RUUMI ALGÕPETUS

(SÜSTEMAATILINE KURSUS)

II. ANNE

Tartu Kommerts & kaubanduskool

~~6541.~~

NATHING-PERLI

RUUMI ALGÕPETUS

(SÜSTEMAATILINE KURSUS)

II. ANNE

(ÜHES TRIGONOMEETRIA KURSUSEGA)

№ 1323

TALLINNAS, 1920
KIRJASTUS ÜHISUS „KOOLI“ KIRJASTUS

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
55982
A-2990
U1564134x

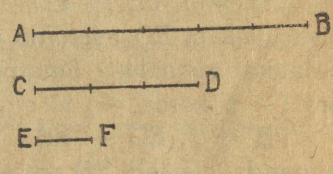
J. & A. Paalmann'i trükk, Tallinnas.

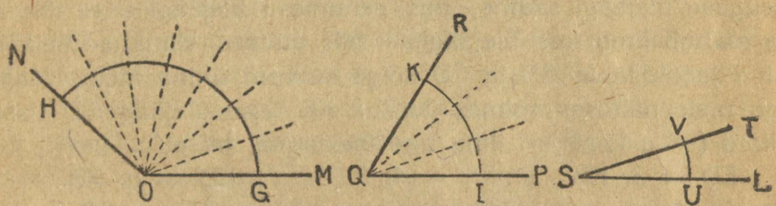
VI. peatükk:

Joonlõikude ja nurkade proportsionaalsus.

Ühine mõet.

138. Definitsioon. *Kahe joonlõigu AB ja CD ühiseks mõeduks nimetame igat kolmandat joonlõiku EF, mis kummagi antud joonlõigu AB ja CD sisse mahub täielikult, ilma ülejäägita ja puudutulekuta.* [12].





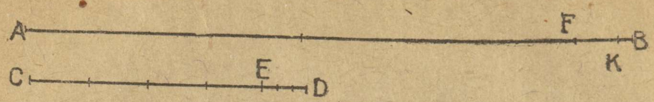
Kahe nurga MON ja PQR, (kahe kaare GH ja IK, mis ühe ja sellesama raadiusega on tõmmatud), ühine mõet on kolmas nurk LST, (kolmas sellesama raadiusega tõmmatud kaar UV), mis kummagi esimese nurga, (kaare,) sisse täiesti ära mahub.

On kahel joonlõigul üks ühine mõet, siis on neil ka lõpmata palju ühiseid mõetusid, sest iga ühise mõedu mitmendik on jällegi nende ühine mõet. Nendest ühistest mõetudest on aga üks *kõige suurem.*

Kui EF on AB ja CD ühine mõet, siis on selge, et EF täielikult ära mahub iga järgmise joonlõigu sisse: 1) AB + CD; 2) AB — CD; 3) m. AB; 4) n. CD; 5) m. AB + n. CD; 6) m. AB — n. CD, kus juures m ja n täisarvud on ja AB > CD, m. AB > n. CD.

Märkus. Mis joonlõikude ühise mõedu kohta öeldud, on ka nurkade, kaarte ja teiste suuruste ühise mõedu kohta maksev.

139. Ülesanne. *Leida kahe joonlõigu kõige suurem ühine mõet.*



Lahendamine. Asetame vähema joonlõigu CD suurema AB peale nii mitu korda, kui võimalik. Mahtugu CD AB sisse 2 korda (— m —) korda ja olgu ülejääk FB. Siis on

$AB = 2.\ CD + FB$ (1) $AB = m.\ CD + FB.$

Ülejäägi FB asetame vähema joonlõigu CD peale nii mitu korda, kui võimalik. Mahtugu FB vähema joonlõigu CD sisse 4 korda (— n korda —) ja olgu ülejääk ED. Siis on

$CD = 4.\ FB + ED$ (2) $CD = n.\ FB + ED.$

Teise ülejäägi ED asetame esimese ülejäägi FB peale nii mitu korda, kui võimalik. Mahtugu ED esimese ülejäägi FB sisse 1 kord (— p korda —) ja olgu ülejääk KB. Siis on

$FB = 1.\ ED + KB$ (3) $FB = p.\ ED + KB.$

Kolmanda ülejäägi KB asetame teise ülejäägi ED peale nii mitu korda, kui võimalik. Ja nõnda toimetame edasi niikaua, kuni me niisuguse ülejäägi saame, mis eelmineva ülejäägi sisse täiesti ära mahub ilma uue ülejäägita. Siis on see viimane ülejääk antud joonlõikude AB ja CD kõige suurem ühine mõet. Mahtugu meie näituses kolmas ülejääk KB teise ülejäägi ED sisse 3 kord (— q kord —) ilma uue ülejäägita, nii et

$ED = 3.\ KB$ (4) $ED = q.\ KB.$

Siis tõendame meie, et see kolmas ülejääk KB on AB ja CD kõige suurem ühine mõet.

Tõestus: Näitame esiteks, et KB on AB ja CD ühine mõet.

Et KB ära mahub täisarv korda ilma ülejäägita ED sisse (4), siis mahub KB täisarv korda ilma ülejäägita ka FB sisse, mis on 1. ED + KB [138].

Et KB ära mahub täisarw korda ilma ülejäägita nii FB, kui ka ED sisse, siis mahub ta ära täisarv korda ilma ülejäägita ka CD sisse, mis on 4. FB + ED [138].

Et KB ära mahub täisarv korda ilma ülejäägita nii CD, kui ka FB sisse, siis mahub ta ära täisarv korda ilma ülejäägita ka AB sisse, mis on 2. CD + FB [138].

Niiviisi mahub viimane ülejääk KB täisarv korda ilma ülejäägita ära kummagi antud joonlõigu AB ja CD sisse ja on sellega nende ühine mõet. Teiseks näitame, et KB on kõigist ühistest mõetudest kõige suurem.

Joonlõikude AB ja CD ühine mõet, olgu ta missugune tahes, mahub ära täisarv korda ka AB ja 2 korda (— m korda —) võetud CD vahe sisse, s. o. esimese ülejäägi FB sisse [138].

Et AB ja CD ühine mõet, olgu ta missugune tahes, täisarv korda ilma ülejäägita ära mahub nii CD, kui ka FB sisse, siis mahub ta ära ilma ülejäägita ka teise ülejäägi ED sisse, mis on CD — 2. FB (CD — n. FB) [138].

Et AB ja CD ühine mõet, olgu ta missugune tahes, ilma ülejäägita ära mahub nii FB kui ka ED sisse, siis mahub ta ära täisarv kord ilma ülejäägita ka kolmanda ülejäägi KB sisse, mis on FB — 2. ED (FB — p. ED) [138].

Järjelikult ei või AB ja CD ühine mõet suurem olla kui KB ja KB ise ongi AB ja CD k õ i g e s u u r e m ühine mõet.

Märkus I. Kui vähem joonlõik suurema sisse täielikult ilma ülejäägita ära mahub, siis on ta ise nende joonlõikude kõige suurem ühine mõet.

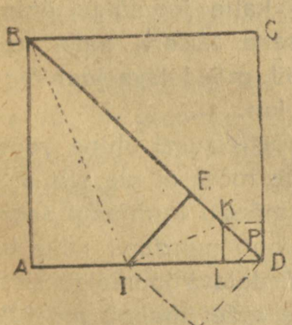
Märkus II. Niisamati leitakse ka kahe kaare, kahe nurga jne. kõige suurem ühine mõet.

Märkus III. Kahe joonlõigu kõige suurema ühise mõedu leidmisel on olemas täieline sarnadus kõige suurema ühise jagaja leidmisega kahele arvule aheljagamise abil.

140. Ühismõeduta joonlõigud. Kahe joonlõigu kõige suurema ühise mõedu otsimisel võib ette tulla niisugune juhus, et meie ei leia niisugust ülejääki, mis eelmineva ülejäägi sisse täielikult ilma uue ülejäägita ära mahuks. Niisugusel korral ei ole neil joonlõikudel ühist mõetu.

Kaks joonlõiku, millel on ühine mõet, on *ühismõedulised* joonlõigud; kaks joonlõiku, millel ühist mõetu ei ole, on *ühismõeduta* joonlõigud.

Et ühismõeduta joonlõikusid olemas on, näitab järgmine teoreem: **Ruudu diagonaalil ja küljel ei ole ühist mõetu.**



Tõestus: Asetame külje BA diagonaali BD peale. Ta mahub 1 kord, sest $BA < BD$ [48] ja $BA + AD > BD$ [49], ehk, sest et $AD = BA$, 1. $BA < BD$ ja 2. $BA > BD$. Ülejääk on FD, nii et $BD = 1. BA + FD$.

Selle ülejäägi FD asetame külje $AD = BA$ peale. Selleks tõmbame üles punktist F perpendikulaari B ⊥ D.

Tõepoolest, siis on:

1) $FD = FI$, sest et $\sphericalangle FID = \sphericalangle FDI = 45^\circ$;

2) $AI = FI$, sest et $\triangle BAI \cong \triangle BIF$ [k. k. IV. t].

$AI = FD$

Edasi peaksime FD asetama ID peale. Aga $\triangle$ FID on pool ruudust FIMD, mille küljeks on FD ja diagonaaliks ID. Seepärast teame, 1) et esimene ülejääk FD mahub külje ülejäänud osasse ID veel 1 kord, $IL = FD$, ja üle jääb joonlõik LD nii et $AD = 2 . FD + LD$ (ehk $BA = 2 . FD + LD$) ja 2) et teise ülejäägi LD asetamine esimese ülejäägi FD peale peab niisama täide saadetama, nagu esimese asetamine ruudu külje peale, millest me juba teame, et see ülejäägiga lõpeb. Niiviisi näeme, et üks ja seesama asetamine kordub alatasa järgimööda, et alatasa ülejääk olemas on, mis eelmise ülejäägi sisse 2 korda mahub ülejäägiga, ja et pealeasetamised ja ülejäägid iialgi ei lõpe. See tähendab aga, et ruudu diagonaalil ja küljel ei ole ühist mõetu.

Märkus. Nagu joonlõigud, nii võivad ka kaared ja nurgad ühismõeduta olla.

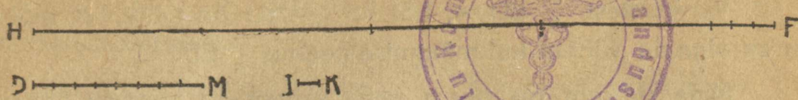
Joonlõikude mõetmine ja vahekord.

141. Joonlõikude mõetmine. *Joonlõiku mõeta tähendab teada saada, mitu korda teine, tuntud ja mõet-üksuseks võetud joonlõik tema sisse mahub, ehk mitu ja missugust mõet-üksuse jagu on mõedetavas joonlõigus.*

I. On mõedetaval joonlõigul ja mõetüksusel ühine mõet olemas, siis on täpipealne mõetmine võimalik.

a) Kui mõetüksus ise on nende kahe joonlõigu ühine mõet, siis esineb mõetmise saadusena täisarv, mille me teada saame mõetüksuse asetamise abil mõedetava joonlõigu peale. Näit. $AB = 8$ cm.; $TV = 248$ km.

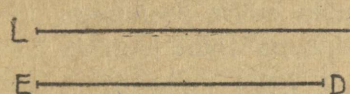
b) Kui mõedetaval joonlõigul ja mõetüksusel ühine mõet olemas on, mõetüksus ise aga see ühine mõet ei ole, siis asetame, mõetmise otstarbel, selle ühise mõedu kummagi joonlõigu peale ja mõetmise saadusena esineb murdarv, mille lugeja näitab, mitu korda ühine mõet mõedetava joonlõigu sisse mahub, ja nimetaja — mitu korda ühine mõet mahub mõetüksuse sisse. Kui näit. $HF = 35$ IK ja 1 detsimeter $DM = 8$ IK, siis on $IK = \frac{1}{8}$ DM ja $HF = \frac{35}{8}$ DM ehk $HF = \frac{35}{8}$ dm.



Arvu, mis mõetmise saadusena esineb, nimetame me **mõetarvuks**.

II. Kui mõedetaval joonlõigul ja mõetüksusel ühist mõetu ei ole, siis ei ole ka täpipealne mõetmine võimalik ja me mõedame ligikaudselt.

Ligikaudset mõetmist võime toimetada nii peenelt, kui iganes soovime. Olgu näit. joonlõik LS ja mõetüksus ED ühismõeduta joonlõigud. Kui me LS tahame mõeta ED-ga peenelt kuni $\frac{1}{10}$-kuni, siis jaotame ED 10-ks võrdseks jaoks ja asetame ühe niisuguse jao LS peale. Mahtugu ta 14 korda, mille juures üle jääb tükike, mis vähem on kui $\frac{1}{10}$ ED.



$$\text{Siis on } \frac{14}{10} \text{ ED} < \text{LS} < \frac{15}{10} \text{ ED.}$$

Võtame nüüd LS suuruseks $\frac{14}{10}$ ED ehk $\frac{15}{10}$ ED, siis teeme vea, mis vähem on kui $\frac{1}{10}$ ED ja me ütleme, et LS on mõedetud peenelt kuni $\frac{1}{10}$ ED-ni.

$\frac{14}{10}$ ED on LS ligikaudne väärtus puudusega, $\frac{15}{10}$ on LS ligikaudne väärtus liiaga.

Kui me LS tahame mõeta ED-ga peenelt kuni $\frac{1}{100}$-kuni, siis jaotame ED 100-ks võrdseks jaoks ja asetame ühe niisuguse jao LS peale üle. Mahtugu ta 141 korda ülejäägiga nii,

$$\text{et } \frac{141}{100} \text{ ED} < \text{LS} < \frac{142}{100} \text{ ED.}$$

Siis on $\frac{141}{100}$ ED LS ligikaudne väärtus puudusega ja $\frac{142}{100}$ ED on LS ligikaudne väärtus liiaga; peenus on $\frac{1}{100}$ ED. jne.

Üleüldse, kui me LS tahame mõeta ED-ga peenelt kuni $\frac{1}{n}$-kuni, siis jaotame ED n võrdseks jaoks ja asetame ühe niisuguse jao, $\frac{1}{n}$ ED, LS peale. Mahtub $\frac{1}{n}$ ED LS peale m korda ülejäägiga nii, et

$$\frac{m}{n} \text{ ED} < \text{LS} < \frac{m+1}{n} \text{ ED,}$$

siis on $\frac{m}{n}$ ED ja $\frac{m+1}{n}$ ED joonlõigu LS ligikaudsed väärtused, esimene puudusega, teine liiaga; nende vahe $\frac{1}{n}$ ED on mõetmise *peenus* ja vahe antud joonlõigu ja tema ligikaudse väärtuse vahel on mõetmise *viga*.

Võrratustest $\frac{m}{n}$ ED $<$ LS $<$ $\frac{m+1}{n}$ ED on näha, et mõetmise viga on vähem kui mõetmise peenus $\frac{1}{n}$ ED.

Mida suurem on arv n, seda vähem on peenust näitaja murd $\frac{1}{n}$ ED, kuna viga veel vähem on. Et me aga arvu n nii suureks võime teha, kui me tahame, siis võime ka vea nii väikseks teha, kui me tahame. See tähendab, et me võime ligikaudset mõetmist täide saata nii peenelt, kui me seda iganes soovime.

142. Irratsionaalsed ja ratsionaalsed arvud. Joonlõigul, millel mõetüksusega ühist mõetu ei ole, on lõpmata palju ligikaudsete väärtuste paarisid, igaüks erilise peenusega .Need joonlõigud on muutuvad suurused, kuna antud joonlõik jääav suurus on. Et antud joonlõigu ja tema ligikaudse väärtuse vahe nii väikseks võib tehtud saada, kui iganes soovitav, siis on see vahe lõpmata väike suurus ja antud joonlõik on oma ligikaudsete väärtuste piir [135, I. II.].

Igale joonlõigu ligikaudsele väärtusele vastab joonlõigu ligikaudne arvuline väärtus, mis seda joonlõigu ligikaudset väärtust täpipealselt mõedab. Seepärast tuleb meil eeldada, et peab olema ka üks arv, mis antud joonlõigu täpipealne mõetarv on. See arv ei või aga olla ei täisarv, ega murd, sest neid arvusid esitavad joonlõigud on mõet-üksusega ühismõedulised. Seepärast peame arvu mõistet laiendama ja uut liiki arvud sisse tooma. Neid uut liiki arvusid nimetame *irratsionaalseteks arvudeks* ehk *umbarvudeks.*

Irratsionaalne arv (ehk umbarv) on seesugune arv, mis mõedab seda joonlõiku, millel mõetüksusega ühist mõetu ei ole.

Niisuguse joonlõigu ligikaudseid väärtusid mõetvad arvud on sellele joonlõigule vastava irratsionaalse arvu ligikaudsed väärtused ja me võime ütelda, et *iga irratsionaalne arv on oma ligikaudsete väärtuste piir.*

Irratsionaalsete arvude vastandina nimetakse täisarvusid ja murdusid *ratsionaalseteks arvudeks.*

Irratsionaalsete arvude kallal toime pandud tehte saaduseks nimetame seda piiri, milleks saada püüavad selle tehte saadused nende arvude ligikaudsete väärtuste kallal. Et niisugune piir olemas on, seda näeme järgmistest näitustest.

Kui ruudu külg on 1 meeter, siis on tema diagonaali mõetarv $\sqrt{2}$, mida loetakse: ruutjuur 2-st.

Tema ligikaudsed väärtused on:

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$
$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$ jne.

Kui ringi raadius on 1 meeter, siis on selle ringi sissekujundatud kolmnurga külje mõetarv $\sqrt{3}$, mida loetakse: ruutjuur 3-st.

Tema ligikaudsed väärtused on:

$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$
$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$
$1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206$ jne.

Nende arvude kallal toimepandud tehete saadused on järgmised (Vaata O. Perli, Aritmeetika, II trükk § 54, b. c. 55, c. 56, c.):

I. Summa.

$1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1{,}74 + 1{,}42 = 3{,}16$
$1{,}732 + 1{,}414 = 3{,}146 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1{,}733 + 1{,}415 = 3{,}148$
$1{,}7320 + 1{,}4142 = 3{,}1462 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1{,}7321 + 1{,}4143 = 3{,}1464$
$1{,}73205 + 1{,}41421 = 3{,}14626 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1{,}73206 + 1{,}41422 = 3{,}14628$

II. Vahe.

$1{,}73 - 1{,}42 = 0{,}31 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}74 - 1{,}41 = 0{,}33$
$1{,}732 - 1{,}415 = 0{,}317 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}733 - 1{,}414 = 0{,}319$
$1{,}7320 - 1{,}4143 = 0{,}3177 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}7321 - 1{,}4142 = 0{,}3179$
$1{,}73205 - 1{,}41422 = 0{,}31783 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}73206 - 1{,}41421 = 0{,}31785$

III. Kasvatis.

$1{,}73 \times 1{,}41 = 2{,}43 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}74 \times 1{,}42 = 2{,}47$
$1{,}732 \times 1{,}414 = 2{,}449 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}733 \times 1{,}415 = 2{,}452$
$1{,}7320 \times 1{,}4142 = 2{,}4493 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}7321 \times 1{,}4143 = 2{,}4497$
$1{,}73205 \times 1{,}41421 = 2{,}44948 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}73206 \times 1{,}41422 = 2{,}44951$

IV. Vahekord.

$1{,}73 : 1{,}42 = 1{,}20 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}74 : 1{,}41 = 1{,}25$
$1{,}732 : 1{,}415 = 1{,}221 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}733 : 1{,}414 = 1{,}229$
$1{,}7320 : 1{,}4143 = 1{,}2241 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}7321 : 1{,}4142 = 1{,}2249$
$1{,}73205 : 1{,}41422 = 1{,}22464 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}73206 : 1{,}41421 = 1{,}22479$

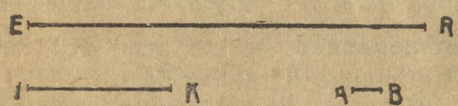
143. Joonlõikude vahekord. Kahe joonlõigu (kaarenurga jne) **vahekorraks nimetame arvu, millega teist joonlõiku kasvatada tuleb, et esimest joonlõiku saada,** näit. $\frac{AB}{CD} = 3$, kui $AB = 3 . CD$. Ehk:

Kahe joonlõigu vahekord on esimese joonlõigu mõetarv, kui teine joonlõik mõetüksuseks on võetud, näit. $\frac{AB}{CD} = 4\frac{1}{2}$, kui $AB = 4\frac{1}{2}\, CD$.

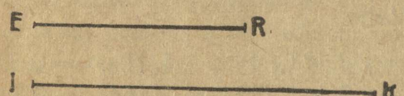
Sellest järgneb: 1) vahekorra leidmine on mõetmise üleüldistamine ja mõetmine on vahekorra leidmise eriline juhus; 2) vahekorra leidmist toimetatakse niisama nagu mõetmist.

Vahekorra leidmisel võib esineda 2 juhust: I-ks, joonlõigud on ühismõedulised; II-ks, joonlõigud on ühismõeduta.

I-ne juhus: Kui joonlõikudel ER ja IK on ühine mõet AB, siis mahutame selle ühise mõedu kummagi joonlõigu sisse nii mitu korda kui võimalik, ja saadud arvude vahekord ongi antud joonlõikude vahekord. Kui näit. AB mahub ER sisse 14 korda — m korda — ja IK sisse 5 korda — n korda —, siis on $\frac{ER}{IK} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ — ehk $\frac{ER}{IK} = \frac{m}{n}$.



II-ne juhus: Kui joonlõikudel ER ja IK ühist mõetu ei ole, siis oleme sunnitud nende ligikaudse vahekorraga leppima. Seda ligikaudset vahekorda võime aga leida nii peenelt kui iganes soovime, näit. $\frac{1}{n}$ —kuni; kui n on kui tahes suur arv, siis on $\frac{1}{n}$ nii väike kui iganes soovime. Et ühismõeduta joonlõikude ER ja IK vahekorda leida peenelt kuni $\frac{1}{1000}$ - ni (— $\frac{1}{n}$ -kuni —), jaotame teise joonlõigu IK 1000-ks võrdseks jaoks (— n võrdseks jaoks —) ja ühe niisuguse jao asetame ER peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu ta 618 korda (— m korda —) nii, et üle jääb joonlõik, mis väiksem on kui $\frac{1}{1000}$ IK (— $\frac{1}{n}$ IK —), siis on



$$\frac{618}{1000} < \frac{ER}{IK} < \frac{619}{1000}$$

ehk: $0{,}618 < \frac{ER}{IK} < 0{,}619$ $\qquad \frac{m}{n} < \frac{ER}{IK} < \frac{m+1}{n}$

Kui me nüüd ER ja IK täpipealse vahekorra asemele võtame 0,618 ehk 0.619 (— $\frac{m}{n}$ ehk $\frac{m+1}{n}$ V—), siis teeme vea, aga see viga on vähem kui 0,001 (— $\frac{1}{n}$ —).

Järjelikult ongi 0,618 ja 0,619 (— $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$ —) ER ja IK vahekorra ligikaudsed väärtused, peened kuni 0,001-ni (— $\frac{1}{n}$ kuni —).

Näitused: Ruudu diagonaali ja külje ligikaudne vahekord on 1,4142135. . . ; korrapärase kolmnurga ja tema ümber kujundatud ringi raadiuse ligikaudne vahekord on 1,7320508. . . ; korrapärase kümmenurga ja tema ümber kujundatud ringi raadiuse ligikaudne vahekord on 0,6180339. . .

Kahe ühismõeduta joonlõigu vahekorda võime otsida ka niiviisi nagu me kahe joonlõigu ühist mõetu otsime. Aga ka niiviisi otsides ei ole võimalik leida täpipealset vahekorda ja peenuse etteäramääramine teeb raskusi. Saadus ilmub nõndanimetud *„ahelmurruna"*.

Leiame sel teel, näituseks, ruudu diagonaali ja külje vahekorra meeles pidades, et ruudu külg tema diagonaali sisse mahub 1 kord ülejäägiga, see ülejääk mahub külje sisse 2 kord ülejäägiga ja iga järgnev ülejääk mahub eelmineva ülejäägi sisse 2 kord ülejäägiga. [Joonestus § 140].

$$\frac{BD}{BA}=1+\frac{FD}{BA}=1+\frac{1}{\frac{BA}{FD}}=1+\frac{1}{2+\frac{LD}{FD}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{FD}{LD}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{PD}{LD}}}$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$$

Kui me ühismõeduliste joonlõikude juures nende ühise mõedu ja ühismõeduta joonlõikude juures $\frac{1}{n}$-diku teisest joonlõigust mõet-üksuseks võtame, siis on nende joonlõikude vahekorda esitavad arvud nende mõetarvud ja me võime ütelda: *joonlõikude vahekord on nende mõetarvude vahekord.*

144. Joonlõikude vahekordade võrdus. *Ühismõeduliste joonlõikude* kohta on iseenesest selge, et nende *vahekorrad on võrdsed, kui neid vahekordi üks ja seesama arv avaldab.* Ühismõeduta joonlõikud vahekordade kohta tõestame järgmise **teoreemi: Kaks irratsionaalset vahekorda on isekeskis võrdsed, kui on võrdsed nende samaloomulised ligikaudsed väärtused, mis võetud ühe ja seesama peenusega.**

Tõestus: Kui on $\frac{k+1}{n} > \frac{AB}{CD} > \frac{k}{n}$, siis on $\frac{k+1}{n} > \frac{AB}{CD}$

ja $\frac{k+1}{n} > \frac{OP}{LS} > \frac{k}{n}$, „ $\frac{k}{n} < \frac{OP}{LS}$

Siit leiame maha arvates, et: $\frac{1}{n} > \frac{AB}{CD} - \frac{OP}{LS}$

Kui arvu n piiramata suurendada, siis väheneb murd $\frac{1}{n}$ piiramata ja saab muutuvaks, lõpmata väikeseks suuruseks, kuna vahekorrad $\frac{AB}{CD}$ ja $\frac{OP}{LS}$ ja nende vahe $\frac{AB}{CD} - \frac{OP}{LS}$ muutumata, jäädavateks suurusteks jäävad. Kõigist jäädavatest suurustest on oma absoluutse väärtuse poolest ainult 0 vähem, kui lõpmata väike suurus $\frac{1}{n}$. Järjelikult on $\frac{AB}{CD} - \frac{OP}{LS} = 0$.

Sellest järgneb, et $\frac{AB}{CD} = \frac{OP}{LS}$.

Proportsionaalsed joonlõigud.

145. Proportsionaalsed suurused. Kui meil on kaks suurust A ja B, ja suurusest A on meil rida väärtusi $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ ja suurusest B rida vastavaid väärtusi $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, b_{n+1}, \ldots$ ja kui siis suuruse A kaks väärtust annavad sellesama vahekorra, nagu suuruse B vastavad väärtused, nii et $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$, siis nimetakse suurusi A ja B *proportsionaalseteks.*

Suurused A ja B nim. proportsionaalseteks ka siis, kui suuruse A kahe väärtuse vahekord on seesama, mis suuruse B vastavate väärtuste vastupidine vahekord, nii et $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}$. Et vahet teha nende kahte liiki suuruste vahel, nimetakse viimaseid suurusi *vastuproportsionaalseteks* ja esimesi *päriproportsionaalseteks* ekk lihtsalt *proportsionaalseteks.*

Kui märkide $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ all mõista suuruste arvulisi väärtusi ehk mõetarvusi, siis võib nendega talitada nagu nimeta arvudega ja proportsioonid, mida need suurused annavad, käivad kõigi arvuliste proportsioonide seaduste alla. Päriproportsionaalsetele suurustele leiame siis:

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}, \quad \frac{a_2}{a_n} = \frac{b_2}{b_n}, \quad \frac{a_3}{a_n} = \frac{b_3}{b_n}, \ldots; \text{ ehk}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_n}{b_n}, \ldots: \text{ ehk üleüldse:}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = k.$$

K on siin ilmunud vahekord, ehk, nagu räägitakse, *proportsionaalsuse koeffitsient.*

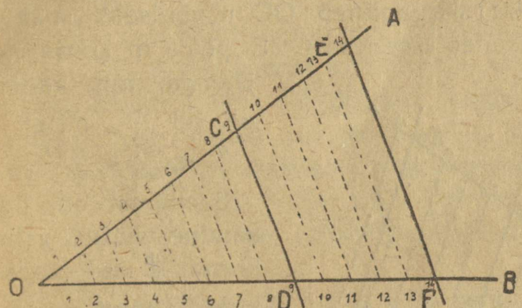
Vastuproportsionaalsetele suurustele leiame:

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}, \quad \frac{a_2}{a_n} = \frac{b_n}{b_2}, \quad \frac{a_3}{a_n} = \frac{b_n}{b_3}, \ldots; \text{ ehk}$$

$a_1 \cdot b_1 = a_n \cdot b_n$, $a_2 \cdot b_2 = a_n \cdot b_n$, $a_3 \cdot b_3 = a_n \cdot b_n, \ldots$; ehk üleüldse: $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = a_n \cdot b_n = a \cdot b = p$ kus p on jäädav arv.

Seepärast öeldakse: **päriproportsionaalsed suurused annavad jäädava vahekorra, vastuproportsionaalsed suurused annavad jäädava kasvatise.**

146. Teoreem. **Kaks paralleeljoont 1) lõikavad ära nurga harudest proportsionaalsed joonlõigud ja 2) jaotavad nurga harud proportsionaalseteks joonlõikudeks.**



Oletus: CD ∥ EF

Väide: 1) $\frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OC}$;

2) $\frac{DF}{OD} = \frac{CE}{OC}$ ja $\frac{DF}{OF} = \frac{CE}{OE}$.

Tõestus: Et tõestada kahe vahekorra võrdust, peame leidma iga vahekorra eraldi. Selle juures on võimalik 2 juhust: 1) joonlõigud on ühismõedulised, ja 2) joonlõigud on ühismõeduta.

1-ne juhus. Kui joonlõikudel OF ja OD on olemas ühine mõet, siis mahtugu see ühine mõet OF sisse 14 korda (— m korda —) ja OD sisse 9 korda (— n korda —), järjelikult DF sisse 5 korda (— (m — n) korda —); siis leiame järgmised vahekorrad [143, I.]

1) $\frac{OF}{OD} = \frac{14}{9}$, 2) $\frac{DF}{OD} = \frac{5}{9}$ ja 3) $\frac{DF}{OF} = \frac{5}{14}$

1) $\frac{OF}{OD} = \frac{m}{n}$, 2) $\frac{DF}{OD} = \frac{m-n}{n}$ ja 3) $\frac{DF}{OF} = \frac{m-n}{m}$

Et OE ja OC vahekorda leida, on ainult vaja OF ja OD jaotuspunktidest läbi paralleeljooned tõmmata EF-le ja CD-le; siis jaguneb OE 14-ks (— m —) ja OC 9-ks (— n —) võrdseks jaoks [87]; iga niisugune jagu on OE ja OC (ja CE) ühine mõet ja nende vahekorrad on järgmised [143, I]:

1) $\frac{OE}{OC} = \frac{14}{9}$, 2) $\frac{CE}{OC} = \frac{5}{9}$ ja 3) $\frac{CE}{OE} = \frac{5}{14}$

1) $\frac{OE}{OC} = \frac{m}{n}$, 2) $\frac{CE}{OC} = \frac{m-n}{n}$ ja 3) $\frac{CE}{OE} = \frac{m-n}{m}$.

Et vahekorrad võrdsed on, kui neid üks ja seesama arv avaldab, siis on

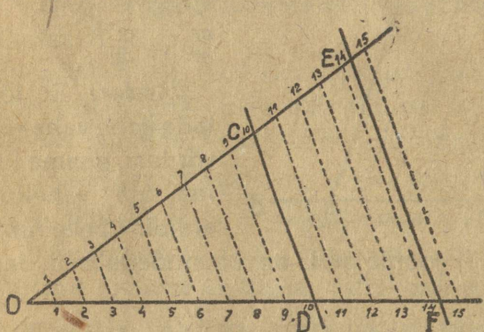
1) $\frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OC}$; 2) $\frac{DF}{OD} = \frac{CE}{OC}$ ja 3) $\frac{DF}{OF} = \frac{CE}{OE}$.

2-ne juhus. Kui joonlõigud OD ja OF ühismõeduta on, siis leiame nende ligikaudse vahekorra peenelt kuni $\frac{1}{n}$-kuni. Selleks jaotame OD n võrdseks jaoks ja ühe niisuguse jao asetame OF peale. Ta mahub, ütleme m korda ülejäägiga, mis vähem on kui $\frac{OD}{n}$.

Siis on $$\frac{m}{n} < \frac{OF}{OD} < \frac{m+1}{n}$$ ja

ligikaudne väärtus vahekorral $\frac{OF}{OD} = \frac{m}{n}$, peen kuni $\frac{1}{n}$-kuni, puudusega [143, II].

Tõmbame nüüd läbi OD ja OF jaotuspunktide paralleeljooned CD-le ja EF-le; siis jaguneb OC n võrdseks jaoks ja üks niisugune jagu aseneb iseenesest OE peale m korda ülejäägiga, mis vähem on kui $\frac{OC}{n}$, nii et $\frac{m}{n} < \frac{OE}{OC} < \frac{m+1}{n}$.



Seepärast on ligikaudne väärtus vahekorral $\frac{OE}{OC} = \frac{m}{n}$, peen kuni $\frac{1}{n}$-kuni, puudusega [143, II].

Nende irratsionaalsete vahekordade $\frac{OF}{OD}$ ja $\frac{OE}{OC}$ samaloomulised ligikaudsed väärtused, võetud ühe ja sellesama peenusega, on võrdsed, seepärast on ka nende vahekorrad isekeskis võrdsed [144]:

$$\frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OC}.$$

Niisama on võimalik tõestada, et $\frac{DF}{OD} = \frac{CE}{OC}$ ja $\frac{DF}{OF} = \frac{CE}{OE}$.

Ülesanded. *1.* Wastupidine teoreem formuleerida ja tõestada (vastu väiteliselt).

2. Paralleeljooned CD ja EF lõikavad $\angle$-a AOB harud läbi nii, et OE = 20 m., OC = 12 m., OF = 24 m. Leida OD, DF ja CE!

3. Paralleeljooned LS ja GK lõikavad $\angle$-a AOR harud läbi nii, et OL = 25 tolli, OG = 35 tolli, SK = 6 tolli. Leida LG, OS ja OK!

4. Paralleeljooned AB ja CD jaotavad $\angle$-a EFG ühe haru osadeks FA = 13 cm. ja AC = 7 cm., ja lõikavad teise haru peal ära joonlõigu FD = 30 cm. Kui pikad on FC, FB ja BD?

5. $\angle$-a ABC harud on läbilõigatud paralleeljoontega DE $\parallel$ FG nii, et BF > BD, BD = 9 cm., DF = 6 cm. ja EG = 9,6 cm. Leida BG, BE ja BF.

6. Täisnurkses $\triangle$-gas BAC on kateedile BA tõmmatud perpendikulaar hüpotenuusi BC peal olevast punktist M, mis hüpotenuusi jagab vahekorras 3 : 7. Missugusteks osadeks jaotab see perpendikulaar kateedi BA = 24 m.?

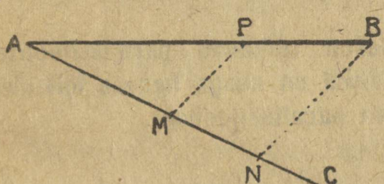
7. $\triangle$-gas DEF on DF = 18 m. ja EF = 27 m. Punktist-P, mis DE-d jagab vahekorras 4 : 5 tipust D arvates, on tõmmatud PQ $\parallel$ EF ja PR $\parallel$ DF. Leida DQ, QF, ER, RF, PQ ja PR.

8. $\angle$-a MOA harud on läbi lõigatud paralleeljoontega BC $\parallel$ DE $\parallel$ FG (tipust arvates) nii, et OC = 6 cm., CE = 4 cm., EG = 8 cm., OF 36 cm. Leida OB, BD ja DF.

9. $\triangle$-ga küljed on jaotud 8-ks võrdseks jaoks ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud paralleeljooned teisele küljele. Kui pikad on kolmanda külje osad, kui see kolmas külg on 20 m.?

147. Ülesanne. *Antud joonlõik AB jagada kaheks, proportsionaalselt m ja n-le.*

Lahendamine: 1) *m ja n on antud joonlõigud.* Punktist A tõmbame mistahes kiire AC. Selle kiire peale, A-st alates, asetame AM = m ja M-st edasi MN = n. N ja B ühendame sirgjoone abil ja läbi M tõmbame MP $\parallel$ NB.



Siis on: $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$.

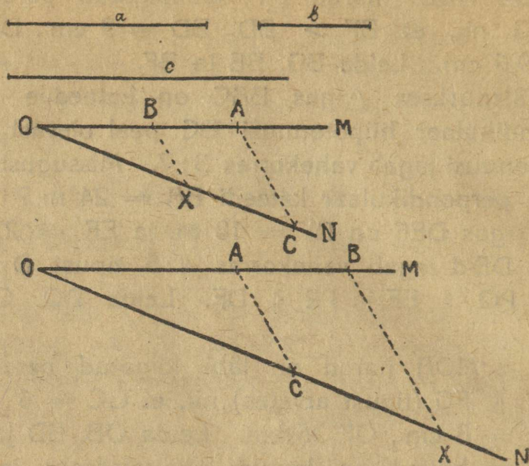
2) ***m ja n on arvud***, näit. 5 ja 3. AC peale asetame esite 5, ja sealt edasi weel 3 mistahes ühesuurust jagu. Muidu edasi on konstrueerimine endine.

Harjutus. Joonlõik AB jagada neljaks, proportsionaalselt joonlõikudele (arvudele) k, l, p, q.

