Compendium

der

Stereometrie

nach Legendre

für den Schulgebrauch bearbeitet

von

Dr. Carl Hechel.

Dritte, verbesserte Auflage.

Reval 1877.

Verlag von Franz Kluge.

Compendium

der

Stereometrie

nach Legendre

für den Schulgebrauch bearbeitet

von

Dr. Carl Hechel.

Dritte, verbesserte Auflage.

Reval 1877.

Verlag von Franz Kluge.

Von der Censur gestattet. — Dorpat, den 5. März 1877.

Lehrbücher desselben Verfassers.

Compendium der Planimetrie nach Legendre. 3te Aufl. Reval F. Kluge 1873.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst zahlreichen Uebungsaufgaben aus der Geometrie, Geodäsie, Physik und Astronomie, für den Schulgebrauch und Selbstunterricht. Leipzig. Fr. Volckmar. 1861.

Auflösungen der Aufgaben in dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Vierte Auflage. 1866.

Leitfaden der ebenen Trigonometrie für den Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. F. Kluge. Reval 1870.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen auf reine und praktische Geometrie, mathematische Geographie, Geodäsie und Astronomie. Für höhere Lehranstalten und zum Schulunterricht. F. Kluge. Reval 1868.

Ebene analytische Geometrie (mit Einschluß der Kegelschnitte) nebst zahlreichen Uebungsaufgaben für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Zweite Auflage. F. Kluge. Reval 1870.

Stereometrische Aufgaben (1200 Nummern) nebst ihren Auflösungen für den Gebrauch in höheren Lehranstalten. 2 Hefte. F. Kluge. Reval 1866.

Lehrbuch der Arithmetik, nach wissenschaftlichen Grundsätzen für den Schulgebrauch und Selbstunterricht bearbeitet. Riga. Häcker. 1870.

Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten. Reval. Franz Kluge. 1871.

Auflösungen der arithmetischen Aufgaben. 1872.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für Gymnasien und Realschulen sowie zum Selbstunterricht. F. Kluge. Reval 1869.

Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen. Reval. F. Kluge. 1873.

Auflösungen der Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Reval. F. Kluge. 1874.

Leitfaden für den Unterricht in der Buchstabenrechnung und Algebra im Anschluß an die Sammlung alg. Aufgaben. Reval. F. Kluge. 1874.

Die Lehrbücher der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie sind auch in russischen Uebersetzungen von W. Schichow erschienen. Riga. Schnackenburg. 1870.

Inhalt.

I. Von den geraden Linien und den Ebenen.

§ 156. Die Stereometrie betrachtet die Lage verschiedener Ebenen und Linien im Raume gegen einander und beschäftigt sich mit Untersuchungen über die verschiedenen Arten geometrischer Körper und deren Oberflächen.

Eine Ebene durch eine gerade Linie legen heißt sie so legen, daß die gerade Linie ganz in die Ebene hineinfällt.

Hat eine Gerade mit einer Ebene einen Punkt gemeinschaftlich und liegt im Uebrigen außerhalb derselben, so sagt man, die Gerade durchschneide die Ebene.

Eine gerade Linie steht auf einer Ebene und diese auf jener senkrecht, wenn sie die Ebene schneidet und auf allen durch ihren Durchschnittspunkt in der Ebene gezogenen geraden Linien senkrecht steht.

Eine gerade Linie ist mit einer Ebene parallel, wenn beide beliebig verlängert sich niemals schneiden.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie sich niemals schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.

§ 157. Zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien sind immer einander parallel, wenn sie beliebig weit verlängert sich niemals schneiden. Im Raume dagegen können zwei gerade Linien eine solche Lage gegen einander haben, daß sie einander nicht schneiden, und doch nicht einander parallel sind. Denn denkt man sich durch eine Gerade AB zwei verschiedene Ebenen hindurchgelegt und auf AB in verschiedenen Punkten A und B die Senkrechten AC und BD gezogen, von denen die eine in der einen, die andere in der andern

Ebene liegt, so sieht man, daß diese Senkrechten weder parallel sind, noch jemals sich schneiden können.

Von zwei solchen Linien wie AC und BD sagt man, daß sie einander kreuzen oder nennt sie auch windschiefe Linien.

§ 158. **Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte läßt sich nur eine Ebene legen, und es wird somit die Lage einer Ebene durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, vollkommen bestimmt.**

Denkt man sich zwei der gegebenen Punkte durch eine gerade Linie verbunden und durch diese eine Ebene gelegt, so wird die Ebene, wenn man sie um die gerade Linie wie um eine feste Axe herumdreht, eine unendliche Anzahl verschiedener Lagen einnehmen. Wenn man aber irgendwo außerhalb der geraden Linie einen festen Punkt annimmt und die Ebene so lange herumdreht, bis dieselbe auch durch diesen dritten Punkt geht, so kann sie sich nicht weiter drehen, ohne den Punkt zu verlassen; ihre Lage im Raume ist demnach eine unveränderliche, so daß alle Ebenen, welche man sich durch jene drei Punkte gelegt denkt, ganz zusammenfallen und nur eine einzige Ebene bilden, deren Lage durch die gegebenen Punkte bestimmt wird.

§ 159. 1) Durch zwei sich schneidende gerade Linien oder durch zwei Parallellinien läßt sich nur eine Ebene legen. Denn alle Ebenen, die man sich durch die einander schneidenden Linien oder durch die Parallellinien gelegt denkt, haben irgend drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte mit einander gemein und fallen daher ganz zusammen.

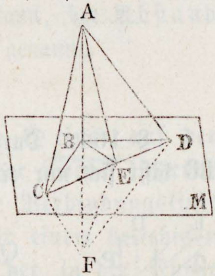
2) Durch einen Punkt im Raume kann nur eine Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

3) Durch vier oder mehr Punkte im Raume kann man entweder nur eine Ebene oder gar keine Ebene legen.

§ 160. **Die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist eine gerade Linie.**

Denn gäbe es unter den Punkten, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich sind, auch nur drei, die nicht in einer geraden Linie lägen, so müßten die Ebenen zusammenfallen (§ 158), was der Voraussetzung widerspricht.

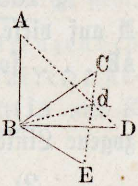
§ 161. Wenn eine die Ebene M schneidende gerade Linie AB auf zwei durch ihren Durchschnittspunkt in der Ebene gezogenen Geraden BC und BD senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf jeder andern in derselben Ebene durch ihren Durchschnittspunkt gezogenen Geraden BE, und mithin auf der Ebene M selbst.



Man verbinde zwei beliebige Punkte C und D der geraden Linien BC und BD durch eine Gerade CD, welche die BE in E treffe, verlängere AB unterhalb der Ebene M, so daß BF = AB wird, und ziehe AC, AE, AD, FC, FE, FD. Da AC = FC und AD = FD (§ 31, 2), so ist (§ 26)

$\triangle$ ACD $\cong$ FCD, also $\measuredangle$ ACD = FCD, daher (§ 20)
$\triangle$ ACE $\cong$ FCE, also AE = FE. Weil nun
$\triangle$ ABE $\cong$ FBE, so ist $\measuredangle$ ABE = FBE, also AB $\perp$ BE.

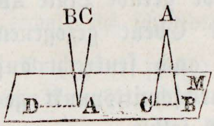
§ 162. Wenn drei gerade Linien CB, DB, EB auf einer und derselben Geraden AB in dem nämlichen Punkte B senkrecht stehen, so liegen sie alle drei in einer, auf der letztern Geraden senkrechten Ebene.



Man denke sich durch zwei von diesen Linien, BC und BE, eine Ebene CBE gelegt, auf welcher AB senkrecht stehen muß (§ 161). Läge nun BD nicht ebenfalls in dieser Ebene, so denke man sich durch AB und BD eine zweite Ebene ABD gelegt, welche die erste in Bd schnitte, so daß AB, Bd, BD in einer Ebene liegen. Da AB auf der Ebene CBE senkrecht ist, so steht AB auch senkrecht auf der in dieser letztern liegenden Linie Bd. Man hätte alsdann auf eine gerade AB aus dem nämlichen Punkte B, und in einerlei Ebene zwei Senkrechte Bd und BD gezogen, was unmöglich ist (§ 13). Daher muß BD ebenfalls in der durch BC und BE gelegten Ebene liegen.

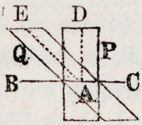
Zusatz. Bewegt sich ein rechter Winkel ABD um den einen Schenkel AB als eine feste Axe, so beschreibt der andere Schenkel BD eine auf AB senkrechte ebene Fläche.

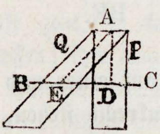
§ 163. Durch einen Punkt A in oder außerhalb einer Ebene M läßt sich nur eine einzige Senkrechte AB auf dieselbe ziehen.



Denn, wäre auch AC $\perp$ M, so lege man durch AB und AC eine Ebene, welche die Ebene M schnitte, und zwar im ersten Falle in AD, so daß $\sphericalangle$ BAD = R = CAD wäre, im zweiten Falle in BC, so daß $\triangle$ ABC zwei rechte Winkel enthielte. Da aber beides unmöglich ist, so kann nicht CA $\perp$ M sein.

§ 164. **Durch einen Punkt A in oder außerhalb einer Geraden BC läßt sich nur eine einzige Ebene P senkrecht auf dieselbe legen.**





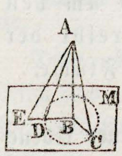
Wäre in jedem der beiden Fälle auch die Ebene Q $\perp$ BC, und legt man im ersten Falle durch BC eine Ebene, welche die Ebenen P und Q in AD und AE schnitte, so wäre $\sphericalangle$ BAD = R = BAE, und legt man im zweiten Falle durch A und BC eine Ebene, so enthielte das Dreieck ADE zwei rechte Winkel. Da beides unmöglich ist, so kann auch nicht die Ebene Q $\perp$ BC sein.

§ 165. **Zieht man von einem Punkte A außerhalb einer Ebene M auf diese eine Senkrechte AB und mehrere schiefe Linien AC, AD, AE . . ., so ist**

1) die Senkrechte die kürzeste von allen aus A nach M gezogene Linien;

2) sind zwei schiefe Linien AC und AD, deren Fußpunkte von dem Fußpunkte der Senkrechten gleiche Abstände BC und BD haben, einander gleich;

3) ist von zwei schiefen Linien AE und AC diejenige die größere, deren Fußpunkt sich von dem Fußpunkte der Senkrechten weiter entfernt.



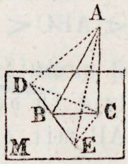
1) Jede schiefe Linie z. B. AC ist als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieks ABC größer als die Kathete AB.

2) wenn BC = BD, so ist $\triangle$ ABC $\cong$ ABD (§ 20), also AC = AD.

3) Wenn $BE > BC$ ist und wird in dem $\triangle ABE$ die AD so gezogen, daß $BD = BC$ ist, so ist (§ 31, 3) $AE > AD$, also auch $AE > AC$.

Zusatz. Die Senkrechte AB wird als die kürzeste Gerade, welche vom Punkt A nach der Ebene M gezogen werden kann, der Abstand oder die Entfernung des Punktes von der Ebene genannt.

§ 166. Wenn man aus dem Fußpunkte C einer auf der Ebene M senkrechten Geraden AC auf eine in der Ebene liegende Linie DE eine senkrechte CB fället, so steht die Verbindungslinie AB des Fußpunktes der zweiten Senkrechten mit einem beliebigen Punkte A der ersten Senkrechten ebenfalls auf der in der Ebene liegenden Geraden DE senkrecht.

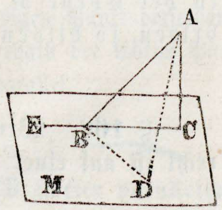


Macht man $BD = BE$ und zieht AD, AE, CD, CE, so ist $CD = CE$ (§ 31, 2), also (§ 165, 2) $AD = AE$. Da nun $\triangle ABD \cong ABE$ (§ 26), so ist $\sphericalangle ABD = ABE$, also $AB \perp DE$.

Zusätze. 1) Die Linie DE steht auf der durch AC und AB gelegten Ebene senkrecht, da sie auf AB und BC senkrecht steht.

2) Die kürzeste Entfernung der beiden sich kreuzenden Linien AC und DE ist die auf beiden zugleich senkrecht stehende Linie BC; denn verbindet man zwei andere Punkte A und E dieser Linien, so ist $AE > AB > BC$ (§ 25).

§ 167. Erklärungen. Fället man von einem Punkte A außerhalb einer Ebene M auf diese eine schiefe Linie AB und eine Senkrechte AC, so heißt der einen rechten Winkel nicht übersteigende Winkel ABC, welchen die schiefe Linie mit der Verbindungslinie beider Fußpunkte bildet, der Neigungswinkel der schiefen Linie AB gegen die Ebene M.



Die Verbindungslinie BC beider Fußpunkte heißt die Projection der schiefen Linie AB auf die Ebene M, die Senkrechte AC die projicirende Linie, die Ebene M die Projectionsebene und die durch AB und AC gelegte Ebene die projicirende Ebene.

Demnach ist der Neigungswinkel einer schiefen Linie gegen eine Ebene der Winkel zwischen der schiefen Linie und ihrer Projection auf die Ebene.

Der Neigungswinkel einer auf der Ebene senkrecht stehenden Geraden gegen die Ebene ist ein Rechter.

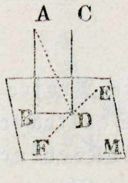
§ 168. **Der Neigungswinkel ABC (Fig. § 167) einer schiefen Linie AB gegen eine Ebene M ist der kleinste von allen Winkeln, welche die schiefe Linie mit den in der Ebene durch ihren Durchschnittspunkt B gezogenen Linien, z. B. mit BD, bilden kann.**

Man mache BD = BC und ziehe AD. Da AC als Projicirende senkrecht auf M steht, so ist (§ 165, 1) AC < AD, folglich auch ∡ ABC < ABD (§ 35.)

Zusätze. 1) Der Nebenwinkel ABE des Neigungswinkels ist der größte von allen Winkeln, welchen die Gerade AB mit den in der Ebene durch ihren Durchschnittspunkt gezogenen Linien bilden kann.

2) Die Winkel, welche die schiefe Linie AB mit den in der Ebene M durch ihren Durchschnittspunkt gezogenen Linien bildet, sind um so größer, je größer der Winkel ist, den der in der Ebene M liegende Schenkel mit der Projection BC der schiefen Linie bildet, und wenn zwei von den in der Ebene M liegenden Linien gleiche Winkel mit BC bilden, so bilden sie auch gleiche Winkel mit AB.

§ 169. **Wenn von zwei parallelen Linien die eine AB senkrecht ist auf einer Ebene M, so ist es auch die andere CD.**



Man verbinde die Durchschnittspunkte der Parallelen durch BD, ziehe in der Ebene M die EF ⊥ BD, endlich die AD. Da AB ⊥ BD und CD ∥ AB, so ist (§ 10) CD ⊥ BD. Ferner ist (§ 166, 3. 1) FE auf der Ebene ABDC, also auch auf CD senkrecht. Da mithin CD auf BD und FE senkrecht, so ist CD ⊥ M (§ 161).

§ 170. Wenn zwei Linien AB und CD auf der nämlichen Ebene M senkrecht stehen, so sind sie parallel. (Fig. § 169).

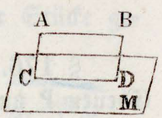
Wäre CD nicht parallel mit AB, so ziehe man durch D eine mit AB parallele Linie, welche auf M senkrecht sein wird (§ 169), und dann gäbe es in D zwei Senkrechte auf M, was nicht möglich ist (§ 163).

§ 171. Zwei Linien im Raume, welche einer dritten Linie parallel sind, sind auch einander parallel.

Da eine senkrechte Ebene auf der dritten Linie zugleich senkrecht auf den beiden andern Linien ist (§ 169), so müssen diese als Senkrechte auf der nämlichen Ebene parallel sein (§ 170).

§ 172. Eine Linie AB ist einer Ebene M parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Linie CD parallel ist.

Denn, wenn die in der Ebene ABCD liegende AB die Ebene M schneiden sollte, so könnte es nur in der Durchschnittslinie CD beider Ebenen geschehen; da aber AB als Parallele die CD nicht schneidet, so kann sie auch die Ebene M nicht schneiden.

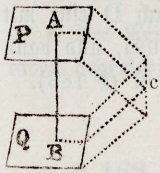


Zusatz. Durch einen und denselben Punkt lassen sich unendlich viele Linien parallel derselben Ebene ziehen. Denn zieht man in der Ebene aus einem beliebigen Punkt derselben beliebig viele Linien, und durch einen Punkt außerhalb der Ebene Parallellinien zu ihnen, so sind alle diese der Ebene parallel.

§ 173. Die Durchschnittslinien AB und CD zweier parallelen Ebenen P und Q mit einer dritten Ebene sind parallel.

Denn die in einer Ebene liegenden Linien AB und CD können sich nicht schneiden, weil sie sich zugleich in zwei parallelen Ebenen befinden; folglich sind sie parallel.

§ 174. Wenn zwei Ebenen P und Q auf der nämlichen Geraden AB senkrecht stehen, so sind sie parallel.



Begegneten sich die Ebenen etwa im Punkte C, so ziehe man CA und CB, welche Linien ein $\triangle$CAB bilden würden, in welchem $\sphericalangle$CAB = R = CBA wäre, was nicht möglich ist; daher muß P $\|$ Q sein.

§ 175. Wenn zwei Ebenen P und Q parallel sind, so steht eine Gerade AB, welche auf der einen Ebene Q senkrecht ist, auch auf der andern Ebene P senkrecht.

Legt man durch AB zwei beliebige Ebenen, welche P und Q in AC und BE, AD und BF schneiden, so ist AC $\|$ BE und AD $\|$ BF (§ 173). Da nun aber $\sphericalangle$ ABE = R = ABF (§ 156), so ist auch $\sphericalangle$ BAC = R = BAD, folglich (§ 161) AB $\perp$ P.

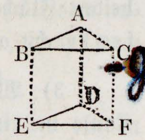
§ 176. Parallele Linien AB und CD zwischen parallelen Ebenen P und Q sind gleich.

Legt man durch AB und CD eine Ebene, so sind die Durchschnitte AC und BD parallel (§ 173), folglich ist ABDC ein Parallelogramm, mithin AB = CD.

Zusatz. Jede zwischen zwei parallelen Ebenen senkrecht auf beide gezogene Gerade wird die Entfernung oder der Abstand jener Ebenen von einander genannt. — Da nun die Richtigkeit des Lehrsatzes auch stattfindet, wenn die parallelen Linien AB und CD auf beiden Ebenen senkrecht stehen, so sind parallele Ebenen überall gleich weit von einander entfernt.

§ 177. Wenn die Schenkel zweier, nicht in der nämlichen Ebene liegender Winkel ABC und DEF parallel sind und in gleicher Richtung liegen, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.

1) Man mache BA = ED, BC = EF, und ziehe AC, DF, BE ..., so ist ABED ein Parallelogramm (§ 39), also AD # BE und ebenso CF # BE, folglich AD # CF, also ACFD ein Parallelogramm, mithin AC = DF. Da nun △ ABC ≅ DEF (§ 26), so ist ∢ ABC = DEF.



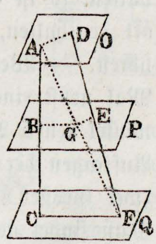
2) Wären die Ebenen ABC und DEF nicht parallel, und würde die durch B mit DEF parallele Ebene die Linie CF nicht in C, sondern in G schneiden, so wäre (§ 176) GF = BE; da aber auch CF = BE ist, so wäre GF = CF, was ungereimt ist; daher ist ABC || DEF.

Zusatz. Wenn man die Endpunkte dreier gleicher und paralleler, nicht in derselben Ebene liegender Linien BE, AD, CF verbindet, so entstehen congruente Dreiecke, deren Ebenen parallel sind.

Denn weil BE # AD # CF, so ist AB = DE, AC = DF, BC = EF, also △ ABC ≅ DEF und ebenso wie vorhin Ebene ABC || DEF.

§ 178. **Zwei gerade Linien im Raume AC und DF werden von drei parallelen Ebenen O, P, Q in proportionale Stücke geschnitten.**

Man ziehe AF, welche die mittlere Ebene in G trifft, und lege durch C, A, F sowie durch A, F, D Ebenen, welche die einander parallelen Durchschnittslinien BG und CF, GE und AD bilden (§ 173), dann ist (§ 97) AB : BC = (AG : GF =) DE : EF.



§ 179. Erklärungen. 1) Der keilförmige, zum Theil unbegränzte Raum, der zwischen zwei sich schneidenden Ebenen enthalten ist, wird Flächenwinkel genannt. Die Ebenen, welche den Flächenwinkel einschließen, heißen seine Seiten und die Gerade, in der die Seiten zusammentreffen, die Kante des Flächenwinkels.

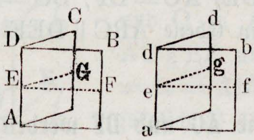
2) Zwei Flächenwinkel sind einander gleich, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß ihre Kanten und ihre Seiten gegenseitig zusammenfallen. — Wenn eine Ebene eine andere durchschneidet und auf beiden Seiten gleiche Flächenwinkel mit ihr bildet, so wird jeder der

beiden Flächenwinkel ein r e ch t e r genannt, und die eine Ebene heißt s e n k r e ch t auf der andern.

3) Wenn man in beiden Ebenen eines Flächenwinkels auf der Kante in einem Punkte derselben Perpendikel errichtet, so wird der von beiden Perpendikeln gebildete ebene Winkel der N e i g u n g s w i n k e l d e s F l ä ch e n w i n k e l s o d e r b e i d e r E b e n e n g e g e n e i n a n d e r genannt.

Die Ebene des Neigungswinkels steht senkrecht auf der Kante (§ 161). Es ist gleichgiltig, in welchem Punkte der Kante die Perpendikel gezogen werden, da zufolge § 177 der Neigungswinkel zweier Ebenen an allen Punkten ihrer Durchschnittslinie gleich groß sein muß.

§ 180. Zwei Flächenwinkel BADC und badc verhalten sich zu einander wie ihre Neigungswinkel FEG und feg.



Wenn die Flächenwinkel gleich sind, so sind auch ihre Neigungswinkel gleich; denn legt man jene so in einander, daß sie ganz zusammen fallen und der Punkt e auf E zu liegen kommt, so muß auch ef auf EF, eg auf EG fallen. Ist ferner der eine Flächenwinkel in dem andern genau mehrere Mal enthalten, so ist auch sein Neigungswinkel in dem des andern genau eben so oft enthalten, da zu gleichen Flächenwinkeln gleiche Neigungswinkel gehören. — Wenn endlich der kleinere Flächenwinkel in dem größern mehrere Mal nebst einen Rest enthalten ist, so denke man sich auf beide Flächenwinkel jenes Verfahren angewendet, bei welchem man durch fortgesetztes Auftragen der nachbleibenden Reste auf einander das gem. Maß zwischen zwei Größen zu bestimmen sucht. Ob man nun dabei einmal ein gem. Maß findet oder nicht, so lassen sich doch jedenfalls die Flächenwinkel gerade eben so oft wie die zugehörigen Neigungswinkel von einander wegnehmen, weil gleichen Flächenwinkeln gleiche Neigungswinkeln entsprechen. Daraus folgt, daß die Vergleichung der Flächenwinkel dieselben Verhältnißzahlen giebt wie die Vergleichung der Neigungswinkel, also auch das Verhältniß der Flächenwinkel zu einander in allen Fällen zugleich das der Neigungswinkel ist.

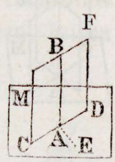
§ 181. Z u s ä t z e. 1) D a s M a ß e i n e s F l ä ch e n w i n k e l s i s t d e s s e n N e i g u n g s w i n k e l. Denn wenn man den rechten Flächenwinkel zum Maße aller übrigen Flächenwinkel annimmt, so wie der ebene rechte als Maß aller ebenen Winkel dient, so stimmt der Flächenwinkel dem numerischen Werthe nach mit seinem Neigungswinkel überein, d. h. jeder mit seinem besondern Maße gemessen, giebt dieselben Zahlen.

