TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Matemaatika eriala

Markus Murruste

Matemaatilisest mõtlemisest

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Reimo Palm

Autor: …………………………………………………… „……” mai 2013

Juhendaja: ………………………………………………….. „……” mai 2013

Lubada kaitsmisele

Professor: ………………………………………………… „……” mai 2013

TARTU 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Asudes kolm aastat tagasi õppima matemaatika erialal, ei pidanud ma enda jaoks oluliseks matemaatika otsest rakendamist tulevikus. Mind ei köitnud väljakutsed õpetajana, statistikuna, analüütikuna, teadlasena, programmeerijana, insenerina või kellegi muu sarnasena. Mind köitis teoreetilise matemaatika omandamisega saadav mõtlemisvõime, mille kohta olin põgusalt lugenud ning kuulnud. Teadsin vaid pealiskaudselt, et selline süsteemne mõtlemisvõime tuleb mulle tulevikus kasuks mistahes valdkonnas. Selline mõtlemislaad sobis minu tulevikuvaadetega – omada tänapäeva kiiresti arenevas maailmas võimalikult tugevat vundamenti. Sain aru, et sellise tugisüsteemiga on võimalik pidevalt tekkivate uute olukordadega kiiresti kohaneda ning vajadusel lihtsalt ümber õppida.

Olles jõudnud lõpusirgele puhta matemaatika bakalaureuseõppega, huvitab mind matemaatilise mõtlemisvõime sisu veelgi rohkem. Kuidas täpsemalt matemaatiliselt mõtlemise võime mind tulevikus aitab? Kolm aastat koos teoreetilise matemaatikaga on möödunud väga kiiresti ning vähe aega on jäänud matemaatilise maailmapildi sügavamaks uurimiseks. Seega pean väga aktuaalseks selle teema käsitlemist nüüd, kui kohe-kohe on läbi saamas bakalaureuseõpe. Ideaalis oleks võinud seda detailsemalt analüüsida juba esimesel semestril või enne sedagi. Siis oleks tõenäoliselt paljude esmapilgul väga abstraktsete ning teoreetiliste ainete omandamine läinud hõlpsamalt.

Eelnevast lõigust võib tuleneda selle töö üks praktilisi väärtusi. Nimelt, see töö võiks anda esmakursuslastele selgema arusaamise matemaatilisest maailmapildist ning selle kasulikkusest. Antud töö on ülevaade matemaatilise mõtlemise sisust ja struktuurist seda valdkonda käsitlevate allikate põhjal. Kuna matemaatilise mõtlemise õpetamisele on pööratud uuringutes juba palju tähelepanu, siis selles töös keskendutakse just õppimisele ja inimesele endale. Teoreetilise osa illustreerimiseks viidi läbi ka test matemaatika-informaatikateaduskonna tudengite seas. Töös pööratakse tähelepanu erinevatele küsimustele. Mis on matemaatiline mõtlemine? Kuidas on võimalik matemaatilist mõtlemist süsteemselt rakendada? Mida kujutab endast abstraktne matemaatiline mõtlemine? Miks see käib paljudele üle jõu? Miks on kasulik matemaatikat õppida?

Matemaatilise mõtlemise kirjeldus

Kõik inimesed puutuvad iga päev vähemal või rohkemal määral kokku matemaatikaga. Sellest hoolimata ei ole enamus neist kursis matemaatilise mõtlemise sügavama sisuga. Inimeste arusaam matemaatilisest mõtlemisest tundub olevat liialt naiivne. Distsipliinides, milles ei ole matemaatiline mõtlemine hädavajalik, tõmbavad inimesed tihti võrdusmärgi matemaatilise mõtlemise ning arvutamise vahele, millega nad on enda jaoks defineerinud vaid pisikese osa matemaatikast. Tegelikult on matemaatilise mõtlemise tähendus hoopis mitmekesisem.

Matemaatilise mõtlemise struktuuri kirjeldamiseks lähtume selles peatükis Pisa matemaatika raamdokumendist [6], lisades sellele omalt poolt illustreerivaid näiteid. Näidete koostamisel oleme kasutanud allikat [1]. Raamdokumendis võetakse matemaatilise mõtlemise kirjeldamise aluseks erinevad protsessid, kontekstid ning sisukategooriad. Protsessid kirjeldavad, mida inimene teeb, et siduda ülesanne matemaatikaga ning selle abil jõuda ülesande lahenduseni. Protsessid jagunevad kolmeks: formuleerimine, rakendamine ning tõlgendamine. Kontekst on inimese maailma, milles tema ette ülesanded kerkivad, aspekt. Kontekstid jagunevad neljaks: isiklik, kutsealane, ühiskondlik ning teaduslik. Sisukategooriad näitavad, milline matemaatika valdkond ülesandele aluseks on. Sisukategooriad jagunevad samuti neljaks: muutumine ja seosed, ruum ja kuju, kogus, määramatus.

Mis on matemaatiline mõtlemine?

Matemaatiline mõtlemine on mõtlemine, kus ülesande lahendamiseks kasutatakse matemaatilisi meetodeid. Ülesande lahendamist matemaatiliste meetodite abil võib lihtsustatult ette kujutada 4-osalise tsüklina. Lähtepunktiks on reaalne ülesanne tegelikus maailmas. Tsükli esimesel sammul formuleeritakse ülesanne matemaatiliselt – ülesanne tõstetakse matemaatilisse maailma, kus temast saab matemaatiline ülesanne. Teise sammuna rakendatakse ülesandele matemaatikat ning saadakse matemaatilised tulemused. Kolmandaks tõlgendatakse saadud tulemusi ning liigutakse sellega tagasi tegelikku maailma. Viimase etapina kontrollitakse saadud tulemusi lähtuvalt esialgsest ülesandest ning selle kontekstist.

Kui tulemused ei ole reaalse ülesande seisukohalt rahuldavad, võib tsüklit korrata teistsuguste mudelite ning võtetega. Seega võime ütelda, et matemaatilist mõtlemist iseloomustab võime formuleerida, rakendada ja tõlgendada matemaatikat erinevates kontekstides. Formuleerimine, rakendamine ja tõlgendamine kirjeldavad, kuidas siduda ülesande kontekst matemaatikaga ning seeläbi ülesanne lahendada.

Matemaatiline mõtlemise protsessid

Vaatleme mainitud kolme protsessi detailsemalt, et saada aru nende sisust. Teooria kinnituseks illustreerime protsesse konkreetse näitega.

*Formuleerimin*e tähendab olukorra teisendamist matemaatiliseks käsitluseks sobivale kujule. Selle protsessi käigus tuuakse tegelikus elus ilmnenud probleem matemaatika valdkonda ning luuakse tema ümber matemaatiline struktuur, esitus ning konkreetsus. See protsess sisaldab tavaliselt järgmisi tegevusi:

- tehakse kindlaks reaalses elus ilmnenud probleemi matemaatilised aspektid;
- määratakse kindlaks olukorra aluseks olev matemaatiline struktuur (korrapärasus, seosed ja mustrid);
- lihtsustatakse probleemi, et teda oleks võimalik matemaatiliselt analüüsida;
- määratakse kindlaks kitsendused, mis kaasnevad matemaatilise modelleerimisega;
- kasutatakse sobivaid muutujaid, sümboleid, diagramme ja mudeleid probleemi matemaatiliseks esitamiseks;
- mõtestatakse lahti kontekstispetsiifilise ning matemaatilise keele vahelised seosed;
- teisendatakse probleem matemaatilisse keelde;
- kasutatakse tehnilisi vahendeid matemaatilise seose kujutamiseks.