148. 1-ne ülesanne. ***Kolmele antud joonlõigule a, b ja c konstrueerida 4-jas proportsionaalne.*** See tähendab konstrueerida joonlõik x, mis rahuldab proportiooni $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Lahendamine: Mistahes $\angle$-ga MON ühe haru peale asetame esimese vahekorra liikmed OA = a ja OB = b ehk OA = a ja AB = b; teise haru peale asetame OC = c.

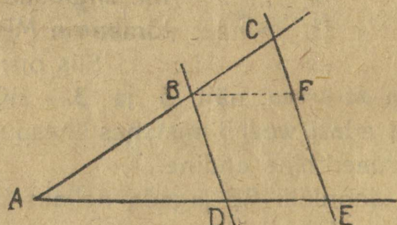
Proportsioonis vahekordade eesliikmetena esinevate joonlõikude a ja c otsapunktid A ja C ühendame ja tagaliikme b otsapunktist B tõmbame BX $\parallel$ AC. Siis on [146] OX = x ehk CX = x.



II-ne ülesanne. *Kahele antud joonlõigule a ja b konstrueerida 3-as proportsionaalne.*

See tähendab konstrueerida joonlõik x, mis rahuldab proportsiooni $a : b = b : x$. Konstrueerime nagu eelminevas ülesandes, kui võtta $c = b$.

149. Teoreem. Nurga harud lõikavad paralleeljoontest ära joonlõigud, mis proportsionaalsed on nurga harude lõikudele, arvatud nurga tipust kuni vastava paralleeljooneni.



Oletus: $BD \parallel CE$

Väide: $\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$

Tõestus: Tõmbame $BF \parallel AE$, siis on $\angle$-ga C harud läbi lõigatud kahe paralleeljoonega ja järjelikult

$\frac{CE}{FE} = \frac{CA}{BA}$; et aga $BF \parallel DE$ ja $BD \parallel FE$, siis on $FE = BD$;

$$\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Sellel teoreemil põhjeneb transversaal-maasstaabi sisseseade.

Ülesanded. *I. Tõestada teoreemid:* 1) Kaks paralleeljoont jaotavad kiirte kimbu proportsionaalseteks osadeks ja jaotatakse ise ka selle kiirte kimbuga proportsionaalseteks osadeks.

2) Kolme paralleeljoone vahel olevad joonlõigud on proportsionaalsed.

3) Trapeetsi alustele paralleelselt ja tema diagonaalide lõikpunktist läbi minev joonlõik jaguneb selles punktis pooleks.

II. Konstrueerimise ülesanne. 4) △-gas tõmmata alusele paralleeljoon, mis oleks alusega vahekorras m : n.

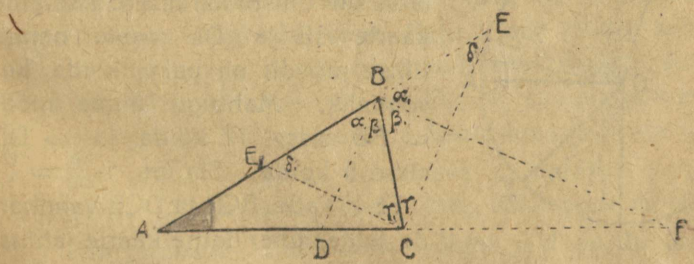
III. Väljaarvamise ülesanded: 5) Üks △-ga külg on jaotatud 5-ks võrdseks jaoks ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud paralleeljooned teisele küljele, mille pikkus on 10 tolli. Leida nende △-ga seesolevate joonlõikude pikkus!

6) Kui pikk on hüpotenuusi keskkohast ühe kateedi peale tõmmatud perpendikulaar, kui teine kateet on 6 m.?

7) Kui kaugele peab pikendatama trapetsi mitteparalleelseid külgi, et nad lõikuksid, kui nende külgede pikkus on b = 15 cm., d = 10 cm., ja alused on a = 18 cm. c = 8 cm.?

150. Definitsioon. Punkt O jagab joonlõiku MK *seestpoolt*, kui O on M ja K vahel; punkt O jagab joonlõiku MK *väljastpoolt*, kui O on MK pikenduse peal [9]; osadeks arvatakse OM ja OK.

Teoreem. Kolmnurgas jagab sisenurga poolitaja vastaskülje seestpoolt ja väljasnurga poolitaja väljastpoolt joonlõikudeks, mis proportsionaalsed on oma lähisküljedele.



Oletus: $\angle\alpha = \angle\beta$ ja $\angle\alpha_1 = \angle\beta_1$

Väide: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ ja $\frac{FA}{FC} = \frac{BA}{BC}$

Tõestus: Pikendame AB-d ja AC-d ja tõmbame CE ‖ DB ja CE_1 ‖ FB. Siis on $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BE}$ ja $\frac{FA}{FC} = \frac{BA}{BE_1}$

Et aga $\angle\delta = \angle\alpha = \angle\beta = \angle\gamma$ ja $\angle\delta_1 = \angle\alpha_1 = \angle\beta_1 = \angle\gamma_1$, siis on BE = BC ja BE_1 = BC.

Proportsioonides BE ja BE_1 asemele BC pannes saame: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ ja $\frac{FA}{FC} = \frac{BA}{BC}$.

Ülesanded. 1) $\triangle$-ga küljed on a = 20 cm., b = 25 m., c = 30 m. Kui suured on iga külje osad milleks neid jagab vastasnurga poolitaja?

2) $\triangle$-ga küljed on a = 13 m., b = 14 m., c = 15 m. Kui pikad on külje osad, milleks jagab neid vastasnurga poolitaja?

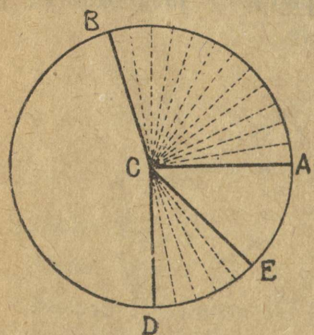
3) Külgede a = 14 m. ja b = 6 m. vahelnurga poolitaja jagab kolmanda külje osadeks, millest vähem osa on 3 m. Kui pikk on kolmas külg?

Definitsioon. Punktid O ja P jagavad joonlõiku *harmooniliselt*, kui O jagab teda seestpoolt selles samas vahekorras, milles jagab teda P väljastpoolt.

Järeldus: $\triangle$-ga sama tipu juures olevate sise- ja välisnurkade poolitajad jagavad vastaskülge harmooniliselt.

Tõestada teoreem: Kui O ja P jagavad MK—d harmooniliselt, siis jagavad ka M ja K OP—d harmooniliselt.

151. Teoreem. Uhes ja sellessamas ringis ehk kongruentsetes ringides on tsentrinurgad proportsionaalsed vastavatele kaartele.



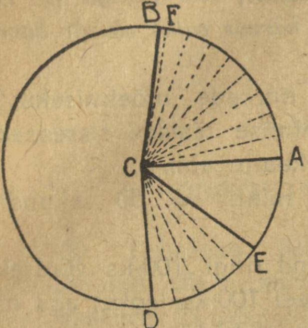
Väide: $\frac{\angle ACB}{\angle DCE} = \frac{\smile AB}{\smile DE}$

Tõestus: *I-ne juhus:* Kaared AB ja DE on ühismõedulised. Asetame kaarte AB ja DE peale nende ühise mõedu nii palju korda kui võimalik. Mahtugu ühine mõet $\smile$ AB sisse 12 korda ja $\smile$ DE sisse 5 korda. Siis on $\frac{\smile AB}{\smile DE} = \frac{12}{5}$.

Et $\angle$-kade ACB ja DCE vahekorda leida, ühendame kaarte jaotuspunktid tsentriga. Siis jaguneb $\angle$ACB 12 võrdseks jaoks ja $\angle$DCE — 5 niisama suureks jaoks, sest võrdsetele kaartele vastavad võrdsed tsentrinurgad. Järjel, on $\frac{\angle ACB}{\angle DCE} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

Neid vahekordi avaldab üks ja seesama arv 2,4, seepärast on nad isekeskis võrdsed: $\frac{\angle ACB}{\angle DCE} = \frac{\smile AB}{\smile DE}$.

II-ne juhus. Kui kaartel ühist mõetu ei ole, siis leiame nende vahekordade ligikaudsed väärtused mistahes, aga ühe ja sellesama peenusega. Selleks jagame teise kaare DE n võrdseks jaoks ja ühe niisuguse jao asetame $\smile AB$ peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu $\frac{1}{n}$. DE kaare AB sisse k korda, mille juures üle jääb $\smile FB < \frac{\smile DE}{n}$.



Siis on $\frac{k}{n} < \frac{\smile AB}{\smile DE} < \frac{k+1}{n}$ [143,II].

Et vahekorra $\frac{\angle ACB}{\angle DCE}$ ligikaudset väärtust leida sellesama peenusega, on ainult tarvis kaarte AB ja DE jaotuspunktid ühendada tsentriga.

Siis jaguneb $\angle DCE$ n võrdseks jaoks ja üks niisugune jagu aseneb iseenesest $\angle ACB$ peale ja nimelt k korda, mille mille juures üle jääb $\angle FCB$ mis vähem on kui $\frac{1}{n}$. $\angle DCE$ Siis on $\frac{k}{n} < \frac{\angle ACB}{\angle DCE} < \frac{k+n}{n}$ [143,II].

Et isekeskis võrdsed on nende irratsionaalsete vahekordade samaloomulised ligikaudsed väärtused, mis välja arvatud on olgu mistahes, kuid ühe ja sellesama peenusega, siis on need vahekorrad isekeskis võrdsed; s. t. $\frac{\angle ACB}{\angle DCE} = \frac{\smile AB}{\smile DE}$.

152. Nurkade mõetmine kaarte abil. Ring jaotatakse 360-ks võrdseks jaoks ja iga jagu nimetatakse *kaare kraadiks.*

Kui jaotuspunktid ühendada tsentriga, siis saame 360 võrdset tsentrinurka [98] ja iga niisugune nurk on *nurga kraad.*

Et mingit nurka mõeta, võetakse tema tipp tsentriks, kujundatakse mistahes raadiusega kaar ja mõedetakse ära nurga harude vahel olev kaar. Mitu kaare kraadi selles kaares on, nii mitu nurga kraadi on mõedetavas nurgas, sest mõedetav nurk on tsentrinurk ja tsentrinurk on nurga-kraadi kohta nii nagu temale vastav kaar on kaare-kraadi kohta [151].

Sel põhjal loetakse eelmineva paragrahvi teoreem veel järgmiselt: *Tsentrinurka mõedab kaar, mille peale ta toetab.*

I-ne järeldus. *Piirdenurka mõedab pool sellest kaarest, mille peale ta toetab.*

2-ne järeldus. *Piirdenurk, mis toetab diameetri peale, on täisnurk.*

3-as järeldus. *Pingjoone ja riivaja sünnitatud nurka mõedab pool tema harude vahel olevast kaarest.*

4-as järeldus. *Kahe lõikuva pingjoone sünnitatud nurka mõedab tema harude ja nende pikenduste vahel olevate kaarte poolsumma.*

5-es järeldus. *Lõikajate, ehk riivajate, ehk lôikaja ja riivaja sünnitatud nurka mõedab pool tema harude vahel olevate kaarte vahest.* [*108, 109, 111, 112*].

Nimetud põhjusel tarvitatakse nurkade mõetmiseks ja asetamiseks *mall'i* ja kõigi nurgamõetmise riistade sisseseade põhjeneb sellel, et nurki mõedetakse kaarte abil.

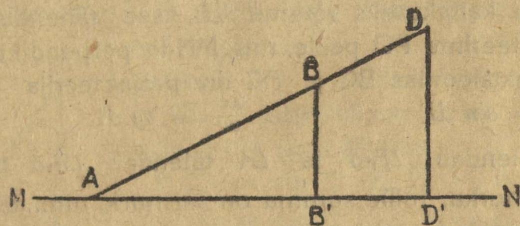
1 kraad = 60 minutit ja 1 minut = 60 sekundit. $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Prantsusmaal on katsutud veerand ringi 100-ks võrdseks jaoks jagada ja iga niisugust jagu veel 100-ks jaoks; aga niisugune jaotamine on vähe poolehoidmist leidnud.

VII. peatükk:

Trigonomeetrilised suurused.

153. **Teoreem. Kui muutub projekteeritav, aga ei muutu tema kallakus, siis ei muutu ka 1) projektsiooni ja projekteeritava vahekord, 2) projekteerija ja projekteeritava vahekord ja 3) projekteerija ja projektsiooni vahekord.**



Tõestus: Paragrahvides 146 ja 149 tõestatud teoreemide põhjal leiame:

1) $\frac{AB'}{AD'} = \frac{AB}{AD}$; 2) $\frac{BB'}{DD'} = \frac{AB}{AD}$; 3) $\frac{BB'}{DD'} = \frac{AB'}{AD'}$.

Paigutame sisemised liikmed ümber, siis saame:

1) $\frac{AB'}{AB} = \frac{AD'}{AD}$; 2) $\frac{BB'}{AB} = \frac{DD'}{AD}$; 3) $\frac{BB'}{AB'} = \frac{DD'}{AD'}$;

mis tarvis oligi tõestada.

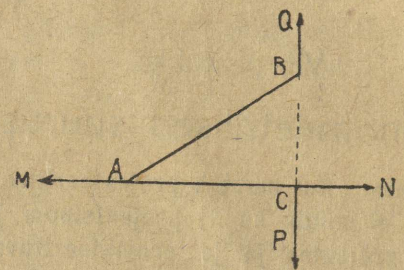
Me teame [104], et nurga suurenemisega kuni 90^0 väheneb projektsioon, aga projekteerija suureneb. Järjel., kui kallakus suureneb (täisnurga piirides),

siis: 1) projektsiooni vahekord projekteeritavaga väheneb;
2) projekteerija vahekord projekteeritavaga suureneb;
3) projekteerija vahekord projektsiooniga suureneb seda enam.

Sellest on näha, et nimetud vahekorrad on muutuvad suurused, mis olenevad kallakuse suurusest, nad on *kallakuse funktsioonid*.

154. Definitsioonid. 1) **Projekteerija vahekorda projekteeritavaga nim. kallakuse sirus'eks** ja kirjutatakse: $\frac{BC}{AB} = \sin A$.

2) **Projekteerija vahekorda projektsiooniga nim. kallakuse tangens'iks** ja kirjutatakse: $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A$.



Kui me kallakuseks võtame $\angle B$, see tähendab kui me AB-d projekteerime PQ peale, mis MN-le perpendikulaarne on, siis on projektsiooniks BC ja AC on projekteerija ja me leiame: $\frac{AC}{AB} = \sin B$ $\frac{AC}{BC} = \operatorname{tg} B$

$\angle B$ täiendab $\angle A$-d ja $\angle A$ täiendab $\angle B$-d täisnurgani.

Kahte nurka, mille summa on täisnurk, nim. täiendusnurkadeks teineteisele, ehk üht nurka nim. teise täienduseks (90°-ni).

Vahekord $\frac{AC}{AB}$ on nurga A täienduse sinus; vahekord $\frac{AC}{BC}$ on nurga A täienduse tangens.

„Täiendus" on ladina keeli „complementum"; seepärast kirjutati endistel aegadel, kui teaduse keeleks veel ladina keel oli:

$\frac{AC}{AB}$ = sinus complementi A. $\frac{AC}{BC}$ = tangens complementi A.

Sõna „complementi" kirjutati lühendatult „Co". Pärastpoole kirjutati see lühendus sõnade „sinus" ja „tangens" ees nii: „co. sinus" ja „co. tangens", kus ta nende sõnadega ühte sulas nimetusteks „cosinus" ja „cotanges" nii, et

$\frac{AC}{AB}$ = cosinus A ehk lühendatult $\frac{AC}{AB} = \cos A$ ja

$\frac{AC}{BC}$ = cotangens A ehk lühendatult $\frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} A$.

Niiviisi on meil 4 kallakuse A funktsiooni: 1) sinus; 2) tangens; 3) cosinus; 4) cotangens.

3) *Projektsiooni vahekord projekteeritavaga nim. kallakuse cosinuseks* ja kirjutatakse $\frac{AC}{AA} = \cos A$.

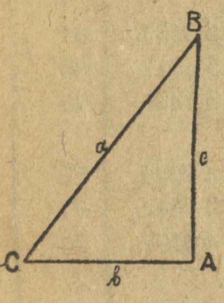
4) *Projektsiooni vahekord projekteerijaga nim. kallakuse cotangensiks* ja kirjutatakse $\frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} A$.

Need 4 vahekorda nim. nurga A (kallakuse) *trigonomeetrilisteks suurusteks* ehk *trigonomeetrilisteks funktsioonideks* ja iga funktsiooni nimetuse järel peab tingimata olema äratähendatud nurk, mille trigonomeetriline funktsioon võetakse.

155. Eelmineva paragrahvi definitsioonidest järgneb:

1) *antud* ∠*-ga sin = täiend.* ∠*-ga cos*; $\sin A = \frac{BC}{AB} = \cos B = \cos(90^\circ - A)$.
2) „ „ *cos* = „ „ *sin*; $\cos A = \frac{AC}{AB} = \sin B = \sin(90^\circ - A)$.
3) „ „ *tg* = „ „ *ctg*; $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg}(90^\circ - A)$.
4) „ „ *ctg* = „ „ *tg*; $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(90^\circ - A)$.

156. Täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vastastikkune olenevus. Kui me täisnurkses kolmnurgas ABC võtame hüpotenuusi BC projekteeritavaks ja kateedi BA projekteerijaks, siis on kateet CA — projektsioon ja ∠C on kallakus ja § 154 järgi leiame:



I. 1) $\frac{BA}{BC} = \sin C$ 2) $\frac{CA}{CB} = \cos C$

$\frac{c}{a} = \sin C$ $\frac{b}{a} = \cos C$

$c = a \cdot \sin C$ $b = a \cdot \cos C$

II. 3) $\frac{BA}{CA} = \operatorname{tg} C$ $\frac{CA}{BA} = \operatorname{ctg} C$

$\frac{c}{b} = \operatorname{tg}$ $\frac{b}{c} = \operatorname{ctg} C$

$c = b \cdot \operatorname{tg} C$ $b = c \cdot \operatorname{ctg} C$

I. Kateet on hüpotenuusi kasvatis 1) oma vastasnurga sinusega, ehk 2) oma lähisnurga cosinusega.

II. Kateet on teise kateedi kasvatis 3) oma vastasnurga tangensiga, ehk 4) oma lähisnurga cotangensiga.

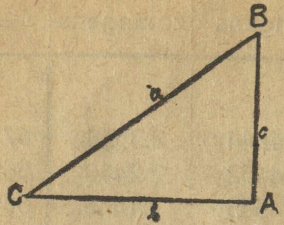
Järeldus: Projektsioon on projekteeritava kasvastis kallakuse cosinusega.

157. Trigonomeetriliste suuruste tabel. Järgnevas tabelis on esitatud trigonomeetriliste funktsioonide arvulised väärtused niisugustele nurkadele, mida mõedavad täisarv kraadisid.

Kui kraadisid lugeda pahemalt poolt, siis tuleb nimetusi lugeda ülevalt; kui kraadisid lugeda paremalt poolt, siis tuleb nimetusi lugeda alt [155].

Kraad	Sinus	cosinus	tangens	cotangens	—
0	0.0000_0	1.0000_0	0.0000_0	∞	90
1	0.0174_5	0.9998_5	0.0174_6	57.2899_6	89
2	0.0349_0	0.9993_9	0.0349_2	28.6362_5	88
3	0.0523_4	0.9986_3	0.0524_1	19.0811_4	87
4	0.0697_6	0.9975_6	0.0699_3	14.3006_7	86
5	0.0871_6	0.9961_9	0.0874_9	11.4300_5	85
6	0.1045_3	0.9945_2	0.1051_0	9.5143_6	84
7	0.1218_7	0.9925_5	0.1227_8	8.1443_5	83
8	0.1391_7	0.9902_7	0.1405_4	7.1153_7	82
9	0.1564_8	0.9876_9	0.1583_8	6.3137_5	81
10	0.1736_5	0.9848_1	0.1763_3	5.6712_8	80
11	0.1908_1	0.9816_3	0.1943_8	5.1445_5	79
12	0.2079_1	0.9781_5	0.2125_6	4.7046_3	78
13	0.2249_5	0.9743_7	$0\ 2308_7$	4.3314_8	77
14	0.2419_2	0.9703_0	0.2493_3	4.0107_8	76
15	0.2588_2	0.9659_3	0.2679_5	3.7320_5	75
16	0.2756_3	0.9612_6	0.2867_5	3.4874_1	74
17	0.2923_7	0.9563_0	0.3057_3	3.2708_5	73
18	0.3090_2	0.9510_6	0.3249_2	3.0776_8	72
19	0.3255_7	0.9455_2	0.3443_3	2.9042_1	71
20	0.3420_2	0.9396_9	0.3639_7	2.7474_8	70
21	0.3583_7	0.9335_8	0.3838_6	2.6050_9	69
22	0.3746_1	0.9271_8	0.4040_3	2.4750_9	68
—	cosinus	sinus	cotangens	tangens	kraad.

Kraad	sinus	cosinus	tangens	cotangens	—
23	0.3907$_3$	0.9205$_0$	0.4244$_7$	2.3558$_5$	67
24	0.4067$_4$	0.9135$_5$	0.4452$_3$	2.2460$_4$	66
25	0.4226$_2$	0.9063$_1$	0.4663$_1$	2.1445$_1$	65
26	0.4383$_7$	0.8987$_9$	0.4877$_3$	2.0503$_0$	64
27	0.4539$_9$	0.8910$_1$	0.5095$_3$	1.9626$_1$	63
28	0.4694$_7$	0.8829$_5$	0.5317$_1$	1.8807$_3$	62
29	0.4848$_1$	0.8746$_2$	0.5543$_1$	1.8040$_5$	61
30	0.5000$_0$	0.8660$_3$	0.5773$_5$	1.7320$_5$	60
31	0.5150$_4$	0.8571$_7$	0.6008$_6$	1.6642$_8$	59
32	0.5299$_2$	0.8480$_5$	0.6248$_7$	1.6003$_3$	58
33	0.5446$_4$	0.8386$_7$	0 6494$_1$	1.5398$_6$	57
34	0.5591$_9$	0.8290$_4$	0.6745$_1$	1.4825$_6$	56
35	0.5735$_8$	0.8191$_5$	0.7002$_1$	1.4281$_5$	55
36	0.5877$_9$	0.8090$_2$	0.7265$_4$	1.3763$_8$	54
37	0.6018$_2$	0.7986$_4$	0.7535$_5$	1.3270$_4$	53
38	0.6156$_6$	0.7880$_1$	0.7812$_9$	1.2799$_4$	52
39	0.6293$_2$	0.7771$_5$	0.8097$_8$	1.2349$_0$	51
40	0.6427$_9$	0.7660$_4$	0.8391$_0$	1.1917$_5$	50
41	0.6560$_6$	0.7547$_1$	0.8692$_9$	1.1503$_7$	49
42	0.6691$_3$	0.7431$_4$	0.9004$_0$	1.1106$_1$	48
43	0.6820$_0$	0.7313$_5$	0.9325$_2$	1.0723$_7$	47
44	0.6946$_6$	0.7193$_4$	0.9656$_9$	1,0355$_3$	46
45	0.7071$_1$	0.7071$_1$	1.0000$_0$	1.0000$_0$	45
—	cosinus	sinus	cotangens	tangens	kraad.



158. Täisnurkse kolmnurga lahendamine. „Kolmnurka lahendada“ tähendab — antud külgede ja nurkade kaudu leida teised küljed ja nurgad.

I-ne juhus: Antud hüpotenuus ja üks terav nurk; leida teine terav nurk ja kateedid.

Antud: a = 28,47 cm.; B = 37^0. *Leida:* C, b, c.

Lahend.: 1) C = 90^0 - B

$C = 53^0$.

2) b = a . sin B

3) c = a . sin C = a . cos B

b=28,47sin37^0 c=28,47cos37^0

28,47 | 28,47
810 60 | 689 70

17 08|2 | 19 92|9
2|8 | 2 56|2
1|6 | 22|7
17,12|6 | 6|1

b = 17,13 cm. *c = 22,73*|4 cm.

II-ne juhus: Antud üks kateet ja üks terav nurk; leida teine terav nurk, kateet ja hüpotenuus.

Antud: b = 327,46 m. B = 25^0. *Leida:* C, c, a.

Lahend.: 1) C = 90^0 - B

C = 65^0.

2) c = b . tg C 3) b = a . sin B

c = 327,46 . tg 65^0 $a = \frac{b}{\sin B}$

327,46
544 12

654 92
32 74|6
13 09|8
1 30|9
16|3

702 23|6

$a = \frac{327,46}{\sin 25^0} = \frac{327,46}{0,4226}$

327,46|0,4226

3274,6|4,226
2958 2|774,9
316 4
295 8
20 6
16 8
3 8
3 8

c = 702,24 m.

a = 774,9 m.

III-as juhus. Antud hüpotenuus ja kateet; leida teine kateet ja nurgad.

Antud: $a = 814{,}53$ m.; $b = 382{,}34$ m. *Leida*: B, C, c

Lahend: 1) $b = a. \sin B$.

3) $c = a. \sin C$.

$\sin B = \frac{b}{a} = \frac{382{,}34}{814{,}53}$

$c = 814{,}53. \sin 62°$

```
3,8234 | 8,1453        814,53 |
3 2581 | 0,4694        928 80 |
------                 ------ |
  5653                 651 62 | 4
  4887                  65 16 | 2
  ----                  1 62  | 9
   766                    73  | 3
   733                 ------ |
   ---                 719,14 | 8
    33
    32
```

$\sin B = 0{,}4694$ $\quad c = 719{,}15$

$B = 28°$ (tabeli järel).

2) $C = 62°$

IV-as juhus. Antud on kateedid: leida hüpotenuus ja nurgad.

Antud: $b = 494{,}28$ m.; $c = 705{,}88$ m. *Leida*: B, C, a.

Lahend: 1) $b = c.\mathrm{tg}\, B$.

3) $b = a.\sin B$

1) $\mathrm{tg}\, B = \frac{b}{c} = \frac{494{,}28}{705{,}88}$ $\quad a = \frac{b}{\sin B}$

$a = \frac{494{,}28}{\sin 35°}$

```
494,28 | 705,88
494 12 | 0,7002
------
    16
    14
                    494,28 | 0,57358
                    458 86 | 861,8
                    ------
                     35 42
                     34 41
                     -----
                      1 01
                        57
                        --
                        44
                        45
```

$\mathrm{tg}\, B = 0{,}7002$

$B = 35°$ (tabeli järel).

2) $= C \;\; 55°$.

$a = 861{,}8\ m$.

Kui saadused peenemalt peavad välja arvatama, siis peab logaritmisid tarvitama, nagu seda harilikult ka tehakse.

Harjutused. I. 1) $a = 7{,}82$, $C = 38°$; 2) $a = 75{,}8$, $C = 29°$; 3) $a = 13{,}46$, $B = 57°$; 4) $a = 27{,}18$; $C = 60°$.

II. 5) $b = 12{,}48$, $B = 39°$; 6) $b = 7{,}92$, $C = 24°$ 7) $c = 5{,}74$, $B = 18°$; 8) $c = 20$; $C = 30°$;

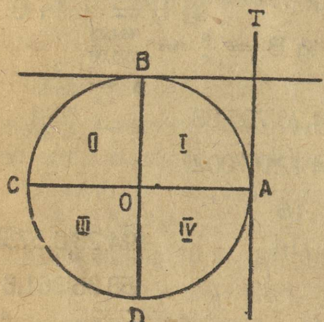
III. 9) $a = 37{,}624$, $b = 18{,}240$; 10) $a = 825{,}47$, $c = 241{,}34$; 11) $a = 904{,}63$, $b = 593{,}44$; 12) $a = 28{,}494$, $c = 12{,}936$.

IV. 13) $b = 23{,}731$, $c = 33{,}892$; 14) $b = 48{,}720$, $c = 54{,}109$; 15) $b = 43{,}30$, $c = 25$; 16) $b = 42{,}370$, $c = 30{,}785$.

159. **Trigon. suuruste üleüldistamine.** Kallakust muudame selle läbi, et me projekteeritavat pöörame tema ühe otsapunkti ümber. Selle juures kujundab teine otsapunkt kaare ja täispöörde jooksul — täie ringi. Me võime projekteeritavat veel edasi pöörata, siis saame veel suuremad nurgad

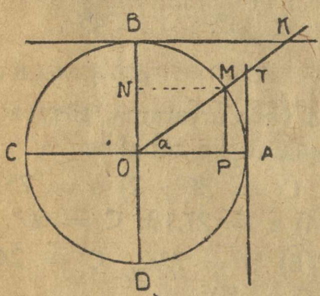
ja kaared. Nurgad ja kaared, mis sünnivad kiire pööramisel *vastu päeva*, loetakse — *positiivseteks*, *päri päeva — negatiivseteks*. Sellest selgub, et nurgad ja kaared võivad olla kui suured tahes, positiivsed ja negatiivsed.

Võtame ringi; tema raadiuse võtame projekteeritavaks.



Tõmbame 2 vastastikku perpendikulaarset diameetrit AC ja BD. AC nimetame esimeseks diameetriks ja A — esimeseks alguspunktiks ehk alguseks; BD nim. teiseks diameetriks ja B — teiseks alguspunktiks ehk alguseks. Need diameetrid jagavad sõõri ja ringi 4-ks veerandiks: AOB ja ⌣ AB on I veerand, BOC ja ⌣BC — II-ne veerand, COD ja ⌣ CD — III-as veerand, DOA ja ⌣DA — IV-as veerand.

Tõmbame ringile riivaja esimeses alguses AT — see on esimene riivaja, ja teises alguses BK — see on teine riivaja.



Kallakuse ehk nurga a sinuseks nimetame projekteerija vahekorda projekteeritavaga ja nurga a cosinuseks—projektsiooni vahekorda projekteeritavaga sin $a = \frac{MP}{OM}$ ja ja cos $a = \frac{OP}{OM}$.

Nüüd ütleme:

Nurga a sinus on see vahekord, mida annab liikuvat raadiust esimese diameetri peale projekteerija perpendikulaar ja raadius, ehk mida annab liikuva raadiuse projektsioon teise diameetri peale ja raadius, sest sin $a = \frac{MP}{OM} = \frac{ON}{OM}$.

Nurga a cosinus on see vahekord, mida annab liikuva raadiuse projektsioon esimese diameetri peale ja raadius, ehk mida annab liikuvat raadiust teise diameetri peale projekteerija perpendikulaar ja raadius, sest cos $a = \frac{OP}{OM} = \frac{MN}{OM}$.

Nurga a tangensiks nimetasime projekteerija ja projektsiooni vahekorda tg $a = \frac{MP}{OP}$. Et aga $\frac{MP}{OP} = \frac{AT}{OA}$ [153], siis on tg $a = \frac{AT}{OA}$ ja me ütleme:

Nurga a tangens on see vahekord, mida annab esimese riivaja lõik, arvatud riivaspunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse ehk diameetri pikandusega, ja raadius.

Nurga a cotangensiks nimetasime projektsiooni ja projekteeritava vahekorda: ctg $a = \frac{OP}{MP}$. Joonestusest on aga näha, et $\frac{OP}{MP} = \frac{MN}{ON} = \frac{BK}{OB}$, ehk ctg $a = \frac{BK}{OB}$ ja me ütleme:

Nurga a kotangens on see vahekord, mida annab teise riivaja lõik, arvatud riivaspunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse ehk diameetri pikendusega ja raadius.

Need trigonomeetrilised suurused, kui vahekorrad, on nimeta arvud.

160. Trigon. suuruste nägelik kujutamine ja nende märgid. Need joonlõigud MP ehk ON, OP ehk MN, AT ja BK, [joon § 159] mille vahekorrad raadiusega on trigonomeetrilised suurused, nim. trigonomeetrilisteks joonteks.

See raadius, mille kohta võetav vahekord annab trigonomeetrilise suuruse, mõeldakse ikka positiivseks. Nimelt öeldakse ikka, et see *raadius on* 1*); s. t. raadius kujutab abstraktset 1 nägelikult. Kui raadius on 1, siis on trigonomeetrilised jooned — õigemini nende mõetarvud — vastavad trigonomeetrilised suurused, s. t. nad kujutavad trigonomeetrilisi suurusi nägelikult. Seda tingimust silmas pidades mõtleme edaspidi trigonomeetrilistest joontest rääkides ikka nende all trigon. suurusi.

Kui need trigonomeetrilised jooned lähevad üles või paremale poole omast algusest, siis loetakse neid positiivseteks; kui alla või vassakule poole, siis negatiivseteks. Sellest järgneb:

Sinus on I-ses ja II-ses veerandis positiivne;
III-ndas ja IV-ndas negatiivne.

Cosinus on I-ses ja IV-ndas veerandis positiivne,
II-ses ja III-ndas negatiivne.

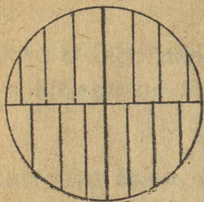
Tangens on I-ses ja III-ndas veerandis positiivne,
II-ses ja IV-ndas negatiivne.

Cotangens on I-ses ja III-ndas veerandis positiivne,
II-ses ja IV-ndis negatiivne.

*) Ring, mille raadius on 1, nim. trigonomeetriliseks ringiks.

161. Trig. suuruste muutumine.

Vaatleme nüüd trig. joonte abil trig. suuruste muutumist.



I. Sinus. Kui nurk on 0°, siis on tema sinus 0. $\sin 0° = 0.$

Kui nurk kasvab, kuni 90°-ni, siis kasvab tema sinus ka kuni +1. $\sin 90° = +1.$

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkab tema sinus vähenema; kui nurk saab 180° suureks, siis väheneb sinus kuni 0-ni. $\sin 180° = 0.$

Kui nurk edasi kasvab, siis väheneb tema sinus edasi; nimelt ta saab negatiivseks, kuna tema absoluutne väärtus kasvab.

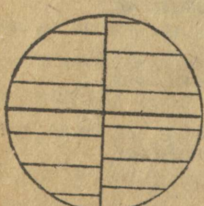
Kui nurk saab 270° suuruseks, siis on tema sinus vähenenud kuni —1-ni. $\sin 270° = -1.$

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkab tema sinus kasvama: ta jääb küll negatiivseks, kuid tema absoluutne väärtus väheneb.

Kui nurk saab 360° suureks, siis on sinus kasvanud kuni 0-ni. $\sin 360° = 0.$

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkavad sinuse endised väärtused endises järjekorras korduma.

Sellest on näha, et nurk on argument ja sinus tema funktsioon, ja nimelt niisugune funktsioon, mille väärtused korduvad, mille väärtused ei muutu, kui argument teatava hulga — 360° — võrra suureneb (ehk väheneb). Niisugust funktsiooni nim. perioodiliseks ja see argumendi hulk, mille tagant funktsiooni väärtused korduma hakkavad, on funktsiooni periood. Sinuse periood on 360°. Sinus muutub piirides —1-st kuni +1-ni katketult. Sinuse absoluutne väärtus ei või iialgi olla suurem kui 1.



II. Cosinus.

Kui nurk on 0°, siis on tema cosinus +1. $\cos 0° = +1.$

Kui nurk kasvab kuni 90°, siis väheneb tema cosinus kuni 0-ni.

$\cos 90° = 0.$

Kui nurk edasi kasvab, siis väheneb cosinus edasi; nimelt ta saab negatiivseks, kuna tema absoluutne väärtus kasvab.

Kui nurk kasvab kuni 180°-ni, siis on tema cosinus vähenenud kuni —1-ni. *cos 180° = —1.*

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkab cosinus kasvama; nimelt ta jääb küll negatiivseks, aga tema absoluutne väärtus väheneb.

Kui nurk saab 270° suureks, siis on cosinus kasvanud kuni 0-ni. *cos 270° = 0.*

Kui nurk edasi kasvab, siis kasvab ka cosinus edasi — ta saab positiivseks ja ta absoluutne väärtus kasvab.

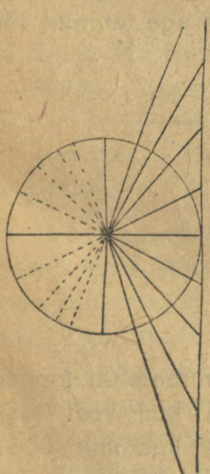
Kui nurk saab 360° suureks, siis on cosinus kasvanud kuni +1-ni. *sco 360° = +1.*

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkavad cosinuse endised väärtused endises järjekorras korduma.

Järjel.: cosinus on nurga funktsioon ja nimelt perioodiline; tema periood on 360°. Cosinus muutub piirides —1-st kuni +1-ni katketult ja tema absoluutne väärtus ei või iialgi olla suurem kui 1.

III. Tangens.

Kui nurk on 0, siis on tema tangens ka 0. *tg 0° = 0*



Kui nurk kasvab, siis kasvab ka tema tangens.

Mida suuremaks nurk kasvab, seda pikemaks läheb tangensi joon, seda kaugemale alguspunktist nihkub selle joone lõikepunkt raadiuse pikendusega. Kui nurk saab 90° suureks, siis saab pikendatud raadius paralleelseks I-sele riivajale, lõikepunkt nihkub lõpmatusse ja tangens saab lõpmata suureks tg 90° = ∞.

Niipea kui nurk vähe suuremaks saab, ei ole see sirgjoon, mille lõiguks on liikuv raadius ehk diameeter, mitte enam paralleelne I-sele riivajale, nende ülemised otsad lähevad lahku, alumised pooled aga peavad lõikuma, lõikepunkt hüppab $+$ lõpmatusest—lõpmatusse. Nii on siis $tg\ (90^0 - \varepsilon) = + \infty$, $tg\ (90^0 + \varepsilon) = - \infty$, kus ε on lvs.*) ja me kirjutame: $tg\ 90^0 = \pm \infty$.