2) Da das Messen der Flächenwinkel sich auf das der ebenen Winkel zurückführen läßt, so können auch die Kreisbogen unmittelbar als Maße der Flächenwinkel dienen.

3) Wenn der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter ist, so stehen die Ebenen auf einander senkrecht.

4) Flächenwinkel heißen spitz, recht, stumpf, supplementär, complementär, Nebenwinkel, Scheitelwinkel, wenn ihren Neigungswinkeln diese Benennungen zukommen. Auch sind Scheitelflächenwinkel einander gleich, die anliegenden Winkel zweier sich schneidenden Ebenen betragen zusammeu zwei rechte Winkel u. s. w.

§ 182. **Wenn eine Gerade AB auf einer Ebene M senkrecht steht, so steht jede durch die Gerade gelegte Ebene CF ebenfalls auf der Ebene senkrecht.**



Zieht man in der Ebene M die Gerade AE senkrecht auf die Durchschnittslinie CD der beiden Ebenen, so ist, weil AB als Senkrechte auf M sowol auf CD als auf AE senkrecht steht, der Neigungswinkel BAE beider Ebenen ein rechter; folglich stehen die Ebenen auf einander senkrecht.

Zusätze. 1) Wenn drei gerade Linien AB, AC, AE in einem Punkte A auf einander senkrecht stehen, so ist jede von ihnen auf der Ebene durch die beiden andern senkrecht, und die drei Ebenen M, CF, BAE sind auf einander senkrecht.

2) Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht auf diesen senkrecht.

3) Die projicirende Ebene einer schiefen Linie steht auf der Projectionsebene senkrecht.

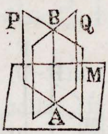
§ 183. **Wenn zwei Ebenen M und CF auf einander senkrecht sind, so ist eine Gerade AB, welche in der einen Ebene CF senkrecht auf die Durchschnittslinie CD gezogen wird, senkrecht auf der andern Ebene M (Fig. § 182).**

Zieht man in der Ebene M die $AE \perp CD$, so ist $\sphericalangle BAE = R$, da $CF \perp M$ steht, und weil auch $\sphericalangle BAC = R$, so ist $AB \perp M$.

§ 184. Wenn zwei Ebenen M und CF auf einander senkrecht sind und in einem Punkte ihrer Durchschnittslinie eine Senkrechte AB auf der einen Ebene M errichtet wird, so liegt dieselbe ganz in der andern Ebene CF (Fig. § 182).

Würde AB nicht in der Ebene CF liegen, so könnte man aus Punkt A in der Ebene CF eine Senkrechte auf CD ziehen, mithin eine zweite Senkrechte auf M durch denselben Punkt A errichten (§ 183), was aber nicht möglich ist (§ 163).

§ 185. Wenn zwei Ebenen P und Q auf einer dritten Ebene M senkrecht stehen und sich durchschneiden, so steht auch ihre Durchschnittslinie AB auf der letztern Ebene M senkrecht.



Errichtet man in A auf M eine Senkrechte, so muß diese sowol in der Ebene P als in der Ebene Q liegen (§ 184), kann also nur die Durchschnittslinie AB beider Ebenen sein.

II. Von den Raumecken.

§ 186. Erklärungen. 1) Wenn drei oder mehrere Ebenen in einem Punkte zusammenstoßen, so heißt der zwischen ihnen liegende, nach der einen Seite hin unbegränzte Raum eine Raumecke oder ein körperlicher Winkel, und jener Punkt der Scheitel oder die Spitze der Raumecke.

Die geraden Linien, in welchen die eine Raumecke bildenden Ebenen oder Seitenflächen sich durchschneiden, nennt man die Kanten, und die ebenen Winkel, welche von zwei auf einander folgenden Kanten gebildet werden, die Kantenwinkel der Raumecke. Je zwei Seitenflächen bilden einen Flächenwinkel.

Nach der Anzahl der Seitenflächen oder der Kantenwinkel, welche immer gleich ist der Anzahl der Kanten, werden Raumecken 3, 4, 5 . . . n seitige oder n kantige oder n winklige genannt. Unter den Stücken einer Raumecke werden ihre Kantenwinkel und Flächenwinkel verstanden. Eine dreiseitige Raumecke wird auch ein körperliches Dreieck genannt, dessen Seiten die Kantenwinkel, und dessen Winkel die Flächenwinkel der Raumecke sind.

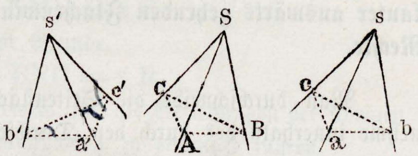
2) Zwei Raumecken heißen congruent, wenn man sie so in einander gelegt denken kann, daß sie in allen ihren Punkten zusammenfallen.

In congruenten Ecken sind sämmtliche Kantenwinkel und Flächenwinkel der einen denen der andern einzeln gleich; aber nicht umgekehrt ist mit der Gleichheit dieser Stücke die Congruenz der Ecken verbunden. Diese findet nämlich nur statt, wenn die gleichen entsprechenden Stücke in beiden Ecken nicht allein in derselben Ordnung, sondern auch, wofern die Spitzen nach einerlei Seite gekehrt sind, in derselben Richtung auf einander folgen.

Raumecken, in welchen die gegenseitig gleichen Stücke zwar in derselben Ordnung, aber in entgegengesetzter Richtung (in der einen links herum, wenn in der andern rechts herum) auf einander folgen, heißen symmetrisch.

Wenn in den drei Raumecken S, s, s'

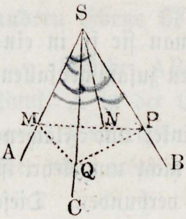
$\sphericalangle$ ASB = asb = a's'b'
$\sphericalangle$ ASC = asc = a's'c'
$\sphericalangle$ BSC = bsc = b's'c',



ferner die von den Ebenen der entsprechend gleichen Kantenwinkeln gebildeten Flächenwinkel gegenseitig gleich sind, so kann die Raumecke S wol mit der Raumecke s, nicht aber mit der Raumecke s' zur Deckung gebracht werden. Es sind demnach S und s congruente, S und s' symmetrische Ecken.

Bemerkung. Auch bei congruenten, in derselben Ebene liegenden Polygonen kann die Richtung, in der die gleichen Stücke auf einander folgen, in beiden Figuren entweder die nämliche oder eine entgegengesetzte sein. In beiden Fällen können aber die Polygone zur Deckung gebracht werden, in Folge der Grundeigenschaft der Ebene, daß ihre beiden Seiten einander völlig gleich sind.

§ 187. In jeder dreiseitigen Raumecke SABC ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte Kantenwinkel.

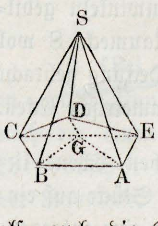


Sind die drei Kantenwinkel einander gleich, so versteht sich der Satz von selbst; sind sie aber ungleich, so braucht man nur zu beweisen, daß der größte Kantenwinkel kleiner ist als die Summe der beiden übrigen. Es sei ASB der größte von den drei Kantenwinkeln. Man ziehe aus einem Punkte M der Kante SA eine beliebige Gerade MP zur Kante SB, mache den $\sphericalangle$ MSN = ASC und nehme das Stück SQ = SN. Zieht man MQ und PQ, so ist $\triangle$ MSN $\cong$ MSQ (§ 20), also MN = MQ. Da nun MQ + PQ > MP, so ist PQ > PN, und weil in den Dreiecken PSQ und PSN die Seite SP gemeinschaftlich und SQ = SN ist, so ist (§ 35) $\sphericalangle$ PSQ > PSN, daher auch

$$PSQ + MSQ > PSN + MSN \text{ oder}$$
$$BSC + ASC > ASB.$$

§ 188. Die Summe aller Kantenwinckel einer Raumecke (mit lauter auswärts gehenden Flächenwinkeln) ist immer kleiner als vier Rechte.

Man durchschneide die Seitenflächen der Ecke S durch eine Ebene, nehme innerhalb des durch den Durchschnitt gebildeten Vielecks ABCDE

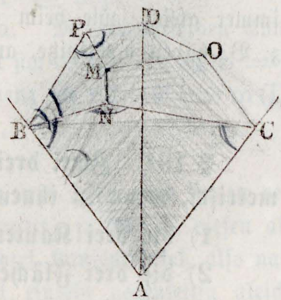


einen beliebigen Punkt G und verbinde denselben mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, so entstehen um G herum eben so viele Dreiecke als um die Spitze S der Raumecke herumliegen; folglich ist die Summe aller Dreieckswinkel dort eben so groß wie hier. Nun ist aber (§ 187)

$$\sphericalangle ABC < SBA + SBC$$
$$\sphericalangle BCD < SCB + SCD \text{ u. s. w.}$$

also auch die Summe der Umfangswinkel ABC, BCD . . . des Vielecks kleiner als die Summe der Winkel SBA, SBC, SCB . . ., welche an den Grundlinien der Dreiecke um S liegen. Daraus folgt, daß die Winkel um G, welche 4 R ausmachen, mehr betragen müssen als die Winkel um S.

§ 189. Wenn man durch einen beliebigen Punkt M innerhalb einer dreiseitigen Raumecke ABCD senkrechte Ebenen auf die Kanten der Raumecke legt, so bilden diese eine neue dreiwinklige Raumecke MNOP, deren Kantenwinkel die entsprechenden Flächenwinkel, und deren Flächenwinkel die entsprechenden Kantenwinkel der ersten Raumecke zu 2 Rechten ergänzen.



Die Kanten der Raumecke A mögen von den auf sie senkrecht gelegten Ebenen in B, C, D geschnitten werden. Der Construction zufolge ist $\sphericalangle$ NBP gleich dem Flächenwinkel an der Kante AB (§ 181) und weil AB auf der Ebene MB senkrecht steht, so ist $\sphericalangle$ ABN = R. Ebenso ist $\sphericalangle$ ACN = R. Die Ebene BAC steht auf jeder der beiden Ebenen MB und MC senkrecht (§ 182), weil sie durch die beiden Perpendikel AB und AC auf jenen Ebenen hindurchgeht. Daraus folgt, daß der Durchschnitt MN jener beiden Ebenen senkrecht auf der Ebene BAC steht (§ 185), daß also $\sphericalangle$ MNB = R = MNC und daher $\sphericalangle$ BNC gleich dem Flächenwinkel an der Kante MN ist. Ebenso ist $\sphericalangle$ MPB = R = MPD. Da nun in dem Viereck MNBP die Summe aller Winkel 4 Rechte beträgt und die Winkel bei N und P Rechte sind, so ist

$$\sphericalangle \text{NBP} + \text{NMP} = 2\text{ R}.$$

Im Viereck BACN ist aus gleichem Grunde

$$\sphericalangle \text{BAC} + \text{BNC} = 2\text{ R}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich der Beweis für die Beziehungen der übrigen Kanten- und Flächenwinkel beider Raumecken zu einander führen.

Zusatz. Die neue Ecke M heißt die Supplementarecke oder Polarecke der ursprünglichen Ecke A. Umgekehrt ist auch A die Supplementarecke von M. — Je stumpfer die eine von den Raumecken ist, desto spitzer ist die andere. — Die Kanten einer jeden der beiden Ecken stehen senkrech auf den Seitenflächen der andern Ecke.

§ 190. Die Summe der drei Flächenwinkel einer dreiseitigen Raumecke ist größer als 2 Rechte und kleiner als 6 Rechte.

Bezeichnet man durch A, B, C die Flächenwinkel der Raumecke und durch M, N, P die entsprechenden Kantenwinkel der zugehörigen Polarecke, so ist (§ 189)

$$A + M = 2R,\quad B + N = 2R,\quad C + P = 2R.$$
also auch $(A + B + C) + (M + N + P) = 6R.$

Da aber $M + N + P < 4R$ ist (§ 188), so ist

$$A + B + C > 2R \text{ und } A + B + C < 6R.$$

Zusatz. Die Winkelsumme im körperlichen Dreieck bleibt sich nicht immer gleich, wie beim ebenen Dreieck. Ein körperliches Dreieck kann z. B. haben drei spitze, auch drei rechte, auch drei stumpfe Flächenwinkel.

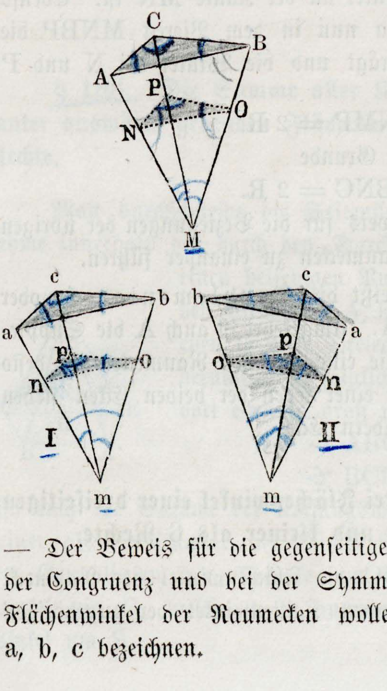
§ 191. Zwei dreiseitige Raumecken sind congruent oder symmetrisch, wenn in ihnen einzeln gegenseitig gleich sind

1) die drei Kantenwinkel, oder

2) die drei Flächenwinkel, oder

3) zwei Kantenwinkel und der zwischenliegende Flächenwinkel, oder

4) zwei Flächenwinkel und der zwischenliegende Kantenwinkel.



Es läßt sich zeigen, daß in jedem der vier Fälle sämmtliche Stücke in den beiden Ecken M und m (I), ebenso in den beiden Ecken M und m (II) einzeln gegenseitig gleich sein müssen, so daß die Ecken M und m (I) wegen der gleichen Ordnung der entsprechenden Stücke congruent, dagegen die Ecken M und m (II) wegen der umgekehrten Ordnung jener Stücke symmetrisch sind, wobei man sich in allen drei Raumecken auf gleiche Weise etwa die Seitenflächen MBC und mbc in der Ebene des Papiers liegend, und die Kanten MA und ma darüber erhaben vorzustellen hat. — Der Beweis für die gegenseitige Gleichheit sämmtlicher Stücke ist bei der Congruenz und bei der Symmetrie der Ecken genau derselbe. Die Flächenwinkel der Raumecken wollen wir immer durch A, B, C und a, b, c bezeichnen.

1) Wenn $\measuredangle$ AMB = amb, $\measuredangle$ AMC = amc, $\measuredangle$ BMC = bmc ist, und nimmt man auf zwei entsprechenden Kanten die gleichen Abschnitte MN und mn, und zieht in den anstoßenden Seitenflächen aus N die Geraden NO und NP senkrecht auf AM, und ebenso no und np senkrecht auf am, so folgt leicht, daß der Reihe nach

$$\triangle \text{MNO} \cong \text{mno}, \quad \triangle \text{MNP} \cong \text{mnp},$$
$$\triangle \text{MOP} \cong \text{mop}, \quad \triangle \text{NOP} \cong \text{nop}.$$

Also ist $\measuredangle$ ONP = onp, d. h. $\measuredangle$ A = a. Mittels derselben Construction an den beiden andern Kanten ergiebt sich ebenso, daß $\measuredangle$ B = b und $\measuredangle$ C = c ist. Hieraus folgt die Congruenz der Ecken M und m (I), und die Symmetrie der Ecken M und m (II).

2) Wenn A = a, B = b, C = c ist, und denkt man sich zu den Ecken M und m die Supplementarecken construirt, so sind in diesen als Supplemente von gleichen Flächenwinkel die drei Kantenwinkel, also nach dem ersten Falle auch die drei Flächenwinkel einzeln gegenseitig gleich. Hieraus folgt umgekehrt wiederum für die Ecken M und m die gegenseitige Gleichheit der drei Kantenwinkel, und daher ist wie im ersten Falle die Ecke M mit der Ecke m (I) congruent, dagegen mit m (II) symmetrisch.

3) Es sei $\measuredangle$ AMB = amb, $\measuredangle$ AMC = amc, A = a. Macht man an den Kanten MA und ma dieselbe Construction wie in 1), so ist der Voraussetzung zufolge $\measuredangle$ ONP = onp. Nun ist der Reihe nach

$$\triangle \text{MNO} \cong \text{mno}, \quad \triangle \text{MNP} \cong \text{mnp},$$
$$\triangle \text{NOP} \cong \text{nop}, \quad \triangle \text{MOP} \cong \text{mop},$$

also $\measuredangle$ BMC = bmc und daher nach 1) auch B = b und C = c.

4) Es sei A = a, B = b, $\measuredangle$ AMB = amb. In den Supplementarecken von M und m sind zwei Kantenwinkel und der zwischenliegende Flächenwinkel, folglich nach 3) auch die übrigen Stücke einzeln gegenseitig gleich, woraus wiederum für die Ecken M und m folgt, daß C = c, $\measuredangle$ AMC = amc, $\measuredangle$ BMC = bmc ist.

Zusatz. **Eine dreiseitige Raumecke ist durch die gegebene Größe und Anordnung von drei Stücken in den betrachteten vier Fällen vollkommen bestimmt.**

III. Von den Polyedern.

§ 192. Erklärungen. 1) Jeder von krummen oder ebenen Flächen vollständig begränzte Raum wird ein Körper genannt. — Die Gesammtheit der einen Körper begränzenden Flächen heisst die Oberfläche desselben.

Insofern man sich den von der Oberfläche eines Körpers eingeschlossenen Raum durch einen andern, als Maßeinheit angenommenen und bekannten Körper ausgemessen denkt, nennt man jenen Raum das Volumen oder den körperlichen Inhalt des Körpers.

Zwei Körper heißen einander gleich, wenn sie gleiches Volumen haben oder einen gleich großen Raum einnehmen, ganz abgesehen von ihrer Gestalt. Dagegen heißen sie congruent, wenn man sie so in einander gelegt denken kann, daß sie in allen ihren Theilen vollständig zusammenfallen.

2) Wenn alle Begränzungsflächen eines Körpers Ebenen sind, so heißt derselbe ein eckiger Körper oder ein Polyeder. Die einzelnen, ein Polyeder begränzenden Vielecke heißen die Seitenflächen, die geraden Linien, in welchen diese zusammenstoßen, die Kanten, die Punkte, in welchen mehrere Kanten zusammenstoßen, die Ecken, und die an den Ecken von den Kanten gebildeten Winkel die Kantenwinkel des Polyeders. An jeder Kante liegt ein Flächenwinkel und an jeder Ecke ein von wenigstens drei Seitenflächen gebildeter Körperwinkel.

Aus der großen Anzahl der durch ihre Form verschiedenen Polyeder werden wir im Folgenden nur die convexen (oder die Eulerschen) Polyeder betrachten, worunter solche verstanden werden, in welchen jeder Flächenwinkel concav (kleiner als 2 R) ist, also auch keine Seitenfläche, wenn sie verlängert wird, das Polyeder schneiden kann.

3) Jede gerade Linie, welche zwei Ecken eines Polyeders verbindet, ohne mit einer Kante des Polyeders zusammenzufallen oder in einer Seitenfläche desselben zu liegen, heißt eine Diagonallinie oder eine Diagonale des Polyeders. Jede Ebene, welche entweder durch eine Kante und eine Ecke, oder durch zwei Kanten eines Polyeders gelegt ist und nicht mit einer Seitenfläche desselben zusammenfällt, wird eine Diagonalebene genannt.

4) Dem Begriffe von der Congruenz der Körper gemäß sind in zwei congruenten Polyedern sämmtliche Stücke (Seitenflächen, Kanten, Kantenwinkel, Flächenwinkel) des einen den entsprechenden Stücken des andern völlig gleich; die gleichen Stücke folgen auch in derselben Ordnung und Richtung in beiden Polyedern aufeinander, wenn man sich diese mit einem Paar entsprechender Seitenflächen etwa in eine Ebene nach derselben Seite hin gelegt vorstellt. Umgekehrt aber können zwei Polyeder, die in allen ihren Stücken übereinstimmen, nicht immer zur Deckung gebracht werden, wie dieses schon bei den Raumecken der Fall war.

Zwei Polyeder nämlich, in welchen die Stücke paarweise gegenseitig gleich sind und in derselben Ordnung, aber in entgegengesetzter Richtung (oder auch in derselben Richtung, aber in entgegengesetzter Ordnung) auf einander folgen, sind einander symmetrisch und lassen sich im Allgemeinen nicht zur Deckung bringen. — Bei symmetrischen Polyedern entspricht, wie bei congruenten, jedem Punkte, jeder Linie, jedem Winkel u. s. w. des einen Polyeders ein Punkt, eine gleiche Linie, ein gleicher Winkel des andern. Die Symmetrie kann übrigens in besondern Fällen, wenn nämlich unter den Bestimmungsstücken eines jeden der beiden Körper gleiche vorkommen, in Congruenz übergehen.

Zwei Polyeder, die einem dritten symmetrisch sind, sind einander congruent.

Von zwei symmetrischen Polyedern ist das eine das Bild des andern im ebenen Spiegel. Auch unsere Hände sind symmetrische Körper.

5) Polyeder heißen einander ähnlich, wenn sie von gleich vielen, gegenseitig ähnlichen und übereinstimmig liegenden Seitenflächen unter gegenseitig gleichen Flächenwinkel begränzt werden.

6) Ein Prisma ist ein Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken als Grundflächen, und von so vielen Parallelogrammen, als eine der beiden Grundflächen Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen wird. — Nach der Anzahl der Seitenflächen wird das Prisma ein 3, 4, 5 . . . nseitiges genannt.

Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander heißt die Höhe des Prismas. Die geraden Linien, in welchen die Seitenflächen zusammenstoßen, werden Seitenkanten, und die Seiten der Grundflächen Grundkanten genannt.

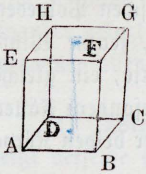
Stehen die Seitenkanten und daher auch die Seitenflächen senkrecht auf einer der Grundflächen und daher auch auf der andern, so heißt das

Prisma ein gerades oder senkrechtes, und dann ist jede Seitenkante der Höhe des Prismas gleich; in jedem andern Falle ist das Prisma ein schiefes und seine Höhe ist kleiner als eine der Seitenkanten.

Jeder mit den Grundflächen eines Prismas parallele Schnitt desselben ist eine den Grundflächen congruente Figur. Denn in beiden Vielecken sind sowol die Seiten (§ 173 und § 37) als auch die Winkel (§ 177, 1) einzeln gegenseitig gleich.

Jede Ecke eines Prismas wird von drei ebenen Winkeln gebildet. Ein n seitiges Prisma hat n + 2 Begränzungsflächen, 2 n Ecken und 3 n Kanten.

7) Ein Parallelepipedon ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind. — Ein solches wird also von sechs Parallelogrammen begränzt.



Je zwei gegenüberliegende Parallelogramme, z. B. AF und DG, sind congruent und parallel, denn die Seiten dieser Parallelogramme sind gegenseitig gleich und parallel, nämlich AB # DC, AE # DH..., weil die Vielecke ABCD, ADHE ... Parallelogramme sind, also sind auch die Winkel der Parallelogramme AF und DG gegenseitig gleich (§ 177, 1), woraus folgt, daß AF congruent und parallel mit DG ist (§ 177, 2).

Jedes Paar gegenüberliegender Seitenflächen läßt sich als Grundflächen des Parallelepipedons annehmen; der senkrechte Abstand der beiden als Grundflächen angenommenen Seitenflächen von einander heißt die Höhe des Parallelepipedons.

Ein Parallelepipedon, in welchem zwei Paare paralleler Begränzungsflächen auf den beiden übrigen, einander parallelen Begränzungsflächen, die man alsdann als Grundflächen zu betrachten pflegt, senkrecht stehen, wird ein gerades genannt; stehen aber jene vier Begränzungsflächen auf den beiden übrigen schief, so heißt das Parallelepipedon ein schiefes.

Ein gerades Parallelepipedon, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges. In einem solchen stehen je zwei zusammenstoßende Begränzungsflächen auf einander senkrecht und es sind daher sämmtliche Begränzungsflächen Rechtecke.

8) Der Würfel oder Cubus ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon, das von lauter Quadraten begränzt wird. — Die Kante des Würfels wird auch seine Seite genannt.

