В. А. Кукк

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

I

Современные методы расчета линейных цепей

ТАЛЛИН
1968

ЭА 15247

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра радиотехники

В.А. Кукк

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

I

Современные методы расчета линейных цепей

Конспект лекций

Таллин
1968

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
213815

Отв. редактор Ю. Рехепапп

Сдано в печать 5 января 1968 г.
Бумага 60x84, 1/16. Печ. л. 16,25. Усл. печ.л. 15,11
Тираж 1000. МВ-00307. Зак. № 23 Ротапринт ТПИ.
Цена 53 коп.

П р е д и с л о в и е

Настоящее учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов, изучающих теорию цепей, но может представлять интерес и всем, кто интересуется теорией цепей. Пособие составлено в соответствии с программой курса "Основы теории цепей" для студентов радиотехнического профиля. Оно охватывает только первую часть курса, и поэтому в него не вошли некоторые вопросы общего характера: контурная концепция и связанные с ней вопросы (кроме составления контурных уравнений сети), цепи с n входами, устойчивость и др.

Пособие построено следующим образом: в главе I рассмотрены уравнения линейных цепей и базирующаяся на них классификация, включая вопрос соединения цепей. Также рассмотрены методы экспериментального исследования многополюсников. В главе II рассматриваются структурные свойства цепей и различные методы расчета характеристик цепей (передачи, определители, обратные связи, чувствительность). Несколько особое место занимает § I.I, в котором строится модель цепи более абстрактно, чем принято в классических учебниках по теории цепей. Этот параграф можно даже пропустить при первом чтении (кроме некоторых определений - I.I.I4-I6). В приложении I приведен необходимый математический материал (кроме теории графов, которая изложена в § 2.I). В приложении 2 приведены эквивалентные схемы и матрицы узловых проводимостей некоторых типичных много-

полюсников. К пособию прилагается также краткий русско-англо-эстонский словарь по теории цепей, который охватывает лишь термины, встречающиеся в настоящем пособии. При этом следует иметь в виду, что приведены далеко не все английские синонимы, встречающиеся в литературе по теории цепей.

В список литературы по теории цепей включены лишь книги, посвященные современным методам и изданные на русском языке. Исключены учебники по курсу ТОЭ (некоторые из них содержат отдельные вопросы, рассмотренные в данном пособии), труднодоступные иностранные книги и журнальные статьи.

Для понимания материала пособия требуются знания по линейной алгебре и начальные понятия по теории множеств и дифференциальному исчислению. Все сведения, сверх обычного втузовского курса математики, можно найти в приложении I. Теория графов имеет столь важное значение в теории цепей, что соответствующий материал выделен в отдельный параграф в основном тексте (§ 2.I).

В пособии рассматриваются исключительно линейные цепи. Таким образом, все изложенные в пособии методы применимы к любым линейным цепям, если представление сигналов таково, что оно вместе с основными операциями в цепи образует коммутативную алгебру с делением. К таковым, в частности, относятся: I) безынерционные цепи, 2) стационарные цепи.

Само изложение основано на узловом (полюсном) представлении (концепции) цепей. Контурное (цикловое) представление, как теоретически более сложное, используется ограниченно, лишь при рассмотрении метода контурных токов.

Поэтому и при рассмотрении топологических методов и схем замещения используется унисторное представление.

Здесь уместно указать, что в некоторых источниках говорят о теории направленных и ненаправленных графов, подразумевая теорию сигнальных графов и топологические методы. Топологические методы действительно могут быть изложены в терминах теории графов (так это и делается), но при этом никакой ненаправленности не будет (унисторам будут соответствовать дуги графа). Кроме путаницы в названиях, такой подход имеет и методический недостаток: два принципиально различных метода "с помощью" общего математического аппарата почти сливаются. Особенно плохо, если при этом указывают на внешнее сходство формулы Мейсона (для сигнальных графов) и топологической формулы. Но в одном случае в формуле имеются передачи факторов и контуров, а в другом случае - величины деревьев. Даже дуального соответствия между этими понятиями нет.

В пособии применяется следующая система обозначения частей: номер пункта состоит из трех чисел, из которых первое означает главу, второе - параграф (в данной главе) и третье - номер пункта (в данном параграфе). Например: 2.9.6 - 6-й пункт 9-го параграфа 2-й главы.

Отдельную нумерацию в обеих главах имеют чертежи и формулы, причем первый номер указывает главу (фиг. 2-3 - 3-я фигура 2-й главы). Из формул пронумерованы лишь те, на которые имеются ссылки в тексте.

Все замечания просим направлять на кафедру радиотехники или автоматики ТПИ.

Автор выражает благодарность доц. Х.Силламаа за помощь при написании рукописи, а также всем лицам, содействовавшим при составлении пособия.

Основные обозначения

I – матрица токов, ток;
U – матрица напряжений, напряжение;
J – матрица автономных токов;
$\mathcal{U}$ – матрица автономных напряжений;
Y – матрица узловых проводимостей;
Z – матрица узловых сопротивлений;
G – проводимость;
R – сопротивление;
T – передача;
Δ – определитель сети;
C_k – величина k-ой цепи сети;
Δ_k – адъюнкта k-ой цепи сети;
D – определитель сигнального графа;
P_k – передача k-го прямого пути сигнального графа;
D_k – адъюнкта k-го прямого пути сигнального графа;
L_k – передача k-го контура сигнального графа;
$\Lambda_i^{(k)}$ – произведение передач i -го сочетания k не-касающихся контуров сигнального графа;
F_k – передача k-го фактора дополненного С-графа;
F_{k_0} – передача k-го фактора мёртвого С-графа;
F_g – обратная связь для параметра g ;
S_g^T – чувствительность передачи T относительно параметра g ;
Θ – нуль-матрица;
E – единичная матрица;
ν – цикломатическое число графа;
m – число ребер графа;
n – число вершин графа;
p – число компонент графа;

Дополнительные знаки

A' – транспонированная матрица;
A^{-1} – обратная матрица;
$|A|$ – определитель матрицы;
$\bar{A}$ – неопределённая матрица.

Глава I. УРАВНЕНИЯ И КЛАССЫ ЦЕПЕЙ

§ I.I. Основные понятия

I.I.I. Как определяют электрическую цепь

"...электрической цепью будем называть любое соединение устройств с проводниками, в которых под действием источников электрической энергии может возникать электрический ток. Для определения электрического состояния цепи достаточно применять лишь интегральные понятия" (П.А. Ионкин и др. Теоретические основы электротехники, ч.I. Основы теории цепей, "Высшая школа", М., I965).

"Электрической цепью называется система, состоящая из элементов, образующих пути для прохождения электрических токов" (Н.В. Зернов и В.Г. Карпов. Теория радиотехнических цепей. "Энергия", М.-Л., I965).

"Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для создания в них электрического тока; при этом электромагнитные процессы, протекающие в цепи, могут быть описаны при помощи понятий об электродвижущей силе (э.д.с.), токе и напряжении" (Г.В.Зевеке и др. Основы теории цепей. "Энергия", М.-Л., I965).

"Совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении, называют элект-

рической цепью" (Л.Р. Нейман и К.С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. "Энергия", М.-Л., 1966).

"Совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток, называют электрической цепью". (Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники."Высшая школа", М., 1967).

I.1.2. Обсуждение

Интересно, пять определений и среди них нет двух совпадающих! Увеличение количества их приводит к еще большему разнообразию (см., например, I.I.3). Ниже мы увидим, что причины этого заложены в сложности определяемого понятия.

Тем не менее все эти определения содержат и кое-что общее, в чем наверно и скрывается суть вопроса. Поэтому попробуем сформулировать эти общие черты:

1) электрическая цепь есть совокупность устройств;

2) эта совокупность предназначена для прохождения в ней тока, либо в ней может протекать ток;

3) процессы в цепи могут быть описаны с помощью понятий э.д.с., напряжения и тока.

Но позвольте спросить: эти устройства, которые составляют цепь, сами тоже цепи или нет? Если да, то мы имеем индуктивное определение цепи ("совокупность цепей - цепь") и должны как-то иначе определить хоть одну простейшую цепь (ср., например, определение детерминанта, приложение II.I.II). Если нет, то что это такое - устройство?

Рельсы железной дороги - это цепь или нет? Если по ним идет паровоз, то, наверно, нет (не предназначено), если электровоз, то видимо цепь (предназначено). А что, если предназначено для прохождения тока, но ток не идет (прогрелся предохранитель)?

Разумеется, можно считать известным (из физики) понятия э.д.с., напряжения и тока. Но постойте, напряжение - это что-то, характеризующее работу, которую надо произвести для перемещения заряда, ток - это интенсивность движения зарядов. А что такое э.д.с.? Она характеризует "силу" источника электрической энергии и измеряется в вольтах, как и напряжение. Почему игнорируют амперы? Нельзя ли характеризовать источник также какой-то интенсивностью ("электродвижущий поток"), которую можно было бы измерять в амперах? Была бы прекрасная симметрия. Ответ таков: можно было бы, но это связано с некоторыми неприятностями следующего характера: трудно было бы объяснить физику получения такой интенсивности.

И вот оказывается, что в теории цепей понятие "э.д.с." лишнее, даже более, оно легко может привести к путанице. Ниже мы увидим, что такое понятие нам нигде не понадобится. (Хотя можно было назвать напряжение идеального источника в схеме Тевенина э.д.с. и ток идеального источника в схеме Нортона э.д.п.).

Электромагнитные процессы в цепи должны быть описываемы с помощью понятий напряжения и тока. Но полностью описывать электромагнитные процессы таким образом невозможно: в этих процессах понятие напряжения в обычном значении не имеет смысла. Необходимо добавлять магнитные величины или перейти к совсем новым понятиям.

Так что же, приведенные определения не пригодны? Нет. Они, вероятно, дадут какое-то представление об электрических цепях, особенно тому, кто в некоторой степени уже знаком с электротехникой. Но эти определения не очень точны, и, в конце концов, они предполагают, что читателю интуитивно понятно, о чем идет речь, и только уточняют, что "описание" должно быть "электрическое".

I.I.3. Официальное определение

Приведем еще два определения. В них более явно выражены принципы теории цепей.

В 1958 г. председатель подкомиссии по теории цепей международного научного радиотехнического Союза (URSI - International Scientific Radio Union) B.D.H.Tellegen из Голландии предложил следующее определение теории цепей:

"Circuit theory is the theory of networks composed of black boxes characterized by relations between the voltages and currents at the terminals, which relations contain only time as independent variable, and contain neither space nor temperature coordinates."

Позднее это определение было уточнено группой видных ученых (H.Inose, F.Reza, D.Trautman, L.Weinberg, L.Zadeh), как официальное определение конференции вышеназванной организации:

"Circuit theory is the theory of networks of "black boxes", which are characterized by relations between the voltages, currents or other variables at their terminals, and which are, in general, abstractions of physical components of electrical system."

Обратите внимание: "теория есть теория" и все, больше ни слова о том, чем эта теория занимается. Все остальное говорит только об объектах исследований - о цепях. Так что эти определения по существу представляют собой все-таки определение цепи, а не теории цепей.

Хотя эти определения более абстрактны и уже поэтому лучше приведенных в I.I.I, им также присущи недостатки. Но их перечислять и обсуждать мы уже не будем (ведь не это наша основная задача!).

I.I.4. Почему

определения цепи имеют недостатки, перечисленные в I.I.2? Это в первую очередь результат того, что уже в определении, в аксиомах теории хотят указать, как и в каких случаях можно на практике пользоваться результатами теории. Теория занимается моделями (как правило, математическими моделями), а не реальными объектами. Достаточно сравнить математическую теорию охоты на львов (в книге "Физики шутят") и действительную охоту!

Цепь как объект теории цепей есть математическая модель, и теория цепей исследует эти модели. Реальный объект будет "цепью" или нет в зависимости от того, применяют ли к ней теорию цепей или нет (при предположении, что объект вообще допускает применение этой теории).

I.I.5. Нужно

ли определение цепи? На этот вопрос можно ответить так: было бы очень приятно иметь достаточно короткое и изящное определение (хотя бы для энциклопедии). Но объяснить в одном-двух предложениях всё о том, что такое теория цепей (или хотя бы цепь) исключительно трудно. Доказательство - количество определений (различных).

Для нас более целесообразно сделать так: оставить каждому свободу выбрать любое из приведенных определений цепи (теории цепей). Принимайте его или нет. Ничего странного не будет. Только наизусть не учите.

И теперь в остальной части настоящего параграфа приведем материал, которым попытаемся заменить определение цепи, и, видимо, это будет более полезно, чем любое определение.

I.I.6. Первые шаги

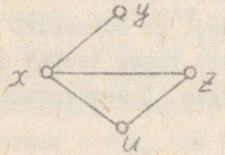
В самом начале мы должны что-то определить. При этом, как это свойственно любым теориям, начальные понятия являются очень абстрактными и общими; потом вводятся ограничения (имея в виду практические цепи).

Итак, дано (конечное) множество V. Элементы этого множества мы сначала назовем точками, а потом зажимами (термин заимствован от реальных объектов).

Кроме точек нам нужны пары точек. Пару точек (x, y), $x \in V, y \in V$ мы называем линией, а потом проводником (порядок здесь не существен - (x, y) то же самое, что (y, x)).

В множество линий C входят некоторые пары, образованные из элементов V.

Выбор названий обоснован тем, что удобно изображать множества, а также прочие понятия, определенные на множествах, графически на бумаге. Точки множества V изображаем точками на плоскости (разумеется, никаких ограничений относительно расположения их нет), а точки, входящие в пару, соединяем непрерывной линией (фиг. I-I).



Точки: $V=\{x, y, z, u\}$

Линии: $C=\{(x,y),(x,z),(x,u),(u,z)\}$

Фиг. I-I

Такое графическое представление будет у нас основным, и мы его назовем схемой (цепи).

I.I.7. Переменные

Переменные можно ввести по-разному. Например, можно считать первичным понятие мощности P и представить её в виде билинейной формы

$$P = \sum_i F_i f_i .$$

Здесь F_i (обобщенные силы) и f_i (обобщенные потоки) являются переменными. На них накладываются некоторые дополнительные условия. Соотношения между силами и потоками характеризуют "цепь".

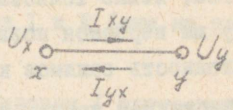
Для нас более целесообразно идти по другому пути: сначала ввести переменные, а потом постулировать мощность (см. I.I.I6).

Таким образом, каждой точке (зажиму) $x \in V$ ставим в соответствие ее потенциал U_x.

Каждой линии (проводнику) ставим в соответствие её ток. Здесь надо еще указать направление, т.е. необходимо указать, в каком порядке рассматривается пара точек ((x, y) или (y, x)). При этом перемена направления меняет знак тока:

$$I_{xy} = -I_{yx}.$$

Выбор направления, конечно, произволен.



Теперь можно сразу дать первое количественное соотношение (условие): потенциалы зажимов проводника равны (фиг. I-2).

$$U_x = U_y$$
$$I_{xy} = -I_{yx}$$

Фиг. I-2

I.I.8. Элементы (цепи)

Элементом цепи мы называем (любое) подмножество $M \subset V$. Разумно, хотя и необязательно, требовать, чтобы элемент содержал не менее двух точек. Тогда отдельная точка не будет элементом.

Если множество V разложено на сумму непересекающихся подмножеств плюс еще некоторые отдельные точки и если на V определено также множество линий, то такую совокупность можно называть уже цепью (но не будем считать это определением).

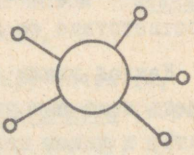
Теперь хотелось бы ввести какое-то графическое представление для элементов. Мы должны указать, какие точки принадлежат данному подмножеству - элементу. Можно было бы их просто собирать вместе, как показано на фиг. I-3.



Элемент

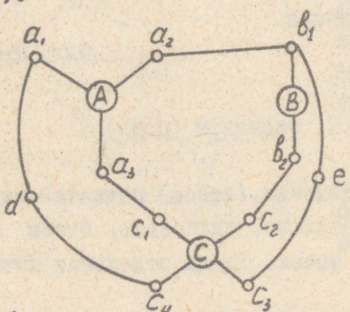
Фиг. I-3

Но, видимо, это не совсем удобное изображение, потому что трудно указать линии, которые идут к точкам, расположенным "внутри" элемента. Поэтому будем пользоваться изображением, показанным на фиг. I-4: зажимы элемента и линии, соединяющие их с кругом. Данный круг, таким образом, "объединяет" зажимы элемента, указывает, какие точки принадлежат данному элементу. Линии, соединяющие зажимы с кругом, можно толковать как проводники, но к этому вопросу мы вернемся позже. Пока они отображают только принадлежность зажимов к элементу.



Фиг. I-4

В будущем наряду с названием элемента (цепи) будет встречаться и термин <u>многополюсник</u> (полюс и зажим - одно и то же).



$V=\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4, d, e\}$

$C=\{(a_1 d), (d, c_4), (a_3, c_1), (a_2, b_1), (b_2, c_2), (b_1, e), (e, c_3)\}$

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{B_1, B_2\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$

$V=\underbrace{A \cup B \cup C}_{\text{элементы}} \cup \{d, e\}$

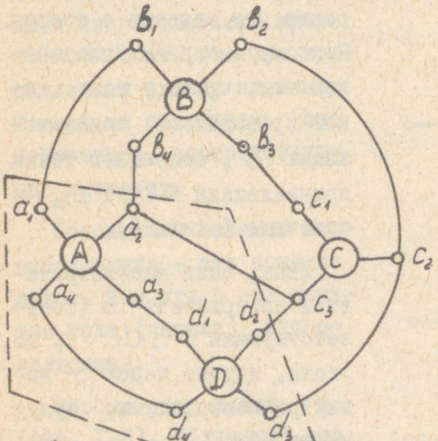
Фиг. I-5

На фиг. I-5 представлена одна (более сложная) схема. Там же указаны множества V, C, элементы A, B, D и разложение V на элементы и множество "свободных" зажимов $\{d,e\}$. A - трехполюсник, B - двухполюсник, D - четырехполюсник.

I.I.9. Первый закон Кирхгофа

Мы ввели уже переменные (в I.I.7), но пока у нас отсутствуют ограничения, уравнения и связи для них.

Введем понятие замкнутой поверхности. Выбираем какое-то подмножество I (не ток!) множества точек V, при одном лишь ограничении: если какая-нибудь точка $x_i \in I$ принадлежит элементу $\mathfrak{X}$, то все $x_i \in \mathfrak{X}$ должны входить в I. Обозначая теперь дополнение к I (т.е. $V \setminus I$) через E, мы разбили множество V на подмножества I и E (они не пересекаются): $V = I \cup E$.



$I = \{a_1, a_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, d_4\} = AUD$

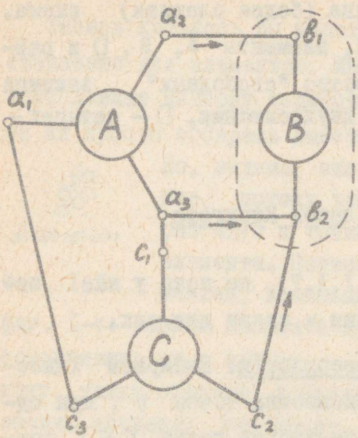
$E = \{b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3\} = BUC$

$S = \{(b_1, a_1), (b_4, a_2), (c_3, a_3), (c_1, d_2), (c_2, d_3)\}$

Фиг. I-6

Назовем I внутренностью замкнутой поверхности и E её внешностью. Множество $S \subset C$ всех линий, для которых одна точка принадлежит I, а другая - E, называем замкнутой поверхностью (соответствующей данному разбиению $V = I \cup E$).

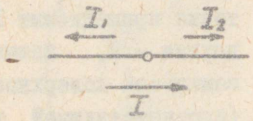
Очень простое толкование имеем для этого понятия на схеме: мы должны взять замкнутую кривую, пересекающую только провод-



$$I_{a_2 b_1} + I_{a_3 b_2} + I_{c_2 b_2} = 0$$



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$



$$I_1 + I_2 = 0$$

$$I_1 = -I; \quad I_2 = I$$

Фиг. I-7

ники. В S входят именно те проводники, которые пересекаются кривой (фиг.I-6). По причине такого простого соответствия можно замкнутой поверхностью назвать такие рассмотренную кривую. Название "поверхность" используется потому, что реальные объекты трехмерны, и мы имеем дело именно с поверхностью (это название входит в группу: зажим, проводник, многополюсник).

Так как введенное понятие поверхности было определено как множество линий, то, по-видимому, целесообразно его связать с токами. Поэтому выбираем направления так, чтобы у всех токов проводников, принадлежащих S, отправные точки принадлежали E (или I), а конечные I (или E).

Итак, если рассматривается поверхность S (соответствующая $V = I \cup E$), то токи, идущие через S вовнутрь поверхности, будут иметь вид

$$I_{xy} \mid x \in E,\ y \in I,\ (x,y) \in S.$$

Теперь можно сформулировать так называемый <u>первый закон Кирхгофа</u> (G.Kirchhoff): сумма токов через замкнутую поверхность равна нулю.

Отметим, что безразлично, имеем ли мы в виду токи вовнутрь или изнутри поверхности. В первом случае можно приведенный закон записывать так:

$$\sum_{(x,y)\in S} I_{xy} = 0 \quad | \quad x\in E,\ y\in I,$$

и во втором случае:

$$\sum_{(y,x)\in S} I_{yx} = 0 \quad | \quad x\in E,\ y\in I.$$

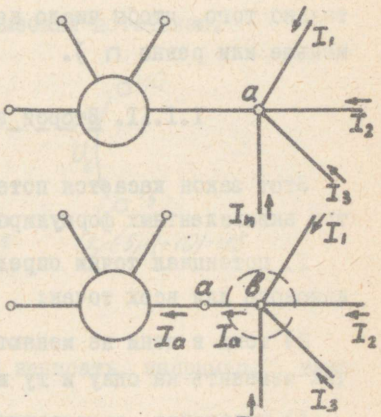
Если выбрать в качестве внутренности поверхности один зажим, то первый закон Кирхгофа можно записать так: сумма токов, входящих (выходящих) в зажим, равна нулю. Иллюстрации к этому закону приведены на фиг. I-7.

I.I.IO. <u>Закон Ома</u>

Этот закон объясняет, почему мы ввели элементы (многополюсник). До сих пор зажимы многополюсника имели только то общее, что они принадлежали одному элементу. Теперь мы связываем еще переменные, соответствующие элементу.

Потенциалы зажимов многополюсника - это понятие ясное. Нам нужно еще понятие тока (зажима) многополюсника.

Рассмотрим зажим a (фиг. I-8). "Удлиним" его введением еще одного зажима b и проводника (a,b). В принципе ничего не меняет-



$$I_a = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots + I_n$$

Фиг. I-8

ся ($U_a = U_b$, в зажим a извне втекает ток I_a). В проводнике (a, b) имеем ток I_a в направлении от b к a. Если считать отрезок от a до круга также проводником, то там же будет ток I_a ,направленный в многополюсник. Этот ток, равный сумме всех токов, входящих извне многополюсника в зажим a , мы называем током зажима a .

Теперь закон Ома (G.Ohm): токи и потенциалы n -полюсника связаны между собой n уравнениями.

Аналитически:

$$\begin{cases} F_1(I_1, I_2, \dots, I_n, U_1, U_2, \dots, U_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(I_1, I_2, \dots, I_n, U_1, U_2, \dots, U_n) = 0 . \end{cases} \qquad (I\text{-}I)$$

Этот закон, конечно, можно сформулировать с более или менее сильными условиями. Налагая ещё какие-то ограничения на функции F_i , мы в дальнейшем сужаем класс рассматриваемых цепей. Менее сильные условия можно получить, не задаваясь числом уравнений (требуя,например, только того, чтобы число независимых уравнений было бы меньше или равно n).

I.I.II. Второй закон Кирхгофа

Этот закон касается потенциалов. Мы сразу приведем три эквивалентных формулировки:

1) потенциал точки определен лишь до слагаемого,одинакового для всех точек;

2) токи в цепи не меняются, если потенциалы всех точек изменить на одну и ту же величину;

3) уравнения, связывающие токи и потенциалы зажимов любого элемента, содержат лишь разности потенциалов,которые мы называем напряжением.

Теперь нам потенциал вообще не нужен, а достаточно разностей потенциалов – напряжений. В дальнейшем ради удобства мы все-таки сохраняем как понятие потенциала, так и второй закон Кирхгофа.

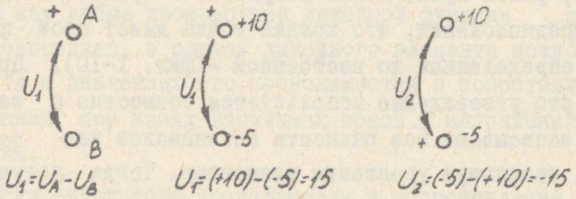
Напряжение связано с двумя точками. Поэтому всегда нужно указать, какую разность мы имеем в виду. Другими словами, для точек x и y можно рассматривать как потенциал точки x относительно точки y – напряжение U_{xy} или, наоборот, напряжение U_{yx}. При этом

$$U_{xy} = U_x - U_y,$$
$$U_{yx} = U_y - U_x$$

и, следовательно,

$$U_{xy} = -U_{yx}.$$

Если мы не хотим пользоваться в качестве индексов названиями точек, то будем применять следующее обозначение: ставим знак " + " у той точки, потенциал которой относительно другой имеется в виду (фиг. I-9). Это обосновано следующим: если напряжение положительно, то обозначенный зажим имеет более высокий потенциал.

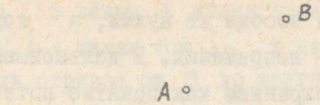


Фиг. I-9

Второй закон Кирхгофа можно записать, например, так:

$$U_i = U_i' + C,$$

где U_i – потенциал точки i;
U_i' – потенциал точки i относительно базовой (какой-то определенной) точки.



$$\{A,B,C,D\}: U_{BA}+U_{CB}+U_{DC}+U_{AD}=$$
$$=U_B-U_A+U_C-U_B+U_D-U_C+U_A-U_D\equiv 0$$

$$\{A,B,D,B,A\}: U_{BA}+U_{DB}+U_{BD}+U_{AB}+U_{AA}=$$
$$=-U_{AB}-U_{BD}+U_{BD}+U_{AB}+U_{AA}\equiv 0$$

Фиг. I-IO

В практических расчетах под названием второго закона Кирхгофа часто используется следующее утверждение: сумма изменений потенциала между точками (конечной) последовательности, в которой первая и последняя точки совпадают, равна нулю. (Этот результат – прямое следствие того предположения, что каждая точка имеет свой потенциал, определенный до постоянной – фиг. I-IO). Практически это утверждение используется совместно с законом Ома: записывают все разности потенциалов как функции токов, используя уравнения элементов. Тогда получается уравнение, содержащее токи, а не выражение, тождественно равное нулю. Им уже можно воспользоваться.

I.I.I2. Сопротивления и проводимости

Перейдем теперь к уравнениям элементов. Введем некоторые дополнительные условия и понятия.

Относительно уравнений элемента мы предлагаем только существование частных производных $\frac{\partial U_i}{\partial I_k}$ или $\frac{\partial I_i}{\partial U_k}$ в некоторой области.

Производные типа $\frac{\partial I_i}{\partial U_k} = Y_{ik}$ называются проводимостями элемента.

Производные типа $\frac{\partial U_i}{\partial I_k} = Z_{ik}$ называются сопротивлениями элемента.

Таким образом, мы для любой пары тока и напряжения предполагаем существование либо проводимости, либо сопротивления (не плохо, если существуют оба).

I.I.I3. Типы элементов

Введением дополнительных условий для уравнений элементов

$$\begin{cases} F_1(I_1, I_2, \ldots, I_n, U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \\ \quad - - - - - - - - - - - - - - - \\ F_n(I_1, I_2, \ldots, I_n, U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \end{cases} \qquad (I\text{-}I)$$

можно получить разные типы (классы) элементов (составляя из них цепи, получим разные классы цепей).

Если уравнения (I-I) линейны, то соответствующий элемент также называется линейным. Проводимости и сопротивления линейного элемента не зависят ни от токов, ни от напряжений (так как любые производные линейной функции постоянны). Следовательно, в случае линейного элемента можно говорить просто о значениях его проводимостей и сопротивлений, без указания, при каких значениях токов и напряжений они определены.

Если сверх того проводимости и сопротивления постоянны во времени, то элемент называется стационарным (соответственно - стационарная цепь). В данном пособии рассматриваются лишь линейные стационарные цепи. Они достаточно простые, но в то же время имеют широкое применение (не забудьте - модели!).

Если из равенства между собой всех потенциалов (все напряжения элемента равны нулю) вытекает равенство нулю всех токов, то элемент называется неавтономным. В противном случае элемент автономный.

Вычисляя дифференциалы величин F_i, найдем:

$$dF_i = 0$$

или

$$\frac{\partial F_i}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial F_i}{\partial I_2} dI_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial I_n} dI_n + \frac{\partial F_i}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial F_i}{\partial U_2} dU_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial U_n} dU_n = 0. \quad (I\text{-}2)$$

Относительно дифференциалов система уравнений (I-2), конечно, линейна. Значит, для дифференциалов токов и напряжений цепь всегда линейна. Это будет так и для достаточно малых конечных изменений:

$$\frac{\partial F_i}{\partial I_1} \Delta I_1 + \frac{\partial F_i}{\partial I_2} \Delta I_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial I_n} \Delta I_n + \frac{\partial F_i}{\partial U_1} \Delta U_1 + \frac{\partial F_i}{\partial U_2} \Delta U_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial U_n} \Delta U_n \approx 0.$$

Совокупность значений токов и напряжений I_{10}, I_{20}, ..., I_{n0}, U_{10}, U_{20}, ..., U_{n0}, при которых вычисляются производные $\frac{\partial F_i}{\partial I_j}$ и $\frac{\partial F_i}{\partial U_k}$ и от которых отсчитывают отклонения

$$\Delta I_j = I_j - I_{j0},$$
$$\Delta U_k = U_k - U_{k0},$$

называются базовыми значениями токов и напряжений. (Эту совокупность можно рассматривать как точку в $2n$-мерном пространстве; её называют рабочей точкой).

Ввиду линейности уравнений (I-2) все вопросы, рассматриваемые ниже, охватывают не только линейные цепи, но и нелинейные, работающие в режиме малого сигнала (нас интересуют лишь отклонения переменных от базовых значений). В тех редких случаях, когда надо различить линейные и рассмотренные псевдолинейные цепи, мы сделаем специальную оговорку. Режим малых отклонений будет называться псевдолинейным.

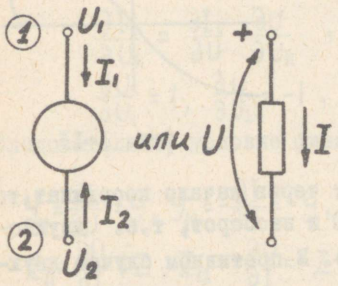
Рассмотренные выше законы Кирхгофа и Ома, конечно, тоже представляют собой некоторые ограничения. Закон Ома мы уже использовали, записав систему уравнений (I-1). Законы Кирх-

гофа накладывают еще два условия на уравнения (I-I) или, другими словами, на проводимости и сопротивления.

Условия, вытекающие из законов Кирхгофа, мы называем условиями физической возможности. Это объясняется тем, что законы Кирхгофа не были введены произвольно, а они являются абстракциями "законов природы".[I] Так что эти условия нам нужны для того, чтобы исключить из рассмотрения объекты, для которых нельзя найти представителей в реальности.

I.I.I4. Двухполюсник

Иллюстрируем вышерассмотренное на примере простейшего элемента - двухполюсника (фиг. I-II). Его уравнения:



Фиг. I-II

$$F_1(I_1, I_2, U_1, U_2) = 0\,,$$
$$F_2(I_1, I_2, U_1, U_2) = 0\,. \qquad (I\text{-}3)$$

Первый закон Кирхгофа требует, чтобы

$$I_1 = -I_2 = I\,,$$

а второй закон требует, чтобы в F_1 и F_2 входила бы лишь разность

$$U_1 - U_2 = U\,.$$

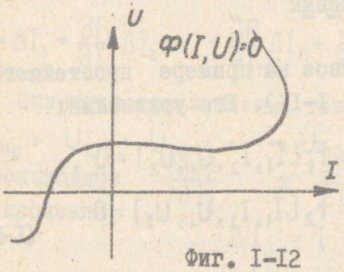
Итак, в случае двухполюсника можно говорить об одном токе I и одном напряжении U (это одно выражение условия физической возможности). Договоримся определить ток и напряжение именно так, как это было сделано выше $I = I_1$, $U = U_1 - U_2$ (или, наоборот, $I = I_2$, $U = U_2 - U_1$).

I) Здесь в качестве "законов природы" мы можем считать уравнения Максвелла, хотя аналогичные "законы" встречаются в более общем виде в термодинамике.

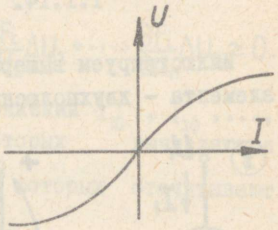
Исключая возможность, что уравнения (I-3) не имеют решения или имеют конечное число решений (эти случаи не представляют интереса), мы делаем вывод, что F_1 и F_2 зависимы, т.е. они равносильны одному уравнению

$$\Phi(I,U)=0. \qquad (I-4)$$

Предположим еще, что $\Phi = 0$, определяет неявную функцию (в некоторой области). График этой неявной функции называется вольт-амперной характеристикой двухполюсника (фиг. I-I2).

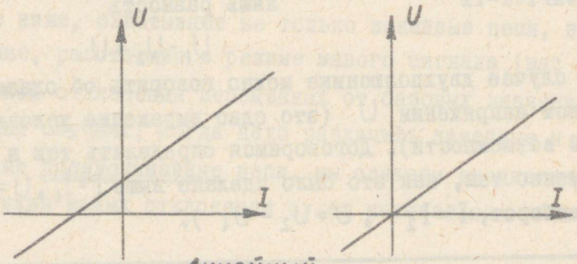


Фиг. I-I2



Фиг. I-I3

Если характеристика проходит через начало координат, то из $U_1 = U_2$ вытекает, что $I = 0$ и наоборот, т.е. двухполюсник неавтономный (фиг. I-I3). В противном случае двухполюсник автономный.



Линейный автономный и неавтономный двухполюсники

Фиг. I-I4

Если уравнения $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ линейны, то и линейна

$$aI + bU + c = 0. \qquad (I\text{-}5)$$

Характеристика линейного двухполюсника – прямая (фиг. I-I4).

Можно говорить о четырех проводимостях и сопротивлениях двухполюсника:

$$y_{11} = \frac{\partial I_1}{\partial U_1}, \quad y_{12} = \frac{\partial I_1}{\partial U_2}, \quad y_{21} = \frac{\partial I_2}{\partial U_1}, \quad y_{22} = \frac{\partial I_2}{\partial U_2},$$

$$Z_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial I_1}, \quad Z_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial I_2}, \quad Z_{21} = \frac{\partial U_2}{\partial I_1}, \quad Z_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial I_2}.$$

Из законов Кирхгофа следует

$$(I_1 = -I_2 = I, \quad U = U_1 - U_2)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial U_k} = \frac{\partial I_i}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial U_k}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial I_k} = \frac{\partial U_i}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial I_k},$$

$$\frac{\partial U}{\partial U_1} = 1, \quad \frac{\partial U}{\partial U_2} = -1, \quad \frac{\partial U_1}{\partial U} = 1, \quad \frac{\partial U_2}{\partial U} = -1.$$

Следовательно, условие физической возможности имеет вид:

$$y_{11} = \frac{\partial I}{\partial U} = y, \; y_{12} = -\frac{\partial I}{\partial U} = -y, \; y_{21} = -\frac{\partial I}{\partial U} = -y, \; y_{22} = \frac{\partial I}{\partial U} = y,$$

$$Z_{11} = \frac{\partial U}{\partial I} = Z, \; Z_{12} = -\frac{\partial U}{\partial I} = -Z, \; Z_{21} = -\frac{\partial U}{\partial I} = -Z, \; Z_{22} = \frac{\partial U}{\partial I} = Z.$$

Двухполюсник имеет одну проводимость y, одно сопротивление Z, и нетрудно видеть, что они связаны между собой соотношением

$$yZ = 1.$$

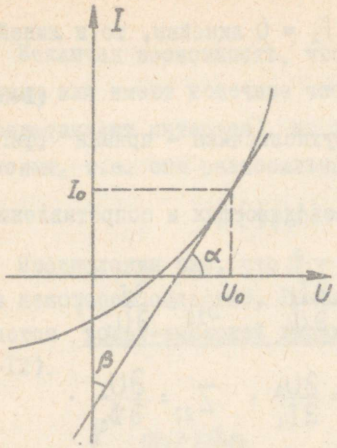
Этот же результат можно было получить прямо из (I-4):

$$Z = \frac{\partial U}{\partial I} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial I}}{\frac{\partial \Phi}{\partial U}}, \quad y = \frac{\partial I}{\partial U} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial U}}{\frac{\partial \Phi}{\partial I}}.$$

Для линейного двухполюсника найдем из (I-5):

$$y = -\frac{b}{a}, \quad Z = -\frac{a}{b}.$$

Определение проводимости и сопротивления из характеристики см. на фиг. I-I5.



Проводимость $Y = tg\alpha$ и сопротивление $Z = tg\beta$ в точке (I_o, U_o)

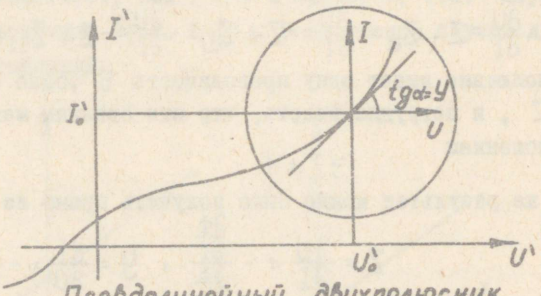
Фиг. I-I5

Псевдолинейный режим можно истолковать исходя из вольт-амперной характеристики путем переноса начала координат в рабочую точку и линеаризации характеристики около этой точки, то есть замены кривой на касательную (фиг. I-I6).

Наконец отметим, что иногда пользуются понятиями статических проводимостей и сопротивлений:

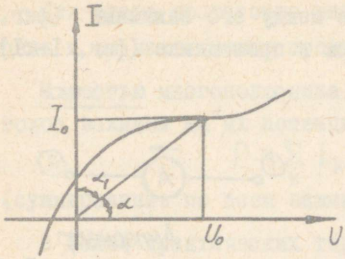
$$Y_{st} = \frac{I}{U}, \qquad Z_{st} = \frac{U}{I}, \qquad (I\text{-}6)$$

где I и U – истинные значения токов и напряжений (фиг. I-I7).



Псевдолинейный двухполюсник
Ток I, напряжение U
Рабочая точка (I_o', U_o')

Фиг. I-I6



Статическая проводимость $tg\alpha = \frac{I_0}{U_0}$

Статическое сопротивление $tg\alpha_1 = \frac{U_0}{I_0}$

Фиг. I-I7

Введение этого понятия малоэффективно (ввиду простых соотношений (I-6)). Если ими пользуются, то рассмотренные нами проводимости и сопротивления называются динамическими или дифференциальными.

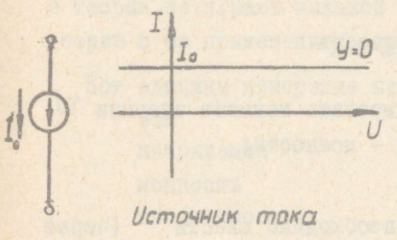
I.I.I5. Особые двухполюсники

Источник тока - это двухполюсник, через который идет постоянный ток (фиг. I-I8):

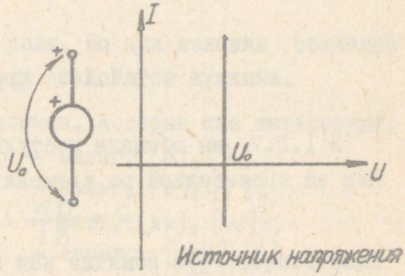
$$I = const.$$

Источник напряжения - это двухполюсник, напряжение между зажимами которого постоянно (фиг. I-I9):

$$U = const.$$



Фиг. I-I8

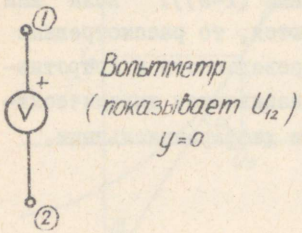


Фиг. I-I9

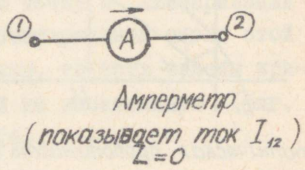
Часто источниками называют вообще автономные элементы. Чтобы отличить введенные источники, их тогда называют идеальными.

Измерительные приборы будут использованы на схемах для того, чтобы указать, какие переменные нас интересуют.

Вольтметр измеряет напряжение между его зажимами (фиг. I-20). Амперметр измеряет ток в проводнике (фиг. I-2I).



Фиг. I-20



Фиг. I-2I

В принципе вольтметр и амперметр не являются элементами цепи, но поскольку мы будем их изображать на схемах и им соответствуют реальные представители, их можно считать двухполюсниками. При этом проводимость вольтметра и сопротивление амперметра должны равняться нулю ("идеальные приборы"). Тогда их можно "включить" в любую часть цепи, не меняя токов и напряжений.

I.I.I6. Мощность

В I.I.7 мы обещали постулировать понятие энергии W или её производной по времени - мощности:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Даже более, эти понятия нам необходимо ввести (через энергию связываются разные виды движения: механический, электрический, тепловой и др.).

При нашем построении теории цепей нельзя вывести выражения для мощности, опираясь на определенные выше понятия. Мы должны его постулировать. Чтобы иметь какую-то основу для этого, мы определяем мощность так, чтобы ее выражение совпало с известным из физики.

Для этого достаточно рассмотреть многополюсник (любую цепь и ее части можно представлять в виде многополюсника).

Мощностью многополюсника называем сумму произведений токов зажимов на их потенциалы:

$$P = \sum_k I_k U_k$$

(суммирование по всем зажимам).

В более практических терминах P – это мощность, которая передаётся в многополюсник через его зажимы (или через замкнутую поверхность, окружающую многополюсник).

Если $P > 0$, то энергия передаётся в многополюсник, а если $P < 0$, то многополюсник является источником энергии, и если $P = 0$, то обмен энергией (электрической) между многополюсником и внешностью отсутствует.

Для двухполюсника найдём (знакомое, наверно) выражение:

$$P = I_1 U_1 + I_2 U_2 = I U_1 - I U_2 = I U.$$

I.I.I7. Единицы измерения

в теории не играют никакой роли. Но при желании сблизить теорию с ее применением, они становятся нужными.

Вот единицы измерения величин, которые нас интересуют:

ток	– ампер, [а], [A];
напряжение	– вольт, [в], [V];
мощность	– ватт, [вт], [W];
проводимость	– сименс, [сим], [S];
сопротивление	– ом [ом], [Ω].

На основе соотношений, полученных выше, имеем:

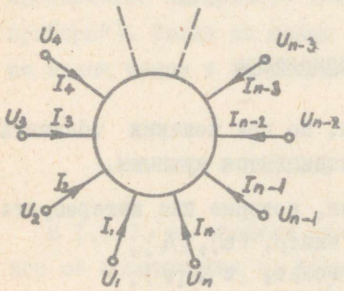
$$I[V] = I[A] \cdot I[\Omega];$$
$$I[A] = I[V] \cdot I[S];$$
$$I[W] = I[A] \cdot I[V].$$

Ради удобства используются такие бо́льшие и меньшие единицы, образованные по известным правилам: килоамперы [ка], [kA], мегаомы [мгом], [MΩ], микровольты [мкв], [μV], нановатты [нвт], [nW] и т.д.

§ I.2. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА

I.2.I. Линейный многополюсник

Первоначально будем рассматривать линейную электрическую цепь в виде так называемого "черного ящика", т.е. в виде такого элемента, о внутреннем строении которого мы ничего не знаем и который с "внешним миром" может быть соединен только с помощью некоторого (конечного) числа зажимов (полюсов). Каждый зажим имеет свой потенциал (относительно некоторой определенной нулевой точки в пространстве) и через него может протекать ток. Электрическую цепь в таком виде называют многополюсником; если она имеет n доступных зажимов, мы говорим об n-полюснике (фиг. I-22).



Фиг. I-22

Предположим, что мы имеем возможность определить потенциалы и токи всех зажимов. Эту единственную информацию о "черном ящике" мы можем выразить в виде уравнений, связывающих токи и потенциалы всех зажимов. Поэтому мы должны начинать с исследования этих уравнений.

В общем случае можно написать для n-полюсника n уравнений, выражающих потенциалы через токи или наоборот. Если эти уравнения оказываются линейными, многополюсник называется линейным многополюсником. В настоящем пособии мы будем исследовать только линейные многополюсники.

Итак, для линейного многополюсника имеем n уравнений

$$I_i = \sum_k Y_{ik} U_k + J_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь Y_{ik} и J_k не зависят от токов и потенциалов (напряжений) I_i и U_k, а индексы i и k пробегают значения 1, 2, 3...n.

Договоримся считать положительными направления токов вовнутрь многополюсника, а напряжения определяем как потенциалы зажимов многополюсника относительно нулевой точки.

Эти уравнения можно записывать в матричной форме:

$$I = \bar{Y}U + \bar{J}, \qquad (I.6)$$

где U - матрица потенциалов (столбец);
I - матрица токов (столбец);
$\bar{Y}$ - постоянная матрица проводимости (квадратная);
$\bar{J}$ - постоянная матрица токов (столбец).

Матрицы $\bar{Y}$ и $\bar{J}$ характеризуют многополюсник, в них сосредоточена та информация, которую мы получим при исследовании многополюсника. К изучению свойств этих матриц мы и приступим.

Если $J \neq \Theta$, то многополюсник называется автономным. При выполнении этого условия внутри многополюсника существуют источники тока (поэтому он так и называется).

Если $J = \Theta$, то источников тока внутри многополюсника нет и он называется неавтономным; уравнение (I-6) упрощается:

$$I = \bar{Y}U. \qquad (I-7)$$

В данном параграфе мы исследуем только неавтономные многополюсники, а автономным многополюсникам посвящается § I.3.

I.2.2. Матрица узловых проводимостей

Матрица $\bar{Y}$ называется неопределенной матрицей узловых проводимостей. С помощью законов Кирхгофа мы устанавливаем основные ее свойства.

Охватываем многополюсник замкнутой поверхностью. Тогда по первому закону Кирхгофа сумма всех токов через зажимы (через замкнутую поверхность) многополюсника должна тождественно равняться нулю:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad (I\text{-}8)$$

или

$$\sum_i I_i = \sum_i \sum_k y_{ik} U_k = \sum_k \sum_i y_{ik} U_k =$$

$$= \sum_k U_k \left(\sum_i y_{ik} \right) = \sum_k y_k U_k = 0,$$

где

$$y_k = \sum_i y_{ik} .$$

Так как потенциалы зажимов произвольны (независимы), то для удовлетворения условия (I-8) все y_k должны быть нулями. Другими словами,

$$\sum y_{ik} = 0$$

– сумма элементов в каждом столбце равна нулю. Из этого условия следует линейная зависимость строк матрицы $\bar{y}$, следовательно, $|\bar{y}| = 0$.

По второму закону Кирхгофа токи не зависят от выбора точки, где потенциал равен нулю. Другими словами, если мы прибавим всем потенциалам постоянный потенциал (меняем точку отсчета), то токи I_i не должны изменяться. Представляя все новые потенциалы через сумму старых U_k и постоянной U_0, находим из требования постоянства матрицы токов

$$I = \bar{y}(U_k + U_0) = \bar{y}U_k + \bar{y}U_0 = \bar{y}U_k,$$

условие

$$\bar{y}U_0 = 0$$

или

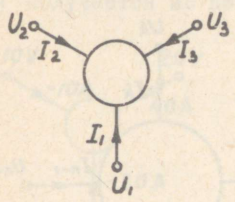
$$\sum_k y_{ik} U_0 = U_0 \sum_k y_{ik} = 0.$$

И окончательно

$$\sum_k y_{ik} = 0$$

– сумма элементов в каждой строке равна нулю. Из этого условия следует линейная зависимость столбцов матрицы $\bar{y}$, и также $|\bar{y}| = 0$.

На фиг. I-23 представлен трехполюсник и его неопределенная матрица узловых проводимостей $\bar{Y}$. Выбирая базисной точку A и предполагая, что потенциалы зажимов в этом случае равны $U_1 = 10$ в, $U_2 = 20$ в, $U_3 = 30$ в, найдем токи зажимов



$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -30 \\ -10 \\ 40 \end{Vmatrix},$$

$U_A^\circ = 0$ $\quad U_B^\circ = -100$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Фиг. I-23

т.е. $I_1 = -30$ а, $I_2 = -10$ а, $I_3 = 40$ а. Очевидно, $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Выбираем теперь в качестве точки отсчета точку B; при этом потенциалы всех зажимов увеличиваются на 100 в, т.е. $U_1 = 110$ в, $U_2 = 120$ в, $U_3 = 130$ в.

Токи многополюсника

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 110 \\ 120 \\ 130 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -30 \\ -10 \\ 40 \end{Vmatrix},$$

т.е. те же самые.

I.2.3. Условие физической возможности

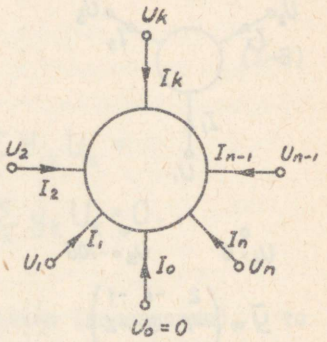
Любая квадратная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sum_i y_{ik} = 0,$$
$$\sum_k y_{ik} = 0,$$

при всех i, $k = 1, 2, 3, \ldots n$ будет неопределенной матрицей узловых проводимостей некоторого неавтономного линейного многополюсника. Поэтому условие равенства нулю суммы элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\bar{Y}$ называется условием физической возможности.

I.2.4. Определенная матрица

Конечно, наши рассуждения намного упростятся, если зафиксируем точку начала отсчета. Удобнее всего за нулевую точку взять один из зажимов многополюсника, который будем называть базисным зажимом. Обозначая базисный зажим цифрой 0 (фиг. I-24), уравнение (I-7) принимает вид:



Фиг. I-24

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \\ I_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} & y_{n0} \\ y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} & y_{00} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ 0 \end{Vmatrix}$$

В матрице $\bar{Y}$ мы можем теперь опускать последний столбец, так как его элементы при вычислении произведения матриц на правой стороне уравнения надо умножить на 0, и это никак не влияет на токи. Также можно опускать во всех матрицах последнюю строку, так как искомый ток I_0 легко выражается через остальные:

$$I_0 = -\sum_{i=1}^{n} I_i \ .$$

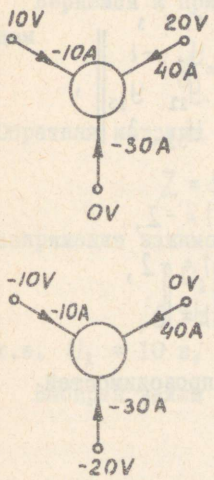
Таким образом мы придем к новому уравнению

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{Vmatrix}$$

или

$$I = YU \ , \qquad (I-7')$$

где лишние элементы опущены. Новая матрица проводимостей Y получается из неопределенной простым вычеркиванием строки и столбца, соответствующих базисному зажиму. Такую матрицу называют <u>определенной матрицей узловых проводимостей</u>.



Фиг. I-25

Выбирая в примере I.2.2 в качестве базисного зажим 1 (фиг. I-25), получим для потенциалов зажимов 2 и 3 соответственно 10 и 20 в, а определенная матрица проводимостей Y принимает в этом случае вид (вычеркивая I строку и I столбец):

$$Y = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} .$$

Токи найдем из уравнения (I-7):

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -10 \\ 40 \end{Vmatrix} ,$$

т.е. $I_2 = -10$ а, $I_3 = 40$ а, а поэтому $I_1 = -(I_2 + I_3) = -30$ а.

Выбирая базисным зажим 3, найдем $U_1 = -20$ в, $U_2 = -10$ в,

$$Y = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

и

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -20 \\ -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -30 \\ -10 \end{Vmatrix} ,$$

т.е. $I_1 = -30$ а, $I_2 = -10$ а, $I_3 = -(I_1 + I_2) = 40$ а.

