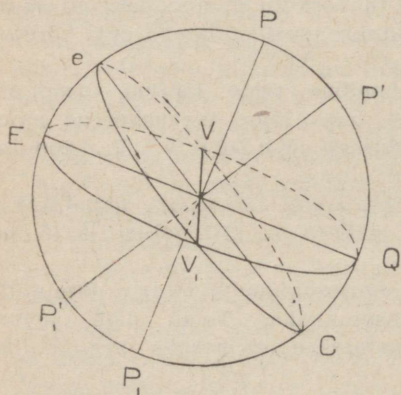
Taevakehade läbimine meridiaanist omab erilist tähtsust. Seda
momenti nimetatakse taevakeha *kulminatsiooniks*.

On ilmne, et ööpäeva jooksul iga taevakeha lõikab meridiaani
kaks korda. Nii eristatakse kahte kulminatsiooni: ülemist, kui taeva-
keha võtab üle horisondi kõige kõrgema asendi, ja alumist. Mõne-
del taevakehadel toimuvad mõlemad kulminatsioonid horison-
dist kõrgemal. Selliseid taevakehasid nimetatakse *mitteloju-
vaiks*.

§ 96. Ekliptika.

Maa aastase tiirlemise tagajärjel Päikese ümber me projekttime erinevail aastaegadel Päikese taevaskera erinevatele kohtadele. Seejärest näib meile, et Päike tõmbab aasta jooksul taevaskerale suurringi, kusjuures selle pidev liikumine näib toimuvana läänest ida poole. Seda ringi nimetatakse ekliptikaks (joonis 48 — eC).

Ekliptika tasapind lõikub ekvaatori tasapinnaga $23^{\circ}30'$ -lise nurga all; seda nurka nimetatakse *ekliptika kallakuseks ekvaatorile*.



Joonis 48.

Ekliptika tasapinnaga risti olev diameeter määrab taevaskeral kaks punkti P' ja P'_1 , mida nimetatakse *ekliptika poolusteks*.

Ekliptika tasapinna lõikejoont ekvaatori tasapinnaga (joon $V V_1$) nimetatakse *päeva ja öö võrdsuste (ekvinoktsiumide) jooneks*.

Ekliptika ja ekvaatori lõikepunkte nimetatakse *päeva ja öö võrdsuste (ekvinoktsiumide) punktideks*:

a) V on kevadpunkt, milles Päike asetseb lõunapoolkerast

põhjapoolkerasse siirdumisel — kevadine ekvinoktsium — (21. märtsil);

b) V_1 on sügispunkt, milles Päike on põhjapoolkerast lõunapoolkerasse siirdumisel — sügisene ekvinoktsium — (23. septembril).

Päikese suurim kõrgus üle ekvaatori on 22. juunil (suvine solstiitsium) *suvise pööripäeva* punktis (punkt e). Päikese vähim kõrgus üle ekvaatori on 22. detsembril (-talvine solstiitsium) — *talvise pööripäeva* punktis (punkt C).

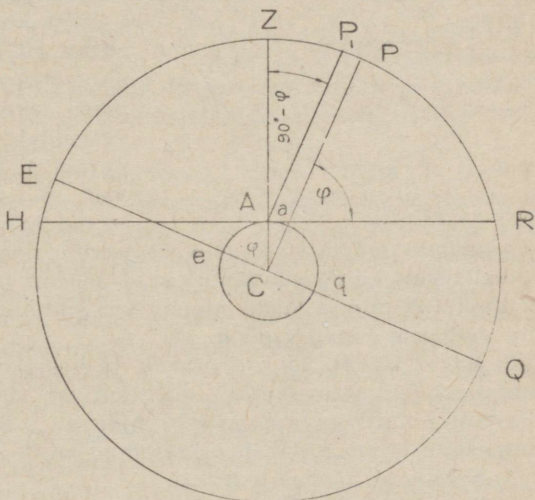
§ 97. Maailmatelg moodustab antud koha horisonidiga nurgamis on võrdne antud koha geograafilise laiusega.

Olgu HR (joonis 49) Maa mingi punkti A keskpäevajoon, joon AP_1 — suund sellest punktist taeva poolusele, joon CP — maailmatelg. Mõlemad viimased jooned lõikuvad taeva pooluses, kuid et maailmatelg asetseb lõpmata kaugel, siis need jooned praktiliselt on

paralleelsed. Selle tagajärjel nurk $PaR = \text{nurgaga } P_1AR$ kui vastavad nurgad paralleeljoonte P_1A ja Pa juures. Kuid nurk P_1AR võrdub geograafilise laiusena φ (kui vastastikku ristiolevate haaradega nurgad). Järelikult ka nurk $PaR = \varphi$, s. t. maailmatelg moodustab Maa mistahes punkti horisondiga selle punkti geograafilise laiusena võrdse nurga.

Kaar PZ ja kaar P_1Z on ilmselt üks ja sama, sest punktid P_1 ja P ühtivad Maailma pooluses (tuletamise lihtsustamiseks on

nad joonisel eraldatud). Kaar PZ või kaar P_1Z aga võrdub silmanähtavalt $90^\circ - \varphi$. Teiste sõnadega — maailmapooluse ja Maa mingi punkti seniidi vaheline taevaskera kaar moodustab selle punkti laiuse täienduse kuni 90° -ni. Seda tähtsat sõltuvust me kasutame edaspidi sageli valemite tuletamisel tõelise asimuudi määramiseks.



Joonis 49.

§ 98. Taevakoordinaadid.

Taevakehade asukohta taevaskeral määratakse taevakoordinaatidega. Meil on vaja tutvuda kahe taevakoordinaatide süsteemiga: horisondilise ja ekvaatorilise. Esimeses süsteemis taevakehade asukoht määratakse tõelise horisondi suhtes, teises — taevaekvaatori suhtes.

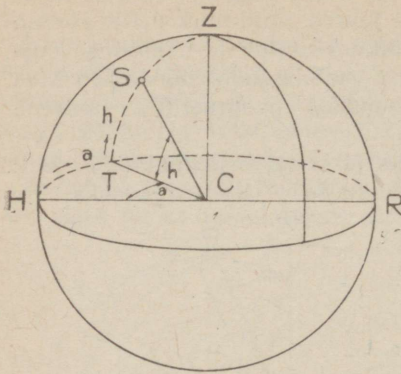
Horisondilises süsteemis esimest koordinaati, kaart TS (või nurka TCS vertikaali tasapinnas, joonis 50), nimetatakse kõrguseks ja märgitakse tavaliselt tähega h . Kõrgus väljendab taevakeha kõrgust (nurkkaugust) tõelisest horisondist HTR . Teda mõõdetakse kõrgusringi ZST mööda ja loetakse 0° kuni 90° , — horisondist seniidi poole positiivseks ja horisondist nadiiri poole negatiivseks.

Kõrguse asemel kasutatakse sagedasti seniidikaugust Z , mis täiendab kõrgust täisnurgani:

$$Z = 90^\circ - h. \quad (117)$$

Zeniidikaugusi loetakse 0° kuni 90° -ni ülalpool horisonti ja 90° kuni 180° -ni allpool horisonti.

Teist koordinaati, kaart HT (või nurka HCT horisondi tasapinnas) nimetatakse asimuudiks ja märgitakse tavaliselt tähega a . Asimuut väljendab vastava kõrgusringi nurgalist kaugust horisondil olevast lõunapunktist H (keskpäeva joone lõunapoolsest otsast).



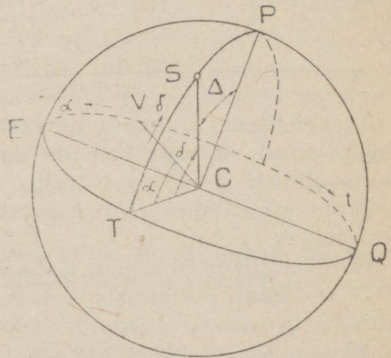
Joonis 50.

Asimuute mõõdetakse taevahorisondi ringi mööda lõunapunktist H kellaosuti käigu suunas 0° kuni 360° -ni (mõnikord loetakse neid 0° kuni 180° ida ja lääne suunas, sel juhtumil idasuunalised asimuudid võetakse negatiivseiks).

Et antud punkti jaoks horisont ja keskpäevajoon evivad muutumatut asendit, taevakehad aga liiguvad, siis taevakeha kõrgus ja asimuut muutuvad aja jooksul pidevalt. Seda öeldakse nii: iga taevakeha liigub pidevalt asimuuti ja kõrgust mööda.

Märgime, et kõrgus h ja asimuudi a astronoomilised mõisted on identsed vertikaalnurga (kaldnurga) ja asimuudi geodeetiliste mõistetega. Et aga geodeetilisi asimuute loetakse keskpäevajoon põhjapoolsest otsast, siis nende suurus erineb astronoomiliste asimuutide suuruselt (ühtede ja samade joonte jaoks) 180° võrra.

Esimest koordinaati ekvatoriaalises süsteemis, kaart TS (või nurka TCS deklinatsiooniringi tasapinnas, joonis 51), nimetatakse kändeks ehk deklinatsiooniks ja märgitakse tava-



Joonis 51.

liselt tähega δ ; ta väljendab taevakeha nurgalist kaugust ekvaatoritasapinnast.

Käändeid mõõdetakse deklinatsiooniringe mööda ja loetakse 0° kuni 90° -ni: positiivsed (ehk põhjapoolsed) ekvaatorist põhjapooluse poole ja negatiivsed (ehk lõunapoolsed) ekvaatorist lõunapooluse poole.

Mõnikord käände asemel võetakse kaar $SP = \Delta$. Seda koordinaati nimetatakse *poolusekauguseks*. Joonisest 51 on näha, et

$$\Delta = 90^\circ - \delta. \quad (118)$$

Teist koordinaati, kaart VET (või nurka TCV ekvaatori tasapinnas) nimetatakse *otsetõusuks* ehk *rektastsensiooniks* ja märgitakse tavaliselt tähega α ; ta väljendab vastava deklinatsiooniringi nurgalist kaugust kevadpunktist.

Otsetõusu mõõdetakse taevaekvaatori ringi mööda ja loetakse 0° kuni 360° -ni läänest itta (taevaskera liikumise vastassuunas). Otsetõusu asemel teiseks koordinaadiks võetakse mõnikord kohaliku meridiaani ja deklinatsiooniringi vaheline nurk. Seda nurka nimetatakse *aegnurgaks* (*tunninurgaks*) ja märgitakse tähega t .

Antud taevakeha jaoks kääne ja otsetõus püsivad muutumatuina (kui mitte arvestada pretsessiooni ja nutatsiooni).

Nende suurused arvutatakse tavaliselt astronoomide poolt aastaks ette ja avaldatakse astronoomilisis kalendreis, seepärast me peame neid kõigis küsimustes antuiks (teatavaiks).

Taevakeha aegnurk ööpäeva jooksul muutub nullist kuni 360° -ni. Kui taevakeha on meridiaanis (ülemises kulminatsioonis), siis aegnurk tingimuse kohaselt võrdub nulliga. Pärast seda eemaldub taevakeha püsivalt meridiaanist lääne poole, tema aegnurk suureneb. Alumise kulminatsiooni momendil tema aegnurk võrdub ilmselt 180° . Edasi ta jällegi suureneb kuni ülemise kulminatsiooni momendini, millal ta evib väärtust 360° või 0° , mis on üks ja sama.

Niisiis aegnurkade loendust tuleb teha meridiaanist läände minevate nurkadega.

§ 99. α ja t avaldamine ajas. Kaare siirmine ajaks ja vastupidi.

Ööpäeva (24 tunni) jooksul taevakeha tõmbab taevaskerale täisringi, s. t. 360° -lise kaare. Uhetunnilise aja jooksul ta läbib $360^\circ : 24 = 15^\circ$ kaart, 1 ajaminutis — 15 kaareminutit ja 1 ajasekundis — 15 kaaresekundit. Õige on ka vastupidine järeldus: kui taevakeha ööpäevases liikumises läbis 15 kaarekraadi, siis ta liikus 1 ajatunni jne. Selle põhjal võib otsetõuse ja aegnurki väljendada

aja tundides, minuteis ja sekundeis. Selleks on ilmselt vaja nende nurgamõõduline väljendus jagada 15-ga. Vastupidiseks siirmiseks on vaja ajamõõdus antud väljendus korrutada 15-ga.

Näide 1. Aegnurk $t = 58^{\circ}17'38''$ avaldada ajas.

$$58^{\circ} : 15 = 3 \text{ ja jääk } 13^{\circ} = 780'$$

$$(780' + 17') : 15 = 53 \text{ ja jääk } 2' = 120''$$

$$(120'' + 38'') : 15 = 10,53.$$

Tähendab, $t = 3$ tundi 53 min. 10,53 sek.

Näide 2. Otsetõus $\alpha = 4$ tundi 47 min. 31,6 sek. avaldada kaares.

$$31,6 \cdot 15 = 474' = 7' + 54''$$

$$47 \cdot 15 + 7 = 712' = 11^{\circ} + 52''$$

$$4 \cdot 15 + 11 = 71^{\circ}.$$

Tähendab, $\alpha = 71^{\circ}52'54''$.

§ 100. Täheaeg.

Tähtede kahe järgse ülemise (või alumise) kulminatsiooni ajavahemikku nimetatakse tähe ööpäevaks.

Tähe ööpäeva alguseks võetakse kevadpunkti ülemise kulminatsiooni moment.

Täheaega mõõdetakse eriliste ajanäitajatega (tähe kronomeetrid). Täheaega märgitakse tavaliselt tähega θ .

§ 101. Otsetõusu, aegnurga ja täheaja vahetõus.

Konstrueerime taevakeha aegnurga ET (joonis 52) ja tema otsetõusu. Joonisest 52 saame:

$$\sphericalangle EV = \sphericalangle VT + \sphericalangle ET. \quad (a)$$

EV on aga kevadpunkti aegnurk. Et aga kevadpunkti kulminatsiooni moment võetakse tähe ööpäeva alguseks, siis $EV = \theta$.

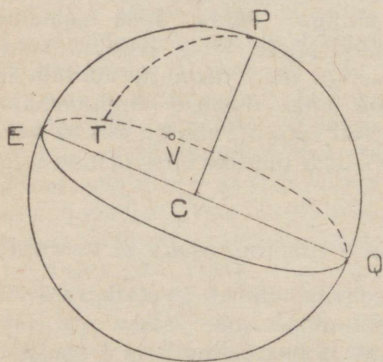
Järelikult võrdsusest (a) saame:

$$\theta = \alpha + t, \quad (119)$$

s. t. täheaeg võrdub mistahes taevakeha aegnurga ja tema otsetõusu summaga (muidugi avaldatud ajamõõdus).

Taevakeha ülemise kulminatsiooni jaoks tema aegnurk $t = 0$; järelikult selle momendi jaoks on: $\theta = \alpha$, s. t. täheaeg

võrdub ülemises kulminatsioonis oleva taevakeha otsetõusuga.



Joonis 52.

§ 102. Tõeline ja keskmine päikeseaeg.

Päikese kevadpunkti kahe järgse ühenimelise kulminatsiooni ajavahemikku nimetatakse tõeliseks päikese ööpäevaks.

Et Päike liigub ekliptikat mööda ebaühtlaselt ja et ekliptika on ekvaatori suhtes kallutatud, siis selle tagajärjel tõeline ööpäev on kord lühem, kord pikem. Seetõttu ühtlaselt käivad kellad ei saa täpselt näidata tõelist päikeseaega. Et vältida tõelise päikese järgi ajaarvamisega seotud ebamugavusi, on astronoomias võetud tarvitusele keskmise päikese mõiste.

Keskmiseks päikeseks nimetatakse ekvaatorit mööda (mitte aga ekliptikat mööda) ühtlaselt liikuvat kujuteldavat punkti, mis teostab oma aastase teekonna tähtede vahel täpselt sama ajaperioodi vältel nagu tõeline päikegi.

Keskmise päikese kahe järgse ühenimelise kulminatsiooni ajavahemikku nimetatakse keskmise päikese ööpäevaks.

Tunde loetakse ööpäevas 0 kuni 24-ni. Keskmise päikese ööpäeva alguseks võetakse keskmise päikese alumine kulminatsioon — keskmine kesköö.

Et tõeline päike liigub ebaühtlaselt, siis osutub ta aasta kestel keskmisest päikesest kord ees, kord järel olevaks. Tähendab, ka tõeline aeg on keskmisest ajast kord ees, kord järel.

Keskmise ja tõelise aja vahet aasta antud momendil nimetatakse ajavõrrandiks. Nimetades ajavõrrandi tähega E saame:

$$E = T_{\text{ksk}} - T_{\text{tõel}} \quad (120)$$

Teades ajavõrrandit on hõlpus antud momendi keskmist aega siirda tõeliseks ajaks ja vastupidi.

Ajavõrrand aasta erinevate momentide jaoks arvutatakse ette ja avaldatakse astronoomilisis kalendreis.

Tõeline ja keskmine päikeseaeg on ilmselt identne tõelise ja keskmise päikese aegnurgaga. Ainult ülalmainitud lugemise juures (keskööst) on nende võrdsuseks vaja aegnurka suurendada 12 tunni võrra.

§ 103. Troopiline aasta. Keskmise aja ja täheaja vahekord.

Päikese kahe järgse kevadpunkti läbimise ajavahemikku (aastases ekliptikat mööda liikumises) nimetatakse troopiliseks aastaks.

Troopiline aasta sisaldab endas 365,2422 keskmist päikese ööpäeva.

Päike liigub ekliptikat mööda läänest itta, kusjuures ta aasta jooksul tõmbab taevaskeral tähtede vahele täieliku ringjoone. Tähendab, iga päev ta läbib $\frac{1}{365}$ ringist või ligikaudu 1° . Niisiis ööpäevases liikumises kahe järgse ühenimelise kulminatsiooni vahel läbib Päike ligikaudu 361° , kuna aga tähed kulmineerivad täpselt pärast 360° läbimist. Selle tagajärjel on päikese ööpäevad pikemad täheööpäevadest, kusjuures aasta vältel nende vahe kuhjudes iga ööpäevaga moodustab täpselt ühe tähe-ööpäeva, seepärast troopilises aastas on 366,2422 tähe-ööpäeva.

Esitatu põhjal on hõlpus tuletada keskmise ja tähe-ööpäeva kohta niisugune vahekord:

365,2422 keskmist päikese ööpäeva sisaldavad 366,2422 tähe-ööpäeva, aga üks keskmine ööpäev — $366,2422 : 365,2422 = 1,002738$ tähe-ööpäeva.

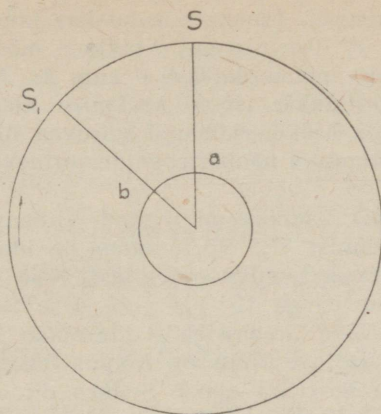
Teisest küljest 366,2422 tähe-ööpäeva sisaldavad 365,2422 keskmist päikese ööpäeva, aga üks tähe-ööpäev — $365,2422 : 366,2422 = 0,997270$ keskmist ööpäeva.

Kasutades koefitsiente 1,002738 ja 0,997270 võib keskmise aja mistahes intervalli üle viia täheajale ja vastupidi. Keskmise aja siirmitel täheajaks on vaja keskmine aeg korrutada 1,002738-ga, vastupidiseks siirmiseks aga on vaja antud täheaeg korrutada 0,997270-ga. Siirmiste hõlbustamiseks olelevad eritabelid.

