M. TAMM

LINEAARALGEBRA
JA
LINEAARPROGRAMMEERIMINE

I

TALLINN 1962

Tallinna Polütehniline Instituut

Matemaatika kateeder

M.Tamm

LINEAARALGEBRA JA LINEAARPROGRAMMEERIMISE konspekt

TPI raamatupidamise eriala üliõpilastele

I osa

Lineaaralgebra

Tallinn, 1962

М.Тамм

Конспект по линейной алгебре и линейному программированию для студентов бухгалтерской специальности ТПИ

Часть I

На эстонском языке

Таллинский политехнический институт
Таллин, ул.Калинина д. IOI

S i s s e j u h a t u s.

Nõukogude majanduse kiire areng esitab majandusteadlaste ettevalmistamisele üha suuremaid nõudeid. Majandusteadusesse, nagu mitmesse muussegi senisesse „mittetäppis" -teadusesse (bioloogia, meditsiin jt.), tungib matemaatika. Matemaatikale omaste kvantitatiivsete meetodite kasutamine võimaldab paremini, täpsemini ja kiiremini lahendada väga paljusid konkreetseid majanduslikke ülesandeid, eriti kui kasutada elektronarvutit.

Õppeaines „lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine" käsitletakse majanduslikus planeerimises rakendatavatest uutest matemaatilistest meetoditest ainult ühte osa, mis praeguseks ajaks on kõige paremini välja töötatud.

Lineaarprogrammeerimise rajajaks on Leningradi matemaatika professor L.V. K a n t o r o v i t š, kelle 1939.a. ilmunud brošüüris „ Математические методы организации и планирования производства " on esmakordselt formuleeritud lineaarprogrammeerimise ülesandeid ja loodud ka meetod nende lahendamiseks.

Ajalooliselt esimeseks Kantorovitši meetodil lahendatud ülesandeks on Üleliidulise Vineeritrusti Kesklaboratooriumi poolt esitatud ülesanne:

Tehases on kaheksa vineerikoorimispinki, millel valmistatakse viit liiki tooteid, kusjuures iga tööpingi tootlikkus iga tooteliigi jaoks on erinev, nagu seda näitab järgnev tabel, kus on antud ajaühikus töödeldavad kogused.

Vineeri-pink	T o o d e				
	A	B	C	D	E
I	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
II	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
III	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
IV	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
V	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
VI	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
VII	4,0	7,0	9,0	14,0	17,0
VIII	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0

Nõutakse jaotada töö pinkide vahel nii, et päevatoodang oleks (koguselises väljenduses) maksimaalne, kusjuures kogu toodangust 10 % oleks toodet A, 12 % toodet B, 28 % toodet C, 36 % toodet D ja 14 % toodet E.

Kantorovitši meetodil leiti optimaalne plaan vineeripinkide koormamisel (% kogu tööajast):

Vineeri-pink	T o o d e					Kogu tööaeg
	A	B	C	D	E	
I	-	33	-	-	67	100
II	-	91	9	-	-	100
III	57	-	43	-	-	100
IV	-	-	94	6	-	100
V	-	-	100	-	-	100
VI	-	-	-	100	-	100
VII	-	-	-	100	-	100
VIII	100	-	-	-	-	100

Sellise tööjaotuse puhul saadakse kõige suurem kogutoodang, mida nendelt kaheksalt vineeripingilt loeteldud viie toote valmistamisel etteantud vahekorras on võimalik saada, ilma et pinkide tootlikkust oleks muudetud. Enne ülesande püstitamist ja lahendamist koormati neid kaheksat vineeripinki ühteviisi: igal pingil valmistati viit liiki tooteid eespool toodud vahekorras. Võrreldes selle jaotusega saame optimaalse tööjaotuse puhul toodangut 4,8 % võrra rohkem.

Lineaarprogrammeerimise edasises arengus on määrava tähtsusega USA matemaatiku G.B. D a n t z i g'i tööd, eriti 1947. - 48.a. loodud simpleksmeetod.

Lineaarprogrammeerimise meetodeid ja nende abil lahendatavate ülesannete liike käsitletakse käesoleva konspekti II peatükis, I peatükis aga antakse mõningaid vajalikke matemaatilisi eelteadmisi lineaaralgebrast.

I. LINEAARALGEBRA

1. Kahe tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemi geomeetriline tõlgendus.

a) Lineaarne kahe tundmatuga võrrand $ax + by + c = 0$ esitab tasapinnageomeetrias sirgjoont.

N ä i d e 1. Võrrandiga $3x - 5y = 7$ määratud sirgjoone joonestamiseks teisendame võrrandi enne kujule

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

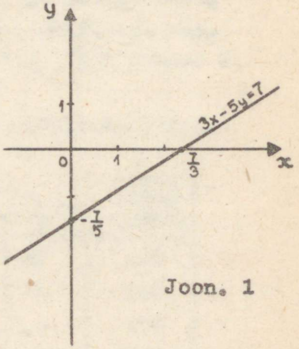
millest saame telglõigud p ja q. Selleks jagame võrrandit $3x - 5y = 7$ seitsmega,

$$\frac{3x}{7} - \frac{5y}{7} = 1$$

ehk

$$\frac{x}{\frac{7}{3}} + \frac{y}{-\frac{7}{5}} = 1,$$

millest $p = \frac{7}{3}$ ja $q = -\frac{7}{5}$ (joonis 1).



Joon. 1

---

b) Kahe tundmatuga v õ r r a n d i l a h e n d a m i n e tähendab kõigi niisuguste reaalarvupaaride leidmist, mis rahuldavad seda võrrandit, ehk - geomeetrilises keeles - tasapinna kõigi punktide leidmist, mille koordinaadid rahuldavad seda võrrandit. Järelikult on lahenditeks kõik sirgjoone punktid ehk nende koordinaadipaarid.

N ä i d e 2. Lahendame võrrandi $3x - 5y = 7$. Selleks avaldame ühe tundmatu sellest võrrandist teise kaudu: $-5y = 7 - 3x$ ehk $y = \frac{3x - 7}{5}$ ehk $y = 0{,}6\,x - 1{,}4$.

Tundmatule x võib anda vabalt väärtusi, sest võrrandi parem pool $0,6x - 1,4$ omab reaalarvulise väärtuse iga reaalarvu x puhul. Järelikult on võrrandi $3x - 5y = 7$ lahenditeks arvupaarid ehk punktid $(x; 0,6x - 1,4)$, kus x tähendab mistahes reaalarvu. Vaadeldaval võrrandil on seega lõpmata palju lahendeid.

---

c) Võrrandis $ax + by + c = 0$ peab vähemalt ühe tundmatu kordaja erinema nullist, s.t. kas $a \neq 0$ või $b \neq 0$ või mõlemad erinevad nullist, sest muidu ei olekski tegu võrrandiga. Kui $a \neq 0$, siis saame avaldada x,

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a},$$

seega on võrrandi lahenditeks punktid

$$\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}; y\right)$$

iga y puhul. Kui aga on teada, et $b \neq 0$, siis avaldame y,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

seega on võrrandi lahenditeks punktid

$$\left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)$$

iga x puhul.

Järelikult oleme tõestanud, et kehtib

t e o r e e m 1:

igal kahe tundmatuga lineaarvõrrandil on lõpmata palju lahendeid.

d) Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

l a h e n d i k s nimetatakse iga reaalarvupaari, mis rahuldab süsteemi mõlemat võrrandit, ehk - geomeetrilises tõlgenduses - iga punkti, mis asetseb mõlemal sirgel.

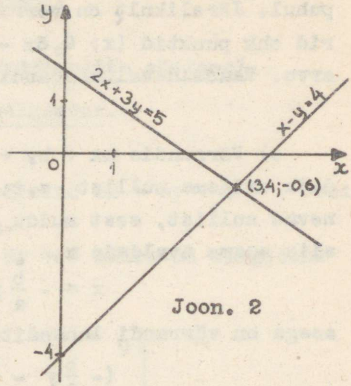
N ä i d e 3. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

algebraliselt. Selleks liidame esimesele võrrandile 3-kordse teise, saame $5x = 17$ ehk $x = 3,4$. Teisest võrrandist leiame nüüd, et $y = x - 4$ ehk $y = 3,4 - 4$ ehk $y = -0,6$. Järelikult on võrrandisüsteemil üksainus lahend (3,4; - 0,6) ehk tegu on punktis (3,4; -0,6) lõikuvate sirgetega (joonis 2).

