

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

O. Prinitis

# MATEMAATIKA

XI KLASSILE

*(Katseõpik)*

I OSA

*Toimetanud K. Kallaste*

TALLINN 1964



-26176

Eesti NSV Haridusministeerium

---

O. Prints

3  
1  
M A T E M A A T I K A

XI klassile  
(katseõpik)  
I osa

Toimetanud K.Kallaste

Tallinn 1964

ARHIVKOOL

2



Министерство просвещения Эстонской ССР

О. Принито

МАТЕМАТИКА ДЛЯ XI КЛАССА

(пробный учебник)

Часть I

На эстонском языке

Редактор К. Калласте

Trükkimisele antud 28.VIII 1964. Trükiarv 550. Paber 30x41.

Trükipoognaid 35. Kohaldatud trükipoognaid 8,05. MB-06182.

Tell. nr. 1855-5480.

Eesti NSV RMN TIKB rotaprint. Tallinn, Plkk 68.

Tasuta

ARHIIVKOGU

## I. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

### 1. Lõplikule väärtusele lähenemine.

Igapäevases elus esineb sageli juhtumeid, kus mingi suurus läheneb teatavale kindlale (lõplikule) väärtusele. Tööstuses võimaldab tootmisprotsesside automatiseerimine ja mitmesuguste ratsionaliseerimissettepanekute realiseerimine alandada toodangu omahinda, lähendada seda teatud miinimumile. Sportlane, rakendades enam teaduslikult põhjendatud treeningumeetodeid, lähendab järjest oma sportlikke tulemusi rekordile. Kolhoosi agronoomi mureks on väetiste õige doseerimisega üksikutele põldudele lähendada hektarisaaki eesrindlike majandite vastavatele näitajatele.

Nii sportlase treener, tehase peainsener kui ka kolhoosi agronoom koostavad plaani, kus nähakse ette norm ning selle saavutamise tähtaeg. Näiteks nähti ühes kolhoosis 1970. aastaks ette nisu hektarisaagiks 27 tsentnerit. Planeeriti ka hektarisaagi kasv vahepealseteks aastateks järgmiselt:

1963. a.	14 tsentnerit
1964. a.	16 "
1965. a.	20 "
1966. a.	22 "
1967. a.	24 "
1968. a.	25 "
1969. a.	26 "

1970. a.

27 tsentnerit

Üks treener seadis aga oma hoolealustele eesmärgiks, et need püstitavad 1970. aastal 10 000 m uisutamise maailmarekordiks aja 15 min. 26 sek. Ühtlasi planeeris ta 10 000 m rekordaja paranemise ka vahepealseteks aastateks:

1963. a.	15 min. 40 sek.
1964. a.	15 min. 35 sek.
1965. a.	15 min. 33 sek.
1966. a.	15 min. 30 sek.
1967. a.	15 min. 29 sek.
1968. a.	15 min. 28 sek.
1969. a.	15 min. 27 sek.
1970. a.	15 min. 26 sek.

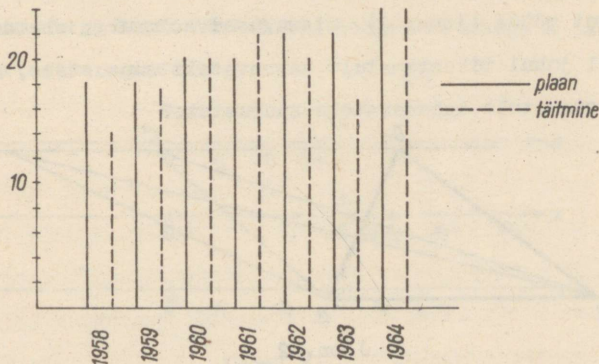
Iga järjekordse võistlusega, ratsionaliseerimisettepaneku rakendamisega või õigesti organiseeritud maaharimise ning väetisekülviga lähendatakse tulemust püstitatud normile ehk, teisisi, vahe saavutatud tulemuse ja normi vahel järjest väheneb.

Teatud juhuslikest põhjustest sõltuvalt, nagu näiteks haigus, põud jne., võib esineda plaani mittetäitmist, mistõttu lähenemine püstitatud eesmärgile ei pruugi kulgeda kogu aeg monotoonselt, s. t. kas kogu aeg tõusvas joones (hektarisaak) või kogu aeg langevas joones (10 000 m uisutamise aeg).

Tegelikus elus kohtume veel teistlaadi nähtusega. Nii näiteks toodangu omahinna või sportlike saavutuste piir, mis esialgu püstitatakse, võidakse aja jooksul ületada. Kui kunagi peeti kuulitõukes inimvõimete piiriks 17 meetrit ja 10 000 m uisutamises 17 minutit, siis nüüd on need piirid ammu ületatud. Kuuli on tõugatud juba üle 20 meetri ja 10 000 m uisutamise

aeg läheneb 15 minutile.

Näiteks on joonisel 1 esitatud ühe kolhoosi hektarisaagi plaan ja tegelik saak tsentnerites diagrammina. Siit nähtub, et kui plaanis esitatakse arvud kas monotoonselt kasvavatena või monotoonselt kahanevatena, siis tegelikkuses esineb nii plaani mittetäitmist kui ka selle ületamist.



Joon. 1

Teaduse arenemisega suudetakse aga tegelikus elus järjest täpsemini fikseerida niisuguseid piire, millistele toimub lähenemine.

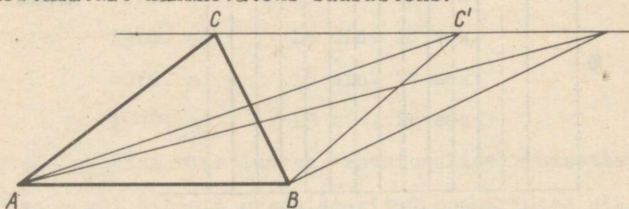
Matemaatikas ja tema rakendustes saame anda ette väärtusi, mida vaadeldava muutuva suuruse väärtused enam ei ületa, küll aga lähenevad sellele tõkestamatult. Neid väärtusi nimetatakse piirväärtusteks. Piirväärtuse mõiste abil osutub võimalikuks paljude probleemide lahendamine. Edaspidi vaatlemegi näiteks ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamist ja tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa arvutamist. Piirväärtuse abil loome ka uued, suure tähtsusega matemaatili-

sed mõisted: tuletis ja integraal, millel on omakorda on väga lai rakendusväli.

Järgnevalt vaatlemegi selliseid matemaatilisi suurusi, mis järjest lähenevad mingile lõplikule väärtusele.

## 2. Lõplikule väärtusele lähenevad suurused.

Kolmnurga ABC tipp C hakkab nihkuma alusega AB paralleelset sirget mööda (joon. 2). Missugused kolmnurga elemendid osutuvad sel juhul tõkestamatult kasvavateks suurusteks, missugused tõkestamatult kahanevateks suurusteks?



Joon. 2

Jälgime tippu B juures asetseva nurga muutumist. Paneme tähele, et tippu C kaugenemisel läheneb see nurk sirgnurgale ehk, teisiti, nurga B ja sirgnurga vahe läheneb nullile.

Seega,

kui  $CC' \rightarrow \infty$ , siis  $\angle B \rightarrow \pi$  ehk, teisiti,  $\angle B - \pi \rightarrow 0$ .

Muutuvat suurust nimetatakse lõplikule väärtusele lähenevaks suuruseks, kui selle muutuva suuruse väärtuste ja lõpliku väärtuse vahe on tõkestamatult kahanev suurus.

Et nurga B ja sirgnurga vahe läheneb nullile, s. t. see vahe on tõkestamatult kahanev suurus, siis on nurk B lõplikule väärtusele lähenev suurus.

Et ka null on lõplik väärtus, siis toodud näites on lõplikule väärtusele lähenevateks suurusteks veel nurgad A ja C,

sest

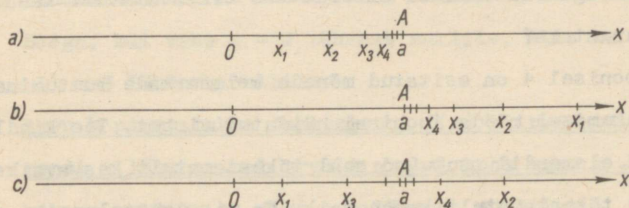
kui  $CC' \rightarrow \infty$ , siis  $\angle A \rightarrow 0$ ;

kui  $CC' \rightarrow \infty$ , siis  $\angle B \rightarrow 0$ .

Seega kuuluvad tõkestamatult kahanevad suurused lõplikule väärtusele lähenevate suuruste hulka.

Seda arvu, millele lähenevad lõplikule väärtusele läheneva suuruse väärtused, nimetatakse tema piirväärtuseks.

Nii on nurga B piirväärtuseks sirgnurk, nurga A ja nurga C piirväärtuseks aga 0



Joon. 3

Joonisel 3 on näidatud 3 võimalikku juhtu muutuva suuruse  $x$  väärtustele  $x_1, x_2, x_3, \dots$  vastavate punktide paigutuse kohta lõplikule väärtusele vastava punkti A suhtes.

Joonesta vihikusse lõikudena muutuva suuruse väärtustele vastavate punktide kaugused punktist A.

Näeme, et lõplikule väärtusele lähenevate suuruste korral selle suuruse väärtustele vastavate punktide ja lõplikule väärtusele vastava punkti vaheline kaugus läheneb nullile. Muutuva suuruse väärtustele vastavad punktid võivad lõplikule väärtusele vastavast punktist asetseda kas vasakul (joon. 3, a) või paremal (joon. 3, b) või kord paremal, kord vasakul (joon. 3, c).

Seega,

juhul a) on  $x_1 - a < 0$ ,

juhul b) on  $x_1 - a > 0$ ,

juhul c) on kord  $x_1 - a > 0$  ja kord  $x_1 - a < 0$ .

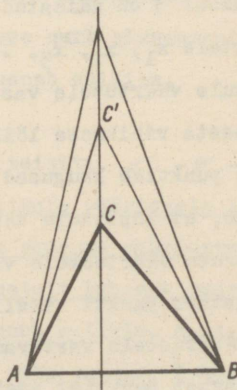
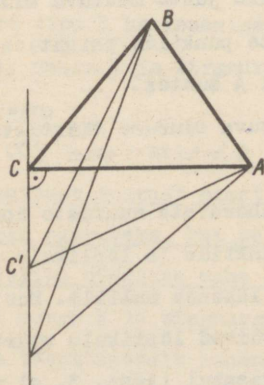
Vaadeldav kaugus avaldub vastavate koordinaatide vahe absoluutväärtusena. See kaugus aga läheneb kõigil kolmel juhul nullile.

### Küsimusi ja ülesandeid.

1. Missuguseid suurusi nimetatakse tõkestamatult kasvavateks suurusteks?

2. Missuguseid suurusi nimetatakse tõkestamatult kahanevateks suurusteks?

3. Joonisel 4 on esitatud mõnede kolmnurkade muutumine tipu C nihkumisel mööda joonisel näidatud sirget. Tee kindlaks, missugused elemendid osutuvad seal tõkestamatult kasvavaiks, missugused tõkestamatult kahanevaiks ja missugustel neist on nullist erinev piirväärtus.



Joon. 4

### 3. Funktsiooni piirväärtus.

Piirväärtuse mõistet rakendatakse funktsioonide uurimisel.

Olgu näiteks teada, et argument  $x \rightarrow 2$  ja meid huvitab, missugusele väärtusele läheneb sel juhul funktsioon  $2x - 1$ .

Selleks kirjutame välja rea 2-le lähenevaid argumenti väärtusi ja leiame neile vastavad funktsiooni väärtused

x	1	1,2	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	1,98
2x-1	1	1,4	2	2,4	2,6	2,8	2,9	2,96

Paneme tähele, et funktsiooni väärtused lähenevad 3-le.

Seega, kui vahe  $x - 2$  läheneb nullile, siis ka vahe  $(2x - 1) - 3$  läheneb nullile.

Arvu b nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks argumenti x lähenemisel arvule a, kui koos vahe  $x - a$  lähene misega nullile ka  $f(x) - b$  läheneb nullile.

Ülesanne.

4. Koosta tabel, mis iseloomustaks järgmiste funktsioonide muutumist argumenti etteantud muutumise korral:

- |   |   |
|---|---|
| a) $-x + 3$ , kui $x \rightarrow 1$ ;             | d) $\log x$ , kui $x \rightarrow 10$ ;  |
| b) $\frac{5x + 2}{3x}$ , kui $x \rightarrow -1$ ; | e) $\sqrt{x}$ , kui $x \rightarrow 9$ ; |
| c) $x^2 + 2x - 1$ , kui $x \rightarrow 2$ ;       | f) $2^x$ , kui $x \rightarrow 3$ .      |

Edaspidisel ülesannete lahendamisel me ei koosta enam tabeleid, vaid kalkuleerime järjest.

Näide. Leida funktsiooni  $\frac{5x^2 - 1}{x + 1}$  piirväärtus, kui  $x \rightarrow 0$ .

Arutleme nii. Kui  $x \rightarrow 0$ , siis ka  $x^2 \rightarrow 0$  ja samuti  $5x^2 \rightarrow 0$ . Kui aga  $5x^2 \rightarrow 0$ , siis  $5x^2 - 1 \rightarrow -1$ . Kui  $x \rightarrow 0$ , siis  $x + 1 \rightarrow 1$  ja seega  $\frac{5x^2 - 1}{x + 1} \rightarrow \frac{-1}{1} = -1$ . See tähendab, et

$\frac{5x^2 - 1}{x + 1} - (-1) \rightarrow 0$  ja seega  $-1$  on antud funktsiooni piirväärtuseks, kui  $x \rightarrow 0$ .

Esitatud arutelust ilmneb, et piirväärtuse leidmisel kasutatakse lauseid:

- 1) summa piirväärtus võrdub liidetavate piirväärtuste summaga;
- 2) korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega;
- 3) jagatise piirväärtus võrdub jagatava piirväärtuse ja jagaja piirväärtuse jagatise, kui jagaja piirväärtus ei ole 0.

Samad laused kehtivad ka siis, kui argument on tõkestamatult kasvav suurus.

Siinkohal nende lausete tõestusi ei esitata. Neid võib aga leida kõrgematele koolidele määratud matemaatika õpikuis.

Leiame nüüd näitena mingi funktsiooni piirväärtuse argumenti mitme etteantud muutumise korral.

Näide 1. Leida funktsiooni  $\frac{1}{1 + x^2}$  piirväärtus, kui argument läheneb lõpmatussele.

Kui  $x \rightarrow \infty$ , siis ka  $x^2 \rightarrow \infty$  ja  $1 + x^2 \rightarrow \infty$  ning seega

$$\frac{1}{1 + x^2} \rightarrow 0.$$

Näide 2. Leida funktsiooni  $\frac{1}{1 + x^2}$  piirväärtus, kui argument läheneb nullile.

Kui  $x \rightarrow 0$ , siis ka  $x^2 \rightarrow 0$  ja  $1 + x^2 \rightarrow 1$  ning seega

$$\frac{1}{1 + x^2} \rightarrow 1.$$

Näide 3. Leida funktsiooni  $\frac{1}{1 + x^2}$  piirväärtus, kui argument läheneb 2-le.

Kui  $x \rightarrow 2$ , siis  $x^2 \rightarrow 4$  ja  $1 + x^2 \rightarrow 5$  ning

$$\frac{1}{1 + x^2} \rightarrow \frac{1}{5}.$$

Nii on eespool toodud näidetes funktsiooni  $\frac{1}{1 + x^2}$  piirväärtuseks:

argumendi lähenemisel lõpmatusele 0,

argumendi lähenemisel nullile 1,

argumendi lähenemisel 2-le  $\frac{1}{5}$ .

Leia antud funktsiooni piirväärtus veel juhul, kui  $x \rightarrow -2$  ja kui  $x \rightarrow \sqrt{2}$ !

Funktsiooni piirväärtuse ülesmärkimiseks kasutatakse sümboolit  $\lim$ , mis tuleneb ladinakeelsest sõnast *limes* (piir). Nii kirjutame eespool vaadeldud näiteid lühemalt järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{5}.$$

Üldiselt, kui funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks argumendi lähenemisel  $a$ -le on  $b$ , siis kirjutame seda üles järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Näide 4. Leida  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x}$ .

Kui  $x \rightarrow 1$ , siis  $1 - x \rightarrow 0$ . Seega murru nimetaja läheneb nullile ja lugeja 1-le. Et praegusel juhul murru nimetaja osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui lugeja jääb lõplikuks, siis on mure tõkestamatult kasvav suurus. Seega temal lõplik piirväärtus puudub. Seda tõsiasja märgime üles järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$$

(loeme: "Argumendi lähenemisel 1-le funktsioon  $\frac{x}{1-x}$  kasvab tõkestamatult" või "Funktsiooni  $\frac{x}{1-x}$  piirväärtuseks on lõpmatus").

### Ülesandeid.

5. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui  $x \rightarrow 0$ .

a)  $-4x + 3$

b)  $\frac{4}{x+6}$

c)  $\frac{x^2 + x + 1}{3 - 2x}$

$7 + \frac{1}{3}x$

$\frac{3-x}{2}$

$\frac{-x^2 - x + 5}{3 + 2x - x^2}$

$x^2 + 2x - 3$

$\frac{4 + 2x}{3x - 5}$

$\frac{(3x - 2)^2}{6 - 3x}$

$(2x - 1)^2$

$\frac{\frac{1}{2}x - 6}{3 - \frac{1}{6}x}$

$(\frac{0,14x - 2,8}{0,7 + 8,6x})^2$

6. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 3)$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} (4 - x^2)$

h)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - x^2 + 1)$

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3})$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^5 - 2x^2 - 1)$

j)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (\frac{x^2}{3-x} + \frac{2x}{x^2+1})$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{3-x}$

k)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} [\frac{(4-x)^2}{3x} - \frac{3x^2}{4-x}]$

f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x}$

l)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x^3 + 1)^3$

7. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui

$x \rightarrow \infty$ .

a)  $3 + x$

b)  $x^2 + 5$

c)  $\frac{1}{x}$

$5x$

$16 - x$

$3 + \frac{1}{x}$

$x^2$

$x^3 - 1$

$x + \frac{3}{x}$

8. Leia järgmised piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{\cos x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x}$

#### 4. Funktsiooni pidevus.

Seni lahendatud funktsiooni piirväärtuse leidmise ülesannetes osutus funktsiooni piirväärtus võrdseks funktsiooni enda väärtusega vastaval kohal, s. t. et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Kontrolli seda mõnede lahendatud ülesannete juures!

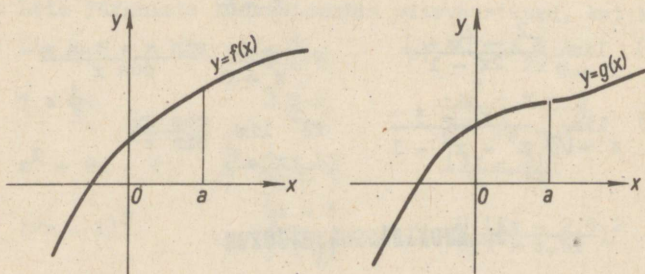
Kui eksisteerib  $f(a)$ , mis on ühtlasi ka funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks tingimusel, et  $x \rightarrow a$ , siis öeldakse, et funktsioon  $f(x)$  on kohal  $a$  pidev.

Kui see seos kehtib argumendi kõigi väärtuste juures  $c$ -st  $d$ -ni, siis öeldakse, et funktsioon  $f(x)$  on pidev vahemikus  $c$ -st  $d$ -ni, ehk, teisiti, funktsioon  $f(x)$  on pidev vahemikus  $c < x < d$ .

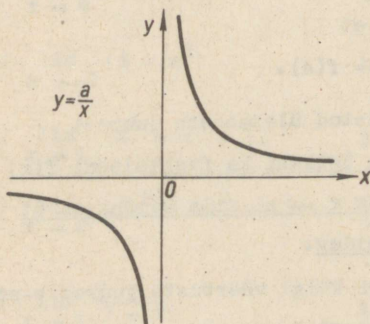
Kui see seos kehtib argumendi kõigi väärtuste puhul, mis kuuluvad funktsiooni määramispiirkonda, siis öeldakse, et funktsioon  $f(x)$  on pidev.

Funktsiooni graafikul kajastub pidevus joone katkematuses (joon. 5). Seni lähemalt tundma õpitud funktsioonidest on li-

neaarne, ruut- jt. astmefunktsioonid, samuti eksponent- ja lo-  
garitmfunksioon ning siinus- ja koosinusfunksioon pidevad,  
s. t. et näiteks lineaarne funktsioon  $y = ax + b$  on pidev vahe-  
mikus  $-\infty < x < \infty$  ja logaritmfunksioon  $y = \log x$  vahemikus  
 $0 < x < \infty$ .



Joon. 5



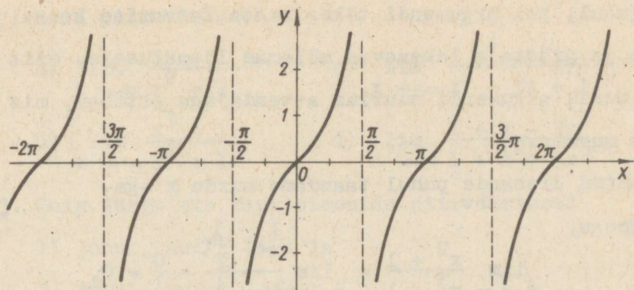
Joon. 6

Funktsioon  $y = \frac{a}{x}$  on aga  
kohal  $x = 0$  katkev, sest 0-ga  
ei saa jagada - funktsioonil  
puudub väärtus kohal  $x = 0$  (vt.  
joon. 6).

Samuti puudub väärtus tan-  
gensfunktsioonil, kui  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  
kus  $k$  on täisarv (joon. 7).

5. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine juhul, kui  
funktsioon pole antud kohas määratud.

Vaatleme nüüd selliseid piirväärtuse arvutamise ülesandeid  
kus funktsiooni väärtuse arvutamine viib tulemusele  $\frac{0}{0}$  või  $\frac{\infty}{\infty}$ ,



Joon. 7

s. t. et funktsiooni väärtus pole argumendi antud väärtusel määratud. Samasugusele tulemusele jõuaksime, kui leiaksime nende funktsioonide piirväärtuse senikasutatud eeskirja järgi.

Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{0}{0} \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty}.$$

$\frac{0}{0}$  ja  $\frac{\infty}{\infty}$  ei määra tulemust. Et selgusele jõuda, mis on neil juhtudel jagatise piirväärtuseks, tuleb funktsiooni avaldist teisendada nii, et vabaneksime tegurist, mis lugejas ja nimetajas läheneb samaaegselt nullile või lõpmatusse.

Näide 1. 
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}.$$

Et  $x \rightarrow -3$ , siis  $x \neq -3$  ja  $x + 3 \neq 0$ . See annab võimaluse taandada murdu  $(x + 3)$ -ga, s. o. teguriga, mis läheneb nullile, ja otsida piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x - 3).$$

Seega,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6.$$

Näide 2. Leida 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}.$$

Juhul, kui argumendi tõkestamata kasvamise korral murru lugeja ja nimetaja lähenevad mõlemad lõpmatusele, siis taandatakse murdu argumendi suurima astendajaga astmega, mis esineb selles murru.

Antud ülesande puhul taandame murdu  $x^3$ -ga.

Seega,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0,$$

sest kui  $x \rightarrow \infty$ , siis  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  ja samuti  $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$ .

Ülesandeid.

9. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{5x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{5x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x}$

10. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{12 + 4x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x - 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 5x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$

11. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

12. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$

13. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused

1) juhul, kui  $x \rightarrow 0$  ja

2) juhul, kui  $x \rightarrow \infty$ ;

a)  $\frac{2x - 5}{x + 3}$

b)  $\frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 - 3x + 1}$

14. Leia piirväärtused.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x}$

### 6. Funktsiooni piirväärtuse rakendusi.

#### Ringjoone pikkus.

a) Ringjoone pikkuse mõiste.

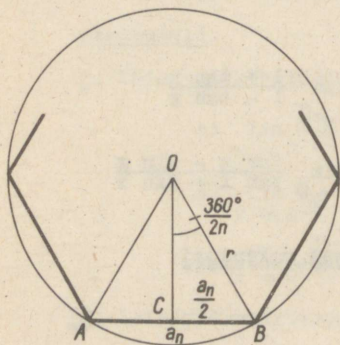
Ringjoon on kõverjoon, pikkusühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), mistõttu pole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta ja on vaja defineerida, mida mõista ringjoone pikkuse all.

Kui ringi sisse joonestada korrapärase hulknurk, siis hulknurga übermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed on lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui nüüd hulknurga tippude arvu kahekordistada, siis saame uue hulknurga, mille übermõõt on pikem eelmise hulknurga übermõödust ja lühem ringjoone pikku-

sest. Miks? Seda kahekordistamise protsessi jätkates saame hulknurgad, millede ümbermõõdud ikka enam ja enam lähenevad ringjoone pikkusele.

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkus järjniselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõdu piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.