Rakendamine kujutab endast matemaatilist arutelu olukorra üle ning lahenduseni jõudmist matemaatiliste mõistete, meetodite, faktide ning abivahendite abil. Lahenduseni jõudmiseks teostatakse matemaatilisi tegevusi: aritmeetilised tehted, loogilised järeldused, sümbolitega opereerimine, info lugemine graafikutelt, andmete analüüs. Kasutakse mitmesuguste matemaatika harude abi, nagu matemaatiline analüüs, algebra, diskreetne matemaatika, geomeetria, funktsionaalanalüüs, arvuteooria. See protsess sisaldab järgmisi tegevusi:

- mõeldakse välja strateegia lahenduseni jõudmiseks;

- kasutatakse formaalset ning tehnilist keelt lahenduse leidmise käigus;
- kasutatakse matemaatilisi reegleid, algoritme ning struktuure lahenduse leidmiseks;
- kasutatakse erinevaid informatsiooni esitusi: arvud, graafilised andmed, statistilised andmed, algebralised avaldised, võrrandid, geomeetrilised esitused;
- koostatakse diagramme ja graafikuid, millelt loetakse informatsiooni;
- lülitutakse vajadusel ühelt esituselt ümber teisele;
- täpsustatakse ja kohandatakse matemaatilisi mudeleid lahendamise käigus;
- tehakse üldistusi matemaatiliste meetodite rakendamisest.

Tõlgendamine tähendab tulemuse või lahenduse üle järelemõtlemist ning selle tõlgendamist tegeliku elu kontekstis. Hinnatakse, kas tulemused on antud olukorras mõistlikud ning mõttekad. See protsess sisaldab järgmisi tegevusi:

- kaalutakse matemaatilise lahendi mõistlikkust tegeliku ülesande kontekstis;
- analüüsitakse matemaatilisi argumente ning selgitatakse tulemusi probleemi konteksti terminites;
- antakse edasi lahenduse leidmiseks tehtud sammud;
- püütakse mõista, kuidas tegelik maailm mõjutab matemaatilise meetodi saadusi ja arvutusi;
- analüüsitakse kasutatud mudelit kriitiliselt ning määratakse kindlaks selle piirid.

Nende protsesside illustreerimiseks vaatleme järgnevat näidet. Pizzeria müüb kahte sorti pizzasid, mis on sama paksud. Ühtede läbimõõt on 3 detsimeetrit ning teiste läbimõõt on 4 detsimeetrit. Väiksemate pizzade hind on 3 eurot, suuremate pizzade hind on 4 eurot. Kumb pizza on rahaliselt soodsam?

Ülesande lähtepunktiks on mingis pizzarestoranis esinev situatsioon. Formuleerimise abil tõstame selle situatsiooni matemaatilisse maailma. Põhiülesandeks antud kontekstis on mudeli formuleerimine rahalise väärtuse jaoks. Sobiva matemaatilise mudeli leidmise hõlbustamiseks on sobilik teha joonised erinevatest pizzadest. Lahendaja peaks nägema, et pizzat saab samastada silindriga ning rahalist väärtust silindri ruumalaühiku hinnaga. Lahendaja võiks tähele panna, et pizza paksus ei mängi antud ülesandes rolli, kuna pizzad on sama paksud. Seega silindri ruumala analüüsimise asemel tuleb rõhk panna ringi pindala analüüsimisele. Lahendaja on saanud matemaatilise mudeli, kus pizzale vastab ring ning rahalisele väärtusele ringi pinnaühiku hind.

Seejärel rakendame matemaatikateadmisi pindala ning suhte arvutamiseks. Väiksema ringi pindalaks saame ligikaudu $S = 1{,}5^2\pi \approx 7{,}07$ ruutdetsimeetrit ja suurema ringi pindalaks $S = 2{,}0^2\pi \approx 12{,}56$ ruutdetsimeetrit. Ühe ruutdetsimeetri hind väiksema pizza korral on ligikaudu $\frac{3}{7{,}07} \approx 0{,}42$ eurot ja suurema pizza korral ligikaudu $\frac{4}{12{,}56} \approx 0{,}32$ eurot. Matemaatilises maailmas võrdleme saadud tulemusi ning jõuame tulemuseni, et väiksem ruutdetsimeetri hind vastab suuremale pizzale.

Tõlgendades saadud tulemust esialgse ülesande seisukohalt, selgub, et suurem pizza on rahaliselt otstarbekam. Pizza kuju käsitlemisel ringina tekivad ülesandesse mõningased ebatäpsused, millest johtuvalt ei ole antud ülesande matemaatiline mudel täielikult täpne. Küll aga erinevad antud ülesandes pizzade mõõtmed üksteisest märgatavalt, mistõttu võib olla kindel saadud vastuse korrektsuses.

Matemaatilise mõtlemise kontekstid

Matemaatilist mõtlemist on võimalik kasutada paljudes erinevates kontekstides. Kontekstidega tuleb arvestada matemaatiliste strateegiate ning esituste valimisel. Erinevad kontekstid võib klassifitseerida nelja suurde gruppi: isiklik, kutsealane, ühiskondlik ning teaduslik.

Isiklikus kontekstis tekkivad ülesanded seonduvad inimese endaga, tema sõpradega või perekonnaga. Isiklikku konteksti kuuluvaks võib lugeda näiteks poes käimist, toidu valmistamist, isiklikku tervist, transporti, sporti, reisimist, isiklikku planeerimist ning rahaasju. Näiteks kindlustamaks endale ning oma perele turvaline tulevik, on vajalikud baasteadmised rahanduse valdkonnast. Oletame, et inimene on ootamatult teeninud oma tööga 1000 eurot boonust. Ta võib kulutada raha kohe või investeerida saadud summa finantsvaradesse, mis on usaldusväärsed ning annavad 10% keskmist tootlust aastas. Paraku valib enamus inimesi endale esimese variandi, kuna nende jaoks on tähtis kohene rahulolu. Matemaatiliselt mõtlev inimene formuleerib antud valikute ümber matemaatilise mudeli. Ta rakendab teisele valikule liitintressi valemit, kust selgub, et 20 aasta pärast oleks see summa 6727,50 eurot ning 50 aasta pärast 117390,85 eurot. Matemaatiliselt mõtlev inimene tõlgendab saadud arve ning valib tõenäoliselt teise variandi. Rakendades seda lähenemist järjekindlalt, on võimalik suure tõenäosusega vältida olukorda, kus ootamatult tekkinud tulu on vaja kohe kasutusse võtta. Seega aitab rahanduslike mudelite kasutamine teha paremaid otsuseid rahaasjade planeerimises.

Kutsealase konteksti puhul keskendutakse ülesannetele, mis tekivad töömaailmas. Sellised ülesanded on näiteks järgmised: mõõtmine, kuluarvestus, ehitusmaterjalide tellimine, palgaarvestus, raamatupidamine, kvaliteedikontroll, inventeerimine ning tööga seotud otsuste tegemine. Kutsealase konteksti illustreerimiseks võib vaadelda järgnevat näidet. Tartus töötab müügiagent, kellel on vaja ühe päevaga külastada oma kliente Tallinnas, Türil, Viljandis, Haapsalus, Narvas ning Pärnus. Müügiagent teab kõikide linnade vahelisi kaugusi ning tema sooviks on leida mainitud sihtkohtade läbimiseks kõige lühem teekond. Kui müügiagendil on lisaks müügialastele oskustele ka teadmisi matemaatikast, siis oskab ta selle ülesande jaoks formuleerida matemaatilise mudeli. Matemaatika rakendamisel saab sellise ülesande lahendamiseks kasutada graafiteooriat. Lühimale teekonnale, mis võib hoida tunduvalt aega kokku, vastab graafis Hamiltoni tsükkel, mille käigus läbitakse graafi iga tippu ühe korra. Tulemuste tõlgendamisel tasub arvestada ka matemaatilisest mudelist väljaspool olevaid faktoreid, nagu liiklustihedus ja teeolud.

Kutsealase konteksti kirjeldamiseks vaatleme veel ühte näidet. Tartus töötaval postiljonil on iga päev tarvis läbi käia tema jaoks eraldatud tänavad. Postiljon soovib seda teha võimalikult efektiivselt, mis tähendab, et iga tänavat soovib ta läbida ainult ühe korra. Sellise skeemi koostamiseks tõstab arukas postiljon selle situatsiooni formuleerimise abil matemaatilisse maailma. Matemaatilises maailmas saab rakendada graafiteooriat, kus antud ülesande tingimustele vastab Euleri tsükkel. Saadud teekondade tõlgendamisel on mõistlik arvestada tipptundidega ning liikluskorraldusega.