On hõlpus arvutada, et keskmine päikese ööpäev moodustab 24 tundi $\times 1,002738 = 24$ tundi 03 min. 56,57 sek. täheajaga, s. t. keskmine päikese ööpäev on tähe-ööpäevast pikem täheaja 3 min. 56,57 sek. võrra.

§ 104. Kohalik aeg.

Joonisel 53 on kujutatud joonise tasapinnal Maa- ja taevaekvaatorid (nii, nagu vaadataks neile maailma põhjapoolusest). Asugu antud ajamomendil keskmine päike Maa pinna punkti a meridiaanis, s. t. ülemises kulminatsioonis, nii et selle punkti keskmine aeg antud momendil oleks 12^h . Punktist a näiteks 4 tunni pikkuse (kaar $ab = 60^\circ = 4$ tundi) võrra ida pool asetseva punkti b jaoks asub päike sel momendil selle punkti meridiaanist lääne pool kaare $S_1 S = ba$ võrra, s. t. 4 tunni võrra, ja keskmine kell näitab $12 + 4 = 16^h$. Sel viisil ühel ja samal füüsilisel momendil keskmise kella näitamised on Maa erinevate meridiaanide jaoks erinevad, kusjuures Maa kahe punkti vahe ajas võrdub Maa nende punktide geograafiliste pikkuste ajas avaldatud vahega.



Joonis 53.

Vaatluskoha meridiaani keskmist päikese-aega nimetatakse kohalikuks ajaks. Järelikult võib öelda, et eri meridiaanidel asetsevate Maa punktide kohalikud ajad erinevad üksteisest nende pikkuste vahe võrra. On hõlpus selgitada, et sama reegel kehtib ka tõelise ja täheaja jaoks. Sel viisil on alati õige valem:

$$l = \theta_2 - \theta_1, \quad (121)$$

kus θ_1 ja θ_2 on kahe punkti kohalikud täheajad, või keskmised või tõelised ajad, ja l on nende punktide pikkuste vahe.

Kõik efemeriidid (astronoomilised tabelid taevakehade koordinaatidega) antakse keskmise Greenwich'i aja järgi. Et Greenwich'i pikkus võetakse võrdseks nulliga, siis tabeliaja kohalikuks ajaks siirmise jaoks on vaja tabeli ajaga liita ajas väljendatud koha pikkus Greenwich'ist. Vastupidi, kohaliku aja siirmise jaoks Greenwich'i ajaks on vaja antud kohalikest ajast lahutada pikkus Greenwich'ist.

§ 105. Tsooni- (vöötme-) aeg.

Eelmise paragrahvi kohaselt peab iga asustatud punkt omama oma kohaliku aega, mis määratakse kindlaks selle täpsusega, mida võimaldavad punktis kasutada olevad pikkuse ja aja mõõtmise vahendid. See aga loob segaduse linnadevahelises läbikäimises. Selle vältimiseks on peagu üle kogu maakera kehtestatud tsooni-aeg, mille

olemus seisneb järgmises. Maakera jagatakse meridiaanidega tsoonideks (vöötmeiks) 15° -lise ulatusega pikkust mööda. Järelikult on kokku 24 tsooni, mis nummerdatakse 0 kuni 23. Aja lugemist kogu tsooni ulatuses sooritatakse tsooni *keskmise meridiaani* kohaliku aja järgi. Et tsoonide keskmeridiaanid seisavad üksteisest 15° kaugusel, siis kella näitamised naabertsoonides erinevad täpselt 1 tunni võrra.

Nulltsooni keskmeridiaaniks on võetud Greenwich'i meridiaan. Greenwich'i meridiaanist $7^\circ,5$ võrra lääne ja ida pool asetsevad meridiaanid moodustavad nulltsooni piirid. 1-se tsooni keskmeridiaan asetseb Greenwich'ist 15° ida pool, 1-se tsooni piirideks on meridiaanid $7^\circ,5$ ja $22^\circ,5$ Greenwich'ist ida poole jne.

Sellise tsoonide jaotuse tõttu on hõlpus mistahes tsooni aeg ümber arvutada Greenwich'i ajaks. Selleks on vaja antud tsooni ajast lahutada tsooni numbriga võrdne tundide arv. Näiteks moment Novosibirski aja järgi $10^h 40^m$ on Greenwich'i aja järgi $10^h 40^m - 6^h = 4^h 40^m$, sest et Novosibirsk kuulub 6-ndasse tsooni.

Keskmise Greenwich'i aja siirmise jaoks antud tsooni tsooniajaks on ilmselt vaja liita tsooni numbriga võrdne tundide arv. Kui näiteks Greenwich'is kell näitab $4^h 48^m$, siis on aeg 1. tsoonis $5^h 48^m$, 2. tsoonis — $6^h 48^m$ jne.

Selleks et mingi punkti tsooniaeg siirda kohalikuks ajaks, on vaja teada pikkuste vahet antud punkti ja selle tsooni keskmeridiaani vahel, milles asetseb punkt. Näiteks Novosibirsk asub 6-ndas tsoonis, mille keskmeridiaan evib pikkust 90° või 6 tundi. Novosibirski pikkus on $5^h 31^m 40^s$, vahe $= 5^h 31^m 40^s - 6^h = -28^m 20^s$. Novosibirski kohaliku aja saamiseks on see vahe vaja algebraliseelt liita tsooni-ajaga.

Märgime keskmeridiaani pikkuse L_0 -ga, antud punkti pikkuse L -ga ja tsooni-aja siirmise jaoks kohalikuks ajaks t tarviliku paranduse l -ga. Siis saame

$$l = L - L_0$$

$$t = T + l.$$

XII peatükk.

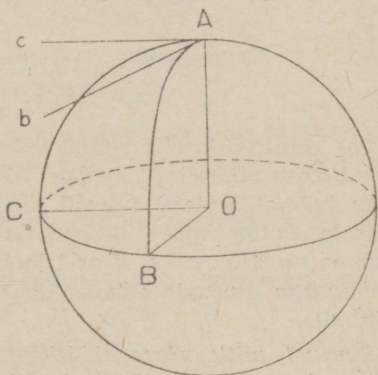
TEADMISI SFÄÄRILISEST TRIGONOMEETRIAST.

§ 106. Sfäärilised kolmnurgad.

Sfäärilisteks nimetatakse kolmnurki, mis asetsevad sfääril. Nad moodustuvad kolmest lõikuvast suuringi kaarest. Neid kaari nimetatakse sfäärilise kolmnurga külgedeks. Nii on kolmnurgas ABC (joonis 54) külgedeks AB, AC ja BC.

Sfäärilise kolmnurga külgi mõõdetakse nagu kaari üldse, nurgaühikutega, s. t. kraadidega või radiaanidega, nimelt aga nendele külgedele toetuvate tsentraalnurkade suurustega. Nii mõõdetakse külge CB nurgaga COB.

Sfäärilise kolmnurga nurki A, B ja C mõõdetakse kolmnurkade tippudes külgede puutujaist moodustatud nurkade kraadiliste suurustega, või, mis on sama, külgede tasapindade vaheliste kahetahuliste nurkade joonnurkadega. Nii mõõdetakse nurka A nurgaga cAb või nurgaga COB.

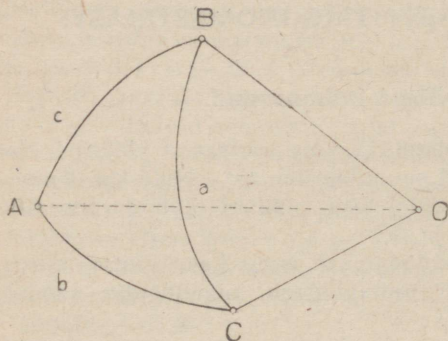


Joonis 54.

§ 107. Sfääriliste kolmnurkade külgede ja nurkade omadused. Sfääriline liig.

Sfääriliste kolmnurkade elementide vahelist seost käsitletakse matemaatilises eriteaduses, mida nimetatakse sfääriliseks trigonomeetriaks.

Selle seose leidmiseks võtame sfäärilise kolmnurga ABC (joonis 55) nurkadega A, B ja C ja vastaskülgedega a, b ja c ning tõmbame kolmnurga tippudest vastava kera keskpunkti O raadiused $AO = BO = CO = R$. Tulemusena saame kolmetahulise nurga CABO, mis on tihedas seoses antud sfäärilise kolmnurgaga. Sellest kolmetahulisest nurgast tuletataksegi kõik sfäärilise trigonomeetria põhilised olenevused. On ilmne, et kolmetahulises nurgas tasapinnalised nurgad tipu O juures on võrdsed antud sfäärilise kolmnurga



Joonis 55.

külgedega: nurk $BOC = a$, nurk $AOC = b$ ja nurk $AOB = c$, kahetahulised nurgad aga võrduvad sfäärilise kolmnurga vastavate nurkadega.

Geomeetriast on teada, et iga hulktahulise nurga tasapinnaliste nurkade summa on väiksem 360° -st. Sfäärilise kolmnurga jaoks (tema seose kohaselt kolmetahulise nurgaga) väljendub see omadus nii: *sfäärilise kolmnurga kolme külje summa on alati väiksem 360° -st.*

On kerge kujutella sellist kolmetahulist nurka, millel tema kahetahulistest nurkadest igaüks võrdub täisnurgaga. Sellised on näiteks kolmetahulised nurgad kuubi või rööptahuka tippudes. Sfäärilisele kolmnurgale rakendatult tähendab see, et tema nurkade summa on 270° . Sfäärilises trigonomeetrias tõestatakse, et *sfäärilise kolmnurga nurkade summa on alati suurem 180° -st* (kuid väiksem 540° -st).

Suurust, mille võrra sfäärilise kolmnurga nurkade summa ületab 180° , nimetatakse sfääriliseks liiaks ehk ekstsessiks.

Märkinud ekstsessi tähega E, saame:

$$A + B + C = 180^\circ + E. \quad (122)$$

Ekstsessi suurus sõltub kolmnurga pindalast F ja kera raadiusest R ning avaldatakse järgmise valemiga:

$$E = \frac{180^\circ}{\pi R^2} \cdot F. \quad (123)$$

§ 108. Valemid sfääriliste kolmnurkade lahendamiseks kolme külje järgi.

Meie otstarbeiks on vaja tutvuda valemitega, mis võimaldavad arvutada sfäärilise kolmnurga nurki tema kolme antud külje järgi.

Nagu tasapinnalistes kolmnurkades nii siingi võtame sfäärilise kolmnurga perimeetri jaoks tarvitusele märkimise 2 p:

$$a + b + c = 2p, \quad (124)$$

kus täht p väljendab kolmnurga poolperimeetrit. Pangem tähele, et suurus p, nagu üldiselt sfääriliste kolmnurkade küljedki, avaldatakse kraadides ja minuteis (üldiselt nurgaühikuis).

Nurkade arvutamiseks külgede järgi olevald järgmised valemid:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \quad (125)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \quad (126)$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \quad (127)$$

Nagu näeme, on need valemid täiesti analoogilised tasapinnalise trigonomeetria vastavate valemitega, erinedes nendest ainult siinusmärgi poolest.

Silmanähtavalt võib neist valemeist igäühte kirjutada kolm korda (kolme erineva nurga jaoks).

Valemit (127) kasutatakse kõige sagedamini. Temale antakse sageli lihtsam kuju, ja nimelt võttes

$$\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p} = m^2 \quad (128)$$

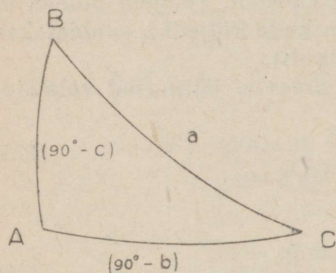
saame valemist (127):

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \frac{m}{\sin(p-a)} \\ \tan \frac{B}{2} &= \frac{m}{\sin(p-b)} \\ \tan \frac{C}{2} &= \frac{m}{\sin(p-c)} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

§ 109. Vahekorrad täisnurkseis sfäärilistes kolmnurkades. Napieri reegel.

Täisnurkse kolmnurga elementide vahekordade leidmiseks kasutatakse tavaliselt *mnemoonilist Napieri reeglit*.

Asetame kolmnurga elemendid nende naabruse järjekorras, täisnurka elemendiks lugemata. Seejuures kaatetid asendame nende täiendustega 90° -ni (joonis 56). Sel puhul formuleeritakse Napieri reeglit nii:



Joonis 56.

1. Kui kolm elementi asetsevad kõrvuti, siis keskmise elemendi koosinus võrdub naaberelementide kootangensite korrutisega.

2. Kui elemendid ei asu kõrvuti (kaks kõrvuti, kolmas aga üle ühe), siis eraldi seisva elemendi koosinus võrdub kahe naabruses oleva elemendi siinuste korrutisega.

Kui näiteks võtame kolm joonelist elementi, siis nad asetsevad järgmiselt: kaks elementi (kaatetid) kõrvuti (täisnurka elemendiks ei loeta), hüpotenuus aga asub eraldi (üle teravnurga). Tähendab, antud juhtumil tuleb rakendada teist reeglit:

$$\cos a = \sin (90 - b) \sin (90 - c),$$

mis pärast muundust (teisendamist) annab:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

XIII peatükk.

TÕELISE ASIMUUDI MÄÄRAMINE ESIMESE VERTIKAALI LÄHEDUSES ASUVA PÄIKESE SENIIDIKAUGUSTE VAATLUSEST.

§ 110. Viisi teooria.

Asugu antud momendil Päike (tema keskpunkt) taevaskera punktis S (joonis 57).

Vaatame taevapooluse P, seniidi Z ja Päikese S vahelistest kaardest moodustatud kolmnurka PSZ. Selliseid kolmnurki nimetatakse parallaktilisteks. Külg PS on temas käände (deklinatsiooni) täiendus 90° -ni, s. t. Päikese poolusekaugus:

$$PS = 90^\circ - aS = 90^\circ - \delta.$$

§ 97 toodud teoreemi alusel on külg PZ koha laiuse täiendus 90° -ni:

$$PZ = 90^\circ - PR = 90^\circ - \varphi.$$

Lõppeks külg ZS on seniidikaugus:

$$ZS = 90^\circ - bS = 90^\circ - h.$$

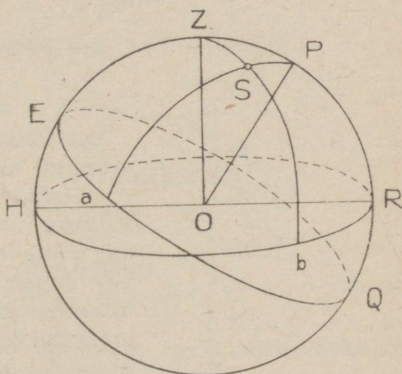
Nurk tipu P juures on Päikese aegnurga täiendus 360° -ni.

Kanname parallaktilise kolmnurga erijoonisele, kusjuures asetame ta veidi teisiti, ja nimelt, külje ZP tõmbame alt üles, sest see kujutab endast meridiaani osa ning järelikult kulgeb lõunast põhja (joonis 58); märgime:

$$90^\circ - \delta = \Delta$$

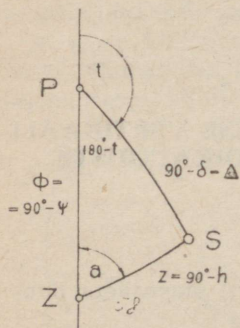
$$90^\circ - \varphi = \phi$$

$$90^\circ - h = z.$$



Joonis 57.

Neist suurustest me võime mõõta kõrguse teodoliidi vertikaalringiga, laiuse võime määrata kaardi järgi, käände vaatluse momendi jaoks aga võime võtta tabelleist. Pärast seda on kolmnurgas teada 3 külge. Järelikult me võime kolmnurga lahendada ja leida nurga a (valemi 127 või 129 järgi).



Joonis 58.

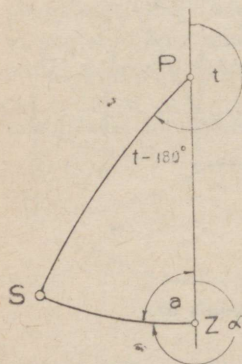
$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-z) \sin(p-\phi)}{\sin p \sin(p-\Delta)}} = \frac{m}{\sin(p-\Delta)} \quad (130)$$

Määratud nurga a , me võime leida Päikese geodeetilise asimuudi α vaatluse momendi jaoks. Kui päike asub idas (joonis 58), siis

$$\alpha = a.$$

Kui Päike on läänes (joonis 59), siis:

$$\alpha = 360^\circ - a \quad (131)$$



Joonis 59.

Ent Päike ei seisa paigal, seepärast tema asimuufi ei saa otseselt kasutada sidumiseks. Arvutatud asimuudi kasutamiseks on vaja Päikese vaatluse momendil liikumatult limbilt võtta lugem mõnele maastiku esemele, mis annab võimaluse geodeetilise asimuudi arvutamiseks ka sellele esemele. Selleks määratakse algul instrumendi vaatlusaegne põhjaase, s. t. viseerimise telje põhjasuunale vastav lugem limbilt.

Kui lugemi Päikese keskpunktile nimetame C , põhjaaseme aga N , siis saame (joonis 60):

$$N = C - \alpha. \quad (132)$$

Edasi nimetame tähega M lugemi maastiku esemele. Siis esemele kulgeva suuna asimuudi α_m saame valemist:

$$\alpha_m = M - N. \quad (133)$$

§ 111. Vaatluse aeg.

Päikest on kõige soodsam vaadelda momendil, kui ta asetseb täpselt idas või läänes, s. t. kui ta läbib esimest vertikaali. Sel ajal liigub Päike kiiremini kõrgust kui asimuuti mööda ja järelikult kõrguse mõõtmise paratamatud vead mõjutavad asimuuti vähesel määral. Instruksiooni kohaselt võib vaatlusi sooritada mitte rohkem kui tund aega enne või pärast Päikese läbimist esimesest vertikaalst.

Lepime kokku Päikese aegnurka lugema vastavalt tsooniajale Päikese alumisest kulminatsioonist (keskööst). Sel puhul nurk $SPZ = P$ parallaktilises kolmnurgas on:

$$\left. \begin{aligned} P &= 180^\circ - t, \text{ kui Päi-} \\ &\text{ke on idas (joonis 58).} \\ P &= t - 180^\circ, \text{ kui Päi-} \\ &\text{ke on läänes (joonis 59).} \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Et aga parallaktiline kolmnurk Päikese esimesest vertikaalst läbimise ajal on täisnurkne ($a = 90^\circ$), siis nurga P jaoks saame Napieri reegli järgi:

$$\cos P = \cot \varphi \tan \delta \quad (134)$$

ja võrdsuse (a) alusel:

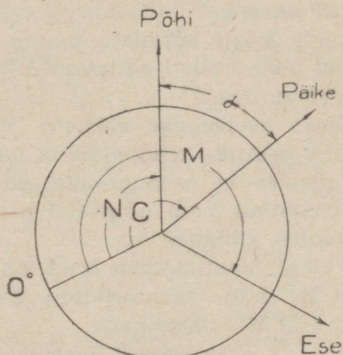
$$\left. \begin{aligned} t &= 180^\circ - (\text{Päike idas}) \\ t &= 180^\circ + (\text{Päike läänes}) \end{aligned} \right\} \quad (134\text{-a})$$

Ävaldanud t ajas, saame Päikese esimesest vertikaalst läbimise kohaliku (tõelise) aja.

Valemi (134) arvutamiseks võetagu kääne (deklinatsioon) Päikese efemeriididest vaatluse päeva kella 12 jaoks.