Joon. 8

OAC ja OBC. Nendes kolmnurkades on üks nurk  $\frac{360^\circ}{2n}$  ja selle nurga vastaskaatet  $\frac{a_n}{2}$ . Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin \frac{360^\circ}{2n}$$

ehk

$$\frac{a_n}{2r} = \sin \frac{360^\circ}{2n}.$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga  $2rn$ , saame

$$n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}.$$

Et  $n \cdot a_n$  on ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga

ümbermõõd, siis ringjoone pikkuseks on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) \text{ ehk } \lim_{n \rightarrow \infty} (2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}).$$

b) Arv  $\pi$ .

Vaatame, kuidas muutub avaldis  $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$   $n$  kasvades.

Selleks koostame järgmise tabeli.

$n$	$\frac{360^\circ}{2n}$	$\sin \frac{360^\circ}{2n}$	$n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$
3	$60^\circ$	0,8660	2,5980
6	$30^\circ$	0,5	3,0
12	$15^\circ$	0,2588	3,1056
24	$7^\circ 30'$	0,1305	3,1320
48	$3^\circ 45'$	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu koh-tadega tabelleid, siis võib tähele panna, et pärast 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima  $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$  väärtusena, jäävad edaspidi  $n$  suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159 jne.

Avaldise  $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$  piirväärtust tähistatakse kreeka keele tähega  $\pi$  (loe: pii).

$\pi$  lähisväärtusena on kõige enam kasutusel arv 3,14, kuid vajaduse korral ka 3,142 või 3,1416.

c) Ringjoone pikkus.

Et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}) = \pi$  ja ringjoone pikkus on

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n})$ , siis tähistades ringjoone pikkuse tä-

hega  $c$ , võime kirjutada

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2r \cdot (n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}) = 2r\pi$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutised ära,

$$c = 2\pi r.$$

Et  $2r = d$ , siis ka

$$c = \pi d.$$

Avaldades sellest võrdusest  $\pi$ , saame

$$\pi = \frac{c}{d},$$

mis ütleb, et

iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ja võrdub  $\pi$ -ga.

Ringi pindala.

Ringi pindala  $S$  all mõistame ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurkade  $S_n$  pindalade piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisena, võime kirjutada (joon. 8)

$$S_n = (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}$$

ja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}.$$

Et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = r$ , siis

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

ehk, jättes vahepealse avaldise ära,

$$S = \pi r^2.$$

## Ülesandeid.

15. Ringi raadius on  $r$ .

a) Kui suur on  $1^\circ$  kesknurgale vastava kaare pikkus?

b) Kui suur on  $1^\circ$  kesknurgale vastava sektori pindala?

16. Ringi raadius on 10 cm. Kui suur on

a)  $15^\circ$ -sele kesknurgale vastava kaare pikkus?

b)  $100^\circ$ -sele kesknurgale vastava sektori pindala?

17. Sõnasta ringjoone kaare pikkuse leidmise eeskiri.

18. Sõnasta ringi sektori pindala leidmise eeskiri.

19. Mis on ringi segment?

20. Sõnasta ringi segmenti pindala leidmise eeskiri.

21. Ringi raadius on 15 cm. Leia  $25^\circ$ -sele kesknurgale vastava segmenti pindala.

22. 1 meeter on ligikaudu  $\frac{1}{40\ 000\ 000}$  Maa ümbermõõdust, kui

Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?

23. Kui pikk on üks meridiaani kraad, kui Maa raadius on 6370 km?

24. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse meremiiliks.

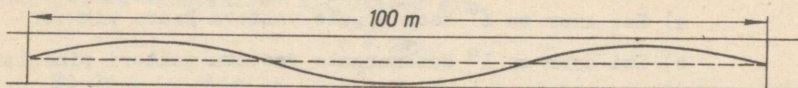
Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.

25. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui ratta diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?

26. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?

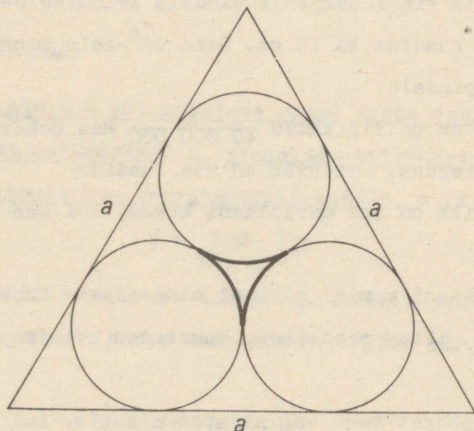
27. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont mööda, vaid joonisel 9 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures vastavate ringide raadiused on 231,8 m ja kaartele vastav kesknurk on  $8,25^\circ$ . Kui pika maa jooksis

sportlane tegelikult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui sirg-  
joont mööda joostes oleks ta läbinud 100 m 11 sekundiga?



Joon. 9

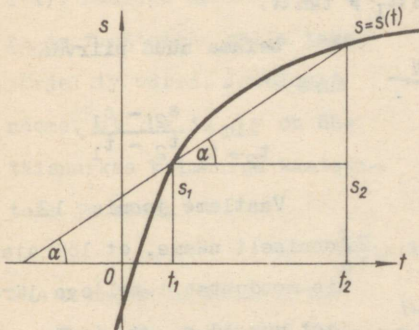
28. Võrdkülgssesse kolmnurka, mille külg on  $a$ , on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga külgi (joon. 10). Leia ringide vahele jääva kõverjoonse kolmnurga pindala.



Joon. 10

## II. FUNKTSIOONI TULETIS.

### 7. Keha liikumise hetkeline kiirus.



Joon. 11

Joonisel 11 näeme, et see keskmise kiiruse avaldis on võrdne kõõlu tõusuga:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Teades antud ajavahemikus keha poolt läbitud tee pikkust, saame avaldada keha liikumise keskmise kiiruse  $\bar{v}$ :

$$\tan \alpha = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Seega,

$$\bar{v} = \tan \alpha.$$

Jälgime keskmise kiiruse avaldise muutumist, kui ajavahe-

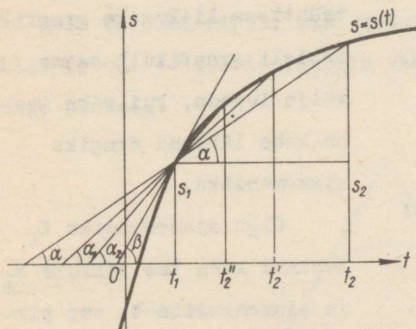
Joonisel 11 on esitatud  $s$ - $t$ -teljestikus ühe mitteühtlase liikumise graafik. Sellelt graafikult saame välja lugeda, kui pika tee on keha läbinud mingiks ajamomendiks.

Olgu ajamomendiks  $t_1$  läbinud keha tee pikkuse  $s_1$  ja ajamomendiks  $t_2$  tee pik-

miku  $t_2 - t_1$  pikkust järjest lühendada.

Joonisel 12 on esitatud kaks juhtu, kus ajavahemik  $t_2 - t_1$  on lühem kui esialgsel juhul.  $t_2' - t_1 < t_2 - t_1$  ja  $t_2'' - t_1 < t_2 - t_1$ . Näeme, et keskmise kiiruse arvuline väärtus ajavahemiku pikkuse muutumisel ei jää samaks, sest  $\alpha_2 \neq \alpha_1 \neq \alpha$  ja järelikult ka

$$\tan \alpha_2 \neq \tan \alpha_1 \neq \tan \alpha.$$



Joon. 12

joone puutuja on joone lõikaja piirseis, kui üks lõikepunkt läheneb teisele.

Et puutuja moodustab x-teljega nurga  $\beta$ , siis nurgad  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  jne. lähenevad nurgale  $\beta$ . Seega võime kirjutada, et

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \tan \beta.$$

Seda piirväärtust nimetatakse keha liikumise hetkeliseks kiiruseks ajamomendil  $t_1$ .

### 8. Funktsiooni muutumise hetkeline kiirus.

Et mitteühtlase liikumise graafik on ühe pideva funktsiooni  $s = s(t)$  graafik, siis saame keskmisest ja hetkelisest kiirusest

Leiame nüüd piirväärtuse

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Vaatleme joonist 12.

Jooniselt näeme, et lõikajamis moodustab t-teljega järjest nurgad  $\alpha, \alpha_1$  ja  $\alpha_2$ , läheneb joone puutujale punktis  $(t_1; s_1)$ , sest

rusest kõnelda mis tahes pideva funktsiooni puhul.

Olgu joonisel 13 esitatud funktsiooni  $y = f(x)$  graafik.

Vaatleme argumenti väärtust  $x$ .

Sellele argumenti väärtusele vastav funktsiooni väärtus on  $f(x)$ . Muutugu argument  $\Delta x$  võrra ja funktsioon selle taga-

järjel  $\Delta y$  võrra. Jooniselt näeme, et  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  on ühe

täisnurkse kolmnurga kaateti- teks ja seega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha,$$

kus  $\alpha$  on kõõlu tõusunurk.

Funktsiooni muudu ja argumenti muudu suhet  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  nimetatakse funktsiooni muutumise keskmiseks kiiruseks.

Suhte  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  piirväärtust, kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , nimetatakse funktsiooni muutumise hetkeliseks kiiruseks kohal  $x$ .

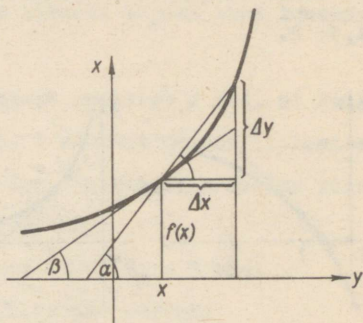
Et siin on jällegi tegemist lõikaja ühe lõikepunkti lähenedamisega teisele ja lõikaja piirseisuks on puutuja, mis moodustab  $x$ -teljega nurga  $\beta$ , siis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta,$$

kus  $\beta$  on puutuja tõusunurk ja  $\tan \beta$  seega puutuja tõus. Seega, funktsiooni muutumise hetkeliseks kiiruseks kohal  $x$  on funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja tõus punktis, mille abstsiss on  $x$ .

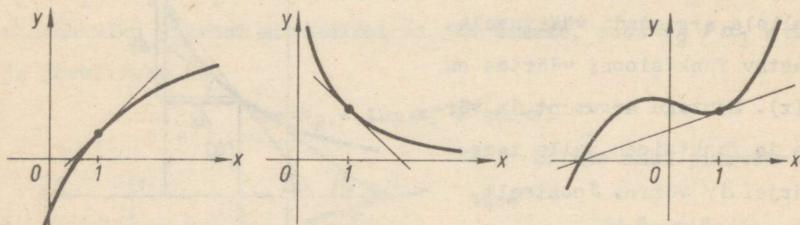
Ülesandeid.

22. Joonesta ruutfunktsiooni  $y = x^2$  graafik. Leia jooni-



Joon. 13

selt mõõtmise teel puutuja tõusunurk ja seejärel tabelleid kasutades selle funktsiooni muutumise hetkeline kiirus, kui  $x = -1$ ;  $1$ ;  $1,5$ ;  $2$ .



Joon. 14

30. Joonisel 14 on esitatud mõnede funktsioonide graafikud. Leia mõõtmise teel puutuja tõusunurk ja seejärel tabelleid kasutades nende funktsioonide muutumise hetkeline kiirus kohal  $x = 1$ .

31. Kui kõva keha pöörleb ümber telje, siis pöördenurk  $\varphi$  on aja  $t$  funktsioon:  $\varphi = f(t)$ . Avalda:

- 1) pöörlemise keskmine nurkkiirus ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul;
- 2) pöörlemise hetkeline nurkkiirus ajamomendil  $t$ .

32. Soojushulk  $Q$ , mis on vajalik anda kehale, et kuumutada teda mingilt algtemperatuurilt  $\theta_0$  temperatuurini  $\theta$ , on temperatuuri  $\theta$  funktsioon:  $Q = g(\theta)$ . Avalda:

- 1) keha keskmine soojusmahtuvus keha kuumutamisel temperatuurilt  $\theta$  kuni temperatuurini  $\theta + \Delta\theta$ ;
- 2) keha soojusmahtuvus temperatuuril  $\theta$ .

33. On antud punkti sirgjoonelise liikumise võrrand

$$s = 5t + 6.$$

Leia liikumise keskmine kiirus:

- a) esimese kuue sekundi jooksul;  
 b) ajavahemikus kolmanda sekundi lõpust kuni kuuenda sekundi lõpuni.

34. Punkt M kaugeneb liikumatust punktist A nii, et kaugus AM kasvab võrdeliselt aja ruuduga. 2 minutit pärast liikumise algust oli kaugus AM 12 meetrit. Leia liikumise keskmine kiirus:

- a) esimese viie minuti jooksul;  
 b) ajavahemikus  $t_1 = 4$  min. kuni  $t_2 = 7$  min.

35. On antud sirgjoonelise liikumise võrrand

$$s = t^3 + \frac{3}{t}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus  $t_1 = 4$  kuni  $t_2 = 4 + \Delta t$ . Kui suur on keskmine kiirus, kui  $\Delta t = 2; 1; 0,1; 0,03$ ?

36. Vabalt langev keha liigub seaduse järgi

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{kus } g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus  $t_1 = 5$  sek. kuni  $t_2 = (5 + \Delta t)$  sek. Kui suur on keskmine kiirus, kui  $\Delta t = 1$  sek.; 0,1 sek.; 0,05 sek.; 0,001 sek.? Leia langeva keha kiirus:

- a) 5. sekundi lõpul;  
 b) 10. sekundi lõpul.

Leia langeva keha kiiruse valem mis tahes ajamomendi  $t$  jaoks.

37. Leia seniitkahurist otse üles lastud kuuli kiirus 3 sekundit pärast lasku, kui kuuli algkiirus on  $200 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$ .

Näpunäide. Ulesande lahendamiseks leia kuuli keskmine kiirus ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul, võttes  $\Delta t = 1; 0,1; 0,01$  ja  $0,001$  ning  $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ . Tee pikkuse leiame valemist  $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ .

38. Leia suhe  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  järgmiste funktsioonide puhul:

a)  $y = 2x^3 - x^2 + 1$ , kui  $x = 1$  ja  $\Delta x = 0,1$ ;

b)  $y = \frac{1}{x}$ , kui  $x = 2$  ja  $\Delta x = 0,01$ ;

c)  $y = \sqrt{x}$ , kui  $x = 4$  ja  $\Delta x = 0,4$ .

Näita, et kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis nende suhete väärtused lähenevad vastavalt  $4$ -le,  $-\frac{1}{4}$ -le ja  $\frac{1}{4}$ -le.

### 9. Funktsiooni tuletis.

Funktsiooni muutumise hetkelist kiirust nimetatakse ka funktsiooni tuletiseks.

Niisiis,

funktsiooni tuletis on funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus, kui argumendi muut läheneb nullile.

Olgu antud funktsioon  $y = f(x)$ . Tema tuletist tähistatakse sümboliga  $y'$  ehk  $f'(x)$ .

Seega,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Et  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , siis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ehk

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

### 10. Mõnede funktsioonide tuletised.

a) Funktsiooni  $y = x^2$  tuletis.

Muutu argument  $\Delta x$  võrra ja funktsioon vastavalt  $\Delta y$  võrra, s. t.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2.$$

Avaldame siit  $\Delta y$ :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y$$

ehk

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2.$$

Avades sulud, saame

$$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2.$$

Koondame ja jagame võrduse mõlemad pooled  $\Delta x$ -ga:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Hetkelise kiiruse saamiseks leiame piirväärtuse

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

Seega,

$$(x^2)' = 2x$$

b) Funktsiooni  $y = x^3$  tuletis.

Anna selgitused järgnevale tuletuskäigule!

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3;$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - y;$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3;$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2.$$

Seega,

$$(x^3)' = 3x^2$$

c) Funktsiooni  $y = \frac{1}{x}$  tuletis.

Anna selgitused järgnevale tuletuskäigule!

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x};$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seega,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

d) Funktsiooni  $y = \sqrt{x}$  tuletis.

Anna selgitused seal, kus need puuduvad!

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Et lähenemisel nullile nii lugeja kui ka nimetaja lähenevad nullile, siis tuleb saadud avaldist teisendada. Laiendame murdu avaldisega  $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Seega,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e) Funktsiooni  $y = x$  tuletis.

Siin  $y + \Delta y = x + \Delta x$  ja seega  $\Delta y = \Delta x$ . Järelikult,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

$\Delta x$  muutumine seda tulemust ei muuda.

Seega,

argumendiga võrdse funktsiooni tuletis on 1.

$$x' = 1$$

f) Konstandi tuletis.

Konstantse funktsiooni, näiteks  $y = c$  graafik on paralleelne  $x$ -teljega. Seega on siin  $\Delta y = 0$  ja seetõttu ka

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

$\Delta x$  muutumine seda tulemust ei muuda.

Seega,

konstandiga võrdse funktsiooni tuletis on 0.

$$c' = 0$$

11. Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise tuletised.

a) Summa tuletis.

Olgu antud funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$ . Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = f(x) + g(x)$$

tuletis.

Kui argument muutub  $\Delta x$  võrra, siis funktsioon muutub  $\Delta y$  võrra, s. t. et

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

Avaldame  $\Delta y$ :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - y$$

ehk

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x).$$

Rühmitame ja jagame võrduse mõlemad pooled  $\Delta x$ -ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Tuletise leidmiseks võtame piirväärtuse, kui  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Et summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga, siis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

siis

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

ehk

$$\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)}$$

Kui oletada, et kumbki liidetavatest funktsioonidest või vähemalt üks neist avaldub ise kahe funktsiooni summana, näiteks

$$f(x) = h(x) + k(x)$$

ja seega

$$y = h(x) + k(x) + g(x),$$

siis tõesestatu põhjal

$$f'(x) = h'(x) + k'(x)$$

ja

$$y' = h'(x) + k'(x) + g'(x)$$

ehk

$$\boxed{[h(x) + g(x) + k(x)]' = h'(x) + g'(x) + k'(x)}$$

Niisiis,

summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga.

b) Korrutise tuletis.

Olgu antud funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$ . Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

tuletis.

Rakendame siingi juba tuntud skeemi.

Muutugu argument  $\Delta x$  võrra ja selle tagajärjel funktsioon  $\Delta y$  võrra, s. t.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x).$$

Siit

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x).$$

Valemi tuletamiseks lahutame võrduse paremalt poolelt  $f(x) \cdot g(x + \Delta x)$  ja et võrdus jääks kehtima, siis ka liidame sama avaldise. Niisiis,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + \\ &+ f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Rühmitame ja lahutame liidetavad tegureiks:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Jagame nüüd võrduse mõlemad pooled  $\Delta x$ -ga ja võtame piirväärtuse, kui  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Et summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga ja korrutise piirväärtus on võrdne tegurite piirväärtuste korrutisega, siis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Siit saame, et

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kahe funktsiooni korrutise tuletis on võrdne esimese teguri tuletise ja teise teguri korrutise ning teise teguri tuletise ja esimese teguri korrutise summaga.

Näide.

$$\begin{aligned} (x \cdot \sqrt{x})' &= x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

e) Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis.

Olgu korrutises üks tegureist konstant, siis

$$[cf(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x)$$

ja et  $c' = 0$ , siis

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis on võrdne konstandi ja selle funktsiooni tuletise korrutisega.

f) Jagatise tuletis.

Olgu antud funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$ . Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tuletis.

Eeldame, et  $g(x) \neq 0$ . Miks?

Korrutame võrduse mõlemad pooled  $g(x)$ -ga ja leiame funktsiooni

$$f(x) = y \cdot g(x)$$

tuletise.

Korrutise tuletise definitsiooni põhjal

$$f'(x) = y' \cdot g(x) + y \cdot g'(x).$$

Siit avaldame  $y'$ :

$$y' = \frac{f'(x) - y \cdot g'(x)}{g(x)}.$$

Asendame siin  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ , saame

$$y' = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)},$$

millest

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Jagatise tuletis on võrdne murruga, mille lugejaks on jagatava tuletise ja jagaja korrutise ning jagaja tuletise ja jagatava korrutise vahe ning nimetajaks on jagaja ruut.

Näide.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)' &= \frac{(\sqrt{x})' \cdot x^2 - \sqrt{x} \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x}}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 4x^2}{2x^4 \sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2 \sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}. \end{aligned}$$

## 12. Funktsiooni $y = x^n$ tuletis.

a) Funktsiooni  $x^n$  tuletis, kui  $n$  on naturaalarv.

Eespool leidsime, et

$$x' = 1 = 1 \cdot x^0;$$

$$(x^2)' = 2x;$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Leiame veel funktsioonide  $x^4$  ja  $x^5$  tuletise, kasutades 'or-rutise tuletise leidmise eeskirja

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3;$$

$$(x^5)' = (x^3 \cdot x^2)' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4.$$

Vaadeldes neid tuletisi, paneme tähele huvitavat seaduspärasust, mille järgi võiks oletada, et

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on mis tahes naturaalarv.}$$

Tõestame, et see võrdus tõepoolest kehtib. Tõestamiseks kasutame nn. matemaatilise induktsiooni võtet.

Toodud näidete põhjal eeldame, et kehtib võrdus

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}, \text{ kus } k \text{ on } 1, 2, 3, 4 \text{ või } 5.$$

Väidame, et kehtib võrdus

$$(x^{k+1})' = (k+1)x^k.$$

Tõestuseks vaatleme astet  $x^{k+1}$  kui korrutist  $x^k \cdot x$  ja leiame selle tuletise:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x'.$$

Eelduse põhjal on  $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$  ja seega

$$(x^{k+1})' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k = k \cdot x^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Seega on väide tõestatud.

Teame, et eeldus kehtib, kui  $k = 5$ . Tõestatu põhjal kehtib seos ka siis, kui  $k = 6$ .

Nüüd teame, et eeldus kehtib, kui  $k = 6$ . Tõestatu põhjal kehtib seos ka siis, kui  $k = 7$ .

Nii võime seda ahelat jätkata mis tahes naturaalarvuni.

Seega,

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on mis tahes naturaalarv}$$

b) Funktsiooni  $x^{-n}$  tuletis, kui  $n$  on negatiivne täisarv.

Tähistame  $n = -m$ , kus  $m$  on naturaalarv. Saame

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Tuletise leidmiseks rakendame jagatise tuletise leidmise

eeskirja:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1}.$$

Seega,

$$(x^{-n})' = (x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{-n-1}$$

ehk jättes vahepealsed kirjutused ära, saame

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ kus } n \text{ on negatiivne täisarv}$$

Astme tuletise leidmise eeskiri on ühesugune nii positiivse kui ka negatiivse täisarvulise astendaja korral, s. t.

täisarvulise astendajaga astme tuletis on võrdne astendaja ja sama alusega, kuid ühe võrra vähendatud astendajaga astme korrutisega.

### 13. Näiteid funktsiooni tuletise arvutamiseks.

Näide 1. Leida funktsiooni  $2x^3$  tuletis.

Et  $c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$  ja  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ , siis

$$(2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Näide 2. Leida funktsiooni  $y = x^4 - x^2$  tuletis.

Et summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga ja  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ , siis

$$y' = 4x^3 - 2x.$$

Näide 3. Leida funktsiooni

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$

tuletis kohal  $x = 1$ .

Rakendame summa, korrutise, astme ja konstandi tuletise leidmise eeskirju:

$$f'(x) = 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1;$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 10.$$

Näide 4. Leida funktsiooni  $y = x\sqrt{x}$  tuletis.

Rakendame korrutise tuletise leidmise eeskirja ja samuti valemit  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ :

$$y' = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}.$$

Tulemust võib lihtsustada, laiendades teist liidetavat  $(\sqrt{x})$ -ga:

$$y' = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2x} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Ülesandeid.

39. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a)  $3x - 7$

e)  $mx + n$

b)  $x^2 - 3x + 5$

f)  $c - \frac{p}{q}x$

c)  $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + x$

g)  $ax^2 + bx + c$

d)  $4x^4 + 3x^2 - 5x + 6$

h)  $ax + \frac{b}{x}$

40. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a)  $x(x + 1)$

d)  $x^2(a^2 + x^2)$

b)  $(x + 2)(x - 3)$

e)  $\frac{1}{x}(1 - x)$

c)  $(x - 5)(x + 5)$

f)  $x(2 - \frac{3}{x})$

41.  $f(x) = x^2$ . Leia  $f'(5)$ ;  $f'(-2)$ ;  $f'(-\frac{3}{2})$ .

42.  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ . Leia  $g(0)$ ;  $g(2)$ ;  $g'(0)$ ;  $g'(4)$ ;  $g'(-3)$ .

43. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a)  $\sqrt{x} + \sqrt{2}$

d)  $\frac{x}{a^2 + 1}$

g)  $\frac{v^5}{v^3 - 2}$

b)  $\sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$

e)  $\frac{1 - x^3}{\sqrt{\pi}}$

h)  $\frac{2x^4}{b^2 - x^2}$

c)  $0,8y - \frac{y^3}{0,3} + \frac{1}{5y^2}$

f)  $\frac{1}{t^2 + t + 1}$

i)  $\frac{3}{(1 - x^2)(1 - 2x^3)}$

44. Keha massiga 3 kg liigub sirgjooneliselt seaduse järgi  $s = 1 + t + t^2$ ,

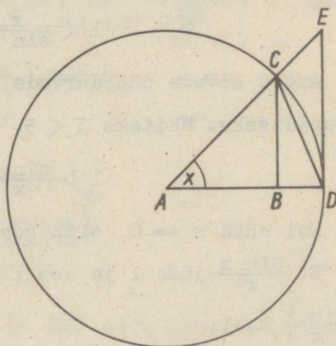
kus  $s$  on avaldatud sentimeetrites ja  $t$  sekundites. Leia keha kiineetiline energia ( $\frac{mv^2}{2}$ ) 5 sekundit pärast liikumise algust.