Ввиду того, что теперь потенциалы зажимов представляют собой напряжения между данными и базисным зажимом, говорят не о потенциалах, а о напряжениях зажимов.

Обратный переход от определенной матрицы к неопределенной матрице осуществляется следующим образом: дополняют опреде-

ленную матрицу соответствующей строкой и столбцом таким образом, чтобы сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равнялась бы нулю. Например, если дана матрица и базисным является зажим 2, то

$$Y = \begin{array}{c|cc} & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{array} \qquad \bar{Y} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & y_{12} & -1 \\ 2 & y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ 3 & -1 & y_{32} & 3 \end{array},$$

а элементы должны иметь значения

$$y_{12} = -(2-1) = -1, \quad y_{23} = -(-1+3) = -2,$$

$$y_{21} = -(2-1) = -1, \quad y_{32} = -(-1+3) = -2,$$

$$y_{22} = -(y_{12} + y_{32}) = -(-1-2) = 3,$$

и, следовательно, неопределенная матрица проводимостей

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

I.2.5. Матрица узловых сопротивлений

Предположим, что матрица Y является неособенной, т.е. $|Y| \neq 0$ (матрица $\bar{Y}$ всегда особенная). Тогда уравнение

$$I = YU$$

имеет единственное решение

$$U = Y^{-1} I = ZI,$$

которое выражает напряжения зажимов неавтономного многополюсника через его токи.

Матрицу Z называют матрицей узловых сопротивлений. Эта матрица не обладает подобными матрице проводимостей простыми свойствами - переход к новой матрице при изменении базисной точки более сложен. Но в некоторых случаях эта матрица оказывается полезной. Например, иногда опытное определение ее элементов проще, чем элементов матрицы Y или $\bar{Y}$.

В таком случае придется найти Z и потом вычислить $Y = Z^{-1}$ (см. I.2.7).

Вернемся к примеру I.2.2. Выбирая зажим I базисным, найдем

$$Y = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} .$$

Обратная матрица

$$Z = Y^{-1} = \frac{1}{9-4} \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{Vmatrix} .$$

Напряжения зажимов (относительно зажима I):

$$\begin{Vmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -10 \\ 40 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix} ,$$

т.е. $U_2 = 10$ в, $U_3 = 20$ в.

Выбирая зажим 3 базисным, найдем

$$Y = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} ,$$

$$Z = Y^{-1} = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{Vmatrix} ,$$

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -30 \\ -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -20 \\ -10 \end{Vmatrix} .$$

Надо обратить внимание на то, что в отдельных случаях одна из матриц Y и Z может оказаться особенной, т.е. она не имеет обратной матрицы. Но более детально мы этого вопроса рассматривать не будем.

I.2.6. Опыты

Рассмотрим теперь экспериментальное определение элементов матриц узловых проводимостей и сопротивлений. Начнем с более простого случая – нахождения элементов матрицы Z.

Прежде всего выбираем базисный зажим. Без потери общности можем ему присвоить номер 0. В случае $(n+1)$-полюсника имеем тогда уравнения:

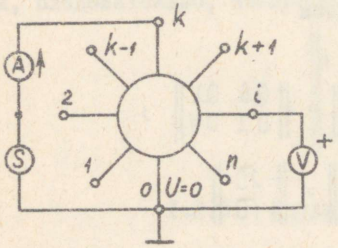
$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \ldots + Z_{1n} I_n$$
$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \ldots + Z_{2n} I_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = Z_{n1} I_1 + Z_{n2} I_2 + \ldots + Z_{nn} I_n .$$

Очевидно, Z_{ik} определяются следующим образом:

$$Z_{ik} = \frac{U_i}{I_k}$$

при условии, что все I_j кроме I_k равны нулю. Действительно, в этом случае i -ое уравнение примет вид

$$U_i = Z_{i1} \cdot 0 + Z_{i2} \cdot 0 + \ldots + Z_{ik} I_k + \ldots + Z_{in} \cdot 0 = Z_{ik} I_k .$$



Ⓢ – *источник*

Ⓐ – *амперметр*

Ⓥ – *Вольтметр*

Фиг. I-26

Схема для определения элементов матрицы Z представлена на фиг. I-26. Практически эксперимент удобнее всего организовать следующим образом: подключив источник тока к зажиму k, измеряем с помощью вольтметра напряжения всех зажимов от I до n, получив таким образом напряжения U_1, U_2, ... U_n; разделив теперь последние на ток I_k, найдем все элементы столбца k, т.е. Z_{1k}, ..., Z_{nk}; после этого переключаем ток к другому зажиму и повторяем все снова. Проделав это для всех зажимов, получим элементы всех n столбцов матрицы Z. Надо иметь в виду, что здесь предполагается идеальный вольтметр (ток через него равен нулю). Учет неидеальности вольтметра см. в I.2.7.

Рассмотрим теперь методику определения элементов неопределенной матрицы узловых проводимостей. Уравнения имеют вид (n-полюсник):

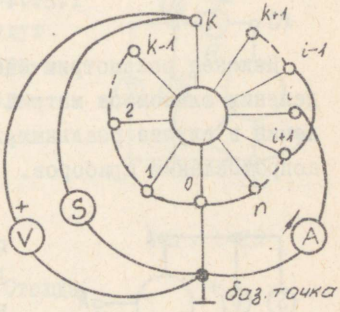
$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + \ldots + Y_{1n}U_n$$
$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + \ldots + Y_{2n}U_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n = Y_{n1}U_1 + Y_{n2}U_2 + \ldots + Y_{nn}U_n .$$

Аналогично, элемент Y_{ik} определяется отношением

$$Y_{ik} = \frac{I_i}{U_k}$$

при условии, что все U_j, кроме U_k, равны нулю.

Схема опыта представлена на фиг. I-27. Все зажимы кроме зажима k должны быть соединены с базисной точкой, потенциал которой равен нулю. Для зажима i это осуществляется через амперметр, который должен иметь нулевое сопротивление(см.I.2.7).



Ⓢ - источник

Ⓐ - амперметр

Ⓥ - вольтметр

Фиг. I-27

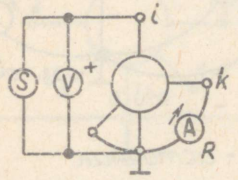
Организовать эксперимент в данном случае удобнее всего следующим образом: "заземляем" (соединяем с базисной точкой) все зажимы, затем отсоединяем зажим k и подключаем его к источнику и вольтметру; далее отсоединяем зажим i и подключаем его к амперметру; повторяя последнее для всех зажимов (кроме k), получим токи: I_1 , I_2 , ..., I_n и,разделив последние на напряжение U_k , получим проводимости столбца k , т.е. Y_{1k} , Y_{2k} , ..., Y_{nk} (кроме Y_{kk}). После этого заземляем зажим k и проделаем то же самое для следующего зажима. Таким образом мы получим все элементы матрицы $\bar{Y}$, кроме элементов главной диагонали, но последние могут быть определены уже на основе свойств матрицы $\bar{Y}$.

Если требуется определить и элементы главной диагонали, придется включить амперметр таким образом, чтобы ток I_k прошел через амперметр; для этого можно отсоединить источник от "земли" и подключить к амперметру.

Если нас интересуют только элементы определенной матрицы, то целесообразно брать за базисную точку один наиболее подходящий зажим многополюсника и провести эксперимент для всех остальных зажимов. Но при этом обязательно экспериментальное определение и элементов главной диагонали.

I.2.7. Поправки

Наконец, рассмотрим еще вопрос об экспериментальном определении элементов матриц узловых проводимостей и сопротивлений в случае реальных, т.е. имеющих конечное внутреннее сопротивление приборов.



Фиг. I-28

Схема для определения узловых проводимостей представлена на фиг. I-28. На результаты влияет внутреннее сопротивление амперметра R : напряжение U_k отличается от нуля (параметры вольтметра не влияют на результаты, так как он показывает истинное U_i). Уравнение многополюсника имеет вид

$$I_k = y_{ki} U_i + y_{kk} U_k .$$

Напряжение U_k можно выразить через I_k :

$$U_k = - R I_k$$

Подставляя, получим

$$I_k = y_{ki} U_i - y_{kk} R I_k ,$$

откуда

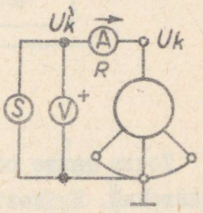
$$y_{ki} = (1 + y_{kk} R) \frac{I_k}{U_i} . \qquad (I-9)$$

Это значит, что пренебрегая внутренним сопротивлением амперметра R относительная погрешность определения y_{ki} со-

ставляет $y_{kk}R$. Очевидно, при малых R $y_{kk}R \ll 1$, и при $R \to 0$ погрешность стремится к нулю.

Из формулы (I-9) видно также, что для учета влияния R мы должны знать собственную проводимость y_{kk}, которая пока тоже неизвестна. Для решения этой проблемы имеется два пути: 1) определяем сначала точно y_{kk}, а затем пользуемся формулой (I-9); 2) определяем сначала приближенно все y_{ik} (без поправок), а затем введем поправки последовательным приближением.

Первый путь является более целесообразным, если поправки будут большими и если нам все равно придется измерять собственные проводимости. При измерении y_{kk} по схеме на фиг. I-29 найдем, что



Фиг. I-29

$$y_{kk} = \frac{I_k}{U_k'}(1 + y_{kk}R),$$

где U_k' – показание вольтметра. Отсюда

$$y_{kk} = \frac{y_{kk}'}{1 - y_{kk}'R},$$

где $y_{kk}' = \frac{I_k}{U_k'}$ – приближенное значение y_{kk}.

Теперь приближенные значения взаимных проводимостей k-ой строки надо умножить на поправку $(1 + y_{kk}R)$.

Второй путь целесообразен при малых поправках и в случае, если не определяются (опытом) собственные проводимости. Тогда определяем сначала приближенные y_{ki}':

$$y_{ki}' = \frac{I_k}{U_i}.$$

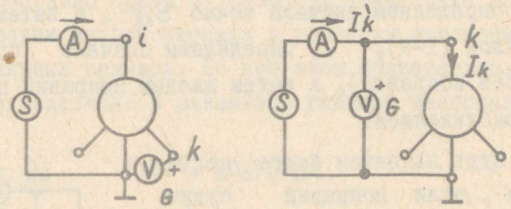
Взяв эти величины как первые приближения, найдем поправки

$$1 + y_{kk}'R$$

и, умножив на эти поправки, найдем вторые приближения y_{kk}'' и определим новую поправку

$$1 + y_{kk}''R.$$

Опять-таки умножим на эту поправку первые приближения, получив третие приближения Y'''_{ki} и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена требуемая точность. Практически достаточно все проделать только для собственных проводимостей.



Фиг. I-30

Точно также обстоит дело с определением узловых сопротивлений. Не повторяя вышеизложенного, приведем только схемы (фиг. I-30) и соответствующие формулы:

$$Z_{ki} = (1 + GZ_{kk})\,\frac{U_k}{I_i}\,,$$

$$Z_{kk} = \frac{Z'_{kk}}{1 - GZ'_{kk}}\,.$$

Как было уже показано, погрешность при приближенном определении элементов матриц Y и Z равна произведению $-Y_{kk}R_a$ или $-Z_{kk}G_v$. Практически удается реализовать вольтметры с достаточно малой относительной проводимостью, но амперметры имеют относительно большие сопротивления. Поэтому оказывается, что $Z_{kk}G_v < Y_{kk}R_a$ (или даже $Z_{kk}G_v \ll Y_{kk}R_a$) и $Z_{kk}G_v \ll I$. Значит, предпочтение следует отдать определению сопротивлений; в этом случае часто поправки излишни. Но это правило не абсолютное.

Поясняем вышеизложенное некоторыми примерами.

I.2.8. Примеры

Пример I. При измерении параметров четырехполюсника с помощью амперметра с внутренним сопротивлением $R_A = 10\,\Omega$ были получены следующие результаты:

	$U_1 = 1V$	$U_2 = 1V$	$U_3 = 1V$
I_1 [mA]	9,09	-4,54	0,00
I_2 [mA]	-4,16	16,7	-12,5
I_3 [mA]	0,00	-7,69	23,1

Приближенная матрица:

$$Y' = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 9,09 & -4,54 & 0,00 \\ 2 & -4,16 & 16,7 & -12,5 \\ 3 & 0,00 & -7,69 & 23,1 \end{array} \quad [mS]$$

Истинные значения собственных проводимостей ($R_A = 10^{-2}\,k\Omega$):

$$Y_{11} = \frac{9,09}{1-9,09\cdot 10^{-2}} = \frac{9,09}{0,909} = 10,0\ mS,$$

$$Y_{22} = \frac{16,7}{1-16,7\cdot 10^{-2}} = \frac{16,7}{0,833} = 20,0\ mS,$$

$$Y_{33} = \frac{23,1}{1-23,1\cdot 10^{-2}} = \frac{23,1}{0,769} = 30,1\ mS.$$

Поправочные коэффициенты:

$1 + Y_{11}R_A = 1,1$; $\quad 1 + Y_{22}R_A = 1,2$; $\quad 1 + Y_{33}R_A = 1,3$.

Отметим, что поправочные коэффициенты можно вычислить прямо по формуле

$$1 + Y_{kk}R = 1 + \frac{R\cdot Y'_{kk}}{1 - RY'_{kk}} = \frac{1}{1 - Y'_{kk}R}.$$

Умножение на поправки можно провести матричным умножением:

$$Y = \begin{Vmatrix} 1{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}03 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 9{,}09 & -4{,}54 & 0{,}00 \\ -4{,}16 & 16{,}7 & -12{,}5 \\ 0{,}00 & -7{,}69 & 23{,}1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 10{,}0 & -5{,}00 & 0{,}00 \\ -5{,}00 & 20{,}0 & -15{,}0 \\ 0{,}00 & -10{,}0 & 30{,}1 \end{Vmatrix} [mS].$$

П р и м е р 2. Данные измерения четырехполюсника следующие:

	$U_1 = 1V$	$U_2 = 1V$	$U_3 = 1V$	$U_4 = 1V$
I_1 [mA]		-4,95	0,00	-4,95
I_2 [mA]	-4,90		-14,7	0,00
I_3 [mA]	0,00	-9,71		-19,4

$$R_A = 1\ \Omega$$

Отметим, что искажения из-за конечности сопротивления амперметра в каждой строке одинаковы. Поэтому следует измерения организовать таким образом, чтобы недостающие элементы матрицы можно было бы вычислить по строкам, как это сделано в настоящем примере.

Найдем приближенную матрицу:

$$\tilde{Y} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 9{,}90 & -4{,}95 & 0{,}00 & -4{,}95 \\ -4{,}90 & 19{,}6 & -14{,}7 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & -9{,}71 & 29{,}1 & -19{,}4 \\ x & x & x & x \end{Vmatrix} \end{array} [mS].$$

Через x обозначены пока неизвестные проводимости, которые нужно определить по столбцам. Это мы сделаем в самом конце, после введения поправок, что гарантирует истинные значения параметров. (Чтобы учесть и погрешности измерения, можно

было бы измерять и параметры 4-ой строки, но для нас это не существенно.)

Первые поправки:

$$1 + y'_{11} R_A = 1{,}0099 \approx 1{,}01;$$
$$1 + y'_{22} R_A = 1{,}0196 \approx 1{,}02;$$
$$1 + y'_{33} R_A = 1{,}0291 \approx 1{,}03.$$

Второе приближение:

$$\bar{Y}'' = \begin{Vmatrix} 1{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 9{,}90 & -4{,}95 & 0{,}00 & -4{,}95 \\ -4{,}90 & 19{,}6 & -14{,}7 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & -9{,}71 & 29{,}1 & -19{,}4 \\ x & x & x & x \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 10{,}0 & -5{,}00 & 0{,}00 & -5{,}00 \\ -5{,}00 & 20{,}0 & -15{,}0 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & -10{,}0 & 30{,}0 & -20{,}0 \\ x & x & x & x \end{Vmatrix} \text{ [mS].}$$

Вторые поправки:

$$1 + y''_{11} R_A = 1{,}01,$$
$$1 + y''_{22} R_A = 1{,}02,$$
$$1 + y''_{33} R_A = 1{,}03$$

совпадают с первыми. Значит, цель достигнута. По столбцам дополняем матрицу:

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 10{,}0 & -5{,}00 & 0{,}00 & -5{,}00 \\ -5{,}00 & 20{,}0 & -15{,}0 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & -10{,}0 & 30{,}0 & -20{,}0 \\ -5{,}00 & -5{,}00 & -15{,}0 & 25{,}0 \end{Vmatrix} \text{ [mS].}$$

П р и м е р 3. Измерения трехполюсника (усилительный каскад) дали следующие результаты:

	$I_1 = 2$ мА	$I_2 = 100$ мА
U_1 [V]	1,00	0,00
U_2 [V]	-28,6	4,76

$G_V = 1$ мS.

Приближенная матрица узловых сопротивлений:

$$Z' = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 0{,}50 & 0{,}00 \\ -14{,}3 & 0{,}0476 \end{matrix} \right\| \end{matrix} [M\Omega].$$

Поправки:

$$\frac{I}{I - Z_{11}G_V} = \frac{I}{I - 0{,}50 \cdot I} = 2,$$

$$\frac{I}{I - Z_{22}G_V} = \frac{I}{I - 0{,}0476 \cdot I} = 1{,}05.$$

Матрица узловых сопротивлений:

$$Z = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}05 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0{,}50 & 0{,}00 \\ -14{,}3 & 0{,}0476 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1{,}00 & 0{,}000 \\ -15{,}0 & 0{,}050 \end{matrix} \right\| [M\Omega].$$

§ I.3. Автономные многополюсники

I.3.I. Автономный многополюсник

В предыдущем параграфе мы сосредоточили внимание на неавтономных многополюсниках, т.е. на тех, которые описываются уравнениями

$$I = YU$$

или

$$U = ZI .$$

Электрические процессы в таких многополюсниках возникают только при соединении их с автономными многополюсниками, т.е. с такими многополюсниками, которые способны быть источниками электрического тока. Как было отмечено уже в I.2.I, линейные автономные многополюсники описываются уравнением

$$I = \bar{Y}U + \bar{J}, \qquad (I\text{-}IO)$$

где

$$\bar{J} \neq 0.$$

На зажимах такого многополюсника обнаруживается напряжение и в том случае, когда токи всех зажимов равны нулю; наоборот, если напряжения всех зажимов – нули, через них могут протекать токи, которые можно легко найти из уравнения (I-IO), подставляя $U = 0$:

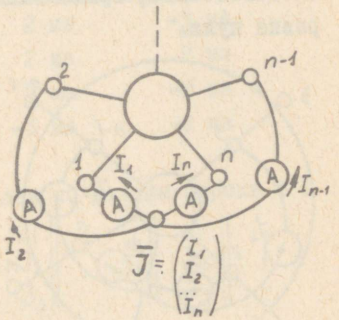
$$I = \bar{J}.$$

Значит, элементы матрицы $\bar{J}$ равны токам зажимов в случае, когда все зажимы "заземлены".

I.3.2. Опыт

Из последнего уравнения вытекает и метод для экспериментального определения элементов матрицы $\bar{J}$.

Очевидно, для этого следует "заземлить" все зажимы многополюсника и измерять токи зажимов (фиг. I-3I). При этом можно пользоваться и одним амперметром, переключая его нужным образом.



Фиг. 1-3I

I.3.3. Свойства матриц

Окружая в схеме с заземленными зажимами многополюсник замкнутой поверхностью, найдем по первому закону Кирхгофа, что сумма элементов матрицы $\bar{J}$ равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0$$

В общей схеме имеем

$$\sum_i I_i = 0$$

или

$$\sum_i I_i = \sum_i \sum_k y_{ik} U_k + \sum_i J_i = \sum_k U_k \sum_i y_{ik} = 0,$$

откуда ввиду произвольности U_k найдем:

$$\sum_i y_{ik} = 0.$$

Также как и для неавтономного многополюсника, мы обнаружили, что сумма элементов в любом столбце матрицы $\bar{y}$ равна нулю.

По второму закону Кирхгофа токи не меняются при изменении потенциального уровня многополюсника:

$$I = \bar{y}U + \bar{J} = \bar{y}(U + U_0) + \bar{J}.$$

Здесь матрица U_0 состоит из равных элементов. Далее

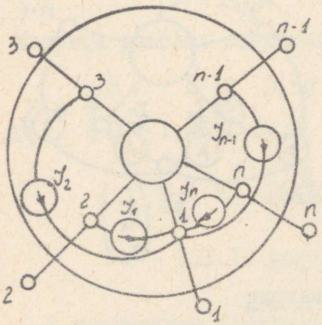
$$I = \bar{y}U + \bar{y}U_0 + \bar{J} = I + \bar{y}U_0,$$

$$\bar{y}U_0 = \theta,$$

откуда

$$\sum_k y_{ik} = 0.$$

Следовательно, сумма элементов в каждой строке матрицы $\bar{y}$ равна нулю.



Фиг. I-32

Отсюда вытекает, что каждый автономный многополюсник можно представить обычным неавтономным многополюсником и n-I источниками тока, которые присоединены к его зажимам (фиг. I-32).

Уравнения

$$\sum_i y_{ik} = 0,$$

$$\sum_k y_{ik} = 0,$$

$$\sum_i J_i = 0,$$

конечно, представляют собой условия физической возможности для автономного многополюсника.

I.3.4. Продолжение опыта

Так как $\bar{y}$ представляет матрицу неавтономного многополюсника, можно после определения $\bar{J}$ найти элементы матрицы $\bar{y}$ таким же опытом, как в случае неавтономного многополюсника. При $U_j = 0$, если $j \neq k$, имеем:

$$I_i = y_{ik}U_k + J_i,$$

откуда для вычисления y_{ik} получаем формулу

$$y_{ik} = \frac{I_i - J_i}{U_k}$$

Если многополюсник неавтономный, то $J_i = 0$, и получаем известное соотношение

$$y_{ik} = \frac{I_i}{U_k} .$$

П р и м е р. Имеется трехполюсник (линейный), и мы провели измерения, результаты которых приведены в нижеследующей таблице:

№	I	2	3	I_1	I_2	I_3
I	0	0	0	I ма	2 ма	-3 мА
2	0	0	I в	-4 ма	2 ма	2 ма
3	0	I в	0	2 ма	7 ма	-9 ма
4	I в	0	0	5 ма	-3 ма	-2 ма

Исходя из общего уравнения найдем по данным строки № I

$$\begin{Vmatrix} I \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} = \bar{y} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Vmatrix},$$

откуда $J_1 = I$ ма, $J_2 = 2$ ма, $J_3 = -3$ ма.

Далее, по данным строки № 2

$$\begin{Vmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix} = \bar{y} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} I \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{13} + I \\ y_{23} + 2 \\ y_{33} - 3 \end{Vmatrix},$$

откуда $y_{13} = -5$ мсим, $y_{23} = 0$, $y_{33} = 5$ мсим;

по данным строки № 3

$$\begin{Vmatrix} 2 \\ 7 \\ -9 \end{Vmatrix} = \bar{y} \begin{Vmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} I \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{12} + I \\ y_{22} + 2 \\ y_{32} - 3 \end{Vmatrix},$$

откуда $y_{12} = I$ мсим, $y_{22} = 5$ мсим, $y_{32} = -6$ мсим;

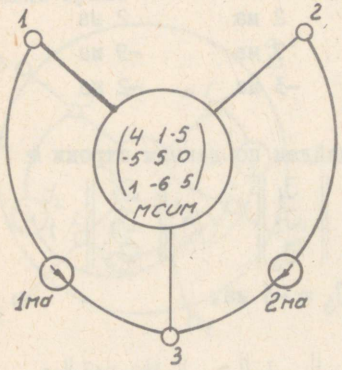
по данным строки № 4

$$\begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{Vmatrix} = \bar{Y} \begin{Vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} I \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_{11} + I \\ Y_{21} + 2 \\ Y_{31} - 3 \end{Vmatrix},$$

откуда $Y_{11} = 4$ мсим, $Y_{21} = -5$ мсим, $Y_{31} = I$ мсим.

Следовательно,

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 4 & I & -5 \\ -5 & 5 & 0 \\ I & -6 & 5 \end{Vmatrix} [\text{мсим}], \bar{J} = \begin{Vmatrix} I \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} [\text{ма}].$$



Фиг. I-33

Схема замещения многополюсника представлена на фиг. I-33. Построение схемы замещения для неавтономного многополюсника рассматривается ниже (§ 2.4).

I.3.5. Другое уравнение

Уравнение автономного многополюсника можно представить и в виде

$$U = ZI + \mathcal{U}. \qquad (I\text{-}II)$$

Здесь порядки матриц на единицу меньше, чем в (I-IO). Опуская в (I-IO) одну строку (что вполне законно ввиду линейной зависимости строк матриц $\bar{Y}$ и $\bar{J}$; также мы поступили в случае неавтономного многополюсника) и столбец в $\bar{Y}$, соответствующие базисному зажиму, имеем равносильное (I-IO) уравнение

$$I = YU + J. \qquad (I\text{-}I2)$$

Подставляя (I-I2) в (I-II), найдем

$$U = ZYU + ZJ + \mathcal{U},$$

откуда ввиду произвольности U

$$ZY = E, \quad ZJ + \mathcal{U} = \Theta,$$

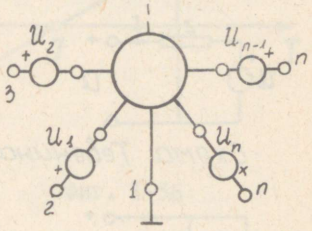
или

$$Z = Y^{-1}, \quad \mathcal{U} = -ZJ,$$

или

$$Y = Z^{-1}, \quad J = -Y\mathcal{U}.$$

В случае, если матрицы Y и Z неособенные, уравнение многополюсника можно написать двумя способами – (I-II) или (I-I2). Если одна из матриц особенная, то уравнение можно записать только в одной форме.



Фиг. I-34

Для случая, когда уравнение имеет вид

$$U = ZI + \mathcal{U},$$

можем составлять также схему, состоящую из неавтономного многополюсника (с матрицей Z) и $(n-1)$ источника напряжения (фиг. I-34). Здесь ведь напряжения $\mathcal{U}_k$ представляют собой напряжения зажимов, когда все зажимы изолированы ($I = \Theta$).

I.3.6. Автономный двухполюсник

В этом параграфе мы исследуем простейший автономный многополюсник – автономный двухполюсник. В этом случае уравнения благодаря наличию только двух зажимов

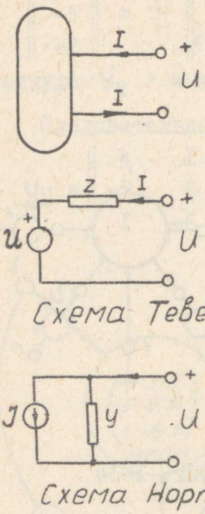
$$I = YU + J,$$
$$U = ZI + \mathcal{U} \qquad (I\text{-}I3)$$

будут числовыми (фиг. I-35). Связь между параметрами можно теперь представить соотношениями

$$Y = \frac{1}{Z},$$

$$J = -Y\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{U}}{Z} \qquad (I\text{-}I4)$$

TRÜ Raamatukogu



Фиг. I-35

или $Z = \frac{1}{Y}$,

$$U = -ZJ = -\frac{J}{Y}. \quad (I\text{-}15)$$

На основе уравнений (I-I3) можно составить соответствующие схемы, содержащие идеальные источники. Две возможные схемы представлены на фиг. I-35. Первую из них называют схемой Тевенина (Ch.L.Thevenin), а вторую - схемой Нортона (E.L.Norton).

Z и Y в этих схемах называем соответственно внутренним сопротивлением и внутренней проводимостью двухполюсника (источника); часто их поэтому обозначают через Z_i и Y_i.

Схемы Тевенина и Нортона в практических расчетах очень широко применяются. Дело в том, что практически все источники неидеальны, но благодаря этим представлениям можно любой реальный источник заменить простой схемой, содержащей идеальный источник.

I.3.7. Вольт-амперная характеристика

Рассмотрим теперь, как связаны параметры автономного двухполюсника с ее вольт-амперной характеристикой. Очевидно, параметры определяются, если рассматривать два режима:

I) $I = 0$ (холостой ход)

$$U = U_x,$$

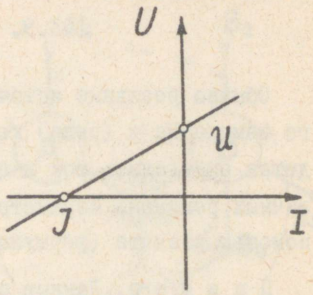
$$Y_i U = -J.$$

Из первого уравнения сразу можно определить U - на графике это будет ордината точки пересечения характеристики с осью ординат (фиг. I-36).

2) $U = 0$ (короткое замыкание)

$$Z_i I = -U,$$
$$I = J.$$

Из второго уравнения можно определить J – на графике это будет абсцисса точки пересечения характеристики с осью абсцисс (фиг. I-36); для нахождения Z_i и Y_i воспользуемся уравнениями (I-I4) и (I-I5) или же формулами

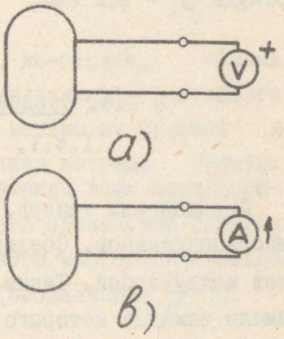


Фиг. I-36

$$Y_i = -\frac{J}{U},$$
$$Z_i = -\frac{U}{J}.$$

I.3.8. Опыты

При экспериментальном определении значений элементов схем Тевенина и Нортона для данного автономного двухполюсника можно поступить совершенно аналогично вышеприведенному: измерять напряжение холостого хода (фиг. I-37, а) (это будет U) и ток короткого замыкания (фиг. I-37, *б*) (это будет J). Вычисление внутреннего сопротивления или проводимости производится также по формулам (I-I4), (I-I5).



Фиг. I-37

Очевидно, идеальные источники напряжения и тока являются частными случаями рассмотренного выше двухполюсника, соответственно при $Z_i = 0$ и $Y_i = 0$.

I.3.9. Замечание

Обычно реальные источники не допускают режимов короткого замыкания и (реже) холостого года. В таком случае придется определить ток и напряжение двухполюсника в двух различных режимах. Параметры можно найти или графически, или с помощью расчета (формулы (I-I4),(I-I5)).

П р и м е р. Данные опыта следующие:

I режим: $I = -I$ а, $U = 2I7$ в,
II режим: $I = -2{,}4$ а, $U = 2I0$ в.

Уравнения

$$2I7 = -Z_i \cdot I + U,$$
$$2I0 = -Z_i \cdot 2{,}4 + U,$$

откуда $Z_i = 5$ ом, $U = 222$ в.
Для схемы Тевенина

$$-I = Y_i \cdot 2I7 + J,$$
$$-2{,}4 = Y_i \cdot 2I0 + J,$$

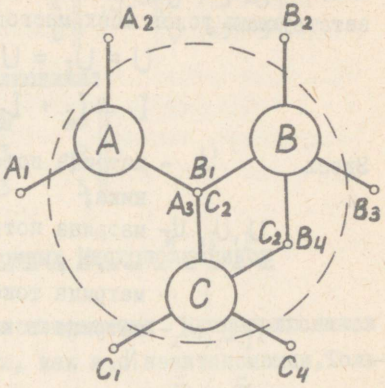
откуда $Y_i = 0{,}2$ сим, $J = -44{,}4$ а.

§ I.4. Соединение многополюсников

I.4.I. Соединение

Предположим теперь, что мы имеем несколько неавтономных многополюсников. Соединяем некоторые зажимы многополюсников между собой. Таким образом получим новый многополюсник, число зажимов которого теперь уже меньше, чем их было у исходных, так как некоторые зажимы в результате соединения объединены. Кроме того, мы имеем возможность считать только некоторые зажимы составного многополюсника существенными (внешними), а остальные рассматривать как некоторые внутренние зажимы. Токи последних равны нулю, а их напряжением мы не интересуемся. Например, на фиг. I-38 пред-

ставлены три многополюсника A, B и C. Они соединены следующим образом: объединены между собой зажимы A3, BI, C2 и зажимы C3, B4. Если соединенные между собой зажимы нас в дальнейшем не интересуют, то вместо одного трехполюсника и двух четырехполюсников получим один шестиполюсник с зажимами AI, A2, B2, B3, C4, CI.



Фиг. I-38

I.4.2. Дополненные матрицы

Чтобы охарактеризовать полученный многополюсник, нужно ответить на вопрос: как найти матрицу узловых проводимостей для составного многополюсника, если известны матрицы составляющих многополюсников.

Для решения этой задачи дополним, во-первых, каждый многополюсник еще до соединения всеми зажимами составного многополюсника. Так как добавляемые зажимы не связаны с данным многополюсником, неопределенная матрица узловых проводимостей дополняется нулями. Матрицы всех составляющих многополюсников будут теперь иметь одинаковый порядок, который равен числу зажимов составного многополюсника. Называем такие матрицы дополненными (обозначение $\tilde{Y}$).

I.4.3. Матрица составного многополюсника

Теперь для соединения многополюсников мы соединяем между собой все одноименные зажимы. В результате потенциалы одноименных зажимов всех многополюсников окажутся равными,

а токи зажимов составного многополюсника равны сумме соответствующих токов всех многополюсников:

$$U = U_{\underline{I}} = U_{\underline{II}} = \ldots = U_N ,$$

$$I = I_{\underline{I}} + I_{\underline{II}} + \ldots + I_N . \qquad (I\text{-}16)$$

Здесь U – матрица потенциалов составного многополюсника;

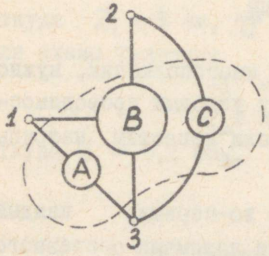
$U_{\underline{I}}, U_{\underline{II}}, \ldots U_N$ – матрица потенциалов многополюсников $\underline{I}$, $\underline{II}$, ..., N;

I – матрица токов составного многополюсника;

$I_{\underline{I}}, I_{\underline{II}}, \ldots I_N$ – матрица токов многополюсников $\underline{I}$, $\underline{II}$, ... N.

Кроме того, имеем

$$I = \bar{y}U, \; I_{\underline{I}} = \tilde{y}_{\underline{I}} U_{\underline{I}}, \; I_{\underline{II}} = \tilde{y}_{\underline{II}} U_{\underline{II}}, \ldots, \; I_N = \tilde{y}_N U_N .$$



Подставляя последние в уравнение (I-7) и учитывая (I-I6), найдем:

$$I = \tilde{y}_{\underline{I}} U + \tilde{y}_{\underline{II}} U + \ldots + \tilde{y}_N U =$$
$$= (\tilde{y}_{\underline{I}} + \tilde{y}_{\underline{II}} + \ldots + \tilde{y}_N) U = \bar{y} U$$

или

$$\bar{y} = \tilde{y}_{\underline{I}} + \tilde{y}_{\underline{II}} + \ldots + \tilde{y}_N .$$

Следовательно, неопределенные матрицы узловых проводимостей многополюсников складываются.

Рассмотрим в качестве примера соединение на фиг. I-39. Неопределенные матрицы узловых проводимостей после дополнения имеют вид (при нумерации узлов 1, 2, 3):

$$y_A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$y_B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$y_C = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Фиг. I-39

$$\tilde{Y}_A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \tilde{Y}_B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tilde{Y}_C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Матрица составного многополюсника:

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

I.4.4. Соединение автономных многополюсников

При исследовании соединения автономных многополюсников мы проделаем такие же операции, как и с неавтономными. Только в этом случае надо дополнить и матрицы $\bar{J}_I$, $\bar{J}_{II}$, ..., $\bar{J}_N$. Затем, с учетом уравнений

$$U = U_I = U_{II} = \ldots = U_N,$$
$$I = I_I + I_{II} + \ldots + I_N$$

и уравнений

$$I = \tilde{Y}U + \bar{J},\ I_I = \tilde{Y}_I U_I + \bar{J}_I,\ I_{II} = \tilde{Y}_{II} U_{II} + \bar{J}_{II}, \ldots, I_N = \tilde{Y}_N U_N + \bar{J}_N$$

найдем

$$I = \tilde{Y}_I U + \tilde{Y}_{II} U + \ldots + \tilde{Y}_N U + \bar{J}_I + \bar{J}_{II} + \ldots + \bar{J}_N =$$
$$= (\tilde{Y}_I + \tilde{Y}_{II} + \ldots \tilde{Y}_N) U + (\bar{J}_I + \bar{J}_{II} + \ldots + \bar{J}_N) = \bar{Y}U + \bar{J}$$

Отсюда

$$\bar{Y} = \tilde{Y}_I + \tilde{Y}_{II} + \ldots + \tilde{Y}_N,$$
$$\bar{J} = \bar{J}_I + \bar{J}_{II} + \ldots + \bar{J}_N,$$

т.е. складываются матрицы проводимостей и матрицы токов.

I.4.5. Исключение зажимов

Если токи некоторых зажимов составного многополюсника равны нулю, а их напряжения нас не интересуют, то эти зажимы можно считать внутренними и исключить из дальнейшего рассмотрения. В результате число зажимов уменьшается и порядок матриц снижается, что, конечно, упрощает расчеты.

Без ограничения общности можно считать, что все внутренние зажимы, которые подлежат исключению, имеют номера от $(k+1)$ до n. Число внешних зажимов, следовательно, k. В таком случае уравнение многополюсника имеет вид (все рассуждения, очевидно, справедливы как для определенных, так и для неопределенных матриц):

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_k \\ I_{k+1} \\ \dots \\ I_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} & y_{1,k+1} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} & y_{2,k+1} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1} & y_{k2} & \dots & y_{kk} & y_{k,k+1} & \dots & y_{kn} \\ y_{k+1,1} & y_{k+1,2} & \dots & y_{k+1,k} & y_{k+1,k+1} & \dots & y_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{kn} & y_{n,k+1} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_k \\ U_{k+1} \\ \dots \\ U_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_k \\ J_{k+1} \\ \dots \\ J_n \end{Vmatrix}$$

или в блочном виде ($I_{k+1} = I_{k+2} = \dots = I_n = 0$):

$$\begin{Vmatrix} I \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{aa} & y_{ab} \\ y_{ba} & y_{bb} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U \\ U_b \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_a \\ J_b \end{Vmatrix}$$

Здесь I и U являются матрицами токов и напряжений преобразованного многополюсника (размера $k \times 1$), а U_b подлежит исключению:

$$\begin{cases} I = y_{aa} U + y_{ab} U_b + J_a \\ 0 = y_{ba} U + y_{bb} U_b + J_b \end{cases},$$

$$U_b = - y_{bb}^{-1} y_{ba} U - y_{bb}^{-1} J_b,$$

$$I = y_{aa} U - y_{ab} y_{bb}^{-1} y_{ba} U - y_{ab} y_{bb}^{-1} J_b + J_a =$$

$$= (y_{aa} - y_{ab} y_{bb}^{-1} y_{ba}) U + J_a - y_{ab} y_{bb}^{-1} J_b.$$

Из последнего равенства получим выражения для матриц преобразованного многополюсника:

$$y = y_{aa} - y_{ab} y_{bb}^{-1} y_{ba},$$

$$J = J_a - y_{ab} y_{bb}^{-1} J_b.$$

Очевидно, исключение возможно только тогда, когда Y_{bb} неособенная.

Если составной многополюсник является неавтономным ($J_1 = \theta$, $J_2 = \theta$), то остается только первая формула:

$$Y = Y_{aa} - Y_{ab} Y_{bb}^{-1} Y_{ba} .$$

I.4.6. Примеры

I. Если в примере, рассмотренном в I.4.3, исключению подлежит зажим 3, то

$$Y_{aa} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad Y_{ab} = \begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \end{Vmatrix},$$

$$Y_{ba} = \begin{Vmatrix} -2 & -3 \end{Vmatrix}, \quad Y_{bb} = \begin{Vmatrix} 5 \end{Vmatrix}.$$

Далее найдем:

$$Y_{bb}^{-1} = \frac{1}{5},$$

$$\tilde{Y} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & -3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{9}{5} \end{Vmatrix}$$

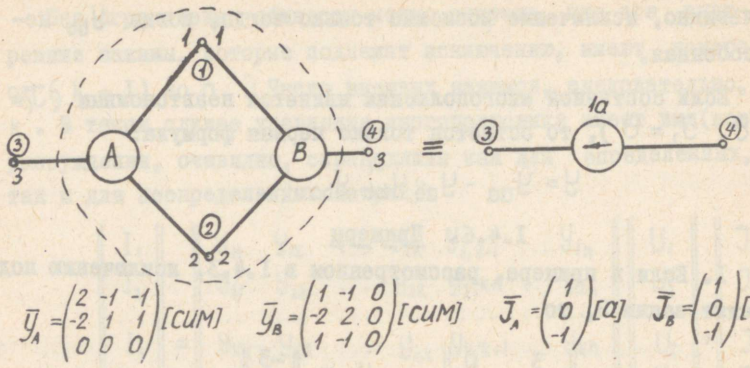
2. Рассмотрим еще пример соединения двух трехполюсников в один двухполюсник. Схема и данные приведены на фиг.I-40. Внешними будут зажимы 3 и 4 составного многополюсника.

Найдем дополненные матрицы:

$$\tilde{Y}_A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{Y}_B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{J}_B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix},$$

откуда

$$\tilde{Y} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$



$$\bar{Y}_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\text{сим}] \quad \bar{Y}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [\text{сим}] \quad \bar{J}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} [a] \quad \bar{J}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} [a]$$

Фиг. I-40

Далее (исключаем I и 2 зажим):

$$Y_{aa} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}, \quad Y_{ab} = \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ I & 0 \end{Vmatrix}, \quad J_a = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$Y_{ba} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ I & -I \end{Vmatrix}, \quad Y_{bb} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad J_b = \begin{Vmatrix} -I \\ -2 \end{Vmatrix},$$

и

$$\bar{Y} = Y_{bb} - Y_{ba} Y_{aa}^{-1} Y_{ab} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -I & -I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ I & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ I & -I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ -I & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{J} = J_b - Y_{ba} Y_{aa}^{-1} J_a =$$

$$= \begin{Vmatrix} -I \\ -I \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ I & -I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -I \\ -I \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ I & -I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 6 \\ 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -I \\ -I \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -I \\ I \end{Vmatrix}.$$

В итоге

$$J = \begin{Vmatrix} -I \\ I \end{Vmatrix}.$$

Это - источник тока.

I.4.7. Вырождение

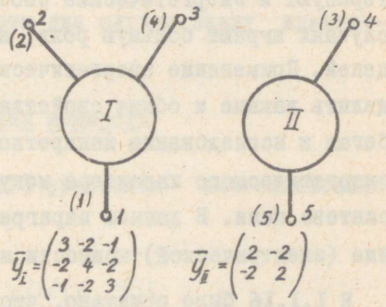
Если матрице узловых проводимостей можно придавать путем перестановки строк и соответствующих столбцов квазидиагональный вид:

$$\bar{Y} = \left\| \bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2 \quad \ddots \quad \bar{Y}_n \right\|$$

(в незаполненных клетках все элементы равны нулю), то многополюсник представляет собой совокупность n изолированных многополюсников с матрицами $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, ..., $\bar{Y}_n$. Действительно, дополненная матрица изолированного многополюсника имеет нули во всех клетках, соответствующих номерам зажимов других многополюсников, а перестановка строк и столбцов означает изменение нумерации зажимов.

В качестве примера рассмотрим многополюсник на фиг. I-4I. При нумерации, указанной в скобках, имеем матрицу:

$$\bar{Y} = \left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| .$$



Фиг. I-4I

При другой нумерации зажимов (вне скобок) неопределенная матрица многополюсника принимает вид:

$$\bar{Y} = \left\| \begin{matrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{matrix} \right\| ,$$

откуда явно следует вырожденность многополюсника в два изолированных многополюсника.

I.4.8. Замечание

Наконец, надо отметить, что при некотором опыте можно обойти запись дополненных матриц всех составляющих многополюсников и матрицы составного многополюсника составить непосредственно по схеме соединений, установив и следуя общей нумерации зажимов. Несмотря на это, метод сложения матриц является неудобным. Более практичные методы рассматриваются во второй главе данного пособия.

§ I.5. Мощность многополюсника

I.5.I. Мощность многополюсника

Кроме токов и напряжений зажимов многополюсника, нас интересуют и энергетические соотношения, которые в некоторых случаях играют большую роль, например, при выяснении свойств цепей. Применение энергетических соотношений позволяет определить важные и общие свойства электрических цепей, не прибегая к исследованию конкретной структуры цепи. Требования энергетического характера могут сильно влиять и на процесс синтеза цепи. В данном параграфе мы рассматриваем вычисление (электрической) мощности многополюсника.

В I.I.I6 было отмечено, что поток электрической мощности через замкнутую поверхность равен сумме произведений токов через эту поверхность на соответствующие потенциалы. При этом мощность будет положительна при поглощении электрической энергии, если считать положительным направлением тока направление во внутрь области, ограниченной данной поверхностью.

Применительно к многополюснику мы можем сказать, что в нем поглощается (превращается в другие виды энергии) мощность, равная сумме произведений токов зажимов на их потенциалы:

$$P = \sum_{k=1}^{n} I_k U_k \qquad (I-I7)$$

или

$$P = I'U = U'I,$$

где I и U – матрицы токов и потенциалов (приложение П.I.I7).

Очевидно, мощность цепи не должна зависеть от потенциального уровня. Это можно и легко доказать, прибавив каждому потенциалу постоянную U_0:

$$P' = \sum_k I_k (U_k + U_0) = \sum_k I_k U_k + \sum_k I_k U_0 = P + U_0 \sum_k I_k .$$

Но по первому закону Кирхгофа $\sum_k I_k = 0$, и поэтому

$$P' = P.$$

Итак, мы можем и здесь перейти к напряжениям многополюсника, указывая базисный зажим. Уравнения (I-I7) сохраняются, только суммирование теперь ведется по (n-I) зажимам. В дальнейшем мы не будем различать эти два случая ввиду идентичности формул.

I.5.2. Выражения мощности

Подставляя в уравнение (I-I7) уравнение многополюсника

$$I = YU + J,$$

найдем

$$P = (YU + J)'U = U'Y'U + J'U.$$

Итак, мощность многополюсника является суммой квадратичной формы (с матрицей Y') и линейной формы от переменных U_1, U_2, ..., U_n. Для нас представляет бо́льший интерес случай неавтономного многополюсника, когда $J = \theta$ и мощность

$$P = U'Y'U \qquad (I-I8)$$

будет квадратичной формой от U_k.

Подстановка во второе уравнение в (I-I7) дает

$$P = U'YU. \qquad (I-I9)$$

Вычитая (I-I8) из (I-I9), получим

$$\theta = U'(Y - Y')U,$$

т.е. кососимметрическая часть матрицы Y

$$Y_a = \frac{1}{2}(Y - Y')$$

не влияет на мощность. Складывая (I-I8) и (I-I9), получим

$$2P = U'(Y + Y')U$$

или

$$P = U' \cdot \frac{1}{2} \cdot (Y + Y')U = U'Y_s U,$$

т.е. мощность многополюсника определяется только симметричной частью матрицы Y . Очевидно, в цепи, матрица которой кососимметрична, не происходит преобразования электрической энергии.

Такие же рассуждения справедливы и в том случае, если мы запишем уравнение многополюсника в виде

$$U = ZI + \mathcal{U}.$$

Тогда

$$P = I'Z'I + \mathcal{U}I = I'ZI + I'\mathcal{U}$$

и для неавтономного многополюсника

$$P = I'Z'I = I'ZI.$$

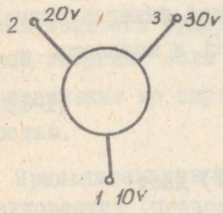
Также

$$I'Z_a I = 0$$

и

$$P = I'Z_s I.$$

Более подробно мы будем исследовать свойства этих квадратичных форм в следующем параграфе, а пока проиллюстрируем вышесказанное некоторыми примерами.



Фиг. I-42

I.5.3. Примеры

1°. Пусть мы имеем трехполюсник (фиг. I-42) с матрицей

$$\bar{Y} = \frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{Vmatrix} \quad \text{сим}$$

При потенциалах, указанных на фиг.I-42, токи равны

$$I = \frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0,5 \\ 0 \\ +0,5 \end{Vmatrix} \quad [a]$$

и мощность

$$P = I'U = \begin{Vmatrix} -0,5 & 0 & +0,5 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix} = 10 \text{ [вт]}$$

или

$$P = U'Y'U = \begin{Vmatrix} 10 & 20 & 30 \end{Vmatrix}\frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 10 & 20 & 30 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -0,4 \\ -0,2 \\ 0,6 \end{Vmatrix} = 10 \text{ [вт]}$$

или, выбирая базисным узел I,

$$Y = \frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

$$U = \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix}.$$

$$P = U'YU = \begin{Vmatrix} 10 & 20 \end{Vmatrix}\frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0,2 & 0,6 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix} = 10 \text{ [вт]}.$$

Наконец, при базисном узле I матрица узловых сопротивлений будет

$$Z = Y^{-1} = \begin{Vmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 40 \end{Vmatrix} \quad [\text{ом}].$$

Тогда, учитывая, что

$$I = \begin{Vmatrix} 0,0 \\ 0,5 \end{Vmatrix} \text{ [a]},$$

найдем

$$P = I'Z_s I = \begin{Vmatrix} 0,0 & 0,5 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 40 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0,0 \\ 0,5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,0 & 0,5 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \end{Vmatrix} = 10 \text{ [вт]}$$

или

$$P = I'Z_s I = \begin{Vmatrix} 0,0 & 0,5 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 40 & 25 \\ 25 & 40 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0,0 \\ 0,5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,0 & 0,5 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 12,5 \\ 20 \end{Vmatrix} =$$

$$= 10 \text{ [вт]}.$$

2.° В качестве следующего примера рассмотрим цепь с определенной матрицей

$$Y = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} \quad [\text{сим}].$$

Мощность такого многополюсника равна

$$P = \|U_1\ U_2\| \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \|U_1\ U_2\| \begin{Vmatrix} 4U_1 - 3U_2 \\ -3U_1 + U_2 \end{Vmatrix} = 4U_1^2 - 6U_1U_2 + U_2^2 .$$

При $U_1 = 1$ в, $U_2 = 4$ в мощность равна

$$P = 4 - 24 + 16 = -4 \ [\text{вт}].$$

Значит, при данных напряжениях многополюсник является источником электрической энергии ($P<0$), несмотря на то, что он неавтономный! Интересно, что при других значениях напряжений многополюсник может поглощать электрическую энергию; это будет, например, при $U_1 = 1$ в, $U_2 = 6$ в, ибо

$$P = 4 - 36 + 36 = 4 > 0 \text{ вт}.$$

Более подробно об этих явлениях в следующем параграфе.

I.5.4. Распределение мощности

Представляет интерес исследовать распределение мощности между составляющими составного многополюсника. Казалось бы по закону сохранения энергии полная мощность составного многополюсника должна равняться сумме мощностей составляющих. Проверим это.

Прежде всего отметим, что мощность дополненного многополюсника равна исходной, так как добавление изолированных зажимов не меняет мощности. Таким образом, используя формулу (I-16), найдем для полной мощности:

$$P = \dot{U}\dot{I} = \dot{U}\sum_{k=1}^{N} I_k = \sum_{k=1}^{N} \dot{U}_k I_k = \sum_{k=1}^{N} P_k ,$$

что и требовалось доказать.

Это соотношение можно использовать как для проверки расчетов, так и для прямого вычисления мощности составного многополюсника.

I.5.5. Замечание

В случае линейных цепей справедлив так называемый принцип наложения: мы можем вычислить неизвестные при отдельных известных, а при сложении известных складываются и неизвестные. Это следует прямо из условия линейности. Например, для токов имеем:

если $$I_k = Y U_k ,$$

то $$\Sigma I_k = \Sigma Y U_k = Y \Sigma U_k .$$

Этот принцип иногда облегчает расчеты.