---

e) Kaks sirget võivad tasapinnal olla teineteisega paralleelsed või lõikuda või ühtida. Vastavalt sellele on kahel sirgel tasapinnageomeetrias kas 0 või 1 või lõpmata palju ühiseid punkte. Kandes selle üle kahest võrrandist koosnevatele süsteemidele, võime öelda, et kehtib



Joon. 2

t e o r e e m 2:

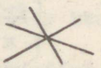
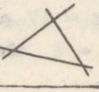
kahe tundmatuga lineaa.. võrrandite süsteemil kas puuduvad lahendid või on täpselt üks lahend või on lõpmata palju lahendeid.

f) Näitame, et teoreem 2 kehtib ka kolmest võrrandist koosnevate süsteemide puhul. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

lahendamine on samaväärne kolme sirge ühiste punktide otsimisega tasapinnageomeetrias.

Kolme sirge vastastikust asendit tasapinnal iseloomustab järgnev tabel.

Juhtumi nr.	Kolme sirge vastastikune asend tasapinnal	Tekkiv kujund	Ühiste punktide arv
I	Ükski paar sirgeid ei ole paralleelsed ning kõik sirged lõikuvad ühes punktis		1
II	Ükski paar sirgeid ei ole paralleelsed ning sirged lõikuvad paarikaupa erinevates punktides		0

III	Kaks sirget on paralleelsed, kuid erinevad, ning kolmas sirge lõikab neid.		0
IV	Kaks sirget ühtivad ning kolmas sirge lõikab neid		1
V	Kaks sirget ühtivad ja kolmas on nendega paralleelne		0
VI	Kolm sirget on paralleelsed		0
VII	Kolm sirget ühtivad		

Järelikult kehtib teoreem 2 ka kolme võrrandi juhul. On võimalik tõestada, et teoreem 2 kehtib ükskõik mitmest lineaarvõrrandist koosnevate süsteemide puhul.

N ä i d e 4. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 0. \end{cases}$$

Kolmas võrrand on järeldus esimesest kahest võrrandist. Tõepoolest,

$$x + y + 2(2x + 3y) = 5x + 7y$$

ja

$$-2 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Seega võime kolmanda võrrandi ära jätta ja lahendada süsteemi

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame $x = -y - 2$, mille asendamine teise võrrandisse annab $2(-y - 2) + 3y = 1$ ehk $y = 5$. Edasi $x = -5 - 2$ ehk $x = -7$. Järelikult on vaadeldaval kolme võrrandi süsteemil üksainus lahend $(-7; 5)$. Geomeetriliselt on tegu I juhtumiga.

N ä i d e 5. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3. \end{cases}$$

Lahendame esimesed kaks võrrandit koos: $x = 2 - y$, edasi $2(2 - y) + 3y = 1$ ehk $4 + y = 1$ ehk $y = -3$, seega $x = 2 - (-3)$ ehk $x = 5$. Kontrollime, kas kahe esimese sirge lõikepunkt $(5;-3)$ asetseb ka kolmandal sirgel:

$$5 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) = 25 - 21 = 4 \neq 3.$$

Ei asetse. Järelikult puudub võrrandisüsteemil lahend ehk geomeetriliselt on tegu juhtumiga II (sest kerge on kontrollida, et sirgete paralleelsust ega ühtimist ei esine).

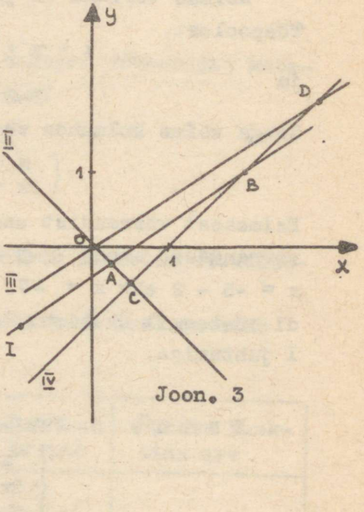
N ä i d e 6. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -0{,}1x - 0{,}2y = -0{,}3 \\ 17x + 34y = 51. \end{cases}$$

Ilmselt on tegu kolme sirge ühtimisega, sest teine võrrand on esimese(- 0,1)-kordne, kolmas aga 17-kordne (juhtum VII), järelikult lahendeid on lõpmata palju. Nende leidmiseks avaldame ükskõik missugusest neist võrrandeist ühe tundmatu teise kaudu, saame $x = 3 - 2y$. Järelikult on lahendiks iga punkt $(3 - 2y; y)$, kus y on meelevaldne reaalarv.

N ä i d e 7. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$$



Joon. 3

Esimene ja kolmas sirge on paralleelsed ning erinevad. Neli sirget lõikuvad paarikaupa (välja arvatud I ja III) erinevates punktides A, B, O, C, D (joonis 3). Järelikult puudub neil sirgetel ühine punkt ehk, mis on seesama, võrrandisüsteem on v a s t u o l u l i n e.

N ä i d e 8. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \\ 16x - 2y = 9 \\ 31x + 29y = 1. \end{cases}$$

Esimese kahe sirge ainsaks lõikepunktiks on joonise 3 järgi C (0,5; -0,5). Tõepoolest, 0,5 - 0,5 = 0 ja 0,5 + 0,5 = 1. Punkt C asetseb aga ka ülejäänud kahel sirgel. Tõepoolest, 8 + 1 = 9 ja 15,5 - 14,5 = 1. Seega lõikuvad need neli sirget ühesainsas punktis ehk, mis on seesama, sellel võrrandisüsteemil on täpselt üks lahend, nimelt (0,5; - 0,5).

2. Kolme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemi geomeetriline tõlgendus.

a) Kolme tundmatuga lineaarvõrrand $ax + by + cz = d$ esitab ruumigeomeetrias tasapinda.

V õ r r a n d i $ax + by + cz = d$ l a h e n d a m i s e k s tuleb leida kõik niisugused reaalarvukolmikud, mis rahuldavad seda võrrandit.

N ä i d e 9. Võrrandi $2x - 3y + z = 6$ lahendamiseks avaldame sellest võrrandist ühe tundmatu teiste kaudu, saame $z = -2x + 3y + 6$. Et selle võrrandi parem pool annab reaalarvu igasuguste reaalarvude x ja y puhul ja et muid tingimusi pole, siis anname tundmatutele x ja y vabalt reaalarvulisi väärtusi ning arvutame vastavad z väärtused, s.t. võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Kõik selle võrrandi lahendid sisalduvad ü l d l a h e n d i s

$$(x;\ y;\ -2x + 3y + 6),$$

kus x ja y tähendavad mistahes reaalarve.

---

b) Et võrrandis $ax + by + cz = d$ vähemalt ühe tundmatu kordaja erineb nullist, siis saame ikka avaldada ühe tundmatu teiste kaudu. Viimastele võime anda vabalt väärtusi. Seega kehtib teoreem 1 ka iga kolme tundmatuga lineaarvõrrandi kohta, s.t. et

igal lineaarsel kolme tundmatuga võrrandil on lõpmata palju lahendeid.

c) Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

l a h e n d i k s nimetatakse iga reaalarvukolmikut, mis rahuldab süsteemi mõlemat võrrandit, ehk - geomeetriliselt - iga punkti, mis asetseb mõlemal tasapinnal.

Kaks tasapinda võivad olla teineteisega paralleelsed või lõikuda sirget mööda või ühtida. Vastavalt sellele on kahel tasapinnal kas 0 või lõpmata palju ühiseid punkte.
Järelikult kehtib

t e o r e e m 3:

kahest kolme tundmatuga lineaarvõrrandist koosneval süsteemil on kas lõpmata palju lahendeid või see süsteem on vastuoluline.

