А. Шевалье.

# ПОСОБІЕ

для

# УПРАЖНЕНІЙ ПО КРИСТАЛЛОГРАФІИ.

(ИЗМѢРЕНІЕ, ВЫЧИСЛЕНІЕ И ИЗОБРАЖЕНІЕ КРИСТАЛЛОВЪ.)

Переводъ съ французскаго
(съ нѣкоторыми измѣненіями)

**Ф. Левинсона-Лессинга** и **Н. Култашева.**

# Предисловіе.

При веденіи практическихъ занятій по кристаллографіи постоянно приходится ощущать неудобство вслѣдствіе отсутствія пособія, приспособленнаго для студентовъ. Убѣдившись на практикѣ, что книжка г. Шевалье „Exercices de cristallographie“ [1]) вполнѣ отвѣчаетъ своему назначенію, я рѣшилъ перевести ее совмѣстно съ ассистентомъ по каѳедрѣ минералогіи въ Юрьевскомъ университетѣ Н. В. Култашевымъ. При этомъ нами были признаны желательными и сдѣланы слѣдующія измѣненія:

1) выкинутъ краткій обзоръ кристаллографическихъ формъ, „Resumé de cristallographie“, съ котораго г. Шевалье начинаетъ свое пособіе.

2) Выкинутъ способъ обозначенія Леви, который употребителенъ лишь среди французскихъ кристаллографовъ.

3) Выкинуто описаніе линейной и гномонической проекцій.

4) Прибавлено описаніе гоніометра Фуэсса, модель IVa, составленное Н. В. Култашевымъ и въ видѣ гектографированныхъ таблицъ уже въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ утилизированное нами на практическихъ занятіяхъ со студентами.

5) Глава о черченіи стереографической проекціи замѣнена, съ небольшими видоизмѣненіями, тѣмъ изложеніемъ, которое мною уже раньше было напечатано для студентовъ подъ заглавіемъ: „Наставленіе къ черченію стереографической проекціи кристалловъ“.

---

1) Exercices de cristallographie par A. Chevallier avec une préface de M. J. Thoulet. — Paris, 1898.

6) Измѣнено расположеніе матеріала, а именно:

7) Формулы сферической тригонометріи, Различные способы обозначенія кристаллографическихъ формъ и Черченіе кристаллографическихъ фигуръ перенесены въ конецъ въ отдѣлъ „Приложенія".

8) Вставлено краткое описаніе нѣкоторыхъ изъ новыхъ приспособленій Пенфильда для черченія стереографической проекціи.

9) Въ нѣсколькихъ мѣстахъ исправлены опечатки и ошибки въ вычисленіяхъ.

Переводъ главъ: Зоны, Различные способы обозначенія кристаллографическихъ формъ и Черченіе кристаллографическихъ фигуръ сдѣланъ Н. В. Култашевымъ, остальныхъ главъ мною.

Считаю пріятнымъ долгомъ принести благодарность г. Шевалье за разрѣшеніе перевести его полезную книжку съ тѣми измѣненіями, какія мною будутъ признаны желательными, и Юрьевскому Университету за изданіе нашего перевода.

Юрьевъ (Дерптъ),
Май 1902.

Проф. **Ф. Левинсонъ-Лессингъ.**

# ПОСОБІЕ

ДЛЯ

# УПРАЖНЕНІЙ ПО КРИСТАЛЛОГРАФІИ.

# I. Введенie.

## 1. Измѣренie кристалловъ.

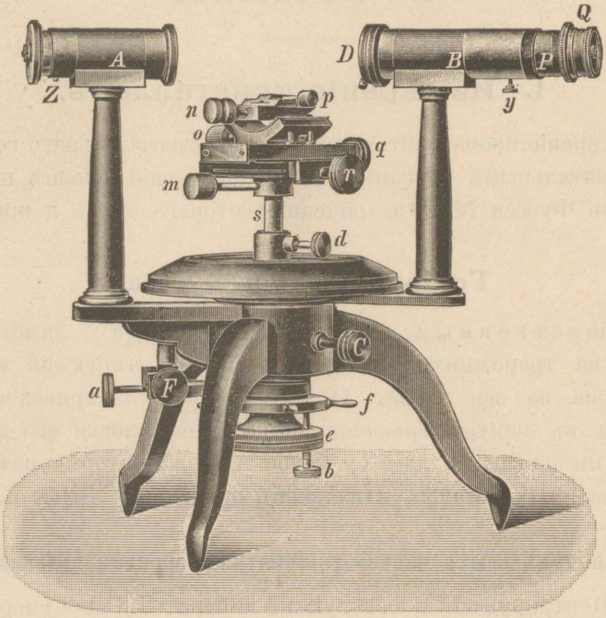
Измѣренie производится при помощи отражательнаго гоніометра съ горизонтальнымъ кругомъ. Для упражненій вполнѣ пригоденъ гоніометръ Фуэсса № IV a, описаніе котораго здѣсь и приводится.

### Гоніометръ IV a Фуэсса.

Существенныя части гоніометра: лимбъ, помѣщенный на треножникѣ; центрирующій и юстирующій аппараты, находящіеся на оси s (фиг. 1) и служащіе для приведенія ребра кристалла въ центръ вращенія лимба и постановки его перпендикулярно къ плоскости лимба; труба A (коллиматоръ), назначенная для освѣщенія кристалла, и наконецъ зрительная труба B.

#### Назначеніе отдѣльныхъ частей гоніометра и способъ пользованія ими.

I. Центрирующій и юстирующій аппаратъ. Ось s удерживается на извѣстной высотѣ винтомъ d; ослабивъ его, мы можемъ поднять или опустить ось, или вынуть ее совсѣмъ. Центрирующій и юстирующій аппаратъ прикрѣпленъ къ оси винтомъ m, который долженъ быть всегда накрѣпко завинченъ. Центрирующая часть состоитъ изъ двухъ салазокъ, которыя предвигаются въ горизонтальной плоскости (слѣдов. параллельно лимбу) въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ при помощи винтовъ q и *R*. Юстирующая часть состоитъ изъ двухъ сегментовъ, вращаемыхъ при помощи винтовъ n и o вокругъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ горизонтальныхъ осей, благодаря чему ребро кристалла можетъ быть поставлено подъ любымъ угломъ къ лимбу. Наконецъ на юстирующей части находится столикъ, прикрѣпляемый винтомъ p; на этотъ столикъ помѣщается изслѣдуемый кристаллъ. Нижній конецъ оси s имѣетъ головку e, при помощи которой ось можетъ быть вращаема. Такое же вращеніе имѣетъ и лимбъ гоніометра. Чтобы имѣть возможность повернуть лимбъ, надобно отпустить винтъ *a* и вращать лимбъ за колесо съ ручками f; если желательно, чтобы и ось вращалась вмѣстѣ съ лимбомъ, то слѣдуетъ закрѣпить винтъ b; въ противномъ случаѣ отпускаютъ винтъ b и закрѣпляютъ винтъ *a*: ось тогда будетъ вращаться безъ лимба, что важно въ особенности при центрированіи и юстированіи кристалла. Въ этихъ случаяхъ приходится часто вращать центри-




Фиг. 1.

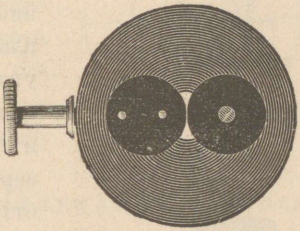
рующій и юстирующій аппаратъ; излишнее же и не надобное въ этомъ случаѣ вращеніе лимба способствовало-бы лишь скорѣйшему изнашиванію муфты лимба.

Для точной установки лимба служитъ микрометрическій винтъ F; закрѣпивъ a и дѣйствуя F, мы можемъ установить лимбъ съ большей точностью, чѣмъ отъ руки.

Труба B представляетъ зрительную трубу, въ полѣ зрѣнія которой натянутъ нитяный крестъ. Передъ ней помѣщена откидывающаяся лупа D (на рисункѣ закрыта); эта лупа обращаетъ трубу въ слабый микроскопъ.

Труба B можетъ быть также вращаема вокругъ оси прибора. Такъ какъ она соединена съ кольцемъ, на которомъ помѣщены ноніусы, то и они вращаются вмѣстѣ съ трубой. Вращать трубу можно отпустивъ закрѣпляющій ее винтъ C. Если при этомъ винтъ *a* будетъ отпущенъ, то вмѣстѣ съ трубой будетъ вращаться и лимбъ; завинтивъ слѣдов. *a*, мы заставимъ трубу вращаться безъ лимба, причемъ вращать трубу слѣдуетъ плавно и осторожно, въ противномъ случаѣ пружина микрометрическаго винта F иногда сдаетъ и лимбъ начинать двигаться вмѣстѣ съ трубой, что при закрученномъ винтѣ *a* вредно отзывается на муфтѣ лимба.

Коллиматоръ A служитъ, какъ сказано, для отбрасыванія на кристаллъ пучка свѣта, проходящаго черезъ узкую щель въ коллиматорѣ. Эта щель, называемая сигналомъ, бываетъ различной формы. У гоніометровъ IVa имѣется такъ назыв. сигналъ Вебскаго (фиг. 2). Для освѣщенія служитъ лампа, помѣщаемая возможно ближе къ коллиматору.



Фиг. 2.

Итакъ:

1) Чтобы повернуть трубу B вмѣстѣ съ центрирующимъ и юстирующимъ аппаратомъ и лимбомъ надобно отпустить винты C и *a*.

2) Чтобы повернуть трубу B безъ центрирующаго и юстирующаго аппарата и безъ лимба, надобно закрѣпить *a*, и отпустить C.

3) Чтобы повернуть ось, надобно отпустить b, закрѣпивъ прочіе винты.

4) Чтобы повернуть лимбъ съ осью, надобно закрѣпить b и отпустить *a*.

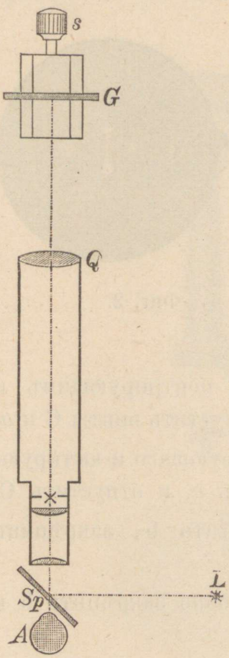
5) Для микрометрической установки лимба надобно, закрѣпивъ *a*, дѣйствовать винтомъ F.

6) Постоянно долженъ быть закрѣпленъ винтъ m и также, если труба поставлена на надлежащее мѣсто, винтъ C, а когда юстирующій и центрирующій аппаратъ поставленъ на желаемую высоту, то и винтъ d.

Прежде чѣмъ начать наблюденіе, надобно провѣрить установку нѣкоторыхъ частей гоніометра. Провѣрка эта состоитъ въ слѣдующихъ манипуляціяхъ.

## Повѣрка установки гоніометра.

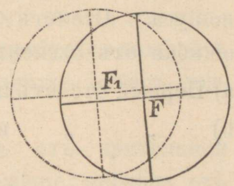
1) Установка окуляра зрительной трубы на безконечность. На столикѣ центрирующаго и юстирующаго аппарата прикрѣпляется по возможности перпендикулярно къ оси зрительной трубы и параллельно винту o или n стеклянная плоско-параллельная пластинка, одна сторона которой высеребрена для лучшаго отраженія свѣта. Затѣмъ вдвигая или выдвигая трубу Q съ окуляромъ, устанавливаемъ нитяный крестъ рѣзко по своему зрѣнію и откидываемъ лупу D. Приготовивъ такимъ образомъ зрительную трубу, мы держимъ или закрѣпляемъ какъ нибудь въ штативѣ небольшую стекляную пластинку Sp (фиг. 3), по возможности подъ угломъ въ 45° къ оси трубы. Въ сторонѣ отъ пластинки помѣщается лампа L. Между лампой и гоніометромъ ставимъ ширму такъ, чтобы на зеркальную пластинку не падалъ прямой свѣтъ отъ лампы. (Вообще наблюденіе ведется въ затемненной комнатѣ.) При описанномъ расположеніи прибора происходитъ слѣдующее: лучи, посылаемые лампой L, отражаются отъ стеклянной пластинки Sp по направленію оси трубы, отражаются отъ зеркальца G и идутъ по тому же направленію назадъ. Помѣстивъ глазъ за стекляной пластинкой Sp въ A, мы увидимъ въ трубѣ истинный крестъ и его отраженіе отъ G. Въ случаѣ если истинный и отраженный кресты не совпадаютъ, поступаютъ слѣдующимъ образомъ: вращая винтъ y, находящійся подъ трубой[1]), въ ту или другую сторону, мы приближаемъ отраженіе горизонтальной нити (вертикальную нить нѣтъ надобности приводить къ совпаденію) на половину прежняго разстоянія къ истинной нити; затѣмъ, измѣняя наклонъ зеркальца винтомъ o или n (смотря потому, который изъ нихъ былъ параллеленъ зеркальцу), приводимъ окончательно нити къ совпаденію. Установка окончена, если нить и ея отраженіе не даютъ параллакса, т. е. одна находится всегда за другой и не измѣняетъ относительно ея свое положеніе, при передвиженіи глаза или лампы внизъ и вверхъ.



Фиг. 3.

1) Въ нѣкоторыхъ гоніометрахъ винтъ y находится надъ трубой.

2) Установка оптической оси трубы перпендикулярно къ оси прибора. Расположенiе таково же какъ и въ 1). Передвигая винты o и вращая ось (безъ лимба!), мы приводимъ къ совпаденiю крестъ съ его отраженiемъ; этимъ самымъ мы поставимъ зеркальце G перпендикулярно къ оси трубы. Затѣмъ повертываемъ ось на 180°; если при этомъ крестъ виденъ безъ параллакса, то ось трубы стоитъ нормально къ оси прибора, если же совпаденія въ этомъ случаѣ нѣтъ, то приводимъ къ совпаденiю кресты, дѣйствуя какъ и въ первомъ случаѣ винтами y и o или n. Затѣмъ снова ставимъ зеркальце въ прежнее положенiе, т. е. вращаемъ его на 180°, снова провѣряемъ и исправляемъ, если нужно, положенiе крестовъ и т. д., пока въ обоихъ положенiяхъ зеркальца не уничтожится параллаксъ между крестомъ и его отраженiемъ.



Фиг. 4.

3) Установка креста перпендикулярно къ оси трубы. Расположенiе то же самое. Если крестъ не стоитъ перпендикулярно къ оси трубы, то при вращенiи зеркальца G вокругъ вертикальной оси, отраженiе горизонтальной нити креста отходитъ отъ самой нити; въ такомъ случаѣ надобно слегка повернуть въ ту или другую сторону трубу P, гдѣ заключенъ крестъ, и закрѣпить ее въ этомъ положенiи при помощи насаженнаго на трубу кольца съ зубцомъ.

4) Установка сигнала на безконечность (т. е. въ фокусъ его объектива). Ставятъ зрительную трубу въ противостоянiе съ коллиматоромъ и наблюдаютъ, выключивъ лупу, стоитъ-ли сигналъ безъ параллакса относительно креста и вполнѣ-ли рѣзко онъ виденъ. Исправить то и другое можно выдвигая или вдвигая трубку съ сигналомъ, для чего надобно отпустить винтъ Z.

5) Установка сигнала параллельно вертикальной нити креста. Расположенiе какъ въ 4). Повертываемъ трубку съ сигналомъ или самый сигналъ до тѣхъ поръ, пока онъ не станетъ параллельно вертикальной нити креста.

NB. У большинства гонiометровъ установки 4) и 5) уже сдѣланы; остается ихъ только провѣрить.

Произведя всѣ эти провѣрки, мы можемъ приступить къ измѣренiю кристалла; предварительно укажемъ на способъ отсчета по лимбу.

Лимбъ раздѣленъ на $^1/_2{}^0$; ноніусы (ихъ имѣется 2) даютъ минуты. Отсчетъ дѣлается такъ: положимъ, что нуль ноніуса приходится между $20,5^0$ и $21^0$ лимба и 11-ое дѣленіе ноніуса совпадаетъ съ однимъ изъ дѣленій лимба. Отсчетъ будетъ $20^0\ 30' + 11' = 20^0\ 41'$. Иногда бываетъ трудно опредѣлить, которое изъ дѣленій ноніуса совпадаетъ съ дѣленіемъ лимба; тогда надобно подсчитать всѣ болѣе близкія къ совпаденію дѣленія; дѣйствительно совпадать будетъ среднее изъ нихъ. За 0 и 30 дѣленіемъ ноніуса помѣщено еще по нѣсколько дѣленій, для того, чтобы этотъ способъ можно было примѣнить и въ случаяхъ совпаденія одного изъ конечныхъ дѣленій ноніуса. Отсчетъ дѣлается по двумъ ноніусамъ, для избѣжанія ошибки отъ эксцентричности прибора. Такъ напр.

a) Первый отсчетъ перваго ноніуса $200^0\ 42'$

b) „ „ второго „ $(20^0)\ 41'$ (градусы можно и незаписывать на второмъ ноніусѣ; разница въ градусахъ всегда $180^0$).

c) Второй отсчетъ перваго ноніуса $242^0\ 18'$

d) „ „ второго „ $(62^0)\ 17'$

Беремъ среднее минутъ изъ отсчетовъ a и b, c и d: $200^0\ 41'30''$ и $242^0\ 17'30''$; отсюда уголъ поворота $242^0\ 17'30''$-$200^0\ 41'30'' = 41^0\ 36'$.

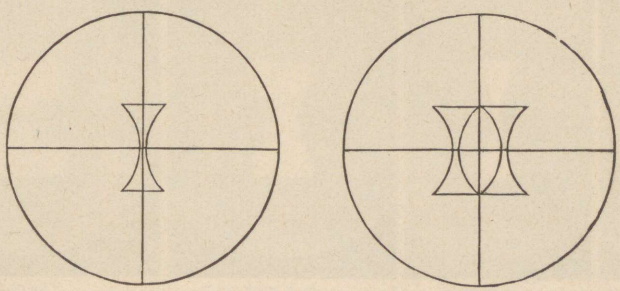
## Центрировка и юстировка кристалла.

Изслѣдуемый кристаллъ долженъ быть тщательно вычищенъ, при надобности промытъ спиртомъ и вытертъ на сухо замшей. Прикрѣпляется онъ къ столику кускомъ вычерненнаго воска. При измѣреніи большихъ кристалловъ необходимо взять достаточно большой кусокъ воска для устойчивости кристалла и установку производить спустя нѣкоторое время.

Ц е н т р и р о в к а к р и с т а л л а. Кристаллъ помѣщается на столикѣ такъ, чтобы ребро его, образованное гранями, уголъ между которыми требуется измѣрять, было помѣщено по возможности въ центрѣ столика, перпендикулярно къ нему, и чтобы одна изъ граней была параллельна одному изъ юстирующихъ винтовъ. Этимъ значительно облегчаются дальнѣйшія операціи. Для центрировки поворачиваютъ центрирующій аппаратъ (предварительно установивъ его на надлежащей высотѣ) такъ, чтобы одинъ изъ винтовъ q или $R$ былъ параллеленъ зрительной трубѣ. Опускаютъ на зрительной трубѣ лупу (труба ставится къ коллиматору подъ нѣкоторымъ угломъ) и подводятъ движеніемъ соотвѣтствующаго центрирующаго винта ребро кристалла до совпаденія съ вертикальной нитью креста.

Затѣмъ повертываютъ кристаллъ на 90° (лимба не вращать!) и посредствомъ второго винта подводятъ ребро опять къ совпаденію съ вертикальной нитью креста. Если центрировка отъ этихъ двухъ установокъ удалась, то при вращеніи кристалла центрируемое ребро его не будетъ отходить отъ вертикальной нити креста; въ противномъ случаѣ повторяютъ эту операцію еще одинъ или нѣсколько разъ. На гоніометрахъ съ горизонтальнымъ кругомъ и съ коллиматоромъ, установленнымъ на безконечность, неточность центрировки не отражается на результатѣ измѣренія; поэтому можно удовольствоваться приблизительной центрировкой. Когда требуется измѣрить нѣсколько угловъ изъ одной зоны, вмѣсто отдѣльныхъ реберъ центрируютъ ось зоны.

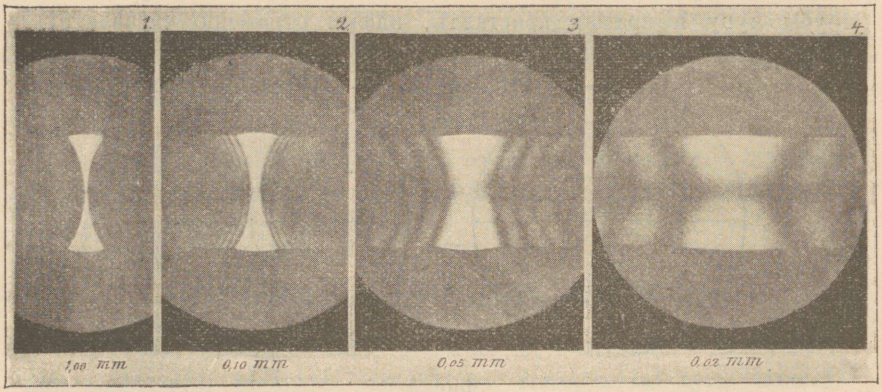
Юстированіе кристалла. Откинувъ отъ зрительной трубы лупу и вращая кристаллъ, ищемъ отраженіе сигнала отъ



Фиг. 5.

одной изъ граней, уголъ между которыми опредѣляется. Когда отраженіе найдено, то устанавливаемъ кристаллъ, вращая o или n такимъ образомъ, чтобы середина сигнала совпала съ горизонтальной нитью креста (см. фиг. 5); затѣмъ, вращая кристаллъ, посредствомъ оси s (лимба не вращаль!), мы подводимъ другую сосѣднюю грань; опять винтами o или n устанавливаемъ отраженіе сигнала; снова подводимъ первую грани, если нужно, опять устанавливаемъ отраженіе сигнала по кресту и т. д., пока отраженіе сигнала какъ отъ первой, такъ и отъ второй грани не будетъ расположено симметрично относительно креста. NB. Можетъ случиться, при изслѣдованіи весьма прозрачныхъ кристалловъ, что вмѣсто одного отраженія сигнала ихъ является два неодинаковой яркости (второе отраженіе отъ одной изъ заднихъ граней). Въ этомъ случаѣ удобно устанавливать кристаллы такъ, чтобы вертикальная нить креста проходила между обоими сигналами.

Теперь можно приступить и къ самому измѣренію угла. Найдя сигналъ отъ одной изъ граней, между которыми измѣряется уголъ, точно устанавливаемъ сигналъ при помощи микрометрическаго винта F по кресту; закрѣпляемъ b и дѣлаемъ отсчетъ обоихъ ноніусовъ. Отпустивъ затѣмъ $a$, вращаемъ лимбъ съ осью до тѣхъ поръ, пока появится отраженіе сигнала отъ второй грани; подводимъ его, вращая лимбъ отъ руки къ кресту, и точно устанавливаемъ, закрѣпивъ $a$ и дѣйствуя винтомъ F; производимъ снова отсчетъ. Изъ этихъ двухъ отсчётовъ находимъ величину поворота лимба, которая и равна искомому углу между гранями. Для большей точности наблюденія повторяемъ измѣреніе нѣсколько разъ и беремъ среднее изъ нихъ.




Фиг. 6.

Примѣчаніе. Иногда изображеніе сигнала получается не рѣзкимъ, расплывчатымъ, или видна только часть сигнала. Причинъ нѣсколько: несовершенство грани кристалла, несовершенный блескъ ея, ширина грани, ширина щели коллиматора, слабое освѣщеніе сигнала и нѣкот. другія. Грань кристалла иногда можно искусственно исправить: покрыть ее блестящимъ лакомъ, или наклеить на нее покровное стеклышко канадскимъ бальзамомъ; иногда измѣненіе угла между зрительной трубой и коллиматоромъ можетъ также способствовать лучшему изображенію сигнала. На фиг. 6 показано измѣненіе вида сигнала въ зависимости отъ ширины грани кристалла.

### Примѣръ протокола измѣренія.

0-нитробензиланилинъ. Система: триклиническая.

| | измѣрено | число измѣреній | предѣлы | вычислено |
|---|---|---|---|---|
| $a : a' = (110) : (\bar{1}10)$ | $= 77^0\,24'$ | 3 | $77^0\,13' — 77^0\,43'$ | $77^0\,30'$ |
| $a'' : b = (1\bar{1}0) : (100)$ | $= 52^0\;\;4'$ | 3 | $51^0\,47' — 52^0\,14'$ | $51^0\,58'$ |
| $a' : c = (\bar{1}10) : (010)$ | $= 39^0\,33'$ | 2 | $39^0\;\;7' — 40^0\;\;0'$ | $39^0\,36'$ |
| $d : b' = (\bar{2}\bar{1}1) : (\bar{1}00)$ | $= 50^0\,17'$ | 2 | $50^0\;\;3' — 50^0\,32'$ | $49^0\,37'$ |
| $b' : c = (\bar{1}00) : (010)$ | $= 91^0\,34'$ | 2 | $91^0\,21' — 91^0\,47'$ | — |

$$a : b : c = 1{,}236 : 1 : 0{,}726.$$

$$\alpha = 100^0\;42'$$
$$\beta = \;\;87^0\;40'$$
$$\gamma = \;\;88^0\;\;\;2'$$

Буквы, помѣщенныя въ первомъ столбцѣ таблицы, обозначаютъ грани кристалла, изображеніе котораго тоже должно быть приложено къ протоколу; символы же (второй столбецъ) выведены уже на основаніи вычисленій изъ данныхъ измѣреній. Въ протоколѣ помѣщается также и стереографическая проекція кристалла.

## 2. Зоны.

Зоной называется совокупность всѣхъ граней кристалла, пересѣкающихся въ параллельныхъ ребрахъ.

Для того, чтобы грань (pqr) находилась въ одной зонѣ съ гранями (efg) и (hkl), необходимо условіе:

$$(fl - gk)\,p + (gh - el)\,q + (ek - fh)\,r = o.$$
$$\text{или}\quad up + vq + wr = o.$$

Коэффиціенты при p, q, r въ этомъ уравненіи выводятся изъ слѣдующей схемы:

$$\begin{array}{c|cccc|c} e & f & g & e & f & g \\ & & \times & \times & \times & \\ h & k & l & h & k & l \end{array}$$

причемъ:

$$fl - gk = u$$
$$gh - el = v$$
$$ek - fh = w$$

т. е. символы обѣихъ граней пишутся по два раза одинъ подъ другимъ; первый и послѣдній вертикальный столбцы отдѣляются чертой; индексы верхней строчки перемножаются крестъ на крестъ съ индексами нижней и полученныя произведенія вычитываются по порядку одно изъ другого.

По такой же схемѣ получается символъ (pqr) грани, принадлежащей къ двумъ зонамъ [uvw] и [u'v'w']:

$$p = vw' - wv'$$
$$q = wu' - uw'$$
$$r = uv' - vu'.$$

Наконецъ символъ зоны [uvw], проходящей черезъ двѣ грани (efg) и (hkl) выводится, какъ уже указано, по той же схемѣ.

Примѣры. 1. Найти символъ зоны, проходящей черезъ грани (123) и (113).

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$2.3 - 3.1 = 3 \quad 3.1 - 1.3 = 0 \quad 1.1 - 2.1 = -1$$

Искомый символъ: $[30\bar{1}]$

2. Найти символъ грани, принадлежащей къ двумъ зонамъ $[30\bar{1}]$ и $[01\bar{1}]$.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 0 & \bar{1} & 3 & 0 & \bar{1} \\ 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} \end{array}$$

$$0.1 - \bar{1}.1 = 1; \quad 1.0 - 3.\bar{1} = 3; \quad 3.1 - 0.0 = 3$$

Искомый символъ: (133)

3. Находится-ли грань $(3\bar{1}1)$ въ одной зонѣ съ гранями (201) и (314)?

$$\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

Символъ зоны: $[\overline{15}2]$

Слѣдовательно $(\bar{3} \times \bar{1}) + (1 \times \bar{5}) + (1 \times 2) = 0$
и первая грань тавтозональна съ остальными двумя.

4. Найти символъ грани, принадлежащей къ двумъ зонамъ, изъ которыхъ первая проходитъ черезъ грани (123) и (113), а вторая черезъ грани (011) и (122)

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Символъ первой зоны: $[30\bar{1}]$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Символъ второй зоны: $[01\bar{1}]$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 0 & \bar{1} & 3 & 0 & \bar{1} \\ 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} \end{array}$$

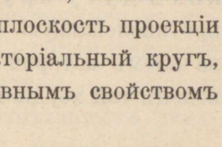
Искомый символъ грани: (133)

5. Пусть (hkl) и (h′k′l′) символы двухъ граней. Третья грань, находящаяся въ одной зонѣ съ первыми двумя и пересѣкающая ихъ подъ одинаковыми угломи, будетъ имѣть индексы соотвѣтственно равные суммамъ индексовъ первыхъ двухъ граней.

Напр. Символъ грани, одинаково наклоненной къ гранямъ (213) и $(2\bar{1}3)$, будетъ равенъ (406), или (203).

## 3. Черченіе стереографической проекціи кристалловъ.

I. Стереографической проекціей, какъ извѣстно, называется тотъ видъ сферической проекціи, при которомъ за плоскость проекціи (или такъ наз. основного круга) принимается экваторіальный кругъ, а глазъ помѣщается въ южномъ полюсѣ. Основнымъ свойствомъ этой проекціи является то обстоятельство, что всякій кругъ при перенесеніи съ поверхности сферы на плоскость проекціи остается кругомъ и углы, отложенные на сферѣ, сохраняютъ свою величину и на проекціи. Благодаря этому, на проекціи получается рядъ сферическихъ треугольниковъ и вычисленіе угловъ между полюсами различныхъ граней можетъ быть сдѣлано при помощи формулъ сферической тригонометріи. Важно и то, что полюсы тавтозональныхъ граней располагаются на одной и той же дугѣ большого круга (или діаметра, если плоскость даннаго большого круга перпендикулярна къ плоскости проекціи).



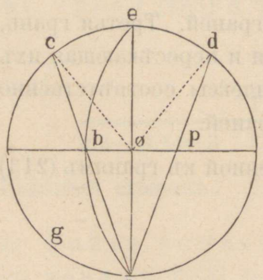

Фиг. 7.

Слѣдуетъ помнить, что на проекціи всегда наносится внѣшній уголъ $\alpha$, измѣряемый на гоніометрѣ, т. е. дополнительный къ внутреннему до $180^0$, или такъ наз. уголъ нормалей, а не внутренній уголъ граней $\beta$ (фиг. 7).

Для черченія стереографической проекціи необходимы, кромѣ бумаги, карандаша и рейсфедера, слѣдующія принадлежности: циркуль съ надставными ножками, линейка, транспортиръ, масштабъ, дуговая линейка Федорова.

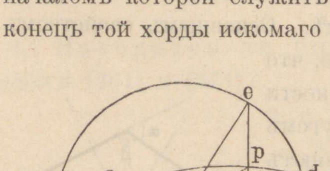
II. Прежде чѣмъ приступить къ нанесенію полюсовъ граней на проекцію необходимо освоиться со слѣдующими двумя предварительными задачами.

1. Дана зона; найти ея полюсъ. Полюсомъ зоны называется точка на сферѣ, отстоящая отъ всѣхъ точекъ зоны на $90^0$. Если зона представлена другой $a$bе (фиг. 8), то проводимъ діаметръ, въ концы котораго упирается дуга abе, и другой къ нему перпендикулярный. Изъ точки а проводимъ прямую черезъ b къ окружности, откладываемъ отъ c уголъ cod, равный $90^0$, и конецъ этой дуги d соединяемъ съ а. Въ точкѣ пересѣченія этой линіи съ горизонтальнымъ діаметромъ, т. е. въ р, и лежитъ полюсъ искомой зоны.



Фиг. 8.

2. Даны два полюса р и q, провести черезъ нихъ дугу круга (фиг. 9). Для этого требуется найти точку, противолежащую одной изъ данныхъ точекъ, т. е. конецъ хорды, началомъ которой служитъ одна изъ двухъ данныхъ точекъ, напр. конецъ той хорды искомаго круга, началомъ которой служитъ точка р (и на которой лежитъ и центръ основного круга). Эта точка находится такимъ образомъ: соединяютъ р съ о (центръ проекціи) и, продолживъ линію за о, возстановляютъ перпендикуляръ о$a$ къ ро; соединяютъ а съ р, доводятъ эту линію до е, проводятъ черезъ е и о прямую bе, соединяютъ а съ b; въ точкѣ пересѣченія линій ab и ор, т. е. въ точкѣ р′, лежитъ искомая точка. Теперь извѣстны двѣ хорды искомаго круга (рор′ и cod) и можно найти его центръ, если воз-



Фиг. 9.

ставить перпендикуляры изъ серединъ этихъ хордъ и продолжить ихъ до взаимнаго пересѣченія. Изъ центра остается уже только циркулемъ провести искомую окружность. Эту окружность можно начертить и проще, при помощи дуговой линейки Федорова, выгнувъ ее настолько, чтобы она прошла черезъ точки p, q, p′.

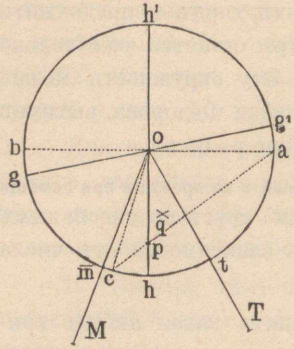
III. **Полюсы всѣхъ граней кристалла можно найти на проекціи при помощи слѣдующихъ пріемовъ**, начертивъ предварительно кругъ произвольнымъ радіусомъ (обыкновенно въ 25—35 мм.), въ зависимости отъ числа полюсовъ, которые придется опредѣлять.

1. Если за плоскость проекціи принята какая нибудь кристаллографическая плоскость, перпендикулярная къ кристаллографической оси, напр. $\infty O \infty$ въ кубической системѣ или $oP$ въ квадратной, гексагональной или ромбической системѣ, ($\infty P \infty$) въ моноклинической системѣ и т. д., то полюсъ этой плоскости будетъ лежать въ центрѣ основного круга. Въ кристаллахъ съ косоугольными осями въ центрѣ проекціи можетъ и не лежать проекція полюса какой нибудь грани; въ такомъ случаѣ полюсъ базопинакоида, если основной кругъ проведенъ перпендикулярно къ вертикальной зонѣ, находится при помощи построенія указаннаго въ пунктѣ 6.

2. Полюсы граней, составляющихъ зону, перпендикулярную къ плоскости проекціи, располагаются по ея окружности и разстоянія ихъ другъ отъ друга непосредственно опредѣляются внѣшними гранными углами (т. е. дополнительными до $180^0$, или „углами нормалей“), соотвѣтствующихъ этимъ полюсамъ граней. Напр. при вышеуказанномъ выборѣ плоскости проекціи на ея окружности располагаются въ кубической системѣ вертикальныя плоскости куба, пирамидальнаго куба, гранатоэдра, въ гексагональной и квадратной — полюсы призмъ, въ ромбической — полюсы призмъ и вертикальныхъ пинакоидовъ и т. д. Углы (внѣшніе, дополнительные) между гранями, полюсы которыхъ расположены на окружности, опредѣляются непосредственно длиною дуги между двумя соотвѣтствующими даннымъ гранямъ полюсами.

3. Полюсы прочихъ граней лежатъ между окружностью и центромъ проекціи и наносятся при помощи одного изъ слѣдующихъ пріемовъ въ зависимости отъ положенія этихъ граней въ кристаллѣ.

4. Если грань находится одновременно въ нѣсколькихъ зонахъ, то ея полюсъ лежитъ въ точкѣ пересѣченія круговъ или діаметровъ, соотвѣтствующихъ даннымъ зонамъ.




Фиг. 10.

5. *Если полюсъ нѣкоторой грани* p (фиг. 10), напр. гексагональной пирамиды, *лежитъ на діаметрѣ*, проходящемъ *черезъ центръ проекціи* (т. е. принадлежитъ къ зонѣ, проекція которой представлена діаметромъ), то разстояніе его отъ центра находится слѣдующимъ путемъ:

$$op = r tg \tfrac{1}{2} op.$$

$$\text{или}\quad op = tg \tfrac{1}{2} op,$$

если радіусъ принять за единицу, т. е. линейное разстояніе точки p отъ o ровно половина тангенса угла между ними.

*Этимъ путемъ наносятся полюсы различныхъ пирамидъ.*

Положеніе этого полюса можно найти и иначе, пользуясь соотношеніемъ, указаннымъ въ пунктѣ 6. Точка a является полюсомъ зоны h'oh; поэтому, проведя діаметръ перпендикулярный къ тому, на которомъ долженъ быть искомый полюсъ, откладываютъ отъ b уголъ boc, равный измѣренному углу o : p, и проводятъ линію *ca* — точка пересѣченія ея съ діаметромъ h'h, т. е. p, и будетъ искомымъ полюсомъ.

Если въ o лежитъ полюсъ базопипакоида oP и вертикальная ось кристалла нормальна къ боковымъ, то уголъ o : p будетъ равенъ углу oP : p. Если оси косоугольныя, то

$$Op = r tg \tfrac{1}{2} (90^0 - hp)\ ^{1)}.$$

6. *Если какая нибудь грань* q *образуетъ съ двумя гранями призмы* m *и* t *въ зонѣ* [100 — 010] *углы* m *и* t, то ее находятъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 10): проводятъ радіусы om и ot, продолжаютъ ихъ за предѣлы окружности, отсѣкаютъ отрѣзки $oM = r Sec m$ и $oT = p Sec t$; изъ точекъ M и T, принявъ ихъ за центры, описываютъ окружности радіусомъ

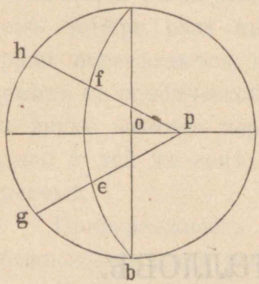
$$R = r tg m \text{ и } R' = r tg t\ ^{1)};$$

въ точкѣ пересѣченія обѣихъ окружностей и лежитъ проекція полюса q. Этимъ путемъ находятъ напр. *положеніе полюса*

---

1) Радіусъ r можно принять $= 1$.

базопинакоида въ триклинической системѣ, если даны углы его съ макро- и брахипинакоидами.



Фиг. 11.

7. Если данъ полюсъ нѣкоторой грани *e* (фиг. 11) и требуется найти полюсъ другой грани f, находящейся на томъ-же зональномъ кругѣ, и если уголъ между *e* и f извѣстенъ, то полюсъ грани f находится при помощи полюса данной зоны такъ: находятъ полюсъ данной зоны — p, соединяютъ его съ полюсомъ первой грани *e* и проводятъ эту линію соединенія дальше до пересѣченія съ окружностью въ g. Отъ точки пересѣченія съ окружностью g, отлагаютъ на ней дугу gh, равную измѣренному углу, и конецъ дуги соединяютъ съ полюсомъ зоны; искомая проекція будетъ въ точкѣ пересѣченія этой линіи съ кругомъ зоны, къ которой она принадлежитъ, т. е. въ f. Этимъ же путемъ рѣшается и обратная задача, а именно: найти уголъ между двумя тавтозональными гранями, полюсы которыхъ e и f нанесены на проекцію. Для этого находятъ полюсъ зоны — p, соединяютъ его съ обоими полюсами, уголъ между которыми требуется опредѣлить, и, продолживъ эти линіи до пересѣченія съ окружностью основного круга, отсчитываютъ дугу gh между ними.

# II. Вычисленіе кристалловъ.

## Общая задача.

Общая задача при измѣреніи кристалла сводится къ слѣдующему:

1. Опредѣлить кристаллографическую систему.
2. Вычислить элементы основной формы.
3. Вычислить символы производныхъ фигуръ.
4. Вычислить двугранные углы фигуръ, входящихъ въ составъ кристалла.