Ühiskondlikus kontekstis keskendutakse inimkogukonnas tekkivate ülesannete lahendamisele. Nendeks on näiteks hääletussüsteemid, ühistransport, valitsemine, avalik poliitika, demograafia, reklaam, riiklik statistika ning majandus. Ühiskondlikus kontekstis esinevatest ülesannetest paremaks arusaamiseks võime vaadelda 2010. aastal koostatud Tartu ühistranspordiuuringu lõpparuannet [5]. Selle peamiseks eesmärgiks oli optimaalse linnaliinivõrgu kujundamine. Ülesande lahendamiseks kasutati tarkvara TRIPS/CUBE, mis võimaldas koostada matemaatilise transpordimudeli ja lahendada transpordiülesande ühistranspordi jaoks. Olukorra tõlgendamisel arvestati ka sellega, et saadud mudel on reaalse situatsiooni lihtsustatud nägemus. Näiteks oli raske arvestada linna- ja maakonnaliinide ühendamisega kaasnevate korralduslike pooltega, nagu erinevad piletisüsteemid, erinev finantseerimine.

Teaduslikus kontekstis saab lahendada ülesandeid looduslikus maailmas või teaduses. Teaduslik kontekst katab selliseid valdkondi nagu kliima, ökoloogia, meditsiin, kosmoseteadus, geneetika ja mõõtmine. Näitena võib vaadelda kosmoselaeva Apollo 11, mis viis 1969. aastal esimese inimese Kuule. Kuule minek tugines väga tugevalt matemaatikale. Missiooni kõik aspektid olid läbi kalkuleeritud ning peensusteni välja arvutatud. Arvestati täpselt, kui palju võtta kaasa kütust erinevateks lennufaasideks, milline on lennutrajektoor, kui palju hapnikku läheb meeskonnal vaja jne. Tegevusplaan oli matemaatiliselt väga täpne ning vigade tegemiseks ruumi ei olnud.

Matemaatiline sisu

Matemaatilise mõtlemise oluline komponent on matemaatilisest sisust arusaamine ning võime näha matemaatilist sisu erinevates elulistes olukordades. Matemaatilist sisu võib klassifitseerida mitmel alusel. Koolimatemaatikas on ainekava tavaliselt üles ehitatud ajalooliselt väljakujunenud matemaatikaharude järgi, mis on abiks aine struktuursel omandamisel. Praktiliste probleemide lahendamise seisukohalt on otstarbekas selline liigitus, mis vastab levinumatele praktilistele ülesannetele ning on samas piisavalt mitmekesine matemaatika põhiolemuse esitamiseks. Selle järgi võib matemaatilise sisu jagada nelja klassi: muutumine ja seosed, ruum ja kuju, kogus, määramatus.

Muutumine ja seosed esinevad igapäevaelus paljudes objektides ja olukordades ning nende vahel. Osad seosed on püsivad, osad muutuvad. Palju on olukordi, kus muutused toimuvad omavahel seotud objektide süsteemis. Osadel juhtudel toimuvad need muutused kindla aja jooksul, teistel juhtudel on ühe objekti muutused seotud teise objekti muutustega. Mõned muutused on pidevad, mõned on diskreetsed. Matemaatiline mõtlemine sisaldab endas arusaamist seoste ja muutumise põhitüüpidest. Muutuste kirjeldamiseks kasutatakse vastavaid matemaatilisi mudeleid. Matemaatiliselt tähendab see muutuste kirjeldamist funktsioonidega, võrranditega ja graafikutega. Igapäevaelulised näited muutumisest ja seostest on organismide kasvamine, muusika, aastaaegade vaheldumine, majandusseisundid, tööhõive, ilmamustrid jne.

Konkreetse näitena võib vaadelda tootmisettevõtteid, kuna nemad peavad iga päev arvestama muutuste ja seostega tootmisprotsessides. Nende eesmärgiks on saavutada limiteeritud ressurssidega maksimaalne kasum. Matemaatilise tootmismudeli koostamisel tuleb arvestada ressursside kättesaadavusega, mis sõltub hankeahelast ning selle usaldusväärsusest. Arvestada tuleb seda, et erinevat liiki tooted nõuavad valmistamiseks erinevaid ressursside koguseid. Lõpptoodangu saamiseks peab tihti kombineerima ning liitma pooltoodanguid, millega tuleb mudeli kokkupanemisel samuti arvestada. Peamiseks eesmärgiks on leida koostatud mudelile kõige kasumlikum sisendite komplekt. Seega leidub ettevõtete tootmisprotsessides hulgaliselt seoseid, mille tulemusena ühe teguri muutus mõjutab mingil määral teisi.

Ruumi ja kuju kategooria põhialuseks on geomeetria, kuid selle kategooria sisu ja tähendus ulatub geomeetriast kaugemale. Kasutatakse elemente ka teistest valdkondadest, nagu ruumiline visualiseerimine, algebra ja mõõtmine. Ruumi ja kuju kategooriasse kuuluvad sellised nähtused nagu objektide omadused, mustrid, asukohad, visuaalse informatsiooni kodeerimine, navigeerimine.

Ruumi ja kuju kategooriat iseloomustava huvitava näitena tasub heita pilk mesilaste tegemistele. Nimelt ehitavad mesilased endale vahast kärgesid selleks, et nendes elada ning mett hoiustada. Mesilased on targad putukad ning jääb mulje, et ehitamisel arvestavad nad geomeetriliste kujundite omadustega. Kärgede ristlõigeteks on korrapärased kuusnurgad, mistõttu nad sobivad üksteisega kokku. Võrdkülgsed kolmnurgad või ruudud kataksid samuti ala täielikult, kuid kuusnurksete kärgede puhul on ruumi mee hoiustamiseks sama koguse vaha kohta kõige rohkem.

Kogus on arvatavasti kõige olulisem kategooria maailmaga suhtlemisel ja selles tegutsemisel. Selle alla kuulub erinevate objektide, seoste ja olukordade atribuutide koguse määramine. Tuleb mõista koguse erinevaid esitusi ning osata tuletada hinnanguid, mis põhinevad kogustel. Määramaks kogust, tuleb aru saada mõõtmisest, loendamisest, ühikutest, indikaatoritest ning arvulistest trendidest. Paljude reaaleluliste nähtuste kirjeldamiseks on koguse määramine on üks peamistest meetoditest. Selle abil on võimalik modelleerida olukordi, uurida muutumist, kirjeldada ruumi ja hinnata määramatust.

Koguse kategooria illustreerimiseks võime vaadelda ettevõtte majandusaasta aruannet. Suur osa majandusaasta aruandest põhineb arvudel, millega kajastatakse bilanss ning kasumiaruanne. Bilansi ning kasumiaruande mõistmiseks on tarvilikud elementaarsed teadmised majandusest. Nende teadmistega on võimalik anda mitmesuguseid hinnanguid ettevõtte kohta. Näiteks bilansimahust on võimalik saada ettekujutus, kui suure ettevõttega on tegu. Bilansist paistavad välja ka käibevara ning põhivara osakaalud, millega saab hinnata ettevõtte likviidsust. Pikajaliste ning lühiajaliste kohustuste osakaale kõrvutades on võimalik anda hinnang ettevõtte riskitasemele. Kasumiaruande edukal analüüsimisel saab teha järeldusi, kas tegu on kasumliku või kahjumliku ettevõttega. Seega lihtsate koguseliste näitajate õigesti mõistmisel on võimalik teha küllaltki sisukaid järeldusi.

Määramatus on nähtus, mis ilmneb protsesside muutlikkuses. Siia kuuluvad näiteks mõõtmiste määramatus, mõõtmisvead ning juhuslikkus. Samuti hõlmab määramatuse kategooria järelduste tegemist, tõlgendamist ja hindamist olukordades, kus määramatus on keskel kohal. Määramatuse käsitlemiseks on välja arendatud statistika ning tõenäosusteooria, mis annavad formaalsed vahendid määramatusnähtuste kirjeldamiseks, modelleerimiseks ning tõlgendamiseks. Määramatust võib kohata teaduslikes ennustustes, küsitlustulemustes, ilmaprognoosides ja majandusmudelites.

Määramatuse abil on võimalik finantsmaailmas tõlgendada olukordi ning teha järeldusi. Näitena võib vaadelda olukorda investeerimispangas, kus kliendile on vaja koostada minimaalse riskitasemega väärtpaberite portfell. Teada on kahe väärtpaberi praegune turuhind ja kolme erineva situatsiooni juhtumise tõenäosus. Iga erineva situatsiooni esinemisel on hinnanguliselt teada, milliseks kujunevad väärtpaberite hinnad aasta pärast. Antud ülesanne sisaldab määramatust, mida arvesse võttes on võimalik formuleerida sobiv matemaatiline mudel, mille abil saab leida minimaalse riskitasemega portfelli.