Valemi (134) järgi arvutatud kohaliku aja võib täpsustamiseks siirda kas või jämedalt tsooni-ajaks. Selleks on vaja teada vaatluskoha pikkust Greenwich'ist, mis määratakse kaardi järgi üheaegselt laiusega.

Kui kaardil pikkus on antud Pulkovost, mis esineb vanaväljaandelistel kaartidel juures, siis sellega liidetagu $30^\circ 19' 6''$.



Joonis 60.

Kohaliku aja tsooni-ajaks siirmisest tingitud parandus l avaldatakse nii:

$$l = L - L_0, \quad (135)$$

kus L on vaatluskoha pikkus Greenwich'ist ja L_0 — tsooni keskmeridiaani pikkus. Mõlemad pikkused avaldatagu ajas.

Tsooni-aeg T saadakse nii:

$$T = t - l, \quad (136)$$

kusjuures lahutamine toimub algebraliselt ($t -$ kohalik aeg).

Kui vaatluskoht asetseb keskmeridiaanist pikkuselt mitte kaugemal 3° -st, siis tsooni-ajaks siirmisest tingitud parandust võib üldse mitte arvestada.

Aegade kõigi siirmiste juures meil NSV Liidus tuleb arvestada seda, et meie kellad näitavad dekreeidi aega, mis on tsooniajast ühe tunni võrra ees.

Päikese asetsemise esimese vertikaali läheduses võib ilmselt kindlaks määrata magnetnõela näitamise järgi.

On olemas ka nomogramm, mille järgi laiusele ja Päikese käände vastavalt võib hõlpsasti graafiliselt leida Päikese esimesest vertikaalist läbimise aja.

N ä i d e. Vaatluskoha laius on $55^\circ 01'$. Vaatlus kavatsetakse sooritada 26. mail. Efemeriidide järgi on kääne 26. mai keskpäeva jaoks $+ 21^\circ 02'$. Järelikult:

$$\cos P = \cot 55^\circ 01' \tan 21^\circ 02',$$

kus $P = 74^\circ 23'$ ja $t = 105^\circ 37'$ hommiku jaoks (Päike idas) või $t = 254^\circ 23'$ õhtu jaoks (Päike läänes), mis annab ligikaudu $7^h 02^m$ hommikul või $16^h 58^m$ õhtul ($4^h 58^m$ peale lõunat) tõelise kohaliku aja järgi.

§ 112. Vaatluste teostamine.

Enne vaatlusi on kasulik määrata vertikaalringi nulliase ja õienadada see nulliks; olgugi et nulliaset asimuudi arvutuste jaoks otsest ei nõuta, võib ta siiski tarvilikuks osutuda juhtumil, kui vaatlused millegipärast toimuvad ainult ringi ühe asendi juures. Üldiselt olgu instrument õiendatud täielikult kõigi tingimuste kohaselt.

Päikese vaatlemiseks on vaja omada tumedaklaasilist, okulaarile asetatavat prisma või vastava raamiga tumedat klaasi. Sellise raamjstise võib ise valmistada kõvast vatmani paberist, keerates paberi okulaari diameetriga võrdseks toruks. Klaas on soovitav võtta suitsjas või roheline.

Enne vaatlusi on vaja statiiv punktile üles seada võimalikult kindlamini, et vältida instrumendi rappumist ja nihkumist vaatluste ajal.

Vaatlusteks on vaja omada kontrollitud ja tsooni-aja kohaselt õiendatud kella.

Vaatlusi teostatakse alljärgnevas korras.

Esiteks viseeritakse maastiku esemele ja tehakse lugem limbilt. Siis, kui Päike on läänes (õhtul), tabatakse ta pikksilma vaatevälja alumises parempoolses veerandis, kinnitatakse pikksilm ja alidaad, ning töötades alidaadi mikromeetrilise kruviga hoitakse niitristiku vertikaalniit kogu aeg nii, et ta oleks puutujaks Päikesele vasakult poolt (joonis 61, 1. asend).

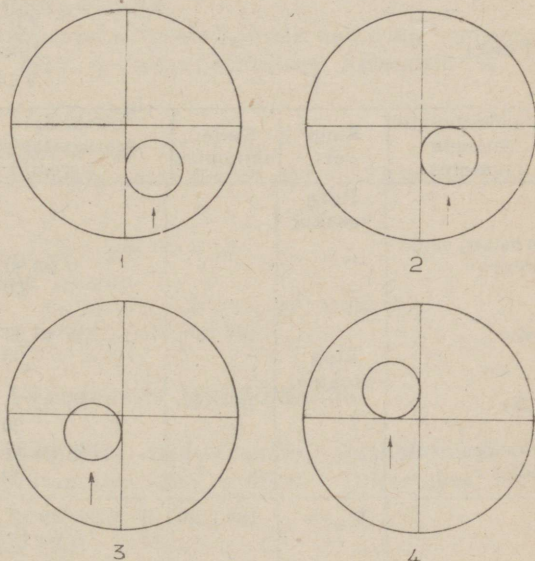
Seejuures Päike näib pikksilmas pidevalt tõusvat. Momendil, kui ta oma ülemise serva vga puudutab niitristiku keskmist horisontaalniiti (teine asend), tehakse lugemid kellalt, limbilt ja vertikaalringilt. Seega lõpeb esimene poolvõte.

Pärast seda pööratakse pikksilm üle seniidi ja tabatakse Päike pikksilma vaatevälja esimeses pooles. Siin on vaja alidaadi mikromeetrilise kruviga

töötada nii, et vertikaalniit kogu aeg puudutataks Päikesse parempoolset serva (3. asend), ja kui Päike puudutab oma alumise serva keskmist horisontaalniiti (4. asend), tehakse jällegi lugemid kellalt, limbilt ja vertikaalringilt.

Võte lõpeb pikksilma teiskordse suunamisega maastiku esemele ja lugemiga limbilt.

Kui Päike asub idas (hommikul), siis esimeses poolvõttes tabatakse ta vaatevälja ülemises parempoolses veerandis ja horisontaal-



Joonis 61.

niidi esimene puutumine võetakse Päikese alumise servaga, vertikaalniidi puutumine aga — vasaku servaga; teises poolvõttes toimitakse vastupidi. Päike näib pikksilmas pidevalt alla laskuvat.

Vaatlustel sooritatakse tavaliselt mitu täisvõtet (instruktsiooni kohaselt nõutakse 3 täisvõtet limbi keeramisega iga võtte vahel 60° võrra).

Vaatlustel peetakse alljärgnevat laadi väliraamatut:

Päikese seniidikauguste järgi tõelise asimuudi vaatluste väliraamat.

Instrument: 30''-line „Geodeesia“ vabriku teodoliit N 154.

23. juulil 1931. a.

Punkt:

Ilma seis: selge, vaikne.

Vaatleja:

Vaadeldavate esemete nimetus	Ringi seis	Kella näitamine	Limbi (horisontaalringi) lugemid	Vertikaalringi lugemid
Korosteni asula silotorn	Ring vasakul	—	0°04'00" 00'' 00	—
Päike	Ring paremal	18h 50m	236°46'30" 15'' 00	341°37'30" 30'' 30
Päike		18h 54m	56°52'30" 30'' 30	18°27'30" 30'' 30
Korosteni asula silotorn		—	180°04'30" 30'' 30	—
	$T_{\text{korst}} =$	18h 52m	$P = 236^{\circ}49'22''$ $M = 0^{\circ}04'15''$	$h = 18^{\circ}25'00''$ $z' = 71^{\circ}35'00''$ $r = + 2'53''$ $z = 71^{\circ}37'53''$

§ 113. Päikese käände (deklinatsiooni) leidmine tabelite järgi.

Päikese kääne võetakse astronoomilisist tabelleist.

Kui kavatsetakse määrata asimuute, siis on selleks vaja aegsasti tellida astronoomiline aastaraamat või vene astronoomiline kalender, kus Päikese kääne antakse igale päevale Greenwich'i keskmise kesköö jaoks.

Niisugust kalendrit antakse meil välja Gorkis, Gorki astronoomilis-geodeetilise ühingu poolt.

Oletagem, et Päikest vaadeldi Omskis 20. juunil tsooni-aja järgi kell $8^h 48^m$ hommikul. See aeg on vaja eelkõige siirda keskmiseks Greenwich'i ajaks, milleks temast lahutame vaatluste koha tsooni- numbri, käesoleval juhtumil 5 tundi, sest Omsk asub 5. tsoonis ja 1 tund on dekreetaeg. Nii saame vaatluse keskmise Greenwich'i aja $8^h 48^m - 6^h = 2^h 48^m$.

Kui kell vaatluse ajal ei oleks näidanud tsooni-aega, vaid kohalikku aega, siis vaatlusaja siirmisel keskmiseks Greenwich'i ajaks oluks vaja kohalikust ajast lahutada mitte tsooni number, vaid ajas avaldatud pikkus Greenwich'ist.

Astronoomilises tabelleis antakse peale käände enese ka veel tema tunniline muutumine. 1936. a. astronoomilises kalendris lk. 16 leiame:

Kääne 20. juunil on $+ 23^{\circ}26'05''$.

Käände tunniline muutumine on $+ 1'',5$.

Meie juhtumil on tarvis anda parandus $2^h 48^m = 2,8$ tunni jaoks.

Võtame korrutise:

$$1'',5 \cdot 2,8 = 4'',2.$$

Järelikult otsitav kääne võrdub

$$23^{\circ}26'05'' + 4'',2 = 23^{\circ}26'09'',2.$$

§ 114. Väliraamatu läbitöötamine.

Päikese vaatluste väliraamatu läbitöötamine seisneb lugemite keskmiste väärtuste arvutamises kogu võttest. Tuletatakse järgmised keskmised:

a) Vaatluste keskmine aeg:

$$T_{\text{ksk}} = \frac{1}{2} (T_1 + T_2).$$

b) Keskmine lugem limbilt Päikese tsentrile:

$$C = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 \pm 180^{\circ}).$$

c) Päikese tsentri keskmine näilik kõrgus (s. t. refraktsioonilt parandamata), kusjuures siis, kui vertikaalringi jaotused lähuvad nullist mõlemale poole kuni 90° -ni, on

$$h = \frac{1}{2} (P + V). \quad (137)$$

Kui aga jaotused on kantud nii nagu kippreeglile, s. t. kellaosuti käigu järgi nullist kuni 360° -ni, siis

$$h = \frac{1}{2} (P - V + 360^\circ). \quad (138)$$

d) Keskmise lugem esemele:

$$M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2 \pm 180^\circ).$$

Eeltoodud väliraamatust saame nende valemite kohaselt:

$$\begin{aligned} T_{\text{kek}} &= 18^{\text{h}} 52^{\text{m}} \\ C &= 236^\circ 49' 22'' \\ h &= 18^\circ 25' 00'' \\ M &= 0^\circ 04' 15'' \end{aligned}$$

§ 115. Astronoomiline refraktsioon. Asimuudi arvutamine.

Näiliku kõrguse h järgi arvutatakse näilik seniidikaugus z' valemist:

$$z' = 90^\circ - h.$$

Seda seniidikaugust peab parandama tingituna astronoomilisest refraktsioonist.

Astronoomiliseks refraktsiooniks nimetatakse taevakehadelt tulevate valguskiirte murdumise nähtust Maa ebaühtlase tihedusega atmosfääri läbimisel. Me näeme kiirt tema tee kõvera puutujana; valguskiire tee kõverjoon on oma nõgususega pööratud Maa poole, seepärast taevakeha vaadeldav kõrgus on alati tegelikust suurem ja seniidikaugus — tegelikust väiksem.

Astronoomilist refraktsiooni arvutatakse valemi järgi:

$$r = 0,95 \tan z'. \quad (139)$$

Tema määramiseks tarvitatakse tavaliselt tabelit, kus refraktsioon on antud näilike seniidikauguste mitmesuguste väärtuste jaoks. Tabel on toodud lisa 2.

Refraktsioon liidetakse alati näiliku seniidikaugusega:

$$z = z' + r. \quad (140)$$

Pärast seda on meil kõik andmed asimuudi arvutamiseks valemi (130) järgi ja arvutuste edasine käik on hõlpsasti arusaadav alljärgnevast skeemist:

Asimuudi arvutamine Päikese järgi (aritmomeetril).

Märkmed	Arvutused	Märkmed	Arvutused
h	27°54',2	m ²	0,06936
		m	0,26336
z	62°07',6	$\tan \frac{a}{2} = \frac{m}{\sin(p-\Delta)}$	1,03084
$\Delta = 90^\circ - \delta$	68°51',4	$\frac{a}{2}$	45°52',2
$\phi = 90^\circ - \varphi$	36°20',0	a	91°44',4
2p	167°19',0	$\alpha = 360^\circ - a$	268°15',6
p	83°39',5	c	79°00',1
p-z	21°31',9	α	268°15',6
p-Δ	14°48',1	N	170°44',5
p-φ	47°19',5	M	59°20',0
sin p	0,99388	N	170°44',5
sin(p-z)	0,36701	α_m	248°35',5
sin(p-Δ)	0,25548		
sin(p-φ)	0,73521		

§ 116. Asimuudi määramise täpsus Päikese järgi.

Päikese vaatlusest arvatud asimuudi täpsus sõltub veast käändes, laiuses ja seniidikauguses.

Viga käändes sõltub ajanäitaja jämedast õiendusest. Kui ajamoment sisaldab 30-minutilist viga, siis võib see kõige halvemal juhtumil (märtsis ja septembris) anda vea käändes 0',5. Asimuudis aga saadakse sellest tingituna viga 2 korda suurem, s. t. ligikaudu $\pm 1'$.

Kui ei ole kindlust kella õienduse õigsuses tsooni-aja järgi, siis on parem Päikese vaatlusest leida tõeline vaatluse aeg. Selleks tuleb parallaktilisest kolmnurgast arutada valemi (129) järgi aegnurk.

$$\tan \frac{180^\circ - t}{2} = \frac{m}{\sin(p - z)} \quad (141)$$

või, kui Päike on läänes:

$$\tan \frac{t - 180^\circ}{2} = \frac{m}{\sin(p - z)}$$

Tõeline päikeseaeg on t tundi. Tema ja ajavõrrandi E järgi, mis

astronoomilisis kalendreis antakse Päikese käändega ühel leheküljel, leiame keskmise päikeseaja:

$$T_{\text{ksk}} = T_{\text{tõel}} + E. \quad (142)$$

Teades ka vaatluskoha pikkust võime saada tsooni-aja valemi (136) järgi, mis tulebki asimuudi arvutamisel võtta aluseks.

Viga laiuse ebaõigest määramisest kandub asimuuti peagu täielikult. Et vältida siin tunduvat viga, määratagu laius 1 : 100 000 või 1 : 200 000 mõõtkavaliste kaartide järgi (või vanade kahe- või kolmeverstaliste kaartide järgi), sest et laiuse määramine 1 : 1 000 000 mõõtkavalise kaardi järgi võib toimuda veaga üle 1', mis annab asimuudis vea kuni $\pm 1'$.

Seniidikauguse mõõtmise viga võib kanduda asimuuti peagu kahekordses suuruses. Seniidikauguse veast tingituna võib asimuudi viga tõusta kuni $\pm 1',5$.

Peale mainitud vigade võib asimuuti mõjutada ka Päikese ja maapinnal oleva eseme vahelise horisontaalnurga mõõtmise viga. Seda viga võib pidada üheminutilise teodoliidi jaoks võrdseks $\pm 0',5$.

Uldiselt võib Päikese hoolikast vaatlusest üheminutilise teodoliidiga kolme täisvõtte juures saada asimuudi veaga mitte üle $\pm 1',5$.

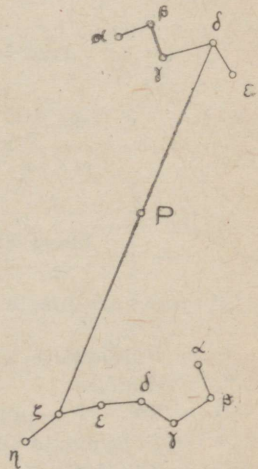
TÕELISE ASIMUUDI MÄÄRAMINE PÕHJANAELA JÄRGI.

§ 117. Tähtkujud Suur Karu (Suur Vanker), Väike Karu (Väike Vanker) ja Kassiopeja.

Suure Karu (Suure Vankri) seitse heledat tähte α , β , γ , δ , ϵ , ζ ja η kujutavad taevavõlvil selgesti kulbi (joonis 62). Kulbi otsast loendatuna äratub kuues täht tähelepanu selle poolest, et temaga päris ligistikku on veel väike täheke, mida palja silmaga näevad ainult hea nägemisega inimesed, pikksilmas aga paistab ta selgesti. Seetõttu on Mizar (nii nimetatakse seda tähte) hõlpsasti eraldatav teistest tähtedest.

Kui mõtteliselt ühendada Suure Karu 2 äärmist tähte α ja β sirgjooneliselt, siis peagu selle joone pikendusel, viiekordsel $\alpha\beta$ kaugusel asetseb tuntud Põhjanael, mis kuulub Väikese Karu (Väikese Vankri) tähtkuju koosseisu. See täht on tähele pandav selle poolest, et ta asetseb väga lähedal maailmateljele. Tema poolusekaugus on kõigest ligikaudu $1^{\circ}02'$.

Kui ühendada sirgjooneliselt Mizar Põhjanaelaga, siis see joon taevavõlvi teisel poolel läbib Kassiopeja tähtkuju tähte δ . Kassiopeja viis heledat tähte α , β , γ , δ ja ϵ asetsevad lamendatud tähe w kujul.



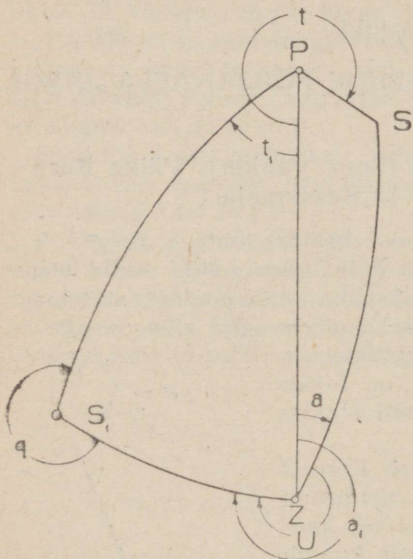
Joonis 62.

§ 118. Viisi alus.

Põhjanaela järgi asimuudi määramiseks on küllaldane mõõta horisontaalnurk Põhjanaelale ja mingile teisele abitähele kulgeva suuna

vahel. Selle nurga järgi saab arvutada Põhjanaela asimuudi vastavalt vaatluse momendile; kui aga samaaegselt võtta limbit lugem maapealsele esemele, siis Päikese järgi asimuudi määramise juures kirjeldatud viisil (vt. valemid 132 ja 133) võib saada asimuudi ka sellele esemele.

Põhjanaela asimuudi määramiseks on olemas Smirnovi tabelid.



Joonis 63.

kust asimuut leitakse hõlpsasti tabelisuuruste kahekordse lihtsa interpoleerimisega mõõdetud horisontaalnurga ja kaardilt määratud laiuse järgi.

Põhjanaela asimuudi otse määramise jaoks on vaja tutvuda valemitega, mis avaldavad nende suuruste omavahelist sõltuvust.

Põhjanael S ja abitäht S_1 (joonis 63) moodustavad 2 parallaktilist kolmnurka PSZ ja PZS₁, millede seniiti Z ja taevapoolust P ühendav ühine külg, nagu me teame, on koha laiuse täiendus 90°-ni, küljed PS ja PS₁ aga on vastavalt Põhjanaela ja abitähe pooluse kaugused.