N ä i d e 9. Võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

on vastuoluline, sest vastavad tasapinnad on erinevad, kuid paralleelsed.

N ä i d e 10. Võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendid, sest tasapinnad ei ole paralleelsed. Lahendamiseks avaldame esimesest võrrandist ühe tundmatu, saame $z = 6 - 2x + 3y$. Asendame tulemuse teise võrrandisse:

$$x + y + 6 - 2x + 3y = 1,$$

millest

$$x = 4y + 5.$$

Nüüd avaldame ka z ainult y kaudu:

$$z = 6 - 2(4y + 5) + 3y$$

ehk

$$z = -5y - 4.$$

Andes tundmatule y vabalt väärtusi, saame nüüd x ja z arvutada. Üldlahend on seega

$$(4y + 5;\ y;\ -5y - 4).$$

---

d) Analüüsides kolme või rohkema tasapinna vastastikuseid asendeid, võib veenduda, et kehtib

t e o r e e m 4:

kolme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemil kas puuduvad lahendid või on täpselt üks lahend või on lõpmata palju lahendeid.

N ä i d e 11. Võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 5 \\ x + y = 1 \\ 3x + 3y = 7 \end{cases}$$

on vastuoluline, sest tegu on kahe paralleelsete tasapindade paariga.

N ä i d e 12. Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ y + 2z = 3 \\ z = 4 \\ x + 4y + 2z = 9. \end{cases}$$

Paralleelseid tasapindu ei esine. Lahendame kolm esimest võrrandit koos. Saame, et $z = 4$, $y = 3 - 8 = -5$ ja $x = 2 + 4 + 15 = 21$. Kolme esimese tasapinna ainus ühine punkt (21; -5; 4) asetseb ka neljandal tasapinnal, tõepoolest $21 - 20 + 8 = 9$. Seega on sellel võrrandisüsteemil täpselt üks lahend (21; -5; 4).

N ä i d e 13. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 6x - 15y + 3z = 6. \end{cases}$$

Esimene ja kolmas tasapind ühtivad, teine ei ole nendega paralleelne, järelikult on neil tasapindadel lõpmata palju ühiseid punkte - terve lõikesirge. Kolmanda võrrandi kui esimese 3-kordse jätame kõrvale ning lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + z = 2 + 5y \\ x + z = 1 - y, \end{cases}$$

millest $x = 1 + 6y$ ja $z = 1 - y - 1 - 6y$ ehk $z = -7y$. Seega üldlahend on $(1 + 6y;\ y;\ -7y)$.

3. n-dimensionaalne vektoriruum. Hüpertasapind.

a) 2- ja 3-dimensionaalses ruumis võib punkte samastada nende kohavektoritega, sest punkti P koordinaadid on ka tema kohavektori OP koordinaadeks. Seega võib 2- ja 3-dimensionaalseid ruume nimetada ka v e k t o r i r u u m i d e k s.

Nimetame kindlas järjekorras võetud n reaalarvu hulka n-d i m e n s i o n a a l s e k s v e k t o r i k s:

$$\vec{x} = (x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n),$$

kus reaalarve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nimetatakse vektori $\vec{x}$ k o o r d i n a a t i d e k s. Olgu $\vec{y}$ ka mingi n-dimensionaalne vektor:

$$\vec{y} = (y_1;\ y_2;\ldots;\ y_n).$$

Kahte vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ nimetame v õ r d s e k s, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed,

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots,\ x_n = y_n.$$

Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ s u m m a k s nimetatakse vektorit, mille koordinaatideks on $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vastavate koordinaatide summad,

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ldots;\ x_n + y_n).$$

Kui λ on mingi reaalarv ehk s k a a l a r, siis defineerime v e k t o r i $\vec{x}$ λ-k o r d s e kui vektori, mille koordinaadid on $\vec{x}$ koordinaatide λ -kordsed,

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ s k a l a a r k o r r u t i s e k s nimetatakse arvu, mis saadakse $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vastavate koordinaatide korrutiste liitmisel,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Kõigi n-dimensionaalsete vektorite hulka, kus on defineeritud vektorite võrdus, liitmine, skaalariga korrutamine ja skalaarkorrutis, nimetatakse n-d i m e n s i o n a a l s e k s ehk n-m õ õ t m e l i s e k s v e k t o r i r u u m i k s.

N ä i d e 14. 4-dimensionaalset ruumi kasutatakse füüsikas: aeg-ruum, kus vektori 3 esimest koordinaati määravad koha ruumis ja 4.koordinaat määrab ajahetke.

Ka 5-, 6-, jne. -dimensionaalsele ruumile võib füüsikast, keemiast jm. leida konkreetseid tõlgendusi.

---

b) Kanname ka tasapinna mõiste üle n-dimensionaalsesse ruumi. Selleks tuletame 3-dimensionaalse ruumi tasapinnale vektorvõrrandi.

Olgu teada selle tasapinna mingi normaalvektor $\vec{n}$ ja mingi punkt $P_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$ sellel tasapinnal. Võtame tasapinnal vabalt punkti $P(x;\ y;\ z)$, mille koordinaadid on muutuvad suurused.

Tähistame punktide P_o ja P kohavektoreid $\vec{r}_o$ ja $\vec{r}$. Vektor $\overrightarrow{P_oP}$ asetseb ilmselt tasapinnal. Et $\overrightarrow{P_oP} = (x - x_o; y - y_o; z - z_o)$, siis $\overrightarrow{P_oP} = \vec{r} - \vec{r}_o$. Vektor $\vec{n}$ kui normaalvektor on risti tasapinna iga vektoriga, seega ka vektoriga $\vec{r} - \vec{r}_o$. Vektorite ristseisuks on aga tarvilik ja piisav nende skalaarkorrutise nulliga võrdumine,

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0,$$

mis ongi tasapinna vektorvõrrand.

c) Olgu nüüd vektorid $\vec{n}$, $\vec{r}$ ja $\vec{r}_o$ n-dimensionaalsed:

$$\vec{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$
$$\vec{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\vec{r}_o = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Siis nimetatakse võrrandit

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$$

ehk

$$a_1(x_1 - b_1) + a_2(x_2 - b_2) + \ldots + a_n(x_n - b_n) = 0$$

ehk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_o,$$

kus $a_o = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, n-dimensionaalse ruumi h ü p e r t a s a p i n n a võrrandiks. Nii saame lineaarset n tundmatuga võrrandit ka geomeetriliselt tõlgendada.

Lineaarvõrrandite süsteemi lahendite arvu käsitlevad teoreemid 1 - 4 saab üldistada ja kokku võtta

t e o r e e m i k s 5:

igal lineaarsel võrrandil on lõpmata palju lahendeid; kui võrrandite arv m on väiksem kui tundmatute arv n, m < n, siis on lineaarvõrrandite süsteemil lõpmata palju lahendeid või ta on vastuoluline;

kui m $\geqslant$ n, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid või täpselt üks lahend või ta on vastuoluline.

4. Lineaarvõrrandite süsteemi lahendamine täieliku eliminatsiooni meetodil.

a) Lineaarvõrrandite süsteeme lahendatakse tavaliselt tundmatute järkjärgulise elimineerimise teel.

Tuletame nn. t ä i e l i k u e l i m i n a t s i o o n i v a l e m i d. Arvutuste hõlbustamiseks piirdume 3 võrrandi ja 4 tundmatuga, mida saab üldistada.

Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = a_{10} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = a_{20} \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = a_{30} \end{cases}$$

tundmatute järkjärgulise elimineerimise teel.

b) Alustame mingist tundmatust, näiteks x_3-st. Seda elimineeritavat tundmatut nimetame edaspidi j u h t t u n d m a t u k s. Mõnes võrrandis peab x_3 kordaja erinema nullist, ühte neist võrrandeist jätame juhttundmatu x_3 alles, muudest süsteemi võrranditest elimineerime ta. Seda võrrandit, kuhu juhttundmatu alles jääb, nimetame j u h t v õ r r a n d i k s. Juhttundmatu kordajat juhtvõrrandis nimetame j u h t e l e m e n d i k s. Eelneva põhjal erineb juhtelement nullist.