9) Eine Pyramide ist ein Körper, der von einem beliebigen Vieleck als Grundfläche (Basis) und von so vielen in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken, wie die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen wird. — Sie entsteht also, wenn man die Seiten eines Vielecks mit einem außerhalb der Ebene desselben liegenden Punkte durch Ebenen verbindet. — Nach der Anzahl der Seitenflächen wird eine Pyramide ein 3, 4, 5 ... n seitige genannt.

Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, heißt die Spitze oder der Scheitel der Pyramide, und die von der Spitze auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gefällte Senkrechte ihre Höhe.

Die von der Spitze nach den Ecken der Grundfläche gehenden Kanten heißen Seitenlinien oder Seitenkanten, und die geraden Linien, in welchen die Seitenflächen mit der Grundfläche zusammenstoßen, die Grundkanten der Pyramide.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck, und trifft die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte dieselbe in ihrem Mittelpunkte, so heißt die Pyramide eine regelmäßige. In derselben sind alle Seitenflächen gleichschenklige congruente Dreiecke.

Die einfachste von allen Pyramiden ist die dreiseitige, weil wenigstens vier Ebenen erforderlich sind, um einen Raum von allen Seiten einzuschließen. Alle Ecken einer solchen Pyramide sind dreikantig und jede Begränzungsfläche der Pyramide kann als ihre Grundfläche betrachtet werden.

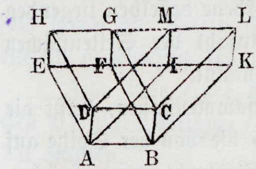
Eine n seitige Pyramide hat $n + 1$ Begränzungsflächen, $n + 1$ Ecken und $2\,n$ Kanten.

10) Wenn eine Pyramide von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so heißt der zwischen dieser Ebene und der Grundfläche enthaltene Körper eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. Der senkrechte Abstand der beiden parallelen Grundflächen des Stumpfes heißt seine Höhe.

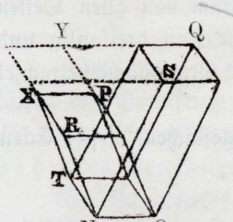
Ein n seitiger Pyramidenstumpf hat $n + 2$ Begränzungsflächen, $2\,n$ Ecken und $3\,n$ Kanten.

§ 193. Zwei Parallelepipeda von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Da die Grundflächen congruent und die Höhen gleich sind, so lassen sich die Parallelepipeda immer in eine solche Lage bringen, daß sie auf derselben untern Grundfläche stehen und ihre oberen Grundflächen in einer Ebene liegen. Nun können zwei Fälle eintreten, je nachdem nämlich außerdem noch zwei ihrer Seitenflächen in einer Ebene liegen oder nicht.

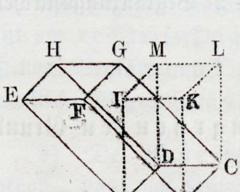


1) Die Parallelepipeda BH und AL, deren gemeinsame Grundfläche ABCD ist, mögen seitwärts von den nämlichen parallelen Ebenen AK oder DL begränzt werden; dann liegen auch ihre oberen Grundflächen zwischen denselben Parallelen EK und HL. — Die beiden dreiseitigen Prismen AEIDHM und BFKCGL sind congruent, indem sich leicht zeigen läßt, daß sie in allen ihren Stücken und in der Anordnung derselben vollkommen übereinstimmen und daher zur Deckung gebracht werden können (§ 192, 4). Nimmt man nun von dem ganzen Körper ABHL das eine Mal das erste Prisma, das andere Mal das zweite Prisma weg, so bleiben nach einander die Parallelepipeda AL und BH nach, welche demnach einander gleich sein müssen. — Die beiden oberen Grundflächen können auch mit den Seiten FG und IM aneinanderstoßen oder zum Theil zusammenfallen; der Beweis bleibt in allen Fällen derselbe.

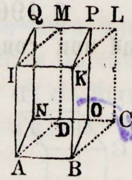


2) Haben die Parallelepipeda NP und NQ die gemeinsame Grundfläche TO und liegen außerdem nur noch ihre oberen Grundflächen PR und SQ in einerlei Ebene, so erweitere man die Ebenen OS, TQ, TR, OP, um ein drittes Parallelepipedon NY zu bilden, dessen Grundflächen TO und XY sind. Da nun NY zufolge des ersten Falles jedem der beiden gegebenen Parallelepipeda gleich ist, so müssen auch diese letzteren einander gleich sein.

§ 194. **Jedes Parallelepipedon ABCDEFGH läßt sich in ein rechtwinkliges Parallelepipedon von gleicher Grundfläche und Höhe verwandeln.**

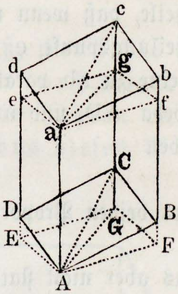


Legt man durch die Kanten AB, BC, CD, AD senkrechte Ebenen auf die Grundfläche ABCD und erweitert die Ebene FG, bis sie jene vier Ebenen schneidet; so hat das dadurch gebildete Parallelepipedon ABML mit dem gegebenen gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und gleichen Inhalt (§ 193). Ist nun AC ein Rechteck, so ist ABML ein rechtw. Parallelepipedon, also das verlangte.



Wenn aber AC kein Rechteck, also ABML nur ein gerades Parallelepipedon ist, so lege man, wie die zweite Figur zeigt, durch die Kanten AI und BK senkrechte Ebenen auf die Seitenfläche ABKI und erweitere die gegenüberliegende Seitenfläche CLMD. Dann entsteht das rechtw. Parallelepipedon ABPQ, welches dem Parallelepipedon ABML gleich ist (§ 193, 1), indem beide als auf der gemeinschaftlichen Grundfläche ABKI stehend betrachtet werden können; außerdem haben beide Parallelepipeda gleiche Grundflächen, nämlich ABON = ABCD (§ 86, 3.), so wie gleiche Höhe. Es hat demnach auch das gegebene Parallelepipedon ABGH mit dem rechtwinkligen ABPQ gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und gleichen Inhalt.

§ 195. Jedes Parallelepipedon ABCDabcd wird durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen ABCabc und ADCadc getheilt.

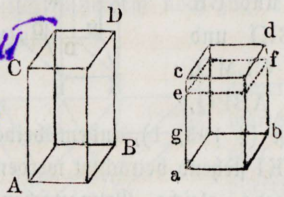


Legt man auf die Kante Aa durch die Endpunkte A und a senkrechte Ebenen, so ist das von ihnen und von den erweiterten Seitenflächen gebildete Parallelepipedon AFGEafge ein gerades, welches von der erweiterten Diagonalebene des ursprünglichen in die congruenten Hälften AFGafg und AEGaeg getheilt wird. Da ferner die vierseitigen Pyramiden ABCGF und abcgf, ACDEG und acdeg ebenfalls wegen Gleichheit und übereinstimmender Anordnung ihrer einzelnen Stücke congruent sind, so sind jene congruenten Hälften des geraden Parallelepipedons einzeln den schiefen dreiseitigen Prismen ABCabc und ADCadc gleich, folglich sind auch diese letzteren einander gleich.

Zusatz. Die beiden gleichen dreiseitigen Prismen, in welche ein schiefes Parallelepipedon durch eine Diagonalebene getheilt wird, sind einander symmetrisch. Denn an jedem Paar entsprechender Ecken, z. B. D und b, sind die Kantenwinkel gleich, nämlich $\sphericalangle$ ADC = cba, $\sphericalangle$ ADd = cbB, $\sphericalangle$ CDd = abB, ebenso die Flächenwinkel (§ 191, 1) und die Kanten, während die entsprechenden Stücke beider Prismen eine entgegengesetzte Anordnung haben.

§ 196 siehe Heft No 1.

§ 196. Zwei rechtwinklige Parallelepipeda AD und ad von congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.



Sind die Höhen AC und ac commensurabel, und ist ein gemeinschaftliches Maß derselben m Mal in AC, und n Mal in ac enthalten, so verhält sich $AC : ac = m : n$. Denkt man sich nun in beiden Parallelepipeden durch die Theilungspunkte, welches durch das Auftragen des gemeinschaftlichen Maßes auf ihren Höhen entstehen, parallele Ebenen zu den Grundflächen gelegt, so zerfällt AD in m, und ad in n einander gleiche rechtwinklige Parallelepipeda (§ 193), so daß sich verhält $AD : ad = m : n$. Aus beiden Proportionen folgt $AD : ad = AC : ac$.

Auch dann, wenn die Höhen incommensurabel sind, muß diese letzte Proportion stattfinden. Denn nähme man an, sie sei nicht richtig, sondern es verhielte sich

$$AD : ad = AC : ag,$$

wo $ag < ac$ ist, so theile man AC in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß wenn man dieselben von a ausgehend auf ac aufträgt, ein Theilungspunkt e zwischen g und c fallen muß. Legt man nun durch e eine zu ab parallele Ebene ef, so würde man für die beiden Parallelepipeda AD und af, weil ihre Höhen commensurabel sind, die Proportion haben

$$AD : af = AC : ae.$$

Aus beiden Proportionen würde folgen

$$ad : af = ag : ae,$$

was aber nicht stattfinden kann, indem $ad > af$, dagegen $ag < ae$ ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß das vierte Glied der Proportion $AD : ad = AC : ac$ nicht größer als ac sein könne, und es kann daher nur diese letzte Proportion stattfinden.

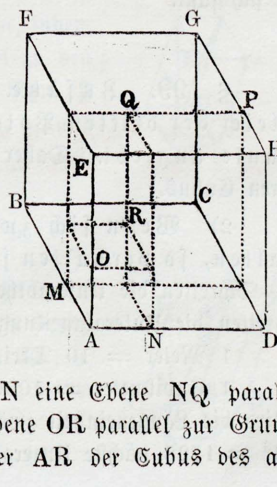
§ 197. Erklärungen. Einen Körper ausmessen heißt untersuchen, wie oft ein anderer, bekannter und als Maßeinheit angenommener Körper in ihm enthalten ist. Wie man sich zur Ausmessung ebener Figuren des über der Längeneinheit beschriebenen Quadrats bedient, so nimmt man zur Ausmessung der Körper oder zur Bestimmung ihres Volumens oder körperlichen Inhaltes als Maßeinheit den Würfel oder Cubus an, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Das Volumen eines Körpers heißt daher auch sein **Cubikinhalt**. — Einen Würfel, dessen Kante z. B. einen Fuß, einen Zoll u. s. w. lang ist, nennt man einen Cubikfuß, einen Cubikzoll u. s. w. — Die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Körper den als Maß angenommenen Cubus enthält, wird die **Maßzahl** des Körpers genannt.

Wenn auch nicht jeder Körper durch wiederholtes Setzen eines Cubus erzeugt und daher nicht unmittelbar dadurch gemessen werden kann, so ist er doch immer einer **mittelbaren** Ausmessung durch das Cubikmaß fähig, indem man nur, wie in Folgendem gezeigt werden wird, gewisse Linien, von welchen die Größe des Körpers abhängig ist, durch das Längenmaß zu messen braucht, um auf die Anzahl der im Körper enthaltenen und als Maßeinheit angenommenen Cuben einen Schluß machen zu können.

siehe H. N2.

§ 198. **Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich dem Produkte seiner drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten, oder gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.**

Man hat dieses so zu verstehen, daß, wenn die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten durch irgend ein und dasselbe Längenmaß gemessen etwa die Zahlen m, n, p geben, das Parallelepipedon durch den Cubus dieses Maßes gemessen die Zahl mnp giebt.



Es stelle AG ein rechtw. Parallelepipedon vor, und ein bestimmtes Längenmaß, z. B. ein Fuß, oder ein Zoll u. s. w. sei m Mal in der Kante AB, n Mal in AD, p Mal in AE enthalten, wobei m, n, p ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen sein können. Von der Ecke A aus nehme man auf den drei Kanten die Abschnitte AM, AN, AO, jeden gleich jenem Längenmaße, so ist $AB = m \cdot AM$, $AD = n \cdot AN$, $AE = p \cdot AO$. Legt man nun durch den Punkt M eine Ebene MP parallel zur Seitenfläche AH, ferner durch N eine Ebene NQ parallel zur Seitenfläche AF, endlich durch O eine Ebene OR parallel zur Grundfläche AC, so ist der dadurch gebildete Körper AR der Cubus des angenommenen Längenmaßes. Der Cubus AR und das rechtw. Parallelepipedon AQ haben eine gemeinschaftliche Grundfläche und verhalten sich (§ 196) wie AO zu AE, und weil die Kante AO, p Mal genommen, die Kante AE giebt, so muß man auch den Cubus p Mal nehmen, um das Parallelepipedon AQ zu erhalten. Es ist also

$$AQ = p \,.\, AR.$$

Da ferner die rechtw. Parallelepipeda AP und AQ die gemeinschaftliche Grundfläche ME haben und $AD = n \,.\, AN$ ist, so muß AQ ebenfalls n Mal genommen werden, damit man AP erhält. Demnach ist

$$AP = n \,.\, AQ, \text{ also auch } AP = np \,.\, AR.$$

Da endlich die rechtw. Parallelepipeda AG und AP die gemeinschaftliche Grundfläche AH haben und $AB = m \,.\, AM$ ist, so muß AP, wenn es m Mal genommen wird, AG geben. Es ist daher

$$AG = m \,.\, AP, \text{ also auch}$$

$$AG = mnp \,.\, AR \text{ oder } \frac{AG}{AR} = mnp.$$

Es ist mn die Maßzahl der Grundfläche und p die Maßzahl der Höhe des Parallelepipedons, daher ist dieses auch gleich dem Produkte (mn) p aus seiner Grundfläche und Höhe.

Wenn m, n, p ganze Zahlen sind, etwa 3, 4, 5 und man durch alle Theilungspunkte der drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten Ebenen parallel zu den drei diese Ecke bildenden Seitenflächen legt, so kann man sich auf anschauliche Weise überzeugen, daß das Parallelepipedon $3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60$ Cuben des zu Grunde gelegten Längenmaßes in sich faßt.

§ 199. Zusätze. 1) Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz der Zahl, welche die Länge seiner Kante angiebt. Daher nennt man die dritte Potenz einer Zahl auch ihren Cubus.

2) Wenn sich zwei Längenmaße etwa wie $m : n$ verhalten, so verhalten sich die Cuben jener Maße wie $m^3 : n^3$. — Schreiten die Unterabtheilungen des Längenmaßes zehntheilig fort, so schreiten die Unterabtheilungen des Körpermaßes tausendtheilig fort. z. B.

1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter;

1 Cubikmeter = 1000 Cubikdecimeter = 1000000 Cubikcentimeter.

Wird die Längeneinheit zwölftheilig abgestuft, so hat die Körpereinheit $12^3 = 1728$ nächste Unterabtheilungen, z. B.

1 Fuß = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Linien;
1 Cubikfuß = 1728 Cubikzoll, 1 Cubikzoll = 1728 Cubiklinien.

§ 200. **Der Inhalt eines jeden Parallelepipedons ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.**

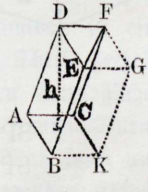
Da jedes Parallelepipedon gleich ist einem rechtwinkligen, das mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat (§ 194), und da der Inhalt des rechtwinkligen gleich ist dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe (§ 198), so ist auch der Inhalt eines jeden Parallelepipedons gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

§ 201. Zusätze. 1) Zwei Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

2) Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

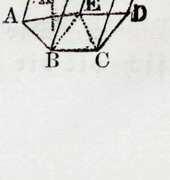
3) Parallelepipeda verhalten sich, wenn ihre Grundflächen gleich sind, wie ihre Höhen, und wenn ihre Höhen gleich sind, wie ihre Grundflächen.

§ 202. **Der Inhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.**



1) Man betrachte zuvörderst ein dreiseitiges Prisma ABCDEF, dessen Höhe h ist, ergänze dasselbe zu einem Parallelepipedon AG von gleicher Höhe, indem man aus B und C, E und F Linien parallel zu den Kanten AC und AB, DF und DE zieht. Nun ist (§ 200) das Parallelepipedon AG = ABKC . h, und das Prisma ABCDEF die Hälfte desselben (§ 195), folglich ist

$$\text{ABCDEF} = \frac{\text{ABKC}}{2} \cdot \text{h} = \text{ABC} \cdot \text{h}.$$



2) Ein mehrseitiges Prisma ABCDEF kann in lauter dreiseitige von derselben Höhe h zerlegt werden. Die Inhalte dieser Prismen sind ABE . h, BCE . h und CDE . h, also ist ihre Summe, d. h. der Inhalt des mehrseitigen Prismas gleich

$$(\text{ABE} + \text{BCE} + \text{CDE})\,\text{h} = \text{ABCDE} \cdot \text{h}.$$

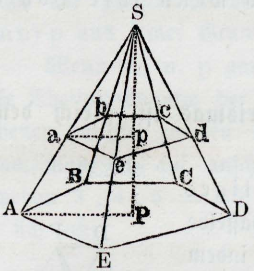
§ 203. Zusätze. 1) Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

2) Prismen verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

3) Prismen verhalten sich, wenn ihre Grundflächen gleich sind, wie ihre Höhen, und wenn ihre Höhen gleich sind, wie ihre Grundflächen.

§ 204. 1) Jeder mit der Grundfläche einer Pyramide SABCDE parallele Schnitt abcde ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck.

2) Die beiden ähnlichen Vielecke ABCDE und abcde verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen (SP, Sp) von der Spitze der Pyramide.



1) Die Seiten der Durchschnittsfigur sind den Seiten der Grundfläche parallel (§ 173); daher sind die Winkel in beiden Vielecken gegenseitig gleich (§ 177, 1), und außerdem verhält sich

$AB : ab = (AS : aS =)\ AE : ae = ED : ed \ldots$
also ist $ABCDE \sim abcde$.

2) Legt man durch SA und SP eine Ebene, so sind die Durchschnitte AP und ap parallel, also ist $\triangle\ ASP \sim aSp$, und weil auch $\triangle\ ASB \sim aSb$, so hat man

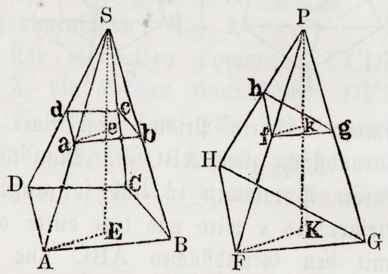
$SP : Sp = SA : Sa = AB : ab$, also auch
$SP^2 : Sp^2 = AB^2 : ab^2$. Da aber (§ 111) auch
$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$, so ist
$ABCDE : abcde = SP^2 : Sp^2$.

Zusätze. 1) Wird eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die dadurch entstehende kleinere Pyramide der ganzen Pyramide ähnlich (§ 192, 5).

2) Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate der Höhen der Pyramiden.

§ 205. Wenn man zwei Pyramiden SABCD und PFGH von gleicher Grundfläche und Höhe in gleichen Entfernungen (Se, Pk) von ihren Spitzen den Grundflächen parallel durchschneidet, so sind die Durchschnittsfiguren abcd und fgh in beiden Pyramiden einander gleich.

Man kann sich die beiden gleich hohen Pyramiden, bei welchen es nur auf die Gleichheit, nicht auf die Gestalt der Grundflächen ankommt, auf eine Ebene gestellt und durch eine mit dieser parallele Ebene geschnitten denken. Sind SE und PK die Höhen der Pyramiden, so hat man (§ 204)

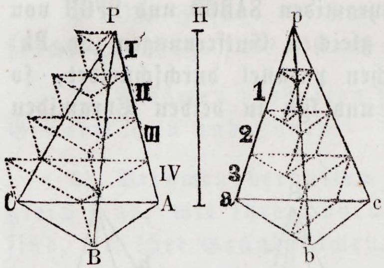


$$ABCD : abcd = SE^2 : Se^2$$
$$FGH : fgh = PK^2 : Pk^2.$$

Da nun nach der Voraussetzung $ABCD = FGH$, $SE = PK$, $Se = Pk$, also auch $SE^2 = PK^2$ und $Se^2 = Pk^2$ ist, so muß auch $abcd = fgh$ sein.

§ 206. Zwei dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

Denkt man sich die gleichen Höhen der beiden Pyramiden in eine sehr große, übrigens gegenseitig gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt und durch alle Theilungspunkte Ebenen parallel mit den Grundflächen gelegt, so sind je zwei von den Spitzen gleich weit entfernten Durchschnitte in beiden Pyramiden einander gleich (§ 205). Man kann nun die zwischen zwei aufeinander folgenden Durchschnitten liegenden Körper, welche eigentlich abgestumpfte Pyramiden sind, als dreiseitige Prismen betrachten, da sich ihre unendlich nahe über einander liegenden Grundflächen ohne merklichen Fehler als congruent annehmen lassen. Die Pyramiden bestehen demnach aus unendlich vielen, äußerst niedrigen Prismen, und weil je zwei derselben in beiden Pyramiden gegenseitig gleich sind (§ 203, 1), so müssen auch die Pyramiden selbst, als Summe von gleich vielen und gegenseitig gleich großen Prismen einander gleich sein.



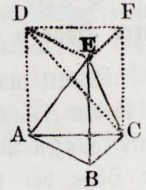
Ein anderer Beweis. Man denke sich die beiden gleich hohen Pyramiden PABC und pabc mit ihren gleichen Grundflächen auf eine Ebene neben einander gestellt, und nehme an, daß PABC > pabc, und zwar daß der Unterschied

$$PABC - pabc = Q$$

sei. Diesen Unterschied kann man sich immer als ein Prisma von einer gewissen Höhe x vorstellen, dessen Grundfläche gleich ABC ist. Man theile nun die gemeinschaftliche Höhe H beider Pyramiden in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß jeder kleiner als x wird und lege durch alle Theilungspunkte Ebenen parallel mit den Grundflächen ABC und abc, so sind je zwei entsprechende Durchschnitte in beiden Pyramiden einander gleich (§ 205). Construirt man jetzt in der ersten Pyramide über jedem Durchschnitte und über der Grundfläche die äußeren Prismen I, II, III, IV . . ., deren Seitenkanten parallel mit AP sind, dagegen in der zweiten Pyramide unter jedem Durchschnitte die inneren Prismen 1, 2, 3 . . ., so daß ihre Seitenkanten mit ap parallel sind, so ist wegen gleicher Grundfläche und Höhe (§ 203, 1) I = 1, II = 2, III = 3, so daß das unterste äußere Prisma IV den Unterschied zwischen der Summe aller äußeren und der Summe aller inneren Prismen bildet. Da nun die erste Summe größer ist als PABC, dagegen die zweite Summe kleiner als pabc, so muß der Unterschied zwischen jenen beiden Prismen-Summe größer sein als der Unterschied zwischen beiden Pyramiden, d. h. es ist Prisma IV > Q. — Es muß aber im Gegentheil IV < Q sein, weil diese beiden Prismen zwar dieselbe Grundfläche ABC haben, aber die Höhe des erstern kleiner ist als die Höhe x des andern. Folglich ist die Annahme, daß PABC > pabc sei, nicht möglich, und da sich ebenso zeigen läßt, daß auch nicht sein könne PABC < pabc, so muß PABC = pabc sein.

§ 207. Jede dreiseitige Pyramide ABCE ist der dritte Theil eines Prismas von derselben Grundfläche und Höhe.

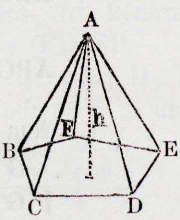
Wenn man aus den Ecken A und C die Geraden AD und CF der Kante BE parallel zieht, und durch E eine Ebene der Grundfläche ABC parallel legt, so entsteht das dreiseitige Prisma ABCDEF, welches



dieselbe Grundfläche und Höhe wie die Pyramide EABC hat, und zwar ist durch diese Construction die vierseitige Pyramide EACFD hinzugekommen. Diese letztere wird von einer durch E, C, D gelegten Ebene in zwei dreiseitige Pyramiden EACD und ECDF getheilt, die wegen gleicher Grundfläche (§ 87) und gleicher Höhe, indem ihre Spitzen in E zusammenfallen, einander gleich sind (§ 206). Ferner sind die beiden Pyramiden ECDF und EABC einander gleich, weil sie die gleichen Grundflächen DEF und ABC, und gleiche Höhen (§ 176, 3.) haben. Es sind demnach die drei Pyramiden EACD, ECDF, EABC einander gleich, und weil sie zusammen das Prisma bilden, so ist EABC der dritte Theil desselben.