Võtame tarvitusele järgmised märkimised:

- δ — Põhjanaela kääne (deklinatsioon);
- δ_1 — abitähe " " ;
- Δ — 90° — δ — põhjanaela poolusekaugus;
- α — Põhjanaela otsetõus (rektastsensioon);
- α_1 — abitähe " " ;
- φ — koha laius;
- t — Põhjanaela aegnurk;
- t_1 — abitähe " " ;
- a — Põhjanaela geodeetiline asimuut;
- a_1 — abitähe " " ;

U — Põhjanaanale ja abitähele kulgevate suundade vaheline horisontaalnurk, loetud kellaosuti käigu järgi;

q — seniiti kulgevast suunast kellaosuti käigu järgi kuni maailmapoolusele kulgeva suunani loetud nurk abitähe juures;

θ — täheaeg.

Suurused S, S₁, Δ , α ja α_1 võib võtta astronoomilisest tabelleist, järelikult neid võib antud küsimuse juures pidada tuntuiaks. Laiuse φ võib määrata kaardi järgi ja nurk U mõõdetakse teodoliidiga. Kõik ülejäänud suurused on arvutatavad sfäärilise trigonomeetria valemite järgi.

Ülesande lahendamiseks arvutatakse antud küsimuse jaoks eelkõige järgmised konstandid:

$$k = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta_1} \quad (143)$$

$$k_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} (\delta_1 + \varphi)}{\cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \varphi)} \quad (144)$$

Pärast seda on vaja lahendada järgmised valemid:

$$a_1 = a + U$$

$$\sin q = k \sin a_1$$

$$\cot \frac{t_1}{2} = -k_1 \tan \frac{a_1 + q}{2}$$

$$\theta = \alpha_1 + t_1$$

$$t = \theta - \alpha$$

$$\tan a = -\frac{\Delta' \sin t \sin 1'}{\sin (90^\circ - \varphi - \Delta' \cos t)} = -\frac{m}{\sin d} \quad (145)$$

$$m = \Delta' \sin t \sin 1' = \frac{\Delta' \sin t}{3438}$$

Nagu näeme, kuulub Põhjanaanala asimuut juba esimese valemi hulka, s. t. kujuneb nõiaring, kus otsitava suuruse leidmiseks on vaja teada otsitavat suurust ennast. Selliseid ülesandeid esineb sageli ja nad lahendatakse niinimetatud järk-järgulise lähendusmeetodiga. Me teame, et Põhjanaanala asimuut ei erine palju 0°-st (jämedalt asetseb ta 2°10' ja 357°50' ehk 2°10' ja — 2°10' piires).

Kui esimeses valemis asendada $a = 0$, siis võib oletada maksimumset viga $\pm 2^\circ$. Kui selle väärtusega arvutada läbi kõik ülejäänud valemid, siis lõpus saame asimuudi, millel võib olla suurim viga kõigest $\pm 15'$. Asendanud selle väärtuse esimeses valemis ja lahendanud kõik valemid uuesti, saame asimuudi teise lähenduse veel väiksema veaga jne.

Ühest minutist väiksema veaga asimuudi saamiseks on vaja arvutada vähemalt 3 lähendust.

Selleks et saada küllaldase täpsusega asimuut ühekorruga, on vaja arvutamise alguseks võtta Põhjjanaela asimuut lisas 3 toodud tabelleist, kus on antud ligikaudsed asimuudid mitmesuguste horisontaalnurkade jaoks. Esimene tabel on koostatud juhtumi jaoks, kui abitäheks on võetud Mizar, teine tabel aga juhtumi jaoks, kui abitäheks on võetud δ Kassiopeja.

Olgu näiteks laiusel $56^\circ 28'$ saadud Põhjjanaela ja Mizari vaheline horisontaalnurk $324^\circ 48',7$. Tabelist 1 interpoleerimisega 320° ja 330° vahel leiame laiuse 55° jaoks asimuudi väärtuse $1^\circ 37'$ ning laiuse 60° jaoks väärtuse $1^\circ 49'$; interpoleerides neid väärtusi laiuse kohaselt 55° ja 60° vahel saame lõpliku väärtuse $1^\circ 41'$.

§ 119. Vaatluste aeg.

Abitäheks vaatlustel on kõige parem võtta Mizar või δ Kassiopeja sellepärast, et nad on taevavõlvil hõlpsasti leitavad ja peale selle nad asetsevad ühel deklinatsiooniringil, nii et ajal, millal Mizar asub väga kõrgel (kui teda ei saa vaadelda), δ Kassiopeja asetseb madalal ja ümberpöörduvalt, seetõttu on võimalik ühte neist alati vaadelda. Aprillis ja mais ei ole Mizarit öösiti võimalik vaadelda, sest nendel kuudel ta seisab liiga kõrgel. Neil kuudel on soodus vaadelda δ Kassiopejat, kusjuures aprillis võib vaatlusi alustada kella 19-st (kella 7-st õhtul), mais aga kella 20-st (kella 8 õhtul). Juunist alates võib vaadelda ka Mizarit, kusjuures juunis võib seda teha mitte enne kella 24 (kell 12 öösi).

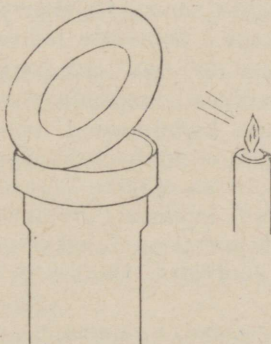
Tabelis lk. 179 on toodud vaatluse aja algused kuude järgi.

§ 120. Vaatluseks vajalikud seadised.

Vaatluseks on vaja omada teodoliiti okulaarprismaga ja objektiivile asetatava peegliga pikksilma niitristiku valgustamiseks. Viimase asemel võib kõvast valgest paberist valmistada ellipsi-

Kuu	Tähed	
	Mizar	Kassiopeja
Aprill	—	kella 19-st
Mai	—	" 20-st
Juuni	kella 24-st	" 20-st
Juuli	" 22-st	—
August	" 20-st	—
September	" 19-st	—
Oktoober	" 19-st	—

taolise väljalõikega illumiinatori, mis asetatakse pikksilma objektiivile 45° all (joonis 64).



Joonis 64.

Valgusallikaks võetakse lamp või küünal.

Joone otsa, mille asimuuti määratakse, seatakse samuti valgustatud punkt, milleks vaadeldava punkti kohale riputatakse latern küünlaga. Selle joone pikkuseks olgu umbes 1 km. Teodoliit olgu enne vaatlusi justeeritud ja üles seatud. Pikksilm fokuseeritagu enne töö algust ja vaatluste ajal ärgu muudetagu fokuseerimist.

§ 121. Vaatluste kord.

Pärast teodoliidi vastavat ülesseadmist vaatluskohale juhitakse pikksilm Põhjanaanale ja tehakse lugem horisontaalringilt. Sellele lugemile seatakse vaatluste ajal alidaad, et Põhjanaanale oleks hõlpus üles leida.

Pärast seda sooritatakse vaatlused järgmise skeemi kohaselt:

I poolvõte, „ring paremal“.

1. Maastiku eseme vaatlemine ühes nooniuste lugemitega horisontaalringilt.
2. Põhjanaela vaatlemine, lugemid kellalt ja horisontaalringilt.
3. Abitähe vaatlemine, lugemid kellalt ja horisontaalringilt.
4. Põhjanaela teiskordne vaatlemine, lugemid kellalt ja horisontaalringilt.
5. Maastiku eseme teiskordne vaatlemine, lugemid horisontaalringilt.

II poolvõte, „ring vasakul“.

Teine poolvõte tehakse samas järjekorras ja samade sissekannetega väliraamatusse nagu I poolvõtte juureski.

Mõlemas poolvõttes on vaja teiskordne Põhjanaela vaatlemine kohastada nii, et tema vaatlusmoment oleks sümmeetriline abitähe vaatlusmomendi suhtes; kellalugemid tehaksegi ainult selleks otsarbeks. Igal juhtumil ei tohi ebasümmeetrilisus ületada 3 aja-minutit, sest muidu tulnuks abitähe lugemid parandada, kuna selle meetodi teooria eeldab mõlemate tähtede üheaegset vaatlemist. Sümmeetria tingimuse korral aga keskmine mõlemaist Põhjanaelale viseerimistest annab poolvõttes abitähe peale viseerimisele vastava lugemi.

Vaatlustel peetakse umbes järgmist laadi väliraamatut.

Mizar seisab Põhjanaelast vasakul.

Vaade/õavad objektid	Lugemid limbilt			Nurk U	Märkused
	I	II	keskmine		
Rp					
Maastiku ese	120°08'	08'	08'	308°53',0	$\varphi = 55^{\circ}46'$
Põhjanael	85°45'	45'	45'		$\alpha = 23^{\circ}58',0$
Mizar	34°38'	38'	38'		$\delta = 88^{\circ}54',9$
Põhjanael	85°45'	45'	45'		$\alpha_1 = 200^{\circ}16',0$
Maastiku ese	120°08'	08'	08'		$\delta_1 = 55^{\circ}18',0$
					$\Delta = 65',1$
Rv					
Maastiku ese	300°06'	06'	06'	310°24',8	$90^{\circ} - \varphi = 34^{\circ},14$
Põhjanael	265°51'	52'	51',5		
Mizar	216°16'	16'	16'		
Põhjanael	265°51'	51'	51'		
Maastiku ese	300°06'	06'	06'		

§ 122. Tähtede koordinaatide määramine.

Tähtede koordinaate saab võtta eespoolmainitud Gorki astronoomilis-geodeetilise ühingu poolt väljaantavast astronoomilisest kalendrist (muutuv osa).

Näiteks 1936. a. kalendris lk. 89 on antud Põhjanaanla nähtavad kohad (α ja δ), järgmistele lehekülgedele aga on mahutatud teiste praktikas enam kasutatavate tähtede nähtavad asendid. Nende hulgas lk. 90 leiame δ Kassiopeja ja lk. 93 — Mizari (ζ Suur Karu).

§ 123. Asimuudi arvutamine.

Lisas 4 on sooritatud § 121 toodud väliraamatu andmete kohaselt asimuudi arvutamine.

Eelkõige, kasutades lisas 3 toodud tabelit 1, määrame nurga $308^{\circ}53'$ ja laiuse $55^{\circ}46'$ järgi Põhjanaanla ligikaudse asimuudi $1^{\circ}53'$.

Edasi algab valemi (145) lahendamine eraldi Rp ja Rv jaoks. Lahendamine võib toimuda neljakohaliste tabelitega, kusjuures nurga U, järelikult ka nurga a_1 väärtus on küllaldane võtta ümar-datult kuni $1'$.

Pärast Põhjanaanla asimuudi arvutamist määrame põhjaaseme:

$$N = b - a,$$

kus b on lugem Põhjanaanlale.

Põhjaaseme järgi leiame maastiku eseme asimuudi:

$$A = M - N,$$

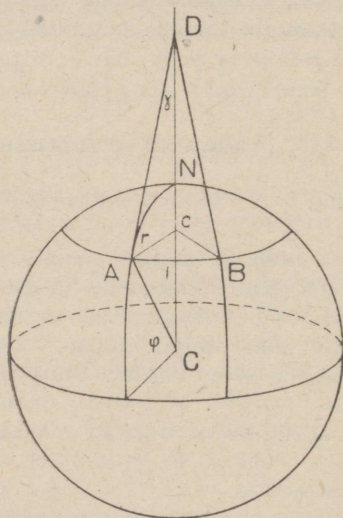
kus M on keskmine poolvõtte lugem maastiku esemele. Kahest väärtusest (Rp ja Rv juures) võetakse lõpliku väärtuse jaoks keskmine aritmeetiline A_0 .

§ 124. Põhjanaanla järgi teostatud asimuudi määramise täpsus.

Uurimised on näidanud, et Põhjanaanla järgi asimuudi saamiseks veaga mitte üle $\pm 0,3$ võib laiust kasutada veaga mitte üle $\pm 5'$. Et aga laiust võib määrata palju täpsemini isegi 1 : 1 000 000 mõõtkavaliselt kaardilt, siis üldiselt võib saada asimuudi Põhjanaanla järgi suurema täpsusega (kui muidugi tähtede koordinaadid võtta astronoomilisest kalendrist). Et aga saada sama täpsusega ka maastiku eseme suuna asimuuti, on vaja vaatlusi teostada instrumendiga, mille nooniused evivad vastavat täpsust.

§ 125. Meridiaanide konvergentsi (koonduvuse) määramine.

Praktikas teatavasti toimub joonte orienteerimine mitte asimuutide, vaid direktsioonnurkade järgi. Asimuutidelt direktsioonnurkadele siirdumiseks on vaja evida meridiaanide konvergentsi (koonduvust).



Joonis 65.

Võtame ühel ja samal laiusel φ punktid A ja B (joonis 65) ja märgime nende vahelise paralleelikaare AB tähega l . Selle kaare raadiuse r võib arvutada täisnurksest kolmnurgast AcC , milles nurk ACc on $(90^\circ - \varphi)$ ja hüpotenuus AC on Maa raadius R :

$$r = R \sin(90^\circ - \varphi) = R \cos \varphi. \quad (146)$$

Märgime selle kaare pikkuse s -ga. Nurga $AcB = l$ väärtus radiaanmõõdus on:

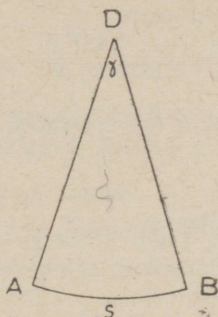
$$l = \frac{s}{r} = \frac{s}{R \cos \varphi}$$

kust leiame:

$$s = R l \cos \varphi. \quad (a)$$

Konvergentsi konstrueerimiseks tõmbame punktide A ja B meridiaanidele puutujad nendes punktides (keskpäeva jooned). Need

puutujad lõikuvad kera telje pikendusel punktis D, mis ongi meridiaanide konvergenksi $\gamma = \text{ADB}$ tipuks. Arvestades selle nurga väiksust võtame figuuri ADB tasapinnaliseks sektoriks, millest määramegi konvergenksi (joonis 66).



Joonis 66.

Nurga γ suurus radiaanmõõdus on:

$$\gamma = \frac{s}{AD} = \frac{R l \cos \varphi}{AD} \quad (b)$$

Puutuja pikkuse AD leiame täisnurksest kolmnurgast DAC, milles ta esineb kaatetina, teine kaatet $AC = R$:

$$AD = R \tan(90^\circ - \varphi) = R \cot \varphi = \frac{R \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Asendades selle AD väärtuse võrdsusse (b) saame (radiaanmõõdus):

$$\gamma = \frac{R l \cos \varphi \sin \varphi}{R \cos \varphi}$$

ehk

$$\boxed{\gamma = l \sin \varphi} \quad (147)$$

Kui AD on Gauss-Krügeri koordinaatide telgmeridiaaniks, siis kaare AB pikkuse võib võtta punkti B ordinaadiks y , seepärast võrdsuse (a) kohaselt $y = R l \cos \varphi$, kust:

$$l = \frac{y}{R \cos \varphi}$$

Asendanud selle l väärtuse valemis (147), saame:

$$\gamma = \frac{y \sin \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{y}{R} \tan \varphi \quad (c)$$

Valemis (147) võib võtta l soovikohaselt: kui l võtta radiaanmõõdus, siis ka γ saadakse radiaanides; kui võtta l' (minuteis), siis ka γ saadakse minuteis — γ' .

γ' (minuteis) saamiseks avaldusest (c) on seda vaja korrutada ρ' -ga — minutite arvuga radiaanis:

$$\rho' = 3437',7, \quad (148)$$

pärast seda γ' jaoks saame:

$$\gamma' = \frac{\rho'}{R} y \tan \varphi. \quad (d)$$

Avaldust $\frac{\rho'}{R}$ võib enam või vähem tunduva territooriumi jaoks lugeda muutumatuks. NSV Liidu keskmiste laiuste jaoks võib teda võtta võrdseks 0,000 538. Järelikult minuteis avaldatud konvergenksi jaoks saame järgmise valemi:

$$\gamma' = 0,000 538 y \tan \varphi. \quad (149)$$

Praktikas kasutatakse tavaliselt tabelleid, kus konvergenssid on arvutatud valemi (149) järgi mitmesuguste laiuste ja ordinaatide jaoks. Rakendades interpoleerimist võib kasutada näiteks alljärgnevat lihtsat tabelit, kus konvergenssid on antud erinevate laiuste jaoks $y = 10\,000$ m (10 km) juures.

φ	γ'
40°	4',52
45°	5',38
50°	6',41
55°	7',68
60°	9',32

XV peatükk.

GAUSS-KRUGERI KOORDINAADID. GAUSS-KRUGERI KONFORMNE PROJEKTSIOON.

§ 126. Plaan ja kaart. Kartograafilised projektsioonid.

Meenutagem, et üldiselt projektsioonideks nimetatakse selliseid kujutisi tasapinnal (paberil), millede järgi võib saada andmeid kujutatud eseme mõõteist.

Maapinna osade kujutamiseks me rakendasime senini horisontaalprojektsiooni meetodit, mis seisnes selles, et me projitseerisime kõik punktid loodi-(vertikaal-)joonte järgi ühele horisontaaltasapinnale. Seejuures eeldasime, et kõik kujutatava pinna mitmesuguseist punktidest väljuvad vertikaaljooned on risti horisontaaltasapinnaga ja järelikult kõik nad on omavahel paralleelsed. Nii viisi me loeme oma projektsiooni ortogonaalseks. Seda projektsiooni nimetatakse plaaniks.

Tõepoolest aga kõik maapinna erinevaid punkte läbivad vertikaaljooned koonduvad Maa tsentrisse, s. t. nad ei ole omavahel paralleelsed. Nende paralleelsuse oletus on praktiliselt õige ainult võrdlemisi väikese maapinna osa kohta, tavaliste mõõtmiste juures ulatusega mitte üle 60 km. Suurte maa-alade jaoks saab tunduvaks Maa kumerus, mida sellisel viisil ei saa tasapinnale kujutada, sest üldse mingi kõverpinna osa ei saa kõigis punktides ühtistada tasapinnaga. Suurte maa-alade kujutamiseks tasapinnale on olemas kaardid.

Kaartidel saadakse sellised kujutised, kus tegelikkuse suhtes on moonutatud kas mõõted või kuju või nii see kui ka teine. Kui me kaardil hakkame ühe ja sama mõõtkava järgi mõõtma erinevaid kujutise osi, siis me saame ebaõiged resultaadid. Õigete mõõdete saamiseks on vaja erinevais kohtades tarvitada erinevaid mõõtkavasid. *Kaardi mõõtkava on erinevais kohtades isesugune.*

Maastiku kujutamisel paberile konstrueeritakse meridiaanide ja paralleelide võrk (kraadivõrk) ja siis kantakse punktid kaardile

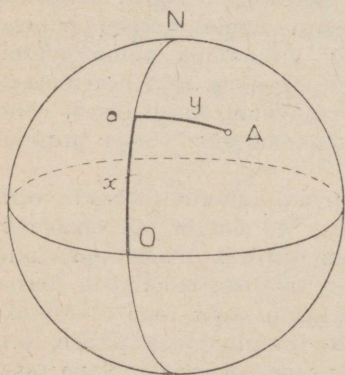
nende geograafiliste koordinaatide järgi samuti, nagu me plaanile kanname punkte tasapinnaliste koordinaatide järgi. Kuid meridiaane ja paralleele ei ole võimalik kanda tasapinnale ilma moonutusteta. Nende konstrueerimisel peab leppima mõningate moonutustega, on vaja ainult kasutada abinõusid nende moonutuste arvestamiseks, s. t. on vaja teada meridiaanide ja paralleelide konstrueerimise tingimusi.

Mingi tingimuse juures paberile konstrueeritud meridiaanide ja paralleelide võrku nimetatakse kartograafiliseks projektsiooniks.