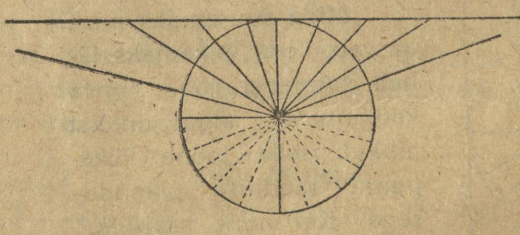
Kui nurk edasi suureneb, siis hakkab lõikepunkt altpoolt lähenema alguspunktile, tangens jääb negatiivseks, ta absoluutne väärtus väheneb; s. t. tangens kasvab.

Kui nurk saab 180^0 suureks, siis on tangens kasvanud kuni 0-ni. $tg\ 180^0 = 0$.

Kui nurk edasi kasvab, siis hakkavad tangensi endised väärtused endises järjekorras korduma.

Järjel.: Tangens on nurga funktsioon, ja nimelt perioodiline; tema periood on 180^0. Tangensi muutumisel ei ole piiri; tangens võib omandada kõiki väärtusi $-\infty$-sest kuni $+\infty$-ni. Tangensi muutumisel on aga katke olemas 90^0 ja 270^0 kraadi juures; seal on ta $\pm \infty$.

IV. Cotangens. Kui nurk on 0^0, siis on II-ne riivaja paralleelne raadiuse pikendusele, mida me 0^0 juures paremale poole tõmbame; lõikepunkti ei ole, räägitakse aga, et nad lõikuvad lõpmatuses: $ctg\ 0^0 = + \infty$.



Niipea kui nurk vähe suureneb, ei ole nimetatud jooned enam paralleelsed, ilmub lõikepunkt, ehk ta küll veel väga kaugel on. Mida enam nurk suureneb, seda ligemale II-sele alguspunktile tuleb lõikepunkt, cotangens väheneb.

---

*) lvs = lõpmata väike suurus.

Kui nurk saab 90^0 suureks, siis lõikuvad liikuv raadius ja II-ne riivaja II-ses alguspunktis ja cotangens on 0: $ctg\ 90^\circ = 0$.

Kui nurk edasi suureneb üle 90^0, siis nihkub lõikepunkt edasi vassakule poole, cotangens saab negatiivseks ja ta absoluutne väärtus suureneb; s. t. cotangens väheneb. Mida enam nurk suureneb, seda kaugemale II-sest alguspunktist vassakule poole nihkub lõikepunkt; cotangens väheneb, ja kui nurk saab 180^0 suureks, siis on jooned paralleelsed, lõikepunkt on vassakule poole ära kadunud, lõpmatusse läinud: $ctg\ 180^0 = -\infty$.

Niipea kui nurk vähe üle 180^0 suureneb, lõpeb joonte paralleelsus, II-se riivaja vassakpoolne osa läheb lahku liikuva raadiuse pikendusega, tema parempoolne osa aga peab lõikuma liikuva raadiuse pikendusega ehk küll väga kaugel.

See tähendab: lõikepunkt hüppab — lõpmatusest + lõpmatusse.

Seesama juhtub ka, kui nurk 360°-st üle läheb, ehk nurga üleminekul, negatiivse väärtuse pealt positiivse väärtuse peale 0° juures. Seepärast kirjutatakse:

$$ctg\ 0^\circ = \pm\infty, \quad ctg\ 180^\circ = \pm\infty, \quad ctg\ 360^\circ = \pm\infty.$$

Kui nurk edasi suureneb, siis hakkavad cotangensi endised väärtused endises järjekorras korduma. $ctg\ 270^\circ = 0$.

Järjelikult: Cotangens on nurga funktsioon, ja nimelt perioodiline; tema periood on 180°. Cotangensi muutumisel ei ole piiri; cotangens võib omandada kõik väärtused $-\infty$-sest kuni $+\infty$-ni. Cotangensi muutumisel on katke olemas 180° ja 0° (ehk 360°) juures.

Märkus: Negatiivsete nurkade trig. funktsioonid muutuvad niisamuti ainult vastupidises järjekorras.

Ülesanne. Uurida negat. nurkade trig. funktsioonide muutumist.

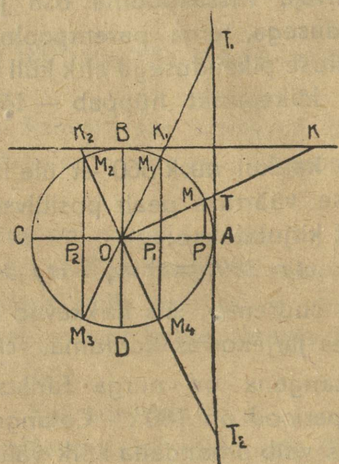
162. Redutseerimise valemid. Iga trig. suurus käib ühe veerandi sees läbi kõik need absoluutsed väärtused, mida ta ülepea omandada võib. Seepärast on tarvis trig. suuruste või nende logaritmide tabelid kokku seada ainult ühe veerandi jaoks. Et aga ühe nurga trig. suurus võrdub oma täiendusnurga sarnase nimega suurusele, siis on ka küllalt, kui meil on trig. suuruste tabel nurkade jaoks 0^0 kuni 45^0-ni. Valemid, mille põhjal me suuremate nurkade trig. suurusi väljendame 90^0-st kraadist (või koguni 45°-st kraadist) vähemate nurkade trig. suuruste abil, nim. redutseerimise (taandamise) valemiteks.

Joonestusest on otsekohe näha, kui $\angle AOP = a$,

siis on:

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ - a) &= M_1P_1 = OP = \cos a \\
\cos(90^\circ - a) &= OP_1 = MP = \sin a \\
\operatorname{tg}(90^\circ - a) &= AT_1 = BK = \operatorname{ctg} a \\
\operatorname{ctg}(90^\circ - a) &= BK_1 = AT = \operatorname{tg} a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ + a) &= M_2P_2 = OP = \cos a \\
\cos(90^\circ + a) &= OP_2 = -MP = -\sin a \\
\operatorname{tg}(90^\circ + a) &= AT_2 = -BK = -\operatorname{ctg} a \\
\operatorname{ctg}(90^\circ + a) &= BK_2 = -AT = -\operatorname{tg} a.
\end{aligned}$$



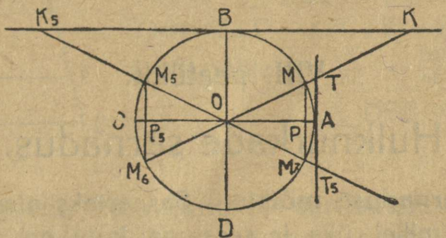
$$\begin{aligned}
\sin(270^\circ - a) &= M_3P_2 = -OP = -\cos a \\
\cos(270^\circ - a) &= OP_2 = -MP = -\sin a \\
\operatorname{tg}(270^\circ - a) &= AT_1 = BK = \operatorname{ctg} a \\
\operatorname{ctg}(270^\circ - a) &= BK_1 = AT = \operatorname{ctg} a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(270^\circ + a) &= M_4P_1 = -OP = -\cos a \\
\cos(270^\circ + a) &= OP_1 = MP = \sin a \\
\operatorname{tg}(270^\circ + a) &= AT_2 = -BK = -\operatorname{ctg} a \\
\operatorname{ctg}(270^\circ + a) &= BK_2 = -AT = -\operatorname{tg} a.
\end{aligned}$$

Kui redutseeritava nurga koosseisus ette tuleb liigarv veerandid, siis on trig. suuruse nimetus ainult sarnane; märk pannakse selle veerandi järele, milles redutseeritav nurk lõppeb.

$$
\begin{aligned}
\sin(180^\circ - a) &= M_5P_5 = MP = \sin a \\
\cos(180^\circ - a) &= OP_5 = -OP = -\cos a \\
\mathrm{tg}(180^\circ - a) &= AT_5 = -AT = -\mathrm{tg}\, a \\
\mathrm{ctg}(180^\circ - a) &= BK_5 = -BK = -\mathrm{ctg}\, a.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(180^\circ + a) &= M_6P_5 = -MP = -\sin a \\
\cos(180^\circ + a) &= OP_5 = -OP = -\cos a \\
\mathrm{tg}(180^\circ + a) &= AT = \mathrm{tg}\, a \\
\mathrm{ctg}(180^\circ + a) &= BK = \mathrm{ctg}\, a
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\sin(360^\circ - a) &= M_7P = -MP = -\sin a \\
\cos(360^\circ - a) &= OP = \cos a \\
\mathrm{tg}(360^\circ - a) &= AT_5 = -AT = -\mathrm{tg}\, a \\
\mathrm{ctg}(360^\circ - a) &= BK_5 = -BK = -\mathrm{ctg}\, a.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(-a) &= \sin(360^\circ - a) = -\sin a \\
\cos(-a) &= \cos(360^\circ - a) = \cos a \\
\mathrm{tg}(-a) &= \mathrm{tg}(360^\circ - a) = -\mathrm{tg}\, a \\
\mathrm{ctg}(-a) &= \mathrm{ctg}(360^\circ - a) = -\mathrm{ctg}\, a.
\end{aligned}
$$

Kui redutseeritava nurga koosseisus ette tuleb paarisarv veerandid, siis on trig. suuruse nimetus seesama; märk pannakse selle veerandi järel, milles redutseeritav nurk lõppeb.

Joonestuse abil on võimalik ära näidata, et need valemid on õiged ükskõik kui suure nurga *a* jaoks.

VIII. peatükk.

Hulknurkade sarnadus.

163. Sarnaduse mõiste. Sarnasteks nimetasime kahte kujundit [43], millel üks ja seesama kuju on, mis aga oma suuruse poolest lahku lähevad. Näit. mingi pilt ja tema fotograafiline suurendus.

Definitsioon. *Kahte hulknurka*) nimetame sarnasteks, kui nende samas järjekorras võetud nurgad on vastavalt võrdsed ja kui võrdsete nurkade lähisküljed on proportsionaalsed.*

Sarnastes hulknurkades nimetame võrdsete nurkade lähis külgi *vastavateks* (samapaikseteks, homoloogseteks) ja ütleme: *Sarnastes hulknurkades on vastavad küljed proportsionaalsed.* Nende külgede ühist vahekorda nim. *sarnaduse koeffitsiendiks.* Niisama nimetame sarnastes hulknurkades proportsionaalsete külgede vahelnurki vastavateks ja ütleme: sarnastes hulknurkades on vastavad nurgad võrdsed.

Järeldus: Korrapärased samanimelised hulknurgad on sarnased.

Kolmnurkade sarnadus.

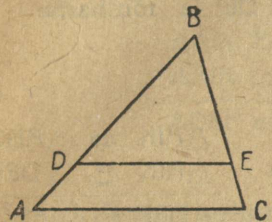
164. Definitsiooni järele on kolmnurgad ABC ja DEF sarnased, kui täidetud on tingimused: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ja $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

---

*) I-ses andes tarvitatud nimetuse „paljunurk“ asemel võtame tarvitusele nimetuse „hulknurk“.

Pärastpoole [166, 167] näeme, et on küllalt, kui üks nendest täidetud on, sest siis on täidetud ka teine.

Teoreem: Ühele küljele △-gas tõmmatud paralleeljoon lõikab ära kolmnurga, mis on antud kolmnurgale sarnane.



Oletus: DE ∥ AC

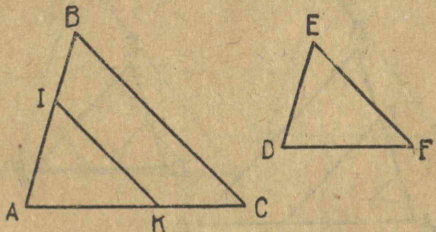
Väide: △ DBE ∞ △ ABC

Tõestus: ∠D = ∠A, ∠E = ∠C, ∠B = ∠B.

§ 149 põhjal on $\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{EB}{CB}$.

△ DBE ∞ ABC.

165. Esimene kolmnurkade sarnaduse teoreem. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on proportsionaalsed teise kolmnurga kahele küljele ja kui nende vahelnurgad on isekeskis võrdsed.



Oletus: AB : DE = AC : DF, ∠D = ∠A

Väide: △DEF ∞ △ABC.

Tõestus: Asetame AB peale AI = DE ja tõmbame IK ∥ BC. Siis on [164]

△AIK ∞ △ABC.

AB : AI = AC : AK [definitsiooni järel]

AB : DE = AC : DF [antud];

Et AI = DE, siis on ka AK = DF. Peale selle ∠A = ∠D

△AIK ≌ △DEF. [I. k. k.t.]

△AIK ∞ △ABC

△DEF ∞ △ABC.

166. Teine kolmnurkade sarnaduse teoreem. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahele nurgale. (Joonestus v. § 165.)

Oletus: $\angle D = \angle A, \angle E = \angle B$; järjel. ka $\angle F = \angle C$.

Väide: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Tõestus: Asetame AB peale $AI = DE$ ja tõmbame $IK \parallel BC$. Siis on [164]

$\triangle AIK \sim \triangle ABC$.

$\angle I = \angle B$, kui vastavad $\angle$-gad; $\angle E = \angle B$

$\angle I = \angle E$.

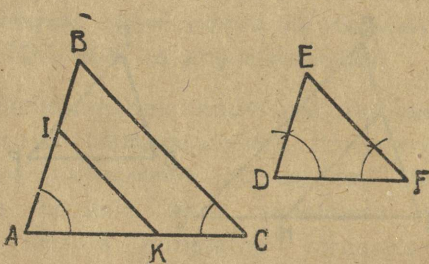
$\angle I = \angle E$
$\angle A = \angle D$
$AI = DE$

$\triangle AIK \cong \triangle DEF$.

$\triangle AIK \sim \triangle ABC$
$\triangle AIK \cong \triangle DEF$

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Ülesanne: Antud kolmnurgale konstrueerida sarnane kolmnurk, millel üks külg on antud.



Lahendamine: Antud külje DF peale konstrueerime punkti D juures $\angle D = \angle A$ ja punkti F juures $\angle F = \angle C$. Nurkade D ja F teised harud lõikuvad punktis E ja $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ [166].

Ehk: AC peale asetame $AK = DF$ ja tõmbame $KI \parallel CB$. $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ [164].

167. Kolmas kolmnurkade sarnaduse teoreem. Kaks kolmnurka on sarnased, kui kõik küljed on proportsionaalsed.

Oletus: $AB : DE = BC : EF = CA : FD$. [Joon. v. § 165].

Väide: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Tõestus: Asetame AB peale $AI = DE$ ja tõmbame $IK \parallel BC$. Siis on [164]

$\triangle AIK \sim \triangle ABC$.

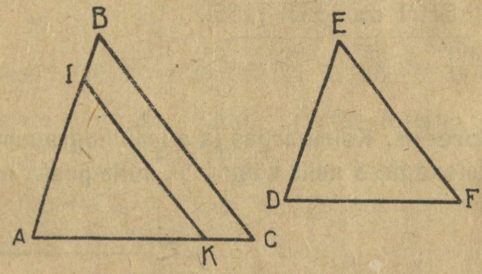
$AB : AI = BC : IK = CA : KA$. Peale selle on antud:
$AB : DE = BC : EF = CA : FD$.

Et $AI = DE$, siis on ka $IK = EF$ ja $KA = FD$.

$\triangle AIK \cong \triangle DEF$ [III. k. k. t.]
$\triangle AIK \sim \triangle ABC$.

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

168. Neljas kolmnurkade sarnaduse teoreem. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on proportsionaalsed teise kolmnurga kahele küljele ja suuremate külgede vastasnurgad on isekeskis võrdsed.



Oletus: $AB : DE = BC : EF$; $BC > AB$, $EF > DE$; $\angle A = \angle D$.

Väide: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Tõestus: Asetame AB peale $AI = DE$ ja tõmbame $IK \parallel BC$. Siis on [164]

$\triangle AIK \sim \triangle ABC$.

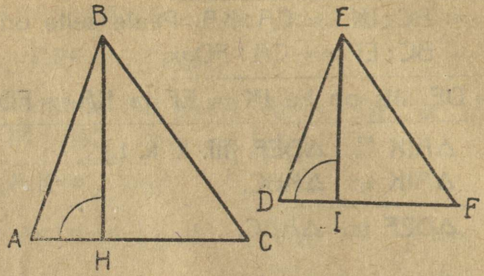
$AB : AI = BC : IK$. Peale selle on antud, et
$AB : DE = BC : EF$

Et $AI = DE$, siis on ka $IK = EF$. Peale selle $\angle A = \angle D$.

$\triangle AIK \cong \triangle DEF$. [IV. k. k. t.].
$\triangle AIK \sim \triangle ABC$

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

169. Teoreem. **Sarnastes kolmnurkades on vastavad kõrgused proportsionaalsed vastavatele külgedele.**



Oletus: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, $EI \perp DF$, $BH \perp AC$.

Väide: $\frac{BH}{EI} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

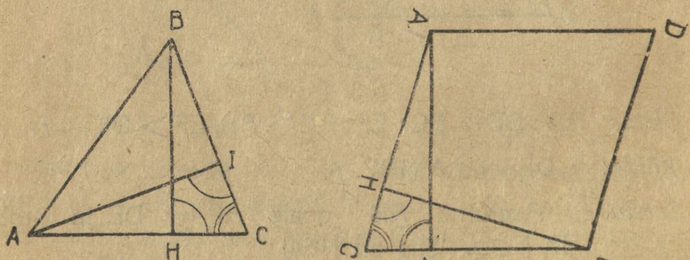
Tõestus: $\angle A = D$, sest et $\triangle DEF \sim \triangle ABC$;

$\angle H = \angle I$ kui täisnurgad.

$\triangle BAH \sim \triangle EDI$ [166],

$\frac{BH}{EI} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

170. Teoreem. **Kolmnurgas ja parallelogrammis on kõrgused vastu proportsionaalsed neile külgedele, mille peale nad tõmmatud.**



Oletus: $BH \perp AC$, $AI \perp BC$.

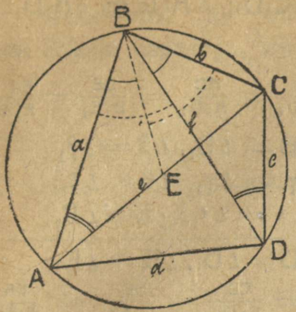
Väide: $\frac{BH}{AI} = \frac{BC}{AC}$, s. o. $AC . BH = BC . AI$.

Tõestus: $\angle C = \angle C$, ühine nurk;

$\angle H = \angle I$, kui täisnurgad.

$\triangle HBC \sim \triangle IAC$

$\frac{BH}{AI} = \frac{BC}{AC}$; siit leiame $AC.BH = BC.AI$.



171. Ptolomäuse teoreem. Igas sissekujundatud nelinurgas on diagonaalide kasvatis niisama suur, kui vastasküljede kasvatiste summa.

Väide: e. f. = a. c. + b d.

Tõestus: Asetame AB külge $\angle ABE = \angle DBC$; siis on:

1) $\angle ABE = \angle DBC$
$\angle BAE = \angle BDC$ (toet. $\smile$BC p.)
$\triangle BAE \backsim \triangle BDC$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{AE}{DC}$$

ehk $\frac{a}{f} = \frac{AE}{c}$

ja 2) $\angle ABD = \angle EBC$;
$\angle BDA = \angle BCE$ (toet. $\smile$AB p.)
$\triangle BDA \backsim \triangle BCE$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DA}{CE}$$

$\frac{f}{b} = \frac{d}{CE}$

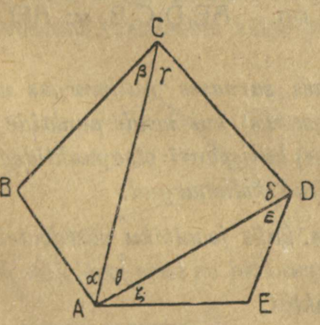
Siit leiame: AE. f = a. c. (1) ja CE. f = b. d. (2).

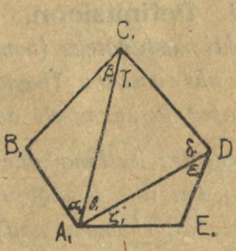
Neid kahte võrdust kokku arvates leiame:
(AE + CE). f = a. c. + b. d.

Et aga AE + CE = AC = e, siis on **e. f = a. c + b. d.** mis oligi tarvis tõeks teha.

Hulknurkade sarnadus.

172. Teoreem. Kaks hulknurka on sarnased, kui paarist vastavast tipust tõmmatud diagonaalid neid jagavad paari kaupa sarnasteks ja sarnaselt asendatud kolmnurkadeks.





Oletus: $\triangle ABC \backsim A_1B_1C_1$; $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$; $\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$.

Väide: $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Tõestus: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; järjel. $\angle\alpha = \angle\alpha_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle\beta = \angle\beta_1$

$\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$; „ $\angle\theta = \angle\theta_1$, $\angle\gamma = \angle\gamma_1$, $\angle\delta = \angle\delta_1$,

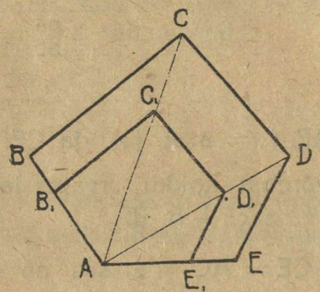
$\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$; „ $\angle\zeta = \angle\zeta_1$, $\angle\varepsilon = \angle\varepsilon_1$, $\angle E = \angle E_1$,

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$;

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$

$ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Ülesanne. Antud hulknurgale konstrueerida sarnane hulknurk, millel üks külg on antud.



Lahendamine: Jagame antud hulknurga $ABCDE$ kolmnurkadeks diagonaalidega, mis tipust A välja lähevad.

Antud külje AE_1 peal konstrueerime $\triangle AE_1D_1 \backsim \triangle AED$ [166].

„ „ AD_1 „ „ $\triangle AD_1C_1 \backsim \triangle ADC$ „

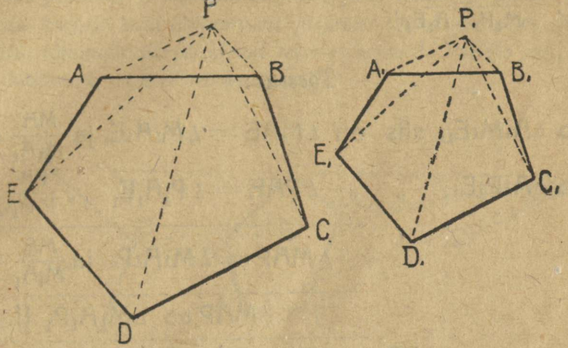
„ „ AC_1 „ „ $\triangle AC_1B_1 \backsim \triangle ACB$ „

Siis on $AE_1D_1C_1B_1 \backsim AEDCB$.

173. Definitsioon. *Kahes sarnases hulknurgas nimetakse kaht punkti vastavateks (homoloogseteks), kui nende punktide ühendamise läbi ühe vastava (homoloogse) küljepaari otsapunktidega sünnivad sarnased ja sarnaselt asendatud kolmnurgad.*

Sarnastes hulknurkades nim. kaks joonlõiku vastavateks (homoloogseteks), kui ühe joonlõigu otsapunktid on teise joonlõigu otsapunktidele vastavad (homoloogsed) punktid.

Teoreem. Kui sarnaste hulknurkade vastavad punktid ühendada kõikide tippudega, siis sünnivad paarikaupa sarnased kolmnurgad.



Oletus: $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ ja $\triangle PAE \backsim \triangle P_1A_1E_1$.

Väide: 1) $\triangle PED \backsim \triangle P_1E_1D_1$; 2) $\triangle PDC \backsim \triangle P_1D_1C_1$;
3) $\triangle PCB \backsim \triangle P_1C_1B_1$; 4) $\triangle PBA \backsim \triangle P_1B_1A_1$.

Tõestus:

1) Et $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$, siis on $\angle AED = \angle A_1E_1D_1$ ja $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{ED}{E_1D_1}$

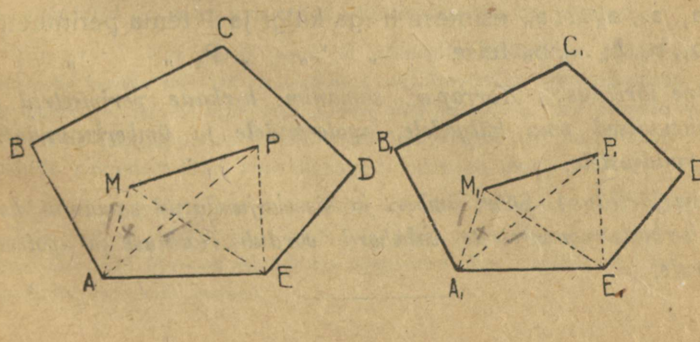
et $\triangle PAE \backsim \triangle P_1A_1E_1$, „ „ $\angle AEP = \angle A_1E_1P_1$ ja $\frac{AE}{A_1E} = \frac{EP}{E_1P_1}$

$\angle PED = \angle P_1E_1D_1$ ja $\frac{PE}{P_1E_1} = \frac{ED}{E_1D_1}$

$\triangle PED \backsim \triangle P_1E_1D_1$. [l. k. s. t.] jne;

Järeldus: Vastavatest tippudest tõmmatud diagonaalid jagavad sarnased hulknurgad paarikaupa sarnasteks kolmnurkadeks.

174. **Teoreem.** Sarnastes hulknurkades on vastavad joonlõigud proportsionaalsed vastavatele külgedele.



Oletus: $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$;
$\triangle AME \backsim \triangle A_1M_1E_1$, $\triangle APE \backsim \triangle A_1P_1E_1$;

Väide: $\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{AE}{A_1E_1}$.

Tõestus:

Et $\triangle AME \backsim \triangle A_1M_1E_1$, siis on $\angle MAE = \angle M_1A_1E$, ja $\frac{MA}{M_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}$

et $\triangle APE \backsim \triangle A_1P_1E_1$, „ „ $\angle PAE = \angle P_1A_1E_1$ „ $\frac{PA}{P_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}$

$\angle MAP = \angle M_1A_1P_1$ ja $\frac{MA}{M_1A_1} = \frac{AP}{A_1P_1}$

$\triangle MAP \backsim \triangle M_1A_1P_1$ [I. k. s. t.]

$$\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{MA}{M_1A_1} = \frac{PA}{P_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}; \text{ s.o. } \frac{MP}{M_1P_1} = \frac{AE}{A_1E_1}.$$

Järeldus. Korrapär. samanimeliste h-rkade apoteemid ja nende ümber kujundatud ringide raadiused on proportsionaalsed külgedele ja isekeskis.

175. Teoreem. Sarnaste hulknurkade perimeetrid on proportsionaalsed vastavatele külgedele.

Tõestus: Et hulknurk $ABCDE$ on $\backsim$ hulknurgale $A_1B_1C_1D_1E_1$, siis on

$$\frac{BA}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} \text{ ehk } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Et aga igas võrdsete vahekordade reas on eesliigete summa tagaliigete summa kohta, nagu iga eesliige oma tagaliikme kohta, siis leiame siit:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \text{ jne. ehk}$$

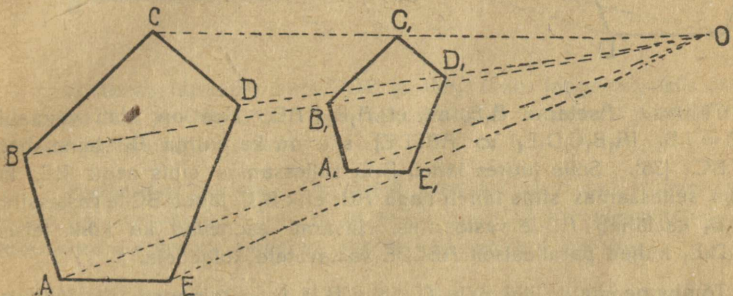
$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ ehk $\frac{P}{P_1} = \frac{a_n}{b_n}$, kus tähendavad $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ esimese h-rga külgi ja P tema perimeetrit,
$b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ teise „ „ „ P_1 „ „

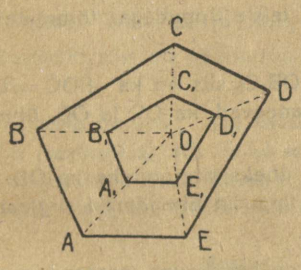
1-ne järeldus: *Korrapär. samanim. h-rkade perimeetrid on proportsionaalsed oma külgedele, apoteemidele ja ümberkujundatud ringide raadiustele.*

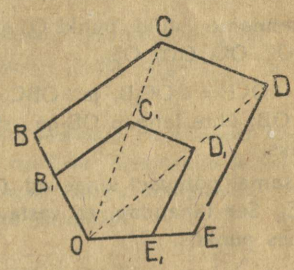
2-ne järeldus: *Sõõri ümber- ja sissekujundatud samanim. korrapär. h-rkade perimeetrite vahekord võrdub raadiuse ja apoteemi vahekorrale.*

Sarnaduspunktid ja sarnaduskiired. (Homothetia).

176. Teoreem. Kui mingi punkt O ühendada hulknurga tippudega ja siis ükskõik mis punktist B ühe ühendusjoone peal tõmmata paralleeljoon hulknurga vastavale küljele kuni lõikumiseni järgmise ühendusjoonega, ja sellest lõikepunktist jälle tõmmata paralleeljoon teisele vastavale küljele jne., siis on niiviisi saadud hulknurk esimese sarnane.





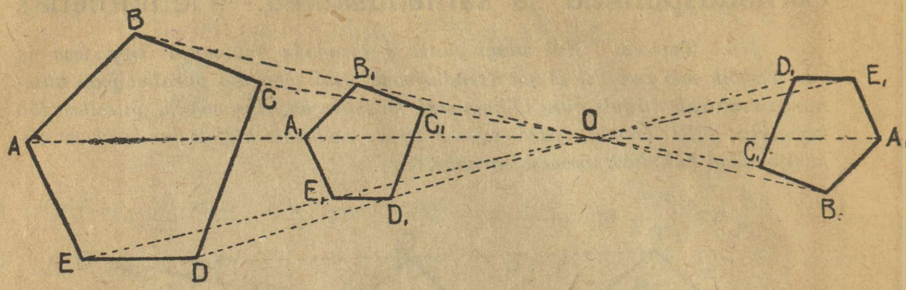


Tõestus; Need paralleeljooned jagavad kõiki ühendusjooni ühes ja sellessamas vahekorras; seepärast läheb viimasest jaotuspunktist tõmmatud paralleeljoon läbi esimese jaotuspunkti ja kõik paralleeljooned sünnitavad kinnise murtud joone, mis piirab hulknurka $A_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$-le, sest tema nurgad on vastavalt võrdsed $ABCDE$ nurkadele ja vastavad küljed on proportsionaalsed, nimelt nende ühine vahekord on seesama, milles ühendusjooned on jagatud.

Järeldus: Kui mingi punkt O ühendada hulknurga tippudega, neid ühendusjooni jagada ühes ja sellessamas vahekorras ja jaotuspunktid järgimööda ühendada teineteisega, siis sünnib uus hulknurk, mis esimese sarnane on — sest et jaotuspunkta ühendavad joonlõigud on paralleelsed h-rga vastavatele külgedele [146, 1-ne ülesanne, vastupid. teor.].

177. Vastupidine teoreem. Kahte sarnast hulknurka võib niisugusesse seisandisse asetada, et iga paar vastavaid külgi paralleelsed on, ja siis lõikuvad kõik vastavaid tippusid ühendavad sirgjooned ühes punktis, mis mõlematele hulknurkadele sarnaselt aseneb.



Tõestus: Asetame A_1B_1 nii, et $A_1B_1 \parallel AB$. See on alati võimalik. Et $\angle B = \angle B_1$ [$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$], siis on ka nurga B_1 teine haru $B_1C_1 \parallel BC$. [36]. Selle juures läheb B_1C_1 sellessamas sihis nagu BC, kui A_1B_1 ka sellessamas sihis läheb nagu AB; ehk B_1C_1 läheb BC-le vastassihis, kui A_1B_1 ka läheb AB-le vastassihis. Niisama asenevad ka kõik teised $A_1B_1C_1D_1E_1$ küljed paralleelselt ABCDE vastavatele külgedele.

Tõmbame nüüd läbi A ja A_1, läbi B ja B_1 sirgjooned, siis lõikuvad need jooned ehk nende pikendused punktis O, sest A_1B_1 ei ole $=$ AB.

Ühendame nüüd punkt O kõigi teiste tippudega. tõmmates jooni OC, OD, OE, OC_1, OD_1, OE_1.

Et $\angle OCB = \angle OC_1B_1$ ja $\angle OBC = \angle OB_1C_1$, siis on ka BOC $= \angle B_1OC_1$. Et OB_1 ühte langeb OB-ga, siis langevad ka OC ja OC_1 ühte üheks sirgjooneks.

Selsamal põhjusel langevad ühte üheks sirgjooneks ka OD ja OD_1, OE ja OE_1. See tähendab, et vastavaid tippusid ühendavad sirgjooned lõikuvad ühes punktis.

Sellejuures sünnitatud kolmnurgad on paarikaupa sarnased, sest nende nurgad on paarikaupa võrdsed. See tähendab et O on nendes hulknurkades iseenesele vastav (homoloogne) punkt; teiste sõnadega—punkt O aseneb sarnaselt mõlema hulknurga kohta.

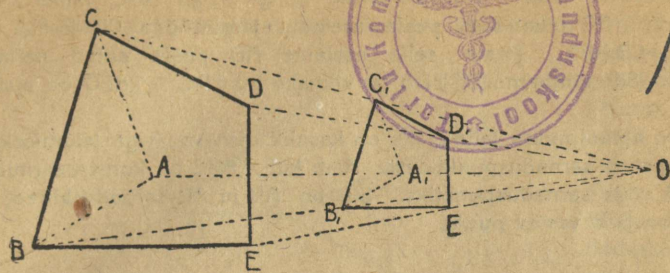
Definitsioonid. Kaks hulknurka, mis on teineteise kohta eelpool kirjeldatud seisandis, nimetatakse *sarnaselt asendatuiks* [homotheetilisteks] ja punkt O on nende hulknurkade *sarnaduspunkt* [homothetia tsenter]. Sarnaduspunkt on ühendusjoonte peal ja nimetatakse *sisemiseks,* kui paralleelsed küljed vastassihis jooksevad; sarnaduspunkt on ühendusjoonte pikenduste peal ja nimetatakse *välimiseks,* kui paralleelsed küljed jooksevad samas sihis. Iga sirgjoon, mis läheb läbi sarnaduspunkti on *sarnaduskiir.*

178. Teoreem. Sarnaselt asendatud hulknurkade vastavad punktid leiduvad ühe sarnaduskiire peal ja nende kaugused sarnaduspunktist on proportsionaalsed vastavatele külgedele.

Tõestus: A_1 on A-le ja O on iseendale vastav punkt sarnastes hulknurkades BCDE ja $B_1C_1D_1E_1$ [173]. Seepärast on $\triangle B_1OA_1 \backsim \triangle BOA$. Järjelikult on $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$ ja $\angle A_1OB_1 = \angle AOB$

Kommerts & kaubanduskool Tartu

1333



Et nende nurkade harud OB ja OB_1 ühte langevad, siis langevad ka harud OA ja OA_1 ühte. See tähendab, et vastavad punktid A ja A_1 on ühe sarnaduskiire peal.

Vastupidine teoreem. On kahes sarnaselt asendatud hulknurgas kaks punkti ühe sarnaduskiire peal ja on nende kaugused sarnaduspunktist proportsionaalsed vastavatele külgedele, siis on nad vastavad punktid.

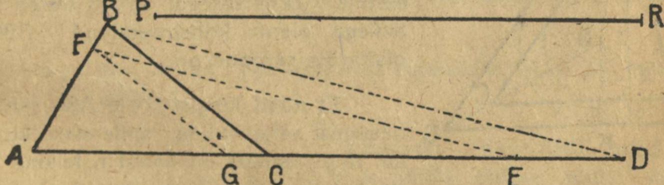
179. Teoreem. Sarnaselt asendatud hulknurkades on vastavad joonlõigud paralleelsed. Joonistus § 178.)

Tõestus: On AB ja A_1B_1 vastavad joonlõigud [173, 174] ja O sarnaduspunkt, siis on eelmineva teoreemi järele $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$ ja sellepärast AB A_1B_1.

Tõestada teoreem: Kui kahes sõõris tõmmata paralleelsed raadiused sa mas sihis (vastassihis), siis läheb nende raadiuste otsapunkta ühendav sirgjoon läbi tsentrijoone ja ühise välimise (sisemise) riivaja lõikepunkti. Seda punkti nim. ringide sarnaduspunktiks (homothetia tsentriks).

Sarnaste kujundite metood.

180. Ülesanne. △ konstrueerida, kui antud on 2 nurka ja perimeeter.



Analüüs: Kahe antud nurga ja vabalt võetud külje abil konstrueerime esialgselt △-rga, mis nurkade võrduse pärast on otsitava sarnane. Seepärast on konstrueeritud ja otsitava △-rga perimeetrid proportsionaalsed nende vastavatele külgedele ja me võime otsitava △-rga külje konstrueerida kui 4-nda proportsionaalse 3-le tuntud joonlõigule. [148, I].

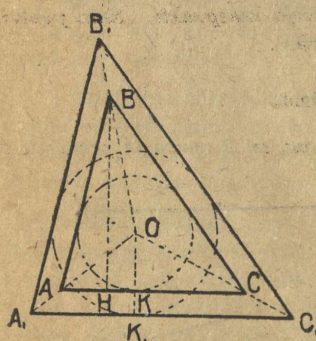
Pärast seda on kerge konstrueerida △ leitud külje ja kahe nurga abil.

Konstrueerimine. Konstrueerime mingi $\triangle$-ga ABC, millel 2 antud nurka on. AC pikenduse peale asetame järgimööda CB ja BA nii, et $AD = AC + CB + BA$. Peale selle asetame AD peale antud perimeetri $PR = AE$. Siis tõmbame $EF \parallel DB$ ja viimaks $FG \parallel BC$. $\triangle AFG$ on otsitav.