45. Ratas pöörleb nii, et pöördenurk on võrdeline aja ruuduga. Leia nurkkiirus  $\omega$  32 sekundit pärast liikumise algust, kui on teada, et esimese pöörde tegi ratas 8 sekundiga.

14. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Jooniselt 15 näeme, et täisnurgast väiksema positiivse kesknurga puhul on kolmnurga ADC pindala väiksem kui sektori ADC pindala ja see omakorda väiksem kui kolmnurga ADE pindala, s. t.



$S_{\Delta ADC} < S_{\text{sektor ADC}} < S_{\Delta ADE}$

Avaldame kolmnurkade pind-

Joon. 15

alad aluse ja kõrguse kaudu. Sektori pindala avaldub aga kesknurga (radiaanides) ja raadiuse poole korrutisena. Kesknurga suurus radiaanides olgu  $x$ . Ringi raadius olgu 1, s. t.

$$AD = AC = 1.$$

Seega võrratustest

$$\frac{AD \cdot BC}{2} < \frac{AD \cdot x}{2} < \frac{AD \cdot DE}{2}$$

saame

$$BC < x < DE.$$

Et  $\frac{BC}{AC} = \sin x$  ja  $AC = 1$ , siis  $BC = \sin x$ .

Et  $\frac{DE}{AD} = \tan x$  ja  $AD = 1$ , siis  $DE = \tan x$ .

Seega,

$$\sin x < x < \tan x.$$

Jagame saadud võrratused  $\sin x$ -ga. Et meid huvitab juhtum, kus  $x$  positiivselt poolelt läheneb nullile, siis  $\sin x > 0$  ja võrratuse märgid jäävad samapidisteks.

Saame

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}.$$

Et  $\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}$ , siis

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Antud arvude pöördarvude võrdlemisel muutub võrratuse märk vastupidiseks. Näiteks  $3 < 5$ , aga  $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ . Seega,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kui nüüd  $x \rightarrow 0$ , siis  $\cos x \rightarrow 1$ .

Et  $\frac{\sin x}{x}$  jääb 1 ja  $\cos x$  vahele, siis peab  $x \rightarrow 0$  korral

ka  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ .

Seega,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) sin x tuletis.

On antud funktsioon  $y = \sin x$ . Muutugu argument  $\Delta x$  võrra ja funktsioon selle tagajärjel  $\Delta y$  võrra. Saame

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

Siit 
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Kasutame siinuste vahe korrutiseks teisendamise valemit:

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Moodustame jagatise.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

Kui nüüd  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis ka  $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$  ja  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ . Seega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x.$$

Niisiis,

$$(\sin x)' = \cos x$$

c) cos x tuletis.

On antud funktsioon  $y = \cos x$ . Kui argumenti muutumisel  $\Delta x$  võrra funktsioon muutub  $\Delta y$  võrra, siis

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x).$$

Siit

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Kasutades koosinuste vahe korrutiseks teisendamise valemite, saame

$$\Delta y = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Moodustame jagatise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x},$$

mille kirjutame kujus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Kui nüüd  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x,$$

s. t.

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

d) tan x tuletis.

Olgu antud funktsioon  $y = \tan x$ . Et  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , siis kasutame otsitava tuletise leidmiseks jagatise tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Seega,

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Ülesanded.

46. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

- |                          |               |
|--------------------------|---------------|
| a) $\sin^2 x$            | e) $\sin 2x$  |
| b) $\cos^2 x$            | f) $\cos 2x$  |
| c) $\sin x - \cos x$     | g) $\tan 2x$  |
| d) $\sin x \cdot \cos x$ | h) $\tan^2 x$ |

47. Teades, et

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ ja } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

leia funktsioonide  $\cot x$ ,  $\sec x$  ja  $\operatorname{cosec} x$  tuletised.

48. Leia järgmiste funktsioonide muutumise hetkelised kiirused antud kohtades.

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sin x$ , kui $x = \frac{\pi}{3}$ ;           | d) $\sin 3x$ , kui $x = \frac{\pi}{8}$ ;                   |
| b) $\cos x$ , kui $x = -\frac{\pi}{6}$ ;          | e) $\frac{x^4}{4} + 2 \cos 2x$ , kui $x = \frac{\pi}{6}$ ; |
| c) $2x^3 + 3 \sin 2x$ , kui $x = \frac{\pi}{4}$ ; | f) $\frac{\cos x}{\sin 2x}$ , kui $x = \frac{3}{4}\pi$ .   |

49. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| a) $\sqrt{x} \sin^2 x$   | c) $\frac{\tan x}{\sqrt{x} \cdot \cos x}$     |
| b) $3x^2 \cdot \cos^2 x$ | d) $\frac{x^2 \cdot \sin x}{\sqrt{x} \cos x}$ |

### 15. Tuletiste tabel.

Funktsioon	Tuletis
$x$	$1$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$x^n$ , kus $n$ on täisarv	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$c$	$0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ , kus $g(x) \neq 0$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

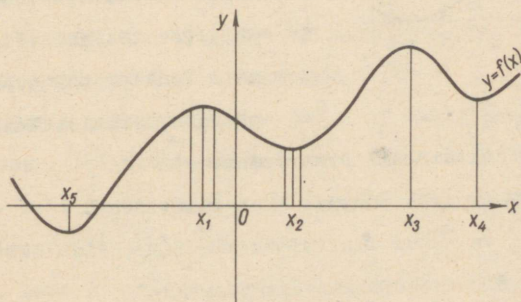
### 16. Funktsiooni ekstreemumid.

Vaatleme funktsiooni  $y = f(x)$  graafikut joonisel 16. Argumendi väärtusel  $x_1$  on funktsiooni väärtus suurem kui tema naabruses asuvate argumendi väärtuste korral. Sel juhul ütleme, et funktsioonil on kohal  $x_1$  maksimum. Argumendi väärtust  $x_1$  nimetatakse sel juhul ka funktsiooni maksimumkohaks.

Missugusel argumendi väärtusel on funktsioonil  $f(x)$  joonisel 16 veel maksimum?

Argumendi väärtusel  $x_2$  on funktsiooni väärtus väiksem kui tema naabruses asuvate argumendi väärtuste korral. Sel juhul ütleme, et funktsioonil on kohal  $x_2$  miinimum. Argumendi väärtust  $x_2$  nimetatakse sel juhul ka miinimumkohaks.

Missugusel argumendi väärtusel on funktsioonil  $f(x)$  joonisel 16 veel miinimum?



Joon. 16

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi nimetatakse ühise nimega funktsiooni ekstreemumiteks. Vastavaid argumendi väärtusi nimetatakse ekstreemumkohtadeks ja vastavaid punkte funktsiooni graafikul - ekstreemumpunktideks.

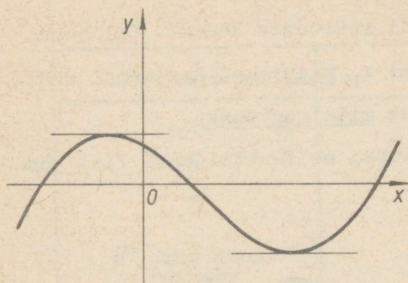
Seega,

funktsioonil on maksimum niisugusel argumendi väärtusel, millele vastav funktsiooni väärtus on suurem naabruses asuvatele argumendi väärtustele vastavatest funktsiooni väärtustest

ja

funktsioonil on miinimum niisugusel argumendi väärtusel, millele vastav funktsiooni väärtus on väiksem naabruses asuvatele argumendi väärtustele vastavatest funktsiooni väärtustest.

Jälgime kõvera puutuja asendit ekstreemumpunktides.



Joon. 17

Joonisel 17 näeme, et ekstreemumpunktides on puutuja  $x$ -teljega paralleelne, s. t. et ekstreemumpunktides on puutuja tõusunurk 0 ja seega ka puutuja tõus 0.

See tõsiasi võimaldab meil funktsiooni avaldisest määrata, millistel argumendi

väärtustel on funktsioonil ekstreemum.

Teatavasti avaldub puutuja tõus tuletisena.

Seega, kui on antud funktsioon  $y = f(x)$ , siis ekstreemukohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$f'(x) = 0.$$

Näide. Olgu antud funktsioon  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ . Leida selle funktsiooni graafiku ekstreemumpunktid.

Ülesande lahendamiseks leiame antud funktsiooni tuletise

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

ja lahendame võrrandi

$$3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

Lahenditeks on

$$x_1 = -1 \text{ ja } x_2 = 3.$$

Seega, antud funktsiooni ekstreemukohtadeks on argumendi väärtused  $-1$  ja  $3$ .

Leitud arvud on ekstreemumpunktide abstsissideks. Ordinaadi väärtused leiame funktsiooni avaldisest:

$$y_1 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 5 = -22;$$

$$y_2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 5 = 10.$$

Seega on ekstreemumpunktideks  $E_1(-1; 10)$  ja  $E_2(3; -22)$ .

Küsimusi ja ülesandeid.

50. Missugune joon on ruutfunktsiooni graafikuks?

51. Kuidas asetseb parabool koordinaatteljestikus, kui ruutliikme kordaja on positiivne? negatiivne?

52. Missuguse ruutliikme kordaja puhul on parabooli hari-punkt maksimumpunktiks? miinimumpunktiks?

53. Leia funktsiooni  $y = 3x^2 - 12$  ekstreemumkoht. Kas see on maksimum- või miinimumkoht?

54. Leia funktsiooni  $y = -4x^2 - 16$  ekstreemumkoht. Kas see on maksimum- või miinimumkoht?

55. Leia järgmiste ruutfunktsioonide graafikute haripunktide.

- |                              |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 5$            | e) $(x + 2)(x - 3)$                  |
| b) $-2x^2 + x - 1$           | f) $(3x + 1)(2 - x)$                 |
| c) $3 - 6x + 5x^2$           | g) $(2 - t)^2 - (2t + 1)^2$          |
| d) $8x - \frac{1}{2}x^2 + 1$ | h) $(0,3t + 2,1)^2 - (2,7x - 3,5)^2$ |

56. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad.

- |                                   |                             |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| a) $2x^3 - 3x^2 - 36x + 19$       | e) $x^3 - 9x^2 + 15x + 1$   |
| b) $x^3 - 3x^2 + 2$               | f) $x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ |
| c) $\frac{1}{4}x^4 - 8x$          | g) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 13$ |
| d) $\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$ | h) $\tan x - 8 \sin x$      |

57. Leia eelmises ülesandes antud funktsioonide graafikute ekstreemumpunktide koordinaadid.

## 17. Suurima ja vähima väärtuse leidmise

### ülesanded.

Funktsiooni väärtus, mis vastab ekstreemunkohale, on suurem või väiksem ekstreemunkoha naaberpunktile vastavatest funktsiooni väärtustest.

Et ekstreemunkohti saab kergesti tuletise abil leida, siis paljudes probleemides kasutatakse tuletist suurima või vähima väärtuse leidmiseks.

Toome mõned näited.

Näide 1. Jaotada arv 70 kaheks osaks nii, et nende korrutis oleks suurim.

Olgu üks arv  $x$ , siis teine on  $70 - x$ . Funktsioon, mille maksimumkoht tuleb leida, on

$$y = x(70 - x)$$

ehk

$$y = 70x - x^2.$$

Leiame tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$y' = 70 - 2x; \quad 70 - 2x = 0,$$

millest

$$x = 35.$$

Et antud funktsioon on ruutfunktsioon negatiivse ruutliikme kordajaga, siis haripunkt on maksimumpunktiks ja seega korrutis

$$35 \cdot 35 = 1225$$

on suurim.

Näide 2. Missuguste mõõtmete korral on silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulutatud vähim hulk plekki, kui konservitoosi ruumala on  $V$ .

Tähistame silindri põhja raadiuse tähega  $r$ , kõrguse tähega

h ja täispindala tähega S. Siis

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2,$$

millele lisandub ülesande andmete kohaselt tingimus  $\pi r^2 h = V$ , mis võimaldab meil S avaldada kas r või h funktsioonina.

Avaldame võrdusest  $V = \pi r^2 h$  näiteks h:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

ja asetame selle S avaldisse:

$$S = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2.$$

Pärast taandamist saame

$$S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Et leida, missuguse r väärtuse korral on S väärtus väikseim, selleks leiame tuletise ja võrdsustame selle 0-ga:

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r;$$

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$-V + 2\pi r^3 = 0;$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

$$\text{Et } h = \frac{V}{\pi r^2}, \text{ siis } h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4V}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Parema ülevaate saamiseks konservitoosi kujust leiame suhte  $\frac{r}{h}$ :

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{V \cdot \pi}{2\pi \cdot 4V}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2},$$

s. t. et konservitoosi kõrgus peab olema kaks korda suurem kui

raadius, ehk teisiti, konservitoosi põhja läbimõõd ja kõrgus peavad olema võrdsed.

Tekib küsimus: kas leitud tulemuste korral kulub konservitoosi valmistamiseks vähim või suurim hulk plekki.

Et leitud tulemused peavad kehtima iga  $V$  väärtuse korral, siis esitatud küsimusele vastuse leidmise hõlbustamiseks võtame  $V = 2\pi \text{ dm}^3$ . Siis  $r = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{2\pi}} = 1 \text{ (dm)}$  ja  $h = \sqrt[3]{\frac{8\pi}{\pi}} = 2 \text{ (dm)}$ . Konservitoosi valmistamiseks kulub sel juhul plekki

$$S = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1^2 = 6\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Kui aga sama ruumala juures näiteks  $r = 2 \text{ dm}$ , siis

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 4} = \frac{1}{2} \text{ (dm)} \text{ ja}$$

$$S = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot 2^2 = 10\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Et viimane tulemus on suurem kui eelmine, mis pidi aga olema kas suurim või väikseim, siis siit järeldub, et meil on leitud tulemuste korral tegemist minimaalse plekikogusega.

### Ülesandeid.

58. 20 cm pikkune lõik on jaotatud kahte ossa. Üks osa võetakse ristküliku aluseks, teine kõrguseks. Missuguse aluse puhul on ristküliku pindala suurim?

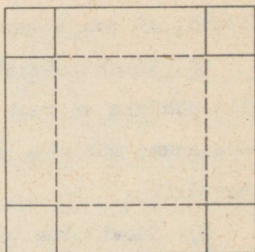
59. Ristküliku pindala on  $100 \text{ cm}^2$ . Missuguste mõõtmete korral on selle ristküliku ümbermõõt suurim?

60. Kolmnurga pindala on 18. Ehita see kolmnurk nii, et tema aluse ja kõrguse summa oleks väikseim. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

61. Ruudukujulise plekitahvli külg on 60 cm. Plekitahvli nurkadest tuleb lõigata ära 4 ruutu nii, et järelejäänud osast saaks servi üles pöörates suurima ruumalaga karbi (joon. 18).

Leia väljalõigatavate ruutude külje pikkus.

62. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?



63. Mõõda mõne konservitoosi kõrgus ja põhja läbimõõt ning leia, kui palju oleks saanud plekki kokku hoida:

Joon. 18

- ühe sama ruumalaga konservitoosi valmistamisel;
- 100 000 sellise konservitoosi valmistamisel (vt. näide 2).

64. Mõõda tikutoosi mõõtmed. Kui suur on tema ruumala? Missugused peavad olema tikutoosi mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali, eeldades, et toosi pikkus on tiku pikkusega määratud ja ühte toosi pandavate tikkude arv jääb samaks? (Arvutuste hõlbustamiseks loeme toosi kesta ja sahtli ristlõike mõõtmed võrdseteks.)

65. Kuidas tuleb valida silindrikujulise (pealt lahtise) liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk plekki?

66. Soovitakse valmistada 1000-liitriline silindrikujuline boiler. Külje materjali ruutdetsimeeter maksab 50 kop., otste materjali ruutdetsimeeter 1 rbl. Missuguste mõõtmete korral on boileri materjalikulud väikseimad?

67. Risttahukakujulise paagi põhjaks on ruut. Paagi pindala ilma kaaneta on  $108 \text{ dm}^2$ . Missugused peavad olema paagi mõõtmed, et paagi ruumala oleks suurim?

68. Tuleb valmistada pealt lahtine risttahukakujuline anum, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on  $32 \ell$ . Millised peavad olema anuma mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

69. Soovitakse valmistada 100-liitiline risttahukakujuline ruudukujulise põhjaga akvaarium. Kuidas tuleb valida akvaariumi mõõtmed, et

- a) punasest vasest servad maksaksid võimalikult vähe?
- b) põhi- ja külgpind tuleksid võimalikult odavad?

70. Aken koosneb ristkülikust ja sellele asetatud poolringist. Akna ümbermõõt on  $p$ . Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et akent läbiv valgushulk oleks suurim?

71. Raamatu leheküljele soovitakse mahutada  $S \text{ cm}^2$  teksti ja jätta selle ümber  $\ell \text{ cm}$  laiused ääred. Missugused mõõtmed peavad olema lehel, et raamatu valmistamiseks kuluks võimalikult vähe paberit?

72. Lahenda eelmise ülesanne juhul, kui  $\ell = 1,5$  ja  $S = 196 \text{ cm}^2$ . Kui palju on võimalik kokku hoida paberit, kui raamatu leheküljel on teksti  $11 \times 17,8 \text{ cm}^2$ , raamatus on 400 lehekülge ja raamatu tiraaž on 30 000 eksemplari?

73. Veeanum koosneb lahtisest silindrist ja selle otsa kinnitatud poolkerast. Missugused peavad olema selle anuma mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali, kui anuma ruumala on  $V \text{ m}^3$ ?

74. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on  $s$ . Kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Missugune seos peab olema

aluse ja kõrguse vahel, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

75. Koonuse kõrgus on 12 cm ja põhja raadius on 6 cm. Missugused on suurima ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?

76. Koonuse kõrgus on 21 cm ja põhja raadius 7 cm. Missugused on koonusesse kujundatud suurima täispindalaga silindri mõõtmed?

77. Kolme 6 m pikkuse kepi abil ehitatakse korrapärase kolmnurkse püramiidi kujuline telk. Kui suur peab olema püramiidi kõrgus, et telgis oleks võimalikult rohkem õhku?

### III. FUNKTSIOONIDE UURIMINE TULETISE ABIL.

#### 18. Funktsiooni teine ja kolmas tuletis.

Ülesandeid.

78. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

$$a) y = 3x^2 + 3x + 3 \quad d) y = \sin x + \cos x$$

$$b) y = 5 - 6x^2 + 7x \quad e) y = \tan x - \frac{1}{\sin x}$$

$$c) y = 3x^5 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} \quad f) y = 4x + 3x^{-5}$$

79. Vaatle ülesandes 78 saadud tulemusi funktsioonina ja leia nende tuletised.

80. Vaatle ülesandes 79 saadud tulemusi jällegi funktsioonina ja leia nende tuletised.

Funktsiooni teiseks tuletiseks nimetatakse funktsiooni tuletise tuletist. Seda tähistatakse  $y''$  või  $f''(x)$ . Näiteks kui  $y = \cos^2 x$ , siis

$$y' = -2 \cos x \cdot \sin x;$$

$$y'' = -2(-\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Kuidas saab leitud  $y'$  ja  $y''$  avaldised lühemalt üles kirjutada?

Missuguste funktsioonide teisi tuletisi tuleb leida ülesandes 79?

Funktsiooni kolmandaks tuletiseks nimetatakse funktsiooni teise tuletise tuletist. Seda tähistatakse  $y'''$  või  $f'''(x)$ .

Näiteks kui

$$y = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1,$$

siis

$$y' = 16x^3 + 9x^2 + 4x + 1,$$

$$y'' = 48x^2 + 18x + 4,$$

$$y''' = 96x + 18.$$

Missuguste funktsioonide kolmandaid tuletisi tuleb leida ülesandes 80?

Funktsiooni tuletis antud kohas määrab funktsiooni muutumise hetkelise kiiruse sellel kohal. Funktsiooni teine tuletis antud kohas määrab seega funktsiooni tuletise muutumise hetkelise kiiruse antud kohas. Kiiruse muutumise kiirust nimetatakse kiirenduseks. Seega määrab teine tuletis funktsiooni muutumise hetkelise kiirenduse antud kohas.

### Küsimusi ja ülesandeid.

81. Leia järgmiste funktsioonide muutumise hetkeline kiirendus kohal  $x = 1$ .

a)  $y = 4x^2 + 3x$

c)  $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

b)  $y = 5x^7 - 3x^5 + x^3$

d)  $y = x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$

82. Leia järgmiste funktsioonide kolmandad tuletised.

a)  $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 10$

c)  $y = \sin^2 x$

b)  $y = 5x^3 - 6x^2 - 4x + 17$

d)  $y = \cos x - \sin x$

83. Kuidas leida funktsiooni neljandat tuletist  $y^{(4)}$ ?

84. Kuidas leida funktsiooni  $n$ -ndat tuletist  $y^{(n)}$ ?

85. Leia funktsiooni  $y = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$  esimesed neli tuletist. Mida võib öelda kõigi järgmiste tuletiste kohta?

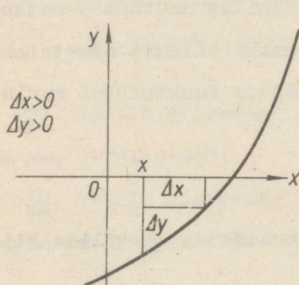
86. Leia funktsiooni  $y = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$  esimesed neli tuletist. Mida võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

87. Leia funktsiooni  $y = \sin x$  esimesed neli tuletist. Mi-  
da võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

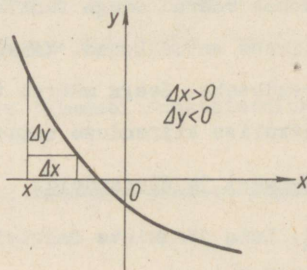
88. Leia funktsiooni  $y = \cos x$  esimesed neli tuletist. Mi-  
da võib öelda järgmiste tuletiste kohta?

### 19. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Teatavasti nimetatakse funktsiooni antud kohas kasvavaks, kui positiivsetele argumenti muutudele vastavad positiivsed funktsiooni muudud, ja kahanevaks, kui positiivsetele argumen-  
di muutudele vastavad negatiivsed funktsiooni muudud.



Joon. 19



Joon. 20

Joonisel 19 on esitatud kasvava funktsiooni graafik ja  
joonisel 20 kahaneva funktsiooni graafik. Nendel graafikutel on  
nimetatud tingimused muutude kohta kehtivad iga punkti suhtes.

Seega on suhe  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  kasvava funktsiooni puhul positiivne ja  
kahaneva funktsiooni puhul negatiivne. Kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis esime-  
sel juhul jääb  $\Delta y$  ikka positiivseks ja teisel juhul ikka nega-  
tiivseks. Seega on kasvava funktsiooni korral

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

ja kahaneva funktsiooni korral

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

Seega,

funktsiooni kasvamise tunnuseks on  $y' > 0$

ja

funktsiooni kahanemise tunnuseks on  $y' < 0$

Kui funktsioon on ühes piirkonnas kasvav ja teises kahanev, nagu näiteks ruutfunktsioon, siis on võrratus  $y' > 0$  rahuldatud kasvamispiirkonnas ja  $y' < 0$  kahanemiskiirkonnas.

Funktsiooni kasvamispiirkonna leidmiseks tuleb seega lahendada võrratus  $y' > 0$  ja kahanemiskiirkonna leidmiseks võrratus  $y' < 0$ .

Näide. Leida funktsiooni  $y = x^2 - 3x + 5$  kasvamis- ja kahanemiskiirkond.

Ülesande lahendamiseks leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = 2x - 3.$$

Kasvamispiirkonnas on  $y' > 0$ , s. t.  $2x - 3 > 0$ . Siit  $x > \frac{3}{2}$ .

Kahanemiskiirkonnas on  $y' < 0$ , s. t.  $2x - 3 < 0$ . Siit  $x < \frac{3}{2}$ .

Seega on funktsioon  $y = x^2 - 3x + 5$  piirkonnas  $x > \frac{3}{2}$  kasvav ja piirkonnas  $x < \frac{3}{2}$  kahanev.

### 20. Ekstreemumpunktid.

Need punktid, kus funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemisele või kahanemine läheb üle kasvamisele, on ekstreemumpunktid.

Kui kasvamine läheb üle kahanemisele, siis on need ekstreemumpunktid maksimumpunktid.

Kui kahanemine läheb üle kasvamisele, siis on need ekstreemumpunktid miinimumpunktid.

Et kasvamispiirkonnas moodustab puutuja  $x$ -teljega teravnurga ja kahanemispiirkonnas nürinurga, siis üleminekupunktides peab puutuja olema paralleelne  $x$ -teljega.

Nagu juba teame, ongi ekstreemumpunktides  $y' = 0$ .

Näide. Leida funktsiooni  $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$  kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumpunktid.

Leiame antud funktsiooni tuletise:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

Et ekstreemumpunktides  $y' = 0$ , siis saame siit võrrandi:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ekstreemumpunktide abstsisside määramiseks.