## Опредѣленіе кристаллографической системы.

Сдѣлавъ отъ руки эскизъ кристалла обозначаютъ каждую грань буквой, причемъ грани другъ другу противолежащія, т. е. параллельныя, удобно обозначать одной и той же буквой и различать ихъ значками. На гоніометрѣ измѣряютъ по возможности большое число угловъ, причемъ грани группируютъ по зонамъ. Опредѣленіе кристаллографической системы обыкновенно не представляетъ затрудненія.

Если всѣ углы во всѣхъ зонахъ различны, кристаллъ принадлежитъ къ асимметрической системѣ.

Если въ двухъ зонахъ, не перпендикулярныхъ другъ къ другу, встрѣчается повтореніе однихъ и тѣхъ же угловъ, или если одинаковые углы дважды повторяются при вращеніи на $360^0$ въ двухъ наклоненныхъ другъ къ другу зонахъ, или, наконецъ, если три грани образуютъ два прямыхъ и одинъ косой уголъ — то кристаллъ принадлежитъ къ моноклинической системѣ.

Въ томъ случаѣ, если повторенiе однихъ и тѣхъ же угловъ наблюдается въ трехъ зонахъ, или если одинъ и тотъ же уголъ встрѣчается въ двухъ наклоненныхъ другъ къ другу зонахъ и притомъ четыре раза въ каждой изъ нихъ, или, наконецъ, если три грани пересѣкаются подъ прямыми углами — кристаллъ принадлежитъ къ ромбической системѣ. Повторенiе тождественныхъ угловъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ зонахъ или углы въ $90^0$ въ одной и той же зонѣ указываютъ на принадлежность къ квадратной системѣ.

Принадлежность къ гексагональной или кубической системамъ обыкновенно сразу узнается по внѣшнему виду кристалловъ.

Чтобы прiобрѣсти навыкъ въ опредѣленiи системы и класса, необходимо практиковаться въ опредѣленiи деревянныхъ или иныхъ моделей кристалловъ.

## Вычисленiе элементовъ основной фигуры.

Основная форма кристалла опредѣляется его элементами, т. е. длиной осей и углами между ними; длиною же осей называютъ параметры основной фигуры, т. е. тѣ отрѣзки, которые отсѣкаетъ на координатныхъ осяхъ кристаллъ данной системы или въ частности основная фигура. Такимъ образомъ въ самомъ общемъ случаѣ требуется опредѣлить пять неизвѣстныхъ, а именно три угла осей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и два параметра, $a$ и $c$, такъ какъ третiй $b$ принимается равнымъ 1.

По мѣрѣ повышенiя симметрiи уменьшается и число неизвѣстныхъ. Въ триклинической системѣ неизвѣстны всѣ пять элементовъ, въ моноклинической только три: $\beta$, $a$ и $c$. Въ ромбической системѣ число неизвѣстныхъ сократилось до двухъ $a$ и $c$, въ квадратной и гексагональной осталось уже только одна неизвѣстная $c$. Наконецъ въ кубической системѣ нѣтъ неизвѣстныхъ, всѣ элементы для всѣхъ кристалловъ одинаковы.

Для вычисленiя элементовъ требуется столько независимыхъ другъ отъ друга угловъ, сколько неизвѣстныхъ. Углы, служащiе для вычисленiя элементовъ кристалла, называются основными. За основные принимаютъ тѣ, которые измѣрены съ наибольшей точностью.

При каждой системѣ указанъ методъ для вычисленiя ея элементовъ.

## Вычисленiе символовъ производныхъ фигуръ.

Прежде всего наносятъ, пользуясь измѣренными углами, полюсы всѣхъ граней на стереографическую проекцiю.

Если грань производной фигуры находится на пересѣченіи двухъ зонъ, ея символъ непосредственно опредѣляется схемой для вычисленія индексовъ грани по индексамъ зонъ.

Если производныя формы не принадлежатъ къ двумъ извѣстнымъ зонамъ, при вычисленіи ихъ параметровъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Для каждой фигуры вычисляютъ параметры какъ для основной фигуры; индексы производной фигуры получаются, если раздѣлить длину осей кристалла, т. е., параметры фигуры принятой за основною, на длину параметровъ данной производной фигуры.

Индексы должны быть простыми цѣлыми числами. Вслѣдствіе неизбѣжныхъ ошибокъ наблюденія обыкновенно получаются однако числа ирраціональныя; за индексы въ такомъ случаѣ принимаютъ наиболѣе близкія къ найденнымъ цѣлыя простыя числа.

### Вычисленіе угловъ.

Когда извѣстны длина осей кристалла и символы производныхъ фигуръ, вычисляютъ углы, пользуясь методомъ обратнымъ тому, которымъ вычисляли символы. Такого рода вычисленіе служитъ для провѣрки измѣренныхъ угловъ и можетъ иногда обнаружить случайныя ошибки, вкравшіяся въ вычисленіе символовъ. Нѣтъ надобности всегда вычислять всѣ углы; обыкновенно достаточно для каждой производной фигуры вычислить хотя бы по одному углу.

Всѣ частные случаи разсмотрѣны въ отдѣльности при каждой системѣ.

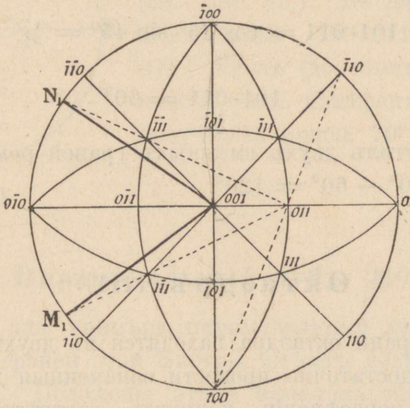
## Кубическая система.

Всѣ три оси въ кристаллахъ кубической системы пересѣкаются подъ прямыми углами и параметры основной фигуры, (т. е. длина осей) равны между собой, т. е. равны *a*, или 1. Поэтому элементы кристалла заранѣе даны и приходится вычислять лишь символы различныхъ фигуръ.

За плоскость проекціи удобно принять одну изъ главныхъ плоскостей симметріи, напр. ту, которая проходитъ черезъ полюсы граней куба (100) и (010) и слѣд. параллельна гранямъ (001) и ($00\bar{1}$).

## Кубъ {100}.

Полюсы граней куба (фиг. 12) помѣщаются въ центрѣ проекціи (001) и въ точкахъ (100), (010) и т. д., т. е. въ точкахъ пере-




Фиг. 12.

сѣченія окружности проекціи съ двумя взаимно перпендикулярными діаметрами (боковыя оси $x$ и $y$). Всѣ двугранные углы куба прямые.

## Ромбическій додекаэдръ {110}.

Четыре грани кристалла, параллельныя вертикальной оси, т. е. (110), (1$\bar{1}$0), ($\bar{1}\bar{1}$0) и ($\bar{1}$10) находятся въ одной зонѣ съ вертикальными гранями куба. Полюсы этихъ граней расположены на окружности проекціи; такъ какъ эти грани одинаково наклонены къ смежнымъ гранямъ куба, полюсы ихъ будутъ концами двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ, дѣлящихъ пополамъ углы между тѣми діаметрами, на концахъ которыхъ сидятъ полюсы вертикальныхъ граней куба.

Остальныя четыре грани находятся въ одной зонѣ съ верхней горизонтальной гранью куба (001) и съ вертикальными его гранями; поэтому полюсы этихъ граней помѣстятся на діаметрахъ [100-$\bar{1}$00] и [010-0$\bar{1}$0] и на разстояніи 45° отъ (001). Такъ напр. полюсъ грани (011) мы найдемъ, если соединимъ (100) и ($\bar{1}$10).

### Вычисленіе угловъ.

Внѣшній уголъ двухъ смежныхъ граней (101) и (011) равенъ дугѣ 101-011. Изъ сферическаго треугольника 011-001-101 (въ которомъ дуга 101-011 есть сторона c, противолежащая прямому углу) находимъ:

$$\cos 101\text{-}011 = \cos 101\text{-}001 \sin 011\text{-}001$$

или

$$\cos 101\text{-}011 = \cos 45^0 \sin 45^0 = \tfrac{1}{2}.$$

слѣд.

$$101\text{-}011 = 60^0$$

т. е. внутренній уголъ двухъ смежныхъ граней ромбическаго додекаэдра равенъ $180^0 - 60^0 = 120^0$.

## Октаэдръ {111}.

Такъ какъ грани октаэдра находятся въ двухъ зонахъ куба и гранатоэдра, то достаточно провести означенныя двѣ зоны, чтобы въ точкѣ ихъ пересѣченія получить соотвѣтствующую грань октаэдра. Такъ напр. полюсъ грани (111) находится въ точкѣ пересѣченія круговъ, соотвѣтствующихъ зонамъ [100-011] и [101-010]. Эта грань находится также въ зонѣ [001-110]; поэтому для полученія необходимыхъ сферическихъ треугольниковъ надо провести еще діаметръ 110-$\bar{1}\bar{1}0$ и $1\bar{1}0$-$\bar{1}10$.

### Вычисленіе угловъ.

Требуется найти уголъ (111) - ($1\bar{1}1$); половина этого внѣшняго угла равна дугѣ (111) - (101), которая можетъ быть вычислена изъ треугольника 001-111-101 [1]).

$$tg\ 101\text{-}111 = \sin 101\text{-}111\ tg\ 001$$

или

$$tg\ 101\text{-}111 = \sin 45^0\ tg\ 45^0 = \sin 45^0$$

$$\log tg\ 101\text{-}111 = \log \sin 45^0 = \bar{1},8494850$$

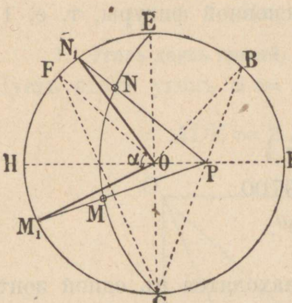
$$101\text{-}111 = 35^0\ 15'\ 50''.$$

Слѣд. уголъ между гранями октаэдра равенъ

$$180^0 - 2\,(35^0\ 15'\ 50'') = 109^0\ 28'\ 30''.$$

---

1) Въ этомъ треугольникѣ уголъ при (101) прямой, уголъ при (001) равенъ $45^0$ и сторона (001) : (101) также равна $45^0$.

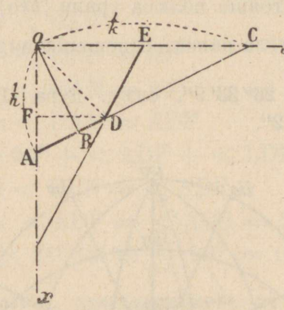



Фиг. 13.

Этотъ уголъ можно было-бы найти и графически при помощи полюса зоны (см. фиг. 13.). Въ данномъ случаѣ полюсъ зоны [100-011-111] будетъ въ 011. Уголъ (дополнительный) $M_1$ 001 $N_1$ можетъ быть измѣренъ транспортиромъ; получается прибл. $70^0 30'$.

## Пирамидальный кубъ $\{hk0\}$.

Возьмемъ для примѣра пирамидальный кубъ $\{210\}$. Восемь вертикальныхъ граней этой фигуры имѣютъ полюсы на окружности основного круга. Положеніе этихъ полюсовъ опредѣляется дугами между полюсами граней куба и пирамидальнаго куба; напр. для грани $(hk0)$ дугою 100-210, равной углу AOB на фиг. 14 [1]).



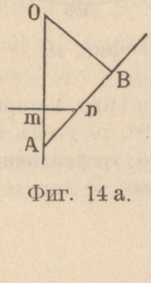

Фиг. 14.

Въ общемъ видѣ мы имѣемъ

$$tg\ \mathrm{AOB} = cotg\ \mathrm{OAB} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \frac{k}{h},$$

такъ какъ стороны OC и OA являются параметрами грани AD (т. е.

1) Уголъ AOB равенъ углу mnA, т. е. внѣшнему углу между гранями куба и пирамидальнаго куба, такъ какъ стороны угловъ AOB и mnA взаимно перпендикулярны.




Фиг. 14 a.

($hk0$)) и слѣд. равны длинѣ параметровъ основной фигуры, т. е. 1, дѣленной на индексъ по данной оси.

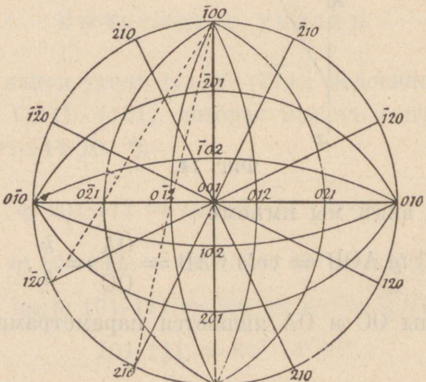
Въ нашемъ частномъ случаѣ

$$tg\ \mathrm{AOB} = tg\ 100\text{-}210 = \tfrac{1}{2}$$
$$\log tg\ 100\text{-}210 = \bar{1},6989700$$
$$100\text{-}210 = 26^0\ 33'\ 50''.$$

Другія грани пирамидальнаго куба находятся въ одной зонѣ съ верхней и съ вертикальными гранями куба, и ихъ полюсы лежатъ слѣд. на взаимно перпендикулярныхъ діаметрахъ [$\bar{1}00$-$100$] и [$010$-$0\bar{1}0$] (фиг. 15). Найти ихъ положеніе можно при помощи построенія, указаннаго на стр. 17 и 22, взявши дуги между гранями куба и пирамидальнаго куба равными $26^0\ 33'\ 50''$. Такъ напр. полюсы ($0\bar{2}1$) и ($0\bar{1}2$) мы найдемъ этимъ путемъ, взявши дуги $0\bar{1}0$—$0\bar{2}1$ и $001$ — $0\bar{1}2$ равными $26^0\ 33'\ 50''$, т. е. проведя прямыя $100$ — $\bar{2}10$ и $\bar{1}00$ — $1\bar{2}0$.

П р и м ѣ ч а н і е. Нахожденіе полюсовъ $\{hko\}$ на проекціи облегчается благодаря тому, что разстояніе полюса грани $\{hko\}$ отъ (001) опредѣляется тѣмъ, что тангенсъэтого угла равенъ отношенію индексовъ данной грани $\frac{k}{h}$.

Дуга $(102):(001) = 26^0\,33'\,9''$, слѣд. дуга $(102):(101) = 18^0\,26'\,1''$, а дуга $(102):(201) = 36^0\,52'\,2''$.



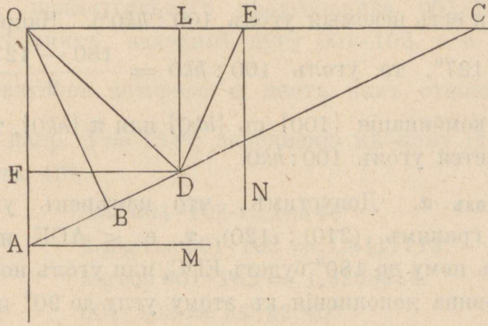

Фиг. 15.

Если даны полюсы (012) и (102), которые оба находятся отъ (001) на одинаковомъ разстояніи $26^0\,33'\,9''$, то уголъ между ними, т. е. дуга 102 – 012 находится изъ прямоугольнаго треугольника 001-102-012, въ которомъ дуги 001-012 и 001-102 извѣстны.

## Вычисленіе угловъ.

I. **Уголъ двухъ граней, принадлежащихъ къ двумъ смежнымъ пирамидкамъ**[1]). Пусть этотъ уголъ $\alpha = \angle ADE$ на фиг. 14.

$$\angle ADE = 2\, ADF + 90^0$$




Фиг. 16.

Въ этомъ можно убѣдиться напр. слѣдующимъ путемъ (фиг. 16).

$$\triangle ADO = \triangle ODE$$
$$\angle OED = \angle OAD$$
$$\angle OED + \angle DEN = 90^0$$
$$\angle OAD + \angle DAM = 90^0$$
$$\angle DEN = \angle DAM = ADF$$
$$\angle ADE = 90^0 + \angle ADF + \angle LDE = 90^0 + 2\, ADF.$$
$$\angle LDE = \angle DEN = \angle ADF.$$

Такъ какъ $\angle ADF = \angle AOB = 26^0\, 33'\, 50''$

то $\alpha = 2 \times 26^0\, 33'\, 50'' + 90^0 = 143^0\, 7'\, 40''$.

II. **Уголъ двухъ граней, принадлежащихъ къ одной и той-же пирамидкѣ.** Пусть этотъ уголъ будетъ $\beta$; онъ будетъ дополненіемъ до $180^0$ къ сторонѣ 102-012 въ сферическомъ треугольникѣ 102-012-001.

$$\cos 102\text{-}012 = \cos 001\text{-}102 \cos 001\text{-}012 = \cos^2 26^0\, 33'\, 50''$$
$$\log \cos 102\text{-}012 = 2 \times \bar{1}{,}9515494 = \bar{1}{,}9030998.$$
$$180^0 - \beta = 36^0\, 52'\, 20'' \qquad \beta = 143^0\, 7'\, 40''.$$

## Вычисленіе индексовъ, если извѣстны углы.

Требуется найти символъ пирамидальнаго куба, если измѣреніемъ найденъ одинъ изъ его двухъ угловъ.

---

1) Каждыя четыре грани пирамидальнаго куба, соотвѣтствующія одной грани куба, образуютъ четырехгранную пирамидку.

Мы знаемъ, что $tg \ 100 \cdot hk0 = \frac{k}{h}$; слѣд. нужно отъ измѣреннаго угла перейти къ углу $100 \cdot hk0$.

Если измѣренъ уголъ $2\bar{1}0 : 210$ (напр. въ геміэдрической формѣ — пентагональномъ додекаэдрѣ), то половина угла нормалей къ этимъ гранямъ и есть искомый уголъ $100 : hk0$[1]). Напр. если этотъ уголъ равенъ $127^0$, то уголъ $100 : hk0 = \frac{180 - 127}{2} = 26^0 \ 30'$.

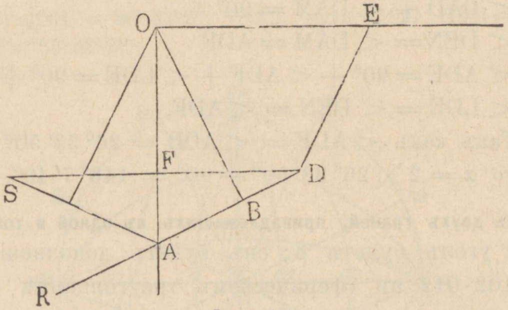
Если есть комбинація $\{100\}$ съ $\{hk0\}$ или $\pi \ \{hk0\}$, то непосредственно измѣряется уголъ $100 : hk0$.

I. **Данъ уголъ** $\alpha$. Допустимъ, что измѣренъ уголъ $\alpha$, соотвѣтствующій гранямъ $(210) : (120)$, т. е. $< ADE$ на фиг. 14. Дополненіемъ къ нему до $180^0$ будетъ EDC, или уголъ нормалей BOP, (фиг. 18) а половина дополненія къ этому углу до $90^0$ и есть уголъ

---

1) $$< SAR = < SOB.$$

Половина угла SOB, т. е. $AOB = < ADF$, который и есть внѣшній уголъ $100 \cdot hk0$.




Фиг. 17.

Пусть напр. $\alpha = 127^0$. Дополненіе къ нему $53^0$, а половина дополненія къ этому послѣднему до $90^0$ будетъ $18^0 \ 30'$.

слѣд. $$\frac{k}{h} = tg \ 18^0 \ 30'$$

$$\log \frac{k}{h} = \log tg \ 18^0 \ 30' = \bar{1}, 5245199$$

$\frac{k}{h} = 0,3346$ или $\frac{1}{3}$, если взять наиболѣе близкое раціональное число; слѣд. $k = 1$, а $h = 3$ и искомый символъ будетъ $\{310\}$.

ADF (или AOD, т. е. 100-210, или говоря общѣе 100-$hk0$), тангенсъ котораго равенъ отношенію индексовъ $\frac{k}{h}$ [1]).

II. **Данъ уголъ** $\beta$. Этотъ уголъ, соотвѣтствующій гранямъ (102) и (012) есть дополненіе къ дугѣ 102-012, которая является гипотенузой прямоугольнаго треугольника 001-102-012; рѣшая этотъ треугольникъ, находимъ дугу 001-102, т. е. искомый уголъ 100-$hk0$, тангенсъ котораго и даетъ намъ отношеніе $\frac{k}{h}$.

Пусть напр. $\beta = 134^0$; дополненіе къ нему (т. е. измѣренный уголъ) будетъ $46^0$.

$$\cos^2 001\text{-}102 = \cos 46^0$$
$$2 \log \cos 001\text{-}102 = \bar{1},8417713$$
$$\log \cos 001\text{-}102 = \bar{1},9208856$$
$$001\text{-}102 = 33^0\, 32'\, 40''$$
$$\log tg\ 001\text{-}102 = \bar{1},8215146$$
$$tg\ 001\text{-}102 = \frac{k}{h} = 0{,}6630,\ \text{или}\ \tfrac{2}{3},$$

слѣд. $k = 2$, а $h = 3$ и искомый символъ $\{320\}$.

## Икоситетраэдръ $\{hkk\}$.

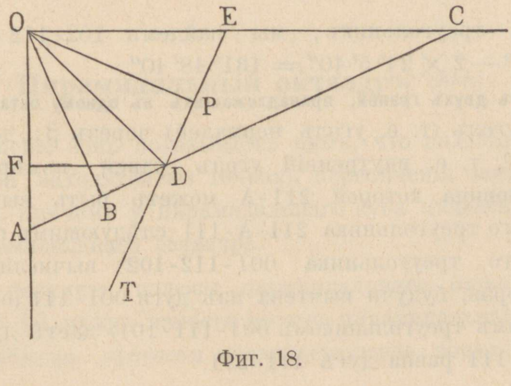
Грани икоситетраэдра находятся въ точкахъ пересѣченія зонъ куба съ гранатоэдромъ, т. е. [100-011], и куба съ пирамидальнымъ

---

1) $\angle$ EDC, или $\angle$ ADF, равенъ $\angle$ BOP.

$\triangle$ AOB $= \triangle$ OEP, слѣд. $\angle$ AOB $= \angle$ EOP

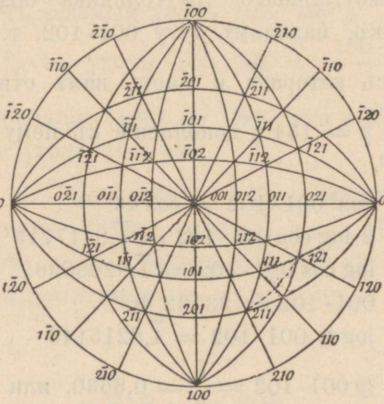
и каждый изъ нихъ, равный ADF, есть половина дополненія къ $\angle$ BOP до $90^0$.




Фиг. 18.

кубомъ, т. е. [001-$hk$0], у котораго индексы $k$ и $h$ тѣже, что и у даннаго икоситетраэдра.

На нашемъ примѣрѣ $\{hkk\} = \{211\}$; полюсы этихъ граней помѣщаются въ точкахъ пересѣченія зональныхъ круговъ куба, гранатоэдра и пирамидальнаго куба $\{210\}$.



Фиг. 19.

## Вычисленіе угловъ.

I. **Уголъ двухъ граией, принадлежащихъ къ разнымъ октантамъ.** Обозначимъ этотъ уголъ 1$\bar{1}$2 — 112 (т. е. уголъ нормалей, непосредственно измѣряемый на гоніометрѣ) черезъ $\alpha$. Дополненіе къ нему до 180$^0$ (т. е. внутренній уголъ граней) измѣряется дугой 1$\bar{1}$2 — 112, половина которой 102-112 можетъ быть вычислена изъ прямоугольнаго сферическаго треугольника 001-102-112; въ немъ уголъ при 102 прямой, сторона 001-102 извѣстна, т. к. тангенсъ ея равенъ $\frac{1}{2}$ (или вообще говоря $\frac{k}{h}$), а уголъпри 001 равенъ 45$^0$.

Рѣшивъ треугольникъ, мы найдемъ 102-112 $= 24^0\,5'\,40''$, или $\alpha = 180^0 - 2 \times 24^0\,5'\,40'' = 131^0\,48'\,40''$.

II. **Уголъ двухъ граней, принадлежащихъ къ одному октанту.** Обозначимъ этотъ уголъ (т. е. уголъ нормалей) черезъ $\beta$; дополненіе къ нему до 180$^0$, т. е. внутренній уголъ граней, измѣряется дугой 211-121, половина которой 211-A можетъ быть вычислена изъ прямоугольнаго треугольника 211-A-111 слѣдующимъ путемъ. Изъ прямоугольнаго треугольника 001-112-102 вычислимъ сторону 001-112, которая, будучи вычтена изъ дуги 001-111 (опредѣляемой прямоугольнымъ треугольникомъ 001-111-101) даетъ дугу 112-111. Дуга-же 112-111 равна дугѣ 111-211.

Зональные круги октаэдра пересѣкаются подъ углами въ $60^0$, поэтому изъ прямоугольнаго треугольника 111 — A — 211, въ которомъ уголъ при 111 равенъ $60^0$, можно вычислить дугу 211 — A, равную половинѣ дополненія къ $\beta$.

Въ данномъ случаѣ мы нашли-бы для $\beta$ величину $146^0\,26'\,20''$.

### Вычисленіе индексовъ.

I. **Данъ уголъ** $\alpha$. Если $\alpha$ уголъ нормалей къ $1\bar{1}2$ и 112, то половина внутренняго угла равна дугѣ 112-102; слѣд. достаточно вычислить изъ треугольника 001-112-102 сторону 001-102, т. к. тангенсъ этой стороны равенъ $\frac{k}{h}$, т. е. даетъ символъ пирамидальнаго куба, соотвѣтствующаго данному икоситетраэдру.

Если $\alpha = 122^0$, мы найдемъ $\frac{k}{h} = 0{,}6660$, или $^2/_3$, и слѣд. $k = 2$, а $h = 3$.

Символъ пирамидальнаго куба — {320}, а символъ икоситетраэдра — {322}.

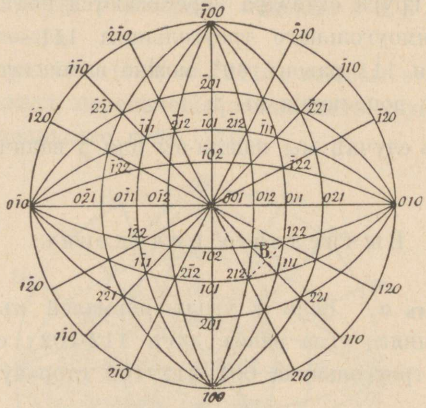
II. **Данъ уголъ** $\beta$. Если $\beta$ уголъ нормалей, то половина внутренняго угла будетъ дуга 211-A. Вычислимъ сторону 211-111, равную 112-111, а затѣмъ изъ треугольника 001-102-112 найдемъ сторону 001-102, какъ указано выше. Эта сторона даетъ намъ символъ пирамидальнаго куба, а слѣд. и икоситетраэдра (см. выше).

Если напр. $\beta = 166^0$, то $\frac{k}{h} = 0{,}749$, или $\frac{3}{4}$; слѣд. $k = 3$, а $h = 4$; символъ пирамидальнаго куба — {430}, икоситетраэдра — {433}.

## Пирамидальный октаэдръ $\{hhk\}$.

Соотношеніе зонъ показываетъ намъ, что полюсы пирамидальнаго октаэдра находятся въ точкахъ пересѣченія зонъ [$h0k$ — 010] и [001—110], причемъ у пирамидальнаго куба индексы $h$ и $k$ тѣ-же, что и у пирамидальнаго октаэдра.

Чтобы получить полюсы пирамидальнаго октаэдра {221} на проекціи фиг. 20, нужно нанести полюсъ пирамидальнаго куба {210}, куба и гранатоэдра, провести соотвѣтствующіе зональные круги и




Фиг. 20.

найти тѣ точки ихъ пересѣченія, которыя соотвѣтствуютъ пирамидальному октаэдру.

## Вычисленіе угловъ.

I. **Углы при октаэдрическихъ ребрахъ.** Если $\alpha$ уголъ нормалей къ гранямъ 212 и $\bar{2}12$, то дополненіе къ нему до $180^0$ будетъ дуга 212-$\bar{2}$12, половина которой 212-101 можетъ быть вычислена изъ прямоугольнаго треугольника 001-101-212. Въ этомъ треугольникѣ уголъ при 101 прямой, сторона 001-101 $= 45^0$, а уголъ при 001 равенъ дугѣ 100-210, тангенсъ которой есть отношеніе $\frac{k}{h}$ (въ данномъ случаѣ $\frac{1}{2}$, откуда и дуга равна $26^0\,33'\,50''$).

Для 212-101 мы найдемъ $19^0\,28'\,20''$, а слѣд. $\alpha = 141^0\,3'\,20''$.

II. **Уголъ двухъ граней, принадлежащихъ къ одному октанту.** Если уголъ нормалей къ гранямъ 212 и 122 обозначить черезъ $\beta$, то дополненіемъ къ нему до $180^0$ будетъ дуга 212-122. Предшествующее вычисленіе дало дугу 101-212; если ее вычесть изъ 101-111 (т. е. половины внутренняго угла октаэдра), получится дуга 212-111. Слѣд. изъ прямоугольнаго треугольника 212-B-111 опредѣлится сторона 212-B, которая равна $\frac{180-\beta}{2}$; въ этомъ треугольникѣ извѣстны B, (прямой уголъ) 212-111 и уголъ при 111, равный $60^0$.

Таким образомъ $\beta = 152^0\,44'\,20''$.

### Вычисленіе индексовъ.

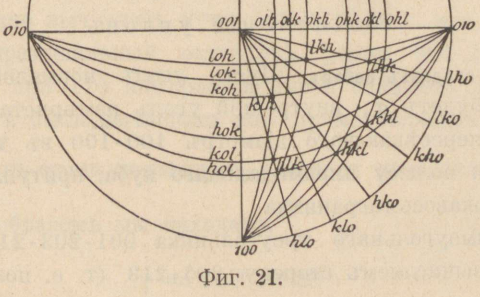
Въ зависимости отъ того, измѣренъ-ли уголъ $\alpha$ или $\beta$, для вычисленія отношенія $\frac{k}{h}$ пользуются тѣми-же треугольниками, изъ которыхъ мы выше вычисляли углы, (т. е. 212 - B - 111 и 001-101-212) съ тѣмъ только различіемъ, что то, что тамъ было дано, здѣсь неизвѣстно и наоборотъ. Отношеніе $\frac{k}{h}$ даетъ символъ пирамидальнаго куба, соотвѣтствующаго данному пирамидальному октаэдру, а слѣд. и символъ этого послѣдняго.

Такъ напр. для $\alpha = 153^0\,30'$ мы найдемъ $\frac{k}{h} = 0{,}3330$, или $\frac{1}{3}$, слѣд. $k = 1$, $h = 3$, символъ пирамидальнаго куба — $\{310\}$ и символъ пирамидальнаго октаэдра — $\{331\}$.

Для $\beta = 162^0\,30'$ мы найдемъ $\frac{k}{h} = 0{,}6603$, т. е. $\frac{2}{3}$, слѣд. $k = 2$, $\eta = 3$ и символы будутъ $\{320\}$ и $\{322\}$.

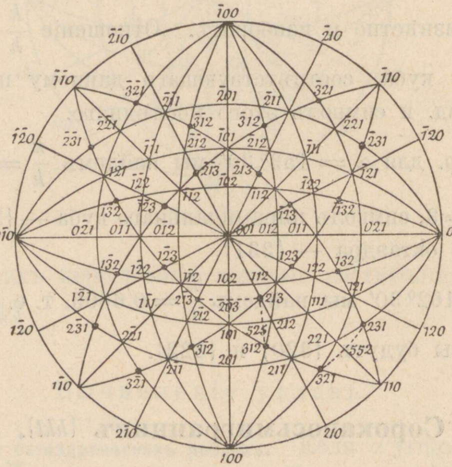
## Сорокавосьмигранникъ $\{hkl\}$.

Первый методъ. Если мы возьмемъ три пирамидальныхъ куба $\{hk0\}$, $\{hl0\}$, $\{kl0\}$, которые могутъ быть получены путемъ попарнаго соединенія индексовъ $h$, $k$, $l$, и нанесемъ ихъ полюсы на проекцію (фиг. 21), то достаточно провести соотвѣтствующіе зональные круги, чтобы въ точкахъ ихъ пересѣченія найти полюсы




Фиг. 21.

сорокавосьмигранника $\{hkl\}$. Изъ фигуры ясно, что полюсъ напр. грани $(hkl)$ находится на пересѣченіи зонъ $[001\text{-}hk0]$ и $[100\text{-}0kl]$. Имѣется слѣд. общій методъ для изображенія проекціи сорокавосьмигранника, символъ котораго извѣстенъ. Въ частномъ случаѣ, напр. для сорокавосьмигранника $\{321\}$, достаточно зональныхъ круговъ (см. фиг. 22) пирамидальнаго куба $\{210\}$ и ромбическаго додекаэдра.



Фиг. 22.

Второй методъ. У сорокавосьмигранника три рода реберъ, а слѣд. и двугранныхъ угловъ; притупленіемъ этихъ трехъ родовъ реберъ можно получить три 24-гранника. Среднія ребра притупляются пирамидальнымъ кубомъ; въ частномъ случаѣ сорокавосьмигранника $\{321\}$, символъ этого пирамидальнаго куба будетъ $\{320\}$. Длинныя ребра притупляются икоситетраэдромъ $\{211\}$, а короткія пирамидальнымъ октаэдромъ $\{552\}$. Нанесемъ полюсы этихъ 24-гранниковъ, проведемъ зональные круги — въ точкахъ ихъ пересѣченія и помѣстятся полюсы сорокавосьмигранника.

## Вычисленіе угловъ.

I. **Уголъ среднихъ реберъ.** Пусть уголъ нормалей къ гранямъ (213) и ($2\bar{1}3$) будетъ $\alpha$; внутренній уголъ измѣряется дугою большого круга, пересѣкающаго діаметръ $100\text{-}\bar{1}00$ въ точкѣ(203), соотвѣтствующей полюсу пирамидальнаго куба, притупляющаго среднія ребра сорокавосьмигранника.

Изъ прямоугольнаго треугольника 001-203-213 (уголъ при 203 прямой) вычисляемъ сторону 203-213 (т. е. половину дополненія къ $\alpha$ до $180^0$): въ этомъ треугольникѣ сторона 001-203 извѣстна, т. к. тангенсъ ея равенъ $\frac{2}{3}$, а уголъ при 001 измѣряется дугою 100-210, т. е. тангенсъ его равенъ $\frac{1}{2}$.

Такимъ путемъ мы найдемъ $\qquad 203\text{-}213 = 15^0\,30'$

$$\alpha = 180^0 - 2 \times 15^0\,30' = 149^0.$$

II. **Уголъ длинныхъ реберъ.** Если обозначить уголъ нормалей къ (213) и (123) черезъ $\beta$, то дополненіе къ нему до $180^0$ измѣряется дугой 213-123 того большого круга, который пересѣкаетъ діаметръ ($110\text{-}\bar{1}\bar{1}0$) въ точкѣ (112), соотвѣтствующей полюсу икоситетраэдра, притупляющаго длинныя ребра. Изъ прямоугольнаго треугольника 101-112-213 (прямой уголъ при 112) вычисляется сторона 112-230, т. е. половина дополненія къ $\beta$: въ этомъ треугольникѣ извѣстенъ уголъ при 001, равный $45^0 - \operatorname{arc}tg \frac{1}{2}$ и сторона 001-112, опредѣляемая изъ прямоугольнаго треугольника 001-102-112, въ которомъ $001\text{-}102 = \operatorname{arc}tg \frac{1}{2}$, а уголъ $001 = 45^0$.

Слѣд. здѣсь

$$112\text{-}213 = 10^0\,53'\,20''$$

откуда

$$\beta = 158^0\,13'\,20''.$$

III. **Уголъ короткихъ реберъ.** Пусть уголъ нормалей къ гранямъ (321) и (231) будетъ $\gamma$; въ такомъ случаѣ внутренній уголъ 321 : 231 измѣряется дугой 321 : 231, пересѣкающей діаметръ [$110\text{-}\bar{1}\bar{1}0$] въ точкѣ (552), т. е. въ полюсѣ пирамидальнаго октаэдра, притупляющаго короткія ребра сорокавосьмигранника.

Половина дополненія къ $\gamma$, т. е. дуга 321-552, является стороной прямоугольнаго треугольника 321-552-110. Изъ этого треугольника можно вычислить дугу 552-110, т. к. она, какъ указано выше (см. пирамидальный октаэдръ), равна $001\text{-}110 - 001\text{-}552$. Острый уголъ при 110 измѣряется дугой большого круга $001\text{-}1\bar{1}2$, которая можетъ быть вычислена изъ прямоугольнаго треугольника $1\bar{1}2\text{-}001\text{-}102$; въ этомъ послѣднемъ тангенсъ дуги 001-102 равенъ $\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ мы находимъ

$$\gamma = 158^0\,13'\,20''.$$

## Вычисленіе индексовъ.

При вычисленіи индексовъ сорокавосьмигранника имѣется двѣ неизвѣстныхъ, такъ какъ по двумъ индексамъ опредѣляется и третій; поэтому для вычисленія символа достаточно двухъ угловъ.

I. **Даны уголъ среднихъ и уголъ длинныхъ реберъ.** Извѣстны слѣд. дуги 213-203 и 213-112.

Каждая изъ этихъ дугъ образуетъ съ дугою 001-213 прямоугольный сферическій треугольникъ; у обоихъ треугольниковъ общая гипотенуза 001-213. Обозначимъ эту гипотенузу черезъ $c$, уголъ, противолежащій въ первомъ треугольникѣ дугѣ 213-203 $= a$ черезъ $A$, уголъ, противолежащій во второмъ треугольникѣ дугѣ 213-112 $= a^1$ черезъ $A^1$. Мы имѣемъ:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a^1}{\sin A^1}$$

откуда

$$\frac{\sin a}{\sin a^1} = \frac{\sin A}{\sin A^1}.$$

Но

$$A^1 = 45^0 - A$$

то слѣд.

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cotg}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sin a}{\sin a^1}$$

и

$$\mathrm{cotg}A = \frac{\sin a^1}{\sin 45^0 \sin a} + 1.$$

Найдя такимъ образомъ зависимость $A$ отъ $a$ и $a^1$, мы непосредственно получимъ дугу 100-210, тангенсъ которой равенъ $\frac{1}{2}$, или вообще говоря $\frac{l}{k}$. Этотъ-же уголъ $A$ даетъ возможность вычислить дугу 001-203, тангенсъ которой равенъ $\frac{2}{3}$, или въ общемъ видѣ $\frac{k}{h}$.

Изъ двухъ отношеній $\frac{l}{k}$ и $\frac{k}{h}$ опредѣляются всѣ три индекса. Эти индексы могутъ быть найдены также изъ соотношенія зонъ, т. к. $\frac{l}{k}$ и $\frac{k}{h}$ опредѣляютъ символы пирамидальнаго куба и икоситетраэдра, притупляющихъ среднія и длинныя ребра $\{hkl\}$; въ точкахъ пересѣченія соотвѣтствующихъ зональныхъ круговъ находятся полюсы $\{hkl\}$, индексы которыхъ этимъ и опредѣляются.

Допустимъ для примѣра, что уголъ $A = 149^0$, а уголъ $A^1 = 158^0$; отсюда слѣдуетъ, что

$$a = 15^0\,30' \text{ и } a^1 = 11^0$$

$$cotg\, A = \frac{\sin 11^0}{\sin 45^0 \sin 15^0 30'} + 1$$

$$\begin{aligned} \log \sin 11^0 &= \bar{1},2805988 \\ -\log \sin 45^0 &= 0,1505150 \\ -\log \sin 15^0\,30' &= 0,5731012 \\ \hline & \phantom{=}\ 0,0042150 \end{aligned}$$

Этому логариѳму соотвѣтствуетъ число 1,0097.