On abikolmnurk leitud, siis on kasulik otsitava $\triangle$-ga leidmiseks tarvitada õpetust sarnaduspunktidest. Näit. kui $\triangle ABC$ on konstrueeritud, siis võime A võtta sarnaduspunktiks. Siis on AB ja AD sarnaduskiired, E on D-le, F on B-le vastav punkt.

181. Sarnaste kujundite metood. Mõnede konstrueerimis-ülesannete lahendamiseks tarvitatav sarnaste kujundite metood seisab selles, et me ühe osa andmete abil konstrueerlme otsitavale kujundile sarnase ja teise osa andmete abil valime välja abikujundile sarnaste hulgast selle, milles see teine osa andmeid esineb. Viimasel otstarbel on kasulik tarvitada sarnaduspunktide õpetust. Järjelikult langevad andmed kahté liiki: esimesesse liiki kuuluvad need andmed, mis kujundi kuju kindlaks määravad, nimelt nurgad ja joonlõikude vahekorrad; teise liiki kuuluvad joonlõigud, mis kujundi suuruse kindlaks määravad ja seeläbi võimaluse annavad sarnaste hulgast otsitavat leida. Mitte iga kord ei ole tarvis konstrueerida otsitavale kujundile sarnast; mõnikord on ka küllalt, kui me konstrueerime kujundi, mis sarnane on otsitava kujundi osale.

I-ne näitus. Konstrueerida $\triangle$, kui antud on $h_b : a$, α, r.

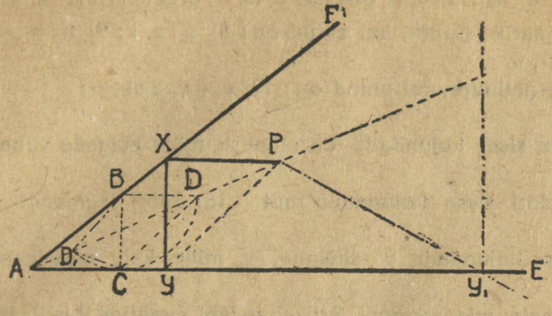


Lahend.: Et $\angle A = \alpha$ antud on, siis võime konstrueerida $\triangle ABH$ vabalt võttes BH. Siis konstrueerime $\triangle HBC$ nii, et $BH : BC = h_b : a$ ja et C on AH pikenduse peal. Ehk: Konstrueerime täisnurkse $\triangle CBH$ nii et $BH : BC = h_b : a$. See läbi leiame otsitava $\triangle$-ga teise nurga $\gamma = \angle C$. Nüüd konstrueerime $\triangle BHA$ kateedi BH ja nurga α abil. Sellega oleme konstrueerinud $\triangle ABC$, mis otsitavale sarnane on.

Et nüüd kõigist $\triangle$-le ABC sarnastest niisugust välja valida, mille sisse kujundatud ringi raadius on antud r, leiame $\triangle ABC$ sisse kujundatud ringi tsentri O. Sellest tsentrist tõmbame ringi raadiusega $OK_1 = r$. Punkti O sarnaduspunktiks võttes tõmbame sarnaduskiired OA, OB ja OC. Nüüd tõmbame riivaja punktis K_1, mis sarnaduskiired OA ja OC lõikab punktis A_1 ja C_1. Punktidest A_1 ja C_1 tõmmatud riivajad lähevad paralleelselt AB-le ja CB-le ja lõikavad sarnaduskiirt OB-d ühes punktis B_1. $\triangle A_1B_1C_1$ on otsitav.

II-ne näitus. *Antud nurga haru peal punkt leida, mis teisest harust ja ühest nurga sees antud punktist ühekaugel on.*

Analüüs: Olgu X otsitav ja P antud punkt, nii et $XY \perp AE$ ja $XY = XP$; siis on $\triangle PXY$ sarikkolmnurk. Võtame antud nurga tipu A sarnaduspunktiks, siis on AE, AF ja AP sarnaduskiired ja meil ei ole raske konstrueerida $\triangle BCD \sim \triangle XYP$.



Konstrueerimine: 1) Tõmbame kiire AP; 2) AF peal vabalt võetud punktist B tõmbame AE peale perpendikulaari $BC \perp AE$. 3) Punkti B tsentriks võttes tõmbame raadiusega BC kaare, mis sarnaduskiirt AP lõikab punktis D (kahes punktis D ja D_1). 4) D ühendame C-ga; DC on sarikkolmnurga alus. 5) Punktist P tõmbame paralleeljoone CD-le, mis lõikab AE-d punktis Y. 6) Punktist Y tõmbame perpendikulaari AE-le, mis lõikab AF Punktis X, nii et $XY \perp AE$.

Tõestus: Et $CB \perp AE$ ja $YX \perp AE$, siis on $YX \parallel CB$;

$$\frac{XY}{BC} = \frac{AY}{AC}$$

et $PY \parallel DC$, siis on
$$\frac{PY}{DC} = \frac{AY}{AC}$$

$$\frac{XY}{BC} = \frac{PY}{DC}$$

peale selle on $\angle XYP = \angle BCD$

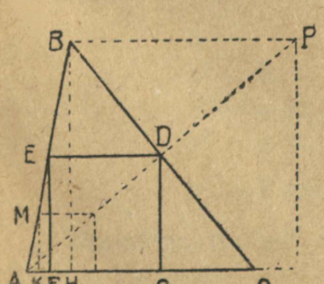
$$\triangle XYP \sim \triangle BCD.$$

Et $\triangle XYP \sim \triangle BCD$ ja $\triangle BCD$ on sarikkolmnurk, $BC = BD$, siis on ka $\triangle XYP$-sarikkolmnurk ja $XY = XP$.

Uurimine. Et punktist B raadiusega BC tõmmatud kaar alati lõikab sarnaduskiirt AP kahes punktis D ja D_1, siis on ülesandel alati 2 lahendust.

III-as näitus. Antud $\triangle$-ga sisse ruut kujundada nii, et üks ruudu külg $\triangle$-ga aluse peal aseneb.

Lahend. Olgu ABC antud kolmnurk ja DEFG otsitav ruut. Kui me nüüd tipu A valime sarnaduspunktiks, siis on ülesanne lahendatud nii pea, ku meil korda läheb punkti D leida. Selleks konstrueerime otsitud ruudule sarnaselt asendatud ruudu tema küljeks võttes kas $\triangle$-ga kõrgust BH või mingit teist joonlõiku MK; see läbi leiame sarnaduskiire AP, mille lõikepunkt küljega BC ongi punkt D.



Ülesanded. Konstrueerida $\triangle$, kui antud 1) $a, \alpha, b:c$; 2) $a:b, \alpha, h_b$; 3) α, β, m_c; 4) $\alpha, \beta, a \pm h_a$; 5) $\alpha, \beta, h_a + h_b$; 6) $\alpha, b:c, r_a$; 7) h_a, h_b, h_c.

Konstueerida sarik $\triangle$-nurk, kui antud on: 8) $a:b, r$; 9) $h:h_1, R$; 10) $h:r, a$; 11) $h_1:r, p$.

Konstrueerida nelinurk, kui antud on: 12) $\alpha, \beta\ \gamma, a:b, p$; 13) $a, \alpha, \beta, b:c:d$.

14) Kolmnurga sisse kujundada täisnelinurk, mille külgede vahekord on $m:n$.

15) Sõõri sektori sisse kujundada ruut. 16) Sõõri segmendi sisse kujundada ruut.

17) $\triangle$-ga sisse kujundada võrdkülgne $\triangle$, mille külg alusele paralleelne on.

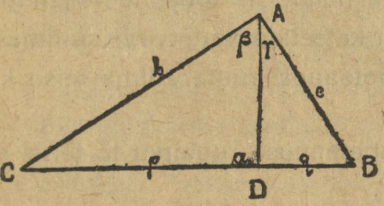
18) Ring tõmmata, mis sirgjoont S riivab ja läbi punktide P ja P_1 läheb.

19) Ring tõmmata, mis sirgjooni S ja S^1 riivab ja läbi punkti P läheb.

20) Sirgjoone S peal punkt leida, mille kaugused sirgjoonest S_1 a punktist P on antud vahekorras.

IX peatükk:

Proportsionaalsed joonlõigud täisnurkses kolmnurgas ja sõõris.



182. Teoreem. Täisnurkses $\triangle$-rgas on kateet keskmine proportsionaalne kogu hüpotenuusile ja oma projektsioonile hüpotenuusi peale.

I. tõestus:

$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ [$\angle B = \angle\beta$, $\angle C = \angle C$] $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$. [$\angle C = \angle\gamma$, $\angle B = \angle B$.

$\frac{\text{suurem. } \blacktriangle \text{ hüpot.}}{\text{keskm. } \triangle \text{ hüpot.}} = \frac{\text{suure } \triangle \text{suurem kat.}}{\text{kesk. } \triangle \text{ suurem kat.}}$; $\frac{\text{suure } \triangle \text{hüpot.}}{\text{väikse} \triangle \text{hüpot.}} = \frac{\text{suure } \triangle \text{ väh. kat.}}{\text{väikse } \triangle \text{väh. kat.}}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ $\qquad\qquad$ $\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{DB}$

ehk: $AC^2 = BC.DC.$ $\qquad\qquad$ $AB^2 = CB.DB$

kust $AC = \sqrt{BC.DC.}$ $\qquad\qquad$ $AB = \sqrt{CB.DB.}$

II-ne tõestuse viis:

$b = a.\cos C$ $\qquad\qquad$ $c = a.\cos B$

$b^2 = b.a.\cos C$ $\qquad\qquad$ $c^2 = c.\ a \cos B$

$b^2 = a\ (b.\cos C)$ $\qquad\qquad$ $c^2 = a.\ (c.\cos B)$

$b^2 = a.\ p.$ $\qquad\qquad$ $c^2 = a.\ q.$

$b = \sqrt{ap}$ $\qquad\qquad$ $c = \sqrt{aq}.$

Sõnades: Kateedi ruutarv on tema projektsiooni ja hüpotenuusi kasvatis.

Järeldus: *Kateedi ruutarvud on proportsionaalsed oma projektsioonidele hüpotenuusi peale*:

$$\frac{CA^2}{BA^2} = \frac{CB.\,CD}{CB.\,BD} = \frac{CD}{BD} \qquad \frac{b^2}{c^2} = \frac{ap}{aq} = \frac{p}{q}.$$

183. Teoreem. Kateetide ruutarvude summa annab hüpotenuusi ruutarvu. (Joonest. § 182).

Tõestus: § 182 järele on:

$$\begin{array}{ll} CA^2 = CB\,.\,CD; & b^2 = a.\,p \\ BA^2 = BC\,.\,BD; & c^2 = a.\,q \\ \hline CA^2 + BA^2 = BC.\,(CD+BD); & b^2 + c^2 = ap + aq = a(p+q) \end{array}$$

et $CD+BD=CB$; siis on $CA^2+BA^2=BC^2$. et $p+q=a$, siis on: $b^2+c^2=a^2$

Siit leiame: $CA^2 = BC^2 - BA^2$ ja $BA^2 = BC^2 - CA^2$ $\quad b^2 = a^2 - c^2 \quad c^2 = a^2 - b^2$.

ehk $CA = \sqrt{BC^2 - BA^2}$ ja $BA = \sqrt{BC^2 - CA^2}$ $\quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad c^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Peale selle veel: $BC = \sqrt{CA^2 + BA^2}$ $\quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Märkus. Väljaarvamiste kiirendamiseks on tarvilik meeles pidada need viimased vormelid ja nende suusõnaline väljendus:

1) Hüpotenuus on ruutjuur kateetide ruutarvude summast.

2) Kateedi ruutarv on hüpotenuusi ruutarv ilma teise kateedi ruutarvuta.

3) Kateet on ruutjuur hüpotenuusi ruutarvu ja teise kateedi ruutarvu vahest.

184. Teoreem. Kateetide kasvatis on niisama suur kui hüpotenuusi kasvatis kõrgusega.

I-ne tõestus. (Joonist. § 182)

$$\triangle ABC \sim \triangle ADC$$

$$\frac{\text{suure } \triangle \text{ hüpoten.}}{\text{keskm. } \triangle \text{ hüpoten.}} = \frac{\text{suure } \triangle \text{ vähem kat.}}{\text{keskm. } \triangle \text{ vähem kat.}}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BA}{AD}$$

kust $AC.\,AB = BC.\,AD$.

ehk $b.\,c = a.\,h$.

II-ne tõestus:

See teoreem on erijuhus teoreemist: „Kolmnurgas on kõrgused vastuproportsionaalsed neile külgedele, mille peale nad tõmmatud." [169].

Kui AB võtta aluseks, siis on AC vastav kõrgus ja $AB.\,AC = BC.\,AD$.

III-as tõestus:

$$\begin{aligned} c &= a \sin C \\ b.\,c &= b.\,a \sin C. \\ b.\,c &= a.\,(b.\sin C) \\ b.\,c &= a.\,h. \end{aligned}$$

185. Teoreem. Täisnurkses kolmnurgas on täisnurga tipust hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgus keskmine proportsionaalne kateetide projektsioonidele hüpotenuusi peale. (Joonest. § 182).

I-ne tõestus:

$\triangle ADC \backsim \triangle ADB \quad [\beta = \angle B, \ \gamma = \angle C].$

$$\frac{\text{kesk. } \triangle \text{ suurem kat.}}{\text{väiks. } \triangle \text{ suurem kat.}} = \frac{\text{kesk. } \triangle \text{ väh. kat.}}{\text{väiks. } \triangle \text{ väh. kat.}}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD} \text{ ehk } \frac{p}{h} = \frac{h}{q}$$

$$AD^2 = CD.BD \ \text{„} \ h^2 = pq$$

$$AD = \sqrt{CD.BD} \text{„} \ h = \sqrt{pq}$$

II-ne tõestus:

$\triangle ADB$: $q = h.\text{tg}\,\beta$; aga $\angle\beta = \angle C$, järj.

$q = h.\text{tg}\,C$; järjel. $\text{tg}C = \frac{q}{h}$.

$\triangle ADC$: $h = p.\text{tg}\,C$; „ $\text{tg}C = \frac{h}{p}$

$$\frac{q}{h} = \frac{h}{p} \text{ ehk } \frac{p}{h} = \frac{h}{q}$$

Siit leiame: $h^2 = p.q$

ja $h = \sqrt{p.q}$.

186. Teoreem. Ühe kateedi kasvatis kõrgusega on niisama suur kui teise kateedi kasvatis esimese kateedi projektsiooniga hüpotenuusi peale. (Joonest. § 182).

I-ne tõestus:

$\triangle ADC \backsim \triangle ADB$; järjel.

$$\frac{\text{keskm. } \triangle \text{ hüpoten.}}{\text{väikse } \triangle \text{ hüpoten.}} = \frac{\text{kesk. } \triangle \text{ suur. kat.}}{\text{väikse } \triangle \text{ suur. kat.}}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD} \text{ ehk } \frac{b}{c} = \frac{p}{h};$$

Siit leiame: $AC \,.\, AD = AB \,.\, CD$ ehk $b.h = c.p$.

II-ne tõestus:

$h = p.\ \text{tg}\,C$

$b.\,h = b.\ p\text{tg}\,C$

$b.\,h = (b.\ \text{tg}\,C).\ p$; aga $b.\ \text{tg}\,C = c$;

$b.\,h = c.\,p.$

Ülesanne: Tõestagu õpilased, et 1) $c.\,h = b.\,q$;
2) $m_a = R = \frac{a}{2}$.

187. *Harjutused.* Teised täisnurkse kolmnurga elemendid leida, kui antud on:

I. 1) $a=50$ m., $q=3{,}92$ m. 2) $a=26$ m., $p=22\frac{2}{13}$ m. 3) $a=15$ m., $q=5{,}4$ m.
4) $a=75$ m., $p=48$ m. 5) $R=2\frac{1}{2}$ m., $q=1\frac{4}{5}$ m. 6) $R=15$ m., $p=10{,}8$ m.
7) $R=5$ m., $q=3{,}6$ m. 8) $R=35$ m., $p=44{,}8$ m. 9) $m_a=26$ m., $p=4\frac{4}{13}$ m.
10) $m_a=25$ m., $p=46{,}08$ m. 11) $m_a=40$ m., $q=28{,}8$ m. 12) $m_a=10$ m., $q=7{,}2$ m.

II. 13) $b=54$ m, $c=72$ m. 14) $b=24$ m., $c=7$ m. 15) $b=36$ m., $c=27$ m.
16) $b=48$ m, $c=64$ m.

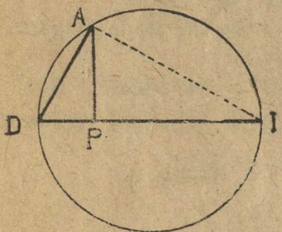
Leida teised täisnurkse kolmnurga elemendid, kõrguse aluspunkti kaugus kummagist kateedist ja kõrguse projektsioonid kummagi kateedi peale, kui antud on:

III. 17) $a=5$ m, $b=3$ m. 18) $a=41$ m, $b=9$ m. 19) $a=104$ m., $c=56$ m.
20) $a=117$ m., $c=108$ m. 21) $R=30$ m., $c=36$ m. 22) $R=39$ m, $b=72$ m.

23) $R=15$ m., $c=18$ m. 24) $R=50$ m., $b=28$ m. 25) $m_a=5$ m., $b=8$ m.
26) $m_a=40$ m., $c=48$ m. 27) $m_a=12\frac{1}{2}$ m., $b=20$ m. 28) $m_a=20$ m., $c=24$ m.
IV. 29) $p=1{,}8$ m., $q=3{,}2$ m. 30) $p=14\frac{2}{5}$ m., $q=25\frac{3}{5}$ m. 31) $q=17\frac{4}{13}$ m., $p=99\frac{9}{13}$ m.
32) $p=3{,}6$ m., $q=6{,}4$ m.
V. 33) $b=15$ m., $p=13\frac{4}{17}$ m. 34) $c=60$ m., $q=23\frac{1}{13}$ m. 35) $b=44$ m., $p=35{,}2$ m.
36) $c=45$ m., $q=27$ m.
VI. 37) $c=65$ m., $h=60$ m. 38) $b=255$ m., $h=120$ m. 39) $c=20$ m., $h=12$ m.
40) $b=30$ m., $h=24$ m.
VII. 41) $p=3{,}2$ m., $h=2{,}4$ m. 42) $h=3$ m., $q=4$ m. 43) $h=48$ m., $p=64$ m.
44) $q=23{,}04$ m., $h=6{,}72$ m.
VIII. 45) $m_a=2{,}5$ m., $h=2{,}4$ m. 46) $m_a=30$ m., $h=28{,}8$ m. 47) $a=50$ m., $h=24$ m.
48) $a=10$ m., $h=4{,}8$ m. 49) $R=7\frac{1}{2}$ m., $q=7\frac{1}{5}$ m. 50) $R=50$ m., $c=48$ m.
51) $a=25$ m., $h=6{,}72$ m. 52) $a=30$ m., $h=14{,}4$ m.
IX. 53) $b=6$ m., $q=6{,}4$ m. 54) $c=7$ m., $p=23{,}04$ m. 55) $b=15$ m., $q=16$ m.
56) $c=5$ m., $p=2\frac{1}{4}$ m.

Proportsionaalsed joonlõigud sõõris.

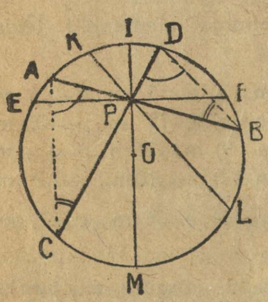
188. Teoreem. Ringi punktist diameetrile tõmmatud perpendikulaar on keskmine proportsionaalne tema sünnitatud diameetri lõikudele, ja pingjoon, mis seda punkti diameetri otsapunktiga ühendab, on keskmine proportsionaalne tervele diameetrile ja oma projektsioonile diameetri peale.



Tõestus. Ühendame A I-ga, siis on $\triangle DAI$ täisnurkne ja seepärast on

$$\frac{DP}{AP}=\frac{AP}{IP} \ [185] \text{ ja } \frac{DI}{DA}=\frac{DA}{DP} \ [182]$$

ehk $AP^2=DP.IP$ ja $DA^2=DI.DP$



189. Pingjoonte teoreem. **Kaks sõõris lõikuvat pingjoont jagunevad lõikepunktis vastuproportsionaalseteks osadeks, ehk:** ühe pingjoone lõikude kasvatis on niisama suur, kui teise pingjoone lõikude kasvatis. [145].

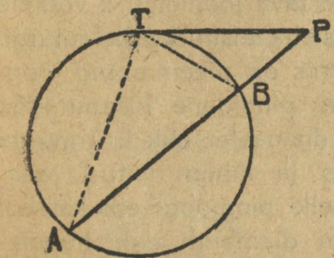
Tõestus. $\triangle CAP \backsim \triangle BDP$, sest et $\angle A=\angle D$ ja $\angle C=\angle B$ [166].

Järjel. $\frac{CP}{BP}=\frac{AP}{DP}$; siit leiame, et $AP \,.\, BP = CP \,.\, DP$.

See kasvatis on teatavas sõõris antud punktile jäädav suurus; ta on nimelt selle sõõri raadiuse ruudu ja selle punkti tsentrist arvatud kauguse ruudu vahe; ehk ta on niisama suur kui selle pingjoone poole ruutarv, mis nimetatud punktist läbiminevale diameetrile perpendikulaarne on ja ise ka sellest punktist läbi läheb; nimelt:

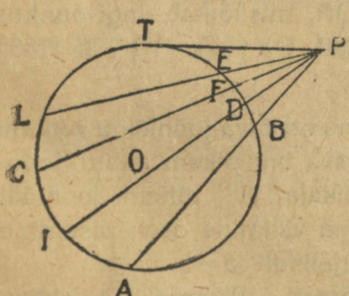
$$AP \cdot BP = CP \cdot DP = KP \cdot LP = EP \cdot FP = EP^2 = IP \cdot MP = (R-d) \cdot (R+d) = R^2 - d^2.$$

190. Riivaja teoreem. Kui sõõri välimisest punktist on tõmmatud ringile riivaja ja lõikaja, siis on riivaja keskmine proportsionaalne tervele lõikajale ja tema välimisele osale.



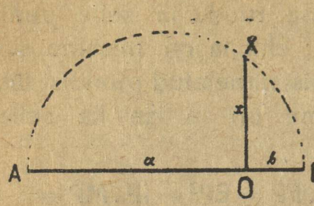
Tõestus: Kui T ühendame A-ga ja B-ga, siis on $\triangle APT \backsim \triangle TPB$, sest et $\angle A = \angle BTP$, mõlemaid mõedab $\frac{1}{2} \smile TB$, ja $\angle P = \angle P$ (ühine nurk). Järjel. $\frac{AP}{TP} = \frac{TP}{BP}$; s. t: $AP \cdot BP = TP^2$.

191. Lõikajate teoreem. Kui sõõri välimisest punktist on tõmmatud ringile mitu lõikajat, siis on need lõikajad vastu proportsionaalsed oma välimistele osadele, s. t. ühe lõikaja kasvatis oma välimise osaga on niisama suur, kui teise lõikaja kasvatis tema välimise osaga, sest et see kasvatis võrdub riivaja ruudule.



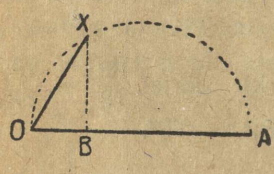
Tõepoolest: $AP \cdot BP = IP \cdot DP = CP \cdot FP = LP \cdot EP = TP^2$

192. Ülesanne. *Kahele antud joonlõigule a ja b keskmine proportsionaalne konstrueerida.*



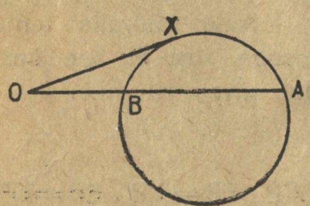
I-ne lahendamise viis. Kui me otsitava joonlõigu x võtame täisnurkse kolmnurga hüpoteenusi peale tõmmatud kõrguseks ehk mõnest ringi punktist diameetri peale tõmmatud perpendikulaariks, siis on antud joonlõigud a ja b kateetide projektsioonid hüpotenuusi peale ehk diameetri osad. Seepärast: Sirgjoone peale punktist O alates asetame ühele poole OA = a ja teisele poole OB = b. Joonlõiku AB = a + b diameetriks võttes tõmbame AB üle poolringi ja punktist O seame perpendikulaari diameetrile, kuni see perpendikulaar lõikub ringiga punktis X. Siis on $OX = x = \sqrt{a.b.}$ [188].

II-ne lahendamise viis: Kui me otsitava joonlõigu x võtame pingjooneks ehk täisnurkse kolmnurga kateediks, siis on pikem antud joonlõik a selle pingjoone otsapunktist läbiminev diameeter ehk kolmnurga hüpotenuus ja lühem antud joonlõik b on selle pingjoone ehk kateedi projektsioon diameetri ehk hüpotenuusi peale. Seepärast:



Pikemat joonlõiku OA=a diameetriks võttes tõmbame tema üle poolringi, asetame tema peale OB = b ja punktist B tõmbame OA-le perpendikulaari BX ⊥ OA, mis lõikab ringi punktis X. Ühendame O ja X pingjoone OX abil. $OX = x = \sqrt{a.b.}$ [188].

III-as lahendamise viis: Kui me otsitava joonlõigu võtame riivajaks, siis on pikem antud joonlõik a lõikaja ja lühem joonlõik b on tema välimine osa; sisemine osa on järjelikult a — b.



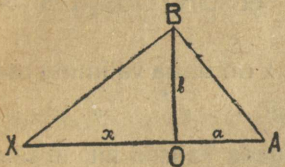
Seepärast: Pikema joonlõigu OA=a peale asetame OB = b; tõmbame mingisuguse ringi, mis punktidest A ja B läbi läheb ja siis punktist O sellele ringile riivaja OX. See riivaja OX ongi otsitav joonlõik: $x = \sqrt{a, b}$ [190].

193. Ülesanne. *Kahele antud joonlõigule a ja b konstrueerida kolmas proportsionaalne.*

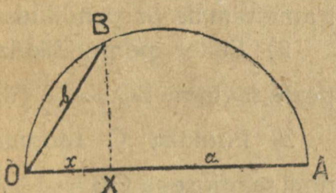
Otsitav joonlõik peab rahuldama proportsiooni $a : b = b : x$.

I-ne lahendamise viis: Vaata § 149, II.

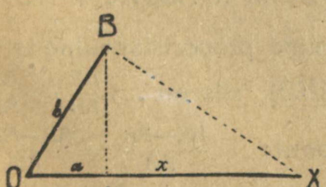
II-ne lahendamise viis: Konstrueerime x-i kateedi projektsioonina hüpotenuusi peale, mille juures a on teise kateedi projektsioon ja b on täisnurga tipust hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgus. Selleks konstrueerime $\triangle AOB$ tema kateetidest $OA = a$ ja $OB = b$. AB peal B juures konstrueerime täisnurga ABX, mille teine haru lõikab AO pikendust punktis X. Joonlõik $OX = x$ ongi otsitav, sest [185] $OA : OB = OB : OX$ ehk $a : b = b : x$.



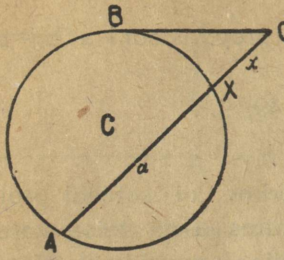
III-as lahendamise viis: 1) On $a > b$, siis konstrueerime x-i diameetri lõiguna, mille juures a on diameeter ja b on diameetri ja x-i otsapunktist tõmmatud pingjoon. Selleks tõmbame $OA = a$ üle poolringi. Selle poolringi sisse kujundame pingjoone $OB = b$. Punktist B tõmbame $BX \perp OA$. Siis on joonlõik $OX = x$ otsitav, sest $a : b = b : x$ [188, 182].



2) On $a < b$, siis esineb x diameetrina ehk hüpotenuusina ja a tema osana, mis on b projektsioon x-i peale. Et x leida konstrueerime täisnurkse $\triangle AOB$ hüpotenuusist $OB = b$ ja kateedist $OA = a$. OB peal punkti B juures konstrueerime täisnurga OBX, mille teine haru lõikab OA pikendust punktis X. Joonlõik $OX = x$ on otsitav, sest et [182] $a : b = b : x$.



IV-jas lahendamise viis: Vabalt võetud raadiusega tõmbame ringi C. Ringile C tõmbame riivaja punktis B. Selle riivaja peale asetame riivaspunktist B alates $BO = b$. Punktist O tõmbame kaare raadiusega $OA = a$. See kaar lõikab ringi C punktis A. Punktist O välja minnes tõmbame läbi A sirgjoone, mis lõikab ringi C veel ühes punktis X.

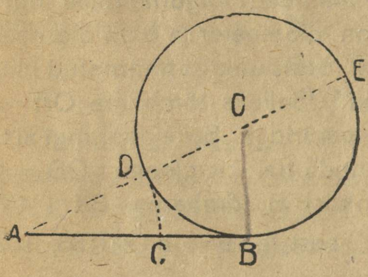


Joonlõik $OX = x$ on otsitav, sest et $OA : OB = OB : OX$ ehk $a : b = b : x$ [190].

1) Kui $a > b$, siis on a kogu lõikaja ja x on tema välimine osa;
2) kui $a < b$, „ „ x „ „ „ a „ „ „ „ .

194. Kuldlõige. Antud joonlõik jagada kaheks nii, et tema suurem osa on keskmine proportsionaalne kogu joonlõigu ja tema vähema osa vahel (ehk: antud joonlôik ahelproportsioonis jagada).

Niisugust jagamist nimetatakse kuldlõikeks.



Lahendamine: 1) Antud joonlõigu AB otsapunktis tõmbame temale perpendikulaari.

2) Selle perpendikulaari peale asetame $BO = \frac{1}{2} AB$.*)

3) Punktist O tõmbame ringi raadiusega $OB = \frac{1}{2} AB$.

4) Läbi A ja O tõmbame lõikaja A E, mille välimine osa on AD.

5) Raadiusega AD tõmbame punktist A kaare, mis AB-d lõikab punktis C.

Siis jagab punkt C joonlõigu AB, nii et $AB : AC = AC : CB$.

Tõestus: Et „riivaja on keskmine proportsionaalne tervele lõikajale ja tema välimise osale" [203], siis on . . $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$.

Siit saame tuletada proportsiooni: $\frac{AE-AB}{AB} = \frac{AB-AD}{AD}$.

---

*) Punkt O tuleb ühendada B-ga, mis joonestuse peal eksikombel tegemata jäetud.

Et raadius $OB = \frac{1}{2} AB$, siis on $AB =$ diameeter DE; peale selle on $AD = AC$. Sellest järgneb: $\frac{AE-DE}{AB} = \frac{AB-AD}{AD}$

s o. $\frac{AD}{AB} = \frac{CB}{AD}$

AD asemele AC pannes saame: $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ ehk $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Algebraline väljaarvamine. Kui antud joonlõigu pikkus on a ja tema suurem osa x, siis on $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Siit leiame $x^2 = a(a-x)$ ehk $x^2 = a^2 - ax$. Lahendame selle ruutekvatsiooni:

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

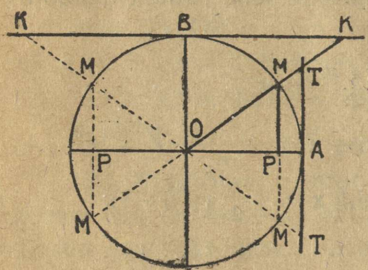
Negatiivset juurt kõrvale jättes leiame $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

ehk $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

X. peatükk:

Trigonomeetriliste suuruste vastastikkune olenevus.

195. Ühe ja sellesama nurga trigonomeetriliste suuruste vastastikkune olenevus.



Joonestusest on näha, et igas veerandis on maksvad järgmised valemid: I-ses valemis tulevad ette ainult sin-e ja cos-e ruudud ja sin-e ja cos-e märgid ei mõju valemi peale.

I-ses ja III-ndas veerandis on tg ja ctg positiivsed ja sin-e ja cos-el on ka ühesugused märgid; II-es ja IV-ndas veerandis on tg ja ctg negatiivsed ja sin ja cos on vastasmärkidega.

1) $\triangle MOP$:

$$MP^2 + OP^2 = OM^2$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$$

2) $\triangle ATO \backsim \triangle PMO$:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\alpha . \cos\alpha = \sin\alpha.$$

3) $\triangle BKO \backsim \triangle POM$.

$$\frac{BK}{OB} = \frac{OP}{MP}$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha . \sin\alpha = \cos\alpha.$$

4) 2-st ja 3-ndast valemist järgneb:

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{ctg}\alpha = 1. \quad (4).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Neid teisendid on kasulik meeles pidada.

I. Cos α, tg α, ctg α leida sin α abil, kui sin α = m = $\frac{5}{13}$.

1) $\operatorname{Cos}\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - m^2} = \pm\sqrt{1 - (\frac{5}{12})^2} = \pm\frac{12}{13}$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = \pm\frac{5}{12}$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} = \pm\frac{12}{5} = \pm 2{,}4.$

II. Sin α, tg α ja ctg α leida cos α abil, kui cos α = n = 0,8 (ehk n = — 0,8, kui α on nürinurk).

1) $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-n^2} = \pm\sqrt{1-0{,}8^2} = \pm 0{,}6.$

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} = \frac{0{,}6}{\pm 0{,}8} = \pm 0{,}75$

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} = \frac{\pm 0{,}8}{0.6} = \pm\frac{4}{3.}$

III. Sin α, cos α, ja ctg α, leida tg α abil, kui tg α = k = $\frac{15}{8}$ (ehk k= $-\frac{15}{8}$)

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$\mathrm{tg}^2\alpha.\ \sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha.\ \cos^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha.$

$\mathrm{tg}^2\alpha.\ \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha$

$\sin^2\alpha.\ (\mathrm{tg}^2\alpha + 1) = \mathrm{tg}^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\sin\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$

$\sin\alpha = \pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$\sin\alpha = \pm\frac{15/8}{\sqrt{1+\left(\frac{15}{8}\right)^2}} = \pm\frac{15}{17}.$

2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{15}{8}\right)^2}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{8}{17}$

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{k}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \pm\frac{8}{15}$

IV. Sin α, cos α ja tg α leida ctg α abil, kui $ctg\,\alpha = p = \frac{7}{24}$

(ehk $p = -\frac{7}{24}$.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{24}{25}.$$

2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$$ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = ctg^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha + ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = ctg^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha(1+ctg^2\alpha) = ctg^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{ctg\,\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

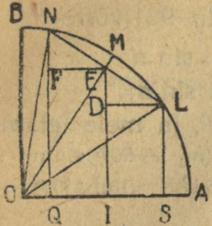
$$\cos\alpha = \pm\frac{7}{25}.$$

3) $tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{p}$$

$$tg\,\alpha = \pm\frac{24}{7}.$$

196. Kahe nurga summa ja vahe sinus, cosinus ja tangens.



Olgu $\angle AOM = \alpha$ $\quad$ $\angle AOM = \alpha$

$MON = \beta$ $\quad$ $\angle MOL = \beta$

siis on $AON = \alpha + \beta$ $\quad$ $\angle AOL = \alpha - \beta$

$\sin(\alpha + \beta) = NQ$ $\quad$ $\cos(\alpha + \beta) = OQ$

$\sin(\alpha - \beta) = LS$ $\quad$ $\cos(\alpha - \beta) = OS$

Tõmbame perpendikulaarid:

$NL \perp OM$, $EI \perp OA$, $EF \perp NQ$, $LD \perp EI$.

Siis on: $\angle LED = \angle ENF = \angle AOM = \alpha$ [37] ja $LE = EN$;

järj. $\triangle LED \cong \triangle ENF$ ja $NF = ED$, $EF = LD$.

$NQ = NF + FQ = NF + EI = EI + NF \quad OQ = OI - IQ = OI - EF$

$LS = DI = EI - ED = EI - NF \quad OS = OI + IS = OI + LD = OI + EF$

$$\left.\begin{array}{l} EI = OE \,.\, \sin\alpha;\ OE = \cos\beta;\ \text{järj. } EI = \sin\alpha \,.\, \cos\beta. \\ NF = NE \,.\, \cos\alpha;\ NE = \sin\beta;\ \text{„}\ NF = \cos\alpha \,.\, \sin\beta. \end{array}\right\}\pm$$

$$\sin(\alpha + \beta) = NQ = EI + NF = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta.$$
$$\sin(\alpha - \beta) = LS = EI - NF = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta.$$

$$\left.\begin{array}{l} OI = OE \,.\, \cos\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos\beta. \\ EF = NE \,.\, \sin\alpha = \sin\alpha \,.\, \sin\beta. \end{array}\right\}\pm$$

$$\cos(\alpha + \beta) = OQ = OI - EF = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$$
$$\cos(\alpha - \beta) = OS = OI + EF = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$$

Näitame nüüd, et need valemid on maksvad ka siis, kui α ja β on ükskõik kui suured, positiivsed või negatiivsed suurused.

I. $90^0 < \alpha + \beta < 180^0$, mille juures $\alpha < 90^0$, ja $\beta < 90^0$;

olgu $\alpha = 90^0 - \alpha_1$; järj. $\alpha_1 = 90^0 - \alpha$

$\beta = 90^0 - \beta_1$; „ $\beta_1 = 90^0 - \beta$

$\alpha + \beta = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$; mille juures

$\alpha + \beta > 90^0$ ja $(\alpha_1 + \beta_1) = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

$\alpha_1 + \beta_1 < 90^0$.