Kasvamispiirkonna leidmiseks tuleb lahendada võrratus

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

ja kahanemispiirkonna leidmiseks võrratus

$$x^2 - 2x - 3 < 0.$$

Et ruutfunktsiooni  $x^2 - 2x - 3$  nullkohtadeks on  $x_1 = -1$  ja  $x_2 = 3$  ning et ruutliikme kordaja on positiivne, siis on vaadeldav ruutfunktsioon positiivne piirkondades

$$x < -1 \quad \text{ja} \quad x > 3$$

ning negatiivne piirkonnas

$$-1 < x < 3.$$

Seega on antud funktsiooni kasvamispiirkondadeks  $x < -1$  ja  $x > 3$  ning kahanemispiirkonnaks  $-1 < x < 3$ .

Kasvamine läheb üle kahanemisele punktis, mille abstsiss on  $-1$ , ja kahanemine üle kasvamisele punktis, mille abstsiss on  $3$ . Seega on  $-1$  maksimumkohaks ja  $3$  miinimumkohaks. Leiame nüüd veel ekstreemumpunktide ordinaadid:

$$y_1 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 1 = 4;$$

$$y_2 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 1 = -28.$$

Seega on maksimumpunktiks  $(-1; 4)$  ja miinimumpunktiks  $(3; -28)$ .

### Ülesandeid.

89. Näita, et funktsioon  $y = x^3 + x$  on kogu ulatuses kasvav.

90. Missugustel  $x$  väärtustel on funktsioon  $y = x^3 - 3x^2 + 7$  kahanev?

91. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.

a)  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

b)  $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 24$

c)  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

d)  $y = x^4 - 2x^2 - 5$

e)  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

92. Selgita, kas funktsioon

$$y = \sin x + \cos x$$

on kohtadel  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$  ja  $x_3 = \frac{\pi}{3}$  kasvav või kahanev.

93. Selgita, kas funktsioon

$$y = \sin 2x + \cos 2x$$

on kohtadel  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{12}$ ,  $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ ,  $x_4 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x_5 = \frac{\pi}{4}$

kasvav või kahanev.

94. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumpunktid.

a)  $x^2 - x - 2$

f)  $x^2 - x^3$

b)  $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$

g)  $x^3 - 3x^2 + 2$

c)  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

h)  $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$

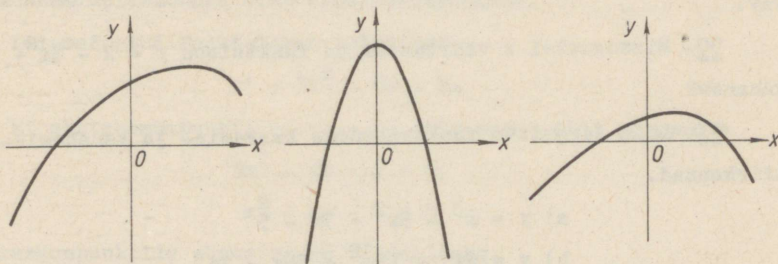
d)  $x^3 - 3x$

i)  $0,1x^4 - 1,3x^2 + 3,6$

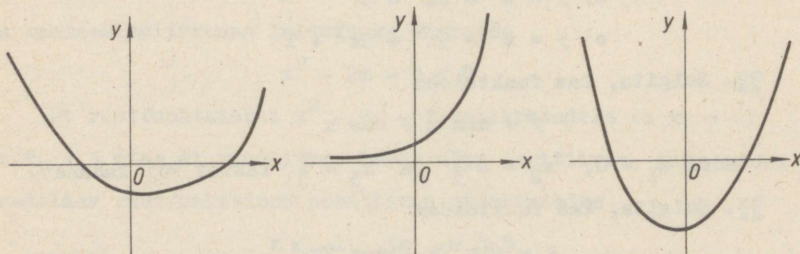
e)  $\frac{1}{4}x^4 - 8x$

j)  $-\frac{1}{3}x^3 + x - 1$

21. Funktsiooni kumerus ja nõgusus.



Joon. 21



Joon. 22

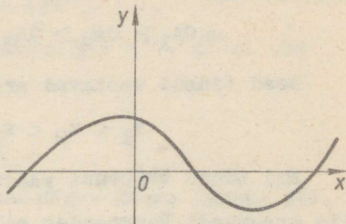
Joonisel 21 on esitatud mõnede funktsioonide graafikud, mis on kõik kumerad kõverad, ja joonisel 22 mõnede funktsioonide

graafikud, mis on kõik nõgusad kõverad.

Paljude funktsioonide graafikud on aga ühes vahemikus kumerad, teises nõgusad (joon. 23).

Millal on ruutfunktsiooni graafikuks kumer parabool, millal nõgus?

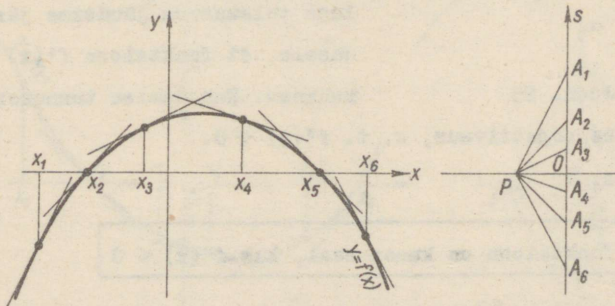
Seame nüüd ülesandeks leida tunnused, mille järgi võib funktsiooni graafikut nägemata, ainult tema analüütilisele esitusele tuginedes, leida piirkonnad, kus funktsiooni graafik on kumer ja kus nõgus. Vastavalt nimetatakse ka funktsiooni nendes piirkondades kumeraks ja nõgusaks.



Joon. 23

a) Kumerus.

Olgu antud koordinaatteljestikus kumer kõver (joon. 24).



Joon. 24

Ehitame sellele kõverale mitmes tema punktis puutujad. Kanname need puutujad paralleellükke abil punkti P, millest l ühiku kaugusel on vertikaalne sirge s. Paralleellükke abil ülekantud puutujad lõikavad seda sirget s vastavalt punktides  $A_1, A_2, A_3, A_4,$

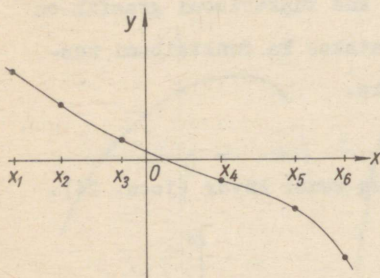
$A_5, A_6$ . Lõigud  $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, OA_6$  esitavad vastavate puutujate tõuse. Miks? Näeme, et nendel tõusudel on kindel suurusjärjestus:

$$OA_1 > OA_2 > OA_3 > OA_4 > OA_5 > OA_6.$$

Need tõusud vastavad argumendi väärtustele

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Kui tõusu väärtusi vaadelda mingi funktsiooni väärtustena, siis argumendi suurenedes selle funktsiooni väärtused kahanevad, mis aga tähendab, et see funktsioon on kahanev (joon. 25).



Joon. 25

Olgu funktsioon, mille graafikuks on eespool antud kumer kõver (joon. 24),  $y = f(x)$ . Sellele graafikule tõmmatud puutujate tõusude väärtused on aga funktsiooni  $f'(x)$  väärtusteks. Arutluse tulemusena jõudsimme järeldusele, et funktsioon  $f'(x)$  on kahanev. Kahanemise tunnuseks on

tema tuletise negatiivsus, s. t.  $f''(x) < 0$ .

Niisiis,

funktsioon on kumer seal, kus  $f''(x) < 0$

Funktsiooni kumeruspiirkonna määramiseks tuleb seega lahendada võrratus  $y'' < 0$ .

Näide 1. Leida funktsiooni  $y = 3x^3 - x^2 + 1$  kumeruspiirkond.

Et  $y' = 9x^2 - 2x$  ja  $y'' = 18x - 2$ , siis ülesande lahendi saame võrratuse  $18x - 2 < 0$  lahendamise tulemusena, s.o.  $x < \frac{1}{9}$ .

Näide 2. Kas funktsioon  $y = x^4 - x^2$  on kohal  $x = 1$  kumer?

Leiame jälle esimese ja teise tuletise:

$$y' = 4x^3 - 2x; \quad y'' = 12x^2 - 2.$$

Et  $y''|_{x=1} = 10 > 0$ , siis funktsioon  $y = x^4 - x^2$  ei ole

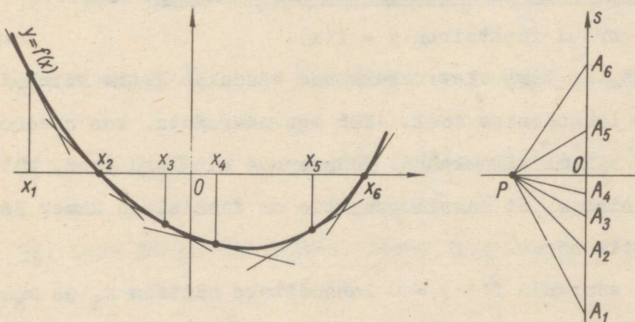
kohal  $x = 1$  kumer.

b) Nõrgusus.

Olgu antud koordinaatteljestikus nõrgus kõver (joon. 26).

Ehitame sellele kõverale mitmes tema punktis puudujad. Kanname need puudujad paralleellükke abil punkti P, millest l ühiku kaugusel on vertikaalne sirge s. Paralleellükke abil ülekantud puudujad lõikavad seda sirget s vastavalt punktides  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ . Lõigud  $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, OA_6$  esitavad vastavate puudujate tõuse. Miks? Näeme, et nendel tõusudel on kindel suurusjärjestus:

$$OA_1 < OA_2 < OA_3 < OA_4 < OA_5 < OA_6.$$



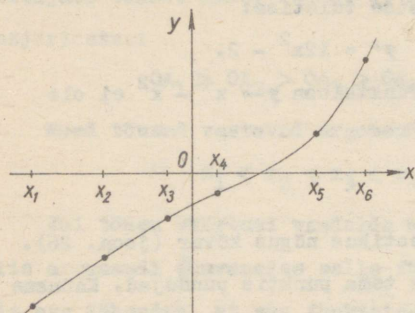
Joon. 26

Need tõusud vastavad argumendi väärtustele

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Kui tõusu väärtusi vaadelda jälle mingi funktsiooni väärtustena, siis on see funktsioon kasvav, sest argumendi suure-

nedes ka funktsiooni väärtused suurenevad (joon. 27).



Joon. 27

Kui antud nõgus kõver (joon. 26) on funktsiooni  $f(x)$  graafikuks, siis on tõusude väärtused funktsiooni  $f'(x)$  väärtusteks ja et see funktsioon on kasvav, siis peab  $f''(x) > 0$ .

Niisiis,

funktsioon on nõgus seal, kus  $f''(x) > 0$

Kuidas saab leida funktsiooni nõgususpiirkonda?

Kuidas saab kindlaks teha, kas funktsioon on etteantud kohas nõgus?

c) Maksimum- ja miinimumpunktide tunnused.

Olgu antud funktsioon  $y = f(x)$ .

Teame, et tema ekstreemumkohad saadakse kätte võrrandi  $f'(x) = 0$  lahendamise teel. Jääb aga määramata, kas need on maksimum- või miinimumkohad. Seda saame kindlaks teha, kui kasutame tõsiasja, et maksimumpunktis on funktsioon kumer ja miinimumpunktis nõgus.

Olgu võrrandi  $f'(x) = 0$  lahenditeks näiteks  $x_1$  ja  $x_k$ , s.t.  $f'(x_1) = 0$  ja  $f'(x_k) = 0$ .

Osutugu nüüd, et  $f''(x_1) > 0$  ja  $f''(x_k) < 0$ , s. t. kohal  $x_1$  on funktsioon nõgus ja kohal  $x_k$  kumer. Seega on funktsioonil  $f(x)$  kohal  $x_1$  miinimum ja kohal  $x_k$  maksimum.

Näide. Leida funktsiooni  $y = x^3 - 2,5x^2 - 12x + 5$  maksimum-

ja miinimumkohad.

Ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt ekstreemumkohad.

Selleks tuleb lahendada võrrand

$$3x^2 - 5x - 12 = 0.$$

Lahenditeks on  $x_1 = -\frac{4}{3}$  ja  $x_2 = 3$ .

Et kindlaks teha, kumb neist on maksimum-, kumb miinimumkohaks, selleks leiame teise tuletise

$$y'' = 6x - 5$$

ja kontrollime selle märki, kui  $x = -\frac{4}{3}$  ja  $x = 3$ :

$$y'' \Big|_{x = -\frac{4}{3}} = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 5 = -13 < 0;$$

$$y'' \Big|_{x = 3} = 6 \cdot 3 - 5 = 13 > 0.$$

Seega on  $x_1 = -\frac{4}{3}$  maksimumkohaks ja  $x_2 = 3$  miinimumkohaks.

Ülesandeid.

95. Näita, et funktsioon  $x^4 + x$  on  $x$  iga väärtuse korral nõgus.

96. Missugustel  $x$  väärtustel on funktsioon  $x^3 - 2x^2 + x - 1$  kumer?

97. Missugustel  $x$  väärtustel on funktsioon  $3x^3 + 4x^2 - 5$  nõgus?

98. Leia järgmiste funktsioonide kumerus- ja nõguspiirkonnad.

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

b)  $y = 3,6x^3 - 2,4x^2 + 1,2x + 0,5$

c)  $y = 5x^4 - 3x^2 + 1$

d)  $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x$

e)  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

29. Leia järgmiste funktsioonide maksimum- ja miinimumkohad.

a)  $x^2 - 3x + 2$

d)  $x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

b)  $3x^2 + 4x - 1$

e)  $x^3 + x^2 - x + 1$

c)  $2x^3 - 3x^2 + x$

f)  $2x^4 + 3x^3 - 5$

### 22. Käänupunkt.

Punkte, kus kumerus läheb üle nõgususeks või kus nõgusus läheb üle kumeruseks, nimetatakse käänupunktideks.

Kus asub joonisel 23 käänupunkt?

Et kumeruspiirkonnas  $y'' < 0$  ja nõgususpiirkonnas  $y'' > 0$ , siis käänupunktide abstsissid on võrrandi

$$y'' = 0$$

lahenditeks.

Näide. Leida kõvera  $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$  käänupunktid.

Ülesande lahendamiseks leiame antud funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$y' = 3x^2 - 8x + 3;$$

$$y'' = 6x - 8.$$

Käänupunkti abstsissi saame võrrandist

$$6x - 8 = 0,$$

kust

$$x = \frac{4}{3}.$$

Käänupunkti ordinaadi leidmiseks asetame  $x = \frac{4}{3}$  funktsiooni avaldisse:

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = -\frac{128}{27} \approx -4,7.$$

Ülesandeid.

100. Leia järgmiste funktsioonide käänupunktid.

a)  $10x^3 - 15x^2 - 11$

c)  $(x - 3)^2(x - 10)$

b)  $x^3 - x^2 + 2x + 1$

d)  $(x - 1)(x - 7)(x + 5)$

101. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, ekstreemkohad ja käänupunktid.

a)  $2x^3 - 3x$

d)  $(x - 1)(x + 2)$

b)  $3x^2 - 4x - 3$

e)  $(x + 1)(x - 3)^2$

c)  $3x^4 + 2x^3$

f)  $(2x - 1)(3x + 2)(x + 1)$

102. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspäirkonnad, ekstreemupunktid, kasvamis- ja kahanevuspäirkonnad, käänupunktid ning kumerus- ja nõguspäirkonnad. Saadud andmete järgi skitseeri vastavad kõverad.

a)  $(x + 2)(2x - 1)$

d)  $x^3 - 3x$

b)  $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

e)  $x^4 - 4x^2$

c)  $3x^3 - 2x^2 - x$

f)  $2x^2 - x^4 - 1$

IV. TULETISE MÖISTE KASUTAMINE VÖRRANDITE  
LIGIKAUDSEL LAHENDAMISEL.

23. Vörrandi ligikaudne lahendamine.

Lineaarsete ja ruutvörrandite lahendamine toimub kindlate eeskirjade kohaselt ja tulemuseks saadakse alati täpne lahend.

Näiteid.

$$1) 3x - 1 = 7; \quad 2) 2x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$3x = 8;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4};$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1;$$

$$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Kui ruutvörrandi lahend avaldub irratsionaalarvuna, siis leides ruutjuure kas algoritmi abil teatud täpsusega või kasutades tabelleid, saame ruutvörrandi lahendid ligikaudsete kümnendmurdudena.

Näide.

$$2x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4};$$

$$x \approx \frac{-1 \pm 4,123}{4};$$

$$x_1 \approx \frac{3,123}{4} \approx 0,78;$$

$$x_2 \approx \frac{-5,123}{4} \approx -1,28.$$

Siin on lahendid antud sajandiku täpsusega.

Paljudel juhtumitel, eriti kõrgema astme vörrandite puhul,

pole aga võimalik anda võrrandi lahendamiseks kindlaid eeskirju. Sel juhul kasutatakse võrrandi lahendamiseks nn. ligikaudseid meetodeid.

Nende meetodite abil täpsustatakse esialgseid proovimise teel või graafikult leitud lähendeid.

Olgu antud näiteks võrrand

$$x^3 - 3x - 5 = 0.$$

Tähistame võrrandi vasaku poole  $f(x)$ -ga, s. t.

$$f(x) = x^3 - 3x - 5.$$

$$\text{Kui } x = 1, \quad \text{siis } f(1) = -7;$$

$$\text{" } x = 2, \quad \text{" } f(2) = -3;$$

$$\text{" } x = 3, \quad \text{" } f(3) = 13.$$

Saadud tulemuste põhjal võib öelda, et antud võrrandil on lahend 2 ja 3 vahel. Miks? Seega võib arve 2 ja 3 vaadelda lahendi esimeste lähenditena.

Kui lahendit pole vaja leida suure täpsusega, siis võime öelda, et võrrandi  $x^3 - 3x - 5 = 0$  lahendiks on  $x \approx 2$ .

Lahendi täpsustamiseks, s. t. tema kümnendike ja sajandike määramiseks võib kasutada samasugust proovimise võtet, kuid see muutub arvutustehniliselt tülikaks. Seetõttu ongi matemaatikas tuletatud valemeid, mille abil saab võrrandi lahendeid kergemini täpsustada.

#### 24. Newtoni võtte võrrandi lahendi täpsustamiseks.

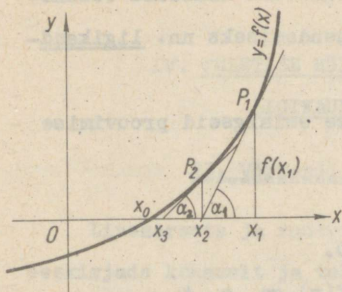
Olgu antud võrrand  $f(x) = 0$ , s. t. ülesandeks on määrata funktsiooni  $y = f(x)$  nullkoht. Esitagu joonisel 28 kujutatud kõver funktsiooni  $y = f(x)$  graafikut. Tähistame selle funktsiooni nullkoha tähega  $x_0$ , mis aga tähendab, et  $x_0$  on antud võrrandi

täpne lahend.

Oletame, et proovimise teel on leitud antud võrrandi lahendi esimeseks lähendiks  $x_1$ , s.t.  $x_0 \approx x_1$  ehk

$$x_0 = x_1 + a,$$

kus  $a$  on nn. parandus, mis näitab ligikaudse lahendi erinevust täpsest lahendist.



Joon. 28

Abstsissile  $x_1$  vastab graafikul punkt  $P_1$ . Läbi selle punkti kõverale tõmmatud puutuja moodustab  $x$ -teljega nurga  $\alpha_1$ . Selle puutuja tõus  $k_1 = f'(x_1) = \tan \alpha_1$ . Puutuja ja  $x$ -telje lõikepunkt määrab antud võrrandi lahendile märksa parema lähendi  $x_2$  kui seda on  $x_1$ .

Kasutades joonisel esitatud kolmnurka, võime kirjutada

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = \tan \alpha_1$$

ja siit

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{\tan \alpha_1}.$$

Et

$$\tan \alpha_1 = f'(x_1),$$

siis

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Kui tahame saada veel täpsemat lahendit, siis ehitame kõveral punkti  $P_2(x_2; y_2)$  ja läbi selle punkti tõmbame puutuja, mis lõikumisel  $x$ -teljega määrabki antud võrrandi lahendile täpsema lähendi  $x_3$ . Et siin on probleem täpselt samasugune nagu  $x_2$  määramisel, siis võime kohe kirjutada, et

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Kui ka sellest täpsusest ei piisa, siis tuleb analoogilise mõttekäigu abil leida järgmine lähend:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \text{ jne.}$$

Näide. Olgu tarvis leida võrrandi

$$x^3 - x - 5 = 0.$$

lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Antud ülesandes on  $f(x) = x^3 - x - 5$ . Proovimise teel leiame, et  $f(1) = -5$  ja  $f(2) = 1$ . Seega on lahend 1 ja 2 vahel ja ilmselt lähem kahele kui ühele, sest  $f(2)$  erineb nullist vähem kui  $f(1)$ . Seega võtame  $x_1 = 2$ .

Newtoni võtte rakendamiseks on vaja teada  $f(x)$  tuletist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Nüüd võime avaldada  $x_2$ :

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1,909.$$

Edasi leiame samuti  $x_3$  ja  $x_4$ :

$$x_3 = 1,909 - \frac{0,048}{9,935} \approx 1,909 - 0,005 = 1,904;$$

$$x_4 = 1,904 - \frac{0,002}{9,878} \approx 1,904 - 0,0002 \approx 1,904.$$

Et kõik kohad kuni tuhandikeni jäid püsima, siis võime öelda, et saadud lahend  $x = 1,904$  esitab antud võrrandi lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Ülesandeid.

103. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid sajandiku täpsusega.

a)  $x^2 = 30$

d)  $x^2 - 3x - 3 = 0$

b)  $3x^2 = 78$

e)  $x^2 + x - 8 = 0$

c)  $2,3x^2 - 46,1 = 0$

f)  $2x^2 - 5x + 1 = 0$

104. Leia, missuguste täisarvude vahel on järgmistel võrranditel lahend.

a)  $x^3 - 3x - 1 = 0$

d)  $x^3 + x^2 - 1 = 0$

b)  $x^3 - 5x - 10 = 0$

e)  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

c)  $x^3 + 2,5x + 40 = 0$

f)  $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

105. Leia järgmiste võrrandite lahenditele täisarvulised lähendid ja täpsusta neid Newtoni vôttega.

a)  $x^3 - 4x + 7 = 0$

d)  $x^3 + 6x^2 + 5 = 0$

b)  $x^3 - 6x + 3,5 = 0$

e)  $x^3 - 2x + 18 = 0$

c)  $x^3 - 2x - 5 = 0$

f)  $x^4 - x - 4 = 0$

106. Võrrandi  $x^3 + px + q = 0$  lahendid on samad, mis võrrandil  $x^3 = -px - q$ . Seega on antud võrrandi lahenditeks funktsioonide

$$y = x^3 \quad \text{ja} \quad y = -px - q$$

graafikute lõikepunktide abstsissid. Kasutades seda tõsiasja, kontrolli ülesande 103 ja ülesande 104 kahe esimese võrrandi lahendeid graafiliselt.

107. Pane avaldises  $x^3 + bx^2 + cx + d$  tähe  $x$  asemele  $(x + a)$ . Missugune väärtus tuleb anda  $a$ -le, et pärast asendamist poleks avaldises enam  $x^2$ -ga liiget?

108. On antud võrrand  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ . Teisenda selle võrrandi vasak pool niisuguseks, et sealt puuduks  $x^2$ -ga liige. Kas antud võrrandil ja saadud võrrandil on ühesugused lahendid? Mille võrra need lahendid erinevad?

109. Lahenda võrrandid järgmise skeemi kohaselt:

- 1) kasuta ruutliikmest vabastamise teisendust;
- 2) leia saadud võrrandile ligikaudsed lahendid, kasutades funktsiooni  $y = x^3$  graafikut;
- 3) täpsusta saadud lahendeid Newtoni võttega sajandikeni.

a)  $x^3 + x^2 - 1 = 0$

d)  $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

b)  $x^3 - 6x^2 - 10 = 0$

e)  $x^3 - 3,9x^2 - 3,9x + 10,8 = 0$

c)  $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

f)  $x^3 - 4,2x^2 - 12,6x + 45,9 = 0$

## V. NEWTONI BINOOMVALEM.

### 25. Binoomi $x + 1$ astmete arendid.

Summa ruudu ja summa kuubi valemite järgi võime kirjutada:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Kasutades neid valemuid võime jätkata  $x + 1$  astmete välja-  
kirjutamist:

$$(x + 1)^4 = (x + 1)^3(x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1;$$

$$(x + 1)^5 = (x + 1)^4(x + 1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

jne.

Nende vörduste paremaid pooli nimetatakse lühidalt binoomi  
 $x + 1$  astmete arenditeks.

Esitame binoomi  $x + 1$  astmete arendite kordajad tabelina:

				1		
			1	1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

Seda tabelit nimetatakse Pascal'i kolmnurgaks.

Pascal'i kolmnurgast näeme, et binoomkordajate kohta keh-  
tivad järgmised seaduspärasused:

- binoomkordajad asetsevad arendis sümmeetriliselt, s. t.  
arendi algusest ja lõpust vördsetel kaugustel asetseva-

te liikmete kordajad on võrdsed;

b) esimese ja viimase liikme kordaja on 1;

c) teise ja eelviimase liikme kordaja on võrdne binoomi astendajaga.

Edaspidi näitame, et need omadused kehtivad iga naturaalarvulise astendajaga binoomi arendi kohta.