Olgu meil konkreetselt näiteks $a_{23} \neq 0$. Võtame teise võrrandi juhtvõrrandiks, siis a_{23} on juhtelement.

Et elimineerimist oleks mugavam teostada, jagame kõigepealt juhtvõrrandi juhtelemendiga läbi:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = a_{10} \\ \frac{a_{21}}{a_{23}} x_1 + \frac{a_{22}}{a_{23}} x_2 + \qquad x_3 + \frac{a_{24}}{a_{23}} x_4 = \frac{a_{20}}{a_{23}} \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = a_{30}. \end{cases}$$

x_3 elimineerimiseks liidame esimesele võrrandile $(-a_{13})$-kordse teise võrrandi (juhtvõrrandi) ja kolmandale võrrandile $(-a_{33})$-kordse teise võrrandi:

$$
\begin{cases}
\left(a_{11} - \dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}\right) x_1 + \left(a_{12} - \dfrac{a_{13}a_{22}}{a_{23}}\right) x_2 \qquad + \left(a_{14} - \dfrac{a_{13}a_{24}}{a_{23}}\right) x_4 = a_{10} - \dfrac{a_{13}a_{20}}{a_{23}} \\[2ex]
\qquad \dfrac{a_{21}}{a_{23}} x_1 \qquad + \qquad \dfrac{a_{22}}{a_{23}} x_2 + x_3 \qquad + \qquad \dfrac{a_{24}}{a_{23}} x_4 = \qquad \dfrac{a_{20}}{a_{23}} \\[2ex]
\left(a_{31} - \dfrac{a_{33}a_{21}}{a_{23}}\right) x_1 + \left(a_{32} - \dfrac{a_{33}a_{22}}{a_{23}}\right) x_2 \qquad + \left(a_{34} - \dfrac{a_{33}a_{24}}{a_{23}}\right) x_4 = a_{30} - \dfrac{a_{33}a_{20}}{a_{23}}
\end{cases}
$$

Saime võrrandisüsteemile uue kuju, mida võib lühemalt esitada nii:

$$\begin{cases} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{14} x_4 = a'_{10} \\ a'_{21} x_1 + a'_{22} x_2 + x_3 + a'_{24} x_4 = a'_{20} \\ a'_{31} x_1 + a'_{32} x_2 + a'_{34} x_4 = a'_{30}, \end{cases}$$

kus juhtvõrrandi kordajad

$$a'_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_{23}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

ja teiste võrrandite kordajad

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i3}\, a_{2k}}{a_{23}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ja } i = 1, 3.$$

Saimegi valemid tundmatu x_3 elimineerimiseks.

c) Eelmises punktis leitud valemeid saab üldistada. Selleks kõigepealt sõnastame need valemid:

juhtvõrrandi uute kordajate saamiseks tuleb juhtvõrrandi vanad kordajad jagada juhtelemendiga;

mingisse võrrandisse (mitte juhtvõrrandisse) mingi uue kordaja saamiseks tuleb vastavast vanast kordajast lahutada murd, mille nimetajas on juhtelement ja mille lugejas on selle vana kordajaga juhtvõrrandis kohakuti asetseva kordaja korrutis selles mingis võrrandis juhttundmatu ees asetseva kordajaga.

Mõlema reegli puhul loeme ka vabaliikmed kordajateks.

d) Kui nüüd võrrandisüsteemis on m võrrandit ning n tundmatut ja kui valime juhttundmatuks x_j ning juhtvõrrandiks r-nda võrrandi, siis saame formuleerida valemid x_j elimineerimiseks:

$$a'_{rk} = \frac{a_{rk}}{a_{rj}}$$

ja

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ij}\, a_{rk}}{a_{rj}}, \text{ kus } k = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ ja}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m, \text{ kuid } i \neq r.$$

N ä i d e 15. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

kasutades täieliku eliminatsiooni valemeid.

Võtame x_1 juhttundmatuks ja teise võrrandi juhtvõrrandiks, siis on tarvis jagada $a_{11} = 1$ -ga (lihtne !). Juhtvõrrandi, juhttundmatu ja juhtelemendi tõstame esile:

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2 & x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ \hline 1 & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ \hline 3 & x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4. \end{array}\right.$$

Punktis c) toodud reegli järgi arvutades saame esimesele võrrandile uued kordajad:

$$2 - 2 \cdot 1 = 0; \quad -3 - 2 \cdot 1 = -5; \quad 1 - 2 \cdot 0 = 1;$$
$$-4 - 2 \cdot 1 = -6; \quad 5 - 2 \cdot 1 = 3; \quad 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

Analoogiliselt arvutame kolmanda võrrandi uued kordajad:

$$3 - 3 \cdot 1 = 0; \quad 2 - 3 \cdot 1 = -1; \quad -1 - 3 \cdot 0 = -1;$$
$$5 - 3 \cdot 1 = 2; \quad 0 - 3 \cdot 1 = -3; \quad 4 - 3 \cdot 0 = 4.$$

Seega omandab võrrandisüsteem kuju:

$$\begin{cases} -5x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

Võtame nüüd x_3 juhttundmatuks ja esimese võrrandi juhtvõrrandiks, siis juhtelement on 1:

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} -5x_2 & +1\, x_3 & -6x_4 + 3x_5 = 1 \\ \hline x_1 + x_2 & & + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 & -x_3 & + 2x_4 - 3x_5 = 4. \end{array}\right.$$

Reegli järgi arvutades saame x_3 elimineerida:

$$\begin{cases} -5x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -6x_2 - 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Edasi peame võtma juhtvõrrandiks kolmanda võrrandi (see ainsana ei ole veel olnud). Juhttundmatuks võib nüüd võtta x_2 või x_4 (ainult need esinevad kolmandas võrrandis). Võtame x_4 juhttundmatuks:

$$
\left\{\begin{array}{l|c|l}
-5x_2 + x_3 & -6x_4 & +3x_5 = 1 \\
x_1 + x_2 & + x_4 & + x_5 = 0 \\
\hline
-6x_2 & -4\,x_4 & = 5.
\end{array}\right.
$$

Reegli järgi arvutades saame:

$$
\left\{\begin{array}{l}
4x_2 + x_3 + 3x_5 = -\frac{13}{2} \\
x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_5 = \frac{5}{4} \\
\frac{3}{2}x_2 + x_4 = -\frac{5}{4}.
\end{array}\right.
$$

Siit saame avaldada kolm tundmatut (x_1, x_3, x_4) kahe tundmatu (x_2, x_5) ja vabaliikmete kaudu:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}x_2 - x_5,$$

$$x_3 = -\frac{13}{2} - 4x_2 - 3x_5,$$

$$x_4 = -\frac{5}{4} - \frac{3}{2}x_2.$$

Tundmatutele x_2 ja x_5 võib vabalt anda väärtusi. Võrrandisüsteemi üldlahend on seega

$$x = (1{,}25 + 0{,}5x_2 - x_5;\ \underline{x_2;\ -6{,}5 - 4x_2} - 3x_5;\ -1{,}25 - 1{,}5x_2; x_5).$$

e) Punktis c) toodud reegleid on sobiv täiendada kolme erijuhu jaoks:

α) Juhttundmatu uued kordajad on üks (juhtvõrrandis) ja nullid.

Tõepoolest, võtame täieliku eliminatsiooni valemeis (punkt d)) $k = j$, saame

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rj}} = 1 \text{ ja } a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}\,a_{rj}}{a_{rj}} = 0.$$

β) Kui mingi tundmatu x_s kordaja on juhtvõrrandis null, siis on x_s uued kordajad vanadega võrdsed.

Tõepoolest, et $a_{rs} = 0$, siis

$$a'_{is} = a_{is} - \frac{a_{ij}\, a_{rs}}{a_{rj}} = a_{is} - 0 = a_{is}.$$

γ) Kui juhttundmatu kordaja on t-ndas võrrandis null, siis on selle võrrandi uued kordajad võrdsed vanadega.