§ 208. **Der Inhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe.**

Für die dreiseitige Pyramide folgt der Satz unmittelbar aus § 202 und § 207.



Eine mehrseitige Pyramide ABCDEF kann in lauter dreiseitige Pyramiden von derselben Höhe h zerlegt werden. Die Inhalte dieser Pyramiden sind $\frac{1}{3}h \cdot BCF$, $\frac{1}{3}h \cdot CDF$, $\frac{1}{3}h \cdot DEF$, also ist ihre Summe, d. h. der Inhalt der mehrseitigen Pyramide gleich

$$\tfrac{1}{3}h\,(BCF + CDF + DEF) = \tfrac{1}{3}h \cdot BCDEF.$$

§ 209. Zusätze. 1) Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

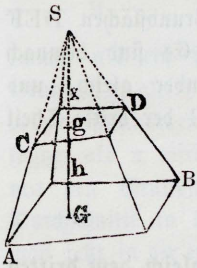
2) Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von derselben Grundfläche und Höhe.

3) Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

4) Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

§ 210. Den Inhalt einer abgestumpften Pyramide ABCD aus ihrer Höhe h und ihren Grundflächen G und g zu finden.

Denkt man sich die Seitenflächen der abgestumpften Pyramide bis zu ihrem Zusammentreffen in der Spitze S erweitert, wodurch dieselbe zu einer ganzen Pyramide SAB vervollständigt wird, und bezeichnet man die Höhe der hinzugekommenen obern Pyramide (Ergänzungspyramide) mit x, so ist (§ 208)



die ganze Pyramide SAB $= \frac{1}{3}G(h+x)$
die obere Pyramide SCD $= \frac{1}{3}gx$
also der Stumpf ABCD $= \frac{1}{3}G(h+x) - \frac{1}{3}gx$
oder ABCD $= \frac{1}{3}[Gh + (G-g)x]$.

Um x durch die gegebenen Größen auszudrücken, hat man (§ 204, 2)

$$G : g = (h+x)^2 : x^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x$$

$$\text{also } x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} \text{ und daher}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}\left[Gh + (G-g)\cdot\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right] \text{ oder}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\left(G + \frac{G-g}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\cdot\sqrt{g}\right).$$

Nun ist $G - g = (\sqrt{G}+\sqrt{g})(\sqrt{G}-\sqrt{g})$, also

$$\frac{G-g}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \sqrt{G}+\sqrt{g}, \text{ folglich}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,[G + (\sqrt{G}+\sqrt{g})\sqrt{g}] \text{ oder}$$

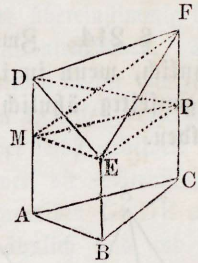
$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g).$$

Man findet also den Inhalt einer abgestumpften Pyramide, wenn man die Summe beider Grundflächen und des geometrischen Mittels aus denselben mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Zusatz. Ein Pyramidenstumpf hat denselben Inhalt wie eine gleich hohe vollständige Pyramide, deren Grundfläche gleich ist der Summe aus beiden Grundflächen des Stumpfes und dem geometrischen Mittel dieser Grundflächen.

§ 211. **Werden die drei Seitenkanten eines dreiseitigen Prismas von einer mit der Grundfläche nicht parallelen Ebene geschnitten, so ist der Inhalt des dadurch entstehenden prismatischen Stumpfes ABCDEF gleich dem dritten Theil des Produkts aus seiner Grundfläche und der Summe der drei aus den Ecken des schiefen Schnittes auf die Grundfläche gefällten Perpendikel.**

Legt man durch den Endpunkt E der kleinsten Seitenkante EB eine Ebene MEP parallel zur Grundfläche, so wird von dem prismatischen Stumpf eine vierseitige Pyramide (E)MDFP abgeschnitten, welche durch die Diagonalebene EDP in zwei dreiseitige Pyramiden (D)MEP und (F)DEP zerfällt. Für (F)DEP läßt sich eine andere dreiseitige Pyramide setzen, die ebenfalls MEP zur Grundfläche hat. Dann legt man die Diagonalebene EFM, so ist wegen gleicher Grundlinie und Höhe



$\triangle$ FDP = FMP, also Pyramide

(E)FDP = (E)FMP, oder

(F)DEP = (F)MEP.

Der ganze prismatische Stumpf ist demnach gleich den drei Körpern: Prisma ABCMEP, Pyramide (D)MEP und Pyramide (F)MEP.

Bezeichnet man nun die senkrechten Abstände der Ecken E, D, F von der Grundfläche ABC durch h, h + m, h + p, also durch m und p die senkrechten Abstände der Ecken D und F von der Ebene MEP, so ist

$$\text{Prisma ABCMEP} = ABC \times h = ABC \times \frac{h + h + h}{3}$$

$$\text{Pyramide (D)MEP} = MEP \times \frac{m}{3} = ABC \times \frac{m}{3}$$

$$\text{Pyramide (F)MEP} = MEP \times \frac{p}{3} = ABC \times \frac{p}{3}$$

$$\text{zusammen ABCDEF} = ABC \times \frac{h + (h + m) + (h + p)}{3}$$

§ 212. Zusatz. Der vorstehende Ausdruck giebt

$$ABCDEF = \tfrac{1}{3}\,ABC \,.\, h + \tfrac{1}{3}\,ABC\,(h + m) + \tfrac{1}{3}\,ABC\,(h + p).$$

Der prismatische Stumpf ist also gleich der Summe dreier Pyramiden, welche dieselbe Grundfläche ABC haben wie das Prisma, und deren Spitzen in den Ecken D, E, F des schiefen Schnittes liegen.

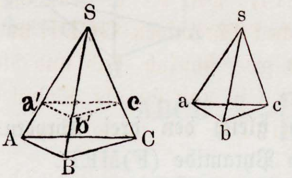
Wenn die Kanten AD, BE, CF auf ABC senkrecht stehen, so ist

$$ABCDEF = \tfrac{1}{3}ABC\,(AD + BE + CF).$$

§ 213. Symmetrische Polyeder haben gleichen Inhalt.

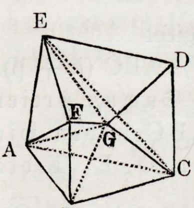
Zunächst sind symmetrische Pyramiden einander gleich, da das Volumen einer Pyramide nur von ihrer Höhe und dem Flächeninhalte, nicht von der Gestalt ihrer Basis abhängt, und in zwei symmetrischen Polyedern alle entsprechenden Stücke gegenseitig gleich sind. — Da ferner zwei beliebige symmetrische Polyeder, wie sich leicht zeigen läßt, in eine gleiche Anzahl paarweise symmetrischer Pyramiden zerlegt werden können, so müssen sie ebenfalls gleichen Inhalt haben.

§ 214. Zwei dreiseitige Pyramiden SABC und sabc sind ähnlich, wenn in ihnen zwei übereinstimmig liegende Gränzflächen gegenseitig ähnlich sind und mit einander gleiche Flächenwinkel bilden.

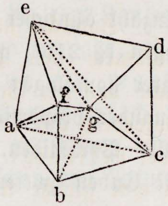


Es sei $\triangle$ ASB $\sim$ asb, $\triangle$ ASC $\sim$ asc, Flächenwinkel BASC = basc. Macht man Sa' = sa, Sb' = sb, Sc' = sc, und legt durch a', b', c' eine Ebene, so ist die Pyr. Sa'b'c' $\cong$ sabc (191, 3). Da nun auch $\triangle$ ASB $\sim$ a'Sb' und $\triangle$ ASC $\sim$ a'Sc' mithin AB $\parallel$ a'b' und AC $\parallel$ a'c' ist (§ 98), so sind die Ebenen ABC und a'b'c parallel (§ 177, 2), und daher die Pyramiden SABC und Sa'b'c' einander ähnlich (§ 204, 1), folglich ist auch SABC $\sim$ sabc.

§ 215. Zwei ähnliche Polyeder ABCDEFG und abcdefg lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender dreiseitiger Pyramiden zerlegen.



Die eine Seitenfläche ABCDE des ersten Polyeders sei ein Fünfeck, an welches sich wie an eine Grundfläche zwei Vierecke BCGF, DEFG, und drei Dreiecke ABF, AEF, CDG anschließen. Wählt man eine beliebige Ecke G und legt von ihr aus die Diagonalebenen GCE, GAF, GAC, GAB, so zerfällt das Polyeder in die dreiseitigen Pyramiden GCDE, GACE, GABC, GAEF, GABF. Das andere Polyeder, in welchem die entsprechenden Buchstaben homologe Ecken bezeichnen und die einzelnen Stücke dieselbe Anordnung haben, sei von g aus auf die nämliche Art zerlegt, so sind zunächst beide Polyeder in eine gleiche Anzahl übereinstimmig liegender dreiseitiger Pyramiden zerlegt. — Da nun in beiden Polyedern (§ 192, 5) außer den paarweise gleichen Flächenwinkeln nicht blos sämmtliche Seitenflächen, sondern auch die Dreiecke, in welche die



vieleckigen Seitenflächen zerfallen, entsprechend ähnlich sind (§ 110, 2), so ist (§ 214) Pyramide GCDE ∾ gcde, GABC ∾ gabc, GAEF ∾ gaef, GABF ∾ gabf, indem jedes Paar zwei ähnliche und übereinstimmig liegende Begränzungsflächen hat, welche gleiche Flächenwinkel bilden. Die Bestimmungsstücke für diese Reihe von Pyramiden werden immer von zwei homologen Seitenflächen (oder zwei correspondirenden Dreiecken derselben) und dem zwischenliegenden Flächenwinkel der Polyeder selbst gebildet. — Endlich ist Pyramide GAEC ∾ gaec (§ 214), weil die Seitenflächen ACE und ace, ferner die, zugleich den ähnlichen Pyramiden GCDE und gcde angehörenden Seitenflächen GCE und gce ähnlich sind und die zwischenliegenden Flächenwinkel an der Kante CE und ce als Supplemente gleicher Flächenwinkel der Pyramiden GCDE und gcde einander gleich sind.

§ 216. **In zwei ähnlichen Polyedern verhalten sich 1) die Oberflächen wie die Quadrate, und 2) die Volumina wie die Cuben zweier homologen Kanten.**

1) Da in zwei ähnlichen Polyedern die Seitenflächen paarweise ähnlich und daher sämmtliche Kanten einander proportional sind, so verhalten sich je zwei homologe Seitenflächen wie die Quadrate irgend zweier homologen Kanten (§ 111), also auch die beiderseitigen Summen aller Seitenflächen wie jene Quadrate.

2) Wenn die Polyeder zwei dreiseitige Pyramiden P und p sind, und bezeichnet man ihre Grundflächen durch G und g, ihre Höhen durch H und h, zwei beliebige homologe Kanten derselben durch K und k, so ist (§ 204, Zus. 2)

$$G : g = H^2 : h^2, \text{ also auch } GH : gh = H^3 : h^3.$$

Da aber $GH : gh = P : p$ (§ 209, Zusatz 3) und $H^3 : h^3 = K^3 : k^3$, so ist $P : p = K^3 : k^3$.

Irgend zwei andere ähnliche Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender dreiseitiger Pyramiden zerlegen (§ 215), und da sich je zwei Pyramiden verhalten wie die Cuben ihrer homologen Kanten und in ähnlichen Polyedern sämmtliche Kanten einander proportional sind, so müssen sich auch die beiderseitigen Summen aller Pyramiden, d. h. die beiden Polyeder zu einander verhalten, wie die Cuben zweier beliebigen homologen Kanten.

§ 217. Zusatz. Homologe Kanten ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Maßzahlen der Oberflächen, oder wie die Cubikwurzeln aus den Maßzahlen der Volumina der Polyeder.

Soll z. B. ein Polyeder construirt werden, das einem gegebenen ähnlich ist und eine doppelt so große Oberfläche hat, so müssen sich zwei homologe Kanten des gegebenen und des gesuchten Polyeders verhalten wie $1 : \sqrt{2}$; soll aber das gesuchte Polyeder noch ein Mal so groß sein als das gegebene, so ist das Verhältniß ihrer homologen Kanten wie $1 : \sqrt[3]{2}$.

§ 218. Regelmäßige Polyeder, d. h. solche, deren sämmtliche Seitenflächen congruente regelmäßige Vielecke und deren Körperwinkel alle einander congruent sind, kann es nicht mehr als fünf geben.

Zur Bildung einer Raumecke sind mindestens drei Kantenwinkel erforderlich und die Summe aller Kantenwinkel muß weniger als 360^0 ausmachen (§ 188).

Sind nun die Seitenflächen einer Ecke gleichseitige Dreiecke, so beträgt jeder Kantenwinkel 60^0. Drei, vier oder fünf Winkel von 60^0 geben zusammen jedesmal weniger als 360^0; dagegen ist $6 . 60^0 = 360^0$, $7 . 60^0 > 360^0$ u. s. w. Aus gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Polyeder zusammengesetzt werden.

Sind die Seitenflächen Quadrate, so ist jeder Kantenw. $= 90^0$. Drei derselben geben eine Summe $< 360^0$, dagegen ist bei vier oder noch mehr rechten Winkeln keine Ecke mehr möglich. Es giebt daher nur ein von Quadraten umschlossenes regelmäßiges Polyeder.

Sind die Seitenflächen regelmäßige Fünfecke, so ist jeder Kantenwinkel = 108°. Drei solcher Winkel machen zusammen weniger, vier dagegen schon mehr als 360° aus. Es ist daher nur ein regelmäßiges Polyeder mit fünfeckigen Seitenflächen möglich.

Aus regelmäßigen Sechsecken, Siebenecken u. s. w. können keine Ecken, mithin auch keine Polyeder gebildet werden, da schon drei Winkel eines regelm. Sechsecks 3 . 120° = 360° betragen.

§ 219. Zusatz. Die fünf regelmäßigen Polyeder sind folgende:

Das Tetraeder oder die regelmäßige dreiseitige Pyramide von 4 congruenten regelmäßigen Dreiecken begränzt, deren 3 an jeder der 4 Ecken.

Das Octaeder von 8 congr. und regelm. Dreiecken begränzt, deren 4 an jeder der 6 Ecken.

Das Ikosaeder von 20 congr. und regelm. Dreiecken begränzt, deren 5 an jeder der 12 Ecken.

Das Hexaeder oder der Würfel von 6 gleichen Quadraten begränzt, deren 3 an jeder der 8 Ecken.

Das Dodekaeder von 12 congr. und regelm. Fünfecken begränzt, deren 3 an jeder der 20 Ecken.

IV. Vom Cylinder.

§ 220. Erklärungen. 1) Wenn sich eine gerade Linie längs den Peripherieen zweier gleicher und paralleler Kreise so bewegt, daß sie dabei immer der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kreise parallel ist, so wird die von ihr erzeugte krumme Fläche eine Cylinderfläche und der von dieser letztern und den beiden Kreisen eingeschlossene Körper ein Cylinder genannt.

Die beiden parallelen Kreise heißen die Grundflächen, die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte die Axe und die senkrechte Entfernung beider Grundflächen von einander die Höhe des Cylinders.

Die einen Cylinder zum Theil begränzende Cylinderfläche heißt der Mantel oder die krumme Oberfläche des Cylinders, dessen gesammte Oberfläche also von dem Mantel und den beiden Grundflächen gebildet wird.

2) Jede mit der Axe parallele, zwei Punkte in den Peripherieen beider Grundflächen verbindende Gerade wird eine Seitenlinie oder auch die Seite des Cylinders genannt. Jede Seitenlinie muß ganz in die Cylinderfläche fallen, denn man kann sie als die in irgend einer ihrer Lagen befindliche Gerade betrachten, welche durch ihre Bewegung die Cylinderfläche beschreibt.

Alle Seitenlinien eines Cylinders sind der Axe, also auch einander gleich und parallel (§ 176, § 171).

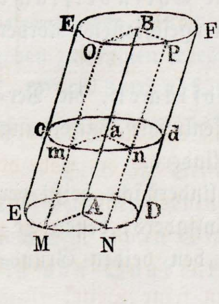
Hieraus folgt, daß jeder durch die Axe eines Cylinders gelegte Schnitt (Achsenschnitt genannt) und ebenso jeder der Axe parallele Schnitt ein Parallelogramm ist.

3) Ein gerader oder senkrechter Cylinder ist ein solcher, dessen Axe auf den beiden Grundflächen senkrecht steht. Jeder andere Cylinder wird ein schiefer genannt. — Im geraden Cylinder stehen alle Seitenlinien ebenfalls senkrecht auf den Grundflächen (§ 169) und sind, ebenso wie die Axe, der Höhe des Cylinders gleich. Im schiefen Cylinder ist die Höhe kleiner als die Axe oder eine Seitenlinie.

Den geraden Cylinder kann man sich auch durch Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten als um eine feste Axe entstanden denken (§ 162, Zus.).

4) Zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen gleiche Neigungswinkel gegen die Grundflächen bilden und zu den Radien (oder Durchmessern) derselben in gleichem Verhältnisse stehen.

§ 221. In einem Cylinder ist jeder der Grundfläche parallele Schnitt cmd ein der Grundfläche gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe AB des Cylinders liegt.



Legt man durch die Axe in beliebiger Richtung zwei Ebenen, welche die Grundfläche und den ihr parallelen Schnitt in AM und am, AN und an schneiden, so entstehen die Parallelogramme AMam und ANan, da (§ 220, 2) Mm || Aa || Nn und (§ 173) Am || am, An || an ist. Mithin ist Am = am u. AN = an, woraus wegen AM = AN folgt am = an. Da dieser Schluß gilt, wo auch die Punkte m und n im Umfange der Durchschnittsfigur liegen, so ist diese ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt und dessen Radius dem der Grundfläche gleich ist.

§ 222. Der Inhalt eines jeden Cylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Da sich ein Kreis als ein regelm. Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ansehen läßt (§ 149), so kann man auch den Cylinder selbst als ein Prisma betrachten, dessen Grundfläche jenes Vieleck und dessen Höhe die des Cylinders ist. Daraus folgt, daß der Inhalt des Cylinders eben so wie der eines Prismas berechnet werden kann, also dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe gleich ist.

§ 223. Zusätze. 1) Bezeichnet h die Höhe eines Cylinders und r den Radius seiner Grundfläche, so ist letztere gleich $r^2\pi$, folglich

der Cylinder $= r^2\pi h$.

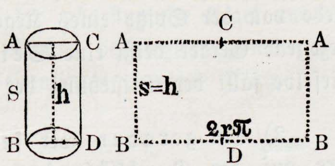
2) Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

3) Cylinder verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

4) Cylinder verhalten sich, wenn ihre Grundflächen gleich sind, wie ihre Höhen, und wenn ihre Höhen gleich sind, wie ihre Grundflächen und daher auch wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der Grundflächen (§ 152, 8)

§ 224. Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus der Peripherie seiner Grundfläche und Höhe (Seite oder Axe).

Da jede der Axe eines Cylinders parallele Gerade, welche zwei Punkte in den Peripherieen beider Grundkreise verbindet, ganz in die Cylinderfläche fällt, so kann man sich diese längs einer Seite AB des Cylinders durchschnitten und in eine Ebene ausgebreitet denken.



Man erhält dann ein Rechteck, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe oder Seite des Cylinders gleich ist, und weil der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich ist dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe, so ist auch die krumme Oberfläche des geraden Cylinders gleich dem Produkte aus der Peripherie seiner Grundfläche in seine Höhe oder in seine Seite.

§ 225. Zusätze. 1) Bezeichnet h die Höhe, s die Seite und r den Radius der Grundfläche eines geraden Cylinders, so ist die Peripherie der Grundfläche $= 2r\pi$, folglich der Mantel

$$M = 2r\pi h = 2r\pi s.$$

2) Da die Grundfläche $= r^2\pi$ ist, so ist die gesammte Oberfläche O des geraden Cylinders $= 2r\pi h + r^2\pi + r^2\pi$, also

$$O = 2r\pi\,(r + h) = 2r\pi\,(r + s).$$

V. Vom Kegel.

§ 226. Erklärungen. 1) Wenn sich eine gerade Linie längs der Peripherie eines Kreises so bewegt, daß sie dabei immer durch einen festen, außerhalb der Ebene des Kreises liegenden Punkt geht, so heißt die von der geraden Linie erzeugte krumme Fläche eine Kegelfläche und der von dieser Fläche und der Kreisebene eingeschlossene Körper ein Kegel. — Jener feste Punkt wird die Spitze oder der Scheitel des Kegels, die Kreisebene seine Grundfläche oder Basis, die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche die Axe, und die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte die Höhe des Kegels genannt.

Die einen Kegel zum Theil begränzende Kegelfläche heißt die krumme Oberfläche oder der Mantel des Kegels, dessen gesammte Oberfläche also von dem Mantel und der Grundfläche gebildet wird. — Jede von der Spitze eines Kegels bis zur Peripherie der Grundfläche gezogene Gerade heißt eine Seitenlinie oder eine Seite des Kegels; dieselbe fällt der Entstehung der Kegelfläche zufolge ganz in den Mantel.

2) Ein gerader oder senkrechter Kegel ist ein solcher, dessen Axe auf der Grundfläche senkrecht steht. Jeder andere Kegel ist ein schiefer. — Der gerade Kegel entsteht auch durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete, wobei dann die andere Kathete die Grundfläche und die Hypotenuse den Mantel beschreibt. — Im geraden Kegel fällt die Höhe mit der Axe zusammen und alle Seitenlinien sind einander gleich (§ 165, 2). Daher heißt der gerade Kegel auch ein gleichseitiger.

3) Jeder durch die Spitze gelegte Schnitt eines Kegels (Scheitelschnitt) ist ein Dreieck, in welchem zwei Seiten Kegelseiten sind, die dritte eine Sehne des Grundkreises ist. Ist der Schnitt durch die Axe gelegt (Axenschnitt), so wird das Dreieck von zwei Kegelseiten und einem Durchmesser der Grundfläche gebildet. — Im geraden Kegel sind alle Scheitelschnitte gleichschenklige Dreiecke und alle Axenschnitte congruente gleichschenklige Dreiecke, die auf der Grundfläche senkrecht stehen (§ 182).

4) Zwei Kegel sind ähnlich, wenn ihre Axen gleiche Neigungswinkel gegen die Grundflächen bilden und sich wie die Radien derselben verhalten.

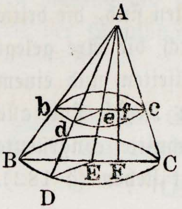
§ 227. Wenn ein beliebiger Kegel von einer der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so heißt der zwischen dieser Ebene und der Grundfläche enthaltene Körper ein abgestumpfter Kegel oder ein Kegelstumpf. Der übrige, an der Spitze liegende Theil des Kegels, welcher also den Kegelstumpf zum vollständigen Kegel ergänzt, heißt der Ergänzungskegel.

Die Grundfläche des gegebenen Kegels und die Durchschnittsfigur, von der im Lehrsatze § 228 bewiesen werden wird, daß sie ein Kreis ist, heißen die Grundflächen, ihre senkrechte Entfernung von einander die Höhe, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Grundflächen die Axe des Kegelstumpfes. Je nachdem die Axe auf den Grundflächen senkrecht steht oder nicht, heißt der Kegelstumpf ein gerader oder ein schiefer.

Die einen Kegelstumpf begränzende Kegelfläche wird der Mantel, und jede ganz in den Mantel hineinfallende, von den beiden Grundflächen begränzte gerade Linie, die also gehörig verlängert durch die Spitze des ganzen Kegels gehen würde, aus welchem der abgestumpfte Kegel entstanden ist, wird eine Seitenlinie oder Seite des letztern genannt. In einem geraden Kegelstumpfe sind alle Seitenlinien einander gleich.

§ 228. **1) Jeder mit der Grundfläche BDC parallele Schnitt bdc eines Kegels ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe AE des Kegels liegt.**

2) Die Grundfläche eines Kegels und der ihr parallele Durchschnitt bdc verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen (AF, Af) von der Spitze.