### Ülesandeid.

110. Esita binoomide  $(x + 1)^6$ ,  $(x + 1)^7$ ,  $(x + 1)^8$  arendid ja täienda nende kordajatega Pascal'i kolmnurka.

111. Leia Pascal'i kolmnurga abil, kuidas saab teise astme binoomi arendi kordajate kaudu välja kirjutada kolmanda astme binoomi arendi kordajaid, kolmanda astme binoomi arendi kordajate kaudu neljanda astme binoomi arendi kordajaid jne.

112. Sõnasta Pascal'i kolmnurga jätkamise reegel ja täienda selle abil Pascal'i kolmnurka binoomide  $(x + 1)^9$  ja  $(x + 1)^{10}$  kordajatega.

### 26. Funktsiooni $f^n(x)$ tuletis.

a)  $f^2(x)$  tuletis.

Et  $f^2(x) = [f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$ , siis kasutame siin korrutise tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$[f^2(x)]' = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot f'(x).$$

b)  $f^3(x)$  tuletis.

Kasutades eelmist tulemust ja jällegi korrutise tuletise leidmise eeskirja, võime kirjutada:

$$[f^3(x)]' = f^2(x) \cdot [f(x)]' = [f^2(x)]' \cdot f(x) + f^2(x) \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot f'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x).$$

c)  $f^n(x)$  tuletis.

Leitud tulemuste põhjal võib oletada, et

$$[f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

Kasutame selle võrduse tõestamiseks matemaatilise indukt  
siooni meetodit.

Oletame, et teatud naturaalarvu  $k$  korral kehtib seos

$$[f^k(x)]' = k f^{k-1}(x) \cdot f'(x).$$

Tõestame nüüd, et siis ka

$$[f^{k+1}(x)]' = (k+1) f^k(x) \cdot f'(x).$$

Et

$$f^{k+1}(x) = f^k(x) \cdot f(x),$$

siis

$$\begin{aligned} [f^{k+1}(x)]' &= [f^k(x) \cdot f(x)]' = [f^k(x)]' \cdot f(x) + f^k(x) \cdot f'(x) \\ &= k f^{k-1}(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^k(x) \cdot f'(x) = \\ &= (k+1) f^k(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Et  $k = 3$  puhul see valem kehtib (vt. punkt b), siis tões  
tatu põhjal kehtib ta ka  $k = 4$  puhul. Kui valem kehtib aga  
 $k = 4$  puhul, siis tõestatu põhjal kehtib ta ka  $k = 5$  puhul j

Seega olemegi tõestanud, et

$$[f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

Ülesandeid.

113. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| a) $(x+1)^5$              | f) $(3x^2 + 2x - 1)^6$          |
| b) $(2x - 3)^7$           | g) $(\sin x + \tan x)^{10}$     |
| c) $(2 - \frac{3}{2}x)^6$ | h) $(x + \frac{1}{x} + x)^{12}$ |
| d) $(-4 + 3,72x)^9$       | i) $(3 \cos x - 2 \sin x)^7$    |
| e) $(x+1)^n$              | j) $(3x + \frac{4}{x})^n$       |

## 27. Binoomi $(x+1)^n$ arend.

### a) Binoomkordajate määramine.

Tuginedes binoomi astmete leitud arenditele, võime analoogia põhjal kirjutada  $n$  astme binoomi arendi korrastatud hulkkimena  $x$  astmete suhtes. Meil pole ainult teada, kuidas avaluvad arendi kordajad astendaja kaudu. Nii võime kirjutada, et

$$(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-2} x^2 + C_{n-1} x + C_n, \quad (\text{I})$$

us nn. binoomkordajad  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}, C_n$  tulevad määrata.

Binoomkordajate määramiseks kasutame tõsiasi, et esitatud võrdus peab kehtima  $x$  iga väärtuse korral.

Kui  $x = 0$ , siis

$$(0+1)^n = C_0 \cdot 0^n + C_1 \cdot 0^{n-1} + C_2 \cdot 0^{n-2} + \dots + C_{n-2} \cdot 0^2 + C_{n-1} \cdot 0 + C_n$$

a siit

$$1^n = C_n, \text{ s. t. et } C_n = 1.$$

See tulemus on täiesti kooskõlas varem vaadeldud juhtumiga, kus binoomi arendi viimaseks liikmeks oli alati 1.

Järgmised kordajad määrame tuletise kaasabil. Selleks võtame võrduse (I) mõlemast poolest tuletise. Teades, et  $(x+1)^n = n(x+1)^{n-1}$ , saame uue võrduse

$$n(x+1)^{n-1} = nC_0 x^{n-1} + (n-1)C_1 x^{n-2} + (n-2)C_2 x^{n-3} + \dots + 2C_{n-2} x + C_{n-1}. \quad (\text{II})$$

Võttes nüüd selles võrduses  $x = 0$ , saame et

$$C_{n-1} = n.$$

Järgmise kordaja määramiseks võtame tuletise võrdusest

(II), saame

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n(n-1)C_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)C_1x^{n-3} + \\ + (n-2)(n-3)C_2x^{n-4} + \dots + 2C_{n-2}.$$

Kui  $x = 0$ , siis

$$C_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nii edasi talitades leiame, et

$$C_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3};$$

$$C_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

.....

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k};$$

.....

$$C_{n-n} = C_0 = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} = 1.$$

b) Faktoriaali mõiste.

Järjestikuste naturaalarvude korrutist, milledest väiksem on 1, kirjutatakse üles eri sümboliga, nn. faktoriaali abil.

Nii tähistame

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!,$$

kus sümbolit  $n!$  loeme "n faktoriaal".

c) Binoomkordajate üldavaldis.

Laiendades binoomkordaja  $C_{n-k}$  avaldises lugejat ja nimetajat korrutisega

$$(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!,$$

saame

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4\dots k(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots\cdot 2\cdot 1}$$

Selle murru võime hoopis lühemalt üles kirjutada, kui kasutame faktoriaali sümboolit:

$$C_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Seega oleme saanud binoomi  $(x+1)^n$  arendi kordajate üldliikme, mis võimaldab leida kõiki teisi binoomkordajaid, kui  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

d) Binoomkordajate omadused.

Kasutades binoomkordajate üldavaldist, leiame binoomkordajad  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$ :

$$C_1 = C_{n-(n-1)} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n;$$

$$C_2 = C_{n-(n-2)} = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$C_3 = C_{n-(n-3)} = \frac{n!}{(n-3)!(n-n+3)!} = \frac{n!}{(n-3)! 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!};$$

.....

$$C_k = C_{n-(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Võrreldes kordajat  $C_k$  kordajaga  $C_{n-k}$  näeme, et

$$C_k = C_{n-k}$$

Seega,

1<sup>o</sup> binoomi  $(x+1)^n$  arendis on algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad võrdsed.

Siis on  $C_0 = C_n, C_1 = C_{n-1}, C_2 = C_{n-2}$  jne.

Eespool veendusime, et  $C_n = 1$ . Nüüd teame, et  $C_n = C_0$ .

Sellest järeldub, et

2<sup>o</sup> binoomi  $(x+1)^n$  arendis on esimese ja viimase liikme kordajad võrdsed ühega.

Nälgime ka, et  $C_{n-1} = n$ . Et aga  $C_{n-1} = C_1$ , siis

$3^0$  binoomi  $(x + 1)^n$  arendis on teise ja eelviimase liikme kordajad võrdsed binoomi astendajaga.

e) Binoomi  $(x + 1)^n$  arend.

Esitame nüüd binoomi  $(x + 1)^n$  arendi, asendades määramata kordajad määratud kordajatega.

$$(x + 1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} + \dots + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + nx + 1. \quad (III)$$

Ülesandeid.

114. 1) Esita binoomide  $(x + 1)^8$  ja  $(x + 1)^{15}$  arendid.

2) Esita binoomi  $(x + 1)^6$  arend juhul, kui  $x = 2$ .

3) Esita binoomi  $(x + 1)^5$  arend juhul, kui  $x = 3$ .

28. Binoomi  $(a + b)^n$  arend.

Tuginedes  $(x + 1)^n$  arendile leiame nüüd  $(a + b)^n$  arendi.

Lähtume samasusest

$$(a + b)^n = \left[ b \left( \frac{a}{b} + 1 \right) \right]^n = b^n \left( \frac{a}{b} + 1 \right)^n.$$

Edasi rakendame valemit (III):

$$(a + b)^n = b^n \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^n + n \left( \frac{a}{b} \right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^{n-3} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( \frac{a}{b} \right)^{n-k} + \dots + \frac{n(n-1)}{2!} \left( \frac{a}{b} \right)^2 + n \cdot \frac{a}{b} + 1 \right].$$

Avades sulud ja taandades, saame

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k +$$

$$+ \dots + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Viimast valemit nimetatakse Newtoni binoomvalemiks.

### 29. Newtoni binoomvalemi omadusi.

Et Newtoni binoomvalemil kohaselt on binoomi  $(a + b)^n$  arendis kordajad samad mis binoomi  $(x + 1)^n$  arendis, siis kehtivad siin needsamad juba tähele pandud omadused kordajate kohta.

1<sup>o</sup> Binoomkordajad on esitatavad Pascal'i kolmnurgana.

2<sup>o</sup> Binoomi arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asetsevad kordajad on võrdsed.

3<sup>o</sup> Binoomi arendi liikmete arv on binoomi astendajast ühe võrra suurem.

Võttes binoomvalemis  $a = b = 1$ , saame et

4<sup>o</sup> binoomkordajate summa on  $2^n$ .

Kontrolli seda omadust!

Kasutades võrdust  $(a - b)^n = [a + (-b)]^n$  saame binoomvalemil vahe jaoks. Tee seda!

Võttes nüüd  $a = b = 1$ , jõuame omaduseni

5<sup>o</sup> paarituarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summa võrdub paarisarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summaga.

Kontrolli seda omadust!

### Ulesandeid.

115. Esita järgmiste binoomide arendid.

a)  $(1 - s)^4$

d)  $(2 - a)^8$

b)  $(p + q)^5$

e)  $(3x + 4y)^6$

c)  $(u + \frac{1}{u})^{10}$

f)  $(x^2 + 2y^2)^4$

116. Leia järgmised astmed kuni neljanda kohani pärast koma, kasutades selleks binoomi arendist vajalikku arvu liikmeid.

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| a) $(1,1)^8$      | d) $(0,95)^6$     |
| b) $(1,05)^{12}$  | e) $(0,99)^5$     |
| c) $(1,002)^{10}$ | f) $(0,998)^{20}$ |

117. Leia järgmised astmed, kasutades Newtoni binoomvalemit.

- |           |                 |                |
|-----------|-----------------|----------------|
| a) $29^5$ | c) $(4 + 3)^6$  | e) $(a + b)^4$ |
| b) $99^3$ | d) $(6 - 52)^5$ | f) $(a - b)^4$ |

30. Ligikaudne valem  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ .

Seame ülesandeks esitada funktsioon  $(1 + x)^n$  ligikaudu lineaarse funktsioonina, eeldades, et  $n$  on naturaalarv ja  $x$  on absoluutväärtuselt väike arv.

Kasutades Newtoni binoomvalemit võime kirjutada:

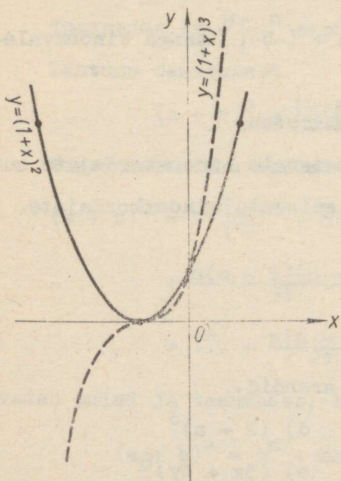
$$(1 + x)^n = 1 + nx + \dots + x^n.$$

Et  $x$  on absoluutväärtuselt väike arv ja seega tema astmed veelgi väiksemad, siis võime kirjutada:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx.$$

Funktsiooni  $y = (1 + x)^n$  graafikuks on parabool, mis läbib iga  $n$  korral punkte  $(-1; 0)$  ja  $(0; 1)$  (joon. 29).

Leiame selle parabooli puutuja tõusu punktis  $(0; 1)$ . Selleks avaldame funktsiooni tule-



Joon. 29

tise ja leiame selle väärtuse, kui  $x = 0$ :

$$y' = n(x + 1)^{n-1};$$

$$y' \Big|_{x=0} = n.$$

Seega on parabooli  $y = (1 + x)^n$  puutuja tõus kohal 0 võrdne  $n$ -ga.

Sirge  $y = 1 + nx$  tõus on samuti  $n$  ja ta läbib punkti  $(0; 1)$ . Seega on sirge  $y = 1 + nx$  parabooli  $y = (1 + x)^n$  puutu-  
jaks kohal 0.

Kasutades valemit  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , me asendame punkti  $(0; 1)$  lähemas ümbruses parabooli kaare tema puutuja lõiguga.

### 31. Valemi $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ viga.

Newtoni binoomvalemi kohaselt

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \alpha,$$

kus

$$\alpha = C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n.$$

Asendame siin kõik  $x$  astmed  $x^2$ -ga, siis

$$\alpha < (C_2 + C_3 + \dots + C_n) x^2.$$

Et binoomkordajate summa on  $2^n$ , s. t.

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = 2^n,$$

siis

$$\alpha < (2^n - n - 1) x^2.$$

Suurendades  $x^2$  kordajat 1 võrra, saame

$$\alpha < (2^n - n) x^2.$$

Seda võrratust kasutataksegi vea hindamiseks. Selle võrratuse abil määratakse, missuguste  $x$  väärtuste korral on ligikaudne valem kasutatav.

Olgu meil näiteks ligikaudne valem

$$(1 + x)^6 \approx 1 + 6x.$$

Siin on

$$\alpha < (2^6 - 6)x^2 = 58x^2.$$

Huvitagu meid, missuguste  $x$  väärtuste korral annab valem kolm õiget kümnendkohta. Selleks tuleb lahendada võrratus

$$58x^2 < 0,0005,$$

kust

$$|x| < \sqrt{\frac{0,0005}{58}} \approx 0,003.$$

### Ülesandeid.

118. Leia, missuguste  $x$  väärtuste korral annab

- ligikaudne valem  $(1 + x)^4 \approx 1 + 4x$  kaks õiget kümnendkohta,
- ligikaudne valem  $(1 + x)^8 \approx 1 + 8x$  neli õiget kümnendkohta,
- ligikaudne valem  $(1 + x)^5 \approx 1 + 5x$  kolm õiget kümnendkohta.

## VI. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL.

### 32. Funktsiooni diferentsiaali mõiste.

Joonisel 30 on esitatud funktsiooni  $y = f(x)$  graafik. Kohal  $x$  on sellele graafikule tõmmatud puutuja. Teame, et selle puutuja tõus on võrdne antud funktsiooni  $f(x)$  tuletisega, s. o.  $f'(x)$ -ga.

Muutugu  $x$   $\Delta x$  võrra. Funktsioon muutub selle tagajärjel  $\Delta y$  võrra.

Funktsiooni muuduks on sageli otstarbekas võtta mitte  $\Delta y$ , vaid teiega ligikaudu võrdne muut kuni puutujani, nn. diferentsiaal, mida tähistatakse  $dy$  (joon. 30).

Ligikaudne võrdus

$$\Delta y \approx dy$$

kehtib muidugi seda paremini, mida väiksem on  $\Delta x$ .

Joonisel 30 esitatud kolmnurga ABC abil põhjenda, et kehtib seos

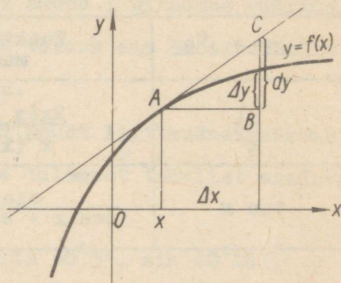
$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

### 33. Funktsiooni $y = x$ diferentsiaal.

Kui  $y = x$ , siis  $y' = 1$ . Järelikult

$$dy = 1 \cdot \Delta x.$$

Et  $y = x$ , siis  $dy = dx$ , millest järeldub, et



Joon. 30

$$dx = \Delta x.$$

Seetõttu võib funktsiooni diferentsiaali esitada kujus

$$dy = f'(x)dx.$$

### 34. Funktsiooni diferentsiaali kasutamine

#### ligikaudsel arvutamisel.

Nagu juba nimetatud, kasutatakse funktsiooni diferentsiaali funktsiooni muudu ligikaudse väärtusena. Seda põhjustab peamiselt funktsiooni muudu avaldise keerukus võrreldes diferentsiaali avaldisega. Toome mõned näited.

Funktsioon	Funktsiooni muut	Funktsiooni diferentsiaal
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2}$	$-\frac{2dx}{x^3}$
$\tan x$	$\frac{\sin \Delta x}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$

Kasutades seda tabelit, arvutame näiteks, kui suur on funktsiooni  $\frac{1}{x^2}$  muut, kui argument muutub väärtuselt 1 kuni väärtuseni 1,01.

Arvutame funktsiooni muudu:

$$-\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2} \Bigg|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0,01}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0,01 + (0,01)^2}{1^2 \cdot (1 + 0,01)^2} = \frac{0,0201}{1,0201} \approx 0,0197.$$

Arvutame funktsiooni diferentsiaali:

$$-\frac{2dx}{x^3} \Bigg|_{\substack{x=1 \\ dx=0,01}} = -\frac{2 \cdot 0,01}{1^3} = 0,02.$$

Nagu näeme, erineb funktsiooni diferentsiaal funktsiooni

muudu väärtusest 0,0003 võrra, mis praktiliselt ei oma mingit tähtsust.

Ülesandeid.

119. Avalda järgmiste funktsioonide muut ja diferentsiaal.

a)  $x^2$

d)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

b)  $4x^2 - 3x + 2$

e)  $x^{-3}$

c)  $\sin x$

f)  $x^3 + x^{-2}$

120.  $y = x^3 - x$ . Leia  $\Delta y$  ja  $dy$ , kui  $x = 2$  ja  $\Delta x = 1; 0,1; 0,01$ .

121. Leia funktsiooni  $y = \sin x$  muudu ligikaudne väärtus, kui  $x$  muutub  $30^\circ$  kuni  $30^\circ 1'$ . Millega võrdub  $\sin 30^\circ 1'$ ? Võrdle tulemust tabelist saadava tulemusega.

122. Leia funktsiooni  $y = \tan x$  muudu ligikaudne väärtus, kui  $x$  muutub  $45^\circ$  kuni  $45^\circ 10'$ . Võrdle tulemust tabelist saadava väärtusega.

123. Leia ligikaudne väärtus:  $\sin 60^\circ 3'$ ,  $\sin 60^\circ 18'$ ,  $\cos 45^\circ 2'$ ,  $\cos 30^\circ 4'$ . Võrdle tulemusi tabelist saadavate väärtustega.

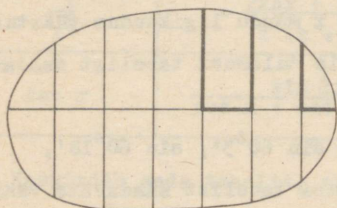
124. Arvuta funktsiooni diferentsiaali abil:

$$\sqrt{4,03}, \sqrt{25,1}, \sqrt{48,97}, \sqrt{0,98}.$$

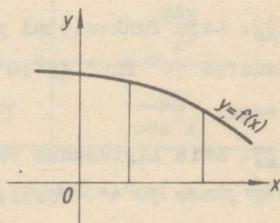
## VII. INTEGRAAL,

### 35. Kõverjoonse trapetsi pindala (I).

Iga kinnise kõveraga piiratud pinnatükk (joon. 31) saab tükeldada lihtsamateks kujunditeks. Need on täisnurksed trapetsid, mille haar on kõverjoon, ja kolmnurgad, mille üks külg on kõverjoon. Et kolmnurka võib vaadelda trapetsi erijuhuna (üks alus on kõrduvad nulliks), siis nimetame neid kujundeid ühise nimetusega kõverjoonseteks trapetsiteks.



Joon. 31



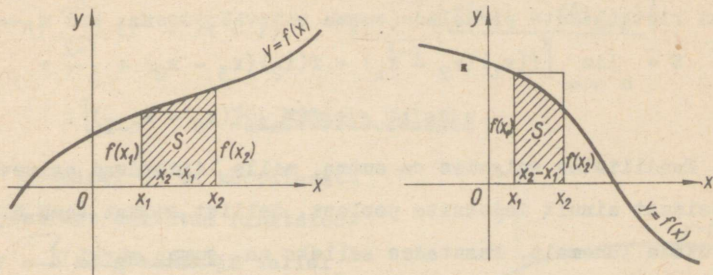
Joon. 32

Paigutame kõverjoonse trapetsi koordinaatteljestikku nii nagu näidatud joonisel 32.

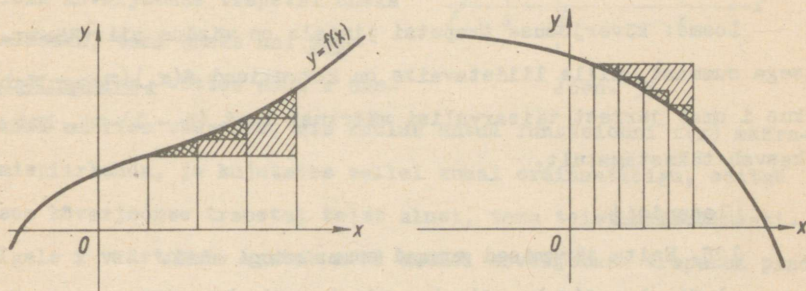
Et kõverjoonsel trapetsil on üks külg kõverjoon, siis tuleb trapetsi pindala defineerida piirväärtusena, nii nagu me seda ringi puhul tegime.

Kõverjoonse trapetsi kõverjoonne haar on osa mingi funktsiooni  $y = f(x)$  graafikust. Trapetsi alused on seega  $f(x_1)$  ja  $f(x_2)$  (joon. 33). Kui võrdleme kõverjoonse trapetsi pindala  $S$

ristküliku pindalaga  $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$ , siis  $S > f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$ , kui  $f(x)$  on selles vahemikus kasvav, ja  $S < f(x_1)(x_2 - x_1)$ , kui  $f(x)$  on selles vahemikus kahanev.



Joon. 33



Joon. 34

Joonisel 34 on antud kõverjoonne trapets täkeldatuna kitsamateks kõverjoonseteks trapetsiteks. Kui neid võrrelda ristkülikutega, nii nagu joonisel 34 näidatud, siis antud kõverjoonse trapetsi pindala on ikkagi kas suurem või väiksem nende ristkülikute pindalade summast, kuid erinevus on juba märksa väiksem.

On ilmne, et mida kitsamateks kõverjoonseteks trapetsiteks me antud kõverjoonse trapetsi jaotame, seda väiksema vea

me teeme, kui lähendame antud kõverjoonse trapetsi pindala ristkülikute pindalade summaga.

Defineerimegi kõverjoonse trapetsi pindala temasse kujundatud ristkülikute pindalade summa piirväärtusena, kui  $n \rightarrow \infty$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \right].$$

Kandilistes sulgudes on summa, mille liidetavad erinevad üksteisest ainult indeksite poolest. Sellist summat saab üles kirjutada lühemalt, kasutades selleks nn. summa märki  $\sum$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Loeme: kõverjoonse trapetsi pindala on võrdne piirväärtusega summast, mille liidetavaiks on korrutised  $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ , kus  $i$  omab järjest täisarvulisi väärtusi 1-st  $(n - 1)$ -ni, kui  $n$  kasvab tõkestamatult.

### Ülesandeid.

125. Esita järgmised summad summa märgi abil.

a)  $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)$

b)  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$

c)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$

d)  $(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_k + x_{k+1})$

e)  $\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

126. Esita järgmised summad ilma summa märgita.

a)  $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i)^i$

b)  $\sum_{i=2}^5 \frac{i+2}{i}$

$$c) \sum_{i=3}^8 \frac{3-i^2}{1-i^2}$$

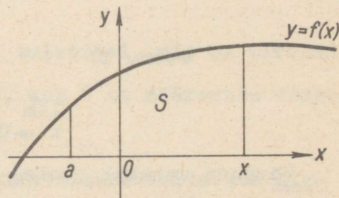
$$e) \sum_{i=1}^n [f(x_i)]^2 (x_{i+1} - x_i)$$

$$d) \sum_{i=1}^4 (i^2 + 2i + 1)$$

$$f) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right]^2$$

### 36. Pindala tuletis.

Joonisel 35 on koordinaat-  
teljestikus esitatud funktsioo-  
ni  $y = f(x)$  graafik ja sellel  
ordinaatlõik kohal  $a$ . Olgu see  
lõik kõverjoonse trapetsi üheks  
aluseks, tema üheks nn. äär-  
ordinaadiks. Võttes nüüd  $x$  üks-



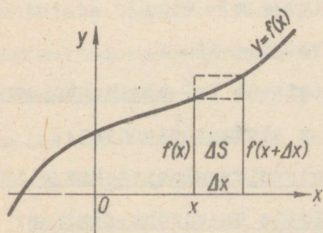
Joon. 35

kõik millise väärtuse, mis kuulub antud funktsiooni  $f(x)$  määra-  
mispiirkonda, ja kujutades sellel kohal ordinaatlõigu, esitab  
see kõverjoonse trapetsi teist alust, tema teist äärordinaati.  
Igale  $x$  väärtusele vastab nüüd kindel kõverjoonse trapetsi pind-  
ala (joon. 35). Seega võime öelda, et

kõverjoonse trapetsi pindala on argumenti funktsioon.