Tõepoolest, et $a_{tj} = 0$, siis

$$a'_{tk} = a_{tk} - \frac{a_{tj}\, a_{rk}}{a_{rj}} = a_{tk} - 0 = a_{tk}.$$

N ä i d e 16. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 1 \\ 3x + 7y - z = -7 \\ -x - 2y + 3z = 11 \\ -3x + y - 6z = 2. \end{cases}$$

Elimineerides x saame:

$$\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ -7y + 5z = 1 \\ -11y + 5z = -7 \\ 4y + z = 11 \\ 19y - 12z = 2 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x - 2z + 6y = 0 \\ z + 4y = 11 \\ 5z - 7y = 1 \\ 5z - 11y = -7 \\ -12z + 19y = 2. \end{cases}$$

Järgmiseks elimineerime z:

$$\begin{cases} x \quad 14y = 22 \\ z + 4y = 11 \\ -27y = -54 \\ -31y = -62 \\ 67y = 134 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x + 14y = 22 \\ z + 4y = 11 \\ y = 2 \\ y = 2 \\ y = 2, \end{cases}$$

millest võib kaks viimast võrrandit ära jätta.
Elimineerime nüüd y, saame

$$\begin{cases} x = -6 \\ z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

ehk lahendiks on (-6; 2; 3).

N ä i d e 17. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 2 \\ 6x - y - z = -1. \end{cases}$$

Elimineerides x ja seejärel y saame

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 11y + 5z = 2 \\ 11y + 5z = -1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{11}z = \frac{4}{11} \\ y + \frac{5}{11}z = \frac{2}{11} \\ 0z = -3. \end{cases}$$

Viimane saadud võrdus, $0 = -3$, on aga võimatu. Seega sisaldab antud võrrandisüsteem vastuolu, mille tõttu tal puuduvad lahendid.

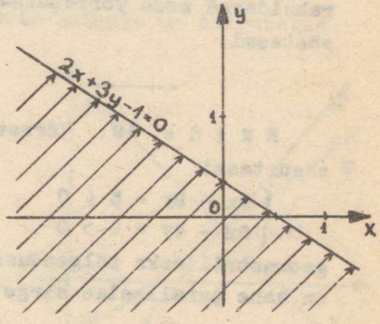
---

5. Lineaarvõrratuste süsteemi geomeetriline tõlgendus.

a) Tasapinna analüütilise geomeetria kursuses tõestatakse, et kõik punktid, mille kauguse arvutamisel antud sirgest (sirge normaalvõrrandi abil) saadakse negatiivne arv, asetsevad sellest sirgest ühel ja samal pool ning kõik ülejäänud punktid - teisel pool. Sellest järeldub, et kõik punktid, mille koordinaadid rahuldavad võrratust $ax + by + c < 0$, asetsevad sirgest $ax + by + c = 0$ ühel ja samal pool.

Lineaarne võrratus $ax + by + c < 0$ esitab geomeetriliselt seega p o o l t a s a p i n d a.

N ä i d e 17. Skitseerime pooltasapinna, mida esitab võrratus $2x + 3y - 1 < 0$. Selleks joonestame kõigepealt sirge $2x + 3y - 1 = 0$ (joonis 4). Võtame nüüd vabalt ühe punkti, mis ei asetse sirgel, ja proovime, kas see punkt rahuldab meie võrratust. Lihtne on arvutada, kui selleks punktiks võtta $O(0;0)$. Saame $0 + 0 - 1 < 0$, s.t. punkt O rahuldab võrratust. Eespool toodud arutluse põhjal rahuldavad võrratust siis ka kõik punktid, mis asetsevad sirgest samal pool kus O. Viirutame vastava pooltasapinna. Asjaolu, et sirge $2x + 3y - 1 = 0$ punktid ei rahulda meie võrratust ehk et sirge punktid ei kuulu sellesse pooltasapinda, märgime noolekestega viirustusjoonte otstes.



Joon. 4

---

b) Analoogiliselt saab tõlgendada lineaarseid võrratusi $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \leqslant 0$ ja $ax + by + c \geqslant 0$, kusjuures kahel viimasel juhul pooltasapinna hulka kuulub ka sirge. Seega võime sõnastada t e o r e e m i 6:

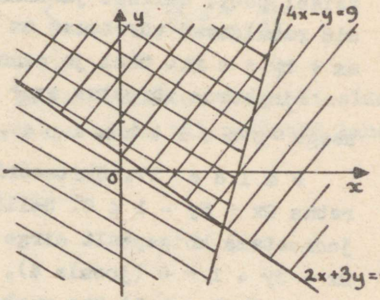
kahe tundmatuga lineaarvõrratusel on lõpmata palju lahendeid

c) Kahe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemi geomeetriliseks vasteks on tasapinna see osa, mis on kõigile võrratustele vastavatele pooltasapindadele ühine.

N ä i d e 18. Joonistame tasapinna osa, mille punktid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y \geqslant 1 \\ 4x - y \leqslant 9. \end{cases}$$

Kahekordse viirutusega tasapinnaosa kõik punktid (ka piiravate poolsirgete punktid) rahuldavad seda võrratusesüsteemi.

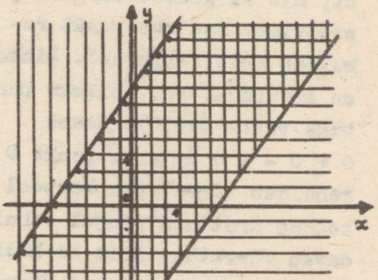


Joon. 5

N ä i d e 19. Võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 \leqslant 0 \\ 6x - 4y + 9 > 0 \end{cases}$$

geomeetriliseks tõlgenduseks on kahe paralleelse sirge vaheline riba, kuhu kuulub ka parempoolne sirge ise (joonis 6).

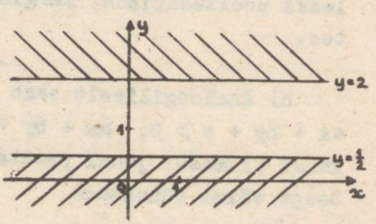


Joon. 6

N ä i d e 20. Võrratusesüsteem

$$\begin{cases} y \geqslant 2 \\ 2y \leqslant 1 \end{cases}$$

on aga vastuoluline, sest kummagi võrratusega määratud pooltasapindadel ei ole ühist osa (joonis 7).

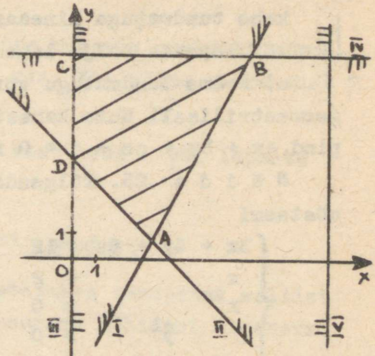


Joon. 7

N ä i d e 21. Esitame geomeetriliselt rohkem kui kahest võrratusest koosneva süsteemiga

$$\begin{cases} 4x - 2y \leqslant 11 \\ x + y \geqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \leqslant 8 \\ x \leqslant 10 \end{cases}$$

määratud tasapinnaosa. Iga pooltasapinna märgime joonisel mõne viirutusjoonega vastava sirge osa otstel. Sirged nummerdame süsteemi võrratuste järjekorras (joonis 8).



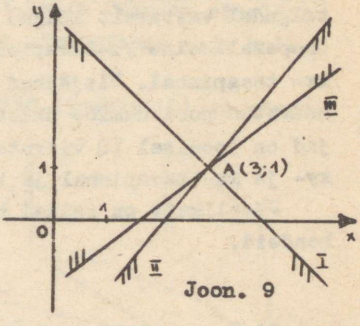
Joon. 8

Võrratusesüsteemi kõigi lahendite hulgaks on viirutatud nelinurk ABCD (joonis 8).