1) Legt man durch die Axe in beliebiger Richtung zwei Ebenen, welche die Grundfläche und den parallelen Schnitt in BC u. bc, DE u. de schneiden, so ist BC || bc, DE || de (§ 173), folglich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

$$BE : be = AE : ae = DE : de,$$

woraus wegen BE = DE folgt be = de. Ebenso kann man zeigen, daß die Entfernung des Punktes e von allen übrigen Punkten des Umfanges der Durchschnittsfigur gleich be, also daß letztere ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

2) Wenn die Gerade AF auf den parallelen Ebenen senkrecht steht, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

$$BE : be = AB : ab = AF : af,$$

also auch $BE^2 : be^2 = AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2$.

Da sich aber zwei Kreise wie die Quadrate ihrer Radien verhalten (§ 152, 8), so ist auch

Kreis BE : Kreis be $= AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2$.

§ 229. Zusätze. 1) Wird ein Kegel durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der dadurch entstehende kleinere Kegel dem ganzen Kegel ähnlich (§ 226, 4).

2) Die Grundflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Kegelhöhen.

§ 230. Der Inhalt eines jeden Kegels ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus seiner Grundfläche und Höhe.

Da sich ein Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ansehen läßt, so kann der Kegel als eine gleich hohe Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, woraus folgt, daß sein Inhalt eben so wie der einer Pyramide dem dritten Theile des Produkts aus Grundfläche und Höhe gleich ist.

Zusätze. 1) Bezeichnet h die Höhe eines Kegels und r den Radius der Grundfläche, so ist letztere $= r^2\pi$, folglich

der Kegel $= \frac{1}{3}r^2\pi h$.

2) Wenn s die Seite eines geraden Kegels und r den Radius der Grundfläche bedeutet, so ist seine Höhe oder Axe $= \sqrt{s^2 - r^2}$, also

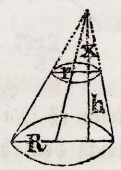
$$\text{der gerade Kegel} = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}.$$

3) Zwei Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

4) Zwei Kegel verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

5) Zwei Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

§ 231. Den Inhalt eines jeden Kegelstumpfes aus seiner Höhe h und den Radien R und r seiner beiden Grundflächen zu finden.



Man denke sich durch Erweiterung der krummen Oberfläche den Kegelstumpf zu einem ganzen Kegel vervollständigt. Die Höhe des Ergänzungskegels sei x, also die Höhe des ganzen Kegels h + x, dann ist (§ 230)

$$\text{der ganze Kegel} = \tfrac{1}{3} R^2 \pi (h + x),$$

$$\text{der Ergänzungskegel} = \tfrac{1}{3} r^2 \pi x,$$

$$\text{also der Stumpf} = \tfrac{1}{3} R^2 \pi (h + x) - \tfrac{1}{3} r^2 \pi x$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi \left[R^2 h + (R^2 - r^2) x \right].$$

Weil aber $R : r = h + x : x$, also $x = \dfrac{h r}{R - r}$, so ist

$$\text{der Kegelstumpf} = \tfrac{1}{3} \pi \left(R^2 h + \frac{R^2 - r^2}{R - r} \cdot h r \right).$$

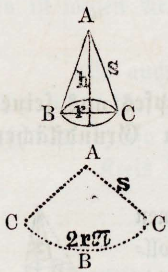
Da nun $R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$ ist, so ist

$$\text{der Kegelstumpf} = \tfrac{1}{3} \pi h \left[R^2 + (R + r) r \right]$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi h (R^2 + R r + r^2).$$

Da dieser Ausdruck gleich $\tfrac{1}{3} h (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$ und $\pi R r = \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}$ ist, so folgt, daß ein Kegelstumpf denselben Inhalt hat wie ein gleich hoher vollständiger Kegel, dessen Grundfläche gleich ist der Summe aus beiden Grundflächen des Kegelstumpfes und dem geometrischen Mittel dieser Grundflächen.

Zusatz. Setzt man in in dem Ausdrucke $\frac{1}{3}\pi h\ (R^2 + Rr + r^2)$ den Radius der kleinern Basis $r = o$, so erhält man $\frac{1}{3} R^2 \pi h$, also die Formel für den Inhalt eines ganzen Kegels, und setzt man die Radien beider Grundflächen einander gleich, $R = r$, so ergiebt sich die Formel für den Inhalt eines Cylinders, nämlich $R^2 \pi h$.

§ 232. Die krumme Oberfläche eines geraden Kegels ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie seiner Grundfläche und aus seiner Seite.



Da jede von der Spitze eines Kegels zur Peripherie der Grundfläche gezogene Gerade ganz in die Kegelfläche fällt, so kann man sich diese längs einer Seite des Kegels durchschnitten und in eine Ebene ausgebreitet denken, und weil alle Seiten eines geraden Kegels gleich sind, so muß die abgewickelte Kegelfläche einen Kreisausschnitt geben, dessen Radius gleich der Seite des Kegels und dessen Bogen gleich der Peripherie der Grundfläche ist. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist dem halben Produkte aus seinem Bogen und Radius gleich (§ 152, 1), folglich ist auch die krumme Oberfläche des Kegels gleich dem halben Produkte aus der Peripherie der Grundfläche in die Seite des Kegels.

Zusätze. 1) Bezeichnet s die Seite eines geraden Kegels und r den Radius seiner Grundfläche, so ist die Peripherie der letztern $2 r \pi$, folglich der

$$\text{Kegelmantel } M = rs\pi.$$

2) Die gesammte Oberfläche eines geraden Kegels ist

$$O = rs\pi + r^2\pi = r\pi\,(r + s).$$

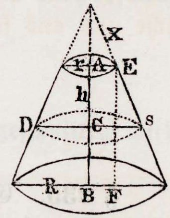
3) Wenn der Radius r und die Höhe h des Kegels gegeben sind, so ist die Seite desselben gleich $\sqrt{r^2 + h^2}$, also

$$\text{der Mantel } M = r\pi \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$\text{die gesammte Oberfl. } O = r\pi \left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)$$

4) Die Peripherie des mittlern Kreises eines Kegels, d. h. eines durch die Mitte der Axe oder Höhe parallel zur Grundfläche gelegten Schnittes ist gleich der halben Peripherie der Grundfläche, da sich die

beiden Peripherieen wie ihre Radien (§ 149) und diese sich wiederum so verhalten, wie die halbe Höhe des Kegels zur ganzen Höhe. **Der Mantel eines geraden Kegels ist daher auch gleich dem Produkte aus seiner Seite und der Peripherie des mittlern Kreises.**

§ 233. **Die krumme Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes aus seiner Seite s und den Radien R und r seiner beiden Grundflächen zu finden.**



Denkt man sich den Kegelstumpf zu einem ganzen Kegel vervollständigt und bezeichnet die Seite des Ergänzungskegels mit x, so ist die Seite des ganzen Kegels $s + x$, folglich (§ 232)
der Mantel des ganzen Kegels $= R(s + x)\pi$,
der Mantel des Ergänzungskegels $= rx\pi$,
also der Mantel des Stumpfes $= R(s + x)\pi - rx\pi$
$= [Rs + (R - r)x]\pi$.
Da nun $R : r = s + x : x$ also $x = \frac{rs}{R - r}$, so ist der Mantel des Stumpfes $= (Rs + rs)\,\pi = (R + r)\pi s$.

Da dieser Ausdruck gleich $(\pi R + \pi r)s$ ist, **so ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes gleich dem Produkte aus seiner Seite und der halben Summe der Peripherieen seiner beiden Grundflächen.**

§ 234. Zusätze. 1) Wenn man durch die Mitte C der Axe AB eine den Grundflächen parallele Ebene legt, so ist der Radius des dadurch entstehenden mittlern Kreises $CD = \frac{R + r}{2}$, also seine Peripherie $2\left(\frac{R + r}{2}\right)\pi = (R + r)\pi$. Der Ausdruck $(R + r)\pi s$ zeigt also, **daß der Mantel eines geraden Kegelstumpfes gleich ist dem Produkte aus seiner Seite und der Peripherie des mittlern Kreises.**

2) Die **gesammte Oberfläche** eines geraden Kegelstumpfes ist
$O = (R + r)\pi s + R^2\pi + r^2\pi = \pi\,[R^2 + r^2 + (R + r)s]$.

3) Setzt man in der Formel $(R + r)\pi s$ den Radius $r = o$, so ergiebt sich die Formel für den Mantel des ganzen Kegels (§ 232, 1),

und setzt man $R = r$, so folgt daraus $2r\pi s$, also der Ausdruck für den Mantel des geraden Cylinders (§ 225, Zus. 1).

4) Wenn außer R und r die Höhe des geraden Kegelstumpfes $AB = h$ gegeben ist, und fället man auf die untere Grundfläche die Senkrechte **EF**, welche gleich h ist, so ist $s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$, und daher findet man für den Mantel und die gesammte Oberfläche des Kegelstumpfes

$$M = (R + r)\pi \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$O = \pi \left[R^2 + r^2 + (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}\right].$$

VI. Von der Kugel.

§ 235. Erklärungen. Wenn sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser als feste Axe herumdreht, bis er wieder in seine vorige Lage zurückkehrt, so beschreibt sein Bogen eine Kugelfläche. Der von einer Kugelfläche eingeschlossene Körper heißt eine Kugel und der Mittelpunkt des Halbkreises, durch dessen Bewegung um seinen Durchmesser die Kugelfläche erzeugt ist, der Mittelpunkt oder das Centrum der Kugel. — Die Kugelfläche heißt in Bezug auf die von ihr begränzte Kugel die Oberfläche der letztern.

Jede von dem Mittelpunkte bis an die Kugelfläche gezogene gerade Linie wird ein Halbmesser oder Radius und jede durch den Mittelpunkt gehende, auf beiden Seiten von der Kugelfläche begränzte gerade Linie ein Durchmesser (Diameter) der Kugel genannt. — Die Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte auf der Kugel.

Aus der Entstehung der Kugel folgt, daß alle ihre Halbmesser einander gleich sind und daß jeder Durchmesser dem doppelten Halbmesser gleich ist. Man kann daher von der Kugel auch folgende Erklärung geben: Die Kugel ist ein Körper, welcher von einer einzigen Fläche begränzt wird, deren sämmtliche Punkte von einem innerhalb des umschlossenen Raumes liegenden Punkte gleich weit entfernt sind.

Kugeln von gleichen Halb- oder Durchmessern sind congruent. Denn denkt man sie sich so in einander gelegt, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen, so müssen sich die Oberflächen decken.

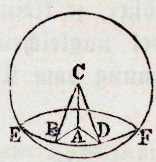
§ 236. Die Oberfläche einer Kugel ist eine nach allen Richtungen hin gekrümmte Fläche.

Denn wäre irgend ein Stück der Kugelfläche eine Ebene, so könnte man in dieser eine gerade Linie ziehen, auf letzterer drei beliebige Punkte wählen und die gerade Linie mit dem Kugelcentrum durch eine Ebene verbinden; man hätte dann in einer Ebene drei auf einer Geraden liegende Punkte, die von einem vierten, derselben Ebene angehörigen Punkte (dem Kugelcentrum) gleichweit (um den Kugelradius) entfernt wären, was aber unmöglich ist (§ 32, 1).

Zusatz. **Eine gerade Linie kann mit der Kugelfläche höchstens zwei Punkte gemein haben.**

§ 237. Wenn eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so erhellet die Richtigkeit des Satzes sofort aus der Entstehung der Kugel. Geht aber die Durchschnittsebene nicht durch den Mittelpunkt C, so fälle man von demselben die Senkrechte CA auf die Ebene und verbinde zwei beliebige Punkte B und D des Umfanges der Durchschnittsfigur sowol mit A als mit C. Da nun $\triangle CAB \cong CAD$ (§ 27, 3.), also $AB = AD$ ist und dieser Schluß gilt, wo man auch im Umfange der Durchschnittsfigur die Punkte B und D annehmen mag, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dessen Mittelpunkt A ist.



§ 238. Zusätze. 1) Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene wird ein Kugelkreis genannt.

2) **Die vom Mittelpunkte der Kugel auf einen Kugelkreis gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt desselben.**

3) **Die Verbindungslinie der Mittelpunkte einer Kugel und eines Kugelkreises steht auf dem Kugelkreise senkrecht.**

4) **Eine im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf diesem errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der**

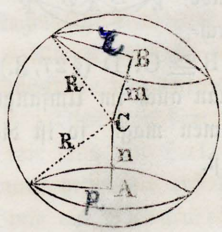
Kugel. Denn die Senkrechte muß mit der die Mittelpunkte der Kugel und des Kugelkreises verbindenden Geraden zusammenfallen, weil sich durch einen Punkt einer Ebene nur eine Senkrechte auf letztere ziehen läßt (§ 163).

5) Die in den Mittelpunkten zweier nicht paralleler Kugelkreise auf diesen errichteten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkte der Kugel (Fig. § 239).

6) Die Mittelpunkte zweier parallerer Kugelkreise liegen in einem und demselben Kugeldurchmesser, welcher auf beiden Kugelkreisen senkrecht steht.

7) Ein Kugelkreis ist durch drei auf der Kugelfläche gegebene Punkte bestimmt (§ 158).

§ 239. **1) Kugelkreise in gleicher Entfernung vom Kugelcentrum sind einander gleich. 2) Gleiche Kugelkreise sind gleich weit vom Kugelcentrum entfernt. 3) Kugelkreise sind um so größer, je kleiner ihre Entfernung vom Kugelcentrum ist. 4) Von zwei ungleichen Kugelkreisen hat der größere eine kleinere Entfernung vom Kugelcentrum.**



Wenn man aus dem Kugelcentrum auf beide Kugelkreise die senkrechten Linien m und n fället, so treffen diese die Mittelpunkte der Kreise und bilden die Entfernungen der letzteren vom Kugelcentrum. Zieht man nun in beiden Kreisen die Radien r und p und verbindet deren Endpunkte mit dem Kugelcentrum durch den Radius R der Kugel, so hat man in den rechtwinkligen Dreiecken $R^2 = r^2 + m^2$ und $R^2 = p^2 + n^2$, folglich

$$r^2 + m^2 = p^2 + n^2.$$

1) Wenn $m = n$, also $m^2 = n^2$, so ist $r^2 = p^2$ oder $r = p$.
2) Wenn $r = p$, also $r^2 = p^2$, so ist $m^2 = n^2$ oder $m = n$.
3) Wenn $n < m$, also $n^2 < m^2$, so ist $p^2 > r^2$ oder $p > r$.
4) Wenn $p > r$, also $p^2 > r^2$, so ist $n^2 < m^2$ oder $n < m$.

§ 240. Zusätze. 1) Ein Kugelkreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt ein größter Kreis oder ein Hauptkreis der Kugel. Im Gegensatze zu demselben heißen alle übrigen Kugelkreise kleine Kreise oder Nebenkreise der Kugel.

2) Alle Hauptkreise einer Kugel sind einander gleich, weil sie gleiche Halbmesser haben.

3) Hauptkreise einer Kugel halbiren einander, denn ihre Ebenen gehen beide durch den Mittelpunkt der Kugel, folglich muß auch ihre Durchschnittslinie durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und kann daher nur ein Durchmesser sein.

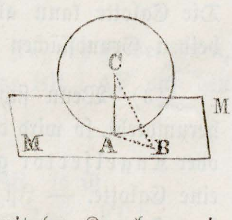
4) Die Kugel und ihre Oberfläche werden, wie durch das Princip der Deckung sofort erhellet, von jedem Hauptkreise in zwei congruente Theile getheilt. Die beiden Theile der Kugel werden daher Halbkugeln genannt.

5) Durch zwei Gegenpunkte der Kugelfläche kann man unzählig viele Hauptkreise legen, durch zwei Punkte aber, die nicht Gegenpunkte sind, nur einen Hauptkreis, obwol unzählig viele Nebenkreise.

§ 241. **1) Wenn eine Ebene M auf einem Kugelradius AC in seinem Endpunkte senkrecht steht, so ist sie eine Berührungsebene der Kugel, d. h. sie hat außer diesem Punkte mit der Kugel keinen Punkt gemein.**

2) Eine Berührungsebene M steht senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Kugelradius CA.

1) Wenn AC $\perp$ M ist und man verbindet C mit einem beliebigen, außer A liegenden Punkte B der Ebene M, so ist CB > AC (§ 165, 1), folglich liegt B und ebenso jeder andere von A verschiedene Punkt der Ebene M außerhalb der Kugel.



2) Wenn die Ebene M nur den Punkt A mit der Kugel gemein hat, so muß jede vom Radius AC verschiedene, aus C zur Ebene M gezogene Gerade CB > CA sein; folglich ist CA die kürzeste unter allen von C zur Ebene M gezogenen Geraden und daher auf M senkrecht.

Zusatz. Die vom Kugelcentrum auf die Berührungsebene gefällte Senkrechte trifft die letztere im Berührungspunkte. — Die auf einer Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte geht durch das Kugelcentrum (§ 163).

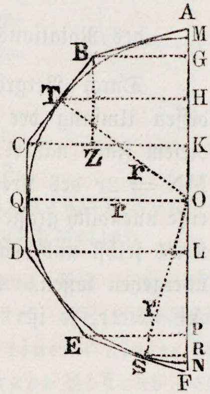
§ **242**. Erklärungen. 1) Jeder Kugelkreis theilt die Kugel in zwei Kugelabschnitte oder Kugelsegmente und die Kugelfläche in zwei Kugelkappen oder Calotten. Wenn der Kugelkreis ein Hauptkreis ist, so sind beide Segmente Halbkugeln. In jedem andern Falle sind sie ungleich. -- Der Kugelkreis heißt die Grundfläche des Kugelsegmentes sowol als der Calotte. — Zieht man durch die Mitte der Grundfläche einen Durchmesser der Kugel, der also (§ 238. Zus. 3) auf der Grundfläche senkrecht steht, so sind die beiden Theile desselben zwischen seinen Endpunkten und der Mitte der Grundfläche die Höhen der Segmente und der Calotten, und zwar ist jeder Theil des Durchmessers die Höhe desjenigen Segmentes oder derjenigen Calotte, worin er liegt. Die Endpunkte des Durchmessers kann man als die Mitten oder die Scheitel der Calotten ansehen.

2) Das zwischen zwei Parallelkreisen (d. h. zwei einander parallelen Kugelkreisen) liegende Stück der Kugelfläche heißt eine Zone und das zwischen ihr und den beiden Parallelkreisen enthaltene Stück der Kugel selbst eine Kugelschicht oder körperliche Zone. — Die Höhe der Zone oder der Kugelschicht ist der senkrechte Abstand der sie begränzenden Parallelkreise, welche die Grundflächen der Zone oder der Kugelschicht bilden. Jene Höhe wird durch den zwischen die Grundflächen fallenden Theil des auf ihnen senkrechten Durchmessers der Kugel gemessen. Die Calotte kann als eine Zone betrachtet werden, bei welcher eine der beiden Grundflächen auf Null reducirt ist.

3) Wenn sich ein Kreissector um einen seiner Gränzhalbmesser herumdreht, so wird der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsector genannt. Der Bogen des Kreissectors beschreibt dabei eine Calotte. — Ist der erzeugende Kreissector kleiner als ein Quadrant, so besteht der Kugelsector aus einem Kugelsegmente und einem mit seiner Spitze im Kugelcentrum liegenden Kegel, der eine gemeinschaftliche Grundfläche mit dem Kugelsegmente hat; ist er aber gleich einem Quadranten, so wird der Kugelsector zur Halbkugel.

§ 243. **Die Oberfläche einer Kugel ist gleich $4r^2\pi$, wenn r ihren Radius bezeichnet.**

Wenn man um einen Halbkreis MQN, dessen Radius r sei, den halben Umfang ABCDEF eines regelm. Polygons von gerader Seitenzahl beschreibt und die ganze Figur um AF gedreht denkt, so erzeugt ABCDEF einen so genannten Rotationskörper, während die einzelnen Seiten des Polygons die Oberflächen von geraden ganzen und abgestumpften Kegeln und von einem geraden Cylinder beschreiben. Zieht man aus den Ecken des Polygons senkrechte Linien auf die Axe AF, so sind die Abschnitte auf der letztern AG, GK, KL ... die Höhen jener Körper.



1) Um nun den Mantel eines Kegelstumpfes, z. B. den von BC erzeugten zu berechnen, ziehe man aus B die Gerade BZ $\perp$ CK und aus der Mitte oder dem Berührungspunkte T der Seite BC die Gerade TH $\perp$ AF und den Radius TO. Da TH der Radius des mittlern Kreises des Kegelstumpfes ist, so ist (§ 234, Zus. 1)

$$\text{Mantel } BC = 2\pi \,.\, TH \,.\, BC.$$

Da aber $\triangle BCZ \sim TOH$ ist (§ 83, 2), so hat man

$$BC : TO = BZ : TH \text{ oder } BC : r = GK : TH,$$

$$\text{also } BC \,.\, TH = r \,.\, GK, \text{ folglich Mantel } BC = 2\pi r \,.\, GK.$$

2) Um ferner den Cylindermantel CD zu berechnen, ziehe man aus dem Berührungspunkte Q den Radius QO, dann ist QO = DL, also (§ 224) Mantel CD $= 2\pi r \,.\, KL$.

3) Um endlich den Mantel eines ganzen Kegels zu berechnen, ziehe man aus dem Berührungspunkte S die Gerade SR $\perp$ AF und den Radius SO; dann ist (§ 232, Zus. 4)

$$\text{Mantel } EF = 2\pi \,.\, SR \,.\, EF$$

Da aber $\triangle EFP \sim OSR$, also $EF : r = FP : SR$, so ist

$$EF \times SR = r \,.\, FP, \text{ folglich Mantel } EF = 2\pi r \,.\, FP.$$

Hieraus geht hervor, daß man auf gleiche Weise den Mantel eines Kegels, Kegelstumpfes und Cylinders findet, **wenn man die Höhe des Körpers mit $2\pi r$ multipliciret.** Man hat demnach

$$\text{Mantel } AB = 2\pi r \,.\, AG$$
$$\text{Mantel } BC = 2\pi r \,.\, GK$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{Mantel } EF = 2\pi r \,.\, PF,$$ also ist die Oberfläche des Rotationskörpers $= 2\pi r \,.\, (AG + GK \ldots + PF) = 2\pi r \,.\, AF$.

Durch Vergrößerung der Seitenzahl des Polygons können wir dessen Umfang der Peripherie des Kreises unendlich nahe bringen. In diesem Falle nähert sich aber die Axe AF des Polygons dem Durchmesser $MN = 2r$ des Kreises und geht in diesen über, wenn wir dem Polygone eine unendlich große Seitenzahl geben, d. h. dasselbe in den eingeschriebenen Kreis selbst und den Rotationskörper in die von letzterem beschriebene Kugel übergehen lassen. Setzen wir also in dem Ausdrucke $2\pi r \,.\, AF$ die Axe $AF = 2r$, so ist

die Oberfläche der Kugel $= 4r^2\pi$.

Zusätze. 1) Die Oberfläche einer Kugel ist vier Mal so groß als ein größter Kreis derselben.

2) Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Umfange ($2r\pi$) eines größten Kreises, multiplicirt mit dem Durchmesser ($2r$), oder auch gleich einem Kreise, dessen Halbmesser dem Durchmesser ($2r$) der Kugel gleich ist, da $(2r)^2\pi = 4r^2\pi$ ist.

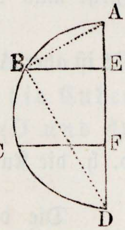
3) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser. Denn sind O und o die Oberflächen zweier Kugeln, R und r ihre Halbmesser, D und d ihre Durchmesser, so ist

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

1. Heft V

§ 244. Der Flächeninhalt einer Zone oder Calotte ist gleich $2\pi rh$, wenn h ihre Höhe und r den Kugelradius bezeichnet.

Wenn sich der Halbkreis ABCD, in welchem die Geraden BE und CF auf dem Durchmesser AD senkrecht stehen, um AB herumdreht so beschreibt der Bogen AB eine Calotte und der Bogen BC eine Zone, deren Höhen bezüglich AE und EF sind. Nun ergibt sich durch vollkommen gleiche Constructionen und gleiche Schlüsse wie bei der Bestimmung der ganzen Oberfläche der Kugel in § 243, daß der Inhalt der Zone oder Calotte gefunden wird, wenn man ihre Höhe mit dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplicirt. Setzt man $EF = h$, so ist demnach die Zone $BC = 2\pi r h$, und wird $AE = h$ gesetzt, so ist die Calotte $AB = 2\pi r h$.