Et $\alpha_1 + \beta_1 < 90^0$, siis on õige:

$\sin(\alpha_1 + \beta_1) = \sin\alpha_1 \,.\, \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 \,.\, \sin\beta_1$;

$\cos(\alpha_1 + \beta_1) = \cos\alpha_1 \,.\, \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \,.\, \sin\beta_1$;

$\sin[180^0 - (\alpha+\beta)] = \sin(90^0-\alpha) \,.\, \cos(90^0-\beta) + \cos(90^0-\alpha) \,.\, \sin(90^0-\beta)$

$\cos[180^0 - (\alpha+\beta)] = \cos(90^0-\alpha) \,.\, \cos(90^0-\beta) - \sin(90^0-\alpha) \,.\, \sin(90^0-\beta)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$

$-\cos(\alpha + \beta) = +\sin\alpha \,.\, \sin\beta - \cos\alpha \,.\, \cos\beta$

$+\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$

II. Teoreem. Kui kahe nurga summa sinuse ja cosinuse valemid on õiged mingisuguse kahe nurga m ja n jaoks, siis jäävad nad ka õigeks, kui üht nurka suurendada 90^0 võrra.

Olgu: $\sin(m+n) = \sin m \cdot \cos n + \cos m \cdot \sin n$

ja $\cos(m+n) = \cos m \cdot \cos n - \sin m \cdot \sin n.$

Olgu: $m_1 = m + 90^0$. ... siis on $m = m_1 - 90^0$, ja meie leiame:

$\sin(m_1 - 90^0 + n) = \sin(m_1 - 90^0)\cos n + \cos(m_1 - 90^0)\sin n;$

$-\sin[90^0 - (m_1 + n)] = -\sin(90^0 - m_1)\cos n + \cos(90^0 - m_1)\sin n;$

$-\cos(m_1 + n) = -\cos m_1 \cos n + \sin m_1 \sin n;$

$\cos(m_1 + n) = \cos m_1 \cdot \cos n - \sin m_1 \cdot \sin n;$

$\cos(m_1 - 90^0 + n) = \cos(m_1 - 90^0)\cos n - \sin(m_1 - 90^0) \cdot \sin n;$

$\cos[90^0 - (m_1 + n)] = \cos(90^0 - m_1)\cos n + \sin(90^0 - m_1) \cdot \sin n;$

$\sin(m_1 + n) = \sin m_1 \cdot \cos n + \cos m_1 \cdot \sin n.$

Kui nurgad α ja β on vähemad kui 90^0, siis võime üht kui teist nurka järkjärgult 90^0 võrra suurendades saada ükskõik kui suured nurgad $a = p \cdot 90^0 + \alpha$ ja $b = q \cdot 90^0 + \beta$ ja ikka jäävad õigeks nende nurkade summa sinuse ja cosinuse valemid.

III. Kui α ja β on negatiivsed nurgad, mille absoluutne väärtus on ükskõik kui suur, siis võime ikka leida nii suured täisarvud p ja q, et oleks $p \cdot 360^0 + \alpha$ ja $q \cdot 360^0 + \beta$ positiivsed. Siis on:

$$\sin[(p.360^0 + \alpha) + (q.360^0 + \beta)] = \sin(p.360^0 + \alpha) \cdot \cos(q.360^0 + \beta) + \cos(p.360^0 + \alpha) \cdot \sin(q.360^0 + \beta)$$

$$\cos[(p.360^0 + \alpha) + (q.360^0 + \beta)] = \cos(p.360^0 + \alpha) \cdot \cos(q.360^0 + \beta) - \sin(p.360^0 + \alpha) \cdot \sin(q.360^0 + \beta)$$

Ehk redutseerimise valemite põhjal:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin.\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Jagame lugejat ja nimetajat cosinuste kasvatisele $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, millest murru väärtus ei muutu, siis leiame:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Harjutused. Leida $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, kui:

1) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\cos\beta = 0{,}6$

3) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\beta = -\frac{7}{25}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{11}{60}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

Ülesanne. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ ja $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$ avaldada $\operatorname{ctg}\alpha$ ja $\operatorname{ctg}\beta$ funktsioonina.

197. Kahekordse nurga sinus, cosinus ja tangens. Olgu eelmineva § valemites $\beta = \alpha$, siis leiame:

$$\sin 2a = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha.}$$

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha.}}$$

198. Poolnurga sinus, cosinus, tangens. Võtame kahekordse nurga cosinuse valemi järgmisel kujul:

$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ja olgu seal $2\beta = \alpha$; siis on $\beta = \frac{\alpha}{2}$

ja me leiame: $COS\ \alpha = COS^2\frac{\alpha}{2} - SIN^2\frac{\alpha}{2}$. Siit leiame:

$$\cos\alpha = (1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}) - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha.$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$\mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - (1 - \cos^2\frac{\alpha}{2})$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}:\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

199. Kahe nurga sinuste ja cosinuste summa ja vahe avaldamine kasvatisena.

Olgu $\alpha+\beta=p$ ja $\alpha-\beta=q$; siis on $\alpha=\frac{p+q}{2}$ ja $\beta=\frac{p-q}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta\end{array}\right\}\begin{array}{l}+\\-\end{array}\qquad \left.\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta\end{array}\right\}\begin{array}{l}+\\-\end{array}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha.\cos\beta\qquad \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha.\cos\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\sin\beta\qquad \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha.\sin\beta.$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}\qquad \cos q+\cos p=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}\qquad \cos q-\cos p=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Kahe nurga sinuste summa on nende nurkade poolsumma sinuse ja poolvahe cosinuse kahekordne kasvatis.
„ „ „ vahe „ „ „ „ cosinuse „ „ sinuse „ „
„ „ cosinuste summa „ „ „ „ ja poolvahe cosinuste „ „
„ „ „ vahe „ „ „ „ „ vastas-poolvahe sinuste „ „

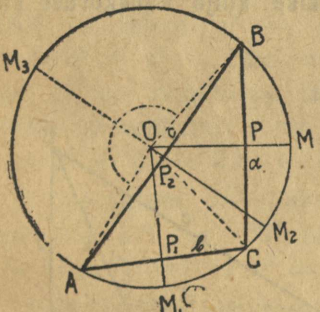
XI. peatükk.

Üleüldise kolmnurga lahendamine.

200. Kolmnurga nurkade vastastikkust olenevust avaldab tuttav teoreem: „Kolmnurga nurkade summa on sirge nurk." Seda kirjutatakse järgmise valemina:

$$A+B+C=180^\circ. \qquad \text{(I).}$$

201. Sinuste teoreem. Kolmnurga küljed on proportsionaalsed vastasnurkade sinustele ja iga külg jagatud oma vastasnurga sinusele annab ümberkujundatud ringi diameetri.



Tõestus: Üleüldsuse pärast võtame nürinurkse $\triangle ABC$. Kujundame $\triangle$-rga ümber ringi ja tsentrist tõmbame külgedele perpendikulaarsed raadiused OM, OM_1, OM_2 OM_3 on OM_2 pikendus, nii et diameeter $M_2 M_3 \perp AB$. Joonestusest on näha, et

$$\frac{BP}{OM} = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} = \sin MOB = \sin\frac{BOC}{2} = \sin A;\ \text{siit on: } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{CP_1}{OM_1} = \frac{b/2}{R} = \frac{b}{2R} = \sin COM_1 = \sin\frac{COA}{2} = \sin B;\ \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

$$\frac{BP_2}{OM_2} = \frac{c/2}{R} = \frac{c}{2R} = \sin BOM_2 = \sin(180^\circ - BOM_3) = \sin BOM_3 =$$

$\sin C$; siit on: $\frac{c}{\sin C} = 2R.$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \qquad \text{(II.)}$$

202. Teoreem. Kolmnurgas on kahe külje summa nende vahe kohta nagu vastasnurkade poolsumma tangens on nende poolvahe tangensi kohta.

Tõestus: § 201 järele on

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ Paigutame sisemised liikmed ümber, siis saame:

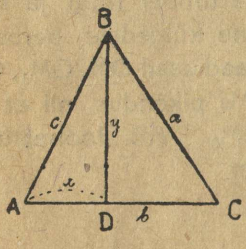
$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ Võtame tuletatud proportsiooni:

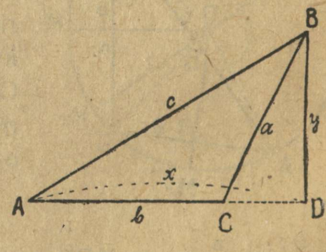
$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$, § 199 põhjal leiame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}$$

ehk $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$. (III.) Anoloogia põhjal on $\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}$ ja $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}$

203. Teoreem I. Kolmnurgas on teravnurga vastaskülje ruut niisama suur kui kahe teise külje ruutude summa ilma ühe külje ja tema peale projekteeritud teise külje kahekordse kasvatiseta.





Olgu: BC = a, CA = b, AB = c, kõrgus BD = y ja AD = x — külje b peale projekteeritud külg c. Tarvis tõestada, et $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$.

Tõestus: △-st CBD leiame: $a^2 = y^2 + (b-x)^2$

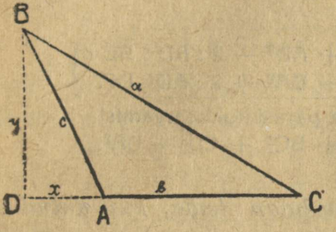
ehk nürinurkses △-as: $a^2 = y^2 + (x-b)^2$.

△-st ABD leiame: $y^2 = c^2 - x^2$;

järjelikult, $a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$;

ehk $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bx}$.

Teoreem II. Kolmnurgas on nürinurga vastaskülje ruut niisama suur kui kahe teise külje ruutude summa, suurendatud ühe külje ja tema peale projekteeritud teise külje kahkordese kasvatise võrra.



Tõestus:

$\triangle$-st CBD leiame: $a^2=(b+x)^2+y^2$

$\triangle$-st ABD $y^2=c^2-x^2$

$a^2=b^2+2bx+x^2+c^2-x^2$

ehk $a^2=b^2+c^2+2b.$

Trigonomeetrilisi suurusi tarvitades on võimalik mõlemaid teoreemisid ühendada järgmiseks teoreemiks: **Kolmnurgas on ühe külje ruut niisama suur, kui kahe teise külje ruutude summa vähendatud nende kahe külje ja nende vaheloleva nurga cosinuse kasvatise võrra.** Tõepoolest, kui a on teravnurga A vastaskülg, siis on $x = c . \cos A$ ja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; kui a on nürinurga A vastaskülg, siis on $x = c . \cos BAD = c . \cos (180^0 - A) = - c . \cos A$ [162] ja valem $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$ muutub valemiks $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos A$, mis sisuliselt seesama on, sest cos A on negatiivne ja kõik kasvatis ($-$ 2bc cos A) on ikkagi poositiivne; nii et igatahes on maksev valem $^2 = \mathbf{b^2 + c^2 - 2b . c . \cos A}$. **(IV.)**

See valem on maksev ka täisnurkse kolmnurga kohta, sest kui $\angle A = 90^0$, siis on $\cos A = 0$, kõik kasvatis $2bc . \cos A = 0$ ja $a^2 = b^2 + c^2$.

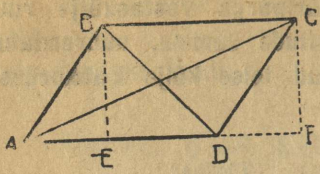
Vastupidine teoreem: Kolmnurga nurk on

1) täisnurk, kui vastaskülje ruut on niisama suur kui kahe teise külje ruutude summa;

2) nürinurk, kui vastaskülje ruut on suurem kui kahe teise külje ruutude summa;

3) teravnurk, kui vastaskülje ruut on vähem kui kahe teise külje ruutude summa.

Harjutused: Missugune kuju on kolmnurgal, kui tema küljed on 1) 60 m., 11 m., 61 m.; 2) 7 m., 8 m., 9 m.; 3) 11 m., 15 m., 20 m.; 4) 15 m., 17 m., 8 m.; 5) 13 m., 16 m., 19 m.; 6) 9 m., 14 m., 17 m.?



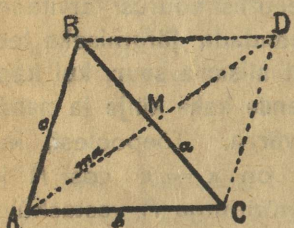
204. Teoreem. **Parallelogrammis on kõigi nelja külje ruutude summa niisama suur kui tema diagonaalide ruutude summa.**

Tõestus: $\triangle$- as ABD on: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 . AD . AE.$
$\triangle$- as ACD on: $AC^2 = CD^2 + DA^2 + 2 . AD . DF.$ } +

Et $DF = AE$ ja $AD = BC$, siis saame pärast kokkuarvamist

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

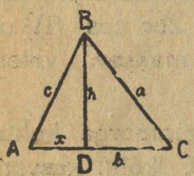
205. Ülesanne. *Kolmnurga mediaan leida, kui antud on tema kolm külge.*



Lahend.: Tõmbame $BD \parallel AC$ ja $CD \parallel AB$, siis on $ABDC$ parallelogramm, BC ja AD tema diagonaalid, mis teineteist poolitavad, nii et $BM = MC$ ja $AM = MD = m_a$ otsitav mediaan.

Seepärast leiame:

$$(2 m_a)^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2$$
$$4m_a{}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 b^2 + 2 c^2 - a^2}.$$



206. Ülesanne. $\triangle$-*ga, kõrgus leida, kui antud on tema kolm külge.*

Lahend.: $\triangle$-gast ABD leiame: $BD^2 = AB^2 - AD^2$, ehk $h_b^2 = c^2 - x^2$.
x leiame $\triangle$- st. ABC : $a^2 = c^2 + b^2 - 2 bx$; järjel. $x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$.

Nüüd on:

$$h_b^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 b}\right)^2;$$

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4 b^2};$$

$$h_b^2 = \frac{4 b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{4 b^2};$$

$$h_b = \sqrt{\frac{4 b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{4 b^2}};$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{[2bc + c^2 + b^2 - a^2]\,[2bc - c^2 - b^2 + a^2]}\,;$$

$$2bc + c^2 + b^2 - a^2 = (c+b)^2 - a^2 = (c+b+a)\,(c+b-a).$$

$$2bc - c^2 - b^2 + a^2 = a^2 - (c^2 - 2bc + b^2)$$

$$= a^2 - (c-b)^2 = (a+c-b)\,(a-c+b).$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{(c+b+a)\,(c+b-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}$$

Olgu $a + b + c = 2p \qquad = 2p.$

siis on: $c + b - a = a + b + c - 2a = 2(p-a)$

$a + c - b = a + b + c - 2b = 2(p-b)$

$a + b - c = a + b + c - 2c = 2(p-c)$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{2p \,.\, 2(p-a) \,.\, 2(p+b) \,.\, 2(p-c)} \quad \text{ehk}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p \,.\, (p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

207. Tangensite teoreem. Kolmnurga poolnurga tangens on ruutjuur murrust, mille lugejaks on poolperimeetri ja ühe lähiskülje vahe kasvatis poolperimeetri ja teise lähiskülje vahega, ja nimetajaks on poolperimeetri kasvatis poolperimeetri ja vastaskülje vahega.

Tõestus: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A.$

$$2b.c.\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b.c}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \qquad 1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} \qquad 1 + \cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \qquad 1 + \cos A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

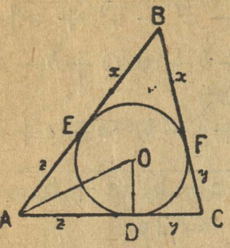
$$1 - \cos A = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \qquad 1 + \cos A = \frac{2p.2(p-a)}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{2(p-c)2.(p-b)}{2bc} \qquad \text{Et } \operatorname{Tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}},$$

siis leiame § 206 võetuid tähendusi tarvitades:

$$\operatorname{Tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p.(p-a)}} \ \text{(V.)} \quad \text{Analoogia põhjal on;} \ \operatorname{Tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p.(p-b)}}$$

$$\text{ja } \operatorname{Tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p.(p-c)}}$$



Kujundame $\triangle$-ga ABC sisse ringi;

$\triangle$-st AOD leiame: $\frac{OD}{AD} = \text{tg } OAD$, s. o.

$\text{Tg } \frac{A}{2} = \frac{r}{z}$ *)ehk $\text{Tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ [132, 7a]

Analoogia põhjal: $\text{Tg } \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$

ja $\text{Tg } \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$.

208. Kolmnurkade lahendamine trigonomeetriliste suuruste abil. Kui $\triangle$-ga 6-st elemendist, — 3-st küljest ja 3-st nurgast — on antud 3 elementi, mille hulgas kõige vähemalt üks on $\triangle$-ga külg, siis on ta kuju ja suurus kindlaks määratud ja me võime $\triangle$-ga leida kas teda konstrueerides [44, 45, 46, 51, 53] või tema osasid välja arvates §§-des [200, 201, 202, 203, 207] esitatud trigonomeetrilisi valemid tarvitades. Kummagil puhul on olemas 4 alusülesannet, nagu on olemas 4 kongruentsuse ja 4 sarnaduse teoreemi. Lahendamise juures tarvitatakse trigonomeetriliste suuruste ja külgede mõetarvude logaritme, aga mitte neid suurusi endid.

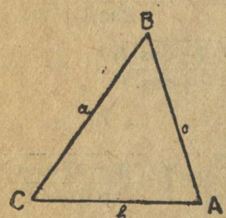
I-ne ülesanne. Antud: a=247,5 m. b=189,8 m. $\angle C = 62^0 17' 46''$

Leida: A, B, c.

Lahendamine:

1) Võtame III-nda valemi: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } \frac{A+B}{2}}{\text{tg } \frac{A-B}{2}}$

Et $\frac{A+B}{2} = \frac{180^0 - C}{2}$, siis saame $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } (90^0 - \frac{C}{2})}{\text{tg } \frac{A-B}{2}}$ ehk $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{ctg } \frac{C}{2}}{\text{tg} \frac{A-B}{2}}$



Siit leiame:

$$\text{tg } \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \text{ctg } \frac{C}{2}$$

Logaritmimine:

$$\text{lgtg} \frac{A-B}{2} = \lg (a-b) - \lg (a+b) + \text{lgctg } \frac{C}{2}$$

Neid väljaarvamisi logaritmidega toimetades leiame lõpuks nurga $\frac{A-B}{2}$.

*) OD = r ei ole joonestuse peal ära tähendatud.

Olgu $\frac{A-B}{2}$ ehk $\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=K$. Meil on aga teada $\frac{A+B}{2}=\frac{180^0-C}{2}$

Olgu $\frac{A+B}{2}$ ehk $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=L$. $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^0-\frac{c}{2}$.

Nüüd leiame kergesti, et $A = L + K$ ja $B = L - K$.

Kui nurgad A ja B leitud, siis leiame kergesti külje c II-se valemi abil: $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$, nimelt $c=\frac{a \sin C}{\sin A}$.

Meie näituses on $a+b=437{,}3$; $a-b=57{,}7$ ja $90^0-\frac{C}{2}= = L = 58^0\,51'\,7''$.

$\lg(a-b) = \lg 57{,}7 = 1{,}76118$

$\lg(a+b) = \lg 437{,}3 = 2{,}64078$

$\lg tg(90^0-\frac{c}{2}) = \lg tg\, 58^0 51, = 0{,}21865$

$d = 29. \quad 7'' \ldots\ldots 3$

$\lg tg\, 58^0\,51'\,7'' = 0{,}21868$

$\lg(a-b) = 1{,}76118$

$-\lg(a+b) = 7{,}35922-10$

$\lg tg(90^0-\frac{c}{2}) = 0{,}21868$

$\lg tg\,\frac{A-B}{2} = 9{,}33908-10$

$12^0\,18' \ldots .853$

$d = 60. \quad 55'' \quad 55$

$\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=12^0 18' 55'' = K$

$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=58^0 51'\,7'' = L$

$A = L + K = 71^0\,10'\,2''$

$B = L - K = 46^0\,32'\,12''$

$\lg a = \lg 247{,}5 = \quad = 2{,}39358$

$\lg \sin C = \lg \sin 62^0\,17' = 9{,}94707$

$d = 7. \quad 40'' \ldots .\ 4.7$

$6'' \quad 0.7$

$\lg \sin 62^0 17' 46'' = 9{,}94712.$

$\lg \sin A = \lg \sin 71^0\,10'\,2'' = 9{,}97610-10$; $-\lg \sin A = 10-9{,}97610 = 0{,}02390.$

2) $c=\frac{a.\sin C}{\sin A}$ $\qquad \lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$

$\lg a = \lg 247{,}5 = 2{,}39358$

$\lg \sin C = \lg \sin 62^0\,17'\,46'' = 9{,}94712$

$-\lg \sin A = -\lg \sin 71^0\,10'\,2'' = 0{,}02390$

$\lg c = 2{,}36460$

$231{,}5 \ldots\ldots .455$

$d = 19. \quad 5$

$3 \quad 5.7$

$c = 231{,}53$ *m.*

Vastused:

A = 71⁰ 10′ 2″

B = 46⁰ 32′ 12″

c = 231,53 m.

II-ne ülesanne.

Antud: $a = 223{,}82$ cm., $B = 73^0\,14'\,28''$, $C = 46^0\,40'\,15''$ Leida: A, b, c.

Lahendamine: 1) $A = 180^0 - (B + C)$

$A = 180^0 - (73^0 14' 28'' + 46^0 40' 15'')$

$A = 60^0\, 5'\, 17''$.

2) $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$; $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$

$\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$

$\lg a = \lg 223{,}8 = 2{,}34986$

d=19   2 . . . . 3.8

$\lg a = \lg 223{,}82 = 2{,}34990$

$\lg \sin B = \lg \sin 73°14' = 9.98113$

d=4   20″ 1.3

8″ 0.53

$\lg \sin B = \lg \sin 73°14'28'' = 9.98115$

$-\lg \sin A = -\lg \sin 60°5'17'' = 0.06209$

lg a	2,34990
lg sin B	9,98115
−lg sin A	0,06209
lg b =	2,39314

d = 17   305 . . . 2472

9

8.5 5

b = 247,25 m.

3) $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$

$\lg \sin C = \lg \sin 46°40' = 9.86176$

d=12   10″ . . . 2.0

5″ . . . 1.0

$\lg \sin C = \lg \sin 46°40'15'' = 9.86179$

$\lg \sin A = \lg \sin 60°\,5' = 9.93789$

d=8   10″ 1.3

7″ = . . 0.93

$\lg \sin A = \lg \sin 60°5'17'' = 9.93791$

lg a	2,34990
lg sin C	9,86179
−lg sin A	0,06209
lg c =	2,27378

d = 23   370 1878

8

6.9 3

c = 187,83 m.

III-as ülesanne.

Antud: $a = 17$ m., $b = 19$ m., $c = 22$ m. Leida: A, B, C.

Lahendamine:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p.(p-a)}}\,;\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p.(p-b)}}\,;\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p.(p-c)}}.$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p - \lg(p-a)];$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\lg(p-a) + \lg(p-c) - \lg p - \lg(p-b)];$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\lg(p-a) + \lg(p-b) - \lg p - \lg(p-c)].$$

$a=17$	$p-a=12$	$\lg(p-a)=\lg 12=1{,}07918$	$-\lg(p-a)=8{,}92082-10$
$b=19$	$p-b=10$	$\lg(p-b)=\lg 10=1{,}00000$	$-\lg(p-b)=9{,}00000-10$
$c=22$	$p-c=7$	$\lg(p-c)=\lg 7=0{,}84510$	$-\lg(p-c)=9{,}15490-10$
$2p=58$	$p=29$	$\lg p=\lg 29=1{,}46240$	$-\lg p=8{,}53760-10$

$\lg(p-b)$	1,00000	$\lg(p-a)$	1,07918	$\lg(p-a)$	1,07918
$\lg(p-c)$	0,84510	$\lg(p-c)$	0,84510	$\lg(p-b)$	1,00000
$-\lg p$	8,53760-10	$-\lg p$	8,53760-10	$-\lg p$	8,53760-10
$-\lg(p-a)$	8,92082-10	$-\lg(p-b)$	9,00000-10	$-\lg(p-c)$	9,15490-10

$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\,9{,}30352$

$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\quad 9{,}65176$

$24^0\,9'\ .\ .\ .\ 164$

$d=33\ .\ 20''\ .\ 11$

$2''\ .\ 1{,}1$

$\frac{A}{2}=24^0\,9'\,22''$

$A=48^0\,18'\,44''$

$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\,9{,}46188$

$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\quad 9{,}73094$

$28^0\,17'\ .\ .\ 084$

$d=30\quad 20''\ .\ 10{,}0$

$\frac{B}{2}=28^0\,17'\,20''$

$B=56^0\,34'\,40''$

$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\,9{,}77168$

$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\quad 9{,}88584$

$37^0\,33'\ .\ .\ .\ 577$

$d=26\quad 10''\quad 4_3$

$6''\quad 2_6$

$\frac{C}{2}=37^\circ\,33'\,16''$

$C=75^\circ\,6'\,32''$

Järelkatsumine:

$A=48^\circ\,18'\,44''$
$B=56^\circ\,34'\,40''$
$C=75^\circ\,6'\,32''$

$A+B+C=179^\circ\,59'\,56''$

Viga on 4″. Niisugune viga võib ette tulla, sest nurkade pooled leiame ka peenelt kuni 1″-ni. Jaotame selle vea nurkade vahel ära, siis võtame vastuseks:

$A=48^\circ\,18'\,45''$; $B=56^\circ\,34'\,41''$; $C=75^\circ\,6'\,34''$.

IV-as ülesanne. Antud: a, b, A. B, C, c.

Lahendamine: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; siit leiame $\sin B=\frac{b.\sin A}{a}$.

Et aga võimalik on ainult $\sin B<1$, siis ei ole see ülesanne mitte igal tingimusel võimalik ja me peame teda uurima [118].

Uurimine. I. Kui A on nürinurk, $A>90^0$, siis on B teravnurk ja $a>b$ ja ammugi on $a>b.\sin A$. Seepärast on $\sin B<1$, ülesanne on võimalik ja tal on 1 lahendus.

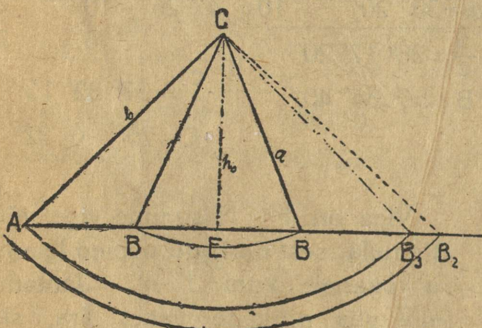
II. Kui A on täisnurk, $A=90^0$, siis on niisamuti $B<90^0$, $a>b$ ja $\sin B<1$. Ülesanne on võimalik ja tal on 1 lahendus. [118 II.]

III. Kui A on teravnurk, $A < 90^0$, siis võib olla kas 1) $a > b$ või 2) $a = b$, või 3) $a < b$.

1) Kui $a > b$, siis on ammugi $a > b \sin A$ ja $\sin B < 1$. Ülesanne on võimalik ja tal on 1 lahendus. [118, III. 1.] $\triangle AB_2C$.

2) Kui $a = b$, siis on ka $A = B$; sellega on $\triangle ABC$ — sarikkolmnurk. Ülesanne on võimalik ja tal on 1 lahendus [118, III. 2.] $\triangle AB_3C$.

3) Kui $a < b$, siis on võimalik, et I) siiski on $a > b . \sin A$, ehk $a > h_c$, sest et $b . \sin A = h_c$. Niisugusel korral $\sin B < 1$. Ülesanne on võimalik ja tal on 2 lahendust: $B < 90^0$ ja $B_1 > 90^0$, sest $B > A$. Selle juures on B_1*) $= 180^0 - B$. [118, III. 3.]



II, On $a < b$ ja $a = b . \sin A$ ehk $a = h_c$, siis on $\sin B = 1$ ja $B = 90^0$. Ülesanne on võimalik ja tal on 1 lahendus $\triangle ACE$.

III. Kui $a < b$ ja ühtlasi ka $a < b \sin A$, siis peaks olema $\sin B > 1$. See ei ole võimalik. Ülesanne on võimatu; tal on O lahendust.

Võtame näituseks: a = 17,45 m., b = 26,48 m., $A = 35°28'37''$.

1) $\sin B = \dfrac{b . \sin A}{a}$; $\lg \sin B = \lg b + \lg \sin A - \lg a$.

lg sin A	= lg sin 35°28′	= 9,76360		lg b	1,42292
	d = 18. + 30″	9.0		lg sin A	9,76371
	+ 7″	2.1		—lg a	8,75820
lg sin A	= lg sin 35°28′37″	= 9.76371.		lg sin B	= 9,94483
lg b	= lg 26,48	= 1,42292		61°43′ . .	479
lg a	= lg 17,45	= 1,24180		d = 6. 40″ . .	4
—lg a	=	= 8,75820		*B = 61°43′40″*	
—lg sin A		= 0.23629.	$B_1 = 180° - B$;	*B_1 = 118°16′20″*	

* Joonestuse peal peab olema B_1 punktide A ja E vahel.

2) $C = 180^0 - (A + B) = B_1 - A$. $C_1 = 180^0 - (A + B_1) = B - A$.

$C = 82^0 47' 43''$ $C_1 = 26^0 15' 3''$

3) $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$.

$\lg \sin C = \lg \sin 82^0 47' 43'' = 9{,}99656$. $\lg \sin C_1 = \lg \sin 26^0 15' 3'' = 9{,}64572$.

lg a	1,24180
lg sin C	9,99656
—lg sin A	0.23629

lg c = 1,47465

2983 465

c = 29,83m.

lg a	1,24180
lg sin C_1	9,64512
—lg sin A	0,23629

$\lg c_1$ = 1,12381

1329 352

d=33. 9 . . . . . 29.1

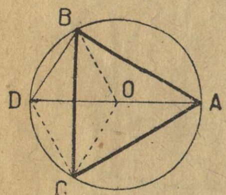
$c_1 = 13{,}299$ m. ehk $c_1 = 13{,}3$ m.

XII peatükk.

Korrapärased hulknurgad.

209. I-ne ülesanne. *Leida korrapärase sissekujundatud kuusnurga külg raadiuse funktsioonina.* § 126 teame, et $a_6 = R$.

2-ne ülesanne. *Korrapärase sissekujundatud kolmnurga külg leida raadiuse funktsioonina.*



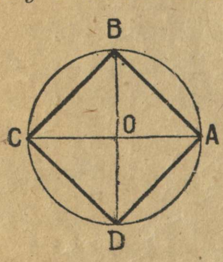
Lahend. Korrapär. 3-nurga sõõri sisse kujundamiseks jaotame ringi kuueks ja ühendame jaotuspunktid, ikka üht vahele jättes.

Olgu $AB = a_3$. Tõmbame diameetri AD; ta läheb kahest jaotuspunktist läbi [91],

nii et $BD = a_6 = R$.
Siis on $\angle ABD = 90^0$
ja $AB^2 = AD^2 - BD^2$
ehk $a^2_3 = 4R^2 - R^2$
$a^2_3 = 3R^2$
$a_3 = R\sqrt{3}.$

Tõmbame OB, OC, CD ja BD.
Siin on : $OB = OC = CD = BD = R$,
OBDC on romb ja
$BC^2 + OD^2 = OB^2 + OC^2 + CD^2 + BD^2$ [204.]
$a^2_3 + R^2 = R^2 + R^2 + R^2 + R^2$
$a^2_3 = 3R^2$ ja $a_3 = R\sqrt{3}.$

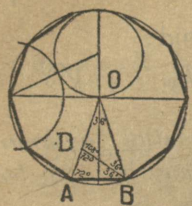
3-as ülesanne. *Sisse kujundatud korrapärase nelinurga (ruudu) külg leida raadiuse funktsioonina.*



Lahend: Tõmbame diameetrid $BD \perp AC$; siis on $AB = a_4$ [126,3] ja $AB^2 = OA^2 + OB^2$

ehk $a^2_4 = R^2 + R^2$
$a_4{}^2 = 2R^2$
$a_4 = R\sqrt{2}.$

4-as ülesanne. *Sõõri sisse korrapärane kümmenurk kujundada ja leida tema külg raadiuse funktsionina.*



Lahend. Olgu $AB = a_{10}$, siis on $\smile AB = \frac{1}{10}$ ringist ja $\angle AOB = 36^0$.

Järjel. $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$.

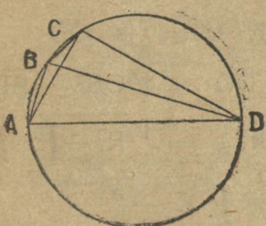
Tõmbame $\angle$-ga B poolitaja BD, siis on:

$$\frac{\frac{\angle DBO = \angle BOD = 36^0}{OD = DB} \; ; \; \frac{\angle ADB = \angle DAB = 72^0}{DB = AB}}{AB = OD.}$$

Peale selle: $\frac{OB}{AB} = \frac{OD}{DA}$ [150], et aga $OB = OA$ ja $AB = OD$,

siis on: $\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{DA}$, ehk $\frac{R}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{R - a_{10}}$. *Siit leiame:* $a_{10} = \frac{1}{2} R . (\sqrt{5} - 1)$. [194]. See tähendab, et *korrapärase sissekujundatud kümmenurga külg on suurem osa kuldlõikel jagatud raadiusest.*

Konstrueerimise viis on joonestusel näha.



5-es ülesanne. *Sõõri sisse korrapärane 15-nurk kujundada ja leida tema külg raadiuse funktsioonina.*

Lahend: $\frac{1}{6}$ ring. $-$ $\frac{1}{10}$ ring. $=$ $\frac{1}{15}$ ring.

Olgu $\smile AC = 60°$, $\smile AB = 36°$, siis on $\smile BC = 24° = \frac{360^0}{15}$,

$AC = a_6$, $AB = a_{10}$, $BC = a_{15}$, $CD = a_3$ ja

$BD = \sqrt{4R^2 - a^2_{10}}$. Ptolomäuse teoreemi [171] põhjal

leiame: $BC . AD + AB . CD = AC . BD$

$$a_{15} . 2R + a_{10} . a_3 . = a_6 . \sqrt{4R^2 - a^2_{10}}$$

$$2R . a_{15} + R . \frac{\sqrt{5} - 1}{2} . R\sqrt{3} = R . \sqrt{4R^2 - R . \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}}$$

$$2a_{15} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(16R^2 - 5R^2 + 2R^2\sqrt{5} - R^2)} - \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)$$

$$2a_{15} = \tfrac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{2} R \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)$$

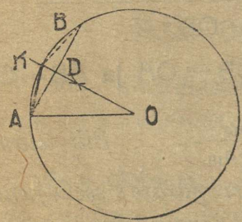
$$a_{15} = \tfrac{1}{4} R [\sqrt{2} . \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)].$$

Tõestada teoreem. 1) *30°-lise nurga vastaskatet on pool hüpoten.;*
2) *45°-lise nurga vastaskateet on pool hüpotenuusi, kasvatatud* $\sqrt{2}$;
3) *60°-lise* „ „ „ „ „ „ „ $\sqrt{3}$.

Kergemaks meelespidamiseks olgu valemid:

$$k_{30} = \tfrac{1}{2} a\sqrt{1}; \qquad k_{45} = \tfrac{1}{2} a\sqrt{2}; \qquad k_{60} = \tfrac{1}{2} a\sqrt{3}.$$

210. *Ülesanne. Korrapärase sissekujundatud hulknurga* ***külgede*** *arv kahekordseks teha ja saadud hulknurga* ***külg*** *leida raadiuse ja antud hulknurga külje funktsioonina.*



Lahend. Konstrueerimiseks jagame antud h-rga küljele vastava kaare AB pooleks ja saadud punkti K ühendame joonlõikude abil järjekorras olevate hulknurga tippudega.

Väljaarvamiseks vaatleme teravnurkset △ — a AOK. Tarvitades § 203 I teoreemi leiame $AK^2 = OK^2 + OA^2 - 2.OK.OD$.

Olgu $AB = a_n$, $OK = OA = R$, $AK = a_{2n}$ ja $OD = r$; siis on $a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2.R.r.$; aga $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2}$,

ehk $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$;

seepärast leiame: $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{1}}$

ehk $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$ (*kahendamise valem*).

Harjutused: Leida 1) a_8, vastus $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

2) a_{16}; vastus $a_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$;

3) a_{32}; vastus $a_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

analoogia põhjal leiame: $a_{2n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(n-2)\text{ k orda, kus } n \geq 2}}$.

Leida: 4) a_{12} — vastus: $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

5) a_{24} — vastus: $a_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

6) a_{48} — vastus: $a_{48} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

analoogia põhjal võime ütelda, et

$$a_{3\cdot 2^n} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{}}.$$

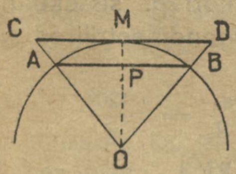
(n—2) korda, kui n ⩾ 2.

Ümberpöördult, kahendamise valemist võime leida a_n kui teada on R ja a_{2n}. Harjutus: leida a_5 raadiuse funktsioonina. Vastus: $a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

*I-ne märkus.**) §§ 126, 209 ja 210 põhjal võime konstrueerida niisuguseid hulknurki, mille külgede arv on 3.2^n 4.2^n, 5.2^n ja $3.5.2^n$ ja nende külgede pikkust raadiuse funksioonina avaldada.

II-ne märkus. Et korrapärast hulknurka tema külje abil konstrueerida, kujundatakse enne samanimeline korrapärane hulknurk mingi sõõri sisse ja sellele hulknurgale konstrueeritakse sarnane, mille küljel on antud pikkus.