Meridiaanide ja paralleelide võrgu konstrueerimise aluseks võib võtta mitmesuguseid tingimusi. Järelikult kartograafilisi projektsioone võib olla palju.

§ 127. Sfäärilised ristkoordinaadid.

Mõõdistatava rajooni kõigi punktide jaoks geograafiliste koordinaatide arvutamine on keerukas töö. Me teame juba, et mõõdistamise tööde jaoks kasutatakse Gauss-Krügeri koordinaate (vt. II osa, § 72), mis õigupoolest on mõningal määral muudetud sfäärilised ristkoordinaadid.



Joonis 67.

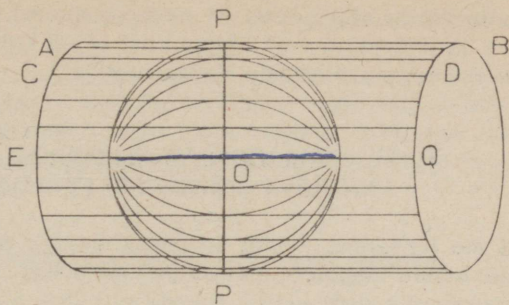
Sfääriliste ristkoordinaatide telgedeks on telgmeridiaan ja ekvaator. Mistahes punkti A (joonis 67) koordinaatide saamiseks tõmmatakse läbi selle punkti risti telgmeridiaaniga suuring Aa. Punkti A abstsissiks x võetakse kaugus ekvaatorist kuni punktini a telgmeridiaani mööda, ordinaadiks y aga pikkus Aa suuringi mööda. Kui kaugused $x = Oa$ ja $y = aA$ avaldada joonelistes ühikuis, siis need ongi punkti A sfäärilised ristkoordinaadid.

Gauss-Krügeri koordinaadid, nagu näeme edaspidi, saadakse samal viisil, ainult ordinaatide jooneline väärtus on nende juures mõningal määral suurendatud.

§ 128. Lihtne silindriline projektsioon.

Sfääriliste ristkoordinaatide järgi punkti pealekandmiseks on vaja konstrueerida koordinaatide võrk. Ordinaatide pealekandmi-

seks on vaja sellele võrgule teatavate vahemike tagant tõmmata telgmeridiaaniga paralleelsed väikeringid, abstsisside pealekandmiseks aga — telgmeridiaaniga risti olevad suuringid. Sellist võrku ei saa kujutada tasapinnale ilma moonutuseta, s. t. see võrk



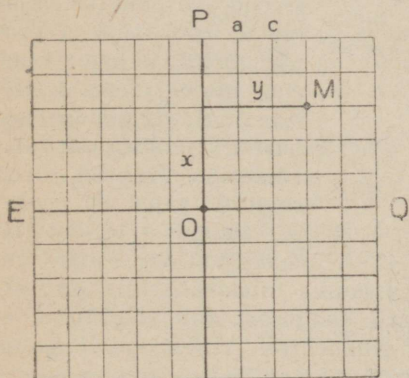
Joonis 68.

kujutab endast mingit kartograafilist projektsiooni.

Kujutelgem silindrit, mis puudutab kera telgmeridiaani PP mööda (joonis 68). Projitseerime selle silindri pinnale Maa tsentrist O väljuvate kiirtega (niinimetatud tsentraalprojektsioon) telgmeridiaani, ekvaatori ja teatavate vahemike tagant risti telgmeridiaaniga tõmmatud suuringid.

On ilmne, et ekvaator ja suuringid projitseeruvad silindri tasapinnale silindri moodustajate EQ , AB , CD jne. näol, telgmeridiaani PP kujutiseks aga jääb telgmeridiaan ise.

Lõikame nüüd silindri ühte tema moodustajat mööda lõhki ja laotame tasapinnale. Tulemusena saame tasapinnale rea paralleel-



Joonis 69.

seid sirgjooni, mis kujutavad telgmeridiaaniga risti olevaid suuringe, ning nendega risti oleva sirge PP , mis kujutab telgmeridiaani (joonis 69). Sel kujul on meil võimalus peale kanda abstsisse ükside telge PP mööda. Ordinaatide pealekandmiseks on vaja teatavate vahemaade tagant tõmmata telgmeridiaaniga paralleelsed sirged ab , cd jne. Need jooned tõmbame üksteisest kaugustel, mis võrduvad suuringide punktide vahelise kaare sirgestatud pikkusega.

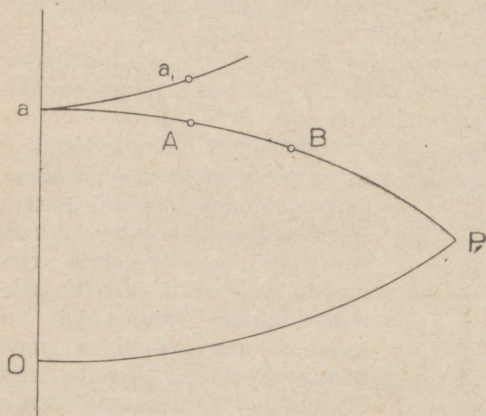
Selle võrgu abil punkti M pealekandmiseks sfääriliste koordinaatide x ja y järgi on vaja algpunktist peale kanda joonele OP abstsiss x ja siis ristjoont mööda ordinaat y .

§ 129. Silindrilise projektsiooni moonutused. Mõõtkava ordinaatide (Y-telje) suunas.

Et me leppisime kokku telgmeridiaaniga paralleelseid väikeringe peale kanda telgmeridiaanist ja üksteisest tegelikkusega võrdsel kaugusel, siis ordinaatide suunas ei esine mingeid pikkuse moonutusi. Teiste sõnadega, ordinaatide suunas mõõtkava ei moondu, — ta jääb ühesuguseks kogu kujutise ulatuses ning on võrdne mõõdistamise normaalse mõõtkavaga. Me loeme tema võrdseks ühega, ent märgime sümboliga m_y , nii et

$$m_y = 1. \quad (150)$$

Võtame maastikul punkti A (joonis 70). Telgmeridiaaniga risti



Joonis 70.

olev seda punkti lähiv suuring läheneb pidevalt ekvaatorile ja lõppeks punktis P lõikub ekvaatoriga.

Kui punkti A abstsiss on $x = Oa$, siis projektsioonil see punkt A kujutub a_1 näol, sest et projektsioonil kulgeb suuring projektsiooni konstrueerimise tingimuse kohaselt paralleelselt ekvaatoriga. Joonisel 70 on selgesti näha, et punkti A kaugus ekvaatorist maastikul on erinev samast kaugusest projektsioonil, kusjuures silmanähtavalt projektsiooni kaugus on suurem maastiku kaugusest. Siit järeldame, et

abstsisside telje suunas pikkused silindrilisel projektsioonil moonuvad. Kui me samal suuringil, paremal punktist A, võtame punkti B, siis ta on ekvaatorile veel lähemal, kuna projektsioonil tema kaugus ekvaatorist jääb samaks mis punkti a_1 jaoks. Järelikult

pikkuste moondu mine on seda suurem, mida kaugemal punkt asub telgmeridiaanist.

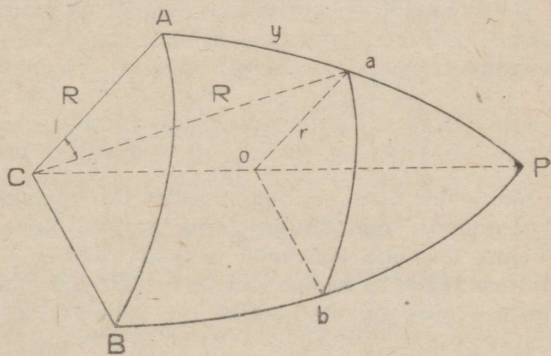
Pikkuste ühekülgse moondu mise (ainult abstsisside suunas) tagajärjel moondu b ka figuuri kuju. Kui võtame ringi, siis venib see tema projektsioonil pikemaks abstsisside suunas, jääb aga moondu misteta ordinaatide suunas. Sel viisil kujuneb projektsioonis ringist ellips.

§ 130. Mõõtkava abstsisside (X-telje) suunas.

Võtame telgmeridiaani AB (joonis 71) ja tõmbame temaga risti 2 suurringi BbP ja AaP. Telgmeridiaaniga paralleelse väikeringi kaar ab kujutub silindrilisel projektsioonil pikkuselt võrdsena telgmeridiaani kaarega AB. Selle kujutise mõõtkava määramiseks on järelikult vaja leida kaare AB suhe kaarega ab. Ent kaared on võrdelised nende raadiustega. Kui abstsisside telje suunas otsitava mõõtkava märgime sümboliga m_x , siis saame selle jaoks:

$$m_x = \frac{R}{r} \quad (a)$$

kus R on suurringi raadius ja r — väikeringi raadius.



Joonis 71.

Täisnurksest kolmnurgast aoC saame:

$$r = R \cdot \cos \widehat{Cao}. \quad (b)$$

Kuid nurk $\widehat{Cao} =$ nurgaga \widehat{ACa} , nurk \widehat{ACa} radiaanmõõdus aga võrdub Aa ja raadiuse R suhtega. Kaar Aa on meil ordinaadiks y. Järelikult:

$$\text{nurk } \widehat{Cao} = \text{nurgaga } \widehat{ACa} = \frac{y}{R}.$$

Teinud selle asenduse võrdsuses (b), saame:

$$r = R \cos \frac{y}{R}$$

ja mõõtkava jaoks saame võrdsusest (a):

$$m_x = \frac{R}{R \cos \frac{y}{R}} = \frac{1}{\cos \frac{y}{R}}$$

Tuntud trigonomeetrilise valemi järgi on:

$$\cos \frac{y}{R} = 1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2R}$$

seepärast

$$m_x = \frac{1}{1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2R}}$$

Selles avaldises, korrutades lugejat ja nimetajat suurusega

saame:

$$m_x = \frac{1 + 2 \sin^2 \frac{y}{2R}}{1 - 4 \sin^4 \frac{y}{2R}}$$

Me teame juba, et telgmeridiaanid võetakse iga 3° tagant pikkust mööda, mis kõige ebasoodsamas kohas, ekvaatoril, annab vöötme laiusega ligikaudu 350 km. Võttes $y = 200$ km (üle poole vöötme laiusest) saame nurga ($y : 2R$) kraadimõõdus 1° näol. Nii siis see nurk on alati väike ja selle alusel me jätame suuruse

$4 \sin^4 \frac{y}{2R}$ kui väga väikese tähele panemata, ent $\sin^2 \frac{y}{2R}$ aga

asendame nurga endaga, s. t. $\frac{y^2}{4R^2}$ -ga.

Tulemusena saame:

$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2R^2} \quad (151)$$

See mõõtkava kuulub ainult mingile ühele punktile, kuna ta igas uues punktis muutub. Seepärast nimetatakse teda mõõtkavaks antud punktis.

Valemis (151) liige $\frac{y^2}{2R^2}$ iseloomustab silmanähtavalt pikkuse suh-

telist suurendust projektsioonil, s. t. iga jooneline element suureneb antud punktis abstsisside suunas $\frac{y^2}{2R^2}$ oma pikkuse osa võrra. Võtame näiteks telgmeridiaanist 200 km kaugusel oleva punkti, s. t. oletame, et $y = 200$. Sellisel juhtumil $\frac{y^2}{2R^2} = \frac{200^2}{2 \cdot 6000^2} = \frac{1}{1800}$, s. t. telgmeridiaanist 200 km kaugusel olevad joonelised elemendid projektsioonil suurenevad $\frac{1}{1800}$ oma pikkuse osa võrra abstsisside telje suunas.

Telgmeridiaanil on $y = 0$, seepärast siin $m_x = 1$, s. t. telgmeridiaanil on mõõtkava normaalne igas suunas.

§ 131. Gaussi konformne projektsioon.

Konformseks nimetatakse selliseid projektsioone, millede juures ei esine nurkade moonumist (säilib figuuride lõpmata väikeste osade sarnasus).

Selleks et sfäärilised ristkoordinaadid ei tekitaks nurkade moonumisi, pani Gauss ette moonutada kunstlikult ka ordinaate samas vahekorras, milles moonduvad abstsissid, s. t. suurendada ordinaadi iga lõpmata väikest elementi $\frac{y^2}{2R^2}$ tema enese pikkuse osa võrra. Seetõttu saadakse punkti mõõtkava ühesugune igas suunas ja ta avaldub nimelt valemiga (151).

Kui võtame sfäärilise ordinaadi väikese elemendi dy , siis konformsuse jaoks saame temast $dy + \frac{y^2}{2R^2} dy$. Kogu ordinaadi uue pikkuse määramiseks on ilmselt vaja võtta selle avaldisese intervall kogu ordinaadi pikkuse piirides. See intervall annab avaldisese $y + \frac{y^3}{6R^2} = y \left(1 + \frac{y^2}{6R^2}\right)$, kust näeme, et konformsuse tingimuse täitmiseks on vaja kogu sfääriline ordinaat korrutada $\left(1 + \frac{y^2}{6R^2}\right)$ -ga.

Niisiis selleks, et sfäärilised ristkoordinaadid ei moonutaks figuuride kuju, on vaja nende abstsiss jätta muutmata, kuid ordinaat korrutada avaldisega

$$\left(1 + \frac{y^2}{6R^2}\right).$$

Niiviisi saadud koordinaadid ongi Gauss-Krügeri koordinaadid.

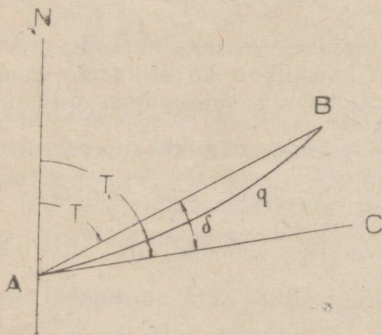
Gauss-Krügeri koordinaatide saamiseks ei arvutata praktikas siiski sfäärilisi ristkoordinaate, vaid muudetakse looduses mõõdetud nurki ja jooni sellise arvestuse kohaselt, et nendest tavaliste geodeetiliste valemite rakendamisel korruga saadakse Gauss-Krügeri koordinaadid. Sellist mõõdetud nurkade ja joonte muutmist nimetatakse nende *tasapinnale redutseerimiseks*.

§ 132. Suundade ja nurkade redutseerimine. Ekstsessi arvutamine.

Kui me Maa pinnal vaatame mingi kahe punkti vahelist suunda mööda, siis näib, et me vaatame sirgjoont mööda. Ent on vaja endale põhjalikult selgeks teha, et iga joon maapinnal tõepoolest on kõverjoon, sest ta asetseb kera pinnal. Kera pinnal on kahe vaadeldava punkti vaheliseks kõige lühemaks kauguseks suuringi

kaar. Kui see kaar kujutada paberile, siis ta saadakse mingi kõverjoone näol. Kahe suuna vaheliseks nurgaks saadakse nurk suuringi kaarte puutujate vahel.

Kujutame kahe punkti A ja B (joonis 72) vahelise suuringi mingi kõverjoone kaare AqB näol. Kui AN on telgmeridiaaniga paralleelne suund ja AC — suuringi kaare puutuja, siis maastiku joone *direktsioonnurgaks* on nurk $NAC = T_1$. Seda nurka nimetatakse *geodeetiliseks direktsioonnurgaks*.



Joonis 72.

Projektsioonil punktid A ja B ühendatakse sirgjoonega AB, nurka $NAB = T$ nimetatakse tasapinnaliseks *direktsioonnurgaks*. Geodeetilise ja tasapinnalise *direktsioonnurga* vahet, väikest nurka $BAC = \delta$, nimetatakse *kumerusest tingitud suuna paranduseks*.

Joonisest näeme, et

$$T = T_1 - \delta, \quad (152)$$

s. t. tasapinnalise *direktsioonnurga* saamiseks on vaja geodeetilisest *direktsioonnurgast* lahutada kumerusest tingitud parandus.

Kumerusest tingitud parandus arvutatakse valemist:

$$\left. \begin{aligned} \delta'' &= (4) y_m \Delta x \\ (4) &= \frac{\rho}{2 R^2} \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Siia kuuluvail suurustel on järgmised väärtused:

a) ρ — sekundite arv radiaanis = 206264''·8...

b) y_m — joone keskmise punkti ordinaat. Tema saamiseks piisab võtta joone otsade ordinaatide poolsumma:

$$y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2). \quad (154)$$

c) Δx — antud joone abstsissi juurdekasv.

d) R — keskmine kõveruseraadius (vt. allpool).

Paranduse märk saadakse mehaaniliselt sõltumuses y_m ja Δx märkidest.

Nurga parandus võrdub tema suundade paranduste vahega. Mõõdetud nurga parandamiseks on vaja nurga väärtusest lahutada tema parempoolse suuna parandus ja liita vasakpoolse suuna parandus, s. t. δ on vaja võtta vasakpoolse haara jaoks arvutamisest saadud märgiga ja parempoolse haara jaoks vastupidise märgiga.

On ilmne, et kui parandus punkti A juures on δ , siis punkti B juures on ta — δ , sest sel juhtumil juurdekasvu Δx märk muutub vastupidiseks.

Suurus (4) sõltub laiusest. Meie laiuste jaoks kumerusest tingitud paranduste arvutamisel võib kasutada tema keskmist väärtust:

$$(4) = 0,00253. \quad (155)$$

Arvutamist on kõige lihtsam sooritada aritmomeetril, kusjuures y_m ja Δx väärtused tuleb võtta kilomeetris. Võib ka kasutada lisasse 5 paigutatud tabelit, kusjuures tuleb interpoleerida mõlema argumendi y_m ja Δx järgi.

Peab märkima, et V klassi võrkudes ei ole vaja *nurki tasapinnale redutseerida*, sest kumerusest tingitud parandused on niivõrd väikesed, et mõõtmisvead ületavad neid mitu korda. Nõnda telgmeridiaanist suurima kauguse 150 km ja $\Delta x = 3$ km juures evib kumerusest tingitud parandus väärtust kõigest 1'',1.

Kolmnurkade nurkade kumerusest tingitud paranduste summa peab võrduma märgilt vastupidise ekstsessiga (v. t. § 107), mis võib olla kumerusest tingitud paranduste arvutamise õigsuse kontrolliks.

Ekstsessi arvutamiseks kasutatakse valemit (123). Et triangulatsioonides ekstsess on väga väike (võrdkulgse kolmnurga jaoks küljepikkusega 15 km, $E = 0''{,}495$), siis valemi (123) kujundame ümber nii, et ekstsessi saaks sekundeis, milleks valemi parempoolses osas tuleb võtta $180 \cdot 60 \cdot 60$. Ent

$$\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206\,264''{,}8 \dots = \rho.$$

Peale selle väljendame pindala F sõltuvalt kolmnurga külgedest kujul

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Teinud valemis (123) vastavad asendamised, saame:

$$E'' = \frac{\rho}{2R^2} ab \sin C.$$

Asendades siin

$$\frac{\rho}{2R^2} = (4)$$

saame

$$E'' = (4) ab \sin C. \quad (156)$$

Siin on a ja b kolmnurga kaks mistahes külge ja C — nende vaheline nurk.

Ekstsessi arvutamist võib samuti teha aritmomeetril, võttes $(4) = 0,00253$ ja avaldades küljed a ja b kilomeetris.

§ 133. Pikkuste redutseerimine tasapinnale.