Tähistades kõverjoonse trapet-  
si pindala tähega  $S$ , võime kirjuta-  
da, et  $S = S(x)$ .

Muutugu argumenti väärtus  $x$   
 $\Delta x$  võrra, selle tagajärjel muutub  
kõverjoonse trapetsi pindala  $\Delta S$  võr-  
ra. Jooniselt 36 näeme, et



Joon. 36

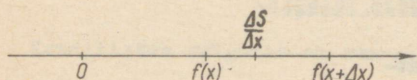
$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x)\Delta x.$$

Jagame need väärtused  $\Delta x$ -ga. Et  $\Delta x > 0$ , siis jäävad võrra-

tuse märgid samapidisteks:

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Seega jääb suhe  $\frac{\Delta S}{\Delta x}$  väärtuste  $f(x)$  ja  $f(x + \Delta x)$  vahele (joon. 37).



Joon. 37

Kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis

$f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$ . Et suhe  $\frac{\Delta S}{\Delta x}$  jääb  $f(x)$  ja  $f(x + \Delta x)$  vahele, siis ka  $\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ ,

s. t.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Võrduse vasakul poolel on funktsiooni  $S(x)$  tuletis. Seega,

$$S'(x) = f(x).$$

Kõverjoonse trapetsi pindala tuletis on võrdne selle trapetsi äärordinaadiga kohal  $x$ .

### 37. Algfunktsioon.

Et  $f(x)$  on meil teada (joonestasime ju  $y = f(x)$  graafiku!), siis kõverjoonse trapetsi pindala leidmiseks  $x$  funktsioonina tuleb leida niisugune funktsioon, mille tuletis on  $f(x)$ .

Olgu näiteks  $f(x) = 3x^2$ , siis  $S(x) = x^3$  või

$$f(x) = \cos x, \text{ siis } S(x) = \sin x.$$

Funktsiooni  $x^3$  nimetatakse funktsiooni  $3x^2$  algfunktsiooniks ja funktsiooni  $\sin x$  funktsiooni  $\cos x$  algfunktsiooniks.

Antud funktsiooni  $f(x)$  algfunktsiooniks nimetatakse niisugust funktsiooni  $F(x)$ , mille tuletis on võrdne  $f(x)$ -ga,

s. t.  $F'(x) = f(x)$ .

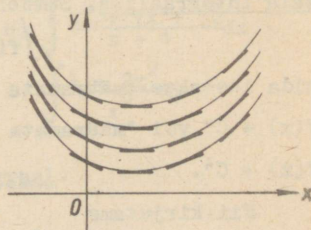
### 38. Määramata integraal.

Funktsioonil  $3x^2$  on aga veel teisi algfunktsioone peale  $x^3$ . Näiteks ka funktsioonide  $x^3 - 3$ ,  $x^3 + 100$  tuletised on võrdsed avaldisega  $3x^2$ . Üldiselt on kõigi kujus  $x^3 + C$  avalduvate funktsioonide tuletis  $3x^2$ , kus  $C$  on konstant, millel võib olla mis tahes reaalarvuline väärtus. Seda konstanti nimetatakse määramata konstandiks.

Kõigi niisuguste funktsioonide tuletised, mis on võrdsed  $\cos x$ -ga, avalduvad kujus  $\sin x + C$ , kus  $C$  on määramata konstant.

Avaldised  $x^3 + C$  ja  $\sin x + C$  nimetatakse vastavate algfunktsioonide üldavaldiseks.

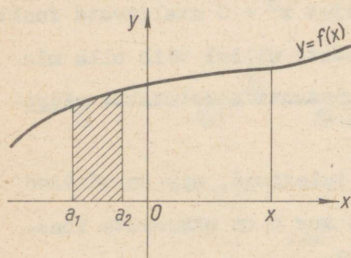
Et antud funktsioonil on algfunktsioone lõpmata palju, seda saab näidata ka geomeetriliselt. Nagu teada, tähendab funktsiooni tuletis geomeetriliselt tema graafiku puutuja tõusu vastavas punktis. Samal argumendi väärtusel on aga kõigi niisuguste funktsioonide nagu  $x^3 + C$  või  $\sin x + C$  graafikute puutujate tõusud võrdsed, s. t. et algfunktsioonide graafikud on argumendi iga väärtuse korral n. ö. paralleelsed. Joonisel 38 on esitatud ühe funktsiooni algfunktsioonide graafikuid.



Joon. 38

Võrduse  $S'(x) = f(x)$  tuletamine ei ole seotud kõverjoonse trapetsi esimese aluse asukohaga. Seetõttu ei määragi seos  $S'(x) = f(x)$  kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni  $S(x)$  ühe-

selt, vaid lõpmata mitmesena, sest ta sisaldab liidetavana ühe määramata konstandi. Kõverjoonsete trapetsite pindalad erineva esimese aluse asukohaga erinevad üksteisest konstantse pindala võrra, mis on võrdne nende esimese aluse asukohtade vahelise



Joon. 39

kõverjoonsete trapetsi pindalaga.

Joonisel 39 on esimene alus fikseeritud kohal  $a_1$  ja  $a_2$ . Need kaks trapetsit erinevad teineteisest joonisel viirutatud pindala võrra. Seni, kui esimese aluse asukoht pole fikseeritud, on see konstant määramata.

Tähistame funktsiooni  $f(x)$  algfunktsiooni  $F(x)$ -ga, siis on algfunktsioonideks ka funktsioonid  $F(x) + C$ , kus  $C$  on määramata konstant. Avaldist  $F(x) + C$  nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  või ka diferentsiaali  $f(x)dx$  algfunktsioonide üldavaldiseks ehk määramata integraaliks. Sümbolites kirjutatakse see üles järgmiselt:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

mida loetakse "määramata integraal funktsioonist  $f(x)$  on  $F(x) + C$ " või "määramata integraal diferentsiaalidest  $f(x)dx$  on  $F(x) + C$ ".

Nii kirjutame

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

ja

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Ülesandeid.

127. Leia järgmiste funktsioonide kolm algfunktsiooni.

- a)  $\sin x$                       c)  $x$                       e)  $\frac{1}{\cos^2 x}$   
 b)  $3$                               d)  $\frac{x^2}{2}$                       f)  $\frac{1}{\sin^2 x}$

128. Lahenda määramata integraalid.

- a)  $\int 3x^2 dx$                       d)  $\int \frac{dx}{x^2}$                       g)  $\int x^n dx$   
 b)  $\int x^2 dx$                       e)  $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$                       h)  $\int \frac{dx}{x^3}$   
 c)  $\int x^3 dx$                       f)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$                       i)  $\int \sin x dx$

129. Lahenda määramata integraalid.

- a)  $\int 4x dx$                       d)  $\int (x + \sin x) dx$   
 b)  $\int \frac{1}{2} x^2 dx$                       e)  $\int (1 + \frac{1}{x^2}) dx$   
 c)  $\int \frac{3}{\cos^2 x} dx$                       f)  $\int (\sin x + \cos x) dx$

130. Lahenda määramata integraalid.

- a)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$                       d)  $\int \frac{\sqrt{u^3} + 1}{\sqrt{u} + 1} du$   
 b)  $\int (\frac{1-z}{z})^2 dx$                       e)  $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 4} dx$   
 c)  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$                       f)  $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2} dx$

39. Määratud integraal.

Olgu kõverjoonse trapetsi esimene alus fikseeritud kohal  $x = a$ . Nüüd vastab igale argumenti väärtusele kindel kõverjoonse trapetsi pindala, s. t. et konstant, mis enne oli määramata, peab olema nüüd määratav. Lelame selle.

Konstandil on nüüd üks kindel väärtus sõltumata sellest, missugusel argumenti väärtusel on võetud teine alus. Valime kõigist võimalikest  $x$  väärtustest selle, millele vastavat pind-

ala suurust me teame. See on, kui teine alus ühtib esimesega, s. t. kui  $x = a$ . Siis on kõverjoonse trapetsi pindala 0, s. t. et

$$F(a) + C = 0$$

ja siit

$$C = -F(a).$$

Märgime integraali sümboli otste juurde need argumentide väärtused, millele vastavate ordinaatlõikude vahel asub vaadeldav kõverjoonne trapets. Neid väärtusi nimetatakse ka integraali rajadeks. Seega

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

ehk

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Anneme nüüd ka  $x$ -le kindla väärtuse. Siis peab vastava kõverjoonse trapetsi pindala avalduma samuti kindla väärtusena. Tõepoolest, asendades viimastes võrdustes  $x = b$ , saame

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ehk

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

Integraale, millel on fikseeritud rajad, nimetatakse määratud integraalideks.

#### 40. Newton-Leibnizi valem.

Seost

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

kus  $F'(x) = f(x)$ , nimetatakse Newton-Leibnizi valemiks. See va-

lem annab määratud integraalide arvutamise eeskirja. Algfunktsiooni järel kasutatakse rajade märkimiseks püstkriipsu. Näiteks

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3},$$

mis tähendab, et parabooli  $y = x^2$  alune pindala argumenti väärtustele 1 ja 3 vastavate ordinaatlõikude vahel on  $8\frac{2}{3}$  ruutühikut.

### Ülesandeid.

131. Arvuta järgmised integraalid.

a)  $\int_0^{10} x dx$

d)  $\int_0^a (3x^2 - x + 1) dx$

g)  $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

b)  $\int_{\frac{a}{2}}^a x^2 dx$

e)  $\int_1^{2,5} (2x + 1)^2 dx$

h)  $\int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx$

c)  $\int_2^3 6x dx$

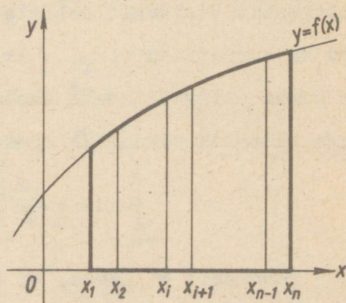
f)  $\int_0^2 x^3 dx$

1)  $\int_{0,8}^{1,2} (x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}) dx$

### 41. Kõverjoonse trapetsi pindala (II).

Eespool oleme kaht erinevat teed mööda jõudnud kõverjoonse trapetsi pindalani. Joonisel 40 esitatud kõverjoonse trapetsi pindala avaldub piirväärtusena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$



Joon. 40

(vt. lk. 90) ehk tähistades va-

hesid  $x_{i+1} - x_i$  lühemalt sümboliga  $\Delta x_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

Sama pindala avaldub ka määratud integraalina

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Seega,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

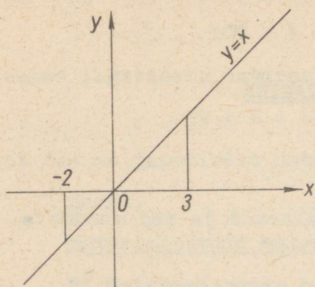
Selle seose tundmine osutub edaspidi väga kasulikuks, sest mitmed küsimused, näiteks ruumala valemite tuletamisel, taanduvad niisugusele summa piirväärtusele. Teades, et see on võrdne määratud integraaliga, jõuamegi kiiresti vastuseni.

Viimasest võrdusest tuleneb ka üks omadus, mida määratud integraalide arvutamise juures tuleb arvestada siis, kui integreerimisrajade vahelises piirkonnas funktsiooni graafik lõikab x-telge. Nimelt, kui funktsiooni graafik on allpool x-telge, siis on funktsiooni väärtused negatiivsed; kui funktsiooni graafik on ülalpool x-telge, siis on funktsiooni väärtused positiivsed. Vastavalt sellele tulevad negatiivsed või positiivsed ka korrutised  $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ . Nende korrutiste summaks ja selle summa piirväärtuseks saame siis mitte selle kõvera ja x-teljega määratud pindalade summa, vaid vahe

$$\int_{-2}^3 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Jooniselt 41 näeme, et  $\frac{9}{2}$  on positiivse osa pindala ja 2 negatiivse osa pindala. Nii et vastus esitab nende pindalade vahet.

Juhul, kui funktsiooni graafik lõikab x-telge, siis on



Joon. 41

otstarbekas määrata pindala eraldi allpool  $x$ -telge ja ülalpool  $x$ -telge ning siis tulemused liita.

Ülesandeid.

132. Leia kujundi pindala, mida piiravad funktsiooni  $y = x^2 - 4x + 5$  graafik,  $x$ -telg ja sirged  $x = 3$  ja  $x = 5$ .

133. Leia parabooliga  $y = \frac{x^2}{2}$ , sirgetega  $x = 3$  ja  $x = 6$  ning  $x$ -teljega piiratud kujundi pindala.

134. Leia segmendi pindala, mille sirge  $y = 2x + 3$  lõikab paraboolist  $y = x^2$ .

135. Leia parabooli  $y = x^2$  segmendi pindala, kui segmendi kõrgus on 8.

136. Leia kõveratega  $y = \frac{1}{4}x^2$  ja  $y = 3 - \frac{x^2}{2}$  piiratud pindala.

137. Leia kõveratega  $y = x^2$  ja  $y = \sqrt{x}$  piiratud pindala.

## VIII. ARVU MÕISTE ÜLDISTAMINE.

### 42. Naturaalarvud.

Arvud 1, 2, 3, 4, 5, ... on naturaalarvud ja nad moodustavad naturaalarvude hulga.

Tutvume naturaalarvude hulga omadustega.

1<sup>o</sup> a) Kahe naturaalarvu liitmise tulemuseks on jälle naturaalarv, näiteks:

$$3 + 16 = 19, \quad 5639 + 872 = 6511.$$

Kuna iga kahe naturaalarvu summa on ka naturaalarv, siis ütleme, et

naturaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

b) Korrutades kaht naturaalarvu, saame tulemuseks jälle naturaalarvu, näiteks:

$$15 \cdot 63 = 945, \quad 413 \cdot 2675 = 1\,104\,775.$$

Et iga kahe naturaalarvu korrutis on naturaalarv, siis

naturaalarvude hulgas on teostatav korrutamise tehe.

c) Kahe naturaalarvu vahe ei pruugi olla naturaalarv. Kui näiteks lahutamisel

$$36 - 24 = 12$$

on vahe naturaalarv, siis lahutamisel

$$92 - 100 = -8$$

vahe pole naturaalarv.

Seetõttu me ütleme, et

naturaalarvude hulgas pole lahutamise tehe alati teostatav.

d) Teostades jagamisi

$$100 : 4 = 25, \quad 846 : 9 = 94,$$

saame jagatiseks naturaalarvu, kuid jagades näiteks

$$39 : 6 = 6\frac{1}{2} \quad \text{või} \quad 8 : 9 = 0, (8)$$

ei saa me jagatiseks naturaalarvu.

Seega,

naturaalarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

2<sup>o</sup> Naturaalarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv 1, kuid suurimat arvu pole. Tõepoolest, ükskõik kui suure naturaalarvu me ka võtaksime, ikkagi pole see suurim, sest liites selle arvuga näiteks ühe, saame temast suurema naturaalarvu.

Seega,

naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3<sup>o</sup> Olgu antud mõned naturaalarvud:

5; 6722; 382; 163 480; 16; 999 888 777; 59; 451.

Järjestame need arvud suuruse järgi:

5; 16; 59; 382; 451; 6722; 163 480; 999 888 777.

Kui oleks antud kui tahes palju naturaalarve, ikka saab neid järjestada suuruse järgi. Lühidalt,

naturaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

4<sup>o</sup> Olgu antud mingi naturaalarv, näiteks 495. Sel juhul on meil teada ka naturaalarvude jadas temale eelnev naturaalarv (494) ja temale järgnev naturaalarv (496). Kui antud naturaalarvuks on  $n$ , siis temale eelneb naturaalarvude jadas arv  $n - 1$  ja järgneb  $n + 1$ .

Arvu  $a$  nimetatakse antud arvuhulgas arvu  $b$  naaberarvuks, kui arvude  $a$  ja  $b$  vahel ei ole ühtegi sellesse arvuhulka kuuluvat arvu.

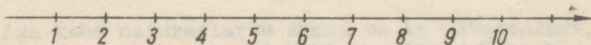
Nii on arvud  $n - 1$  ja  $n + 1$  naturaalarvude hulgas arvu  $n$  naaberarvudeks.

Seega,

igal naturaalarvul (välja arvatud arv 1) on kaks kindlat naaberarvu; arvul 1 on üks naaberarv (2).

5<sup>o</sup> Igale naturaalarvule vastab arvteljel kindel punkt (joon. 42). Need punktid ei asetse tihedalt üksteise kõrval, vaid iga kahe punkti vahel on teatud vahe. Seetõttu öeldaksegi, et

naturaalarvude hulk on diskreetne<sup>1)</sup>.



Joon. 42

#### 43. Täisarvud.

Arvuhulga laiendamist teostame eesmärgiga saada niisugune uus arvuhulk, milles on teostatav tehe, mis esialgses hulgas pole teostatav. Nii näiteks, kui tahame laiendada naturaalarvude hulka sellise arvuhulgani, milles lahutamise tehe oleks alati teostatav, siis tuleb juurde võtta arv 0, et oleks võimalik arvutada kahe võrdse arvu vahet, ja veel arvud  $-1, -2, -3, \dots$ , et väiksemast arvust saaks lahutada suuremat.

Naturaalarvude hulga laiendamine täisarvude hulgaks

$\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

toimubki eesmärgiga saada arvuhulk, milles peale liitmise ja

---

1) diskreetne (lad. k. discretus) tähendab eraldatud, hõre.

korrutamise ka lahutamise tehe on alati teostatav.

Tutvume täisarvude hulga omadustega.

1<sup>o</sup> a) Osutub, et uues arvuhulgas ei ole mitte ainult võimalik iga kahe naturaalarvu lahutamine, vaid ka uusi juurdevõetud arve liites, lahutades ja korrutades saame alati täisarvu, näiteks

$$(-2) + (-4) = -6; \quad (-2) + 4 = 2;$$

$$(-10) - (-3) = -7; \quad (-10) - 3 = -13;$$

$$(-4) \cdot (-3) = 12; \quad (-4) \cdot 3 = -12.$$

Seega,

täisarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise ja korrutamise tehe.

b) Jagades täisarvu täisarvuga võib jagatiseks olla täisarv või mitte.

Näiteks:

$$(-16) : (-8) = 2;$$

$$(-5) : (-6) = \frac{5}{6}.$$

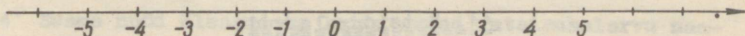
Seega,

täisarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

2<sup>o</sup> Et juba naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve, nüüd aga lisandub neile veel lõpmata palju negatiivseid arve, siis

täisarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Kas täisarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv?



Joon. 43

Selgita näidete ja joonise 43 abil, et ka täisarvude hul-

gas kehtivad järgmised omadused:

3<sup>o</sup> täisarvud on järjestatavad suuruse järgi,

4<sup>o</sup> igal täisarvul on täisarvude hulgas kaks kindlat naaberarvu,

5<sup>o</sup> täisarvude hulk on diskreetne.

Küsimusi ja ülesandeid.

138. Nimeta 10 naturaalarvu. Kirjuta need suuruse järgi.

139. Missugustele naturaalarvudele on arv  $n$  naaberarvuks?

140. Missugustele täisarvudele on arv 0 naaberarvuks?

141. Kirjuta üles naturaalarvude

10 400; 1 001 000; 3 040 500; 1 000 100

naaberarvud ja järjestata need suuruse järgi.

142. Leia ülesandes 141 antud arvude summa ja kirjuta üles selle naaberarvud.

143. Nimeta 10 täisarvu. Järjestata need suuruse järgi.

144. Kirjuta üles täisarvude

30 401; -41 000; 1 800 100; -190 001

naaberarvud ning järjestata antud ja üleskirjutatud arvud suuruse järgi.

145. Leia ülesandes 144 antud arvude summa ja kirjuta üles selle arvu naaberarvud.

146. Leia ülesandes 141 ja ülesandes 144 antud vastavate arvude vahed ning kirjuta üles nende arvude naaberarvud. Järjestata need arvud suuruse järgi.

44. Ratsionaalarvud.

Et saada arvuhulk, milles ka jagamine on teostatav, laiendatakse täisarvude hulka murdarvudega; saadakse ratsionaalarvu-

de hulk.

Iga ratsionaalarvu saab kirjutada taandatud murruna  $\frac{a}{b}$ , kus  $a$  ja  $b$  on täisarvud ja  $b \neq 0$ . Kui ratsionaalarv on täisarv, siis  $b = 1$ .

Tutvume ratsionaalarvude hulga omadustega.

1<sup>o</sup> Kahe ratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis on ratsionaalarv (jagatis muidugi sel juhul, kui jagamisel on mõte, s. t. kui jagaja ei ole null).

Näiteks,

$$\frac{3}{4} + \frac{15}{8} = \frac{21}{8};$$

$$\frac{4}{3} - \frac{11}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$8 \cdot \frac{6}{11} = \frac{48}{11};$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right) : 4 = -\frac{5}{24}.$$

Seega,

ratsionaalarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

2<sup>o</sup> Et nüüd on täisarvude hulga, mis sisaldab lõpmata palju arve, juurde lisatud lõpmata palju uusi arve - murde, siis ka

ratsionaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Selgita näidete abil, et ka ratsionaalarvude hulgas kehtib omadus:

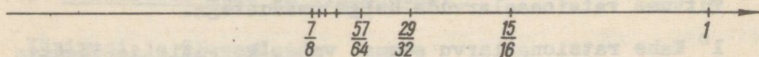
3<sup>o</sup> ratsionaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

4<sup>o</sup> Seame nüüd ülesandeks leida antud ratsionaalarvu naaberarve.

Olgu näiteks antud arv  $\frac{7}{8}$ , siis temale järgnevakts ratsio-

naalarvuks ei ole  $\frac{8}{8} = 1$ , sest  $\frac{7}{8}$  ja 1 vahel asetseb näiteks arv  $\frac{15}{16}$  (joon. 44):

$$\frac{7}{8} < \frac{15}{16} < 1.$$



Joon. 44

Kuid ka  $\frac{15}{16}$  ei ole  $\frac{7}{8}$ -le järgnev ratsionaalarv, sest nende vahel asetseb näiteks arv  $\frac{29}{32}$ :

$$\frac{7}{8} < \frac{29}{32} < \frac{15}{16}.$$

Samuti jätkates võime kirjutada:

$$\frac{7}{8} < \frac{57}{64} < \frac{29}{32},$$

$$\frac{7}{8} < \frac{113}{128} < \frac{57}{64} \text{ jne.}$$

Nii võime lõputult jätkata arvule  $\frac{7}{8}$  järgneva ratsionaalarvu otsimist, kuid me ei leia seda, sest ikka võib üles kirjutada ratsionaalarvu, mis on küll suurem kui  $\frac{7}{8}$ , kuid samal ajal ka väiksem ükskõik kui vähe  $\frac{7}{8}$ -st erinevast suuremast arvust.

Täpselt samuti on tulemuseta antud ratsionaalarvule eelneva arvu otsimine.

Seega paisutas täisarvude hulga lemurdarvude juurdelisamine arvuhulga nii suureks, et

ratsionaalarvude hulgas pole võimalik kindlaks määrata naaberarve

ehk teisiti,

iga kahe ratsionaalarvu vahel on lõpmata palju ratsionaalarve.

5° Kui esitada arvteljel ratsionaalarvudele vastavad punktid, siis asetsevad need seal tihedalt üksteise kõrval. Seetõttu öeldakse, et

ratsionaalarvude hulk on tihe.

Ülesandeid.

147. a) Kirjuta 3 kümnendmurruna avalduvat ratsionaalarvu, 3 hariliku murruna avalduvat ratsionaalarvu, 3 täisarvuna avalduvat ratsionaalarvu, 3 naturaalarvuna avalduvat ratsionaalarvu.

b) Järjesta need arvud suuruse järgi.

c) Leia nende arvude summa.

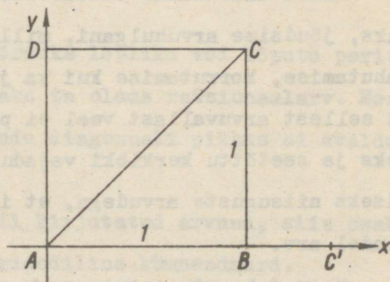
45. Ratsionaalarvude hulga laiendamise vajadus.

Osutub, et ratsionaalarvudele vastavad punktid ei kata arvtelge täielikult. Arvteljel leidub punkte, millele ei vasta ühtki ratsionaalarvu. Tõestame seda.

Olgu antud koordinaatteljestikus ruut, mille tipud asetsevad punktides  $A(0; 0)$ ,

$B(1; 0)$ ,  $C(1; 1)$ ,  $D(0; 1)$

(joon. 45). Asetame sirgkõõru punkti  $A$  ja kanname kõõru  $AC$   $x$ -teljele, saame punkti  $C'$ . Väidame, et punktile  $C'$  ei vasta ühtki ratsionaalarvu.



Joon. 45

Tõestame vastuväiteliselt.

Oletame, et leidub niisugune ratsionaalarv, s. o. taandatud murd  $\frac{a}{b}$ , mis esitab ühikruudu diagonaali pikkust.