Слѣд.

$$cotg\, A = 2,0097$$

и

$$\frac{l}{k} = \frac{1}{2,0097} \text{ или } \frac{1}{2}.$$

Треугольникъ 001-213-302 даетъ:

$$\sin 001\text{-}302 = \frac{tg\, a}{tg\, A} = 2\, tg\, 15^0\,30'$$

$$\begin{aligned} \log \sin 001\text{-}302 = \log 2 &= 0,3010300 \\ +\log tg\, 15^0\,30' &= \bar{1},4429883 \\ \hline \log \sin 001\text{-}302 &= \bar{1},7440183 \\ \log tg\, 001\text{-}302 &= \bar{1},8238438 \end{aligned}$$

$$tg\, 001\text{-}302 = \frac{k}{h} = 0,66657 \text{ или } \frac{2}{3}.$$

$$\text{Если } \frac{k}{h} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{l}{k} = \frac{1}{2}, \text{ то } h = 3,\ k = 2,\ l = 1.$$

Слѣд. символъ сорокавосьмигранника — $\{321\}$.

II. **Даны уголъ средняго и уголъ короткаго реберъ.** Въ этомъ случаѣ вычисленіе проще. Извѣстны дуги 213-203 и 525-213, равная половинѣ 213-312. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, возьмемъ прямоугольные треугольники 203-213-101 и 525-213-101, имѣющихъ общую гипотенузу 101-213. Обозначимъ эту гипотенузу черезъ $c$, уголъ, противолежащій дугѣ 213-203 $= a$ черезъ $A$, а уголъ, противолежащій дугѣ 525-213 $= a^1$ черезъ $A^1$. Мы имѣемъ:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a^1}{\sin A^1}$$

или

$$\frac{\sin A}{\sin A^1} = \frac{\sin a}{\sin a^1};$$

но

$$A + A^1 = 90^0,$$

откуда

$$\operatorname{cotg} A^1 = \frac{\sin a}{\sin a^1}.$$

Такимъ образомъ опредѣлены оба треугольника, а слѣд. и дуги 101-203 и 101-525. Мы знаемъ слѣд. символы пирамидальнаго куба и пирамидальнаго октаэдра, притупляющихъ среднія и короткія ребра $\{hkl\}$, и можемъ отсюда вывести символъ сорокавосьмигранника.

III. **Даны уголъ длиннаго и уголъ короткаго реберъ.** Извѣстны дуги 213-112 $= a$ и 213-525 $= a^1$, образующія два прямоугольныхъ треугольника 213-112-111 и 213-525-111 съ общей гипотенузой 213-111 $= c$. Если обозначить черезъ $A$ и $A^1$ углы при 111, противолежащіе сторонамъ $a$ и $a^1$, то получится:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a^1}{\sin A^1}$$

или

$$\frac{\sin A}{\sin A^1} = \frac{\sin a}{\sin a^1};$$

но

$$A + A^1 = 60^0,$$

слѣд.

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin a^1}{\sin a \sin 60^0} + \frac{1}{2}.$$

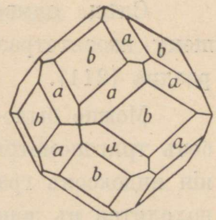
Величина $A$ даетъ возможность рѣшить оба треугольника, и слѣд. опредѣлить символы икоситетраэдра и пирамидальнаго октаэдра, притупляющихъ измѣренныя ребра; а этого, какъ мы уже знаемъ, достаточно для опредѣленія искомаго символа $\{hkl\}$.

## Примѣры.

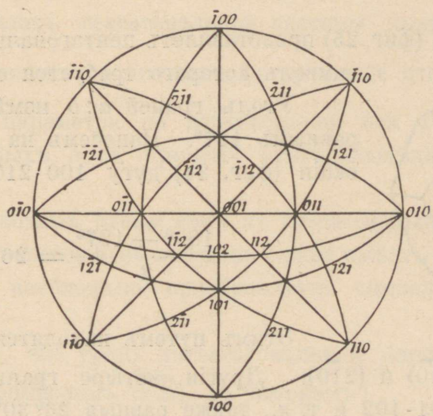
### Гранатъ (меланитъ).

Кристаллъ (фиг. 23), представляетъ комбинацію ромбическаго додекаэдра и икоситетраэдра, символъ котораго требуется опредѣлить.

Нанесемъ на проекцію (фиг. 24) полюсы ромбическаго додекаэдра и проведемъ его зональные круги. Если обозначить грани ромбическаго додекаэдра черезъ $b$, а грани икоситетраэдра черезъ $a$, изъ фигуры непосредственно видно, что каждая грань $a$ находится въ одной зонѣ съ двумя смежными гранями $b$. Допустимъ, что измѣренный на гоніометрѣ уголъ $a : b = 150^0$. Если взять на большихъ кругахъ [101-011], [101-110] и [110-011] дуги равныя $180^0 - 150^0 = 30^0$, то будутъ найдены полюсы трехъ граней ико-



Фиг. 23.



Фиг. 24.

ситетраэдра, принадлежащихъ къ одному октанту; по симметріи непосредственно находятся и остальные полюсы.

**Вычисленіе символа икоситетраэдра.** Треугольникъ 101-112-001, у котораго уголъ при 112 прямой, даетъ

$$tg\,001\text{-}112 = tg\,001\text{-}101 \cos 001 =$$
$$= tg\,45^0 \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если провести большой кругъ [112 - 1$\bar{1}$2], треугольникъ 001-102-112, у котораго уголъ при 102 прямой, дастъ:

$$tg\,001\text{-}102 = tg\,001\text{-}112 \cos 001$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^0 = \frac{1}{2}$$

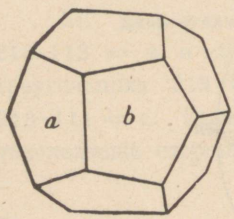
а потому $\frac{k}{h} = \frac{1}{2} \qquad k = 1 \qquad h = 2.$

Слѣд. символъ пирамидальнаго куба, соотвѣтствующаго нашему икоситетраэдру, будетъ $\{210\}$, а символъ самого икоситетраэдра $\{211\}$.

Можно было-бы непосредственно получить символъ грани (112) безъ тригонометрическихъ вычисленій, при помощи схемы вычисленія индексовъ грани изъ индексовъ зонъ, пользуясь тѣмъ, что она находится въ зонахъ [101-011] и [001-110].

## Пиритъ.

Кристаллъ (фиг. 25) представляетъ пентагональный додекаэдръ, символъ котораго требуется опредѣлить.



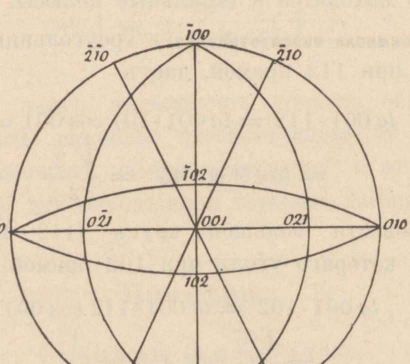
Фиг. 25.

Уголъ граней $a:b$ измѣренъ и найденъ равнымъ $127^0$. Нанесемъ на окружности проекціи (фиг. 24) дугу 100-210, равную

$$\frac{180^0 - 127^0}{2} = 26^0\,30'.$$

Этимъ путемъ находятся полюсы граней (210), $(\bar{2}10)$, $(\bar{2}\bar{1}0)$ и $(2\bar{1}0)$. Другія четыре грани мы получимъ, нанеся дуги 001-102 и т. д., также равныя $26^0\,30'$.

**Вычисленіе символа пентагональнаго додекаэдра.** Тангенсъ дуги 100-210 даетъ непосредственно отношеніе $\frac{k}{h}$.



Фиг. 26.

$$\log tg\, 100\text{-}210 = \log tg\, 26^0\, 30' = \overline{1},6977363$$

$$tg\, 100\text{-}210 = 0,49858 \text{ или } \frac{1}{2},$$

$$\text{слѣд.} \quad \frac{k}{h} = \frac{1}{2} \qquad h = 2 \qquad k = 1$$

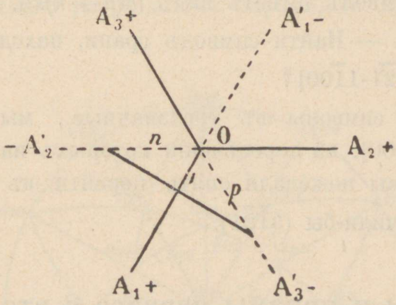
и искомый символъ $\pi$ (210).

## Гексагональная система.

Въ кристаллахъ гексагональной системы приходится опредѣлять, кромѣ символовъ различныхъ фигуръ, еще отношеніе осей $\frac{c}{a}$, т. е. отношеніе параметра по вертикальной оси къ параметру по одной изъ боковыхъ осей, причемъ этотъ послѣдній принимается за единицу.

Чтобы приложить схему зонъ къ гексагональной системѣ, гдѣ каждая грань по системѣ обозначенія Бравэ имѣетъ четыре индекса вмѣсто трехъ, необходимо преобразовать символы слѣдующимъ образомъ.

Мы знаемъ, что грань дигексагональной бипирамиды обозначается общимъ символомъ $(hi\overline{k}l)$, въ которомъ:




Фиг. 27.

$h$ относится къ боковой оси $A_1A'_1$, у которой полуось $OA_1$ считается положительной, а $OA_1'$ отрицательной (см. фиг. 27);

$i$ относится къ боковой оси $A_2A'_2$, у которой $OA_2$ положительная, а $OA_2'$ отрицательная полуось;

$k$ относится къ боковой оси $A_3A'_3$, причемъ $OA_3$ считается положительной, а $OA'_3$ отрицательной полуосью;

наконецъ $l$ означаетъ индексъ по вертикальной оси.

Между тремя индексами по боковымъ осямъ существуетъ соотношеніе:

$$h + i + k = 0.$$

Система обозначенія Бравэ чрезвычайно удобна, пока дѣло идетъ только о символахъ. Для вычисленія-же зонъ достаточныхъ трехъ индексовъ, относящихся къ тремъ независимымъ другъ отъ друга осямъ. За оси принимаютъ

1. Боковую ось $OA_1$;

2. Боковую ось $OA'_3$, причемъ въ данномъ случаѣ, обратно тому что указано выше, отрѣзокъ $OA'_3$ считается положительнымъ, а отрѣзокъ $OA_9$ отрицательиымъ;

3. Вертикальную ось.

Благодаря такому условію символъ $(hi\bar{k}l)$ превращается въ $(hkl)$; другими словами, вычеркиваютъ второй индексъ, а у третьяго измѣняютъ знакъ.

Если требуется перейти отъ символа $(hkl)$ къ символу $(hi\bar{k}l)$, измѣняютъ знакъ второй полуоси и вставляютъ $i$, выводя его изъ соотношенія

$$h + i + k = 0$$

откуда

$$i = -(h + k);$$

поэтому общій символъ имѣетъ видъ $[h(\overline{h+k})\bar{k}l]$.

Примѣръ. — Найти символъ грани, находящейся въ зонахъ $[2\bar{1}11\text{-}10\bar{1}0]$ и $[20\bar{2}1\text{-}1\bar{1}00]$?

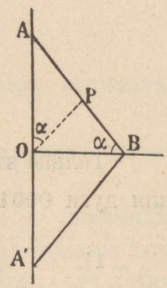
Превративъ символы въ трехзначные, мы получимъ зоны [211-110] и [221-100], на пересѣченіи которыхъ находится плоскость (321). Еслибъ мы пожелали опять перейти къ четырехзначному символу, то получили-бы $(3\bar{1}\bar{2}1)$.

## Пирамиды и призмы перваго и второго рода.

За плоскость проекціи принимается главная плоскость симметріи. Слѣд, на окружности проекціи расположатся полюсы всѣхъ призмъ; положеніе полюсовъ призмъ перваго и второго рода въ частиости опредѣляется тѣмъ, что они отстоятъ другъ отъ друга на $60^0$ или $30^0$. Въ центрѣ проекціи находится полюсъ базокинаконда (0001). Полюсы пирамидъ перваго и второго рода расположатся на діаметрахъ, соединяющихъ центръ съ полюсами соотвѣтствующихъ призмъ. Чтобы найти полюсъ призмы, достаточно знать его разстоянiе отъ полюса базокинаконда, т. е. наклонъ одной изъ граней пирамиды относительно вертикальной оси. Этотъ уголъ $\alpha$ (если OP нормаль къ AB, т. е. къ линiи наибольшаго уклона грани пирамиды) равняется половинѣ базальнаго угла пирамиды, ABA'.

Если измѣренъ этотъ уголъ, то, можно нанести полюсы пирамиды на шесть дiаметровъ, соотвѣтствующихъ зонѣ данной пирамиды, отложивъ на этихъ дiаметрахъ дуги $0001\text{-}10\bar{1}1 = \alpha$ (см. фиг. 26).

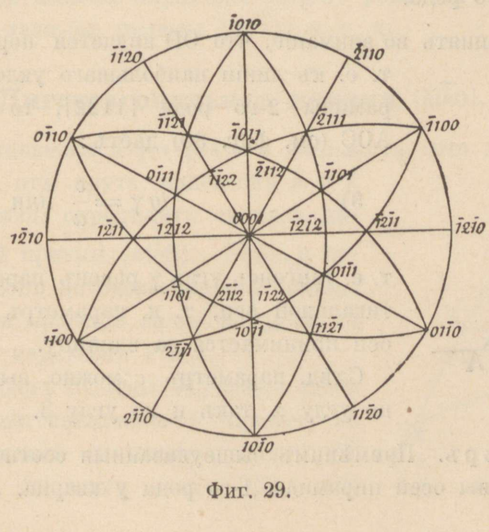
Если черезъ двѣ сосѣднiя грани пирамиды перваго рода провести зональные круги къ двумъ противоположнымъ полюсамъ призмы 1-го рода, то тамъ, гдѣ эти зоны пересѣкутъ дiаметры, соединяющiе противолежащiе полюсы призмы 2-го рода, находятся полюсы пирамиды 2-го рода ($11\bar{2}2$), прямо притупляющей ребра пирамиды 1-го рода.



Фиг. 28.

У каждой пирамиды 1-го или 2-го рода имѣется два рода гранныхъ угловъ: базальныя и вершинныя ребра. Достаточно измѣрить одинъ изъ угловъ, т. к. второй находится вычисленiемъ.

Если извѣстенъ базальный уголъ $2\alpha$ пирамиды 1-го рода, можно вычислить дугу $10\bar{1}1\text{-}11\bar{2}2 = \beta$, т. е. половину внѣшняго угла вершиннаго ребра данной пирамиды. Для этого служитъ



Фиг. 29.

прямоугольный треугольникъ $0001 - 10\bar{1}1 - 11\bar{2}2$, у котораго уголъ при 0001 равенъ $30^0$:

$$\sin 10\bar{1}1\text{-}11\bar{2}2 = \sin 0001\text{-}10\bar{1}1 \sin 30^0$$

или

$$\sin\beta = \sin\alpha \,.\, \sin 30^0.$$

Еслибъ имѣлся обратный случай. т. е. измѣренъ былъ-бы уголъ вершиннаго ребра, и требовалось-бы найти уголъ базальнаго ребра, тотъ-же треугольникъ далъ-бы для этого послѣдняго:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin 30^0}.$$

## Вычисленіе осей.

Только что разсмотрѣнный прямоугольный треугольникъ даетъ для дуги $0001 - 11\bar{2}2 = \gamma$

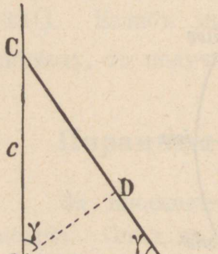
1) $$tg\,\gamma = tg\,\alpha \cos 30^0$$

и

2) $$\sin\gamma = \frac{tg\,\beta}{tg 30^0},$$

смотря потому, измѣренъ-ли базальный, или вершинный уголъ пирамиды 1-го рода.

Если принять во вниманіе, что OD является нормалью къ AC, т. е. къ линіи наибольшаго уклона грани пирамиды 2-го рода $\{11\bar{2}2\}$, то треугольникъ AOC (см. фиг. 30) даетъ:



Фиг. 30.

3) $$tg\,\gamma = \frac{c}{a} \text{ или } c,$$

т. е. тангенсъ угла $\gamma$ равенъ параметру по вертикальной оси, т. к. параметръ $a$ по боковой оси принимается за единицу.

Слѣд. параметръ $c$ можно вычислить какъ по углу $\alpha$, такъ и по углу $\beta$.

Примѣръ. Примѣнимъ вышеуказанныя соотношенія къ вычисленію длины осей пирамиды 1-го рода у кварца.

Уголъ базальнаго ребра $= 103^0\,34'$; $\alpha = 51^0\,47'$

$$c = tg\,51^0\,47'\cos 30^0$$

$$\log tg\,51^0 47' = 0{,}1038082$$

$$\log\cos 30^0 = \bar{1}{,}9375306$$

$$\log c = 0.0413388$$

$$c = 1{,}0999.$$

Уголъ вершиннаго ребра $= 133^0\,44'$; $\beta = 23^0\,8'$

$$\sin\gamma = \frac{tg\,23^0\,8'}{tg\,30^0}$$

$$\log tg\,23^0\,8' = \bar{1}.6306556$$

$$-\log tg\,30^0 = 0.2385606$$

$$\log\sin\gamma = \bar{1}.8692162$$

$$\log tg\,\gamma = \log c = 0.0414150$$

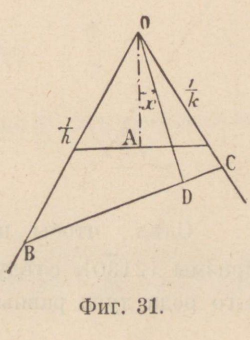
$c = 1.1000$, т. е. таже величина, которая вычислена по углу $\alpha$.

Наоборотъ, зная параметры пирамиды 1-го рода, легко вычислить ея углы.

На проекціи фиг. 29 зональные круги призмы и пирамиды 1-го рода пересѣкаютъ діаметры, соединяющіе полюсы призмы 2-го рода $\{11\bar{2}1\}$. Если мы проведемъ зональные круги $[1\bar{1}00 - 11\bar{2}1 - \bar{1}100]$ и другіе ему соотвѣтствующіе, то получимъ въ точкахъ ихъ пересѣченія съ боковыми осями полюсы пирамиды 1-го рода $\{20\bar{2}1\}$, имѣющія вдвое бо́льшіе параметры по вертикальной оси, чѣмъ основная пирамида. Зональные круги, проведенные черезъ полюсы $\{20\bar{2}1\}$ дали-бы полюсы пирамиды второго рода $\{22\bar{4}1\}$, которые въ свою очередь дали-бы полюсы $\{40\bar{4}1\}$ и т. д.

## Дигексагональная призма $\{hi\bar{k}0\}$.

Изъ соотношенія $h + i + k = o$ вытекаетъ, что двухъ независимыхъ другъ отъ друта индексовъ $h$ и $k$ достаточно, чтобы опредѣлить символъ дигексагональной призмы $\{hi\bar{k}0\}$. Слѣд. и положеніе полюсовъ дигексагональной призмы на окружности проекціи является функціей отъ величины индексовъ $h$ и $k$.



Фиг. 31.

Пусть будетъ BC (фиг. 31) слѣдъ одной изъ граней дигексагональной призмы на главной плоскости симметріи. Линія BC отсѣкаетъ на боковыхъ осяхъ OB и OC отрѣзки $\frac{1}{h}$ и $\frac{1}{k}$. Положеніе полюса на проекціи опредѣляется угломъ AOD $= x$, если OD нормаль къ BC. Треугольники OBD и ODC даютъ:

$$\mathrm{OD} = \frac{1}{h} \cos(30^0 + x)$$

$$\mathrm{OD} = \frac{1}{k} \cos(30^0 - x),$$

откуда

$$\frac{1}{h} (\cos 30^0 \cos x - \sin 30^0 \sin x) = \frac{1}{k} (\cos 30^0 \cos x + \sin 30^0 \sin x),$$

или

$$\cos 30^0 \cos x \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{k}\right) = \sin 30^0 \sin x \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\right),$$

или

$$\operatorname{cotg} 30^0 \operatorname{cotg} x = \frac{\frac{1}{h} + \frac{1}{k}}{\frac{1}{h} - \frac{1}{k}},$$

или, наконецъ

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\frac{1}{h} + \frac{1}{k}}{\frac{1}{h} - \frac{1}{k}} \, tg\, 30^0.$$

Если взять для примѣра дигексагональную призму $\{21\bar{3}0\}$, то

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \, tg\, 30^0 = 5\, \mathrm{tg}\, 30^0$$

$$\begin{aligned} \log 5 &= 0.6989700 \\ + \log tg\, 30^0 &= \underline{1.7614394} \\ \log \operatorname{cotg} x &= 0.4604094 \\ x &= 19^0\, 6'\, 20'' \end{aligned}$$

Слѣд., чтобы найти на проекціи полюсы дигексагональной призмы $\{21\bar{3}0\}$, слѣдуетъ отложить по обѣ стороны полюсовъ призмы 1-го рода дуги равныя $x$.

### Вычисленіе угловъ.

Изъ величины $x$ непосредственно вытекаетъ, что двугранный уголъ призмы $\{21\overline{3}0\}$, соотвѣтствующій промежуточнымъ осямъ [1]), равенъ

$$180^0 - 2 \times 19^0\, 6'\, 20'' = 141^0\, 7'\, 20''.$$

Уголъ, соотвѣтствующій боковымъ осямъ, равенъ

$$180^0 - 2\,(30^0 - 19\, 6'\, 20'') = 158^0\, 12'\, 40''.$$

### Вычисленіе индексовъ.

Изъ найденнаго нами выше значенія для $cotg\, x$, вытекаетъ:

$$\frac{h}{k} = \frac{cogt\, x\, cotg\, 30^0 - 1}{cotg\, x\, cotg\, 30^0 + 1}.$$

Так. обр., если извѣстенъ одинъ изъ угловъ дигексагональной призмы, можно вычислить отношепіе $\frac{h}{k}$, а слѣд. и символъ данной призмы.

Примѣръ. Бериллъ. Измѣренъ уголъ, соотвѣтствующій промежуточнымъ осямъ и равный $133^0\, 54'$; слѣд. $x = 23^0\, 4'$:

$$\frac{h}{k} = \frac{cotg\, 23^0\, 4'\, cotg\, 30^0 - 1}{cotg\, 23^0\, 4'\, cotg\, 30^0 + 1}$$

$$\begin{aligned} \log cotg\, 23^0\, 4' &= 0.3707447 \\ + \log cotg\, 30^0 &= \underline{0.2385606} \\ & \phantom{=}\ 0.6093053 \end{aligned}$$

Этому логариѳму соотвѣтствуетъ число 4.0673:

$$\frac{h}{k} = \frac{4.0673 - 1}{4.0673 + 1} = \frac{3.0673}{5.0673}, \qquad \text{или} \qquad \frac{3}{5}.$$

Отсюда $h = 3$, $k$, 5, а слѣд. $i = 2$ и символъ дигексагональной призмы $\{32\overline{5}0\}$.

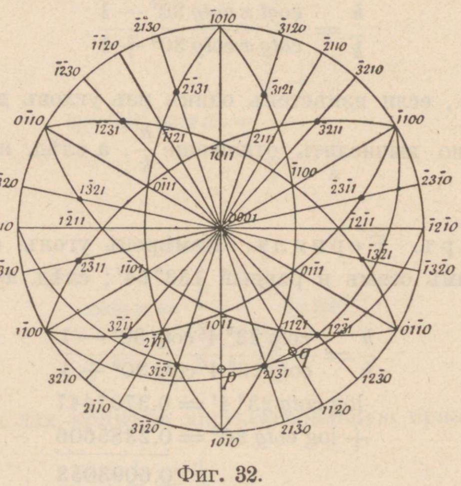
---

1) Промежуточными осями будемъ называть тѣ вспомогательныя оси, которыя дѣлятъ пополамъ углы между боковыми осями $A_1A_1'$, $A_2A_2'$, $A_3A_3'$, изображенными на фиг. 27.

## Дигексагональная пирамида $\{hi\bar{k}l\}$.

Остановимся для примѣра на вычисленіи простѣйшей формы $\{21\bar{3}1\}$. Полюсъ грани $\{21\bar{3}1\}$ находится на пересѣченіи двухъ зональныхъ круговъ $[0001\text{-}21\bar{3}0]$ и $[10\bar{1}0\text{-}11\bar{2}1]$. Положеніе остальныхъ полюсовъ опредѣляется симметріей фигуры.

Если мы будемъ разсматривать три сосѣднія грани напр. $(\bar{3}\bar{1}21)$, $(21\bar{3}1)$ и $(12\bar{3}1)$, то окажется, что зональный кругъ $[3\bar{1}\bar{2}1\text{-}21\bar{3}1]$ встрѣчаетъ діаметръ $[0001\text{-}10\bar{1}0]$ въ тбчкѣ $p$, а зональный кругъ $[21\bar{3}1\text{-}12\bar{3}1]$ пересѣкаетъ діаметръ $[0001\text{-}11\bar{2}0]$ въ точки $q$ (фиг. 32). Точка $p$ есть полюсь пирамиды 1-го рода, притупляющей вершинныя ребра фигуры $\{21\bar{3}1\}$, соотвѣтствующія промежуточнымъ осямъ. Схема зонъ даетъ для этой пирамиды символъ $\{50\bar{5}2\}$; другими словами



Фиг. 32.

параметръ по вертикальной оси равенъ отношенію осей основной пирамиды, помноженному на $\frac{5}{2}$. Точно также точка $q$ являегся полюсомъ пирамиды 2-го рода, притупляющей вершинныя ребра, соотвѣтствующія боковымъ осямъ. Ея символъ $\{33\bar{6}2\}$ и парамеръ по вертикальной оси въ три раза больше отношенія осей $c$ основной пирамиды.

Зная символъ дигексагональной пирамиды, нетрудно, какъ мы видѣли, вычислить символы двухъ пирамидъ $p$ и $q$, притупляющихъ оба рода вершинныхъ реберъ данной дигексагональной пирамиды. Слѣд., если мы нанесемъ на проекцію полюсы обѣихъ пирамидъ

$p$ и $q$ и дигексагональной призмы, соотвѣтствующей данной дигексагональной пирамидѣ, и если мы проведемъ соотвѣтственные зональные круги, полюсы данной пирамиды расположатся въ точкахъ пересѣченія зональныхъ круговъ пирамидъ $p$ и $q$ нли въ точкахъ пересѣченія зональныхъ круговъ одной изъ нихъ и дигексагональной призмы.

### Вычисленіе угловъ.

Дуга $21\overline{3}0$-$10\overline{1}0$ равна углу при 0001 въ прямоугольномъ треугольникѣ 0001-$p$-$21\overline{3}1$, а дополненіе къ нему до $30^0$, т. е. дуга $21\overline{3}0$-$11\overline{2}0$, равно углу при 0001 въ прямоугольномъ треугольникѣ $21\overline{3}1$-$q$-0001. Кромѣ того извѣстны стороны 0001-$p$ и 0001-$q$. Слѣд. можно вычислить стороны $21\overline{3}1$-$p$, $21\overline{3}1$-$q$ и $21\overline{3}1$-0001. Первыя двѣ будутъ половиною дополненій къ угламъ вершинныхъ реберъ дигексагональной пирамиды $\{21\overline{3}1\}$, послѣдняя — половина базальнаго угла этой пирамиды.

### Вычисленіе индексовъ и длины осей.

Для вычисленій мы воспользуемся тѣми-же прямоугольными треугольниками, но въ обратномъ порядкѣ.

Пусть оба угла вершинныхъ реберъ будутъ

$$a = 21\overline{3}1\text{-}p$$
$$a' = 21\overline{3}1\text{-}q$$

Обозначивъ углы при 0001, противолежащіе дугамъ $a$ и $a'$ черезъ A и A$'$, получимъ:

$$\frac{\sin A}{\sin A'} = \frac{\sin a}{\sin a'};$$

но

$$A' = 30^0 - A$$

слѣд.

$$\operatorname{cotg} A = \frac{2 \sin a'}{\sin a} + \sqrt{3}$$

Величина A, найденная этимъ путемъ, равна дугѣ $10\overline{1}0$-$21\overline{3}0$ (вообще говоря $10\overline{1}0$-$hi\overline{k}0$). Этотъ уголъ и служитъ для вычисленія отношенія $\frac{h}{k}$.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ 0001-$q$-$21\bar{3}1$ извѣстны уголъ при 0001, равный $30^0$-A, и дуга $21\bar{3}1$-$q = a'$. Вычислимъ сторону 0001-$q$. Тангенсъ этой дуги равенъ длинѣ параметра по вертикальной оси $c'$ у пирамиды 2-го рода $q$. Если кристалъ состоитъ изъ пирамиды 1-го рода, принятой за основную и у которой вычислено отношенiе осей $c$, и изъ дигексагональной пирамиды, то отношенiе $\frac{c'}{c}$ будетъ равно $\frac{k}{h}$. Еслибъ кристаллъ состоялъ только изъ дигексагональной пирамиды и не была-бы извѣстна длина осей для даннаго вещества, то не было-бы никакого основанiя принимать $l$ отличнымъ отъ 1. Въ такомъ случаѣ мы имѣли-бы:

$$k = \frac{c'}{c}, \qquad \text{откуда} \qquad c = \frac{c'}{k}.$$

Такимъ образомъ получается длина осей для дигексагональной пирамиды.

Вычисленiе упрощается, если измѣрены уголъ вершиннаго ребра и уголъ базальнаго ребра. Половина угла базальнаго ребра равна дугѣ 0001-$21\bar{3}1$ (вообще 0001-$hi\bar{k}l$). Эта дуга образуетъ съ 0001-$p$ и съ половиною измѣреннаго вершиннаго ребра, напр. $p$-$21\bar{3}1$, прямоугольный треугольникъ, изъ котораго вычисляютъ сторону 0001-$p$ и уголъ при 0001. Этотъ уголъ при 0001, который мы обозначили черезъ A, даетъ отношенiе $\frac{h}{k}$. Сторона 0001-$p$ даетъ символъ $\{h0\bar{h}l\}$ пирамиды 1-го рода $p$, т. е. $\frac{h}{k}$ равно отношенiю длины осей пирамиды $p$ и отношенiю осей даннаго вещества.

Дигексагональная пирамида находится на пересѣченiи двухъ извѣстныхъ зонъ [$p$-$\bar{1}210$] и [0001-$hi\bar{k}0$]; слѣд. ея символъ извѣстенъ.

П р и м ѣ р ъ. Б е р и л л ъ. Измѣрены оба вершинныхъ угла дигексагональной пирамиды.

Уголъ ребра, соотвѣтствующаго промежуточнымъ осямъ $= 148^0\,14'$
„ „ „ боковымъ осямъ $= 161^0\,49'$

$$a = 15^0\,52' \qquad a' = 9^0\,5'\,30''$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{2\sin 9^0\,5'\,30''}{\sin 15^0\,52'} + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0.3010300\\
\log\sin 9^0\,5'\,30'' &= \bar{1}.1986968\\
-\log\sin 15^0\,52' &= \underline{0.5632020}\\
&\phantom{=} 0.0629388
\end{aligned}$$

Этому логариөму соотвѣтствуетъ число 1.1559,

$$\begin{aligned}
\cot g\,A &= 1.1559 + \sqrt{3} = 2.8879\\
\log \cot g\,A &= 0.4605882\\
A &= 19^0\,6'\\
\frac{h}{k} &= \frac{\cot g\,19^0\,6'\cot g\,30^0 - 1}{\cot g\,19^0\,6'\cot g\,30^0 + 1}\\
\log \cot g\,19^0\,6' &= 0.4605822\\
+\log \cot g\,30^0 &= \underline{0.2385606}\\
& \phantom{=}\ 0.6991428
\end{aligned}$$

Этому соотвѣтствуетъ число 5.0002

$$\frac{h}{k} = \frac{5.0002 - 1}{5.0002 + 1} = \frac{4.0002}{6.0002} \quad \text{или} \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

слѣд.

$$h = 2 \qquad k = 3$$

Такъ какъ на кристаллѣ есть только дигексагональная пирамида, мы примемъ $l = 1$ и символъ будетъ $\{21\bar{3}1\}$.

Мы имѣемъ

$$A' = 30^0 - 19^0\,6' = 10^0\,54'$$

Прямоугольный треугольникъ $0001\text{-}q\text{-}21\bar{3}1$ даетъ

$$\begin{aligned}
\sin 0001\text{-}q &= \frac{tg\,9^0\,50'\,30''}{tg\,10^0\,54'}\\
\log tg\,9^0\,50'\,30'' &= 1.2041875\\
-\log tg\,10^0\,54' &= \underline{0.7154122}\\
& \phantom{=}\ \bar{1},9195997\\
0001\text{-}q &= 56^0\,12'\\
c' &= tg\,56^0\,12'\\
\log tg\,56^0\,12' &= 0,1742873\\
c' &= 1,4937\\
c = \frac{c'}{k} &= \frac{1,4937}{3} = 0,4979.
\end{aligned}$$

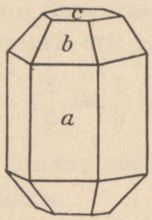
Отношеніе осей равно $c = 0,4979$.

## Примѣры.

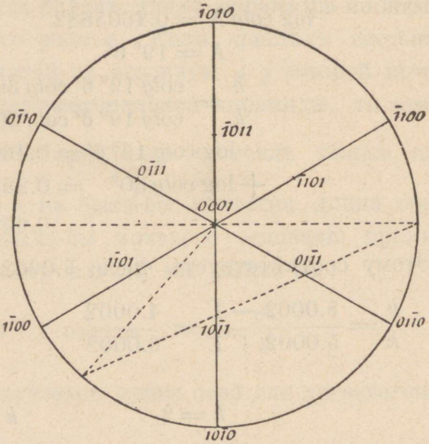
### Апатитъ.

Кристаллъ (фиг. 33) состоитъ изъ пирамиды 1-го рода, призмы 1-го рода и базопинакоида. Шесть діаметровъ, отстоящихъ на $60^0$

другъ отъ друга даютъ полюсы призмы 1-го рода. Если уголъ двухъ граней *a* и *b* равенъ $130^0\,18'$, мы нанесемъ по извѣстному




Фиг. 33.



Фиг. 34.

уже способу на діаметръ [$10\bar{1}0$-0001] дополненіе къ этому углу, т. е. дугу въ $49^0\,42'$. Такимъ путемъ получатся шесть полюсовъ пирамиды 1-го рода (фиг. 34).

### Вычисленіе длины осей.

$$0001\text{-}10\bar{1}1 = \gamma = 90^0 - 49^0\,42' = 40^0\,18'$$

$$tg\,\gamma = c = tg\,40^0\,18' \cos 30^0$$

$$\log tg\,40^0\,18' = 1{,}9284701$$

$$+ \log \cos 30^0 \quad = \underline{1{,}9375306}$$

$$\bar{1}{,}8660007$$

$$c = 0{,}7346.$$

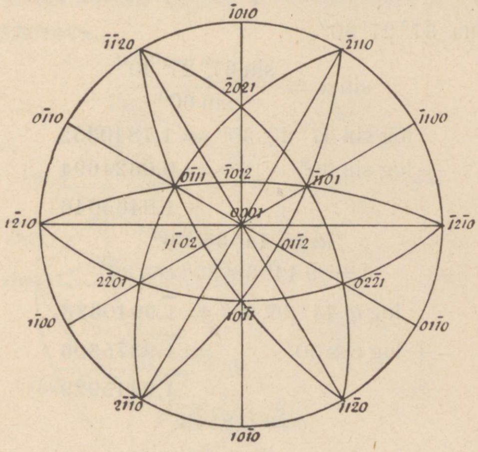
## Тригональная система.

### Ромбоэдръ.

Плоскостью проекціи служитъ базальное сѣченіе.

Въ стереографической проекціи полногранныхъ формъ гексагональной системы всѣ шесть радіусовъ, соотвѣтствующихъ боковымъ осямъ, были равнозначны. Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ этой равнозначности уже нѣтъ. Три радіуса, отстоящихъ другъ отъ друга на 120° и соединяющихъ центръ съ точками $10\bar{1}0$, $\bar{1}100$ и $0\bar{1}10$, содержатъ полюсы положительныхъ ромбоэдровъ (см. фиг. 35), три остальныхъ радіуса содержатъ полюсы отрицательныхъ ромбоэдровъ.

Положеніе каждаго ромбоэдра на проекціи, напр. $(10\bar{1}1)$, опредѣляется наклономъ грани ромбоэдра къ вертикальной оси, т. е. дугой $10\bar{1}1$-$0001 = \alpha$. Этотъ уголъ можно вычислить по углу вершинныхъ реберъ ромбоэдра. Дуга большого круга $[10\bar{1}1$-$\bar{1}101]$ пересѣкаетъ радіусъ $[0001$-$0\bar{1}10]$ въ точкѣ $01\bar{1}2$. Дуга $10\bar{1}1$-$01\bar{1}2$ равна половинѣ внѣшняго угла вершиннаго ребра ромбоэдра. Въ прямоугольномъ треугольникѣ $0001$-$10\bar{1}1$-$01\bar{1}2$, въ которомъ уголъ




Фиг. 35.

при $01\bar{1}2$ прямой, мы имѣемъ:

$$\sin\alpha = \frac{\sin 10\bar{1}1\text{-}01\bar{1}2}{\sin 60^0}.$$

По этой-же формулѣ можно и обратно вычислить уголъ вершиннаго ребра, если извѣстенъ наклонъ грани ромбоэдра къ вертикальной оси.

### Вычисленіе длины осей.

Большой кругъ $[1\bar{1}00$-$10\bar{1}1$-$\bar{1}100]$ пересѣкаетъ діаметръ $[0001$-$11\bar{2}0]$ въ точкѣ $11\bar{2}2$ [1]); прямоугольный треугольникъ $0001$-$10\bar{1}1$-$11\bar{2}2$ даетъ:

$$tg\, 0001\text{-}11\bar{2}2 = tg\,\alpha \cos 30^0.$$

---

1) Ни кругъ, ни точка $11\bar{2}2$ не нанесены на проекцію.

На стр. 42 въ гексагональной системѣ мы видѣли, что

$$tg\,0001\text{-}1122 = c,$$

т. е. отношенію длины осей кристалла.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$c = tg\,\alpha \cos 30^0.$$

Очевидно, что измѣреніе угла срединныхъ реберъ привело-бы къ тому-же результату, т. к. углы ромбоэдра дополняютъ другъ друга до 180⁰.

Примѣръ. Основной ромбоэдръ известковаго шпата. Уголъ вершиннаго ребра равенъ $105^0\,5'$, слѣд. дуга $10\bar{1}1\text{-}01\bar{1}2$ равна $37^0\,27'\,30''$.

$$\sin\alpha = \frac{\sin 37^0\,27'\,30''}{\sin 60^0}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 37^0\,27'\,30'' &= 1{,}7840352 \\ -\log\sin 60^0 &= 0{,}0624694 \\ \hline &\phantom{=}\ 1{,}8465046 \end{aligned}$$

$$\alpha = 44^0\,36'\,30''$$

$$c = tg\,44^0\,36'\,30'' \cos 30^0$$

$$\begin{aligned} \log tg\,44^0\,36'\,30'' &= \bar{1}{,}9940623 \\ +\log\cos 30^0 &= \bar{1}{,}9375306 \\ \hline &\phantom{=}\ \bar{1}{,}9315929 \end{aligned}$$

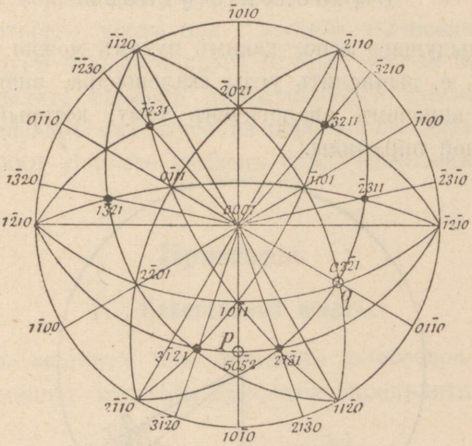
$$c = 0{,}8543.$$

## Скаленоэдръ.

Такъ какъ скаленоэдръ является геміэдрической формой дигексагональной пирамиды, то къ нему примѣнимъ методъ, описанный для дигексагональной пирамиды.