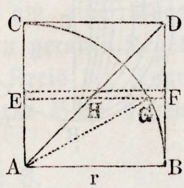
Zusätze. 1) Zonen oder Calotten auf derselben Kugel verhalten sich wie ihre Höhen. — Jede Zone oder Calotte verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche, wie die Höhe derselben zum Durchmesser.

2) Zieht man die Sehne AB, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD, daß $AB^2 = AD \,.\, AE = 2r \,.\, AE$, also auch $2\pi r \,.\, AE = \pi \,.\, AB^2$, d. h. der Flächeninhalt einer Calotte ist einem Kreise gleich, dessen Radius der gerade Abstand des Scheitels vom Umfange der Grundfläche ist.

Zusatz 3 siehe Heft VI.

§ 245. Der Inhalt einer Kugel ist gleich $\frac{4}{3} r^3\pi$, wenn r ihren Radius bezeichnet.

Erster Beweis. Es sei ABDC ein Quadrat mit der Seite $AB = r$, AD eine Diagonale desselben und BGC ein mit dem Radius r aus A beschriebener Quadrant. Wird die ganze Figur um AC als Axe gedreht, so beschreibt das Quadrat einen geraden Cylinder, das Dreieck ACD einen geraden Kegel, dessen Spitze in A liegt, und der Quadrant eine Halbkugel. Denkt man sich nun diese drei Körper an irgend einer Stelle durch zwei der Grundfläche parallele, einander unendlich nahe liegende Ebenen geschnitten, so kann ebenso wie die dadurch erzeugte Cylinderscheibe EF auch die Kugelscheibe EG und die Kegelscheibe EH als ein gerader Cylinder von unendlich kleiner Höhe betrachtet werden, welche mit h bezeichnet sei. Es ist demnach die



$$\text{Cylinderscheibe} = EF^2\pi h,$$
$$\text{Kugelscheibe} = EG^2\pi h,$$
$$\text{Kegelscheibe} = EH^2\pi h.$$

Zieht man AG, so hat man im rechtw. Dreieck AEG

$$EG^2 = AG^2 - AE^2.$$

Es ist aber $AG = EF$, $AE = EH$ (weil $\sphericalangle CAD = CDA = EHA$), also

$$EG^2 = EF^2 - EH^2, \text{ folglich auch}$$

$$EG^2 \pi h = EF^2 \pi h - EH^2 \pi h,$$

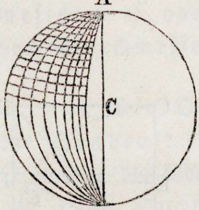
d. h. die Kugelscheibe ist gleich der Cylinderscheibe weniger der Kegelscheibe.

Die drei von den Flächen ABCD, ABGC, ACD beschriebenen Körper, Cylinder, Halbkugel und Kegel, welche dieselbe Höhe r haben, kann man aus einer unendlichen Menge solcher Scheiben zusammengesetzt betrachten, und weil je drei zwischen den nämlichen Parallelebenen enthaltenen Scheiben in dem angegebenen Verhältnisse zu einander stehen, so folgt, daß auch die Halbkugel selbst gleich ist dem Cylinder, weniger dem Kegel. Es ist

$$\text{der Cylinder} = r^3\pi, \text{ der Kegel} = \tfrac{1}{3} r^3 \pi, \text{ also}$$

$$\text{die Halbkugel} = r^3\pi - \tfrac{1}{3} r^3\pi = \tfrac{2}{3} r^3 \pi, \text{ folglich}$$

$$\text{die Kugel} = \tfrac{4}{3} r^3 \pi$$



Zweiter Beweis. Man denke sich die Kugel von unendlich vielen, durch denselben Durchmesser AB gelegten Hauptkreisen, sowie von unendlich vielen auf AB senkrechten Nebenkreisen geschnitten, so wird die ganze Oberfläche der Kugel in unendlich viele vierseitige und dreiseitige Figuren zertheilt, die man wegen ihrer äußerst geringen Ausdehnung als ebene geradlinige Figuren betrachten kann. Wenn man sich ferner nach sämmtlichen Durchschnittspunkten jener Kreise Kugelradien gezogen denkt, so zerfällt die ganze Kugel in lauter unendlich kleine, so genannte Kugelpyramiden, die sich als ebenflächige Pyramiden betrachten lassen, deren gemeinschaftliche Höhe der Kugelradius r ist und deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte der Kugel liegen. Hieraus folgt (§ 208), daß die Summe aller unendlich kleinen Pyramiden, also auch der Inhalt der ganzen Kugel gleich ist der Summe aller Grundflächen der Pyramiden, d. h. der ganzen Oberfläche der Kugel oder $4 r^2 \pi$ (§ 243), multiplicirt mit $\frac{1}{3}$r. Demnach ist die Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Es ist also der Inhalt einer Kugel gleich dem dritten Theile des Produkts ihrer Oberfläche in den Radius.

§ 246. Zusätze. 1) Bedeutet d den Durchmesser der Kugel, so ist $\frac{d}{2} = r$, also die Kugel $= \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{1}{6} d^3\pi$.

2) Zwei Kugeln K und k verhalten sich wie die Cuben ihrer Halbmesser (R und r) oder Durchmesser (D und d). Denn es ist

$$K : k = \tfrac{4}{3} R^3\pi : \tfrac{4}{3} r^3\pi = R^3 : r^3 = D^3 : d^3.$$

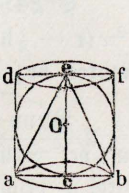
3) Im zweiten Beweise des § 245 wurde die Berechnung des Inhaltes einer Kugel aus der Berechnung ihrer Oberfläche in § 243 abgeleitet. Auf dieselbe Weise läßt sich auch umgekehrt der Ausdruck für die Kugeloberfläche aus dem ersten Beweise des § 245 herleiten, da durch diesen Beweis der Inhalt der Kugel unabhängig von der Quadratur ihrer Oberfläche bestimmt worden ist.

Betrachtet man nämlich die Kugel als den Inbegriff einer unendlichen Menge von Pyramiden, die ihre Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte der Kugel und den Radius r derselben zur gemeinschaftlichen Höhe haben, und bezeichnet man die Summe ihrer Grundflächen, d. h. die ganze Oberfläche der Kugel mit x, so ist der Inhalt sämmtlicher Pyramiden gleich $\frac{1}{3} r x$ und auch gleich dem Inhalte $\frac{4}{3} r^3\pi$ der Kugel. Es ist daher

$$\tfrac{1}{3} r x = \tfrac{4}{3} r^3\pi, \text{ folglich } x = 4 r^2\pi.$$

§ 247. (Archimedes). **Beschreibt man um eine Kugel einen geraden Cylinder und in dem Cylinder einen geraden Kegel, so daß der Cylinder und der Kegel den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser derselben zur Höhe haben, so verhält sich**

$$\textbf{Kegel : Kugel : Cylinder} = 1 : 2 : 3.$$

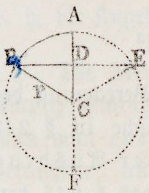


Wenn r den Radius der Kugel bezeichnet, so ist Kegel $= \frac{2}{3} r^3\pi$, Kugel $= \frac{4}{3} r^3\pi$, Cylinder $= 2 r^3\pi$, also Kegel : Kugel : Cylinder $= \frac{2}{3} r^3\pi : \frac{4}{3} r^3\pi : 2 r^3\pi = 1 : 2 : 3$.

Zusätze. 1) Der Mantel des Cylinders ist gleich $4 r^2\pi$, also gleich der Oberfläche der eingeschriebenen Kugel.

2) Die Gesammtoberfläche des Cylinders ist gleich $6 r^2\pi$, folglich verhält sich die Kugelfläche zur Gesammtoberfläche des Cylinders wie 2 : 3, also ebenso wie die Kugel zum Cylinder.

§ 248. Der Inhalt eines Kugelsectors ist gleich $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, wenn r den Kugelradius und h die Höhe der den Kugelsector begränzenden Calotte bezeichnet.



Es sei ACB der Kreissector, durch dessen Umdrehung um den Radius $AC = r$ der Kugelsector ABCEA erzeugt wird. Wie die ganze Kugel als ein Inbegriff von Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen und einer Höhe gleich dem Kugelradius angesehen werden kann (§ 245, zweiter Beweis), so läßt sich auch der Kugelsector aus einer unendlichen Menge solcher Pyramiden zusammengesetzt betrachten. Man findet daher den Inhalt des Kugelsectors, wenn man die Calotte desselben mit dem dritten Theil des Kugelradius multiplicirt.

Wenn $AD = h$ gesetzt wird, so ist (§ 244) die vom Bogen AB erzeugte Calotte gleich $2\pi r h$, folglich ist der Kugelsector $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Zusatz. Die vorstehende Formel gilt auch, wenn $h > r$ ist, also der Kugelsector von einem Kreissector wie BCF beschrieben wird, welcher größer als ein Quadrant ist. Setzt man nämlich jetzt $DF = h$, so ist $AD = 2r - h$, also nach dem Früheren der Kugelsector ABCEA $= \frac{2}{3}\pi r^2 (2r - h)$, und weil beide Sectoren die ganze Kugel ausmachen, so ist der von BCF erzeugte Sector gleich $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 (2r - h) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, welches dieselbe Formel wie vorhin ist.

§ 249. Der Inhalt eines Kugelsegmentes ist gleich $h^2\pi (r - \frac{1}{3}h)$ wenn r den Kugelradius und h die Höhe des Segmentes bezeichnet.

Wenn im Kreissector ABCEA (Fig. § 248) der Radius $AC = r$ auf der Sehne BE senkrecht steht und die ganze Figur um AC gedreht wird, so beschreibt der Kreissector einen Kugelsector, der halbe Kreisabschnitt ABD ein Kugelsegment von der Höhe $AD = h$ und das Dreieck BDC einen geraden Kegel. — Man erhält also das Kugelsegment, wenn man vom Kugelsector den Kegel wegnimmt.

Nun ist $CD = r - h$ und $BD^2 = r^2 - (r - h)^2 = (2r - h)\, h$, also der Kegel $= \frac{1}{3} BD^2 \pi \,.\, CD = \frac{1}{3} (2r - h)\, h\pi\, (r - h)$.

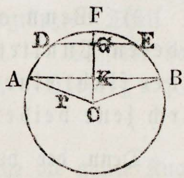
Ferner ist (§ 248) der Kugelsector $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$, also

das Kugelsegment $= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}(2r - h)\, h\pi\, (r - h)$

$= \frac{1}{3} h\pi\, [2r^2 - (2r - h)(r - h)]$

$= \frac{1}{3} h^2\pi\, (3r - h) = h^2\pi\, (r - \frac{1}{3}h)$.

§ 250. Zusatz. Der Inhalt einer Kugelschicht ADEB ist gleich dem Unterschiede zweier Segmente FABF und FDEF. — Sind gegeben die Höhen beider Segmente, FK = H, FG = h und der Kugelradius r, so ist (§ 249) die



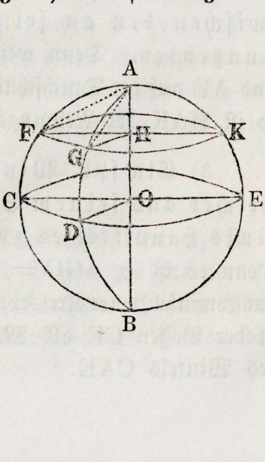
$$\text{Kugelschicht} = H^2\pi\, (r - \tfrac{1}{3}H) - h^2\pi\, (r - \tfrac{1}{3}h)$$
$$= \pi r\, (H^2 - h^2) - \frac{\pi}{3}(H^3 - h^3)$$

§ 251. Erklärungen. 1) Unter der sphärischen Entfernung oder schlechthin der Entfernung zweier Punkte auf der Kugelfläche versteht man den kleinern der beiden Bogen eines Hauptkreises, welche zwischen jenen Punkten der Kugelfläche enthalten sind.

2) Die Pole eines Kugelkreises sind die beiden Endpunkte desjenigen Durchmessers der Kugel, welcher auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht steht. Dieser Durchmesser wird die Axe des Kugelkreises genannt.

§ 252. **Jeder der beiden Pole eines Kugelkreises hat von allen Punkten der Peripherie des Kreises gleiche Entfernung.**

Der Durchmesser AB steht senkrecht auf dem Hauptkreise CDE und auf dem Nebenkreise FGK. Nun sind alle von A oder B bis zur Peripherie des Hauptkreises gehenden Bogen, wie AC, AD, BC, BD . . . einander gleich, denn sie sind Quadranten, weil die Winkel AOC und AOD Rechte sind. — Ferner sind für den Nebenkreis die Sehnen AF und AG einander gleich (§ 165, 2), folglich ist (§ 45, Zus. 1) Bog. AF = Bog. AG und ebenso Bog. BF = Bog. BG.

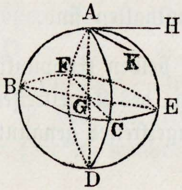


Zusätze. 1) Jeder Pol eines Hauptkreises ist von allen Punkten in dessen Umfang um den Quadranten eines Hauptkreises, also um 90^0 entfernt. — Für jeden Nebenkreis giebt es einen nähern und einen entferntern Pol.

2) Parallelkreise haben eine gemeinschaftliche Axe und gemeinschaftliche Pole.

3) Wenn auf der Kugelfläche ein Punkt A von zwei anderen Punkten C und D, die nicht Gegenpunkte von einander sind, einen Abstand von 90^0 hat, so ist er der Pol des durch jene beiden Punkte gelegten Hauptkreises.

Denn der durch C und D gelegte Hauptkreis muß als solcher durch den Mittelpunkt O der Kugel gehen. Da nun der Voraussetzung zufolge Bog. AC = Bog. AD = 90^0 ist, so ist $\sphericalangle$ AOC = AOD = R, folglich (§ 161) der Radius AO senkrecht auf der Ebene CDE, mithin ist A der Pol von CDE.



§ 253. Erklärungen. 1) Unter dem Winkel CAE zweier sich durchschneidender Bogen größter Kreise versteht man den Neigungswinkel der Ebenen jener beiden Kreise gegen einander. — Den Winkel CAE nennt man auch einen sphärischen Winkel, die ihn einschließenden Bogen AC und AE seine Schenkel und ihren Durchschnittspunkt A seinen Scheitel.

2) Ein sph. Winkel CAE ist gleich dem Winkel HAK zwischen den an seine Schenkel im Scheitel A gezogenen Tangenten. Denn weil die Tangenten in den Ebenen der Bogen AC und AE auf der Durchschnittslinie AD der Ebenen senkrecht stehen (§ 52, 2), so ist HAK der Neigungswinkel der letzteren gegen einander (§ 179, 3).

3) Ein sph. Winkel CAE hat zum Maße den Bogen CE, welcher aus seinem Scheitel A als Pol mit dem Quadranten eines Hauptkreises zwischen seinen Schenkeln beschrieben ist. Denn es ist $\sphericalangle$ AGC = AGE = R, folglich der Winkel CGE der Neigungswinkel jener Kreisebenen, deren Bogen den $\sphericalangle$ CAE bilden, mithin ist der Bogen CE als Maß des Winkels CGE (§ 58, 2) auch das Maß des Winkels CAE.

4) Ein von zwei halben Peripherieen größter Kreise begränzter Theil der Kugelfläche heisst ein sphärisches Zweieck. — Die beiden sphärischen Winkel eines Zweiecks sind einander gleich.

Derjenige Theil einer Kugel, welcher von den Ebenen zweier Hauptkreise und dem durch diese letzteren gebildeten sph. Zweieck begränzt wird, wie ABDCA, heisst ein Kugelkeil.

5) Ein von drei Bogen größter Kreise begränzter Theil der Kugelfläche wird ein sphärisches Dreieck genannt. — Dasselbe heisst rechtwinklig, schiefwinklig, gleichschenklig, gleichseitig u. s. w. in ähnlichen Fällen wie das geradlinige Dreieck.

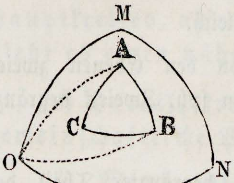
6) In jedem der acht sph. Dreiecke, in welche die ganze Kugelfläche von drei Hauptkreisen zerlegt wird, ist jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180^0. Nimmt man dagegen einige dieser Dreiecke zusammen, z. B. CAE, CAB und BAF, so ist in dem dadurch entstehenden Dreieck AEF die Seite ECBF größer als ein Halbkreis oder 180^0 und ebenso der Winkel bei A, welcher jener Seite gegenübersteht, größer als 180^0. — Im Folgenden sollen aber immer nur solche sph. Dreiecke betrachtet werden, in welchen jede Seite sowol als jeder Winkel kleiner als 180^0 ist.

7) Sphärische Dreiecke sind congruent, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie sich decken.

Zwei sphärische Dreiecke heißen symmetrisch, wenn die Seiten und Winkel des einen denen des andern einzeln gleich sind und in derselben Ordnung, aber in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen, also die Dreiecke im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden können.

Zwei sph. Dreiecke wie ABF und DEC werden Gegendreiecke von einander genannt, wenn die Eckpunkte des einen Gegenpunkte der Ecken des andern sind. — Gegendreiecke sind einander symmetrisch und nur in dem besondern Falle congruent, wo sie gleichschenklig oder gleichseitig sind.

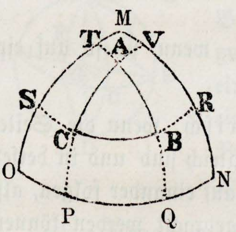
§ 254. Beschreibt man aus den Scheitelpunkten A, B, C eines sphärischen Dreiecks als Polen drei Bogen größter Kreise, NO, MO, MN, so bilden diese ein neues sphärisches Dreieck MNO, dessen Scheitelpunkte die Pole der gegenüberstehenden Seiten des ersten Dreiecks sind.



Man ziehe aus A und B zwei Bogen größter Kreise nach O. Da der Construction zufolge A der Pol von NO ist, also von jedem Punkte dieses Bogens um einen Quadranten absteht (§ 252, Zus. 1), so ist $AO = 90^0$. Ferner ist B der Pol von MO, mithin auch $BO = 90^0$. Da nun O von beiden Punkten A und B um 90^0 absteht, so ist O der Pol von AB (§ 252, Z. 3). Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß N der Pol von AC und M der Pol von BC ist.

Zwei Dreiecke, wie ABD und MNO, von der Beschaffenheit, daß die Ecken eines jeden von ihnen die Pole der Seiten des andern sind, heißen reciproke Dreiecke oder Polardreiecke.

§ 255. **In zwei Polardreiecken ABC und MNO ergänzt wechselseitig jede Seite des einen Dreiecks den gegenüberstehenden Winkel des andern Dreiecks zu 2 Rechten.**



Verlängert man die Seiten des einen Dreiecks bis zu den Seiten der andern, so ist

1) $OQ = 90^0$ und $NP = 90^0$, also $ON + PQ = 180^0$. Der Bogen PQ ist aber das Maß des $\sphericalangle$ A (§ 252, 3), folglich

$$ON + \sphericalangle A = 180^0.$$

Ebenso ist $OM + \sphericalangle B = 180^0$ und $MN + \sphericalangle C = 180^0$.

2) $BS = 90^0$ und $CR = 90^0$, also $SR + BC = 180^0$, und weil Bog. $SR = \sphericalangle M$, so ist

$$\sphericalangle M + BC = 180^0$$

und ebenso $\sphericalangle N + AC = 180^0$ und $\sphericalangle O + AB = 180^0$.

Jedes der beiden Polardreiecke wird auch das Supplementardreieck des andern genannt.

§ 256. Erklärungen. Wenn man vom Mittelpunkte einer Kugel nach den Winkelspitzen eines sph. Dreiecks Halbmesser zieht, so entsteht eine dreiseitige Raumecke, deren Kantenwinkel den Seiten und deren Flächenwinkel den Winkeln des sph. Dreiecks als ihren Maßen gleich sind. Auf diese Weise entspricht jedem sph. Dreieck eine gewisse dreiseitige Raumecke am Mittelpunkte der Kugel und umgekehrt jeder dreiseitigen Raumecke ein sph. Dreieck, indem man sich immer aus ihrer Spitze mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben denken kann, auf deren Oberfläche die Durchschnittspunkte der Kanten ein sph. Dreieck bestimmen.

Dieser Uebereinstimmung wegen gelten alle in Beziehung auf die Kantenwinkel und Flächenwinkel dreiseitiger Raumecken bewiesenen Sätze (§ 187 bis § 191) auch von sphärischen Dreiecken und lassen sich auf diese unmittelbar übertragen, indem an die Stelle der Begriffe dreiseitige Raumecken, Kantenwinkel und Flächenwinkel die entsprechenden Begriffe sphärische Dreiecke, Seiten und Winkel gesetzt werden. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) In einem sph. Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite (§ 187).

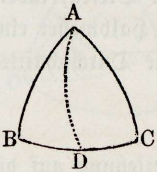
2) In einem sph. Dreieck ist die Summe der drei Seiten kleiner als 4 R oder als der Umfang eines Hauptkreises (§ 188).

3) Die Summe der drei Winkel eines sph. Dreiecks ist immer größer als 2 R und kleiner als 6 R (§ 190).

4) Zwei sph. Dreiecke auf derselben Kugel sind congruent oder symmetrisch, wenn in ihnen einzeln gegenseitig gleich sind

a) die drei Seiten (§ 191, 1), oder
b) die drei Winkel (§ 191, 2), oder
c) zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel (§ 191, 3), oder
d) zwei Winkel und die zwischenliegende Seite (§ 191, 4).

§ 257. In einem sph. Dreieck ABC liegen 1) gleichen Seiten gleiche Winkel und 2) umgekehrt, gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.



1) Wenn AB = AC ist und man zieht aus A nach der Mitte D der Seite BC den Bogen AD, so haben die Dreiecke ABD und ACD gleiche Seiten, also ist ∢ B = C (256, 4, a).

2) Wenn ∢ B = C ist und bezeichnet man das dem Dreieck ABC zugehörige Polardreieck entsprechend mit A′B′C′ so hat dieses (§ 255) zwei gleiche Seiten, A′B′ = A′C′, folglich nach 1) auch zwei gleiche Winkel, B′ = C′. Hieraus folgt wiederum für das Dreieck ABC, daß AB = AC ist.

Zusätze. 1) Da dem ersten Theile des Satzes zufolge ∢ BAD = CAD und ∢ BDA = CDA ist, so ist der aus der Spitze eines gleichschenkligen sph. Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogene Bogen auf der letztern senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze.

2) Ein gleichseitiges sph. Dreieck ist auch ein gleichwinkliges und umgekehrt.

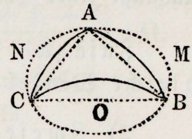
§ 258. (Fig. § 257). **In einem sph. Dreieck ABC liegt 1) dem größern Winkel die größere Seite und 2) umgekehrt, der größern Seite der größere Winkel gegenüber.**

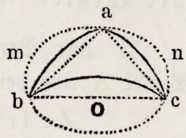
1) Wenn ∢ BAC > B ist, so mache man ∢ BAD = B, und dann ist AD = BD (§ 257, 2). Da aber AD + DC > AC, so ist auch BD + DC oder BC > AC.

2) Wenn BC > AC ist, so muß ∢ BAC > B sein. Denn wäre ∢ BAC $\leqq$ B, so müßte auch BC $\leqq$ AC sein, was beides der Voraussetzung widerspricht.

§ 259. Zwei symmetrische Dreiecke ABC und abc haben gleichen Inhalt.

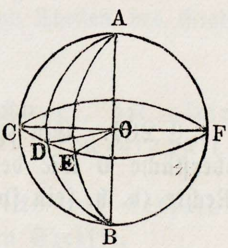
Da die Bogen AB und ab, AC und ac, BC und bc als Seiten der Dreiecke gleich sind, so sind auch ihre Sehnen entsprechend gleich, und daher ist das ebene $\triangle$ ABC $\cong$ abc. Hieraus folgt, daß wenn man um die ebenen Dreiecke Kreise beschreibt, diese einander gleich sind, also auch gleichen Abstand vom Mittelpunkte der Kugel haben (§ 239, 2). Mithin haben die beiden Calotten, deren Grundflächen jene Kreise sind, gleiche Höhen und daher auch gleichen Inhalt (§ 244). Da man nun offenbar das zweieckige Flächenstück M, welches von den beiden, mit ihren Endpunkten in A und B zusammenfallenden Bogen begränzt wird, mit dem entsprechenden Flächenstück m, und ebenso die zweieckigen Flächenstücke N und n, O und o zur Deckung bringen kann, so muß auch das sph. $\triangle$ ABC $\equiv$ abc sein.