Но надо иметь в виду, что такое наложение мощностей несправедливо, так как мощности являются не линейными, а квадратичными формами. Действительно, если разные режимы задаются матрицами U_k, то

$$P_k = \dot{I}_k U_k \quad (I_k = Y U_k),$$

и их сумма

$$\Sigma P_k = \Sigma \dot{I}_k U_k .$$

Но если матрица напряжений равна сумме

$$U = \Sigma U_L ,$$

то

$$I = \Sigma I_k$$

и мощность

$$P = \dot{I} U = \Sigma \dot{I}_k \Sigma U_k = \Sigma \dot{I}_k U_k + \sum_{k \neq L} \dot{I}_k U_L =$$

$$= \Sigma P_k + \sum_{k \neq L} \dot{I}_k U_L .$$

Разность мощностей, как видно, равна $\sum_{k \neq L} \dot{I}_k U_L$, т.е. сумме произведений токов и напряжений неодноименных режимов.

§ I.6. Свойства цепей и их матриц

I.6.I. Автономность

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые общие свойства цепей и соответствующие свойства их матриц. В итоге этого удается построить классификацию цепей (многополюсников).

Мы ранее уже разделили все многополюсники на автономные и неавтономные, исходя из уравнений. В I.2.I была найдена и физическая интерпретация этому разделению. Оказалось, что неавтономные многополюсники не содержат внутренних источников тока и напряжения, а автономные характеризуются именно наличием внутренних источников тока или напряжения.

Следует, однако, иметь в виду, что это отнюдь не значит, что внутри неавтономного многополюсника источники электрической энергии должны отсутствовать вообще. Внутри неавтономного многополюсника могут располагаться источники электрической энергии, но они из-за имеющейся схемы не влияют на интересующие нас токи и напряжения, а обеспечивают лишь нужный рабочий режим многополюсника.

Примером служат псевдолинейные цепи, в которых внутренние источники обеспечивают нужную рабочую точку действительно нелинейного многополюсника. Отклонение токов и напряжений его зажимов от номинальных (свойственных рабочей точке) возникает только при присоединении к ним внешних источников. Так как нас интересуют именно отклонения от номинальных значений, для которых мы составляем уравнения, то такой многополюсник, конечно, неавтономный. Типичными примерами являются электронные лампы и транзисторы в псевдолинейном режиме.

Значит, существование источников электрической энергии внутри многополюсника не определяет автономности многополюсника. Даже наличие источников тока или напряжения внутри

многополюсника не обязательно влечет за собой автономности (I.6.6). Поэтому мы подразделяем многополюсники по внешнему поведению, характеризуемому уравнениями многополюсника:

I) автономные многополюсники $J \neq \theta$ или $U \neq \theta$;

2) неавтономные многополюсники, $J = \theta$ или $U = \theta$.

Обозначаем множество всех автономных многополюсников через $\mathcal{Y}$ и множество всех неавтономных многополюсников через $\mathcal{D}$.

I.6.2. Активность

Далее рассмотрим мощность многополюсника. При классификации многополюсников по энергетическим свойствам мы не будем уделять особого внимания цепям, которые не представляют практического интереса или неосуществимы, как, например, нуль-цепь ($Y = \theta$) или неустойчивые цепи. Поэтому разделим все многополюсники на две группы следующим образом:

I) активные многополюсники - мощность представляет собой неопределенную форму;

2) пассивные многополюсники - мощность представляет собой положительно полуопределенную форму.

Множество всех активных многополюсников обозначаем через $\mathcal{A}$ и множество всех пассивных многополюсников через $\mathcal{P}$.

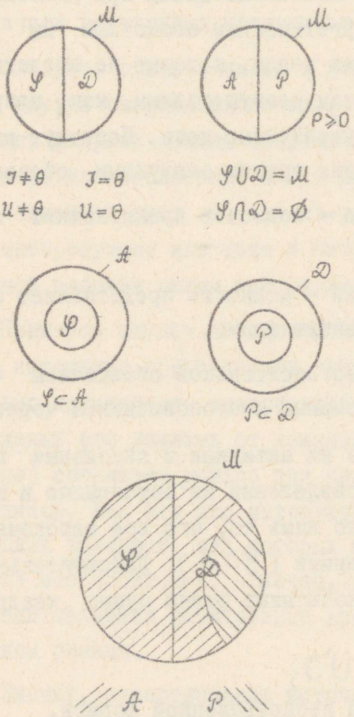
Разделение многополюсников на активные и пассивные непосредственно не зависит от разделения на автономные и неавтономные. Справедливо только лишь то, что все автономные многополюсники являются активными ($\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}$). Действительно, мощность автономного многополюсника равна сумме квадратичной и линейной формы:

$$P = U^{\wedge} Y U + U^{\wedge} J,$$

а такая сумма всегда является неопределенной формой.

Активность неавтономных многополюсников определяется свойствами квадратичной формы ($U^{T}YU$ и др.). Поэтому они могут быть как активными, так и пассивными.

Для проверки активности неавтономного многополюсника удобнее пользоваться матрицами Y_S и Z_S. Если они неособенные, то придется установить, положительно ли определена эта форма или нет, что проще проверки полуопределенности по Y_S (последняя всегда является матрицей не более чем полуопределенной формы, так как $|Y| = 0$). Следует подчеркнуть, что для применения критериев определенности надо использовать симметричные части матриц Y, Y и Z.



Фиг. I-43

Многополюсник может быть активным, если внутри его имеются источники электрической энергии. Поэтому действительно линейные многополюсники, не имеющие внутри себя источников электрической энергии, обязательно должны быть пассивные. Наоборот, псевдолинейные многополюсники, которые для обеспечения нужного режима должны содержать источники электрической энергии, могут быть активными. При этом эти источники не являются источниками тока или напряжения в отношении к интересующим нас величинам, но при внешнем их "воз-

буждении" они становятся источниками и в отношении к этим величинам.

Соотношения между рассмотренными четырьмя классами линейных многополюсников показаны на фиг. I-43. Там множество всех линейных многополюсников обозначено через $\mathcal{M}$.

I.6.3. Обратимость

Неавтономные многополюсники, характеризуемые одной лишь матрицей узловых проводимостей (или сопротивлений), можно разделить еще на два класса по свойствам этих матриц:

I) обратимые многополюсники, матрицы которых симметричны $Y = Y^{\wedge}$ ($Z = Z^{\wedge}$);

2) необратимые многополюсники, матрицы которых несимметричны $Y \neq Y^{\wedge}$ ($Z \neq Z^{\wedge}$). Обозначаем множество всех обратимых многополюсников через $\mathcal{R}$ и множество всех необратимых многополюсников через $\mathcal{N}$. Очевидно $\mathcal{R} \cup \mathcal{N} = \mathcal{D}$ и $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Чем отличаются свойства многополюсников этих двух классов? Обратимые многополюсники не обладают направленностью ($Y_{ik} = Y_{ki}$, $Z_{ik} = Z_{ki}$), т.е. потенциал i-го зажима влияет на ток k-го зажима в такой же мере, как потенциал k-го зажима на ток i-го зажима, и наоборот. Необратимые же многополюсники обладают направленностью: в них влияния в двух направлениях не всегда равны (по крайней мере, для одной пары i , k имеет место $Y_{ik} \neq Y_{ki}$ или $Z_{ik} \neq Z_{ki}$). Примером обратимых многополюсников служат (физически возможные) двухполюсники, необратимых - такие псевдолинейные многополюсники, как электронные лампы, транзисторы и пр.

I.6.4. Взаимность

Представляет интерес, можно ли заранее объявить, будет тот или иной многополюсник обратимым или необратимым. На

этот вопрос отвечает теорема взаимности, которая в наиболее общем виде доказывается на основе законов термодинамики и статистической механики.

Принцип взаимности утверждает, что для линейных цепей справедливы равенства

$$Y(\bar{B},\bar{\omega}) = Y'(-\bar{B},-\bar{\omega}),$$
$$Z(\bar{B},\bar{\omega}) = Z'(-\bar{B},-\bar{\omega}).$$

Здесь $\bar{B}$ – вектор внешней магнитной индукции;
$\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения.

Если внешнее магнитное поле и вращение отсутствуют, то имеем дело с обратимым многополюсником:

$$Y = Y';$$
$$Z = Z'.$$

Но часто даже при $\bar{B} \neq \bar{0}$ и $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ несимметричность столь мала, что многополюсник можно считать обратимым.

К псевдолинейным цепям принцип взаимности не относится!

I.6.5. Примеры

Приведем некоторые примеры многополюсников разных типов.

Обычный реальный источник тока (двухполюсник) представляет собой автономный многополюсник; значит, он и активный.

Электронная лампа – триод – имеет матрицу ($J = \theta$)

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -(S+G_i) \\ -S & -G_i & S+G_i \end{Vmatrix}.$$

Она представляет собой неавтономный необратимый многополюсник.

Образуем симметричную часть матрицы:

$$\bar{Y}_s = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{S}{2} & -\frac{S}{2} \\ \frac{S}{2} & G_i & -G_i-\frac{S}{2} \\ -\frac{S}{2} & -G_i-\frac{S}{2} & G_i+S \end{Vmatrix}$$

и, заземляя зажим № 3, получим

$$Y_s = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{s}{1} \\ \frac{s}{1} & G_i \end{Vmatrix}.$$

Ее главные миноры

$$Y_s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = G_i,\ Y_s\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0,\ Y_s\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} = |Y_s| = -\frac{s^2}{4},$$

откуда следует, что многополюсник активный.

Так называемый <u>гиратор</u> имеет матрицу ($J = \theta$).

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 0 & g & -g \\ -g & 0 & g \\ g & -g & 0 \end{Vmatrix}$$

Очевидно, гиратор – неавтономный необратимый многополюсник. Так как матрица $\bar{Y}$ кососимметрична, то всегда $P = 0$, и, следовательно, гиратор является пассивным многополюсником.

I.6.6. <u>Соединения</u>

Наконец, исследуем, как изменяется характер многополюсников при их соединении. Ради простоты введем обозначения для многополюсников, а именно: обозначим представители всех классов через строчные греческие буквы ($\sigma \in \mathcal{S}$, $\delta \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\tau \in \mathcal{P}$, $\rho \in \mathcal{R}$, $\eta \in \mathcal{N}$). Процесс соединения обозначаем знаком "+".

Начнем с обратимости. При соединении обратимых многополюсников все матрицы симметричны, значит их сумма будет также симметричной – составной многополюсник обратимый:

$$\rho_1 + \rho_2 \in \mathcal{R}.$$

Очевидно, при соединении необратимых многополюсников можно получить то или другое. Значит, можно утверждать лишь, что

$$\eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{D}.$$

При соединении обратимого и необратимого многополюсника получается, очевидно, необратимый многополюсник:

$$\rho + \eta \in \mathcal{N}.$$

Рассмотрим теперь автономность. При соединении неавтономных многополюсников все $J_k = \theta$, следовательно, и $J = \theta$. Мы получаем неавтономный многополюсник:

$$\delta_1 + \delta_2 \in \mathcal{D}.$$

Соединение автономных многополюсников, очевидно, может быть автономным, но если $J_I = -J_{II}$, он становится уже неавтономным. Значит,

$$\sigma_1 + \sigma_2 \in \mathcal{M}. \qquad (I\text{-}20)$$

При соединении автономного и неавтономного многополюсника в общем случае получается автономный ($J + \theta = J$). Но в исключительных случаях (короткое замыкание в неавтономном) можно получить и неавтономный. Следовательно (включая исключения),

$$\sigma + \delta \in \mathcal{M}.$$

Соединение пассивных многополюсников всегда является пассивным (так как мощность всех составляющих $P \geqslant 0$):

$$\pi_1 + \pi_2 \in \mathcal{P}$$

(это следует и из (I-20), так как $\pi \in \mathcal{P} \subset \mathcal{D}$).

Соединение двух активных многополюсников может быть активным ($\alpha + \alpha$) и пассивным:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$\Delta < 0 \qquad \Delta < 0 \qquad \Delta > 0$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathcal{M}$$

(отсюда следует (I-20), так как $\sigma \in \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$).

Нетрудно видеть, что при соединении активного и пассивного многополюсника можем получить тот или другой вид. Например, если в каком-то режиме $P_\alpha < 0$ и $P_\pi > 0$, можно изменять все проводимости пассивного многополюсника столько раз, чтобы $P_\pi > |P_\alpha|$ или $P_\pi < |P_\alpha|$.

$$\alpha + \pi \in \mathcal{M}.$$

Запишем еще раз все полученные соотношения:

$$\sigma_1 + \sigma_2 \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D}), \quad (1)$$
$$\sigma + \delta \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D}), \quad (2)$$
$$\delta_1 + \delta_2 \in \mathcal{D}, \quad (3)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{T}), \quad (4)$$
$$\alpha + \pi \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{T}), \quad (5)$$
$$\pi_1 + \pi_2 \in \mathcal{T}, \quad (6)$$
$$\eta_1 + \eta_2 \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{R}), \quad (7)$$
$$\eta + \rho \in \mathcal{N}, \quad (8)$$
$$\rho_1 + \rho_2 \in \mathcal{R}. \quad (9)$$

Как было отмечено, так как $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ из (4) и (3) следуют соответственно (I) и (6).

Итак, в большинстве случаев мы придем к общему случаю. Чтобы не охватывать тривиальных случаев, которые были отмечены выше, мы перепишем эти соотношения для случаев практических.

$$\sigma_1 + \sigma_2 \in \mathcal{S},$$
$$\sigma + \delta \in \mathcal{S},$$
$$\delta_1 + \delta_2 \in \mathcal{D},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{T}),$$
$$\alpha + \pi \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{T}),$$
$$\pi_1 + \pi_2 \in \mathcal{T},$$
$$\eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{N},$$
$$\eta + \rho \in \mathcal{N},$$
$$\rho_1 + \rho_2 \in \mathcal{R}.$$

Конечно, указанные соотношения справедливы при любом количестве многополюсников. Например, при соединении

$$\sigma + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

результат будет (практически) автономным, значит и активным.

Глава II. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

2.I. Структура цепей

2.I.I. Топология

Во второй главе мы будем заниматься вопросами расчета линейных цепей. Основной будет такая задача: задана цепь (ее описание, схема) и требуется определить интересующую нас величину или зависимость. Для решения задач такого типа мы прежде всего должны исследовать структуру цепи, т.е. порядок соединения отдельных составляющих цепи. Общие методы не учитывают особенностей, не дают никаких упрощений. Обычно цепь состоит из ряда более простых элементов (многополюсников), и нас интересует сам факт соединения одних зажимов с другими, а не физическая реализация этих соединений (расположение и длина соединяющих проводов и т.д.). Поэтому можно сказать, что эти соединения не изменяются при непрерывных деформациях рассматриваемой цепи.

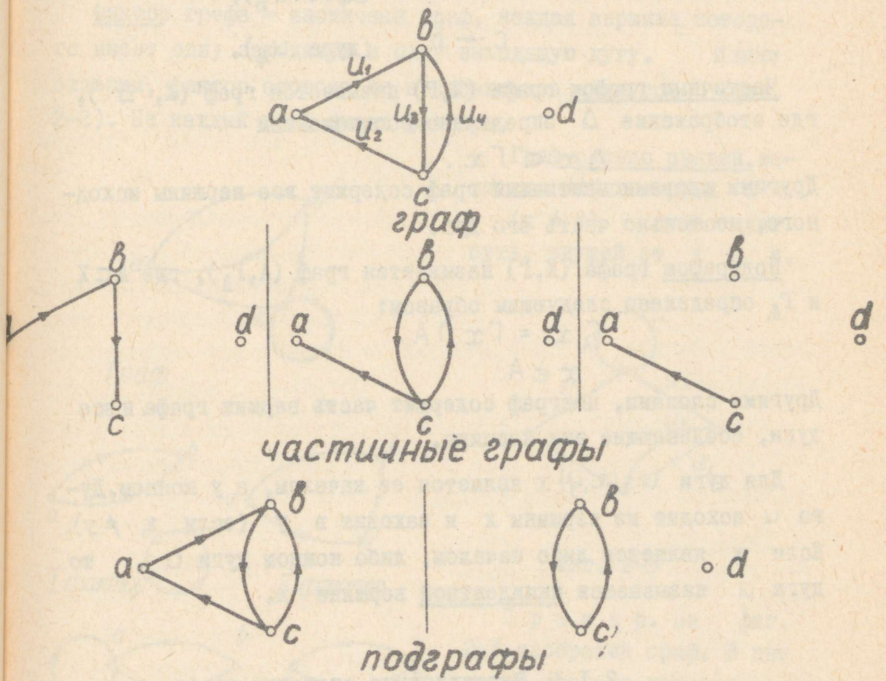
Свойства, которые инвариантны к непрерывным деформациям, называются топологическими (например, все пластинки, имеющие дырку, в топологическом смысле эквивалентны). В случае теории цепей для изучения топологических свойств цепей могут быть привлечены методы теории графов. Понятия теории графов нужны будут и при изучении теории сигнальных графов цепей. Поэтому мы в настоящем параграфе ознакомимся с основными определениями теории графов, с которыми нам придется сталкиваться в дальнейшем.

2.I.2. Граф

Говорят, что задан граф (X,Г), если даны

I) непустое множество X,
2) отображение Г множества X в X.

Последнее означает, что каждому элементу множества X поставлено в соответствие некоторое подмножество множества X (в случае, если каждому элементу поставлен в соответствие один элемент, говорят об однозначном отображении).



Фиг. 2-I

Элементы множества X мы будем изображать точками плоскости; пару точек x и y соединить непрерывной линией со стрелкой, направленной от x к y, если отображением Γ элементу x ставится в соответствие элемент y ($y \in \Gamma x$). При этом элементы множества X будем называть вершинами графа, а пару элементов (x, y) - дугой графа (ради простоты называем дугой линию, соединяющую вершины x и y). Например, на фиг. 2-I изображен граф, в котором множество X со-

стоит из вершин a, b, c, d, а отображение Γ таково:

$$a \to b \quad \text{(дуга } u_1\text{)},$$
$$c \to a \quad \text{(дуга } u_2\text{)},$$
$$b \to c \quad \text{(дуга } u_3\text{)},$$
$$c \to b \quad \text{(дуга } u_4\text{)}.$$

Частичным графом графа (X,Γ) называется граф (X, Δ), где отображение Δ определено соотношением

$$\Delta x \subset \Gamma x .$$

Другими словами частичный граф содержит все вершины исходного, но только часть его дуг.

Подграфом графа (X,Γ) называется граф (A,Γ_A), где $A \subset X$ и Γ_A определено следующим образом:

$$\Gamma_A x = \Gamma x \cap A .$$
$$x \in A$$

Другими словами, подграф содержит часть вершин графа и все дуги, соединяющие эти вершины.

Для дуги $u = (x,y)$ x является ее началом, а y концом. Дуга u исходит из вершины x и заходит в y (если $x \neq y$). Если x является либо началом, либо концом дуги u , то дуга u называется инцидентной вершине x.

2.I.3. Направленные элементы графа

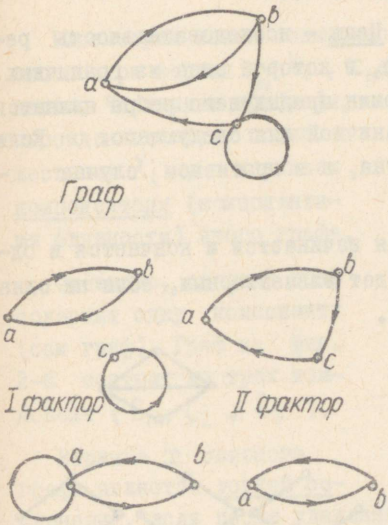
Путь – такая последовательность дуг, где конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь является простым, если никакая дуга не встречается дважды, и составным в противном случае . Если никакая вершина не встречается дважды, то имеем дело с элементарным путем.

Если от x до y имеется путь или x = y, то пишут $x \leqslant y$ и говорят, что y следует за x, а x предшествует y.

Контур – конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Контур элементарный, если все вершины различны.

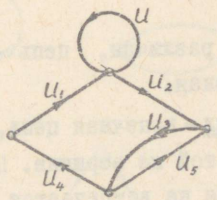
Петля – контур, образованный одной дугой.

Фактор графа – частичный граф, каждая вершина которого имеет одну заходящую и одну выходящую дугу. Иными словами, фактор состоит из некасающихся контуров (фиг. 2-2). Не каждый граф имеет факторы.



Фиг. 2-2

Граф сильно связен, если для любых вершин x и y ($x \neq y$) существует путь, идущий от x к y.

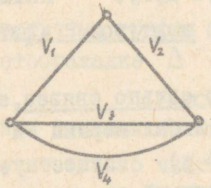


Фиг. 2-3

Пример. На фиг. 2-3 изображен граф. В нем можно указать пути: $[u_1, u, u_2]$ – простой путь; $[u_1, u_2, u_3, u_4, u_1]$, $[u_1, u_2, u_3]$ – элементарный путь; $[u_1, u, u, u_2, u_3, u_5, u_3, u_4]$ и др. Контуры: $[u]$ – элементарный; $[u_1, u, u_2, u_3, u_4]$, $[u_1, u_2, u_3, u_4]$ – элементарный; $[u_3, u_5]$ – элементарный. Петля: $[u]$. Фактор: $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Данный граф, очевидно, сильно связен.

2.I.4. Ненаправленные элементы графа

Ребром графа называем пару элементов x и y, если Гx=y или Гy=x. Так как здесь мы не интересуемся направлением, ребра изображаются просто непрерывной линией, соединяющей вершины x и y, называемые граничными для данного ребра.



Фиг. 2-4

Мультиграфом называется граф, где пара вершин (может быть) соединена более, чем одним ребром (фиг. 2-4).

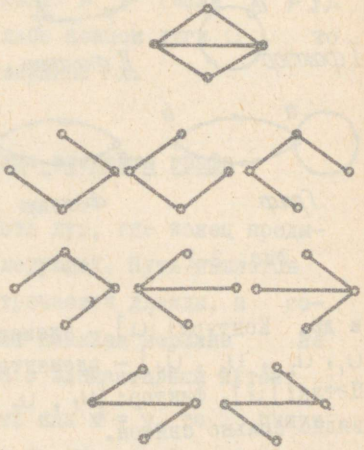
Цепь - последовательность ребер, в которой одна из граничных вершин предыдущего ребра является граничной для следующего. Если ребра различны, цепь - простая, а в противном случае - составная.

Цикл - конечная цепь, которая начинается и кончается в одной и той же вершине. Цикл будет элементарным, если ни одна вершина не встречается дважды.

Граф связен, если любые две вершины можно соединить цепью.

В графе на фиг. 2-I имеем три ребра (но 4 дуги), этот граф не связен (вершину d нельзя соединить с остальными цепью). В графе на фиг. 2-4 имеем: ребра V_1, V_2, V_3, V_4; цепи $[V_1, V_2, V_3, V_1]$, $[V_1, V_2, V_4]$, $[V_4]$ и др., циклы $[V_1, V_2, V_3, V_1, V_2]$, $[V_2, V_3, V_1]$ (элементарный).

Деревом называется связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин.



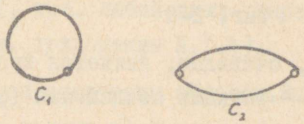
Фиг. 2-5

Частичным деревом графа называется дерево, являющееся частичным графом данного графа. Например, граф на фиг. 2-5 имеет 8 частичных деревьев, которые приведены там же. Отметим, что число ребер во всех частичных деревьях одинаково.

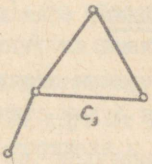
Ниже мы понимаем под деревом графа именно частичное дерево.

2.I.5. Связность

Рассмотрим такие подмножества X_i множества X, что любая пара вершин $x_m \in X_i$, $x_n \in X_i$ может быть соединена цепью. Частичные подграфы, порожденные этими подмножествами X_i, называем компонентами (компонентами связности) этого графа.

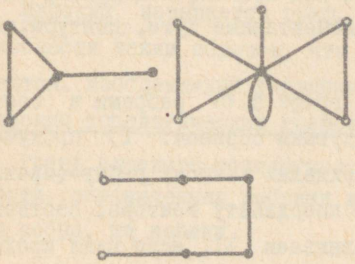


Очевидно, связный граф содержит одну компоненту (сам граф). Граф на фиг. 2-6 состоит из трех компонент (C_1, C_2, C_3).

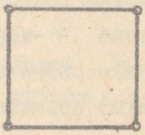


Фиг. 2-6

Вершина x связного графа является точкой сочленения, если после удаления этой вершины граф становится несвязным. На фиг. 2-7 приведены примеры точек сочленения, граф же на фиг. 2-8 не имеет точек сочленения.

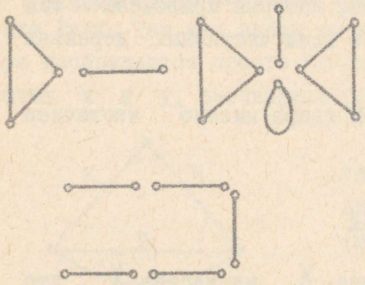


Фиг. 2-7



Фиг. 2-8

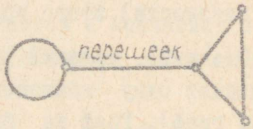
Если после удаления точки сочленения x отделяются компоненты с вершинами X_i, то подграфы, порожденные множествами $X_i \cup x$, называют кусками этого графа (другими словами, куски – это подграфы, получаемые расщеплением точки сочленения). Примеры приведены на фиг. 2-9.



куски графа на фиг. 2-7

Фиг. 2-9

Перешеек – ребро, удаление которого приводит к нарушению связности своей компоненты. Перешеек, очевидно, является куском графа, и его граничные вершины – точками сочленения (фиг. 2-10).



Фиг. 2-10

Множество вершин A подвергается стягиванию, если все дуги между вершинами из A опускаются и все эти вершины отождествляются (ниже мы будем стягивать цепи и ребра; в электротехнике этому соответствует закорачивание зажимов).

2.2.6. Независимые циклы

Ниже мы везде будем понимать под путями, контурами, цепями, циклами соответственно элементарные пути, контуры, цепи и циклы.

Ставим теперь каждому циклу графа с m ребрами в соответствие m-мерный вектор следующим образом: 1) пронумеруем все ребра от 1 до m и придадим каждому ребру (произвольную) ориентацию; 2) k-ую координату вектора, соответствующего данному циклу, приравниваем $+1$, если цикл проходит через k-ое ребро в выбранном направлении, -1, если он

проходит в обратном направлении, и 0, если это ребро вообще не входит в данный цикл. (Выбор обхода цикла произволен). Теперь считаем циклы зависимыми или независимыми одновременно с соответствующими векторами.

Наибольшее количество независимых циклов равно так называемому цикломатическому числу ν :

$$\nu = m - n + p,$$

где

m – число ребер;
n – число вершин;
p – число компонент.

В связном графе, очевидно, $\nu = m - n + 1$. Любые ν независимых циклов образуют базис, т.е. любой цикл выражается линейно через базисные (см. приложение П.I.4).

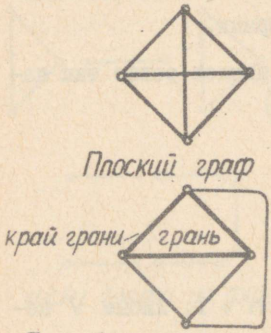
Базис циклов может быть найден следующим образом. Выбираем дерево графа. Если к этому дереву прибавить одно ребро графа (которое не входит в дерево), то образуется ровно один цикл. Таким образом можно получить $m - n + 1 = \nu$ циклов (в дерево входит $n - 1$ ребер), притом они независимы, так как любые два цикла отличаются друг от друга не менее чем на одно ребро. Следовательно, полученная система циклов образует базис.

2.I.7 Плоские графы

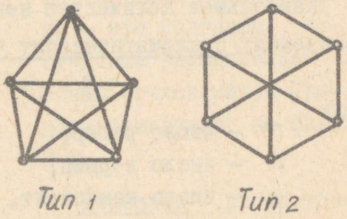
Плоским называется граф, который можно изобразить на плоскости таким образом, что никакие два ребра не пересекаются. Изображенный указанным способом граф называется плоским топологическим графом (фиг. 2-II).

Грань плоского топологического графа – область плоскости, ограниченная ребрами и не содержащая внутри себя ни ребра, ни вершин.

Край грани – цикл, образованный граничными ребрами грани. Единственная неограниченная грань называется бесконечной, остальные – конечными.



Фиг. 2-II



Фиг. 2-I2

Справедлива важная теорема: края конечных граней образуют базис циклов плоского топологического графа.

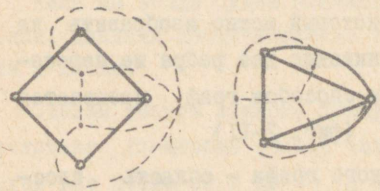
Необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф являлся плоским: граф не должен содержать частичных подграфов типа I и типа 2 (фиг. 2-I2).

2.I.8. Дуальные графы

Дуальным (двойственным) графом для плоского топологического графа Γ называется граф Γ^*, обладающий следующими свойствами:

I) каждой грани Γ соответствует вершина Γ^*;

2) ребру, общему для двух граней Γ, соответствует ребро Γ^*, инцидентное соответствующим вершинам Γ^*.



Фиг. 2-I3

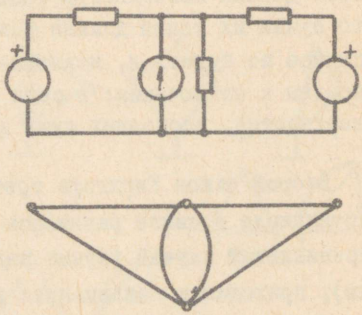
Дуальный граф может быть построен прямо по

определению (фиг. 2-I3). Дальнейшие сведения о дуальности см. 2.3.6 и 2.3.7.

2.I.9. Сети

Переходим теперь к исследованию структуры цепей. В настоящем параграфе мы рассмотрим только начальные и основные понятия.

Электрическую цепь, составленную из двухполюсников, называем электрической сетью или просто сетью. Очевидно, каждой сети соответствует однозначно определенный граф (мультиграф) - это соответствие задаётся соответствиями двухполюсник — ребро, зажим — вершина (фиг. 2-I4). Поэтому мы в последующем не будем (если этого не требуется) различать термины электрических сетей и соответствующих графов, которые будем называть структурными графами. Ввиду этого понятия теории графов: ребра, вершины и т.д. - приобретают "электрические" свойства. Но надо помнить, что эти электрические параметры относятся к сетям (или цепям), изображением которых являются рассматриваемые структурные графы.



Фиг. 2-I4

В дальнейшем мы изучим возможности построения эквивалентных сетей для любых многополюсников, и тем самым расчет цепей приводится к расчету эквивалентных сетей. Этим и объясняется наш особый интерес к сетям.

2.I.IO. Корректность

Структура сети ограничена только теми условиями, которые следуют из законов Кирхгофа. Рассмотрим, какие условия из них получаются.

Первый закон Кирхгофа требует, чтобы сумма токов через любую замкнутую поверхность равнялась нулю. Следовательно, если данная поверхность состоит только из источников тока, то сумма их токов должна равняться нулю. Этого в общем случае не будет, и, исключая такой тривиальный случай, мы придем к заключению: в сети не должно быть замкнутых поверхностей, состоящих лишь из источников тока.

Второй закон Кирхгофа требует, чтобы сумма изменений потенциала в цикле равнялась нулю. Исключая опять-таки тривиальный случай (сумма напряжений источников равна нулю), приходим к заключению: в сети не должно быть циклов, состоящих из источников напряжения.

Если сеть удовлетворяет этим условиям, то мы считаем, что она корректна.

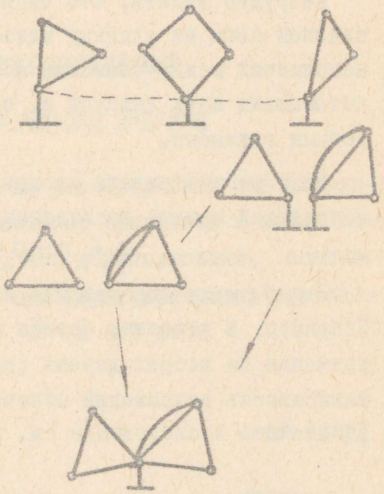
Как частные случаи из этих условий следуют: источник напряжения не может образовать петлю, источник тока - висячее ребро или перешеек.

2.I.II. Независимость

Отдельные компоненты сети изолированы друг от друга. Как было показано в I.4.7, расчет можно провести отдельно для каждой компоненты, независимо от других. Процессы в отдельных компонентах полностью независимы от процессов в остальных компонентах. Например, в каждой компоненте требуется свой базисный зажим, и напряжения между какими-то зажимами различных компонент ничем не определены.

Очевидно, через точку сочленения не пройдет ни один цикл. Значит, ток через точку сочленения равен нулю. Отсюда, в свою очередь, следует, что процессы в отдельных кусках сети независимы. Но в отличие от предыдущего случая (мы рассмотрим связный граф) напряжения между зажимами отдельных кусков определены. Требуется только один базисный зажим, и в большинстве случаев в качестве его удобно выбрать именно точку сочленения (если такая имеется).

Из предыдущего следует, что компоненты сети можно соединить таким образом, чтобы они превратились в куски новой сети. Ввиду независимости и компонент, и кусков режимы сохраняются, а неопределенность в напряжениях исчезает. В принципе эта операция выполняется выбором в каждой компоненте базисного зажима (нулевой потенциал), вследствие чего земля становится точкой сочленения (фиг. 2-I5).



Фиг. 2-I5

Так как петля и висячее ребро всегда представляют собой кусок графа и ввиду тривиальности таких кусков ($U = 0$ и $I = 0$), в сети они опущены. Поэтому мы в последующем предполагаем везде, что петли и висячие ребра отсутствуют, или, если они при преобразованиях появляются, мы их удаляем.

В итоге: сеть не должна содержать "звезд" источников тока, циклов источников напряжения, петель и висячих ребер. Допустимость соединения компонент позволяет сюда прибавить еще условие связности, но это не обязательно.

2.I.I2. Токи и напряжения

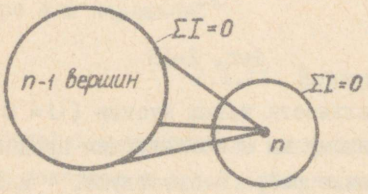
В каждой сети имеется определенное максимальное количество независимых токов и напряжений, то есть все остальные выражаются через них (базис токов или напряжений). Очевидно, размерность базиса, т.е. наибольшее количество независимых токов или напряжений определяется именно структурой сети.

Нетрудно видеть, что число независимых напряжений в связной сети на единицу меньше числа вершин. Действительно, напряжения между базисным и остальными зажимами определяют потенциалы всех зажимов и, следовательно, напряжения между любыми зажимами.

Если рассматривать несвязную сеть, то число независимых напряжений меньше количества вершин на число компонент:

$$\rho = n - p.$$

Эта формула справедлива и для связной сети ($\rho = n - I$). Например, в качестве базиса напряжений можно выбирать напряжения на ребрах дерева (дерево имеет $n - I$ ребер, и независимость напряжений обеспечивается отсутствием циклов). Дальнейшее исследование см. в 2.2.



Фиг. 2-I6

В сети через каждое ребро протекает определенный ток. Система этих токов, очевидно, зависима. В связной сети число условий для токов ребер, получаемых на основе первого закона Кирхгофа, на единицу меньше количества вершин (для всех вершин кроме одной, для которой это заведомо выполняется, см. фиг. 2-I6). Отсюда немедленно следует, что в общем случае число условий равно $\rho = n - p$ и число независимых токов равно цикломатическому числу:

$$\nu = m - \rho = m - n + p.$$

В случае связной сети $\nu = m - n + 1$. Дальнейшие исследования см. в 2.3.

Этим мы заканчиваем общее рассмотрение структуры сетей и перейдем к методам расчета. Введенные нами понятия найдут широкое применение в топологическом анализе (2.6.).

На теории графов основывается также теория сигнальных графов (§ 2.7 и последующие).

§ 2.2. Метод узловых напряжений

2.2.1. Классические методы расчета

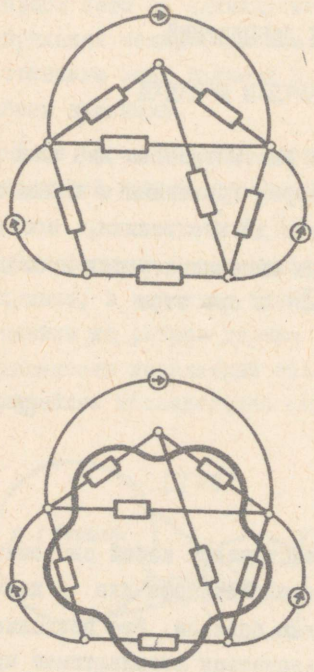
В этом и следующем параграфе мы рассматриваем два классических метода расчета цепей, которые применимы к любым сетям. При этом мы предполагаем, что двухполюсники, составляющие сеть, обратимы, значит они характеризуются проводимостью Y или сопротивлением Z и при этом

$$\begin{aligned} U &= Z\,I, \\ I &= Y\,U, \\ Z &= \frac{1}{Y}, \\ Y &= \frac{1}{Z}. \end{aligned} \qquad (2\text{-}1)$$

Эти два метода в принципе представляют собой систематические методы составления уравнений Кирхгофа для данной сети, причем наиболее рациональным образом. Это позволяет сократить число уравнений и пользоваться стандартными правилами их составления, в результате чего можно сэкономить время и объем вычислений, а также добиться упрощающего автоматизма.

2.2.2. Узловое уравнение

Рассматриваемый в данном параграфе метод узловых напряжений позволяет в принципе составить матрицу узловых проводимостей для данной сети, а следовательно, и составить уравнения. При этом мы учитываем все зажимы сети, и поэтому при решении составленных уравнений будут найдены напряжения всех зажимов сети. На основе последних легко вычислить токи и напряжения всех двухполюсников (ребер) сети.



Фиг. 2-I7

Итак, теперь мы будем изучать методику построения уравнений цепей по их структуре, не опираясь уже на предположения об известности или возможности экспериментального определения матриц цепи.

Пусть имеется некоторая сеть, включающая в себя также источники тока и напряжения. Прежде всего преобразуем все имеющиеся источники в источники тока (если это возможно), т.е. представим их с помощью схемы Нортона. Для реальных цепей это всегда возможно, так как мы имеем дело с реальными источниками, внутренная проводимость которых конечна. В дальнейшем мы будем исходить из предположения, что этот шаг выполнен.

Таким образом, мы имеем дело с неавтономным многополюсником (вся сеть без источников). Все источники можно счи-

тать внешними, которые определяют токи зажимов (фиг. 2-I7). В матричном уравнении

$$I = YU \qquad (2\text{-}2)$$

токи известны (они выражаются через токи источников), матрицу Y мы можем найти из схемы (это мы рассмотрим ниже), а напряжения являются неизвестными. Следовательно, мы получили матричное уравнение, решение которого (если оно существует) имеет вид

$$U = Y^{-1} I .$$

2.2.3. Составление матрицы

Займемся теперь составлением матрицы Y (матрицы узловых проводимостей). Для этого выбираем базисный зажим и присоединяем к зажиму k напряжение U_k, а все остальные зажимы заземляем. По определению двухполюсника токи равны нулю во всех ребрах, граничные вершины которых заземлены и отличаются от нуля в ребрах, инцидентных вершине k. При этом ток в ребре $[k,i]$ имеет величину $G_{ik}U_k$ и направлен от вершины k. Очевидно, ток зажима i равен ($i \neq k$)

$$I_i = - G_{ik} U_k ,$$

а ток зажима k

$$I_k = \sum_i G_{ik} U_k$$

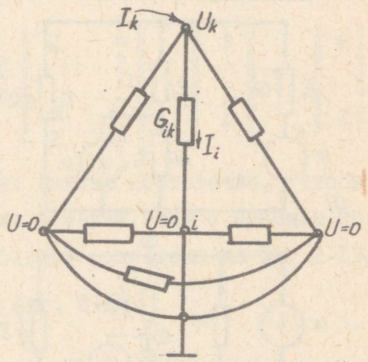
(фиг.2-I8).

С другой стороны, элементы матрицы Y определяются при таких же условиях соотношением

$$Y_{ik} = \frac{I_i}{U_k} \quad (U_j = 0,\ j \neq k),$$

откуда следует, что

$$Y_{ik} = - G_{ik} \quad (i \neq k),$$



Фиг. 2-I8

$$Y_{kk} = \sum_{i} G_{ik} . \qquad (2\text{-}3)$$

Эти формулы позволяют составить матрицу узловых проводимостей.

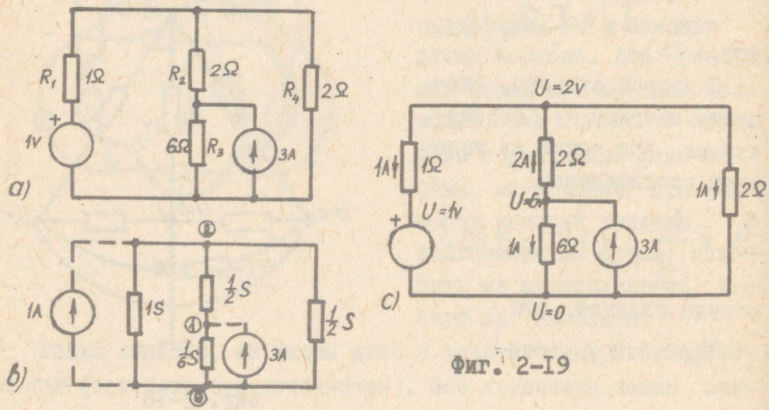
Что касается элементов матрицы I, т.е. токов зажимов, то они, очевидно, получаются как сумма токов, входящих в данный зажим (из источников).

2.2.4. Упрощение

Этим и заканчивается изложение данного метода. Можно еще добавить следующее: элементы матрицы можно получить прямо и в том случае, когда источники представлены схемой Тевенина. Имея в виду соответствующие соотношения, легко найти, что ток, создаваемый таким источником, равен $\frac{U}{R}$ (R – внутреннее сопротивление источника, U – его напряжение) и направлен от зажима "–" к зажиму "+" источника. При составлении матрицы Y мы рассмотрим данный двухполюсник как неавтономный с проводимостью $G = \frac{1}{R}$ (исключаем источник напряжения).

2.2.5. Примеры

Поясняем применение метода некоторыми примерами.



Фиг. 2-19

Пусть имеется сеть, показанная на фиг. 2-19,а. Требуется определить токи во всех ребрах и напряжения всех вершин.

Неавтономная часть сети показана на фиг. 2-19, б. Там же указаны преобразованные источники, нумерация вершин и базисная вершина.

Построим теперь матрицу узловых проводимостей. Очевидно, она второго порядка и ее элементы равны:

$$Y_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\ [\text{сим}],$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{2}\ [\text{сим}],$$

$$Y_{22} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\ [\text{сим}].$$

Элементы матрицы токов:

$$I_1 = 3\ [\text{а}],$$

$$I_2 = I\ [\text{а}].$$

Теперь имеем уравнение

$$\begin{Vmatrix} 3 \\ I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{I}{2} \\ -\frac{I}{2} & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}.$$

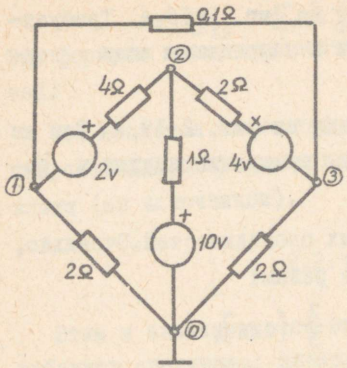
Решаем это уравнение:

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{I}{2} \\ -\frac{I}{2} & 2 \end{Vmatrix}^{-I} \begin{Vmatrix} 3 \\ I \end{Vmatrix} = \frac{I2}{I3} \begin{Vmatrix} 2 & \frac{I}{2} \\ \frac{I}{2} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 \\ I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Значит, $U_1 = 6$ в, $U_2 = 2$ в. Этих данных достаточно, чтобы рассчитать все токи и напряжения в нашей сети с помощью соотношений (2-I). Результаты расчетов приведены на фиг. 2-19, с.

Вторая сеть представлена на фиг. 2-20.

Составим матрицу I:



Фиг. 2-20

$$I_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{I}{2}\ [a],$$

$$I_2 = +\frac{2}{4} + \frac{10}{I} + \frac{4}{2} = \frac{25}{2}\ [a],$$

$$I_3 = \frac{4}{2} = -2\ [a],$$

$$I = \frac{I}{2} \left\| \begin{matrix} -I \\ 25 \\ -4 \end{matrix} \right\|.$$

Составим матрицу Y (закорачиваем источники напряжения):

$$Y_{11} = 10 + \frac{I}{4} + \frac{I}{2} = \frac{43}{4}, \quad Y_{12} = -\frac{I}{4}, \quad Y_{13} = -10,$$

$$Y_{21} = -\frac{I}{4}, \quad Y_{22} = I + \frac{I}{4} + \frac{I}{2} = \frac{7}{4}, \quad Y_{23} = -\frac{I}{2},$$

$$Y_{31} = -10, \quad Y_{32} = -\frac{I}{2}, \quad Y_{33} = 10 + \frac{I}{2} + \frac{I}{2} = 11\ [\text{сим}].$$

Уравнение будет

$$\frac{I}{4} \left\| \begin{matrix} 43 & -I & -40 \\ -I & 7 & -2 \\ -40 & -2 & 44 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix} \right\| = \frac{I}{2} \left\| \begin{matrix} -I \\ 25 \\ -4 \end{matrix} \right\|.$$

Его решение:

$$\left\| \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{matrix} \right\|.$$

Нахождение токов несложно, поэтому решения мы здесь приводить не будем.

Как мы видели, матрица узловых проводимостей получается симметричная ($G_{ik} = G_{ki}$), следовательно, такая цепь обратима. Рассмотренный метод применим и для необратимых цепей, но к этому случаю мы вернемся ниже (§ 2.4).

Особый интерес представляет случай, когда все двухполюсники имеют положительные сопротивления (следовательно, и проводимости; такими были и цепи в рассмотренных примерах). Из соотношений (2-3) сразу вытекает, что

$$y_{ik} \leq 0, \; i \neq k,$$

$$y_{kk} \geq |y_{ik}|,$$

$$y_{kk} \geq 0,$$

т.е. собственные проводимости положительны, а взаимные проводимости отрицательны и по абсолютной величине не превышают соответствующих собственных проводимостей.

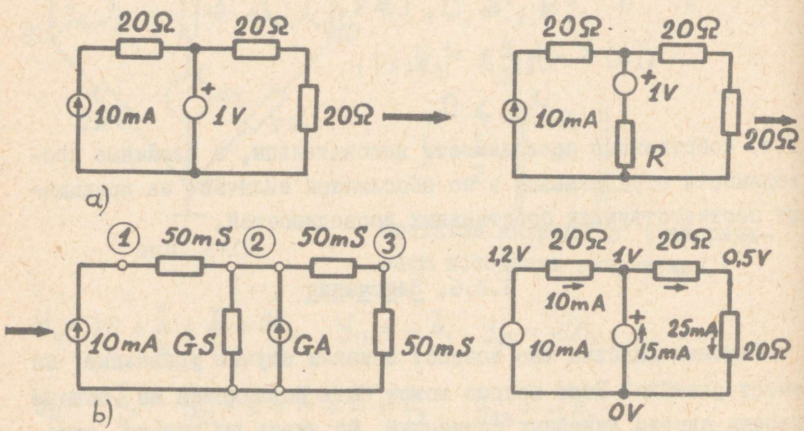
2.2.6. Замечания

Наконец выясним еще вопрос: в каком случае уравнение не имеет решения? Этот вопрос может быть исследован на основе теории систем линейных уравнений, но здесь мы только отметим, что практически всегда имеется решение. Бесконечно много решений получим лишь в том случае, если структурный граф сети не связен, так как в этом случае напряжения между отдельными компонентами сети ничем не определены.

Если в сети имеются идеальные источники напряжения, то изложенный метод непосредственно не применим (кроме случая, когда в схеме имеется сопротивление, включенное последовательно идеальным источником напряжения; его можно считать внутренним сопротивлением источника). Дело в том, что в системе уравнений (2-2) появляются известные в матрице U и неизвестные в матрице I, и поэтому $Y^{-1}I$ не будет решением. Для решения этой системы надо применять другие методы, один из которых мы здесь приведем.

Заменяем идеальный источник напряжений на реальный с внутренней проводимостью G, составляем систему (2-2) и решаем ее. В результате токи будут функциями от G. Устремив теперь $G \to \infty$, найдем решение данной задачи.

Рассмотрим пример применения этого приема. Дана схема а) на фиг. 2-21. Преобразуем ее в схему б) , откуда получим систему:



Фиг. 2-21

$$\begin{Vmatrix} 0,01 \\ G \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,05 & -0,05 & 0 \\ -0,05 & +0,10+G & -0,05 \\ 0 & -0,05 & 0,10 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = 0,005\,G + 0,000125,$$

$$y^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} 0,1\,G + 0,0075 & 0,005 & 0,0025 \\ 0,005 & 0,005 & 0,0025 \\ 0,0025 & 0,0025 & 0,05\,G + 0,0025 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Vmatrix} = y^{-1} I = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} 0,001\,G + 0,000075 + 0,005G \\ 0,00005 + 0,005\,G \\ 0,000025 + 0,0025\,G \end{Vmatrix} = \frac{I}{200G+5} \begin{Vmatrix} 240\,G + 3 \\ 200\,G + 2 \\ 100\,G + 1 \end{Vmatrix}$$

При $G \to \infty$, $U_1 \to 1,2$ в, $U_2 \to 1,0$ в, $U_3 \to 0,5$ в.

§ 2.3. Метод контурных токов. Дуальность

2.3.I. Контурные токи

В данном параграфе мы рассмотрим второй классический метод расчета линейных сетей - метод контурных токов. Также как и в предыдущем параграфе, составим матричное уравнение, решение которого дает возможность просто вычислить все токи и напряжения в сети. При этом все источники следует представить схемами Тевенина; таким образом в сети мы будем иметь только источники напряжения.

Прежде всего целесообразно ввести некоторые новые понятия.

Контурными токами называем такие фиктивные токи, протекающие в циклах сети, сумма которых в каждом ребре равна действительному току в этом ребре. Максимальное число независимых токов равно цикломатическому числу ν, которое в связной сети равно

$$\nu = m - n + 1.$$

Поэтому общее число контурных токов должно быть выбрано равным ν. Но, кроме этого, эти токи должны быть независимыми. Для обеспечения независимости целесообразно руководствоваться следующим ходом рассуждений. Если выбирать совокупность из ν ребер таким образом, чтобы ей не принадлежали сразу все ребра, инцидентные одной вершине, то токи этих ребер, очевидно, окажутся независимыми (нуль уравнений). Остаток, который получается после удаления такой совокупности ребер, представляет собой дерево (так как оно имеет $m - \nu = n - 1$ ребер и содержит все вершины). Если теперь циклы выбирать таким образом, чтобы они содержали только по одному ребру из выделенной совокупности и притом различные, то контурные токи этих циклов равны токам выбранных ребер и поэтому независимы. Итак, контурные токи независимых циклов оказываются независимыми. Направления этих контурных токов можно выбирать, конечно, произвольно.

2.3.2. Уравнение

После фиксации контурных токов определяем контурные напряжения: контурное напряжение данного цикла равно сумме изменений потенциала на источниках при обходе цикла в направлении контурного тока.

Упорядочив контурные токи и напряжения нумерацией выбранных циклов, мы можем составить матрицы контурных токов (I) и напряжений (U). Между последними должна быть связь, выраженная следующим уравнением:

$$U = ZI, \qquad (2\text{–}4)$$

где матрицу Z называем матрицей контурных сопротивлений. Построение этой матрицы является нашей следующей задачей.

2.3.3. Матрица контурных сопротивлений

Предположим, что токи всех циклов, кроме k -го, равны нулю. Тогда из уравнения (2–4) получим

$$U_i = Z_{ik} I_k .$$

Обходя теперь цикл k в направлении контурного тока, получим по второму закону Кирхгофа:

$$U_k - \sum_r Z_k^r I_k = 0$$

или

$$U_k = \sum_r Z_k^r I_k ,$$

где Z_k^r – сопротивление r -го ребра цикла k (внутри каждого цикла введем свою нумерацию ребер). Из последнего уравнения

$$Z_{kk} = \sum_r Z_k^r ,$$

то есть собственное сопротивление цикла равно сумме сопротивлений всех ребер цикла.

Применим теперь второй закон Кирхгофа к какому-либо другому циклу i. Обходя его в направлении контурного тока и учитывая, что $I_i = 0$, получаем

$$U_i - \sum_p S_p Z_{ik}^p I_k = 0, \qquad (2\text{-}5)$$

где Z_{ik}^p – сопротивление ребра p, общего для циклов i и k (своя нумерация для таких ребер), а коэффициент $S_p = +1$, если выбранные направления контурных токов I_i и I_k в ребре p совпадают, и $S_p = -1$ в противном случае. Из (2-5) сразу найдем, что

$$Z_{ik} = \sum_p S_p Z_{ik}^p,$$

т.е. взаимное сопротивление циклов равно сумме сопротивлений общих ребер этих циклов (с учетом знаков!).