Задача вычисленія индексовъ скаленоэдра представляетъ нѣсколько случаевъ. Простѣйшимъ является тотъ, когда скаленоэдръ образуетъ комбинацію съ соотвѣтствующимъ ромбоэдромъ, притупляющимъ среднія ребра. Если измѣренъ уголъ ромбоэдра, то этимъ опредѣляется и самый ромбоэдръ. Положимъ, что полюсы ромбоэдра (фиг. 36) находятся въ $(10\bar{1}1)$, $(\bar{1}101)$ и $(0\bar{1}11)$. Грань скаленоэдра $(21\bar{3}1)$ — или вообще говоря — $(hikl)$ — находится въ извѣстной зонѣ $[10\bar{1}1\text{-}11\bar{2}0]$. Отложивъ уголъ между обѣими фигурами на дугѣ $10\bar{1}1\text{-}11\bar{2}0$, мы найдемъ одинъ изъ полюсовъ скаленоэдра, а слѣд. по симметріи и остальные.

Зональный кругъ, соотвѣтствующій тупымъ ребрамъ скаленоэдра [21$\bar{3}$1-312$\bar{1}$] пересѣкаетъ діаметръ [0001-10$\bar{1}$0] въ точкѣ $p$, которая есть полюсъ ромбоэдра, притупляющаго тупыя вершинныя ребра скаленоэдра. Изъ прямоугольнаго треугольника 10$\bar{1}$1-10$\bar{1}$0-11$\bar{2}$0 вычисляютъ уголъ при 10$\bar{1}$1, который принадлежитъ также треугольнику 10$\bar{1}$1-$p$-21$\bar{3}$1. Въ этомъ послѣднемъ треугольникѣ вычисляютъ сторону 10$\bar{1}$1-$p$, которая даетъ символъ ромбоэдра $p$ и дугу $p$-21$\bar{3}$1, т. е. половину дополненія къ углу тупыхъ вершинныхъ реберъ скаленоэдра. Эти двѣ величины даютъ возможность вычислить въ треугольникѣ 0001-$p$-2$\bar{1}$31, уголъ при 0001, т. е. символъ дигексагональной призмы, соотвѣтствующей скаленоэдру. Такъ какъ грань находится на пересѣченіи двухъ зонъ [$p$-$\bar{1}$2$\bar{1}$0] и [0001-21$\bar{3}$0], то символъ ея извѣстенъ.



Фиг. 36.

Еслибы имѣлся одинъ только скаленоэдръ, то его символъ можно было-бы вычислить по угламъ его реберъ. Такъ, еслибы были измѣрены оба угла вершинныхъ реберъ, половины дополненій къ нимъ соотвѣтствовали-бы дугамъ между гранью скаленоэдра и двумя гранями ромбоэдровъ, притупляющихъ длинныя и короткія ребра скаленоэдра, напр. дуги $a = 21\bar{3}1\text{-}p$ и $a' = 21\bar{3}1\text{-}q$. При помощи двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, образованныхъ этими двумя дугами съ 0001, можно вычислить (такъ-же какъ и въ случаѣ дигексагональной пирамиды) оба угла при 0001, сумма которыхъ равна 60°.

Дѣйствительно

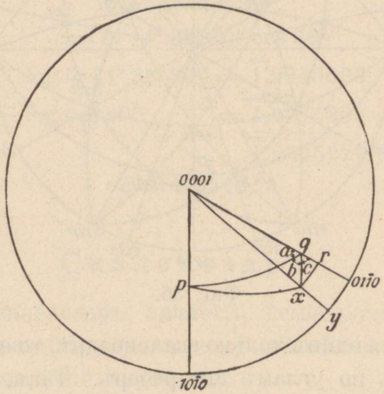
$$\cot g\, 10\bar{1}0 = \frac{\sin a'}{\sin a \sin 60^0} + \frac{1}{2 \sin 60^0}.$$

Можно кромѣ того вычислить дуги 0001-$p$ и 0001-$q$, или символы обоихъ ромбоэдровъ $p$ и $q$. Отсюда выводится символъ скаленоэдра.

Еслибы были даны уголъ вершиннаго ребра, напр. $50\bar{5}2\text{-}21\bar{3}1 = a$ и уголъ зигзагообразныхъ реберъ, то мы имѣли-бы половину дополненія къ этому послѣднему, равную дугѣ $21\bar{3}1\text{-}11\bar{2}0$. Въ треугольникѣ $21\bar{3}1\text{-}\bar{1}2\bar{1}0\text{-}11\bar{2}0$ извѣстны три стороны. Вычислимъ уголъ при $\bar{1}2\bar{1}0$, равный дугѣ $0001\text{-}50\bar{5}2$, опредѣляющей длину главной оси для ромбоэдра $p$, т. е. символъ этого послѣдняго. Въ треугольникѣ $p\text{-}0001\text{-}21\bar{3}1$ вычислимъ уголъ при 0001, равный дугѣ $10\bar{1}0\text{-}21\bar{3}0$, который и дастъ символъ дигексагональной прпзмы $\{21\bar{3}0\}$, или вообще говоря $\{hi\bar{k}0\}$. Слѣд. символъ скаленоэдра извѣстенъ.

## Вычисленіе угловъ.

Изъ прсдыдущаго ясно, какимъ путемъ можно рѣшать обратную задачу, т. е. вычислить углы скаленоэдра, зная его символъ. Этотъ методъ впрочемъ аналогиченъ тому, который описанъ для дигексагональной пирамиды.




Фиг. 37.

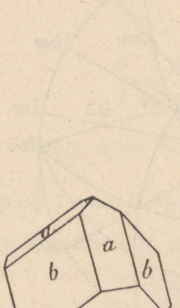
Мы уже видѣли, что обѣ категоріи вершинныхъ реберъ скаленоэдра притупляются двумя ромбоэдрами $p$ и $q$, символы которыхъ выводятся изъ символа скаленоэдра. Можно вычислить обѣ дуги $21\bar{3}1\text{-}p$ и $21\bar{3}1\text{-}q$, которыя являются половиною дополненій угловъ длинныхъ и короткихъ реберъ. Уголъ среднихъ реберъ, половина дополненія къ которому есть дуга $21\bar{3}0\text{-}11\bar{2}0$, можетъ быть вычисленъ изъ треугольника $21\bar{3}1\text{-}11\bar{2}0\text{-}21\bar{3}0$, въ которомъ уголъ при $11\bar{2}0$ и сторона $11\bar{2}0\text{-}21\bar{3}0$ опредѣляются при помощи символа скаленоэдра.

Положенiе какой-нибудь плоскости $x$ извѣстно, если данъ наклонъ ея къ двумъ извѣстнымъ гранямъ $p$ и $q$ (фиг. 37). Если измѣрены углы, образованные этой гранью $x$ съ гранями $p$ и $q$, то извѣстны три стороны сферическаго треугольника $pqx$: стороны $xp$ и $xq$ опредѣляются величиною угловъ грани $x$ съ гранями $p$ и $q$, сторона $pq$ опредѣляется символами ромбоэдровъ $p$ и $q$, т. е. дугами 0001-$p$ и 0001-$q$ и угломъ между ними, равнымъ $60^0$; въ треугольниѣ 0001-$p$-$q$ предварительно долженъ быть вычисленъ уголъ $a$. Треугольникъ $pqx$ даетъ уголъ $b$ и слѣд. $c = 180^0 - (a + b)$. Если провести черезъ $x$ зональный кругъ перпендикулярный къ дiаметру [0001-01$\bar{1}$0], получится сферическiй треугольникъ $xpr$, у котораго уголъ при $r$ прямой и въ которомъ извѣстны $qx$ и уголъ $c$; можно слѣд. вычислить стороны $qr$ и $xr$. Дуга $qr$ даетъ символъ ромбоэдра $r$, притупляющаго вершинныя ребра скаленоэдра $x$. Въ треугольникѣ 0001-$x$-$r$, у котораго уголъ при $r$ прямой, вычисляютъ уголъ при 0001, равный дугѣ большого круга 01$\bar{1}$0-$y$; отсюда получается возможность вычислить символъ дигексанальной призмы $y$. Такимъ образомъ скаленоэдръ находится на пересѣченiи двухъ извѣстныхъ зонъ [$x$-$r$] и [0001-$y$] и его символъ слѣд. извѣстенъ.

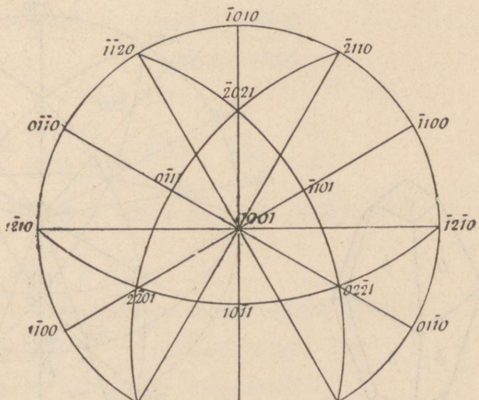
## Примѣры.

### 1. Известковый шпатъ.

Кристаллъ состоитъ изъ основного ромбоэдра $a$ и другого ромбоэдра $b$, символъ котораго требуется опредѣлить (фиг. 38).



Фиг. 38.


Фиг. 39.

Уголъ основнаго ромбоэдра $105^0\,5'$ и слѣд. длина вертикальнаго параметра, какъ было показано на стр. 52,

$$c = 0{,}8543.$$

У другого ромбоэдра (inverse) уголъ равенъ $78^0\,51'$:

$$\sin\alpha' = \frac{\sin 50^0\,34'\,30''}{\sin 60^0}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 50^0\,34'\,30'' &= \overline{1},8878741 \\ -\log\sin 60^0 &= 0{,}0624694 \\ &\overline{1},9503435 \end{aligned}$$

$$\alpha' = 63^0\,7'\,10''$$

$$c' = tg\,63^0\,7'\,10''\cos 30^0.$$

$$\begin{aligned} \log tg\,63^0\,7'\,10'' &= 0{,}2950757 \\ +\log\cos 30^0 &= \overline{1},9375306 \\ &0{,}2326063 \end{aligned}$$

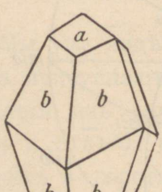
$$c' = 1{,}7084.$$

$$\frac{1}{m} = \frac{h}{l} = \frac{c'}{c} = \frac{1{,}7084}{0{,}8543} = 1{,}991 \quad \text{или} \quad 2;$$

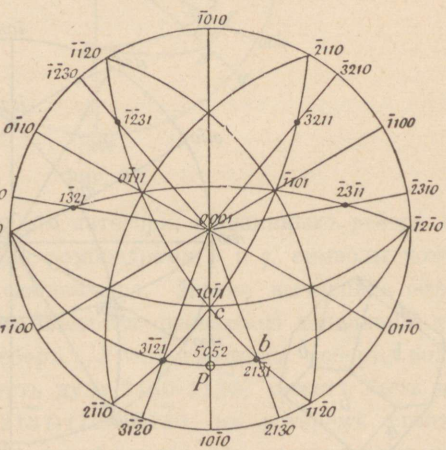
слѣд. $h = 2$, $l = 1$; символъ даннаго ромбоэдра $\{02\overline{2}1\}$.

## 2. Известковый шпатъ.

Кристаллъ состоитъ изъ скаленоэдра и ромбоэдра, соотвѣтствующаго тупымъ ребромъ (фиг. 40).




Фиг. 40.




Фиг. 41.

Уголъ ромбоэдра, какъ и выше, равенъ $105^0\,5'$, а параметръ $c = 0{,}8543$.

Уголъ двухъ граней $a$ и $b$ равенъ $151^0$; слѣд. дуга $10\bar{1}1$-$b$ $= 180^0 - 151^0 = 29^0$.

Треугольникъ $10\bar{1}1$-$10\bar{1}0$-$11\bar{2}0$ (фиг. 41):

$$tg\, 10\bar{1}1 = \frac{tg\, 10\bar{1}0\text{-}11\bar{2}0}{\sin 10\bar{1}0\text{-}10\bar{1}1} = \frac{tg\, 30^0}{\sin 45^0\, 33'\, 30''}$$

$$\begin{aligned} \log tg\, 30^0 &= \bar{1},7614394 \\ -\log \sin 45^0\, 33'\, 30'' &= 0,1463239 \\ &\overline{\bar{1},9077633} \end{aligned}$$

Уголъ при $10\bar{1}1 = 38^0\, 57'\, 40''$.

Треугольникъ $10\bar{1}1$-$p$-$b$:

$$tg\, 10\bar{1}1\text{-}p = tg\, 10\bar{1}1\text{-}b \cos 10\bar{1}1 = tg\, 29^0 \cos 38^0\, 57'\, 40''$$

$$\begin{aligned} \log tg\, 29^0 &= \bar{1},7437520 \\ +\log \cos 38^0\, 57'\, 40'' &= \bar{1},8907411 \\ &\overline{\bar{1},6344931} \end{aligned}$$

$$10\bar{1}1\text{-}p = 23^0\, 19'.$$

Вычисленіе символа ромбоэдра $p$.

$$0001\text{-}p = 0001\text{-}10\bar{1}1 + 10\bar{1}1\text{-}p = 67^0\, 55'\, 30''$$

$$c' = tg\, 67^0\, 55'\, 30'' \cos 30^0$$

$$\begin{aligned} \log tg\, 67^0\, 55'\, 30^0 &= 0,3919559 \\ +\log \cos 30^0 &= \bar{1},9375306 \\ &\overline{0,3394865} \end{aligned}$$

$$c' = 2{,}1852$$

$$\frac{h}{l} = \frac{c'}{c} = \frac{2{,}1852}{0{,}8543} = 2{,}55 \quad \text{или} \quad \frac{5}{2};$$

слѣд. $h = 5$, $l = 2$, символъ $p$ — $\{50\bar{5}2\}$.

Треугольникъ $10\bar{1}1$-$p$-b:

$$\sin p\text{-}b = \sin 10\bar{1}1\text{-}b \sin 10\bar{1}1 = \sin 29^0 \sin 38^0\, 57'\, 40''$$

$$\begin{aligned} \log \sin 29^0 &= \bar{1},6855712 \\ +\log \sin 38^0\, 57'\, 40'' &= \bar{1},7985075 \\ &\overline{\bar{1},4840787} \end{aligned}$$

$$p\text{-}b = 17^0\, 45'.$$

Треугольникъ 0001-$p$-$b$:

$$tg\,0001 = \frac{tg\,p\text{-}b}{\sin 0001\text{-}p} = \frac{tg\,17^0\,45'}{\sin 67^0\,55'\,30''}$$

$$\log tg\,17^0\,45' = \bar{1},5052891$$
$$-\log\sin 37^0\,55'\,30'' = 0,0330642$$
$$\bar{1},5383533$$

уголъ при $0001 = 19^0\,3'\,20''$.

Вычисленіе символа дигексагональной призмы.

$$\frac{k}{h} = \frac{\cot g\,19^0\,3'\,20''\,\cot g\,30^0 - 1}{\cot g\,19^0\,3'\,20''\,\cot g\,30^0 + 1}$$

$$\log\cot g\,19^0\,3'\,20 = 0,4616619$$
$$+\log\cot g\,30^0 = 0,2385606$$
$$0,7002225$$

Этому соотвѣтствуетъ число 5,0145.

$$\frac{h}{k} = \frac{4,0145}{6,0145} \qquad \text{или} \qquad \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

слѣд. $h = 2$ и $k = 3$. Символъ дигексагональной призмы $\{21\bar{3}0\}$.

Скаленоэдръ находится въ двухъ зонахъ $[50\bar{5}2\text{-}\bar{1}2\bar{1}0]$ и $[0001\text{-}21\bar{3}0]$ и слѣд. его символъ $k\ \{21\bar{3}1\}$.

## 3. Кварцъ.

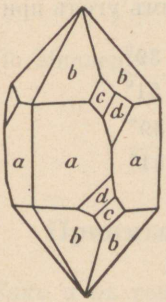
Кристаллъ состоитъ изъ гексагональной призмы 1-го рода $a$ (фиг. 42), пирамиды 1-го рода $b$, полюсы которой мы найдемъ, отложивъ дугу $10\bar{1}0\text{-}10\bar{1}1$, равную $38^0\,13'$, т. е. дополненію къ углу граней $a$ и $b$, и изъ шести паръ граней, которыя надлежитъ опредѣлить.

Мы нашли для кварца (стр. 43) величину вертикальнаго параметра

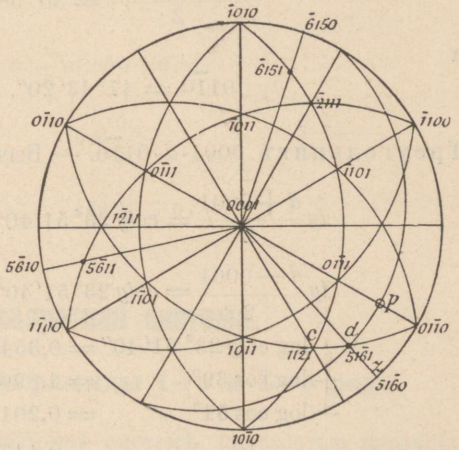
$$c = 1,0999.$$

Грань $c$ образуетъ съ гранями $b$ пирамиды 1-го рода углы въ $151^0$ и находится въ одной зонѣ $a$ гранями $a$ и $b$. Полюсъ ея находится на пересѣченіи двухъ большихъ зональныхъ круговъ $[0\bar{1}\bar{1}0\text{-}10\bar{1}1]$ и $[10\bar{1}0\text{-}0\bar{1}\bar{1}1]$ (см. фиг. 43). Ея символъ, выведенный изъ схемы для зонъ, $(11\bar{2}1)$. Такъ какъ всего шесть граней $c$, не параллельныхъ между собою, то это тригональная пирамида $\pi\tau\ \{11\bar{2}1\}$.

Грань $d$ входитъ въ составъ одной зоны съ тремя гранями $b$, $c$ и $a$; ея полюсъ находится въ точки $d$ на большомъ кругѣ $[10\bar{1}1\text{-}01\bar{1}\bar{0}]$, причемъ $11\bar{2}1\text{-}d$ равно $12^0$, т. е. дополненію къ углу граней $c$ и $d$. По симметріи находятся другія точки $d$, которыя всѣ вмѣстѣ соотвѣтствуютъ тригональному трапецоэдру; его символъ требуется опредѣлить.




Фиг. 42.




Фиг. 43.

Соединивъ 0001 съ $d$, мы получимъ дигексагональную призму $z$, символъ которой опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Треугольникъ $01\bar{1}\bar{0}\text{-}10\bar{1}1\text{-}0001$.—Вычисляемъ уголъ при $01\bar{1}\bar{0}$:

$$tg\,\frac{10\bar{1}1 + 01\bar{1}\bar{0}}{2} = \frac{cotg\,0001}{2}\,\frac{\cos\dfrac{0001\text{-}01\bar{1}\bar{0} - 0001\text{-}10\bar{1}1}{2}}{\cos\dfrac{0001\text{-}01\bar{1}\bar{0} + 0001\text{-}10\bar{1}1}{2}}$$

$$tg\,\frac{10\bar{1}1 + 01\bar{1}\bar{0}}{2} = cotg\,30^0\,\frac{\cos 19^0\,6'\,30''}{\cos 70^0\,53'\,30''};$$

точно также

$$tg\,\frac{10\bar{1}1 - 01\bar{1}\bar{0}}{2} = cotg\,30^0\,\frac{\sin 19^0\,6'\,30''}{\sin 70^0\,53'\,30''}$$

$$\begin{aligned}
\log cotg\,30^0 &= 0{,}2385606\\
+\log\cos 19^0\,6'\,30'' &= \bar{1}{,}9753865\\
-\log\cos 70^0\,53'\,30'' &= \underline{0{,}6989277}\\
&\phantom{=}\ 0{,}6989277
\end{aligned}$$

$$\frac{10\bar{1}1 + 01\bar{1}0}{2} = 78^0\,41'\,20''$$

$$\begin{aligned}
\log cotg\, 30^0 &= 0{,}2385606 \\
+ \log \sin 19^0\,6'\,30'' &= \bar{1}{,}5150194 \\
- \log \sin 70^0\,53'\,30'' &= 0{,}0246135
\end{aligned}$$

$$\frac{10\bar{1}1 - 01\bar{1}0}{2} = 30^0\,58'$$

откуда

$$01\bar{1}0 = 47^0\,43'\,20''.$$

Треугольникъ $0001$-$d$-$01\bar{1}0$. — Вычислимъ уголъ при 0001.

$$tg\,\frac{d + 0001}{2} = cotg\, 23^0\,51'\,40''\,\frac{\cos 39^0}{\cos 51^0}$$

$$tg\,\frac{d - 0001}{2} = cotg\, 23^0\,51'\,40''\,\frac{\sin 39^0}{\sin 51^0}$$

$$\begin{aligned}
\log cotg\, 23^0\,51'\,40'' &= 0{,}3542563 \\
+ \log \cos 39^0 &= 1{,}8905026 \\
- \log \cos 51^0 &= \underline{0{,}2011282} \\
& \phantom{=}\ 0{,}4458871
\end{aligned}$$

$$\frac{d + 0001}{2} = 70^0\,17'\,30''$$

$$\begin{aligned}
\log cotg\, 23^0\,51'\,40'' &= 0{,}3542563 \\
+ \log \sin 30^0 &= \bar{1}{,}7988718 \\
- \log \sin 51^0 &= \underline{0{,}1094974} \\
& \phantom{=}\ 0{,}2626255
\end{aligned}$$

$$\frac{d - 0001}{2} = 61^0\,21'\,20'';$$

слѣд. уголъ при 0001 равенъ $8^0\,56'\,10''$.

### Вычисленіе символа дигексагональной призмы.

$$\frac{h}{k} = \frac{cotg\, 8^0\,56'\,10''\, cotg\, 30^0 - 1}{cotg\, 8^0\,56'\,10''\, cotg\, 30^0 + 1}$$

$$\begin{aligned}
\log cotg\, 8^0\,56'\,10'' &= 0{,}8034326 \\
+ \log cotg\, 30^0 &= \underline{0{,}2385606} \\
& \phantom{=}\ 1{,}0419932
\end{aligned}$$

Этому соотвѣтствуетъ число 11,015.

Слѣд. $\frac{h}{k} = \frac{10{,}015}{12{,}015}$ или $\frac{10}{11} = \frac{5}{6}$.

$h = 5$, $k = 6$, символъ дигексагональной призмы $\{51\bar{6}0\}$.

Тригональный трапецоэдръ находится на пересѣченіи двухъ зонъ $[10\bar{1}1\text{-}01\bar{1}0]$ и $[0001\text{-}51\bar{6}0]$ и его символъ $\{51\bar{6}1\}$, который изображается:

По Вейсу: $a : \frac{6}{5} a : 6a : 6c$;

По Науману: $6\,R\,\frac{6}{5}$;

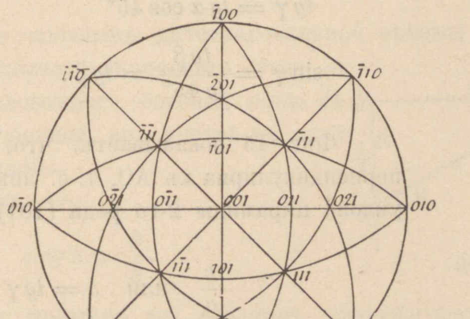
По Миллеру: $\{4\bar{1}\bar{2}\}$.

# Квадратная система.

## Призмы и пирамиды 1-го и 2-го рода.

Какъ и въ гексагональной системѣ, плоскостью проекціи служитъ главная плоскость симметріи.

Полюсы призмъ 1-го и 2-го рода находятся на окружности основнаго круга и отстоятъ другъ отъ друга на $90^0$ и на $45^0$. Полюсъ базопинакоида находится въ центрѣ проекціи (фиг. 44). Полюсы пирамидъ находятся на діаметрахъ, соединяющихъ базопинакоидъ съ полюсами соотвѣтственныхъ призмъ. Достаточно слѣд.




Фиг. 44.

знать наклонъ грани пирамиды къ вертикальной оси, чтобы найти ея полюсъ. Этотъ наклонъ, т. е. дуга 001-111 $= \alpha$, равна половинѣ угла базальныхъ реберъ пирамиды 1-го рода. Достаточно измѣрить этотъ уголъ, чтобы немедленно получить полюсы пирамиды 1-го рода {111},

Зональный кругъ [111-1$\bar{1}$1] который содержитъ также полюсы двухъ противолежащихъ граней призмы 1-го рода, пересѣкаетъ діаметръ [001-100] въ точкѣ (101), т. е. полюсѣ пирамиды 2-го рода, которая притупляетъ вершинныя ребра пирамиды 1-го рода.

Если измѣренъ уголъ базальнаго ребра пирамиды 1-го рода, т. е. если извѣстна дуга 001-111 $= \alpha$, сферическій треугольникъ 001-101-111 даетъ возможность вычислить половину дополненія къ углу вершинныхъ реберъ, или дугу 101-111 $= \beta$:

$$\sin\beta = \sin\alpha \sin 45^0.$$

Наоборотъ, чтобы вычислить уголъ вершинныхъ базальныхъ реберъ по вершинному углу, придется воспользоваться этой формулой въ такомъ видѣ:

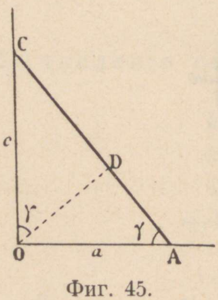
$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin 45^0}.$$

### Вычисленіе длины осей.

Тотъ-же прямоугольный треугольникъ 001-101-111 даетъ, если обозначить дугу 001-104 черезъ $\gamma$,

$$tg\,\gamma = tg\,\alpha \cos 45^0 \tag{1}$$

$$\sin\gamma = \frac{tg\,\beta}{tg\,45^0} = tg\,\beta. \tag{2}$$



Фиг. 45.

Фиг. 45 показываетъ, что, такъ какъ OD перпендикулярна къ AC, т. е. линіи наибольшаго уклона пирамиды 2-го рода (101):

$$\frac{c}{a} \quad \text{или} \quad c = tg\,\gamma$$

Можно слѣд. вычислить $c$ при помощи (1) или (2), исходя изъ угла базальнаго или вершиннаго ребра пирамиды 1-го рода.

Примѣръ: Анатазъ.

Уголъ базальнаго ребра $= 136^0\,36'$; $\alpha = 68^0\,18'$

Уголъ вершиннаго ребра $= 97^0\,51'$; $\beta = 41^0\,4'\,30''$

1) Извѣстно $\alpha$.

$$c = tg\,\alpha \cos 45^0 = tg\,68^0\,18' \cos 45''$$

$$\log tg\,68^0\,18' = 0{,}4001733$$

$$+ \log \cos 45^0 = \overline{1}{,}8494850$$

$$0{,}2496583$$

$$c = 1{,}7769.$$

2) Извѣстно $\beta$.

$$\sin\gamma = tg\,\beta = tg\,41^0\,4'\,30''$$

$$\log tg\,41^0\,4'\,30'' = \overline{1}{,}9403110$$

$$\gamma = 60^0\,38'\,40''$$

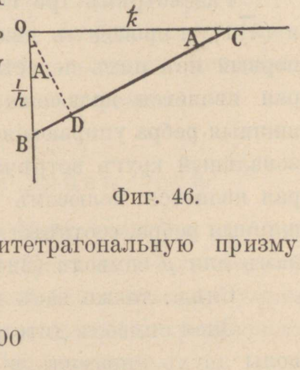
$$\log c = \log tg\,\gamma = 0{,}2499165$$

$$c = 1{,}7789.$$

Зональный кругъ [$1\overline{1}0$-111] пересѣкаетъ діаметръ [001-100] въ точкѣ (201), т. е. одномъ изъ полюсовъ пирамиды 2-го рода, имѣющей по вертикальной оси параметръ вдвое большій чѣмъ пирамида 2-го рода (101). Зональный кругъ [201-010] даетъ въ точкѣ пересѣченія съ діаметромъ [001-110] полюсъ пирамиды 1-го рода {221} которая въ свою очередь даетъ пирамиду второго рода {301} и т. д.

## Дитетрагональная призма $\{hk0\}$.

Положеніе полюсовъ дитетрагональной призмы на основномъ кругѣ опредѣляется значеніемъ угла A (фиг. 46), образованнаго боковой осью съ нормалью, опущенной изъ центра на одну изъ граней призмы.




Фиг. 46.

Мы знаемъ, что

$$cotg\,A = \frac{h}{k}.$$

Если для примѣра мы возьмемъ дитетрагональную призму {210}, то:

$$cotg\,A = 2$$

$$\log cotg\,A = 0{,}3010300$$

$$A = 26^0\,33'\,50''.$$

Нужно слѣд. отложить съ каждой стороны боковыхъ осей дуги равныя $26^0\,33'\,50''$.

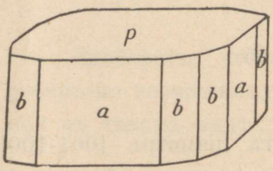
Уголъ А является половиною дополненія къ углу соотвѣтствующему боковымъ осямъ; тотъ, который соотвѣтствуетъ вспомогательнымъ осямъ, равенъ $\frac{180^0 - A'}{2}$, такъ какъ уголъ $A' = 45^0 - A$.

Наоборотъ, зная уголъ дитетрагональной призмы, можно вычислить его символъ.

Примѣръ. Гумбольдтилитъ. — Кристаллъ состоитъ (фиг. 47) изъ призмы второго рода $a$, базопинакоида $p$ и дитетрагональной призмы $b$.

Измѣренъ уголъ $ab$, равный $161^0\,30'$.

Отсюда слѣдуетъ, что уголъ обозначенный черезъ А, равенъ $180^0 - 161^0\,30' = 18^0\,30'$




Фиг. 47.

$$\frac{h}{k} = \operatorname{cotg} 18^0\,30' = 0{,}4754801$$

$$\frac{h}{k} = 2{,}9887\,,\ \text{или}\ 3\,;$$

слѣд. $h = 3$, $k = 1$. Символъ дитетрагональной призмы $\{310\}$. Такъ какъ на кристаллѣ не имѣется ни одной пирамидальной фигуры, невозможно вычислить длину вертикальной оси.

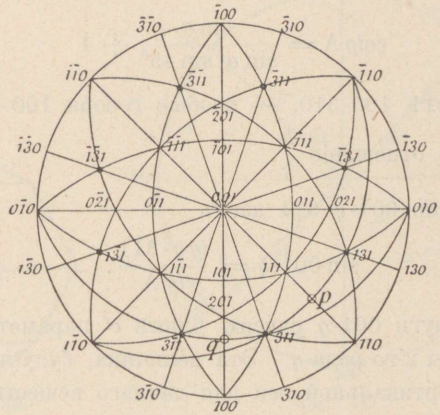
## Дитетрагональная пирамида $\{hkl\}$.

Возьмемъ для примѣра дитетрагональную пирамиду $\{311\}$. Полюсъ грани $(311)$ находится на пересѣченіи двухъ зонъ $[001\text{-}310]$ и $[100\text{-}011]$; остальные полюсы легко найти по симметріи.

Разсмотримъ три сосѣднія грани пирамиды, напр. $(131)$, $(311)$ и $(\bar{3}11)$, и проведемъ два зональныхъ круга $[131\text{-}311]$ и $[311\text{-}\bar{3}11]$; первый изъ нихъ пересѣчетъ діаметръ $[001\text{-}110]$ тъ точкѣ $p$, которая является полюсомъ пирамиды 1-го рода, притупляющей вершинныя ребра упирающіяся въ концы промежуточныхъ осей. Второй зональный кругъ встрѣчаетъ діаметръ $[001\text{-}100]$ въ точкѣ $q$, которая является полюсомъ пирамиды 2-го рода, притупляющей вершинныя ребра, соотвѣтствующія боковымъ осямъ. Схема зонъ даетъ намъ для $p$ символъ $(221)$, а для $q$ символъ $(301)$.

Слѣд., также какъ и въ гексагональной системѣ:

Зная символъ дитетрагональной пирамиды, легко вывести символы двухъ пирамидъ $p$ и $q$, которыя притупляютъ оба рода вершинныхъ реберъ данной дитетрагональной пирамиды. Мы можемъ слѣд. нанести на проекцію полюсы двухъ пирамидъ $p$ и $q$ и дитетрагональной призмы, соотвѣтствующей данной дитетрагональной пирамидѣ. Затѣмъ мы проведемъ различные зональные круги.



Фиг. 48.

Полюсы дитетрагональной пирамиды будутъ находиться въ точкахъ пересѣченіи зональныхъ круговъ пирамидъ $p$ и $q$, или въ точкахъ пересѣченія зональныхъ круговъ одной изъ нихъ и дитетрагональной призмы.

## Вычисленіе угловъ.

Дуга 100-310, которую мы уже умѣемъ вычислять, равна углу при 001 въ прямоугольномъ треугольникѣ 001-$q$-311. Разность между $45^0$ и этимъ угломъ равняется углу при 001 въ треугольникѣ 001-$p$-311. Мы знаемъ также какъ вычислить дуги 001-$q$ и 001-$p$. Въ этихъ двухъ треугольникахъ мы вычислимъ дуги 311-$q$, 311-$p$ и 001-311. Первыя двѣ являются половиною дополненій къ угламъ вершинныхъ реберъ; третья представляетъ половину дополненія къ углу базальныхъ реберъ дитетрагональной пирамиды.

## Вычисленіе индексовъ и длины осей.

1) **Даны два угла вершинныхъ реберъ.** — Намъ очевидно извѣстны дуги $p$-311 и $q$-311. Каждая изъ нихъ образуетъ съ 001 прямоугольный треугольникъ съ общей гипотенузою 001-311 и прямыми углами въ $p$ и $q$. Обозначивъ черезъ А и А$'$ углы при 001, противолежащіе сторонамъ 311-$q = a$ и 311-$p = a'$, мы получимъ:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Но

$$A' = 45^0 - A$$

слѣд.

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin a}{\sin a' \sin 45^0} + 1$$

$A$ равно дугѣ 100-310, — вообще говоря 100-$hk0$. — Вычислимъ $\operatorname{cotg} A$, т. е. отношеніе $\frac{h}{k}$.

Треугольникъ 001-$q$-311 даетъ

$$\sin 001\text{-}q = \frac{tg\, q\text{-}311}{tg\, A}.$$

Тангенсъ дуги 001-$q$ равенъ длинѣ $c'$ параметра по главной оси для пирамиды 2-го рода $q$. Эта величина, будучи раздѣлена на $c$, т. е. длину вертикальной оси для даннаго вещества, дастъ отношеніе $\frac{h}{l}$. Зная $\frac{h}{k}$ и $\frac{h}{l}$, можно непосредственно вывести символъ дитетрагональной пирамиды $\{hkl\}$.

2) **Даны одинъ уголъ вершинныхъ реберъ и уголъ базальнаго ребра.** — Извѣстны дуги $q$-311 и 001-311. Въ прямоугольномъ треугольникѣ 001-$q$-311 вычисляютъ уголъ при 001, который обозначенъ черезъ А. Этотъ уголъ опредѣляетъ отношеніе $\frac{h}{k}$. Тотъ же прямоугольный треугольникъ даетъ дугу 001-$q$, которой опредѣляется отношеніе $\frac{h}{l}$.

Какъ мы видѣли это въ дигексагональной системѣ, въ томъ случаѣ, еслибъ кристаллъ былъ образованъ только дитетрагональной пирамидой, принимаютъ $l = 1$, и тогда для длины осей получается

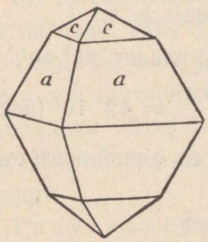
$$c = \frac{c'}{k},$$

гдѣ $c'$ длина вертикальной оси для пирамиды второго рода $q$.

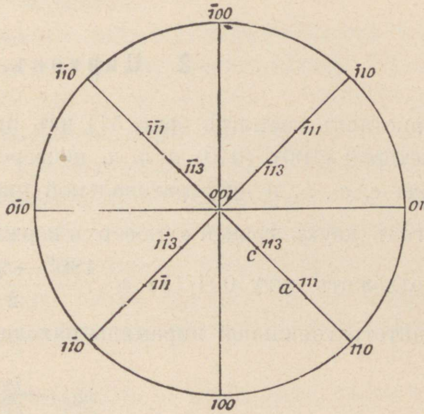
## Примѣры.

### 1. Гаусманнитъ.

Кристаллъ состоитъ изъ двухъ пирамидъ 1-го рода (фиг. 49). Болѣе острую принимаемъ за основную. Уголъ ея базальныхъ реберъ равенъ $117^0\,59'$; слѣд. на проекціи мы отложимъ на 001-110 дугу равную $\dfrac{180^0 - 117^0\,59'}{2} = 58^0\,59'\,30''$ (фиг. 50).




Фиг. 49.




Фиг. 50.

Взявъ $111\text{-}c = 180^0 - 150^0 = 30^0$ (т. к. уголъ двухъ граней равенъ $150^0$) мы получимъ полюсы второй пирамиды.

### Вычисленіе длины осей.

$$c = tg\,\gamma = tg\,\alpha \cos 45^0 = tg\,58^0\,59'\,30'' \cos 45^0$$

$$\begin{array}{rl} \log tg\,58^0\,59'\,30'' & = 0{,}2210832 \\ + \log\cos 45^0 & = \bar{1}{,}8494850 \\ \hline & \phantom{=}\ 0{,}0705682 \end{array}$$

$c = 1{,}1764.$

### Вычисленіе символа второй пирамиды.

Дуга $001\text{-}c = 001\text{-}111 - 111\text{-}c = 58^0\,59'\,30'' - 30^0 = 28^0\,59'\,30''$.

Параметръ этой пирамиды по вертикальной оси:

$$c' = tg\,28^0\,59'\,30'' \cos 45^0$$

$$\begin{array}{rl} \log tg\,28^0\,59'\,30'' & = \bar{1}{,}7436030 \\ + \log\cos 45^0 & = \bar{1}{,}8494850 \\ \hline & \phantom{=}\ \bar{1}{,}5930880 \end{array}$$

$c' = 0{,}3918$,

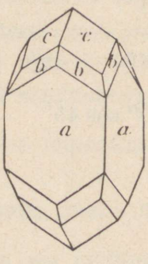
$$\frac{h}{l} = m = \frac{c'}{c} = \frac{0{,}3918}{1{,}1764} = 0{,}3330, \text{ или } \frac{1}{3},$$

слѣд. $h = 1$, $l = 3$. Символъ производной пирамиды будетъ по Миллеру $\{113\}$, по Вейсу $a : a : \frac{1}{3} c$.

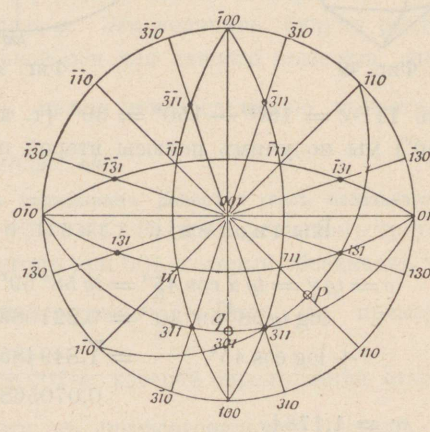
## 2. Цирконъ.