Joniselt 8 on näha, et V võrratus on esimest nelja võrratust rahuldavates punktides iseenesest kehtiv, s.t. V võrratus on selles süsteemis ülearune.

N ä i d e 22. Uurime süsteemi

$$\begin{cases} x + y \leqslant 4 \\ x - y \geqslant 2 \\ 2x - 3y \leqslant 3. \end{cases}$$



Joon. 9

I ja II võrratusega määratud pooltasapindadel on ühine osa (joonis 8), kuid III võrratusega määratud pooltasapinnal ja sellel ühisel osal on ainult üks ühine punkt A(3; 1). Järelikult on sellel võrratusesüsteemil üksainus lahend (3; 1).

---

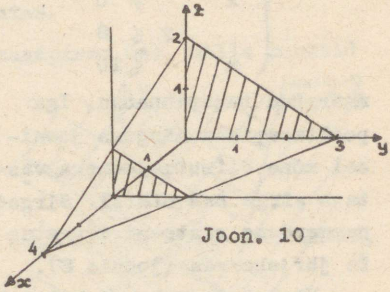
d) Geomeetriliste kaalutluste põhjal võime seega öelda, et kehtib t e o r e e m 7:

kahe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemil on kas 0 või 1 või lõpmata palju lahendeid.

e) Kolme tundmatuga võrratus $ax + by + cz + d < 0$ tähendab geomeetriliselt ühte kahest poolruumist, milleks jaotab tasapind $ax + by + cz + d = 0$ ruumi.

N ä i d e 23. Tõlgendame süsteemi

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z \leq 12 \\ x \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



Joon. 10

geomeetriliselt. Tasapinda $3x + 4y + 6z = 12$ esitame jälgkolmnurgaga, mis lõikab telgedel vastavalt lõigud 4, 3 ja 2 (joonis 10). Tasapind $x = 2$ on paralleelne yz-tasapinnaga, teda esitame jälgedega xy- ja xz- tasapinnal. Ülejäänud on koordinaattasapinnad. Võrratustega määratud poolruumide ühiseks osaks on tüvipüramiid, mille põhjad on joonisel 10 viirutatud ning mille külgtahud asetsevad xy- ja xz- tasapinnal ja tasapinnal $3x + 4y + 6z = 12$.

Järelikult on sellel võrratusesüsteemil lõpmata palju lahendeid.

---

f) Geomeetriliste kaalutluste põhjal võib teoreemi 7 üldistada kolme tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemidele.

Analoogia põhjal läheme üle n tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemile:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \end{cases}$$

Iga võrrand

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

esitab hüpertasapinda, mis jaotab n-dimensionaalse ruumi kaheks poolruumiks. Võrratus

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geqslant b_i$$

esitab ühte neist poolruumidest.

Võrratusesüsteemi kõigi lahendite hulgaks on kõigi võrratustega määratud poolruumide ühine osa. Nii võime teoreemist 7 tundmatute arvu 2 ära jätta:

lineaarvõrratuste süsteemil on kas 0 või 1 või lõpmata palju lahendeid.

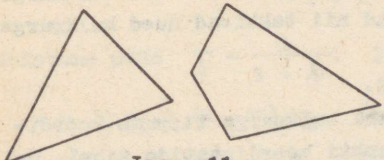
6. Kumera polüeedri omadusi.

a) H u l k n u r g a k s nimetatakse tasapinna sellist piirkonda, mis on piiratud sirgjoonsetest lülidest koosneva kinnise murdjoonega.

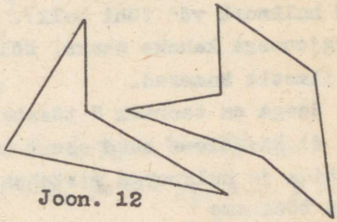
Kui hulknurga mistahes kahte punkti ühendav sirglõik kuulub tervenisti hulknurka, siis nimetatakse seda hulknurka k u m e r a k s.

Kui hulknurgas leidub kaks punkti, mida ühendav sirglõik jääb osalt väljapoole hulknurka, siis nimetatakse seda hulknurka n õ g u s a k s.

N ä i d e 24. Joonistame kumeraid (joonis 11) ja nõgusaid (joonis 12) hulknurki.



Joon. 11



Joon. 12

Kumera hulknurga t i p p u d e k s nimetatakse hulknurga niisuguseid punkte, mis ei asetse ühegi selle hulknurga kahte punkti ühendava lõigu sees (otspunkt võib olla).

b) Lineaarprogrammeerimises käsitleme majanduslikke ülesandeid, mille matemaatiline formulatsioon sisaldab lineaarvõrratuste süsteemi. Lineaarvõrratuste süsteemi geomeetriliseks vasteks võib aga olla hulknurk või selle mitmedimensionaalne üldistus või punkt või tühi hulk või lõpmatu piirkond. Korrektselt püstitatud majanduslikes ülesannetes ei saa võrratusesüsteem esitada lõpmatut piirkonda. Ühe punkti ja tühja hulga (lahendite puudumise juhtumi) võime lugeda hulknurkadeks, millel on vastavalt üks tipp või null tippu. Seepärast tuleb meil peatähelepanu pöörata lineaarvõrratuste süsteemidele, mis esitavad hulknurka või selle üldistust (n tundmatu juhtum).

c) Kõigepealt veendume, et kehtib

t e o r e e m 8:

kui kahe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemi geomeetriliseks vasteks on hulknurk, siis see hulknurk on kumer.

Tõestame täieliku induktsiooni meetodil.

Vähem kui kolme võrratuse puhul me hulknurka ei saa (tühja hulga küll). Kolmnurk on aga alati kumer.

Oletame, et N võrratust annavad geomeetriliselt kumera hulknurga. Võtame juurde veel ühe võrratuse. Nüüd on kolm võimalust: a) terve hulknurk paikneb juurdevõetud võrratusega määratud pooltasapinnal; b) terve hulknurk paikneb väljaspool seda pooltasapinda; c) osa hulknurgast paikneb selles poolruumis, osa mitte.

Juhtudel a) ja b) on $N + 1$ võrratuse süsteemi geomeetriliseks vasteks kumer hulknurk (kas N võrratuse süsteemiga määratud hulknurk või tühi hulk). Juhul c) jaotame antud hulknurga sirgjoonega kaheks osaks. Mõlemad nii tekkivad uued hulknurgad on ilmselt kumerad.

Seega on teoreem 8 tõestatud.

d) Käsitleme nüüd seost kumera hulknurga tippude koordinaatide ja hulknurga mistahes punkti koordinaatide vahel. Selleks tõestame

t e o r e e m i 9:

kumera k-nurga mistahes punkti M koordinaate x ja y saab avaldada n-nurga tippude vastavate koordinaatide lineaarsete kombinatsioonidena:

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k,$$
$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_k y_k, \qquad (1)$$

kus $0 \leq \gamma_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, ja $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k = 1$.

Tõestuse jaotame osadeks.

I. Kaksnurga tippudeks ehk lõigu otspunktideks olgu $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$. Kui $M(x; y)$ on lõigu $P_1 P_2$ mingi punkt, siis saame kasutada lõigu antud suhtes jaotamise valemeid:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{ja} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

kus $\lambda \geqslant 0$. Teisendame neid avaldisi:

$$x = \frac{1}{1 + \lambda} x_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x_2 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{1 + \lambda} y_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} y_2.$$

Et

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} = \frac{1 + \lambda - 1}{1 + \lambda} = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda} - \frac{1}{1 + \lambda} = 1 - \frac{1}{1 + \lambda},$$

siis

$$x = \frac{1}{1 + \lambda} x_1 + \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda}\right) x_2$$

ja

$$y = \frac{1}{1 + \lambda} y_1 + \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda}\right) y_2.$$

Et $\lambda \geqslant 0$, siis

$$0 < \frac{1}{1 + \lambda} \leqslant 1.$$

Tähistame nüüd $\gamma = \frac{1}{1 + \lambda}$. Siis

$$x = \gamma x_1 + (1 - \gamma) x_2 \quad \text{ja} \quad y = \gamma y_1 + (1 - \gamma) y_2,$$

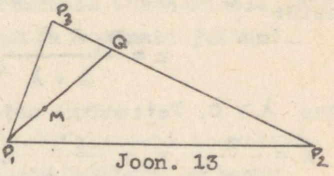
kus $0 < \gamma \leqslant 1$. Kui $\gamma = 1$, saame $x = x_1$ ja $y = y_1$, s.t. $M \equiv P_1$. Punkti P_2 neist valemeist muidu ei saa, kui tuleb lubada γ omandada väärtus 0. Saime, et

lõigu $P_1 P_2$ mistahes punkti M koordinaadid x ja y avalduvad lõigu otspunktide P_1 ja P_2 koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} x &= \gamma x_1 + (1 - \gamma) x_2, \\ y &= \gamma y_1 + (1 - \gamma) y_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

kus $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ ja γ iseloomustab M asendit lõigul $P_1 P_2$.