Теперь мы сумеем построить все матрицы в уравнении (2-4) и остается только его решить:

$$I = Z^{-1} U.$$

После нахождения всех контурных токов определение токов ребер и напряжений вершин не представляет трудностей.

2.3.4. Упрощение

Построение матрицы контурных сопротивлений упрощается в том случае, когда структурный граф сети можно представить в виде плоского топологического графа. Выбирая в качестве независимых циклов края конечных граней графа и направляя контурные токи одинаково (все по часовой стрелке или наоборот) оказывается, что во всех ребрах направления контурных токов противоположны (через данное ребро протекают не более двух контурных токов). Следовательно, $S_p = -1$ при всех p и

$$Z_{ik} = -\sum_p Z_{ik}^p.$$

2.3.5. Примеры

Пусть мы имеем сеть, показанную на фиг. 2-22,а. После преобразования второго источника получаем сеть, изображенную на фиг. 2-22, *б*, структурный граф которой приведен там же. На последнем указаны контурные токи, которые, очевидно, независимы. Матрица контурных сопротивлений

$$Z = \begin{Vmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 7 \end{Vmatrix},$$

уравнение

$$\begin{Vmatrix} 13 \\ -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}.$$

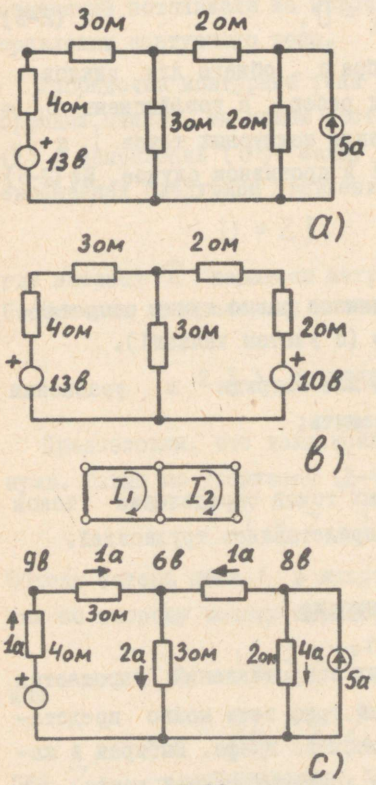
Решение уравнения:

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{61} \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 13 \\ -10 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

или $I_1 = 1$ а, $I_2 = -1$ а.

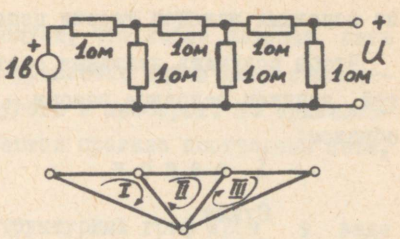
Теперь нетрудно определить остальные токи и напряжения. Ответ показан на фиг. 2-22, с.



Фиг. 2-22

В качестве второго примера рассмотрим сеть на фиг. 2-23. Нас интересует величина напряжения U. Граф этой сети плоский, поэтому выбираем циклами края конечных граней, а контурные токи направляем по часовой стрелке. В итоге получим уравнение

$$\begin{Vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -I & 0 \\ -I & 3 & -I \\ 0 & -I & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Vmatrix},$$



Фиг. 2-23

откуда

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Vmatrix} = \frac{I}{I3} \begin{Vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ I & 2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x \\ x \\ \frac{I}{I3} \end{Vmatrix}.$$

Значит, $I_3 = \frac{I}{I3}$ а и $U = \frac{I}{I3}$ в. Здесь мы вычислили только последнюю строку матрицы Z^{-1}, так как нас интересует лишь ток I_3.

2.3.6. Принцип дуальности

В общем случае принцип дуальности (двойственности) состоит в следующем: из справедливости какого-то утверждения или соотношения следует справедливость и другого (дуального) утверждения или соотношения, которое получается из данного заменой всех понятий и их взаимосоотношений на дуальные. Например, в (проективной) геометрии, где дуальными являются соответствия

точка ⟷ плоскость,

прямая ⟷ прямая,

из утверждения "три точки, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость", следует дуальное утверждение: "три плоскости, не проходящие через одну прямую, определяют точку". Мы рассмотрим принцип дуальности применительно к

электрическим сетям. При этом необходимо, конечно, исходить из основных законов теории цепей.

Чтобы получить дуальные соотношения для электрических сетей, запишем основные законы - законы Кирхгофа - следующим образом:

I закон		II закон
Сумма токов ребер, инцидентных вершине, равна нулю.	⟷	Сумма напряжений ребер, содержащихся в цикле, равна нулю.

Следовательно, законы Кирхгофа определяют три дуальных соответствия:

ток	⟷	напряжение
ребро	⟷	ребро
вершина	⟷	цикл.

Второе и третье соответствие характеризует топологическую сторону дуальности (см.2.I.8).

Из этих основных соответствий можно получить ряд других, которые могут быть использованы на практике. Приведем некоторые из них:

сопротивление	⟷	проводимость
источник тока	⟷	источник напряжения
амперметр	⟷	вольтметр,
петля	⟷	висячее ребро
точка сочленения	⟷	точка сочленения
кусок	⟷	кусок.

Принцип дуальности позволяет делать более глубокие выводы: например, из существования схемы Тевенина следует существование схемы Нортона.

2.3.7. Дуальные сети

Из принципа дуальности следует, что любая плоская сеть имеет дуальную и что узловое уравнение одной сети совпадает с контурным уравнением другого и наоборот. Из приведенных соответствий легко получаются правила построения сети, дуальной данной.

Прежде всего изображаем структурный граф сети в виде плоского топологического графа и выбираем ориентацию контурных токов (края конечных граней, все направления одинаковы). После этого строим дуальную сеть, руководствуясь следующими правилами:

1. Структурный граф дуальной сети дуален структурному графу данной сети.

2. Ребру с проводимостью Y сим соответствует ребро с сопротивлением Y ом, и ребру с сопротивлением Z ом соответствует ребро с проводимостью Z сим.

3. Источнику тока I а соответствует источник напряжения I в, притом его зажим "+" присоединен к вершине, соответствующей циклу, в которой направление контурного тока совпадает с направлением тока в источнике тока.

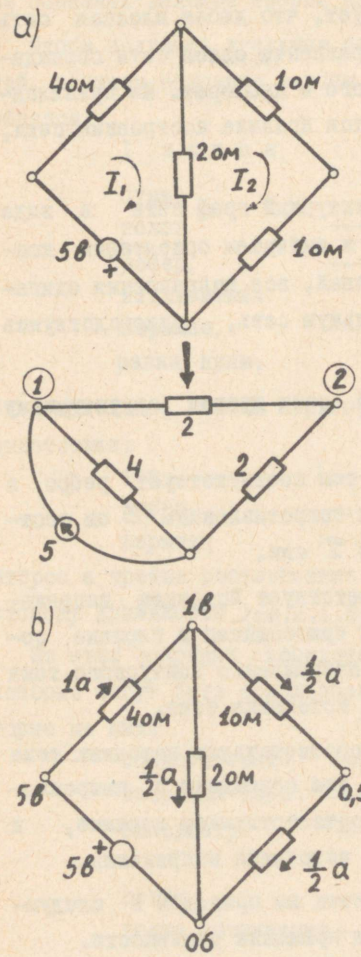
4. Источнику напряжения U в соответствует источник тока U а, притом направление тока в нем совпадает с направлением контурного тока в цикле, соответствующем вершине, к которой присоединен зажим "+" источника напряжения.

Примеры построения дуальной сети мы приведем в следующем пункте в примерах применения принципа дуальности.

2.3.8. Применение

Принцип дуальности позволяет заменить решение задачи решением дуальной задачи. А последняя может оказаться бо-

лее простой, чем первоначальная. Приведем один пример. На фиг. 2-24,а показана цепь, для которой требуется определить токи во всех ребрах и напряжения всех вершин. Решение методом узловых напряжений требует 3-х уравнений, методом контурных токов-2-х уравнений. Но вместо применения метода контурных токов, найдем узловые напряжения дуальной сети, которые равны (численно) контурным токам данной сети. Решение:



Фиг. 2-24

в дуальной сети

$$\begin{Vmatrix} 5 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \frac{I}{20} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

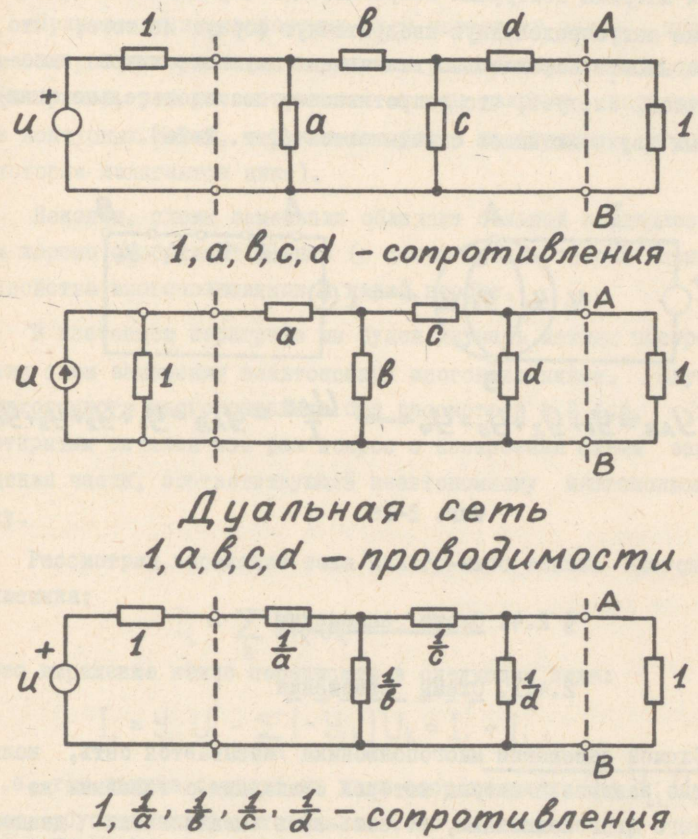
$$= \begin{Vmatrix} I \\ \frac{I}{2} \end{Vmatrix}.$$

Значит, $I_1 = I$ а, $I_2 = \frac{I}{2}$ а.

Полное решение дано на фиг. 2-24,б.

Во-вторых, принцип дуальности можно применять для построения сетей иной структуры, но с такими же свойствами. Например, если в сети, изображенной на фиг. 2-25, нас интересует только напряжение между вершинами А и В, обусловленное источником, то это напряжение не изменяется при замене сети на дуальную

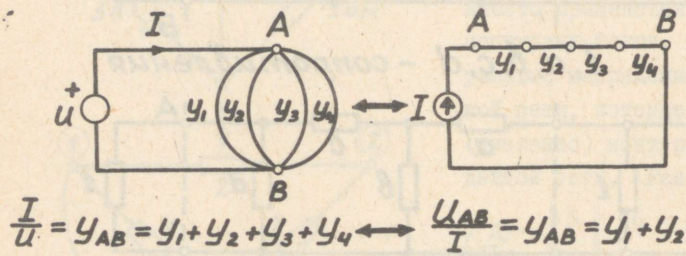
(так как ток и напряжение последнего двухполюсника численно равны).



Фиг. 2-25

Наконец, можно пользоваться еще и общим положением дуальности, что из справедливости какого-либо утверждения или соотношения следует справедливость дуального утверждения или соотношения. Например, из того, что матрица узловых про-

проводимостей пассивного многополюсника (сети) определяет положительно полуопределенную квадратичную форму, следует, что и матрица контурных сопротивлений определяет положительно полуопределенную квадратичную форму. Из того, что проводимости параллельно включенных двухполюсников складываются, следует, что сопротивления последовательно включенных двухполюсников складываются (фиг. 2-26).



$$\frac{I}{U} = Y_{AB} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \longleftrightarrow \frac{U_{AB}}{I} = Y_{AB} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

Фиг. 2-26

§ 2.4. Схемы замещения

2.4.I. Схемы замещения

Схемой замещения многополюсника называется сеть, количество зажимов и матриц которой совпадают с таковыми же у данного многополюсника, то есть сеть эквивалентна данному многополюснику.

Схемы замещения оказываются очень полезными при расчете сложных цепей. Во-первых, после соединения сетей, представляющих собой схемы замещения многополюсников, обычно можно полученную сеть намного упростить (путем сложения параллельных проводимостей, а иногда даже последовательных сопротивлений). Если даны схемы замещения исходных многополюсников,

построение матрицы цепи часто оказывается более удобным с помощью составления эквивалентной схемы всей цепи, нежели с помощью сложения матриц составляющих многополюсников.

Применение эквивалентных схем позволяет также произвести расчеты удобными методами, разработанными для сетей (например, уже рассмотренные методы узловых напряжений и контурных токов, а также еще более практичные методы, которые излагаются ниже).

Наконец, схемы замещения обладают большой наглядностью и хорошо отображают важные (с точки зрения теории цепей) свойства многополюсников и цепей вообще.

В настоящем параграфе мы будем изучать методы построения схем замещения неавтономных многополюсников. Случай автономного многополюсника был рассмотрен в § I.4, где открытым остался как раз вопрос о построении схемы замещения части, соответствующей неавтономному многополюснику.

Рассмотрим выражение тока какого-либо зажима многополюсника:

$$I_i = \sum_k y_{ik} U_k .$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$I_i = y_{ii} U_i - \sum_{k \neq i} (-y_{ik}) U_k = I_i' + I_i'' ,$$

т.е. ток зажима состоит из двух составляющих: $I_i' = y_{ii} U_i$ – ток, обусловленный потенциалом того же зажима i, и $I_i'' = -\sum(-y_{ik})U_k$ – ток, обусловленный потенциалами других зажимов.

2.4.2. Унистор

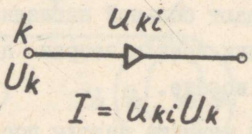
Перейдем теперь к построению схемы замещения, изображая зажимы многополюсника вершинами графа (схемы замещения). Для обеспечения нужного значения второй составляющей

тока I_i'', включаем между зажимами "k" и "i" двухполюсник u_{ki} со следующими свойствами:

1) ток через него зависит только от потенциала зажима k;

2) ток через него в направлении от зажима "k" к зажиму "i" равен произведению потенциала зажима "k" и проводимости двухполюсника u_{ki};

3) проводимость двухполюсника берем равной $u_{ki} = -y_{ik}$.



Фиг. 2-27

Удовлетворяющий этим условиям двухполюсник называется унистором. Условный знак унистора приведен на фиг. 2-27.

2.4.3. Унисторная схема замещения

Очевидно, после включения всех унисторов u_{ki}, ток, протекающий в данный зажим изнутри многополюсника (т.е. от других зажимов) равен

$$-\sum_{k \neq i} u_{ki} U_k = -\sum_{k \neq i} (-y_{ik}) U_k = I_i'' .$$

Здесь отрицательный знак означает то, что ток вытекает из зажима (изнутри многополюсника!).

Повторяя эту процедуру для всех зажимов, мы в общем случае получим между каждой парой зажимов два противоположно направленных унистора (u_{ki} и u_{ik}). Кроме тока, втекающего в зажим i из остальных зажимов, из этого зажима вытекают в остальные зажимы токи, обусловленные потенциалом U_i через унисторы, направленные от зажима i (фиг. 2-28). Найдем величину этого тока:

$$\sum_{k \neq i} u_{ik} U_i = U_i \sum_{k \neq i} u_{ik} = U_i \sum_{k \neq i} (-y_{ki}) = -U_i \sum_{k \neq i} y_{ki} . \qquad (2\text{-}6)$$

По основному свойству неопределенной матрицы узловых проводимостей имеем

$$\sum_{k} y_{ki} = 0$$

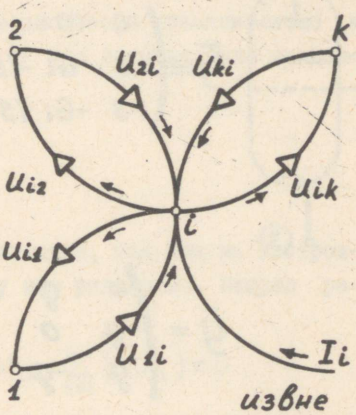
или

$$\sum_{k \neq i} y_{ki} = -y_{ii}. \qquad (2\text{-}7)$$

Подставляя последнее равенство в (2-6), найдем

$$-U_i \sum_{k \neq i} y_{ki} = U_i y_{ii} = I_i' .$$

Значит, сумма токов всех унисторов, инцидентных вершине, равна действительному току I_i, определенному уравнением многополюсника



Фиг. 2-28

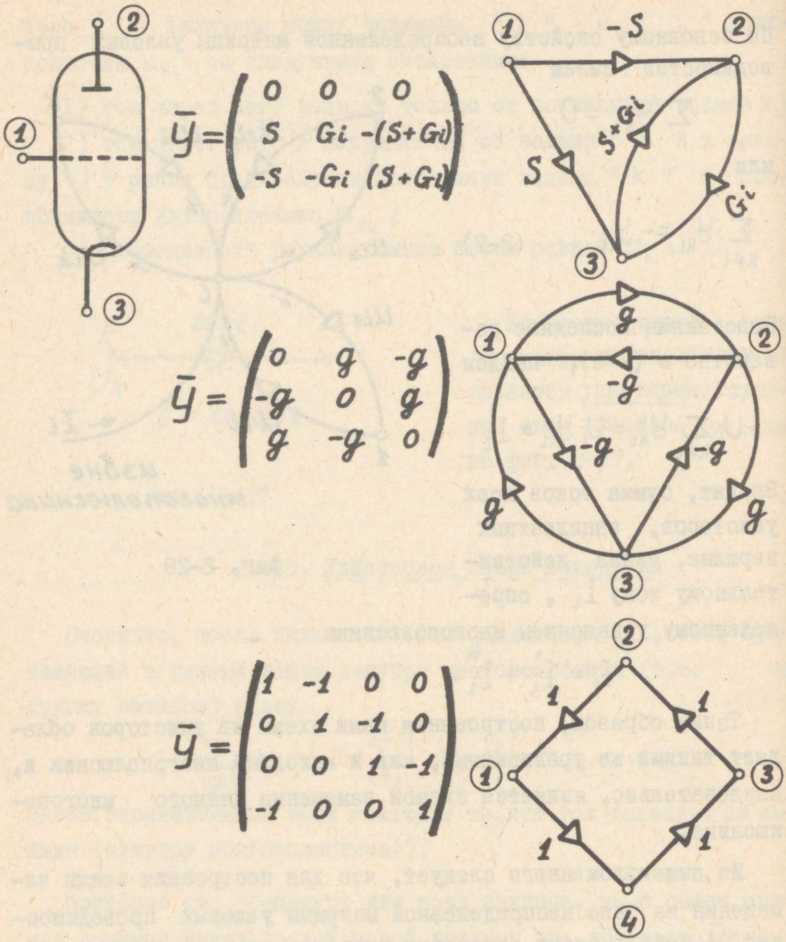
$$I_i = I_i' + I_i''.$$

Таким образом, построенная нами схема из унисторов обладает такими же уравнениями, как и исходный многополюсник и, следовательно, является схемой замещения данного многополюсника.

Из вышеизложенного следует, что для построения схемы замещения на базе неопределенной матрицы узловых проводимостей $\bar{Y}$ надо в схему замещения включить унисторы с проводимостями

$$u_{ik} = -y_{ki} \quad (i \neq k). \qquad (2\text{-}8)$$

При этом собственные проводимости оказываются лишними, что вполне естественно, так как они линейно зависят от взаимных проводимостей (2-7).



Фиг. 2-29

На фиг. 2-29 приведены некоторые примеры составления схем замещения. Отметим, что унисторы, проводимости которых равны нулю, не указаны на схеме, так как ток через них всегда равен нулю.

2.4.4. Условие физической возможности

Выводим условие физической возможности применительно к унисторным схемам. Для матрицы Y это условие было записано следующим образом:

$$\sum_i y_{ik} = 0,$$

$$\sum_k y_{ik} = 0.$$

Первое равенство заведомо выполняется, так как мы построили схему замещения, имея в виду это равенство. Второе равенство можно преобразовать

$$\sum_k y_{ik} = y_{ii} + \sum_{k \neq i} y_{ik} = \sum_{k \neq i} u_{ik} + \sum_{k \neq i} (-u_{ki}) = 0$$

или

$$\sum_{k \neq i} u_{ik} = \sum_{k \neq i} u_{ki}.$$

Значит, условие физической возможности гласит так: сумма проводимостей унисторов, входящих в определенный зажим, должна равняться сумме проводимостей всех унисторов, выходящих из этого зажима.

Все схемы на фиг. 2-29 представляют собой примеры возможных сетей. Надо иметь в виду, что единичный унистор не представляет возможной сети: для него не выполняется условие возможности. Это видно также из его неопределенной матрицы, имеющей вид:

$$Y = \begin{Vmatrix} u & 0 \\ -u & 0 \end{Vmatrix}.$$

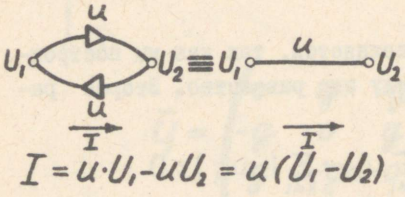
2.4.5. Обратимые цепи

Возникает вопрос: не упрощаются ли схемы замещения обратимых многополюсников ввиду соотношения $y_{ik} = y_{ki}$. Очевидно, например, что схемой замещения сети, составленной из обычных, обратимых двухполюсников, является сама эта сеть.

Действительно, в случае обратимого многополюсника между каждыми двумя зажимами схемы замещения имеем два противоположно направленных унистора с проводимостями:

$$u_{ik} = u_{ki} = -y_{ik} = -y_{ki}.$$

Рассмотрим, как связаны ток и потенциалы такого двухполюсника (фиг. 2-30): $I = u \cdot U_1 - u \cdot U_2 = u(U_1 - U_2)$.

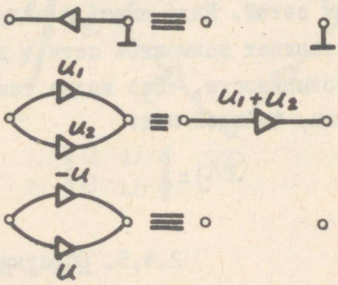


Фиг. 2-30

Это есть уравнение обычного обратимого двухполюсника с проводимостью u. Следовательно, в случае обратимого многополюсника мы должны включить в схему замещения между зажимами i и k проводимость, равную $-y_{ik}$ (или $-y_{ik}$): $y_{ik} = -y_{ik}$ $(i \neq k)$.

Можно также заменить в унисторной схеме замещения подобные комплекты на обратимые двухполюсники.

Некоторые другие тождественные преобразования унисторных схем представлены на фиг. 2-31.



Фиг. 2-31

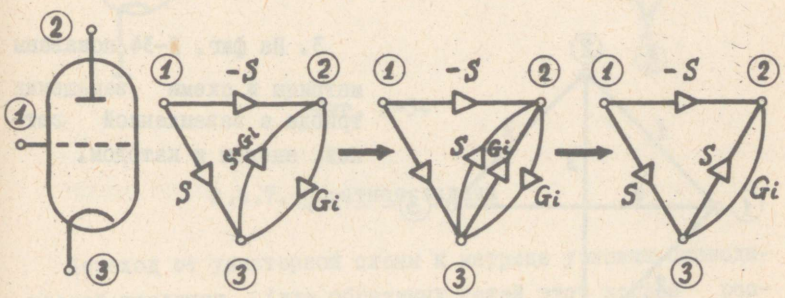
2.4.6. Определенная матрица

Построение схемы замещения по определенной матрице узловых проводимостей также не представляет трудностей. Первый способ – переход к неопределенной матрице и затем к схеме замещения – не требует разъяснений. Но можно обойтись и без такого перехода.

Если мы реализуем все взаимные проводимости определенной матрицы схемы, то в схеме отсутствуют унисторы, инцидентные базисному зажиму. Поэтому собственные проводимости в схеме не равны соответствующим в матрице. Для устранения этого несоответствия необходимо от каждого зажима в базисный включить унистор, направленный к базисному зажиму, с такой проводимостью, чтобы собственная проводимость зажима равнялась требуемой. Величина этой проводимости должна равняться (номер базы – 0):

$$u_{i0} = y_{ii} - \sum_{k \neq 0} u_{ik} = y_{ii} - \sum_{k \neq i} (-y_{ki}) = \sum_{k} y_{ki},$$

т.е. сумме проводимостей в соответствующем столбце матрицы.



Фиг. 2-32

Конечно, в построенной таким образом на базе определенной матрицы Y схеме замещения отсутствуют унисторы, на-

правленные от базисного зажима, что вполне закономерно, так как они эквивалентны разомкнутым двухполюсникам (база заземлена!). Эти унисторы можно всегда добавить, требуя удовлетворения условиям физической осуществимости.

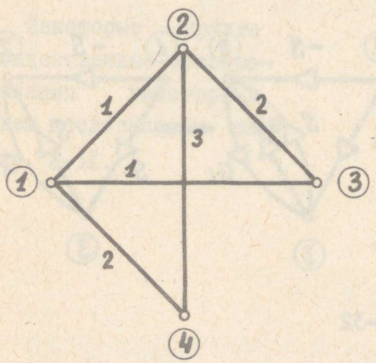
Рассмотрим далее некоторые примеры.

I. Преобразуем схему замещения вакуумного триода (фиг. 2-32).

2. Построим схему замещения для обратимого многополюсника с матрицей:

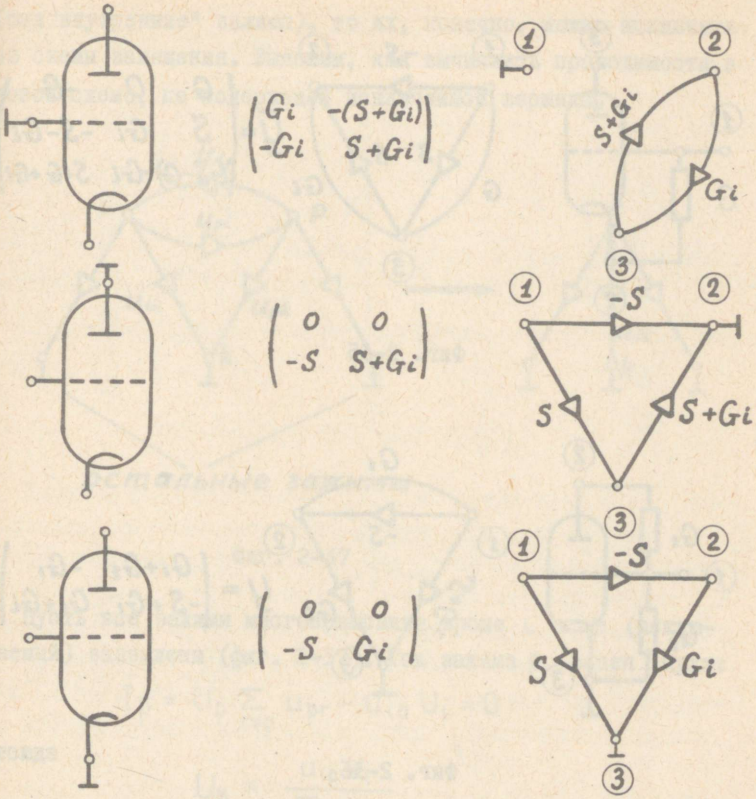
$$Y = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 6 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

Схема дана на фиг. 2-33.



Фиг. 2-33

3. На фиг. 2-34 показаны матрицы и схемы замещения триода с заземленной сеткой, анодом и катодом.



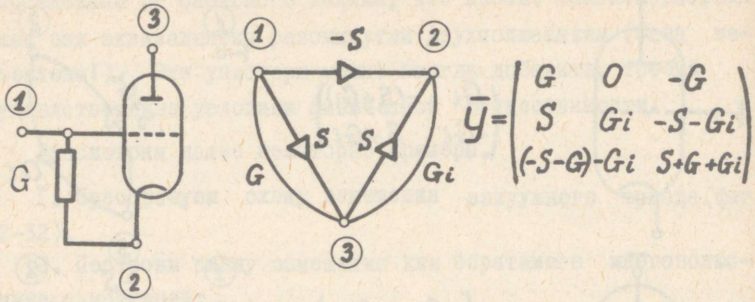
Фиг. 2-34

2.4.7. Обратная задача

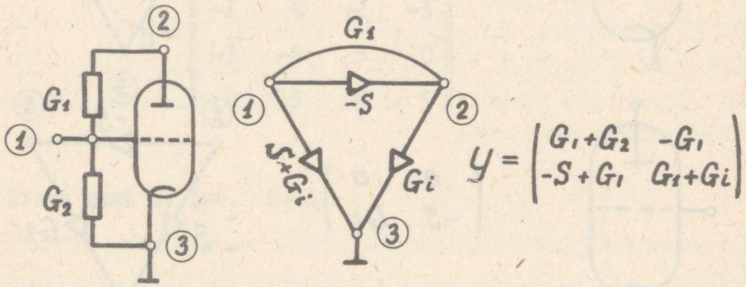
Переход от унисторной схемы к матрице узловых проводимостей несложен (для обратимых сетей этот вопрос рассматривался уже в § 2.2). Из (2-7) и (2-8) найдем:

$$y_{ik} = -u_{ki}\ ,\quad i \neq k\ ,$$

$$y_{ii} = \sum_{k=i} u_{ik}\ .$$



Фиг. 2-35



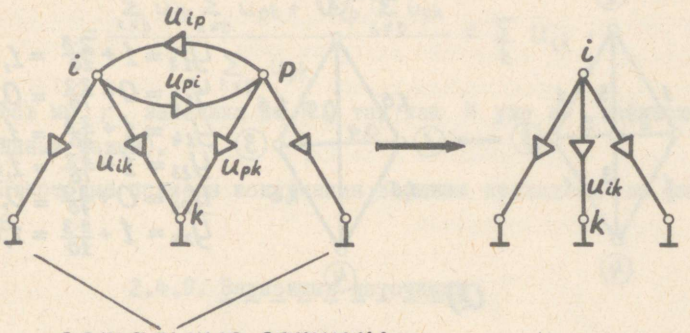
Фиг. 2-36

В качестве примера на фиг. 2-35 составлена матрица $\bar{y}$ для схемы, состоящей из лампы и одного резистора, а на фиг. 2-36 матрица y для схемы с одной лампой и двумя резисторами.

2.4.8. Исключение зажима

Рассмотрим теперь один метод упрощения схем замещения. Если некоторые зажимы многополюсника являются несущественными в том смысле, что к ним не будем подключать других многополюсников, т.е. их токи тождественно равны нулю

(они "внутренние" зажимы), то их, конечно, можно исключить из схемы замещения. Выясним, как вычислить проводимости в новой схеме, не содержащей исключенной вершины.



Фиг. 2-37

Пусть все зажимы многополюсника кроме i и p (исключаемый) заземлены (фиг. 2-37). Ток зажима p равен нулю:

$$I_p = U_p \sum_{r \neq p} u_{pr} - u_{ip} U_i = 0 .$$

Отсюда

$$U_p = \frac{u_{ip} U_i}{\sum_{r \neq p} u_{pr}} .$$

Ток зажима k :

$$I_k = -u_{ik} U_i - u_{pk} U_p =$$
$$= -\left(u_{ik} U_i + \frac{u_{ip} u_{pk} U_i}{\sum_{r \neq p} u_{pr}} \right) = -\left(u_{ik} + \frac{u_{ip} u_{pk}}{\sum_{r \neq p} u_{pr}} \right) U_i .$$

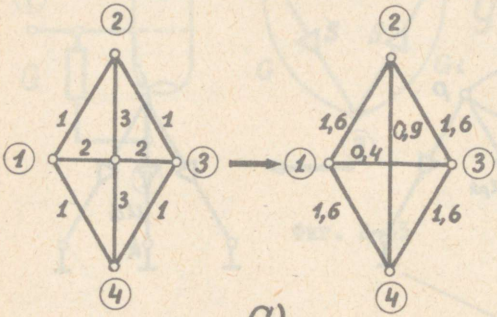
Ток зажима должен быть одинаков как в первоначальной, так и в преобразованной схеме:

$$I_k = -u'_{ik} U_i ,$$

откуда формула перехода

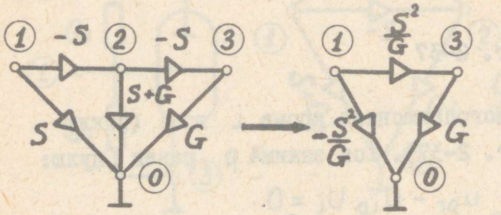
$$u'_{ik} = u_{ik} + \frac{u_{ip} u_{pk}}{\sum_{r} u_{pr}} ,$$

где штрихом обозначена проводимость унистора в преобразованной схеме.



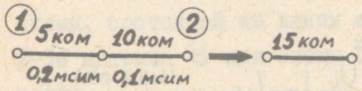
$$Y_{12} = 1 + \frac{2\cdot3}{10} = 1{,}6$$
$$Y_{13} = 0 + \frac{2\cdot2}{10} = 0{,}4$$
$$Y_{14} = 1 + \frac{2\cdot3}{10} = 1{,}6$$
$$Y_{23} = 1 + \frac{3\cdot2}{10} = 1{,}6$$
$$Y_{24} = 0 + \frac{3\cdot3}{10} = 0{,}9$$
$$Y_{34} = 1 + \frac{2\cdot3}{10} = 1{,}6$$

а)



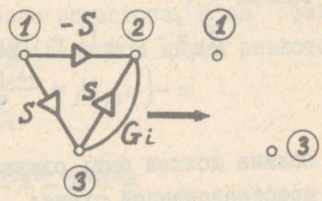
$$U_{13} = 0 + \frac{S^2}{G} = \frac{S^2}{G}$$
$$U_{31} = 0 + \frac{0^2}{G} = 0$$
$$U_{10} = S + \frac{(-S)(S+G)}{G} = -\frac{S^2}{G}$$
$$U_{30} = G + \frac{0\cdot(S+G)}{G} = G$$

в)



$$0 + \frac{0{,}2\cdot0{,}1}{0{,}2+0{,}1} = \frac{1}{15}\ \text{мсим}$$

с)



d)

Фиг. 2-38

Интересно проверить, не меняются ли собственные проводимости (чего, конечно, не может быть):

$$\sum_k u'_{ik} = \sum_{k\neq p}\left(u_{ik} + \frac{u_{ip}u_{pk}}{\sum_{k\neq p} u_{pk}}\right) =$$

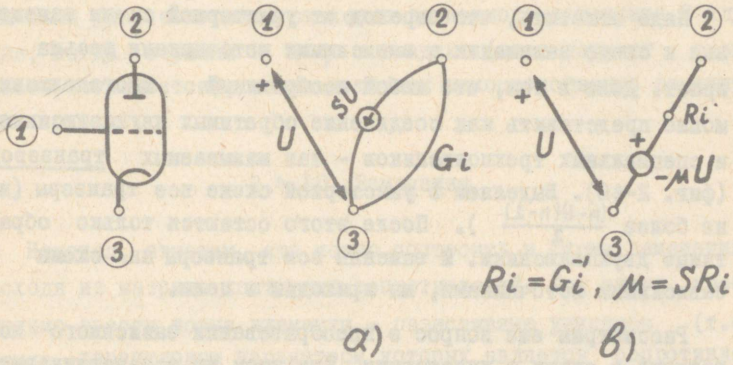
$$= \frac{\sum_{k\neq p} u_{ik}\sum_{k\neq p} u_{pk} + u_{ip}\sum_{k\neq p} u_{pk}}{\sum_{k\neq p} u_{pk}} = \sum_k u_{ik}\,.$$

(Здесь мы r заменили на k, так как k уже не зафиксированный зажим).

Некоторые примеры исключения вершины приведены на фиг. 2-38.

2.4.9. Зависимые источники

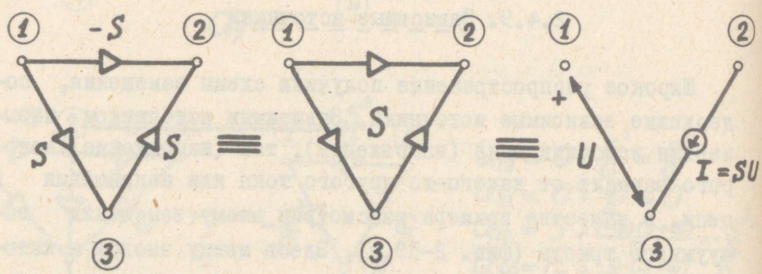
Широкое распространение получили схемы замещения, содержащие зависимые источники. Зависимым источником называется источник тока (напряжения), ток (напряжение) которого зависит от какого-то другого тока или напряжения в цепи. В качестве примера рассмотрим схему замещения вакуумного триода (фиг. 2-39,а). Здесь между анодом и катодом включен зависимый источник тока, причем ток последнего пропорционален напряжению сетки относительно катода.



Фиг. 2-39

Возможна и другая схема замещения, которая получается из данной после преобразования источника в схему Тевенина (фиг. 2-39, б).

Зависимые источники были введены для того, чтобы оказалось возможным построение эквивалентных схем, содержащих только обратимые двухполюсники. Схема замещения необратимого многополюсника при этом не является единственной, и для каждого прибора разработано несколько таких схем. В то же время не существует общего и достаточно простого метода построения "хорошей" эквивалентной схемы из матрицы многополюсника.

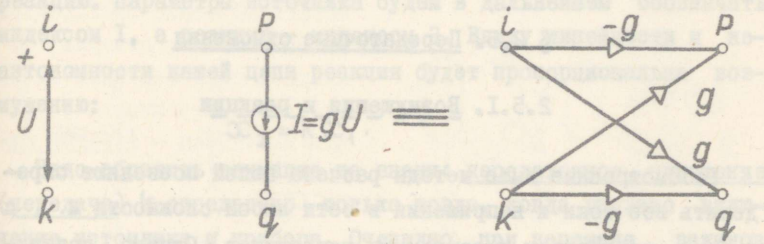


Фиг. 2-40

Надо отметить, что переход от унисторной схемы замещения к схеме замещения с зависимыми источниками весьма прост. Дело в том, что любой необратимый многополюсник можно представить как соединение обратимых двухполюсников и специальных трехполюсников - так называемых транзоров (фиг. 2-40). Выделяем в унисторной схеме все транзоры (их не более $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$). После этого остаются только обратимые двухполюсники. И заменяя все транзоры на схемы с зависимыми источниками, мы приходим к цели.

Рассмотрим еще вопрос о преобразовании зависимого источника в схему с унисторами. При этом мы останавливаемся только на случае зависимого источника тока, ток которого

зависит от разности потенциалов каких-то других вершин. Надо отметить, что практически все варианты зависимых источников могут быть приведены именно к такому представлению. Если это не так, то не существует также матрицы узловых проводимостей, следовательно, и унисторной схемы замещения.



$$I_P = gU = g(U_i - U_k) = gU_i + (-g)U_k$$
$$I_q = -gU = -g(U_i - U_k) = (-g)U_i + gU_k$$

Фиг. 2-41

Решение данной проблемы представлено на фиг. 2-41. Мы здесь просто включили в схему унисторы таким образом, чтобы были удовлетворены уравнения зависимого источника. В случае, когда вершины k и q совпадают (этот вариант очень часто встречается), можно источник непосредственно заменить на транзор.

2.4.10. Замечания

Наконец, отметим, что можно построить и схемы замещения, исходя из матрицы контурных сопротивлений. Для этого необходимо ввести новые элементы - резистивные унисторы (т.е. такие, характерным параметром которых является сопротивление). Но этого случая мы рассматривать не будем.

Что касается целесообразности применения тех или других схем замещения, то этот вопрос мы обсудим в последующих параграфах. Можно только отметить, что разработанные к настоящему времени методы расчета цепей (особенно новейшие) сильно уменьшают важность схем замещения на зависимых источниках.

§ 2.5. Передаточные отношения

2.5.I. Возмущения и реакции

Рассмотренные выше методы расчета цепей позволяют определить все токи и напряжения в сети любой сложности и с любым количеством независимых источников. Однако практически нас интересуют главным образом такие ситуации: дана неавтономная цепь, к которой подключается какой-то источник, и требуется определить реакцию, т.е. ток или напряжение в желаемом месте цепи. Разработаны методы, пригодные для любой подобной задачи теории линейных цепей. При этом исходят из основных свойств линейных цепей, заключающихся в том, что I) каждую реакцию можно найти отдельно, и 2) реакции на разные возмущения (т.е. действия различных источников) просто складываются. Последнее утверждение можно рассматривать как другое определение линейной цепи: если мы имеем несколько возмущений x_1, x_2, ... x_n и отдельные реакции на эти возмущения (при условии, что остальные возмущения равны нулю) соответственно равны y_1, y_2, ... y_n, то цепь называем линейной, если суммарная реакция является суммой этих реакций. Конечно, возмущениями и реакциями могут быть и токи, и напряжения.

В данном параграфе будут определены важные понятия, которые необходимы для решения вышепоставленной задачи: определение реакции на единственное возмущение. Будем также рассматривать классические методы решения данной проблемы, основанные на матричном исчислении.

2.5.2. Передаточные отношения

Модель для поставленной задачи, очевидно, такая: в цепи имеется идеальный источник тока или напряжения (реальный источник надо представить схемой Тевенина или Нортона) и измерительный прибор (амперметр или вольтметр), фиксирующий реакцию. Параметры источника будем в дальнейшем обозначать индексом I, а реакцию – индексом 2. Ввиду линейности и неавтономности нашей цепи реакция будет пропорциональна возмущению:

$$x_2 = k x_1 .$$

Надо обратить внимание на знаки: передаточное отношение (передача) k определено только тогда, когда указано включение источника и прибора. Очевидно, при перемене зажимов источника или прибора меняется знак передачи.



Фиг. 2-42

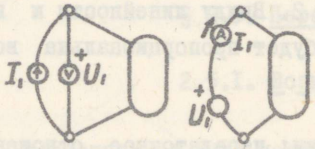
Вообще имеется четыре возможных ситуации (фиг. 2-42):

	вход возмущение	выход реакция	зависимость
I	напряжение	напряжение	$U_2 = T_U U_1$
2	напряжение	ток	$I_2 = Y U_1$
3	ток	напряжение	$U_2 = Z I_1$
4	ток	ток	$I_2 = T_I I_1$

Здесь коэффициенты пропорциональности соответственно обозначены:

T_I – коэффициент передачи по току;
T_U – коэффициент передачи по напряжению;
Z – передаточное сопротивление;
Y – передаточная проводимость.

Целесообразно отдельно еще выделить случаи, когда источник и измерительный прибор имеют только два общих зажима с остальной цепью (фиг.2-43). В этом случае говорят о входном сопротивлении и о входной проводимости (с общим названием – входной иммитанс):



Фиг. 2-43

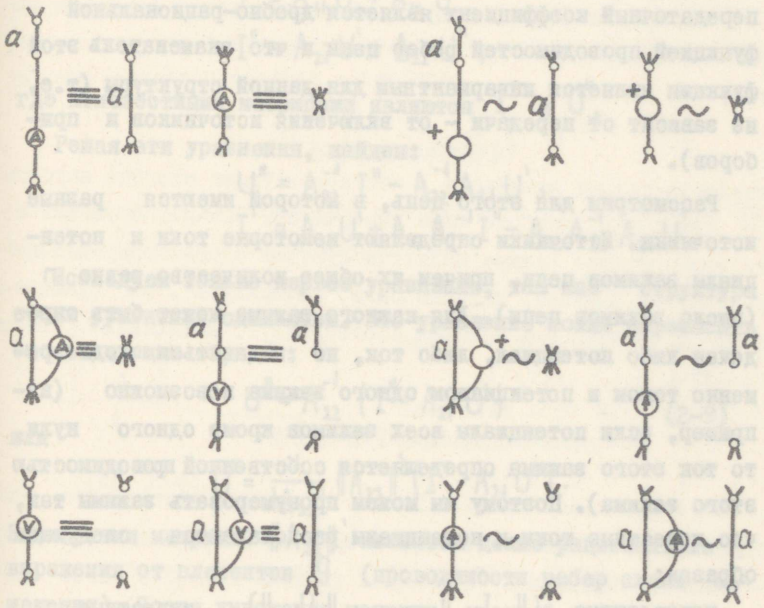
$$Z_{en} = \frac{U_1}{I_1}, \quad Y_{en} = \frac{I_1}{U_1}.$$

2.5.3. Влияние приборов и источников

Рассмотрим теперь, как влияют источники и измерительные приборы на структуру цепи. В отношении к измерительным приборам вопрос несложный: сопротивление амперметра равно нулю, – значит, его клеммы закорочены; вольтметр имеет нулевую проводимость, – значит, его можно не указывать. Это вполне понятно, так как приборы мы изображаем на схеме только для того, чтобы указать те величины, которые нас интересуют. Это можно показать, конечно, и другими способами, но изложенный метод явно указывает на возможные экспериментальные схемы. Некоторые примеры приведены на фиг. 2-44.

Аналогичное положение имеется для источников: зажимы источника напряжения относительно структуры цепи закорочены, а источник тока не влияет на структуру цепи. Это можно объяснить тем, что внутренняя проводимость источника тока и внутреннее сопротивление источника напряжения равны нулю. К это-

му выводу можно прийти и другим путем: ввиду линейности цепи никакие ее свойства не могут зависеть от напряжений и токов в цепи, поэтому мы можем считать, что параметры источника равны нулю. Но тогда разность потенциалов зажимов источника напряжения равна нулю (т.е. это один и тот же зажим), а ток через ребро источника тока равен нулю (т.е. это ребро не влияет на процессы в цепи).



Фиг. 2-44

Фиг. 2-45

Примеры приведены на фиг. 2-45. Надо иметь в виду, что в отличие от предыдущего случая здесь имеем дело с эквивалентностью с точки зрения структурных свойств цепи, а не с тождествами.

2.5.4. Основные уравнения

Назовем в дальнейшем граф и матрицы цепи, полученные исключением источников по выше приведенным правилам, истинными.

Переходим теперь к исследованию нашей основной задачи. Сначала докажем, что в цепи данной структуры любой передаточный коэффициент является дробно-рациональной функцией проводимостей ребер цепи и что знаменатель этой функции является инвариантным для данной структуры (т.е. не зависит от передачи - от включения источников и приборов).

Рассмотрим для этого цепь, в которой имеются разные источники. Источники определяют некоторые токи и потенциалы зажимов цепи, причем их общее количество равно n (число зажимов цепи). Для каждого зажима может быть определен либо потенциал, либо ток, но задаваться одновременно током и потенциалом одного зажима невозможно (например, если потенциалы всех зажимов кроме одного нули, то ток этого зажима определяется собственной проводимостью этого зажима). Поэтому мы можем пронумеровать зажимы так, что известные токи и потенциалы располагаются следующим образом:

неизвестные токи	$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_k \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_k \end{Vmatrix}$	известные потенциалы
известные токи	$\begin{Vmatrix} I_{k+1} \\ \dots \\ I_n \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} U_{k+1} \\ \dots \\ U_n \end{Vmatrix}$	неизвестные потенциалы

Составим теперь узловое уравнение, разлагая матрицы I и U на две части и $\bar{y}$ на четыре клетки

$$\begin{matrix} I' \\ I'' \end{matrix}\left\{\left\|\begin{matrix} I_1 \\ \dots \\ I_k \\ \hline I_{k+1} \\ \dots \\ I_n \end{matrix}\right\|\right. = \left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} U_1 \\ \dots \\ U_k \\ \hline U_{k+1} \\ \dots \\ U_n \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \} U' \\ \} U'' \end{matrix}.$$

Очевидно, одно матричное уравнение можно заменить двумя уравнениями

$$I' = A_{11} U' + A_{12} U''$$

$$I'' = A_{21} U' + A_{22} U'',$$

где неизвестными матрицами являются I' и U''.

Решая эти уравнения, найдем:

$$U'' = A_{22}^{-1} I'' - A_{22}^{-1} A_{21} U',$$

$$I' = A_{11} U' + A_{12} A_{22}^{-1} I'' - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} U'.$$

Исследуем только первое уравнение, так как структура обоих уравнений одинакова. Это уравнение можно переписать еще следующим образом:

$$U'' = A_{22}^{-1} (I'' - A_{21} U') \qquad (2\text{-}9)$$

или

$$U'' = \frac{1}{|A_{22}|} \|A_{22}\|' (I'' - A_{21} U').$$

Элементами матрицы $\|A_{22}\|'$ являются целые рациональные выражения от элементов $\bar{y}$ (проводимости ребер схемы замещения). После умножения матрицы, стоящей в скобках на $\|A_{22}\|'$ слева, мы получим матрицу, в которой коэффициенты при известных токах и напряжениях (элементах I'' и U') - целые рациональные выражения от элементов $\bar{y}$. Все эти коэффициенты затем надо разделить на $|A_{22}|$, т.е. на целое рациональное выражение. Таким образом, все коэффициенты передачи действительно являются дробно-рациональными функциями от проводимостей цепи (элементов $\bar{y}$ или проводимостей ребер схемы замещения) с одним и тем же знаменателем (аналогично для I' найдем

$$I' = \frac{1}{A_{22}}\left[(|A_{22}|A_{11} - A_{12}\|A_{22}\|^{-1}A_{21}|)U' + A_{12}\|A_{22}\|^{-1}I''\right]$$

с такими же выводами). При этом матрица A_{22} получается из $\bar{Y}$ вычеркиванием строк и столбцов с номерами зажимов, потенциалы которых известны. Из этого следует, что A_{22} является определенной матрицей узловых проводимостей цепи, полученной путем заземления всех зажимов, потенциалы которых известны (т.е. истинной матрицей). Действительно, если образовать из A_{22} неопределенную матрицу прибавлением одной строки и одного столбца, то в этой новой неопределенной матрице элемент

$$Y'_{ii} = -\sum_{j=K+1}^{n} Y_{ji} = \sum_{1}^{K} Y_{ji}$$

является суммой элементов в соответствующем столбце матрицы $\bar{Y}$ тех строк, которые были вычеркнуты. Значит, проводимости этого нового зажима являются суммами соответствующих проводимостей зажимов, которые были "вычеркнуты". Но суммирование проводимостей зажимов соответствует замыканию этих зажимов.

2.5.5. Определитель сети

Перейдем к основному случаю - наличию единственного источника. Выбираем в качестве базы один из зажимов источника - этим мы задаем его потенциал (равный нулю), а после вычеркивания соответствующих строки и столбца получим определенную матрицу цепи. Если источником является источник тока, то все остальные потенциалы неизвестны, и полученная определенная матрица равна A_{22}. Если источником является источник напряжения, то его зажимы надо заземлить, т.е. закоротить. Следовательно, в обоих случаях придем к истинной определенной матрице цепи. Его определитель и был инвариантом, который мы искали. Но определители любых определенных матриц (алгебраические дополнения любого элемента неопределенной матрицы) равны (см. приложение П.I.I4). Следо-

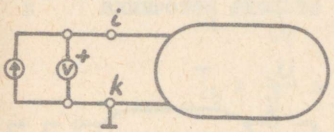
вательно, эта величина действительно является инвариантом данной цепи, называемой определителем цепи (обозначаем через Δ). Итак, определитель цепи Δ – это определитель истинной определенной матрицы узловых проводимостей цепи. Определитель цепи имеет размерность $[\text{сим}^{(n-1)}]$, так как в каждый его член входит произведение $(n-1)$ проводимостей.

Числитель коэффициента передачи, конечно, зависит от расположения источника и измерительного прибора и поэтому выражается через элементы матрицы, в которой отдельно учтены оба зажима источника и прибора.

2.5.6. Входной иммитанс

Найдем сначала выражение для входного сопротивления. Из уравнения (2-9) находим (фиг. 2-46):

$$U'' = Y^{-1} I'',$$



Фиг. 2-46

где Y – истинная матрица (т.е. A_{11} в (2-9)). Если токи всех зажимов кроме i-го равны нулю, то

$$U_i = \frac{\Delta_{ii}}{|Y|} I_i,$$

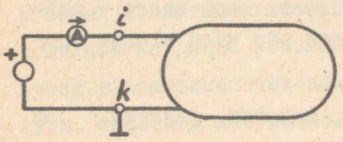
где Δ_{ii} – адъюнкта (равная минору) элемента Y_{ii} матрицы Y. Входное сопротивление, следовательно, равно

$$Z_{11} = \frac{\Delta_{ii}}{|Y|}.$$

Но, с другой стороны, минор Δ_{ii} равен определителю матрицы, которая получается из Y вычеркиванием i-х строки и столбца, т.е. определителю цепи с заземленным зажимом i.