Кристаллъ состоитъ (фиг. 51) изъ призмы 2-го рода $a$, $a$, полюсы которой (100), (010) и т. д, непосредственно даны, пирамиды 1-го рода $c$, $c$ . . . и дитетрагональной пирамиды $b$. $b$.

Уголъ двухъ граней $c$ (поверхъ вершины) равенъ $95^0\,40'$; слѣд. нужно отложить дугу 001-111 $= \dfrac{180^0 - 95^0\,40'}{2} = 42^0\,10'$ (фиг. 52). Грани дитетрагональной пирамиды находятся въ одной зонѣ съ гра-




Фиг. 51.



Фиг. 52.

нями призмы 2-го рода и пирамиды 1-го рода. Проведемъ различные зональные круги и отложимъ дугу 100-$b$, равную дополненію къ углу граней $a$ и $b$, или дугѣ $180^0 - 148^0\,17' = 31^0\,43'$.

### Вычисленіе длины осей.

$$c = tg\,\gamma = tg\,\alpha \cos 45^0 = tg\,42^0\,10' \cos 45^0$$

$$\log tg\,42^0\,10' = \bar{1},9569772$$

$$+ \log \cos 45^0 = \bar{1},8494850$$

$$\bar{1},8064622$$

$$c = 0,6404.$$

Вычисленіе дитетрагональной пирамиды.

Такъ какъ грань $b$ находится въ извѣстной зонѣ [100-111], достаточно измѣренія одного угла, именно дуги 100-$b$, для того, чтобы вычислить символъ пирамиды.

Обѣ категоріи вершинныхъ реберъ дитетрагональной пирамиды притупляются пирамидами $p$ и $q$. Въ треугольникѣ 001-111-100, въ которомъ извѣстны 001-100 = $90^0$, 001-111 = $42^0 10'$ и уголъ при 100, равный $45^0$, вычисляютъ уголъ при 100.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ 100-$q$-$b$ вычисляютъ дугу $q$-100 которая, будучи вычтена изъ $90^0$, дастъ дугу 001-$q$, т. е. символъ пирамиды 2-го рода $q$. Въ томъ же треугольникѣ вычисляютъ сторону $q$-$b$, которая даетъ возможность вычислить уголъ при 001 треугольника 001-$q$-$b$. Этотъ уголъ при 001 даетъ символъ дитетрагональной призмы, соотвѣтствующей данной дитетрагональной пирамидѣ.

Треугольникъ 001-111-100. — Вычислимъ уголъ при 100.

$$tg\,\frac{111+100}{2} = cotg\,\frac{001}{2}\;\frac{\cos\dfrac{001\text{-}100 - 001\text{-}111}{2}}{\cos\dfrac{001\text{-}100 + 001\text{-}111}{2}}$$

или

$$tg\,\frac{111+100}{2} = cotg\,22^0\,30^0\;\frac{\cos 23^0\,55'}{\cos 66^0\,5};$$

точно также

$$tg\,\frac{111-100}{2} = cotg\,22^0\,30'\;\frac{\sin 23^0\,55'}{\sin 66^0\,5},$$

$$\begin{aligned} \log cotg\,22^0\,30' &= 0{,}3827757 \\ +\log\cos 23^0\,55' &= \bar{1}{,}9610108 \\ -\log\cos 66^0\,5' &= \underline{0{,}3921082} \\ & \phantom{=}\ 0{,}7358947 \end{aligned}$$

$$\frac{111+100}{2} = 79^0\,35'\,30'',$$

$$\begin{aligned} \log cotg\,22^0\,30' &= 0{,}3827757 \\ +\log\sin 23^0\,55' &= \bar{1}{,}6078918 \\ -\log\sin 66^0\,5' &= \underline{0{,}0389892} \\ & \phantom{=}\ 0{,}0296567 \end{aligned}$$

$$\frac{111-100}{2} = 46^0\,57'\,20''.$$

Уголъ при 100 = $32^0\,38'\,10''$.

Треугольникъ 100-$q$-$b$. — Вычислимъ сторону 100-$q$.

$$tg\,100\text{-}q = tg\,100\text{-}b \cos 100 = tg\,31^0\,43' \cos 32^0\,38'\,10''$$

$$\begin{aligned} \log tg\,31^0\,43' &= \overline{1},7909987 \\ +\log \cos 32^0\,38'\,10'' &= \overline{1},9253702 \\ & \quad \overline{1},7163689 \end{aligned}$$

$$100\text{-}q = 27^0\,29'\,40'',$$

откуда

$$001\text{-}q = 90^0 - 27^0\,29'\,40'' = 62^0\,30'\,20''.$$

### Вычисленіе параметра по главной оси для пирамиды 2-го рода $q$.

$$c' = tg\,\alpha' = tg\,62^0\,30'\,20''$$

$$\log tg\,62^0\,30'\,20'' = 0,2836261$$

$$c' = 1,9214$$

$$\frac{h}{l} = \frac{c'}{c} = \frac{1,9214}{0,6404} = 3,000\,.$$

$h = 3$ и $l = 1$, что даетъ $\{301\}$ для символа пирамиды 2-го рода $q$.

Треугольникъ 100-$q$-$b$. — Вычислимъ сторону $q$-$b$.

$$\sin q\text{-}b = \sin 100\text{-}b \sin 100 = \sin 31^0\,43' \sin 32^0\,38'\,10''$$

$$\begin{aligned} \log \sin 31^0\,43' &= \overline{1},7207538 \\ +\log \sin 32^0\,38'\,10'' &= \overline{1},7318317 \\ & \quad \overline{1},4525855 \end{aligned}$$

$$q\text{-}b = 16^0\,28'\,10''.$$

Треугольникъ 001-$q$-$b$. — Вычислимъ уголъ при 001:

$$tg\,001 = \frac{tg\,q\text{-}b}{\sin 001\text{-}q} = \frac{tg\,16^0\,28'\,18''}{\sin 62^0\,30'\,20''}.$$

$$\begin{aligned} \log tg\,16^0\,28'\,10'' &= \overline{1},4707536 \\ -\log \sin 62^0\,30'\,20'' &= \overline{0},0520492 \\ & \quad \overline{1},5228028 \end{aligned}$$

Уголъ при $001 = 18^0\,26'$.

### Вычисленіе символа дитетрагональной призмы.

$$\frac{h}{k} = \operatorname{cotg} 001 = \operatorname{cotg} 18^0\,26'$$

$$\log \operatorname{cotg} 18^0\,26' = 0,4771621$$

$$\frac{h}{k} = 3,0003 \quad \text{или} \quad 3\,,$$

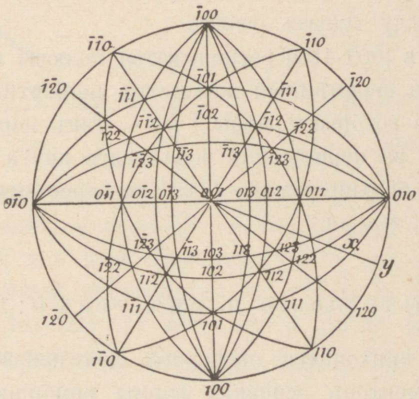
слѣд. $h = 3$, а $k = 1$. Символъ дитетрагональной призмы $\{310\}$.

Символъ грани *b*, которая находится на пересѣченіи двухъ зонъ [301-010] и [001-310], будетъ (311).

Слѣд. символъ данной дитетрагональной пирамиды по Миллеру {311}, по Вейсу $a : 3a : 3c$.

## Ромбическая система.

Плоскостью проекціи служитъ базопинакоидъ, полюсъ котораго и будетъ въ центрѣ проекціи (фиг. 53). Полюсы всѣхъ призматическихъ граней располагаются на окружности проекціи, причемъ ихъ



Фиг. 53.

положеніе опредѣляется ихъ разстояніемъ отъ (100). Полюсами основной призмы будутъ точки (110), (1$\bar{1}$0) и т. д., причемъ 100-110 равно половинѣ дополнительнаго угла къ тупому углу призмы.

Точки (100) и ($\bar{1}$00), дѣлящія пополамъ тупые углы призмы, являются полюсами макропинакоида. Полюсы брахипинакоида находятся въ (010) и (0$\bar{1}$0).

На діаметрахъ [001-110], и [001-$\bar{1}$10] и т. д. расположатся полюсы граней всѣхъ пирамидъ, у которыхъ первые два индекса равны 1, т. е. всѣхъ пирамидъ вертикальнаго ряда. Въ частности положеніе основной пирамиды {111} опредѣляется тѣмъ, что дуга 001-111 $= \alpha$ равна половинѣ угла базальныхъ реберъ этой пирамиды.

Основная макродома, притупляющая тупыя вершинныя ребра основной пирамиды, расположится однимъ изъ своихъ полюсовъ въ точкѣ пересѣченія зональныхъ круговъ [001-100] и [111-1$\bar{1}$1], т. е. въ (101). Точно также одинъ изъ полюсовъ основной брахидомы, притупляющей острыя вершинныя ребра основной пирамиды, будетъ въ (011), т. е. въ точкѣ пересѣченія зональныхъ круговъ [111-$\overline{1}$11] и [001-010].

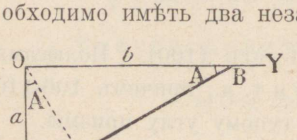
Другія пирамиды вертикальнаго рода, напр. {112}, {113}, тоже легко найти, такъ какъ положеніе ихъ полюсовъ опредѣляется половиною ихъ базальныхъ угловъ. Зональные круги [112-1$\overline{1}$2] и [113-1$\overline{1}$3] дадутъ соотвѣтствующія макродомы (102) и (103), а зональные круги [112-$\overline{1}$12] и [113-$\overline{1}$13] полюсы брахидомъ {012} и {013}.

Такъ какъ полюсы всѣхъ призмъ лежатъ на окружности проекціи, то полюсы макропризмъ должны расположиться между (100) и (110), а полюсы брахипризмъ между (010) и (110). Полюсы брахипризмы {120} опредѣлится напр. дугою 100-120, равной половинѣ дополненія къ углу тупыхъ реберъ.

На діаметрѣ [001-120] расположатся полюсы всѣхъ брахипирамидъ, имѣющихъ перемѣнный параметръ по вертикальной оси и два первыхъ индекса которыхъ равны 1 и 2. Такъ напр. брахипирамида {123} находится на пересѣченіи зональнаго круга [001-120] съ кругомъ [113-010]; брахипирамида {122} на пересѣченіи круговъ [112-010] и [001-120] и т. д.

## Вычисленіе длины осей $a:1:c$.

Такъ какъ приходится вычислять два неизвѣстныхъ, то для опредѣленія элементовъ основной формы ромбической системы необходимо имѣть два независимыхъ другъ отъ друга угла; поэтому напримѣръ двухъ угловъ призмы, какъ взаимно дополнительныхъ до 180°, для этого недостаточно.




Фиг. 54.

Простѣйшимъ случаемъ будетъ тотъ, когда извѣстны углы двухъ различныхъ призматическихъ фигуръ.

Если извѣстенъ тупой уголъ призмы, половина дополненія къ нему, т. е. 100-110 = A (фиг. 54) сразу даетъ искомое отношеніе

$$a = tg\,A,$$

такъ какъ принимаютъ $b = 1$.

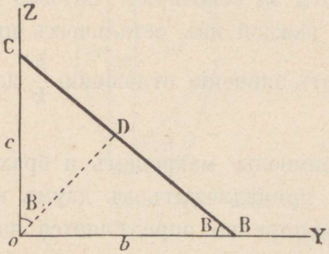
Если извѣстенъ уголъ брахидомы (фиг. 55), то половина дополненія къ нему, 001-011 даетъ:

$$c = tg\,B.$$

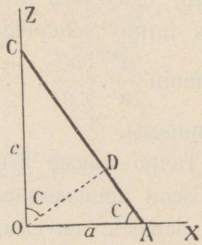
Наконецъ, еслибъ, кромѣ одного изъ только что указанныхъ угловъ, былъ-бы извѣстенъ также уголъ макродомы, (фиг. 56) половина дополненія къ этому послѣднему, т. е. 001-101 = C дало-бы:

$$c = a\,tg\,C.$$

Длину осей можно вычислить также и по двумъ угламъ пирамиды, такъ какъ по этимъ угламъ можно вычислить углы призматическихъ фигуръ.




Фиг. 55.




Фиг. 56.

Предположимъ, что измѣрены два угла вершинныхъ реберъ и обозначимъ половины дополненій къ нимъ черезъ 101-111 = P и 011-111 = Q. Эти двѣ дуги образуютъ съ 001 два прямоугольныхъ треугольника съ общей гипотенузой 001-111 = R. Уголъ при 001 въ треугольникѣ 101-001-111 есть тупой уголъ призмы, раньше обозначенный нами черезъ A. Изъ этихъ треугольниковъ мы имѣемъ:

$$\sin A = \frac{\sin P}{\sin R}$$

$$\sin(90^0 - A) = \cos A = \frac{\sin Q}{\sin R},$$

или, раздѣливъ первое равенство на второе:

$$tg\,A = \frac{\sin P}{\sin Q}.$$

Этотъ-же треугольникъ 001-111-011 даетъ также:

$$\sin B = tg\,Q\,cotg(90^0 - A) = tg\,Q\,tg\,A.$$

Но

$$a = tg\,A \quad \text{и} \quad c = tg\,B;$$

слѣд. можно вычислить $a$ и $c$, исходя изъ P и Q.

Еслибъ былъ измѣренъ одинъ уголъ вершиннаго ребра и базальный уголъ основной пирамиды, то были-бы извѣстны P и R или Q и R. При помощи предшествующихъ уравненій можно вычислить углы A и B или A и C, изъ которыхъ уже получается $a$ и $c$.

Наоборотъ, зная длину осей ромбической пирамиды, можно вычислить углы A, B и C, которые, въ свою очередь, даютъ углы P, Q и R.

Вычисленіе символовъ производныхъ формъ.

Когда на ромбическомъ кристаллѣ имѣется двѣ или нѣсколько призмъ, одну изъ нихъ принимаютъ за основную. Затѣмъ вычисляютъ длину макродіагонали для каждой изъ остальныхъ призмъ; отношенія $\frac{a'}{a}$, $\frac{a''}{a}$ .... опредѣляютъ значеніе отношенія $\frac{h}{k}$ для каждой призмы.

Точно также вычисляются символы макродомъ и брахидомъ.

Если производная пирамида принадлежитъ къ двумъ извѣстнымъ зонамъ, ея символъ непосредственно опредѣляется изъ символовъ зонъ; если-же она не принадлежитъ ни къ какой извѣстной зонѣ, длину ея параметровъ вычисляютъ тѣмъ-же путемъ, какъ и основной пирамиды; затѣмъ остается раздѣлить полученныя величины на длину осей кристалла, чтобы найти индексы данной производной пирамиды.

Когда данная пирамида лежитъ въ извѣстной уже зонѣ, достаточно измѣрить одинъ уголъ.

Пусть будетъ $x$ грань пирамиды (фиг. 53), лежащей въ зонѣ [111-010]. Допустимъ, что измѣренъ уголъ $x$-010 или уголъ $x$-111. Изъ треугольника 101-001-$x$ можно вычислить уголъ при 001. Дѣйствительно, такъ какъ основная пирамида {111} опредѣлена, извѣстны дуги 001-101 и 101-111. Уголъ при 001 равенъ дугѣ 100-$y$, тангенсъ которой равняется $a'$, т. е. длинѣ передней оси призмы $y$, но, такъ какъ $\frac{a'}{a} = \frac{k}{h}$, то символъ этой призмы извѣстенъ.

Пирамида $x$ принадлежитъ къ двумъ зонамъ [111-010] и [100-$y$] и ея символъ извѣстенъ.

## Примѣры.

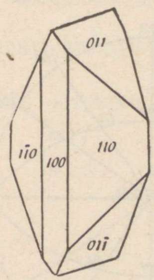
### 1. Англезитъ.

Кристаллъ состоитъ изъ основной призмы, основной брахидомы и макропинакоида (фиг. 57).

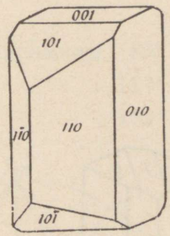
Уголъ призмы = $101^0\,14'$, слѣд. A = $39^0\,23'$.

$$a = tg\, 39^0\, 23'$$
$$\log tg\, 39^0\, 23' = \overline{1},9143020$$
$$a = 0,8209.$$

Углы брахидомы $= 76^0\, 22'$, слѣд. $B = 51^0\, 49'$.




Фиг. 57.




Фиг. 58.

$$c = tg\, 51^0\, 49'$$
$$\log tg\, 51^0\, 49' = 0,1043281$$
$$c = 1,2715.$$

Длина осей $a : 1 : c = 0,8209 : 1 : 1,2715$.

## 2. Ставролитъ.

Кристаллъ образованъ основной призмой, основной макродомой, брахипинакоидомъ и базопинакоидомъ (фиг. 58).

Измѣрены $A = 25^0\, 17'$ и $C = 55^0\, 14'$.

$$a = tg\, 25^0\, 17'$$
$$\log tg\, 25^0\, 17' = \overline{1},6742566$$
$$a = 0,4723$$
$$c = a\, tg\, 55^0\, 14'$$
$$\log a = \overline{1},6742566$$
$$+ \log tg\, 55^0\, 14' = 0,1585431$$
$$\overline{1},8327997$$
$$c = 0,6804.$$

Отношеніе параметровъ $a : 1 : c = 0,4723 : 1 : 0,6804$.

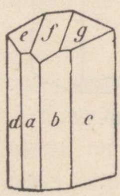
## 3. Лієвритъ.

Кристаллъ состоитъ изъ основной призмы $a$, $b$, основной пирамиды $e$, $g$, основной макродомы $f$, брахипризмы $d$, $c$ и базиса; кристаллъ гемиморфенъ (фиг. 59).

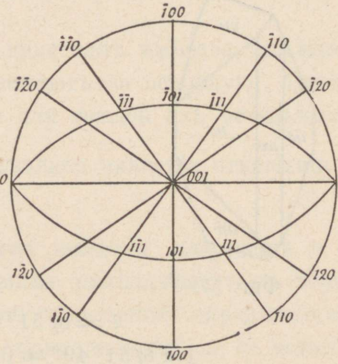
Измѣрены углы:

$$a:b = 112^0\,38'$$
$$b:g = 128^0\,36'$$
$$d:c = 73^0\,45'$$

Уголъ макродомы $= 112^0\,49'$




Фиг. 59.




Фиг. 60.

Нанесеніе полюсовъ этихъ граней на проекцію (фиг. 60) не представляетъ затрудненій.

### Вычисленіе длины осей.

$$a = tg\,\mathrm{A} = tg\,33^0\,41'$$
$$\log tg\,33^0\,41' = \bar{1},8237981$$
$$a = 0,6665.$$
$$c = a\,tg\,\mathrm{C} = a\,tg\,33^0\,35'\,30''$$
$$\log a = \bar{1},8237981$$
$$\log tg\,33^0\,35'\,30'' = \bar{1},8222915$$
$$\overline{\phantom{0}}\bar{1},6460896$$
$$c = 0,4427.$$

Отношеніе осей $a:1:c = 0,6665:1:0,4427$.

### Вычисленіе символа брахипризмы.

$$a' = tg\,\mathrm{A}' = tg\,53^0\,7'\,30''$$
$$\log tg\,53^0\,7'\,30'' = 0,1248582$$
$$a' = 1,3331.$$
$$\frac{k}{h} = \frac{a'}{a} = \frac{1,3331}{0,6665} = 2,000;$$

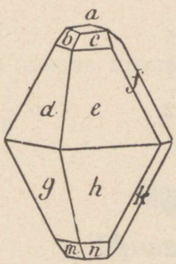
слѣд. $h = 1$, $k = 2$ и символъ брахипризмы $\{120\}$.

## 4. Сѣра.

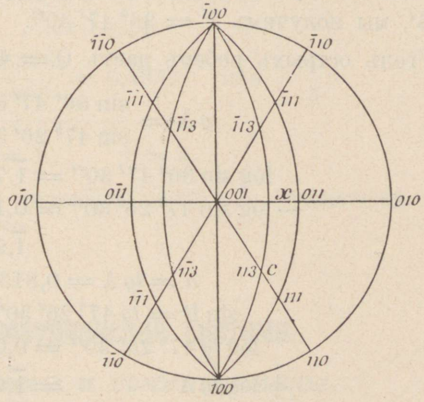
Кристаллъ состоитъ изъ слѣдующихъ формъ: основной пирамиды *d. e. g. h*; производной пирамиды *b. c. m. n*; основной брахидомы *f. k*; базопинакоида *a* (фиг. 61).

Измѣрены слѣдующіе углы:

Уголъ острыхъ реберъ основной пирамиды $85^0\ 7'$
" $a:f$ . . . . . . . . . . . . . $117^0\ 41'$
" $a:c$ . . . . . . . . . . . . . $139^0\ 47'$




Фиг. 61.




Фиг. 62.

Полюсъ грани *c*, которая находится въ одной зонѣ съ гранями *a* и *e*, лежитъ на діаметрѣ [001-110] (фиг. 62).

### Вычисленіе длины осей.

Прямоугольный треугольникъ 001-011-111 даетъ:

$$tg\,001 = \frac{tg\,011\text{-}111}{\sin 001\text{-}111} = \frac{tg\,47^0\,26'\,30''}{\sin 62^0\,19'}$$

$$\begin{aligned} \log tg\,47^0\,26'\,30'' &= 0{,}0370599 \\ -\log \sin 62^0\,19' &= 0{,}0527973 \\ & \overline{0{,}0898572} \end{aligned}$$

$$001 = 50^0\,53'\,10''.$$

Уголъ А, или сторона 100-110, равна $90^0 - 50^0\,53'\,10''$, или $39^0\,6'\,50''$.

$$a = tg\,A = tg\,39^0\,6'\,50''$$
$$\log tg\,39^0\,6'\,50'' = \overline{1},9101336$$
$$a = 0{,}8131$$
$$c = tg\,B = tg\,62^0\,19'$$
$$\log tg\,62^0\,19' = 0{,}2801380$$
$$c = 1{,}906.$$

Длина осей $a : 1 : c = 0{,}8131 : 1 : 1{,}906$.

Отношенiе осей для основной пирамиды можно было-бы вычислить и по общему методу.

Если измѣрить уголъ тупыхъ вершинныхъ реберъ, равный $100^0\,25'$, мы получимъ $P = 36^0\,47'\,30''$.

Уголъ острыхъ реберъ даетъ $Q = 47^0\,26'\,30''$.

$$tg\,A = \frac{\sin 36^0\,47'\,30''}{\sin 47^0\,26'\,30''}$$
$$\log \sin 36^0\,47'\,30'' = \overline{1},7773595$$
$$-\log \sin 47^0\,26'\,30'' = 0{,}1327747$$
$$\overline{1},9101342$$
$$a = tg\,A = 0{,}8131$$
$$\sin B = tg\,47^0\,26'\,30''\,tg\,A$$
$$\log tg\,47^0\,26'\,30'' = 0{,}0370599$$
$$+\log tg\,A = \overline{1},9101342$$
$$\overline{1},9471941$$
$$B = 62^0\,18'\,50''$$
$$c = tg\,B = tg\,62^0\,18'\,50''$$
$$\log tg\,62^0\,18'\,50'' = 0{,}2800868$$
$$c = 1{,}906.$$

Какъ и въ первомъ случаѣ, мы имѣемъ

$$a : 1 : c = 0{,}8131 : 1 : 1{,}906.$$

### Вычисленiе производной пирамиды.

У этой пирамиды, принадлежащей къ зонѣ [001-110], первые два индексы равны единицѣ: это пирамида вертикальнаго ряда; слѣд. остается вычислить ея параметръ по вертикальной оси. Раздѣливъ величину этого параметра $c'$ на $c$, мы найдемъ отношенiе $\frac{h}{l}$ [1]).

1) $h = 1$; слѣд. $l = \frac{c}{c'}$.

Проведемъ зональный кругъ 100-$c$, который пересѣчетъ кругъ [001-010] въ точкѣ $x$.

Прямоугольный треугольникъ 001-$x$-$c$ даетъ:

$$tg\,001\text{-}x = tg\,001\text{-}c \cos 001 = tg\,45^0\,13' \cos 50^0$$

$$\begin{aligned} \log tg\,45^0\,13' &= 0{,}0032846 \\ +\log\cos 50^0\,53'\,10'' &= \bar{1}{,}7999357 \\ & \overline{\bar{1}{,}8032203} \end{aligned}$$

Но дуга 001-$x$ равна B$'$, т. е. углу брахидомы $x$, у которой длина параметра по вертикальной оси равна $tg\,$B$'$; слѣд.

$$\log c' = \log tg\,\mathrm{B}' = \bar{1}{,}8032293$$

$$c' = 0{,}6356$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{h}{l} = \frac{0{,}6356}{1{,}906} = 0{,}3335 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3};$$

слѣд.

$$h = 1\,, \qquad l = 3\,.$$

Символъ производной пирамиды {113}, по обозначенію Вейса $a : b : \frac{1}{3}\ c$.

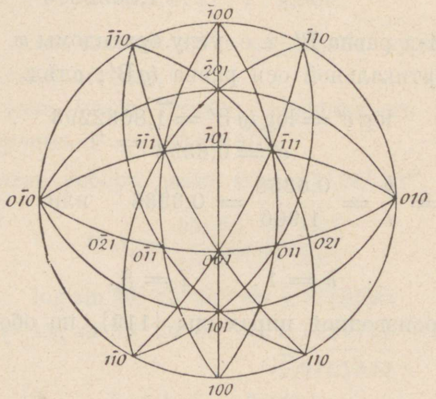
# Моносимметрическая система.

## Призмы, домы и гемипирамиды.

Плоскостью проекціи въ моноклинической системѣ могутъ служить двѣ плоскости.


Фиг. 63.

Если за плоскость проекціи принятъ плоскость симметріи, полюсы всѣхъ граней перпендикулярныхъ къ плоскости симметріи, будутъ находиться на окружности основного круга и положенiе ихъ непосредственно опредѣляется углами между ними (фиг. 63). Полюсъ клинопинакоида (010) расположится въ центрѣ проекцiи. При такомъ выборѣ плоскости проекцiи хорошо обнаруживается симметрiя системы; дѣйствительно, каждой грани соотвѣтствуетъ на томъ же дiаметрѣ другая грань, находящаяся на такомъ же разстоянiи отъ (010).




Фиг. 64.

Вторымъ родомъ проекцiи будетъ тотъ, когда за плоскость проекцiи принимается плоскость перпендикулярная къ вертикальной оси. Симметрiя менѣе ясно выражена, но вычисленiя производятся проще. Въ этомъ случаѣ на окружности основного круга располагаются полюсы всѣхъ призматическихъ граней; положенiе ихъ опредѣляется ихъ углами съ (010) или (100). Полюсъ базопинакоида находится уже не въ центрѣ проекцiи (фиг. 64), а на дiаметрѣ, который оканчивается у (100). На этомъ же дiаметрѣ располагаются также полюсы всѣхъ граней перпендикулярныхъ къ плоскости симметрiи; положенiе этихъ полюсовъ опредѣляется ихъ углами съ (100) или $(\bar{1}00)$; среди этихъ граней находятся между прочимъ основныя геми-ортодомы (101) и $(\bar{1}01)$.

Зональный кругъ $[010\text{-}101\text{-}0\bar{1}0]$ содержитъ полюсы всѣхъ гемипирамидъ, у которыхъ первый и третiй индексы равны. Въ числѣ этихъ граней находится и основная гемипирамида 1-го рода (111), которая принадлежитъ также къ зональному кругу $[110\text{-}001\text{-}\bar{1}\bar{1}0]$. Слѣд. положенiе ея полюса извѣстно.

На большомъ кругѣ [010 - 101 - 010] располагаются полюсы всѣхъ клинодомъ; въ частности полюсъ (011) опредѣляется зоной

[100-111-$\bar{1}$00]; клинодома (021) опредѣляется зоной [110-$\bar{1}$11-$\bar{1}\bar{1}$0] и т. д. Такимъ образомъ различные зональные круги своими пересѣченіями опредѣляютъ положеніе полюсовъ различныхъ фигуръ моноклинической системы.

Вычисленіе длины осей $a:1:c$ и угла $\beta$.

Если моносимметрическій кристаллъ состоитъ лишь изъ плоскости симметріи, т. е. клинопинакоида, и двухъ другихъ плоскостей перпендикулярныхъ къ этой плоскости, можно вычислить только одинъ изъ элементовъ кристалла, уголъ $\beta$. Если мы примемъ одну изъ этихъ граней за базопинакоидъ (001), а другую за ортопинакоидъ (100), величина $\beta$ будетъ равна углу между этими двумя гранями, или дополненію къ дугѣ 100-001.

Въ томъ случаѣ когда на кристаллѣ имѣется еще третья грань, находящаяся въ одной зонѣ съ двумя предыдущими, ее можно разсматривать какъ переднюю геміортодому (101) или заднюю геміортодому ($\bar{1}$01). Въ этомъ случаѣ возможно вычислить отношеніе $\frac{c}{a}$.

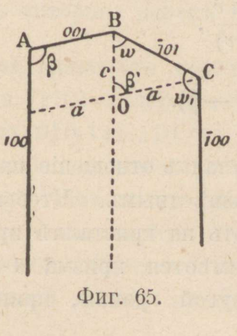
1. Три плоскости, перпендикулярныя къ плоскости симметріи, разсматриваются какъ базопинакоидъ, ортопинакоидъ и задняя геміортодома и слѣд. ихъ символы (001), (100), ($\bar{1}$01).

Измѣрены углы $\beta$ двухъ граней (001) и (100) и $w'$ двухъ граней (101) и ($\bar{1}$00). Въ треугольникѣ OBC углы O и B равны $\beta'$ и $w$, дополненіямъ къ $\beta$ и $w'$.

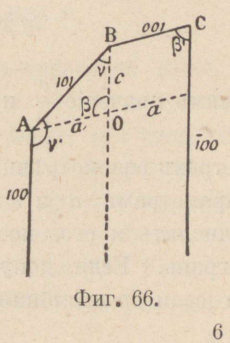
Этотъ треугольникъ даетъ (фиг. 65):

$$(1) \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin\,[180^\circ - (w + \beta')]}{\sin w} = \frac{\sin\,(w + \beta')}{\sin w}.$$

2. Означенныя три плоскости принимаютъ за базопинакоидъ (001), ортопинакоидъ (100) и переднюю геміортодому (101).



Фиг. 65.



Фиг. 66.

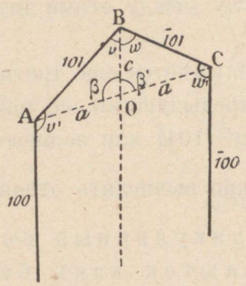
Измѣрены углы $\beta'$ и $v'$, причемъ этотъ послѣднiй является угломъ между гранями (101) и (100).

Треугольникъ AOB даетъ (фиг. 66):

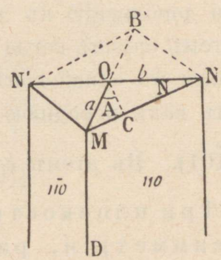
$$(2) \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin(v+\beta)}{\sin v} = \frac{\sin(\beta'-v)}{\sin v}$$

причемъ $v$ является дополненiемъ къ $v'$.

3. Три означенныя плоскости принимаются за ортопинакоидъ и двѣ гемiортодомы, переднюю и заднюю, т. е. за (100), (101) и ($\bar{1}01$).




Фиг. 67.




Фиг. 68.

Уголъ $\beta$ не дается непосредственно, какъ въ двухъ предыдущихъ случаяхъ.

Приравнявъ другъ другу два значенiя $\frac{c}{a}$, найденныхъ выше, мы получимъ:

$$\frac{\sin(w+\beta')}{\sin w} = \frac{\sin(\beta'-v)}{\sin v}.$$

Рѣшая это уравненiе относительно $\beta'$:

$$tg\,\beta' = \frac{2\sin w \sin v}{\sin(w-v)},$$

мы получимъ значенiе $\frac{c}{a}$ и $\beta'$ или $(180^0-\beta)$.

Въ трехъ разсмотрѣнныхъ выше случаяхъ отношенiе параметра $b$ къ параметрамъ $a$ и $c$ остается неизвѣстнымъ. Чтобы можно было вычислить и его, необходимо имѣть на кристаллѣ призматическую грань. Если допустить, что имѣется призма 1-го рода $\{110\}$, и если ее скомбинировать съ другой гранью, принятой за базопинакоидъ, то прямоугольный треугольникъ 100-110-001 дастъ дугу 100-001, т. е. $\beta'$, по формулѣ

$$\cos\beta' = \frac{\cos 001\text{-}110}{\cos 100\text{-}110}.$$

Тотъ же треугольникъ дастъ для угла A между гранями 100-001 и 110-001:

$$tg\,\mathrm{A} = \frac{tg\,100\text{-}110}{\sin\beta'}.$$

Если обратить вниманіе на вершину кристалла (фиг. 68), то видно, что плоскій уголъ N въ треугольникѣ OMN равенъ углу, обозначенному нами черезъ A. Этотъ прямоугольный треугольникъ даетъ:

$$\frac{a}{b} \text{ или } a = tg\,\mathrm{N} = tg\,\mathrm{A}.$$

Можно слѣд. вычислить параметръ $a$; а такъ какъ мы уже умѣемъ вычислять отношеніе $\frac{c}{a}$, то параметръ $c$ непосредственно отсюда и опредѣляется.

Въ томъ случаѣ еслибъ переднее ребро призмы было притуплено (100), слѣдуетъ отдать предпочтеніе непосредственному измѣренію $100\text{-}001 = \beta'$, такъ какъ ошибка наблюденія при измѣреніи угла 110-001 даетъ для $\beta$ тѣмъ бо́льшую ошибку, чѣмъ больше самый уголъ.

Можно было-бы разсматривать призматическую форму какъ клинодому (011), а базопинакоидъ какъ ортопинакоидъ (100). Въ прямоугольномъ треугольникѣ 001-011-100 извѣстны стороны 001-011 и 100-011; вычисляютъ сторону $001\text{-}100 = \beta'$ и уголъ при 100, тангенсъ котораго равенъ отношенію $\frac{c}{b}$ или $c$.

Если кристаллъ состоитъ изъ клинопинакоида (010), призмы 1-го рода (110) и передней гемипирамиды (111), сферическій треугольникъ 010-111-110, въ которомъ извѣстны три стороны, даетъ возможность вычислить углы при 010 и 110. Дополненіе къ этому послѣднему есть ничто иное какъ уголъ при 110 въ прямоугольномъ треугольникѣ 001-100-110, въ которомъ извѣстна также сторона 110-100. Вычисляютъ сторону $100\text{-}001 = \beta'$. Уголъ при 010, вычисленный выше, равенъ дугѣ 100-101, которая даетъ съ $\beta'$

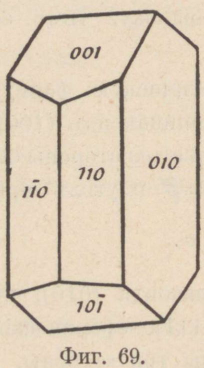
отношеніе $\frac{c}{a}$. Отношеніе $\frac{a}{b}$ легко получить при помощи угла призмы и $\beta'$.

Наконецъ, если моносимметрическій кристаллъ образованъ плоскостями осей и передней гемипирамидой, извѣстны три стороны треугольника 010-100-111 и можно вычислить углы при 010 и 100. Первый изъ нихъ равенъ дугѣ 100-101; онъ дастъ съ $\beta$ отношеніе $\frac{c}{a}$. Второй, т. е. уголъ при 100, равенъ углу C въ прямолинейномъ треугольникѣ OCB, у котораго уголъ O прямой, а стороны OC и OB являются параметрами $c$ и $b$. Котангенсъ угла C равенъ отношенію $\frac{c}{b}$.

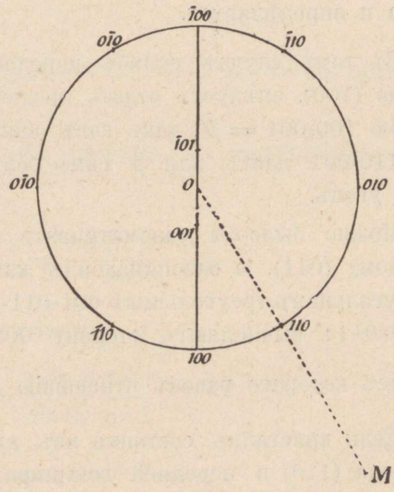
## Примѣры.

### 1. Ортоклазъ.

Кристаллъ состоитъ изъ призмы 1-го рода $\{110\}$, клинопинакоида $\{010\}$, базопинакоида $\{001\}$ и задней геміортодомы $\{\bar{1}01\}$ (фиг. 69).




Фиг. 69.




Фиг. 70.

Измѣрены углы:

$$110\text{-}1\bar{1}0 = 180^0 - 118^0\,48' = 61^0\,12'$$
$$110\text{-}001 = 180^0 - 112^0\,16' = 67^0\,44'$$
$$001\text{-}\bar{1}01 = 180^0 - 129^0\,40' = 50^0\,20'$$

Единственное затрудненіе при черченіи стереографической проекціи состоитъ въ отысканіи положенія полюса (001).

Соединимъ 0 съ 110 (фиг. 70) и отложимъ:

$$\text{OM} = 0\text{-}110 \times \sec 67^0\,44'$$
$$\log \sec 67^0\,44' = 0{,}4214550$$
$$\sec 67^0\,44' = 2{,}639.$$

Изъ точки M, принятой за центръ, радіусомъ равнымъ $0\text{-}110 \times tg\, 67^0\,44'$, т. е.

$$\log tg\, 67^0\,44' = 0{,}3877987$$
$$tg\, 67^0\,44' = 2{,}442$$

опишемъ дугу круга, пересѣкающаго 0-100 въ точкѣ, которая и будетъ полюсомъ базопинакоида (001).

### Вычисленіе длины осей.

$$\cos\beta' = \frac{\cos 67^0\,44'}{\cos 30^0\,36'}$$
$$\log\cos 67^0\,44' = \bar{1}{,}5785450$$
$$-\log\cos 30^0\,36' = \underline{0{,}0651270}$$
$$\bar{1}{,}6436720$$
$$\beta' = 63^0\,52'\,50'', \quad \text{откуда} \quad \beta = 116^0\,7'\,10''$$
$$\frac{a}{b} \text{ или } a = tg\,\text{A} = \frac{tg\,30^0\,36'}{\sin 63^0\,52'\,50''}$$
$$\log tg\,30^0\,36' = \bar{1}{,}7718801$$
$$-\log\sin 63^0\,52'\,50'' = \underline{0{,}0467826}$$
$$\bar{1}{,}8186627$$
$$a = 0{,}6586$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(w+\beta')}{\sin w} = \frac{\sin(65^0\,47' + 63^0\,53')}{\sin 65^0\,47'} = \frac{\sin 50^0\,20'}{\sin 65^0\,47'}$$
$$\log\sin 50^0\,20' = \bar{1}{,}8863616$$
$$-\log\sin 65^0\,47' = \underline{0{,}0400048}$$
$$\bar{1}{,}9263664$$
$$\frac{c}{a} = 0{,}84405, \quad \text{откуда} \quad c = 0{,}84405 \times 0{,}6586 = 0{,}5559.$$

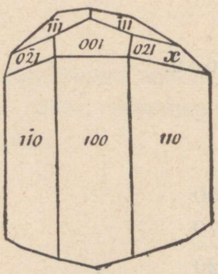
Отношеніе длины осей $a:1:c = 0{,}6586:1:0{,}5559$, а уголъ $\beta = 116^0\,7'\,10''$.

