TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKA TEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Tuuli Puhkim

Projektsiooniruumi dimensiooni valikust mittekorrektsete ülesannete iseregulariseerimisel vähima vea meetodiga

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: dots Uno Hämarik

Autor: .... " ..... " juuni 2014

Juhendaja: .... " ..... " juuni 2014

Lubatud kaitsmisele

Professor: .... " ..... " juuni 2014

Tartu 2014

Projektsiooniruumi dimensiooni valikust mittekorrektsete ülesannete iseregulariseerimisel vähima vea meetodiga

Bakalaureusetöö

Tuuli Puhkim

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös vaadeldakse lineaarseid mittekorrektseid ülesandeid, kus on teada häiritud parem pool. Võrrandi lähislahendi leidmiseks kasutatakse vähima vea projektsioonimeetodit. Kui projekteeritud võrrandi dimensioon valida õigesti sõltuvalt vabaliikme veatasemest, siis saab seda meetodit vaadelda regularisatsioonimeetodina. Bakalaureusetöö teoreetiline põhitulemus on teoreem kahe suvalise lähislahendi võrdlusest. Nimelt tuletatakse tingimus, mille täidetuse korral on garanteeritud, et üks lähislahend on täpsem kui teine. Selle teoreemi rakendustena vaadeldakse nii lähislahendi valikut monotoonse vea reegli abil kui selle lähislahendi järeltäpsustamise mõningaid võtteid. Pakutud algoritme illustreeritakse numbriliste näidetega.

Märksõnad: mittekorrektsed ülesanded, regulariseerimismeetod, projektsioonimeetod, projekteeritud võrrandi dimensiooni valik.

On the choice of the dimension in self-regularization of ill-posed problems by the least error projection method

Bachelor's thesis

Tuuli Puhkim

Abstract. In this bachelor's thesis we consider ill-posed problems where the right hand side is given approximately. The least error projection method is used for finding the approximate solution of this equation. If the dimension of the projected equation is chosen properly depending on the noise level of the right hand side, then this method can be used as a regularization method. The main theoretical result of this bachelor's thesis is the theorem for comparing two approximate solutions. Namely, we derive the condition which guarantees that one approximate solution is more accurate than the other. To apply this theorem, we consider the choice of the approximate solution by the monotone error rule and some possibilities for getting an even more accurate approximate solution. The suggested algorithms are illustrated with numerical examples.

Keywords: ill-posed problems, regularization method, projection method, choice of the dimension of projected equation.

Sisukord

Sissejuhatus **5**

1 Mittekorrektsed ülesanded **7**
1.1 Mõned kasutatavad mõisted ja tähistused 7
1.2 Mittekorrektse ülesande mõiste 8
1.3 Ligikaudse parema poolega ülesanne 9

2 Vähima vea meetodi kirjeldus **10**

3 Vähima vea meetod täpsete andmete korral **11**

4 Parameetri aprioorne valik ligikaudsete andmete korral **12**

5 Kahe lähislahendi vigade võrdlus **14**

6 Monotoonse vea reegel **16**

7 Näiteülesanded ja algoritmi kirjeldus **18**
7.1 Numbriline diferentseerimine 18
7.2 Ülesande diskretiseerimine vähima vea meetodiga 18
7.3 Järjestikuste indeksitega lähislahendite võrdlemine 20
7.3.1 Projektsiooniruumi dimensiooni valik 20
7.3.2 Funktsiooni $d_{ME}(n)$ ja vigade arvutusvalemid 20
7.3.3 Programmide kirjeldus 21
7.4 Ühe lõigu tükeldamine 22
7.4.1 Programmide kirjeldus 22
7.5 Lähendite lineaarne kombinatsioon 23
7.5.1 Programmi kirjeldus 23
7.6 Kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite võrdlemine 24
7.6.1 Projektsiooniruumi dimensiooni valik 24
7.6.2 Funktsiooni $d_{ME}2(n)$ ja vigade arvutusvalemid 24
7.6.3 Programmi kirjeldus 25
7.7 Phillipsi probleem 25
7.7.1 Arvutusvalemid 26
7.7.2 Programmide kirjeldus 26

8 Numbrilised näited **27**
8.1 Ülesanne 1 28
8.2 Ülesanne 2 29
8.3 Ülesanne 3 30

8.4 Ülesanne 4 31
8.5 Phillipsi probleem 32
8.6 Numbriliste tulemuste interpretatsioon 32

Viited **34**

Lisad **35**
Lisa 1. Programmid standardse monotoonse vea reegli kohta 35
Lisa 2. Programmid ühe lõigu tükeldamisvõtte kohta 37
Lisa 3. Programmid lineaarkombinatsiooni võtte kohta 40
Lisa 4. Programmid kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite kohta 41
Lisa 5. Programmid Phillipsi ülesande kohta 42

Sissejuhatus

Ülesande seade korrektsus on üks keskseid mõisteid matemaatikas. Korrektse ülesande puhul ei mõjuta väikesed vead lähteandmetes lahendit väga olulisel määral. Mittekorrektsete ülesannete korral võivad aga väikesed lähteandmete vead põhjustada kuitahes suuri vigu lahendites. Seetõttu on selliste ülesannete lahendamisel vaja kasutada spetsiaalseid regulariseerimismeetodeid, kus valitakse regularisatsiooniparameeter sõltuvalt veatasemest. Vaatleme juhtu, kus ülesande parem pool on teada ligikaudselt.

Käesoleva töö punktid 1-4 ja 6 on referatiivsed. Tuginedes töödele [1, 2], kirjeldatakse mittekorrektsete ülesannete problemaatikat ja vähima vea meetodit nende ülesannete lahendamiseks. Samuti tõestatakse koonduvusteoreemid nii täpsete lähteandmete korral kui ligikaudsete andmete korral, kui projekteeritud ülesande dimensioon on valitud aprioorselt. Punktis 5 on saadud uus tulemus teoreem 3. Selles teoreemis võrreldakse operaatorvõrrandi kaht suvalist kaasoperaatorite piirkonda kuuluvat lähislahendit (need ei pruugi olla vähima vea meetodi lähislahendid) ning tuletatakse tingimus, mille täidetuse korral on garanteeritud, et üks lähislahend on täpsem kui teine. Töö järgnevas osas vaadeldakse selle teoreemi rakendusvõimalusi senistest lähislahenditest parema lähislahendi konstrueerimisel. Antud teoreemist järeldub juba töödest [1, 2] tuntud monotoonse vea reegel, mis võimaldab võrrelda kahele järjestikusele diskretisatsioonitasemele vastavate lähislahendite täpsust. Seda kasutatakse diskretiseerimistaseme järjestikusel suurendamisel seni, kuni on garanteeritud, et viimase taseme lähislahend on täpsem kui eelmise taseme lähislahend. Kui tööde [1, 2] algoritm lõpetab siinkohal töö, siis käesolevas töös üritatakse selle algoritmiga valitud lähislahendit veel täpsustada. Selleks kasutame järgmiseid võtteid.

1. Kui uus lähislahend pole garanteeritult täpsem kui eelmine, üritatakse täpsemat lähislahendit saada viimaste lähislahendite lineaarkombinatsioonina.

2. Üritatakse jätkata, muutes diskretiseerimisalgoritmi. Nii töödes [1, 2] kui käesolevas bakalaureusetöös lähendatakse võrrandi parem pool alamlõikude süsteemil määratud tükiti konstantsete funktsioonidega ning üleminekul ühelt diskretiseerimistasemelt järgmisele poolitatakse kõik osalõigud. Aga kui mingil diskretiseerimistasemel kõigi osalõikude poolitamine ei taga enam täpsema lähislahendi saamist, võib üritada täpsemat lähislahendit saada, poolitades ainult ühe või mõne osalõigu.

3. Lisaks kahe järjestikuse diskretiseerimistaseme n ja $n+1$ lähislahendite võrdlusele võib võrrelda ka muude tasemete lähislahendeid. Kui taseme $n+1$ lähislahend pole garanteeritult täpsem kui taseme n lähislahend, aga on garanteeritult täpsem kui taseme $n-1$ lähislahend, võib siiski lähislahendiks soovitada taseme $n+1$ lähislahendit.

Bakalaureusetöö punktid 7 ja 8 on praktilisemat laadi, on lahendatud mitmeid näiteülesandeid. Seitsmendas alapunktis on toodud mudelülesannete kirjeldused ja on tuletatud arvutusvalemid programmide jaoks. Seejärel on lühidalt tutvustatud koostatud programmides vajaminevaid sisendandmeid ning ka programme endid. Peale selle on punktis 8 esitatud Mathcadi keskkonnas läbi viidud numbriliste eksperimentide arvulised tulemused tabelite kujul ja nende põhjal tehtud järeldused. Ülesannete kirjelduste täienduseks on lisades ära toodud Mathcadis koostatud programmide tekstid.

1 Mittekorrektsed ülesanded

1.1 Mõned kasutatavad mõisted ja tähistused

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Kui H ja F on vektorruumid ja $A\colon H \to F$ on lineaarne operaator, siis operaatori A nullruumi ehk tuuma ja kujutisruumi tähistame vastavalt sümbolitega $\mathbf{N}(A)$ ja $\mathbf{R}(A)$, st

$$\mathbf{N}(A) := \{u \in H\colon\ Au = 0\} \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{R}(A) := \{f \in F\colon\ \exists u \in H,\ \ Au = f\}.$$

Normeeritud ruumist X normeeritud ruumi Y tegutsevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistatakse sümboliga $\mathbf{L}(X, Y)$.

Sümboliga $A^{\perp}$ tähistame hulga A *ortogonaalset täiendit* ehk kõigi hulgaga A ortogonaalsete elementide hulka, st

$$x \in A^{\perp} \Leftrightarrow x \perp A.$$

Järgnevad kasutatud mõisted on esitatud raamatu [3] baasil.

Hilberti ruum. Vektorruumi H üle korpuse $\mathbb{K}$ nimetatakse *skalaarkorrutisega ruumiks*, kui igale elemendipaarile $x, y \in H$ on vastavusse seatud kindel arv $(x, y) \in \mathbb{K}$ (elementide x ja y *skalaarkorrutis*) nii, et on täidetud järgmised tingimused:

1° $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

2° $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4° $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Saab näidata, et skalaarkorrutisega ruum H on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in H.$$

Skalaarkorrutisega ruumi, mis on selliselt defineeritud normi suhtes täielik, nimetatakse *Hilberti ruumiks*.

Kaasoperaator. Olgu H ja F Hilberti ruumid ja $A \in \mathbf{L}(H, F)$. Saab näidata, et leidub parajasti üks operaator $A^{*}\colon\ F \to H$, mis rahuldab tingimust

$$(Ax, y) = (x, A^{*}y) \quad \forall x \in H, \forall y \in F.$$

Seda operaatorit A^* nimetatakse operaatori A *kaasoperaatoriks.* Osutub, et operaatori $A \in \mathbf{L}(H, F)$ kaasoperaator A^* on pidev ja lineaarne, st $A^* \in \mathbf{L}(F, H)$.