Me teame juba, et Gaussi projektsioonis on punkti mõõtkava kõigis suundades ühesugune ja avaldub valemiga (151):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}.$$

Alama järje triangulatsioonide jaoks võib lugeda, et mistahes joone mõõtkava võrdub tema keskmise punkti mõõtkavaga. Kui joone otsade ordinaadid märgime y_1 ja y_2 , siis keskmise punkti ordinaadi y_m leiame valemi (154) järgi:

$$y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2).$$

Joone mõõtkava saame:

$$m = 1 + \frac{y_m^2}{2R^2}. \quad (157)$$

Olgu joone pikkus projektsioonil (tasapinnal) S ja Maa pinnal (looduses) s . Selle joone mõõtkava on $S:s$, järelikult valemi (157) kohaselt saame:

$$\frac{S}{s} = 1 + \frac{y_m^2}{2R^2}, \quad (a)$$

kust määrame S :

$$S = s + s \cdot \frac{y_m^2}{2R^2}. \quad (158)$$

Niisiis igale joonele tema kandmiseks plaanile peab antama parandus Δ , mis avaldatakse nii:

$$\Delta = +s \cdot \frac{y_m^2}{2R^2}. \quad (159)$$

Neid parandusi võib saada hõlpsasti argumentide s ja y_m järgi erilist tabelleist, milline on antud näiteks lisas 6.

§ 134. Gauss-Krügeri koordinaatide arvutamise skeem.

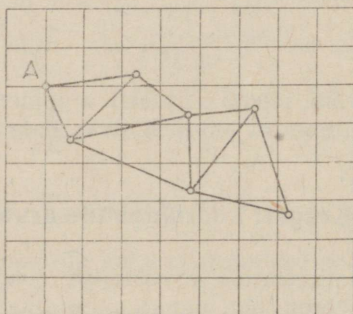
Gauss-Krügeri koordinaatide arvutamise juures peavad kõigepealt olema antud võrgu ühe punkti koordinaadid ja lähtejoone tasapinnaline direktsioonnurk.

Et alama järje triangulatsioonid üldreeglina põhjenevad kõrgema järje triangulatsioonidel, siis võetakse lähteküljeks üks viimase külgedest, ja kui alusvõrk on arvatatud Gauss-Krügeri koordinaatides, siis selline külg ja tema direktsioonnurk võetakse otseselt arvutamiseks. Kui aga alusvõrgul on ainult geograafilised koordinaadid, siis nende järgi arvutatakse lähtekülje otsapunktidele tasapinnalised koordinaadid kui ka lähtekülje direktsioonnurk (vt. edasi).

Iseseisva võrgu puhul võetakse lähteküljeks baas, mida tema otsapunktide koordinaatide saamiseks võib siduda kas astronoomilise punktiga või üldse punktiga, mille jaoks on teada geograafilised koordinaadid; või äärmisel juhtumil määratakse tema ühe otsa geograafilised koordinaadid otseseist vaatlusist või kaardi järgi. Sel juhtumil tuleb määrata ka baasi tõeline asimuut, millest siis siirdutakse direktsioonnurgale, arvestades meridiaanide konver-

gentsi. Baas ise tuleb redutseerida tasapinnale ja täpsemate tööde juures on vaja redutseerida tasapinnale ka direktsioonnurk.

Nurkade ja külgede redutseerimiseks, nagu on näha valemeist (153) ja (159), on vaja omada vastavate punktide koordinaate ja järelikult on vaja teada ka küljepikkusi. Saadakse nõiaring: paranduste arvutamiseks on vajalikud koordinaadid, koordinaatide arvutamiseks on aga vaja teada parandusi. Olukorra päästab asjaolu, et arvestades paranduste väiksust on nende arvutamiseks vajalikud ainult ligikaudsed, jämedad koordinaadid. On loomulik, et ligikaudsete koordinaatide saamiseks võib rahulduda ka ligikaudselt arvutatud kolmnurkade külgedega. Kolmnurkade ligikaudsete eelarvutustega, kasutades parandamata nurki ja redutseerimata baasi, alustataksegi arvutusi.



Joonis 73.

Kolmnurkade eelarvutust võib asendada mõõtkavalise joonise koostamisega, kusjuures joonis tuleb orienteerida geodeetilise direktsioonnurga järgi. Joonis koostatakse väljatõmmatud koordinaatide võrgul, ühtistades lähtepunkti A (joonis 73) võrgu ühe ruudu tipuga. Kui joonis on valmis, siis selle järgi on hõlpus määrata graafiliselt kõik koordinaadid A kui alguspunkti suhtes, järelikult aga ka üldse Gauss-Krügeri koordinaadid, sest punkti A koordinaadid on nii või teisiti teada.

Polügonomeetrilistes käikudes on vaja tasapinnale redutseerida kõik mõõdetud küljed, pärast mida kõik arvutused tehakse tasapinnalise geodeesia vastavate valemite järgi.

XVI peatükk.

ULEMINEK GEOGRAAFILISTELT KOORDINAATIDELT TASAPINNALISTELE JA UMBERPÕRDULT.

§ 135. Maa sferoid.

Maa on oma kujult keha, mis teatavasti sarnleb keraga. Kui me räägime Maa kujust, siis mõistame selle all kuju, mis moodustub null-nivoost, s. t. rahulikus seisus olevast mere- (ookeanide-) pinnast, kui seda laiendada ka mandrite alla.

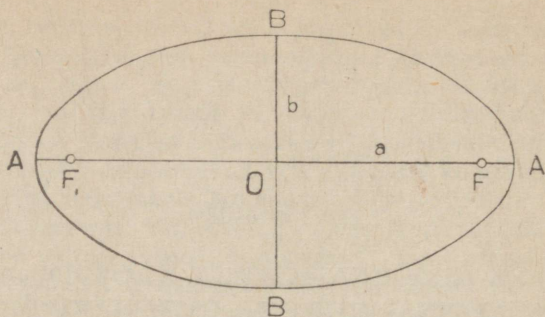
Siiski tegelikkuses ei kujuta Maa endast korrapärast kera. Üldiselt ta ei evi mingisuguse geomeetrilise keha kuju, vaid esineb omapärase kehana, mida nimetatakse *geoidiks*.

Paljudes praktilistes, erilist täpsust mitte nõudvais küsimustes võib geoidi võtta kerana, seepärast nimetataksegi teda mõnikord Maakeraks. Kuid täpsete arvutuste juures osutub selline oletus jämedaks. Neil juhtumeil loetakse geoidi *sferoidiks*, s. t. ellipsi pöörlemisel tema väikese telje ümber moodustuvaks kehaks.

§ 136. Ellipsi elemendid.

Kui võtta Maad sferoidina, siis kõik tema mõõted seostuvad ellipsiga, mille pöörlemisest moodustub sferoid. Seepärast on vaja meenutada põhilisi konstruktsioone ellipsis.

Punkte AA BB (joonis 74), kus ellips lõikub koordinaatide telgedega, mille suhtes tavaliselt antakse ellipsi võrrand, nimetatakse ellipsi lagipunktideks, lagipunkte ühendavaid jooni AA ja BB aga nimetatakse ellipsi telgedeks, AA — suurtelg, BB — väike-
telg. Suurusi a ja b nimetatakse vastavalt ellipsi suureks ja väike-
seks poolteljeks.



Joonis 74.

Suurust $p = \frac{a-b}{a}$ nimetatakse lapikuseks. Kui lagipunktist B lõigata suurtelge tema endaga võrdse raadiusega, siis saadakse punktid F_1 ja F_2 , mida nimetatakse fookusteks. Kaugust $OF_1 = OF_2 = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ nimetatakse jooneliseks ekstsentrilisuseks, mis iseloomustab ellipsi lamedust. Suurust $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ nimetatakse arvuliseks ekstsentrilisuseks.

Kõverjoone kõveruseks nimetatakse tema eemaldumise kiirust sirgjoonest. Ringjoone jaoks on kõverus seda suurem, mida väiksem on tema raadius, seepärast kõveruse mõõduks võetakse raadiuse pöördarv.

On ilmne, et ellipsi kõverus on erinevais kohtades erisugune. Kõige suurem kõverus on punktides A, A, kõige väiksem — punktides B, B. Järelikult lagipunktides A, A on kõige väiksem kõveruseraadius, lagipunktides B, B aga kõige suurem.

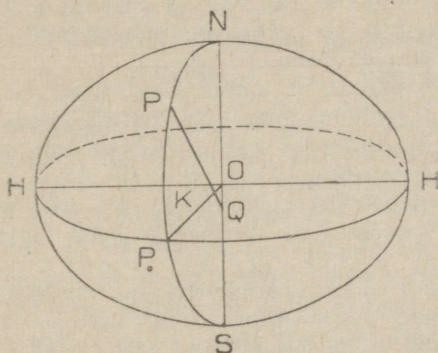
§ 137. Maa sferoidi elemendid ja nende mõõted.

Maa sferoidi põhielemendid on samad mis ellipsilgi. Järelikult on (joonis 75):

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) Suur pooltelg | a |
| 2) Väike pooltelg | b |

3) Lapikus $p = \frac{a-b}{a}$

4) Ekstsentrilisus $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$



Joonis 75.

Pooltelgede a ja b suurust ei ole senini täpselt kindlaks tehtud. NSV Liidu jaoks I geodeetilisel nõupidamisel (1926. a.) on kehtestatud järgmised Besseli andmed:¹

$$a = 6\,377\,397 \text{ m}; \quad \log a = 6,80464346$$

$$b = 6\,356\,079 \text{ m}; \quad \log b = 6,80318928$$

$$p = \frac{1}{299,15} = 0,0033427732$$

$$e^2 = 0,0066744372; \quad \log e^2 = 7,82441042 - 10.$$

¹ Alates 1942. a. on NSV Liidus astronoomilis-geodeetilise võrgu edasise tasandamise aluseks võetud Geodeesia, Aeromöödistamise ja Kartograafia Teadusliku Uurimise Keskinstituudi (ЦНИИГА и К) referents-ellipsoid mõõdetega:

$$\text{suur pooltelg } a = 6\,378\,245 \text{ m},$$

$$\text{lapikus } \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,3}.$$

Nende andmete ja kehtimapanud ühtse orienteerimise alusel arvutatud koordinaatide süsteemi NSV Liidu astr.-geod. võrgu tasandamisel nimetatakse „1942. a. koordinaatide süsteemiks“.

Praktilisteks ülesanneteks teostatakse tasandusarvutusi ka olemasolevais koordinaatide-süsteemides Besseli sferoidil.

Tõlkija

§ 138. Põhilised jooned ja tasapinnad sferoidil.

Lähtesuundadena esinevad Maa pinnal loodijoon PQ ja meridiaani suund NPP_0S . Nurk $PKP_0 = \varphi$, mille loodijoon moodustab ekvaatori tasapinnaga, nimetatakse teatavasti geograafiliseks laiuks.

Meridiaani tasapindade vahelised nurgad, näiteks $HOP_0 = 1$, on geograafiliste pikkuste vahed.

Sferoidi mingis punktis P (joonis 75) võib tõmmata üle loodijoone lõpmatu hulga tasapindu, mida nimetatakse normaaltasapindadeks. Neist omavad erilist tähtsust kaks — meridiaani tasapind ja sellega risti olev esimese vertikaali tasapind.

Normaaltasapinnad lõikes sferoidiga annavad ellipsid ja ainult ekvaatori tasapinnaga ühtiv normaaltasapind annab lõikes ringi (ekvaatori).

Antud punktis tõmmatud erinevate normaallõigete kõveruseraadiused on erinevad. Suurim kõveruseraadius vastab esimesele vertikaalile. Ta kujutab endast loodijoone lõiku Maa pinnast kuni Maa teljeni (joonisel 75 lõik PQ). Me hakkame teda edaspidi märkima tähega N:

$$N = 1\text{-se vertikaali kõveruseraadius.} \quad (160)$$

On ilmne, et ekvaatoril $N = a$.

Vähim kõveruseraadius vastab punkti meridiaanile. Me hakkame teda alati märkima tähega M:

$$M = \text{meridiaani kõveruseraadius.} \quad (161)$$

Raadiused N ja M olenevad konstantidest a ja b ning laiupest φ . Uhel ja samal paralleelil asetsevad punktid (ühesuguse laiuusega punktid) evivad ühesugust N ja ühesugust M. Neid avaldatakse valemitega:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ M &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Mõnede ülesannete lahendamisel võetakse kõveruseraadiuste N ja M asemel enam või vähem suurte maa-alade jaoks *keskmise kõveruseraadius* R, mis on võrdne kõigis suundades (sferoid asendatakse sfääriga, mille raadiuseks on R). Selle raadiuse suurus määratakse järgneva valemiga (Grunnerti teoreemi järgi):

$$R = \sqrt{MN}. \quad (163)$$

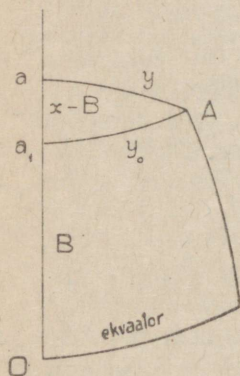
§ 140. Gauss-Krügeri koordinaatide arvutamine antud geograafilistest koordinaatidest.

a) *y* määramine: olgu antud punkti geograafilised koordinaadid φ ja λ . Pikkuse λ järgi on hõlpus leida telgmeridiaani pikkus λ_0 (λ -le lähim kolmega kordne pikkus). Järelikult on ka teada antud meridiaani ja telgmeridiaani pikkuste vahe l :

$$l = \lambda - \lambda_0. \quad (167)$$

See vahe on paralleeli kaar Aa_1 (joonis 76). Selle kaare pikkuse võib võtta ligikaudu ordinaadiks y . On ilmne, et selle pikkuse saame suuruse P ja l korrutamiseega väljendatult sekundeis. Niisiis märkides ligikaudse ordinaadi tähega y_0 saame tema jaoks valemi:

$$y_0 = P l = \frac{N}{\rho} l \cos \varphi. \quad (168)$$



Joonis 76.

Nagu juba on mainitud, on suurused P toodud V. Kagani I tabelis. Tabelite kasutamine, tabelisuuruste interpoleerimine ja teised juhendid on antud tabeleis enestes. Nende abiga võib sooritada esmaklassiliste triangulatsioonide jaoks täpseid arvutusi (meetri sajandik- ja tuhandik-osadeni). Kohalike (asutiste) triangulatsioonide jaoks ei nõuta sellist täpsust. Siin võib koordinaate arvutada kunni meetri kümnendikosade täpsusega, millest sõltuvalt on võimalikud tunduvad lihtsustused, mis on ära näidatud tabelite juures

olevas seletuses. Nõnda suuruse P määramisel piisab selle võtmisest kuue määrgiga, kusjuures juurdekasvu $\Delta 1''$ võib mitte interpoleerida.

Kui antule lähima (temast vähema) tabeli laiuse määrgime φ_0 -ga ja temale vastava paralleeli $1''$ -lise kaare pikkuse P_0 -ga, siis P määramiseks saame:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi - \varphi_0 \\ \Delta P &= \Delta 1'' \Delta\varphi \\ P &= P_0 - \Delta P \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Ordinaadi y leidmiseks on vaja tema ligikaudne väärtus y_0 parandada suuruse r võrra, mis saadakse nii:

$$r = y_0 \cdot 10^{-6} l^2 k_1. \quad (170)$$

$10^{-6} l^2$ saamiseks tuleb suurus l koma vasakule üle viia 3 märke võrra (vähendada 1000 korda) ja saadud arv aritmomeetril tõsta ruutu, tulemuses on küllaldane jätta pärast koma 4 märki.

Suurus k_1 on antud samas tabelis kümnenda kümnendmärgi ühikuis. Tabelis mitteolevate laiuste jaoks tuleb ta leida lihtsa interpoleerimisega.

Kui suurus $10^{-6} l^2$ koma järele jätta 4 märki, siis korrutises $10^{-6} l^2 k_1$ on vaja eraldada kokku 14 märki. Nendest on edasise y -ga korrutamise jaoks vaja jätta 8 märki. y_0 -st enesest aga piisab korrutamise jaoks võtta ainult terve osa.

V klassi võrkude jaoks võib suuruse r kuni 0,1 m täpsuseni saada korraga sama tabeli lk. 77 olevast nomogrammist nr. 4 argumentide y_0 kilomeetreis ja φ järgi. Seejuures peetagu meeles, et $\varphi < 45^\circ$ jaoks on parandus r positiivne, aga $\varphi > 45^\circ$ jaoks on ta negatiivne (see reegel on kirjutatud nomogrammiga kõrvuti).

Nii omame y arvutamiseks valemit:

$$y = y_0 + r. \quad (171)$$

Näide. Antud: $\varphi = 51^\circ 52' 26''{,}2$; $\lambda = 36^\circ 55' 00''{,}5$.

Antud pikkuse järgi leiame $l = 36^\circ 55' 00''{,}5 - 36^\circ = 55' 00''{,}5 = 3300''{,}5$.

Arvutused		Märkmed
P_0 $\Delta 1'' \cdot 26,2$	19,1315140 0,0030876	I tabel, laiuse $\varphi_0 = 51^\circ 52'$ (lk. 47) järgi. $\Delta 1'' = 0,000117848$ — samas
P $y_0 = P_1$ r	19,1284264 63133,37 -0,64	$10^{-6} l^2 = 10,8933$; $k_1 = 9271$
y	63132,73	

b) Meridiaanide konvergenti (koonduvuse) γ määramine. Meridiaanide konvergenti jaoks on meil ligikaudne valem (147):

$$\gamma_0 = l \sin \varphi. \quad (172)$$

Selle valemi lahendamiseks on I tabelis antud $\sin \varphi$ kuuekohalised loomulikud väärtused $1'$ ja $\Delta 1''$ (siinuse juurdekasvud $1''$ -le) tagant.

Konvergenti täpsema arvutamise jaoks on vaja γ_0 -le anda parandus B , mis määratakse nii:

$$B = \gamma_0 \cdot 10^{-6} l^2 k_3. \quad (173)$$

k_3 väärtused üheksanda kümnendmärgi ühikuis on toodud II tabelis (lk. 62—66). Siiski 3. nomogrammist (lk. 75) võib saada kogu liikme B täpsusega kuni sekundi sajandikkudeni argumentide φ ja l järgi.

Niisiis meridiaanide konvergenti γ arvutamiseks on valem:

$$\gamma = \gamma_0 + B. \quad (174)$$

Näide (andmed vt. eespool).

$\sin \varphi_0$ $\Delta 1'' \cdot 26,2$	0,786576 79	$\Delta 1'' = 3,00$
$\sin \varphi$ $\gamma_0 = l \sin \varphi$ B	0,786655 2596'',35 0,09	$k_3 = 3010$
γ	2596'',44 43'16'',44	

c) x määramine. x määramiseks on esialgu vaja leida telgmeridiaani pikkus ekvaatorist kuni antud laiusse paralleelini, s. t. kaare $Oa_1 = B$ pikkus (joonis 76).

I tabelis on toodud B_0 väärtused laiuste jaoks 1' tagant. Tabelis mitteolevale laiusele vastava B saamiseks kasutatakse suurusi $\Delta 1''$, korrutades neid laiuste vahega — antu miinus tabeli lähim:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi - \varphi_0 \\ \Delta B &= \Delta 1'' \cdot \Delta \varphi \\ B &= B_0 + \Delta B \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

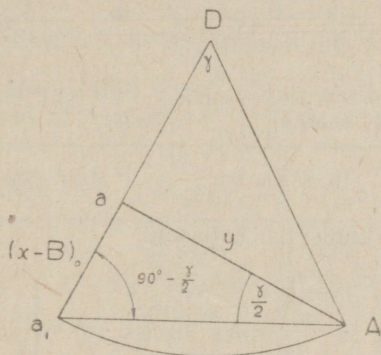
Kui lähim tabeli laius osutub antust suuremaks ($\varphi_0 > \varphi$), siis $\Delta \varphi$ on negatiivne, järelikult osutub negatiivseks ka ΔB .