## 2. Роговая обманка.

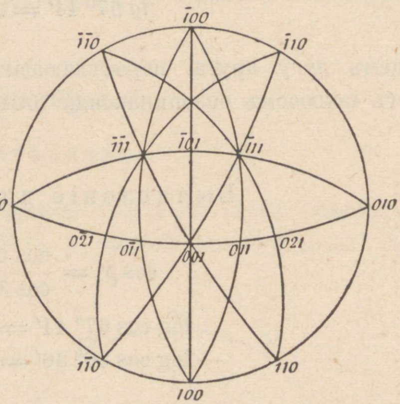
Кристаллъ состоитъ изъ ортопинакоида {100}, призмы 1-го рода {110}, базопинакоида {001}, задней гемипирамиды {$\bar{1}$11} и клинодомы $x$ (фиг. 71).

Измѣрены углы:

$$100\text{-}110 = 180^0 - 152^0\ \ 6' = 27^0\,54'$$
$$100\text{-}001 = 180^0 - 104^0\,58' = 75^0\ \ 2'$$
$$001\text{-}\bar{1}11 = 180^0 - 145^0\,35' = 34^0\,25'$$
$$001\text{-}x\ \ = 180^0 - 150^0\,26' = 29^0\,34'.$$




Фиг. 71.




Фиг. 72.

Стереографическая проекція не представляетъ затрудненій.

Клинодома $x$ (фиг. 72) принадлежитъ къ двумъ зонамъ [110-$\bar{1}$10] и [001-010] и символъ ея {021}.

### Вычисленіе длины осей.

Измѣреніе угла граней (100) и (001) даетъ непосредственно $\beta = 104^0\,58'$.

$$\frac{a}{b} \text{ или } a = tg\,\mathrm{A} = \frac{tg\,(100\text{-}110)}{\sin\beta'} = \frac{tg\,27^0\,54'}{\sin 75^0\,2'}$$

$$\log tg\,27^0\,54' = \bar{1},7238436$$
$$-\log\sin 75^0\,2' = 0,0149886$$
$$\bar{1},7388322$$
$$a = 0,5480 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{A} = 28^0\,44'.$$

Прямоугольный треугольникъ $001\text{-}\bar{1}01\text{-}\bar{1}11$ даетъ:

$$tg\,001\text{-}\bar{1}01 = tg\,001\text{-}\bar{1}11 \cos 001 = tg\,34^0\,25' \cos 28^0\,44'$$

$$\begin{aligned} \log tg\,34^0\,25' &= \bar{1},8357804 \\ + \log\cos 28^0\,44' &= \bar{1},9429335 \\ &\overline{\phantom{=}\ \bar{1},7787139} \end{aligned}$$

$$001\text{-}\bar{1}01 = 31^0$$

$$w = 104^0\,58' - 31^0 = 73^0\,58'$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(w+\beta')}{\sin w} = \frac{\sin 31^0}{\sin 73^0\,58'}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 31^0 &= \bar{1},7118393 \\ -\log\sin 73^0\,58' &= 0,0172309 \\ &\overline{\phantom{=}\ \bar{1},7290702} \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = 0,5359; \qquad c = 0,5480 \times 0,5359 = 0,2937$$

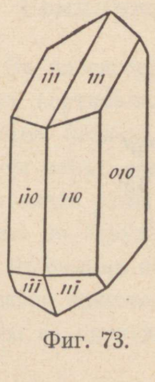
Длина осей $a:1:c = 0,5480:1:0,2937$; уголъ $\beta = 104^0\,58'$.

## 3. Гипсъ.

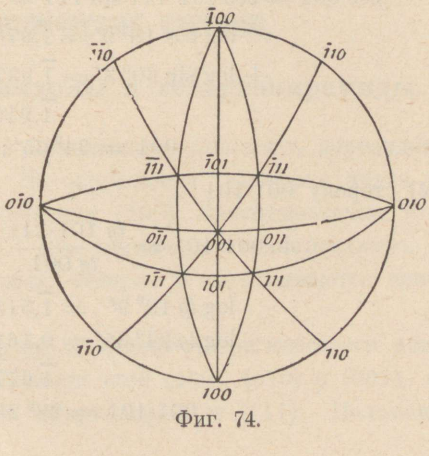
Кристаллъ состоитъ изъ двухъ гемипирамидъ, передней и задней $\{111\}$ и $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, призмы 1-го рода $\{110\}$ и клинопинакоида $\{010\}$ (фиг. 73).

Измѣрены углы:

$$\begin{aligned} 110\text{-}\bar{1}10 &= 180^0 - 110^0\,30' = 34^0\,15' \\ 010\text{-}111 &= 180^0 - 108^0\,10' = 71^0\,50' \\ 110\text{-}111 &= 180^0 - 130^0\,51' = 49^0\ \ 9' \\ 111\text{-}1\bar{1}1 &= 180^0 - 143^0\,42' = 36^0\,18' \end{aligned}$$



Фиг. 73.



Фиг. 74.

Чтобы получить полюсъ (111) по методу, описанному на стр. 16, нужно отложить (фиг. 74) двѣ дуги 110-111 и 010-111, равныя $49^0\,9'$ и $71^0\,50'$.

Вычисленіе длины осей.

Въ треугольникѣ 110-010-111, въ которомъ извѣстны три стороны, вычисляютъ уголъ при 111 по формулѣ

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\frac{111}{2} = \sqrt{\frac{\sin 39^0\,13' \sin 16^0\,32'}{\sin 49^0\,9' \sin 71^0\,50'}}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 39^0\,13' &= \bar{1},8008921 \\ +\log\sin 16^0\,32' &= \bar{1},4541939 \\ -\log\sin 49^0\,\;9' &= 0,1212344 \\ -\log\sin 71^0\,50' &= \underline{0,0222062} \\ & \bar{1},3985266 \end{aligned}$$

$$\log\sin\frac{111}{2} = \bar{1},6992633$$

$$\frac{111}{2} = 30^0\,1'\,20'', \qquad 111 = 60^0\,3'.$$

Прямоугольный треугольникъ 001-101-111. — Вычислимъ:

1) Уголъ при 001:

$$\cos 001 = \cos 101\text{-}111 \sin 111 = \cos 18^0\,9' \sin 60^0\,3'$$

$$\begin{aligned} \log\cos 18^0\,9' &= \bar{1},9778353 \\ +\log\sin 60^0\,3' &= \underline{\bar{1},9377492} \\ & \bar{1},9155845 \end{aligned}$$

$$001 = 34^0\,35';$$

2) сторону 001-101:

$$\sin 001\text{-}101 = \frac{tg\ 101\text{-}111}{tg\ 001} = \frac{tg\ 18^0\,9'}{tg\ 34^0\,35'}$$

$$\begin{aligned} \log tg\ 18^0\,9' &= \bar{1},5156309 \\ -\log tg\ 34^0\,35' &= \underline{0,1615133} \\ & \bar{1},6771442 \end{aligned}$$

$$001\text{-}101 = 28^0\,23'.$$

Прямоугольный треугольникъ 001-100-110. — Вычислимъ сторону 101-001, или $\beta'$:

$$\sin 001\text{-}100 = \frac{tg\, 100\text{-}110}{tg\, 001} = \frac{tg\, 34^0\, 15'}{tg\, 34^0\, 35'}$$

$$\log tg\, 34^0\, 15' = \bar{1},8330679$$
$$-\log tg\, 34^0\, 35' = 0,1615133$$
$$\bar{1},9945812$$

$$001\text{-}100 = \beta' = 80^0\, 58', \qquad \beta = 99^0\, 2'.$$

Такъ какъ A равно $34^0\, 35'$,

$$\frac{a}{b} \text{ или } a = tg\, \text{A} = tg\, 34^0\, 35'$$

$$\log tg\, 34^0\, 35' = 1,8384867$$
$$a = 0,6894$$
$$v = 80^0\, 58' - 28^0\, 23' = 52^0\, 35'$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(\beta' - v)}{\sin v} = \frac{\sin 28^0\, 23'}{\sin 52^0\, 35'}$$
$$\log \sin 28^0\, 23' = \bar{1},6771442$$
$$-\log \sin 52^0\, 35' = 0,1000494$$
$$\bar{1},7771936$$

$$\frac{c}{a} = 0,5987\,, \qquad c = 0,5987 \times 0,6894 = 0,4127\,.$$

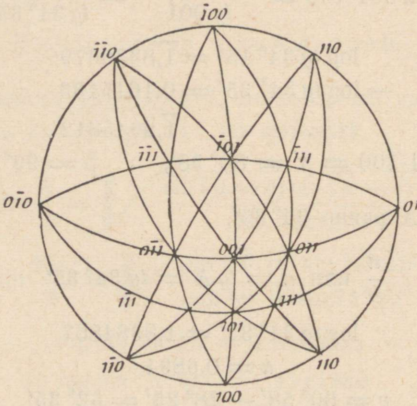
Отсюда слѣдуетъ, что длина осей $a : 1 : c = 0,6894 : 1 : 0,4127$, а уголъ $\beta = 99^0\, 2'$.

## Асимметрическая система.

### Гемипризма, гемидомы и тетартопирамиды.

За плоскость проекціи принимается плоскость перпендикулярная къ вертикальной оси. На окружности основного круга располагаются полюсы макропинакоида (100), брахипинакоида (010) и полюсы всѣхъ гемипризмъ. Для нанесенія этихъ полюсовъ достаточно знать углы между ними, которые и отсчитываются непосредственно по окружности.

Въ самомъ общемъ случаѣ принимаютъ три плоскости асимметрическаго кристалла за плоскости осей (100), (010) и (001), а четвертую за правую верхнюю тетартопирамиду (111). Положеніе полюса (100) на окружности проекціи выбирается произвольно, положеніе-же полюса (010) опредѣляется (см. фиг. 75) угломъ этой грани съ (100). Зная углы граней (001) и (111) съ (100) и (010), легко




Фиг. 75.

нанести ихъ полюсы на проекцію. Если провести соотвѣтствующіе зональные круги, легко найти полюсы всѣхъ основныхъ формъ асимметрической системы.

### Вычисленіе элементовъ кристалла $a:1:c$ и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Два косоугольныхъ сферическихъ треугольника 001-100-010 и 100-111-010 даютъ всѣ элементы кристалла: три угла осей $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и отношеніе параметровъ $a:1:c$.

Еслибъ были измѣрены углы, образованные четырьмя вышеуказанными гранями, то были-бы извѣстны три стороны упомянутыхъ косоугольныхъ треугольниковъ и можно было-бы вычислить углы.

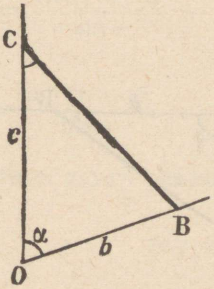
Въ первомъ треугольникѣ 001-100-010 уголъ при 100 равенъ углу осей $\alpha$, уголъ при 010 углу осей $\beta$, а уголъ при 001 углу осей $\gamma$.

Во второмъ треугольникѣ 100-111-010 вычисляютъ углы при 100 и 010. Уголъ при 100 равенъ плоскому углу, образованному пересѣченіемъ граней (100) и (111) и граней (100) и (010). Это уголъ C (фиг. 76) прямолинейнаго треугольника OCB, въ которомъ OC и OB равны параметрамъ $c$ и $b$, а уголъ COB равенъ $\alpha$.

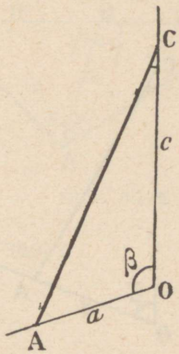
Этотъ треугольникъ OCB даетъ

$$\frac{c}{b} \text{ или } c = \frac{\sin(\mathrm{C}+\alpha)}{\sin \mathrm{C}}.$$

Точно также уголъ при 010 равенъ плоскому углу, образованному линіями пересѣченія граней (111) и (010) и двухъ другихъ граней (100) и (010). Это уголъ C въ треугольникѣ AOC (фиг. 77), въ которомъ OA и OC равны параметрамъ $a$ и $c$, а уголъ AOC $= \beta$.




Фиг. 76.




Фиг. 77.

Въ треугольникѣ AOC мы имѣемъ

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(C+\beta)}{\sin C}$$

Зная $c$ и отношеніе $\frac{c}{a}$, можно вывести отношеніе осей $a:1:c$.

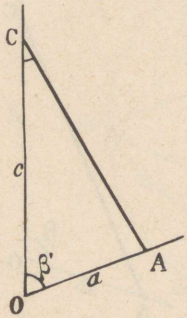
## Частные случаи.

Если кромѣ трехъ плоскостей осей мы имѣли-бы тетартопирамиду $(\bar{1}11)$ вмѣсто (111), для вычисленій служилъ-бы сферическій треугольникъ 010-$1\bar{1}\bar{1}$-$\bar{1}00$. Уголъ при $\bar{1}00$ равенъ углу $c$ треугольника COB (фиг. 76), въ которомъ стороны OB и OC опять равны параметрамъ $b$ и $c$ и образуютъ между собою уголъ COB, равный $\alpha$.

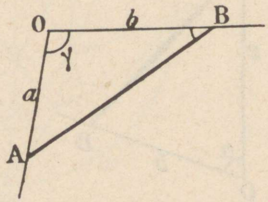
Въ томъ-же треугольникѣ уголъ при 010 равенъ углу $c$ прямолинейнаго треугольника A′OC (фиг. 78), въ которомъ OA′ и OC равны $a$ и $c$ и образуютъ между собою уголъ A′OC равный $\beta'$, который является дополненіемъ къ $\beta$.

Эти два прямолинейныхъ треугольника даютъ возможность вычислить, какъ и въ вышеуказанномъ случаѣ, отношенія $\frac{c}{b}$ и $\frac{c}{a}$.

Если на триклиническомъ кристаллѣ имѣются три грани, соотвѣтствующія плоскостямъ осей и двѣ призматическихъ грани, напр. (110) и (011), вычисляютъ уголъ при (001) въ треугольникѣ 100-110-001, въ которомъ извѣстны двѣ стороны 100-110 и 100-001 и уголъ между ними $\alpha$. Уголъ при 001 равенъ плоскому углу,



Фиг. 78.



Фиг. 79.

образованному линіями пересѣченія граней (001) и (110) и двухъ другихъ граней (001) и (100). Это уголъ B въ прямолинейномъ треугольникѣ AOB, въ которомъ стороны OA и OB равны параметрамъ $a$ и $b$ и образуютъ между собою уголъ $\gamma$ (фиг. 79).

Треугольникъ OAB даетъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin B}{\sin(\gamma + B)}.$$

Въ треугольникѣ 100-010-011 извѣстны стороны 010-011 и 010-100 и уголъ между ними $\beta$; вычисляютъ уголъ при 100, который, какъ указано выше, даетъ отношеніе $\frac{c}{b}$.

Если на триклиническомъ кристаллѣ имѣется три плоскости, лежащія въ одной зонѣ, двѣ изъ нихъ принимаютъ за (110) и ($1\bar{1}0$), а третью за (010). Четвертая грань была-бы базопинакоидомъ (001). Измѣривъ дуги 010-001, 110-001, $1\bar{1}0$-001, 110-$1\bar{1}0$ и 110-010, вычисляютъ углы при 001 въ двухъ треугольникахъ: $1\bar{1}0$-001-110 и 110-001-010.

Въ первомъ треугольникѣ уголъ при 110 равенъ плоскому углу, образованному линіями пересѣченія граней (110) и (001) и граней ($1\bar{1}0$) и (001). Это уголъ $w + v$ въ треугольникѣ BAB' (фиг. 80).

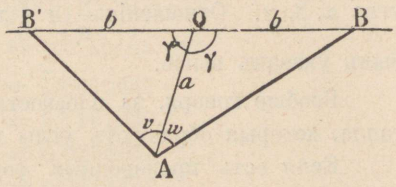
Второй уголъ при 001 равенъ плоскому углу, образованному линіями пересѣченія граней (001) и (110) и граней (001) и (010). Это уголъ $w$ треугольника ABO, въ которомъ OA и OB являются параметрами $a$ и $b$, между тѣмъ какъ уголъ AOB равенъ $\gamma$.

Треугольники ABO и AB′O даютъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\gamma + w)}{\sin w}$$

и

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\gamma - v)}{\sin v}.$$




Фиг. 80.

Изъ этихъ двухъ равенствъ мы получаемъ:

$$tg\,\gamma = \frac{2 \sin w \sin v}{\sin(w - v)}.$$

Разсмотрѣнный нами треугольникъ 110-001-010 даетъ также уголъ при 010, т. е. $\beta$. Если провести различные зональные круги, проходящіе черезъ полюсы извѣстныхъ уже граней, получится положеніе полюса (100) на проекціи. Въ треугольникѣ 001-100-010 извѣстны два угла и прилежащая сторона; можно вычислить третій уголъ, т. е. уголъ при 100, или $\alpha$. Такимъ образомъ изъ пяти элементовъ кристалла извѣстны четыре. Чтобы опредѣлить пятую неизвѣстную, достаточно измѣрить уголъ одной изъ извѣстныхъ граней съ другой гранью, напр. (011) или (111); отношеніе $\frac{c}{b}$ вычисляютъ какъ указано выше.

Наконецъ разсмотримъ тотъ случай, когда кристаллъ состоитъ изъ четырехъ тетартопирамидъ. Измѣряютъ четыре угла тетартопирамидъ и уголъ двухъ противолежащихъ граней; такимъ образомъ извѣстны четыре стороны и одна діагональ сферическаго четыреугольника $111$-$1\bar{1}1$-$\bar{1}\bar{1}1$-$\bar{1}11$. Треугольники $111$-$\bar{1}\bar{1}1$-$\bar{1}11$ и $111$-$1\bar{1}1$-$\bar{1}\bar{1}1$ даютъ углы четыреугольника. Если продолжить дуги $\bar{1}11$-$111$ и $\bar{1}\bar{1}1$-$\bar{1}11$, онѣ встрѣтятся на окружности въ (100); такимъ-же путемъ получается и точка (010).

Углы треугольниковъ $100$-$111$-$1\bar{1}1$ и $010$-$111$-$\bar{1}11$ равны дополненіямъ къ угламъ сферическаго четыреугольника. Вычисляютъ стороны 100-111 и 010-111. Треугольникъ 100-111-010 даетъ сторону 100-010. Положеніе точки (001), находящейся на пересѣченіи двухъ большихъ круговъ [$111$-$\bar{1}\bar{1}1$] и [$1\bar{1}1$-$\bar{1}11$], опредѣляется дугою 001-111. Эта дуга является одной изъ сторонъ треугольника $111$-$1\bar{1}1$-$001$, въ которомъ извѣстны сторона 111-1$\bar{1}$1 и два прилежащихъ угла. Треугольникъ 001-111-100 даетъ дугу 100-001, а треугольникъ 001-111-010 сторону 001-010. Наконецъ изъ треугольника 001-100-010, въ которомъ извѣстны три стороны, опредѣляются три угла $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Отношенія $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ вычисляются тѣмъ способомъ, какой былъ указанъ выше.

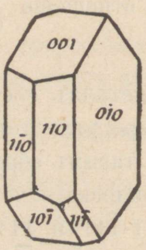
Вообще говоря, за плоскости осей выбираютъ тѣ грани кристалла, которыя образуютъ углы наиболѣе близкіе къ $90^0$.

Если есть производныя формы, ихъ символы опредѣляются или пересѣченіемъ двухъ извѣстныхъ зонъ, или путемъ вычисленія параметровъ для каждой изъ этихъ формъ.

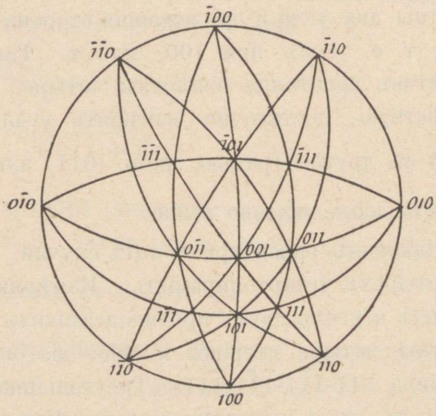
## Примѣры.

### 1. Альбитъ.

Кристаллъ состоитъ изъ двухъ гемипризмъ {110} и {1$\bar{1}$0}, брахипинакоида {010}, базопинакоида {001}, задней гемимакродомы {10$\bar{1}$} и нижней правой тетартопирамиды {11$\bar{1}$} (фиг. 81).



Фиг. 81.



Фиг. 82.

Измѣрены слѣдующіе углы:

$$010\text{-}110 = 180^0 - 119^0\,33' = 60^0\,27'$$
$$110\text{-}1\bar{1}0 = 180^0 - 120^0\,47' = 59^0\,13'$$
$$110\text{-}001 = 180^0 - 114^0\,42' = 65^0\,18'$$
$$1\bar{1}0\text{-}001 = 180^0 - 110^0\,50' = 69^0\,10'$$
$$0\bar{1}0\text{-}\bar{1}\bar{1}1 = 180^0 - 113^0\,41' = 66^0\,19'$$
$$\bar{1}\bar{1}0\text{-}\bar{1}\bar{1}1 = 180^0 - 123^0\;\;6' = 56^0\,54'$$

Черченіе стереографической проекціи (фиг. 82) не представляетъ никакихъ затрудненій.

Треугольникъ $1\bar{1}0$-110-001. — Вычисляемъ уголъ при 001.

$$\sin\frac{001}{2} = \sqrt{\frac{\sin 27^0\,41'\,\sin 31^0\,33'}{\sin 69^0\,10'\,\sin 65^0\,18'}}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 27^0\,41' &= \bar{1},6670647 \\ +\log\sin 31^0\,33' &= \bar{1},7187030 \\ -\log\sin 69^0\,10' &= 0,0293654 \\ -\log\sin 65^0\,18' &= 0,0416712 \\ \hline & \bar{1},4568043 \end{aligned}$$

$$\log\sin\frac{001}{2} = \bar{1},7284021$$

$$\frac{001}{2} = 32^0\,21, \qquad 001 = 64^0\,42'$$

Дополненіе къ нему $115^0\,18' = v + w$.

Треугольникъ 110-010-001. — Вычисляемъ уголъ при 001.

$$\sin\frac{001}{2} = \sqrt{\frac{\sin 19^0\,40'\,\sin 40^0\,46'}{\sin 86^0\,24'\,\sin 65^0\,18'}}$$

$$\begin{aligned} \log\sin 19^0\,40' &= \bar{1},5270463 \\ +\log\sin 40^0\,46' &= \bar{1},8148999 \\ -\log\sin 86^0\,24' &= 0,0008578 \\ -\log\sin 65^0\,18' &= 0,0416712 \\ \hline & \bar{1},3844752 \end{aligned}$$

$$\log\sin\frac{001}{2} = \bar{1},6922376$$

$$\frac{001}{2} = 29^0\,29'\,30'', \qquad 001 = w = 58^0\,59'$$

слѣд.

$$v = 115^0\,18' - 58^0\,59' = 56^0\,19';$$

отсюда

$$tg\,\gamma = \frac{2\sin w \sin v}{\sin(w - v)} = \frac{2\sin 58^0\,59'\,\sin 56^0\,19'}{\sin 2^0\,40'}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ +\log\sin 58^0\,59' &= \bar{1},9329897 \\ +\log\sin 56^0\,19' &= \bar{1},9201836 \\ -\log\sin\ \ 2^0\,40' &= 1,3323107 \\ \hline & \bar{1},4865140 \end{aligned}$$

$$\gamma = 88^0\, 8'$$

$$\frac{a}{b} \text{ или } a = \frac{\sin(w+\gamma)}{\sin w} = \frac{\sin 32^0\, 53'}{\sin 58^0\, 59'}$$

$$\log\sin 32^0\, 53' = \overline{1},7347440$$
$$-\log\sin 58^0\, 59' = 0,0670103$$
$$\overline{1},8017543$$
$$a = 0,6335.$$

Треугольникъ 110-010-001. — Вычисляемъ уголъ при 010:

$$\sin\frac{010}{2} = \sqrt{\frac{\sin 45^0\, 37' \sin 19^0\, 40'}{\sin 60^0\, 27' \sin 86^0\, 24'}}$$

$$\log\sin 45^0\, 37' = \overline{1},8541093$$
$$+\log\sin 19^0\, 40' = \overline{1},5270463$$
$$-\log\sin 60^0\, 27' = 0,0605179$$
$$-\log\sin 86^0\, 24' = 0,0008578$$
$$\overline{1},4425313$$

$$\log\sin\frac{010}{2} = \overline{1},7212657$$

$$\frac{010}{2} = 31^0\, 45'\, 30'', \qquad 010 = 63^0\, 31' \text{ или } 116^0\, 29;$$

такъ какъ $\beta$ должно быть больше $90^0$, мы примемъ

$$\beta = 116^0\, 29'.$$

Треугольникъ 001-010-100. — Вычисляемъ уголъ при 100:

$$\cos 100 = \sin 91^0\, 52' \sin 63^0\, 31' \cos 86^0\, 24' + \cos 92^0\, 10' \cos 63^0\, 31'.$$

$$\log\sin 91^0\, 52' = \overline{1},9997695$$
$$+\log\sin 63^0\, 31' = \overline{1},9518541$$
$$+\log\cos 86^0\, 24' = \overline{2},7978941$$
$$\overline{2},7495177$$

Этому логариѳму соотвѣтствуетъ число 0,056172.

$$\log\cos 92^0\, 10' = \overline{2},5128673$$
$$+\log\cos 63^0\, 31' = \overline{1},6492740$$
$$\overline{2},1621413$$

Соотвѣтствующее число = 0,014526

$$\cos 100 = 0,056172 + 0,014526 = 0,070698$$
$$\log\cos 100 = \overline{2},8494071$$
$$100 = \alpha = 85^0\, 57'.$$

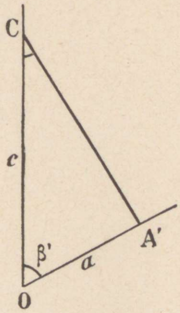
Треугольникъ $1\bar{1}0$-$\bar{1}\bar{1}1$-$0\bar{1}0$. — Вычислимъ уголъ при $0\bar{1}0$:

$$\sin\frac{0\bar{1}0}{2} = \sqrt{\frac{\sin 25^0\,3'\,\sin 31^0\,23'}{\sin 66^0\,19'\,\sin 60^0\,27'}}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 25^0\,31' &= \bar{1},6342491 \\
+\log\sin 31^0\,23' &= \bar{1},7166387 \\
-\log\sin 66^0\,19' &= 0,0382091 \\
-\log\sin 60^0\,27' &= 0,0605179 \\
\hline
&\ \ \bar{1},4496148
\end{aligned}$$

$$\log\sin\frac{0\bar{1}0}{2} = \bar{1},7248074$$

$$\frac{0\bar{1}0}{2} = 32^0\,3', \quad 0\bar{1}0 = 64^0\,6'.$$




Фиг. 83.

Уголъ при $0\bar{1}0$ равенъ углу C въ треугольникѣ A′OC (фиг. 83):

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(\beta' + C)}{\sin C} = \frac{\sin 52^0\,23'}{\sin 64^0\,6'}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 52^0\,23' &= \bar{1},8987867 \\
-\log\sin 64^0\,6' &= 0,0459709 \\
\hline
&\ \ \bar{1},9447576
\end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = 0,8805$$

Но

$$a = 0,6335\,,$$

слѣд.

$$c = 0,8805 \times 0,6335 = 0,5578\,.$$

Итакъ элементы измѣреннаго кристалла суть:

$$\alpha = 85^0\,57', \quad \beta = 116^0\,29', \quad \gamma = 88^0\,8',$$
$$a : 1 : c = 0,6335 : 1 : 0,5578\,.$$

# III. Приложенія.

## 1. Главнѣйшія формулы сферической тригонометріи.

Такъ какъ кристаллографическія вычисленія дѣлаются при помощи стереографической проекціи, постоянно приходится рѣшать сферическіе треугольники. Чаще всего эти треугольники прямоугольные.

Косоугольные треугольники.

A, B, C означаютъ углы, а $a$, $b$, $c$ стороны сферическаго треугольника.

1. Соотношеніе между тремя сторонами и угломъ:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\,, \tag{1}$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\,, \tag{2}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\,. \tag{3}$$

2. Соотношеніе между двумя сторонами и двумя противолежащими углами:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}\,. \tag{4}$$

3. Соотношеніе между двумя сторонами и двумя углами, изъ которыхъ только одинъ противолежитъ одной изъ сторонъ.

$$\cot g\, a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot g\, A\,, \tag{5}$$

$$\cot g\, b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot g\, B\,, \tag{6}$$

$$\cot g\, a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot g\, A\,, \tag{7}$$

$$\cot g\, c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot g\, C\,, \tag{8}$$

$$\cot g\, c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot g\, C\,, \tag{9}$$

$$\cot g\, b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot g\, B\,. \tag{10}$$

4. Соѣтношеніе между одной изъ сторонъ и углами:

(11) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$,

(12) $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$,

(13) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$.

**Формулы Деламбра.** — Извѣстно, что если принять

$$a + b + c = 2p$$

то:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}}$$

Если въ формулѣ

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

замѣнить $\sin \frac{A}{2}$, $\sin \frac{B}{2}$, $\sin \frac{C}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$, $\cos \frac{C}{2}$ только что приведенными выраженіями, получится:

(14) $$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

Такимъ-же путемъ получаются и другія аналогичныя формулы:

(15) $$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$(16)\qquad \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}$$

$$(17)\qquad \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}$$

**Нэперовы аналогіи.** — Если раздѣлить (15) на (17), (14) на (16), (15) на (14) и (17) на (16), получится:

$$(18)\qquad tg\frac{A-B}{2} = cotg\frac{C}{2}\,\frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}$$

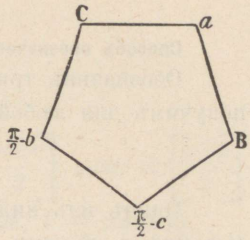
$$(19)\qquad tg\frac{A+B}{2} = cotg\frac{C}{2}\,\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}$$

$$(20)\qquad tg\frac{a-b}{2} = tg\frac{c}{2}\,\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}$$

$$(21)\qquad tg\frac{a+b}{2} = tg\frac{c}{2}\,\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}};$$

по этимъ формуламъ можно вычислить углы A и B, если извѣстны противолежащія имъ стороны $a$ и $b$ и уголъ между ними C, или-же вычислить стороны $a$ и $b$ по противолежащимъ угламъ A и B и по третьей сторонѣ $c$.

Предшествующія формулы, которыя значительно упрощаются въ примѣненіи къ прямоугольнымъ треугольникамъ, могутъ быть выведены на основаніи слѣдующаго правила: если въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ замѣнить $b$ и $c$ черезъ $\frac{\pi}{2}-b$ и $\frac{\pi}{2}-c$ и если обозначить вершины пентагона (фиг. 84) пятью элементами треугольника, $\frac{\pi}{2} - b$, C, $a$, B и $\frac{\pi}{2} - c$, то косинусъ любого изъ этихъ элементовъ равенъ или произведенію котангенсовъ элементовъ непосредственно прилежащихъ, или произведенію синусовъ противолежащихъ элементовъ.



Фиг. 84.

Этимъ путемъ получаются всѣ формулы, необходимыя для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \cos a = \mathrm{cotg}\, B\, \mathrm{cotg}\, C, & \cos a = \cos b \cos c, \\
(2) & \cos B = \mathrm{cotg}\, a\, \mathrm{tg}\, c, & \cos B = \cos b \sin C, \\
(3) & \cos C = \mathrm{cotg}\, a\, \mathrm{tg}\, b, & \cos C = \cos c \sin B, \\
(4) & \sin b = \mathrm{tg}\, c\, \mathrm{cotg}\, C, & \sin b = \sin a \sin B, \\
(5) & \sin c = \mathrm{tg}\, b\, \mathrm{cotg}\, B, & \sin c = \sin a \sin C.
\end{array}
$$

## 2. Различные способы обозначенія кристаллографическихъ формъ.

Важнѣйшіе способы обозначенія кристаллографическихъ формъ принадлежатъ Вейссу, Миллеру, Науманну и Леви.

Первые три изъ нихъ употребляются въ Германіи, послѣднимъ же пользуются французскіе кристаллографы. Каждый изъ нихъ имѣетъ какъ свои преимущества, такъ и недостатки.

Символы Вейсса непосредственно даютъ параметры грани, но способъ обозначенія неудобенъ по своей длиннотѣ для письма.

Система Миллера позволяетъ обозначить различнымъ образомъ любую грань кристалла и въ тоже время весьма удобна для вычисленія зонъ.

Система Науманна представляетъ ничто иное, какъ упрощеніе способа обозначенія Вейсса, но, къ сожалѣнію, въ нѣкоторыхъ случаяхъ символы его могутъ быть только написаны: прочитать ихъ въ слухъ невозможно.

Система обозначенія Леви въ общемъ довольно проста и даетъ соотношенія между простой формой и производной, но она не пригодна вовсе для вычисленій, почему ею пользоваться мы и не будемъ. Въ послѣдующемъ мы дадимъ для каждой кристаллографической системы соотношенія между осями и символы, принятые различными авторами. Пользуясь приложенной къ каждой системѣ таблицей, мы будемъ имѣть возможность переходить безъ вычисленій изъ одного способа обозначенія въ другой.

## Кубическая система.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Обозначивъ три параметра кубической системы черезъ $a$, мы получимъ для любой грани гексакисоктаэдра

$$a : na : ma.$$

Одинъ изъ индексовъ принимается за единицу; числа $m$ и $n$ бываютъ и цѣлыми, и дробными, но въ общемъ весьма простыми. Первый индексъ берется по оси идущей къ наблюдателю, второй по оси параллельной ему, а третій по вертикальной оси.

Геміэдрическая форма обозначается такъ: $\pm \frac{1}{2} (a : na : ma)$.

**Способъ обозначенія Миллера.**

Оси тѣже самыя, какъ и въ обозначеніи Вейсса.

Грань кристалла обозначается: $(hkl)$, цѣлый же кристаллъ: $\{hkl\}$. Индексы $h$, $k$, $l$ берутся по осямъ въ томъ же порядкѣ, какъ и въ обозначеніи Вейсса, причемъ индексъ грани, пересѣкающей данную ось въ отрицательномъ направленіи, пишется съ черточкой на верху, напр.: $(h\bar{k}l)$.

Индексы $h$, $k$, $l$ всегда числа цѣлыя и обратныя индексамъ въ системѣ Вейсса. Вообще говоря, взявъ числа, обратныя индексамъ Вейсса, мы получимъ дроби; но приведя ихъ къ общему знаменателю и отбросивъ послѣдній, мы получимъ числа цѣлыя; при этомъ мы какъ бы переносимъ грань параллельно самой себѣ.

Примѣръ:

$$a : \frac{3}{2}\, a : 3\, a; \text{ по Миллеру: } \left\{ 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3} \right\} = \{321\}$$

Форма геміэдрическая обозначается:

$$\pi\ \{hkl\} \qquad \text{или} \qquad \varkappa\ \{hkl\},$$

смотря потому, относится ли она къ парагеміэдріи, или къ антигеміэдріи.

**Способъ обозначенія Науманна.**

Оси и индексы выбираются также, какъ и въ системѣ Вейсса. Первый индексъ берется по вертикальной оси, второй, принимаемый за единицу, по оси идущей къ наблюдателю, и третій по оси, параллельной наблюдателю. Индексъ 1 Вейсса Науманнъ не пишетъ; если $m$ или $n$ равны тоже единицѣ, то ихъ не пишутъ. Каждая фигура обозначается буквою 0 (октаэдръ); бо́льшій индексъ пишется слѣва отъ 0, меньшій справа.

Примѣры:

$$a : \frac{3}{2} a : 3a = 3\,0\,\frac{3}{2}$$

$$a : 2a : \infty a = \infty\,0\,2$$

Форма геміэдрическая обозначается: $\pm \left[\frac{m0n}{2}\right]$, или: $\pm \left[\frac{m0n}{2}\right] \frac{r}{l}$,

въ случаѣ тѣла энантіоморфнаго ($r$ — правый, $l$ — лѣвый).

**Сравнительная таблица обозначеній кубической системы.**

| Наименованіе фигуръ: | Вейссъ | Миллеръ | Замѣчанія | Науманнъ |
|---|---|---|---|---|
| Кубъ . . . . . | $a : \infty a : \infty a$ | $\{100\}$ | | $\infty 0 \infty$ |
| Октаэдръ . . . . . | $a : a : a$ | $\{111\}$ | | $0$ |
| Ромбическ. додекаэдръ | $a : a : \infty a$ | $\{110\}$ | | $\infty 0$ |
| Тетракисгексаэдръ = пирамидальн. кубъ . | $a : na : \infty a = a : \frac{h}{k} a : \infty a$ | $\{hk0\}$ | $h > k$ | $\infty 0 n$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : \infty a$ | $\{320\}$ | | $\infty 0 \frac{3}{2}$ |
| — | $a : 2a : \infty a$ | $\{210\}$ | | $\infty 0 2$ |
| Тріакисоктаэдръ = пирамидальн. октаэдръ | $a : a : ma = a : a : \frac{h}{k} a$ | $\{hhk\}$ | $h > k$ | $m0$ |
| — | $a : a : \frac{3}{2} a$ | $\{332\}$ | | $\frac{3}{2} 0$ |
| — | $a : a : 3a$ | $\{331\}$ | | $30$ |
| Икоситетраэдръ . . | $a : ma : ma = a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{k} a$ | $\{hkk\}$ | $h > k$ | $m0m$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : \frac{3}{2} a$ | $\{322\}$ | | $\frac{3}{2} 0 \frac{3}{2}$ |
| — | $a : 2a : 2a$ | $\{211\}$ | | $2 0 2$ |
| Гексакисоктаэдръ = сорокавосьмигранникъ | $a : na : ma = a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} a$ | $\{hkl\}$ | $h > k > l$ | $m 0 n = \frac{h}{l} 0 \frac{h}{k}$ |
| — | $a : \frac{4}{3} a : 4a$ | $\{431\}$ | | $4 0 \frac{4}{3}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a$ | $\{321\}$ | | $3 0 \frac{3}{2}$ |

## Гексагональная система.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Символъ какой-нибудь грани, пересѣкающей три горизонтальныхъ оси и вертикальную ось, слѣдующій:

$$a : na : pa : mc$$

или:

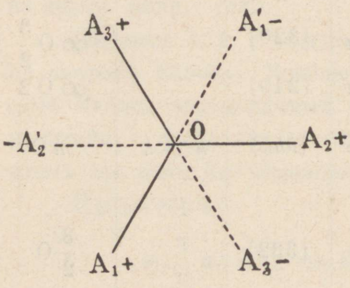
$$a : na : \frac{n}{n-1}\,a : mc$$

такъ какъ $p = \frac{n}{n-1}$.

Три горизонтальныхъ параметра принимаются равными $a$; множители, стоящіе у нихъ, относятся:

первый, равный единицѣ, къ параметру по оси $OA_1$, которая считается положительной въ направленіи $OA_1$ и отрицательной въ противоположномъ направленіи (фиг. 85).

второй множитель, равный $n$, относится къ параметру по оси $OA_2$, положительной въ направленіи $OA_2$ и отрицательной въ направленіи $OA'_2$.



Фиг. 85.

третій, $p$ или $\frac{n}{n-1}$, относится къ параметру по оси $OA_3$, положительной въ направленіи $OA_3$ и отрицательной въ противоположномъ направленіи.

Наконецъ, $m$ множитель параметра $c$ по вертикальной оси.

**Способъ обозначенія Миллера.**

Оси тѣже, какъ и въ предыдущемъ способѣ обозначенія.