Matemaatilise mõtlemise juhised

Olles kirjeldanud matemaatilise mõtlemise sisu ning sellega seonduvaid erinevaid aspekte, vaatleme nüüd, kuidas oleks ülesannete lahendajal võimalik matemaatilist mõtlemist süsteemselt rakendada. Selleks tugineme G. Pólya käsitlusele [7].

G. Pólya (1887–1985) oli Ungari matemaatik, kes pani aluse paljudele olulistele tulemustele kompleksmuutuja funktsioonide teoorias, kombinatoorikas, tõenäosusteoorias ja teistes matemaatika harudes. G. Pólya on tuntud ka ülesannete lahendamise strateegiate uurijana. Teaduslike, tehniliste ning sotsiaalsete probleemide lahendamiseks pidas ta otstarbekaks jagada ülesande lahenduskäik neljaks faasiks. Esiteks tuleb ülesandest aru saada. Teiseks tuleb koostada lahendusplaan. Kolmandaks tuleb lahendusplaan täita. Viimase sammuna tuleb lahenduskäiku uurida ning analüüsida.

Ülesandest arusaamine

Inimesel on raske vastata küsimusele, millest ta pole aru saanud. Ülesandest arusaamiseks peab inimene eristama üksteisest ülesande põhiosad – otsitav, andmed, tingimused. Seega tuleks lahendajal endale esitada vastavaid küsimusi. Mis on otsitavaks? Mis on antud? Milles seisnevad ülesande tingimused? Soovitatav on vaadelda ülesande põhiosi tähelepanelikult, korduvalt ning mitmest erinevast aspektist. Vajadusel võtta kasutusele sobivad tähistused. Kui ülesanne on seotud mingisuguse kujundiga, siis on otstarbekas koostada joonis. Joonisele võib märkida otsitava ning andmed. Arusaamise etapis on kasulik küsida, kas eksisteerivaid tingimusi saab rahuldada.

Plaani koostamine

Ülesande mõistmisele järgnev protseduur on plaani koostamine, mis peaks olema suunatud otsitava leidmisele. Idee leidmine plaani koostamiseks on kogu lahenduskäigu kõige olulisem osa. Plaan ülesande lahendamiseks tekib siis, kui üldjoontes on teada saadud, missuguseid arvutusi ning konstruktsioone tuleb otsitava leidmiseks kasutada. Plaani koostamist sobib alustada küsimusega: kas on teada mõni ülesanne, mis on antud ülesandega seotud? Vaadelda tasub just selliseid seostuvaid ülesandeid, milles on sama või sarnane otsitav. Kas sellist ülesannet on võimalik ära kasutada? Kui vastus on positiivne, siis on loodud lahendusplaan. Negatiivse vastuse korral võib küsida: kas ülesannet saab teisiti sõnastada? Sõnastuse muutmisega on oht, et kaldutakse lähteülesandest kõrvale. Seetõttu tasub aeg-ajalt küsida, kas kõik andmed ning tingimused on arvesse võetud.

Plaani täitmine

Eduka lahendusplaani genereerimiseks on vaja teatud eelteadmisi valdkonnast, harjumust loogiliselt mõelda ning keskendumisvõimet. Plaani täitmisel läheb kõige rohkem tarvis kannatlikkust. Lahendaja peab oma mõttekäigu igat sammu kontrollima. Mõnikord on seda sobilik teha intuitiivselt, teinekord tasub kasutada ranget tõestamist. Seejuures on kohane küsida järgnevaid küsimusi. Kas konkreetse sammu õigsus on selgesti läbinähtav? Kas selle sammu õigsust saab tõestada?

Tagasivaade

Pärast ülesande lahendamise lõppu on inimestel harjumuseks see enda mõtetest eemaldada ning asuda uute ettevõtmiste kallale. Paraku jäävad nad selliselt käitudes ilma ülesande kõige õpetlikumast osast. Lahenduskäiguni viinud teekonna uurimine ning analüüsimine kinnistab teadmisi. Vaatamata sellele, et lahenduskäigu iga sammu on juba kontrollitud, tasub küsida, kuidas on veel võimalik tulemust ning lahenduskäiku kontrollida. Kas tulemust on võimalik leida teisiti? Kas tulemust on võimalik vahetult näha? Kas saadud tulemust või lahenduskäiku on võimalik kasutada mõne teise ülesande korral?

Aproksimeerimine

Selline neljaetapiline lähenemisviis on kasutatav nii matemaatiliste ülesannete kui ka praktiliste ülesannete puhul. Küll aga on praktiliste ülesannete lahendamiseks kasutatavad teadmised tihti palju komplitseeritumad ning raskemini määratletavad. Praktiliste ülesannete lahendamisel lähtutakse tihti ebamäärastest ideedest. Selliste ideede täpsustamine osutubki sageli ülesande lahendamisel kõige olulisemaks osaks. Praktiliste ülesannete vähemolulisi andmeid ning tingimusi on ratsionaalne ignoreerida, mistõttu on lubatud ka mõningased ebatäpsused arvutustes. Sellist protsessi nimetatakse aproksimeerimiseks. Näiteks eelnevalt käsitletud pizza näite puhul ignoreeritakse seda, et pizza kuju ei vasta täpselt silindrile.

Matemaatiline näide

Eelnevate lahendusfaaside illustreerimiseks vaatleme kahte näidet: matemaatiline ning praktiline. Matemaatiliseks näiteks sobib järgnev lihtne ülesanne. Leida risttahuka diagonaali pikkus, kui risttahuka pikkus, laius ja kõrgus on antud.

1. Ülesandest arusaamine

- Sellise ülesande mõistmiseks peab inimene olema tuttav Pythagorase teoreemi ning elementaarse planimeetriaga.
- Võtame kasutusele sobivad tähistused: x, a, b ja c.
- Mis on otsitavaks? Risttahuka diagonaali pikkus (x).
- Mis on antud? Risttahuka pikkus (a), laius (b) ja kõrgus (c).
- Millised on tingimused? Kui risttahuka pikkus, laius ja kõrgus on a, b ja c, siis x on diagonaali pikkus.
- Kas tingimusi saab rahuldada? Kui a, b ja c on antud, siis on antud ka risttahukas. Kui risttahukas on antud, siis on ka tema diagonaali pikkus määratud.

2. Plaani koostamine

- Kas on teada mõni ülesanne, mis on seotud antud ülesandega? Antud ülesandega on seotud täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkuse leidmine.
- Kas seda ülesannet on võimalik ära kasutada? Selgub, et on. Seda saab kasutada risttahuka põhja diagonaali pikkuse arvutamiseks, mida võib vaadelda abiülesandena. Saadud abiülesande tulemuse abil saab risttahuka enda diagonaali pikkuse arvutada. Sellega on loodud lahendusplaan.

3. Plaani täitmine

- Abiülesande tundmatu (põhja diagonaali pikkuse) võib tähistada tähega y. Siis saame, et $x^2 = y^2 + c^2$ ning $y^2 = a^2 + b^2$.
- Elimineerime y ja saame $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ehk $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Kas on selgesti nähtav, et kolmnurk külgedega x, y ja c on täisnurkne? Jah, kuna risttahuka kõrgus on risti risttahuka põhjaga.

4. Tagasivaade

- Kas kõik andmed said kasutatud? Jah, kuna kõik esinevad diagonaali pikkuse valemis.
- Kas ka valemist on näha, et kõrguse c kasvades kasvab diagonaali pikkus? Jah, kuna c kasvades suureneb juurealuse avaldise väärtus.
- Kui kõrgus hakkab vähenema ja lõpuks täitsa ära kaob, siis risttahukas muutub ristkülikuks. Kas seda on näha ka saadud valemist? Jah, kui võtta $c = 0$, siis taandub see valem ristküliku diagonaali pikkuse valemiks.
- Kas tehtud töö on kasutatav mõne teise ülesande korral? Jah. Näiteks vaatleme ülesannet, kus ristkülikukujulise 15 meetri pikkuse ja 10 meetri laiuse metallplaadi ülestõstmiseks läheb tarvis nelja trossi. Trossid on ühepikkused, kinnitatud metallplaadi nurkadesse ning on kokku seotud 5 meetri kõrgusel. Kui pikk on iga tross? Andmeid tõlgendades saame, et $a = 7.5$, $b = 5$, $c = 5$, ning võime kasutada sama lahendusplaani mis risttahuka puhulgi.