211. I-ne ülesanne: *Sõõri sissekujund. korrap. h-rga külje ja ringi raadiuse abil leida samanimelise ümberkujund. korrap. h-rga külg.*



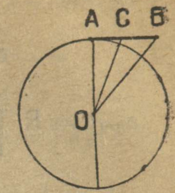
Lahend.: Tõmbame korrap. ümberkuj. h-rga külje paralleelselt sissekuj. h-rga küljele, siis langevad ühte nende h-rkade apoteemid ja nende ümberkujundatud ringide raadiused ja

$\triangle$ COD $\backsim$ $\triangle$ AOB. Siit leiame: $\frac{CD}{AB} = \frac{OM}{OP}$, ehk $\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{r}$.

Teades, et $r = \sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$ leiame siit: $b_n = \frac{R.a_n}{\sqrt{R^2-\frac{a^2{}_n}{4}}}$

Eriline juhus. Korrap. 3-rga jaoks on $\frac{R}{r} = 2$, [209,2] seepärast $b_3 = 2a_3 = 2R\sqrt{3}$.

*)1796 aastani osati konstrueerida ainult nimetatud h-rki. 1796-al a. leidis üles 19 aastane Gauss, XIX aastasaja kõigesuurem matemaatik, võtte, kuidas sirkli ja liineali abil konstrueerida 17-rka ja üleüldse h-rki, mille külgede arv on $2^m.(2^n+1)$, kus m ja n on täisarvud ja 2^n+1 on algarv. Tema võte avaldati 1801 teaduslises ajakirjas „Disquisitiones Aritmeticae". Ühes sellega tõestas ka Gauss, et sirkli ja liineali abil on võimalik konstrueerida ainult piiratud arv korrapäraseid h-rki.



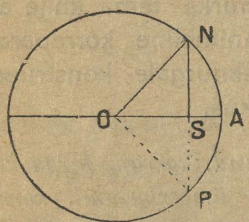
2-ne ülesanne: Sööri ümber kujundatud korrap. n-külgse h-rga külje b_n ja raadiuse r abil leida korrap. ümberkuj. 2n-külgse h-rga külg b_{2n}.

Juhatus: $\angle AOC = \angle BOC$, $AC:CB = AO:OB$.

Vastus: $b_{2n} = rb_n : (r + \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}b_n^2})$.

Harjutused: Võttes järgimööda n = 3, 4, 6, 10, leida: 1) a_n, r, b_n, a_{2n}, b_{2n}, kui antud on R.
2) R, r, b_n, a_{2n}, b_{2n} „ „ „ a_n.
3) r, a_n, b_{2n}, a_{2n} „ „ „ b_n.

212. Teoreem. Pingjoone vahekord raadiusega on sellele pingjoonele vastava tsentrinurga poole kahekordne sinus.



Tõestus: $\frac{NS}{ON} = \sin AON$ sest et $NS = \frac{NP}{2}$

$\frac{NP}{2ON} = \sin\frac{PON}{2}$ ja $\angle AON = \frac{\angle PON}{2}$

Järjel. $\frac{NP}{ON} = 2\sin\frac{PON}{2}$.

Selle teoreemi põhjal on võimalik korrap. sissekujund. h-rkade külgede abil mõnede nurkade trigonomeetrilised suurused leida.

$\frac{a_6}{R} = 2\sin\frac{60^0}{2}$ $\frac{a_4}{R} = 2\sin\frac{90^0}{2}$ $\frac{a_3}{R} = \frac{120^0}{2}$

$\frac{R}{R} = 2\sin 30^\circ$ $\frac{R\sqrt{2}}{R} = 2\sin 45^\circ$ $\frac{R\sqrt{3}}{R} = 2\sin 60^0$

$1 = 2\sin 30^0$ $\sqrt{2} = 2\sin 45^0$ $\sqrt{3} = 2\sin 60^0$

$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0$; $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$; $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0$.

Teades, et $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ leiame:

$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg} 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$

$tg\ 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $tg\ 45^0 = 1.$ $tg\ 60^0 = \sqrt{3}.$

Harjutused: Leida sin 18⁰; cos 18⁰; tg 18⁰; ctg 18⁰; sin 72⁰; cos 72⁰; tg 72⁰; ctg 72⁰; sin 22,5⁰; sin 15⁰; cos 22⁰,5; cos 15⁰; tg 22⁰,5; tg 15⁰.

XIII. peatükk.

Ringi pikkus.

a) Teoreemid lõpmata väikestest suurustest.

213. Suurust nimetasime lõpmata väikseks, kui ta vähemaks võib saada kui ükski kindlaks määratud suurus, olgu see kui väike tahes [135, II].

Lõpmata väikesi suurusi tähendame ära greekakeelsete tähtedega ja kirjutame lühendatult „lvs".

Lõpmata väikesi suurusi vaadeldes võtame arvesse siin kohal ainult nende absoluutse väärtuse.

Teoreem. Kui liita piiratud arv lõpmata väikesi suurusi, siis on saadud summa lõpmata väike suurus.

Tõestus: Olgu α, β, γ .... τ lõpmata väikesed suurused, nende arv n — piiratud ja k miski kindlaks määratud ükskõik kui väike suurus, siis on meil definitsiooni põhjal võimalik ikka teha nii, et oleks

$$\alpha < \frac{k}{n};$$

niisama ka, et

$$\beta < \frac{k}{n};$$

$$\gamma < \frac{k}{n};$$

$$\cdots\cdots$$

$$\tau < \frac{k}{n}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau < k, \quad \text{sest } \frac{k}{n} \cdot n = k.$$

s. t. et summa $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau$ on lvs.

214. Teoreem. Kahe lõpmata väikese suuruse vahe on lõpmata väike suurus.

Tõestus: Olgu α ja β lõpmata väikesed suurused, siis on absoluutses mõttes ikka $\alpha - \beta < \alpha + \beta$; et aga $\alpha + \beta$ on lvs., siis on $\alpha - \beta$ seda ammugi.

215. Teoreem. Lôpmata väikese suuruse kasvatis piiratud arvuga on lôpmata väike suurus.

Oletus: α on lvs, n on piiratud arv.

Väide: $\alpha . n$ on lvs.

Tõestus: 1) Kui n on täisarv, siis on

$\alpha . n = \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha$ (n kord) ja see summa on lvs. [213].

2) Kui n on murd või irratsionaalne arv, siis on meil ikka võimalik leida täisarvud m ja $m+1$ nii, et

$$m < n < m+1.$$

Siis on aga $n . \alpha < (m+1) . \alpha$.

Et aga $(m+1) . \alpha$ on lvs. [215,1], siis on $n . \alpha$ seda ammugi.

216. Teoreem. Lôpmata väikese ja piiratud suuruse vahekord on lôpmata väike suurus.

Tõestus: Kui n on piiratud suurus, siis on ka $\frac{1}{n}$ piiratud suurus ja lõpmata väikese suuruse α kasvatis $\frac{1}{n}$-kuga ehk $\frac{\alpha}{n}$ on ka lvs, eelmineva teoreemi järele.

217. Teoreem. Kui lõpmata väikesi tegurid on piiratud arv, siis on nende kasvatis lõpmata väike.

Oletus: $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \tau$ on lõpmata väikesed suurused; nende arv n — on piiratud.

Väide: $\alpha . \beta . \gamma \ldots . \tau$ on lõpmata väike suurus.

Tõestus: Kui k on mingi kindlaks määratud ükskõik kui väike suurus, siis on lõpmata väikese suuruse mõiste definitsiooni põhjal alati võimalik teha, et

niisama ka

$$\left.\begin{aligned} \alpha &< \sqrt[n]{k}\,; \\ \beta &< \sqrt[n]{k}\,; \\ \gamma &< \sqrt[n]{k}\,; \\ &\ldots\ldots \\ \tau &< \sqrt[n]{k}\,. \end{aligned}\right\} \times$$

$$\alpha . \beta . \gamma \ldots . \tau < k, \quad \text{sest} \quad \left(\sqrt[n]{k}\right)^n = k.$$

s. t. et $\alpha . \beta . \gamma \ldots . \tau$ on lvs.

218. Teoreem. Lõpmata väikese suuruse aste, mille näitajaks on piiratud positiivne täisarv, on lõpmata väike suurus.

Tõestus: $\alpha^n = \alpha \,.\, \alpha \,.\, \alpha \,.\, .\, .\, .\, .\, \alpha$ on lvs. eelmineva teoreemi põhjal.

219. Teoreem. Lõpmata väikesest suurusest võetud juur, mille näitajaks on positiivne piiratud täisarv, on lõpmata väike suurus.

Tõestus: Definitsiooni järele on meil alati võimalik teha $\alpha < k^m$, millest järgneb, et $\sqrt[m]{\alpha} < k$, kus k on mingi kindlaks määratud ükskõik kui väike suurus.

Järeldus. Lõpmata väikese suuruse aste ja juur, kui astme ja juurenäitajaks on piiratud positiivne murd, on lõpmata väike suurus.

Tõestus: $\sqrt[\frac{q}{p}]{\alpha} = \alpha^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\alpha^p} = \sqrt[q]{\mathrm{lvs}} = \mathrm{lvs}.$

220. Teoreem. Piiratud suuruse jagamisest lõpmata suurele suurusele saadud vahekord on lõpmata väike suurus.

Tõestus. Kui murru $\frac{1}{A}$ nimetajat A—d suurendada, siis väheneb murd $\frac{1}{A}$, ja kui nimetaja A saab suuremaks kui ükski ette kindlaks määratud arv, siis saab murd ise $\frac{1}{A}$ vähemaks kui ükski ette kindlaksmääratud arv; s.t. kui A on lõpmata suur suurus, siis on $\frac{1}{A}$ lõpmata väike suurus. Järjelikult on ka $\frac{m}{A}$ ehk $m \,.\, \frac{1}{A}$, kus m on piiratud suurus, lvs [215].

221. Teoreem. Piiratud suuruse jagamisest lõpmata väikesele suurusele saadud vahekord on lõpmata suur suurus.

Tõestus. Olgu m — piiratud suurus; siis peab leiduma mingi jäädav suurus p, millest m vähem olla ei või, s. t. $m > p$. Et murru nimetaja vähenemisega murd ise suureneb, siis peab murd $\frac{1}{\alpha}$ piiramatalt kasvama, kui tema nimetaja α piiramatalt kahaneb, ja võib suuremaks saada, kui ükski ette kindlaksmääratud ükskõik kui suur suurus B, nii et $\frac{1}{\alpha} > B$. Sellest järgneb, et $m \cdot \frac{1}{\alpha}$ ehk $\frac{m}{\alpha} > p \cdot B$, kus $B \cdot p$ on ükskõik kui suur ette kindlaks määratud suurus, sest et p on jäädav suurus. See tähendab aga, et $\frac{m}{\alpha}$ on lõpmata suur suurus.

222. Teoreem. Kahe lõpmata väikese suuruse vahekord ei ole mitte alati lõpmata väike suurus.

Tõestus: Kui oleks $\frac{\alpha}{\beta}$ lvs., s. t. kui oleks $\frac{\alpha}{\beta} < k$, kus k on kui väike tahes ette kindlaks määratud suurus, siis oleks $\alpha < k.\beta$. See juures võib ju alati olla $k = 1$ ehk $k < 1$. Siis peaks aga alati olema $\alpha < \beta$. Niisugune oletus ei või aga üleüldiselt maksev olla. Seepärast ei või ka kahe lõpmata väikese suuruse vahekord mitte alati lõpmata väike suurus olla; ta võib mõnikord olla piiratud arv, võib olla ka piiramata suur. Seepärast räägitakse lõpmata väikeste suuruste juures nende isesugustest järkudest. Näit.

$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ on lvs. α^2 on α-ga võrreldes kõrgema järgu lvs.

$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$ on piiratud arv. 2α on α-ga võrreldes sama järgu lvs.

$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ on lõpm. suur suurus; α on α^2-ga võrreldes alama järgu lvs.

Lõpmata väikeste suuruste vahekordade leidmine kuulub „differentsiaal arvamise“ alale.

b) Piiride teoreemid.

223. Muutuvad suurused, mis piiriks saada püüavad.

Muutuva suuruse piiriks nimetasime [135, II.] niisugust jäädavat suurust, mis muutuva suurusega võrreldes lõpmata väikese vahe annab. Edaspidi tähendame ära muutuvaid suurusi ladina (prantsuse) keele tähestiku viimaste tähtedega — x, y, z . . . t, nende piirisid sellesama tähestiku esimeste tähtedega — a, b, c . . d, ja lõpmata väikesi suurusi, nagu ennegi, greekakeelsete tähtedega.

Et a on x-i piir, kirjutatakse nii: $a = \lim x$, kus „lim" on lühendatud ladinakeelne sõna „limes", ehk prantsusekeelne „limite" — piir. Muutuv suurus võib läheneda oma piiriväärtusele — iialgi mitte selleks saades — kas kasvades, või kahanedes, näit. korrap. hulknurga välisnurk läheneb oma piirile 0^0 vähenedes, ja ühtlasi läheneb sisenurk oma piirile 180^0 kasvades, aga kumbki neist ei või omaks piiriks saada.

Kui muutuv suurus x läheneb oma piirile a kasvades, siis on ta vähem kui tema piiriväärtus, $x = a - \alpha$ ja kõik 4 võrdust 1) $\lim x = a$, 2) $a = x + \alpha$, 3) $a - x = \alpha$ ja 4) $x = a - \alpha$ väljendavad üht ja sedasama mõtet, et „a on x-i piir".

Kui muutuv suurus x läheneb oma piirile a vähenedes, siis on ta suurem kui tema piiriväärtus, $x = a + \alpha$ ja kõik 4 võrdust 1) $\lim x = a$, 2) $a = x - a$, 3) $x - a = \alpha$ ja 4) $x = a + \alpha$ väljendavad üht ja sedasama mõtet, et „a on x-i piir".

Lõpmata väikese suuruse piir on 0, sest $\alpha - 0 = \alpha$; lõpmata suure suuruse piir on lõpmatus „∞", ehk, mis sedasama tähendab, tal ei olegi ülemist piiri.

Piiride võte. Mõnikord ei ole meil võimalik mõne jäädava suuruse olenevust teisest jäädavast suurusest ilmsiks teha, kuna meil küll võimalik on ilmsiks teha olenevust niisuguste muutuvate suuruste vahel, millele need jäädavad suurused piiriks on. Niisugusel korral leiame nende muutuvate suuruste vastastikkuse olenevuse ja nende omadused kanname siis üle ka nende piiriväärtuste peale allpool ettetoodud teoreemide põhjal. Niisugust tõestuse viisi nim. *piiride võtteks.*

224. Teoreem. Kui kaks muutuvat suurust kõigil oma muutumistel annavad jäädava vahekorra, siis on ka nende piirid sellessamas vahekorras teineteisega.

Oletus: $\frac{x}{y} = c$ *Väide:* $\frac{\lim x}{\lim y} = c$.

Tõestus: Olgu $\lim x = a$, nii et $x = a - \alpha$ ja
$\lim y = b$, „ „ $y = b - \beta$.

Kui siis $\frac{x}{y} = c$, siis on $\frac{a - \alpha}{b - \beta} = c$;
sellest järgneb: $a - \alpha = cb - c\beta$,
ja $a - cb = \alpha - c\beta$, kus $c\beta$ on lvs. [215].

Jäädavate suuruste vahe $a - cb$ on jäädav suurus, kas võrdne nullile või mitte võrdne; lõpmata väikeste suuruste vahe $\alpha - c\beta$

on lõpmata väike, kas nullile mitte võrdne suurus, või 0. Arusaadav on, et need vahed võivad ühesuurused olla ainult sel tingimusel, kui kumbki nendest eraldi võetud on 0.

Seepärast: $a - cb = 0$

Järjelikult: $a = cb$.

Siit leiame: $\frac{a}{b} = c$ ehk $\frac{\lim x}{\lim y} = c$.

Järeldus; Kui $c = 1$, siis saame: $\frac{x}{y} = 1$ ehk $x = y$ ja $\frac{\lim x}{\lim y} = 1$ ehk $\lim x = \lim y$. See annab meile

teoreemi: Kui kaks muutuvat suurust jäävad võrdseteks kõigil oma muutumistel, siis on ka nende piirid isekeskis võrdsed.

225. Teoreem. Kui jäädav suurus on kahe muutuva suuruse vahel, mille vahe on lvs., siis on see jäädav suurus piiriks mõlemaile muutuvatele.

Oletus: $x > a > y$, $x-y$ on lvs. *Väide:* $\lim x = a = \lim y$

Tõestus: Et $x > a > y$, siis järgneb sellest otsekohe, et $x-a < x-y$ ja $a-y < x-y$; aga $x-y =$ lvs.; järjel. on $x-a$ ammugi lvs. ja $a-y$ on ka ammugi lvs. See tähendab aga, et $\lim x = a$ ja $a = \lim y$; ehk $\lim x = a = \lim y$.

226. Teoreem. Kui muutuv suurus on teise muutuva suuruse ja tema piiri vahel, siis on temal seesama piir.

Oletus: $x > y > a$, $\lim x = a$. *Väide:* $\lim y = a$.

Tõestus: $y-a < x-a$; aga $x-a$ on lvs.; järjel. on $y-a$ ammugi lvs.; s. t. et $\lim y = a$.

227. Teoreem. Kui muutuvaid liidetavaid on piiratud arv, siis on nende muutuvate summa piiriks nende piiride summa.

Oletus: $\lim x = a$, $\lim y = b$, $\lim z = c$, ... $\lim t = d$.

Väide: $\lim (x+y+z+ \ldots +t) = \lim x + \lim y + \lim z + \ldots + \lim t$.

Tõestus: Üleüldine võte selle tõestamiseks, et jäädav suurus on muutuva piir, seisab selles, et leitakse jäädava ja muutuva vahe ja näidatakse ära, et see vahe on lõpmata väike.

Siin seda võtet tarvitades leiame:

$[x+y+z+\ldots+t]-[a+b+c+\ldots+d]=$
$=[(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+\ldots+(d+\tau)]-(a+b+c+\ldots+d)=$
$=a+\alpha+b+\beta+c+\gamma+\ldots+d+\tau-a-b-c-\ldots-d=$
$=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\tau;$

aga see viimane summa on lvs., kui liidetavate arv on piiratud [213]; järjel. $\lim\,[x+y+z+\ldots+t]=a+b+c+\ldots+d=$ $=\lim x+\lim y+\lim z+\ldots+\lim t$.

228. Teoreem. Kahe muutuva suuruse vahe piiriks on nende piiride vahe.

Tõestus: Kui $\lim x=a$ ja $\lim y=b$, siis olgu $x=a+\alpha$ ja $y=b+\beta$. Siis leiame: $[x-y]-[a-b]=$ $=[(a+\alpha)-(b+\beta)]-[a-b]=a+\alpha-b-\beta-a+b=\alpha-\beta=$ lvs. [215]. See tähendab, et $\lim\,(x-y)=a-b=\lim x-\lim y$.

229. Teoreem. Kui muutuvaid tegurid on piiratud arv siis on nende muutuvate kasvatise piiriks nende piiride kasvatis.

Tõestus: Olgu $\lim x=a$, $\lim y=b$ ja $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$. Siis on: $x\,.\,y-a\,.\,b=(a+\alpha)\,.\,(b+\beta)-ab=ab+a\beta+b\alpha+\alpha.\beta-ab=$ $=a\beta+b\alpha+\alpha\beta$. Aga $a\beta$ on lvs., $b\alpha$ on lvs. [215] ja $\alpha\beta$ on lvs. [217]; seepärast on $a\beta+b\alpha+\alpha\beta$ lvs. [213]. Sellega on $xy-ab$ lvs. Järjel. $\lim\,(x\,.\,y)=a\,.\,b=(\lim x)\,.\,(\lim y)$. Oletame, et see teoreem on õige, kui tegurid on piiratud arv n ja näitame ära, et ta on ka õige, kui tegurid on $n+1$.

Olgu $\lim\,(x\,.\,y\,.\,z\ldots t)=(\lim x)\,.\,(\lim y)\,.\,(\lim z)\ldots(\lim t)$ ja $u=e+\varepsilon$ $(n+1)$-ne muutuv suurus.

Kasvatis $(x\,.\,y\,.\,z\ldots t)$ on, üleüldiselt võetult, mõni muutuv suurus, mille piiriks on $(\lim x)\,.\,(\lim y)\,.\,(\lim z)\ldots(\lim t)$; tähendame ära selle muutuva suuruse tähega F. Siis on tarvis ära näidata, et $\lim\,(F\,.\,u)=(\lim F)\,.\,(\lim u)$. Aga kahe muutuva suuruse jaoks on see teoreem juba tõestatud. Järjelikult on $\lim\,(F\,.\,u)=(\lim F)\,.\,(\lim u)$, ehk: $\lim\,[(x\,.\,y\,.\,z\ldots t)\,.\,u]=$ $=[\lim\,(x\,.\,y\,.\,z\ldots t)]\,.\,\lim u=$ $=[(\lim x)\,.\,(\lim y)\,.\,(\lim z)\ldots(\lim t)]\,.\,\lim u$. S. t. $\lim\,(x\,.\,y\,.\,z\ldots t\,.\,u)=(\lim x)\,.\,(\lim y)\,.\,(\lim z)\ldots(\lim t)\,.\,(\lim u)$. Et meie teoreem õige 2-he muutuva teguri jaoks, siis on ta ka õige 3-e, järjel. ka 4-ja, ja 5-e jne. teguri jaoks — kui tegurite arv on piiratud.

230. Teoreem. Kahe muutuva suuruse vahekorra piiriks on nende suuruste piiride vahekord.

Tôestus: Kui lim $x=a$ ja lim $y=b$ ehk $x=a+\alpha$ ja $y=b+\beta$,

Siis leiame: $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{ab+b\alpha-ab-a\beta}{b^2+b\beta}=\frac{b\alpha-a\beta}{b^2+b\beta}$.

Aga $b.\alpha$ on lvs., $a.\beta$ on lvs. [215] ja $b.\alpha-a.\beta$ on ka lvs [214]; b^2 on piiratud, jäädav suurus, $b.\beta$—lvs., ja järjel. on $b^2+b\beta$— piiratud muutuv suurus. Seepärast on $\frac{b\alpha-a\beta}{b^2+b\beta}=\frac{\text{lvs.}}{\text{piirat.suur.}}=$ lvs. [216]. See tähendab, et $\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{\lim x}{\lim y}$.

231. Teoreem. Muutuva suuruse jäädava täisarvulise astme piiriks on selle suuruse piiri seesama aste.

Tôestus: $\lim(x^m)=\lim(\overbrace{x.x.x...x}^{m\ \text{kord}})=$ $\overbrace{\lim x.\lim x.\lim x.....\lim x}^{m\ \text{kord}}$. [229]; järjel. $\lim(x^m)=(\lim x)^m$. Teoreem on õige ka siis, kui m on negatiivne arv; olgu $m=-p$. Siis on:

$\lim(x^m)=\lim(x^{-p})=\lim\left(\frac{1}{x^p}\right)=\frac{1}{\lim(x^p)}=\frac{1}{(\lim x)^p}=(\lim x)^{-p}=(\lim)^m$.

232. Teoreem. Muutuva suuruse jäädava täisarvulise astme juure piiriks on sellesama astme juur selle muutuva piirist.

Tôestus: Võtame samasuse: $\left(\sqrt[m]{x}\right)^m=x$.

Siit saame § 224. järeld. põhjal: $\lim\left[\left(\sqrt[m]{x}\right)^m\right]=\lim x$

„ „ § 231. „ „ $\left[\lim\left(\sqrt[m]{x}\right)\right]^m=\lim x$

Mõlemist pooltest juurt võttes saame: $\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x}$

Märkus. Viimased kuus teoreemi võime üheks ühendada järgmisel kujul: Kui muutuvate suuruste kallal täide saata piiratud arv algebralisi tehteid, siis on nende tehete saaduse piiriks see saadus, mis ilmub, kui me muutuvate suuruste piiride kallal toime paneme niisamasuguse rea tehteid.

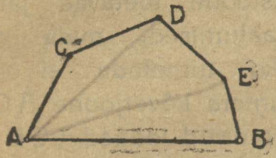
Üleüldine tõestamise võte seisab selles, et leitakse vahe $F(x, y \ldots t)-F(a, b, c \ldots d)$ ja näidatakse ära, et see vahe on lvs.

c) Ringi pikkuse mõetmine.

233. Et ükski kõverjoone osa ei lange ühte ühegi sirgjoone osaga, siis võime kõverjooni mõeta sirgjooneliste mõetüksuste abil ainult kaudselt ja sedagi ligikaudselt.

Kõverjooni võib mõeta kõverjoonte abil ainult siis, kui nad ühte langeda võivad, mis aga ainult harukordadel sünnib, sest igal kõverjoonel võib isesugune „kõverus“ olla.

234. Teoreem. Kaht punkti ühendav sirgjoone lõik on lühem kui ükski neid punkta ühendav murtudjoon.



Tõestus:

Ühendame A D-ga ja E-ga,*) siis saame:

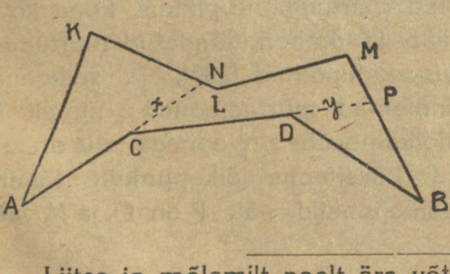
$$\left.\begin{aligned} AD &< AC + CD \\ AE &< AD + DE \\ AB &< AE + EB \end{aligned}\right\} \text{Liites ja mõlemalt poolt ära võttes } AD + AE \text{ leiame:}$$

$$AB < AC + CD + DE + EB.$$

235. Kinnine või piiratud murtud joon või kõverjoon on *kumer*, kui sirgjoon teda ainult kahes punktis lõigata võib.

Olgu meil kaks ühiste otsapunktidega teineteist mitte lõikavat joont, mis asenevad ühel pool läbi nende otsapunktide minevat sirgjoont. Kui me nüüd mingist otsapunkta ühendava joonlõigu punktist tõmbame kiire, mis mõlemaid jooni lõikab, siis nimetame *ümberhaaravaks* jooneks seda, mille lõikepunktid kiirega kiire lähtepunktist kaugemal on, kuna me teist joont *ümberhaaratavaks* nimetame.

Teoreem. Kumer murtudjoon on lühem kui ükski teda ümberhaarav murtudjoon, millel temaga ühised otsapunktid on.



Tõestus: Pikendame AC-d ja CD-d kuni lõikumiseni $AKLMB$-ga.

Siis näeme, et

$$\begin{aligned} AC + x &< AK + KN \\ CD + y &< x + NL + LM + MP \\ DB &< y + PB \end{aligned}$$

Liites ja mõlemilt poolt ära võttes $x + y$ leiame:

$$AC + CD + DB < AK + KL + LM + MB.$$

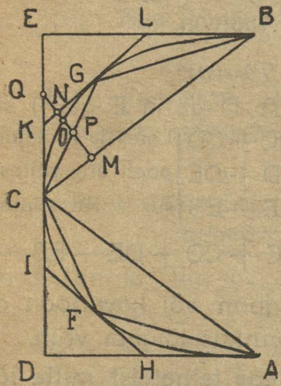
---

*) Joonestuse peal eksikombel tegemata jäänud, tuleb parandada.

236. **Archimedese *) printsiip: Kui kahest punktist tõmmata mitu kumerat kõverjoont, mis ühel pool läbi nende punktide minevat sirgjoont asenevad, siis on ümberhaarav kõverjoon pikem kui ümberhaaratav.**

Eelminevat [235] teoreemi ja Archimedese printsiipi üleüldistame järgmises **aksioomis**:

Iga kumer ümberhaaratav joon on lühem, kui ükski teda ümberhaarav joon, millel temaga ühised otsapunktid on.



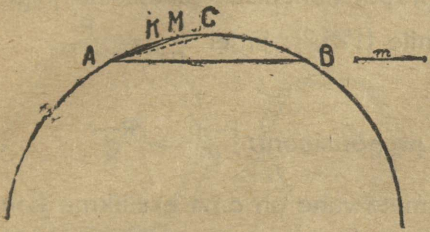
Seda aksioomi toetavad järgmised järelkaalumised, mida me aga tõestuseks nimetada ei või. Kujundame kumera kõverjoone ACB sisse ja ümber murtud jooned ACB ja ADEB nii, et neil ühised otsapunktid oleks.

Suurendame murtudjoonte külgede arvu sel teel, et me iga kaare kaheks jagame, iga jaotuspunkti ühendame järjekorras olevate joonte ühiste punktidega ja läbi iga jaotuspunkti tõmbame kõverjoonele riivajad kuni lõikumiseni enne tõmmatud riivajatega. Seda külgede arvu suurendamist kordame nii mitu korda kui tahame. Siis on näha, et mida suuremaks me teeme murtudjoonte külgede arvu, seda enam ühiseid punkta nad kõverjoonega omandavad; seda enam väheneb ümberkujundatud ja suureneb sissekujundatud murtudjoone pikkus, kuna kõverjoone pikkus muutmata jääb ja ümberkujundatud murtudjoon ikkagi pikem on kui sissekujundatud [235], ja seda enam lähenevad kõverjoonele mõlemad murtudjooned; nimelt kui me kõik need jooned läbilõikame ühe sirgjoonega, siis on uute murtudjoonte lõikepunktid kõverjoone lõikepunktile lähemal kui endiste murtudjoonte lõikepunktid, näit. P on O ja M vahel, N on O ja Q vahel.

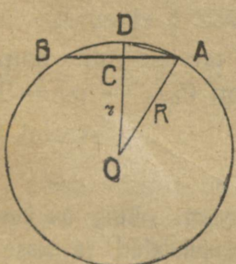
*) Archimedes — Greeka matemaatik elas a. 250 ümber e. Kr.; printsiip = põhimõte.

Et kôverjoon ruumiliselt nende murtudjoonte vahel on, siis saame mulje nagu oleks kõverjoon see piirseisand, millesse asuda püüavad mõlemad murtudjooned, kui nende külgede arvu piiramatalt suurendada, ja nagu oleks ka kõverjoone pikkus nende murtudjoonte pikkuste vahel ja nende pikkuste piiriks.

237. Teoreem. Sissekujundatud korrapärase hulknurga külg on lõpmata väike suurus, kui hulknurga külgede arvu piiramatalt kahendada.



Tõestus. Olgu AB ringi sisse kujundatud korrapärase hulknurga külg ja m — ette kindlaksmääratud ükskõik kui väike joonlõik. Asetame joonlõigu m pingjoonena ringi sisse nii, et üks otsapunkt ühte langeb A-ga: $AM = m$. Kui me nüüd korrapärase hulknurga külgede arvu hakkame kahekordseks tegema selleks kaart AB pooleks jagades ja saadud pooli ikka jälle pooleks jagades, siis on selge, et me niikaugele jõuda võime, et üks jaotuspunkt K langeb A ja M vahele, sellega ka $\smile AK < \smile AM$ ja hulknurga külg AK on vähem, kui ette kindlaks määratud ükskõik kui väike joonlõik m s. t. ta on lvs.



238. Teoreem. Ringi raadiuse ja sissekujundatud korrapärase hulknurga apoteemi vahe on lõpmata väike suurus, kui hulknurga külgede arvu piiramatalt kahendada.

Tõestus.

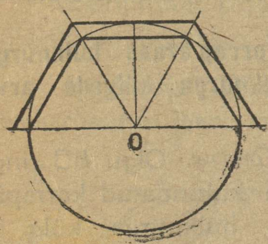
I. $\triangle$-gas AOC on: $OA - OC < AC$ II. $\triangle$-gas DCA on: $DC \perp CA$;

ehk $OA - OC < \frac{AB}{2}$ järel. $DC < DA$

s. t. $R - r < \frac{a_n}{2}$ s. t. $R - r < a_{2n}$ ja a_{2n} on lvs.

Et a_n on lvs. [237], järjel. ka $\frac{a_n}{2}$ lvs, siis on $R - r$ ammugi lvs.

239. Teoreem. **Korrapäraste ümberkujundatud ja samanimeliste sissekujundatud hulknurkade perimeetrite vahe on lôpmata väike suurus, kui hulknurkade külgede arvu piiramatalt kahendada.**



Tõestus: Teada on, et korrapäraste samanimeliste ümberkujundatud ja sissekujundatud hulknurkade perimeetrid on proportsionaalsed raadiusele ja apoteemile [175,2]; järjel $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$.

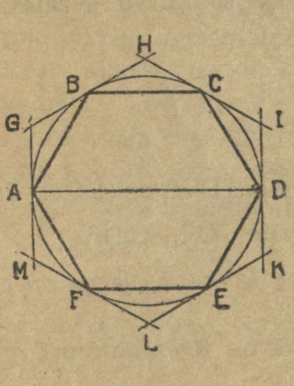
Võtame tuletatud proportsiooni: $\frac{P-p}{P} = \frac{R-r}{R}$

[Esimese vahekorra liikmete vahe on oma eesliikme kohta, nagu teise vahekorra liikmete vahe on oma eesliikme kohta].

Siit leiame $P - p = \frac{P}{R} \cdot (R-r)$.

Kui hulknurkade külgede arvu piiramatalt suurendada, siis on P — muutuv piiratud suurus, R— on jäädav suurus ja sellega $\frac{P}{R}$ on muutuv piiratud suurus; R—r on lvs. [238] ja sellega on $\frac{P}{R} \cdot (R-r)$ lvs. [215]. s. t. et P—p on lvs.

Märkus: Korrapärased hulknurgad ei tarvitse mitte samanimelised olla: Kui $P_n - p_n =$ lvs, siis on $P_{n+1} - p_n =$ lvs, sest $P_{n+1} < P_n$ ja ikkagi $P_{n+1} > p_n$.



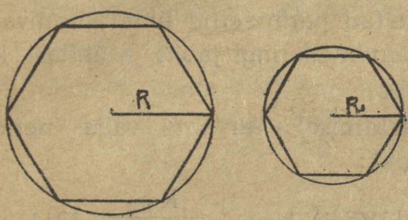
240. Teoreem. **Ring on korrapäraste ümberkujundatud ja sissekujundatud hulknurkade perimeetrite piir, kui hulknurkade külgede arvu piiramatalt kahendada.**

Tõestus: Tähendame ära ringi pikkuse C-ga, ümberkuj. hulkn. perim. P-ga ja sissekuj. hulkn. perim. p-ga.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{§ 236 aksioomi põhjal on:} & AGBHC > & \smile ABC & > ABC & \rule{0pt}{0pt} \\
 & \text{ja } CIKLMA > & \smile CDEFA & > CDEFA & \Big\} + \\
\hline
 & GHIKLM > & \text{ring } ABCDEFA & > ABCDEF & \\
 & \text{s. t. } P > & C & > p. & \\
 & \text{aga } P-p & \text{on lvs. § 239 järel;} & & \\
\hline
\end{array}
$$

järjel. § 225 põhjal on: $\lim P = C = \lim p$.

241. Teoreem. Ringi ja tema diameetri vahekord on jäädav suurus.



Tõestus: Võtame kaks ringi, mille raadiused olgu R ja R_1 ja nende sisse kujundatud korrapäraste samanimeliste hulknurkade perimeetrid olgu P a P_1

Korrapäraste samanimeliste hulknurkade perimeetrid on proportsionaalsed nende ümber kujundatud ringide raadiustele ehk diameetritele [175,1]; seepärast $\frac{P}{P_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{2R}{2R_1}$. Kui hulknurkade külgede arvu piiramatalt kahendada, siis saavad P ja P_1 muutuvateks suurusteks, aga $2R$ ja $2R_1$ jäävad muutmata. Seepärast on vahekord $\frac{P}{P_1}$, mis võrdub vahekorrale $\frac{2R}{2R_1}$, jäädav suurus ja § 224 põhjal leiame $\frac{\lim P}{\lim P_1} = \frac{2R}{2R_1}$,

$\lim P = C$ ja $\lim P_1 = C_1$ [240]; seep. $\frac{C}{C_1} = \frac{2R}{2R_1}$,

siit leiame: . . . . $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$.

See võrdus näitab, et ühe ringi vahekord oma diameetriga on niisama suur, kui iga teise ringi vahekord oma diameetriga, ehk et see vahekord on üks ja seesama kõigile ringidele. See jäädav vahekord tähendatakse ära greekakeelse tähega π, nii et $\frac{C}{2R} = \pi$.

Siit järgneb, et $C = 2\pi R$.

s. t. **ringi pikkus on tema diameetri ja arvu π kasvatis.**

242. Arvu π leidmine. Valemis $C = 2\pi R$ võtame $R = \frac{1}{2}$ ehk $2R = 1$, siis saame $C = \pi$.

Sõnades: π on niisuguse ringi pikkus, mille diameeter on 1.

Et ring on korrap. ümberkuj. ja sissekuj. h—rkade perimeetrite piir, kui viimaste külgede arvu piiramata kahendada, võime ka nii ütelda: „ringi (sőőri) võime vaadelda kui korrapärast hulknurka, millel lõpmata palju külgi". Seepärast, et leida ringi ligikaudset pikkust, on tarvis ainult väljaarvata mõne korrapär. ümber- või sissekuj. h-rga perimeeter ja teda ringi pikkuseks võtta. Selle juures tehtud viga on seda vähem, mida enam külgi on võetud h-rgal. Et vea suurust teada, on tarvis väljaarvata nii ümber-, kui ka sissekuj. h-rkade perimeetrid.

Mitmes kümnendkohas leitud perimeetrid ühte sünnivad, nii mitu õiget kümnendkohta on meil ringi jaoks ja ühtlasi ka π jaoks, kui $2R=1$.

Tarviliste perimeetrite leidmiseks arvame välja nende h-rkade küljed tarvitades valemid:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\ [210] \text{ ja } b_n=\frac{R.a_n}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\ [211] \text{ ja}$$

kasvatame neid vastava külgede arvuga.