В зависимости от того, имеется ли на входе и выходе короткое замыкание или холостой ход, получим четыре разных определителя. Обозначаем эти определители через $\Delta_{\alpha\beta}$, где $\alpha, \beta = 0;1$, α указывает положение на входе, β – на выходе и число "0" соответствует холостому ходу, а "1" – короткому замыканию.

С помощью этих обозначений входное сопротивление записывается следующим образом:



Фиг. 2-47

$$Z_{11} = \frac{\Delta_{1p}}{\Delta_{0p}}.$$

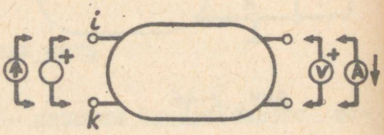
Входная проводимость, очевидно, равна (фиг. 2-47)

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{0p}}{\Delta_{1p}}.$$

2.5.7. Инвариантность числителя

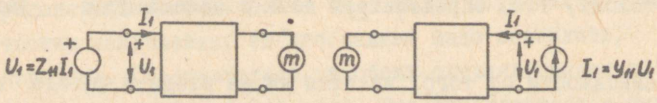
Перед тем как перейти к выводу общего выражения для числителя, докажем следующее утверждение: числитель зависит лишь от того, куда подключены источник и прибор, и от полярности последних и не зависит от рода источника и прибора.

Обозначим зажимы, как показано на фиг. 2-48, и будем рассматривать замену источников и приборов и соотношения между соответствующими передачами.



Фиг. 2-48

Во-первых, рассмотрим замену источника тока на источник напряжения или, наоборот, с сохранением напряжений и токов в цепи. Очевидно, параметры источников при этом связаны следующим образом (фиг. 2-49):



Фиг. 2-49

$$U_1 = \frac{\Delta_{1p}}{\Delta_{0p}} I_1, \qquad (2\text{-}10)$$

$$I_1 = \frac{\Delta_{0p}}{\Delta_{1p}} U_1 . \qquad (2\text{-}11)$$

Передачи в схемах а и б следующие (M-реакция):

$$T_a = \frac{M}{U_1} = \frac{N_a}{\Delta_{1p}} ,$$

$$T_b = \frac{M}{I_1} = \frac{N_b}{\Delta_{0p}} ,$$

так как реакция в обоих случаях одна и та же. Из (2-10) и (2-11) получим

$$N_a = \Delta_{1p} \frac{M}{U_1} ,$$

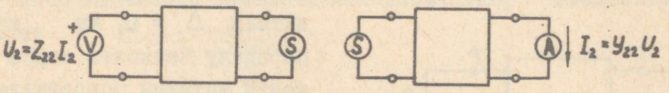
$$N_b = \Delta_{0p} \frac{M}{I_1} = \frac{\Delta_{0p} \Delta_{1p} M}{\Delta_{0p} U_1} = \Delta_{1p} \frac{M}{U_1} = N_a .$$

Следовательно, числитель передачи не зависит от рода источника:

$$T_a = \frac{M}{U_1} = \frac{N}{\Delta_{1p}} ,$$

$$T_b = \frac{M}{I_1} = \frac{N}{\Delta_{0p}} .$$

Далее рассмотрим замену приборов. Со стороны выхода наша цепь представляет собой автономный двухполюсник. Напряжение холостого хода мы можем измерить, подключив к выходу вольтметр, и ток короткого замыкания – с помощью амперметра (фиг. 2-50).



Фиг. 2-50

Эти величины связаны между собой внутренним сопротивлением (проводимостью), которое в данном случае, очевидно, равно выходному сопротивлению Z_{22} (y_{22}):

$$Z_{22} = \frac{\Delta_{\alpha 1}}{\Delta_{\alpha 0}},$$

$$Y_{22} = \frac{\Delta_{\alpha 0}}{\Delta_{\alpha 1}},$$

$$U_2 = \frac{\Delta_{\alpha 1}}{\Delta_{\alpha 0}} I_1, \qquad (2\text{-}12)$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{\alpha 0}}{\Delta_{\alpha 1}} U_2.$$

Передачи в схемах a и b равны ($\mathcal{G}$ – возмущение):

$$T_a = \frac{U_2}{\mathcal{G}} = \frac{N_a}{\Delta_{\alpha 0}},$$

$$T_b = \frac{I_2}{\mathcal{G}} = \frac{N_b}{\Delta_{\alpha 1}}. \qquad (2\text{-}13)$$

Из (2-12) и (2-13) найдем:

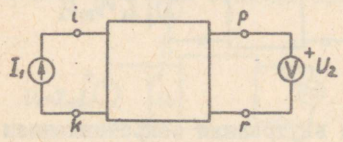
$$N_a = \Delta_{\alpha 0} \frac{U_2}{\mathcal{G}},$$

$$N_b = \Delta_{\alpha 1} \frac{I_1}{\mathcal{G}} = \frac{\Delta_{\alpha 1} \Delta_{\alpha 0} \cdot U_1}{\Delta_{\alpha 1} \mathcal{G}} = \Delta_{\alpha 0} \frac{U_2}{\mathcal{G}} = N_a.$$

Числитель не меняется и при замене приборов. Наше утверждение доказано.

2.5.8. Числитель

Инвариантность числителя позволяет нам рассматривать лишь одну передачу. Для нас наиболее удобно исходить из передаточного сопротивления (фиг. 2-51). Предполагая, что определитель $\Delta \neq 0$, мы можем передачу записать через элементы матрицы сопротивлений:



Фиг. 2-51

$$Z = \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_{pk} - U_{rk}}{I_1} =$$

$$= \frac{U_{pk}}{I_i} - \frac{U_{rk}}{I_i} = Z_{pi} - Z_{ri}$$

(при заземленном зажиме "k").

Выражая Z_{pi} и Z_{ri} через адъюнкты матрицы проводимостей $\bar{Y}$, получим

$$Z = \frac{\Delta_{ip}}{\Delta} - \frac{\Delta_{ir}}{\Delta}$$

или через двойные адъюнкты матрицы $\bar{Y}$

$$Z = \frac{1}{\Delta}\left(\bar{Y}_{kk,ip} - \bar{Y}_{kk,ir}\right),$$

так как заземлен зажим k. Выражение в скобках представляет собой числитель передачи. Преобразуем его (см. приложение П.I.I4):

$$\bar{Y}_{kk,ip} - \bar{Y}_{kk,ir} = \bar{Y}_{ip,kk} - \bar{Y}_{ir,kk} =$$
$$= \bar{Y}_{ip,kk} + \bar{Y}_{ik,kr} = -\bar{Y}_{ir,kp} = \bar{Y}_{ip,kr}.$$

Итак, числитель передачи N представляет собой двойное алгебраическое дополнение $\bar{Y}_{ip,kr}$, т.е. минор, полученный из $\bar{Y}$ зачеркиванием i-ой и k-ой строк и p-го и r-го столбцов, умноженный на $(-1)^{i+p+k'+r'}$; здесь k' и r' представляют собой номера k-ой строки и r-го столбца после зачеркивания строки i и столбца p.

Практически знак удобнее определить следующим образом: преобразовать адъюнкту к виду $i \leqslant k$, $p \leqslant r$; тогда знак будет $(-1)^{i+p+k+r}$.

2.5.9. Общая формула передачи

Общее выражение передачи линейной цепи, следовательно, такое:

$$T = \frac{\bar{Y}_{ip,kr}}{\Delta},$$

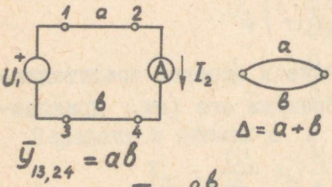
где $\bar{Y}_{ip,kr}$ – двойная адъюнкта матрицы $\bar{Y}$;
Δ – определитель истинной определенной матрицы.

Формула будет справедлива для любых передач, включая и входные иммитансы. Разъясняем применение этой формулы некоторыми примерами.

2.5.10. Примеры

П р и м е р I. Цепь показана на фиг. 2-52. Истинная неопределенная матрица

$$\left\| \begin{matrix} a+b & -a-b \\ -a-b & a+b \end{matrix} \right\| ,$$



Фиг. 2-52

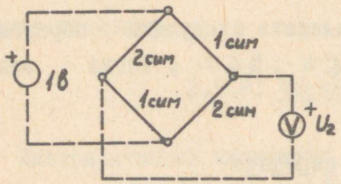
откуда $\Delta = a+b$. Числитель найдем из неопределенной матрицы

$$\bar{y} = \left\| \begin{matrix} a & 0 & -a & 0 \\ 0 & b & 0 & -b \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \end{matrix} \right\| ,$$

откуда $\bar{y}_{13,24} = (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} = ab$ (так как $1 < 2$, $3 < 4$). Передача:

$$T = \frac{I_2}{U_1} = \frac{ab}{a+b} .$$

П р и м е р 2. (фиг. 2-53). Неопределенная матрица



Фиг.2-53

$$\bar{y} = \left\| \begin{matrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\| .$$

Истинную неопределенную матрицу можно получить, прибавляя к 1-й строке и 1-му столбцу соответственно 4-ю строку и 4-й столбец с последующим вычеркиванием последних:

$$\left\| \begin{matrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\| \rightarrow \left\| \begin{matrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\| \rightarrow \left\| \begin{matrix} 6 & -3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\| \rightarrow \left\| \begin{matrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| .$$

Отсюда получим определитель сети как адъюнкту любого элемента $\Delta = 9$.

Числитель найдем из $\bar{Y}$:

$$\bar{Y}_{13,42} = -\bar{Y}_{12,43} = (-1)\,(-1)^{1+2+4+3}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Передача

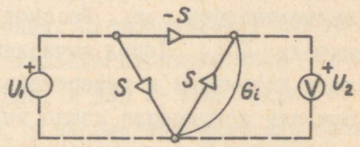
$$T = \frac{\bar{Y}_{13,42}}{\Delta} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

и напряжение U_2 :

$$U_2 = TU_1 = -\frac{1}{3}\ [в].$$

П р и м е р 3. (фиг. 2-54). Неопределенная матрица

$$\bar{Y} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -S-G_i \\ -S & -G_i & S+G_i \end{Vmatrix},$$



Фиг. 2-54

истинная матрица

$$\begin{Vmatrix} G_i & -G_i \\ -G_i & G_i \end{Vmatrix},$$

откуда $\Delta = G_i$. Числитель

$$\bar{Y}_{12,33} = (-1)^{1+2+3+3}\cdot S = -S$$

и передача

$$T = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{S}{G_i}.$$

§ 2.6. Топологические формулы передачи

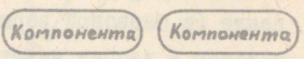
2.6.I. Структура и определитель

В настоящем параграфе мы рассмотрим топологические формулы и правила для вычисления передачи. Эти правила используют топологические свойства сети, и поэтому не требуется построения матриц. Это обстоятельство позволяет сократить много времени и вычислений. Кроме того, топологические методы обладают большой наглядностью, что безусловно способствует практическому применению этих методов.

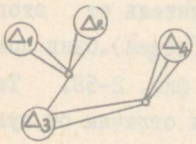
Следуя доказанному в предыдущем параграфе, мы ищем передачу в виде отношения двух рациональных выражений от проводимостей сети. Рассмотрим сначала вычисление определителя Δ. Перед вычислением необходимо исключить из сети источники и измерительные приборы. В данном случае правила исключения можно выразить таким образом: источники напряжения и амперметры замыкаются накоротко, источники тока и вольтметры исключают из сети. Определитель определенной матрицы узловых проводимостей такой сети и является определителем сети Δ.

Устанавливаем некоторые общие соотношения для определителей сетей. Во-первых, рассмотрим несвязную сеть. Как было показано в I.4.7, соответствующим выбором нумерации вершин можно достичь того, что неопределенные матрицы отдельных компонент будут расположены вдоль главной диагонали и что в каждой строке и в каждом столбце расположены только проводимости одной компоненты сети. Определитель такой матрицы равен произведению определителей соответствующих подматриц. Определитель определенной матрицы всей сети равен произведению определителя определенной матрицы одной компоненты (к которой принадлежит база) и определителей неопределенных матриц остальных компонент. Следовательно, если число компонент сети $p \geq 2$ (т.е. несвязный граф), то определитель сети равен нулю (фиг. 2-55).

Во-вторых, рассмотрим случай графа с точками сочленения (граф состоит из нескольких кусков). В этом случае можно вершины пронумеровать таким образом, что во всех строках и столбцах неопределенной матрицы будут расположены проводимости одного лишь куска, кроме строк и столбцов, соответствующих номерам точек (вершин) сочленения. Не ограничивая общности, можем сначала рассматривать только случай наличия одной точки сочленения. Выбирая последнюю базой, получим определенную матрицу, где вдоль главной диагонали расположены определенные матрицы всех кусков графа, полученных расщеплением данной точки сочленения. Следовательно, определитель данной сети равен произведению определителей этих кусков. Это справедливо, конечно, и для кусков графа, если они имеют точки сочленения. В итоге: определитель сети равен произведению определителей ее кусков (фиг. 2-56).

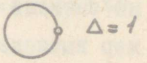


Фиг. 2-55



$\Delta = \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$

Фиг. 2-56



Фиг. 2-57

Наконец, как было установлено в 2.I.I0, петли не оказывают влияния на процессы в сети. Так как петля есть кусок графа, то при умножении определителя петли на определитель сети, последний не должен изменяться; следовательно, определитель петли равняется единице (фиг. 2-57).

2.6.2. Теорема об определителе

Переходим теперь к рассмотрению одной важной теоремы теории графов, которая является основой для методов расчета определителя сети. Прежде всего введем одно дополнитель-

ное понятие, необходимое для сформулирования этой теоремы. Назовем величиной дерева: а) произведение проводимостей всех ребер дерева, если все унисторы дерева направлены к земле (к базисной вершине), и б) нуль, если хоть один унистор в дереве имеет направление от земли. Следует иметь в виду, что введенное понятие имеет смысл только тогда, когда указана базисная вершина (земля). При этом положение унистора (направление к земле или от земли) определено однозначно, так как дерево не имеет циклов.

Теперь можно привести следующую теорему: определитель сети равен сумме величин всех деревьев сети с заданной базисной вершиной. Если обозначить величину дерева "k" через V_k, то эта теорема утверждает, что

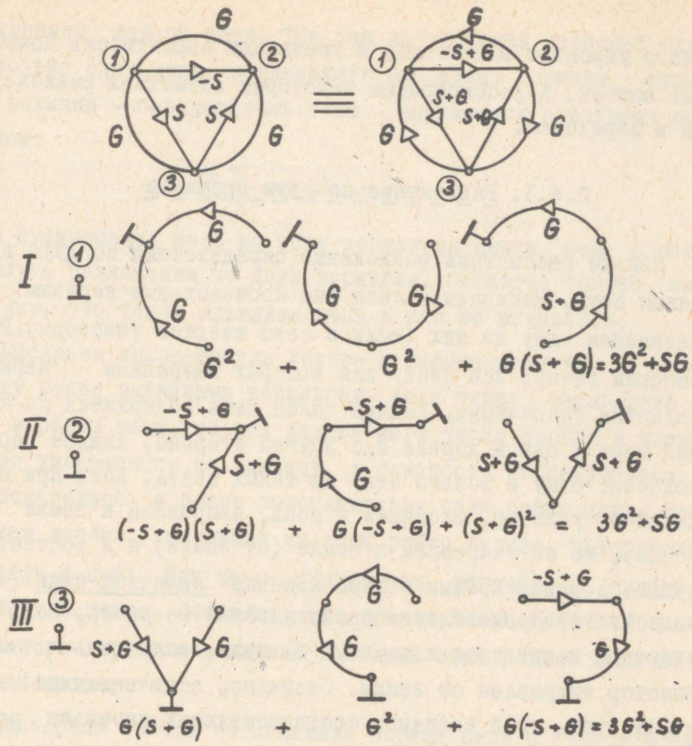
$$\Delta = \sum_k V_k . \qquad (2\text{-}14)$$

Это – формула Максвелла (J.C.Maxwell).

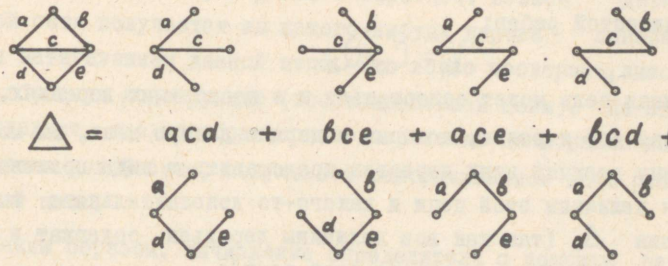
Отметим, что хотя величины отдельных деревьев зависят от того, какая вершина заземлена, определитель от этого не зависит (в случае физически возможных сетей). Один пример вычисления определителей приведен на фиг. 2-58. Там показаны только деревья, величины которых отличны от нуля.

Если в сети имеются двухсторонние проводимости, то вычисление упрощается в том смысле, что не надо учитывать направления, так как один из двух унисторов одинаковой проводимости имеет направление к земле. Очевидно, если все ребра дерева являются двухполюсниками двухсторонней проводимости, то величина дерева равна произведению проводимостей ребер (фиг. 2-59).

Вычисление определителя во формуле (2-14) неудобно ввиду большого количества деревьев (кроме, может быть, простейших сетей). Поэтому обычно пользуются особыми приемами, основанными на разложении определителя, которые на-



Фиг. 2-58



Фиг. 2-59

много упрощают вычисления и уменьшают вероятность появления ошибок. К рассмотрению некоторых возможных разложений мы и переходим.

2.6.3. Разложение по двум вершинам

Первым рассмотрим разложение определителя по двум вершинам сети. Выбираем в сети две произвольные вершины и заземляем одну из них (если в сети имеются унисторы). Рассмотрим теперь все цепи, для которых выбранные вершины являются граничными. Каждая такая цепь содержится по крайней мере в одном дереве и, с другой стороны, каждое дерево содержит одну и только одну из таких цепей. Если при этом какой-то унистор, входящий в цепь, направлен к земле (от земли), то он направлен к земле (от земли) и в соответствующем дереве. Вводим теперь понятие величины цепи (C_k), равной: а) произведению проводимостей ее ребер, если все унисторы направлены к земле, б) нулю, если хоть один унистор направлен от земли. Очевидно, если величина цепи равна нулю, то и величины соответствующих деревьев равны нулю.

Величину любого дерева можно теперь представить в виде произведения величины цепи и произведения остальных проводимостей ребер:

$$V_k = C_k \cdot Q_k .$$

Данная цепь может содержаться и в нескольких деревьях. Собирая все деревья, которые содержат данную цепь, мы можем сумму величин этих деревьев представить в виде произведения величины этой цепи и какого-то дополнительного выражения Δ_k (так как все величины деревьев содержат в качестве множителя величину этой цепи):

$$C_k \Delta_k .$$

Это выражение Δ_k называется адъюнктой (алгебраическим до-

полнением) данной цепи. Так как все деревья содержат одну и только одну цепь, соединяющую выбранные вершины, сумма их величин - определитель сети - выражается следующим образом:

$$\Delta = \sum_k C_k \Delta_k ,$$

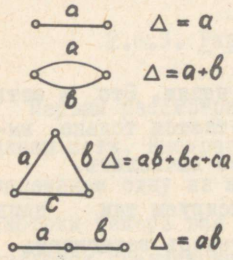
где суммировать надо по всем возможным цепям. Это и есть формула разложения по двум вершинам. Остается только выяснить, что такое адъюнкта цепи и как ее вычислить.

Выбираем какое-нибудь дерево и зафиксируем там цепь между ранее заданными вершинами. Если теперь затягивать все вершины цепи, то при каждом шаге число вершин и число ребер уменьшается на единицу, а связность не нарушается. Следовательно, и после закорачивания всех ребер цепи, остается дерево, состоящее из всех ребер дерева, которые не входили в цепь. При этом сохранялись, конечно, и направления унисторов. Очевидно, что произведение величины полученного дерева и величины исходной цепи равно величине исходного дерева.

Повторяем теперь затягивание вершин цепи с учетом всей сети. В результате получаем новую сеть. Деревья, полученные вышеизложенным методом, являются, очевидно, деревьями полученной сети. Справедливо и обратное: всякое дерево новой сети получается из какого-нибудь дерева основной сети затягиванием данной цепи. Это легко проверить, выполнив обратную конструкцию (восстановлением цепи). Из этого следует, что алгебраическое дополнение цепи равно определителю новой сети, полученной закорачиванием всех ребер данной цепи.

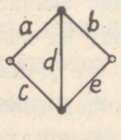
Таким образом, вычисление определителя с помощью разложения по двум вершинам приводит к вычислению определителей более простых сетей. Для вычисления последних можно,

конечно, пользоваться повторным разложением по двум другим вершинам и т.д., пока не получатся элементарные сети, определители которых уже вычисляются легко.

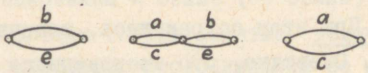


Фиг. 2-60

Для элементарных сетей определители получаются непосредственно как суммы величин деревьев (фиг. 2-60). Некоторые примеры вычисления определителя путем разложения его по двум вершинам приведены на фиг. 2-61.

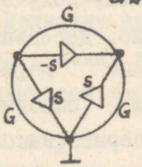


$C_1 = ac$ $C_2 = d$ $C_3 = be$



$\Delta_1 = b+e$ $\Delta_2 = (a+c)(b+e)$ $\Delta_3 = (a+c)$

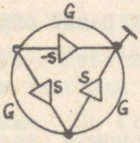
$$\Delta = ac(b+e) + d(a+c)(b+e) + be(a+c) =$$
$$= abc + ace + abd + ade + bcd + ced + abe + bce.$$



$C_1 = G$ $C_2 = G^2$ $C_3 = GS$

$\Delta_1 = 2G$ $\Delta_2 = 1$ $\Delta_3 = 1$

$$\Delta = 2G^2 + G^2 + GS = 3G^2 + GS$$



$C_1 = G$ $C_2 = S$ $C_3 = G^2$ $C_4 = -GS$

$\Delta_1 = 2G$ $\Delta_2 = 2G$ $\Delta_3 = 1$ $\Delta_4 = 1$

$$\Delta = 2G^2 + 2GS + G^2 - GS = 3G^2 + GS$$

Фиг. 2-61

2.6.4. Разложение по ребру

Второе разложение, которое мы будем рассматривать, называется разложением по ребру. Пусть какой-то унистор в сети направлен к земле (направлен к земле во всех деревьях, которые содержат соответствующее ребро). Все деревья, которые не содержат рассматриваемого унистора, являются деревьями сети, полученной исключением этого ребра. Очевидно, после закорачивания выбранного унистора в содержащем данное ребро дереве мы получим снова дерево. Произведение величины последнего на проводимость выбранного унистора дает нам величину соответствующего дерева в первоначальной сети. Складывая теперь величины деревьев обеих групп, получим:

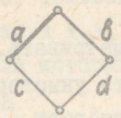
$$\Delta = \Delta_0 + u\Delta_u ,$$

где Δ_0 – определитель сети, полученной из данной исключением унистора u ;

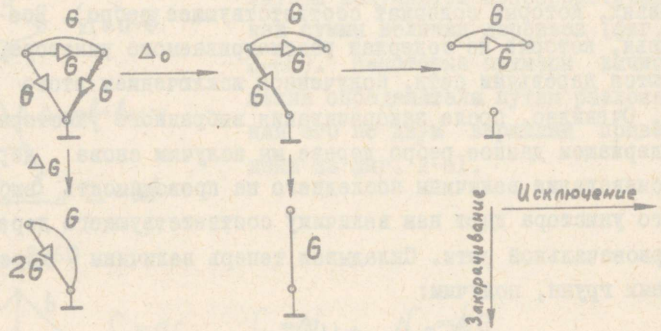
u – проводимость унистора u ;

Δ_u – определитель сети, полученной из данной закорачиванием унистора u .

Остается еще открытым вопрос о том, как узнать, направлен ли унистор к земле во всех деревьях, содержащих этот унистор. Ответ дает следующее правило: разлагать можно по ребру, граничной вершиной которого является базисная вершина, или по любому ребру с двухсторонней проводимостью. Первый вариант не требует пояснений; относительно второго отметим, что в каждом ребре с двухсторонней проводимостью имеется два противоположно направленных унистора равных проводимостей, откуда и вытекает справедливость нашего утверждения. Как и в предыдущем случае, это разложение надо применять повторно до получения элементарных сетей. Примеры на фиг. 2-62.



$$\Delta = bcd + a(bc + cd + db) =$$
$$= abc + bcd + cda + dba$$



$$\Delta = \Delta_0 + G\Delta_G = (0 + G \cdot G) + G \cdot 3G = 4G^2$$

Фиг. 2-62

2.6.5. Разложение по вершине

Точно такие же рассуждения приводят к разложению по вершине p:

$$\Delta = \sum_i u_i \Delta_i + \sum_{i \neq j} u_i u_j \Delta_{ij} + \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} u_i u_j u_k \Delta_{ijk} + \cdots ,$$

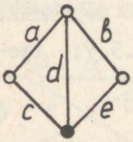
где u_i , u_j , u_k – проводимости унисторов, инцидентных данной вершине p и соответственно вершинам i , j , k , ...;

Δ_i – определитель сети, полученной после стягивания вершин p и i и удаления всех ребер, инцидентных p ;

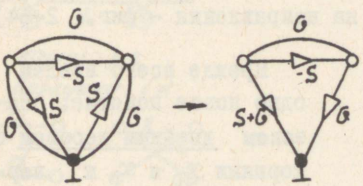
Δ_{ij} – определитель сети, полученной после стягивания вершин p , i , j и удаления всех ребер, инцидентных p ;

Δ_{ijk} – определитель сети, полученной после стягивания вершин p, i, j, k и удаления всех ребер, инцидентных p и т.д.

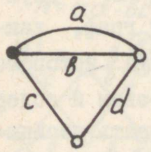
Как и в предыдущем случае, разложение можно провести по любой вершине, если ей инцидентны только ребра с двухсторонней проводимостью, и по базисной вершине – в случае унисторов. Некоторые примеры разложения по вершине приведены на фиг. 2–63.



$$\Delta = c\cdot ab + d\cdot ab + e\cdot ab + cd\cdot b + ce(a+b) + de\cdot a = abc + abd + abe + bcd + ace + bce + ade$$



$$\Delta = (S+G)\cdot G + G(G-S) + G(S+G)1 = 3G^2 + GS$$



$$\Delta = c\cdot d + (a+b)\cdot d + c(a+b)\cdot 1 = (a+b)(c+d) + cd$$

Фиг. 2–63

2.6.6. Замечания

Кроме рассмотренных трех разложений возможны еще и другие, однако мы их не будем рассматривать. Дать более подробные советы по предпочтению или практическому применению тех или иных разложений трудно; можно отметить только, что наиболее удобным является в большинстве случаев разложение

по двум вершинам. Хорошие результаты дает и комбинирование разных разложений.

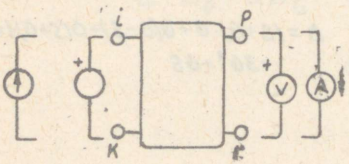
Методы вычисления определителя сети являются основными при топологическом анализе. Как мы ниже увидим, вычисление числителя в выражении передачи сводится также к нахождению определителей некоторых сетей.

2.6.7. Двойные деревья

Перейдем к вычислению числителя в выражении передачи. При этом исходим из результата, полученного в 2.5.7: числитель равен адъюнкте

$$N = \bar{y}_{ip,kr}.$$

(Обращаем опять-таки внимание на направления - фиг. 2-64).



Фиг. 2-64

Прежде всего введем одно новое понятие. Назовем <u>двойным деревом</u> с корнями x_p и x_r и верхушками x_i и x_k двухкомпонентный граф, каждая компонента которого является деревом и содержит один корень и одну верхушку. Мы будем называть двойными деревьями данного графа частичные двойные деревья графа, т.е. содержащие все вершины графа.

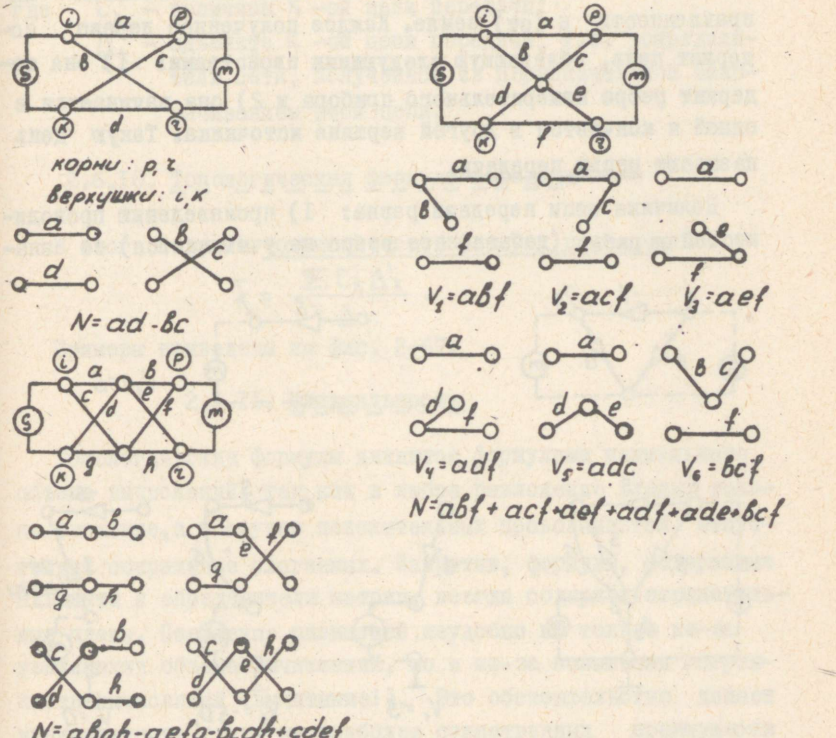
<u>Величиной двойного дерева</u> $V(_{ip}, _{kr})$ с корнями x_p и x_r и верхушками x_i и x_k называем: 1) произведение проводимостей всех ребер двойного дерева со знаком "+", если x_p и x_i принадлежат одной компоненте, и со знаком "-" в противоположном случае, если все унисторы в двойном дереве направлены к корням, 2) нуль, если хоть один унистор в двойном дереве направлен от корня.

2.6.8. Числитель

Справедлива следующая теорема: **адъюнкта** $\bar{y}_{ip,kr}$ равна сумме величин всех двойных деревьев с корнями x_p и x_r и верхушками x_i и x_k :

$$\bar{y}_{ip,kr} = \sum_{l} V_l(ip, kr) .$$

Эта формула аналогична (2-I4) и позволяет вычислить числитель, если известны все двойные деревья. Примеры вычисления адъюнкты суммированием величин двойных деревьев приведены на фиг. 2-65.



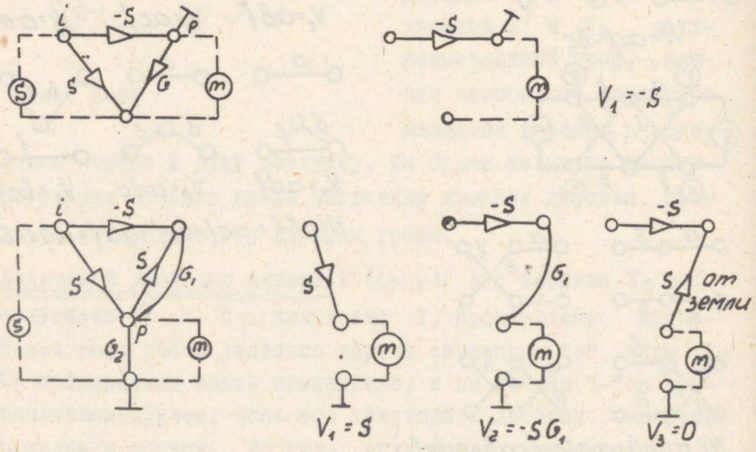
Фиг. 2-65

2.6.9. Разложение

Применение полученной формулы столь же нецелесообразно, как при вычислении определителя, ввиду большого количества двойных деревьев. Поэтому разработаны методы разложения, к рассмотрению основного из которых мы приступим.

Присоединяем к сети ребро, инцидентное вершинам измерительного прибора, и заземляем любой из зажимов его. Тем самым каждое двойное дерево превращается в дерево, содержащее добавленное ребро (ребро измерительного прибора), и направленность к (от) корню становится эквивалентной направленности к (от) земле. Каждое полученное дерево содержит цепь, обладающую следующими свойствами: I) она содержит ребро измерительного прибора и 2) она начинается в одной и кончается в другой вершине источника. Такую цепь называют цепью передачи.

Величина цепи передачи равна: I) произведению проводимостей ее ребер (добавленное ребро не учитывается) со зна-



Фиг. 2-66

ком "+", если вершины источника и прибора в цепи следуют в порядке $i-p-r-k$, и со знаком "-" при порядке $i-r-p-k$, если все унисторы в цепи направлены к земле; и 2) нулю, если хоть один унистор в цепи направлен от земли. Примеры вычисления величины цепи передачи приведены на фиг. 2-66.

Точно такие же рассуждения, которые были проведены в 2.6.3 при разложении определителя, приведут к разложению числителя:

$$N = \sum_k C'_k \Delta'_k ,$$

где C'_k - величина k -ой цепи передачи;
Δ'_k - адъюнкта k -ой цепи передачи, т.е. определитель сети, полученной из первоначальной закорачиванием этой цепи.

2.6.10. Топологическая формула передачи

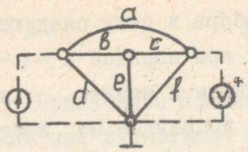
В итоге получим топологическую формулу передачи:

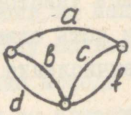
$$T = \frac{\sum C'_k \Delta'_k}{\Delta} .$$

Примеры приведены на фиг. 2-67.

2.6.11. Минимальность

Топологические формулы являются формулами наименьшего объема вычислений, так как в любое разложение входит только сложение, а в случае положительных проводимостей отсутствует сокращение слагаемых. Напротив, формулы, содержащие адъюнкты и определители матриц, всегда содержат отрицательные члены. Появление разностей неудобно не только из-за увеличения объема вычислений, но и из-за повышения погрешности вычислений (вычитание!). Это обстоятельство делает минимальность одним из наиболее существенных преимуществ применения топологических формул перед другими методами расчета.





$C_1 = e,\ \Delta_1 = a(b+d+c+f)+(b+d)(c+f)$

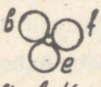
$C_2 = bd,\ \Delta_2 = a+c+f$

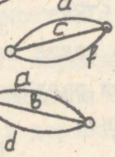
$C_3 = baf,\ \Delta_3 = 1$

$C_4 = cf,\ \Delta_4 = a+b+d$

$C_5 = cad,\ \Delta_5 = 1$





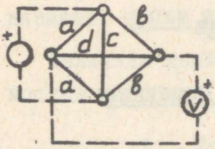


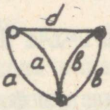
$$\Delta = ae(bd+c+f)+(b+d)(c+f)+bd(a+c+f)+baf+cf(a+b+d)+cad$$

$C_1' = a,\ \Delta_1' = b+c+e$

$C_2' = bc,\ \Delta_2' = 1$

$$Z = \frac{a(b+c+e)+bc}{\Delta}$$



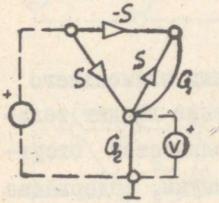


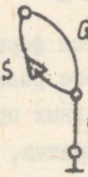
$\Delta = 2(a+b)d+4ab$

$C_1' = ba,\ \Delta_1' = 1$

$C_2' = -ab,\ \Delta_2' = 1$

$$T = \frac{ba-ab}{\Delta} = 0$$





$\Delta = G_1 G_2$

$C_1' = S,\ \Delta_1' = G_1$

$C_2' = -SG_1,\ \Delta_2' = 1$

$$T = \frac{SG_1 - SG_1}{G_1 G_2} = 0$$

Фиг. 2-67

§ 2.7. Сигнальные графы

2.7.I. Сигнальные графы

Рассматриваемый в настоящем и последующих параграфах метод сигнальных графов применим для анализа и расчета любых линейных систем, в том числе и для линейных электрических цепей. Применительно к последним мы и будем впредь изучать этот метод, учитывая при этом специфику линейных цепей.

Метод сигнальных графов почти всегда позволяет сохранить много труда и времени при расчетах. Это объясняется главным образом тем, что при изучении данной системы можно учитывать результаты, полученные для ее частей (подсистем), и притом в наиболее целесообразной и простой форме. Правила преобразования графов простые и легко запоминаются. При анализе с помощью сигнальных графов легко придерживаться оптимальной методике расчета, диктуемой поставленной целью или задачей, ввиду большой наглядности графов. Все это способствовало бурному развитию теории сигнальных графов и широкому практическому применению их, несмотря на десятилетнюю историю этой теории.

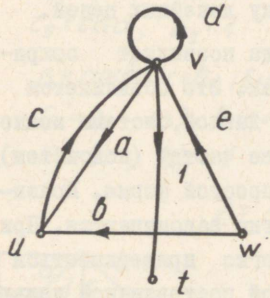
2.7.2. Определение

Сигнальный граф можно определить как граф, являющийся отображением линейной системы уравнений, в которой переменные даны в явном виде, т.е. все уравнения должны задавать какую-то переменную как функцию остальных. Сигнальный граф строится следующим образом: в качестве множества X берем множество всех переменных в уравнениях, и считаем, что x_i отображается на x_j, если в выражение x_j входит x_i с отличным от нуля коэффициентом t_{ij}. В графе к соответствующей дуге (i,j) приписываем число t_{ij}, которое называем передачей этой дуги.

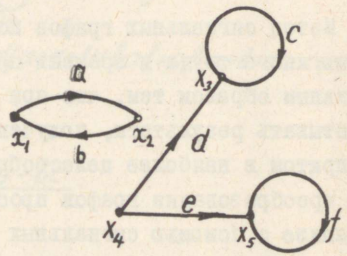
Пусть, например, имеется система уравнений

$$\begin{aligned} u &= av + bw \\ v &= cu + dv + ew \\ t &= v \end{aligned}$$

Мы имеем четыре переменных u, v, w и t, следовательно, в сигнальном графе имеем четыре вершины, а между ними существуют дуги (v,u), (w,u), (u,v), (v,v), (w,v) (v,t) (фиг. 2-68).



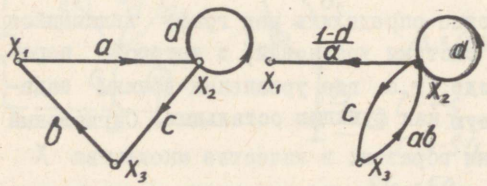
Фиг. 2-68



Фиг. 2-69

Очевидна и методика построения уравнений, соответствующих данному сигнальному графу. Переменная x_j, соответствующая вершине j, определяется так:

$$x_j = \sum_i t_{ij} x_i .$$



$x_1 = bx_3$
$x_2 = ax_1 + dx_2$
$x_3 = cx_2$

$x_1 = \frac{1-d}{a} x_2$
$x_2 = dx_2 + abx_3$
$x_3 = c\,x_2$

Фиг. 2-70

На фиг. 2-69 показан граф, которому соответствуют уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 &= bx_2 , \\ x_2 &= ax_1 , \\ x_3 &= cx_3 + dx_4 , \\ x_5 &= ex_4 + fx_5 . \end{aligned}$$

Другому способу записи уравнений

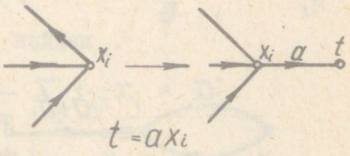
соответствует и другой граф (фиг. 2-70). Ниже будут рассмотрены методы преобразования графов, позволяющие получить новый граф, не переходя к уравнениям.

2.7.3. Свойства

Обращаем внимание на некоторые положения, которые надо иметь в виду при составлении и преобразовании сигнальных графов.

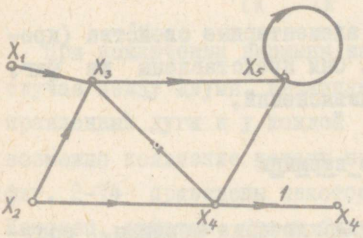
I. Для любой переменной граф задает только одно выражение. Это надо иметь в виду и при составлении уравнений.

2. К любой вершине можно присоединить дугу, выходящую из нее, так как эта дуга не изменяет величины данной переменной. Такое присоединение соответствует прибавлению одной переменной и одного уравнения (фиг.2-7I).



Фиг. 2-7I

3. Если в данную вершину не входит ни одна дуга, т.е. ей инцидентны только выходящие дуги, то эта вершина называется источником. Соответствующая переменная является независимой и входит только в правые части уравнений.

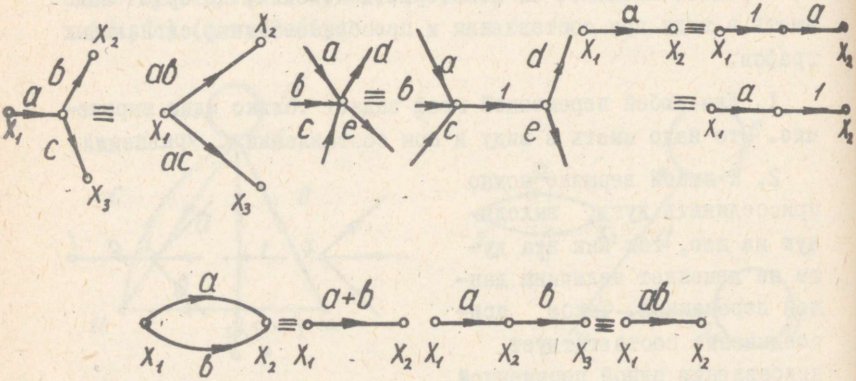


ИСТОЧНИКИ – X_1, X_2
СТОКИ – X_4, X_3, X_4, X_5

Фиг. 2-72

4. Если переменная соответствует вершине, имеющей входящие дуги, то переменная является зависимой, так как для нее имеется уравнение, выражающее зависимость ее от остальных переменных. Соответствующую вершину называют стоком. В более узком смысле стоком называют вершину, которой инцидентны

только входящие в нее дуги. Каждой переменной можно ставить в соответствие вершину, являющуюся стоком в этом смысле, путем присоединения к ней через выходящую дугу с передачей I (см. фиг. 2-72) отдельно стоящую вершину. Мы будем употреблять понятие стока в первоначальном определении.



$$X_2 = aX_1 + bX_1 \qquad X_2 = (a+b)X_1 \qquad \begin{matrix} X_2 = aX_1 \\ X_3 = bX_2 \end{matrix} \qquad X_3 = abX_1$$

Фиг. 2-73

Рассмотрим теперь некоторые элементарные свойства (преобразования) сигнальных графов. Они представлены на фиг. 2-73 и, очевидно, не требуют разъяснений.

2.7.4. Исключение вершины

Большой интерес представляет исключение вершины, соответствующее исключению переменной из уравнений. Исключить можно, конечно, любую вершину кроме источника. Для вывода формулы исключения вершины надо требовать, чтобы значения переменных не изменились после исключения вершины. Сначала

найдем значение переменной x_p, соответствующей исключаемой вершине p:

$$x_p = \sum_i t_{ip} x_i = \sum_{i \neq p} t_{ip} x_i + t_{pp} x_p,$$

$$x_p = \frac{1}{1 - t_{pp}} \sum_{i \neq p} t_{ip} x_i .$$

(t_{pp} – передача петли y вершины p). Выражение переменной x_k:

$$x_k = \sum_i t_{ik} x_i = \\ = \sum_{i \neq p} t_{ik} x_i + t_{pk} x_p .$$

Подставляя сюда выражение x_p, найдем

$$x_k = \sum_{i \neq p} t_{ik} x_i + \frac{t_{pk}}{1 - t_{pp}} \sum_{i \neq p} t_{ip} x_i = \\ = \sum_{i \neq p} \left(t_{ik} + \frac{t_{ip} t_{pk}}{1 - t_{pp}} \right) x_i .$$

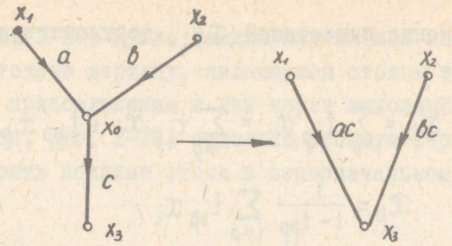
В новом графе выражение x_k:

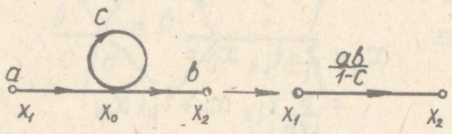
$$x_k = \sum t'_{ik} x_i .$$

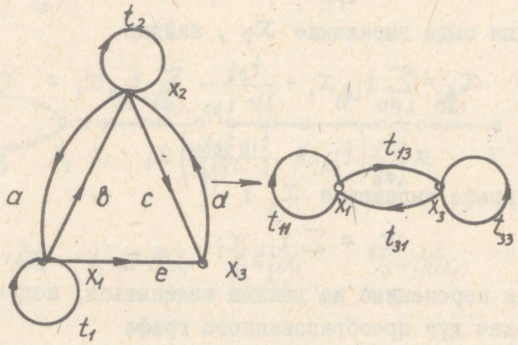
И так как переменные не должны изменяться, получаем выражение передач дуг преобразованного графа

$$t'_{ik} = t_{ik} + \frac{t_{ip} t_{pk}}{1 - t_{pp}} .$$

При исключении вершины надо иметь в виду, что в общем случае между двумя вершинами имеется две противоположно направленных дуги и у каждой вершины одна петля. Поэтому возможно появление петель после исключения вершины. На фиг. 2-74 приведены некоторые примеры исключения вершины. Наконец, отметим, что в будущем мы все время будем предполагать, что $t_{ii} \neq 1$.

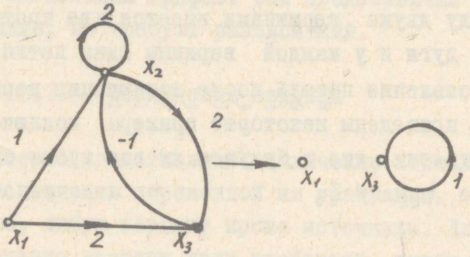






$$t_{11} = t_1 + \frac{ab}{1-t_2} \qquad t_{31} = 0 + \frac{ad}{1-t_2}$$

$$t_{13} = e + \frac{bc}{1-t_2} \qquad t_{33} = 0 + \frac{cd}{1-t_2}$$



Фиг. 2-74

2.7.5. Инверсия

Если из вершины i идет путь в вершину k (т.е. вершина k предшествует вершине i), то переменная x_k зависит от переменной x_i, в чем нетрудно убедиться: каждая переменная на пути зависит от предыдущей. В уравнениях это выражается в том, что последовательными подстановками можно ввести переменную x_i в выражение x_k. С целью упрощения исследования графа может оказаться нужным инвертирование какого-то пути, т.е. изменение направления дуг в данном пути. Рассмотрим, как это можно сделать, чтобы переменные не изменились.

Пронумеруем вершины графа так, чтобы номерами вершин выбранного какого-то пути были бы $1,2,\ldots m$. Тогда уравнения переменных, соответствующих этим вершинам, имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(X_1) = \sum_{x_k \in X_1} t_{k1}\, x_k, \\ x_2 &= f_2(X_2) = \sum_{x_k \in X_2} t_{k2}\, x_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= f_m(X_m) = \sum_{x_k \in X_m} t_{km}\, x_k, \end{aligned} \qquad (2\text{-}15)$$

где через X_k обозначено множество переменных, которые входят в выражение x_k (из соответствующих вершин идут дуги в вершину k). Так как мы рассматриваем путь, то $x_1 \in X_2$, $x_2 \in X_3$, ..., $x_{m-1} \in X_m$. Построим теперь другую последовательность уравнений, где первым является уравнение для x_{m-1} и последним – x_1. Для этого выражаем из m-го уравнения x_{m-1}, из $(m-1)$-го – x_{m-2} и т.д.:

$$x_{m-1} = \frac{1}{t_{m-1,m}}\, x_m - \frac{1}{t_{m-1,m}} \sum_{k \neq m-1} t_{km}\, x_k, \qquad (2\text{-}16)$$

$$x_i = \frac{1}{t_{i,i+1}} x_{i+1} - \frac{1}{t_{i,i+1}} \sum_{k \neq i} t_{k,i+1} x_k ,$$

. . . . . .

$$x_1 = \frac{1}{t_{12}} x_2 - \frac{1}{t_{12}} \sum_{k \neq 1} t_{k2} x_k .$$

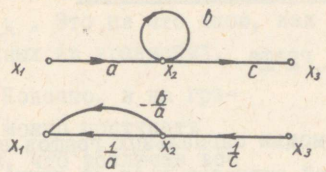
В результате мы получим выражение для x_1, не используя первого уравнения в (2-I5). Так как мы требуем, чтобы все уравнения (2-I6) сохранили силу, а для одной переменной сигнального графа не может быть двух уравнений, то x_1 в уравнениях (2-I5) должно быть независимой переменной. Следовательно, вершина x_1 должна быть источником, а поэтому можно заключить, что инвертировать можно только путь, начинающийся в источнике.

Правила для инвертирования пути получаются непосредственно из уравнений (2-I6), из которых следует, что I) надо изменить направления всех дуг пути и инвертировать их передачи; 2) надо перенести все концы дуг, заходящих в вершину $(i + I)$, к вершине i, и их передачи умножить на отрицательную передачу инвертированной дуги. Примеры инверсии пути приведены на фиг. 2-75.

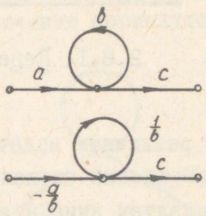
Кроме инверсии пути, начинающегося в источнике, можно инвертировать и контур. Это объясняется тем, что в случае контура x_1 зависит от x_m, т.е. $x_m \in X_1$, и кроме уравнений (2-I6) мы получим еще одно:

$$x_m = \frac{1}{t_{m1}} x_1 - \frac{1}{t_{m1}} \sum_{k \neq m} t_{k1} x_k .$$

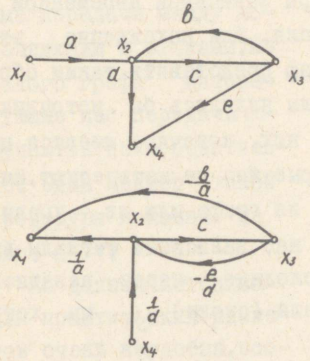
Последние вместе с уравнениями (2-I6) образуют систему уравнений контура, но уже инвертированного, так как $x_i \in X_{i-1}$. Правило инвертирования, конечно, такое же, как и для пути, поэтому приведем только примеры на фиг. 2-76.