II. Kolmnurga tippudeks olgu $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ ja $P_3(x_3; y_3)$. Kui $M(x; y)$ asetseb kolmnurgas $P_1 P_2 P_3$, siis pikendame lõiku $P_1 M$ lõikumiseni kolmnurga küljega $P_2 P_3$. Saadud lõikepunkti nimetame $Q(x_q, y_q)$ (joonis 13). Valemite (2) põhjal saame arvutada Q koordinaadid:



Joon. 13

$$x_q = \gamma_q x_2 + (1 - \gamma_q)x_3,\quad y_q = \gamma_q y_2 + (1 - \gamma_q)y_3,\qquad 0 \leq \gamma_q \leq 1.$$

Teiselt poolt võime ka M koordinaadid (2) põhjal avaldada:

$$x = \gamma_m x_1 + (1 - \gamma_m) x_q,\quad y = \gamma_m y_1 + (1 - \gamma_m) y_q,\qquad 0 \leq \gamma_m \leq 1.$$

Asendame siin x_q ja y_q enne leitud avaldistega:

$$x = \gamma_m x_1 + (1 - \gamma_m)[\gamma_q x_2 + (1 - \gamma_q)x_3],\qquad 0 \leq \gamma_m \leq 1,$$

$$y = \gamma_m y_1 + (1 - \gamma_m)[\gamma_q y_2 + (1 - \gamma_q)y_3],\qquad 0 \leq \gamma_q \leq 1,$$

ehk

$$x = \gamma_m x_1 + (1 - \gamma_m)\gamma_q x_2 + (1 - \gamma_m)(1 - \gamma_q) x_3,$$

$$y = \gamma_m y_1 + (1 - \gamma_m)\gamma_q y_2 + (1 - \gamma_m)(1 - \gamma_q) y_3.$$

Uurime x_i ja y_i, $i = 1, 2, 3$, kordajaid. Kõik kordajad on mittenegatiivsed, sest $\gamma_m \geq 0$; $1 - \gamma_m \geq 0$; $\gamma_q \geq 0$ ja $1 - \gamma_q \geq 0$.

Kõik kordajad on ühest väiksemad või ühega võrdsed, sest $\gamma_m \leq 1$; $1 - \gamma_m \leq 1$; $\gamma_q \leq 1$; $1 - \gamma_q \leq 1$. Leiame kordajate summa

$$\gamma_m + (1 - \gamma_m)\gamma_q + (1 - \gamma_m)(1 - \gamma_q) =$$

$$= \gamma_m + \gamma_q - \gamma_m\gamma_q + 1 - \gamma_m + \gamma_m\gamma_q - \gamma_q = 1.$$

Seega kui tähistame

$$\gamma_1 = \gamma_m,\quad \gamma_2 = (1 - \gamma_m)\gamma_q,\quad \gamma_3 = (1 - \gamma_m)(1 - \gamma_q),$$

siis saame valemid (1) $k = 3$ puhul:

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$
$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3, \qquad (3)$$

kus $0 \le \gamma_i \le 1$, $i = 1, 2, 3$, ja $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

III. Iga kumera k-nurga saab jaotada kolmnurkadeks, mille tippudeks on ikka k-nurga mingid kolm tippu. Valime just selle kolmnurga, millesse langeb punkt M, ja rakendame valemeid (3). Seega võime lugeda teoreemi 9 tõestatuks.

e) Kumera hulknurga üldistuseks 3-dimensionaalsesse ruumi on kumer hulktahukas e. kumer polüeeder. Minnes üle n-dimensionaalsesse ruumi kõneleme ikka kumeraist polüeedreist.

Teoreeme 8 ja 9 saab tõestada ka n-dimensionaalse ruumi puhul.

7. Lineaarvõrratuste süsteemi lahendamine.

a) Eelnevates paragrahvides käsitlesime lineaarvõrratuste süsteemi geomeetriliselt. Nüüd näitame, kuidas arvutada lineaarvõrratuste süsteemi lahendite hulga kui kumera polüeedri tippe ning kuidas väljendada võrratusesüsteemi üldlahendit.

N ä i d e 25. Lahendame võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 4x - 2y \le 11 \\ x + y \ge 4 \\ x \ge 0 \\ y \le 8. \end{cases}$$

Kõigepealt lahendame esimesele kahele võrratusele vastavate võrrandite süsteemi ja kontrollime siis, kas leitud lahend rahuldab ka kahte ülejäänud võrratust. Liites võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x - 2y = 11 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

esimesele võrrandile kahekordse teise, saame

$$\begin{cases} 6x = 19 \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Siit $x = \frac{19}{6}$ ja $y = 4 - \frac{19}{6} = \frac{5}{6}$. Kaks viimast võrratust on rahuldatud, sest $\frac{19}{6} > 0$ ja $\frac{5}{6} < 8$. Järelikult on punkt $A(\frac{19}{6}; \frac{5}{6})$ võrratusesüsteemi lahendite hulga üks tipp.

Edasi lahendame koos mingid teised kaks võrrandit, mis vastavad meie võrratustele, näiteks

$$\begin{cases} 4x - 2y = 11 \\ x \qquad\;\; = 0. \end{cases}$$

Siit saame, et $x = 0$ ja $-2y = 11$ ehk $y = -\frac{11}{2}$.

Kas leitud lahend $(0; -\frac{11}{2})$ rahuldab ka ülejäänud võrratusi $x + y \geqslant 4$ ja $y \leqslant 8$? Ei, sest $0 + (-\frac{11}{2}) \not\geqslant 4$. Seega ei ole punkt $(0; -\frac{11}{2})$ meie võrratusesüsteemi lahend.

Jätkates samal viisil, lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 4x - 2y = 11 \\ \qquad\;\; y = 8, \end{cases}$$

mis annab $y = 8$ ja $4x = 11 + 16$ ehk $x = \frac{27}{4}$. Kontrollides ülejäänud võrratuste rahuldamist saame $\frac{27}{4} + 8 = \frac{27 + 32}{4} = \frac{59}{4} > 4$ ja $\frac{27}{4} > 0$. Seega on punkt $B(\frac{27}{4}; 8)$ lahendite hulga tipp.

Edasi süsteemist

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x \qquad = 0 \end{cases}$$

leiame, et $x = 0$ ja $y = 4$. Kontrollides teiste võrratuste rahuldamist saame, et $4 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8 < 11$ ja $4 < 8$. Järelikult saime veel ühe tipu $C(0; 4)$.

Veel on jäänud kaks süsteemi uurida:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \qquad y = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 8. \end{cases}$$

Neist esimene annab punkti $(-4; 8)$, mis ei rahulda võrratust $x \geqslant 0$, ja teine punkti $D(0; 8)$, mis rahuldab kõiki võrratusi.