§ 260. Ein sph. Zweieck verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie sein Winkel zu vier Rechten.

Zwei Zweiecke, welche gleiche Winkel CAD und DAE haben, sind gleich, da sie sich durch Drehung um den Durchmesser AB zur Deckung bringen lassen. Wenn sich ferner ein Zweieck ADBEA auf ein anderes AEBFA genau mehrere Mal auftragen läßt, so ist auch sein Winkel in dem des andern, oder wenn der Hauptkreis CDEF senkrecht auf AB steht (§ 252, 3), der Bogen DE in dem Bogen EF genau eben so oft enthalten. Bleibt aber bei diesem Auftragen von dem größern Zweieck ein Rest übrig, welcher kleiner ist als das erste Zweieck, so kann man durch eine ähnliche Betrachtung wie in § 57 und § 180 schließen, daß sich auch in diesem Falle die beiden Zweiecke, sie mögen ein gemeinschaftliches Maß haben oder nicht, eben so oft wie ihre Winkel von einander wegnehmen lassen, also in demselben Verhältnisse wie die letzteren zu einander stehen. Betrachtet man nun die ganze Kugeloberfläche als ein Zweieck, dessen Winkel vier Rechten gleich ist, so folgt hieraus, das ein Zweieck sich verhält zur Kugeloberfläche wie sein



Winkel zu vier Rechten oder wie der seinen Winkel messende Bogen zum Umfange eines Hauptkreises.

Zusätze. 1) Zweiecke auf derselben Kugel, welche gleiche Winkel haben, sind congruent.

2) Zweiecke auf derselben Kugel verhalten sich wie ihre Winkel.

3) Zur Berechnung des Inhalts eines Zweiecks Z aus seinem Winkel A und dem Radius r oder der Oberfläche O der Kugel hat man

$$Z : 4r^2\pi = A : 4R \text{ oder } Z : O = A : 4R, \text{ also}$$

$$Z = \frac{Ar^2\pi}{R} \text{ oder } Z = \frac{A}{4R} \cdot O.$$

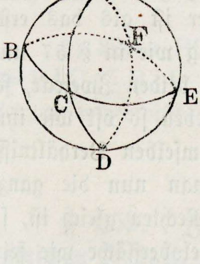
Die Winkel A und R müssen immer durch einerlei Einheit, also beide zugleich entweder in Graden oder in Minuten oder in Secunden ausgedrückt werden.

4) Da ein Kugelkeil soviel Mal in der Kugel enthalten ist als sein Zweieck in der Kugelfläche oder als dessen Winkel A in 4 Rechten, so verhält sich

$$\text{Kugelkeil} : \tfrac{4}{3}r^3\pi = A : 4R, \text{ folglich ist}$$

$$\text{Kugelkeil} = \frac{r^3\pi}{3R} \cdot A = \frac{r^3\pi}{270^0} \cdot A.$$

§ 261. Ein sph. Dreieck ABC verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche O wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über zwei Rechte (d. h. sein sphärischer Exceß) zu acht Rechten.



Verlängert man die Seiten des Dreiecks zu vollständigen Kreisen, welche sich in D, E, F als den Gegenpunkten von A, B, C schneiden, so ist (§ 260, 3)

$$ABC + BCD = \text{Zweieck } ABDCA = \frac{A}{4R} \cdot O$$

$$ABC + ACE = \text{Zweieck } BAECB = \frac{B}{4R} \cdot O$$

$$ABC + ABF = \text{Zweieck } CAFBC = \frac{C}{4R} \cdot O.$$

Alles addirt und ABF = DCE gesetzt (§ 259) giebt

$$3\,ABC + BCD + ACE + DCE = \frac{A + B + C}{4R} . O.$$

$$\text{Nun ist } ABC + BCD + ACE + DCE = \tfrac{1}{2}\,O.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen abgezogen so ist

$$2\,ABC = \frac{(A + B + C - 2R)\,O}{4R} \text{ oder}$$

$$ABC = \frac{(A + B + C - 2R)\,O}{8R}, \text{ also}$$

$$ABC : O = (A + B + C - 2R) : 8R.$$

§ 262. Zusätze. 1) Da die Kugeloberfläche $O = 4\,r^2\pi$ ist, so hat man zur Berechnung des Inhalts eines sph. Dreiecks ABC aus seinen Winkeln und dem Kugelradius r

$$\triangle ABC = \frac{A + B + C - 2R}{8R} . 4r^2\pi = \frac{A + B + C - 180^0}{720^0} . 4r^2\pi, \text{ also}$$

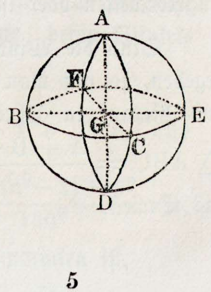
$$\triangle ABC = \frac{A + B + C - 2R}{2R} . r^2\pi = \frac{A + B + C - 180^0}{180^0} . r^2\pi.$$

In diese Formeln müssen die Winkel A, B, C und R durch einerlei Einheit, also alle zugleich entweder in Graden oder in Minuten oder in Secunden, oder auch nur in Graden und Theilen des Grades ausgedrückt werden.

2) Alle Dreiecke auf derselben Kugel, die gleiche Winkelsumme haben, haben auch gleichen Flächeninhalt.

3) Die Inhalte sphärischer Dreiecke auf derselben Kugel verhalten sich wie ihre sphärischen Excesse.

3) Drei durch den Mittelpunkt einer Kugel senkrecht auf einander gelegte Ebenen theilen die Kugel und ihre Oberfläche in acht gleiche Theile, wie sich durch das Princip der Deckung leicht zeigen läßt. Jeder dieser gleichen Theile der Kugelfläche, welcher wie z. B. ABC ein von drei Quadranten eingeschlossenes oder ein dreirechtwinkliges Dreieck ist, wird ein Kugeloctant oder sphärischer Octant und die



demselben entsprechende, also von drei auf einander senkrechten Ebenen am Kugelcentrum gebildete Raumecke GABC, welche den achten Theil des ganzen um den Mittelpunkt G liegenden unendlichen Raumes ausfüllt, ein **Raumoctant** genannt.

5) **Als Maßeinheit für die Theile der Kugelfläche pflegt man den Kugeloctanten und als Maßeinheit für die Raumecken den Raumoctanten anzunehmen.** Auf diese Weise wird durch das Verhältniß eines sph. Dreiecks zum Kugeloctanten zugleich das der entsprechenden Raumecke zum Raumoctanten bestimmt, so daß die nämliche Zahl, welche den Inhalt eines sph. Dreiecks ausdrückt, die Größe der zugehörigen Raumecke angiebt. Ist z. B. der Inhalt eines Dreiecks $\frac{3}{4}$, d. h. ist derselbe $\frac{3}{4}$ eines Kugeloctanten, so ist die zugehörige Raumecke $\frac{3}{4}$ des Raumoctanten.

Unter der obigen Voraussetzung ist die Zahl 8 die Maßzahl der Kugeloberfläche.

6) **Wenn man den rechten Winkel zur Einheit des Winkelmaßes und den Kugeloctanten zur Einheit des Flächenmaßes annimmt, so ist der Inhalt eines sph. Dreiecks ABC gleich seinem sph. Excesse.** Denn es ist der Kugeloctant $= \frac{1}{8} \cdot 4 r^2 \pi$, also $r^2 \pi = 2$ Kugeloctanten. Setzt man diesen Ausdruck für $r^2\pi$ in die unter 1) angegebene Formel $\triangle ABC = \frac{A + B + C - 2R}{2R} \cdot r^2 \pi$, so erhält man

$$\triangle ABC = \left(\frac{A + B + C}{R} - 2\right) \text{Kugeloctanten.}$$

Da nun R und der Kugeloctant Maßeinheiten sind, so ist

$$\triangle ABC = A + B + C - 2.$$

Man erhält also die Maßzahl des Inhalts eines sph. Dreiecks in Kugeloctanten, wenn man von seiner in Theilen des rechten Winkels ausgedrückten Winkelsumme die Zahl 2 subtrahirt. Ist z. B. jeder der drei Winkel gleich $\frac{4}{3}$ R, so ist $\triangle ABC = 2$, folglich enthält ABC zwei Kugeloctanten oder ist dem vierten Theil der Kugelfläche gleich.

Sind die Winkel A, B, C in Graden, Minuten und Secunden gegeben, so hat man sie zuvor nur in Graden und Theilen des Grades und hierauf in Theilen des rechten Winkels auszudrücken; alsdann ist $\triangle ABC = \frac{A + B + C}{90} - 2$, d. h. so viele Kugeloctanten enthält das Dreieck.

Bei dieser Art der Inhaltsbestimmung eines sph. Dreiecks giebt es zwei verschiedene Einheiten, die eine für die Winkel, die andere für die Flächen, und nur in diesem Sinne kann der Inhalt eines Dreiecks seinem sph. Excesse gleichgesetzt werden.

7) Der Inhalt eines sph. Zweiecks Z, dessen Winkel in Theilen des rechten Winkels ausgedrückt A ist, ist gleich 2 A, wenn der Kugeloctant als Einheit des Flächenmaßes angenommen wird.

Denn weil die Kugeloberfläche gleich 8 ist und weil (§ 260) sich verhält $Z : 8 = A : 4$, so ist $Z = 2\,A$, d. h. das Zweieck enthält 2 A, Kugeloctanten.

8) Ein sph. Dreieck hat denselben Inhalt wie ein Zweieck, dessen Winkel dem halben sph. Excesse des Dreiecks gleich ist.

Denn bezeichnet man den Winkel des Zweiecks mit x und setz die Ausdrücke für den Inhalt des Zweiecks und des Dreiecks (§ 260 Zus. 3 und § 262, 1) einander gleich, so erhält man

$$\frac{x r^2 \pi}{R} = \frac{A + B + C - 2R}{2R} \cdot r^2 \pi, \text{ also } x = \tfrac{1}{2}(A + B + C) - R.$$

§ 263. Den Inhalt eines sphärischen Vielecks, d. h. eines von mehr als drei Bogen größter Kreise begränzten Theiles der Kugelfläche, aus der Anzahl n seiner Seiten, der Summe S seiner Winkel und dem Radius r der Kugel zu finden.

Zieht man aus einer Winkelspitze des n ecks nach allen übrigen Winkelspitzen Bogen größter Kreise, so wird dasselbe in $n - 2$ sphärische Dreiecke zerlegt. Die Inhalte dieser einzelnen Dreiecke, deren Winkelsummen $s, s', s'' \ldots$ sein mögen, sind (§ 262, 1)

$$\frac{s - 180^0}{180^0} \cdot r^2 \pi, \quad \frac{s' - 180^0}{180^0} \cdot r^2 \pi, \quad \frac{s'' - 180^0}{180^0} \cdot r^2 \pi \ldots, \text{ also}$$

$$\text{das n eck} = \frac{s + s' + s'' \ldots - (n-2)\,180^0}{180^0} \cdot r^2 \pi = \frac{S - (n-2)\,180^0}{180^0} \cdot r^2 \pi,$$

wobei S nur in Graden und Theilen des Grades auszudrücken ist.

Zusätze. 1) Da die Kugeloberfläche $O = 4\,r^2\pi$, also $r^2\pi = \frac{1}{4} O$ ist, so ergiebt sich durch Substitution dieses Ausdrucks in die obige Formel

$$n\text{ eck} = \frac{S - (n - 2)\,180^0}{720^0}\,.\,O = \frac{S - 2\,(n - 2)\,R}{8\,R}\,.\,O,$$

oder
$$n\text{ eck} : O = S - 2\,(n - 2)\,R : 8\,R.$$

Ein sph. Vieleck verhält sich also zur ganzen Kugeloberfläche wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über zwei Mal so viel rechte Winkel, als die um zwei verminderte Seitenzahl des Vielecks beträgt (d. h. sein sphärischer Exceß) zu acht Rechten.

2) Nimmt man den rechten Winkel und den Kugeloctanten als Maßeinheiten für Winkel und sphärische Flächen, so ist der Inhalt eines sphärischen Vielecks gleich seinem sph. Excesse. Man findet nämlich auf dieselbe Weise wie in § 262, 6

$$n\text{ eck} = S - 2\,(n - 2),$$

d. h. so viele Kugeloctanten enthält das n eck.

§ 264. Den Inhalt einer Kugelpyramide, d. h. des von einem sph. Vielecke und den Seitenflächen der zugehörigen Ecke begränzten Theiles der Kugel, aus dem Kugelradius r und den Winkeln des Vielecks zu finden.

Da eine Kugelpyramide eben so viel Mal in der Kugel enthalten ist als das zugehörige sph. n eck in der Kugeloberfläche oder als dessen sph. Exceß in 8 R, so ergiebt sich der Inhalt der Kugelpyramide aus der Proportion

$$x : \tfrac{4}{3}\,r^3\pi = \text{sph. Exceß} : 720^0,$$

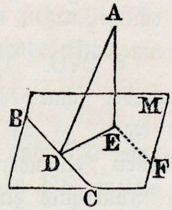
wenn man den sph. Exceß gleich $S - (n - 2)\,180^0$ (§ 263, Zus. 1), oder falls das n eck ein Dreieck ist, den sph. Exceß $= A + B + C - 180^0$ (§ 261) setzt.

Eine Kugelpyramide läßt sich auch ebenso wie die ganze Kugel (§ 245 zweiter Beweis) aus einer unendlichen Menge unendlich kleiner Pyramiden zusammengesetzt betrachten, deren Grundflächen zusammen das begränzende sphärische Vieleck der Kugelpyramide ausmachen und deren gemeinschaftliche Höhe r ist. Hieraus folgt, daß der Inhalt einer Kugelpyramide erhalten wird, wenn man den Flächeninhalt seines begränzenden sph. Vielecks mit $\frac{1}{3}$r multiplicirt. Ist das Vieleck ein Dreieck mit den Winkeln A, B, C, so ist (§ 262, 1) die dreiseitige Kugelpyramide $= \frac{A + B + C - 180^0}{540^0} \cdot r^3\pi$. Hat das Vieleck n Seiten und beträgt seine Winkelsumme S so ist (§ 263) die nseitige Kugelpyramide $= \frac{S - (n - 2)\, 180^0}{540^0} \cdot r^3\pi$.

Zusatz. Kugelpyramiden verhalten sich zu einander wie die sie begränzenden Theile der Kugelfläche.

VII. Anhang.

Gerade Linien und Ebenen im Raum (§ 156 bis 185).

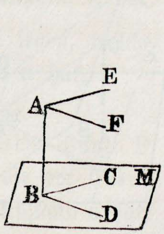


§ 265. 1) Von einem gegebenen Punkte A außerhalb einer Ebene M auf diese eine Senkrechte zu fällen.

2) In einem gegebenen Punkte einer Ebene auf dieser eine Senkrechte zu errichten.

3) Durch einen gegebenen Punkt E einer Geraden AE auf diese eine Ebene senkrecht zu legen.

4) Durch einen gegebenen Punkt C außerhalb einer Geraden AF auf diese eine senkrechte Ebene zu legen (Fig. § 161).



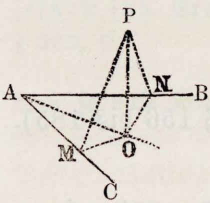
§ 266. 1) Durch einen gegebenen Punkt A eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene M zu legen.

2) Durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene zu legen, welche von drei anderen gegebenen Punkten O, M, N gleich weit absteht. — 3) In einer gegebenen Ebene M einen Punkt zu bestimmen, welcher von drei außerhalb der Ebene gegebenen Punkten O, P, Q gleich

weit absteht. — 4) In einer Ebene sind drei nicht in gerader Linie liegende Punkte O, P, Q gegeben; einen Punkt außerhalb der Ebene zu bestimmen, welcher von den 3 Punkten gleiche Abstände hat.

§ **267.** Durch eine gegebene Gerade AD eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Ebene M zu legen, 1) wenn AD in der Ebene M liegt (Fig. § 182), 2) wenn AD die Ebene M schneidet (Fig. § 169).

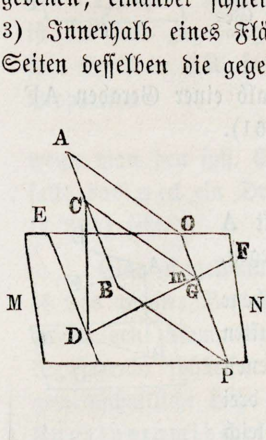
§ **268.** 1) Durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene parallel einer gegebenen Geraden AB und senkrecht auf eine gegebene Ebene M zu legen. — 2) Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene gegebenen Punkten A, B, C, D gleich weit absteht. — 3) In einer gegebenen Ebene M eine Gerade zu ziehen, welche von zwei außerhalb der Ebene gegebenen Punkten A und B die Abstände a und b hat.



§ **269.** 1) Eine Ebene zu bestimmen, in welcher jeder Punkt (P) von zwei gegebenen einander schneidenden Geraden AB und AC gleich weit entfernt ist.

2) Eine Gerade zu bestimmen, welche von drei gegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Parallelen gleich weit absteht.

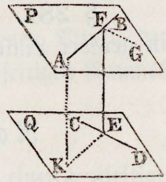
§ **270.** 1) Durch einen gegebenen Punkt P außerhalb zweier einander schneidenden Ebenen M und N auf diese eine senkrechte Ebene zu legen. — 2) Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zwei gegebenen, einander schneidenden Ebenen M und N parallel zu legen. — 3) Innerhalb eines Flächenwinkels eine Gerade zu ziehen, die von den Seiten desselben die gegebenen Abstände m und n hat.



§ **271.** 1) Durch eine innerhalb einer Ebene liegende Gerade OP eine Ebene so zu legen, daß ihr Neigungswinkel gegen die erste Ebene einem gegebenen Winkel m gleich sei.

2) Durch eine gegebene Gerade AB, welcher einer Ebene MN parallel ist, eine zweite Ebene so zu legen, daß sie mit der ersten einen Neigungswinkel von gegebener Größe m bildet.

§ 272. 1) Durch einen gegebenen Punkt P außerhalb zweier kreuzenden Linien AB und CD eine Gerade zu ziehen, welche die letzteren schneidet. — 2) Durch einen Punkt P eine Ebene zu legen, die jeder von zwei kreuzenden Geraden AB und CD parallel ist. — 3) Zwei kreuzende Geraden AB und DF sind gegeben (Fig. § 271); man soll durch die eine DF eine Ebene legen, welche mit der andern AB parallel ist.



273. 1) Durch zwei kreuzende Geraden AB und CD zwei einander parallele Ebenen zu legen.

2) Die kürzeste Entfernung zweier kreuzender Geraden AB und CD zu bestimmen oder auf dieselben eine gemeinschaftliche Senkrechte zu ziehen (§ 166, 2).

§ 274. Von einem Punkte P außerhalb einer Ebene M an diese eine Gerade zu ziehen, welche die Länge a hat und einer zweiten Ebene N parallel ist.

§ 275. Ein Punkt P, eine Ebene M und eine derselben parallele Gerade AB sind gegeben; durch P eine Gerade zu ziehen, welche AB und M so schneidet, daß das zwischen beiden liegende Stück die Länge a hat.

§ 276. Zwischen zwei kreuzenden Geraden AB und CD eine Linie so zu ziehen, daß sie einer dritten gegebenen Geraden EF, welche mit keiner der beiden andern in derselben Ebene liegt, parallel ist.

§ 277. 1) Durch eine gegebene Gerade AB eine Ebene zu legen, welche von einem gegebenen Punkte P einen bestimmten Abstand a hat.

2) Durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene zu legen, welche von einer gegebenen Geraden AB einen bestimmten Abstand a hat.

§ 278. 1) Eine Ebene M, eine Gerade AB und ein Punkt P sind gegeben; durch den Punkt P eine Gerade zu ziehen, die der Ebene M parallel ist und von der Geraden AB einen gegebenen Abstand a hat.

2) Durch einen gegeb. Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen kreuzenden Geraden AB und CD die Abstände a und b hat.

§ 279. In einer von zwei kreuzenden Geraden AB und CD den Punkt zu bestimmen, 1) welcher von der andern den Abstand a hat, 2) welcher von der andern Geraden und einem außerhalb derselben gegebenen Punkte P gleich weit absteht.

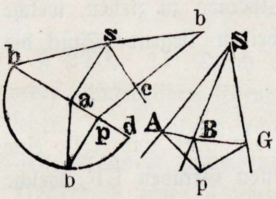
§ 280. Eine Ebene M, eine Gerade AB und ein Punkt P sind gegeben; auf der Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von der Ebene und dem Punkte gleich weit absteht.

§ 281. Eine Ebene zu construiren, die von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C die Abstände a, b, c hat.

Raumecken (§ 186 bis § 191).

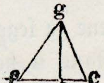
§ 282. 1) Innerhalb einer dreiseitigen Raumecke den Punkt zu bestimmen, welcher von jeder der drei Seitenflächen derselben einen gegebenen Abstand a hat.

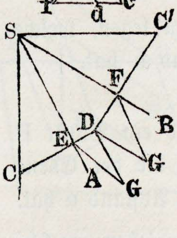
2) Innerhalb einer n seitigen Raumecke den Punkt zu bestimmen, welcher von den einzelnen Seitenflächen der Ecke die gegebenen Abstände a, b, c . . . hat.



§ 283. 1) Aus den drei gegebenen Kantenwinkeln, welche eine dreiseitige Raumecke SABC bilden, durch eine Construction in der Ebene den Neigungswinkel zwischen irgend zwei Seitenflächen der Ecke, z. B. den an der Kante AS liegenden zu finden.

2) Aus zwei gegebenen Kantenwinkeln ASB und ASC und dem Neigungswinkel BAP ihrer Ebenen den dritten Kantenwinkel einer dreiseitigen Raumecke durch eine Zeichnung in der Ebene zu finden.





§ 284. 1) Aus zwei Neigungswinkel A und B und dem zwischenliegenden Kantenwinkel M einer dreiseitigen Raumecke SABC die beiden anderen Kantenwinkel und den dritten Neigungswinkel durch eine Construction in der Ebene zu finden.

2) Aus den drei Neigungswinkel A, B, C einer dreiseitigen Raumecke SABC die Kantenwinkel zu finden.

§ 285. 1) Drei gegebene ebene Winkel ASB, BSC, CSD, die zusammen kleiner als 4 Rechte, und von denen je zwei zusammen größer als der dritte sind, zu einer Raumecke zusammenzustellen.

2) Aus zwei gegebenen ebenen Winkeln und dem Neigungswinkel ihrer Ebenen eine dreiseitige Raumecke zusammenzustellen.

§ 286. 1) Eine Raumecke zu construiren, welche einer gegebenen dreiseitigen Raumecke congruent ist.

2) An eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte derselben eine Raumecke zu stellen, die einer gegebenen dreiseitigen Raumecke congruent ist.

287. Durch einen Punkt M in der Kante AS einer dreiseitigen Raumecke eine Ebene MPQ so zu legen, daß die drei in der Spitze S zusammenstoßenden Seitenflächen der Pyramide SMPQ gleichen Inhalt haben (Fig. § 187).

Polyeder (§ 192 bis § 219).

§ 288. 1) Einen Würfel zu construiren, wenn die Kante desselben gegeben ist. — 2) Einen Würfel durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ein regelmäßiges Sechseck werde.

§ 289. 1) Drei gerade von dem nämlichen Punkte ausgehende Linien sind ihrer Länge und Lage nach gegeben; es soll mit denselben ein Parallelepipedon construirt werden.

2) Zwei kreuzende Linien AB und FG sind ihrer Größe und Lage nach gegeben; ein Parallelepipedon zu construiren, in welchem diese Linien zwei der Kanten sind (Fig. § 192, 7).

3) Die gesammte Oberfläche eines gegebenen Parallelepipedons als ein ebenes zusammenhängendes Figurennetz zu zeichnen.