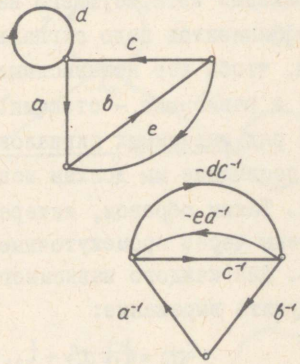
инверсия пути [a,c]



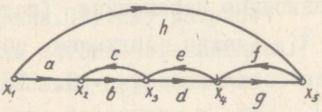
инверсия контура [b]

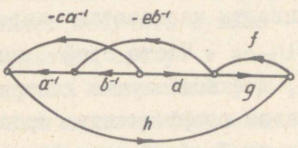


инверсия пути [a,d]



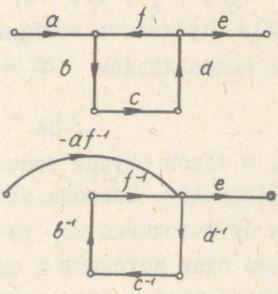
инверсия контура [a,b,c]





инверсия пути [a,b]

Фиг. 2-75



инверсия контура [b,c,d,f]

Фиг.2-76

§ 2.8. Вычисление передачи сигнального графа

2.8.I. Передача графа

Решение различных задач с помощью сигнальных графов сводится к нахождению зависимостей сигналов друг от друга. Так как мы исследуем линейные уравнения, то достаточно найти коэффициент пропорциональности при зависимой переменной в выражении интересующего нас сигнала. Для нахождения этих коэффициентов надо сигнальный граф представить таким образом, чтобы все независимые сигналы являлись бы источниками, а зависимые – стоками. Кроме них, конечно, имеется целый ряд зависимых сигналов, которые нас не интересуют. Именно последние мы должны исключить из графа или из уравнений. Таким образом, интересующие нас зависимые сигналы выражены через промежуточные, а последние – через независимые. Для каждого зависимого сигнала (стока) y_k мы хотим получить выражение:

$$y_k = t_{1k} x_1 + t_{2k} x_2 + \dots + t_{mk} x_m ,$$

где x_1 , x_2 , ... x_m – независимые переменные (источники). Определить коэффициенты t_{ik} можно следующим образом: приравниваем $x_i = 1$ и все остальные $x_j = 0$. Тогда

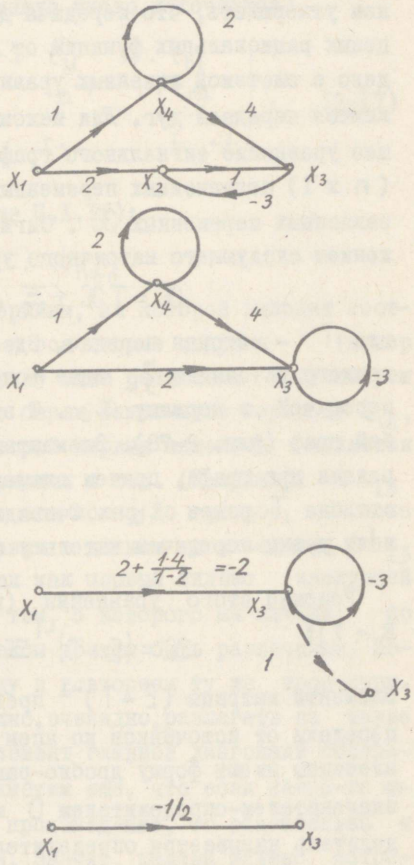
$$y_k = t_{ik} ,$$

т.е. в таком случае значение сигнала y_k равно искомому коэффициенту. Поэтому эти коэффициенты называются передачами от источника x_i до стока y_k . Часто граф имеет только один источник и один сток, в таком случае говорят о передаче графа; она, очевидно, равна коэффициенту пропорциональности между возмущением (сигналом источника) и реакцией (сигналом стока).

На языке линейных уравнений процедура вычисления передачи понимается так: вычисляем значения промежуточных сиг-

налов, вызванных данным единичным возмущением, и, подставляя последние в выражения стока, найдем y_k, а значит, и t_{ik}. Это не что иное, как исключение промежуточных переменных из уравнений.

Конечно, и на графе можно поступить так, что исключив все промежуточные вершины, получим непосредственные передачи между источниками и стоками. Из такого графа интересующие нас передачи получаются непосредственно. Один пример такой процедуры показан на фиг. 2-77.



Фиг. 2-77

Но данная методика для практических расчетов очень неудобна, особенно при большом количестве промежуточных вершин. Поэтому разработаны методы, позволяющие вычислить передачи от любого источника к любому стоку без применения исключений. Это позволяет получить нужные результаты сразу в достаточно компактной форме без многократного перечерчивания графа. К изучению этих методов мы и переходим.

2.8.2. Уравнение

Так же как и при изучении топологических формул, мы можем утверждать, что передача должна быть отношением двух целых рациональных функций от передач дуг - ведь мы имеем дело с системой линейных уравнений, где коэффициентами являются передачи дуг. Для нахождения передачи составим общее уравнение сигнального графа. Образуем матрицу-столбец ($n \times 1$) независимых переменных Ξ и матрицу-столбец ($n \times 1$) зависимых переменных $\mathfrak{X}$. Сигнальный граф является отображением следующего матричного уравнения:

$$\mathfrak{X} = T\mathfrak{X} + \Xi ,$$

где T - матрица передач. Здесь предполагается, что из каждого источника ξ_i идет только одна дуга с единичной передачей в вершину x_i. К этому виду можно привести любой граф (фиг. 2-78). Элементами матрицы T являются передачи дуг графа, причем элемент i-ой строки и k-го столбца T равен t_{ki}. Очевидно, элементы главной диагонали равны передачам петель у соответствующих вершин графа.

Решение этого уравнения (при условии неособенности $E - T$):

$$\mathfrak{X} = (E - T)^{-1}\Xi .$$

Элементы матрицы $(E - T)^{-1}$ представляют собой всевозможные передачи от источников ко всем вершинам. При этом все эти элементы имеют форму дробно-рациональной функции с общим знаменателем-определителем D матрицы $(E - T)$. Этот определитель называется определителем сигнального графа, и как выяснилось, не зависит от того, какую передачу мы рассмотрим.

Конечно, всегда можно составить указанную матрицу и вычислить ее определитель, но целесообразно было бы найти способ для вычисления определителя прямо из графа.

2.8.3. Разложение определителя

Для получения такого способа рассмотрим общий член определителя (n – число вершин минус число источников)

$$(-1)^n D = |T-E| = \begin{vmatrix} t_{11}-1 & t_{21} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22}-1 & \dots & t_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn}-1 \end{vmatrix}, \qquad (2\text{-}17)$$

который равен (см. приложение П.I.II):

$$(-1)^{\sigma} t_{1\alpha_1} t_{2\alpha_2} \dots t_{n\alpha_n}.$$

Все первые индексы (номер вершины, из которой выходит соответствующая дуга) различны, и все вторые индексы (номер вершины, в которую входит дуга) тоже различны. Сгруппируем множители следующим образом: берем какую-либо передачу t_{ik}, за ней пишем передачу, у которой первым индексом является второй индекс предыдущей передачи и т.д. (Например: $t_{13}\ t_{37}\ t_{72} \dots$). Продолжать это можно до тех пор, пока второй индекс совпадет с первым в данном произведении ($t_{13}\ t_{37}\ t_{72}\ t_{25}\ t_{51}$), так как первый индекс следующей передачи должен совпадать с тем, с которого мы начали; но это невозможно, так как индексы должны быть различными. Поэтому выбираем новую передачу и повторяем ту же процедуру. Каждый член определителя можно, очевидно, разлагать на такие множители, при этом любой элемент главной диагонали составляет отдельный множитель. Заметим еще, что если какой-то индекс встречается в каком-то произведении, то обязательно и на первом, и на втором месте. Значит, каждый индекс встречается только в одном множителе. Например, для определителя третьего порядка группировка имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{31}a_{13})(a_{22}) - (a_{12}a_{21})(a_{33}) - (a_{23}a_{32})(a_{11}).$$

Посмотрим теперь, что соответствует этим произведениям на графе. Согласно нашему построению каждый множитель представляет собой произведение передач дуг контура - назовем его передачей контура. Каждый член определителя представляет собой произведение передач контуров, и так как индексы в различных множителях различны, значит, различны и вершины контуров или, другими словами, контуры не касаются. Следовательно, каждый член определителя есть произведение передач некасающихся контуров (о знаке произведения ниже). Притом, как видно из (2-I7), в качестве передачи петли надо взять $(t_{ii} - I)$.

Знак члена определителя $|T-E|$ определяется следующим образом: четность числа σ совпадает с четностью числа $(n-s)$, где s - число контуров (здесь надо считать, что при всех вершинах кроме источника имеется петля). Но так как $D = (-I)^n |T-E|$, то четность σ совпадает с четностью числа

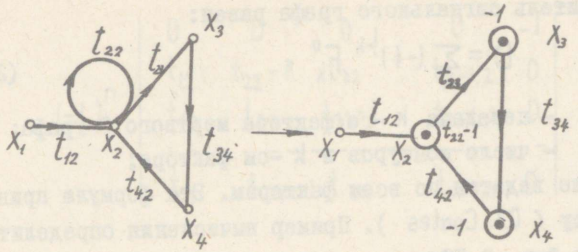
$$n+s+n = 2n-s$$

или просто s.

2.8.4. С-граф

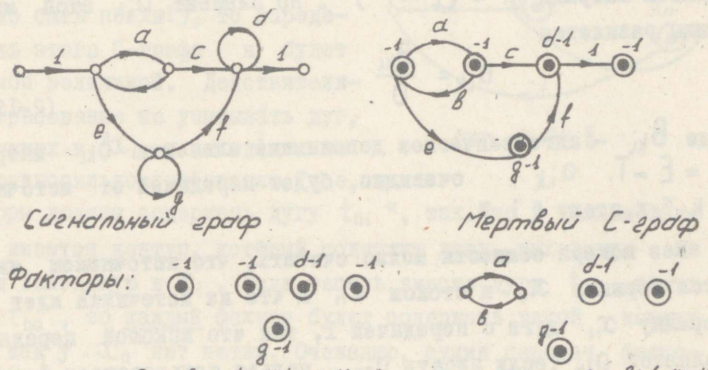
Для практического применения рассмотренной методики сигнальный граф преобразуют в так называемый С-граф. Для этого надо передачи всех петель t_{ii} заменить на $(t_{ii}-I)$, не меняя остальных передач графа. Чтобы различить сигнальные и С-графы, обозначаем петлю С-графа кружочком вокруг точки (вершины), как показано на фиг. 2-78. (Конечно, у источника не может появиться петля).

Таким образом, определитель графа равен сумме произведений передач некасающихся контуров С-графа, взятых со знаком $(-I)^{L_k}$, где L_k - число контуров в k-ом сочетании.



Фиг. 2-78

Очевидно, каждая совокупность некасающихся контуров образует фактор графа, полученного из исходной опусканием источников. Такой граф называется мертвым.



$L_1=5$, $F_1^0=(-1)(-1)(d-1)(-1)(g-1)=$
$=-(d-1)(g-1)$ $\qquad L_2=4$, $F_2^0=ab(d-1)(-1)(g-1)$

$\Delta=(-1)^5F_1^0+(-1)^4F_2^0=(d-1)(g-1)-ab(d-1)(g-1)=$
$=(d-1)(g-1)(1-ab)$

Фиг. 2-79а

Называя передачей фактора произведение передач всех дуг, принадлежащих данному фактору, мы сформулируем алгоритм вычисления определителя графа так:

-определитель сигнального графа равен:

$$D = \sum_k (-1)^{L_k} F_k^0 , \qquad (2\text{-}18)$$

где F_k^0 – передача k –го фактора мертвого С-графа;

L_k – число контуров в k –ом факторе;

суммирование ведется по всем факторам. Эта формула принадлежит Коутсу (C.L.Coates). Пример вычисления определителя приведен на фиг. 2-79а.

2.8.5. Формула Коутса

Перейдем к вычислению числителя в выражении передачи графа. Было установлено, что каждая передача является элементом матрицы $A = (E - T)^{-1}$. Но элемент a_{ik} этой матрицы равняется

$$a_{ik} = \frac{B_{ki}}{D} , \qquad (2\text{-}19)$$

где B_{ki} – алгебраическое дополнение элемента b_{ki} матрицы $B = E - T$. a_{ik}, очевидно, будет передачей от источника " k " к стоку " i ".

Без потери общности можно считать, что источником является вершина x_0 и стоком x_n и что из источника идет в вершину x_1 дуга с передачей I, так что искомой передачей является a_{1n} (если писать a_{0n}, нельзя пользоваться формулой (2-19)). Следовательно, мы должны вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{1n} (в правом верхнем углу), т.е.

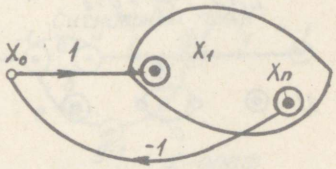
$$(-1)^n \begin{vmatrix} -t_{21} & 1-t_{22} & -t_{32} & \dots & -t_{n-1,2} \\ -t_{13} & -t_{23} & 1-t_{33} & \dots & -t_{n-1,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & \dots & \dots & -t_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

или, что то же самое, определитель $\left((-1)^n\ (-1)^{n-1}\ (-1)^n = -(-1)^n\right)$:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\ t_{12} & t_{22}-1 & t_{32} & \vdots & t_{n-1,2} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33}-1 & \vdots & t_{n-1,3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \vdots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}20)$$

Но это есть определитель графа, где имеется дуга от вершины x_n к x_1 с передачей $t_{n1} = -1$, и передачи дуг, заходящих в вершину x_1 (кроме t_{n1}) и выходящих из x_n (кроме t_{n1}) равны нулю (фиг. 2-79б).

Если дугу от x_n присоединить к вершине x_0 (у которой не должно быть петли!), то определитель этого С-графа и будет искомой величиной. Действительно, требование не учитывать дуг, заходящих в x_1 и выходящих из x_n, равносильно требованию "все факторы должны содержать дугу t_{n1}", так что в каждом факторе имеется контур, который содержит дугу, выходящую из x_n и заходящую в x_1. Если теперь вместо дуги t_{n1} взять дугу t_{n0}, то каждый фактор будет содержать такой контур, так как у x_0 нет петли. Очевидно, сумма передач факторов (с знаками $(-1)^{L_i}$) такого графа G' равна определителю (2-20).



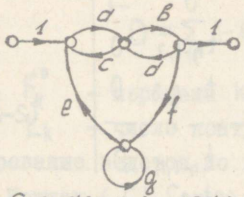
Фиг. 2-79 б

Итак, передача графа равна

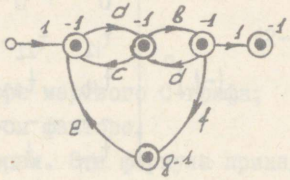
$$T = \frac{\sum (-1)^{L_i} F_i'}{D},$$

где D – определитель графа;
F_i' – передача i-го фактора;
L_i – число контуров в i-ом факторе.

Учитывая (2-18), пишем

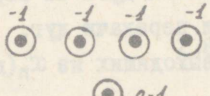


Сигнальный граф

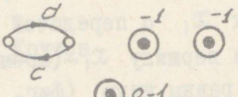


С-граф

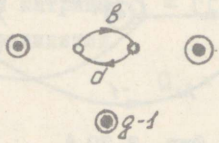
Факторы мертвого С-графа:

1) 

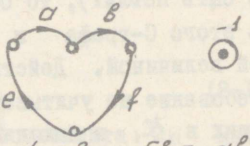
$L_1=5,\ F_1^0=g-1$

2) 

$L_2=4,\ F_2^0=ac(g-1)$

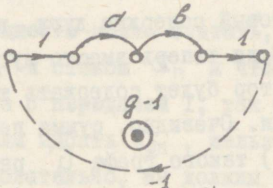
3) 

$L_3=4,\ F_3^0=bd(g-1)$

4) 

$L_4=2,\ F_4^0=-abef$

Фактор для определения F_i^1:



$L_1=2,\quad F_1^1=-ab(g-1)$

$$T=\frac{ab(1-g)}{(g-1)(ac+bd-1)-abef}$$

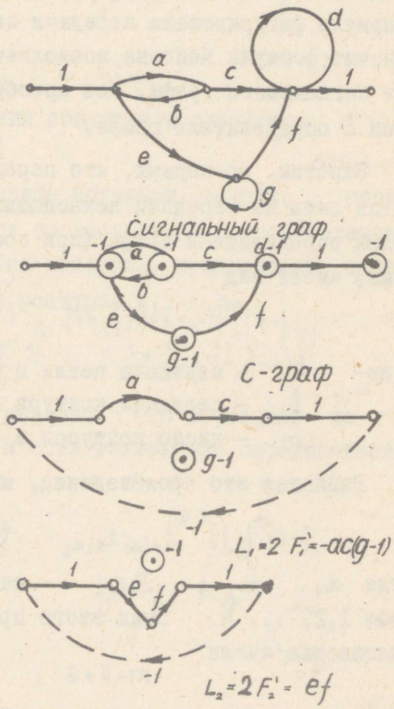
Фиг. 2-80а

$$T = \frac{\sum_i (-1)^{L_i} F_i'}{\sum_k (-1)^{L_k} F_k} .$$

Это – формула Коутса.

Примеры вычисления передачи с помощью формулы Коутса приведены на фиг. 2-80а, б.

F_i' Очевидно, в каждое входит произведение передач дуг пути, начинающегося в источнике и кончающегося в стоке, так как передача дуги $t_{hl} = -1$ меняет только знак произведения. Такой путь называется прямым путем. Фактор подграфа, который содержит все вершины графа кроме вершин данного пути (дополнительного графа), называется кофактором данного прямого пути. Значит, F_i' равно произведению передач всех дуг прямого пути и соответствующего кофактора или, короче, произведению передач прямого пути и его кофактора. При этом, число контуров в кофакторе на одно меньше, чем в факторе, поэтому автоматически аннулируется знак "–", появляющийся у передачи прямого пути.



Фиг. 2-80б

2.8.6. Другое разложение определения

Кроме формулы Коутса большое распространение получила и формула Мейсона, которая и исторически была первой формулой прямого вычисления передачи сигнального графа. При выводе ее мы исходим из формулы Коутса и требуем, чтобы в формуле фигурировали передачи петель сигнального графа. Значит, формула Мейсона позволяет вычислить передачу прямо из сигнального графа, без преобразования его в С-граф. Начнем с определителя графа.

Заметим, во-первых, что передача любого контура умножается лишь на передачи некасающихся с ним контуров. Общий член определителя графа (при соответствующей нумерации вершин) имеет вид

$$(-1)^m (t_{11}-1)(t_{22}-1)\dots(t_{kk}-1)\,l_{k+1}\,l_{k+2}\dots l_m ,$$

где- t_{ii} - передача петли в сигнальном графе;
l_l - передача контура в сигнальном графе;
m - число контуров в соответствующем факторе.

Разлагая это произведение, мы получим сумму членов вида

$$(-1)^m (-1)^{k-s}\, t_{\alpha_1\alpha_1} t_{\alpha_2\alpha_2}\dots t_{\alpha_s\alpha_s}\, l_{k+1}\, l_{k+2}\dots l_m ,$$

где α_1, α_2, ... α_s - какое-нибудь сочетание индексов I,2, ... k. Знак этого произведения определяется четностью числа

$$m-k+s ,$$

т.е. четностью числа множителей в этом произведении или, другими словами, числа контуров в соответствующем сочетании. В рассматриваемом разложении мы получим произведения передач сочетания из $(m-k)$ контуров и всех возможных сочетаний из k петель. Но так как все факторы мертвого графа содержат все возможные сочетания некасающихся контуров, а их сочетания с петлями получаются при разложении передачи фактора, то определитель графа содержит все произведе-

ния передач всех сочетаний некасающих контуров. Знак каждого такого произведения определяется числом контуров в соответствующем сочетании.

Кроме этих произведений в определителе появляется еще один член, не являющийся произведением передач контуров, а именно при разложении передачи фактора, состоящего из петель (которых всего n):

$$(-1)^n (t_{11}-1)(t_{22}-1)\dots(t_{nn}-1).$$

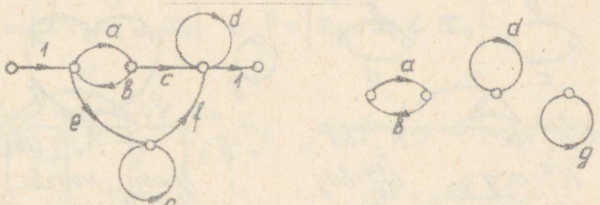
Очевидно, здесь при разложении получается слагаемое

$$(-1)^n(-1)^n = 1 .$$

В итоге: определитель графа содержит единицу, кроме того, передачи всех контуров со знаками "–", произведения передач всех пар некасающихся контуров, произведения передач всех троек некасающихся контуров и т.д.:

$$D = 1 - \sum_i \Lambda_i^{(1)} + \sum_i \Lambda_i^{(2)} - \sum_i \Lambda_i^{(3)} \dots = 1 + \sum_r (-1)^r \sum_i \Lambda_i^{(r)},$$

где $\Lambda_i^{(r)}$ – произведение передач i -го сочетания из r некасающихся контуров. Это и есть разложение определителя графа Мейсона.



$$\Delta = 1-(ab+d+g)+(abd+abg+dg)-abdg =$$
$$=(1-ab)(1-d)(1-g)$$

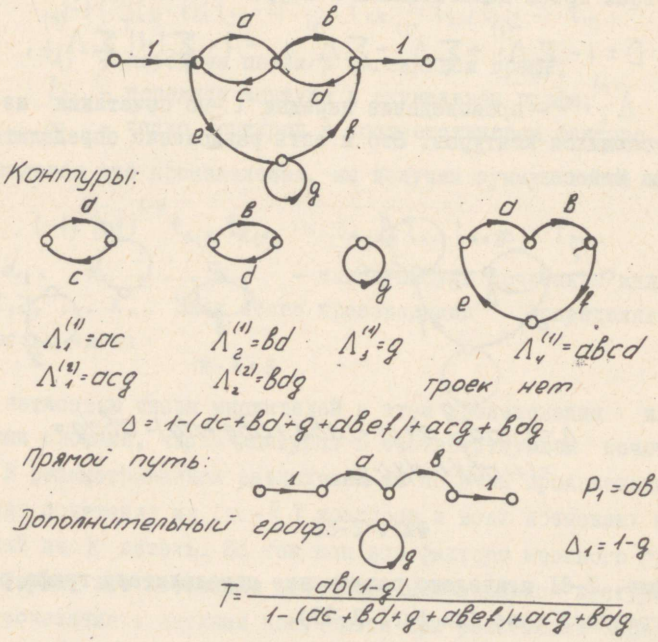
Фиг. 2-81

На фиг. 2-81 приведено разложение определителя графа, рассмотренного выше (на фиг. 2-79).

2.8.7. Формула Мейсона

Разложение числителя получается легко: каждый член его есть произведение передачи прямого пути и передачи какого-нибудь его кофактора. Если объединить все члены, содержащие передачу одного прямого пути, получим произведение передачи прямого пути и суммы передач его кофакторов. Последняя сумма, как сумма передач всех факторов дополнительного графа данного пути, представляет собой его определитель. Следовательно, числитель передачи можно представить следующим образом:

$$\sum_k P_k D_k ,$$



Фиг. 2-82

где P_k – передача k-го прямого пути;

D_k – адъюнкта (алгебраическое дополнение) k-го пути; она равна определителю дополнительного графа пути k.

Так мы получим формулу Мейсона (S.J. Mason):

$$T = \frac{\sum_k P_k D_k}{D}.$$

На фиг. 2-82 приведен пример вычисления передачи сигнального графа с помощью формулы Мейсона.

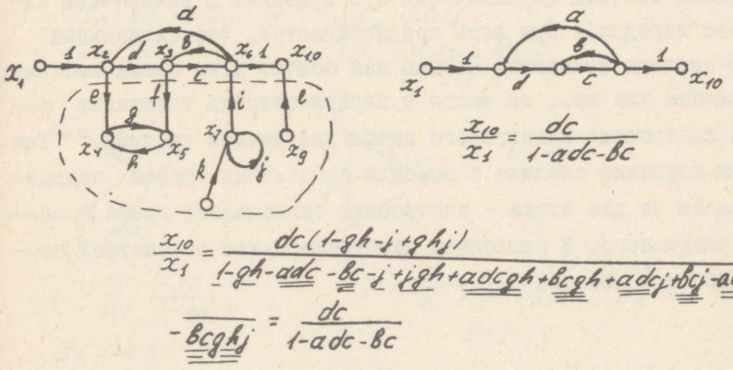
2.8.8. Правило Дезоэра

Иногда вычисление передачи может быть упрощено применением правила Дезоэра (C.A. Desoer): для вычисления передачи достаточно рассмотреть подграф, вершины которого следуют за источником (x_0) и предшествуют стоку (x_n). Значит, достаточно рассмотреть подграф, порожденный множеством A :

$$A = F \cap P,$$

где

$$F = \{x_i : x_i \geq x_1\} \quad \text{и} \quad P = \{x_i : x_i \leq x_n\}.$$



Фиг. 2-83

Это правило основано на следующем факте: дуги, инцидентные вершинам, которые одновременно не удовлетворяют условиям $x_i \geqslant x_1$, $x_i \leqslant x_n$, не входят в прямые пути. Поэтому передачи этих дуг или вообще не входят в передачи факторов, или же появляются одновременно во всех и сокращаются. Пример, поясняющий применение правила Дезоэра, приведен на фиг. 2-83.

§ 2.9. Составление сигнальных графов

2.9.1. Задача

Начиная с данного момента, мы будем говорить о линейных системах, подчеркивая тем самым общность метода сигнальных графов, т.е. применимость его к любым линейным системам. Линейные электрические цепи представляют собой частный случай линейных систем. Поэтому мы все выводы приводим для линейных систем, а в примерах обращаемся только к электрическим цепям.

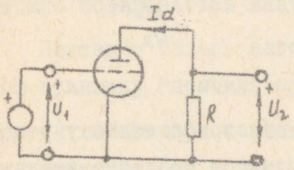
В предыдущих параграфах были рассмотрены основные свойства и правила преобразования сигнальных графов. В принципе этим решен вопрос о вычислении интересующих нас параметров линейной системы (практически это приводит к вычислению каких-то передач). При этом предполагается, что сигнальный граф системы известен. Но так как обычно дана схема системы, уравнения или пр., то часто в первую очередь возникает задача построения сигнального графа для данной системы. Тем самым комплекс анализа с помощью сигнальных графов подразделяется на два этапа - построение сигнального графа и анализ последнего. В настоящем параграфе будет рассмотрен первый из этих этапов.

2.9.2. Уравнения системы и сигнальный граф

Наиболее просто вопрос построения сигнального графа решается, если заданы уравнения системы. Записывая уравнения в форме, где каждая зависимая переменная в одном уравнении явно выражена, можно сразу начертить сигнальный граф, используя правила, рассмотренные в § 2.7. В простейших случаях граф можно построить, не записывая уравнений.

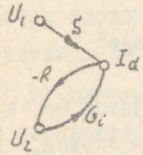
Сразу же возникает вопрос об однозначности решения задачи. Как было указано и выше, для данной системы можно построить несколько графов. Результат при этом зависит от выбора переменных.

Но надо иметь в виду, что граф соответствует действительной системе только в том случае, если источниками графа являются действительные источники системы, т.е. независимые переменные системы. Хотя передачи могут быть вычислены и при несоблюдении этого правила, другие важные величины (например, обратные связи, чувствительности и пр. – см. §2.10) не могут быть найдены из такого графа.



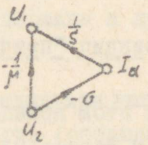
$$\begin{cases} I_a = SU_1 + G_i U_2 \\ U_2 = -RI_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_a = GU_2 \\ U_1 = \frac{1}{S} I_a - \frac{G_i}{S} U_2 \end{cases}$$



$$T' = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-SR}{1+RG_i}$$

$$D = 1+RG_i$$



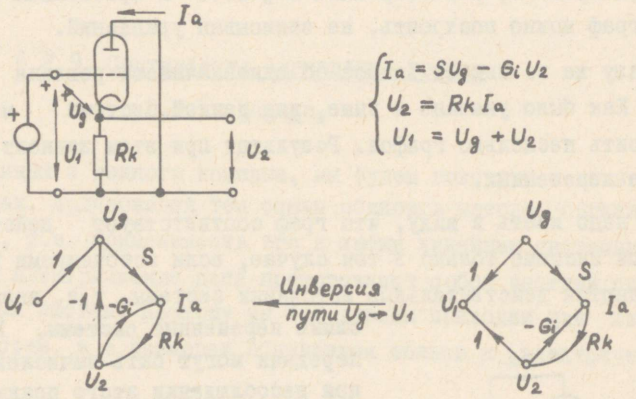
$$\mu = \frac{S}{G_i}$$

$$T'' = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{1}{\mu} - \frac{G}{S} = \frac{1+RG_i}{-SR}$$

$$D = 1$$

Фиг. 2-84

На фигуре 2-84 приведен пример: второй граф, полученный из первого инверсией пути от U_1 до U_2 позволяет вычислить передачу T' ($T' = \frac{1}{T}$), но определители этих графов различны. Это связано с тем, что второй граф не соответствует данной схеме (соответствующая этому графу схема должна содержать две лампы).



Фиг. 2-85

Тем не менее построение сигнального графа часто упрощается, если выбирать в качестве источников не действительно независимые, а некоторые другие параметры. После составления такого фиктивного графа с помощью инверсий можно всегда получить нужный граф (фиг. 2-85).

2.9.3. Принцип "причина-следствие"

Метод, основанный на этом принципе, отличается от предыдущего только тем, что запись уравнений опускается, выявленные зависимости данного сигнала (следствия) от других (причин) непосредственно отображаются на графе. Такое составление графа обладает не меньшей наглядностью, чем составление уравнений, но требует от составителя, привыкнув-

шего к преобразованию уравнений, некоторого навыка. Здесь остаются в силе все правила построения уравнений системы, но в измененной формулировке. Вот основные правила:

I) любую зависимую переменную можно выразить только один раз; в графе - если при составлении графа какая-то вершина превратилась уже в сток, то к ней можно присоединять лишь выходящие из нее дуги;

2) любое конкретное соотношение может быть использовано лишь один раз; в графе - при выражении любой переменной должен быть использован хоть один источник - действительный или промежуточный (на данном этапе);

3) чтобы получить граф, соответствующий данной системе, действительно независимые переменные должны быть источниками; правильный граф можно получить также при несоблюдении этого правила, но при условии, что число источников графа равно числу действительно независимых переменных, затем можно пользоваться инверсией.

Приведем теперь алгоритм построения сигнального графа по принципу "причина-следствие":

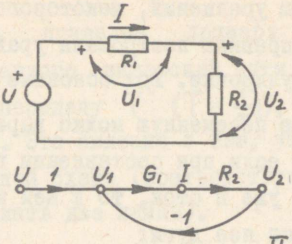
I) выбирается какая-то переменная (преимущественно одна из тех, которая нас впоследствии будет интересовать) и указывается соответствующая вершина (x_1);

2) переменная x_1 (следствие) выражается через какие-то новые переменные $x_2, x_3, \ldots x_i$ (причины), т.е. изображаются соответствующие вершины и дуги, соединяющие эти вершины с x_1;

3) получившиеся на предыдущем этапе промежуточные источники выражаются через другие (соблюдать правила I^0 и 2^0!); затем это повторяется для образующихся новых промежуточных источников и т.д.;

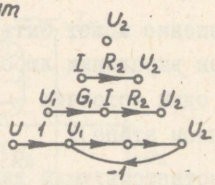
4) последний шаг - при выражении какой-то промежуточной переменной не образовалось ни одного промежуточного источника - все источники действительны, граф составлен.

а)



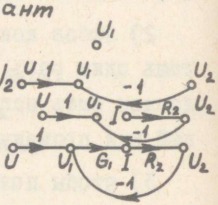
I вариант

1) $-(-)\ U_2$
2) $U_2(I)\ I$
3) $I(U_1)\ U_1$
4) $U_1(U_1,U_2)-$

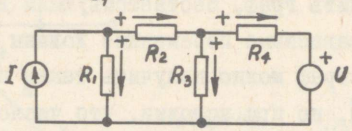


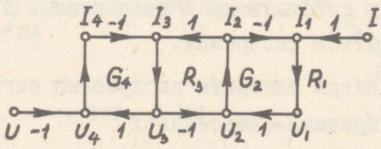
II вариант

1) $-(-)\ U_1$
2) $U_1(U_1,U_2)\ U_2$
3) $U_2(I)\ I$
4) $I(U_1)-$



в)

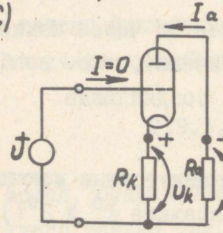


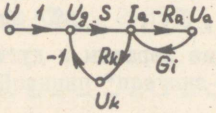


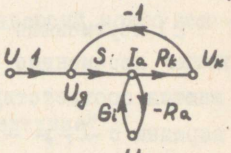
Вариант:

1) $-(-)\ U_2$
2) $U_2(U_1,U_3)\ U_1, U_3$
3) $U_1(I_1)\ I_1, U_3$
4) $U_3(I_3)\ I_1, I_3$
5) $I_1(I_1, I_2)\ I_2, I_3$
6) $I_3(I_2, I_4)\ I_2, I_4$
7) $I_2(U_2)\ I_4$
8) $I_4(U_4)\ U_4$
9) $U_4(U, U_3)-$

С)







1) –	U_a
2) U_a	I_a
3) I_a	U_g
4) U_g	U_k
5) U_k	–

1) –	U_k
2) U_k	I_a
3) I_a	U_g, U_a
4) U_a	U_g
5) U_g	–

Фиг. 2-86

В ходе составления, во всяком случае при недостаточном опыте, рекомендуется записывать на каждом шагу выражаемую переменную и те переменные, которые в последующем будут принадлежать выражению. Это может быть полезно для контроля правильности составления графа. Очевидно, в такой таблице на первом месте должны встречаться все зависимые переменные, встречающиеся в графе, и по одному разу.

Поясняющие примеры приведены на фиг. 2-86. В примерах а, б в скобках указаны также те переменные, через которые данная переменная выражается.

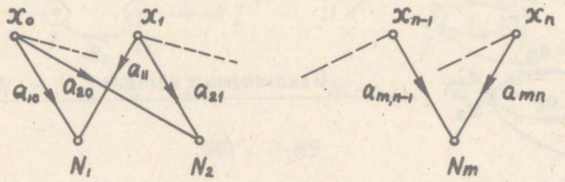
2.9.4. N -графы

Любое линейное уравнение можно записать в форме

$$A\mathfrak{X} = \Theta, \qquad (2\text{-}21)$$

где $\mathfrak{X}$ - матрица переменных ($n \times 1$);
Θ - нулевая матрица ($m \times 1$);
A - матрица коэффициентов ($m \times n$).

Если в граф ввести m нуль-вершин $N_1, N_2, \ldots N_m$, т.е. вершин, в которых сигналы равны нулю (тождественно), то соответствующий уравнению (2-21) граф, показанный на фиг.2-87, называется N -графом. Очевидно, число действительных источников (независимых переменных) в уравнении равно $(n-m)$.



Фиг. 2-87

Поэтому, выбирая какие-то $(n-m)$ вершины (из x_i) источниками, можно исключить все N-вершины и получить сигнальный граф.

Преобразование N-графа в сигнальный граф очень простое. Запишем i-ое уравнение в (2-21)

$$\sum_k a_{ik} x_k = 0$$

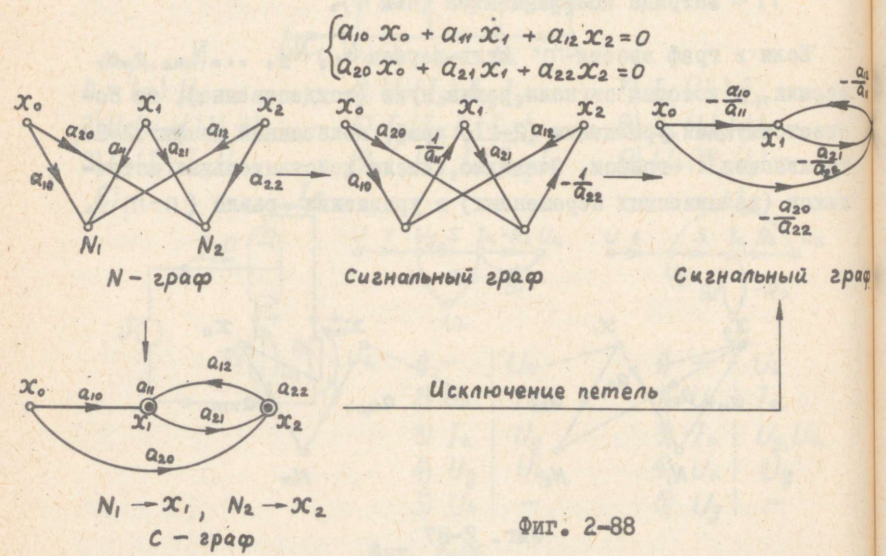
в виде

$$x_p = -\frac{1}{a_{ip}} \sum_{k \neq p} a_{ik} x_k .$$

Соответствующий этим уравнениям граф отличается от N-графа тем, что у каждой N-вершины инвертирована одна дуга, которая имеет передачу

$$\bar{a} = -\frac{1}{a} .$$

В полученном графе имеется $(n-m)$ источников и m зависимых переменных x_i и, кроме того, вершины N_i уже не являются нулями – мы имеем сигнальный граф. Элементарными пре-

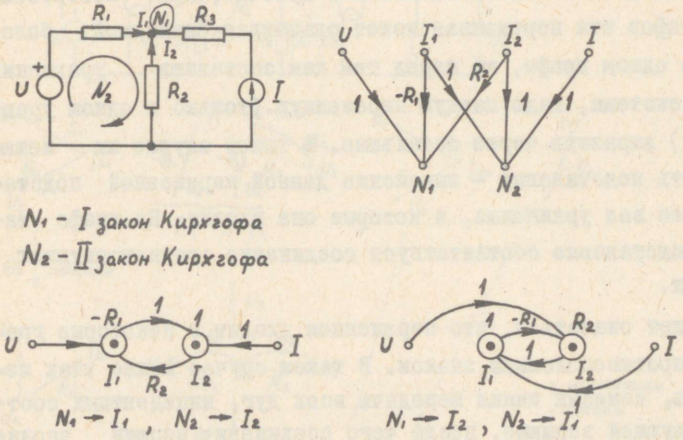


Фиг. 2-88

образованиями можно избавиться и от m лишних вершин N_i (фиг. 2-88).

Еще проще преобразование N -графа в C -граф. Для этого нужно лишь соединить N -вершины с какими-то (в будущем зависимыми) вершинами x_i (по одному!). Образующиеся при этом петли надо понять в смысле C -графа (фиг. 2-88).(Доказательство этого правила предоставляется читателю).

Преимущество применения N -графов заключается в том, что обычно основные законы формулируются в форме (2-2I) (или легко приводятся к этой форме). Например, для электрических цепей основные законы - законы Кирхгофа - имеют именно такой вид, что позволяет их непосредственно применять. Необходимость преобразования N -графа почти не усложняет процесс составления графа ввиду простоты этого преобразования. На фиг. 2-89 приведен пример применения N -графа для составления C -графа.



Фиг. 2-89

2.9.5. Соединение сигнальных графов

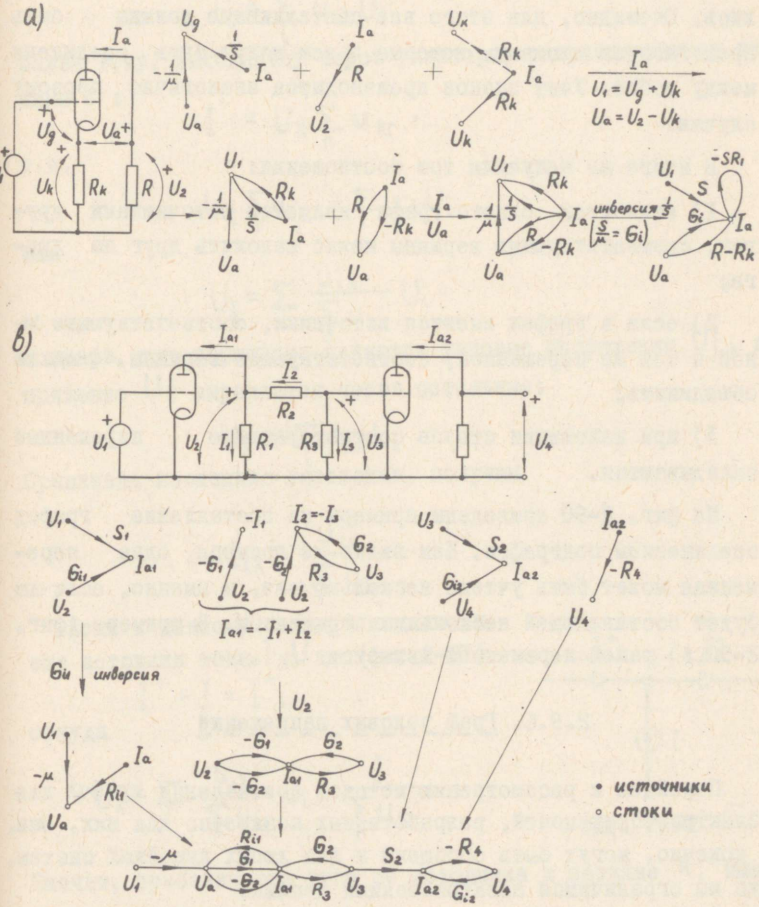
Часто (особенно в случае сложных систем) оказывается удобным строить граф системы соединением графов ее подсистем, так как последние можно построить более просто или могут быть даже известны заранее. Преимущество состоит и в том, что некоторые переменные (которых может быть довольно много) оказываются внутренними для подсистем и не влияют на соединение графов.

Под соединением графов мы подразумеваем наложение вершин отдельных подграфов с соблюдением соотношений между переменными. Рассмотрим основные соотношения, и на базе их сформулируем правила соединения графов.

Если в нескольких графах имеется одна и та же переменная, то для соединения соответствующих вершин эта переменная может быть зависимой только в одном из них, в остальных она должна быть независимой. Конечно, при построении подграфов эта переменная может оказаться зависимой более чем в одном графе, но перед тем как составить уравнения всей системы, надо каждую переменную (только в одном уравнении) выразить через остальные. В таком случае мы можем сделать подстановку - выражение данной переменной подставить во все уравнения, в которые она входит. На графе такой подстановке соответствует соединение соответствующих вершин.

Может оказаться, что переменная входит в некоторые графы с противоположным знаком. В таком случае можно знак изменить, изменяя знаки передачи всех дуг, инцидентных соответствующей вершине, после чего соединение вершин вполне закономерно.

Во-вторых, некоторые подграфы могут содержать вершину, соответствующую источнику системы. Если во всех подграфах эта вершина преобразована в источник, все эти вершины мож-



Фиг. 2-90

но соединить между собой или, другими словами, изобразить эту переменную одной вершиной.

В-третьих, может оказаться, что некоторая переменная полностью вообще не входит в подграфы, но в них имеются составляющие этой переменной. Тогда соединение графов надо произвести таким образом, чтобы составляющие складывались. Очевидно, для этого все составляющие должны быть представлены стоками, которые затем могут быть соединены между собой. Учет знаков производится аналогично первому случаю.

В итоге мы получили три соотношения:

1) если сток одного графа является источниками других, соответствующие вершины можно наложить друг на друга;

2) если в графах имеются источники, соответствующие одной и той же переменной, соответствующие вершины можно объединить;

3) при наложении стоков соответствующие переменные складываются.

На фиг. 2-90 приведены примеры на составление графов соединением подграфов. Как видно из примера, одна переменная может быть учтена несколько раз, а именно, если она будет составляющей нескольких переменных. В примере (фиг. 2-90,а) такой переменной является U_k .

2.9.6. Граф узловых напряжений

Перейдем к рассмотрению методов составления графов для электрических цепей, разработанных конкретно для них. Они, конечно, могут быть обобщены и для любых линейных систем, но мы ограничимся электрическими цепями.

При построении графа узловых напряжений мы исходим из унисторной схемы замещения. Рассмотрим сначала зажим, ток которого равен нулю (к которому не подключен источник).

В таком случае ток, входящий в зажим k через унисторы, направленные к зажиму k,

$$I^{+} = \sum_{i} u_{ik} U_i$$

равен току, выходящему через унисторы, направленные от зажима k :

$$I^{-} = U_k \sum_{r} u_{kr} ,$$

т.е.

$$U_k \sum_{r} u_{kr} = \sum_{i} u_{ik} U_i$$

или

$$U_k = \sum_{i} \frac{u_{ik}}{\sum_{r} u_{kr}} U_i .$$

В графе, где вершинами являются узловые напряжения U_j, напряжение U_k выражается через остальные:

$$U_k = \sum_{i} t_{ik} U_i .$$

Сравнивая последние выражения, получим

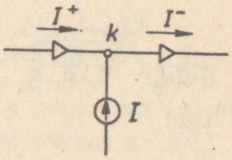
$$t_{ik} = \frac{u_{ik}}{\sum_{r} u_{kr}} .$$

Если к данному зажиму k подключен еще источник тока I, то (фиг.2-91)

$$I^{+} + I = I^{-},$$

откуда

$$U_k = \sum_{i} \frac{u_{ik}}{\sum_{r} u_{kr}} U_i + \frac{I}{\sum_{r} u_{kr}} .$$

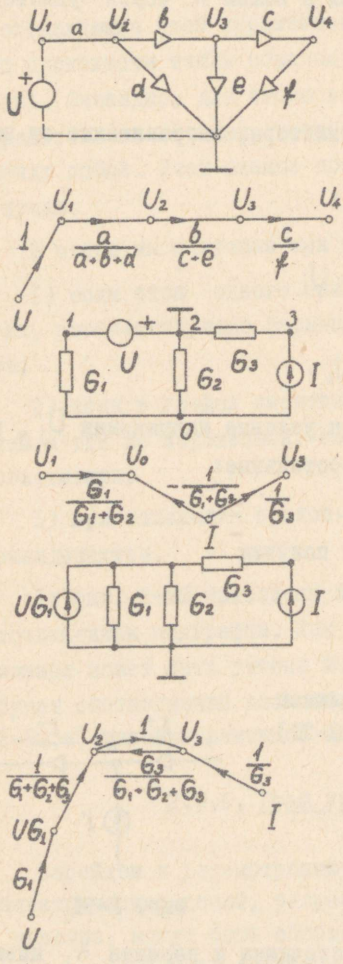


Фиг. 2-91

Значит, прибавляется дуга от источника к вершине k, имеющая передачу

$$\frac{1}{\sum_{r} u_{kr}} .$$

Если в схеме имеются источники напряжения, то один из его зажимов следует выбирать заземленным. В таком случае потенциал другого зажима будет источником графа. Если этого нельзя сделать, построение графа усложняется, и мы этот случай не будем рассматривать. Практически все источники имеют внутреннее сопротивление, так что если его нельзя заземлить, надо использовать схему Нортона.



Фиг. 2-92

Примеры на построение графов узловых напряжений приведены на фиг. 2-92. Надо иметь в виду, что двухстороннюю проводимость следует представить как соединение двух унисторов.

Если рассматривать только неавтономную часть, то сигнальный граф имеет, очевидно, такую же топологическую структуру, как и сама унисторная схема, за исключением унисторов, направленных к земле. Если включить в граф и потенциал заземленного зажима, то соответствие будет полное.

2.9.7. Граф контурных токов

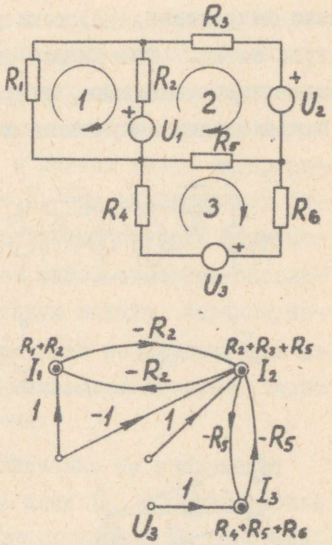
Граф контурных токов может быть получен таким же путем, как и граф узловых напряжений. Для плоских схем его можно получить и из соображений дуальности. Здесь мы приведем только метод составления С-графа контурных токов для обратимой цепи плоской схемы (без доказательства, которое довольно элементарно).

Построение следующее:

I) выбираем независимыми циклами края конечных граней плоской схемы, контурные токи направляем одинаково;

2) строим дуальный граф, где каждому неавтономному двухполюснику соответствует пара дуг с противоположными направлениями и передачами $(-\bar{Z})$, где $\bar{Z}$ - сопротивление двухполюсника;

3) у каждой вершины образуем петлю с передачей, равной собственному сопротивлению контура (петля С-графа!);



Фиг. 2-93

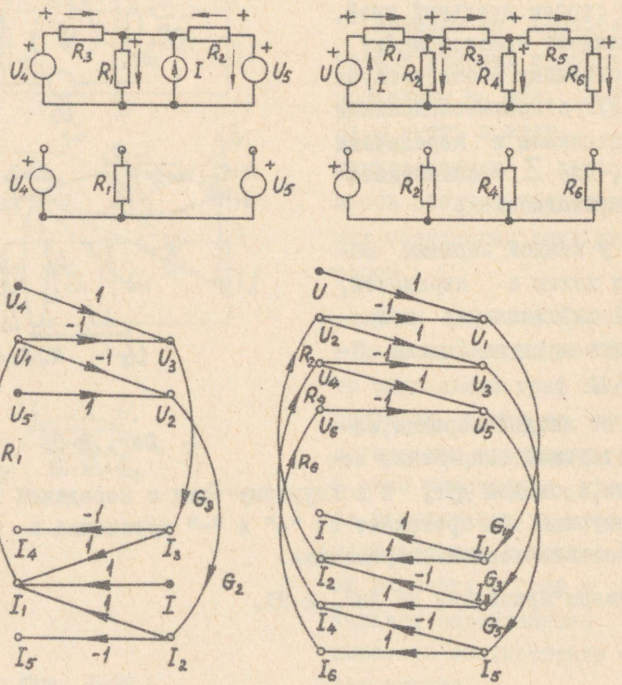
4) от каждой вершины, соответствующей напряжению источника, проведем дугу к контурному току с передачей I, если контурный ток протекает от "+" к "-" источника и (-I) при противоположном направлении.

Примеры приведены на фиг. 2-93.

2.9.8. Полный граф

Наконец, приведем еще методику, позволяющую построить сигнальный граф, который связывает токи и напряжения всех ребер сети.

Принцип этого метода следующий: если выбирать дерево, содержащее все источники напряжения цепи, но ни одного источника тока, то I) напряжения ребер дерева образуют базис напряжений, 2) токи ребер, не входящих в дерево, образуют базис. Теперь все остальные напряжения и токи выражают через базисные, а нужные соотношения между токами и напряжениями получаются из соотношений $I = YU$, $U = ZI$.



Фиг. 2-94

Этот метод оказывается полезным, если нужно вычислить все токи и напряжения в сети. Примеры приведены на фиг. 2-94.

§ 2.10. Обратная связь. Чувствительность

2.10.1. Определитель системы

Выше мы два раза встречались с определителями системы (цепи): при изучении топологических методов анализа и сигнальных графов. В обоих случаях они были центральными понятиями - определители оказались основными величинами при вычислении передач, и притом были инвариантами в отношении к передачам, т.е. они определились самой системой, независимо от приложения внешних возмущений и процессов в системе. Более того, свойства определителя системы определяют еще такую важную характеристику, как устойчивость системы. Ниже рассмотрим еще некоторые важные понятия теории линейных систем, тесно связанные с определителем системы.

Прежде всего надо обратить внимание на следующее: рассмотренные выше определитель цепи Δ и определитель сигнального графа D (что, конечно, совпадает с определителем С-графа) различны. Но при этом они оба являются линейными функциями любого параметра системы: Δ является функцией проводимостей цепи (схемы замещения), D является функцией передач дуг графа. Различие появляется, например, в том, что Δ имеет размерность [сим^n], а D - безразмерное. Но это различие несущественно, и в отношении свойств системы оба определителя эквивалентны (см. 2.10.5).

Для начальной стадии исследований мы определяем определитель линейной системы D как некоторую вполне определенным образом полученную форму, зависящую линейно от каждого параметра системы и только от них. Здесь остается еще открытым вопрос о том, что мы понимаем под параметрами системы. Во всяком случае они являются какими-то величинами, характеризующими данную систему и не зависящими от процессов в этой системе.

2.10.2. Обратная связь для параметра

Выбираем какой-то параметр данной системы, обозначая его значение через g. Определитель системы является линейной функцией этого параметра:

$$D = D_0 + gB. \qquad (2\text{-}22)$$

Значит, определитель состоит из части D_0, не зависящей от параметра g, и части gB, пропорциональной параметру g. Влияние параметра на определитель можно характеризовать по-разному: можно, например, задавать коэффициент при g, т.е. B. Но такая характеристика является неточной, так как, например, при $D_0 \gg B$ влияние g на определитель мало, хотя B само может иметь большие значения (последнее понятие само нечетко определено). Наиболее естественно было бы представить определитель в виде произведения не зависящей от g части определителя и функции от g (которая оказывается линейной):

$$D = D_0 F, \qquad (2\text{-}23)$$

где D_0 – не зависящая от g часть D;
F – линейная функция от g.