Ortoprojektor. Operaatorit P_L, mis Hilberti ruumi H igale elemendile seab vastavusse tema ortogonaalse projektsiooni kinnisele alamruumile L, nimetatakse *ortoprojektoriks* (alamruumile L). See rahuldab järgmisi omadusi:

1. kui $L \neq \{0\}$, siis $\|P_L\| = 1$;

2. P_L on sümmeetriline, st

$$(P_L x, y) = (x, P_L y) \quad \forall x \in H, \forall y \in F.$$

1.2 Mittekorrektse ülesande mõiste

Ülesande korrektsuse mõiste on üks matemaatika keskseid mõisteid, mille võttis kasutusele prantsuse matemaatik Jacques Hadamard 19. sajandi algul. Mittekorrektsete ülesannete teooriale panid aluse vene matemaatikud V. K. Ivanov, M. M. Lavrentjev ja A. N. Tihhonov.

Esmalt toome ära korrektselt seatud ülesande definitsiooni. Olgu H ja F Banachi ruumid ning olgu $A\colon\ H \to F$. Vaatleme võrrandit

$$Au = f, \tag{1}$$

kus vabaliige $f \in F$ on antud ning muutuja $u \in H$ on tundmatu.

Definitsioon 1. Ülesanne (1) on *korrektselt püstitatud* ruumide paaril H ja F ehk *korrektne Hadamard'i mõttes*, kui on rahuldatud järgnevad tingimused:

1. sellel ülesandel leidub lahend $u \in H$ iga vabaliikme $f \in F$ korral;

2. lahend on ühene;

3. lahend sõltub pidevalt võrrandi (1) vabaliikmest, st vabaliikmete koondumisest $f_n \to f$ ruumis F järeldub vastavate lahendite koondumine $u_n \to u$ ruumis H.

Kui vähemalt üks neist kolmest tingimusest ei ole täidetud, siis öeldakse, et ülesanne (1) on *mittekorrektselt seatud Hadamard'i mõttes* ehk *mittekorrektne*. Mittekorrektse ülesande tüüpilisteks näideteks on esimest liiki integraalvõrrandid (vt [4]).

Edaspidi vaatleme lineaarseid ülesandeid. Kui ülesandes (1) operaator $A \in \mathbf{L}(H, F)$ ning sellel ülesandel eksisteerib ühene lahend $u \in H$ iga $f \in F$ puhul, siis ülesanne (1) on korrektne. Tõepoolest, kuna A on bijektiivne, siis Banachi teoreemi põhjal pöördoperaatorist eksisteerib pidev lineaarne pöördoperaator $A^{-1}\colon\ F \to H$ ning hinnangust

$$\|u_n - u\|_H = \|A^{-1}f_n - A^{-1}f\|_H \leqslant \|A^{-1}\|\|f_n - f\|_F$$

järeldub lahendi pidev sõltuvus vabaliikmest. (Sümbolitega $\|\cdot\|_H$ ja $\|\cdot\|_F$ tähistame norme vastavates Banachi ruumides H ja F.)

1.3 Ligikaudse parema poolega ülesanne

Kui võrrandi (1) vabaliige kuulub operaatori A väärtuste piirkonda ehk $f \in \mathbf{R}(A) = \{f \in F\colon\ \exists u \in H,\ \ Au = f\}$, siis on ülesanne (1) lahenduv. Üldjuhul pole vabaliige $f \in \mathbf{R}(A)$ täpselt teada, selle asemel teame tema lähendit $f_\delta \in F$, mille korral $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, kus δ on etteantud positiivne arv. Vaatleme edaspidi ülesande (1) lähisvõrrandit

$$Au = f_\delta. \tag{2}$$

Kuna f_δ ei pruugi kuuluda väärtuste piirkonda $\mathbf{R}(A)$, siis pole lähisvõrrandi lahenduvus garanteeritud. Kui aga isegi tingimus $f_\delta \in \mathbf{R}(A)$ on täidetud, ei tarvitse võrrandi (2) lahend olla võrrandi (1) ligikaudne lahend, sest vabaliikme f kuitahes väike häiritus võib kaasa tuua võrrandi (2) lahendi u kuitahes suure häirituse.

Kui ruumid H ja F on Hilberti ruumid ja võrrandi (1) vabaliikme f veatase δ on teada, siis on spetsiaalsete lahendusmeetoditega (nn regulariseerimismeetoditega) võimalik saada täpseks lahendiks koonduvaid lähislahendeid protsessis $\delta \to 0$ (vt [5]).

2 Vähima vea meetodi kirjeldus

Olgu H ja F reaalsed Hilberti ruumid. Vaatleme ülesannet (1), kus $A \in \mathbf{L}(H,F)$ ja operaatori A nullruum $\mathbf{N}(A) = \{u \in H\colon\ Au = 0\}$ koosneb ainult nullist, st operaator A on üksühene, aga operaatori A väärtuste piirkond $\mathbf{R}(A)$ ei ole kinnine. Eeldame, et $f \in \mathbf{R}(A)$, seega täpse parema poolega ülesandel on ühene lahend $u_* \in H$. Olgu antud täpse parema poole f asemel tema teatav lähend $f_\delta \in F$, nii et $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, kus $\delta > 0$.

Vaatleme projektsioonimeetodit võrrandi (1) lahendamiseks. Olgu antud lõplikumõõtmelised alamruumid $H_n \subset H$ ja $F_n \subset F$ nii, et $\dim H_n = \dim F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tähistagu P_n ja Q_n ortoprojektoreid ruumidest H ja F vastavatele alamruumidele H_n ja F_n. Siis $P_nH = H_n$ ja $Q_nF = F_n$ ning ortoprojektorite omaduste tõttu $Q_n = Q_n^* = Q_n^2$. Võrrandi (1) lahendi u_* ligikaudseks lähendiks võetakse element $u_n \in H_n$, mis rahuldab tingimust

$$(Au_n - f_\delta, v_n) = 0 \quad \forall v_n \in F_n. \tag{3}$$

Tingimus (3) on samaväärne tingimusega

$$Q_n(Au_n - f_\delta) = 0. \tag{4}$$

Traditsiooniliste projektsioonimeetodite koonduvustingimused mittekorrektsete ülesannete lahendamisel on üsna kitsendavad. Need piirangud on minimaalsed aga vähima vea meetodi korral, kus täpsete lähteandmete puhul koonduvus on garanteeritud väga leebetel tingimustel. Vähima vea meetodis valitakse kõigepealt alamruumid $F_n \subset F$, alamruumid H_n määratakse seosega $H_n = A^*F_n$ ning lähislahend $u_n \in A^*F_n$ leitakse tingimusest

$$(Au_n - f_\delta, v_n) = 0 \quad \forall v_n \in F_n. \tag{5}$$

Olgu $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ ruumi F_n baas. Siis lähislahend esitub kujul $u_n = \sum_{i=1}^n c_i A^*\psi_i$; asendades selle tingimusse (5), saame

$$\left(A\sum_{i=1}^n c_i A^*\psi_i - f_\delta, \psi_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

ehk teisiti kirjutades

$$\sum_{i=1}^n c_i(A^*\psi_i, A^*\psi_j) = (f_\delta, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraline võrrandisüsteem kordajate c_i määramiseks.

3 Vähima vea meetod täpsete andmete korral

Võrrandi (1) korral, kus on teada täpne vabaliige, kehtib järgmine tulemus.

Teoreem 1. *Olgu* $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ *ning kehtigu tingimus*

$$Q_n f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \forall f \in F. \tag{6}$$

Sel juhul võrrand (4) *on* $f_\delta = f$ *korral üheselt lahenduv, kusjuures*

1. $u_n = P_n u_*$;
2. u_n *on võrrandi* $Q_n A u = Qf$ *normaallahend ehk vähima normiga lahend, kus* $u \in H$;
3. $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_*$.

Tõestus. Tähistame $A_n := Q_n A P_n \in \mathbf{L}(H_n, F_n)$. Tingimuse $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ tõttu on operaator $A_n^* \in \mathbf{L}(F_n, H_n)$ bijektiivne, mis tähendab, et ka operaator $A_n \in \mathbf{L}(H_n, F_n)$ on bijektiivne ehk võrrand (4) lahendub üheselt. Täpsete andmete $f_\delta = f$ korral võib projektsioonimeetodi tingimuse (3) kirjutada kujul $(u_n - u_*, A^* v_n) = 0$ iga $v_n \in F_n$ korral. Vähima vea meetodis on kõik H_n elemendid kujul $A^* v_n$, kus $v_n \in F_n$, seega $u_n - u_* \in H_n^\perp$. Siis saame $(I - P_n)(u_n - u_*) = u_n - u_*$ ja $P_n(u_n - u_*) = 0$, kust $u_n - P_n u_* = 0$ ehk $u_n = P_n u_*$.

Järgmisena näitame, et u_n on võrrandi $Q_n A u = Q_n f$ normaallahend. Võrdusest $P_n A^* Q_n = A^* Q_n$ järeldub kaasoperaatorite võrdus $Q_n A = Q_n A P_n$. Seega võrrand $Q_n A u = Q_n f$ on samaväärne võrrandiga $Q_n A P_n u = Q_n f$ ning kõik lahendid avalduvad kujul $u = u_n + u_n^{'}, u_n \in (A^* F_n)$ ja $u_n^{'} \in (A^* F_n)^\perp$. Võrratusest $\|u_n + u_n^{'}\| = (\|u_n\|^2 + \|u_n^{'}\|^2)^{1/2} \geqslant \|u_n\|$ järeldub teoreemi teine väide.

Näitame, et leiab aset koondumine $u_n \to u_*$ protsessis $n \to \infty$. Tingimuse (6) tõttu on alamruumide jada $F_n, n = 1, 2, \ldots$, piirtihe ruumis F. Sellest järeldub, et ruumide jada $H_n = A^* F_n, n = 1, 2, \ldots$, on piirtihe ruumis $\overline{\mathbf{R}(A^* A)} = \overline{\mathbf{R}(A^*)} = H$. Võrdusest $u_n = P_n u_*$ saame aga, et $u_n \to u_*$ kui $n \to \infty$. ■

4 Parameetri aprioorne valik ligikaudsete andmete korral

Regulariseerimisparameetri leidmiseks on välja töötatud mitmeid reegleid. Need jagunevad aprioorseteks ehk kogemuseelseteks ja aposterioorseteks ehk kogemusjärgseteks. Aprioorne parameetrivalik toimub ülesande lähteandmeid A ja f_δ kasutamata, see arvestab vaid veataset δ ja lahendite klassi antud $f \in \mathbf{R}(A)$ korral. Praktikas see informatsioon tihti puudub ja siis tuleb kasutada aposterioorseid parameetrivaliku reegleid, mille korral valitakse parameeter pärast arvutuste teostamist.