Näide. Ulaltoodud andmete jaoks saame:

Arvutused		Märkmed
$\Delta \varphi$	26'',2	
$\Delta 1''$	30,90336	Argumenti $\varphi_0 = 51^\circ 52'$ (lk. 47) järgi.
ΔB	809,668	
B_0	5747916,895	Samas.
B	5748726,563	

Pärast seda määratakse kaar $a_1 a = (x - B)$. Liitnud selle kaare pikkuse B-ga, saame x .

Et saada $(x - B)$ ligikaudne väärtus, mille märgime $(x - B)_0$ kujul, tõmbame joonisel 76 meridiaanidele punktides A ja a_1 puutujad ja kanname joonise ülemise osa välja eraldi joonisele (joonis 77). Puutujad lõikuvad punktis D ja moodustavad nurga



Joonis 77.

$AD a_1 = \gamma$ (võrdle joonis 66, § 125). Ühendanud punktid A ja a_1 sirgega, saame võrdhaarse kolmnurga ADa_1 , milles aluse juures olevaist nurkadest igaüks võrdub $(180^\circ - \gamma) : 2$ ehk $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Tõmmanud ristjoone Aa , saame täisnurkse kolmnurga $a_1 aA$, milles võib võtta:

$$\begin{aligned} \text{kaatet } Aa &= y \\ \text{kaatet } a_1 a &= (x - B)_0 \end{aligned}$$

ja peale selle, nagu just selgitatud:

$$\text{nurk } a_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

Järelikult

$$\text{nurk } A = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \frac{\gamma}{2}$$

Sellest kolmnurgast saame:

$$(x - B)_0 = y \tan \frac{\gamma}{2}$$

Asendades siin nurga $\frac{\gamma}{2}$ väiksuse tõttu $\tan \frac{\gamma}{2}$ suurusega $\frac{\gamma}{2\rho}$ saame:

$$(x - B)_0 = \frac{y\gamma}{2\rho} = \frac{y\gamma}{412\,530}. \quad (176)$$

Asendades valemisse (176) y ja γ ligikaudsed väärtused valemist (168) ja (172) saame:

$$(x - B)_0 = \frac{N}{2\rho^2} \cdot l^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

ehk V. Kagani märkimisviisi kohaselt:

$$\left. \begin{aligned} (x - B)_0 &= 10^{-6} l^2 q \\ q &= \frac{N}{2\rho^2} \sin \varphi \cos \varphi \cdot 10^6 \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Väärtused q valitakse I tabelist, kusjuures laiuse sekundite jaoks tehakse lihtne interpoleerimine kõrval asetsevate neljanda märgi ühikuis avaldatud suuruste $\Delta 1''$ abil.

$$q = q_0 \pm \Delta q; \quad \Delta q = \Delta \varphi \cdot \Delta 1'' \quad (178)$$

(märk \pm esineb sellepärast, et $\varphi \leq 45^\circ$ juures parandused liidetakse, $\varphi \geq 45^\circ$ juures aga lahutatakse).

Suuruse $(x - B)$ täpse väärtuse määramiseks on vaja väärtusele $(x - B)_0$ anda parandus δ , mida võib avaldada nii:

$$\delta = l^4 q k_2 \cdot 10^{-12}. \quad (179)$$

Suurus k_2 antakse II tabelis üheksanda kümnendmärgi ühikuis.

Paranduse δ määramiseks on palju lihtsam kasutada 2. nomogrammi (lk. 73) või lisas 7 toodud tabelit. Viimasest leitakse suurus δ kiiresti lihtsa interpoleerimisega argumentide l ja φ järgi.

Niisiis suuruse $(x - B)$ arvutamiseks on valem:

$$x - B = (x - B)_0 + \delta. \quad (180)$$

Pärast $(x - B)$ arvutamist saame abstsissi x nii:

$$x = (x - B) + B. \quad (181)$$

(x — B) arvutamise kontrolliks kasutatakse valemit (176) järgmisel kujul:

$$x - B = \frac{y\gamma}{412\,530} + \Delta \quad (182)$$

Parandus Δ saadakse 6. nomogrammist (lk. 79) argumentide l ja φ järgi.

N ä i d e (andmed vt. eespool).

Arvutused		Märkmed
$10^{-6} l^2$	10,8933	$(3,3005)^2$
q_0	36,4783	Laiuse $\varphi_0 = 51^\circ 52''$ juures
Δq	22	$\Delta\varphi = 26'',2; \Delta 1'' = 0,85$
q	36,4761	
$10^{-6} l^2 q = (x-B)_0$	397,35	
δ	0,01	Tabelist lisas 7
$x - B$	397,36	
B	5748726,56	
x	5749123,92	

§ 141. Kohalik algus.

Suurte arvude vältimiseks Gauss-Krügeri abstsisside avaldamisel võetakse praktikas alguseks telgmeridiaani lõikepunkt mitte ekvaatoriga, vaid miljonilise kaardi vastava lehe keskmise paralleeliga. See on niinimetatud kohalik algus.

Miljonilise kaardi lehed teatavasti piirnevad laiuselt neljaga (täiskraadides) kordsete paralleelidega. Järelikult kohaliku alguse saamiseks tuleb võtta 4-ga mitte jagatavad paarisarvulised paralleelid. Niisiis, kui antud laius on $51^\circ 52'$, siis kohalikuks alguseks tuleb võtta 50° paralleeli lõikepunkt telgmeridiaaniga. On ilmne, et antud laiuse ja kohaliku alguse vahe on alati väiksem 2° -st.

Kohalikust algusest abstsissi x' suuruse saamiseks on vaja eelmise paragrahvi valemite järgi arvutatud x -st lahutada B' väärtus. See väärtus võetakse tabelist 1. Nii leiame kohaliku alguse 50° jaoks lk. 46 $B' = 5\,540\,279,542$.

Niisiis:

$$x' = x - B'. \quad (183)$$

Eespool arvutatud näites toodud x väärtuse jaoks saame:

$$x' = 5\,749\,123,92 - 5\,540\,279,54 = 208\,844,38.$$

On silmanähtav, et kui antud punkti laius on väiksem kohaliku alguse laiusest, siis tema abstsiss saadakse negatiivne.

§ 142. Siirdumine tasapinnalistelt koordinaatidelt geograafilistele.

Praktikas võib esineda juhtumeid, kus mõõdistamise rajoonis aluspunktide jaoks on teada ainult tasapinnalised koordinaadid. Neil juhtumel planšeti nomenklatuuri määramiseks tuleb kas või ühe punkti jaoks lahendada *pöördülesanne (vastuülesanne)*, s. o. Gauss-Krügeri antud koordinaatide järgi arvutada geograafilised koordinaadid.

Pöördülesande lahendamine võib osutada tarvilikuks ka *meridiaanide ja paralleelide väljumise* kohtade märkimiseks raami külgedele, kui mõõdistamist teostati ruudu kuju (küljepikkustega $50\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) evivate raamidega planšettide viisi. Sel juhtumil on nurgatippude jaoks ilmselt teada Gauss-Krügeri koordinaadid, nende järgi ongi vaja leida geograafilised koordinaadid. Pärast seda on hõlpus määrata meridiaanide ja paralleelide väljumise kohti raami külgedele lihtsa interpoleerimisega.

Kõigil neil juhtumel piisab koordinaatide saamisest täpsusega kuni $0'',01$.

Pöördülesande lahendamiseks peab peale Gauss-Krügeri koordinaatide teada olema ka kohaliku alguse pikkus λ_0 ja laius ϕ_0 , mis alati antakse koos tasapinnaliste koordinaatidega.

Arvutusi alustatakse x määramisega:

$$x = x' + B'. \quad (184)$$

Suurused B' leitakse tabelist suuruse ϕ_0 järgi.

Pärast seda on vaja leida φ_1 — ordinaadi aluse laius (joonisel 76 — punkti a laius).

Selleks leiame I tabelist antud x -le lähima B_0 väärtuse ja temale vastava laiuse φ_0 . Edasi moodustame vahe:

$$d = x - B_0. \quad (185)$$

Jaganud selle vahe B_0 -le vastava $\Delta 1''$ -ga, saame paranduse $\Delta\varphi''$, mida φ_1 saamiseks on vaja liita φ_0 -ga:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi'' &= \frac{d}{\Delta 1''} \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \Delta\varphi'' \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Näide. Antud: $x' = + 208\ 844,38$; $y = + 63\ 132,73$.

$$\phi_0 = 50^\circ$$

$$\lambda_0 = 36^\circ$$

Arvutused		Märkmed
B'	5 540 279,54	Argumendi $\phi_0 = 50^\circ$ järgi.
+ x'	208 844,38	
x	5 749 123,92	$\phi_0 = 51^\circ 53'$; $\Delta 1'' = 30,90345$
- B ₀	5 749 771,10	
d	-647,18	
$\Delta\varphi'' = \frac{d}{\Delta 1''}$	- 20,942	
$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi''$	51°52'39",058	

Pikkuste arvutamiseks piisab pikkuste vahe $\lambda - \lambda_0 = l$ arvutamisest, mille järgi pikkuse leiame nii:

$$\lambda = \lambda_0 + l. \quad (187)$$

Pikkuste vahe ligikaudse väärtuse l_0 saame valemist (168):

$$l_0 = \frac{y}{P_1}. \quad (188)$$

Siin on tähega P_1 märgitud paralleeli $1''$ -lise kaare pikkus laiusel φ_1 .

Täpne väärtus l jaoks saadakse pärast paranduse κ andmist väärtusele l_0 ; parandus κ lahutatakse l_0 -st ja ta kujutab endast kahe suuruse A ja h korrutist:

$$\kappa = Ah = 10^{-11} l_0^3 \cdot h. \quad (189)$$

Suurused A ja h võetakse tabelist: A — III tabelist (lk. 68) argumendi l_0 järgi, h — II tabelist argumendi φ_1 järgi. Kogu paranduse võib korruga valida täpsusega kuni sekundi sajandikuni nomogrammist nr. 8 (lk. 81) või lisas 8 toodud tabelist.

Niisiis l arvutamiseks omame valemit:

$$l = l_0 - \kappa. \quad (190)$$

N ä i d e (andmed vt. eespool)

Arvutused		Märkmed
P_1	19,126918	Argumendi $\varphi_1 = 51^\circ 52' 39'', 058$ järgi Valemi (188) järgi
l_0	3 300,73	
κ	0,23	Tabelist lisas 7
l	$3\,300'',50 = 55'00'',5$	
λ	$36^\circ 55'00'',5$	Valemi (187) järgi

Laiuse φ määramiseks on vaja laiusest φ_1 lahutada parandus ψ , mis saadakse nii (sekundeis):

$$\psi = 10^{-6} l^2 r. \quad (191)$$

Suurus r võetakse tabelist V (lk. 71).

Otsitava laiuse saame nii:

$$\varphi = \varphi_1 - \psi. \quad (192)$$

N ä i d e (eelmise näite järgi).

Arvutused		Märkmed
$10^{-6} l^2$	10,8933	$(3,3005)^2$ Argumendi $\varphi_1 = 51^\circ 52' 39'', 058$ järgi
r	1,180	
ψ	12'',854	
$\varphi_1 - \psi = \varphi$	$51^\circ 52' 26'', 20$	

LISAD.

Lisa 1.

Joone kallakusest tingitud parandused (millimeetris).

Tabel 1.

Kald- nurgad	Kaugused											Kald- nurgad	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20		
0°00'	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0°00'
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	10	
20	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	20	
30	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,8	30	
40	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	1,4	40	
50	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	2,1	50	
1°00'	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,4	1,5	3,0	1°00'	
10	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	4,1	10	
20	0,2	0,6	0,8	1,1	1,4	1,6	1,9	2,1	2,4	2,7	5,5	20	
30	0,3	0,6	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,7	3,1	3,4	6,9	30	
40	0,4	0,8	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8	4,2	8,5	40	
50	0,5	1,0	1,5	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1	10,2	50	
2°00'	0,6	1,2	1,8	2,4	3,1	3,6	4,2	4,8	5,4	6,1	12,2	2°00'	
10	0,7	1,4	2,1	2,8	3,6	4,2	5,0	5,7	6,4	7,1	14,3	10	
20	0,8	1,6	2,4	3,3	4,1	5,0	5,8	6,6	7,4	8,2	16,6	20	
30	1,0	1,9	2,8	3,8	4,8	5,7	6,6	7,6	8,6	9,5	19,0	30	
40	1,1	2,2	3,2	4,3	5,4	6,5	7,6	8,6	9,8	10,8	21,7	40	
50	1,2	2,4	3,6	4,8	6,1	7,3	8,6	9,8	11,0	12,2	24,4	50	
3°00'	1,4	2,7	4,1	5,4	6,8	8,2	9,6	11,0	12,3	13,7	27,4	3°00'	
10	1,5	3,0	4,6	6,1	7,6	9,2	10,6	12,2	13,7	15,2	30,5	10	
20	1,6	3,4	5,1	6,8	8,4	10,2	11,8	13,5	15,2	16,9	33,8	20	
30	1,8	3,7	5,6	7,4	9,3	11,2	13,1	14,9	16,8	18,6	37,3	30	
40	2,1	4,1	6,1	8,2	10,2	12,2	14,3	16,4	18,4	20,4	40,9	40	
50	2,2	4,4	6,7	9,0	11,2	13,4	15,6	17,8	20,1	22,4	44,7	50	
4°00'	2,4	4,8	7,3	9,7	12,2	14,5	17,1	19,4	21,9	24,4	48,7	4°00'	
10	2,6	5,2	7,9	10,6	13,2	15,8	18,5	21,1	23,8	26,4	52,9	10	
20	2,8	5,7	8,6	11,4	14,2	17,2	20,0	22,8	25,7	28,6	57,2	20	
30	3,1	6,2	9,2	12,3	15,4	18,5	21,6	24,6	27,7	30,8	61,7	30	
40	3,3	6,6	10,0	13,2	16,6	19,8	23,2	26,5	29,8	33,2	66,3	40	
50	3,6	7,1	10,6	14,2	17,8	21,3	24,8	28,4	32,0	35,6	71,1	50	
5°00'	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2	38,1	76,1	5°00'	

Koördinaatide juurdekasvude kaalud.

P_x

Tabel 2.

\backslash A	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
2	200,00	204,08	227,27	256,41	322,58	454,55	666,67	1111,11	1666,70	2500,00
3	133,33	136,99	149,25	169,49	204,08	270,27	370,37	526,32	769,23	909,09
4	100,00	102,04	109,90	125,00	149,25	185,19	243,90	333,33	434,78	476,19
5	80,00	81,97	87,72	97,09	112,36	136,99	169,49	212,77	250,00	270,27
6	66,77	67,57	71,94	79,37	88,50	104,17	121,95	144,93	163,93	169,49
7	57,14	57,80	60,61	65,36	71,43	80,65	90,09	100,00	109,89	112,36
8	50,00	50,51	52,08	54,95	58,82	63,69	68,96	73,53	77,52	78,74
9	44,44	44,84	45,56	46,95	48,78	51,28	53,19	55,25	56,50	57,14
10	40,00	40,16	40,32	40,65	41,15	41,67	42,02	42,55	42,74	42,92
11	36,36	36,23	35,84	35,46	34,72	34,25	33,56	33,22	32,89	32,79
12	33,33	33,00	32,05	31,15	29,85	28,57	27,47	26,60	26,18	25,97
13	30,77	30,40	29,15	27,40	25,64	23,98	22,57	21,55	20,92	20,75
14	28,57	27,93	26,39	24,39	22,22	20,33	18,80	17,73	17,12	16,89
15	26,67	25,91	24,04	21,69	19,34	17,33	15,80	14,73	14,12	13,91
16	25,00	24,15	22,03	19,38	16,89	14,90	13,39	12,35	11,78	11,59
17	23,53	22,57	20,16	17,39	14,75	12,87	11,43	10,46	9,93	9,76
18	22,22	21,19	18,55	15,67	13,11	11,20	9,84	8,94	8,45	8,29
19	21,05	19,88	17,12	14,12	11,63	9,78	8,52	7,70	7,25	7,11
20	20,00	18,73	15,80	12,79	10,34	8,61	7,42	6,68	6,27	6,14
21	19,05	17,70	14,62	11,60	9,25	7,59	6,51	5,82	5,46	5,34
22	18,18	16,72	13,59	10,56	8,29	6,74	5,73	5,11	4,78	4,67
23	17,39	15,85	12,61	9,62	7,45	6,00	5,08	4,51	4,21	4,11
24	16,67	15,06	11,74	8,79	6,72	5,37	4,52	4,00	3,72	3,64
25	16,00	14,31	10,94	8,05	6,08	4,82	4,04	3,56	3,31	3,23
26	15,38	13,62	10,20	7,39	5,52	4,34	3,62	3,19	2,96	2,89
27	14,81	12,97	9,53	6,79	4,79	3,92	3,26	2,86	2,65	2,59
28	14,29	12,38	8,91	6,25	4,58	3,56	2,95	2,58	2,39	2,33
29	13,79	11,82	8,35	5,77	4,18	3,24	2,67	2,33	2,16	2,10
30	13,33	11,30	7,83	5,33	3,83	2,95	2,43	2,12	1,96	1,90
31	12,90	10,81	7,35	4,94	3,52	2,70	2,21	1,93	1,78	1,73
32	12,50	10,35	6,91	4,58	3,25	2,47	2,02	1,76	1,62	1,58
33	12,12	9,92	6,50	4,26	2,99	2,27	1,85	1,61	1,48	1,45
34	11,76	9,51	6,12	3,96	2,84	2,09	1,70	1,47	1,36	1,32
35	11,43	9,12	5,76	3,69	2,56	1,93	1,57	1,36	1,25	1,22
36	11,11	8,76	5,44	3,44	2,38	1,78	1,45	1,25	1,15	1,12
37	10,81	8,42	5,13	3,21	2,21	1,65	1,34	1,16	1,06	1,03
38	10,53	8,09	4,85	3,01	2,05	1,53	1,24	1,07	0,98	0,96
39	10,26	7,79	4,59	2,82	1,91	1,42	1,15	0,99	0,91	0,89
40	10,00	7,50	4,34	2,64	1,79	1,33	1,07	0,92	0,85	0,82

\backslash A	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

P_y

$$\text{Suurused } Q = \Delta_a^2 + \Delta_a \Delta_b + \Delta_b^2$$

(logaritmide 6-nda koha ühikuis).

1	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	
12°	253																					
14	214	187																				
16	187	162	143																			
18	168	143	126	113																		
20	153	130	113	100	91																	
22	142	119	103	91	81	74																
24	134	111	95	83	74	67	61															
26	126	104	89	77	68	61	66	51														
28	120	99	83	72	63	57	51	47	43													
30	115	94	79	68	59	53	48	43	40	33												
35	106	85	71	60	52	46	41	37	33	27	23											
40	99	79	65	54	47	41	36	32	29	23	19	16										
45	93	74	60	50	43	37	32	28	25	20	16	13	11									
50	89	70	57	47	39	34	29	26	23	18	14	11	9	8								
55	86	67	54	44	37	32	27	24	21	16	12	10	8	7	5							
60	83	64	51	42	35	30	25	22	19	14	11	9	7	5	4	4						
65	80	62	49	40	33	28	24	21	18	13	10	7	6	5	4	3	2					
70	78	60	48	38	32	27	23	19	17	12	9	7	5	4	3	2	2	2	1			
75	76	58	46	37	30	25	21	18	16	11	8	6	4	3	2	2	2	1	1	1		
80	74	57	45	36	29	24	20	17	15	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	
85	73	55	43	34	28	23	19	16	14	10	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0
90	71	54	42	33	27	22	19	16	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0
95	70	53	41	32	26	22	18	15	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0
100	68	51	40	31	25	21	17	14	12	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0
105	67	50	39	30	25	20	17	14	12	8	5	4	2	2	1	1	1	0	0			
110	65	49	38	30	24	19	16	13	11	7	5	3	2	2	1	1	0					
115	64	48	37	29	23	19	15	13	11	7	5	3	2	2	1	0						
120	62	46	36	28	22	18	15	12	10	7	5	3	2	2	1							
125	61	45	35	27	22	18	14	12	10	7	5	4	3	2								
130	59	44	34	26	21	17	14	12	10	7	5	4	3									
135	58	43	33	26	21	17	14	12	10	7	5	4										
140	56	42	32	25	20	17	14	12	10	8	6											

Keskmise refraktsiooni tabel.