Pütagorase teoreemi kohaselt on siis  $(\frac{a}{b})^2 = 1 + 1$  ja siit

$$a^2 = 2b^2.$$

Et ainult paarisarvu ruut on paarisarv, siis peab a olema paarisarv. Olgu  $a = 2m$ . Asendades saame

$$4m^2 = 2b^2$$

ja siit

$$2m^2 = b^2.$$

Sellest võrdusest järeldub omakorda, et b peab olema paarisarv. Olgu  $b = 2n$ . Siis on aga murd

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n}$$

taanduv, mis on vastuolus eeldusega.

Seega oletus, et leidub ratsionaalarve, millele vastab x-teljel punkt C', viib vastuolule.

Järelikult ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mille abil saaks avaldada ühikruudu diagonaali pikkust.

#### 46. Irratsionaalarvud.

Olles laiendanud täisarvude valla ratsionaalarvude val- laks, jõudsime arvuhulgani, milles on teostatav nii liitmise, lahutamise, korrutamise kui ka jagamise tehe. Samas aga ilmnes, et sellest arvuvallast veel ei piisa kõigi pikkuste avaldamiseks ja seetõttu kerkibki vajadus arvuvalla edasiseks laiendamiseks niisuguste arvudega, et igale arvtelje punktile vastaks kindel arv.

Nagu juba nimetatud, saab ratsionaalarve esitada kujul  $\frac{a}{b}$ , kus a ja b on täisarvud ja  $b \neq 0$ . Iga harilikku murdu on aga

võimalik esitada kümnendmurruna, kusjuures see kümnendmurd on kas lõplik või lõputu perioodiline. Näiteks väljenduvad murrud  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{14}{5}$  lõplike kümnendmurdudena.

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{ja} \quad \frac{14}{5} = 2,8,$$

murrud  $\frac{4}{9}$  ja  $\frac{16}{7}$  aga lõputute perioodiliste kümnendmurdudena

$$\frac{4}{9} = 0,(4) \quad \text{ja} \quad \frac{16}{7} = 2,(285714).$$

Seega,

ratsionaalarvud väljenduvad kas täisarvudena, lõplike kümnendmurdudena või lõputute perioodiliste kümnendmurdudena.

Arvuvalla edasiseks laiendamiseks on niisiis reserv olemas - lõputud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Ühikruudu diagonaali pikkuseks saame  $\sqrt{2}$  (joon. 45). Kui hakkame seda ruutjuurt arvutama, saame

$$\sqrt{2} = 1,414213562373\dots$$

Seda juurimisprotsessi saab aga jätkata. Tekib küsimus: kas see juurimisprotsess võib lõppeda, s. t. kas  $\sqrt{2}$  võib võrduda lõpliku kümnendmurruga või kas saabub koht, millest alates numbrid hakkavad korduma, s. t. kas  $\sqrt{2}$  võib võrduda lõputu perioodilise kümnendmurruga?

Vastus on eitav. Kui  $\sqrt{2}$  võrduks lõpliku või lõputu perioodilise kümnendmurruga, siis peaks ta olema ratsionaalarv. Eespool tõestasime aga, et ühikruudu diagonaali pikkus ei avaldu ratsionaalarvuna.

Et aga  $\sqrt{2}$  avaldub koma abil kirjutatud arvuna, siis saab see olla ainult lõputu mitteperioodiline kümnendmurd.

Lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena avalduvad näiteks  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt[3]{7}$ ;  $\sin 16^\circ$ ;  $\tan 382^\circ$ ;  $\log 4,32$ ;  $\pi$  jne.

Kõiki neid arve, mis avalduvad lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks.

Näigime, et irratsionaalarvule  $\sqrt{2}$  vastas arvteljel kindel punkt. Saab näidata, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel kindel punkt ning et

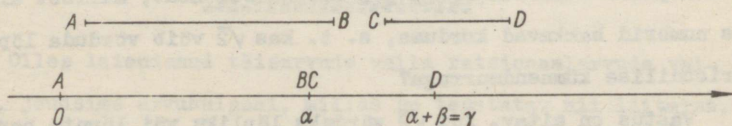
arvtelje igale punktile vastab kas kindel ratsionaalarv või kindel irratsionaalarv.

#### 47. Reaalarvud.

Ratsionaalarvud koos irratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude hulga.

Tutvume reaalarvude hulga omadustega.

1<sup>o</sup> a) Et igale reaalarvule vastab arvteljel kindla pikkusega lõik, siis kahe reaalarvu summa all mõistame niisuguse lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude liitmisel.



Joon. 46

Asetame reaalarvule  $\alpha$  vastava lõigu AB arvteljele nii, et AB alguspunkt A ühtib arvtelje nullpunktiga (joon. 46). Teisele reaalarvule  $\beta$  vastava lõigu CD asetame arvteljele nii, et selle alguspunkt C ühtiks esimese lõigu lõpp-punktiga B. Teise lõigu lõpp-punktile D vastav reaalarv  $\gamma$  on siis antud lõikudele vastavate reaalarvude summaks, s. t.

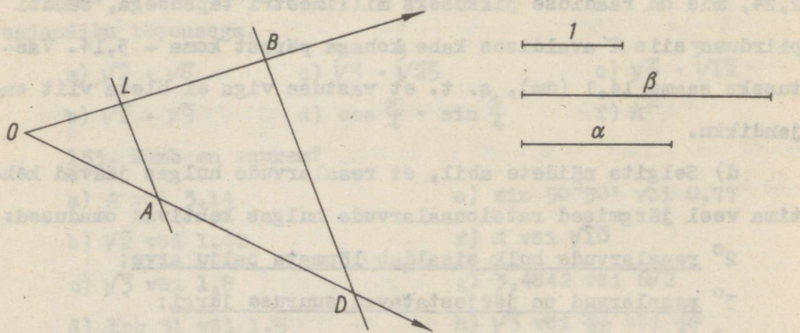
$$\alpha + \beta = \delta.$$

Niisiis,

reaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

b) Kahe reaalarvu korrutise all mõistame niisuguse lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude korrutamisel.

Lõikuga kaks arvtelge nii, et lõikepunktis on nende mõlema alguspunktid (joon. 47). Ühele teljele kanname ühikuga võrdse lõigu OL ja reaalarvule  $\beta$  vastava lõigu OB. Teisele teljele kanname reaalarvule  $\alpha$  vastava lõigu OA. Ühendame punktid L ja A ning tõmbame punktist B lõiguga LA paralleelse lõigu BD. Lõik OD ongi reaalarvule  $\alpha\beta$  vastav lõik.



Joon. 47

Tõepoolest, et kolmnurgad OLA ja OBD on sarnased, siis

$$\frac{OB}{OL} = \frac{OD}{OA}.$$

Asendades siin  $OB = \beta$ ,  $OL = 1$  ja  $OA = \alpha$ , saame

$$\beta = \frac{OD}{\alpha},$$

$$OD = \alpha\beta.$$

kust

Seega,

reaalarvude hulgas on teostatav korrutamise tehe.

c) Näita, et

reaalarvude hulgas on teostatav lahutamise ja jagamise tehe.

Lõputu mitteperioodilise kümnendmurru väljakirjutamine on võimatu. Seega, kui irratsionaalarvud on esitatud lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, siis ei saa nendega tehteid sooritada täpselt, vaid tuleb piirduda nende ligikaudsete väärtustega selles ulatuses, mis praktiliselt vajalikuks osutub. Näiteks kui on ülesandeks leida ringjoone pikkus  $2\pi r$  ja on teada, et  $r = \sqrt{5}$  dm, siis arvutamisel võime piirduda väärtusega 2,24, mis on raadiuse pikkuseks millimeetri täpsusega, samuti piirdume siis  $\pi$  avaldises kahe kohaga pärast koma - 3,14. Vastuseks saame 14,1 (dm), s. t. et vastuse viga ei ületa viit sajandikku.

d) Selgita näidete abil, et reaalarvude hulgas jäävad kehtima veel järgmised ratsionaalarvude hulgas kehtivad omadused:

2<sup>o</sup> reaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve;

3<sup>o</sup> reaalarvud on järjestatavad suuruse järgi;

4<sup>o</sup> reaalarvude hulgas ei ole võimalik kindlaks määrata ühegi arvu naaberarve.

5<sup>o</sup> Et igale arvtelje punktile vastab kindel reaalarv, siis ütleme, et

reaalarvude hulk on pidev.

Ülesandeid.

148. Leia graafiliselt reaalarvudele  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{8}$  ja  $\sqrt{13}$  vastavad lõigud.

149. Leia graafiliselt reaalarvude  $\sqrt{5}$  ja  $\sqrt{13}$  summa, vahe, korrutis ja jagatis.

150. Leia reaalarvude  $\sqrt{5}$  ja 3,14 summa ja korrutis, võttes ka  $\sqrt{5}$  ligikaudse väärtuse kahe kohaga pärast koma, juhul kui

- a) 3,14 on täpne arv;
- b) 3,14 on ligikaudne arv.

151. Teosta järgmised tehted, võttes tabelist irratsionaalarvud kolme kohaga pärast koma.

- a)  $4\pi$
- b)  $3 \sin 18^\circ 16'$
- c)  $\frac{1}{2} \log 36,25$
- d)  $\sqrt{3} \cdot \tan 73^\circ 12'$
- e)  $\pi \cdot \log 0,346$
- f)  $\sqrt[3]{18} + \sqrt{5} \cdot \log \pi - \cos \frac{\pi}{4}$

152. Kui võimalik, siis leia tulemus täpselt, kui ei, siis sajandiku täpsusega.

- a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$
- b)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$
- c)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$
- d)  $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$
- e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{12}$
- f)  $\pi^2$

153. Kumb on suurem?

- a)  $\pi$  või 3,14
- b)  $\sqrt{2}$  või 1,42
- c)  $\sqrt{3}$  või 1,8
- d)  $\log 31$  või 1,5
- e)  $\sin 50^\circ 30'$  või 0,77
- f)  $\pi$  või  $\sqrt{10}$
- g) 3,4842 või  $6\sqrt{2}$
- h)  $\sqrt{3}$  või  $\frac{97}{56}$  või  $\frac{71}{41}$

## IX. KOMPLEKSARVUD.

### 48. Ruutvõrrandi lahendamise.

Ruutvõrrand

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ruutvõrrandil on kaks erinevat reaalarvulist lahendit, kui  $\frac{p^2}{4} - q > 0$ , ja kaks võrdset reaalarvulist lahendit, kui  $\frac{p^2}{4} - q = 0$ .

Juhul, kui  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , ütleme, et ruutvõrrandil lahendid puuduvad.

Arvuvalla edasine laiendamine toimubki eesmärgiga saada niisugune arvuvald, milles ka juhul, kui  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , oleks ruutvõrrandil lahendid.

### 49. Imaginaararvud.

Arvuvalla laiendamiseks nii, et ruutvõrrandil oleks lahendid ka juhul, kui  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , defineeritakse uus ühik, nn. imaginaarühik (ld. imaginarius - näilik, kujutletud) i arvuna, mille ruut on  $-1$ , s. t.

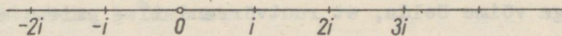
$$i^2 = -1.$$

Selle ühiku abil saame avaldada ruutjuurt negatiivsest arvust, näiteks

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i.$$

Arve  $bi$ , kus  $b$  on reaalarv ja  $i$  - imaginaarühik, nimetatakse puhtimaginaararvudeks.

Juhul, kui  $b = 0$ , taandub puhtimaginaararv reaalarvuks  $0$ .



Joon. 48

Võtame nüüd uue arvtelje, millel ühikuks on  $i$  (joon. 48). Sellele saame kanda kõik puhtimaginaararvud. Seda arvtelge nimetame imaginaarteljeks.

Et puhtimaginaararvu kordajaks on reaalarv, siis igale puhtimaginaararvule vastab kindel imaginaartelje punkt ja vastupidi, igale imaginaartelje punktile vastab kindel puhtimaginaararv.

### Ülesanded.

154. Lahenda võrrandid.

a)  $x^2 - 5x + 8 = 0$       c)  $2x^2 - 4x + 7 = 0$

b)  $3x^2 + 2x + 1 = 0$       d)  $3x^2 - 2x + 1 = 0$

### 50. Kompleksarvud.

Puhtimaginaararvud üksi ei laienda reaalarvude hulka nii, et igal ruutvõrrandil oleksid lahendid. Ruutvõrrandi

$x^2 + px + q = 0$  lahendid juhul, kui  $\frac{p^2}{4} - q \leq 0$ , väljenduvad

kujus  $u \pm vi$ , kus  $u = -\frac{p}{2}$  ja  $v = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ . Näiteks on ruutvõrrandi  $x^2 + 2x + 5 = 0$  lahenditeks  $x = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2i$ .

Arve kujus  $a + bi$ , kus  $a$  ja  $b$  on reaalarvud ja  $i$  on imaginaarühik, nimetatakse imaginaararvudeks.

Imaginaararv koosneb reaalosast  $a$  ja imaginaarosast  $bi$ .

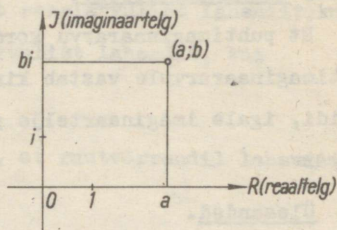
Imaginaararv  $a + bi$  taandub puhtimaginaararvuks  $bi$ , kui  $a = 0$ , ja reaalarvuks  $a$ , kui  $b = 0$ .

Reaalarvud, puhtimaginaararvud ja imaginaararvud koos moodustavad kompleksarvude hulga.

Seega võime öelda, et ruutvõrrand  $x^2 + px + q = 0$  on kompleksarvude hulgas alati lahenduv.

### 51. Kompleksarvude geomeetriline kujutamine.

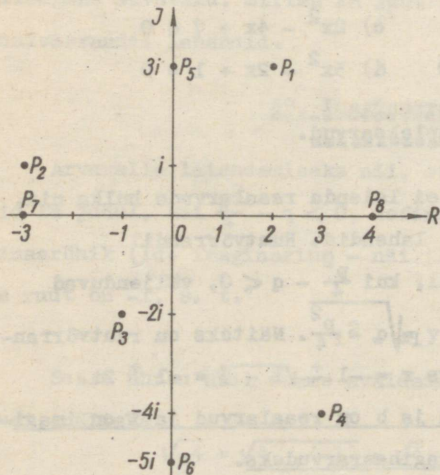
Joonisel 49 on esitatud koordinaatteljestik, mille abstsissiteljel kujutame reaalarve ja ordinaatteljel puhtimaginaararve. Imaginaararvule  $a + bi$  loeme selles koordinaatteljestikus vastavaks punkti  $(a; b)$ . Seega vastavad



Joon. 49

imaginaararvudele tasapinna punktid, mis ei asetse telgedel.

Joonisel 50 on kujutatud punktid  $P_1, P_2, P_3$  ja  $P_4$ , mis vastavad imaginaararvudele  $2 + 3i, -3 + i, -1 - 2i$  ja  $3 - 4i$ . Punktidele  $P_5$  ja  $P_6$  vastavad puhtimaginaararvud  $3i$  ja  $-5i$  ning punktidele  $P_7$  ja  $P_8$  reaalarvud  $-3$  ja  $4$ .



Joon. 50

Igale reaalarvule vastab kindel punkt abstsisssteljel. Igale puhtimaginaararvule vastab kindel punkt ordinaatteljel. Igale imaginaararvule vastab aga kindel tasapinna punkt, mis ei asetse koordinaattelgedel.

Lühidalt võime öelda, et

igale kompleksarvule vastab kindel punkt tasapinnal.

Ülesandeid.

155. Esita tasapinnal punktid, mis vastavad kompleksarvudele:  $2,5i$ ;  $-\frac{4}{3}i$ ;  $2$ ;  $-5$ ;  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ;  $3 - \frac{3}{4}i$ ;  $-1,5 - 2,5i$ ;  $-3,5 + 2,5i$ .

156. Missugused kompleksarvud vastavad ruudu tippudele, kui ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed pikkusega 2 on paralleelsed telgedega.

157. Leia korrapärase kuusnurga tippudele vastavad kompleksarvud, kui kuusnurga diagonaalid lõikuvad koordinaatide alguspunktis ja tema kaks tippu asetsevad abstsisssteljel.

## 52. Kompleksarvude võrdsus.

Kaht kompleksarvu  $a + bi$  ja  $c + di$  nimetatakse võrdseteks, kui nende geomeetriliseks kujutiseks on üks ja seesama punkt, s. t. et punktide  $(a; b)$  ja  $(c; d)$  vastavad koordinaadid peavad olema võrdsed:

$$a = c, \quad b = d.$$

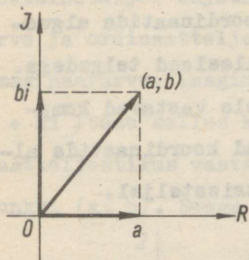
Seega,

kaks kompleksarvu on võrdsed, kui nende reaalosad on võrdsed ja imaginaarosade kordajad on võrdsed.

### 53. Realarvu ja puhtimaginaararu summa.

Nägime, et imaginaararv  $a + bi$  esitub realarvu  $a$  ja puhtimaginaararvu  $bi$  summana. Üks liidetavaist on avaldatud reaalse, teine imaginaarse ühiku kaudu. Leiame niisugusele summale geomeetrilise tõlgenduse.

Igale kompleksarvule vastab tasapinnal kindel punkt. Iga le tasapinna punktile (välja arvatud alguspunkt) vastab oma kohavektor, s. o. vektor, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis ja lõpp-punkt vaadeldavas punk-



tis. Joonisel 51 on esitatud arvudele  $a$ ,  $bi$  ja  $a + bi$  vastavad kohavektorid. Ühtlasi ilmneb jooniselt 51, et imaginaararvule  $a + bi$  vastav kohavektor on realarvule  $a$  ja puhtimaginaararvule  $bi$  vastavate kohavektorite summaks. Seega on realarvu ja puhtimaginaararu summa

Joon. 51 tõlgendatav vastavate kohavektorite summana.

Näita, et tõlgendus kohavektorite abil kehtib ka kahe realarvu liitmisel ja kahe puhtimaginaararu liitmisel!

### 54. Kompleksarvude liitmine ja lahutamine.

Tehted kompleksarvude vallas defineeritakse nii, et jääksid kehtima realarvude vallas kehtivad sulgude avamise ja sarnaste liikmete koondamise eeskirjad.

Seega,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

ja

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Kahe kompleksarvu summa on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne liidetavate reaalosade summaga ja imaginaarosa kordaja on võrdne liidetavate imaginaarosade kordajate summaga.

Lahutamist mõistame ka kompleksarvude vallas liitmise pöördtehtena.

Olgu ülesandeks teostada lahutamine

$$(a + bi) - (c + di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv  $x + yi$ , et

$$(x + yi) + (c + di) = a + bi.$$

Liitmise eeskirja järgi

$$x + c = a \quad \text{ja} \quad y + d = b$$

ning siit

$$x = a - c \quad \text{ja} \quad y = b - d.$$

Seega,

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

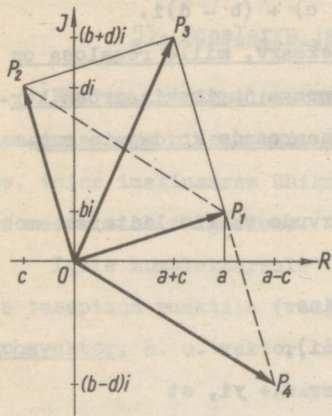
Kahe kompleksarvu vahe on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne antud kompleksarvude reaalosade vahega ja imaginaarosa kordaja on võrdne antud kompleksarvude imaginaarosade kordajate vahega.

Joonisel 52 on esitatud kompleksarvudele  $a + bi$  ja  $c + di$  vastavad punktid  $P_1$  ja  $P_2$ ; samuti kompleksarvudele  $(a + c) + (b + d)i$  ja  $(a - c) + (b - d)i$  vastavad punktid  $P_3$  ja  $P_4$ . Jooniselt näeme, et

$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3$$

ja

$$\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2 = \vec{OP}_4, \quad \text{s. t.} \quad \vec{OP}_2 + \vec{OP}_4 = \vec{OP}_1.$$



Joon. 52

- e)  $(1 + i) + (2 + i) + (3 + i)$   
 f)  $(0,3 - 3,2i) + (1,5 - 0,8i) + (-4 - i)$   
 g)  $(1\frac{3}{4} + \frac{2}{3}i) + (1\frac{1}{2} - \frac{5}{6}i) - (-\frac{3}{4} - 2i)$   
 h)  $(0,8 - 0,2i) + (0,1 - 1,3i) + (1,5 + 0,7i) + (2,3 - 0,6i)$

159. Arvuta järgmised vahed.

- a)  $(5 + 3i) - (2 + i)$                       c)  $(2 - 3i) - (2 + 3i)$   
 b)  $(5 + 4i) - (2 - 3i)$                       d)  $(-2 + 4i) - (2 + i)$

160. Leia graafiliselt järgmised summad.

- a)  $(4 - i) + (3 + 2i)$                       c)  $(-3 - 4i) + (-2 - i)$   
 b)  $(-2 + 3i) + (1 + 2i)$                       d)  $(2 + i) + (3 + 3i)$

161. Leia graafiliselt järgmised vahed.

- a)  $(3 - 2i) - (2 + i)$                       c)  $(-3 + 2i) - (2 - 3i)$   
 b)  $(2 + 3i) - (4 - 2i)$                       d)  $(-2 - 2i) - (2 + 2i)$

162. Liida ja lahuta.

- a)  $(5x - 3yi) + (-2 + 8yi) - (2x - yi) - (7x - 2yi)$

Seega,

iga kahe kompleksarvu liitmine on tõlgendatav vastavate kohavektorite liitmisena ja vahe - vastavate kohavektorite lahutamisenä.

Ulesandeid.

158. Liida järgmised kompleksarvud.

- a)  $(2 + 3i) + 4i$   
 b)  $5i + 2i$   
 c)  $(5 + 4i) + (3 - 7i)$   
 d)  $(2 + 5i) + (-2 - 2i)$

$$b) (2c - 8di) - (5c - 2di) + (c - di) - (-4c + 3di)$$

163. Leia  $x$  ja  $y$  väärtused nii, et kehtiks võrdus:

$$a) 2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y;$$

$$b) \frac{8}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y.$$

### 55. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju.

Esitame tasapinnal asetsevad punktid uute koordinaatide kaudu. Nendeks koordinaatideks võtame punkti kohavektori pikkuse  $r$  ja nurga  $\varphi$ , mille see kohavektor moodustab  $x$ -teljega (joonis 53).  $r$  kui vektori pikkus on alati positiivne,  $\varphi$  on aga nurk  $0$ -st kuni  $2\pi$ -ni.

Jooniselt näeme, et täisnurksest kolmnurgast saame välja kirjutada seosed:

$$a = r \cos \varphi;$$

$$b = r \sin \varphi.$$

Seega

$$a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi.$$

Võttes  $r$  sulgude ette, saame

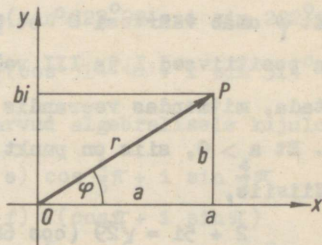
$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Avaldist  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  nimetatakse kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks

Koordinaati  $r$  nimetatakse kompleksarvu mooduliks ja nurga  $\varphi$  kompleksarvu argumendiks.

Avaldist  $a + bi$  nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks.

Kui kompleksarv on antud kujul  $a + bi$  ja me tahame saada tema trigonomeetrilist kuju, siis  $r$  ja  $\varphi$  leiame seostest:



Joon. 53

$$r = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Nurga  $\varphi$  määramise juures arvestame veel kas a või b märki.

Miks?

Näide 1. Olgu antud kompleksarv  $2 + 5i$ . Leida tema trigonomeetiline kuju.

Antud kompleksarvu trigonomeetrilise kuju saamiseks leiame  $r$  ja  $\varphi$ :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29};$$

$$\tan \varphi = \frac{5}{2} = 2,5, \quad \varphi = 68^\circ 12' \quad \text{või} \quad \varphi = 248^\circ 12'.$$

Et  $\varphi$  omab väärtusi  $0^\circ$ -st kuni  $360^\circ$ -ni ja tangensi väärtused on positiivsed I ja III veerandi nurkade puhul, siis tuleb selgitada, mitmendas veerandis asub komplekstasandil vastav punkt. Et  $a > 0$ , siis on punkt I veerandis ja seega  $\varphi = 68^\circ 12'$ .

Niisiis,

$$2 + 5i = \sqrt{29} (\cos 68^\circ 12' + i \sin 68^\circ 12').$$

Näide 2. Teisendada trigonomeetrilisele kujule arv  $-4 - 2i$ .

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\tan \varphi = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Et  $b < 0$ , siis asub punkt kolmandas veerandis ja

$$\varphi = 180^\circ + 26^\circ 34' = 206^\circ 34'.$$

Niisiis,

$$-4 - 2i = \sqrt{20} (\cos 206^\circ 34' + i \sin 206^\circ 34').$$

Ülesandeid.