Teoreem 2. *Olgu* $\mathbf{N}(A) = \{0\}$, $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$, $f \in \mathbf{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ *ning*

$$\|z - Q_n z\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall z \in F. \tag{7}$$

Siis vähima vea meetod määrab ühese lähendi u_n *ning kehtib veahinnang*

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_* - P_n u_*\| + \delta\chi_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

kus

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}.$$

Kui valida $n = n(\delta)$ *selliselt, et*

$$\delta\chi_{n(\delta)}^* \xrightarrow[n(\delta)\to\infty]{} 0, \text{ kui } \delta \to 0, \tag{9}$$

siis protsessis $\delta \to 0$ *leiab aset koonduvus* $u_{n(\delta)} \to u_* = A^{-1}f$.

Tõestus. Hinnangu (8) tõestamiseks kasutame lähislahendi esitust

$$u_n = A_n^{-1} Q_n f_\delta$$

ligikaudsete andmete korral ja esitust

$$A_n^{-1} Q_n f = P_n u_*.$$

(vt teoreem 1, väide 1) täpsete andmete korral. Saame hinnata

$$\begin{aligned} \|u_n - u_*\| &= \|u_n - A_n^{-1} Q_n f + A_n^{-1} Q_n f - u_*\| \\ &= \|A_n^{-1} Q_n f_\delta - A_n^{-1} Q_n f\| + \|P_n u_* - u_*\| \\ &\leqslant \|A_n^{-1}\| \|Q_n\| \|f_\delta - f\| + \|P_n u_* - u_*\| \\ &\leqslant \delta\chi_n^* + \|P_n u_* - u_*\|, \end{aligned} \tag{10}$$

kasutades võrdusi $\|A_n^{-1}\| = \|(A_n^*)^{-1}\| = \chi_n^*$ ja $\|Q_n\| = 1$. Tingimuse (9) ja hinnangu (10) tõttu leiab aset koondumine $u_{n(\delta)} \to u_*$. ■

Lause 1. *Olgu antud sellised projektsiooniruumid, kus iga eelnev sisaldub järgmises, st*

$$F_n \subset F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

siis vastavate lähislahendite normide jaoks kehtib omadus

$$\|u_n\| \leqslant \|u_{n+1}\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tõestus. Lähislahend $u_n \in A^*F_n$ on võrrandi $Q_nAu = Q_nf_\delta$, $u \in H$, minimaalse normiga lahendiks (vt teoreem 1, väide 2). Kuna iga eelnev projektsiooniruum sisaldub järgmises: $F_n \subset F_{n+1}$, kui $n = 1, 2, \ldots$, siis $u_{n+1} \in A^*F_{n+1}$ on võrrandite $Q_n(Au - f_\delta) = 0$ ja $Q_{n+1}(Au - f_\delta) = 0$ lahend. See fakt koos omadusega $u_n = \operatorname{argmin}\{\|u\| \colon u \in H, Q_n(Au - f) = 0\}$ annab, et $\|u_n\| \leqslant \|u_{n+1}\|$. ■

5 Kahe lähislahendi vigade võrdlus

Teoreem 3. *Olgu antud lähislahendid* $u = A^*v$ *ja* $u' = A^*v'$*, kus* $v, v' \in F$*. Kui*

$$D(v, v') := \frac{2(v' - v, f_\delta) + \|u\|^2 - \|u'\|^2}{2\|v' - v\|} > \delta, \tag{12}$$

siis $\|u' - u_*\| < \|u - u_*\|$.

Tõestus. Vaatleme vigade normide ruutude vahet

$$\begin{aligned} \|u' - u_*\|^2 - \|u - u_*\|^2 &= \|u'\|^2 - \|u\|^2 - 2(u' - u, u_*) \\ &= \|u'\|^2 - \|u\|^2 - 2(v' - v, Au_*) \\ &= \|u'\|^2 - \|u\|^2 - 2(v' - v, f_\delta) + 2(v' - v, f_\delta - Au_*) \\ &\leqslant \|u'\|^2 - \|u\|^2 - 2(v' - v, f_\delta) + 2\|v' - v\|\delta. \end{aligned}$$

Seega, kui $2\|v' - v\|\delta < 2(v' - v, f_\delta) + \|u\|^2 - \|u'\|^2$, siis saame, et $\|u' - u_*\| < \|u - u_*\|$ ehk u' on parem lähend elemendile u_* kui u. ■

Järeldus 1. *Kui elemendid* $u = A^*v$ *ja* $u' = A^*v'$*, kus* $v, v' \in F$*, rahuldavad tingimusi*

$$\begin{aligned} (Au - f_\delta, v) &= 0, \\ (Au' - f_\delta, v') &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

ning $2\|v' - v\|\delta < (v' - v, f_\delta)$*, siis* $\|u' - u_*\| < \|u - u_*\|$.

Tõestus. Kuna element u rahuldab tingimust (13), siis saame elemendi u normi ruutu arvutada valemiga

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = \|A^*v\|^2 &= (A^*v, A^*v) = (AA^*v, v) \\ &= (AA^*v - f_\delta + f_\delta, v) = (Au - f_\delta, v) + (f_\delta, v) = (f_\delta, v). \end{aligned} \tag{14}$$

Samamoodi saab näidata, et

$$\|u'\|^2 = (f_\delta, v'). \tag{15}$$

Valemite (14) ja (15) abil saame $D(v, v')$ lugejale kuju

$$2(v' - v, f_\delta) + \|u\|^2 - \|u'\|^2 = 2(v' - v, f_\delta) + (f_\delta, v) - (f_\delta, v') = (v' - v, f_\delta).$$

Seega, kui $2\|v' - v\|\delta < (v' - v, f_\delta)$, siis saame, et $\|u' - u_*\| < \|u - u_*\|$ ehk u' on parem lähend elemendile u_* kui u. ■

Järeldus 2. *Rahuldagu vähima vea meetodis alamruumid tingimust* (11). *Olgu vähima vea meetodiga leitud lähislahendid* $u_n = A^* v_n$ *ja* $u_{n-1} = A^* v_{n-1}$, *kus* $v_n \in F_n$ *ja* $v_{n-1} \in F_{n-1}$. *Kui kehtib tingimus*

$$\frac{(v_n - v_{n-1}, f_\delta)}{2\|v_n - v_{n-1}\|} > \delta,$$

siis

$$\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\|.$$

Tõestus. Järelduse kehtivuse saame, kui võtame järelduses 1 $v = v_{n-1}$ ja $v' = v_n$, siis $u = u_{n-1}$ ja $u' = u_n$. ■

6 Monotoonse vea reegel

Paljudes regularisatsioonimeetodites saab edukalt kasutada parameetri $n = n(\delta)$ valikuks monotoonse vea reeglit. On vajalik, et antud meetodis regularisatsiooniparameetri kasvades väheneks lähislahendi viga monotoonselt, kui tegemist on täpsete lähteandmetega ehk $f_\delta = f$. Kui aga on antud ligikaudsed andmed, oleks vaja leida tingimus, mis seob veanivoo ja regularisatsiooniparameetri. Kui see tingimus on täidetud, siis peab antud parameetrile vastava lähislahendi viga olema väiksem kui väiksema parameetri oma. Monotoonse vea reeglis valitakse parameetriks suurim $n = n(\delta) = n_{ME}$, mille korral on garanteeritud tingimus

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_{n-1} - u_*\|, \quad n = 1, 2, \ldots, n_{ME}. \tag{16}$$

Alamruumid $F_n, n = 1, 2, \ldots,$ rahuldagu tingimust (11) ja olgu lähislahend $u_n = A^* v_n$, kus $v_n \in F_n$. Monotoonse vea reegli kasutamiseks on esmalt vaja leida elemendid $v_n \in F_n$. Selle reegli abil saab valida projektsiooniruumi mõõtme.

Monotoonse vea reegel ütleb seega, et parameetriks $n_{ME} = n(\delta)$ vähima vea meetodi lähislahendis

$$u_n = A^* v_n, \quad v_n \in F_n,$$

tuleb valida esimese indeksitest $n = 1, 2, \ldots,$ mille korral kehtib tingimus

$$d_{ME}(n) := \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+1} - v_n\|} \leqslant \delta.$$

Elemendi $v_n \in F_n$ saab arvutuslikes protseduurides automaatselt lisatööta. Seose (14) põhjal saab funktsiooni $d_{ME}(n)$ arvutusvalemi esitada samaväärsel kujul

$$d_{ME}(n) := \frac{\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2}{2\|v_{n+1} - v_n\|}.$$

Teoreem 4. *Olgu* $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ *ja alamruumid* F_n *rahuldagu tingimusi* (7) *ja* (11). *Kui* $n = n_{ME}$ *on valitud kui esimene* $n = 1, 2, \ldots,$ *mille korral kehtib tingimus*

$$d_{ME}(n) \leqslant \delta,$$

siis juhul kui $n_{ME} \to \infty$ $(\delta \to 0)$, *saame* $\|u_{n_{ME}} - u_*\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$

Tõestus. Vähima vea meetodis täpsete lähteandmete kohta on teada, et leiab aset koondumine (vt teoreemi 1)

$$u_n = P_n u_* \xrightarrow[n \to \infty]{} u_*$$

ja ligikaudsete andmete korral kehtib veahinnang (vt teoreemi 2)

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_* - P_n u_*\| + \delta\chi_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Olgu $n_0 = n_0(\delta)$ suvaline indeks, mis on valitud aprioorseks parameetriks n, st $n_0(\delta) \to \infty$, $\delta\chi^*_{n_0(\delta)} \to 0\,(\delta \to 0)$. Hinnang (17) garanteerib koondumise $\|u_{n_0(\delta)} - u_*\| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Kuna iga projektsiooniruum sisaldub eelmises ($F_n \subset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$), siis jada χ_n^* kasvab monotoonselt, st

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} \leqslant \sup_{z_n \in F_{n+1}} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} = \chi_{n+1}^*, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Kuna eeldasime, et $n_{ME} \to \infty$, kui $\delta \to 0$, siis järeldub koondumine $\|u_* - P_n u_*\| \to 0$ $(n \to \infty)$ eeldusest $\|z - Q_n z\| \to 0$ iga $z \in F$ korral. Juhul kui $n_{ME} > n_0$, on meil $\|u_{n_{ME}} - u_*\| \leqslant \|u_{n_0} - u_*\| \to 0$ kui $\delta \to 0$ võrratuse (16) tõttu.