760 mm-lise õhurõhu ja +10° C temperatuuri juures.

z'	r	z'	r	z'	r
50°	1'09"	60°	1'41"	70°	2'39"
51°	1'12"	61°	1'45"	71°	2'48"
52°	1'14"	62°	1'49"	72°	2'58"
53°	1'17"	63°	1'54"	73°	3'09"
54°	1'20"	64°	1'59"	74°	3'20"
55°	1'23"	65°	2'04"	75°	3'34"
56°	1'26"	66°	2'10"	76°	3'50"
57°	1'29"	67°	2'17"	77°	4'08"
58°	1'33"	68°	2'23"	78°	4'28"
59°	1'37"	69°	2'31"	79°	4'52"
60°	1'41"	70°	2'39"	80°	5'20"

Lisa 3 (§ 118)

Põhjanea la asimuutide ligikaudsed väärtused.
Horisontaalnurk Mizariga.

Tabel 1.

Horisontaal- nurgad	Laiused				
	40°	45°	50°	55°	60°
300°	—	—	1°16'	1°41'	2°02'
310°	—	1°24'	1°36'	1°50'	2°05'
315°	1°20'	1°29'	1°38'	1°49'	2°02'
320°	1°22'	1°28'	1°35'	1°44'	1°57'
330°	1°11'	1°16'	1°21'	1°29'	1°39'
340°	0°52'	0°56'	1°00'	1°06'	1°14'
350°	0°30'	0°33'	0°35'	0°39'	0°43'
0°	0°07'	0°07'	0°08'	0°09'	0°10'
10°	-0°18'	-0°19'	-0°20'	-0°21'	-0°23'
20°	-0°41'	-0°44'	-0°47'	-0°51'	-0°55'
30°	-1°03'	-1°06'	-1°11'	-1°16'	-1°24'
40°	-1°12'	-1°23'	-1°29'	-1°37'	-1°47'
45°	-1°21'	-1°27'	-1°35'	-1°43'	-1°55'
50°	—	-1°27'	-1°37'	-1°48'	-2°01'
60°	—	—	—	-1°46'	-2°04'

Horisontaal- nurgad	Laiused				
	40°	45°	50°	55°	60°
310°	—	—	—	—	—2°04'
320°	—	—1°26'	—1°37'	—1°48'	—2°02'
330°	—1°18'	—1°23'	—1°29'	—1°37'	—1°47'
340°	—1°00'	—1°03'	—1°08'	—1°13'	—1°21'
350°	—0°34'	—0°37'	—0°39'	—0°43'	—0°47'
0°	—0°06'	—0°07'	—0°08'	—0°08'	—0°10'
10°	+0°23'	+0°24'	+0°25'	+0°27'	+0°29'
20°	0°50'	0°53'	0°56'	1°02'	1°06'
30°	1°14'	1°17'	1°22'	1°28'	1°36'
40°	1°20'	1°29	1°30'	1°46'	1°58'
45°	—	—	1°36'	1°47'	2°04'
50°	—	—	—	1°48'	2°06'
60°	—	—	—	—	1°58'

Lisa 4 (§ 123)

Asimuudi arvutamine Põhjanea la järgi.

Andmed

φ	55°46'	$\cos \varphi$	0,56256
δ_1	55°18'	$\cos \delta_1$	0,56928
$\frac{1}{2} (\delta_1 + \varphi)$	55°32'	$\sin \frac{1}{2} (\delta_1 + \varphi)$	0,82446
$\frac{1}{2} (\delta_1 - \varphi)$	—0°14'	$\cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \varphi)$	0,99999
α	23°58'	$k = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta_1}$	0,98820
α_1	200°16'		
Δ'	65',1	$k_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} (\delta_1 + \varphi)}{\cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \varphi)}$	0,82447

Märkimised	Rp	Rv	Märkimised	Rp	Rv
U	308°53'	310°25'	$t = \theta - \alpha$	269°38'	272°46'
α	1°53'	1°56'	$\sin t$	-0,99998	-0,99883
$\alpha_1 = U + \alpha$	310°46'	312°21'	$\cos t$	-0,00640	+0,04827
$\sin \alpha_1$	-0,75738	-0,73904	$m = \frac{\Delta' \sin t}{3438}$	-0,01894	-0,01891
$\sin q = k \sin \alpha_1$	-0,74844	-0,73032	$\Delta' \cos t$	-0°00',4	+ 0°03',1
q	- 48°27'	- 46°55'	$d = 90^\circ - \varphi -$ $- \Delta' \cos t$	34°14',4	34°10',9
$p = \frac{1}{2} (\alpha_1 + q)$	131°09'	132°43'	$\sin d$	0,56266	0,56182
$\tan p$	-1,14430	-1,08306	$\tan \alpha = -\frac{m}{\sin d}$	0,03366	0,03366
$\cot \frac{t_1}{2} = -k_1 \tan p$	+0,94344	+0,89295	α	1°55',7	1°55',7
$\frac{t_1}{2}$	46°40'	48°14'	$N = b - a$	83°49',3	263°55',5
t_1	93°20'	96°28'	$A = M - N$	36°18,7	36°10',5
$\theta = t_1 + \alpha_1$	293°36'	296°44'	A_0	36°14',6	—

Paranduste $\delta = (4) y_m \Delta x$ tabel.

Δx km y_m km	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00	0'00
10	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3
20	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5
30	0,0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8
40	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
50	0,0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3
60	0,0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,4	1,5
70	0,0	0,2	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8
80	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
90	0,0	0,2	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,8	2,1	2,3
100	0,0	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3	2,5
110	0,0	0,4	0,6	0,8	1,1	1,4	1,7	1,9	2,2	2,5	2,8
120	0,0	0,4	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
130	0,0	0,4	0,7	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,0	3,3

Lisa 6 (§ 133)

Paranduste $\Delta = s \frac{y_m^2}{2R^2}$ tabel.

S km y_m km	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
20	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05
30	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11
40	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
50	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,25	0,28	0,31
60	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,26	0,31	0,35	0,40	0,44
70	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60
80	0,08	0,16	0,24	0,31	0,39	0,47	0,55	0,63	0,71	0,78
90	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,79	0,89	0,99
100	0,12	0,25	0,37	0,49	0,61	0,74	0,86	0,98	1,10	1,23
110	0,15	0,30	0,45	0,59	0,74	0,89	1,04	1,19	1,34	1,48
120	0,18	0,35	0,53	0,71	0,88	1,06	1,24	1,41	1,59	1,77
130	0,21	0,41	0,62	0,83	1,04	1,24	1,45	1,66	1,87	2,08

Märkus: Kauguste (S) jaoks pikkuse 100, 200 jne. meetri juures võetagu tabelisuurused vastavalt 1,2 jne. kilomeitrit ja vähendatagu neid 10 korda (viidagu koma vasakule ühe märgi võrra).

Parandused $\delta = 10^{-12} 1^4 \text{ qk}_2$.

φ	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
2000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2400	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2800	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
3200	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
3600	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
4000	0,05	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
4400	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01
4800	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
5200	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,04	0,03	0,02
5600	0,18	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,09	0,07	0,06	0,04	0,03

Parandused $\kappa = 10^{-11} 1_0^3 \text{ h}$.

φ	40°	45°	50°	55°	60°
800''	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1000	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
1200	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
1400	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
1600	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03
1800	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04
2000	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05
2200	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07
2400	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09
2600	0,10	0,10	0,11	0,12	0,12
2800	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15
3000	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19
3200	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
3400	0,22	0,23	0,24	0,26	0,27
3600	0,26	0,27	0,29	0,31	0,32
3800	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38
4000	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44
4200	0,41	0,44	0,46	0,49	0,51
4400	0,47	0,50	0,53	0,56	0,58
4600	0,54	0,57	0,61	0,64	0,67
4800	0,61	0,65	0,69	0,72	0,76
5000	0,69	0,74	0,78	0,82	0,86
5200	0,78	0,83	0,87	0,92	0,96
5400	0,87	0,93	0,98	1,03	1,08
5600	0,97	1,03	1,09	1,15	1,20

SISUKORD

Kolmas osa.

Mõisteid vigade teooriast. Lihtsaimad tasandamise meetodid. V ja VI klassi polügonomeetriselised käigud. V klassi trigonomeetriseline võrk. Tõelise asimuudi määramine. Gauss-Krügeri koordinaadid.

I peatükk. Põhilised mõisted ja valemid vigade teooriast	3
§ 1. Vigade teooria ülesanded — tasandamine ja hindamine.	
§ 2. Jämedad ja süstemaatilised vead. § 3. Juhuslikud vead ja nende omadused. § 4. Mõõtmise tõelised vead. Aritmeetilise keskmise printsiip. § 5. Uhe suuruse võrdtäpsete mõõtmiste tasandamine. § 6. Aritmeetilise keskmise arvutamise praktika. § 7. Uhe suuruse võrdtäpsete mõõtmiste hindamine. Üksiku mõõtmise keskmine ruutviga, selle seos äärmise veaga. § 8. Aritmeetilise keskmise keskmine ruutviga. § 9. Tõenäolisimad vead. § 10. Keskmise ruutvea määramine tõenäolisimate vigade järgi. § 11. Lihtsaimate funktsioonide keskmiste ruutvigade leidmine. § 12. Keskmiste ruutvigade määramine kahe-kordsete mõõtmiste vahede järgi. § 13. Mittevõrdtäpsed mõõtmised. Mittevõrdtäpsete mõõtmiste kaalud. § 14. Kaalu teine tähendus. § 15. Kaalutud aritmeetiline keskmine ja tema kaal. § 16. Mitme liidetava summa kaal. § 17. Mittevõrdtäpsete mõõtmiste hindamine.	
II peatükk. Lihtsaimad tasandamise meetodid	22
§ 18. Kahe kindelpunkti vahele rajatud üksiku käigu või üksiku kinnise polügooni tasandamine. § 19. Sõlmpunktide meetod. § 20. Ekvivalentse asenduse meetod. § 21. Tasandamine kaudsete mõõtmiste meetodi järgi. § 22. Võrrandite lahendamine järk-järguliste lähenduste meetodiga. § 23. Võrrandite lahendamine täielikus astronoomilises skeemis. § 24. Võrrandite koostamine piirnevate polügonide jaoks.	

III peatükk. V ja VI klassi polügonomeetrilised käigud	44
§ 25. Uldmõisted. § 26. Eelprojekti koostamine. Rekognostseerimine. § 27. Polügonomeetriliste käikude punktide kindlustamine. Lihtsaim tsentriir. § 28. Külgede mõõtmine. § 29. Nurkade mõõtmine. § 30. Kordusviis. § 31. Kolmestatiiviline süsteem. § 32. Vertikaalnurkade mõõtmine. § 33. Mõõtmisresultaatide läbitöötamine. § 34. Polügonomeetriliste käikude tasan-damine. § 35. Koordinaatide allakandmine maapinnale. § 36. Ot-selõiked (külglõiked). § 37. Jungi valemid.	
IV peatükk. V klassi trigonomeetiline võrk. Uld-mõisted	74
§ 38. Triangulatsiooni skeem. Trigonomeetriliste võrkude klassi-fikatsioon. § 39. Võrkude süsteemid. Vabad võrgud. § 40. Si-de- ja vaheküljed, side- ja vahenurgad ning nende märkimine. § 41. Kolmnurkade külgede arvutamine. § 42. Kolmnurkade soodsaim kuju. § 43. Triangulatsiooni nurkade keskmine ruut-viga. § 44. Viga arvatatud külje logaritmis.	
V peatükk. Võrgu rekognostseerimine ja kindlus-tamine	81
§ 45. Rekognostseerimine. § 46. V klassi trigonomeetrilise võrgu punktide kindlustamine ja tähistamine.	
VI peatükk. Baasi mõõtmine	84
§ 47. Skaalaline lint. § 48. Komparaator. § 49. Skaalalise lin-diga joonte mõõtmise idee. § 50. Baasi mõõtmine. § 51. Baasi mõõtmise väliraamat. § 52. Baasi pikkuse arvutamine. § 53. Baasimõõtmise resultaate hindamine.	
VII peatükk. Nurkade mõõtmine	94
§ 54. Horisontaalnurkade mõõtmise instrumendid ja meetodid. § 55. Ringvõtete viis. § 56. Vaatluste taandamine tsentriile. § 57. Tsentreerimisparandused. § 58. Redutseerimisparandused. § 59. Tsentreerimis- ja redutseerimiselementide (keskendusele-mentide) määramine. § 60. Tsentreerimis- ja redutseerimis-paranduste (keskendusparanduste) arvutamine. § 61. Kolmnur-kade külgede eelarvutused. § 62. Vertikaalnurkade mõõt-mine. § 63. Välismaterjali kontrollimine ja eelarvutused.	
VIII peatükk. Uksikute punktide määramine	105
§ 64. Pothénót ülesanne. § 65. Määratava punkti soodsaim	

asend. § 66. Praktilisi märkmeid Pothénót' ülesande juurde.
§ 67. Hanseni ülesanne.

IX peatükk. V klassi lihtsaimate süsteemide lihtsus-
tatud tasandamine 113

§ 68. Üldmõisted. § 69. Ahel antud nurgas. § 70. Figuuride
tingimus. § 71. Summade tingimus. § 72. Külgede (baaside)
tingimus. § 73. Summade ja figuuride tingimusest tulenevate
paranduste lihtsusstatud määramine. § 74. Külgede tingimusest
tulenevate paranduste määramine. § 75. Kindlasse nurka raja-
tatud ahela rangem tasandamine. § 76. Kindlasse nurka raja-
tatud ahela tasandamise näide. § 77. Praktilisi märkmeid. Kont-
rollid. § 78. Relatiivne sulgemisviga. § 79. Tsentraalsüsteem.
§ 80. Geodeetiline nelinurk. § 81. Lõikuvate suundadega sūs-
teem. § 82. Lihtne ahel (rippuv).

X peatükk. Ahelate rajamine antud kindlate punktide
või külgede vahele 135

§ 83. Ahel kahe antud punkti vahel. § 84. Mõõtkava muutmise
meetod. § 85. Kahe kindelpunkti vahelise ahela tasandamise
näide. § 86. Ahel kahe antud külje vahel. § 87. Direktsioon-
nurkade tingimus. § 88. Koordinaatide tingimus. § 89. Ahel
kahe baasi vahel. § 90. Kõrgusvahede tasandamine.

XI peatükk. Teadmisi sfäärilisest astronoomiast.
Aeg ja selle mõõtmine 147

§ 91. Maa ööpäevaline pöörlemine. Maa teljest sõltuvad konstrukt-
sioonid Maa pinnal. § 92. Geodeesia seos astronoomiaga.
§ 93. Taevaskera. Maailmatelg, taeva poolused. § 94. Maailma-
teljest sõltuvad konstruktsioonid. § 95. Vertikaalsest joonest
sõltuvad konstruktsioonid. Taevakenade kulminatsioon. § 96.
Ekliptika. § 97. Maailmatelg moodustab antud koha horison-
diga nurga, mis on võrdne antud koha geograafilise laiuslega.
§ 98. Taevakoordinaadid. § 99. α ja t avaldamine ajas. Kaare
siirmine ajaks ja vastupidi. § 100. Täheaeg. § 101. Otsetõusu,
aegnurga ja täheaja vahekord. § 102. Tõeline ja keskmine
päikeseaeg. § 103. Troopiline aasta. Keskmise aja ja täheaja
vahekord. § 104. Kohalik aeg. § 105. Tsooni- (vöötme-) aeg.

XII peatükk. Teadmisi sfäärilisest trigonomeetriast 161

§ 106. Sfäärilised kolmnurgad. § 107. Sfääriliste kolmnurkade
külgede ja nurkade omadused. Sfääriline liig. § 108. Valemid
sfääriliste kolmnurkade lahendamiseks kolme külje järgi. § 109.

Vahekorrad täisnurkseis sfäärilistes kolmnurkades. Napieri reegel.

- XIII peatükk. Tõelise asimuudi määramine esimese vertikaali läheduses asuva Päikese seniidikauguste vaatlusest 165
§ 110. Viisi teooria. § 111. Vaatluse aeg. § 112. Vaatluste teostamine. § 113. Päikese käände (deklinaatsiooni) leidmine tabelite järgi. § 114. Väliaraamatu täbitootamine. § 115. Astronoomiline refraktsioon. Asimuudi arvutamine. § 116. Asimuudi määramise täpsus Päikese järgi.
- XIV peatükk. Tõelise asimuudi määramine Põhjajanaela järgi 175
§ 117. Tähtkujud Suur Karu (Suur Vanker), Väike Karu (Väike Vanker) ja Kassiopeja. § 118. Viisi alus. § 119. Vaatluste aeg. § 120. Vaatluseks vajalikud seadised. § 121. Vaatluste kord. § 122. Tähtede koordinaatide määramine. § 123. Asimuudi arvutamine. § 124. Põhjajanaela järgi teostatud asimuudi määramise täpsus. § 125. Meridiaanide konvergentsi (koonduvuse) määramine. *valetu*
- XV peatükk. Gauss-Krügeri koordinaadid. Gauss-Krügeri konformne projektsioon 185
§ 126. Plaan ja kaart. Kartograafilised projektsioonid. § 127. Sfäärilised ristkoordinaadid. § 128. Lihtne silindriline projektsioon. § 129. Silindrilise projektsiooni moonutused, Mõõtkava ordinaatide (Y telje) suunas. § 130. Mõõtkava abstsisside (X telje) suunas. § 131. Gaussi konformne projektsioon. § 132. Suundade ja nurkade redutseerimine. Ekstsessi arvutamine. § 133. Pikkuste redutseerimine tasapinnale. § 134. Gauss-Krügeri koordinaatide arvutamise skeem.
- XVI peatükk. Uleminek geograafilistest koordinaatidest tasapinnalistele ja ümberpöördult 197
§ 135. Maa sferoid. § 136. Ellipsi elemendid. § 137. Maa sferoidi elemendid ja nende mõõted. § 138. Põhilised jooned ja tasapinnad sferoidil. § 139. Kõveruseraadiustest ja laiusest sõltuvad abisuurused. Tabelid. § 140. Gauss-Krügeri koordinaatide arvutamine antud geograafilistest koordinaatidest. § 141. Kohalik algus. § 142. Siirdumine tasapinnalistest koordinaatidest geograafilistele.

Tõlkinud L. Lutsar.

Vastutav toimetaja A. Eevert.

Keeleline toimetaja P. Viires.

Ladumisele antud 7. VI 1947. Trükkimisele antud 18. III 1948. Trükiarv 3200.
Paber 56 × 79, ¹/₁₆. Trükipoognaid 14. Arvutuspoognaid 16. Trükitähti
trükipoognas 45 710. MB-02839. Trükikoda „Uhiselu“, Tallinn, Pikk tn. 42.
Tellimise nr. 1787.

На эстонском языке.
Н. А. Назаров. Геодезия III.

Rbl. 4.80

Uus hind

Rbl. _____

A-16279
III

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00328659 0