Praktiline näide

Vaatleme praktilise näitena puidust kirjutuslaua ehitamist.

1. Ülesandest arusaamine

- Kirjutuslaua ülesandest arusaamiseks tulevad kasuks mõningased elementaarsed teadmised ehitusvaldkonnast. Näiteks materjali valikul tuleb arvestada puidu kõvadusega, niiskusetasemega ja töödeldavusega. Ülesandest arusaamist soosib ka see, kui lahendaja on varem kokku puutunud erinevate tööriistadega ning kinnitusvahenditega.
- Mis on otsitavaks? Otsitavaks antud ülesandes on puidust kirjutuslaud.

- Mis on antud? Antud on puidust materjalid, kinnitusvahendid ning vajalikud tööriistad.
- Millised on ülesande tingimused? Valmiv laud peab olema kasutajale sobilike mõõtmetega. Laua konstruktsioon peab olema vastupidav ning tugev. Lisaks peaks kirjutuslaud olema visuaalselt ilus.
- Siin etapis on kasulik koostada joonis või eskiis valmiva laua kohta.

2. Plaani koostamine

- Plaani koostamisel on tarvilikud elementaarsed mõõtmis- ning arvutamisoskused. Samuti tulevad kasuks baasteadmised füüsikast, mille abil on võimalik luua vastupidav ning tugev konstruktsioon.
- Plaani koostamisel on otstarbekas jagada kirjutuslaua koostamine mitmeks abiülesandeks, mis järgnevad üksteisele kindlas järjekorras. Eraldi saab vaadelda lauajalgade valmistamist, lauaplaadi valmistamist, sahtlite tegemist, detailide katmist kaitsekihiga ning detailide komplekteerimist.
- Kas on teada mõni ülesanne, mis on seotud antud ülesandega? Kas seda ülesannet on võimalik ära kasutada? Lahendajal võib endal olla eelnev kogemus analoogiliste projektide tegemisel. Kui nii on, siis ta saab enda kogemusi ning teadmisi edukalt ära kasutada. Kui lahendajal eelnev kogemus puudub, siis on tal näiteks võimalik vaadelda mööblipoodides olevaid kirjutuslaudu ning koguda sealt ideid ja kontseptsioone enda laua valmistamiseks.
- Kas plaani üksikasjad on kooskõlas lõppvisiooniga? Igal sammul tuleb jälgida, kas erinevate detailide mõõtmed on omavahel vastavuses. Tuleb tähele panna, kas kinnitused on piisavalt tugevad, et tekiks vastupidav konstruktsioon. Tuleb jälgida, et kinnitused oleksid võimaluse korral varjatud, kuna üheks tingimuseks oli visuaalne ilu.

3. Plaani täitmine

- Tegevusplaani edukat täitmist soosivad sellised tegurid nagu tööriistade käsitsemisoskus, puidu töötlemisoskus ning kinnitusvahendite kasutamisoskus.
- Lahendaja peaks veenduma, et iga ettevõetud samm on plaanikohane.
- Kas iga sammu õigsus on selgesti läbinähtav? Lahendaja peaks olema veendunud, et ühtegi sammu ei ole vaja ümber teha. Sammu kontrollimisel võib lahendaja kasutada nii intuitsiooni kui ka reaalseid arvutusi.

4. Tagasivaade

- Laua valmimisel tasub vaadata kogu lahenduskäik üle. Kas kõik planeeritud materjalid said kasutatud? Kui mingid materjaliosad või kinnitusvahendid jäid üle, tuleb üles leida selle põhjus. Viga võis tekkida plaani koostamisel või plaani täitmisel. Kas kõik vajalikud tingimused said täidetud?
- Kas sellist tulemust oleks võimalik mõnes analoogilises ülesandes ära kasutada? Näiteks saaks neid kontseptsioone ning võtteid kasutada riiuli või tooli tegemisel. Sellisel juhul oleks lahendajal võimalik luua mööbliesemete komplekt.
- Kas analoogilist lauda oleks saanud ka teisiti koostada? Kui jah, siis tasub koheselt selline lahenduskäik läbi mõelda ning kirja panna. Järgmisel korral, kui tekib soov analoogilist projekti läbi viia, siis on olemas kaks alternatiivset lahendust.

Abstraktne matemaatiline mõtlemine

Kui matemaatilist mõtlemist süstemaatiliselt edasi arendada, siis tekib sellest abstraktne matemaatika. Abstraktne matemaatika on matemaatika osa, mis tegeleb matemaatika enese vajadustest tekkinud probleemide lahendamisega. Järgnevas peatükis on kasutatud allikaid [2], [3] ja [4].

Abstraktse matemaatika aspektid

Inimesele, kes puutub esmakordselt kokku modernse abstraktse matemaatikaga, tundub selline sümbolite süsteem esmapilgul tõenäoliselt väga keeruline olevat. Tavaliselt ei ole inimene nõus kulutama piisavalt aega, et endale selgeks teha, mida abstraktne matemaatika endast kujutab.

On ilmne, et erinevad elulised situatsioonid nõuavad erinevaid kirjeldamisviise. Näiteks teekonna seletamiseks punktist A punkti B on mõistlik kasutada kaardi abi. Muusikapala edasiandmiseks on sobilik panna ta kirja nootidena või reaalselt ette mängida. Paljude teiste struktuuride kirjeldamiseks on sobivaim matemaatiline tähistusviis. Näiteks kommutatiivsuse seadust võib kirjeldada sõnadega – kui kaks arvu liita, siis nende järjekord ei ole oluline. Kuid tavaliselt kasutatatakse selleks matemaatiliste sümbolite abi: $m + n = n + m$. Paljud teised matemaatilised nähtused on kirjeldatavad sama lihtsa abstraktsuse tasemega.

Abstraktsuse neli tasandit

Erinevalt teistest bioloogilistest liikidest on inimese aju suuteline mõtlema abstraktsetest nähtustest. Inimene on suuteline mõtlema peaaegu kõigest, millest hing ihaldab. Mõistmaks paremini abstraktse mõtlemise sisu, tasub vaadelda nelja erinevat abstraktsuse taset. Esimesel tasemel puudub sisuliselt abstraktsus. Kõik objektid, mille peale mõeldakse, asuvad vaateulatuses. Kujutlusvõimet kasutatakse vaid siis, kui mõeldakse objekti võimalikele liikumistrajektooridele või asendi muutustele. Teisel tasemel mõtleja suudab ette kujutada reaalsuses eksisteerivat objekti, mis ei asu tema vaateulatuses. Kolmanda tasemel on objektid imaginaarsed, kuid neid on võimalik kirjeldada reaalsete objektide abil. Näiteks inimene võib ette kujutada enda tuleviku unistuste maja. Reaalset seda maja olemas veel ei ole, kuid elemendid, millest see maja koosneb, on reaalsuses eksisteerivad. Neljanda taseme alla liigitub abstraktne matemaatika. Sellel tasemel on matemaatilised objektid täiesti abstraktsed ning neil ei ole lihtsat ega otsest sidet pärismaailmaga.

Miks abstraktne matemaatika käib paljudele üle jõu?

Miks on nii, et osadel inimestel ilmneb rohkem kui teistel probleeme abstraktselt mõtlemisega matemaatikas? Tegelikult suudavad kõik inimesed edukalt abstraktselt mõelda. Hea näitena eelmise lause tõestuseks võib käsitleda teleseriaali vaatamist, mis kujutab endast keerulist abstraktset süsteemi. Kõik tegelased ning suhted nende vahel eksisteerisid esialgu ainult seriaali looja mõtetes ning alles seejärel edastati vaataja mõtetesse. Suutmaks jälgida seriaali sisu, peab inimene teadma palju inimpsühholoogiast ning igapäevaelu reeglitest. Miks on inimesel seda keerukat abstraktset süsteemi jälgida lihtne, kuid abstraktseid matemaatilisi nähtusi raske? Peamiseks põhjuseks on see, et teleseriaali sisu on üles ehitatud tuttavale taustsüsteemile. Tegelaskujud ning inimestevahelised suhted seriaalis on väga sarnased päris inimestega ning suhetega, mida kogetakse iga päev. Paraku nii-öelda matemaatiline seriaal ei sarnane tihti igapäevaeluga. Vaatamata sellele, et matemaatilise abstraktsionismi seoseid on võimalik taandada samalaadseteks igapäevaste seostega, tajub tavavaataja neid siiski võõrastena.