Kui aga $n_{ME} < n_0$, siis täpsetele andmetele vastav esimene liige $\|P_{n_{ME}} u_* - u_*\| \to 0$ koondub omaduse $n_{ME} \to \infty$ tõttu. Veahinnangu (17) teise liikme $\delta\chi^*_{n_{ME}} \to 0\,(\delta \to 0)$ koonduvus tuleneb koonduvusest $\delta\chi^*_{n_0} \to 0\,(\delta \to 0)$ ning omadusest $\chi^*_{n_{ME}} \leqslant \chi^*_{n_0}$, mis järeldub võrratusest $n_{ME} \leqslant n_0$ ning sellest, et jada χ_n^* monotoonselt kasvab. ■

7 Näiteülesanded ja algoritmi kirjeldus

7.1 Numbriline diferentseerimine

Vaatleme l-järku diferentseerimisülesannet, kus operaator on Volterra operaator $A\colon H = L_2(0,1) \to F = L_2(0,1)$. Siis saab võrrand (1) kuju

$$Au(t) \equiv \int_0^t \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} u(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{18}$$

kus f on selline, et lahend

$$u_*(t) = f^{(l)}(t) \in L_2(0,1).$$

Operaatori A kaasoperaator A^* rahuldab võrdust

$$A^*v(t) = \int_t^1 \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} v(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

Kui $t = 1$, siis integreerimispiirkond koosneb ainult ühest punktist. Seega $A^*v(1) = 0$ iga $v \in L_2(0,1)$ korral. Lähislahendit otsime kujul

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} c_i A^* \psi_i, \tag{19}$$

kus $m = 2^{n-1}$ ja $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ on ruumi $L_2(0,1)$ baas. Seega $u_n(1) = 0$ ja see on lahendile u_* hea lähislahend vaid juhul kui $u_*(1) = 0$.

7.2 Ülesande diskretiseerimine vähima vea meetodiga

Ülesande (18) diskretiseerimiseks kasutame töödes [1, 2] pakutud algoritmi. Esmalt jaotame lõigu $[0,1]$ punktideks

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1,$$

kus

$$t_i = \frac{i-1}{m}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{20}$$

Baasfunktsioonideks valime tükiti konstantsed splainid, kus

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in [t_i, t_{i+1}]; \\ 0, & \text{kui } t \notin [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Funktsioonid $A^*\psi_i, i = 1, 2, \ldots, m$, saavad kuju

$$A^*\psi_i(t) = \begin{cases} \frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}, & \text{kui } t \in [0, t_i]; \\ \frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}, & \text{kui } t \in (t_i, t_{i+1}); \\ 0, & \text{kui } t \in [t_{i+1}, 1]. \end{cases} \tag{21}$$

Selleks, et leida kordajad $\{c_1, \ldots, c_m\}$, on vaja kõigepealt leida suurused $(B_m)_{ij} = (A^*\psi_i, A^*\psi_j)$ ning $(b_m)_j = (f_\delta, \psi_j)$, kus $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Järgnevalt toome ära valemid suuruste $(B_m)_{ij}$ arvutamiseks kolmel erineval juhul:

1. kui $i = j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= \big(A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)\big) = \int_0^1 A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt \\ &= \int_0^{t_i} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}\right)^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}\right)^2 dt + \int_{t_{i+1}}^1 0dt \end{aligned} \tag{22}$$

2. kui $i > j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= \big(A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)\big) = \int_0^1 A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt \\ &= \int_0^{t_j} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}\right)\left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!}\right) dt \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}\right)\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!}dt + \int_{t_{j+1}}^1 0dt \end{aligned} \tag{23}$$

3. kui $i < j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= \big(A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)\big) = \int_0^1 A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt \\ &= \int_0^{t_i} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}\right)\left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!}\right) dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!}\right)\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}dt + \int_{t_{i+1}}^1 0dt \end{aligned} \tag{24}$$

Suuruseid $(b_m)_j$ saab leida aga valemiga

$$(b_m)_j = (f_\delta, \psi_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)dt. \tag{25}$$

7.3 Järjestikuste indeksitega lähislahendite võrdlemine

7.3.1 Projektsiooniruumi dimensiooni valik

Me valime diskretiseerimisparameetriks

$$m = 2^{n-1} \tag{26}$$

ning näitame, et sellise valiku korral kehtib alamruumide sisalduvuse tingimus $F_n \subset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sellega on garanteeritud lähislahendi u_n vea monotoonsus juhul kui $n \leqslant n_{ME}$. Projektsiooniruumi F_{n+1} dimensiooniks on $2m$. Kui tükiti konstantsete splainide

$$\psi 1_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in [t1_i, t1_{i+1}]; \\ 0, & \text{kui } t \notin [t1_i, t1_{i+1}]. \end{cases}$$

sõlmed määrata seosega

$$t1_i = \frac{i-1}{2m}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m+1,$$

saab projektsiooniruumi F_n baasfunktsioone kirjutada ümber kujul

$$\psi_i = \psi 1_{2i-1} + \psi 1_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{27}$$

Siit näemegi, et $F_n \subset F_{n+1}$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral.

7.3.2 Funktsiooni $d_{ME}(n)$ ja vigade arvutusvalemid

Selles alapunktis esitame valemid, mida kasutame funktsiooni

$$d_{ME}(n) := \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+1} - v_n\|} \tag{28}$$

väärtuste arvutamiseks. Tähistame elemendi $v_{n+1} \in F_{n+1}$ kordajad $\{c1_1, \ldots, c1_{2m}\}$. Siis saame selle elemendi esitada kujul $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{2m} c1_i \psi 1_i$. Baasfunktsioonide esituse (27) põhjal saame edasi kirjutada

$$v_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_i = \sum_{i=1}^{m} c_i (\psi 1_{2i-1} + \psi 1_{2i}),$$

millest

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{i=1}^{m} \big((c1_{2i-1} - c_i) \psi 1_{2i-1} + (c1_{2i} - c_i) \psi 1_{2i} \big),$$

kust saame

$$(v_{n+1}-v_n, f_\delta) = \sum_{i=1}^{m}(c1_{2i-1}-c_i)\int_{t1_{2i-1}}^{t1_{2i}} f_\delta(t)dt + \sum_{i=1}^{m}(c1_{2i}-c_i)\int_{t1_{2i}}^{t1_{2i+1}} f_\delta(t)dt. \qquad (29)$$

Funktsiooni (28) nimetaja arvutamisel kasutame võrdust

$$\begin{aligned}\|v_{n+1}-v_n\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{t1_{2i-1}}^{t1_{2i}} + \int_{t1_{2i}}^{t1_{2i+1}}\right)\big(v_{n+1}(t)-v_n(t)\big)^2 dt \\ &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\big((c1_{2i-1}-c_i)^2+(c1_{2i}-c_i)^2\big).\end{aligned} \qquad (30)$$

Lähislahendi viga arvutame (14) ja (21) põhjal valemiga

$$\begin{aligned}\|u_n-u_*\|^2 &= \int_0^1 u_n^2(t)dt + \int_0^1 u_*^2(t)dt - 2\int_0^1 u_n(t)u_*(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_\delta(t)dt + \int_0^1 \big(u_*(t)\big)^2 dt \\ &- 2\sum_{i=1}^{m} c_i\left(\int_0^{t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}-\frac{(t_i-t)^l}{l!}\right)u_*(t)dt\right. \\ &+\left.\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}u_*(t)dt\right).\end{aligned}$$

7.3.3 Programmide kirjeldus

Mudelülesannete lahendamiseks on arvutitarkvara *Mathcad* abil koostatud programmid. Programm *Vork* on koostatud seosega (20) määratud sõlmede $t_i, i = 1,2,\ldots,m$, leidmiseks.

Programm *vvmd* leiab suurused $(B_m)_{ij}$ ja $(b_m)_j$ valemite (22)-(25) abil lähislahendi u_n avaldises (19) sisalduvate kordajate $\{c1_1,\ldots,c1_m\}$ määramiseks. Veel arvutatakse lähislahendi viga $\|u_n-u_*\|$ iga diskretiseerimisparameetri ja veanivoo korral. Lisaks sellele väljastab programm funktsiooni $d_{ME}(n)$ väärtused seose (28) abil, kasutades valemeid (29)-(30), ning nende põhjal parameetrid n_{opt} ja n_{ME} iga veataseme korral.

Sisendandmeteks on integreerimisvahemiku alguspunkt a, lõpp-punkt b, diferentseerimisjärk l, ülesande täpne lahend u_* ja vektor vabaliikme veatasemetega δ. Programmi väljakutsudes peab ette andma ka vahemiku $[n1, n2]$, milles diskretiseerimisparameetreid (26) vaatleme. Ülesannetes on täpsele vabaliikmele lisatud häire, mille veatase on δ, kusjuures δ väärtused on hulgast

$$\{10^{-1},10^{-2},10^{-3},10^{-4},10^{-5}\}. \qquad (31)$$

Häiritud vabaliikmeks on võetud

$$f_\delta(t) = f(t) + \delta \frac{\cos(t)}{\sqrt{\frac{\sin 2}{4} + \frac{1}{2}}}, \text{ kus } \left\| \frac{\cos(t)}{\sqrt{\frac{\sin 2}{4} + \frac{1}{2}}} \right\| = 1.$$

Erinevalt teoorias esitatust algab eelnevates ja järgmistes programmides indekseerimine nullist. Programmide täielikud tekstid on esitatud 1. lisas.

7.4 Ühe lõigu tükeldamine

Selle asemel, et lõikude arvu igal sammul kaks korda suurendada, poolitame vaid ühe lõigu. Kuna funktsiooni d_{ME} väärtused on antud ülesannete puhul suurimad esimestes alamlõikudes, siis katsetame selle meetodi sobivust esimese ja teise alamlõigu poolitamiste korral. Mõlemal juhul saame uue lõigu $[0,1]$ alajaotuse, milles on $m_{ME}+1$ alamlõiku. Kasutame taas monotoonse vea reeglit, mille abil võrdleme seekord lähislahendeid $u'_{m_{ME}}$ ja $u'_{m_{ME}+1}$, kus $u'_{m_{ME}} = u_{n_{ME}} = A^* v_{n_{ME}}$ ja $u'_{m_{ME}+1}$ on lähislahend, mis vastab peaaegu samale alamlõikude süsteemile nagu $u'_{m_{ME}}$, ainult täiendavalt on poolitatud esimene või teine alamlõik. Leiame funktsiooni

$$d'_{ME}(m_{ME}) = \frac{(v'_{m_{ME}+1} - v'_{m_{ME}}, f_\delta)}{2\|v'_{m_{ME}+1} - v'_{m_{ME}}\|} \tag{32}$$

väärtused igal veatasemel ning iga varem leitud parameetri m_{ME} korral. Kui selle väärtus on suurem vastavast veatasemest, siis võtamegi uueks parameetriks $m_{ME}+1$. Nendel juhtudel, mil saab parameetrit suurendada, jätkame eelnevat mõttekäiku, jagades kahest uuest lõigust ühe pooleks, ning arvutades funktsiooni $d'_{ME}(m_{ME}+1)$ väärtusi. Talitleme nii, kuni lähislahendi vea vähenemine pole enam garanteeritud.