Грань дигексагональной пирамиды обозначается: $(hi\overline{kl})$. Такъ же какъ и у Вейсса:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | относится | къ оси $OA_1$, | положительной | по $OA_1$, | отрицательной | по $OA'_1$ |
| $i$ | „ | „ $OA_2$ | „ | „ $OA_2$ | „ | „ $OA'_2$ |
| $k$ | „ | „ $OA_3$ | „ | „ $OA_3$ | „ | „ $OA'_3$ |
| $l$ | „ | къ вертикальной оси. | | | | |

Индексы Миллера суть числа обратныя индексамъ Вейсса; они выражаются цѣлыми числами по способу, упомянутому въ кубической системѣ.

Три первые индекса Миллера подчинены условію:

$$h + i + k = 0 .$$

Примѣръ: $a : \frac{3}{2} a : 3a : c$; по Миллеру: $\left\} 1 \frac{2}{3} \frac{1}{3} 1 \right\{$ или $\{3213\}$, не принимая во вниманія знаки; но, согласно вышеуказанному условію истинный символъ будетъ: $\{3\bar{2}\bar{1}3\}$ или $\{21\bar{3}3\}$.

**Сравнительная таблица обозначеній гексагональной системы.**

| Наименованія фигуръ | Вейссъ | Бравэ-Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Базисъ . . . . . . . . | $\infty a : \infty a : \infty a : c$ | $\{0001\}$ | OP. |
| Призмы | | | |
| Призма 1-го рода . . . . . | $a : a : \infty a : \infty c$ | $\{10\bar{1}0\}$ | $\infty$ P |
| Призма 2-го рода . . . . . | $a : 2a : 2a : \infty c$ | $\{11\bar{2}0\}$ | $\infty$ P2 |
| Дигексагональная призма . . | $a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c$ | $\{hi\bar{k}0\}$ | $\infty$ P$n$ |
| Дигексагональная призма . . | $a : \frac{3}{2} n : 3a : \infty c$ | $\{21\bar{3}0\}$ | $\infty$ P$\frac{3}{2}$ |
| Дигексагональная призма . . | $a : 4a : \frac{4}{3} a : \infty c$ | $\{31\bar{4}0\}$ | $\infty$ P4 |
| Пирамиды | | | |
| Пирамида 1-го рода . . . . . | $a : a : \infty a : mc$ | $\{h0\bar{h}l\}$ | $m$P |
| Основная пирамида 1-го рода | $a : a : \infty a : c$ | $\{10\bar{1}1\}$ | P |
| Пирамида 1-го рода . . . . | $a : a : \infty a : 2c$ | $\{20\bar{2}1\}$ | 2P |
| Пирамида 2-го рода . . . . | $a : 2a : 2a : mc =$ <br> $a : 2a : 2a : \frac{2h}{l} c$ | $\{k\overline{kh}l\}$ или <br> $\{hh\overline{2h}l\}$ | $m$P2 или <br> $\frac{2h}{l}$ P2 |
| Пирамида 2-го рода . . . . | $a : 2a : 2a : 2c$ | $\{11\bar{2}1\}$ | 2P2 |
| Пирамида 2-го рода . . . . | $a : 2a : 2a : 4c$ | $\{22\bar{4}1\}$ | 4P2 |
| Дигексагональная пирамида . | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{hi\bar{k}l\}$ | $m$P$n$ |
| Дигексагональная пирамида . | $a : \frac{3}{2} a : 3a : c$ | $\{21\bar{3}3\}$ | P$\frac{3}{2}$ |
| Дигексагональная пирамида . | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{2} c$ | $\{21\bar{3}2\}$ | $\frac{3}{2}$P$\frac{3}{2}$ |
| Дигексагональная пирамида . | $a : \frac{3}{2} a : 3a : 2c$ | $\{42\bar{6}3\}$ | 2P$\frac{3}{2}$ |

**Способъ обозначенія Науманна.**

Въ этомъ способѣ приняты только двѣ горизонтальныя оси $OA_1$ и $OA'_2$ (фиг. 85) и ось вертикальная; поэтому множитель $\frac{n}{n-1}$ не входитъ въ символъ грани. Индексъ 1 по Науманну не пишется, а индексы $m$ и $n$ тѣже, что и въ способѣ обозначенія Вейсса. Фигуры обозначаются буквой P (пирамида), около которой пишутся индексы, какъ въ кубической системѣ.

Въ символѣ $mPn$ какой-нибудь грани $m$ относится къ вертикальной оси, а $n$ къ одной изъ горизонтальныхъ, причемъ, такъ же какъ и въ кубической системѣ, если одинъ изъ нихъ равенъ единицѣ, то онъ не пишется.

Примѣры:

$$a : \frac{3}{2}a : 3a : c = P\frac{3}{2}$$

$$a : \frac{2}{3}a : 2a : \frac{4}{3}c = \frac{4}{3}P\frac{2}{3}$$

## Тригональная (ромбоэдрическая) система.

Въ эту систему выдѣляются многими кристаллографами всѣ мероэдрическія формы гексагональной системы, обладающія не шестерной, а тройной осью симметріи.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Геміэдрическія формы гексагональной системы по Вейссу обозначаются такъ же, какъ и тѣ полногранныя формы, изъ которыхъ онѣ получаются.

**Способъ обозначенія Бравэ.**

Бравэ предложилъ сохранить четыре индекса Миллера въ гексагональной системѣ и для обозначенія формъ тригональной системы; въ виду удобства этого способа, мы имъ и будемъ пользоваться при кристаллографическихъ вычисленіяхъ.

**Способъ обозначенія Науманна.**

Оси тѣже, что и въ гексагональной системѣ; вмѣсто P пишется R (ромбоэдръ); затѣмъ знаками + или — передъ символами различаются положительный и отрицательный ромбоэдры и скаленоэдры; причемъ за положительный ромбоэдръ считается тотъ, который направленъ гранью впередъ, а за отрицательный — у котораго ребро впереди, за положительный скаленоэдръ тотъ, у котораго направлено впередъ тупое ребро, а за отрицательный тотъ, который направленъ впередъ острымъ ребромъ.

**Сравнительная таблица обозначенiй тригональной системы.**

| Наименованiя фигуръ | Вейссъ | Бравэ | Науманнъ | Миллеръ |
|---|---|---|---|---|
| Базисъ . . . . | $\infty a : \infty a : \infty a : c$ | $\{0001\}$ | 0R | $\{111\}$ |
| Призмы: | | | | |
| 1-го рода . . . . | $a : a : \infty a : \infty c$ | $\{10\bar{1}0\}$ | $\infty R$ | $\{11\bar{2}\}$ |
| 2-го рода . . . . | $a : 2a : 2a : \infty c$ | $\{11\bar{2}0\}$ | $\infty R2$ | $\{10\bar{1}\}$ |
| Дигексагональная . | $a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c$ | $\{h'i'\bar{k}'0\}$ | $\infty Rn$ | $\{hk\bar{l}\}$ |
| — | $a : \frac{5}{4} a : 5a : \infty c$ | $\{41\bar{5}0\}$ | $\infty R \frac{5}{4}$ | $\{21\bar{3}\}$ |
| Ромбоэдры: | | | | |
| Основной . . . . | $a : a : \infty a : c$ | $\{10\bar{1}1\}$ | $+R$ | $\{100\}$ |
| Положительный . | $a : a : \infty a : mc$ | $\{h'0\bar{k}'l'\}$ | $+mR; m<1$ | $\{hll\}$ |
| — | $a : a : \infty a : \frac{1}{2} c$ | $\{10\bar{1}2\}$ | $+\frac{1}{2} R$ | $\{411\}$ |
| — | $a : a : \infty a : mc$ | $\{h'0\bar{k}'l'\}$ | $+mR; m>1$ | $\{h\bar{l}\bar{l}\}$ |
| — | $a : a : \infty a : 2c$ | $\{20\bar{2}1\}$ | $+2R$ | $\{5\bar{1}\bar{1}\}$ |
| Отрицательный . . | $a : a : \infty a : mc$ | $\{0i'\bar{k}'l'\}$ | $-mR; m<1$ | $\{hhl\}$ |
| — | $a : a : \infty a : \frac{1}{3} c$ | $\{01\bar{1}3\}$ | $-\frac{1}{3} R$ | $\{441\}$ |
| — | $a : a : \infty a : mc$ | $\{0i'\bar{k}'l'\}$ | $-mR; m>1$ | $\{hh\bar{l}\}$ |
| — | $a : a : \infty a : c$ | $\{01\bar{1}1\}$ | $-R$ | $\{22\bar{1}\}$ |
| — | $a : a : \infty a : \frac{1}{2} c$ | $\{01\bar{1}2\}$ | $-\frac{1}{2} R$ | $\{110\}$ |
| Скаленоэдры: | | | | |
| Положительный . | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\bar{k}'l'\}$ | $+mRn$ | $\{hkl\}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{7} c$ | $\{21\bar{3}7\}$ | $+\frac{3}{7} R \frac{3}{2}$ | $\{421\}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\bar{k}'l'\}$ | $+mRn$ | $\{hk\bar{l}\}$ |
| — | $a : \frac{5}{3} a : \frac{5}{2} a : \frac{5}{4} c$ | $\{32\bar{5}4\}$ | $+\frac{5}{4} R \frac{5}{3}$ | $41\bar{1}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{k'i'\bar{k}'l'\}$ | $+mRn$ | $\{h\bar{k}\bar{l}\}$ |
| — | $a : \frac{6}{5} a : 6a : 6c$ | $\{51\bar{6}1\}$ | $+6R \frac{6}{5}$ | $\{4\bar{1}\bar{2}\}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\bar{k}'l'\}$ | $+mRn$ | $\{hk0\}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{4} c$ | $\{21\bar{3}4\}$ | $+\frac{3}{4} R \frac{3}{2}$ | $\{310\}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\bar{k}'l'\}$ | $+mRn$ | $\{h0\bar{l}\}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a : 3c$ | $\{21\bar{3}1\}$ | $+3R \frac{3}{2}$ | $\{20\bar{1}\}$ |
| Отрицательный . . | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\bar{k}'l'\}$ | $-mRn$ | $\{hkl\}$ |

**Сравнительная таблица обозначенiй тригональной системы.**

| Наименованiя фигуръ | Вейссъ | Бравэ | Науманнъ | Миллеръ |
|---|---|---|---|---|
| Скаленоэдры: | | | | |
| Отрицательный . . | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{8} c$ | $\{21\overline{3}8\}$ | $-\frac{3}{8} R \frac{3}{2}$ | $\{431\}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a : mc$ | $\{h'i'\overline{k'}l'\}$ | $-mRn$ | $\{hk\overline{l}\}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{2} c$ | $\{21\overline{3}2\}$ | $-\frac{3}{2} R \frac{3}{2}$ | $\{21\overline{1}\}$ |
| — | $a : na : \frac{n}{n-1} a ; mc$ | $\{h'i'\overline{k'}l'\}$ | $-mRn$ | $\{kh0\}$ |
| — | $a : \frac{3}{2} a : 3a : \frac{3}{5} c$ | $\{21\overline{3}5\}$ | $-\frac{3}{5} R \frac{3}{2}$ | $\{320\}$ |
| Пирамида 2-го рода | $a : 2a : 2a : mc$ | $\{h'i'2\overline{h'}l'\}$ | $mP2$ | $\{hkl\}$ |
| — | $a : 2a : 2a : \frac{1}{3} c$ | $\{11\overline{2}6\}$ | $\frac{1}{3} P2$ | $\{321\}$ |
| — | $a : 2a : 2a : \frac{2}{3} c$ | $\{11\overline{2}3\}$ | $\frac{2}{3} P2$ | $\{210\}$ |
| — | $a : 2a : 2a : mc$ | $\{h'i'2\overline{h'}l'\}$ | $mP2$ | $\{hk\overline{l}\}$ |
| — | $a : 2a : 2a : \frac{4}{3} c$ | $\{22\overline{4}3\}$ | $\frac{4}{3} P2$ | $\{31\overline{1}\}$ |

Отношенiя между обозначенiями Вейсса и Науманна тѣже, что и въ гексагональной системѣ.

Примѣръ:

$$a : a : \infty a : 2c = +2R$$

$$a : \frac{4}{3} a : 4a : c = -R \frac{4}{3}$$

**Способъ обозначенiя Миллера.**

За оси Миллеръ принимаетъ ребра тригональной пирамиды. Оси эти равны между собой и пересѣкаются подъ углами равными между собой, но отличными отъ $90^0$. Слѣд. въ данномъ случаѣ имѣется только одна неизвѣстная, а именно уголъ между осями. Если какая-нибудь грань отсѣкаетъ по осямъ отрѣзки равные $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$, то символъ ея будетъ: $(hkl)$.

Между этими индексами и индексами обозначенiя Бравэ (по этому послѣднему какая-нибудь грань кристалла обозначается: $(h'i'\overline{k'}l')$), существуютъ слѣдующiя соотношенiя:

$$h' = h - k \qquad h = l' + h' - k'$$
$$i' = k - l \qquad k = l' + i' - h'$$
$$k' = l - h \qquad l = l' + k' - i'$$
$$l' = h + k + l$$

## Тетрагональная система.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Оба горизонтальныхъ параметра равны $a$; вертикальный — равенъ $c$. Символъ какой-нибудь грани: $a : na : mc$.

**Сравнительная таблица обозначеній тетрагональной системы.**

| Наименованія фигуръ | Вейссъ | Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Базисъ . . . . . . . | $\infty a : \infty a : c$ | $\{001\}$ | 0P |
| Призмы: | | | |
| Призма 1-го рода . . . . | $a : a : \infty c$ | $\{110\}$ | $\infty$P |
| Призма 2-го рода . . . . | $a : \infty a : \infty c$ | $\{100\}$ | $\infty$P$\infty$ |
| Дитетрагональная призма . . | $a : na : \infty c$ | $\{hk0\}$ | $\infty$P$n$ |
| — — | $a : \frac{3}{2} a : \infty c$ | $\{320\}$ | $\infty$P$\frac{3}{2}$ |
| — — | $a : 3a : \infty c$ | $\{310\}$ | $\infty$P3 |
| Пирамиды: | | | |
| Пирамида 1-го рода . . . . | $a : a : mc$ | $\{hhl\}$ | $m$P |
| Основная пирамида 1-го рода | $a : a : c$ | $\{111\}$ | P |
| Пирамида 1-го рода . . . . | $a : a : \frac{1}{2} c$ | $\{112\}$ | $\frac{1}{2}$P |
| Пирамида 1-го рода . . . . | $a : a : \frac{3}{2} c$ | $\{332\}$ | $\frac{3}{2}$P |
| Пирамида 2-го рода . . . . | $a : \infty a : mc$ | $\{h0l\}$ | $m$P$\infty$ |
| — — | $a : \infty a : c$ | $\{101\}$ | P$\infty$ |
| — — | $a : \infty a : 2c$ | $\{201\}$ | 2P$\infty$ |
| — — | $a : \infty a : \frac{3}{2} c$ | $\{302\}$ | $\frac{3}{2}$P$\infty$ |
| Дитетрагональная пирамида . | $a : na : mc$ | $\{hkl\}$ | $m$P$n$ |
| — — | $a : 2a : c$ | $\{212\}$ | P2 |
| — — | $a : 2a : \frac{2}{3} c$ | $\{213\}$ | $\frac{2}{3}$P2 |
| — — | $a : 3a : \frac{3}{2} c$ | $\{312\}$ | $\frac{3}{2}$P3 |

**Способъ обозначенія Миллера.**

Оси тѣже, что и въ обозначеніи Вейсса. Индексы обратны индексамъ Вейсса; послѣдній изъ нихъ относится къ вертикальной оси.

Примѣръ:

$$a : 3a : \frac{3}{2}c = \{312\}.$$

**Способъ обозначенія Науманна.**

Какъ оси, такъ и индексы тѣже, что и у Вейсса.

Въ общемъ случаѣ символъ грани: $m\mathrm{P}n$, причемъ $m$ относится къ вертикальной, а $n$ — къ одной изъ горизонтальныхъ осей.

Примѣръ:

$$a : 2a : \frac{2}{3}\,c = \frac{2}{3}\mathrm{P}2.$$

## Ромбическая система.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Параметръ $a$ относится къ брахидіагонали, параметръ $b$ — къ макродіагонали, и третій $c$ — къ вертикальной оси.

Символъ какой-нибудь грани: $a : nb : mc$.

**Способъ обозначенія Миллера.**

За оси принимаются прямыя, параллельныя осямъ Вейсса. Символъ какой-нибудь грани: $(hkl)$, гдѣ $h$ относится къ макродіагонали, $k$ — къ брахидіагонали и $l$ — къ вертикальной оси.

По Вырубову (Manuel pratique de Cristallographie) $h$ относится къ брахидіагонали, $k$ — къ макродіагонали и $l$ — къ вертикальной оси; въ этомъ случаѣ индексы $h$, $k$, $l$ по прежнему будутъ обратны индексамъ Вейсса.

Примѣръ:

$$2a : b : \frac{2}{3}c = \left\{\frac{1}{2}\;1\;\frac{3}{2}\right\} = \{123\}.$$

**Способъ обозначенія Науманна.**

Оси тѣже, что и въ обозначеніи Вейсса; $m$ относится къ вертикальной оси; $n$, который больше единицы, — къ одной изъ горизонтальныхъ осей.

Если $n$ есть множитель параметра по макродіагонали, то это обозначается черезъ: $\bar{\mathrm{P}}$; если же онъ стоитъ у параметра по брахидіагонали, — то черезъ $\breve{\mathrm{P}}$.

**Сравнительная таблица обозначенiй ромбической системы.**

| Наименованія фигуръ | Вейссъ | Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Пинакоиды: | | | |
| Базисъ . . . . . . . . | $\infty a : \infty b : c$ | $\{001\}$ | $0P$ |
| Макропинакоидъ . . . . . | $a : \infty b : \infty c$ | $\{100\}$ | $\infty \bar{P} \infty$ |
| Брахипинакоидъ . . . . . | $\infty a : b : \infty c$ | $\{010\}$ | $\infty \breve{P} \infty$ |
| Пирамиды: | | | |
| Основная пирамида . . . . | $a : b : c$ | $\{111\}$ | $P$ |
| Ромбическ. пирам. вертик. ряда | $a : b : mc$ | $\{hhl\}$ | $mP$ |
| — — — — | $a : b : 2c$ | $\{221\}$ | $2P$ |
| — — — — | $a : b : \frac{1}{2} c$ | $\{112\}$ | $\frac{1}{2} P$ |
| Макропирамида . . . . . | $a : nb : mc$ | $\{hkl\}$ $(h > k)$ | $m\bar{P}n$ |
| — | $a : 2b : c$ | $\{212\}$ | $\bar{P}2$ |
| — | $a : 2b : \frac{2}{3} c$ | $\{213\}$ | $\frac{2}{3} \bar{P}2$ |
| Брахипирамида . . . . . | $na : b : mc$ | $\{hkl\}$ $(h < k)$ | $m\breve{P}n$ |
| — | $2a : b : c$ | $\{122\}$ | $\breve{P}2$ |
| — | $2a : b : \frac{2}{3} c$ | $\{123\}$ | $\frac{2}{3} \breve{P}2$ |
| Призмы: | | | |
| Основная призма . . . . . | $a : b : \infty c$ | $\{110\}$ | $\infty P$ |
| Макропризма . . . . . . | $a : nb : \infty c$ | $\{hk0\}$ $(h > k)$ | $\infty \bar{P}n$ |
| — | $a : 2b : \infty c$ | $\{210\}$ | $\infty \bar{P}2$ |
| Брахипризма . . . . . . | $na : b : \infty c$ | $\{hk0\}$ $(h < k)$ | $\infty \breve{P}n$ |
| — | $2a : b : \infty c$ | $\{120\}$ | $\infty \breve{P}2$ |
| Домы: | | | |
| Основная макродома . . . . | $a : \infty b : c$ | $\{101\}$ | $\bar{P} \infty$ |
| Макродома . . . . . . . | $a : \infty b : mc$ | $\{h0l\}$ | $m\bar{P} \infty$ |
| — | $a : \infty b : 2c$ | $\{201\}$ | $2\bar{P} \infty$ |
| Основная брахидома . . . . | $\infty a : b : mc$ | $\{011\}$ | $\breve{P} \infty$ |
| Брахидома . . . . . . . | $\infty a : b : mc$ | $\{0kl\}$ | $m\breve{P} \infty$ |
| — | $\infty a : b : 2c$ | $\{021\}$ | $2\breve{P} \infty$ |

Примѣры:

$$a : b : 3c = 3\mathrm{P}$$

$$a : 2b : \frac{3}{2}c = \frac{3}{2}\bar{\mathrm{P}}2$$

$$2a : b : 2c = 2\breve{\mathrm{P}}2$$

$$\infty a : b : 2c = 2\breve{\mathrm{P}}\infty$$

$$a : \frac{3}{2}b : \infty c = \infty\bar{\mathrm{P}}\frac{3}{2}.$$

## Моноклиническая система.

**Способъ обозначенія Вейсса.**

Изъ трехъ параметровъ $a$ относится къ наклонной оси, или клинодіагонали, $b$ — къ горизонтальной оси, или ортодіагонали и послѣдній $c$ — къ вертикальной оси. Тупой уголъ $\beta$, образуемый клинодіагональю съ вертикальной осью располагается впереди наверху.

Символъ какой-нибудь грани будетъ: $a : nb : mc$.

Если клинодіагональ пересѣкается гранью въ отрицательномъ направленіи, то соотвѣтствующій параметръ пишется со значкомъ, напр.: $a' : nb : mc$.

**Способъ обозначенія Миллера.**

Оси и порядокъ параметровъ тѣже, что и въ обозначеніи Вейсса; пересѣченіе гранью отрицательной оси обозначается знакомъ —, поставленнымъ надъ индексомъ. Индексы $h$, $k$, $l$ суть числа обратныя индексамъ Вейсса.

Примѣры:

$$3a : b : \frac{3}{2}c = \{132\}$$

$$a' : 2b : \frac{2}{3}c = \{\bar{2}13\}$$

**Способъ обозначенія Науманна.**

Оси тѣже, что и въ обозначеніи Вейсса. Задняя основная гемипирамида, т. е. та, которая находится въ остромъ углу осей, обозначается: $+\mathrm{P}$, передняя основная гемипирамида черезъ $-\mathrm{P}$.

Если $n$ относится къ клинодіагонали, то соотвѣтствующая пирамида обозначается черезъ: $\pm m\text{Ᵽ}n$, и $\pm m\text{Ᵽ}n$, если $n$ относится къ ортодіагонали; $m$ и $n$ имѣютъ то же значеніе, что и у Вейсса.

Примѣры:

$$a : b : \frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}\mathrm{P}$$

$$a' : \infty b : 2c = +2\text{Ᵽ}\infty$$

$$\infty a : b : 3c = -3\text{Ᵽ}\infty$$

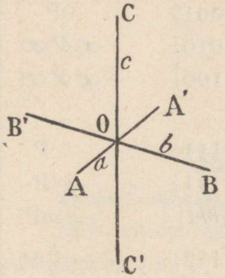
$$2a' : b : \frac{2}{3}c = -\frac{2}{3}\text{Ᵽ}2$$

**Сравнительная таблица обозначенiй моноклиническ. системы.**

| Наименованiя фигуръ | Вейссъ | Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Пинакоиды: | | | |
| Базисъ . . . . . . . . | $\infty a:\infty b:c$ | $\{001\}$ | $0P$ |
| Клинопинакоидъ . . . . . | $\infty a:b:\infty c$ | $\{010\}$ | $\infty\not{P}\infty$ |
| Ортопинакоидъ . . . . . . | $a:\infty b:\infty c$ | $\{100\}$ | $\infty$ ₽ $\infty$ |
| Гемипирамиды: | | | |
| Передняя основная гемипирам. | $a:b:c$ | $\{111\}$ | $-P$ |
| Задняя основная гемипирамида | $a':b:c$ | $\{\bar{1}11\}$ | $+P$ |
| Передняя гемипирамида . . | $a:b:mc$ | $\{hhl\}$ | $-mP$ |
| Передняя гемипирамида . . | $a:b:\frac{1}{2}c$ | $\{112\}$ | $-\frac{1}{2}P$ |
| Задняя гемипирамида . . . | $a':b:mc$ | $\{\bar{h}hl\}$ | $+mP$ |
| Задняя гемипирамида . . . | $a':b:\frac{3}{2}c$ | $\{\bar{3}32\}$ | $+\frac{3}{2}P$ |
| Передняя гемиклинопирамида | $na:b:mc$ | $\{hkl\}\ \{h<k\}$ | $-m\not{P}n$ |
| Передняя гемиклинопирамида | $\frac{3}{2}a:b:3c$ | $\{132\}$ | $-\frac{3}{2}\not{P}3$ |
| Задняя гемиклинопирамида . | $na':b:mc$ | $\{\bar{h}kl\}\ \{h<k\}$ | $+m\not{P}n$ |
| Задняя гемиклинопирамида . | $\frac{3}{2}a':b:3c$ | $\{\bar{1}32\}$ | $+\frac{3}{2}\not{P}3$ |
| Передняя геми-ортопирамида . | $a:nb:mc$ | $\{hkl\}\ \{h>k\}$ | $-m$₽$n$ |
| Передняя геми-ортопирамида . | $a:3b:\frac{3}{2}c$ | $\{312\}$ | $-\frac{3}{2}$₽$3$ |
| Задняя геми-ортопирамида . | $a':nb:mc$ | $\{\bar{h}kl\}\ \{h>k\}$ | $+m$₽$n$ |
| Задняя геми-ортопирамида . | $a':2b:2c$ | $\{\bar{2}11\}$ | $+2$₽$2$ |
| Призмы: | | | |
| Основная призма . . . . . | $a:b:\infty c$ | $\{110\}$ | $\infty P$ |
| Клинопризма . . . . . . . | $na:b:\infty c$ | $\{hk0\}\ \{h<k\}$ | $\infty\not{P}n$ |
| — | $3a:b:\infty c$ | $\{130\}$ | $\infty\not{P}3$ |
| Ортопризма . . . . . . . | $a:nb:\infty c$ | $\{hk0\}\ \{h>k\}$ | $\infty$₽$n$ |
| — | $a:\frac{3}{2}b:\infty c$ | $\{320\}$ | $\infty$₽$\frac{3}{2}$ |
| Домы: | | | |
| Клинодома . . . . . . . | $\infty a:b:mc$ | $\{0kl\}$ | $m\not{P}\infty$ |
| — | $\infty a:b:c$ | $\{011\}$ | $\not{P}\infty$ |
| — | $\infty a:b:2c$ | $\{021\}$ | $2\not{P}\infty$ |
| Передняя геми-ортодома . . | $a:\infty b:mc$ | $\{h0l\}$ | $-m$₽$\infty$ |
| — — | $a:\infty b:c$ | $\{101\}$ | $-$₽$\infty$ |
| — — | $a:\infty b:2c$ | $\{201\}$ | $-2$₽$\infty$ |
| Задняя геми-ортодома . . . | $a':\infty b:mc$ | $\{\bar{h}0l\}$ | $+m$₽$\infty$ |
| — — | $a':\infty b:c$ | $\{\bar{1}01\}$ | $+$₽$\infty$ |
| — — | $a':\infty b:\frac{1}{2}c$ | $\{\bar{1}02\}$ | $+\frac{1}{2}$₽$\infty$ |

## Триклиническая система.

### Способъ обозначенія Вейсса.




Фиг. 86.

Параметръ $a$ относится къ брахидіагонали OA, образующей съ OC тупой уголъ $\beta$ (фиг. 86), причемъ углы $AOB = \gamma$ и $BOC = \alpha$ могутъ быть или острыми или тупыми; параметръ $b$ относится къ макродіагонали OB, и, наконецъ, параметръ $c$ къ вертикальной оси OC.

Символъ какой-нибудь грани: $a : nb : mc$; значекъ $'$ надъ параметромъ указываетъ на пересѣченіе отрицательной полуоси.

### Способъ обозначенія Миллера.

Оси тѣже, что и у Вейсса; индексы — числа обратныя индексамъ Вейсса.

Примѣры:

$$a' : \infty b : 3c = \{\overline{3}01\}$$

$$a : b' : \frac{3}{2} c = \{3\overline{3}2\}.$$

### Способъ обозначенія Науманна.

Оси тѣже, что и у Вейсса; общій символъ: $m\mathrm{P}n$, гдѣ $m$ относится къ вертикальной оси, а $n$ къ одной изъ горизонтальныхъ. Если $n$ относится къ макродіагонали, то пишутъ $m\overline{\mathrm{P}}n$, если къ брахидіагонали, то $m\breve{\mathrm{P}}n$; значки у P наверху, внизу, справа и слѣва указываютъ, о которой изъ четырехъ тетартопирамидъ идетъ рѣчь,

Примѣры:

$$a : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} \mathrm{P}'$$

$$2a : b : 2c' = 2\breve{\mathrm{P}}_{,}2$$

$$a : \frac{3}{2} b : 3c = 3'\overline{\mathrm{P}} \frac{3}{2}$$

$$a : 3b' : \infty c = \infty\, {}'_{,}\overline{\mathrm{P}} \frac{3}{}$$

$$a' : \infty b : 3c = 3_{,}\overline{\mathrm{P}}_{,} \infty$$

**Сравнительная таблица обозначеній триклинической системы.**

| Наименованія фигуръ | Вейссъ | Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Пинакоиды: | | | |
| Базисъ . . . . . . . . | $\infty a : \infty b : c$ | $\{001\}$ | $0P$ |
| Брахипинакоидъ . . . . . | $\infty a : b : \infty c$ | $\{010\}$ | $\infty \breve{P} \infty$ |
| Макропинакоидъ . . . . . | $a : \infty b : \infty c$ | $\{100\}$ | $\infty \bar{P} \infty$ |
| Гемипризмы: | | | |
| Правая основная призма . . | $a : b : \infty c$ | $\{110\}$ | $\infty P'_{,}$ |
| Лѣвая — — | $a : b' : \infty c$ | $\{1\bar{1}0\}$ | $\infty {}'_{,}P$ |
| Правая гемибрахипризма . . | $na : b : \infty c$ | $\{hk0\}$ $\{h < k\}$ | $\infty \breve{P}'_{,}n$ |
| — — — | $2a : b : \infty c$ | $\{120\}$ | $\infty \breve{P}'_{,}2$ |
| Лѣвая — — | $na : b' : \infty c$ | $\{h\bar{k}0\}$ | $\infty {}'_{,}\breve{P}n$ |
| — — — | $3a : b' : \infty c$ | $\{1\bar{3}0\}$ | $\infty {}'_{,}\breve{P}3$ |
| Правая гемимакропризма . . | $a : nb : \infty c$ | $\{hk0\}$ $\{h > k\}$ | $\infty \bar{P}'_{,}n$ |
| — — — | $a : 3b : \infty c$ | $\{310\}$ | $\infty \bar{P}'_{,}3$ |
| Лѣвая — — | $a : nb' : \infty c$ | $\{h\bar{k}0\}$ | $\infty {}'_{,}\bar{P}n$ |
| — — — | $a : \frac{3}{2} b' : \infty c$ | $\{3\bar{2}0\}$ | $\infty \, {,}\bar{P} \frac{3}{2}$ |
| Гемидомы: | | | |
| Правая гемибрахидома . . . | $\infty a : b : mc$ | $\{0kl\}$ | $m{,}\breve{P}' \infty$ |
| — — — | $\infty a : b : \frac{1}{2} c$ | $\{012\}$ | $\frac{1}{2} {,}\breve{P}' \infty$ |
| Лѣвая гемибрахидома . . . | $\infty a : b' : mc$ | $\{0\bar{k}l\}$ | $m'\breve{P}{,}\infty$ |
| — — — | $\infty a : b' : 2c$ | $\{0\bar{2}1\}$ | $2'\breve{P}{,}\infty$ |
| Передняя гемимакродома . . | $a : \infty b : mc$ | $\{h0l\}$ | $m'\bar{P}' \infty$ |
| — — — | $a : \infty b : \frac{3}{4} c$ | $\{304\}$ | $\frac{3}{4} '\bar{P}' \infty$ |
| Задняя гемимакродома . . . | $a' : \infty b : mc$ | $\{\bar{h}0l\}$ | $m{,}\bar{P}{,}\infty$ |
| — — — | $a' : \infty b : 3c$ | $\{\bar{3}01\}$ | $3{,}\bar{P}{,}\infty$ |
| Пирамиды: | | | |
| Правая верхн. основ. пирамида | $a : b : c$ | $\{111\}$ | $P'$ |
| Лѣвая — — — | $a : b' : c$ | $\{1\bar{1}1\}$ | $'P$ |
| Правая нижняя — — | $a : b : c'$ | $\{11\bar{1}\}$ | $P{,}$ |
| Лѣвая — — — | $a : b' : c'$ | $\{1\bar{1}\bar{1}\}$ | ${,}P$ |
| Правая верхняя тетартопирам. | $a : b : mc$ | $\{hhl\}$ | $mP'$ |
| — — — | $a : b : \frac{2}{3} c$ | $\{223\}$ | $\frac{3}{2} P'$ |
| Лѣвая — — | $a : b' : mc$ | $\{h\bar{h}l\}$ | $m'P$ |
| — — — | $a : b' : \frac{1}{2} c$ | $\{1\bar{1}1\}$ | $\frac{1}{2} 'P$ |

**Сравнительная таблица обозначенiй триклинической системы.**

| Наименованiя фигуръ | Вейссъ | Миллеръ | Науманнъ |
|---|---|---|---|
| Правая нижняя тетартопирам. | $a : b : mc'$ | $\{hh\bar{l}\}$ | $m\mathrm{P},$ |
| — — — | $a : b : 2c'$ | $\{22\bar{1}\}$ | $2\mathrm{P},$ |
| Лѣвая — — | $a : b' : mc'$ | $\{h\bar{h}\bar{l}\}$ | $m,\mathrm{P}$ |
| — — — | $a : b' : \frac{3}{2} c'$ | $\{3\bar{3}\bar{2}\}$ | $\frac{3}{2},\mathrm{P}$ |
| Правая верхняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $na : b : mc$ | $\{hkl\}$ $\{h < k\}$ | $m\breve{\mathrm{P}}'n$ |
| Правая верхняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $3a : b : 3c$ | $\{131\}$ | $3\breve{\mathrm{P}}'3$ |
| Лѣвая верхняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $na : b' : mc$ | $\{h\bar{k}l\}$ | $m'\breve{\mathrm{P}}n$ |
| Лѣвая верхняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $3a : b' : 3c$ | $\{1\bar{3}1\}$ | $3'\breve{\mathrm{P}}3$ |
| Правая нижняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $na : b : mc'$ | $\{hk\bar{l}\}$ | $m\breve{\mathrm{P}},n$ |
| Правая нижняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $2a : b : 2c'$ | $\{12\bar{1}\}$ | $2\breve{\mathrm{P}},2$ |
| Лѣвая нижняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $na : b' : mc'$ | $\{h\bar{k}\bar{l}\}$ | $m,\breve{\mathrm{P}}n$ |
| Лѣвая нижняя тетартобрахипирамида . . . . . . . | $2a : b' : \frac{2}{3} c'$ | $\{1\bar{2}\bar{3}\}$ | $\frac{2}{3},\breve{\mathrm{P}}3$ |
| Правая верхняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : nb : mc$ | $\{hkl\}$ $\{h > k\}$ | $m\bar{\mathrm{P}}'n$ |
| Правая верхняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : 3b : 3c$ | $\{311\}$ | $3\bar{\mathrm{P}}'3$ |
| Лѣвая верхняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : nb' : mc$ | $\{h\bar{k}l\}$ | $m'\bar{\mathrm{P}}n$ |
| Лѣвая верхняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : \frac{3}{2} b' : 3c$ | $\{3\bar{2}1\}$ | $3'\bar{\mathrm{P}}\frac{3}{2}$ |
| Правая нижняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : nb : mc'$ | $\{hk\bar{l}\}$ | $m\bar{\mathrm{P}},n$ |
| Правая нижняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : 3b : \frac{3}{2} c'$ | $\{31\bar{2}\}$ | $\frac{3}{2}\bar{\mathrm{P}},3$ |
| Лѣвая нижняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : nb' : mc'$ | $\{h\bar{k}\bar{l}\}$ | $m,\bar{\mathrm{P}}n$ |
| Лѣвая нижняя тетартомакропирамида . . . . . . . | $a : 2b' : c'$ | $\{2\bar{1}\bar{2}\}$ | $,\bar{\mathrm{P}}2$ |

## 3. Черченіе кристаллографическихъ фигуръ.

Кристаллъ проецируютъ на плоскость, параллельную двумъ ребрамъ основной формы, при помощи параллельныхъ прямыхъ, идущихъ подъ нѣкоторымъ угломъ къ этой плоскости; если эти параллельныя идутъ перпендикулярно къ плоскости проекціи, то получается т. назыв. ортогональная проекція. Она употребляется иногда для черченія формъ весьма сложныхъ; кубъ, проецированный такимъ образомъ, изображенъ былъ бы квадратомъ.

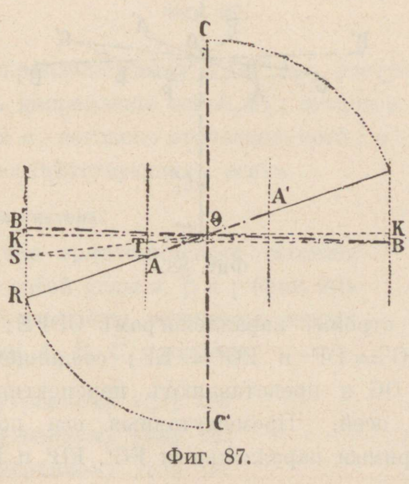
Для того чтобы на рисункѣ ясно была видна по крайней мѣрѣ половина всѣхъ граней кристалла, приходится его повернуть на нѣкоторый уголъ справа на лѣво и сзади на передъ.

Въ этомъ случаѣ возникаетъ задача: найти то новое положеніе, которое заняли кристаллографическія оси послѣ вышеуказаннаго поворота кристалла, причемъ уголъ наклоненія $\delta$ выбираютъ обыкновенно равнымъ $18^0\,26'$ ($cotg\,\delta = 3$), а уголъ склоненія $\varepsilon$ равнымъ $9^0\,28'$ ($cotg\,\varepsilon = 2\,cotg\,\delta = 6$).

Вмѣсто этого довольно сложнаго построенія мы будемъ пользоваться нижеописаннымъ, которое болѣе просто, а результаты, даваемые имъ, почти тѣже, что и у вышеуказаннаго.

#### Перспективное изображеніе осей кубической системы.

Проводимъ прямыя KK′ и CC′ (фиг. 87) перпендикулярно другъ другу; дѣлимъ KK′ на шесть равныхъ частей. Черезъ точки K и K′,




Фиг. 87.

а также черезъ второе и четвертое дѣленіе проводимъ прямыя, параллельныя CC′. Возьмемъ прямую K′R равную $\frac{KK'}{6}$, соединимъ R съ O и продолжимъ прямую RO; при пересѣченіи ея съ прямыми, параллельными OC и проходящими черезъ второе и четвертое дѣленіе, получимъ точки A и A′. Одна изъ искомыхъ осей будетъ AOA′.

Черезъ A проводимъ прямую параллельную KK′ и соединяемъ S съ O. Черезъ точку T пересѣченія прямой SO съ линіей, параллельной CC′ и проходящей черезъ второе дѣленіе, проводимъ TB параллельно KK′. Соединяемъ BO и продолжаемъ до B′. Вторая искомая ось есть BOB′.

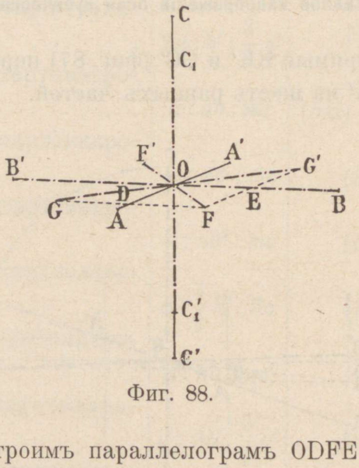
Отложимъ $OC = OC' = OR$; третья ось будетъ COC′.