Selle näite illustreerimiseks sobib vaadelda Wasoni testi [2]. Test sai oma nime psühholoog Peter Wasoni järgi 1970. aastal. Olgu laua peale laotatud neli kaarti, mille ühel pool on arv ja teisel pool täht. Laual on näha nelja sümbolit:

E K 4 7

Kaardid on tehtud järgneva reegli kohaselt – kui kaardi ühel pool on täishäälik, siis teisel pool on paarisarv. Millised kaardid tuleb ümber keerata, et veenduda kõigi kaartide vastavuses reeglile? Enamus keerab ümber kaardi E, mis on ilmselgelt õige esimene samm. Tahetakse kontrollida, kas teisel pool asub paarisarv. Suur hulk inimesi jätab keeramata kaardi K, kuna reegel ei ütle midagi kaashäälikute kohta. Seni on tehtud sammud korrektsed. Nüüd tahavad paljud inimesed keerata kaarti 4, mida tegelikult ei ole vaja kontrollida. Kui teisel pool on täishäälik, siis reegel kehtib. Kui teisel pool on kaashäälik, siis reegel samuti kehtib, kuna reegel ei ütle midagi kaashäälikute kohta. Paljud ei kontrolli viimast kaarti, kuna see oli paaritu. Tegelikult tuleb just seda kontrollida, kuna täishääliku ilmnemisel tekib vastuolu reegliga. Suur hulk inimesi ei soorita seda testi osa õigesti.

Järgmisena võtame vaatluse alla lihtsama ülesande. Noored inimesed on peol, kellest mõned joovad alkoholi, mõned mitte. Osa seltskonnast on täisealised, teine osa alaealised. Organiseerija peab kontrollima seaduse kehtivust 4-liikmelises lauas. Üks inimene joob õlut ning teine joob koolat, kuid nende ID-kaardid on laual tagurpidi, mistõttu nende vanus ei ole nähtav. Küll aga on nähtaval ülejäänud kahe inimese ID-kaardid koos vanustega. Üks on alaealine ning teine täisealine, kuid kahjuks ei suuda organiseerija eristada, kas juuakse sprite'i või viina toonikuga. Kelle ID-kaarte või jooke peaks kontrollima, et veenduda seaduse kehtivuses? Vastus sellele küsimusele on lihtne ning enamus vastab õigesti. Tuleb kontrollida õlut joova inimese ID-kaarti ning alaealise inimese jooki.

Tegelikult on see ülesanne täpselt sama mis eelminegi: täishäälikule vastab alkoholi joomine, kaashäälikule karastusjoogi joomine, paarisarvule täisealisus ning paaritule arvule alaealisus. Reegel, mis vastab eelmisele reeglile – kui sa jood alkoholi, siis sa pead olema täisealine. Miks inimestele sellise ülesande lahendamine erinevalt eelmisest raskusi ei valmista? Erinevus ilmneb ülesande esitamises. Esimesel juhul puudub side reaalse maailmaga, kuid teisel juhul hõlmab ülesanne inimese jaoks tuttavaid objekte ning tingimusi. Siit koorub hästi välja 3-nda ning 4-nda abstraktsusetaseme vahe. Nimelt piisab teise ülesande lahendamiseks 3-ndal tasemel mõtlemisest. Noori inimesi tuleb ette kujutada kujuteldaval peol. See-eest esimese ülesande lahendamiseks on tarvilik 4-ndal abstraktsusetasemel mõtlemine, mis nõuab teadlikku pingutust.

Seega saavad inimesed probleemidega, mis koosnevad tuttavatest tingimustest ning objektidest, palju paremini hakkama kui matemaatiliselt abstraktsete probleemidega. Paraku on nii, et tänapäeva dünaamilises maailmas ilmneb pidevalt uusi ning ootamatuid olukordi. Seetõttu ei pruugi uute probleemide tekkimisel piisata 3-ndal tasemel mõtlemisest. Sellisel juhul tuleb kasuks kõrgemal tasemel abstraktselt mõtlemine, millega on võimalik uute olukordade ümber luua struktuure, mis viivad lahendusteni.

Matemaatilise abstraktsioonivõime omandamine ning arendamine nõuab aju teadlikku treeningut. Tõenäoliselt sellest tuleneb ka peamine põhjus, miks paljudele inimestele käib see üle jõu. Nimelt ei olda valmis panustama piisavalt palju aega ja energiat, ületamaks barjääri, mis seisab abstraktse matemaatika ja inimese vahel.

Test

Uurimaks abstraktse matemaatilise mõtlemise võimet ja selle arengut ülikoolis õppimise käigus, sai eelnevalt kirjeldatud test läbi viidud matemaatika-informaatikateaduskonna tudengite seas. Selleks viidi läbi kuus küsitlust erinevates loengutes ja praktikumites. Vastajatele jagati juhuslikult kätte üks kahest küsimusest (vt lisa 1 ja lisa 2). Võrreldes eelmise näitega sõnastati mõlemad küsimused ümber sobivamale kujule. Kokku vastas küsitlustele 115 tudengit informaatika, infotehnoloogia, matemaatika, matemaatilise statistika ning bioloogia erialalt. Valimisse sattus 46 esimese kursuse tudengit ning 55 teise ja vanema kursuse tudengit. 14 õpilase kursus jäi määramatuks, kuna nemad kirjutasid õppeaastaks käimasoleva aasta arvu.

Testi üheks eesmärgiks oli teada saada, kas meie teaduskonna õpe on mõjunud positiivselt abstraktsete ülesannete lahendamise oskusele. Teiseks eesmärgiks oli teada saada, kuidas inimesed lahendavad samasuguse matemaatilise sisuga, kuid erineva kontekstiga ülesandeid.

Testi esimeseks hüpoteesiks seati see, et meie teaduskonna õpe mõjub positiivselt abstraktsete ülesannete lahendamise oskusele. Antud testis vastab abstraktsele ülesandele kaartide ülesanne. Õpilased jaotasime kursuse numbri alusel kahte klassi: esimene kursus ning vanemad kursused. Kaartide ülesandele vastas kokku 58 tudengit (vt tabel 1). Neist 25 olid esimese kursuse tudengid ning 26 vanema kursuse tudengid. Selle ülesande puhul jäi teadmata 7 inimese kursus. Esimese kursuse tudengitest vastas kaartide ülesandele õigesti 24%. Vanema kursuse tudengitest vastas õigesti 31%. Tulemuste erinevus on küllalti väike, kuid sellegipoolest kallutatud vanemate tudengite kasuks. Jääb mulje, et õppimine meie teaduskonnas tõepoolest mõnevõrra parandab õpilaste oskust lahendada abstraktset ülesannet.

Teiseks hüpoteesiks seati see, et inimesed on suutelised paremini lahendama ülesandeid, mille kontekst neile eelnevalt tuttav on. Läbiviidud testis oli selliseks ülesandeks see, kus noored inimesed viibisid peol. Vaatleme, kuidas erinevad üksteisest abstraktse ülesande ning reaalse ülesande tulemused. Abstraktsele ehk kaartide ülesandele vastas kokku 58 õpilast. Neist 29% vastasid abstraktsele ülesandele õigesti. Reaalsele ülesandele vastas kokku 57

	Kaardid (variant A)				Pidu (variant B)			
Eriala	**Õige**		**Vale**		**Õige**		**Vale**	
Inf 1	6	32%	13	68%	11	55%	9	45%
Mat 1	0	0%	3	100%	1	100%	0	0%
Stat 1	0	0%	3	100%	0	0%	0	0%
Kokku 1	6	24%	19	76%	12	57%	9	43%
Inf 2+	2	25%	6	75%	7	70%	3	30%
Mat 2+	3	43%	4	57%	4	44%	5	56%
Stat 2+	1	11%	8	89%	2	29%	5	71%
It 2+	2	100%	0	0%	2	67%	1	33%
Kokku 2+	8	31%	18	69%	15	52%	14	48%
Teadmata	3	43%	4	57%	3	43%	4	57%
Kokku	**17**	**29%**	**41**	**71%**	**30**	**53%**	**27**	**47%**

Tabel 1. Õiged ja valed vastused.