7.4.1 Programmide kirjeldus

Programm *Vork2* väljastab lõigu $[0,1]$ uue alajaotuse, mis programmiga *Vork* leitud jaotuse korral poolitab esimese alamlõigu. Programm *Vork3* tegutseb sarnaselt eelmisega, kuid tükeldab teist alamlõiku.

Programm *Vork4* tükeldab esimese lõigu esimest poolt veelkord. Programm *Vork5* poolitab aga esimese lõigu teist poolt. Programmid *Vork6* ja *Vork7* poolitavad vastavalt teise alamlõigu esimest ja teist poolt. Edasi tükeldamiseks vajadust ei tekkinud, kuna ühegi ülesande puhul teisel tükeldamisel uut parameetrit polnud võimalik valida.

Lisas esitatud programm *tyk* väljastab igal veatasemel ning iga $m_{ME}+1$ korral lähislahendi vead ning funktsiooni (32) väärtused, kasutades programme *Vork* ja *Vork2* ja tükeldades esimest lõiku ühe korra. Teise lõigu või teistkordsel tükeldamisel tuleb programmi *tyk* modifitseerida, nii et suurused m ja $m2$ vastaksid soovitud poolitamiskohale vastavatele programmidele. Nii on näiteks teise lõigu teise poole tükeldamiseks vaja, et parameetritele m ja $m2$ vastaksid vastavalt $m_{ME}+1$ ja $m_{ME}+2$ ning see kasutaks programme *Vork3* ja *Vork7*.

Sisendandmeteks on integreerimisvahemiku alguspunkt a, lõpp-punkt b, diferentseerimisjärk l, ülesande täpne lahend u_* ja vektor vabaliikme veatasemetega δ. Ülesande väljakutsumise juures peab ette andma ka vahemiku $[n1, n2]$, milles diskretiseerimisparameetreid (26) vaatleme.

Programmide tekstid on esitatud 2. lisas.

7.5 Lähendite lineaarne kombinatsioon

Uurime, kas funktsiooni d_{ME} abil valitud parameetrile vastava lähislahendi u_n ja järgneva lähislahendi u_{n+1} lineaarne kombinatsioon võimaldaks saada täpsemat lähislahendit, kui seda on esialgne. Selleks arvutame vigasid ja funktsiooni $D(v, v')$ väärtusi seose (12) abil. Uut lähislahendit tähistame $w_n = \beta u_n + \alpha u_{n+1}$, siis $z_n = \beta v_n + \alpha v_{n+1}$ ($w_n = A^* z_n$). Selleks üritame iga konkreetse veataseme ja parameetri n_{ME} jaoks leida sellised α ja β väärtused, mis maksimeerivad funktsiooni kujul

$$D(v_n, z_n) := \frac{2(\beta v_n + \alpha v_{n+1} - v_n, f_\delta) + \|u_n\|^2 - \|\beta u_n + \alpha u_{n+1}\|^2}{2\|\beta v_n + \alpha v_{n+1} - v_n\|}. \qquad (33)$$

Kui funktsiooni (33) väärtus on suurem kui vastav viga δ, siis võtame lähislahendiks $w_n = \beta u_n + \alpha u_{n+1}$, mis on teoreemi 3 tõttu täpsem kui esialgne u_n.

7.5.1 Programmi kirjeldus

Suuruse α väärtust varieerime hulgas $\{0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1, 1.05, 1.1, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2\}$ ning β väärtust hulgas $\{-0.25, -0.2, -0.15, -0.1, -0.05, 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35\}$. Kui sellistel juhtudel ei leita täpsemat lähislahendit, siis proovitakse seda teha hulkade väärtuste vahetamisel. Nimelt osutus, et lineaarkombinatsioonina saadud lähislahenditest täpseimad saadi just selliste α ja β väärtuste hulkade korral. Tüüpiliselt osutusid täpseimateks lähislahenditeks lineaarkombinatsioonid $w_n = \beta u_n + \alpha u_{n+1}$, kus $\alpha + \beta \approx 1$. Märgime, et juhul $\alpha + \beta = 1$ rahuldab w_n projekteeritud võrrandit $Q_n(Aw_n - f_\delta) = 0$, sest $Aw_n - f_\delta = \beta(Au_n - f_\delta) + \alpha(Au_{n+1} - f_\delta)$. Programm *linkomb* väljastab lähislahendite vea normid $\|w_n - u_*\|$ ning funktsiooni $D(v_n, z_n)$ väärtused vastavalt igale parameetrile α ja β. Programmi väljakutsumiseks on vaja teada monotoonse vea reegliga valitud diskretiseerimisparameetrit n_{ME} iga veataseme korral.

Sisendandmeteks on integreerimisvahemiku alguspunkt a, lõpp-punkt b, diferentseerimisjärk l ja ülesande täpne lahend u_*. Programmi väljakutsumise juures peab iga ülesande juures ette andma konkreetse veataseme ja vahemiku $[n1, n2]$, kus $n2$ on vastav eelnevalt valitud parameeter $n_{ME} + 1$.

Programmi tekst on esitatud 3. lisas.

7.6 Kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite võrdlemine

7.6.1 Projektsiooniruumi dimensiooni valik

Vaatleme diskretiseerimisparameetri (26) $m = 2^{n-1}$ korral ruume F_n ja F_{n+2}. Tingimusest (11) saame $F_n \subset F_{n+1} \subset F_{n+2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Projektsiooniruumi F_{n+2} dimensiooniks on $4m$. Kui tükiti konstantsete splainide

$$\psi 2_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in [t2_i, t2_{i+1}]; \\ 0, & \text{kui } t \notin [t2_i, t2_{i+1}]. \end{cases}$$

sõlmed määrata seosega

$$t2_i = \frac{i-1}{4m}, \quad i = 1, 2, \ldots, 4m+1,$$

saab projektsiooniruumi F_n baasfunktsioone kirjutada ümber kujul

$$\psi_i = \psi 2_{4i-3} + \psi 2_{4i-2} + \psi 2_{4i-1} + \psi 2_{4i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{34}$$

7.6.2 Funktsiooni $d_{ME}2(n)$ ja vigade arvutusvalemid

Selles alapunktis esitame valemid funktsiooni

$$d_{ME}2(n) := \frac{(v_{n+2} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+2} - v_n\|} \tag{35}$$

väärtuste arvutamiseks. Selle funktsiooni abil saab võrrelda lähislahendeid, mille indeksid erinevad kahe võrra. Tähistame elemendi $v_{n+2} \in F_{n+2}$ kordajad $\{c2_1, \ldots, c2_{4m}\}$. Siit saame esituse $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{4m} c2_i \psi 2_i$. Võrduse (34) abil saab elemendi v_n kirjutada ümber kujul

$$v_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_i = \sum_{i=1}^{m} c_i (\psi 2_{4i-3} + \psi 2_{4i-2} + \psi 2_{4i-1} + \psi 2_{4i}),$$

siit edasi

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_n = \sum_{i=1}^{m} \big(& (c2_{4i-3} - c_i)\psi 2_{4i-3} + (c2_{4i-2} - c_i)\psi 2_{4i-2} \\ & + (c2_{4i-1} - c_i)\psi 2_{4i-1} + (c2_{4i} - c_i)\psi 2_{4i} \big), \end{aligned}$$

millest

$$
\begin{aligned}
(v_{n+2}-v_n,f_\delta) = \sum_{i=1}^{m}(c2_{4i-3}-c_i)\int_{t2_{4i-3}}^{t2_{4i-2}} f_\delta(t)dt + \sum_{i=1}^{m}(c2_{4i-2}-c_i)\int_{t2_{4i-2}}^{t1_{4i-1}} f_\delta(t)dt \\
+\sum_{i=1}^{m}(c2_{4i-1}-c_i)\int_{t2_{4i-1}}^{t1_{4i}} f_\delta(t)dt + \sum_{i=1}^{m}(c2_{4i}-c_i)\int_{t2_{4i}}^{t1_{4i+1}} f_\delta(t)dt.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Funktsiooni $d_{ME}2(n)$ nimetaja arvutamisel kasutame valemit

$$
\begin{aligned}
\|v_{n+2}-v_n\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{t2_{4i-3}}^{t2_{4i-2}} + \int_{t2_{41-2}}^{t2_{4i-1}} + \int_{t2_{4i-1}}^{t2_{4i}} + \int_{t2_{4i}}^{t2_{4i+1}}\right)\left(v_{n+2}(t)-v_n(t)\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{m}\left((c2_{4i-3}-c_i)^2+(c2_{4i-2}-c_i)^2+(c2_{4i-1}-c_i)^2+(c2_{4i}-c_i)^2\right).
\end{aligned}
\tag{37}
$$

7.6.3 Programmi kirjeldus

Programm *vvmd2* sisendandmeteks on programmiga *vvmd* leitud parameetrid n_{ME}, konkreetsed veatasemed δ ja kõik programmi *vvmd* juures ära toodud sisendandmed. Programm *vvmd2* leiab suurused $(B_m)_{ij}$ ja $(b_m)_j$ valemite (22)-(25) abil ning nende põhjal kordajad $\{c2_1,\dots,c2_m\}$. Veel arvutatakse funktsiooni $d_{ME}2(n)$ väärtused seose (35) abil, mis kasutab valemeid (36)-(37). Diskretiseerimisparameetriks n on funktsiooni d_{ME} põhjal leitud indeksist n_{ME} ühe võrra suurem ehk $n_{ME}+1$. Programm väljastab suurused $n_{ME}+1$ ja vastavad $d_{ME}2$ väärtused, mille põhjal valitakse uued n_{ME} väärtused vastavalt igale veatasemele δ. Veatasemed δ on ka sellel juhul valitud hulgast (31).

Programmi täielik tekst on esitatud 4. lisas.

7.7 Phillipsi probleem

Järgnevalt vaatleme normeeritud Phillipsi probleemi (vt [2])

$$
\int_{-6}^{6}\phi(t-s)u(s)ds = \frac{6-|t|}{15}\left(1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)+\frac{3}{10\pi}\sin\left(\frac{\pi|t|}{3}\right),
$$

kus

$$
\phi(x) = \begin{cases} 1+\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right), & \text{kui}|x|<3; \\ 0, & \text{kui}|x|\geqslant 3. \end{cases}
$$

Võtame $H=F=L_2(-6,6)$ ja projektsiooniruum F_n koosnegu tükiti konstantsetest funktsioonidest lõigus $[-6,6]$.

7.7.1 Arvutusvalemid

Suuruseid $(B_m)_{ij}$ leiame valemiga

$$(B_m)_{ij} = \big(A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)\big) = \int_a^b \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t-s)dt \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi(t-s)dt \right) ds. \tag{38}$$

Vea arvutamiseks kasutame valemit

$$\|u_n - u_*\| = \sqrt{\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} (c_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t-s)dt) - u_*(s) \right)^2 ds}.$$

Ülejäänud arvutusvalemid $(b_m)_j$, d_{ME}, $d_{ME}2$ leidmiseks on samad, mis on eelnevates alapunktides esitatud. Diskretiseerimisparameetrid valime jadast (26) $n = 1, 2, \ldots$ korral.