4) Ein Parallelepipedon zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist und eine gegebene Kante enthält, die einer bestimmten Kante des andern Parallelepipedons homolog ist.

5) Ein rechtw. Parallelepipedon zu construiren, dessen eine Kante a gegeben ist und welches mit einem Würfel von der Kante b gleichen Inhalt hat.

§ 290. 1) Von einem Prisma ist die Grundfläche und eine Seitenkante ihrer Länge und ihrer Lage nach gegeben; ein Prisma zu construiren, welches dem ersten congruent ist.

2) Ein Quadrat zu beschreiben, welches inhaltsgleich ist a) mit der Seitenoberfläche, b) mit der Gesammtoberfläche eines gegebenen schiefen Prismas.

§ 291. 1) Das Verhältniß der senkrechten Querschnitte eines dreiseitigen und vierseitigen Prismas in Linien zu finden.

2) Das Verhältniß der Inhalte von zwei gegebenen schiefwinkligen Parallelepipeden in Linien anzugeben.

§ 292. Die Oberfläche 1) eines dreiseitigen Prismas aus drei Kanten einer Ecke und ihren Winkeln, 2) eines fünfseitigen Prismas aus dessen Grundfläche und zwei zusammenstehenden Seitenflächen in zusammenhängender ebener Figur zu construiren.

§ 293. Es soll verwandelt werden 1) ein vielseitiges Prisma in ein dreiseitiges, 2) ein vielseitiges Prisma in ein Parallelepipedon, 3) ein beliebiges Prisma in ein rechtw. Parallelepipedon.

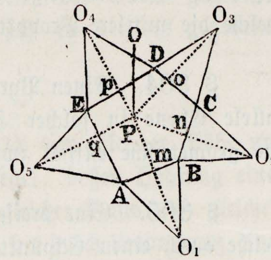
§ 294. Einen dreiseitigen prismatischen Stumpf (§ 211) in ein gerades Prisma zu verwandeln, dessen Grundfläche dem senkrecht auf die Seitenkanten des Stumpfes gelegten Schnitte congruent ist.

§ 295. 1) Das Netz einer dreiseitigen Pyramide zu construiren, wenn die drei Seitenkanten und die von denselben gebildeten Kantenwinkel gegeben sind.

2) Das Netz einer dreiseitigen Pyramide aus ihren sechs Kanten zu construiren.

3) Das Netz einer dreiseitigen Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis und die drei Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Basis gegeben sind.

§ 296. 1) Das Netz einer Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis ABCDE, ihre Höhe OP und der Fußpunkt P der letztern gegeben ist.



2) Das Netz einer Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis ABCDE, eine Seitenkante BO und die Ecke B gegeben ist, welche von jener Kante und den beiden anstoßenden Grundkanten gebildet wird.

3) Das Netz einer Pyramide zu construiren, wenn ihre Basis ABCDE und zwei an einander stoßende Seitenflächen ABO und BCO gegeben sind.

§ 297. Eine Pyramide SABCDE durch eine der Grundfläche parallele Ebene 1) so zu theilen, daß der Durchschnitt abcde zur Grundfläche sich verhalte wie zwei gegebene Linien n und m, 2) so zu theilen daß die gesammte Oberfläche der abgeschnittenen Pyramide Sabcde der dritte Theil der gesammten Oberfläche der ganzen Pyramide sei (Fig. § 204).

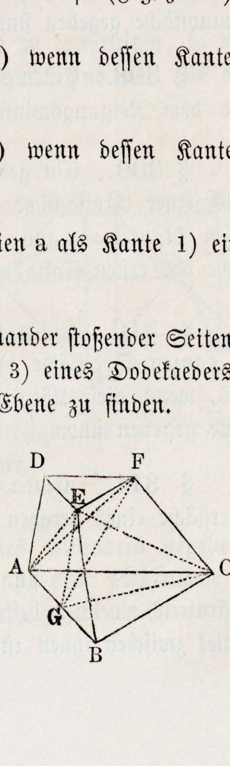
§ 298. Ein Tetraeder zu construiren, 1) wenn dessen Kante, 2) wenn dessen Höhe gegeben ist.

§ 299. Ein Oktaeder zu construiren, 1) wenn dessen Kante, 2) wenn dessen Diagonale (Axe) gegeben ist.

§ 300. Mit einer gegebenen geraden Linien a als Kante 1) ein Dodekaeder, 2) ein Ikosaeder zu construiren.

§ 301. Den Neigungswinkel zweier an einander stoßender Seitenflächen 1) eines Tetraeders, 2) eines Oktaeders, 3) eines Dodekaeders, 4) eines Ikosaeders durch eine Zeichnung in der Ebene zu finden.

§ 302. Ein Dreieck zu construiren, welches die mittlere Proportionale zwischen den beiden Grundflächen eines gegebenen dreiseitigen Pyramidenstumpfes ist.



§ 303. Es sind zwei n seitige Pyramiden von gleicher Höhe und ähnlichen Grundflächen gegeben; eine dreiseitige Pyramide von derselben Höhe zu construiren, welche die mittlere Proportionale zwischen den beiden Pyramiden ist.

§ 304. Einen Pyramidenstumpf durch eine den Grundflächen parallele Ebene in solcher Höhe zu schneiden, daß die Durchschnittsfigur das geometrische Mittel zwischen beiden Grundflächen sei.

§ 305. Eine dreiseitige Pyramide durch eine Ebene zu halbiren, welche durch einen Eckpunkt derselben geht und die gegenüberliegende Seitenfläche in einer gegebenen Richtung schneidet.

§ 306. Eine Pyramide deren Grundfläche ein Rechteck ist und deren Spitze senkrecht über die Mitte desselben liegt, mittels einer durch eine Grundkante gehenden Ebene zu halbiren.

Cylinder und Kegel (§ 220 bis § 234).

§ 307. Einen Cylinder zu construiren, wenn der Radius r der Grundfläche, die Höhe h und der Neigungswinkel a der Axe gegen die Grundfläche gegeben sind.

§ 308. Einen Kegel aus dem Radius der Grundfläche, der Höhe und dem Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche zu construiren.

§ 309. Ein gerader Cylinder ist durch seine Höhe und den Radius seiner Grundfläche gegeben; einen geraden Cylinder zu construiren, dessen Mantel der ganzen Oberfläche und dessen Grundfläche der Grundfläche des ersten Cylinders gleich ist.

§ 310. Einen Kreis zu beschreiben, der an Inhalt gleich ist der ganzen Oberfläche 1) eines geraden Cylinders, 2) eines geraden Kegels, wenn diese Körper durch ihre Höhe und den Radius ihrer Grundfläche gegeben sind.

§ 311. Einen Kreis zu beschreiben, welcher der gesammten Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes gleich ist.

§ 312. Es sind zwei ähnliche Kegel gegeben; einen Kegel zu construiren, welcher beiden Kegeln ähnlich und zugleich das geometrische Mittel zwischen ihnen ist.

§ 313. Einen Cylinder zu construiren, der einem gegebenen Cylinder ähnlich ist und dessen Grundfläche sich zu der des gegebenen verhält wie zwei gegebene Linien m : n.

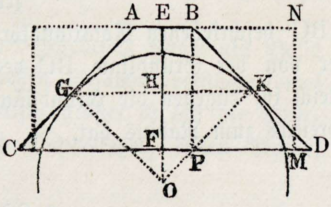
§ 314. Einen Kegel zu construiren 1) von gleicher Höhe und gleichem Inhalte mit einem gegebenen Hohlkegel, dessen Höhlung einen dem ganzen ähnlichen Kegel bildet, 2) von gleicher Basis und gleichem Inhalte mit einem Doppelkegel oder Hohlkegel, der durch Umdrehung eines beliebigen Dreiecks um eine seiner Seiten als Axe beschrieben ist.

§ 315. Einem geraden Cylinder ein Parallelepipedon einzuschreiben, dessen Grundkanten sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten, welches Verhältniß bei einem viereckigen Balken stattfinden muß, wenn er die größte Tragfähigkeit haben soll.

§ 316. Das Verhältniß der Inhalte zweier gegebener Kegel in Linien anzugeben.

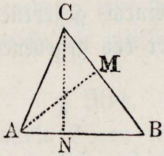
§ 317. Einen Cylinder und einen Kegel zu construiren, so daß beide zusammen einem gegebenen Kegelstumpfe gleich sind und alle drei Körper gleiche Höhe haben.

§ 318. 1) Einen geraden Cylinder zu construiren, der dieselbe Höhe und gleiche Mantelfläche mit einem geraden Kegelstumpf hat, dessen Axendurchschnitt ABCD gegeben ist.

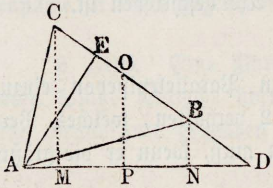


2) Einen gegebenen Kegelstumpf durch eine auf d. Höhenperpendikel senkrechte Ebene so zu schneiden, daß die Durchschnittsfigur die mittlere Proportionale zwischen den beiden Grundflächen bildet.

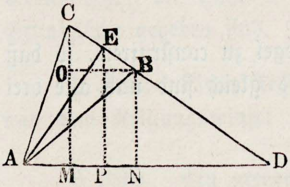
§ 319. 1) Durch einen außerhalb eines Cylinders gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche denselben längs einer Seitenlinie berührt. — 2) Durch einen außerhalb des Kegels gegebenen Punkt eine Berührungsebene an denselben zu legen.



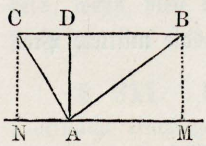
§ 320. Ein gegebenes Dreieck ABC rotirt um die eine Seite AB als Axe; es soll ein dem erzeugten Rotationskörper gleicher Kegel so construirt werden, daß seine Grundfläche der krummen Fläche gleich ist, welche von einer der beiden anderen Seiten AC oder BC des Dreiecks beschrieben wird.



§ 321. Ein gegebenes Dreieck ABC rotirt um eine durch die Spitze A gezogene Axe AD, welche ihrer Lage nach gegeben mit der Verlängerung der Gegenseite CB in D zusammentrifft. Es soll ein Kegel konstruirt werden, dessen Höhe dem auf die Gegenseite gefällten Höhenperpendikel AE des Dreiecks und dessen Inhalt dem von ABC erzeugten Rotationskörper gleich ist.



§ 322. Ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ABC rotirt um eine durch seine Spitze A gehende Axe AD, die ihrer Lage nach gegeben die Verlängerung der Grundlinie BC in D schneidet. Einen Kegel und einen Cylinder zu construiren, jeden von gleichem Inhalte mit dem von ABC beschriebenen Rotationskörper, so daß die Grundfläche des Kegels der von der Grundlinie BC des Dreiecks beschriebenen krummen Fläche gleich ist, dagegen die Grundfläche des Cylinders die Mittellinie AE des Dreiecks zum Radius hat.



§ 323. Ein gegebenes Dreieck ABC rotirt um eine durch seine Spitze A der Grundlinie BC parallel gezogene Axe MN. Man soll einen Cylinder und einen Kegel, jeden vom gleichem Inhalte mit dem von ABC beschriebenen Rotationskörper so construiren, daß man die Höhe AD des Dreiecks für den Cylinder als den Radius seiner Grundfläche, für den Kegel aber als dessen Höhe annimmt.

§ 324. Ein gegebenes regelmäßiges Halbpolygon (Fig. § 243) rotirt um den begränzenden Durchmesser des umschriebenen Kreises. 1) Einen geraden Cylinder zu construiren, dessen Höhe der Axe AF und dessen Mantel der Oberfläche des erzeugten Rotationskörpers gleich ist. — 2) Einen Cylinder und einen Kegel, jeden von gleichem Inhalte mit dem Rotationskörper so zu construiren, daß das Apothem des Polygons (§ 135) für den Cylinder als Grundflächenradius, dagegen für den Kegel als Höhe genommen wird.

Kugel (§ 235 bis § 250).

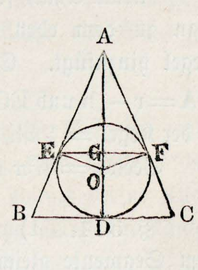
§ 325. 1) Durch einen außerhalb einer Kugel gegebenen Punkt P eine Berührungsebene an dieselbe zu legen.

2) An zwei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

§ 326. 1) Einen geraden Cylinder über dem Hauptkreise einer Kugel als Basis zu construiren, so daß sein Mantel einer gegebenen Zone oder Calotte der Kugel gleich ist. — 2) Einen Kreis zu beschreiben, der inhaltsgleich mit einer gegebenen Zone oder Calotte ist. — 3) Das Verhältniß einer gegebenen Calotte zu ihrer Grundfläche in Linien anzugeben. 4) Die Kugeloberfläche durch parallele Kreise in mehrere Theile zu theilen, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen. — 5) Eine Calotte zu construiren, die zu ihrer Grundfläche in einem gegebenen Verhältnisse steht.

§ 327. Ueber dem Hauptkreise einer gegebenen Kugel als Basis zu construiren 1) einen geraden Cylinder, dessen Gesammtoberfläche sowol als dessen Inhalt entsprechend um die Hälfte größer ist als die Oberfläche und der Inhalt der Kugel, 2) einen Doppelkegel, dessen Mantel der Kugeloberfläche gleich ist.

§ 328. Ein gerader Kegel ist gegeben. 1) Es soll in dem Kegel eine Kugel, welche den Mantel in einem Kreise und die Grundfläche in ihrer Mitte (D) berührt, construirt und der Radius (EG) des Berührungskreises aus der Seitenlinie (AB) und dem Radius (BD) der Grundfläche des Kegels gefunden werden. — 2) Es soll um den



Kegel eine Kugel beschrieben werden, deren Oberfläche die Spitze des Kegels um den Umfang seiner Grundfläche enthält.

§ 329. In einer gegebenen dreiseitigen Pyramide eine Kugel zu beschreiben, welche alle Seitenflächen der Pyramide berührt.

§ 330. Drei gegebene Kugeln liegen auf einer horizontalen Ebene; die Seiten des Dreiecks zu finden, dessen Ecken von den Berührungspunkten der Kugeln mit der Horizontalebene gebildet werden.

§ 331. Einen Kugelsector zu construiren, 1) dessen Inhalt und dessen Calotte entsprechend gleich sind dem Inhalte und der Grundfläche eines gegebenen schiefen Kegels, 2) dessen Inhalt von einem gegebenen Cylinder, in welchem die Höhe das kleinere Stück des nach dem mittlern Verhältnisse (§ 123) getheilten Radius bildet, zwei Drittheile beträgt und dessen Calotte dieselbe Höhe wie der Cylinder hat.

§ 332. Ein Kugelsegment zu construiren, 1) welches an Inhalt dem Kegel über derselben Grundfläche gleich ist, dessen Spitze im Kugelcentrum liegt, 2) dessen Calotte dem Mantel jenes Kegels gleich ist.

§ 333. Berechnung eines Kugelsegmentes und Kugelsectors mittels des ersten Beweises zum § 245. — Es ist in der Figur daselbst und dem dortigen Beweise zufolge das vom Flächenstücke CEG durch Umdrehung um $AC = r$ beschriebene Kugelsegment gleich dem von CEFD beschriebenen Cylinder (C), weniger dem von CEHD beschriebenen Kugelstumpfe (K). Setzt man $CE = h$, so ist

$EA = EH = r - h$, also (§ 222 und 231) $C = \pi r^2 h$ und

$K = \frac{1}{3}\pi h\,[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2] = \frac{1}{3}\pi h\,(3r^2 - 3rh + h^2)$, folglich

$$\text{Segm.} = \pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h\,(3r^2 - 3rh + h^2) = h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h).$$

Man erhält ferner den von CAG beschriebenen Kugelsector, wenn man zu dem eben gefundenen Segmente den von EAG beschriebenen Kegel hinzufügt. Es ist

$EA = r - h$ und $EG^2 = AG^2 - EA^2 = r^2 - (r-h)^2 = h\,(2r - h)$, also

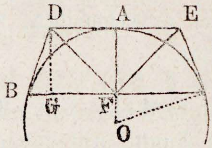
der Kegel $= \frac{1}{3}\pi h\,(2r - h)\,(r - h) = \frac{1}{3}\pi h\,(2r^2 - 3rh + h^2)$ daher

$$\text{Sector} = h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h) + \tfrac{1}{3}\pi h\,(2r^2 - 3rh + h^2) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

§ 334. 1) Ueber der Grundfläche eines Kugelsegmentes einen dem Segmente gleichen Kegel zu construiren.

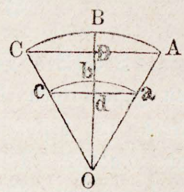
2) Von einer Kugel ein Segment abzuschneiden, welches zu dem zugehörigen Sector ein gegebenes Verhältniß n : m hat.

§ 335. Um ein Kugelsegment BAC ist ein gerader gleich hoher Kegelstumpf BDEC so beschrieben, daß seine Seitenlinien im Umfange der Grundfläche des Segmentes Tangenten der Kugel sind. Es soll der ringförmige, zwischen dem Kegelstumpfe und dem Segmente enthaltene Körper in einen Kegel verwandelt werden, der gleiche Höhe mit dem Segmente hat.

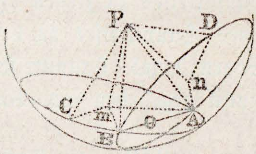


§ 336. Eine Kugelschicht ist durch die Radien a und b ihrer Grundkreise und durch ihre Höhe h gegeben. Es soll ein Cylinder von der Höhe $\frac{1}{2}$h construirt werden, so daß derselbe mit einer Kugel, deren Durchmesser h ist, zusammengenommen der Kugelschicht an Inhalt gleichkommt.

§ 337. Einen abgestumpften Kegel zu construiren, der so groß ist wie eine Kugelschale ABCabc, d. h. wie der übrigbleibende Theil eines Sectors, von welchem durch eine aus seiner Spitze beschriebene Kugelfläche ein kleinerer Sector abgeschnitten ist.



§ 338. 1) Zu beweisen, daß sich durch vier, nicht in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, D nur eine Kugelfläche legen läßt. — 2) Um eine gegebne dreiseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben. — 3) Eine Kugel zu beschreiben, deren Oberfläche durch sämmtliche Umfangspunkte zweier einander im Raume schneidender Kreise hindurchgeht. — 4) Eine Kugel zu beschreiben, von deren Oberfläche ein Stück gegeben ist.



§ 339. 1) Zu beweisen, daß es in jedem regelm. Polyeder einen Punkt giebt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seitenflächen gleich weit absteht. — 2) In und um ein regelm. Polyeder eine Kugel zu beschreiben. — 3) Eine Kugel zu beschreiben, welche sämmtliche Kanten eines regelm. Polyeder berührt.

§ 340. 1) Innerhalb einer gegebenen geraden Cylinderfläche eine dieselbe berührende Kugel zu beschreiben, die zugleich eine Ebene berührt, welche ihrer Lage nach gegeben die Cylinderaxe schneidet. — 2) Innerhalb einer gegebenen geraden Kegelfläche eine dieselbe berührende Kugel zu beschreiben, welche dabei eine der Lage nach gegebene Ebene berührt.

§ 341. Eine Kugel zu beschreiben, welche 1) durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt; 2) durch drei gegebene Punkte geht und eine der Größe und Lage nach gegebene Kugel berührt; 3) vier gegebene Ebenen berührt; 4) durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Ebenen berührt; 5) drei gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt; 6) durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Ebenen berührt; 7) durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Kugeln berührt; 8) durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Kugeln berührt; 9) vier gegebene Kugeln berührt.

Sphärik (§ 251 bis § 264).

§ 342. 1) Aus einem gegebenen Punkte auf der Kugel als Pol den zugehörigen Hauptkreis zu beschreiben. — 2) Auf der Kugel einen Kreis zu beschreiben, dessen Pol oder sph. Mittelpunkt und dessen sph. Radius (Abstand des Umfanges vom Pol) gegeben ist. — Durch zwei gegebene Punkte C und D auf der Kugelfläche den Bogen eines Hauptkreises zu ziehen (Fig. § 252). — 4) Einen gegebenen Bogen CD eines Hauptkreises zu verlängern. — 5) den Pol von einem gegebenen Bogen eines Hauptkreises oder eines Nebenkreises zu finden. — 6) Zu einem gegebenen sph. Vieleck das symmetrische Vieleck zu construiren.

§ 343. 1) Auf einem gegebenen Bogen eines Hauptkreises in einem gegebenen Punkte desselben einen senkrechten Bogen zu errichten.

2) Von einem Punkte außerhalb eines Hauptkreises auf diesen einen senkrechten Bogen zu ziehen.

§ 344. 1) Einen auf der Kugel gegebenen Bogen zu halbiren. — 2) Einen gegebenen sph. Winkel zu halbiren. — 3) Aus einem gegebenen Punkte auf der Kugel einen Hauptkreis zu beschreiben, der einen gegebenen Hauptkreis unter einem Winkel von vorgeschriebener Größe schneidet.

4) In einem gegebenen Punkte eines Hauptkreises an diesen einen gegebenen Winkel anzutragen.

§ 345. Den Ort aller Punkte auf der Kugel zu finden, die 1) von zwei gegebenen Punkten derselben, oder 2) von zwei ihrer Lage nach gegebenen Hauptkreisen gleiche sph. Entfernung haben.

§ 346. Zu beweisen, daß ein sph. Winkel FAG (Fig. § 252) immer größer ist als der ebene Winkel FAG, welchen die seinen Schenkeln zugehörigen Sehnen FA und GA am Scheitel A bilden.

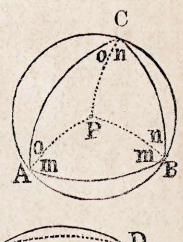
§ 347. 1) Um ein gegebenes sph. Dreieck einen Kreis zu beschreiben. — 2) In ein gegebenes sph. Dreieck einen Kreis einzuschreiben. — 3) Ein regelmäßiges sph. Vieleck zu beschreiben.

§ 348. Ein sph. Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind 1) die drei Seiten; 2) die drei Winkel; 3) zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel; 4) zwei Winkel und die zwischenliegende Seite.

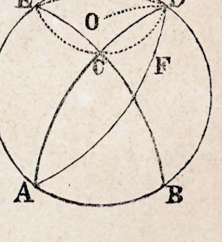
§ 349. 1) Durch einen gegebenen Punkt P einen Hauptkreis zu legen, der einen gegebenen Nebenkreis K berührt. — 2) Aus einem gegebenen Punkte P als Pol einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis K berührt. — 3) Einen Hauptkreis zu ziehen, der zwei gegebene Nebenkreise berührt.

§ 350. Von einem sph. Viereck, das einem Kugelkreise eingeschrieben ist, sind zwei gegenüberliegende Winkel gegeben; einen sph. Winkel zu construiren, welcher der Summe der beiden andern Winkel des Vierecks gleich ist.

§ 351. Den geometrischen Ort der Spitzen (C) solcher sphärischer Dreiecke (ABC) zu finden, welche auf einer gegebenen Grundlinie AB construirt sind und in welchen der Unterschied zwischen der Summe der Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze immer dieselbe Größe D hat.



§ 352. 1) Den geometrischen Ort für die Spitzen (C) alle sphärischer Dreiecke zu finden, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie AB und gleichen Flächeninhalt haben.



2) Ein gegebenes sph. Dreieck ABC in ein Zweieck von gleichem Inhalte zu verwandeln.

§ 353. Ueber einer Seite AB eines sph. Dreiecks ABC als Grundlinie ein anderes Dreieck von gleichem Inhalte zu construiren, 1) welches gleichschenklig ist, 2) welches einen gegebenen Winkel m an der Grundlinie oder eine gegebene Seite s hat, 3) dessen Spitze in einem gegebenen Hauptkreise F liegt. — 4) Ein gegebenes sph. n eck in ein n — 1 eck zu verwandeln.

§ 354. Auf einer gegebenen Kugelfläche die Eckpunkte der fünf darin einzuschreibenden regelm. Polyeder zu bestimmen.

§ 355. Zu beweisen, daß der eine halbe Peripherie nicht übersteigende Bogen eines Hauptkreises, welcher durch zwei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel hindurchgeht, kürzer ist als jeder von diesen Punkten begränzte Bogen eines Nebenkreises.

Druck von H. Laakmann in Dorpat.