Inf – informaatika.
Mat – matemaatika.
Stat – matemaatiline statistika.
It – infotehnoloogia.
1 – esimene kursus.
2+ – teine ja vanem kursus.

Kaardid (variant A)			Pidu (variant B)		
Vastus	**Arv**	**Protsent**	**Vastus**	**Arv**	**Protsent**
I9 (õige)	17	29%	ÕA (õige)	30	53%
I2	13	22%	ÕT	0	0%
I	13	22%	Õ	1	2%
NI92	11	19%	ÕVAT	12	21%
I92	1	2%	ÕAT	7	12%
NI	1	2%	VÕ	0	0%
N2	1	2%	VT	0	0%
Mööda	1	2%	Mööda	4	7%
9	0	0%	A	1	2%
92	0	0%	AT	1	2%
Kokku	**58**	**100%**	**Kokku**	**57**	**100%**

Tabel 2. Ülevaade pakutud vastustest.

Õ – inimene, kes joob õlut.
V – inimene, kes joob vett.
A – alaealine.
T – täisealine.
Mööda – vastus ei olnud seotud antud ülesandega.

õpilast. Neist 53% vastasid reaalsele ülesandele õigesti. Selgesti on näha, et reaaleluline kontekst aitab kaasa matemaatilise sisuga ülesande lahendamisele.

Huvitavaks osutusid matemaatika ja informaatika vanemate kursuste tudengite tulemused. Variant A nõuab neljandal tasemel abstraktset mõtlemist ning variant B nõuab kolmandal tasemel abstraktset mõtlemist. Matemaatikud said variandiga A sarnaselt hakkama nagu variandiga B. Matemaatikute õigete vastuste osakaal oli variandi A puhul 43% ning variandi B puhul 44% (vt tabel 1). See-eest informaatikute tulemused erinesid kahes erinevas variandis märgatavalt. Informaatikute õigete vastuste osakaal variandi A puhul oli 25% ning variandi B puhul 70%. On näha, et matemaatikud said neljandal tasemel mõtlemisega paremini hakkama kui informaatikud. See-eest kolmandal tasemel mõtlemisega jäid nad informaatikutele alla. Selle põhjuseks võib olla vigane ülesande formuleerimise protsess.

Vaatleme veel mõlemale ülesandele pakutud vastuseid. Ülesanded on sisult sarnased, kuid erineva kontekstiga. Kõrvutades sama sisuga vastused (vt tabel 2), on kohati näha märgatavaid osakaalude erinevusi. Õigete vastuste osakaal on mõlema ülesande puhul suurim. Variandi A vastusele NI92 vastab variandi B puhul ÕVAT. Nende osakaalud on ligilähedased. Võib oletada, et kummagi variandi puhul mõtlesid vastajad selliselt, et kui kõiki kontrollida, siis sellest kindlasti piisab. Kuid vaatame kaartide ülesande populaarsuse poolest teist ja kolmandat vastusevarianti I2 ja I. Variandi B puhul vastusele I2 vastab ÕT. Vastust I2 pakkus 22% vastanutest, kuid vastust ÕT ei pakkunud ükski vastaja. Variandi B puhul vastusele I vastab Õ. Vastust I pakkus 22% vastanutest, kuid vastust Õ pakkus kõigest 2%. Seega on alust arvata, et erinevates kontekstides püstitatud ülesande lahendamiseks rakendatakse erinevaid mõtlemisprotsesse.

Variandi I2 puhul toodi sageli põhjenduseks, et need on ainukesed kaardid, mille kohta reegel midagi ütleb. Sellised vastused jätavad arvestamata, et kaartide teisel poolel võib samuti olla täishäälikuid või paarisarve, kuigi need on hetkel nähtamatud. Sellisele põhjendusele vastab esimene abstratktsioonitase, kuna arvestati ainult nende arvudega ja numbritega, mis on nähtavad. Samuti arvati tihti, et ülesande reegel tähendab mõlemapidist seost, vaatamata sellele, et ülesandes on ta kirja pandud ainult ühtepidi implikatsioonina. Näiteks vastati „sellega saan teada, kas täishääliku teisel pool on paarisarv ja paarisarvu teisel pool täishäälik”.

Variandi I puhul viidati sageli sellele, et reegel nõuab midagi ainult täishäälikute kohta. Näiteks vastati „kui seal on paarisarv, siis reegel kehtib. Teisi ei ole vaja kontrollida, kuna reegli kohaselt huvitavad meid ainult täishäälikuga märgistatud kaardid”. Mitmel juhul näib olevat see vastus saadud samamoodi nagu I2, kuid õigesti on märgitud, et ülesande reegel on ainult ühesuunaline: „sest reegel nõuab ainult seda, et kui ühel pool on täishäälik, siis teisel pool peab olema paarisarv. Ülesanne ei nõua seda, et kui ühel pool on paarisarv, siis teisel pool peab olema täishäälik”.

Matemaatika õppimise kasulikkus

Tänapäeva elus tuleb oskus mingil tasemel matemaatiliselt mõelda kasuks igaühele. Rohkem kui kunagi varem on analüütiliselt mõtlemise oskus vajalik kõigile, kes soovivad kasutada oma arenguks ning kasvuks võimalusi, mida kaasaegne demokraatlik ühiskond meile pakub. Matemaatiline mõtteviis aitab inimesel tajuda rolli, mida matemaatika maailmas mängib, ning teha põhjendatud järeldusi ja otsuseid, mida oodatakse konstruktiivselt, aktiivselt ja mõtlevalt inimeselt [6]. Miks aga õppida matemaatikat ülikoolis? Toome siin lühidalt välja mõned põhjused, kasutades allikaid [2] ja [4].

Matemaatika keskkoolis ning ülikoolis

Kuni 19. sajandi teise pooleni kasutati matemaatikat peamiselt kalkulatsioonideks. Vilumus matemaatikas kujutas endast oskust sooritada arvutusi erinevate probleemide lahendamiseks. Sarnase suunitlusega on ka enamus tänapäeva keskkoolimatemaatikast. Kuid matemaatika rakendamise kõrval hakati 19. sajandi keskel tähelepanu pöörama sisulisele arusaamisele. Peamiseks rõhuks ei olnud enam arvutamine, vaid abstraktsete kontseptsioonide ja seoste formuleerimine ning mõistmine, mis on ka tänapäeval ülikoolimatemaatika eesmärgiks.

Keskkoolis õpitakse üldjuhul selgeks protseduur, kuidas probleemi lahendada. Ülikoolis oodatakse üliõpilaselt lisaks protseduurile oskust aru saada kontseptsioonist. Ülikoolimatemaatika eesmärgiks on õpetada selliseid oskuseid, mis aitavad inimesel lahendada reaalelulisi või matemaatilisi probleeme, mille kohta tal ei ole teada standardseid protseduure. Seega võib öelda, et keskkoolimatemaatikaga on võimalik edukalt toime tulla „kastis sees mõeldes”. See-eest ülikoolimatemaatikaga edukalt tegelemiseks on tihti tarvilik „kastist väljas mõtlemine”.

Nende kahe erineva tasandi võrdlemiseks võib tuua paralleeli autotööstusega. Keskkoolimatemaatika vastab autoga sõitmise õppimisele. Ülikoolimatemaatika paneb rõhku sellele, kuidas auto töötab, kuidas autot säilitada ja parandada, kuidas autot ise disainida ning ehitada.

Miks õppida ülikoolis matemaatikat?

On selge, et professionaalsete matemaatikute jaoks, kes tegelevad matemaatika loomisega ning selle korrektse kirjapanemisega, on sisuline arusaamine matemaatikast oluline. Miks võiks matemaatika õppimine olla kasulik ka neile inimestele, kes otseselt ei hakka tegelema matemaatikateadusega?