7.7.2 Programmide kirjeldus

Varem mainitud programmi *Vork* abil leitakse seosega (20) määratud sõlmed t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Programm *vvm* leiab suurused $(B_m)_{ij}$ ja $(b_m)_j$ valemite (38) ja (25) abil ning nende põhjal avaldises (19) sisalduvad kordajad $\{c_1, \ldots, c_m\}$. Veel arvutatakse lähislahendi viga $\|u_n - u_*\|$, funktsiooni $d_{ME}(n)$ väärtused seose (28) abil, kasutades valemeid (29)-(30), ning nende põhjal parameetrid n_{opt} ja n_{ME} iga veataseme korral.

Sisendandmeteks on integreerimisvahemiku alguspunkt a, lõpp-punkt b, ülesande täpne lahend u_* ja vektor vabaliikme veatasemetega δ. Ülesande väljakutsumise juures peab ette andma vahemiku $[n1, n2]$, milles diskretiseerimisparameetreid (26) vaatleme.

Programm *vvm2* kasutab kordajate leidmiseks samuti valemeid (38) ja (25). Funktsiooni $d_{ME}2(n)$ väärtused leitakse valemi (35) abil, kasutatakse valemeid (36)-(37). Sisendiks on lisaks eelnevale programmis *vvm* leitud parameetrid n_{ME} ja konkreetne veatase δ. Diskretiseerimisparameetriks n on funktsiooni d_{ME} põhjal leitud indeksist n_{ME} ühe võrra suurem ehk $n_{ME}+1$. Programm väljastab suurused $n_{ME}+1$ ja vastavad $d_{ME}2$ väärtused, mille põhjal valitakse uued n_{ME} väärtused vastavalt igale veatasemele δ. Nende ülesannete juures omandab veatase δ samuti väärtuseid hulgast (31). Häiritud vabaliikmeks on võetud

$$f_\delta(t) = f(t) + \delta\,\frac{\cos(10t)}{\sqrt{6}}.$$

Programmide täielikud tekstid on toodud 5. lisas.

8 Numbrilised näited

Näiteülesannetena vaatleme esimest (ülesanne 1), teist (ülesanne 2) ja kolmandat (ülesanded 3, 4) järku diferentseerimisülesandeid ning Phillipsi probleemi. Ülesanded on valitud nii, et täpsel lahendil on kuju $u_*(t) = t^r - 1$, kus r omandab väärtuseid hulgast $\{\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$. Ülesannete järel on esmalt toodud numbrilised tulemused koondtabelitena, milles on esitatud igale veatasemele vastav optimaalne parameeter $m_{opt} = 2^{n_{opt}-1}$, monotoonse vea reegli abil leitud parameetrid m_{ME} ja $m_{ME}2$ vastavalt järjestikuste ja kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendeid võrreldes. Lisaks on toodud vastava funktsiooni $d_{ME}2$ väärtused, et võrrelda varem leitud parameetri m_{ME} alusel lähislahendeid indeksitega $n_{ME} - 1$ ja $n_{ME} + 1$. Juhul, kui $m_{ME} = 1$, siis jätame $d_{ME}2$ esitamata. Järgmistes lahtrites esitame parameetritele m_{opt}, m_{ME} ja $m_{ME}2$ vastavate lähislahendite vead (tähised vastavalt $e_{m_{opt}}$, $e_{m_{ME}}$ ja $e_{m_{ME}2}$).

Järgmisena on ära toodud tabelid ühe lõigu tükeldamise tulemuste kohta. Tabelis on toodud parameetrid m_{opt}, m_{ME} ning lõigu tükeldamisel leitud parameetrid $m_{ME}3$, mis on parameetrist m_{ME} suuremad sel juhul, kui funktsiooni (32) väärtus oli suurem vastavast veanivoost. Veel on ära toodud funktsiooni $d'_{ME}(m_{ME})$ väärtused vastavalt valemile (32), mille põhjal langetasime otsuse projektsiooniruumi mõõtme suurendamise või samaks jätmise kohta. Funktsiooni $d'_{ME}(m_{ME})$ väärtused on tabelis tähise $d_{ME}3$ all. Viimases veerus on lõigu tükeldamisel saadud parameetritele vastavad lähislahendite vead (tähis $e_{m_{ME}3}$).

Märkus. Ülesande 1 korral on poolitatud esimest alamlõiku, ülesannetes 2, 3 ja 4 aga teist alamlõiku.

Viimasena on iga ülesande juures toodud tulemused kahe lähislahendi lineaarkombinatsioonide kohta. Vasakul ülemises nurgas on toodud antud juhule vastav veatase δ, selle all vertikaalses veerus suuruste α väärtused ning selle kõrval horisontaalselt väärtused β. See on vastav väljavõtt tabeli sellest osast, kus tulemused ilmnesid olevat kõige paremad. Ülemises pooles tabelist on näha funktsiooni (33) väärtused iga vastava α ja β korral. Allpool on nendele funktsiooni väärtustele vastavad uue lähislahendi vead. Tabeli all on esitatud võrdluseks esialgselt valituks osutunud lähislahendi u_n viga. Tulemused on toodud nende vigade δ korral, kus oli võimalik vähemalt ühe α ja β väärtuse korral leida garanteeritult täpsem lähislahend.

8.1 Ülesanne 1

$$u_*(t) = t^{1/3} - 1, \quad f(t) = \frac{3t^{4/3}}{4} - t, \quad l = 1$$

Tabel 1: Kahe võrra erineva indeksiga lähislahendid

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}2$	$d_{ME}2$	e_{opt}	$e_{m_{ME}}$	$e_{m_{ME}2}$
10^{-1}	1	1	1	-	0.183	0.183	0.183
10^{-2}	2	1	1	-	0.046	0.068	0.068
10^{-3}	16	2	4	0.060	0.011	0.034	0.019
10^{-4}	64	8	16	0.044	3.42e-3	0.011	6.35e-3
10^{-5}	$\geqslant 256$	32	64	0.033	$\leqslant$ 2.40e-3	4.02e-3	2.95e-3

Tabel 2: Ühe lõigu tükeldamine

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}3$	$d_{ME}3$	$e_{m_{ME}3}$
10^{-1}	1	1	1	1.90e-2	0.183
10^{-2}	2	1	1	2.70e-3	0.068
10^{-3}	16	2	3	1.02e-3	0.020
10^{-4}	64	8	8	8.31e-5	0.011
10^{-5}	$\geqslant 256$	32	32	6.73e-6	4.02e-3

Tabel 3: Kahe lähislahendi lineaarkombinatsioon

$\delta = 10^{-3}$	0.1	0.15	0.2
0.8	-8.11e-4	7.09e-4	1.20e-3
0.85	6.85e-4	1.14e-3	6.56e-4
0.9	1.09e-3	6.31e-4	-6.17e-4
0.8	0.039	0.027	0.021
0.85	0.027	0.020	0.024
0.9	0.020	0.024	0.035

$$\|u_n - u_*\| = 0.034$$

8.2 Ülesanne 2

$$u_*(t) = t^{5/2} - 1, \quad f(t) = \frac{t^2(8t^{5/2} - 63)}{126}, \quad l = 2$$

Tabel 4: Kahe võrra erineva indeksiga lähislahendid

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}2$	$d_{ME}2$	e_{opt}	$e_{m_{ME}}$	$e_{m_{ME}2}$
10^{-1}	1	1	1	-	0.556	0.556	0.556
10^{-2}	2	1	1	-	0.319	0.340	0.340
10^{-3}	4	2	4	0.014	0.110	0.194	0.110
10^{-4}	8	8	16	0.001	0.035	0.035	0.065
10^{-5}	16	16	32	0.001	0.012	0.012	0.018

Tabel 5: Ühe lõigu tükeldamine

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}3$	$d_{ME}3$	$e_{m_{ME}3}$
10^{-1}	1	1	1	3.70e-2	0.556
10^{-2}	2	1	1	7.04e-3	0.340
10^{-3}	4	2	3	1.06e-3	0.084
10^{-4}	8	8	8	4.41e-6	0.035
10^{-5}	16	16	16	3.17e-7	0.012

Tabel 6: Kahe lähislahendi lineaarkombinatsioon

$\delta = 10^{-3}$	0.7	0.75	0.8
0.2	6.59e-4	1.18e-3	1.38e-3
0.25	1.18e-3	1.34e-3	1.22e-3
0.3	1.31e-3	1.20e-3	8.65e-4
0.2	0.179	0.168	0.165
0.25	0.162	0.159	0.165
0.3	0.152	0.158	0.173

$$\|u_n - u_*\| = 0.194$$

8.3 Ülesanne 3

$$u_*(t) = t^{3/2} - 1, \quad f(t) = t^3 \left(\frac{16t^{3/2} - 105}{630} \right), \quad l = 3$$

Tabel 7: Kahe võrra erineva indeksiga lähislahendid

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}2$	$d_{ME}2$	e_{opt}	$e_{m_{ME}}$	$e_{m_{ME}2}$
10^{-1}	1	1	1	-	1.599	1.599	1.599
10^{-2}	1	1	1	-	0.359	0.359	0.359
10^{-3}	2	1	1	-	0.309	0.323	0.323
10^{-4}	4	2	4	2.79e-4	0.210	0.211	0.210
10^{-5}	4	4	8	6.13e-5	0.100	0.100	0.115

Tabel 8: Ühe lõigu tükeldamine

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}3$	$d_{ME}3$	$e_{m_{ME}3}$
10^{-1}	1	1	1	3.70e-2	1.599
10^{-2}	1	1	1	4.09e-3	0.359
10^{-3}	2	1	1	7.70e-4	0.323
10^{-4}	4	2	3	1.03e-4	0.113
10^{-5}	4	4	4	1.18e-6	0.100

Tabel 9: Kahe lähislahendi lineaarkombinatsioon

$\delta = 10^{-3}$	0.85	0.9	0.95
0.05	1.17e-3	1.39e-3	1.50e-3
0.1	1.41e-3	1.46e-3	1.46e-3
0.15	1.43e-3	1.43e-3	1.39e-3
0.05	0.314	0.308	0.306
0.1	0.292	0.289	0.289
0.15	0.273	0.273	0.276

$$\|u_n - u_*\| = 0.323$$

8.4 Ülesanne 4

$$u_*(t) = t^{5/2} - 1, \quad f(t) = t^3 \left(\frac{16t^{5/2} - 231}{1386} \right), \quad l = 3$$

Tabel 10: Kahe võrra erineva indeksiga lähislahendid

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}2$	$d_{ME}2$	e_{opt}	$e_{m_{ME}}$	$e_{m_{ME}2}$
10^{-1}	1	1	1	-	1.627	1.627	1.627
10^{-2}	1	1	1	-	0.468	0.468	0.468
10^{-3}	2	1	1	-	0.382	0.441	0.441
10^{-4}	4	2	4	3.32e-4	0.240	0.309	0.240
10^{-5}	8	4	8	7.97e-5	0.124	0.154	0.124