Введенная нами величина F называется обратной связью для параметра g (происхождение названия выясняется ниже). Из

(2-22) и (2-23) получим для обратной связи выражения:

$$F = \frac{D}{D_0}, \qquad F = 1 + g\frac{B}{D_0}. \tag{2-24}$$

Для частных случаев из последнего уравнения получим:

I) если D не зависит от g – в этом случае говорят, что обратная связь отсутствует – $F = I$;

2) если D пропорциональна g, то $F = \infty$; в этом случае D наиболее сильно зависит от g;

3) если $F = 0$, то и $D = 0$, а $g = -\frac{D_0}{B}$; так как передачи системы обратно пропорциональны определителю, то они равны бесконечности; но при произвольно малых отклонениях g от $-\frac{D_0}{B}$ $D \neq 0$ и передачи становятся конечными – в этом случае говорят, что система неустойчива.

Из формулы (2-24) следует и правило для вычисления обратной связи:

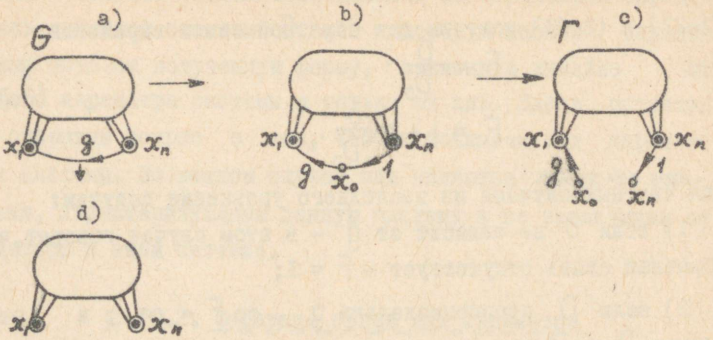
$$F = \frac{D}{D_0},$$

где D – определитель системы при номинальном значении g (при котором вычисляется обратная связь);

D_0 – определитель системы при нулевом значении g.

2.I0.3. Сигнальные графы

Пусть g является передачей дуги какого-либо сигнального графа. Предположим сначала, что эта дуга не является петлей, так что граф можно представить в виде С-графа без изменения данной дуги. Будем также считать, что граф является мертвым (фиг. 2-95,а). Сумма передач всех факторов (с соответствующими знаками) этого графа, очевидно, является определителем исходного графа.



Фиг. 2-95

Преобразуем теперь граф, как показано на фиг. 2-95,т.е. вместо дуги g берем соединение дуг с передачами 1 и g. Факторами этого графа будут все факторы предыдущего графа, которые только содержат эти дуги или, другими словами, передачи которых содержат множитель g. Но все передачи этих факторов будут членами числителя в передаче графа на фиг. 2-95,с с обратными знаками. Следовательно, пропорциональная g часть определителя, т.е. $-gB$, является числителем передачи графа Γ.

Знаменателем этой передачи будет, очевидно, определитель графа на фиг. 2-95,d. Этот определитель получается из первоначального при $g = 0$, т.е. он равен D_0. В итоге: передача графа, полученного из первоначального введением в данную дугу новой вершины и расщеплением последней, равна

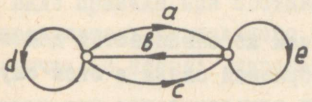
$$T_g = -g\frac{B}{D_0}.$$

Эта величина называется контурной передачей дуги g и,очевидно, обратная связь для этой дуги равна

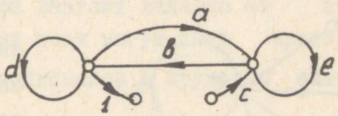
$$F_g = 1 - T_g.$$

Теперь можно объяснить терминологию, применяемую в теории обратной связи. Если $T_g = 0$, то сигнал, возникающий в

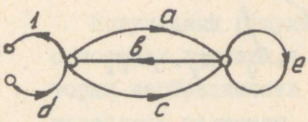
дуге g (точнее, во введенной туда вершине) после прохождения через граф, не возвращается в неё. Поэтому и говорят, что обратная связь отсутствует ($F = 1$). Если обратный сигнал (возвращающийся) имеет отличный от посланного знак ($T_g < 0$), то обратная связь называется отрицательной ($F > 1$); если знаки этих сигналов совпадают ($T_g > 0$), обратная связь называется положительной ($F < 1$).



$$F_c = 1 - \frac{bc}{1-d-e-ab+ed}$$



$$F_d = 1 - \frac{d(1-e)}{1-e-(d+c)b}$$





$$F_a = 1 - 0 = 1$$

$$F_b = 1 - 0 = 1$$

Фиг. 2-96

Требование о том, чтобы дуга не являлась петлей, можно теперь опускать, так как обратную связь для нее можно вычислить таким же путем, как и для обычной дуги. Примеры вычисления обратной связи приведены на фиг. 2-96.

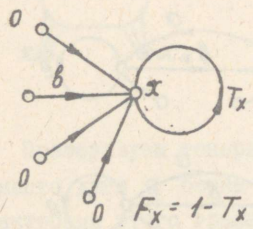
2.10.4. Обратная связь для переменной

Полученные в предыдущем пункте результаты позволяют вычислить и так называемую обратную связь для переменной. Так как изображениями переменных являются вершины, то обратной связью для переменной (вершины) называют величину

$$F_x = 1 - T_x,$$

где T_x – передача графа, полученного из первоначального расщеплением вершины x на источник и сток.

Если в полученном источнике создается сигнал величиной 1, то сигнал в стоке равен T_x, а обратная связь равна их разности. Поэтому контурную передачу (дуги или вершины) называют также возвратным отношением, а обратную связь – возвратной разностью.



Фиг. 2-97

В чем же заключается действие обратной связи в этом случае? Пусть граф имеет несколько источников. Выбираем вершину x и исключаем все вершины, кроме x и источников. После этого получим граф, показанный на фиг. 2-97, где T_x является, очевидно, контурной передачей вершины x. Пусть одна из независимых переменных ξ терпит какое-то изменение $\Delta\xi$, и пусть остальные независимые переменные имеют нулевые значения. Тогда изменение сигнала

$$\Delta x = \frac{t\Delta\xi}{1 - T_x} = \frac{t\Delta\xi}{F_x},$$

и, учитывая, что $x = t\cdot\xi$, отношение относительных изменений

$$\frac{\frac{\Delta\xi}{\xi}}{\frac{\Delta x}{x}} = F_x.$$

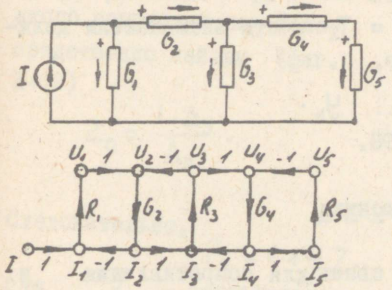
Таким образом, обратная связь для вершины характеризует чувствительность соответствующей переменной к изменениям возмущений.

2.10.5. Параметры

Выясним, что может быть параметром линейной цепи. Из вышеизложенного следует, что параметром может быть любая величина, от которой определитель зависит линейно. Из этого

вытекает, что параметрами могут быть проводимости двухполюсников, так как определитель сети Δ является линейной функцией всех таких проводимостей.

Сигнальный граф можно всегда так построить, что любая проводимость, любое сопротивление или любая крутизна(лампы, транзистора) встречается в графе лишь один раз (однократное применение конкретного соотношения было нами дано в виде правила при составлении, см. 2.9.3). Следовательно, определитель сигнального графа зависит линейно от этих величин. В итоге: параметрами цепи могут быть проводимости или сопротивления двухполюсников и крутизны активных элементов.



$$\Delta = G_3(G_1+G_2)(G_4+G_5) +$$
$$+ G_1G_2(G_4+G_5) + G_4G_5(G_1+G_2) =$$
$$= G_1G_3G_4 + G_1G_3G_5 + G_2G_3G_4 +$$
$$+ G_2G_3G_5 + G_1G_2G_4 + G_1G_2G_5 +$$
$$+ G_1G_4G_5 + G_2G_4G_5$$

$$D = 1 + R_1G_2 + G_2R_3 + R_3G_4 + G_4R_5 +$$
$$+ R_1G_2R_3G_4 + R_1G_2G_4R_5 + G_2R_3G_4R_5$$

сопротивления: R_1, R_3, R_5

$$D \cdot G_1G_3G_5 = G_1G_3G_5 + G_2G_3G_5 +$$
$$+ G_1G_2G_5 + G_1G_4G_5 + G_1G_3G_4 +$$
$$+ G_2G_4G_5 + G_2G_3G_4 + G_1G_2G_4$$

$$\Delta = D \cdot G_1G_3G_5$$

Фиг. 2-98

Полученный результат относится к цепям,в которых необратимость обусловлена наличием активных элементов. Дело обстоит сложнее, если в цепи имеются пассивные необратимые элементы (влияние магнитного поля или вращения, см. I.6.4). Но этот случай на практике редко встречается,и мы не будем его касаться.

Наконец, рассмотрим еще, как связаны между собой определитель сети Δ и определитель соответствующего сигнального графа D. Последний является функцией (линейной и безразмерной) от

некоторых проводимостей (в том числе и крутизн) и сопротивлений:

$$D = f(Y_1, Y_2, \dots Y_k, Z_{k+1}, Z_{k+2} \dots, Z_n).$$

Определитель Δ , с другой стороны, зависит только от проводимостей, и, кроме того, ни одна проводимость не является множителем в Δ (это была бы проводимость висячего ребра, но таковые исключаются из рассмотрения (см. 2.I.II). Любая передача, найденная из сети топологической формулой (T_1), должна равняться передаче, найденной из сигнального графа (T_2). Если теперь перемножить передачу, полученную из сигнального графа T_2 на $Y_{k+1} \cdot Y_{k+2} \cdot \dots \cdot Y_n$, то ее знаменатель будет содержать лишь проводимости, как и знаменатель T_1 . Так как $T_1 = T_2$, эти знаменатели должны быть равными. Следовательно,

$$\Delta = D \cdot Y_{k+1} \cdot Y_{k+2} \cdot \dots \cdot Y_n .$$

Пример приведен на фиг. 2-98.

2.I0.6. Двухполюсники

Легко вычисляется обратная связь для сопротивления и проводимости двухполюсника. Этот элемент является одним из основных элементов электрических цепей, поэтому и его сопротивление или проводимость часто является параметром цепи.

Формулы для обратных связей могут быть получены двумя путями: из топологического определителя Δ или определителя соответствующего сигнального графа. Начнем с топологического метода.

Определитель сети (это может быть схема замещения сложной цепи, в которую входит данный двухполюсник) может быть разложен по ребру (2.6.4):

$$\Delta = \Delta_0 + Y\Delta_y ,$$

где y – проводимость двухполюсника;

Δ_0 – определитель системы при исключении y;

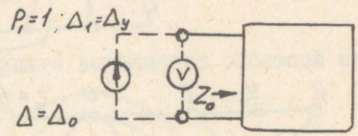
Δ_y – определитель системы при закорачивании y.

В данном случае ни Δ_0, ни Δ_y не зависят от y. Поэтому обратная связь для y равна:

$$F_y = \frac{\Delta}{\Delta_0} = 1 + y\,\frac{\Delta_y}{\Delta_0}.$$

Нетрудно видеть, что $\frac{\Delta_y}{\Delta_0}$ представляет собой сопротивление цепи между зажимами y при отсутствии этого двухполюсника. Действительно, из схемы измерения этого сопротивления непосредственно найдем (фиг. 2-99)

$$Z_0 = \frac{1 \cdot \Delta_y}{\Delta_0}.$$



$$Z_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}$$

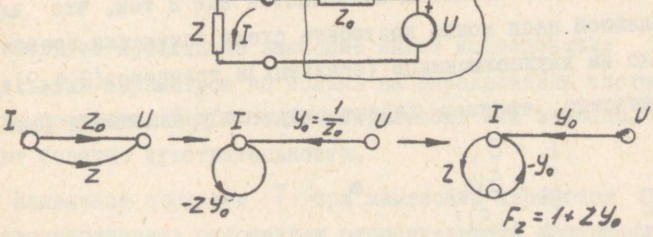
Фиг. 2-99

Следовательно,

$$F_y = 1 + y Z_0,$$

где Z_0 – сопротивление цепи между зажимами y при отсутствии последнего.

Таким же образом можно было найти обратную связь для сопротивления двухполюсника, но здесь возникают трудности при нахождении определителя. Поэтому мы соответствующую формулу найдем из сигнального графа.

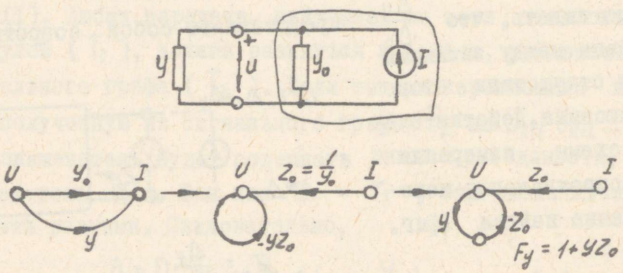


Фиг. 2- 100

Внешнюю для двухполюсника цепь можно всегда представить схемой Тевенина (фиг. 2-100). Построим для этой схемы сигнальный граф, откуда непосредственно для обратной связи найдем

$$F_Z = 1 + Z Y_0 ,$$

где Y_0 – проводимость цепи между зажимами Z при отсутствии последнего.



Фиг. 2-101

Точно таким же путем можно найти обратную связь для проводимости. Соответствующее решение дано на фиг.2-101.

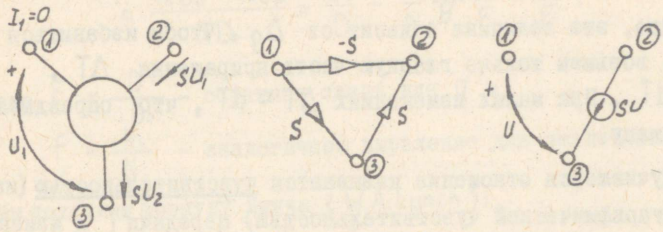
2.10.7. Транзор

Транзор является таким же важным элементом линейной цепи, как обратимый двухполюсник. В отличие от унистора транзор является физически возможным элементом линейной цепи, поэтому ее проводимость может быть параметром линейной цепи. Значение этого элемента заключается еще в том, что для любой линейной цепи можно построить схему замещения, состоящую только из двухполюсников (реальных) и транзоров (2.4.9).

Как известно, транзор характеризуется уравнениями (фиг. 2-102):

$$I_1 = 0 ,$$
$$I_2 = S U_1 ,$$
$$I_3 = -S U_1 ,$$

где S - проводимость транзора.

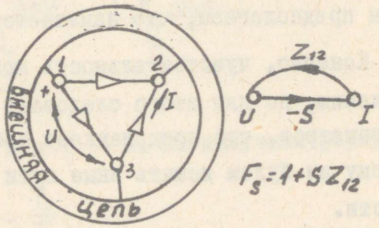


Фиг. 2-102

Так же как и в предыдущем пункте вычисление обратной связи для транзора можно произвести как топологическими, так и методами сигнальных графов. Мы пользуемся последним.

На фиг. 2-103 показан общий случай соединения транзора и соответствующий граф, откуда найдем

$$F_s = 1 + SZ_{12},$$



Фиг. 2-103

где Z_{12} - передаточное сопротивление внешней цепи от зажимов 2-3 к зажимам 1-3.

2.10.8. Чувствительность

Большое прикладное значение имеет исследование влияния отдельных параметров не только на определитель системы, но и на передачи. Чтобы охарактеризовать это влияние, используют понятие чувствительности.

Изменение передачи T при изменении параметра g можно охарактеризовать отношением относительного изменения T к относительному изменению g:

$$\frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta g}{g}}.$$

Очевидно, эта величина зависит от Δg. Чтобы избавиться от этого, возьмем только главную часть приращения ΔT, то есть dT. При малых изменениях $\Delta T \approx dT$, что оправдывает эту замену.

Получившееся отношение называется чувствительностью (иногда логарифмической чувствительностью) передачи T к изменениям параметра g:

$$S_g^T = \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dg}{g}} = \frac{d(\ln T)}{d(\ln g)} = \frac{g}{T}\frac{dT}{dg} = \frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial g}$$

(мы предполагаем, что изменяется только параметр g).

Конечно, чувствительность можно вычислить прямо по определению, но для этого следовало бы найти T как функцию всех параметров, что представляет собой трудоемкую задачу. Поэтому мы будем искать иные пути для вычисления чувствительности.

2.10.9. Выражения чувствительности

Передача системы является дробнолинейной функцией параметров. Обозначаем

$$T = \frac{N}{D} = \frac{N_0 + gH}{D_0 + gB}$$

и отметим, что

$$g\frac{d}{dg}N = gN' = N - N_0,$$

$$g\frac{d}{dg}D = gD' = D - D_0.$$

Преобразуем теперь выражение чувствительности

$$S_g^T = \frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial g} = \frac{g}{T}\frac{\partial \frac{N}{D}}{\partial g} =$$

$$= \frac{gD}{N}\frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{(N - N_0)D - N(D - D_0)}{ND} =$$

$$= \frac{ND_0 - N_0D}{ND} = \frac{D_0}{D} - \frac{N_0}{N} = \frac{1}{F} - \frac{1}{F'},$$

где $F = \frac{D}{D_0}$ – обратная связь для g;

$F' = \frac{N_0}{N}$ – аналогичное выражение для числителя.

Мы получили формулу Линча (W.A.Lynch):

$$S_g^T = \frac{1}{Fg} - \frac{1}{F'g}.$$

Продолжаем преобразование:

$$S_g^T = \frac{ND_0 - N_0D}{ND} = \frac{1 - \frac{N_0D}{D_0N}}{\frac{D}{D_0}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{T_0}{T}}{Fg},$$

где $T_0 = \frac{N_0}{D_0}$ – передача при $g = 0$. Мы получили формулу Боде (H.W.Bode):

$$S_g^T = \frac{1 - \frac{T_0}{T}}{Fg}, \qquad (2\text{-}25)$$

которая является основной при вычислении чувствительности.

В случае, когда $T = 0$, вышеприведенное определение чувствительности неприменимо. Его следует заменить на

$$S'^T_g = g\frac{\partial T}{\partial g},$$

т.е. отношение изменения передачи к относительному изменению параметра (в данном случае чувствительность имеет размерность T). В этом случае

$$S'^T_g = \frac{N}{D}\frac{ND_0 - N_0D}{ND} = \frac{ND_0 - N_0D}{D^2} = -\frac{N_0D}{D^2} =$$

$$= -\frac{N_0D_0}{D_0D} = -\frac{T_0}{Fg}, \qquad (2\text{-}26)$$

так как $N = 0$.

2.10.10. Уменьшение чувствительности

Исследуем теперь выражения (2-25) и (2-26). Для уменьшения чувствительности имеется два пути:

1) сделать $T_0 = T$, в таком случае $S_g^T = 0$; но теперь T уже не зависит от g, и в большинстве случаев соответствующий элемент оказывается лишним, поэтому этот тривиальный случай не представляет интереса;

2) увеличить F_g, т.е. охватить данный элемент глубокой отрицательной обратной связью; это есть самый радикальный способ уменьшения чувствительности.

Кроме уменьшения чувствительности отрицательная обратная связь уменьшает и другие нежелательные эффекты в системе. Правда, увеличение обратной связи, как правило, усложняет систему (компенсация уменьшения передачи), но во многих задачах предпочтение следует отдать качеству.

2.10.11. Обратные параметры

В некоторых случаях вычисление чувствительности для параметра затруднено, зато легко вычисляется чувствительность относительно его обратной величины (например, проводимость - сопротивление). Выясним, как связаны эти чувствительности.

По определению

$$S_g^T = \frac{g}{T}\frac{dT}{dg}$$

и если $g = \frac{1}{q}$

$$dg = -\frac{dq}{q^2}.$$

Подставляя, найдем

$$S_g^T = \frac{1}{\left(-\frac{dq}{q^2}\right)}\frac{dT}{T} = -\frac{q}{T}\frac{dT}{dq}$$

или

$$S_g^T = -S_q^T. \qquad (2\text{-}27)$$

Значит, чувствительности по обратным параметрам имеют разные знаки, но по абсолютным значениям равны. Этим соотношением часто целесообразно пользоваться.

Нетрудно видеть, что (2-27) справедливо и при определении чувствительности по (2-26), т.е. при $T = 0$.

2.10.12. Изменение передачи

Обычно нас интересует, насколько изменяется передача при одновременном изменении нескольких параметров. Передача является функцией всех параметров g_i, так что его дифференциал можно представить следующим образом:

$$dT = \sum_i \frac{\partial T}{\partial g_i}$$

или, имея в виду малые изменения, мы можем считать, что

$$\Delta T \approx dT = \sum_i \frac{\partial T}{\partial g_i} \Delta g_i .$$

Поделив на T, найдем:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{T} \sum_i \frac{\partial T}{\partial g_i} \Delta g_i = \sum_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial g_i} \Delta g_i =$$

$$= \sum_i \left(\frac{g_i}{T} \frac{\partial T}{\partial g_i} \right) \frac{\Delta g_i}{g_i} = \sum_i S^T_{g_i} \delta_{g_i} ,$$

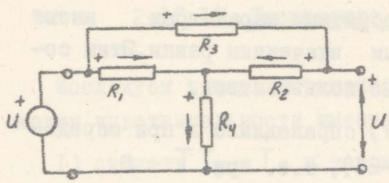
где $\delta = \frac{\Delta g_i}{g_i}$ – относительное изменение параметра g_i.

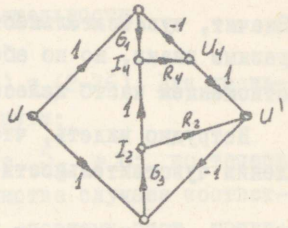
Очевидно, при другом определении чувствительности ($T = 0$) получим аналогичную формулу:

$$\Delta T = \sum_i S'^T_{g_i} \delta_{g_i} .$$

Поясняем применение этих формул на примере. На фиг.2-104 дана схема и соответствующий граф. Там же найдены передача, обратные связи и чувствительности. Требуется определить передачу при следующих данных:

1) $G_1 = 1$ мсим, $R_2 = 0{,}99$ ком, $G_3 = 1{,}01$ мсим, $R_4 = 1{,}02$ ком и
2) $G_1 = 0{,}9$ мсим, $R_2 = 1{,}1$ ком, $G_3 = 0{,}99$ мсим, $R_4 = 1{,}1$ ком.





$L_1 = -G_1 R_4$

$L_2 = -R_2 G_3$

$L_3 = -G_3 R_4$

$$T = \frac{G_1 R_4 + G_3 R_2 (1 - L_1) + G_3 R_4}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2} = \frac{4}{5} = 0{,}800$$

$F_{G_1} = \frac{5}{3}$	$T_{01} = \frac{2}{3}$	$S_{G_1} = 0{,}10$
$F_{R_2} = \frac{5}{3}$	$T_{02} = \frac{2}{3}$	$S_{R_2} = 0{,}10$
$F_{G_3} = \frac{5}{2}$	$T_{03} = \frac{1}{2}$	$S_{G_3} = 0{,}15$
$F_{R_4} = \frac{5}{2}$	$T_{04} = \frac{1}{2}$	$S_{R_4} = 0{,}15$

Фиг. 2-104

В первом случае $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = -0{,}01$, $\delta_3 = 0{,}01$, $\delta_4 = 0{,}02$ и, следовательно,

$$\Delta T = T \sum_i S_i \delta_i = 0{,}800(0 \cdot 0{,}10 - 0{,}01 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 \cdot 0{,}15 + 0{,}02 \cdot 0{,}15) =$$

$$= 0{,}800 \cdot 0{,}0035 = 0{,}0028 \text{ и}$$

$$T' = T + \Delta T = 0{,}8028.$$

Точное значение, найденное из выражения T, равно 0,80276.

Во втором случае:

$$T = T\left(1 + \sum_i S_i \delta_i\right) = 0{,}800(1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 - 0{,}01 \cdot 0{,}15 +$$

$$+ 0{,}01 \cdot 0{,}15) = 0{,}800.$$

Из выражения для T найдем $T' = 0{,}7980$. Даже при изменении параметров на 10% достигнута хорошая точность (в данном случае это обусловлено малым значением S_i).

§ 2.II. Сравнение методов

2.II.I. Критерии

Изложение методов расчета линейных цепей целесообразно, конечно, закончить общей характеристикой их, сравнением рациональности применения того или иного метода в каждом конкретном случае. Однако подробный такой анализ требовал бы не меньшего объема, чем изложение самих методов расчета. Поэтому мы укажем только некоторые общие критерии сравнения, которые могут быть применены при выборе метода решения конкретной задачи. Затем для характеристики возможностей разных методов рассмотрим один пример, где довольно четко вырисовываются достоинства и недостатки методов расчета.

Первое требование при решении любой конкретной задачи – результаты должны быть получены с требуемой точностью. Отсюда вытекают требования к точности как исходных данных, так и вычислений. Для нас основной интерес представляет последнее.

Точность вычислений зависит прежде всего от точности самих величин, над которыми производятся действия. В инженерной практике в первую очередь следует рассчитывать на счетную линейку (во всяком случае до сих пор), точность которой невысока, а поэтому весьма существенно учитывать и второй фактор – метод вычисления. Как известно, один и тот же результат можно получить несколькими путями, которые дадут, вообще говоря, разные погрешности (особенно нежелательным, например, является вычитание близких чисел). Поэтому оптимальность в отношении к точности вычислений (точности, связанной с методом вычисления) может оказаться решающим при выборе метода расчета цепи. Следует также иметь в виду, что и электронно-вычислительная машина имеет ограниченную точность (в этом случае нерациональный выбор метода расчета

может привести к особенно чрезмерному увеличению объема вычислений).

Очевидно, одним из путей рационализации вычислений является применение минимальных формул - топологических формул. Но надо иметь в виду, что топологические формулы не содержат вычитаний только в том случае, когда все проводимости положительны. В противном случае требуется некоторая осторожность.

С другой стороны, при применении сигнальных графов имеем дело с формулами, которые по внешнему виду неминимальны. Но практически во многих случаях оказывается, что передачи всех контуров и факторов отрицательны (все обратные связи отрицательны), и при расчете все слагаемые положительны. В таком случае имеем также дело с минимальной формулой (как это будет и в нашем примере).

Методы, основанные на прямом вычислении определителей, в расчетном отношении оказываются крайне неудобными (во всяком случае при порядках свыше 2-3), так как они включают большое количество вычитаний, причем, как правило, близких величин. Однако для более простых задач эти методы предпочтительнее топологических методов и сигнальных графов.

Весьма существенным при практических расчетах оказывается также полный объем вычислений. С одной стороны, погрешности вычислений при расчетах с ограниченной точностью растут с увеличением объема вычислительных операций, а, с другой стороны, объем вычислений определяет и затраты времени, т.е. экономичность. С этой точки зрения предпочтение следует отдать формулам минимального типа (хотя и здесь существуют исключения).

Наконец, выбор метода расчета зависит от того, сколь подробный анализ необходимо провести. Если предполагается

вычислить такие характеристики, как обратные связи, чувствительности, то почти без исключения наиболее целесообразно пользоваться сигнальными графами.

Перейдем теперь к рассмотрению примера. При этом сосредоточим внимание не на самих расчетах, а именно на достоинствах и недостатках разных методов.

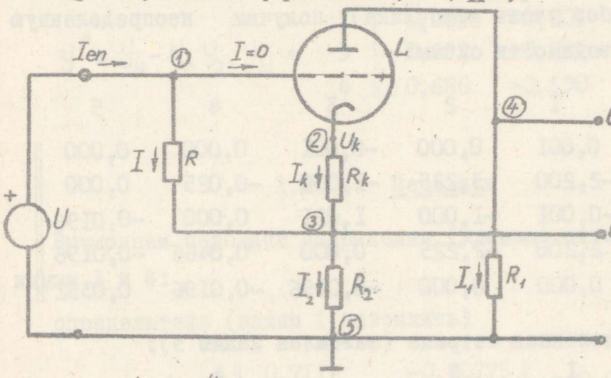
2.II.2. Задача

На фиг. 2-I05 приведена схема так называемого фазоинвертора. Там же указаны матрицы проводимости отдельных составляющих цепи при следующих исходных данных:

$S = 2{,}2$ мсим, $R_i = 40$ ком, $R = I$ мом, $R_k = I$ ком,

$R_1 = 5I$ ком, $R_2 = 5I$ ком (считаем эти данные точными), откуда

$G_i = 25$ мксим, $G = I$ мксим, $G_k = I$ мсим, $G_1 = I9{,}6$ мксим, $G_2 = I9{,}6$ мксим (три значащих цифры).



$$\bar{Y}_L = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 2{,}200 & 0{,}025 & -2{,}225 \\ -2{,}200 & -0{,}025 & 2{,}225 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \bar{Y} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}001 & -0{,}001 \\ -0{,}001 & 0{,}001 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\bar{Y}_k = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}000 & -1{,}000 \\ -1{,}000 & 1{,}000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \bar{Y}_1 \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}0196 & -0{,}0196 \\ -0{,}0196 & 0{,}0196 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \bar{Y}_2 \begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}0196 & -0{,}0196 \\ -0{,}0196 & 0{,}0196 \end{pmatrix} \end{array}$$

Фиг. 2-I05

Расчеты проведем с использованием следующих единиц: вольты, миллиамперы, миллисименсы, килоомы (тогда дополнительные коэффициенты отсутствуют). Единицы измерения будут указаны только в окончательных результатах.

Требуется вычислить: I) передачи от U до U_1, U_2; 2) сопротивление между зажимами I и 5; 3) напряжения всех зажимов при $U = 9$ в; 4) токи во всех двухполюсниках и через зажимы лампы; 5) некоторые дополнительные величины, указанные ниже в решении.

Все вычисления произведем на счетной линейке. Для сравнения и определения погрешности приведем и более точные результаты, полученные при вычислении с шестизначными числами.

2.II.3. Матрица. Исключение

Складывая (дополненные) неопределенные матрицы элементов схемы (без учета источника), получим неопределенную матрицу проводимости схемы:

$$\bar{Y} = \begin{array}{c|ccccc} & I & 2 & 3 & 4 & 5 \\ I & 0{,}001 & 0{,}000 & -0{,}001 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 2 & -2{,}200 & 3{,}225 & -1{,}000 & -0{,}025 & 0{,}000 \\ 3 & -0{,}001 & -1{,}000 & 1{,}021 & 0{,}000 & -0{,}0196 \\ 4 & 2{,}200 & -2{,}225 & 0{,}000 & 0{,}0466 & -0{,}0196 \\ 5 & 0{,}000 & 0{,}000 & -0{,}0196 & -0{,}0196 & 0{,}0392 \end{array},$$

откуда определенная матрица (заземлен зажим 5):

$$Y = \begin{array}{c|cccc} & I & 2 & 3 & 4 \\ I & 0{,}001 & 0{,}000 & -0{,}001 & 0{,}000 \\ 2 & -2{,}200 & 3{,}225 & -1{,}000 & -0{,}025 \\ 3 & -0{,}001 & -1{,}000 & 1{,}021 & 0{,}000 \\ 4 & 2{,}200 & -2{,}225 & 0{,}000 & 0{,}0446 \end{array}.$$

Для упрощения вычислений передач исключаем зажим 2:

$$Y_{11} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}001 & -0{,}001 & 0{,}000 \\ -0{,}001 & 1{,}021 & 0{,}000 \\ 2{,}200 & 0{,}000 & 0{,}0446 \end{array} \right\| \end{array}; \quad Y_{12} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \left\| \begin{array}{c} 0{,}000 \\ -1{,}000 \\ -2{,}225 \end{array} \right\| \end{array};$$

$$Y_{21} = \begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} -2{,}200 & -1{,}000 & -0{,}025 \end{array} \right\| \end{array}; \quad Y_{22} = \begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ (3{,}225) \end{array};$$

$$Y_{22}^{-1} = (0{,}310);$$

$$Y_{12} Y_{21} = \left\| \begin{array}{c} 0{,}000 \\ -1{,}000 \\ -2{,}225 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} -2{,}200 & -1{,}000 & -0{,}025 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 2{,}200 & 1{,}000 & 0{,}025 \\ 4{,}900 & 2{,}225 & 0{,}0556 \end{array} \right\|;$$

$$Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} = \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}682 & 0{,}310 & 0{,}00775 \\ 1{,}520 & 0{,}690 & 0{,}0173 \end{array} \right\|;$$

$$Y^{*} = Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}001 & -0{,}001 & 0{,}000 \\ -0{,}683 & 0{,}711 & -0{,}00775 \\ 0{,}680 & -0{,}690 & 0{,}0273 \end{array} \right\| \end{array}.$$

2.11.4. Передачи

Вычисляем передачи напряжения (усиления) от зажима 1 к зажимам 3 и 4:

определитель (зажим 1 заземлить)

$$\Delta = \left\| \begin{array}{cc} 0{,}711 & -0{,}00775 \\ -0{,}690 & 0{,}0273 \end{array} \right\| = 0{,}0141;$$

$$Y_{14,55} = (-1)^{1+3+3+3} \left\| \begin{array}{cc} -0{,}683 & 0{,}711 \\ 0{,}680 & -0{,}690 \end{array} \right\| = 0{,}471 - 0{,}483 = -0{,}012;$$

$$Y_{13,55}=(-1)^{1+2+3+3}\begin{vmatrix} -0,683 & -0,00775 \\ 0,680 & 0,0275 \end{vmatrix} = 0,0188-0,0053=0,0135;$$

$$T_1 = \frac{U_1}{U} = \frac{Y_{14,55}}{\Delta} = -0,852 \quad (\text{рго} - 0,9487);$$

$$T_2 = \frac{U_2}{U} = \frac{Y_{13,55}}{\Delta} = 0,957 \quad (\text{рго} - 0,9511).$$

Большая погрешность T_1 получается из-за вычитания близких чисел в $Y_{14,55}$.

2.II.5. Токи, напряжения

Найдем все напряжения и токи:

$U_1 = T_1 U = -7,61$ в (рго $-8,538$);
$U_2 = T_2 U = 8,61$ в (рго $8,560$);
$I_1 = G_1 U_1 = -149$ мка (рго $-167,4$);
$I_2 = G_2 U_2 = 169$ мка (рго $167,8$);
$U_{13} = U - U_2 = 0,39$ в (рго $0,440$);
$I = I_{en} = G \cdot U_{13} = 0,39$ мка (рго $0,440$);
$I_k = -I_1 = 149$ мка (рго $167,4$);
$U_k = U_2 + I_k R_k = 8,76$ в (рго $8,728$).

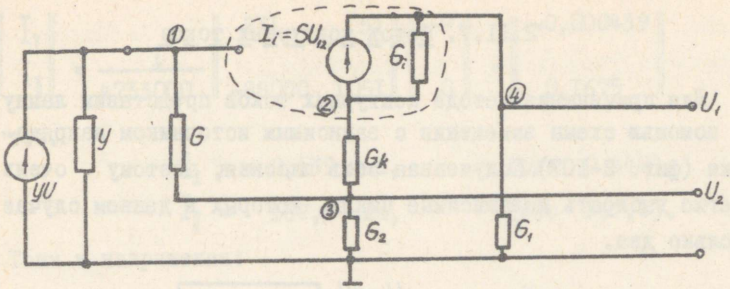
По первому закону Кирхгофа должно быть $I + I_k - I_2 = 0$:

$$0,39 + 149 - 169 = -19,61 \text{ мка} \neq 0.$$

Это несоответствие и погрешности рассчитанных величин обусловлены неточными T_1 и T_2, из которых мы исходили.

2.II.6. Метод узловых напряжений

Для применения метода узловых напряжений, представим лампу в виде схемы замещения с зависимым источником, и источник напряжения снабдим внутренним сопротивлением, представляя его схемой Нортона (фиг. 2-106).



Фиг. 2-106

Составляем уравнение для полученной сети:

$$\begin{Vmatrix} yU \\ -I_i \\ 0 \\ I_i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G+y & 0 & -G & 0 \\ 0 & G_i+G_k & -G_k & -G_i \\ -G & -G_k & G+G_k+G_2 & 0 \\ 0 & -G_i & 0 & G_1+G_i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Vmatrix}$$

и дополнительное уравнение для зависимого источника:

$$I_i = S(U_1 - U_2).$$

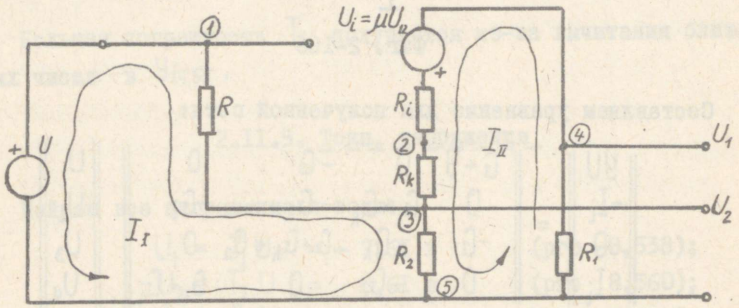
Введем это в основное уравнение

$$\begin{Vmatrix} yU \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (G+y) & 0 & -G & 0 \\ -S & (G_i+G_k+S) & -G_k & G_i \\ -G & -G_k & (G+G_k+G_2) & 0 \\ S & (-G_i-S) & 0 & (G_1+G_i) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Vmatrix}$$

Подставляя численные значения, найдем решение уравнения, в котором для получения окончательного результата придется еще устремить $y \to \infty$. Ввиду громоздкости вычислений, мы их проводить не будем (система 4 порядка!). Нецелесообразность применения метода узловых напряжений в данном случае очевидна.

2.II.7. Метод контурных токов

Для применения метода контурных токов представим лампу с помощью схемы замещения с зависимым источником напряжения (фиг. 2-I07). Полученная сеть плоская, поэтому очень легко выбирать независимые циклы, которых в данном случае только два.



Фиг. 2-I07

Уравнение

$$\begin{Vmatrix} -U \\ U_i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_1+R_2+R_k+R_i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{Vmatrix}$$

и дополнительное

$$U_i = \mu(U_1 - U_2) = \mu(-RI_I - R_k I_{II}) = -\mu R I_I - \mu R_k I_{II} .$$

Используя последнее, найдем окончательно:

$$\begin{Vmatrix} -U \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R+R_2 & -R_2 \\ \mu R - R_2 & R_1+R_2+R_k+R_i+\mu R_k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{Vmatrix} .$$

Подставляем числовые данные и решаем уравнение:

$$\begin{Vmatrix} -9 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1051 & -51 \\ 88000 & 231 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{Vmatrix} ,$$

$$\begin{Vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{Vmatrix} = \frac{1}{4733000} \begin{Vmatrix} 231 & 51 \\ -88000 & 1051 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -9 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0,000439 \\ 0,1675 \end{Vmatrix}$$

т.е.

$I_I = -0,439$ мка, (pro $0,440$),

$I_{II} = 167,5$ мка, (pro $167,4$).

Токи и напряжения:

$U_1 = -I_{II} R_1 = -8,54$ в (pro $-8,538$),

$U_2 = (I_{II} - I_I) R_2 = 8,56$ в (pro $8,560$),

$I_1 = I_k = -I_{II} = -167,5$ мка (pro $-167,4$),

$I_2 = I_{II} - I_I = 167,9$ мка (pro $167,8$),

$I = I_{en} = -I_I = 0,439$ мка (pro $0,440$),

$U_k = U_2 + R_k I_k = 8,73$ в (pro $8,728$).

Как видно, метод контурных токов (в противоположность методу узловых напряжений) в данном случае оказался очень простым и рациональным. Низкий порядок уравнения (два) и "хорошие" числовые данные привели к очень рациональным вычислениям, объем которых оказался чрезвычайно малым и результаты имеют высокую точность. Подчеркнем еще раз: главная причина - малое число независимых циклов.

2.II.8. Топологический расчет

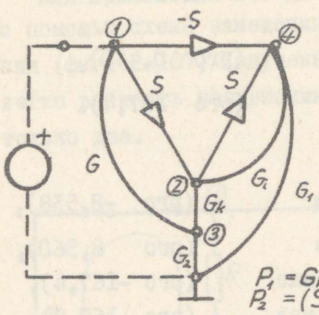
Для применения топологических формул построим унисторную схему замещения цепи (фиг. 2-108). На фиг. 2-109 и 2-110 приведены расчеты T_1 и T_2. Все числовые данные в миллисименсах.

Из результатов

$T_1 = -1,06$ (pro $-0,9487$)

$T_2 = 0,956$ (pro $0,9511$)

видно, что точность их невысока (особенно T_1). Причина – вычитание близких чисел в числителях.

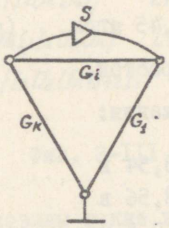

-S
S
S
+
G
G
G

$$N_1 = -S[(G_k + G + G_2)(S+G_i) + G_k(G_2+G)] + S(S+G_i)(G+G_2+G_k) +$$
$$+GG_k(S+G_i) = -SG_kG_2 + GG_kG_i = -0{,}0431\ ,$$
$$N_2 = G[G_k(G_i+G_1) + (S+G_i)G_1] + SG_k(G_i+G_1) - SG_iG_k =$$
$$= G[G_k(G_i+G_1) + (S+G_i)G_1] + SG_kG_1 = 0{,}0432\ .$$

Передачи:

$$T_1 = \frac{-0{,}0431}{0{,}0454} = -0{,}949 \qquad (\text{pro } -0{,}9487),$$

$$T_2 = \frac{0{,}0432}{0{,}0454} = 0{,}951 \qquad (\text{pro } 0{,}9511).$$



$P_1' = G = 0{,}001$ $\qquad \Delta_1' = G_k(G_i+G_1) + (S+G_i)G_1 = 0{,}0882$

$P_2' = SG_k = 2{,}2$ $\qquad \Delta_2' = G_i + G_1 = 0{,}0446$

$P_3' = -SG_iG_k$ $\qquad \Delta_3' = 1$

$$T_2 = \frac{0{,}0000882 + 0{,}0982 - 0{,}052}{0{,}0454} = \frac{0{,}0433}{0{,}0454} = 0{,}955$$

Фиг. 2-110

Приведенный пример показывает, что при применении топологических методов устранение погрешности намного проще, чем это было бы при расчете с помощью адъюнкт матрицы (в 2.II.3 из-за громоздкости вычислений мы уточнений не производили). Еще раз повторяем, что в случае пассивных обратимых цепей топологические формулы содержат только поло-

жительные члены, и погрешности из-за вычитания не будет.

Рассчитаем еще входное сопротивление схемы. Чтобы можно было воспользоваться найденным определителем, вычисляем входную проводимость Y_{en} :

$$C_1' = G G_2 = 0{,}196 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta_1' = G_k(G_1 + G_1) + G_1(S + G_1) = 0{,}0882,$$

$$C_2' = G G_k G_1 G_1 = 0{,}490 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_2' = 1,$$

$$Y_{en} = \frac{1{,}73 \cdot 10^{-6} + 0{,}49 \cdot 10^{-6}}{0{,}454 \cdot 10^{-1}} = \frac{2{,}22 \cdot 10^{-5}}{0{,}454} = 4{,}89 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 0{,}0489 \text{ мксим} \quad (\text{рго } 0{,}04886),$$

$$Z_{en} = \frac{1}{Y_{en}} = \frac{U}{I_{en}} = 20{,}45 \text{ мгом} \quad (\text{рго } 20{,}47).$$

Точность высокая, расчет простой.

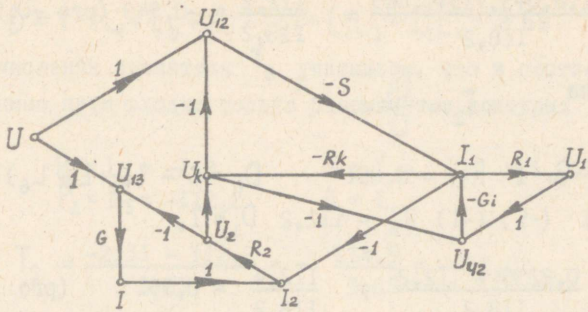
Найдем все токи и напряжения:

$$U_1 = T_1 U = -8{,}54 \text{ в} \quad (\text{рго } -8{,}538),$$
$$U_2 = T_2 U = 8{,}56 \text{ в} \quad (\text{рго } 8{,}560),$$
$$I_1 = G_1 U_1 = -167{,}4 \text{ мка} \quad (\text{рго } -167{,}4),$$
$$I_2 = G_2 U_2 = 167{,}7 \text{ мка} \quad (\text{рго } 167{,}8),$$
$$U_{13} = U - U_1 = 0{,}44 \text{ в} \quad (\text{рго } 0{,}440),$$
$$I = I_{en} = G \cdot U_{13} = 0{,}44 \text{ мка} \quad (\text{рго } 0{,}440),$$
$$I_k = -I_1 = 167{,}4 \text{ мка} \quad (\text{рго } 167{,}4),$$
$$U_k = U_2 + I_k R_k = 8{,}73 \text{ в} \quad (\text{рго } 8{,}728),$$
$$I + I_k - I_2 = 167{,}84 - 167{,}70 = 0{,}14 \text{ мка}.$$

Последний результат вполне удовлетворительный, так как расчеты были проведены с точностью трех знаков.

2.II.9. Сигнальный граф

Сигнальный граф для данной цепи приведен на фиг. 2-III.



$L_1 = -GR_2 = -0,051\ (U_{13}I_2U_2)$

$L_2 = -SR_K = -2,2\ (U_{12}I_1U_K)$

$L_3 = -R_1G_i = -1,275\ (I_1U_1U_{42})$ $\quad L_1L_2 = 0,1122$

$L_4 = -R_KG_i = -0,025\ (I_1U_KU_{42})$ $\quad L_1L_3 = 0,065$

$L_5 = -SR_2 = -112,2\ (U_{13}I_1I_2U_2U_K)$ $\quad L_1L_4 = 0,001275$

$L_6 = -R_2G_i = -1,275\ (I_2U_2U_KU_{42}I_1)$

Фиг. 2-III

На фиг. 2-III указаны также все контуры графа и передачи контуров и некасающихся пар контуров. Передачи всех контуров отрицательны - это предсказывает точные (и простые) расчеты.

2.II.IO Передачи

Определитель графа

$$D = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1L_2 + L_1L_3 + L_1L_4) =$$

$$= 1 + 117,026 + 0,178 = 118,2.$$

Передача $T_1 = \dfrac{U_1}{U}$:

$P_1 = -1 \cdot S \cdot R_1 = -112,2$ $\quad D_1 = 1 - L_1 = 1,051$

$P_2 = 1 \cdot G \cdot 1 \cdot R_2 \cdot 1 \cdot (-1)(-S) R_1 = 5,725$ $\quad D_2 = 1$

$P_3 = 1 \cdot G \cdot 1 \cdot R_2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-G_i) R_1 = 0,065$ $\quad D_3 = 1$

$$T_1 = \frac{-118,0+5,725+0,065}{118,2} = \frac{112,2}{118,2} = -0,949 \text{ (pro } -0,9487).$$

Передача $T_2 = \frac{U_2}{U}$.

$P_1 = 1 \cdot G \cdot 1 \cdot R_1 = 0,051$ $\quad D_1 = 1 - (L_2+L_4+L_6) = 4,50;$

$P_2 = 1 \cdot (-S) \cdot (-1) \cdot R_2 = 112,2$ $\quad D_2 = 1,$

$$T_2 = \frac{0,2295 + 112,2}{118,2} = \frac{112,4}{118,2} = 0,951 \quad \text{(pro } 0,9511).$$

Входная проводимость $Y_{en} = \frac{I_{en}}{U}$:

$P_1 = 1 \cdot G = 10^{-3}$ $\quad D_1 = 1 - (L_2+L_3+L_4+L_5+L_6) = 117,98,$

$P_2 = 1 \cdot (-S) \cdot (-1) \cdot R_2 \cdot (-1) \cdot G = -112,2 \cdot 10^{-3}$ $\quad D_2 = 1$

$$Y_{en} = \frac{117,98 - 112,2}{118,2} 10^{-3} = \frac{5,78}{118,2} 10^{-3} = 0,0489 \text{ мксим}$$

(pro 0,04886).

Для T_1 и T_2 высокая точность гарантирована, для Y_{en} она была достигнута сохранением пяти знаков. Здесь также можно произвести сокращение в общем выражении

$$P_1 D_1 + P_2 D_2 = (1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 - L_6) G + G L_5 =$$
$$= (1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_6) G = 5,775.$$

2.11.11. Обратные связи

Составленный сигнальный граф позволяет нам кроме любых передач найти еще ряд других величин, характеризующих цепь. В качестве примера вычисляем обратные связи для крутизны лампы S и сопротивлений R_1 и R_2.

При вычислении обратной связи для S замечаем, что при блокировке передачи через дугу $-S$ разрываются все контуры, содержащие эту дугу.

$$D = 1 - (L_1 + L_3 + L_4 + L_6) + L_1L_3 + L_1L_4 = 3,69.$$

При вычислении числителя T_S учитываем, что в соответствующие прямые пути входят только разомкнутые контуры:

$$P_1 = L_2 = -2,2 \qquad \Delta_1 = 1 - L_1 = 1,051$$
$$P_2 = L_5 = -112,2 \qquad \Delta_2 = 1,$$

$$T_S = \frac{-2,31 - 112,2}{3,69} = -\frac{114,5}{3,69} = -31,0.$$

Крутизна лампы охвачена глубокой отрицательной обратной связью

$$F_S = 1 - (-31,0) = 32,0 \qquad (\text{pro } 32,02).$$

Сопротивление R_1 :

$$D = 1 - (L_1 + L_2 + L_4 + L_5 + L_6) + L_1L_2 + L_1L_4 = 116,9,$$

$$P_1 = L_3 = -1,275, \qquad D_1 = 1 - L_1 = 1,051,$$

$$T_{R1} = \frac{-1,34}{116,9} = -0,011146.$$

Обратная связь для R_1 слегка отрицательна:

$$F_{R_1} = 1 - (-0,011146) = 1,011 \qquad (\text{pro } 1,011).$$

Сопротивление R_2 :

$$D = 1 - (L_2 + L_3 + L_4) = 4,50$$
$$P_1 = L_1 = -0,051 \qquad D_1 = 1 - (L_2 + L_3 + L_4) = D = 4,50$$
$$P_2 = L_5 = -112,2 \qquad D_2 = 1$$
$$P_3 = L_6 = -1,275 \qquad D_3 = 1$$

$$T_{R_2} = \frac{-0,23 - 112,2 - 1,275}{4,50} = -\frac{113,7}{4,50} = -25,2.$$

Сопротивление R_2 охвачено глубокой отрицательной обратной связью:

$$F_{R_2} = 1 - (-25,2) = 26,2 \qquad (\text{pro } 26,27).$$

2.II.I2. Чувствительности

Найдем еще чувствительности передач T_1 и T_2 относительно (к изменениям) S, R_1 и R_2. Расчеты ведем параллельно для двух передач.

Крутизна S.

T_1 $\quad D_{S=0} = 3{,}69$ $\quad T_2$

$T_{10} = \frac{0{,}065}{3{,}69} = 0{,}0176,$ $\quad T_{20} = \frac{0{,}117}{3{,}69} = 0{,}0317,$

$1 - \frac{T_{10}}{T_1} = 1{,}0185,$ $\quad 1 - \frac{T_{20}}{T_2} = 0{,}967,$

$S_{1,S} = \frac{1 - \frac{T_{10}}{T_1}}{F_S} = \frac{1{,}0185}{32} = 0{,}0318,$ $\quad S_{2,S} = \frac{1 - \frac{T_{20}}{T_2}}{F_S} = \frac{0{,}967}{32} =$

$= 0{,}0302.$

Чувствительность передач к изменениям крутизны мала (3%) и примерно равна для обеих передач.

Сопротивление R_1.

T_1 $\quad D_{R_1=0} = 116{,}9$ $\quad T_2$

$T_{10} = 0$ $\quad T_{20} = \frac{112{,}4}{116{,}9} = 0{,}962$

$S_{1,R_1} = \frac{1 - \frac{T_{10}}{T_1}}{F_{R_1}} = \frac{1}{1{,}011} = 0{,}99,$ $\quad S_{2,R_1} = \frac{1 - \frac{T_{20}}{T_2}}{F_{R_2}} = \frac{-0{,}01}{1{,}011} = 0{,}009.$

Чувствительность T_1 к изменениям R_1 высока (99%), а чувствительность T_2 очень мала (-0,9%).

Сопротивление R_2.