Järelikult on meie võrratusesüsteemi lahendite hulk nelinurk tippudega

$$A\left(\frac{19}{6};\ \frac{5}{6}\right),\ B\left(\frac{27}{4};\ 8\right),\ C(0;\ 4),\ D(0;8).$$

Teoreemi 9 põhjal võime siis nelinurga A B C D mistahes punkti koordinaadid x ja y avaldada tippude A, B, C, D koordinaatide kaudu:

$$x = \frac{19}{6}\gamma_1 + \frac{27}{4}\gamma_2 + 0\cdot\gamma_3 + 0\cdot\gamma_4,$$

$$y = \frac{5}{6}\gamma_1 + 8\gamma_2 + 4\gamma_3 + 8\gamma_4$$

ehk

$$x = \frac{19}{6}\gamma_1 + \frac{27}{4}\gamma_2,$$

$$y = \frac{5}{6}\gamma_1 + 8\gamma_2 + 4\gamma_3 + 8\gamma_4,$$

kus $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 1$ ja $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

See ongi meie võrratusesüsteemi üldlahend.

N ä i d e 26. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z \leqslant 30 \\ 7x - 2y - z \geqslant 10 \\ 7x + 18y - z \geqslant 10 \\ 2x + 8y - z \geqslant 0 \\ 3x + 2y + z \leqslant 10. \end{cases}$$

Selleks tuleb lahendada $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ kolmevõrrandilist süsteemi ja iga kord kontrollida, kas saadud lahend rahuldab ülejäänud kahte võrratust.

I. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z = 30 \\ 7x - 2y - z = 10 \\ 7x + 18y - z = 10 \end{cases}$$

täieliku eliminatsiooni valemite järgi lahendades saame kõigepealt z-i elimineerides:

$$\begin{cases} -40x - 120y = -40 \\ - 20y = 0 \\ -7x - 18y + z = -10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ y = 0 \\ -7x - 18y + z = -10. \end{cases}$$

Edasi elimineerime x-i viimasest võrrandist:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ y = 0 \\ 3y + z = -3, \end{cases}$$

millest y elimineerides saame $x = 1$, $y = 0$, $z = -3$. Viimasesse kahte võrratusse asendamine annab $2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - (-3) = 2 + 3 = 5 > 0$ ja $3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) = 3 - 3 = 0 < 10$. Seega on lahendite hulga üheks tipuks punkt A(1; 0; -3).

II. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z = 30 \\ 7x - 2y - z = 10 \\ 2x + 8y - z = 0 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} -5x - 50y = 30 \\ 5x - 10y = 10 \\ -2x - 8y + z = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} -x - 10y = 6 \\ x - 2y = 2 \\ -2x - 8y + z = 0. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} 12y = 8 \\ x - 2y = 2 \\ -12y + z = 4. \end{cases}$$

Elimineerime lõpuks y. Saame, et

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \\ z = -4. \end{cases}$$

Kas $(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -4)$ rahuldab ülejäänud võrratusi? Ei, sest

$$7 \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot (-\frac{2}{3}) - (-4) = \frac{14}{3} - 12 + 4 = \frac{14}{3} - 8 = -\frac{10}{3} < 10.$$

III. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z = 30 \\ 7x - 2y - \ z = 10 \\ 3x + 2y + \ z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 30x + 20y \quad = 100 \\ 10x \quad\quad = 20 \\ 3x + \ 2y + z = \ 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 3x + 2y \quad = 10 \\ x \quad\quad = 2 \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

Elimineerides x saame

$$\begin{cases} 2y \quad = 4 \\ x \quad\quad = 2 \\ 2y + z = 4, \end{cases}$$

millest $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$. Et $7 \cdot 2 + 18 \cdot 2 - 0 = 50 > 10$ ja $2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 0 = 20 > 0$, siis on punkt B(2; 2; 0) lahendite hulga tipp.

IV. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x + \ 6y - 7z = 30 \\ 7x + 18y - \ z = 10 \\ 2x + \ 8y - \ z = \ 0 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} -5x - 50y \quad = 30 \\ 5x + 10y \quad = 10 \\ -2x - \ 8y + z \ = \ 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x + 10y \quad = -6 \\ x + \ 2y \quad = \ 2 \\ -2x - \ 8y + z \ = \ 0. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} 8y \quad = -8 \\ x + \ 2y \quad = \ 2 \\ -4y + z \ = \ 4 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} y \quad = -1 \\ x + 2y \quad = \ 2 \\ -4y + z \ = \ 4, \end{cases}$$

millest $x = 4$, $y = -1$, $z = 0$. Et $7 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) - 0 = 30 > 10$ ja

$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 0 = 10$, siis on punkt $C(4; -1; 0)$ lahendite hulga tipp.

V. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z = 30 \\ 7x + 18y - z = 10 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 30x + 20y = 100 \\ 10x + 20y = 20 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} -4y = 4 \\ x + 2y = 2 \\ -4y + z = 4, \end{cases}$$

millest $x = 4$, $y = -1$, $z = 0$, s.t. saime uuesti punkti $C(4; -1; 0)$.

VI. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x + 6y - 7z = 30 \\ 2x + 8y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 30x + 20y = 100 \\ 5x + 10y = 10 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + 2y + z = 10, \end{cases}$$

mis on sama, mis V juhul. Seega saame uuesti $C(4; -1; 0)$.

VII. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 7x + 2y - z = 10 \\ 7x + 18y - z = 10 \\ 2x + 8y - z = 0 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 5x - 6y = 10 \\ 5x + 10y = 10 \\ -2x - 8y + z = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 5x - 6y = 10 \\ x + 2y = 2 \\ -2x - 8y + z = 0. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} -16y = 0 \\ x + 2y = 2 \\ -4y + z = 4, \end{cases}$$

millest $x = 2$, $y = 0$, $z = 4$. Et $9 \cdot 2 + 6 \cdot 0 - 7 \cdot 4 = -10 < 30$ ja $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 = 10$, siis on punkt $D(2;\ 0;\ 4)$ lahendite hulga tipp.

VIII. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 10 \\ 7x + 18y - z = 10 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 10x = 20 \\ 10x + 20y = 20 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 0 \\ 2y + z = 4, \end{cases}$$

millest $x = 2$, $y = 0$, $z = 4$, s.t. saime uuesti punkti D.

IX. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 10 \\ 2x + 8y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 10x = 20 \\ 5x + 10y = 10 \\ 3x + 2y + z = 10, \end{cases}$$

mille lahendiks on jällegi punkt D(2; 0; 4).

X. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 7x + 18y - z = 10 \\ 2x + 8y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

z-i elimineerides saame

$$\begin{cases} 10x + 20y = 20 \\ 5x + 10y = 10 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

Esimene ja teine võrrand ühtivad, seega jääb lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

Elimineerides x-i saame

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -4y + z = 4 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = 4 + 4y. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi üldlahend on

$$(2 - 2y;\ y;\ 4 + 4y).$$

Missuguste y väärtuste puhul rahuldab see üldlahend ülejäänud kahte võrratust?

Selleks peab olema

$$\begin{cases} 9(2 - 2y) + 6y - 7(4 + 4y) \leqslant 30 \\ 7(2 - 2y) - 2y - (4 + 4y) \geqslant 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 18 - 18y + 6y - 28 - 28y \leqslant 30 \\ 14 - 14y - 2y - 4 - 4y \geqslant 10 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} -40y \leqslant 40 \\ -20y \geqslant 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} y \geqslant -1 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad -1 \leqslant y \leqslant 0.$$

Kui $y = -1$, saame üldlahendist $C(4; -1; 0)$, kui $y = 0$, saame $D(2;0;4)$. Kui $-1 < y < 0$, saame üldlahendist lõigu CD sisepunktid.

Lahendust kokku võttes võime öelda, et näite 26 võrratusesüsteemi kõigi lahendite hulk on nelitahk tippudega $A(1; 0; -3)$, $B(2; 2; 0)$, $C(4; -1; 0)$ ja $D(2; 0; 4)$.

---

b) Eelnenud näidetest on näha, et võrratusesüsteemiga määratud polüeedri tippude leidmine on tülikas, kui võrratuste ja tundmatute arv on vähegi suur.

S i s u k o r d

Vastutav toimetaja T. Tammai

TPI rotaprint, 1962. Trükipoognaid 2,75.
Tiraaž 400. MB-00998. Tell. nr. 139
Hind rbl. -.08