Tabel 11: Ühe lõigu tükeldamine

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}3$	$d_{ME}3$	$e_{m_{ME}3}$
10^{-1}	1	1	1	3.70e-2	1.627
10^{-2}	1	1	1	4.21e-3	0.468
10^{-3}	2	1	1	8.85e-4	0.441
10^{-4}	4	2	3	1.59e-4	0.168
10^{-5}	8	4	4	2.47e-6	0.154

Tabel 12: Kahe lähislahendi lineaarkombinatsioon

$\delta = 10^{-3}$	0.7	0.75	0.8
0.2	1.51e-3	1.56e-3	1.59e-3
0.25	1.53e-3	1.55e-3	1.55e-3
0.3	1.50e-3	1.50e-3	1.48e-3
0.2	0.379	0.374	0.372
0.25	0.360	0.357	0.357
0.3	0.344	0.344	0.347

$$\|u_n - u_*\| = 0.441$$

Tabel 13: Kahe lähislahendi lineaarkombinatsioon

$\delta = 10^{-4}$	0.8	0.85	0.9
0.1	8.75e-5	1.08e-4	1.13e-4
0.15	1.07e-4	1.10e-4	1.04e-4
0.2	1.07e-4	1.03e-4	9.12e-5
0.1	0.293	0.288	0.287
0.15	0.277	0.276	0.280
0.2	0.266	0.270	0.278

$$\|u_n - u_*\| = 0.309$$

8.5 Phillipsi probleem

Tabel 14: Kahe võrra erineva indeksiga lähislahendid

δ	m_{opt}	m_{ME}	$m_{ME}2$	$d_{ME}2$	e_{opt}	$e_{m_{ME}}$	$e_{m_{ME}2}$
10^{-1}	8	4	8	0.265	2.1e-2	8.6e-2	2.1e-2
10^{-2}	16	8	16	0.178	3.07e-3	7.03e-3	3.07e-3
10^{-3}	16	8	16	0.237	1.06e-3	6.74e-3	1.06e-3
10^{-4}	16	16	32	0.007	1.01e-3	1.01e-3	9.54e-3
10^{-5}	32	16	32	0.083	9.94e-4	1.01e-3	9.94e-4

8.6 Numbriliste tulemuste interpretatsioon

Numbrilised tulemused kinnitavad teoreetilist tulemust, et iga veataseme δ korral saab monotoonse vea reeglit kasutades leida indeksi n_{ME} nii, et lähislahendi vead kahanevad monotoonselt, st

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_{n-1} - u_*\|, \quad n = 1, 2, \ldots, n_{ME}.$$

Saab näidata, et l-kordse diferentseerimise ülesandes $\chi_n^* \sim n^l$, sellest tulenevalt olid parameetrite n_{opt} ja n_{ME} suurused kõrgema järgu diferentseerimisülesannete puhul väiksemad. Optimaalne parameeter n_{opt} oli esimest järku diferentseerimisülesannete korral tihti oluliselt suurem kui leitud parameeter n_{ME}, kuid järgu suurenemisel parameetrite vahelised erinevused vähenesid. Ülesannete 1 ja 2 puhul ei õnnestunud suure arvutuste mahu tõttu optimaalset parameetrit n_{opt} leida.

Paljudes ülesannetes oli kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite võrdlemisel tulemused väga head ja leitud parameetrid optimaalsetega isegi ühtivad, kuid pole garanteeritud, et $m_{ME}2 \leqslant m_{opt}$. Parameetritele $m_{ME}2$ ja m_{opt} vastavate lähislahendite vigade suhted jäid enamikes ülesannetes piirkonda $[1, 2]$, olenemata sellest, kas funktsiooni $d_{ME}2$ alusel valitud parameeter ületas optimaalset või mitte. Vaid Phillipsi probleemi puhul oli vigade suhe suurem. Parameeter $m_{ME}2$ osutus optimaalsest m_{opt} suuremaks väiksemate veatasemete korral.

Ühe lõigu tükeldamine andis meie valitud ülesannetes tulemusi esmakordsel poolitamisel, kuid edasine tükeldamine ei osutunud otstarbekaks üheski situatsioonis. Nii teooriale kui näiteülesannetele tuginedes võib kinnitada, et see meetod võimaldab mitmetel juhtudel diskretiseerimistaset suurendada, garanteerides optimaalsele lähedasema projektsiooniruumi mõõtme.

Viimaste lähislahendite lineaarkombinatsioon andis tulemusi pigem väiksemate veatasemete korral. Nendel juhtudel, kus seda meetodit oli võimalik rakendada, oli sobivaid α ja β kombinatsioone üsna palju, mistõttu leidus mitmeid eri võimalusi täpsema lähislahendi valimiseks. Ilmnes, et paljudel juhtudel andsid soovitud tulemusi lähislahendite kumerad lineaarkombinatsioonid ($\alpha + \beta = 1$), kuid seda mitte reeglina.

Üldjoontes tundus kolmest erinevast lähislahendi järeltäpsustamise võttest olevat parim ühe lõigu tükeldamine. Selle meetodi korral osutusid uue lähislahendi vead täpsemaks kui kahe lähislahendi lineaarkombinatsiooni puhul. Kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite võrdlus andis enamikul juhtudel samuti paremaid tulemusi kui standardne monotoonse vea reegel.

Viited

[1] A. Ganina, *Mittekorrektsete ülesannete iseregulariseerimisest vähima vea projektsioonimeetodiga.* Magistritöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2009.

[2] A. Ganina, U. Hämarik, U. Kangro, *On the self-regularization of ill-posed problems by the least error projection method.* Math. Model. Anal., (to appear), 2014.

[3] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[4] E. Tamme, *Integraalvõrrandite lahendusmeetodid.* Tartu Ülikool, Tartu, 1989.

[5] Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников, *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* Наука, Москва, 1986.

Lisad

Lisa 1. Programmid standardse monotoonse vea reegli kohta

$$\mathrm{Vork}(m,a,b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } \ i \in 0..m \\ \quad T_i \leftarrow a + (b - a)\cdot\dfrac{i}{m} \\ T \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{vvmd}(n1,n2,d) := \\
\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1 \\
\quad\quad \text{for } i \in 0..2^{n2} \\
\quad\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow 0 \\
\quad \text{for } n \in n1..n2 \\
\quad\quad m \leftarrow 2^{n} \\
\quad\quad mn_{n-n1} \leftarrow 2^{n} \\
\quad\quad T \leftarrow \mathrm{Vork}(m,a,b) \\
\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1 \\
\quad\quad\quad \text{for } j \in 0..m-1 \\
\quad\quad\quad\quad AApsi_{i,i} \leftarrow \displaystyle\int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]^2 dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\right]^2 dt \\
\quad\quad\quad\quad AApsi_{i,j} \leftarrow \displaystyle\int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i<j \\
\quad\quad\quad\quad AApsi_{i,j} \leftarrow \displaystyle\int_a^{T_j} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i>j \\
\quad\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1 \\
\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1 \\
\quad\quad\quad\quad fpsi_{i,j} \leftarrow \displaystyle\int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,d_j)\, dt \\
\quad\quad\quad Kor^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi, fpsi^{\langle j\rangle}\right) \\
\quad\quad\quad viga_{n-n1,j} \leftarrow \sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\left(Kor_{i,j}\cdot fpsi_{i,j}\right) + \int_a^b (u\_t(t))^2\, dt - 2\cdot\sum_{i=0}^{m-1}\left[Kor_{i,j}\cdot\left[\int_a^{T_i}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot u\_t(t)\, dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\cdot u\_t(t)\, dt\right]\right]} \\
\quad\quad\quad dME_{n-n1-1,j} \leftarrow \dfrac{\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i,j} - kor_{i,j}\right)\cdot fpsi_{2\cdot i,j}\right] + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i+1,j} - kor_{i,j}\right)\cdot fpsi_{2\cdot i+1,j}\right]}{2\sqrt{\dfrac{(b-a)}{m}\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i,j} - kor_{i,j}\right)^2 + \left(Kor_{2\cdot i+1,j} - kor_{i,j}\right)^2\right]\right]}} \quad \text{if } n>n1 \\
\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1 \\
\quad\quad\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow Kor_{i,j} \\
\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1 \\
\quad\quad m\_opt_j \leftarrow 2^{n1} \\
\quad\quad n \leftarrow n1+1 \\
\quad\quad \text{while } n \le n2 \wedge viga_{n-n1,j} < viga_{n-n1-1,j} \\
\quad\quad\quad m\_opt_j \leftarrow 2^{n} \\
\quad\quad\quad n \leftarrow n+1 \\
\quad\quad m\_ME_j \leftarrow 2^{n1} \\
\quad\quad n \leftarrow n1+1 \\
\quad\quad \text{while } n \le n2 \wedge dME_{n-n1-1,j} > d_j \\
\quad\quad\quad m\_ME_j \leftarrow 2^{n} \\
\quad\quad\quad n \leftarrow n+1 \\
\quad pais \leftarrow \mathrm{augment}\left(\text{"delta"}, d^{T}, d^{T}\right) \\
\quad \mathrm{stack}\left(pais, \mathrm{augment}\left(mn, viga, \mathrm{stack}\left(dME, d^{T}\right)\right), \mathrm{augment}\left(\text{"m\_opt,m\_ME"}, m\_opt^{T}, m\_ME^{T}\right)\right) \\
\quad m\_ME
\end{array}
$$