Ei ole kahtlust, et paljud töökohad nõuavad matemaatilisi oskusi. Inimesed võib nende matemaatiliste oskuste alusel lihtsustatult jaotada kaheks. Ühed on need, kes suudavad leida matemaatilise lahenduse etteantud matemaatilisele probleemile. Teised on need, kes suudavad reaalelulist probleemi matemaatiliselt tõlgendada ning saadud matemaatilist kontseptsiooni edukalt analüüsida. Minevikus oli tööjõuturul suurem nõudlus esimest tüüpi matemaatiliste oskustega inimeste järele. Kuid tänapäeval peavad ettevõtted olema dünaamilised ning pidevalt muutuma, mistõttu aina suureneb nõudlus teist tüüpi mõtlejate järele. Tööandjate silmis on eriti hinnatud sellised teist tüüpi mõtlejad, kes suudavad edukalt töötada interdistsiplinaarsetes meeskondades ning näha olukordi uute nurkade alt. Ülikooli matemaatikaõpingutega ongi võimalik endas arendada teist tüüpi matemaatilisi oskusi.

Matemaatika on oluline nii rakendamise kui ka arusaamise seisukohalt. Globaalne majandus muutub iga päevaga aina rohkem teaduse- ning tehnoloogiakeskseks. Selleks, et sellises ühiskonnas hästi hakkama saada, tuleb omada teadmisi matemaatikast, mis on teaduse ning tehnoloogia vundamendiks. See on näide sellest, kui vajalik on matemaatika otsene kasutamine tänapäeval. Lisaks kasutamisele on oluline ka arusaamine matemaatikast. Matemaatika sisulise õppimisega omandatav abstraktne mõtlemisvõime aitab hõlpsamini tegeleda probleemidega mistahes valdkonnas. Matemaatiliselt mõtlemise oskuste abil on võimalik erinevates valdkondades kiiresti orienteeruda ning kohaneda.

Kokkuvõte

Töö eesmärgiks oli teada saada, mida täpsemalt kujutab endast matemaatiline mõtlemine, kuidas on seda võimalik reaalsete ning teoreetiliste ülesannete lahendamisel teadlikult rakendada, mida kujutab endast abstraktne matemaatiline mõtlemine, miks on matemaatiline mõtlemine kasulik. Selle eesmärgi saavutamiseks kasutati valdkonda käsitlevaid allikaid, autori enda näiteid ning viidi läbi test matemaatika-informaatikateaduskonna tudengite seas.

Töö tulemusena valmis põhjalik kirjeldus matemaatilise mõtlemise kohta. Vaadeldi erinevaid mõtlemisprotsesse, nagu formuleerimine, rakendamine ja tõlgendamine. Kajastati isklikku, kutsealast, ühiskondlikku ning teaduslikku konteksti. Kirjeldati erinevaid sisukategooriaid, nagu muutumine ja seosed, ruum ja kuju, kogus ja määramatus.

Töö käigus valmis ülevaade, kuidas matemaatilise mõtlemise abil saab süsteemselt lahendada nii praktilisi kui ka teoreetilisi ülesandeid. Lahendamise etapid jagunevad neljaks: ülesandest arusaamine, plaani koostamine, plaani täitmine ning tagasivaade. Töös vaadeldi sellist lähenemist nii matemaatilise kui ka praktilise näite puhul. Mõlemal juhul tuli ülesande lahendamisel selline lähenemisviis kasuks, kuna tekkis loogiline ning arusaadav ülevaade ülesandest kui tervikust.

Saime teada, et abstraktselt mõtlemine tekitab inimestes raskusi, kuna situatsioonil on nõrk seos reaalses maailmas toimuvaga. Sellise tulemuse andis ka läbiviidud test. Testi käigus selgus, et inimesed lahendavad paremini ülesannet, mis asub neile tuttavamas kontekstis.

Teema üheks võimalikuks edasiarenduseks oleks sarnase sisuga õppeaine loomine matemaatika-informaatikateaduskonna esimese kursuse tudengitele. Aine eesmärgiks oleks parema arusaamise andmine matemaatilisest maailmapildist ja selle kasulikkusest.

About Mathematical Thinking

Bachelor thesis

Markus Murruste

Summary

The purpose of the thesis was to give a comprehensive overview about the mathematical thinking. We wanted to know, how it is possible to apply mathematical thinking in real-life and theoretical situations, what exactly abstract mathematical thinking means, why is mathematical thinking useful. For that we used different resources about the topic. We added our own standpoints and examples and carried out a test in the faculty of mathematics and informatics.

As a result of the work we learned about the aspects of mathematical thinking. We described the detailed procedure how to use mathematical thinking. This procedure can be divided to four: understanding the problem, generating the plan, realizing the plan and verifying the plan. We tried using this method with mathematical problem and with practical problem as well. In either case this kind of approach helped, because it helped to obtain a logical and clear overview about the problem.

We explained that the reason why abstract mathematics is hard for people is because the situation in abstract world has only a weak connection with reality. The test, which was carried out, gave us the same results. It appeared that people tend to solve problems better if these have a familiar background.

One of the possibilities to continue with this topic could be a creation of a new subject in the curriculum of first year students in our faculty. The subject can introduce the basics of mathematical world and its benefits in our life.

Kasutatud kirjandus

[1] COMAP. For All Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World, 7th edition. W. H. Freeman, 2006, xviii + 962 lk.

[2] Devlin, K. The Math Gene. Basic Books, 2000, xviii + 330 lk.

[3] Devlin, K. The Language of Mathematics. W. H. Freeman, 2000, viii + 344 lk.

[4] Devlin, K. Introduction to Mathematical Thinking. Keith Devlin, 2012, x + 92 lk.

[5] Inseneribüroo Stratum. Ühistranspordiuuring projektile „Tartu linna ja lähiomavalitsuste ühistranspordi arendamine". http://info.raad.tartu.ee/uurimused.nsf/236552664d75f727c2256c4b00207453/b245a96e63acec4fc2257796004cc730/$FILE/Tartu_yhistranspordiuuring_2010.pdf (15.04.13), 2010, 59 lk.

[6] Pisa 2012 matemaatikaraamistik. http://uuringud.ekk.edu.ee/fileadmin/user_upload/documents/pisa_2012_matemaatika_raamdokument.pdf (15.03.13), 2012, 30 lk.

[7] Pólya, G. Kuidas seda lahendada. Valgus, 2001, 200 lk.

Lisa 1 – Küsitluslehe variant A

Eriala: ....

Õppeaasta: ....

Ülesanne – aega 3 minutit

Olgu meil neli kaarti, millest igaühe ühele poolele on kirjutatud täht ning teisele poolele arv. Reegel nõuab, et kui kaardi ühel pool on täishäälik, siis teisel pool peab olema paarisarv. Laual on näha neli kaarti sümbolitega N I 9 2. Leia kõik kaardid, mis tuleb kindlasti ümber keerata, et veenduda reegli kehtivuses.

Vastusele esitada ka põhjendus.

Aitäh!

Lisa 2 – Küsitluslehe variant B

Eriala: ....

Õppeaasta: ....

Ülesanne – aega 3 minutit

Noored inimesed on peol. Osa seltskonnast on täisealised, ülejäänud alaealised. Igaüks neist joob midagi, osa alkoholi, ülejäänud midagi muud. Seadus nõuab, et kui isik joob alkoholi, siis ta peab olema täisealine. Organiseerija peab kontrollima seaduse kehtivust 4-liikmelises lauas. Üks inimene joob õlut ning teine joob vett, kuid nende ID-kaardid on laual tagurpidi, mistõttu nende vanus ei ole nähtav. Küll aga on nähtaval ülejäänud kahe inimese ID-kaardid koos vanustega. Üks on alaealine ning teine täisealine, kuid kahjuks ei suuda organiseerija eristada, kas nad joovad apelsinimahla või apelsinimahla viinaga. Leia kõik inimesed, kelle ID-kaarte või jooke peab organiseerija kontrollima, et veenduda seaduse kehtivuses.

Vastusele esitada ka põhjendus.

Aitäh!

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Markus Murruste

(sünnikuupäev: 21.03.90)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose Matemaatilisest mõtlemisest, mille juhendaja on Reimo Palm,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 19.05.13.