T_1 $\quad D_{R_2=0} = 4{,}50$ $\quad T_2$

$T_{10} = \frac{-112{,}2}{4{,}50} = -25{,}0,$ $\quad T_{20} = 0,$

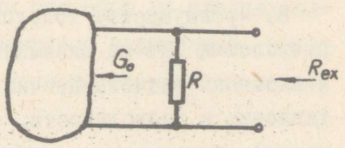
$$S_{1,R_2} = \frac{1 - \frac{T_{10}}{T_1}}{F_{R_2}} = \frac{-25,0}{26,2} = -0,955, \quad S_{2,R_2} = \frac{1 - \frac{T_{20}}{T}}{F_{R_2}} = \frac{1}{26,2} = 0,0382.$$

Чувствительность передачи T_1 к изменениям R_2 высока (-95,5%), а чувствительность T_2 мала (3,82%).

2.II.I3. Выходные сопротивления

В качестве примера применения рассчитанных обратных связей вычисляем выходные сопротивления схемы, т.е. сопротивления между зажимом 4 и землей и зажимом 3 и землей.

Выходная проводимость цепи равна сумме проводимости двухполюсника, подключенного к соответствующим зажимам, и входной проводимости остальной схемы между этими зажимами (фиг. 2-II2):



Фиг. 2-II2

$$G_{ex} = G + G_0.$$

Обратная связь для сопротивления двухполюсника:

$$F_R = 1 + RG_0 = 1 + \frac{G_0}{G} = \frac{G_{ex}}{G}.$$

Выходная проводимость, следовательно, равна

$$G_{ex} = G \cdot F_R$$

и выходное сопротивление

$$R_{ex} = \frac{R}{F_R}.$$

Для первого выхода (зажим 4) найдем

$$R_{ex1} = \frac{R_1}{F_{R_1}} = \frac{5I}{I,0II} = 50,4 \text{ ком} \quad (\text{рго } 50,42)$$

и для второго выхода

$$R_{ex2} = \frac{R_2}{F_{R_2}} = \frac{5I}{26,2} = I,945 \text{ ком} \quad (\text{рго } I,942).$$

2.II.I4 Заключение

Из рассмотренного примера можно сделать некоторые обобщающие выводы:

I. Применение метода узловых напряжений или контурных токов в общем случае нецелесообразно. Однако в некоторых случаях, когда уравнения имеют низкий порядок, расчет с помощью этих методов может оказаться достаточно простым. Общий недостаток методов - сложность вычисления обратных связей и чувствительностей и, конечно, неудобство их применения к прочим расчетам (например, сопротивлений - 2.II.I3).

2. Преимущества топологических расчетов - малый объем вычислений (из-за минимальности формул) и возможность несложного расчета прочих параметров цепи (разные сопротивления и проводимости, обратные связи и чувствительности). Некоторые неудобства возникают из-за того, что при большом различии проводимостей цепи диапазон чисел, с которыми придется вести расчеты, чрезмерно увеличивается.

3. Сигнальные графы имеют ряд преимуществ перед остальными методами. Расчет всех параметров, которые могут быть найдены другими методами, также возможен, и притом с помощью однородных операций. Число промежуточных (вспомогательных) величин, с которыми придется оперировать, невелико - это главным образом контурные передачи; диапазон изменения этих величин довольно малый. Недостатки методов, основанных на сигнальном графе, - необходимость составления самого графа и нахождения всех контуров - при систематическом выполнении операции не усложняют задачу в такой мере, чтобы они стали решающими факторами при выборе метода расчета.

4. Расчет ручными способами приемлем только для цепей не слишком сложных, даже в случае применения упрощений, возможных при методе сигнальных графов. Сложность цепи определяется главным образом ее структурой, а не просто количеством элементов. Притом одна цепь может иметь разную степень сложности в зависимости от применяемого метода. Здесь следует руководствоваться следующим принципом: чем больше обратимых элементов содержит цепь, тем более целесообразно применение топологических методов; и чем больше имеется необратимых элементов, тем более целесообразно применение сигнальных графов.

5. Расчет сложных цепей ручным способом не представляется возможным, и в этом случае неминуемо применение автоматических вычислительных машин. Вопросы сложности такие же, как и в предыдущем случае.

6. Расчет очень сложных цепей не приемлем даже для ЭЦВМ, и тогда, видимо, надо пользоваться уже принципиально (качественно) новыми методами. Но таких методов пока практически не существует.

МАТЕМАТИКА

П.I.I. Множеством называется совокупность, составленная из каких-нибудь предметов. Примеры: множество натуральных чисел; множество людей в данной комнате; множество всех многочленов; множество всех многополюсников; множество отрицательных чисел, больших нуля и т.д.

Элементами множества называются предметы, составляющие данное множество.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут

$$a \in A;$$

если a не является элементом A, то пишут $a \notin A$.

Если любой элемент множества A принадлежит множеству B, то A называется подмножеством множества B и пишут $A \subset B$.

Если A не является подмножеством B, то пишут $A \not\subset B$.

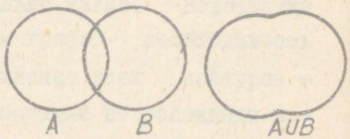
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством ϕ (например, вышеотмеченное множество отрицательных чисел, больших нуля).

П.I.2. Операции над множествами. Соединением (или объединением) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Соединение множеств A и B (фиг. П-I) обозначается через

$$A \cup B.$$

Операция соединения может быть обобщена на большее количество множеств:

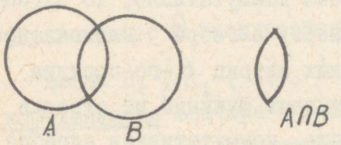
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$



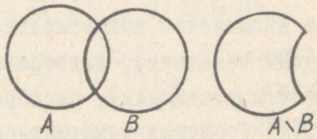
Фиг. П-I

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B (фиг. П-2). Обозначение: $A \cap B$. В случае n множеств пишут

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$



Фиг. П-2



Фиг. П-3

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B (фиг. П-3). Обозначение: $A \setminus B$

П.I.3. Поля и алгебры. Множество A называется полем, если для его элементов определены и всегда в этом множестве выполнимы следующие операции ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$):

1) сложение (коммутативное и ассоциативное, $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$);

2) вычитание ($a-b=c$, т.е. $a=b+c$);

3) умножение (коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное относительно сложения, $ab=ba$, $a(bc)=(ab)c$, $a(b+c)=ab+ac$);

4) деление ($a:b=c$, т.е. $a=bc$, при условии $b \neq 0$).

В поле существуют единица e ($ae=ea=a$) и нуль 0 ($a+0=0+a=a$). Примеры полей: поле рациональных чисел, поле действительных чисел, поле комплексных чисел, поле рациональных дробей и т.д.

Множество A называется алгеброй, если для его элементов определены и всегда выполнимы в этом множестве следующие операции ($a \in A$):

I) сложение (коммутативное и ассоциативное);

2) вычитание;

3) умножение (ассоциативное и дистрибутивное относительно сложения);

4) умножение на число ($\lambda a \in A$).

Если (кроме того) умножение тоже коммутативно, то алгебра называется коммутативной. Примеры: алгебра многочленов (коммутативная), алгебра квадратных матриц n-го порядка (некоммутативная), алгебра непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ (обычные сложение и умножение, коммутативная алгебра) и т.д.

П.I.4. Векторные пространства. Множество A называется векторным или линейным пространством, если в нем определены и всегда выполнимы следующие операции:

I) сложение (коммутативное и ассоциативное);
2) вычитание;
3) умножение на число.

Элементы векторного пространства называются векторами. В векторном пространстве имеется нуль-вектор θ : $a + \theta = a$, $\lambda\theta = \theta$.

Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых хоть одно не равно нулю, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = \theta.$$

Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются линейно независимыми, если из равенства

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \lambda_n a_n = \theta$$

следует $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_n = 0$.

Если в данном векторном пространстве существуют n линейно независимых векторов, а любая совокупность $(n+1)$ векто-

торов линейно зависима, то это пространство n-мерно.

Любое множество n независимых векторов в n-мерном пространстве образуют базис пространства. Это значит, что любой вектор пространства линейно зависит от векторов базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n . \qquad (\text{II-I})$$

(Нуль-вектор θ получается при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$).

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в выражении (II-I) называются координатами вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Таким образом, вектор задается упорядоченным множеством чисел - своих координат $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ в данном базисе.

Нетрудно видеть, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, и при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

II.I.5. Изоморфизм. Поле, алгебра, векторное пространство - представители алгебраических систем. Элементы их могут быть различными физическими объектами, различным будет и конкретное содержание операций. Но может оказаться, что алгебраически эти системы не различаются.

Если между элементами двух алгебраических систем существует взаимно однозначное соответствие и при этом сохраняются операции, то эти системы называются изоморфными. n-мерное векторное пространство и линейное пространство матриц-столбцов порядка $(n \times 1)$ (с числовыми элементами) изоморфны. Можно также привести примеры изоморфных полей, алгебр и других алгебраических систем.

II.I.6. Матрицы. Имеется множество M, состоящее из $m \times n$ элементов некоторого поля K. Введем в этом множестве некоторый порядок следующим образом: снабжаем каждый

элемент парой индексов i, k ($i \in \{1,2,3,\ldots, m\}$, $k \in \{1,2,3, \ldots, n\}$). Упорядоченное таким образом множество называется матрицей порядка $m \times n$. Элементы матрицы обозначаются через a_{ik}, сама матрица через – $\|a_{ik}\|$ или просто A.

Если надо привести все элементы множества, то матрицу представляют прямоугольной таблицей с m строками и n столбцами следующим образом:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} \end{array} \right).$$

Подмножество M, состоящее из n элементов с одинаковыми первыми индексами i и упорядоченное по вторым индексам, называется i-ой строкой матрицы $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$. Строку обычно обозначают так: $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.

Подмножество множества M, состоящее из m элементов с одинаковыми вторыми индексами k и упорядоченное по первым индексам, называется k-ым столбцом матрицы. Например: $\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\}$, но обычно представляют в виде

$$\left\| \begin{array}{c} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{array} \right\|.$$

Строки (столбцы) можно рассматривать как векторы, если координатами векторов считать элементы строки (столбца). См. также П.I.I3.

Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Множество элементов квадратной матрицы с одинаковыми первыми и вторыми индексами $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ называется главной диагональю матрицы.

Матрица порядка $n \times m$, получаемая из данной матрицы порядка $m \times n$ перестановкой индексов у каждого элемента, называется транспонированной и обозначается через A' (транспонирована матрица A). Очевидно,

$$(A')' = A.$$

Если матрица представлена таблицей, то транспонирование означает просто перемену соответствующих строк и столбцов:

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Vmatrix}' = \begin{Vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{Vmatrix}.$$

П.I.7. Матрицы. Действия. Если две матрицы одинакового порядка $m \times n$ определены над одним и тем же полем K, то они считаются равными, если соответствующие элементы этих матриц равны между собой: $A = B$, тогда и только тогда, когда $a_{ik} = b_{ik}$.

Матрица A называется симметричной, если она совпадает со своей транспонированной матрицей:

$$A = A'.$$

Суммой двух матриц A и B одинакового порядка $m \times n$ называется матрица C порядка $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Сумма обозначается следующим образом:

$$C = A + B.$$

Разностью двух матриц A и B называется матрица C, если

$$A = B + C$$

и обозначается

$$C = A - B.$$

Нулевой матрицей Θ называют матрицу, состоящую только из нулей (поля K).

Матрица A называется кососимметричной, если сумма ее и транспонированной матрицы равна нулевой матрице

$$A + A' = \theta$$

или, обозначая матрицу, в которой все элементы заменены на противоположные, через $(-A)$:

$$A = \theta - A' = -A'.$$

Любую ненулевую матрицу можно единственным образом разлагать на сумму симметричной и кососимметричной матрицы:

$$A = A_s + A_a,$$
$$A_s = A'_s,$$
$$A_a = -A'_a.$$

Это разложение получается, очевидно, следующим образом:

$$A_s = \frac{A + A'}{2},$$

$$A_a = \frac{A - A'}{2}.$$

(Нулевая матрица является одновременно симметричной и кососимметричной).

Если полем K является поле комплексных чисел, то сопряженной с матрицей A называется матрица A^*, полученная из A заменой всех элементов на сопряженные и транспонированием полученной матрицы:

$$B = A^*, \text{ если } b_{ik} = a^*_{ki}.$$

Матрица называется эрмитовой (Ch. Hermite), если она совпадает со своей сопряженной матрицей:

$$A = A^*.$$

Любая ненулевая комплексная матрица единственным образом представляется через две эрмитовые матрицы:

$$A = H_1 + jH_2,$$

где $j = \sqrt{-1}$, H_1, H_2 – эрмитовы матрицы. При этом

$$H_1 = \frac{A + A^*}{2},$$
$$H_2 = \frac{A - A^*}{2j}.$$

Вещественная эрмитова матрица симметрична, а мнимая – кососимметрична.

П.I.8. Свойства оператора Σ. Дано множество $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Если на этом множестве определена коммутативная и ассоциативная операция (называемая суммированием, обозначение $C = a + b$), то можно ввести оператор $\sum_I$. Оператор $\sum_I$ ставит множеству S в соответствие сумму тех элементов S, которые имеют индексы $i \in I$ (I – множество индексов):

$$\sum_I S_i = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{ip} \quad (I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}).$$

(Если не возникает недоразумений относительно множества I, пишут $\sum_i S_i$; если множество I есть множество натуральных чисел $\{a, a+1, \dots, a+n=b\}$, то пишут $\sum_{i=a}^{b} S_i$).

Если элементы S снабжены несколькими индексами $S = \{S_{ikl}\}$, то оператор Σ ставит множеству S в соответствие другое множество:

$$\sum_I S_{ikl} = S_{i_1 kl} + S_{i_2 kl} + \dots + S_{i_p kl} = t_{kl} \quad (I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}).$$

В этом случае можно применять еще раз оператор Σ на множестве $T = \{t_{kl}\}$:

$$\sum_K \sum_I S_{ikl} = \sum_K t_{kl} = u_l.$$

Если множества K и I совпадают, то пишут просто

$$\sum_{i,k} S_{ikl}.$$

Основные свойства оператора Σ:

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \ \sum_I (S_i + t_i) = \sum_I S_i + \sum_I t_i, \\ &2^\circ \ \sum_I c S_i = c \sum_I S_i, \end{aligned}\right\} \text{ оператор } \Sigma \text{ линейный}$$

3^0 $$\sum_{I_1} s_i + \sum_{I_2} s_i = \sum_{I_1 \cup I_2} s_i + \sum_{I_1 \cap I_2} s_i ,$$

4^0 $$\sum_I \sum_K s_{ik} = \sum_K \sum_I s_{ik} ,$$

5^0 $$\sum_I \left[s_i \left(\sum_k t_{ik} \right) \right] = \sum_I \left(\sum_K s_i t_{ik} \right) = \sum_I \sum_K s_i t_{ik} .$$

В последнем предполагается, что определено умножение s_i на t_{ik}.

П.I.9. Умножение матрицы. Операцию умножения матриц можно ввести по-разному, притом оказывается невозможным сделать это для всех матриц одновременно – на их порядки накладываются некоторые условия. Один из возможных вариантов получил широкое применение и именно этот вариант называется умножением матриц.

Произведением матриц A порядка $m \times p$ и B порядка $p \times n$ называется матрица C порядка $m \times n$, элементы которой равны

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rk} .$$

Очевидно, перемножить можно матрицы, если число столбцов первой матрицы и число строк второй матрицы равны. Нетрудно проверить, что умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения:

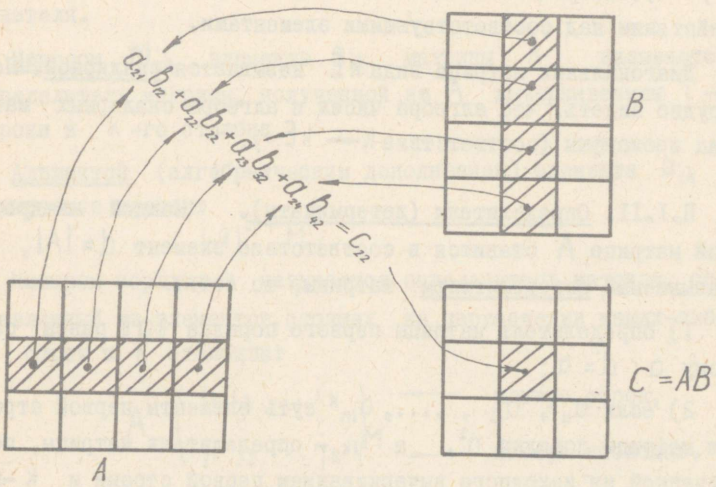
$$d_{ik} = \sum_p a_{ip} \left(\sum_r b_{pr} c_{rk} \right) = \sum_p \sum_r a_{ip} b_{pr} c_{rk} =$$

$$= \sum_r \sum_p a_{ip} b_{pr} c_{rk} = \sum_r \left(\sum_p a_{ip} b_{pr} \right) c_{rk} \rightarrow \underline{D = A(BC) = (AB)C},$$

$$d_{ik} = \sum_p a_{ip} (b_{pk} + c_{pk}) = \sum_p a_{ip} b_{pk} + \sum_p a_{ip} c_{pk} \rightarrow \underline{D = A(B+C) = AB + BC}.$$

Но умножение некоммутативно (если $m \neq n$, умножение в обратном порядке даже не определено!).

При практических расчетах следует руководствоваться правилом "строка на столбец" (фиг. П-4).



Фиг. П-4

П.I.IO. Алгебра матриц. Если рассматривать квадратные матрицы порядка n^2, то умножение всегда выполнимо. Если, кроме того, определено умножение на число

$$\lambda A = B, \text{ так что } b_{ik} = \lambda a_{ik},$$

то мы получим алгебру (квадратных матриц).

Нулем этой алгебры является θ. Единицей алгебры матриц является единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases},$$

(δ_{ik} – символ Кронекера (L.Kronecker)). При этом, конечно, E коммутируется всеми матрицами:

$$EA = AE = A .$$

Если все элементы вне главной диагонали матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной ($a_{ik} = 0$, если $i \neq k$). Операции над диагональными матрицами сводятся к действиям над соответствующими элементами.

Диагональная матрица вида kE называется скалярной. Нетрудно видеть, что алгебра чисел и алгебра скалярных матриц изоморфны (соответствие $k \leftrightarrow kE$).

П.I.II. Определители (детерминаты). Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие элемент $d = |A|$, называемый определителем матрицы, то есть:

I) определитель матрицы первого порядка $\|a\|$ равен самому a: $d = a$;

2) если a_{11} , a_{12} , ..., a_{1n} суть элементы первой строки матрицы порядка n^2, а M_{1k} – определитель матрицы, полученной из исходного вычеркиванием первой строки и k –го столбца, то

$$d = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} - \dots - (-1)^n a_{1n} M_{1n} .$$

Определитель есть сумма членов, представляющих собой произведения n элементов матрицы. Общий член определителя равен

$$(-1)^{\sigma} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} ,$$

где (k_1 , k_2 , ..., k_n) – какая-то перестановка индексов I, 2,3,...,n , а σ – число инверсий в данной перестановке (приложение П.I.I2). Определитель равен сумме таких членов по всем возможным перестановкам.

Основные свойства определителей:

I. $|A| = |A'|$.

2. При умножении строки (столбца) матрицы на λ, определитель умножается на λ, значит, при умножении самой матрицы на λ определитель умножается на λ^n.

3. Прибавление к какой-либо строке (столбцу) линейной комбинации (формы) других строк (столбцов) не меняет определителя.

Минором M_{ik} элемента a_{ik} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i-й строки и k-го столбца.

Адъюнктой (алгебраическим дополнением) элемента a_{ik} называется элемент

$$(-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Минором порядка k называется определитель матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении каких-либо k строк и k столбцов:

$$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{номера строк,} \\ \longleftarrow \text{номера столбцов.} \end{array}$$

П.I.I2. Перестановки и подстановки. Каждому элементу конечного множества можно поставить в соответствие натуральное число. Если множество S состоит из n элементов, то каждому $s \in S$ можно отнести одно из чисел $1,2,\dots,n$ (т.е. элементы можно перенумеровать). Ввиду этого соответствия мы ниже говорим только о множестве $1,2,\dots n$.

Любое расположение этих чисел в некотором порядке называется перестановкой из n чисел (элементов). Всего имеется $n!$ различных перестановок.

Числа i и j в перестановке составляют инверсию, если i стоит в ней раньше j, но $i > j$. Если число инверсий четное, перестановка называется четной, а если число инверсий нечетное, то и перестановка нечетна.

Две перестановки из n элементов определяют отображение множества S на себя, называемое подстановкой n-ой степени:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{ I перестановка,} \\ \longleftarrow \text{ II перестановка} \end{matrix}$$

(i_1 переходит в k_1, i_2 переходит в k_2 и т.д.). Каждую подстановку можно представить в нормальном виде, переставляя столбцы таким образом, что первая перестановка становится натуральной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между перестановками из n элементов и подстановками n-й степени.

Подстановка называется четной и нечетной одновременно со второй подстановкой в нормальном представлении.

Подстановку можно записывать также в виде разложения ее в циклы: если подстановка преобразует α в β, β в γ, γ в δ и δ в α, то имеется цикл $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Таких циклов может быть несколько:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 5\ 4\ 2)(3\ 6)(8)(9).$$

Обозначим через s число циклов в разложении подстановки. Число $\delta = n - s$ называется <u>декрементом</u> подстановки (в приведенном примере он равен: $\delta = 9-4=5$). Справедливо следующее утверждение: четность подстановки совпадает с четностью декремента.

Между членами определителя n-го порядка (см. II.I.II) и подстановками n-й степени имеется соответствие: пары индексов у элементов члена определителя - столбцы подстановки. Знак члена определяется четностью перестановки

вторых индексов, т.е. четностью декремента соответствующей подстановки. Например:

подстановка — член

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4\ 5) \qquad (-1)^8 a_{12} a_{21} a_{34} a_{45} a_{53} = -a_{12} a_{21} a_{34} a_{45} a_{53},$$

$$\delta = 5 - 2 = 3$$

Все $n!$ подстановок определяют все $n(!)$ членов определителя.

П.I.I3. Ранг матрицы. Строки (столбцы) образуют множество векторов (П.I.6). Рангом матрицы называется максимальное число независимых строк (или столбцов) матрицы. Очевидно, ранг матрицы r не может превышать числа строк или столбцов:

$$r \leq \min(m, n).$$

Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров матрицы.

Отсюда следует, что k векторов в n-мерном векторном пространстве ($k \leq n$) линейно независимы, если матрица, составленная из их координат имеет ранг k.

Квадратная матрица называется неособенной, если $r = n$, т.е. $|A| \neq 0$, и особенной, если $r < n$, т.е. $|A| = 0$.

П.I.I4. Матрицы Кирхгофа. Называем матрицей Кирхгофа квадратную матрицу, в которой сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю. Матрица Кирхгофа особенна, так как сумма ее строк и сумма столбцов есть нуль-векторы (т.е. зависимые).

Адъюнкты элементов матрицы Кирхгофа равны между собой:

$$A_{ik} = \Delta \text{ для всех } i, k.$$

Двойной адъюнктой $A_{ip,kr}$ матрицы A называется минор, полученный опусканием i-й и k-й строки и p-го и r-го

столбца и умноженный на +I, если $i<k$, $p<r$ или $i>k$, $p>r$ и умноженный на -I, если $i<k$, $p>k$ или $i>k$, $p<r$.

При перестановке индексов двойная адъюнкта меняет знак:

$$A_{ip,kr} = -A_{kp,ir} = A_{kr,ip} = -A_{ir,kp}.$$

Двойные адъюнкты матрицы Кирхгофа связаны между собой следующим образом:

$$A_{ip,kq} + A_{iq,kr} + A_{ir,kp} = 0$$

и

$$A_{ip,jr} + A_{jp,kr} + A_{kp,ir} = 0.$$

(Индексы циклически меняются: $pq - qr - rp$). Аналогичные соотношения имеют место для адъюнкт высших порядков.

П.I.I5. Обратная матрица. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей; если $A = BC$ то $|A| = |B| \cdot |C|$.

Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1}, для которой выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Так как $|E| = 1$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Очевидно, обратную матрицу имеют только неособенные матрицы ($|A| \neq 0$).

Присоединенной матрицей называется матрица $\tilde{A} = \|A_{ik}\|'$, ($\|A_{ik}\|$ – это матрица, где вместо a_{ik} имеем его адъюнкту).

Обратную матрицу можно вычислить следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\|A_{ik}\|'.$$

При обращении матрицы сохраняются ее симметричность, кососимметричность и эрмитовость.

П.I.I6. Матричные уравнения. Уравнение

$$A\mathfrak{X}=B,$$

где A квадратная матрица порядка n^2, $\mathfrak{X}$ и B – матрицы-столбцы порядка $n \times 1$ (A и B – известны, $\mathfrak{X}$ – неизвестная матрица), имеет решение, если A неособенная. Тогда решение имеет вид

$$\mathfrak{X}=A^{-1}B.$$

Если $B=\theta$, то уравнение

$$A\mathfrak{X}=\theta$$

имеет решение только тогда, когда $|A| = 0$, т.е. матрица особенная. При этом решение не будет единственным, а зависит от $(n-r)$ произвольных постоянных (r -ранг матрицы).

Если $B=\theta$, а $|A| \neq 0$, то уравнение имеет только тривиальное решение $\mathfrak{X}=\theta$.

Если $B \neq \theta$, но $|A|=0$, то уравнение решения не имеет.

П.I.I7. Билинейная форма. Говорят, что дан линейный функционал (форма), если каждому вектору ξ векторного пространства V поставлено в соответствие число $f(\xi)$, обладающее следующими свойствами:

1) $f(\lambda\xi)=\lambda f(\xi)$,

2) $f(\xi_1+\xi_2)=f(\xi_1)+f(\xi_2)$.

Через координаты $\{x_i\}$ вектора ξ линейный функционал выражается так:

$$f(\xi)=\sum_i a_i x_i.$$

Функцию от двух векторов $f(\xi,\eta)$ называют билинейной формой, если

1) при фиксированном ξ, $f(\xi,\eta)$ есть линейный функционал относительно η;

2) при фиксированном η $f(\xi,\eta)$ есть линейный функционал относительно ξ.

Через координаты ξ и η билинейная форма выражается следующим образом:

$$f(\xi,\eta)=\sum_{i,k}a_{ik}x_iy_k$$

(x_i - координаты ξ, y_k - координаты η). То же самое в матричном виде:

$$f(\xi,\eta)=\xi'A\eta,$$

где ξ и η - матрицы-столбцы, A - квадратная матрица.

Если $A=A'$ (матрица формы симметрична), то билинейная форма называется симметричной - $f(\xi,\eta)=f(\eta,\xi)$. В частности, если $A=E$, мы получим скалярное произведение векторов ξ и η:

$$f(\xi,\eta)=\xi'E\eta=\xi'\eta=\eta'\xi=\sum_i x_iy_i=(\xi,\eta).$$

П.I.I8. Квадратичные формы. Форму $f(\xi,\xi)$, получаемую из симметричной билинейной формы при $\xi=\eta$, называют квадратичной формой. В матричном виде можно квадратичную форму представить так:

$$f(\xi,\xi)=\xi'A\xi=\sum_{i,k}a_{ik}x_ix_k,$$

где A - матрица квадратичной формы (в базисе, в котором определены координаты вектора; при изменении базиса изменяется матрица формы). Матрица A, конечно, симметрична.

Квадратичную форму определяет любая форма вида

$$\xi'B\xi,$$

но матрицей квадратичной формы будет симметричная часть матрицы B:

$$f=\xi'B\xi=\xi'\eta=\eta'\xi=\xi'B'\eta,\ (\eta=B\xi)$$

$$f-f=\xi'(B-B')\xi=\xi'B_a\xi=0,$$

$$f=\xi'\frac{B+B'}{2}\xi=\xi'B_s\xi.$$

Множество значений квадратичной формы может быть ограничено с той или другой стороны. Квадратичная форма называется:

I) положительно (отрицательно) определенной, если $f(\xi,\xi) > 0$ ($f(\xi,\xi) < 0$), и $f(\xi,\xi) = 0$ только тогда, когда $\xi = \theta$;

2) положительно (отрицательно) полуопределенной, если $f(\xi,\xi) \geq 0$ ($f(\xi,\xi) \leq 0$), и $f(\xi,\xi) = 0$ хоть при одном $\xi \neq \theta$;

3) неопределенной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Например, $f = x_1^2 + x_2^2$ положительно определенная в двухмерном пространстве и положительно полуопределенная в трехмерном пространстве ($f = 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 0 \cdot x_3^2$). Форма $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ – положительно полуопределенная, $f = x_1^2 - x_2^2$ – неопределенная и $f = -x_1 - 2x_1x_2 - x_2$ – отрицательно определенная (все в двухмерном пространстве).

Главными минорами матрицы называются миноры вида:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}.$$

Главными угловыми минорами называются миноры

$$D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма положительно полуопределенна, если все главные миноры ее матрицы неотрицательны

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \geq 0,$$

и отрицательно полуопределенна, если все главные миноры удовлетворяют условиям

$$(-1)^p \cdot A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \geq 0.$$

Квадратичная форма положительно определенная, если все угловые миноры положительны

$$D_k > 0,$$

и отрицательно определенная, если все угловые миноры удовлетворяют условиям:

$$(-1)^k D_k > 0.$$

Все эти условия необходимы и достаточны.

П.1.19. Сводка соотношений для матриц

1° $(AB)' = B'A'$

2° $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3° $|A'| = |A|$

4° $|AB| = |A||B|$

5° $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

6° $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

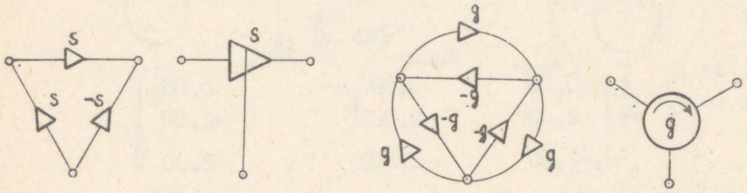
7° $\tilde{A}A = A\tilde{A} = |A| \cdot E$

8° $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

МАТРИЦЫ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Ниже приведены неопределенные матрицы узловых проводимостей и схемы замещения для некоторых распространенных многополюсников. Исключая гиратор, все они псевдолинейны, поэтому числовые данные приведены лишь для одной рабочей точки (типовой). Все параметры в миллисименсах, если не указаны другие единицы.

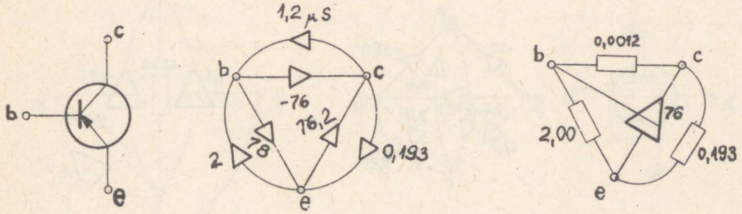
Кроме унисторной схемы приведены еще схемы замещения, в которых использованы специальные элементы со следующими обозначениями:



Транзор Гиратор

П.2.1. Транзистор

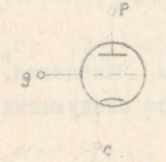
Тип П15 или П13Б. Рабочая точка: $U_{e0} = 0V$, $U_{b0} = -0,19V$, $I_{b0} = -0,1\,mA$, $U_{c0} = -5\,V$, $I_{c0} = -5\,mA$.

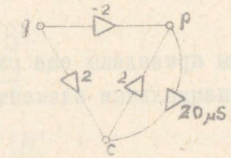


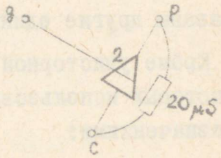
$$\bar{y} = \begin{array}{c|ccc} & b & c & e \\ b & 2,00 & -0,0012 & -2,00 \\ c & 76,0 & 0,194 & -76,2 \\ e & -78,0 & -0,193 & 78,2 \end{array} \quad [mS]$$

П.2.2. Триод

Тип 6Н2П. Рабочая точка: $U_{c0} = 0V$, $U_{g0} = -1,5V$, $I_{g0} = 0mA$, $U_{p0} = 250V$, $I_{p0} = 2,3mA$.



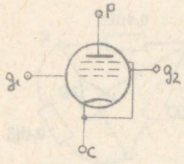


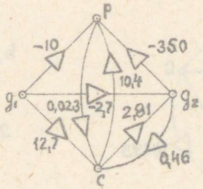


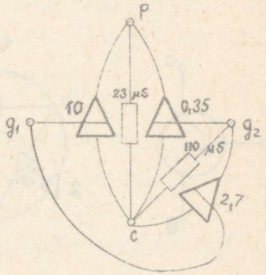
$$\bar{y} = \begin{array}{c|ccc} & g & b & c \\ g & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ b & 2,00 & 0,002 & -2,00 \\ c & -2,00 & -0,002 & 2,00 \end{array}$$

П.2.3. Пентод

Тип 6Ж5Б. Рабочая точка: $U_{k0} = 0V$, $U_{g30} = 0V$, $U_{g10} = -1,5V$, $I_{g10} = 0mA$, $U_{g20} = 120V$, $I_{g20} = 5,5mA$, $U_{p0} = 120V$, $I_{p0} = 20mA$.



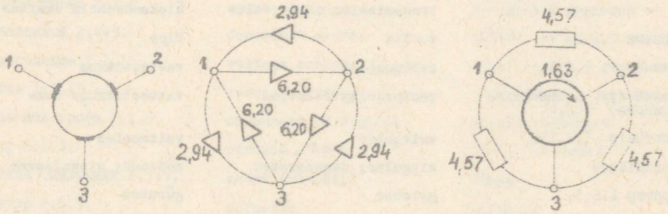




$$Y = \begin{array}{c|cccc} & g_1 & p & g_2 & k \\ g_1 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ p & 10,0 & 0,023 & 0,35 & -10,4 \\ g_2 & 2,70 & 0,00 & 0,11 & -2,81 \\ k & -12,7 & -0,023 & -0,46 & 13,2 \end{array} \quad [mS]$$

П.2.4. Гиратор.

Здесь приводятся данные реального гиратора, основанного на эффекте Холла. Эти устройства серийно не выпускаются, поэтому численные данные соответствуют одному возможному варианту. Гиратор на эффекте Холла - линейный трехполюсник.



$$\bar{Y} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9,14 & -2,94 & -6,20 \\ 2 & -6,20 & 9,14 & 2,94 \\ 3 & -2,94 & -6,20 & 9,14 \end{array} \quad [mS]$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ниже указаны номера пунктов, где данный термин встречается впервые или имеется определение, разъяснение понятия.
Для некоторых понятий даны встречающиеся в литературе параллельные термины, причем нерекомендуемые выделены в квадратные скобки.

Автономность I.6.I.		autonoomsus
Адъюнкта, алгебраическое дополнение	algebraic adjunct	algebraline täiend, adjunkt
Активность I.6.2.	activity	aktiivsus
Амперметр I.I.I5.	ammeter	ampermeeter
Величина дерева 2.6.2.	tree value	puu väärtus
- двойного дерева 2.6.7.	two-tree value	kaksikpuu väärtus
- цепи 2.6.3.	chain value	ahela väärtus
- - передачи 2.6.9.	transmission chain value	ülekandeahela väärtus
Вершина 2.I.2.	vertex	tipp
Взаимность I.6.4.	reciprocity	vastastikkus
Взаимности, соотношение (принцип) I.6.4.	reciprocity relation	vastastikkuse suhe
Вольтметр I.I.I5.	voltmeter	voltmeeter
Вырожденный	singular; degenerated	kõdunud; singulaarne
Гиратор I.6.5.	gyrator	gürator
Грань 2.I.7.	face (region)	tahk
Граф 2.I.2.	graph	graaf
- дуальный, двойственный 2.I.8.	dual graph	duaalne graaf
- Коутса, С-граф 2.8.4.	flow g., Coates's graph, C-graph	voograaf, Coatesi graaf, C-graaf
- мёртвый граф	cold graph	laipgraaf
- N -граф 2.9.4.	N-graph, null-node graph	N-graaf
- плоский 2.I.7.	planar graph	planaarne graaf, tasandgraaf
- плоский топологический 2.I.7.		topoloogiline tasandgraaf
- связный 2.I.4.	connected graph	sidus graaf
- сигнальный 2.7.I, 2.7.2.	signal-flow graph, Mason's g.	signaaligraaf, Masoni graaf
- сильно связный 2.I.3.	strongly connected graph	tugevalt sidus graaf
- частичный граф 2.I.2.	partial graph	osagraaf
Дерево 2.I.4.	tree	puu
- двойное 2.6.7.	two-tree	kaksikpuu
- частичное 2.I.4.	partial tree	osapuu

Дуальности принцип 2.3.6.	duality principle	dualsuse printsiip
Дуга 2.I.2.	arc	kaar
Единица (измерения) I.I.I7	unit	mõõtühik
Зажим, клемма I.I.6.	pole, node	klemm
Закон Кирхгофа, первый I.I.9.	Kirchhoff's first law	Kirchhoffi I seadus
- - второй I.I.II.	Kirchhoff's second law	Kirchhoffi II seadus
- Ома I.I.I0	Ohm's law	Ohmi seadus
Иммитанс 2.5.2., 2.5.6.	immitance	immitants
Инверсия 2.7.5.	inversion	inversioon
Инцидентность 2.I.2.	incidence	intsidentsus
Исключение вершины 2.7.4.	vertex elimination, absorption	tipu elimineerimine, absorptsioon
- зажима I.4.5., 2.4.8.	node elimination, absorption	klemmi(tipu) elimineerimine, absorptsioon
Источник графа 2.7.3.	source	allikas
- зависимый 2.4.9.	dependent source	sõltuv allikas
- напряжения I.I.I5.	voltage source	pingeallikas
- тока I.I.I5.	current source	vooluallikas
Компонента графа 2.I.5.	component of a graph	graafi komponent
Контур 2.I.3.	circuit , loop	tuur, [kontuur]
Короткое замыкание I.3.7.	short (circuit)	lühis
Кофактор 2.8.5.	cofactor	kofaktor
Край (грани) 2.I.7.	contour	kontuur
Крутизна (лампы, транзистора)	transconductance	tõus (lambi, transistori)
Кусок(графа) 2.I.5.	piece of a graph	graafi tükk
Матрица	matrix	maatriks
- дополненная I.4.2.		täiendatud maatriks
- истинная 2.5.4.		tegelik maatriks
- контурных сопротивлений 2.3.2., 2.3.3.		tsüklitakistuste maatriks, [kontuurtakistuste maatriks]
- неопределенная I.2.2.	indefinite matrix, floating matrix	indefiniitne, määramata m.
- неособенная II.I.I3.	regular matrix	regulaarne maatriks
- обратная матрица	reciprocal matrix	pöördmaatriks
- определенная I.2.4.	definite matrix	definiitne, määratud m.
- особенная матрица II.I.I3.	singular matrix	singulaarne maatriks
- узловых проводимостей I.2.2.	node admittance matrix	klemmijuhtivuste maatriks tipujuhtivuste maatriks
- - сопротивлений I.2.5.	node impedance matrix	klemmitakistuste maatriks, tiputakistuste maatriks

Метод контурных токов 2.3.I.		tsüklivoolude meetod
– узловых напряжений 2.2.2.		klemmipingete meetod, tipupingete meetod
Многополюсник I.I.I., I.I.8.	multipole	hulkklemm
– автономный I.I.I3, I.2.I., I.3.I., I.6.I.		autonoomne hulkklemm
– активный I.6.2.	active multipole	aktiivne hulkklemm
– линейный I.2.I	linear multipole	lineaarne hulkklemm
– неавтономный I.I.I3., I.2.I., I.6.I.		mitteautonoomne hulkklemm
– необратимый, невзаимный I.6.3.	nonreciprocal multipole	mittepööratav hulkklemm
– обратимый, взаимный I.6.3.	reciprocal multipole	pööratav hulkklemm
– пассивный I.6.2.	passive multipole	passiivne hulkklemm
Множество II.I.I.	set	hulk
Мощность I.I.I6., I.5.I.	power	võimsus
Мультиграф 2.I.4.	multigraph	multigraaf
Напряжение I.I.II.	voltage	pinge
Наложения принцип I.5.5.	superposition principle	superpositsiooni printsiip
Обратимость I.6.3.	reversibility; reciprocity	pööratavus
Обратная связь 2.I0.2., 2.I0.4.	feedback	tagasiside
Определитель, детерминант II.I.II.	determinant	determinant
– сигнального графа 2.8.2.		
– сети 2.6.I., 2.6.2.	network determinant	võrgu determinant
– системы 2.I0.I	system determinant	süsteemi determinant
– цепи 2.5.5.	circuit determinant	ahela determinant
Отображение 2.I.2.	mapping; image	teisendus; kujutis
Передача 2.5.2., 2.5.9.	gain, transmission g.	ülekanne
– графа 2.8.I.	graph gain	graafi ülekanne
– дуги 2.7.2.	arc gain	kaare ülekanne
– контура	loop gain	tuuri ülekanne
– линейной цепи 2.5.9.		lineaarse ahela ülekanne
– пути	path gain	tee ülekanne
– фактора	factor gain	faktori ülekanne
Перешеек 2.I.5.	isthmus	
Петля 2.I.3.	loop	silmus

Подграф 2.I.2.	subgraph	alamgraaf
Потенциал I.I.7.	potential	potentsiaal
Правило Дезоэра 2.8.8.	Desoer's rule	Desoeri reegel
Прибор измерительный I.I.I5.	(measuring) instrument	mõõteriist
Проводимость, адмитанс I.I.I2.	admittance	juhtivus, admitants
- взаимная	mutual admittance	vastastikune juhtivus
- внутренняя I.3.6.	internal (source) admittance	sisejuhtivus
- собственная	self-admittance	omajuhtivus
Проводник I.I.6.	conductor	juhe
Путь 2.I.3.	path	tee
- прямой 2.8.5., 2.8.7.	forward path	päritee
Ребро 2.I.4.	edge	ribi
Сеть 2.I.9.	network	võrk
- дуальная 2.3.7.	dual network	duaalne võrk
Сопротивление, импеданс I.I.I2	impedance	takistus, impedants
- внутреннее I.3.6.	internal (source) resistance	sisetakistus
Сток (графа) 2.7.3.	sink (of the graph)	(graafi) neel
Столбец П.I.6.	column	veerg
Строка П.I.6.	row	rida
Стягивание 2.I.5.	shrinking	
Схема I.I.6.	diagram, circuit	skeem
Схема замещения 2.4.I.	equivalent circuit	aseskeem
- Нортона I.3.6.	Norton's circuit	Nortoni skeem
- Тевенина I.3.6.	Thévenin's circuit	Thévenini skeem
Ток I.I.7.	current	vool
- контурный 2.3.I		tsüklivool, kontuurvool
Топология 2.I.I.	topology	topoloogia
Точка сочленения 2.I.5.	articulation point	liigendtipp
Транзор 2.I0.7., 2.4.9.	(transconductance)	transor
Триод I.6.5.	triode	triood
Унистор 2.4.2.	unistor	unistor
Условие физической возможности I.2.3., I.3.3., 2.4.4.		füüsikalise võimalikkuse tingimus
Фактор 2.I.3.	factor	faktor

Форма квадратичная П.I.I8.	quadratic form	ruutvorm
- линейная П.I.I7.	linear form	lineaarvorm
Формула Боде 2.I0.9.	Bode's formula	Bode valem
- Коутса 2.8.5.	Coates's formula	Coatesi valem
- Линча 2.I0.9.	Lynch's formula	Lynch'i valem
- Максвелла 2.6.2.	Maxwell's formula	Maxwelli valem
- Мейсона 2.8.7.	Mason's formula	Masoni valem
- топологическая 2.6.I0.	topological formula	topoloogiline valem
Характеристика вольт-амперная I.I.I4., I.3.7.	current/voltage diagram	voltamperkarakteristik
Холостой ход I.3.7.	open-circuit	tühijooks
Цепь 2.I.4.	chain	ahel
- обратимая 2.4.5.	reciprocal circuit	pööratav ahel
- передачи 2.6.9.	transmission chain	ülekandeahel
- псевдолинейная I.I.I3.		pseudolineaarne ahel
- электрическая I.I.I.	electrical circuit	elektriahel
Цикл 2.I.4.	cycle	tsükkel
Циклы независимые 2.I.6.	independent cycles	sõltumatud tsüklid
Число цикломатическое 2.I.6.	cyclomatic number	tsüklomaatiline arv
Чувствительность 2.I0.8.	sensitivity	tundlikkus

Литература

По теории линейных цепей:

1. Дж. Абрахамс, Дж. Каверли. Анализ электрических цепей методом графов. "Мир", М., 1967.

2. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, М., 1963.

3. К.А. Паллен. Топологические и матричные методы. "Энергия", М.-Л., 1966.

4. Л.де Пиан. Теория линейных активных цепей."Энергия", М.-Л., 1967.

5. Ф. Реза, С. Сили. Современный анализ электрических цепей. "Энергия", М.-Л., 1964.

6. Л. Робишо, М. Буавер, Ж. Робер. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. "Энергия", М.-Л., 1964.

7. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, М.-Л., 1963.

8. В.П. Сигорский, А.И. Петренко. Основы теории электронных схем. "Техника", Киев, 1967.

По математике:

1. Дж. Авондо-Бодино. Применение в экономике теории графов. "Прогресс", М., 1966.

2. К. Берж. Теория графов и её применения. ИЛ, М., 1962.

3. И.М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. "Наука", М., 1966.

4. Ф.И. Карпелевич, Л.Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. "Наука", М., 1965.

5. А.Г. К у р о ш. Курс высшей алгебры. "Наука", М., 1965.

6. О. О р е. Графы и их применения. "Мир", М., 1965.

7. Р. Ф о р, А. К о ф м а н, М. Д е н и - П а п е н. Современная математика. "Мир", М., 1966.

8. Д ж. Х е д л и. Линейная алгебра. "Высшая школа", М., 1966.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

П р е д и с л о в и е 3

Основные обозначения. 6

Г л а в а I. УРАВНЕНИЯ И КЛАССЫ ЦЕПЕЙ 7

§ I.I. Основные понятия. 7

I.I.I. Как определяют электрическую цепь 7

2. Обсуждение 8

3. Официальное определение. I0

4. Почему. II

5. Нужно ли... II

6. Первые шаги I2

7. Переменные. I2

8. Элементы (цепи) I3

9. Первый закон Кирхгофа I5

I0. Закон Ома I7

II. Второй закон Кирхгофа I8

I2. Сопротивление и проводимости. . . 20

I3. Типы элементов. 2I

I4. Двухполюсник. 23

I5. Особые двухполюсники. 27

I6. Мощность 28

I7. Единицы измерения 29

§ I.2. Уравнения линейного многополюсника. 30

I.2.I. Линейный многополюсник 30

2. Матрица узловых проводимостей . . 3I

3. Условие физической возможности. . 33

4. Определенная матрица. 34

5. Матрица узловых сопротивлений . . 36

6. Опыты. 37

7. Поправки 40
8. Примеры 43
§ I.3. Автономные многополюсники 46
I.3.I. Автономный многополюсник 46
2. Опыт 47
3. Свойства матриц 47
4. Продолжение опыта 48
5. Другое уравнение 50
6. Автономный двухполюсник 5I
7. Вольт-амперная характеристика . . . 52
8. Опыты 53
9. Замечание 54
§ I.4. Соединение многополюсников 54
I.4.I. Соединение 54
2. Дополнение матрицы 55
3. Матрица составного многополюсника . 55
4. Соединение автономных многополюсников 57
5. Исключение зажимов 57
6. Примеры 59
7. Вырождение 60
8. Замечание 62
§ I.5. Мощность многополюсника 62
I.5.I. Мощность многополюсника 62
2. Выражения мощности 63
3. Примеры 64
4. Распределение мощности 66
5. Замечание 67
§ I.6. Свойства цепей и их матриц 68
I.6.I. Автономность 68
2. Активность 69
3. Обратимость 7I
4. Взаимность 7I
5. Примеры 72

6. Соединения. 73

Глава II. МЕТОДЫ РАСЧЕТА 76

§ 2.I. Структура цепей 76
I.I.I. Топология. 76
2. Граф. 76
3. Направленные элементы графа 78
4. Ненаправленные элементы графа . . . 80
5. Связность. 8I
6. Независимые циклы 82
7. Плоские графы. 83
8. Дуальные графы 84
9. Сети. 85
I0. Корректность. 86
II. Независимость 86
I2. Токи и напряжения 88

§ 2.2. Метод узловых напряжений. 89
2.2.I. Классические методы расчета 89
2. Узловое уравнение 90
3. Составление матрицы 9I
4. Упрощение. 92
5. Примеры. 92
6. Замечания. 95

§ 2.3. Метод контурных токов.Дуальность. . . 97
2.3.I. Контурные токи. 97
2. Уравнение. 98
3. Матрица контурных сопротивлений . . 98
4. Упрощение 99
5. Примеры. I00
6. Принцип дуальности. I0I
7. Дуальные сети I03
8. Применение I03

§ 2.4. Схемы замещения. 106

2.4.1. Схемы замещения. 106
2. Унистор. 107
3. Унисторная схема замещения 108
4. Условие физической возможности . . . 111
5. Обратимые цепи 111
6. Определенная матрица 113
7. Обратная задача 115
8. Исключение зажима 116
9. Зависимые источники 119
10. Замечания. 121

§ 2.5. Передаточные отношения 122

2.5.1. Возмущения и реакции 122
2. Передаточные отношения 123
3. Влияние приборов и источников. . . . 124
4. Основные уравнения. 126
5. Определитель сети 128
6. Входной иммитанс 129
7. Инвариантность числителя 130
8. Числитель 132
9. Общая формула передачи. 133
10. Примеры 134

§ 2.6. Топологические формулы передачи. . . . 136

2.6.1. Структура и определитель 136
2. Теорема об определителе 137
3. Разложение по двум вершинам 140
4. Разложение по ребру. 143
5. Разложение по вершине. 144
6. Замечания. 145
7. Двойные деревья. 146
8. Числитель. 147
9. Разложение 148
10. Топологическая формула передачи. . . 149
11. Минимальность. 149

§ 2.7. Сигнальные графы I5I

2.7.I. Сигнальные графы I5I
2. Определение. I5I
3. Свойства. I53
4. Исключение вершины I54
5. Инверсия I57

§ 2.8. Вычисление передачи сигнального графа. I60

2.8.I. Передача графа. I60
2. Уравнение. I62
3. Разложение определителя. I63
4. С-граф. I64
5. Формула Коутса I66
6. Другое разложение определителя . . . I70
7. Формула Мейсона. I72
8. Правило Дезоэра. I73

§ 2.9. Составление сигнальных графов I74

2.9.I. Задача. I74
2. Уравнения системы и сигнальный граф. I75
3. Принцип "причина-следствие". I76
4. M-графы I79
5. Соединение сигнальных графов I82
6. Граф узловых напряжений. I84
7. Граф контурных токов. I87
8. Полный граф I88

§ 2.IO. Обратная связь. Чувствительность. I89

2.IO.I. Определитель системы I89
2. Обратная связь для параметра I90
3. Сигнальные графы I9I
4. Обратная связь для переменной. . . . I93
5. Параметры I94
6. Двухполюсники I96
7. Транзор I98

8. Чувствительность 199
9. Выражения чувствительности 200
10. Уменьшение чувствительности. . . . 202
11. Обратные параметры. 202
12. Изменение передачи 203

§ 2.11. Сравнение методов 205

2.11.1. Критерии 205
2. Задача 207
3. Матрица. Исключение. 208
4. Передачи 209
5. Токи, напряжения 210
6. Метод узловых напряжений 210
7. Метод контурных токов 212
8. Топологический расчет. 213
9. Сигнальный граф 216
10. Передачи 217
11. Обратные связи 218
12. Чувствительность 220
13. Выходные сопротивления 221
14. Заключение 222

Приложение I. Математика 224
П.I.1. Множество. 224
2. Операции над множествами. . 224
3. Поля и алгебры 225
4. Векторные пространства. . . 226
5. Изоморфизм. 227
6. Матрицы. 227
7. Матрицы. Действия 229
8. Свойства оператора Σ . . . 231
9. Умножение матриц 232
10. Алгебра матриц 233
11. Определители (детерминанты) 234
12. Перестановки и подстановки. 235
13. Ранг матрицы. 237

I4. Матрицы Кирхгофа 237
I5. Обратная матрица 238
I6. Матричные уравнения. 239
I7. Билинейная форма 239
I8. Квадратичные формы 240
I9. Сводка соотношения для матриц 242
Приложение 2. Матрицы и схемы замещения некоторых многополюсников. . . 243
П.2.I. Транзистор. 243
2. Триод. 244
3. Пентод 244
4. Гиратор. 245
Приложение 3. Предметный указатель 246
Литература 251

Цена 53 коп.

XI
А-15247