Väljaarvamise saadusi näitab järgmine tabel [$2R=1$]:

n	P	p
6	3,464100	3,000000
12	3,215390	3,105828
24	3,159660	3,132628
48	3,146086	3,139350
96	3,142715	3,141031
192	3,141873	3,141452
384	3,141662	3,141556
768	3,141610	3,141583
1536	3,141597	3,141590

Harilikult tarvitatakse järgmisi π ligikaudseid väärtusi:

$\pi=\frac{22}{7}$

$\pi=3,14$

$\pi=3,1416$

$\pi=3,14159.$

Vana aja kõige suurem matemaatik Archimedes (250 a. e. Kr.) leidis et π on $3\frac{10}{70}$ ja $3\frac{10}{71}$ vahel. Seep. nim. $\pi=\frac{22}{7}$ Archimedese arvuks. Hollandlane Adrian Metius XVI aastasajal leidis $\pi=\frac{355}{113}$ (kui $n=256$), mida kerge meeles pidada, kui kirjutada 11 3/3 55 ja siis ümberpöörda.

Hollandlane Ludolf (XVI a.) leidis π-le 32 kümnendkohta.

Tema arv on tema hauasambasse Leydenis kahe reana sisseraiutud:

3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50

3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 51.

Pärast on π kiiremaks väljaarvamiseks kõrgema matemaatika võtteid tarvitatud. 1873 a. avaldas Shankes omad väljaarvamised — ta oli leidnud π-le

707 kümnendkohta. Rutherforth on 411 numbrit järele katsunud. Sagedasti tuleb ette $\frac{1}{\pi}$. Teda on kerge üles kirjutada lause abil: „Kooli alguse esimeste kuude*) päevade arvud, 8-ndamast alga!"

See annab: $\frac{1}{\pi} = 0,318\,3098.$

243. Kaarte mõetmine. 1) Ringi kaart mõetsime kõige esiti [151] sellesama ringi kaarte abil, üksuseks võttes $\frac{1}{360}$ -kku jagu ringist, s. o. kaare kraadi ja tema jagusid — minutit ja sekundit. See on kraadiline mõetmine.

2) Nüüd võime kaare pikkust mõeta sirgjooneliste üksuste abil, kui meil teada on kaare kraadide arv.

360^0-le vastab $2\pi R$

1^0-le „ $\frac{2\pi R}{360}$

n^0-le „ $\frac{2\pi R.n}{360}$; $l = \frac{2\pi Rn}{360}$ ehk $l = \frac{\pi Rn}{180}$.

3) Trigonomeetrias ja kõrgemas matemaatikas tarvitatakse niisugust mõetmist, mille juures üksuseks võetakse sellesama ringi raadiuse pikkune kaar, mida nim. *radiaaniks*. Seda mõetmist nim. *radiaalseks*. Selle juures on ikka $R=1$, järjel. $C=2\pi$.

C-le ehk 2π-le vastab kaar $360°$		$360°$-le kraadile vastab 2π
1-le „ „ $\frac{360°}{2\pi}$		1^0-le „ „ $\frac{\pi}{180}$
1-le „ „ $57°17'44''_{806}$.		n^0 „ „ $\frac{\pi.n}{180}$

Harjutused.

1) Radiaalselt mõeta kaar, milles on 180°, 90°, 45°, 60°, 30°, 22⁰,5.

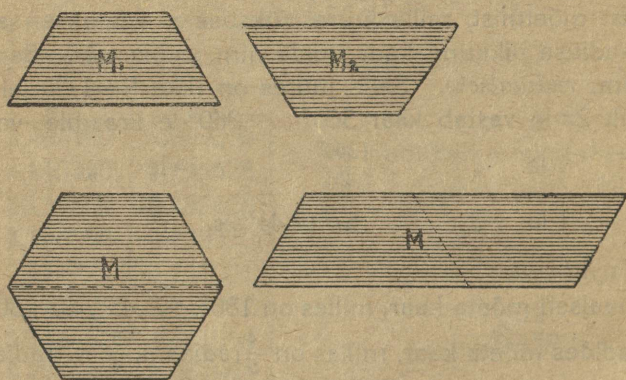
2) Kraadides mõeta kaar, milles on $\frac{4}{5}$ radiaani, $\frac{5}{4}$ π radiaani.

*) augusti ja septembri.

XIV-es peatükk:

Pinnasuurused.

244. Kujundite summa. Kui me kaks kujundit ühel tasapinnal nii teineteise külge liidame, et neil mõned piirde osad ühte langevad, ilma et neil ühiseid sisemisi punkta oleks,



kui me siis ühised piirde osad ära hävitame, siis saame uue kujundi M, mida me antud kujundite M_1 ja M_2 *summaks* nimetame: $M_1 + M_2 = M$; antud kujundid M_1 ja M_2 on uue kujundi M osad ja igaüks nendest on uue kujundi ja teise antud kujundi *vahe*: $M_1 = M - M_2$ ja $M_2 = M - M_1$.

Selge on: 1) et kahe kujundi summal väga mitmesugune kuju võib olla, mis oleneb antud kujundite kujust ja sellest kohast, kus nad teineteisega liituvad: 2) et kujundite summa perimeeter on vähem, kui antud kujundite perimeetrite summa, sest ühised osad kaovad ära.

245. Pinnasuuruse mõiste. Kujundi pinnasuurus (pindala on „omapärane" suurus, suurus „*sui generis*".

Pinnasuuruse mõetmise aluseks võtame järgmised põhilaused:

I. Kongruentsete kujundite pinnad on isekeskis ühesuurused.

II. Kahe kujundi summa pind on nende kujundite pindade summa.

Neist põhilausetest järgneb:

1) *Kujundi pind on suurem kui tema osa pind.*

2) *Kahe hulknurga pinnad on ühesuurused, kui neid h-nurki on võimalik lahutada ühepaljusteks vastavalt kongruentseteks kolmnurkadeks. Niisuguseid h-rki nim. lahutusvôrdseteks* (zerlegungsgleich).

3) *Kahe hulknurga pinnad on ühesuurused, kui me saame lahutusvôrdsed h-rgad selle läbi, et me kummagile h-rgale juurde lisame lahutusvôrdsed h-rgad. Niisuguseid h-rki nim. täiendusvôrdseteks* (inhaltsgleich).

4) *Kui kahe kujundi pinnad eraldi niisama suured on kui kolmanda kujundi pind, siis on nad isekeskis ühesuurused.*

Sellest selgub, et ka mittekongruentsetel kujunditel võivad ühesuurused pinnad olla.

Kujundid, mille pinnad on võrdsed, nim. *ühesuurusteks* (võrdseteks).

246. Pinna üksuseks vôetakse niisuguse ruudu pind, mille külg on joonüksus, näit. ruutmeeter, ruutjalg jne.

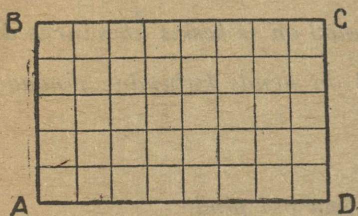
Arv, mis kujundi pinna mõetmise tagajärjena ilmub, on selle pinna *mõetarv*.

Pindade ja nende mõetarvude kohta võtame põhilausena tõestamata vastu: „*Ühesuurustele pindadele vastavad nende pindade ühesuurused mõetarvud*" ja ümberpöördult: „*ühesuurustele pindade môetarvudele vastavad ühesuurused pinnad*".

[*Tõestus* on olemas: D. Hilbert — Grundlagen d. Geometrie, Kap. IV].

Kujundi pinda môeta tähendab teada saama mitu teist, üksuseks võetud pinda temas olemas on ehk kui suureks osaks ta on üksuseks vôetud pinnast.

247. Teoreem. **Täisnelinurga pinna môetarv on tema aluse ja kõrguse mõetarvude kasvatis, kui alus ja kõrgus on mõedetud ruutüksusele vastavates joonüksustes.**



Oletus: Olgu alus AD=a meetr. ja kõrgus AB=h meetr. ja pind Q ruutm.

Väide: $Q = a.h.$

Tôestus: Esineda võib 3 juhust.

I-ne juhus: Arvud a ja h on täisarvud (näit. $a = 8$, $h = 5$). Jaotame kõrguse AB meetriteks, neid saab h. Läbi jaotuspunktide tõmbame paralleljooned alusele AD. Sellega jaotame täisnelinurga ABCD h ribadeks, mille laius on 1 m. Siis jaotame aluse AD meetriteks; neid saab a. Läbi jaotuspunktide tõmbame paralleeljooned kõrgusele AB. Sellega jaotame iga riba ruutudeks, nimelt ruutmeetriteks. Igas ribas on a ruutm.; täisnelinurgas on h riba; sellega on täisnelinurgas h kord a ruutm. ehk (ah) ruutm. Järjelikult on $Q = ah$.

II-ne juhus: Arvud a ja h on murrud. Olgu $a = \frac{m}{n}$ ja $h = \frac{p}{q}$ $\left(\text{näit. } a = \frac{9}{5},\ k = \frac{7}{4}\right)$. Paneme need murrud ühise nimetaja alla: $a = \frac{mq}{nq}$ $\left(= \frac{36}{20}\right)$ ja $h = \frac{np}{nq}$ $\left(= \frac{35}{20}\right)$.

Võtame nüüd abiks uued mõetüksused. Uueks joonüksuseks võtame $\frac{1}{nq}$ — kku $\left(\frac{1}{20}\right)$ endisest joonüksusest, meetrist; temale vastavaid uusi ruutüksusi endises ruutüksuses, ruutmeetris, on siis (nq. nq.) (ehk 20. 20).

Alust, kõrgust ja pinda uutes üksustes mõetes saame nendele uued mõetarvud, mis on täisarvud, nimelt: $a_1 = mq$, $h_1 = np$ ja järjelikult, I-se juhuse järele, $Q_1 = mq.\ np$.

Endiste mõetüksuste peale üle minnes leiame:

$$Q = \frac{Q_1}{nq\,.\,nq} = \frac{mq\,.\,np}{nq\,.\,nq} = \frac{mq}{nq}\,.\,\frac{np}{nq} = \frac{m}{n}\,.\,\frac{n}{q} = ah.$$

Järjel. $Q = a\,.\,h$

III-as juhus: Arvud a ja h on irratsionaalsed.

Olgu $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$ arvu a ligikauds. väärtused; ja $\frac{p}{n}$ ja $\frac{p+1}{n}$ arvu h ligikauds. väärtused.

Vastaku neile aluse ligikaudsed väärtused AG ja AL ja kõrguse ligikauds. väärtused AE ja AK, millele jällegi vastavad täisnelinurgad AEFG ja AKIL oma pindadega.

Joonestusest on näha, et pind AEFG < pind ABCD < pind AKIL. Mida peenemalt me alust ja kõrgust mõedame, seda vähemaks läheb vahe pinna AKIL ja pinna AEFG vahel ja seda vahet võib nii väikeseks teha kui iganes soovitav; s. t. see vahe on lvs. Et pind ABCD see juures ei muutu, siis on pind ABCD piiriks pindadele AEFG ja AKIL. [225]. Sedasama võime siis ka pindade mõetarvudest ütelda:

$$\lim Q_{AEFG} = Q_{ABCD} = \lim Q_{AKIL},$$

ehk $\lim\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n}\right) = Q_{ABCD} = \lim\left(\frac{m+1}{n} \cdot \frac{p+1}{n}\right)$ [kus Q tähendab indeksiga ära näidatud pinna mõetarvu];

Algebras nimetatakse kahe irratsionaalse arvu kasvatiseks seda piiri, milleks saada püüavad nende irratsioonaalsete arvude vastavate ligikaudsete väärtuste kasvatised, nii et $\lim\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n}\right) = ah = \lim\left(\frac{m+1}{n} \cdot \frac{p+1}{n}\right)$. [Võrdle § 232, märkus.]

Et kasvatistel $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n}$ ja $\frac{m+1}{n} \cdot \frac{p+1}{n}$ üksainus ühine piir võib olla, siis on pinna ABCD otsitav mõetarv $Q_{ABCD} = ah$, ehk

$$Q = ah.$$

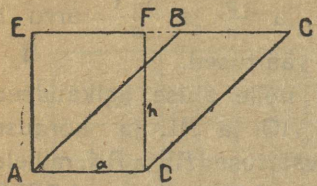
Märkus. Seda teoreemi loetakse lühemalt, ehk küll mitte täiesti õigelt nii: *Täisnelinurga pind on tema aluse ja kõrguse kasvatis:*" Ka edaspidi tarvitame niisuguseid lühemaid, ehk küll mitte täpipealselt õigeid kõnekäänusid, selle juures ikka joonte ja pindade all nende mõetarvusid mõistes.

1-ne järeldus. Ruudu pind on tema külje ruutarv.

2-ne järeldus. Täis nelinurkade pinnad on proportsionaalsed oma kõrgustele, kui neil ühepikkused alused on, ja oma alustele, kui neil võrdsed kõrgused on.

Tõestus: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a \cdot h_1}{a \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$ ja $\frac{Q_3}{Q_4} = \frac{a_3 \cdot h}{a_4 \cdot h} = \frac{a_3}{a_4}$.

248. Teoreem. **Parallelogrammi pind on tema aluse ja kõrguse kasvatis:**



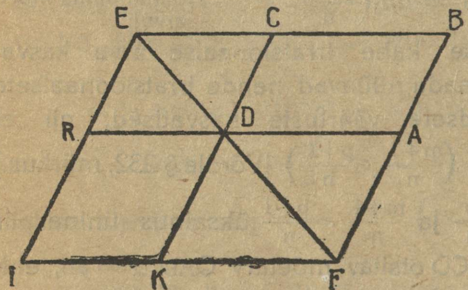
Tõestus: Tõmbame alusele tema otsapunktidest perpendikulaarid kuni lõikumiseni vastasküljega ehk selle pikendusega. Siis saame täis nelinurga AEFD, millel on p-grammiga ABCD ühine alus AD = a ja kõrgus DF = h, ja $\triangle AEB \cong \triangle DFC$ [k.k.l.t.].

$$\left.\begin{array}{l} Q_{ABCD} + Q_{AEB} = Q_{AECD}; \\ Q_{AEFD} + Q_{DFC} = Q_{AECD} \end{array}\right\}$$ Järj. ABCD pind on täiendusvõrdne AEFD pinnale.

$$Q_{ABCD} = Q_{AEFD} = a \, . \, h. \qquad Q = a\,h.$$

Järeldus: *Võrdsete aluste ja kõrgustega parallelogrammid on ühesuurused.*

Ülesanne. Parallelogramm muuta võrdseks täis nelinurgaks.



249. Ülesanne. Antud p-gramm muuta temaga ühesuuruseks p-grammiks, millel on antud alus a.

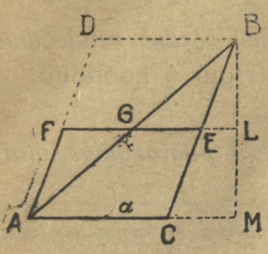
Lahendamine: Pikendame küljed CB, AD, BA ja CD; BC ja AD pikenduse peale asetame CE = a ja DR = a. Tõmbame ER ja pikendame teda. Läbi E ja D tõmbame sirgjoone, mis lõikab BA pikendust punktis F. Läbi F tõmbame paralleeljoone AD—le; ta lõikab CD pikendust punktis K ja ER pikendust punktis I.

RIKD on otsitav. Tõestagu õpilased!

250. Teoreem. **Kolmnurga pind on pool tema aluse kõrguse kasvatisest.**

Tõestus: Tõmbame BD ∥ AC ja AD ∥ BC.

Siis on ADBC — par-gramm, $\triangle$ ADB $\cong$ $\triangle$ ACB ja



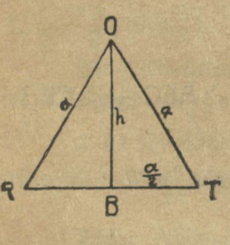
$Q_{ABC} = Q_{ABD} = \frac{1}{2} Q_{ADBC} = \frac{1}{2} ah.$

Ehk: $CE = \frac{1}{2} CB$, $LM = \frac{1}{2} BM$, $EF \parallel CA$, $AF \parallel EC$, järjel. $\triangle AFG \cong \triangle GBE$. $\triangle ABC$ pind on lahutusvõrdne $\# AFEC$. Seepärast: $Q_{ABC} = Q_{AFEC} = AC \,.\, LM = a \,.\, \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} ah.$

1-ne *Järeldus: Võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega $\triangle$-gad on ühesuurused.*

2-ne *järeldus. Ühise alusega ühesuuruste $\triangle$-ade tippude geomeetriliseks kohaks on kaks alusele paralleelset joont, mis alusest ühe $\triangle$-ga kõrguse kaugusel on.*

3-as *järeldus. Täisnurkse $\triangle$-ga pind on pool tema kateetide kasvatisest.*



4-jas *järeldus. Võrdkülgse $\triangle$-ga pind on $\frac{1}{4}$ tema külje ruutarvu kasvatisest $\sqrt{3}$-ga.*
Kui $RO = OT = RT = a$ ja $OB \perp RT$, siis on $RB = \frac{a}{2}$ ja $OB = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ [211]. $Q = \frac{1}{2} ah = \frac{a}{2} \,.\, \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}.$

5-es *järeldus. $\triangle$-ga pind tema kolme külje kaudu väljaarvatud on ruutjuur kasvatisest, mille teguriteks on: poolperimeeter, poolperimeeter ilma ühe, poolperimeeter ilma teise ja poolperimeeter ilma kolmanda küljeta.* Tõepoolest, kui me valemisse $Q = \frac{1}{2} ah_a$ paneme h_a asemele tema väärtuse § 206 siis leiame

$$Q = \frac{1}{2} a \,.\, \frac{2}{a}\sqrt{p.\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \quad \text{ehk}$$

$$Q = \sqrt{p.\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

6-es *järeldus. Perpendikulaarsete diagonaalidega nelinurga*, järjel. ka rombi, *pind on pool tema diagonaalide kasvatisest.* Tõestagu õpilased!

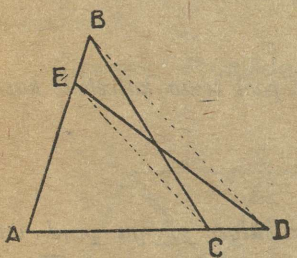
7-es *järeldus. Kahe △-ga pindade vahekord võrdub nende aluse ja kõrguse kasvatiste vahekorrale,* sest tegur $\frac{1}{2}$ koondub.

251. Ülesanded. *1) △ muuta võrdseks p-grammiks, millel seesama a) alus b) kõrgus — on.*

2) P-gramm muuta võrdseks △-gaks, millel seesama a) alus, b) kõrgus — on.

3) △ muuta võrdseks täisnelinurgaks, millel seesama a) alus, b) kõrgus on.

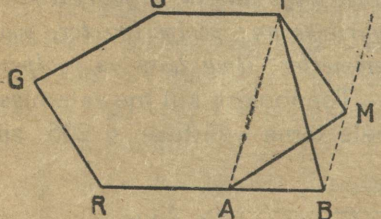
4) △ muuta võrdseks △-gaks, millel antud alus a on.



Lahend. Aluse AC peale asetame uue aluse AD = a, D ühendame B-ga ja läbi C tõmbame BD-le paralleeljoone, mis lõikab AB-d punktis E. △ AED on otsitav.

Tõestus: △ AED = △ AEC + △ CED = △ AEC + △ CEB = = △ ABC; sest △ CED = △ CEB.

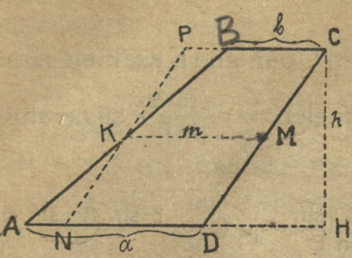
5) Hulknurk muuta võrdseks hulknurgaks, millel külgi ühe võrra vähem on.



Lahend. Ühendame A ja T ja läbi M tõmbame paralleeljoone AT-le: see joon lõikab RA pikendust punktis B. BRGOT = MARGOT, sest △ BAT = △ MAT.

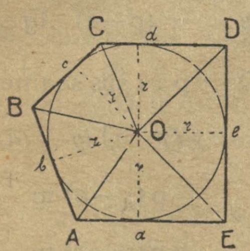
Märkus. Seda viisi võib h-rka muuta võrdseks △-gaks külgede arvu ikka ühe võrra vähendades. Saadud △-ga võime muuta täisnelinurgaks.

252. Teoreem. **Trapeetsi pind on tema keskjoone ja kõrguse ehk aluste poolsumma ja kõrguse kasvatis.**



Tõestus: Olgu $AK = KB$*), $DM = MC$ ja $NP \parallel DC$. Siis on $\triangle AKN \cong \triangle BPK$ ja trapeets $ABCD$ on lahutusvõrdne $\#$-ile $NPCD$. Sellega on $Q_{ABCD} = Q_{NPCD} = ND.CH = KM.CH$ ehk $Q_{ABCD} = m.h = \frac{a+b}{2}h$ [85].

253. Teoreem. **Ümberkujundatud hulknurga pind on tema poolperimeetri ja ringi raadiuse kasvatis.**



Tõestus: Ühendame h-rga tipud ja riivaspunktid tsentriga; siis jaguneb h-rk $\triangle$-kadeks, mille alusteks on h-rga küljed ja kõrgusteks ringi raadiused. Siis leiame:

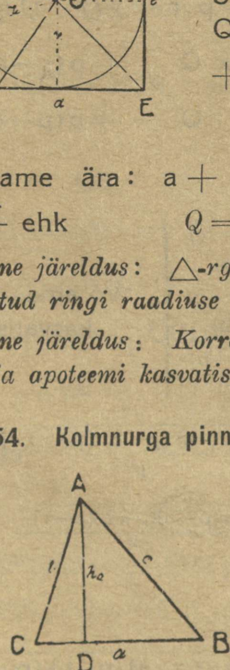
$$Q_{ABCDE} = Q_{AOB} + Q_{BOC} + Q_{COD} + Q_{DOC} + Q_{EOA} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} + \frac{er}{2} = \frac{(a+b+c+d+e).r}{2}$$

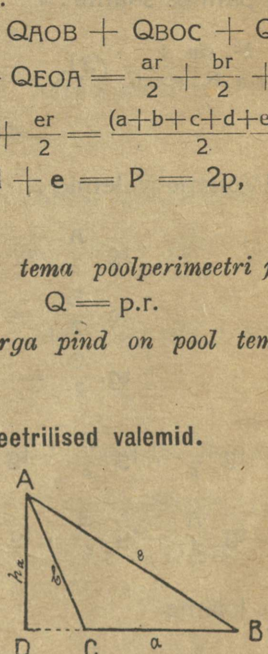
Tähendame ära: $a + b + c + d + e = P = 2p$, siis on $Q = \frac{P.r}{2}$ ehk $Q = p.r.$

1-ne järeldus: *$\triangle$-rga pind on tema poolperimeetri ja sissekujundatud ringi raadiuse kasvatis.* $Q = p.r.$

2-ne järeldus: *Korrapärase h-rga pind on pool tema perimeetri ja apoteemi kasvatisest.*

254. Kolmnurga pinna trigonomeetrilised valemid.





I. Võtame valemi: $Q = \frac{1}{2} a h_a$.

$\triangle$-gast ACD, kus $AD \perp BC$ leiame:

$h_a = b \sin C$. või . . . . $h = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - C) = b \sin C$.

*) Tipp B on P ja C vahel; joonestuse peal eksikombel välja jäänud.

Järjel. $Q = \frac{1}{2} ab \sin C$. (1). Kolmnurga pind on pool tema kahe külje ja nende vahelnurga sinuse kasvatisest.

II. Kui valemis $Q = \frac{1}{2} ab \sin C$ paneme b asemele tema väärtuse valemist $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, nimelt $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, siis saame:

$$Q = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A} \quad (2).$$

Analoogia põhjal leiame $Q = \frac{b^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin B}$ ja $Q = \frac{c^2 \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}$.

III. Võtame valemi $Q = \frac{b^2 \sin A . \sin C}{2 \sin B}$.

Et $h_a = b \sin C$, siis on $b = \frac{h_a}{\sin C}$.

Seda b väärtust võetud valemis b asemele pannes saame:

$$Q = \frac{h^2_a \sin A}{2 \sin B \cdot \sin C} \quad (3).$$

IV. Võtame valemi $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ [199].

Siit leiame: $r = (p-a) \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$

Et $Q = p \cdot r$ siis saame:

$$Q = p \cdot r = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \quad (4).$$

ehk $Q = p(p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}$

$Q = p(p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$

V. Võtame valemid:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p.(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p.(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p.(p-c)}} \end{aligned}\right\}$$

Võtame nende kasvatise:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}} \text{ ehk}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}$$

Siit leiame

$$p^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

ehk $Q = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ (5).

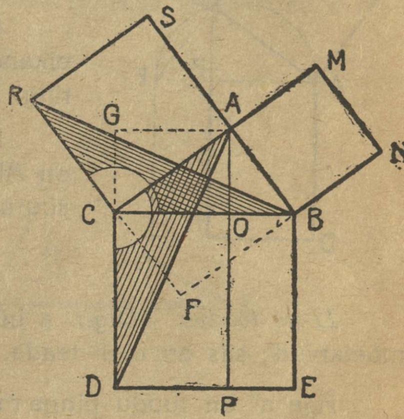
255. Püthogorase *) teoreem. **Ruudu pind, mille küljeks on hüpoteenus, on niisama suur kui nende ruutude pindade summa, mille külgedeks on kateedid.**

Oletus: $\angle CAB = 90^0$; AR, AN ja BD on ruudud; (järjel. CAM ja BAS on sirgjooned).

Väide:

BCDE pind $\doteq$ ACRS pind + + ABNM pind.

Tõestus: Tõmbame AP $\perp$ DE, ühendame sirgjoonte abil B ja R, A ja D ja vaatleme $\triangle$-rki ACD ja BCR.



$\angle$ ACD = BCR, sest kumbki seisab koos täisnurgast ja $\angle$ gast ACB;

AC = CR

CD = CB

$\triangle ACD \cong \triangle BCR$.

$\triangle$ ACD pind $= \frac{1}{2}$ OCDP pind

$(= \frac{1}{2}$ CD . AG)

$\triangle$ BCR pind $= \frac{1}{2}$ ACRS pind

$(= \frac{1}{2} \cdot$ CR . BF)

$\frac{1}{2}$ OCDP pind $= \frac{1}{2}$ACRS pind

ehk OCDB pind = ACRS pind.

Selsamal teel leiame:

OBEP pind = ABNM pind.

Kui meie nüüd liidame:

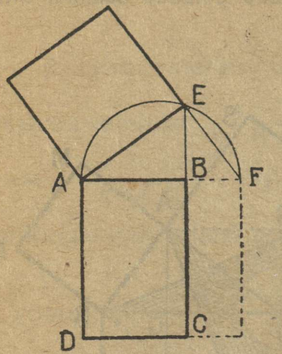
$\left.\begin{array}{l}\text{OCDP pind} = \text{ACRS pind}\\ \text{OBEP pind} = \text{ABNM pind}\end{array}\right\}$ siis saame:

BCDE pind = ACRS pind + + ABNM pind.

Ülesanne: *Täisnelinurk muuta ühesuuruseks ruuduks.*

---

*) Greeka matemaatik ja filosoof, elas a. 550 ümber e. Kr.



Lahend. Pikendame lühemat külge AB-d ja asetame tema peale pikema külje $AF = AD$.

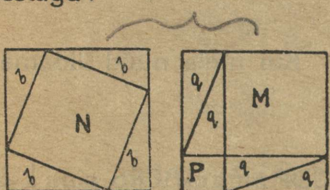
AF üle tõmbame poolringi ja pikendame CB—d kuni ta lõikab poolringi punktis E.

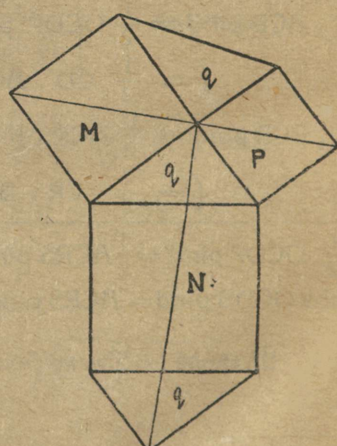
Punkti E ühendame A-ga. Siis on AE üle konstrueeritud ruut ühesuurune antud täisnelinurgaga.

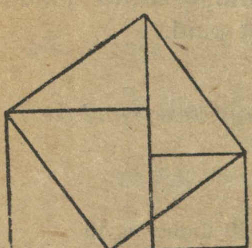
II-ne tõestus. Olgu a hüpotenuusi ja b ja c kateetide mõetarvud; siis on meil teada, et $a^2 = b^2 + c^2$. [183.]

Aga a^2 on ruudu pinna mõetarv, mille küljeks on hüpoteenus a ja b^2 ja c^2 on ruutude pindade mõetarvud, mille külgedeks on kateedid b ja c. Et ühesuurustele pindade mõetarvudele vastavad ühesuurused pinnad [246], siis on teoreem sellega tõestatud.

Püthagorase teoreemil on väga palju tõestusi. Toome mõned joonestused, mille järele õpilased ise seda teoreemi tõestagu!

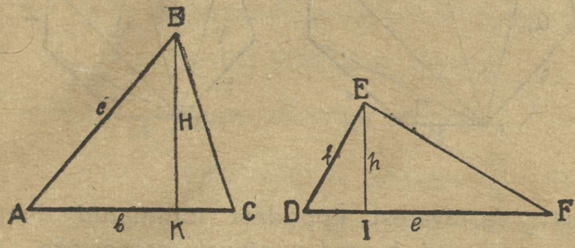






Kolmnurkade ja sarnaste hulknurkade pindade vahekord.

256. Teoreem. Kui kaks △-a ühte sünnivad ühe nurga poolest, siis võrdub nende pindade vahekord võrdseid nurki piiravate külgede kasvatiste vahekorrale.



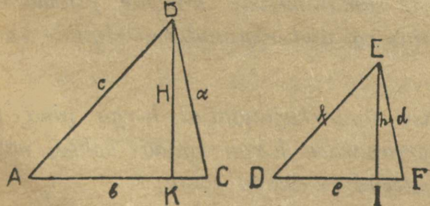
Oletus: $\angle A = \angle D$

Väide: $\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{b.c}{e.f}$

Tõestus: Teada on [250,7], et $\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{b.H}{e.h}$ ehk $\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{b}{e} \cdot \frac{H}{h}$.
Et $\angle A = \angle D$ ja $\angle BKA = \angle EID$ $(= 90^0)$, siis on $\triangle BAK \sim \triangle EDI$.
Seepärast on ka $\frac{H}{h} = \frac{c}{f}$ ja me leiame: $\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} = \frac{bc}{ef}$.

Teine tõestus: $\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{\frac{1}{2} bc \sin A}{\frac{1}{2} ef \sin D} = \frac{bc}{ef}$, sest et $\angle A = \angle D$ ja $\sin A = \sin D$.

257. Teoreem. Sarnaste △-kade pinnad on proportsionaalsed vastavate külgede ruutarvudele.



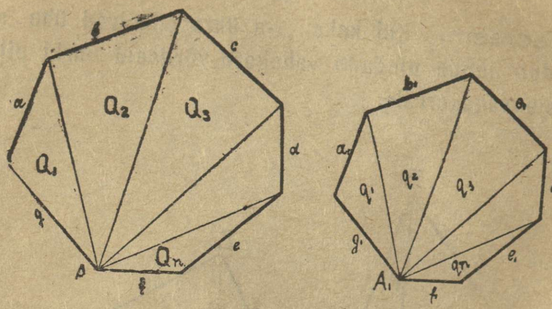
Tõestus: Sarnastes △-kades on vastavad kõrgused proportsionaalsed vastavatele külgedele:

$$\frac{H}{h} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Seepärast leiame:

$$\frac{Q_{ABC}}{Q_{DEF}} = \frac{b.H}{e.h} = \frac{b}{e} \cdot \frac{H}{h} = \frac{b}{e} \cdot \frac{b}{e} = \left(\frac{b}{e}\right)^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2 = \left(\frac{c}{f}\right)^2 = \frac{b^2}{e^2} = \frac{a^2}{d^2} = \frac{c^2}{f^2}.$$

258. Teoreem. **Sarnaste hulknurkade pinnad on proportsionaalsed vastavate külgede ruutarvudele.**



Tõestus: Vastavatest tippudest tõmmatud diagonaalide abil jaotame sarnased h-rgad vastavalt sarnasteks △-kadeks. [173, järeld.]. Nende △-kade pinnad on proportsionaalsed vastavate külgede ruutarvudele [257]:

$$\frac{Q_1}{q_1}=\frac{a^2}{a_1^2};\quad \frac{Q^2}{q_2}=\frac{b^2}{b_1^2};\quad \frac{Q_3}{q_3}=\frac{c^2}{c_1^2};\ \ldots\ldots\ \frac{Q_n}{q_n}=\frac{f^2}{f_1^2}.$$

Sarnastes h-rkades on aga vastavad küljed proportsionaalsed; s.t.

$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\ldots\ldots\frac{f}{f_1}$; järjelikult on ka $\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=\frac{c^2}{c_1^2}=\ldots\ldots=\frac{f^2}{f_1^2}$

Sellest järgneb aga, et $\frac{Q_1}{q_1}=\frac{Q_2}{q_2}=\frac{Q_3}{q_3}=\ldots\ldots=\frac{Q_n}{q_n}=\frac{a^2}{a_1^2}.$

Võrdsete vahekordade reas on eesliigete summa tagaliigete summa kohta nagu iga eesliige oma tagaliikme kohta.

Järjel. leiame: $\frac{Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\ldots+Q_n}{q_1+q_2+q_3+\ldots\ldots+q_n}=\frac{a^2}{a_1^2}$, ehk $\frac{Q}{q}=\frac{a^2}{a_1^2}.$

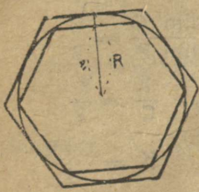
1-ne järeld.: *Korrapäraste samanimeliste h-rkade pinnad on proportsionaalsed nende apoteemide või ümberkujundatud ringide raadiuste ruutarvudele.*

2-ne järeld.: *Korrapärase ümberkujundatud h-rga pind on samanimelise sissekujundatud korrapärase h-rga pinna kohta nagu (ringi) raadiuse ruutarv on apoteemi ruutarvu kohta.*

Tõestade teoreem: *Kui täisnurkse △-rga külgede üle konstrueerida sarnased h-rgad, siis on hüpotenuusi üle konstrueeritud h-rga pind niisama suur kui kateetide üle konstrueeritud h-rkade pindade summa.*

Sõõri pind.

259. Teoreem. **Korrapäraste samanimeliste ümberkujundatud ja sissekujundatud h-rkade pindade vahe on lõpmata väike suurus, kui h-rkade külgede arvu piiramatalt kahendada.**



Tõestus: Korrap. ümberkuj. h-rga pind Q on samanimelise sissekuj. h-rga pinna q kohta, nagu raadiuse ruutarv R^2 on apoteemi ruutarvu r^2 kohta [258, 2-ne järeld.]; $\frac{Q}{q} = \frac{R^2}{r^2}.$

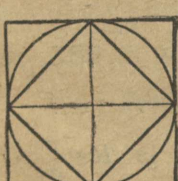
Võtame tuletatud proports.: $\frac{Q-q}{Q} = \frac{R^2-r^2}{R^2}.$

Siit leiame: $Q-q = \frac{Q}{R^2} \cdot (R+r) \cdot (R-r).$

Kui h-rkade külgede arvu piiramatalt kahendada, siis on R ja R^2 jäädavad suurused, Q ja $R+r$ muutuvad piiratud suurused; sellega on ka $\frac{Q}{R^2} \cdot (R+r)$ piiratud suurus. Aga $R-r$ on siis lvs. [238]. Järjel. on § 215 järele $\left[\frac{Q}{R^2} \cdot (R+r)\right] \cdot (R-r)$—lvs.

Sellega on ka siis $Q-q$ lõpmata väike suurus.

260. Teoreem. **Sõõri pind on korrapäraste samanimeliste ümberkuj. ja sissekuj. h-rkade pindade piir, kui h-rkade külgede arvu piiramatalt kahendada.**

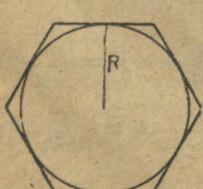


Tõestus: Silmnähtav on, et sõõri pind K on osa ümberkuj. h-rga pinnast Q ja sissekuj. h-rga pind q on osa sõõri pinnast; seepärast on: $Q > K > q.$

Antud tingimistel on tõest. [259]: $Q-q = $ lvs.

$\lim Q = K = \lim q$ [225]

261. Teoreem. **Sõõri pind on pool ringi pikkuse ja raadiuse kasvatisest, ehk: sõõri pind on arvu π ja raadiuse ruutarvu kasvatis.**



Tõestus: Ümberkujund. korrapär. h-rga pind on pool tema perimeetri ja raadiuse kasvatisest $Q = \frac{P \cdot R}{2}$

Siit leiame: $\frac{Q}{P} = \frac{R}{2}.$

See vahekord jääb püsima ka siis, kui me h-rga külgede arvu piiramatalt kahendame ja kui sellepärast Q ja P muutuvateks suurusteks saavad, kuna $\frac{R}{2}$ muutmata jääb.

Seepärast võime siin tarvitada teoreemi § 224 ja kirjutada: $\frac{\lim Q}{\lim P} = \frac{R}{2}$.

Aga lim Q = K [260] ja lim P = C [240]; järjel. $\frac{K}{C} = \frac{R}{2}$

Siit leiame: $K = \frac{C \cdot R}{2}$.

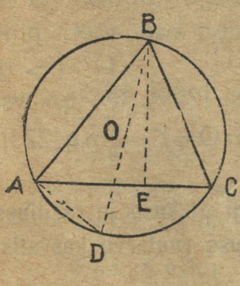
Et $C = 2\pi R$, siis on $K = \frac{2\pi R \cdot R}{2}$, ehk $K = \pi R^2$.