164. Mitmendas veerandis asetsevad järgmistele kompleksarvudele vastavad punktid?

- a)  $4 - 3i$       c)  $5 + 3i$       e)  $-3 + 8i$   
 b)  $-2 + 3i$       d)  $-2 - i$       f)  $2 - i$

165. Leia eelmises ülesandes antud kompleksarvude trigonomeetriline kuju.

166. Teisenda antud kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule.

- a) 1      c) 5      e)  $3i$   
 b)  $-4i$       d)  $-2$       f) 1

167. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

- a)  $2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$       e)  $5(\cos 18^\circ 35' + i \sin 18^\circ 35')$   
 b)  $3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$       f)  $2,6(\cos 104^\circ 20' + i \sin 104^\circ 20')$   
 c)  $8(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$       g)  $\frac{7}{12}(\cos 222^\circ 22' + i \sin 222^\circ 22')$   
 d)  $12(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$       h)  $\frac{13}{5}(\cos 314^\circ 48' + i \sin 314^\circ 48')$

168. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

- a)  $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$       e)  $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$   
 b)  $\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$       f)  $\pi(\cos \pi + i \sin \pi)$   
 c)  $\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$       g)  $\frac{5}{6}(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$   
 d)  $\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$       h)  $\frac{\pi}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

### 56. Kompleksarvude korrutamise.

Olgu antud kaks kompleksarvu  $a + bi$  ja  $c + di$ . Leiame nende korrutise, tuginedes eespool (§ 54) toodud märkusele, et sulgude avamine toimub kompleksarvude vallas täpselt samuti kui reaalarvude vallas.

Sega,

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Näide. Olgu antud kompleksarvud

$$4 - 3i \text{ ja } -2 - 5i.$$

Leiame nende korrutise:

$$(4 - 3i) \cdot (-2 - 5i) = (-8 - 15) + (-20 + 6)i = -23 - 14i.$$

Anname nüüd kompleksarvude korrutisele geomeetrilise tõlgenduse. Selleks leiame kõigepealt kompleksarvude korrutamise reegli ka juhul, kui tegurid on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu antud kompleksarvud

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ ja } r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Nende korrutis on siis

$$\begin{aligned} & r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ & = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ & = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ & + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ & + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ & = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Seega,

kahe trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille mooduliks on antud kompleksarvude moodulite korrutis ja argumendiks antud kompleksarvude argumentide summa.

Näide. Olgu antud kompleksarvud

$$2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \text{ ja } 3(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

Nende korrutiseks on siis

$$6(\cos 125^\circ + i \sin 125^\circ).$$

Trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude korrutamise reegli võiksime saada ka nii, kui algebralises kujus antud kompleksarvude korrutises teeme vastavad asendused.

Kui

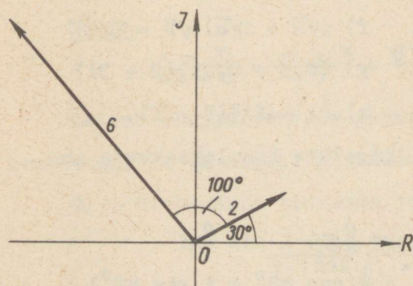
$$a = r_1 \cos \varphi_1, \quad b = r_1 \sin \varphi_1 \quad \text{ja} \quad c = r_2 \cos \varphi_2, \quad d = r_2 \sin \varphi_2,$$

siis

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Tuginedes trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude korrutamise eeskirjale, saame kompleksarvude korrutamist tõlgendada geomeetriliselt järgmiselt.



Joon. 54

meetriliselt kompleksarvude

$$2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \quad \text{ja} \quad 3(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$$

korrutamine.

Kompleksarve  $a + bi$  ja  $a - bi$  nimetatakse kaaskompleksarvudeks.

Nii on näiteks arvu  $-3 + 2i$  kaaskompleksarvuks  $-3 - 2i$ .

Korrutame kompleksarvu oma kaaskompleksarvuga:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Tulemuseks on reaalarv. Näita seda ka geomeetriliselt!

Saadud võrdus näitab, et kompleksarvude vallas on võimalik ruutude summat lahutada tegureiks.

Kujutame koordinaatteljestikus ühele tegurile vastava kohavektori. Korrutisele vastava kohavektori saamiseks tuleb antud vektorit pöörata teise teguri argumendi võrra ja muuta siis vektori pikkust teise teguri moduli kordseks. Joonisel 54 on esitatud geo-

Näide.  $9 + x^2 = (3 + xi)(3 - xi)$ .

Ülesanded.

169. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

- a)  $3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ) \cdot 5(\cos 68^\circ + i \sin 68^\circ)$   
b)  $4(\cos 113^\circ + i \sin 113^\circ) \cdot 2,3(\cos 118^\circ + i \sin 118^\circ)$   
c)  $2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) \cdot \frac{1}{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$   
d)  $19(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ) \cdot 16(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi)$ .

170. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

- a)  $2,5i \cdot 4i$  e)  $(5 + i\sqrt{3})(5 - i\sqrt{3})$   
b)  $(3 + 5i) \cdot 2$  f)  $(\sqrt{k} + i\sqrt{n})(\sqrt{k} - i\sqrt{n})$   
c)  $(-8 - 7i) \cdot (-3i)$  g)  $(0,5 + 0,2i)(2 + 3i)$   
d)  $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{3} + i\sqrt{2})$  h)  $(1 - 2i)(5 - i)$ .

171. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude korrutis.

- a)  $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \cdot 3(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$   
b)  $4(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$

172. Lahuta tegureiks.

- a)  $a^2 + 4$  c)  $a^2 + 4b^2$  e)  $a + b$   
b)  $1 + c^2$  d)  $4m^2 + 9n^2$  f)  $a + 2$

57. Kompleksarvude jagamine.

Ka kompleksarvude vallas mõistame jagamise all korrutamise pöördtehet.

Olgu ülesandeks teostada jagamine

$$(a + bi) : (c + di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv  $x + yi$ , mille korrutamisel jagajaga saame jagatava, s. t. et

$$(x + yi) \cdot (c + di) = a + bi.$$

Kompleksarvude korrutamise eeskirja kohaselt peavad kehtima võrdused:

$$xc - yd = a;$$

$$xd + yc = b.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Seega,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Näide.

$$\frac{4 - 3i}{-2 - i} = \frac{-8 + 3}{5} + \frac{6 - (-4)}{5}i = -1 + 2i.$$

Leiame kompleksarvude jagamise eeskirja ka juhul, kui kompleksarvud on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu ülesandeks teostada jagamine

$$\frac{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv  $r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ , mille korrutamisel nimetajaga saame lugeja, s. t. et

$$r_2 r_1 = r \quad \text{ja siit} \quad r_2 = \frac{r}{r_1},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \quad \text{ja siit} \quad \varphi_2 = \varphi - \varphi_1.$$

Niisiis,

$$\frac{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kui osutub, et  $\varphi - \varphi_1 < 0$ , siis tuleb see nurk asendada vastava positiivse nurgaga  $360^\circ + (\varphi - \varphi_1)$ , mis kuulub argumendi võimalike väärtuste piirkonda.

Näide.

$$\frac{2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)}{5(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)} = 0,4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ).$$

Et  $20^\circ - 300^\circ = -280^\circ$ , siis tuleb argumendiks  $360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$ .

Trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude jagamise reegli võiksime saada ka nii, kui algebralises kujus antud kompleksarvude jagatistes teeme vastavad asendused.

$$\text{Kui } a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

$$\text{ja } c = r_1 \cos \varphi_1, \quad d = r_1 \sin \varphi_1,$$

siis

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \frac{r}{r_1} [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Ülesandeid.

173. Leia jagatis.

a)  $\frac{3(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)}{2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)}$

c)  $\frac{\frac{5}{6}(\cos \frac{17}{36}\pi + i \sin \frac{17}{36}\pi)}{\frac{2}{3}(\cos \frac{1}{3} + i \sin \frac{1}{3})}$

b)  $\frac{10(\cos 292^\circ + i \sin 292^\circ)}{4(\cos 186^\circ + i \sin 186^\circ)}$

d)  $\frac{5,16(\cos 1,8\pi + i \sin 1,8\pi)}{1,11(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)}$

174. Leia jagatis.

a)  $\frac{1 + 4\sqrt{3}}{1 - 4\sqrt{3}}$

d)  $\frac{-2\sqrt{3} + 1 + i}{1 + 21\sqrt{3}}$

g)  $\frac{a}{a + 21\sqrt{a}}$

b)  $\frac{5 + 2i}{5 - 2i}$

e)  $\frac{6 - i}{6 - 2i}$

h)  $\frac{a - bi}{b + ai}$

c)  $\frac{3}{2 + 4i}$

f)  $\frac{5 - 2i}{3i}$

l)  $\frac{bi}{a + bi}$

175. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude jagatis.

a)  $4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) : 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

b)  $0,5(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ) : 0,2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$

58. Kompleksarvude omadusi.

1° Nagu nägime on kahe kompleksarvu summa, vahe, korrutis

ja jagatis kompleksarv, s. t. et

kompleksarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

2<sup>o</sup> Juba reaalarvude hulk sisaldas lõpmata palju arve, nüüd lisandusid neile puhtimaginaaararvud ja imaginaaararvud. Seega, kompleksarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3<sup>o</sup> Reaalarvudele vastavad punktid asetsevad arvteljel. See võimaldas järjestada neid arve suuruse järgi ja otsida antud arvu naaberarve. Kompleksarvudele vastavad punktid asetsevad tasapinnal. Siin ei ole võimalik öelda, kummale kahest punktist vastab suurem kompleksarv. Seetõttu

kompleksarve ei saa järjestada suuruse järgi.

4<sup>o</sup> Samal põhjusel

antud kompleksarvul pole naaberarve.

5<sup>o</sup> Et igale tasapinna punktile vastab kindel kompleksarv, siis

kompleksarvude hulk on pidev.

## I. KOMPLEKSARVUDE KASUTAMINE KOLMANDA JA NELJANDA ASTME

### KAKSLIHKMELISTE VÖRRANDITE LAHENDAMISEKS.

#### 59. Kaksliikmelise võrrandi mõiste.

Võrrandit nimetatakse kaksliikmeliseks, kui temale saab anda kuju

$$x^n + m = 0,$$

kus  $n$  on naturaalarv ja  $m$  - reaalarv.

Näiteks võrrandid

$$x + b = 0,$$

$$x^2 + d = 0,$$

$$x^3 + f = 0,$$

$$x^4 + k = 0$$

on vastavalt esimese, teise, kolmanda ja neljanda astme kaksliikmelised võrrandid.

Võrrandi  $x + b = 0$  lahendiks on  $x = -b$ .

Võrrandi  $x^2 + d = 0$  lahenditeks on  $x_1 = \sqrt{-d}$  ja  $x_2 = -\sqrt{-d}$ .

Kui  $d$  on negatiivne, siis on juurealune avaldis positiivne ja me saame lahendeiks kaks märgilt erinevat reaalarvu.

Kui aga  $d$  on positiivne, siis saame lahendeiks imaginaararvud  $i\sqrt{d}$  ja  $-i\sqrt{d}$ .

#### 60. Võrrandi $x^3 + a^3 = 0$ lahendamine.

Kolmanda astme kaksliikmelise võrrandi  $x^3 + f = 0$  lahendite leidmiseks tähistame vabaliikme  $a^3$ -ga, kus  $a = 0$ , s. t.

$f = a^3$ , ja vaatleme võrrandi

$$x^3 + a^3 = 0$$

lahendamist.

Võrrandi vasaku poole kui kuupide summa saame lahutada te-  
gureiks:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0.$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine kahe uue võrran-  
di lahendamisele:

$$x + a = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_1 = -a$$

ja

$$x^2 - ax + a^2 = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3} = \frac{a}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

Seega on võrrandi  $x^3 + a^3 = 0$  lahendeiks (kui  $a > 0$ ):

$$x_1 = -a;$$

$$x_2 = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Näide. Lahendada võrrand  $3x^3 + 4 = 0$ .

Selle võrrandi teisendame kujule  $x^3 + \frac{4}{3} = 0$ .

Siin on  $a^3 = \frac{4}{3}$  ja seega  $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ .

Antud võrrandi lahendeiks on:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}(1 + i\sqrt{3})$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4}{3}} (1 - i\sqrt{3}).$$

61. Võrrandi  $x^3 - a^3 = 0$  lahendamine.

Tähistame nüüd võrrandis  $x^3 + f = 0$  vabaliikme  $-a^3$ -ga, kus  $a > 0$ , s. t.  $f = -a^3$ .

Lahendada tuleb seega võrrand

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Selle võrrandi lahendame nii nagu eelmisegi võrrandi. Lahendeiks saame:

$$x_1 = a;$$

$$x_2 = \frac{a}{2}(-1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \frac{a}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

62. Võrrandi  $x^4 + a^4 = 0$  lahendamine.

Neljanda astme kaksliikmelised võrrandid on esitatavad kujus  $x^4 + a^4 = 0$  ja  $x^4 - a^4 = 0$ .

Ka siin lahutame kõigepealt võrrandi vasaku poole tegureiks.

Selleks liidame kaksliikmele  $x^4 + a^4$  juurde ja seejärel ka lahutame avaldise  $2a^2x^2$ . Siis rakendame tegureiks lahutamisel ruutude vahe valemit:

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= x^4 + a^4 + 2a^2x^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ax)^2 = \\ &= (x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax). \end{aligned}$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine võrrandi

$$(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2) = 0$$

lahendamisele.

Kui siin  $x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 = 0$ , siis saame lahendeiks

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

Kui aga  $x^2 + \sqrt{2}ax + a^2 = 0$ , siis on lahendeiks

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{2}a^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

### 63. Võrrandi $x^4 - a^4 = 0$ lahendamine.

Lahutades  $x^4 - a^4$  tegureiks, saame

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2).$$

Võrrandi

$$(x - a)(x + a)(x^2 + a^2) = 0$$

lahendeiks on

$$x_1 = a;$$

$$x_2 = -a;$$

$$x_3 = ai;$$

$$x_4 = -ai.$$

### Ülesandeid.

176. Lahenda võrrandid.

a)  $x^3 - 27 = 0$

e)  $4x^3 + 15 = 0$

b)  $x^3 + 729 = 0$

f)  $-2x^3 + 7 = 0$

c)  $x^4 - 625 = 0$

g)  $-\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{8} = 0$

d)  $x^4 + 256 = 0$

h)  $3,2x^4 + 10,1 = 0$

### 64. Algebra põhilause.

Lineaarvõrrandite lahendamisel saame alati ühe lahendi.

Pärast arvuvalla laiendamist kompleksarvudega saame igale ruutvõrrandile kaks lahendit.

Eespool nägime, et igal vaadeldud kaksliikmelisel võrrandil on kompleksarvude vallas just niipalju lahendeid, kui suur

on võrrandi aste.

See omadus on üldine, s. t. kehtib kolmanda, neljanda, viienda jne. astme võrrandite puhul ka siis, kui see võrrand sisaldab liikmeid, kus tundmatu esineb madalamas astmes kui on võrrandi aste. See tõsiasi, mida me siinkohal ei tõesta, ongi tuntud algebra põhilause nime all.

Nii on näiteks võrrandil

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

kolm lahendit, 2, 1 ja -1, ja võrrandil

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0.$$

viis lahendit:  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  ja -3.

Kontrolli neid lahendeid!

Kõrgema astme võrrandeid (nende lahendeiks pole enamikel juhtudel täisarvud) lahendatakse tavaliselt ligikaudselt, s. t. leitakse lahendid teatud täpsusega. Võrrandite ligikaudse lahendamise kohta on välja töötatud palju meetodeid. XI klassis tutvume neist ühega, mis pärineb tuntud inglise füüsikult ja matemaatikult Isaac Newtonilt.

### 65. Arvuvalla laiendamisest.

Seni tundma õpitud matemaatika kursuses on mitmel korral teostatud arvuvalla laiendamist. Alklassides arvatati ainult naturaalarvudega. Hiljem õpiti tundma positiivseid murdarve ja negatiivseid täis- ja murdarve.

Positiivsed ja negatiivsed täis- ning murdarvud moodustavad nn. ratsionaalarvude valla.

2, log 5, sin 10° jne. on arvud, mis ei kuulu ratsionaalarvude hulka. Seega õppides tundma juurimist, logaritmimeist ja

trigonomeetrilisi funktsioone, täienes arvuvald irratsionaalarvudega.

Irratsionaalarvud koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude valla.

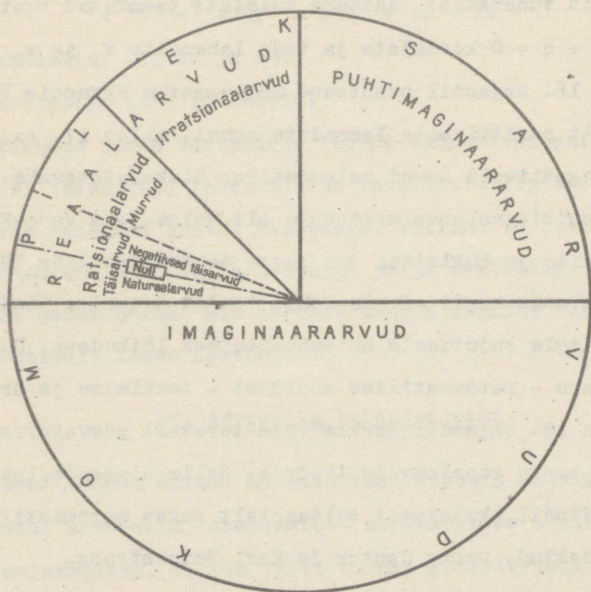
Analoogiliselt on kulgenud arvuvalla laiendamine ka ajaloolisest seisukohast vaadatuna. Vana-Kreeka matemaatikud kasutasid naturaalarve ja positiivseid murdarve. Positiivse ja negatiivse arvu mõistet kasutasid esimestena hindud 6. ja 7. sajandil. Mõödus aga veel palju sajandeid, enne kui need arvud leidsid täit tunnustust. Näiteks tuletati taandatud ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  kordajate ja tema lahendite  $x_1$  ja  $x_2$  vahelised seosed 16. sajandil prantsuse matemaatiku Francois Vieta poolt ainult positiivsete lahendite puhul. Alles 17. sajandil muutuvad negatiivsed arvud matemaatikas üldkasutatavaks.

Mitteratsionaalarvu olemasolu oli selge juba Vana-Kreeka matemaतिकuile ja Eukleides oma suure tähtsusega töös "Elementidid" püüdis anda nende arvude kohta teatud teooria, tuginedes geomeetrilisele kujutusele ühismõõdututest lõikudest. Uue matemaatikaharu - matemaatilise analüüsi - tekkimise ja arenemisega 17. ja 18. sajandil kerkis väga teravalt päevakorradele vajadus anda range reaalarvude teooria. Selle ülesande lahendasid 19. sajandil üksteisest sõltumatult saksa matemaatikud Richard Dedekind, Georg Cantor ja Karl Weierstrass.

Itaalia matemaatik Geronimo Cardano avaldas 16. sajandil kuupvõrrandi  $x^3 + px + q = 0$  lahendamiseks valemi

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

mille rakendamine juhul, kui kuupvõrrandi kõik kordajad on reaalarvud, nõuab kompleksarvude tundmist. Cardano nimetas neid arve "valedeks arvudeks". Uldise tunnustuse said kompleksarvud pärast saksa matemaatiku Carl Friedrich Gaussi poolt antud kompleksarvude teooria põhjendust 1831. aastal. Kompleksarvude baasil, mis esialgu näisid olevat mingid "valed arvud", arenes hiljem välja kompleksmuutuja funktsioonide teooria, mille rakendused on eriti hinnatavad aerodünaamikas. Selles on suuri teeneid tuntud vene teadlasel Nikolai Žukovskil.



Joon. 55

Kompleksmuutuja funktsioonide teooriat rakendatakse suure eduga ka elektrotehnikas, tuumafüüsikas ja elastsusteoorias. Viimasel alal on silmapaistvaid tulemusi saavutanud ka endine

Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika professor Guri Kolossov  
(1867-1931).

Matemaatikas kui teaduses toimub loogilise arutluse lihtsustamise huvides arvuvalla laiendamine naturaalarvudelt ratsionaalarvudeni teisiti kui siin kirjeldatud. See kulgeb nii, nagu seda on tehtud eespool, naturaalarvudelt esmalt täisarvudele ja siis sealt ratsionaalarvudele. Edasi laieneb arvuvald reaalarvudele, kompleksarvudele jne.

Joonis 55 iseloomustabki just seda fakti, et iga uus arvuvald hõlmab endas temale eelnenud arvuvalla.

Arvuvalla edasist laiendamist nii, et igale ruumipunktile vastaks kindel arv, põhjendas iiri matemaatik ja astronoom William Rowan Hamilton 1843. aastal. Uusi arve nimetatakse kvaternionideks.

# S i s u k o r d .

Lk.

## I. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

1. Lõplikule väärtusele lähenemine . . . . .	3
2. Lõplikule väärtusele lähenevad suurused . . . . .	6
3. Funktsiooni piirväärtus . . . . .	9
4. Funktsiooni pidevus . . . . .	13
5. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine juhul, kui funktsioon pole antud kohas määratud . . . . .	14
6. Funktsiooni piirväärtuse rakendusi . . . . .	17

## II. FUNKTSIOONI TULETIS.

7. Keha liikumise hetkeline kiirus . . . . .	23
8. Funktsiooni muutumise hetkeline kiirus . . . . .	24
9. Funktsiooni tuletis . . . . .	28
10. Mõnede funktsioonide tuletised . . . . .	28
11. Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise tuletised. . . . .	31
12. Funktsiooni $y = x^n$ tuletis . . . . .	36
13. Näiteid funktsiooni tuletise arvutamiseks . . . . .	37
14. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised . . . . .	39
15. Tuletiste tabel . . . . .	44
16. Funktsiooni ekstreemumid . . . . .	44
17. Suurima ja vähima väärtuse leidmise ülesanded . . . . .	48

## III. FUNKTSIOONIDE UURIMINE

### TULETISE ABIL.

18. Funktsioonide teine ja kolmas tuletis . . . . .	54
19. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine . . . . .	56
20. Ekstreemumpunktid . . . . .	57
21. Funktsiooni kumerus ja nõgusus . . . . .	60
22. Käänupunkt . . . . .	66

IV. TULETISE MÖISTE KASUTAMINE VÖRRANDITE  
LIGIKAUDSEL LAHENDAMISEL.

23. Vörrandi ligikaudne lahendamine . . . . .	68
24. Newtoni vöte vörrandi lahendi täpsustamiseks . . . . .	69

V. NEWTONI BINOOMVALEM.

25. Binoomi $x + 1$ astmete arendid . . . . .	74
26. Funktsiooni $f^n(x)$ tuletis . . . . .	75
27. Binoomi $(x + 1)^n$ arend . . . . .	77
28. Binoomi $(a + b)^n$ arend . . . . .	80
29. Newtoni binoomvalemi omadusi . . . . .	81
30. Ligikaudne valem $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ . . . . .	82
31. Valemi $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ viga . . . . .	83

VI. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL.

32. Funktsiooni diferentsiaali mõiste . . . . .	85
33. Funktsiooni $y = x$ diferentsiaal . . . . .	85
34. Funktsiooni diferentsiaali kasutamine ligikaudsel arvutamisel . . . . .	86

VII. INTEGRAAL.

35. Köverjoonse trapetsi pindala (I) . . . . .	88
36. Pindala tuletis . . . . .	91
37. Algfunktsioon . . . . .	92
38. Määramata integraal . . . . .	93
39. Määratud integraal . . . . .	95
40. Newton-Leibnizi valem . . . . .	96
41. Köverjoonse trapetsi pindala (II) . . . . .	97

VIII. ARVU MÖISTE ÜLDISTAMINE.

42. Naturaalarvud . . . . .	100
43. Täisarvud . . . . .	102
44. Ratsionaalarvud . . . . .	104
45. Ratsionaalarvude hulga laiendamise vajadus . . . . .	107
46. Irrratsionaalarvud . . . . .	108
47. Reaalarvud . . . . .	110

## IX. KOMPLEKSARVUD.

48.	Ruutvõrrandi lahendamine . . . . .	114
49.	Imaginaararvud . . . . .	114
50.	Kompleksarvud . . . . .	115
51.	Kompleksarvude geomeetriline kujutamine . . . . .	116
52.	Kompleksarvude võrdsus . . . . .	117
53.	Reaarvu ja puhtimaginaarvu summa . . . . .	118
54.	Kompleksarvude liitmine ja lahutamine . . . . .	118
55.	Kompleksarvu trigonomeetriline kuju . . . . .	121
56.	Kompleksarvude korrutamine . . . . .	123
57.	Kompleksarvude jagamine . . . . .	126
58.	Kompleksarvude omadusi . . . . .	128

## X. KOMPLEKSARVUDE KASUTAMINE

### KOLMANDA JA NELJANDA ASTME KAKSLIHKMELISTE VÕRRANDITE LAHENDAMISEKS.

59.	Kakslihkmelise võrrandi mõiste . . . . .	130
60.	Võrrandi $x^3 + a^3 = 0$ lahendamine . . . . .	130
61.	Võrrandi $x^3 - a^3 = 0$ lahendamine . . . . .	132
62.	Võrrandi $x^4 + a^4 = 0$ lahendamine . . . . .	132
63.	Võrrandi $x^4 - a^4 = 0$ lahendamine . . . . .	133
64.	Algebra põhilause . . . . .	133
65.	Arvuvalla laiendamisest . . . . .	133



Tasuta

A-26 176

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00379133 4