Построивъ крестъ осей для кубической системы, мы легко можемъ перейти къ кресту осей для любой другой.

**Гексагональная система.**

Пусть OAA′BB′CC′ крестъ осей кубической системы (фиг. 88).

На OC отложимъ $OC_1 = OC \times c$, гдѣ $c$ есть отношеніе осей изображеннаго кристалла. $C_1C'_1$ будетъ вертикальной осью. На OA откладываемъ $OD = OA \frac{\sqrt{3}}{2}$; дѣлимъ OB пополамъ; получимъ точку




Фиг. 88.

E. На OE и OD строимъ параллелограмъ ODFE; продолжаемъ FD и FE, беремъ $DG = DF$ и $EG' = EF$; соединяемъ G и F съ O; прямыя OB, OF, OG и представляютъ перспективныя изображенія горизонтальныхъ осей. Промежуточныя оси получимъ, проведя черезъ центръ прямыя параллельныя FG′, FB′ и B′G′.

**Тетрагональная система.**

Достаточно на OC отложить $OC_1 = OC \times c$, гдѣ $c$ отношенiе осей изображаемаго кристалла; горизонтальныя же оси остаются безъ измѣненiя.

**Ромбическая система.**

Откладываемъ $OC_1 = OC \times c$ и $OA_1 = OA \times a$, причемъ отношенiе осей таково: $a : 1 : c$.

**Моноклиническая система.**

Оси $BB'$ и $CC'$ взаимно перпендикулярны и своего направленiя не мѣняютъ. Такъ какъ $\beta$ есть тупой уголъ, образуемый клинодiагональю съ вертикальной осью, то на OA (фиг. 89) откладываемъ $OA_1 = OA \sin \beta'$, гдѣ $\beta' = 180^0 - \beta$ и на $OC'$ беремъ $OC'_1 = OC' \cos \beta'$.

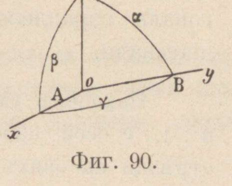

Фиг. 89.

Дiагональ параллелограмма $A_1OC'_1A_2$, построеннаго на $OA_1$ и $OC'_1$, дастъ намъ направленiе оси $A_2A'_2$; остается только умножить $OA_2$ на $a$ и OC на $c$, согласно отношенiю осей: $a : 1 : c$, и отложить эти отрѣзки на соотвѣтствующихъ осяхъ.

**Триклиническая система.**

Такъ какъ оси триклинической системы образуютъ между собой углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ (фиг. 90), то координатныя плоскости находятся между собой подъ углами A, B, C, причемъ

A = двугранному углу OA
B = двугранному углу OB
C = двугранному углу OC



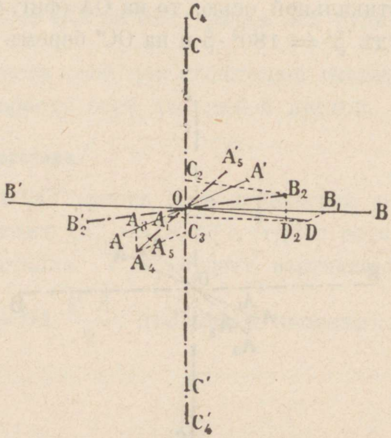

Фиг. 90.

Координатныя плоскости, пересѣкаясь съ шаромъ, описаннымъ около центра O, образуютъ сферическій треугольникъ, стороны котораго суть углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и углы котораго равны A, B и C.

Зная $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и положивъ $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, найдемъ:

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}.$$

Откладываемъ на изображеніи креста осей кубической системы (фиг. 91) $OA_1 = OA\cos C$ и $OB_1 = OB\sin C$, причемъ $OB_1$ откладываемъ направо отъ O, если уголъ C меньше, и налѣво отъ O, если уголъ C больше $90^0$.




**Фиг. 91.**

Строимъ затѣмъ параллелограммъ $A_1DB_1O$ и соединяемъ O съ D. Откладываемъ $OD_2 = OD\sin\alpha$ и $OC_2 = OC\cos\alpha$, причемъ $OC_2$ откладываемъ вверхъ, если уголъ $\alpha$ меньше, и внизъ, если онъ больше чѣмъ $90^0$. Діагональ $OB_2$ параллелограмма даетъ намъ проекцію макродіагонали.

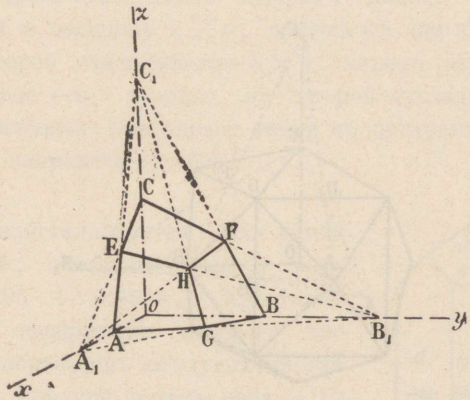
На OA откладываемъ $OA_3 = OA\sin\beta$ и $OC_3 = OC'\cos\beta$. Діагональ параллелограмма $OA_3C_3A_4$ представляетъ проекцію брахидіагонали.

Наконецъ умножаемъ OA на $a$ и OC на $c$, согласно отношенію $a : 1 : c$ осей изображаемаго кристалла и беремъ соотвѣтствующіе отрѣзки на осяхъ.

### Примѣры.

Всякая грань кристалла изображается слѣдомъ ея на координатныя плоскости. Слѣды сосѣднихъ граней пересѣкаются между собой въ точкахъ, которыя, будучи соединены прямыми, даютъ проекціи реберъ кристалла.

**Икоситетреэдръ:** $a : 2a : 2a$.




Фиг. 92.

Слѣды грани $a : 2a : 2a$ суть:

$AB_1$ на плоскости $xy$
$AC_1$ „ „ $xz$
$B_1C_1$ „ „ $yz$.

Слѣды грани $2a : 2a : a$ суть:

$A_1B_1$ на плоскости $xy$
$A_1C$ „ „ $xz$
$B_1C$ „ „ $yz$

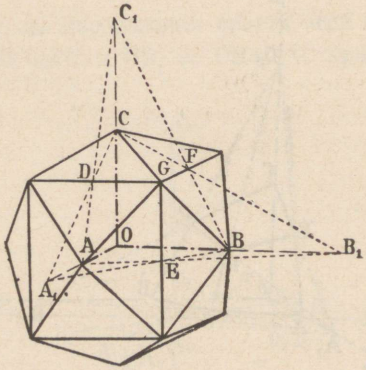
Слѣды $A_1C$ и $AC_1$ пересѣкаются въ E; слѣды $CB_1$ и $C_1B_1$, а также $AB_1$ и $A_1B_1$, въ точкѣ $B_1$. Пересѣченіемъ граней $a : 2a : 2a$ и $2a : 2a : a$ будетъ прямая $B_1E$, которая, такимъ образомъ, и есть проекція ребра кристалла.

Поступая такимъ же образомъ и съ остальными гранями, получимъ рисунокъ всѣхъ реберъ. Достаточно получить этимъ способомъ проекцію половины кристалла; другую половину легко нарисовать, пользуясь симметріей кристалла.

Въ случаѣ если бы одинъ изъ индексовъ кристалла былъ равенъ безконечности, т. е. кристаллъ обладалъ бы гранями параллельными какой-нибудь оси, выгоднѣе пользоваться особымъ методомъ.

**Пирамидальный кубъ:** $a : 2a : \infty a$.

Пусть OAA′BB′CC′ крестъ осей кубической системы. Отложимъ на осяхъ удвоенные параметры: $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$ (фиг. 93).




Фиг. 93.

Проводимъ прямыя $A_1B$ и $AB_1$, которыя пересѣкутся въ точкѣ E. Продѣлавъ тоже самое съ другими осями, получимъ точки: D, F, ...... Черезъ эти точки, представляющія середины реберъ куба, проводимъ параллельно осямъ прямыя которыя встрѣтятся по шести въ одной точкѣ, и, наконецъ, соединяемъ точки ихъ взаимнаго пересѣченія съ концами осей.

Вышеописанный общій способъ представляетъ иногда большія неудобства. Если приходится рисовать кристаллъ, богатый гранями, то является необходимость вычерчивать большое число вспомогательныхъ линій, затемняющихъ рисунокъ и требующихъ во избѣжаніе ошибокъ напряженнаго вниманія. Кромѣ того, часто точки пересѣченій слѣдовъ граней находятся на весьма большомъ разстояніи отъ центра, такъ что приходится пользоваться или большими листами бумаги, или уменьшать въ ущербъ ясности масштабъ осей.

Для избѣжанія этихъ неудобствъ можно примѣнить слѣдующій болѣе простой способъ: такъ какъ ребро, образуемое двумя гранями, параллельно оси зоны, къ которой эти двѣ грани принадлежатъ, то вполнѣ достаточно найти направленіе оси зоны, причемъ всегда можно предположить что она проходитъ черезъ начало координатъ.

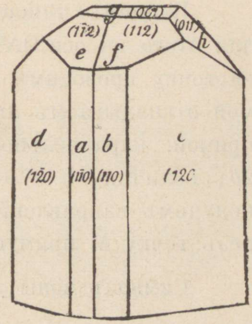
Пусть $(efg)$ и $(hkl)$ символы двухъ граней; тогда символъ зоны, образованной этими гранями, будетъ $[uvw]$, причемъ:

$$u = fl - gk$$
$$v = gh - el$$
$$w = ek - fh.$$

Индексы $u$, $v$, $w$ опредѣляютъ положенiе нѣкоторой точки, и прямая, проходящая черезъ эту точку и центръ осей, будетъ параллельна пересѣченiю двухъ данныхъ граней. Откладываемъ; поэтому на оси $x$ величину $u \times a$, проводимъ параллельно оси $y$ прямую, на которой откладываемъ $b \times v$; черезъ эту точку проводимъ параллельно оси $z$ прямую, на которой откладываемъ $w \times c$; прямая, соединяющая послѣднюю точку съ центромъ, и представляетъ искомое направленiе ребра.

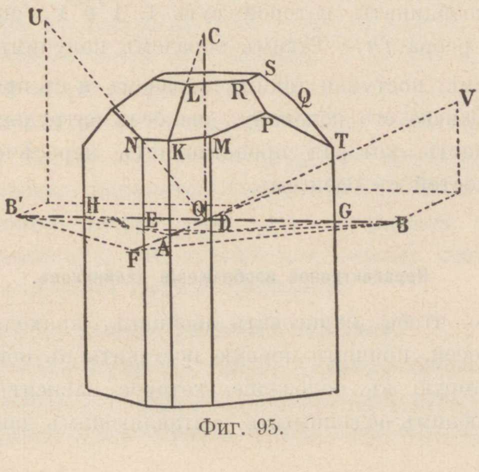
**Топазъ.**

Топазъ кристаллизуется въ ромбической системѣ; отношенiе осей у него: $a : b : c = 0{,}5285 : 1 : 0{,}9539$. Кристаллъ, перспективное изображенiе котораго требуется найти, образованъ слѣдующими гранями (фиг. 94): призмой перваго рода $\{110\}$, брахипризмой $\{120\}$, пирамидой перваго рода $\{112\}$, брахидомой $\{011\}$, и, наконецъ, базисомъ $\{001\}$; кристаллъ гемиморфенъ.



Фиг. 94.

Умножаемъ переднюю и вертикальную оси кубической системы на величины $a$ и $c$, входящiя въ отношенiе осей нашего кристалла; такимъ образомъ получаемъ оси кристалла: OA, OB и OC (фиг. 95).



Фиг. 95.

Соединяемъ A и B; черезъ точку D прямой AB проводимъ линію, параллельную OB. Отложимъ затѣмъ $OF = 2OA$ и проводимъ прямыя DG и DH параллельно FB и FB$'$. Вертикальныя ребра кристалла будутъ тогда проходить черезъ точки H, E, A, D и G. Соединяя C съ F, получимъ точку K на пересѣченіи этой прямой съ вертикальнымъ ребромъ, проходящимъ черезъ точку A. Взявъ на прямой CK точку L, мы легко можемъ найти пересѣченія базиса *g* съ сосѣдними гранями. Прямая, параллельная AB и проведенная черезъ K, дастъ намъ точку M.

Символъ зоны *fc*:

$$\begin{array}{lc|ccccccc|c} f \ldots\ldots & 1 & 1 & & 2 & & 1 & & 1 & 2 \\ c \ldots\ldots & 1 & 2 & \times & 0 & \times & 1 & \times & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$[\bar{4}\ \ 2\ \ 1]$$

Найдемъ теперь точку, координаты которой суть $\bar{4}$, 2 и 1; для этого на оси OA$'$ откладываемъ величину $4a$; черезъ конечкую ея точку проводимъ прямую, параллельную оси OB; на этой прямой откладываемъ линію, равную $2b$, и наконецъ откладываемъ на прямой, параллельной оси OC и проходящей черезъ конецъ линіи $2b$, величину C. Соединивъ эту послѣднюю точку съ центромъ, получимъ направленіе OV ребра *fc*. Остается только провести черезъ точку M прямую параллельно OV.

Символъ зоны *fh*:

$$\begin{array}{lc|ccccccc|c} f \ldots\ldots & 1 & 1 & & 2 & & 1 & & 1 & 2 \\ h \ldots\ldots & 0 & 1 & \times & 1 & \times & 0 & \times & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$[\bar{1}\ \ \bar{1}\ \ 1]$$

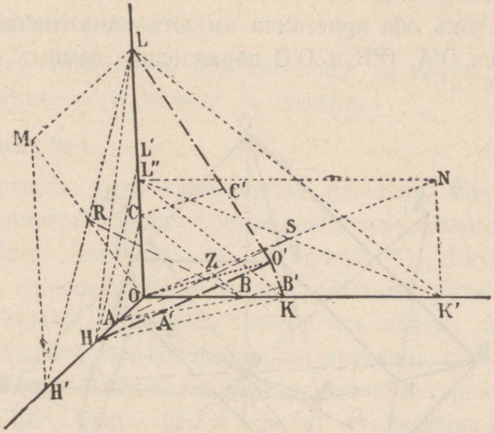
Точка, координаты которой суть $\bar{1}$, $\bar{1}$ и 1, опредѣляетъ направленіе OU ребра *fh*. Такимъ образомъ получимъ точку P.

Нарисовавъ, поступая такимъ образомъ и съ прочими гранями кристалла, верхнюю его половину, мы безъ затрудненія начертимъ нижнюю его часть, которая представляетъ пересѣченія призматическихъ плоскостей съ базисомъ.

### Перспективное изображеніе двойниковъ.

Для того, чтобы нарисовать двойникъ, приходится построить двѣ системы осей, причемъ первую поставить въ обыкновенное положеніе, а вторую въ положеніе, которое зависитъ отъ символа грани, общей обоимъ недѣлимымъ, составляющимъ данный двойникъ.

Пусть OA, OB и OC (фиг. 96) оси перваго кристалла, параметры котораго суть $a$, $b$ и $c$. Разберемъ наиболѣе общій случай,




Фиг. 96.

предположивъ, что какая-нибудь грань HKL есть двойниковая плоскость. Найдемъ сначала точку Z — основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра O на плоскость HKL.

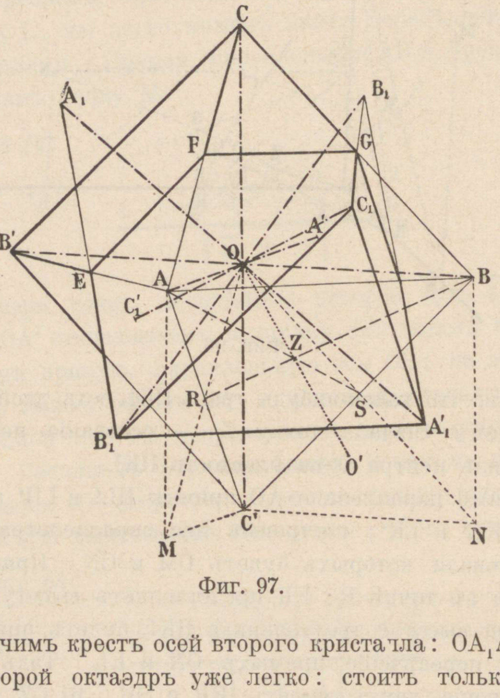
Проводимъ параллельно AC прямыя HL′ и LH′ и параллельно BC прямыя KL′ и LK′; построимъ два параллелограмма OH′ML′ и OK′NL′, діагонали которыхъ будетъ OM и ON. Прямыя OM и HL пересѣкаются въ точкѣ R; KR представляетъ высоту треугольника HKL. Второй высотой треугольника HKL будетъ прямая SH, причемъ S есть пересѣченіе прямыхъ ON и KL. Такъ какъ точка Z есть пересѣченіе двухъ высотъ KR и SH, то OZ есть проекція перпендикуляра къ плоскости HKL. Продолжая OZ на равное разстояніе, получаемъ точку O′. Прямыя O′H, O′K и O′L даютъ направленія осей второго кристалла. Для того чтобы на нихъ получить длину параметровъ, проводимъ черезъ точки A, B и C прямыя параллельныя OZ до ихъ пересѣченія съ крестомъ осей второго кристалла; искомые параметры будутъ: O′A′, O′B′ и O′C′. Остается теперь нарисовать второй кристаллъ совершенно также, какъ и первый, и передвинуть его параллельно самому себѣ такимъ образомъ, чтобы получился данный двойникъ.

П р и м ѣ р ъ: **Октаэдръ магнитнаго желѣзняка.**

Двойниковой плоскостью здѣсь служитъ грань октаэдра.

Пусть OAA′BB′CC″ (фиг. 97) крестъ осей кубической системы. Принявъ за двойниковую плоскость ABC′, строимъ параллелограммы

AOC′M и BOC′N, діагонали которыхъ пересѣкаются въ точкахъ R и S; прямыя эти пересѣкутся въ точкѣ Z. Продолжая OZ на равное разстояніе, получимъ центръ новой системы осей: O′A, O′B и O′C. Такъ какъ оба кристалла имѣютъ одинъ общій центръ, то переносимъ оси O′A, O′B и O′C параллельно самимъ себѣ; такимъ




Фиг. 97.

образомъ получимъ крестъ осей второго кристалла: $OA_1A'_1B_1B'_1C_1C'_1$. Нарисовать второй октаэдръ уже легко: стоитъ только соединить концы осей между собой. Двойниковую плоскость получимъ, соединяя точки E, F, G . . . ., представляющія пересѣченія двухъ реберъ каждаго кристалла.

## 4. Приспособленія Пенфильда для черченія стереографической проекціи и для производства на ней измѣреній графическимъ путемъ.

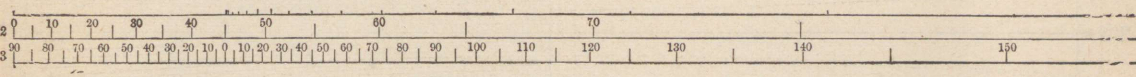
Черченіе стереографической проекціи и рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ могутъ быть упрощены при помощи нѣкоторыхъ графическихъ пріёмовъ, для примѣненія которыхъ требуется два условія: 1) всегда слѣдуетъ придерживаться одного опредѣленнаго размѣра стереографической проекціи, 2) нужно имѣть шкалы и транспортиры, спеціально приноровленные для нахожденія графическимъ путемъ такихъ точекъ, которыя обыкновенно находятся лишь путемъ вычисленій.

**Стереографическія сѣтки.**

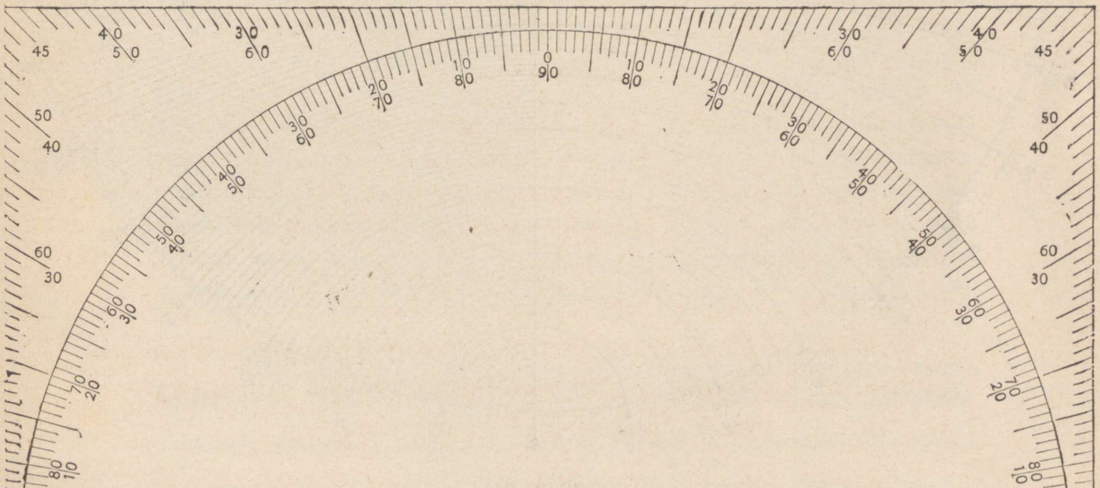
Пенфильдъ остановился для проекціей на кругѣ діаметромъ въ 14 стм.; окружность раздѣлена на градусы.

**Транспортиръ № I.**

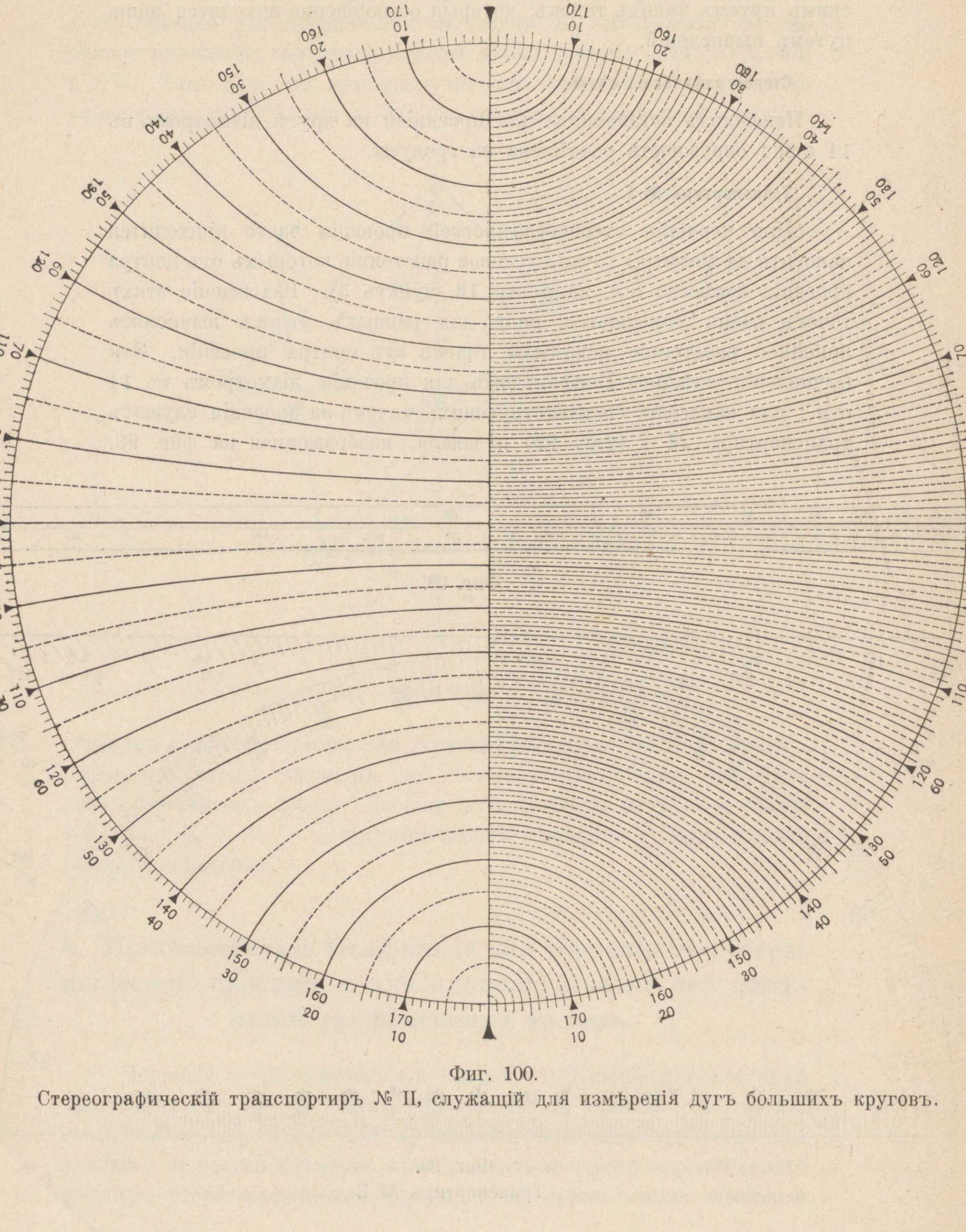
При черченіи стереографической проекціи часто приходится наносить на діаметры точки, угловое разстояніе которыхъ отъ центра проекціи извѣстно (см. напр. стр. 16, пунктъ 5). Нахожденіе этихъ точекъ очень упрощается, если для разныхъ угловъ вычислить линейное разстояніе искомыхъ точекъ отъ центра проекціи. Эти вычисленія сдѣланы Пенфильдомъ для проекціи діаметромъ въ 14 стм.; для нанесенія соотвѣтствующихъ точекъ на проекціи служатъ транспортиръ № I (фиг. 99) и шкала, изображенная на фиг. 98.



Фиг. 98.



Фиг 99.
Транспортиръ № I.




Фиг. 100.

Стереографическій транспортиръ № II, служащій для измѣренія дугъ большихъ круговъ.

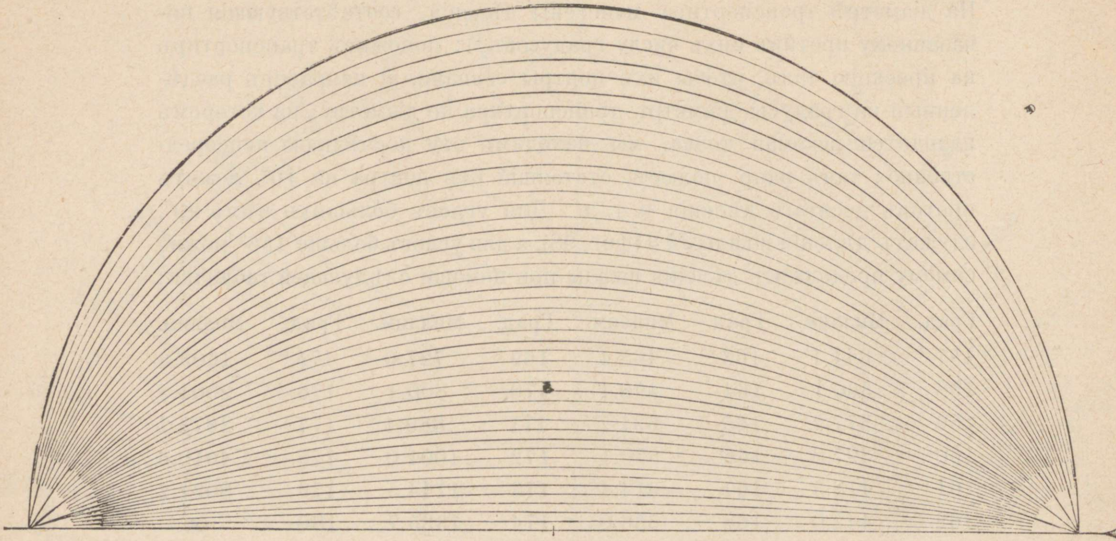
На діаметрѣ транспортира нанесены дѣленія, соотвѣтствующія показанному противъ нихъ числу градусовъ [1]): положивъ транспортиръ на проекцію такъ, чтобы ихъ центры совпали, и направивъ раздѣленный на градусы діаметръ транспортира по діаметру, на которомъ находится искомая точка, мы находимъ эту послѣднюю непосредственно; такъ напр. полюсъ, отстоящій отъ центра на $10^0$, лежитъ противъ десятаго дѣленія и т. д. Для угловъ бо́льшихъ чѣмъ $90^0$, служатъ дѣленія шкалы № 3 (фиг. 98), а для угловъ больше $156^0$ можно самому продолжить дѣленія шкалы при помощи слѣдующей таблички:

| Град. | Миллим. | Град. | Миллим. | Град. | Миллим. | Град. | Миллим. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $157^0$ | 344.1 | $163^0$ | 468.4 | $169^0$ | 727.0 | $175^0$ | 1603.3 |
| 158 | 360.1 | 164 | 498.1 | 170 | 800.1 | 176 | 2004.5 |
| 159 | 377.7 | 165 | 531.7 | 171 | 889.4 | 177 | 2673.2 |
| 160 | 397.0 | 166 | 570.1 | 172 | 1001.0 | 178 | 4010.3 |
| 161 | 418.3 | 167 | 614.4 | 173 | 1144.5 | 179 | 8021.2 |
| 162 | 442.0 | 168 | 666.0 | 174 | 1335.7 | 180 | $\infty$ |

**Транспортиръ № IV.** Фиг. 101.

На этомъ транспортирѣ, который изготовляется изъ прозрачнаго целлулоида, нанесены большіе круги для четныхъ градусовъ ($2^0$; $4^0$ и т. д.), причемъ каждый десятый градусъ обозначенъ болѣе жирной чертой. Этотъ транспортиръ предназначенъ для нахожденія (прибл.) того большого круга, который проходитъ черезъ двѣ точки стереографической проекціи, а также и для нахожденія точекъ (см. $p$ и $p'$ на фиг. 102), въ которыхъ такой кругъ пересѣкаетъ окружность проекціи. Для производства этихъ операцій центрируютъ при помощи иглы этотъ транспортиръ на сѣткѣ стереографической проекціи и поворачиваютъ его до тѣхъ поръ, пока двѣ данныя точки проекціи (напр. $a$ и $b$ на фиг. 102) не окажутся на дугѣ одного круга или на равныхъ отъ нея разстояніяхъ, и затѣмъ карандашемъ отмѣчаютъ на окружности проекціи тѣ точки ($p$ и $p'$),

1) Эти дѣленія получены слѣдующимъ образомъ: поставимъ транспортиръ на проекцію вертикально и такъ, чтобы ихъ центры совпадали. Примемъ верхнюю точку $\frac{0^0}{90^0}$ за сѣверный полюсъ и проведемъ изъ точекъ (полюсовъ), отстоящихъ отъ $\frac{0^0}{90^0}$ на опредѣленное число градусовъ, прямыя къ южному полюсу, гдѣ, по условіямъ стереографической проекціи, мысленно помѣщается глазъ наблюдателя. Эти прямыя пересѣкутъ діаметръ транспортира въ показанныхъ дѣленіями точкахъ, которыя и являются проекціями полюсовъ, изъ которыхъ мы проводили прямыя.



Фиг. 101.
Транспортиръ № IV.

въ которыхъ основаніе транспортира пересѣкаетъ эту окружность. Разстоянія точекъ $a$ и $b$ отъ найденныхъ точекъ $p$ и $p'$ могутъ быть опредѣлены транспортиромъ № II.

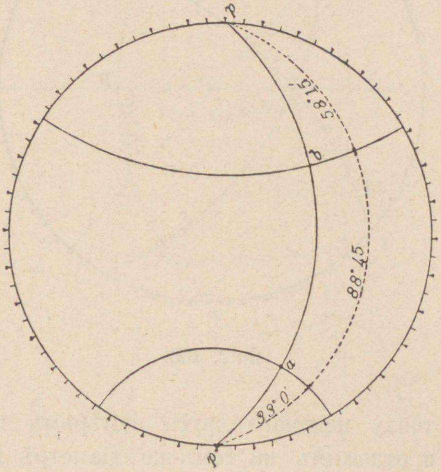
**Стереографическій транспортиръ № II.** (Фиг. 100).

Этотъ транспортиръ служитъ для измѣренія углового разстоянія двухъ точекъ на стереографической проекціи или для измѣренія сторонъ сферическаго треугольника; онъ того-же діаметра (14 стм.), какъ и сѣтки для стереографическихъ проекцій. На одной половинѣ транспортира нанесены проекціи дугъ вертикальныхъ малыхъ круговъ [1]) — для четныхъ градусовъ сплошными линіями, а для нечетныхъ пунктирными; черезъ каждые $5^0$ дуги отмѣчены нѣсколько

1) Вокругъ какой-нибудь точки $p$ можно на сферѣ провести безчисленное множество малыхъ круговъ (т. е. такихъ, которые отстоятъ отъ $p$ меньше, чѣмъ на $90^0$) и только одинъ большой кругъ, отстоящій отъ $p$ на $90^0$. Если $p$ находится въ сѣверномъ или южномъ полюсѣ, то малые круги будутъ соотвѣтствовать параллелямъ, а большой экватору. Если точка $p$ лежитъ на экваторѣ, то проведенные вокругъ нея малые круги будутъ имѣть вертикальное положеніе относительно экватора и будутъ называться вертикальными малыми кругами. Эти круги и нанесены на стереографическій транспортиръ.

болѣе жирными линіями. На другой половинѣ транспортира нанесены дуги круговъ черезъ каждые 5 $^0$.

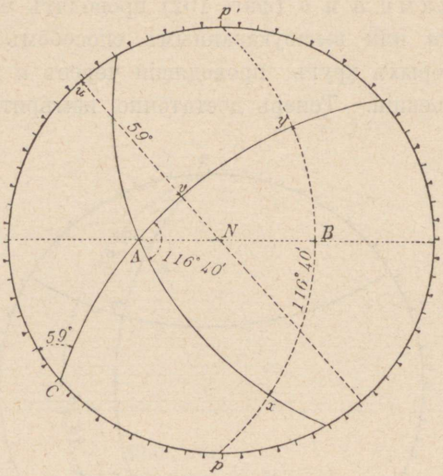
Чтобы измѣрить угловое разстояніе между двумя точками $a$ и $b$ (фиг. 102) проводятъ черезъ нихъ дугу большого круга или вышеуказаннымъ способомъ находятъ точки $p$ и $p'$, въ которыхъ кругъ, проходящій черезъ $a$ и $b$, пересѣкаетъ окружность проекціи. Теперь достаточно измѣрить разстояніе отъ




Фиг. 102.

$p$ до $a$ и отъ $b$ до $p'$, чтобы по разности найти и угловое разстояніе между $a$ и $b$. Разстоянія эти, какъ видно на фиг. 102, измѣряютъ на окружности проекціи отъ $p$ и $p'$ къ тѣмъ точкамъ, въ которыхъ вертикальные малые круги, проходящіе черезъ точки $a$ и $b$, пересѣкаютъ окружность проекціи. Слѣд. для измѣренія мы накладываемъ точки 0 $^0$ и 180 $^0$ стереографическаго транспортира на точки $p$ и $p'$, находимъ малые круги, проходящіе черезъ $a$ и $b$ и точки пересѣченія этихъ круговъ съ окружностью проекціи; измѣряемъ разстояніе этихъ точекъ отъ $p$ или отъ $p'$: разность обоихъ отсчетовъ и даетъ угловое разстояніе между $a$ и $b$.

Чтобы измѣрить уголъ въ точкѣ пересѣченія двухъ большихъ круговъ, или уголъ сферическаго треугольника, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Пусть требуется измѣрить уголъ при А (фиг. 103); для этого нужно найти кругъ $pBp'$, отстоящій отъ А на 90 $^0$, на которомъ и произвести измѣреніе [1]). Проведемъ черезъ A и N (центръ проекціи) діаметръ и черезъ N перпендикулярно къ AN другой діаметръ, который пересѣчетъ окружность въ точкахъ $p$ и $p'$ искомаго круга; чтобы




Фиг. 103.

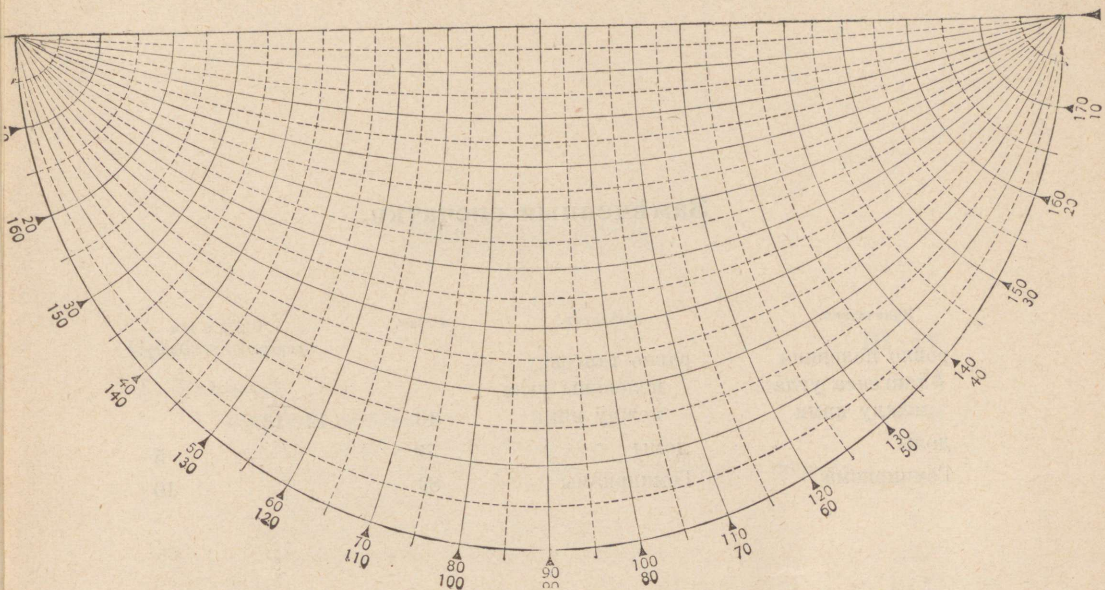
найти третью точку искомаго круга измѣримъ транспортиромъ I разстояніе AN и отложимъ на томъ-же діаметрѣ BN = AN; точка B и будетъ искомой третьей точкой круга, который мы теперь и можемъ провести. Этотъ кругъ пересѣчетъ дуги, образующія уголъ A, въ точкахъ $x$ и $y$, разстояніе между которыми можно измѣрить при помощи стереографическаго транспортира только что указаннымъ способомъ. Если вершина измѣряемаго угла лежитъ на окружности проекціи, напр. въ C, то проводятъ діаметръ перпендикулярный къ CN (фиг. 103) и на этомъ діаметрѣ измѣряютъ уголъ транспортиромъ I, напр. въ данномъ случаѣ для угла C измѣряютъ разстояніе между $v$ и $u$.

**Транспортиръ № III.** (Фиг. 104).

Этотъ транспортиръ служитъ для быстраго приблизительнаго измѣренія разстоянія между двумя точками на стереографической

1) Точка A является полюсомъ зоны $pBp'$, на которой даны двѣ точки; слѣд. для измѣренія угла при A можно воспользоваться также методомъ, указаннымъ на стр. 17.

проекціи. На этомъ транспортирѣ нанесены дуги какъ большихъ круговъ, такъ и малыхъ, черезъ каждые 5 $^{0}$, причемъ дуги четныхъ градусовъ изображены сплошными линіями, а нечетныхъ пунктирными.



Фиг. 104.
Стереографическій транспортиръ № III.

## Замѣченныя опечатки.

| Напечатано. | Слѣдуетъ. | Стран. | Строка Сверху. | Строка Снизу. |
|---|---|---|---|---|
| ровно половина тангенса угла между ними | равно тангенсу половины угла между ними | 16 | 12--13 | |
| долы | домы | 79 | | 5 |
| Гемипризма | Гемипризмы | 89 | | 10 |

# Оглавленіе.