Järeldus: *Sõõride pinnad on proportsionaalsed oma raadiuste ruutarvudele.*

Ülesanne: Leida sektori ja segmenti pind, millele vastav kaar on n^0.

Mõned arvulised olenevused kolmnurgas ja nelinurgas.

262. Ülesanne. Kolmnurga ümber kujundatud ringi raadius leida.



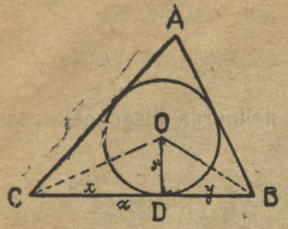
Lahend. I. $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, sest $\angle A = \angle E$, $\angle D = \angle C$.

Järjel. $\frac{BD}{BC} = \frac{BA}{BE}$, ehk $\frac{2R}{a} = \frac{c}{h_b}$ ja $R = \frac{ac}{2h_b}$ (1).

II. Valemis $R = \frac{ac}{2h_b}$ kasvatades lugejat ja nimetajat b-ga saame: $R = \frac{abc}{2bh_b}$.

Et aga $\frac{1}{2}\, b.h_b = Q$, ehk $2bh_b = 4Q$, siis on $R = \frac{abc}{4Q}$ (2).

III. Enne [201] oli meil juba teada: $R = \frac{a}{2 \sin A}$ (3).



263. Ülesanne. Kolmnurga sisse kujundatud ringi raadius leida.

Lahend. I. Võrdusest [253,,1] $Q=p.r$ leiame: $r=\frac{Q}{p}$. (1)

II. „ [199] $Tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$ „ : $r=(p-a)\,Tg\,\frac{A}{2}$ (2).

III. △-gast ODC leiame: $x=r\,ctg\,\frac{C}{2}$

△-gast ODB „ : $y=r\,ctg\,\frac{B}{2}$ +

$$x+y=a=r.\left(ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{B}{2}\right)$$

$$r=\frac{a}{ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{B}{2}}$$

$$ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{B}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}\text{. ehk}$$

$$ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{B}{2}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}\quad \text{Järj. } r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\ (3).$$

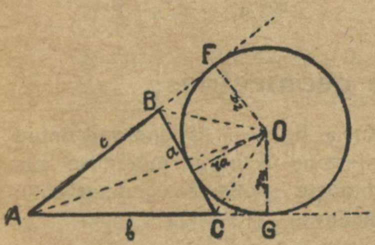
264. Kolmenurga külje a külge kujundatud ringi raadius leida.

Lahend. I. $Q_{ABC}=Q_{AOB}+Q_{AOC}-Q_{BOC}$

$$Q=\frac{c.r_a}{2}+\frac{b.r_a}{2}-\frac{a.r_a}{2}$$

$$Q=r_a.\frac{c+b-a}{2}=r_a.\frac{2p-2a}{2}$$

$$Q=r_a.(p-a).$$



$r_a=\frac{Q}{p-a}$ (1) $r_b=\frac{Q}{p-b}$; $r_c=\frac{Q}{p-c}$

II. $OG=AG.tg\,OAG$; $AG=p$, $\angle OAG=\frac{A}{2}$ [132, 7b—f].

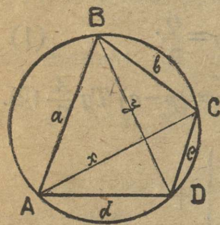
Järjel. $r_a=p.tg\frac{A}{2}$; (2) $r_b=p.tg\frac{B}{2}$; $r_c=p.tg\frac{C}{2}$.

Järeldus: $\frac{1}{a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{Q}+\frac{p-b}{Q}+\frac{p-c}{Q}=\frac{3p-(a+b+c)}{Q}=\frac{p}{Q}=\frac{1}{r}$

s. t. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

265. Ülesanne. Leida sissekujundatud nelinurga diagonaalid, kui küljed on antud.

Lahend: Tarvitame valemit $R=\frac{abc}{4Q}$; kust $Q=\frac{abc}{4R}$;



$Q_{ABC}+Q_{ADC}=Q_{ABD}+Q_{CBD}\ (=Q_{ABCD})$.

$\frac{abx}{4R}+\frac{cdx}{4R}=\frac{ady}{4R}+\frac{bcy}{4R}$. Järjel.

$x\,(ab+cd)=y\,(ad+bc)$. Siit leiame

$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.\\ \text{Ptolomäuse teor. järele [205]: } xy=ac+bd.\end{array}\right\}$ Siit leiame kergesti x ja y

266. Mollweide valemid. Valemist $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ leiame

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad \frac{a-b}{\sin A-\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Algebra tarvitamine geomeetrias.

267. Avalduste konstrueerimine. Kui a, b, c . . . tähendavad antud joonlõika, on nende môetarvud ühe ja sellesama üksusega môetmisel, siis on nad nimega arvud ja järgmiste algebraliste avalduste geomeetriline môte ja konstrueerimine on kergesti arusaadav:

I. $a+b$ on kahe joonlõigu a ja b summa, on joonlõik $x=a+b$.

II. $a-b$ „ „ „ a ja b vahe „ „ $x=a-b$.

III. $n.a$ on a mitmekordne, kui n on nimetu arv: $x=n.a$.

IV. $\frac{a}{n}$ on a osa, kui n on nimetu arv $x=\frac{a}{n}$.

V. $\frac{ab}{c}$ võib ka joonlõik olla, sest kahe joonlõigu vahekord $\frac{a}{c}$ on nimetu arv. Olgu $\frac{ab}{c} = x$, siis on $c : a = b : x$ ja x on neljas proportsionaalne a-le, b-le, ja c-le. Teda konstrueeritakse § 148 I. järele.

VI. $\frac{a^2}{b}$ on kolmas proportsionaalne b-le ja a-le, sest kui $\frac{a^2}{b} = x$, siis on $b : a = a : x$; x konstrueeritakse § 193 järele.

VII. $\sqrt{ab}$ on keskmine proportsionaalne a-le ja b-le, sest kui $\sqrt{ab} = x$, siis on $ab = x^2$ ja $a : x = x : b$. x konstrueeritakse § 192 järele.

VIII. $\sqrt{a^2+b^2}$ on täisnurkse $\triangle$-ga hüpotenuus, mille kateedid on a ja b.

IX. $\sqrt{a^2-b^2}$ on täisnurkse $\triangle$-ga kateet, mille hüpotenuus on a ja teine kateet on b.

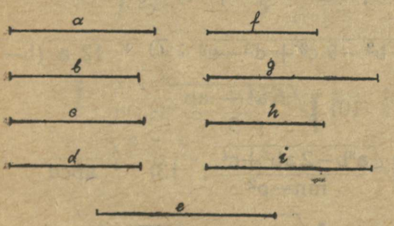
Keerulisemate valemite konstrueerimine mahutatakse nende põhivalemite konstrueerimise alla.

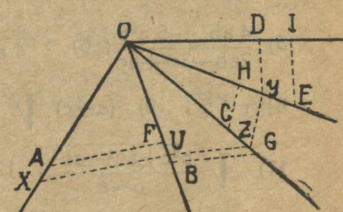
X. Olgu $\frac{abc}{de} = x$. Siis on $x = \frac{a}{d} \cdot \frac{bc}{e} = \frac{a}{b} \cdot y$, kus $y = \frac{bc}{e}$.

Esite konstrueeritakse $y = \frac{bc}{e}$ V järele, siis $x = \frac{ay}{b}$ ka V järele.

Niisama konstrueeritakse $\frac{abcde}{fghi} = \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{i} \cdot e = x$.

1) $\frac{d}{i} \cdot e = y$; 2) $\frac{c}{h} \cdot y = z$; 3) $\frac{b}{g} \cdot z = u$; 4) $\frac{a}{f} \cdot u = x$.





1) $\frac{d}{i} \cdot e = y$; $de = i \cdot y$; $i : d = e : y$; $OI : OD = OE : OY$; $OY = y$.

2) $\frac{c}{h} \cdot y = z$; $c \cdot y = h \cdot z$; $h : y = c : z$; $OH : OY = OC : OZ$; $OZ = z$.

3) $\frac{b}{g} \cdot z = u$; $b \cdot z = g \cdot u$; $g : z = b : u$; $OG : OZ = OB : OU$; $OU = u$.

4) $\frac{a}{f} \cdot u = x$; $a \cdot u = f \cdot x$; $f : u = a : x$; $OF : OU = OA : OX$; $OX = x$.

XI. Kui murru nimetaja on polünoom, siis peame teda monoomiks muutma, tegurid klambrite ette tuues nii, et klambritesse jääks valem, mida põhivalemite järele konstrueerida saab.

$$\frac{2a^2bc + m^2n^2 - 3mb^2c}{5m^3 - 2mnp} = \frac{2a^2bc + m^2n^2 - 3mb^2c}{m^2\left(5m - \frac{2np}{m}\right)}$$

$5m - \frac{2np}{m} = y$ konstrueeritakse III, V ja II järele.

Siis saame $\frac{2a^2bc + m^2n^2 - 3mb^2c}{m^2y} = \frac{2a^2bc}{m^2y} + \frac{n^2}{y} - \frac{3b^2c}{my}$.

Siin on iga liige X järele konstrueeritav; siis I ja II järele x.

XII. $a\sqrt{3} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \, . \, a}$ (VII järele) või $\sqrt{(2a)^2 - a^2}$ (IX järele).

XIII. $\sqrt{a^2+b^2-c^2} = x$. Olgu $a^2 + b^2 = y^2$; siis konstrueeritakse $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ VIII järele ja pärast $x = \sqrt{y^2 - c^2}$ IX järele.

XIV. $\sqrt{mn - pq} = \sqrt{m\left(n - \frac{pq}{m}\right)} = \sqrt{m(n-y)} = \sqrt{m \, . \, z} = x$.

$\frac{pq}{m} = y$ konstr. V järele $n - y z = $ II j. ja $\sqrt{m \, . \, z} = x$ VII järele.

XV. $\sqrt[4]{m^3b - 3p^2cd} = \sqrt{\sqrt{m^2\left(mb - \frac{3p^2cd}{m^2}\right)}}$

$\sqrt{m\sqrt{bm - \frac{3p^2cd}{m^2}}} = x.$

Siin konstrueeritakse enne $\sqrt{mb - \frac{3P^2dc}{m^2}} = y$ XIV järele ja siis $\sqrt{my} = x$ VII järele.

Märkus. Irratsionaalsetest avaldustest saame konstrueerida ainult neid, mille juurenäitaja on 2 ehk 2-e aste.

Harjutused: 1) $\frac{4}{7}a$; 2) πb*); 3) $\frac{0{,}3ab}{c}$; 4) $\frac{a^2b}{c^2}$;
5) $\frac{4ab^2 - 5a^2b}{2ab - 3c^2 + ac}$; 6) $\sqrt{4a^2 + b^2 - 9c^2 + d^2 - e^2}$; 7) $\sqrt{12a(b-c)}$
8) $r\sqrt{5}$; 9) $(a-c)\sqrt{\frac{a}{b}}$; 10) $\sqrt{\frac{6a^2 - ab}{5}}$;
11) $\sqrt{\frac{b^2c + ac^2 - ab^2}{b-a}}$; 12) $\sqrt{\frac{a^3b - 2ab^3 + c^4}{mn - p^2}}$; 13) $\sqrt[4]{abcd}$
14) $a\sqrt[4]{2}$; 15) $\sqrt[8]{ab^2c^3d^2}$; 16) $\sqrt{2r^2 - \sqrt{4r^4 - m^4}}$.

268. Valemi mõede. Jooned on ühe mõetega suurused, pinnad — 2-e mõetega ja kehad — 3-mõetega suurused [§ 1]. Selle järele on algebralised avaldused 1-e, 2-e, 3-e mõetelised seda mööda, kas nad joonlõika, pindu, või kehasid tähendavad.

Igas terves ühemõetelises algebralises avalduses võib ette tulla üksainus täht, mis joonlõigu mõetarvu — nimega arvu tähendab, teised tegurid võivad ainult nimetu arvud olla, näit. $4a$, $\frac{5}{6}b$, $r\sqrt{2}$, $2\pi r$. Kahe joonlõigu mõetarvu kasvatis ab tähendab juba täisnelinurga pinda, mille küljed — mõeted —

*) ligikaudselt.

on a ja b ja on sellega kahemõeteline, näit. a^2, πr^2, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{2}ab\sqrt{2}$. Kolme joonlõigu mõetarvu kasvatis tähendab keha ruumala. Sellest järgneb:

1) *Terve algebralise avalduse mõede on tema joonlõikusid tähendavate (lineaarsete) tegurite arv [astme näitajate summa].* Räägitakse ka 4-ja ja 5-e jne. mõetelistest avaldustest, aga neil ei ole geomeetrilist tähendust.

2) *Murtud avalduste mõede on tema lugeja ja nimetaja mõedete vahe,* sest avalduses $\frac{a^m}{b^n} = \frac{a^n}{b^n} . a^{m-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n a^{m-n}$ on tegur $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ — nimetu arv. Nimetu arvu mõede loetakse 0-iks.

3) *Radikaali mõete saame, kui me jnurealuse avalduse (radikandi) môete jagame juure näitajale,* sest avalduses $\sqrt[n]{a^p\, b^q\, c^m} =$

$$= \sqrt[n]{a^{m+p+q} \cdot \frac{b^q \cdot c^m}{a^q \cdot a^m}} = a^{\frac{m+p+q}{n}} \sqrt[n]{\frac{b^q \cdot c^m}{a^q \cdot a^m}}$$ on tegur

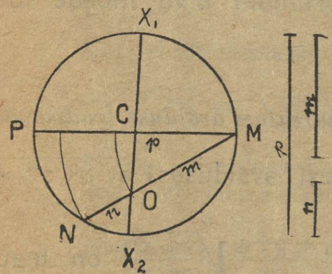
$\sqrt[n]{\frac{b^q\ c^m}{a^q\ a^m}}$ — nimetu arv ja teguri $a^{\frac{m+p+q}{n}}$ mõede on $\frac{m+p+q}{n}$.

269. Valemi homogeensus. Polünoom või ekvatsioon on homogeenne, kui kõigil liikmetel on üks ja seesama mõede. Et algebra tarvitamisel geomeetrias jooned joontega ja pinnad pindadega liidetakse või võrduse märgi abil ühendatakse, või teine teisest lahutatakse, siis peavad kõik selle juures saadud valemid ja ekvatsioonid homogeensed olema. Niisugusteks peavad nad jääma ka pärast teisendamist. Ainult sel korral võib homogeensus hävineda, kui mõni tegurina esinev môetarv üksuseks võetakse, näit. $C = 2\pi R$; kui $R = 1$ siis on $C = 2\pi$. Et homogeensust jälle jalule seada, tuleb 1 peale vaadata, kui mõetarvu peale ehk tema asemele mõni täht, mis siis mõetüksust tähendab, panna neis liikmetes, kus mõede vähem on kui teistes liikmetes. Näit.

$b_{2n} = \frac{b_n}{1+\sqrt{1+(\frac{1}{2}b_n)^2}}$; siin on $r=1$; paneme 1-e asemele r, siis saab valem homogeenseks: $b_{2n} = \frac{r.b_n}{r+\sqrt{r^2+(\frac{1}{2}b_n)^2}}$

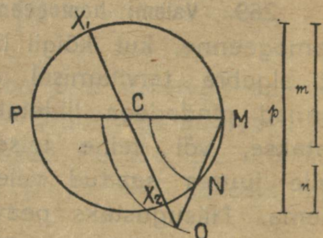
270. Ruutekvatsiooni juurte konstrueerimine. Geomeetriliste ülesannete lahendamisel algebra abil saadavad ruutekvatsioonid on homogeensed; nende üleüldine kuju on $x^2 \pm p \pm mn = 0$, kus m, n, ja p on antud joonlõigud ja x— otsitav. Nende ekvatsioonide juuri võib konstrueerida ettetoodud valemite järele; aga kiiremalt võib neid konstrueerida järgmiselt:

I. Ekvatsiooni $x^2 \pm px + mn = 0$ juurte konstrueerimiseks tõmbame ringi, mille diameetriks on $MP = p$. Selle ringi sisse asetame pingjoonena $MN = m + n$. Läbi punkti O, mis jagab MN osadeks $OM = m$ ja $ON = n$, tõmbame diameetri $X_1 X_2$. Siis on otsitavad juured $OX_1 = x_1$ ja $OX_2 = x_2$. Neid juuri tuleb lugeda positiivseteks, kui p on negatiivne ja negatiivseteks, kui p on positiivne.



Tõestus: $x_1 + x_2 = OX_1 + OX_2 = X_1X_2 = MN = \pm p$.
$x_1 \cdot x_2 = OX_1 \cdot OX_2 = OM \cdot ON = m \cdot n$.

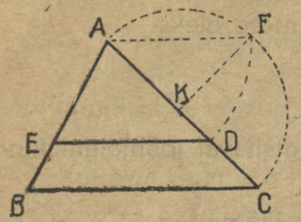
II. Ekvatsiooni $x^2 \pm px - m \cdot n = o$ juurte konstrueerimiseks tõmbame ringi, mille diameetriks on $MP = p$. Selle ringi sisse asetame pingjoonena $MN = m - n$ ja pikendame teda punkti O-ni, nii et siis $OM = m$ ja $ON = n$. Läbi punkti O ja tsentri tõmbame lõikaja OX_2X_1. Siis on otsitavad juured $OX_1 = x_1$ ja $OX_2 = x_2$. Kui p on positiivne, siis tuleb lugeda x_1 negatiivseks ja x_2 — poositiivseks ja ümberpöördult.



Tõestus: absol. väärtus $(x_1 + x_2) =$ abs. x_1 — abs. x_2 = $OX_1 - OX_2 = X_1X_2 = MP = p$; absol. väärtus $(x_1 \cdot x_2) = OX_1 \cdot OX_2 = OM \cdot ON = m.\ n.$

271. Ülesanne. $\triangle$ **pooleks jagada alusele paralleelse sirgjoonega.**

Lahendamine.



Olgu $\triangle$-ga küljed a, b, c. Meie ülesanne on lahendatud, kui me leiame punkti D, mille läbi paralleeljoon tuleb tõmmata, kauguse tipust A. Seepärast olgu $AD = x$. Et ED jagab $\triangle ABC$ pooleks, siis on $Q_{ADE} : Q_{ABC} = 1 : 2$ ehk § 257 põhjal: $x^2 : b^2 = 1 : 2$. Sellest järgneb: $x = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$

Seda avaldust konstrueerime § 267, VII järele: $x = \sqrt{b \cdot \frac{b}{2}}$ või VIII järele $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Selleks poolitame $AC = b$ punktis K, tõmbame AC üle poolringi ja tõmbame $KF \perp AC$. Siis on $AF = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$. Siis asetame AC peale $AD = AF$ ja tõmbame $DE \parallel BC$.

Tõestus: $\triangle AED \sim \triangle ABC$; seepärast $Q_{AED} : Q_{ABC} = AD^2 : AC^2$. Et $AD^2 = AF^2 = AK \cdot AC = \frac{1}{2} AC \cdot AC$, siis on $Q_{AED} : Q_{ABC} = \frac{1}{2} AC^2 : AC^2 = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$.

272. Metoodi seletus. Et konstrueerimise ülesannet algebra abil lahendada, tähendame ära antud joonlõigud tähtedega a, b, c ... ja valime tundmatuteks x, y ... ühe ehk mitu niisugust joonlõiku, mille abil kõige kergem oleks nõutud kujundit leida.

Ülesande tingimustest ja teoreemide põhjal seame tarvilise arvu ekvatsioona kokku, neid lahendame ja saadud juured konstrueerime.

Selle läbi, et me otsitava joonlõigu konstrueerime mitte otsekohe, vaid ekvatsiooni juurena, leitakse sagedasti kergem lahendamise viis, kui puhtgeomeetrilisel teel ja mõnikord saab alles selle läbi lahendamine võimalikuks.

Teine algebra tarvitamise paremus geomeetrias seisab ülesande uurimise kergendamises. Juurena leitud algebralises valemis on olemas tema üleüldsuse pärast mitte ainult kõik lahendused, millel geomeetriline mõte on, vaid ka need, millel geomeetrilist mõtet ei ole, sest ekvatsioonide kokkuseadmisel ei saa me arvesse võtta kõiki tingimusi, millele otsitav joonlõik peaks vastama, et tal geomeetriline mõte oleks.

Niisugused tingimused on:

1) juur peab *reaalne* olema;

2) juur peab *positiivne* olema, kui otsitaval joonlõigul kindlat sihti ei ole;

3) juur peab teatavatesse *piiridesse* jääma.

Kui kindlaks on määratud need tingimused, mille täitmisel leitud valem ettetoodud nõuetele vastab, siis on ka geomeetrilise lahendamise võimaluse tingimused leitud. Ülesande geomeetrilise uurimise asemele astub algebralise valemi uurimine.

Niiviisi on konstrueerimise ülesande lahendamisel algebralisel teel 4 osa:

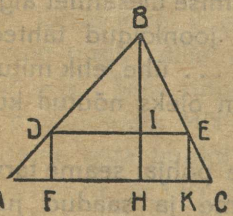
1) *analüüs*: ekvatsioonide kokkuseadmine ja lahendamine;

2) leitud juurte *uurimine*;

3) leitud juurte *konstrueerimine*;

4) *tõestus.*

273. I-ne ülesanne. Antud kolmnurga sisse kujundada täisnelinurk, mille perimeeter on 2 p.



Analüüs: Ülesanne on lahendatud, kui me leiame täisnelinurga külje kauguse IH alusest AC. Seepärast olgu $IH = EK = DF = x$; siis on $ED = p - x$. Olgu $AC = b$, $BH = h$. $\triangle DBE \sim \triangle ABC$; järjel. $ED : CA = BI : BH$, ehk $\frac{p-x}{b} = \frac{h-x}{h}$

Siit leiame: $x = h.\frac{b-p}{b-h}$.

Uurimine: x peab olema 1) reaalne, 2) positiivne, 3) $< h$.

1) x on alati reaalne, sest juure märki ei tulegi ette.

2) Et x positiivne oleks, selleks on tarvis, et $\frac{b-p}{b-h}$ oleks $> o$.

See nõue on täidetud,

kui $b-p > o$ ja ühtlasi $b-h > o$; s. t. kui $b > p$ ja ühtl. $b > h$;
ehk kui $b-p < o$ „ „ $b-h < o$; s. t. „ $b < p$ „ „ $b < h$.

3) Et oleks $x < h$, ehk et oleks $h \cdot \frac{b-p}{b-h} < h$

peab olema $\frac{b-p}{b-h} < 1$ ehk $b-p < b-h$.

Sellest järgneb, et peab olema $p > h$.

Kokkuvõte:

Kui kujundis on võetud $b > h$, siis peame võtma $b > p > h$ . . 1 lah.

" " " " $b < h$, " " " $b < h < p$ . . 1 lah.

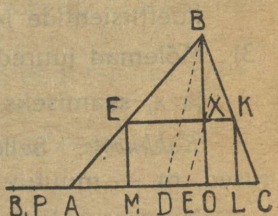
Kui aga võtame $b-p=o$ ja ühtl. $b-h=o$, siis on $b=p=h$ ja $x=h \cdot \frac{o}{o}$; s. t. x saab määramatuks ja igast BH punktist võib läbi tõmmata DE ∥ AC, sest ikka saame $\frac{b-x}{b} = \frac{b-x}{b}$.

Konstrueerimine. Et antud △-gas on $b > h$, siis peab valitama $p > h$ ja $p < b$. Olgu $OP = p$.

$$x = h \cdot \frac{b-p}{b-h}$$

ehk $x \cdot (b-h) = h \cdot (b-p)$

ehk $(b-h) : (b-p) = h : x$.



I-ne konstr. $b-h=d=OD$, sest et $OB_1=b$ ja $B_1D=h$;

II-ne " $b-p=e=OE$, " " $OB_1=b$ ja $B_1E=OP=p$;

III-as " $x=h \cdot \frac{e}{d}=OX$, ehk $d : e=h : x$.

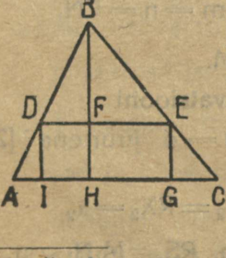
Siit tõmbame läbi punkti XIK*) ∥ AC, IM ⊥ AC ja KL ⊥ AC. IKLM on otsitav täisnelinurk.

Tõestus: $IK : AC = BX : BO$; järj. $IK = \frac{AC.BX}{BO}$ ja $IK + KL =$

$$= \frac{b.(h-x)}{h} + x = b - \frac{bx}{h} + x = b - \frac{(b-h)\,x}{h} = b - \frac{(b-h).h.(b-p)}{h.(b-h)} =$$

$= b - (b-p) = p$.

274. II-ne ülesanne. Antud kolmnurga sisse kujundada täisnelinurk, mille pind on m^2.



Analüüs: Ülesanne on lahendatud, kui meie leiame HF=DI. Sellepärast olgu $DI = HF = x$, $DE = y$, $BH = h$, $AC = b$. Ülesande tingimuste järele on $xy = m^2$; △ DBE ∽ △ ABC; järjel. $\frac{h-x}{h} = \frac{y}{b}$.

*) Joonestuse peal on KX-i pikendus XE, peab olema XI.

Pärast nende ekvatsioonide süsteemi lahendamist leiame

$$x = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h}{b} \cdot m^2}.$$

Uurimine. x peab olema 1) reaalne, 2) poositiivne, 3) $< h$.

1) Et x oleks reaalne, on tarvis, et $\left(\frac{h}{2}\right)^2 > \frac{h}{b} \cdot m^2$ ehk $\frac{bh}{4} \geq m^2$

Järjelikult peab olema $m < \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}}$ ehk $m \leq \frac{1}{2}\sqrt{bh}$.

2) Mõlemad juured on poositiivsed, kui nad aga reaalsed on, sest et $\frac{h}{2} > \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{b}{h} \cdot m^2}$. See on näha ka Vieta teoreemi põhjal saadud ruutekvatsjooni $x^2 - hx + \frac{h}{b} m^2 = o$ koeffitsientide ja vaba liikme märkidest.

3) Mõlemad juured on ka vähemad kui h, sest et $x_1 > x_2$ ja ja x_1 saamiseks liidetakse $\frac{h}{2}$-le juure vähem kui $\frac{h}{2}$.

Kokkuvõte. Selles ülesandes on b ja h — jäädavad suurused, m — muutuv põhisuurus ja x — muutuv järelsuurus.

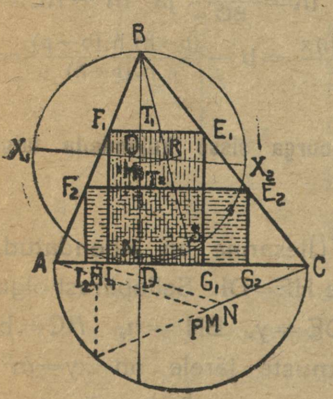
Muutes m katketult $+\infty$ kuni O-ni, näeme, et

1) nii kaua kui $m > \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}}$ .. on juured imaginäärsed...O lahend.

2) kui $m = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}}$ .. $x_1 = x_2 = \frac{h}{2}$... 1 „

(see on m^2 . . . maximum)

3) kui $m < \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}}$ ... $\frac{h}{2} < x_1 < h$ ja $x_2 < \frac{h}{2}$..2 „



Konstrueerimine.

I-ne konstr. $\frac{1}{2}\sqrt{bh} = p = CP$, sest et $CA = b$, $CH = h$.

II-ne konstr. $p > m = CM$.

III-as „ $\frac{h}{b} m = n = CN$, sest et $HN \parallel AM$.

IV-as konstr. ekvatsiooni $x^2 - hx + m \cdot n = o$ juurtena [270]

konstrueerime $DT_1 = RX_1 = x_1$ ja $DT_2 = RX_2 = x_2$ sest et $BO = \frac{BD}{2} = \frac{h}{2}$, $BR = BM_1 = m$, $RS = M_1N_1 = n$.

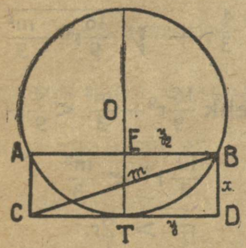
V-es konstr. Nüüd tõmbame

läbi T_1 $E_1F_1 \parallel AC$ ja $F_1I_1 \perp AC$, $E_1G_1 \perp AC$,

läbi T_2 $E_2F_2 \parallel AC$ ja $F_2I_2 \perp AC$, $E_2G_2 \perp AC$.

Tõestus. Et $E_1F_1I_1G_1$ pind $= m^2$ ja $E_2F_2I_2G_2 = m^2$ tõestagu õpilased!

275. III-as ülesanne. Antud sõõris tõmmata pingjoon paralleelselt antud riivajale nii, et see pingjoon, tema otsapunktidest riivajale tõmmatud perpendikulaarid ja riivaja ise sünnitavad täisnelinurga, mille diagonaalil on antud pikkus m.



Analüüs. Ülesanne on lahendatud, kui me leiame ET=AC=BD. Sellepärast olgu $AC = BD = ET = x$ ja $AB = CD = y$; peale selle olgu antud ringi raadius $OT = r$ ja $BC = m$.

Siis leiame: $x^2 + y^2 = m^2$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = x\,(2r - x)$$

Siit leiame ruutekvatsiooni: $3x^2 - 8rx + m^2 = 0$

$$\text{ehk } x^2 - \frac{8}{3}rx + \frac{m^2}{3} = 0,$$

mille juured on: $x = \frac{4}{3}r \pm \sqrt{\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3}}$.

Uurimine. x peab olema I) reaalne, II) poositiivne, ja III) $< 2r$.

I. Et juured oleksid reaalsed, selleks on ainult tarvis, et oleks $\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3} > 0$ ehk $\left(\frac{4r}{3} + \frac{m\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}r - \frac{m}{3}\sqrt{3}\right) > 0$.

Et $\frac{4}{3}r + \frac{m}{3}\sqrt{3}$ on alati > 0, siis on ain. tarvis, et oleks $\frac{4}{3}r - \frac{m}{3}\sqrt{3} > 0$, ehk et oleks $m < \frac{4}{3}r\sqrt{3}$.

Selle järele on võimalik 3 peajuhust:

1) Kui valida $m > \frac{4}{3}r\sqrt{3}$, siis on mõlemad juured imaginäärsed ja ülesandel ei ole lahendusi.

2) Kui valida $m = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$, siis on mõlemad juured reaalsed ja ühesuurused: $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}r$; peale selle on nad mõlemad positiivsed ja vähemad kui 2r. Ülesandel on 1 lahendus. $\frac{4}{3}r\sqrt{3}$ on m — väärtuse maximum.

3) Kui valida $m < \frac{4}{3}r\sqrt{3}$, siis on küll mõlemad juured reaalsed; aga nad peavad olema ka poositiivsed ja $< 2r$. Mõlemad juured on poositiivsed; see on näha esiteks ekvatsiooni märkidest ja teiseks sellest, et võetav $\sqrt{\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3}}$ on vähem kui vähendatav $\frac{4}{3}r$. Kas on nad vähemad kui 2r?

$x_2 = \frac{4}{3}r - \sqrt{\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3}}$ on alati vähem kui 2r. Et

x_1 oleks vähem kui 2r, on tarvis et $\frac{4}{3}r + \sqrt{\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3}}$

oleks $< 2r$. s. t. $\sqrt{\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3}} < \frac{2}{3}r$ ehk $\frac{16}{9}r^2 - \frac{m^2}{3} < \frac{4}{9}r^2$

Siit leiame, et peab olema $\frac{12}{9}r^2 < \frac{m^2}{3}$

ehk „ „ $m > 2r$.

Seepärast, kui me valime

a) $m > 2r$, siis on mõlemad juured vähemad kui 2r. Ülesandel on 2 lahendust.

b) $m = 2r$, siis on $x_1 = 2r$ ja $x_2 = \frac{2}{3}r$. Ülesandel on 1 lah.

c) $m < 2r$, „ „ $x_1 > 2r$ ja $x_2 < 2r$. „ 1 „

Kokkuvõte. Selles ülesandes on r — jäädav suurus, m on muutuv põhisuurus ja x on m-i funktsioon. Muutes m—i katketult $+\infty$-st kuni 0-ni, — negatiivseid väärtusi m-il olla ei või — näeme, et

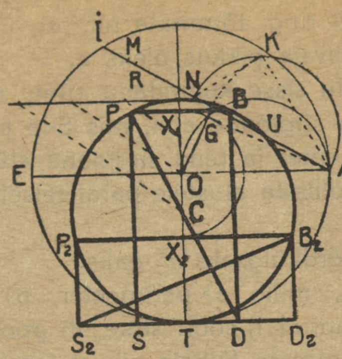
1) niikaua kui $m > \frac{4}{3}r\sqrt{3}$ . . . on juured imaginäärsed . . . 0 lahend.

2) kui $m = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$ . . . . . . $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}r$ . . . . . 2 „ (m max).

3) „ $m < \frac{4}{3}r\sqrt{3}$ ja a) $m > 2r$ . . . $2r > x_1 > \frac{4}{3}r$, $x_2 < \frac{4}{3}r$ . . 2 lah.

b) $m = 2r$ $x_1 = 2r$ $x_2 = \frac{2}{3}r$ . . . 1 „

c) $m < 2r$ $x_1 > 2r$ $x_2 < \frac{2}{3}r$ . . . 1 „



Konstrueerimine. Konstrueerimiseks anname ekvatsiooni juurtele kuju $x=\frac{4}{3}r \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}r\right)^2-\left(\frac{m}{3}\sqrt{3}\right)^2}$

ja valime m nii, et $\frac{4}{3}r\sqrt{3} > m > 2r$.

I-ne konstr. $\frac{4}{3}r = a = OT = OA$ $[OC = \frac{1}{3}r]$.

II-ne „ $\frac{4}{3}r\sqrt{3} = a\sqrt{3} = i = AI$ $[EA = 2a,\ EI = a]$.

III-as „ valime $\frac{m}{3} = AU$ nii, et

$AI = 2a > m = AM > 2r = AR$.

IV-as „ $\frac{m}{3}\sqrt{3} = k = AK$ $[AN = \frac{2}{3}m,\ NK = \frac{1}{3}m]$.

V-es „ $\sqrt{a^2-k^2} = g = OG$ $[AO = a,\ AG = k]$.

VI-es „ $a+g = x_1 = TX_1$ $[OT = a, OX_1 = OG = g]$.

$a-g = x_2 = TX_2$ $[OT = a,\ OX_2 = OG = g]$.

Nüüd tõmbame läbi punktide X_1 ja X_2 $BP \parallel ST$ ja $B_2P_2 \parallel ST$ ja punktidest B, P, B, T_2 $BD \perp ST$, $PS \perp ST$, $B_2D_2 \perp ST$ ja $P_2S_2 \perp ST$.

Siis on $PD = m$ ja $B_2S_2 = m$.

Tõestus. $PD = \sqrt{PS^2+SD^2} = \sqrt{PS^2+X_1B^2} =$

$\sqrt{x_1^2+4x_1(2r-x_1)} = \sqrt{8rx_1-3x_1^2} =$

$$=\sqrt{8r\left(\frac{4}{3}r+\sqrt{\left(\frac{16}{9}r^2-\frac{m^2}{3}\right)}\right)-3\left(\frac{4}{3}r+\sqrt{\frac{16}{9}r^2-\frac{m^2}{3}}\right)^2}=m.$$

Niisama tõestatakse, et $B_2S_2 = m$.

276. Ülesanded. 1) Läbi P ja P_1 ring tõmmata nii, et ta S-d riivaks. [136].

2) Läbi P ja P_1 mineval sirgjoonel leida punkt X nii, et $XP^2+XP_1^2 = m^2$.

3) Läbi P ja P_1 ring tõmmata nii, et P_2-st tema külge tõmmatud riivaja pikkus oleks a.
4) Antud ruudu sisse kujundada ruut, mille külg a on.
5) △ poolitada sirgjoone abil, mis S-le paralleelne on.
6) △-ga perimeeter ja pind sirgjoone abil poolitada.
7) Trapeets poolitada alustele paralleelselt tõmmatud sirgjoone abil.
8) △ muuta võrdkülgseks △-gaks.
9) Täisnelinurk, mille a) perimeeter, b) pind on antud, kujundada antud I) sõõri sisse, II) poolsõõri sisse.
10) P-st Ȯ-le tõmmata lõikaja nii, et tema lõikudest saaks täisnelinurk, mille pind on a^2.
11) Ringi diameetri AB otsapunktist A tõmmata lõikaja nii, et tema välimine osa ringi ja B-st tõmmatud riivaja vahel oleks a.
12) Antud sõõri sisse kujundada sarikkolmnurk, mille kõrguse ja aluse summa oleks a.
13) Antud poolringi diameetri AB' peal leida punkt X nii, et oleks $AX + XC = a$, kus XC on tõmmatud $\perp AB$ kuni lõikumiseni ringiga.
14) Võrdkülgse △-ga sisse kujundada täisnelinurk nii, et tema diagonaal oleks a.
15) Antud sõõris tõmmata pingjoon paralleelselt antud riivajale nii, et selle pingjoone otsapunktidest riivajale tõmmatud perpendikulaarid sünnitaksid täisnelinurga, mille perimeetril on antud pikkus $2p$.
16) Antud on ring ja väljaspool teda punkt A; sellele ringile tõmmata riivaja nii, et $AX + XY = m$, kus X on punkti A projektsioon riivaja peale ja Y on riivapunkt.
17) Konstrueerida täisnurkne △, millel on antud perimeeter ja pind.
18) Antud poolsõõris tõmmata pingjoon paralleelselt diameetrile nii, et otsapunktide ühendamisel sünniks trapeets, mille perimeeter on antud.

T. 4.7.20. — 7.45.

A
2990 II
55982