Lisa 2. Programmid ühe lõigu tükeldamisvõtte kohta

```
Vork2(m,a,b) := | T_0 ← a
                | for i ∈ 2..m + 1
                |   T_i ← a + (b − a)·(i − 1)/m
                | T_1 ← (T_0 + T_2)/2
                | T
```

```
Vork3(m,a,b) := | for i ∈ 0
                |   T_i ← a
                | if m = 1
                |   | T_1 ← 0.5
                |   | T_2 ← 1
                | if m ≠ 1
                |   | for i ∈ 1
                |   |   T_i ← a + (b − a)·i/m
                |   | for i ∈ 3..m + 1
                |   |   T_i ← a + (b − a)·(i − 1)/m
                |   | for i ∈ 2
                |   |   T_i ← (T_{i−1} + T_{i+1})/2
                | T
```

```
Vork4(m,a,b) := | T_0 ← a
                | for i ∈ 3..m + 2
                |   T_i ← a + (b − a)·(i − 2)/m
                | T_2 ← (T_0 + T_3)/2
                | T_1 ← (T_0 + T_2)/2
                | T
```

```
Vork5(m,a,b) := | T_0 ← a
                | for i ∈ 3..m + 2
                |   T_i ← a + (b − a)·(i − 2)/m
                | T_1 ← (T_0 + T_3)/2
                | T_2 ← (T_1 + T_3)/2
                | T
```

```
Vork6(m,a,b) := | T2_0 ← a
                | T ← Vork3(m,a,b)
                | if m = 1
                |   | T2_1 ← 0.25
                |   | T2_2 ← 0.5
                |   | T2_3 ← 1
                | if m ≠ 1
                |   | T2_1 ← T_1
                |   | for i ∈ 3..m + 2
                |   |   T2_i ← T_(i−1)
                |   | T2_2 ← (T_1 + T_2)/2
                | T2
```

```
Vork7(m,a,b) := | T2_0 ← a
                | T ← Vork3(m,a,b)
                | if m = 1
                |   | T2_1 ← 0.5
                |   | T2_2 ← 0.75
                |   | T2_3 ← 1
                | if m ≠ 1
                |   | for i ∈ 0..2
                |   |   T2_i ← T_i
                |   | T2_3 ← (T_2 + T_3)/2
                |   | for i ∈ 4..m + 2
                |   |   T2_i ← T_(i−1)
                | T2
```

$$\mathrm{tyk}(n1,n2,d) :=$$

$$\text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$
$$\quad \text{for } i \in 0..2^{n2}$$
$$\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow 0$$
$$\text{for } n \in n1..n2$$
$$\quad m \leftarrow 2^n$$
$$\quad mn_{n-n1} \leftarrow 2^n$$
$$\quad T \leftarrow \mathrm{Vork}(m,a,b)$$
$$\quad \text{for } i \in 0..m-1$$
$$\quad\quad \text{for } j \in 0..m-1$$

$$AApsi_{i,i} \leftarrow \int_a^{T_i}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]^2 dt+\int_{T_i}^{T_{i+1}}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\right]^2 dt$$

$$AApsi_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_i}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_j-t)^1}{1!}\right]dt+\int_{T_i}^{T_{i+1}}\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_j-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\,dt \quad \text{if } i<j$$

$$AApsi_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_j}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_j-t)^1}{1!}\right]dt+\int_{T_j}^{T_{j+1}}\left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}\,dt \quad \text{if } i>j$$

$$\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$
$$\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1$$
$$\quad\quad\quad fpsi_{i,j} \leftarrow \int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,d_j)\,dt$$
$$\quad\quad Kor^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi, fpsi^{\langle j\rangle}\right)$$
$$\quad m2 \leftarrow 2^n+1$$
$$\quad mn2_{n-n1} \leftarrow 2^n+1$$
$$\quad T2 \leftarrow \mathrm{Vork2}(m,a,b)$$
$$\quad \text{for } i \in 0..m2-1$$
$$\quad\quad \text{for } j \in 0..m2-1$$

$$AApsi2_{i,i} \leftarrow \int_a^{T2_i}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]^2 dt+\int_{T2_i}^{T2_{i+1}}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}\right]^2 dt$$

$$AApsi2_{i,j} \leftarrow \int_a^{T2_i}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right]dt+\int_{T2_i}^{T2_{i+1}}\left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}\,dt \quad \text{if } i<j$$

$$AApsi2_{i,j} \leftarrow \int_a^{T2_j}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right]dt+\int_{T2_j}^{T2_{j+1}}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!}\,dt \quad \text{if } i>j$$

$$\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$
$$\quad\quad \text{for } i \in 0..m2-1$$
$$\quad\quad\quad fpsi2_{i,j} \leftarrow \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} f(t,d_j)\,dt$$
$$\quad\quad Kor2^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi2, fpsi2^{\langle j\rangle}\right)$$
$$\quad\quad psi2(t,i) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } t \ge T2_i \wedge t \le T2_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$\quad\quad psi(t,i) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } t \ge T_i \wedge t \le T_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$viga2_{n-n1,j} \leftarrow \sqrt{\sum_{i=0}^{m2-1}\left(Kor2_{i,j}\cdot fpsi2_{i,j}\right)+\int_a^b (u\_t(t))^2\,dt-2\cdot\sum_{i=0}^{m2-1}\left[Kor2_{i,j}\cdot\left[\int_a^{T2_i}\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}-\frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot u\_t(t)\,dt+\int_{T2_i}^{T2_{i+1}}\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}\cdot u\_t(t)\,dt\right]\right]}$$

$$dME2_{n-n1,j} \leftarrow \frac{\sum_{i=0}^{m2-1}\left(Kor2_{i,j}\cdot fpsi2_{i,j}\right)-\sum_{i=0}^{m-1}\left(Kor_{i,j}\cdot fpsi_{i,j}\right)}{2\sqrt{\int_a^b\left[\sum_{i=0}^{m2-1}\left(Kor2_{i,j}\cdot psi2(t,i)\right)-\sum_{i=0}^{m-1}\left(Kor_{i,j}\cdot psi(t,i)\right)\right]^2 dt}}$$

$$pais \leftarrow \mathrm{augment}\left(\text{"delta"}, d^T, d^T\right)$$
$$\mathrm{stack}(pais, \mathrm{augment}(mn2, viga2, dME2))$$

Lisa 3. Programmid lineaarkombinatsiooni võtte kohta

$$\mathrm{linkomb}(n1,n2,d) := \ \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$

$$\quad \text{for } i \in 0..2^{n2}$$

$$\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow 0$$

$$\text{for } n \in n1..n2-4$$

$$\quad m \leftarrow 2^{n}$$

$$\quad mn_{n-n1} \leftarrow 2^{n}$$

$$\quad T \leftarrow \mathrm{Vork}(m,a,b)$$

$$\quad \text{for } i \in 0..m-1$$

$$\quad\quad \text{for } j \in 0..m-1$$

$$AApsi_{i,i} \leftarrow \int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]^2 dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\right]^2 dt$$

$$AApsi_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i<j$$

$$AApsi_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_j} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T_{j+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i>j$$

$$\quad \text{for } j \in 0$$

$$\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1$$

$$\quad\quad\quad fpsi_{i,j} \leftarrow \int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,d_j)\, dt$$

$$\quad\quad Kor^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi, fpsi^{\langle j\rangle}\right)$$

$$\quad\quad T2 \leftarrow \mathrm{Vork}\left(\frac{m}{2},a,b\right)$$

$$\alpha \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0.75 \\ 0.8 \\ 0.85 \\ 0.9 \\ 0.95 \\ 1 \\ 1.05 \\ 1.1 \\ 1.15 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad \beta \leftarrow \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.2 \\ -0.15 \\ -0.1 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.15 \\ 0.2 \\ 0.25 \\ 0.3 \\ 0.35 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Aps(t,i) \leftarrow \begin{cases} \dfrac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} - \dfrac{(T2_i-t)^1}{1!} & \text{if } t < T2_i \\ \dfrac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} & \text{if } T2_i < t \le T2_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{for } k \in 0..m-1$$

$$Aps1(t,k) \leftarrow \begin{cases} \dfrac{(T_{k+1}-t)^1}{1!} - \dfrac{(T_k-t)^1}{1!} & \text{if } t < T_k \\ \dfrac{(T_{k+1}-t)^1}{1!} & \text{if } T_k < t \le T_{k+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D(\alpha,\beta) \leftarrow \frac{2\cdot\left[\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left[\left[\alpha\cdot Kor_{2\cdot i,j} + (\beta-1)\cdot kor_{i,j}\right]\cdot fpsi_{2\cdot i,j}\right] + \left[\left[\alpha\cdot Kor_{2\cdot i+1,j} + (\beta-1)\cdot kor_{i,j}\right]\cdot fpsi_{2\cdot i+1,j}\right]\right]\right] - \left[\alpha^2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(Kor_{2\cdot i,j}\cdot fpsi_{2\cdot i,j} + Kor_{2\cdot i+1,j}\cdot fpsi_{2\cdot i+1,j}\right) + \beta^2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[kor_{i,j}\cdot\left(fpsi_{2\cdot i,j} + fpsi_{2\cdot i+1,j}\right)\right] + 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 kor_{i,j}\cdot Kor_{k,j}\cdot Aps(t,i)\cdot Aps1(t,k)\, dt\right)\right] + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[kor_{i,j}\cdot\left(fpsi_{2\cdot i,j} + fpsi_{2\cdot i+1,j}\right)\right]}{2\sqrt{\frac{(b-a)}{m}\left[\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left[\alpha\cdot Kor_{2\cdot i,j} + (\beta-1)\cdot kor_{i,j}\right]^2 + \left[\alpha\cdot Kor_{2\cdot i+1,j} + (\beta-1)\cdot kor_{i,j}\right]^2\right]\right]}} \quad \text{if } n > n1$$

$$viga(\alpha,\beta) \leftarrow \sqrt{\alpha^2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(Kor_{2\cdot i,j}\cdot fpsi_{2\cdot i,j} + Kor_{2\cdot i+1,j}\cdot fpsi_{2\cdot i+1,j}\right) + \beta^2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[kor_{i,j}\cdot\left(fpsi_{2\cdot i,j} + fpsi_{2\cdot i+1,j}\right)\right] + 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 kor_{i,j}\cdot Kor_{k,j}\cdot Aps(t,i)\cdot Aps1(t,k)\, dt\right) + \int_a^b (u\_t(t))^2\, dt - 2\cdot\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_0^1 \alpha\cdot Kor_{k,j}\cdot Aps1(t,k)\cdot u\_t(t)\, dt\right) + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(\int_0^1 \beta\cdot kor_{i,j}\cdot Aps(t,i)\cdot u\_t(t)\, dt\right)\right]} \quad \text{if } n > n1$$

$$\text{for } i \in 0..\mathrm{rows}(\alpha)-1$$

$$\quad \text{for } k \in 0..\mathrm{rows}(\beta)-1$$

$$\quad\quad K_{i,k} \leftarrow D(\alpha_i,\beta_k) \quad \text{if } n > n1$$

$$\quad\quad M_{i,k} \leftarrow viga(\alpha_i,\beta_k) \quad \text{if } n > n1$$

$$\text{for } i \in 0..m-1$$

$$\quad kor_{i,j} \leftarrow Kor_{i,j}$$

$$\mathrm{stack}\left(\mathrm{augment}\left(d_j,\beta^T\right), \mathrm{augment}(\alpha,K), \mathrm{augment}\left(d_j,\beta^T\right), \mathrm{augment}(\alpha,M)\right)$$

Lisa 4. Programmid kahe võrra erinevate indeksitega lähislahendite kohta

$$\mathrm{vvmd2}(n1,n2,d) := $$

$$m\_ME \leftarrow \mathrm{vvmd}(n1,n2,d)$$

$$\text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$

$$\quad \text{for } i \in 0..2^{n2}$$

$$\quad\quad kor2_{i,j} \leftarrow 0$$

$$\text{for } s \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$

$$\quad m2 \leftarrow m\_ME_s \cdot 2$$

$$\quad mn2_{0,s} \leftarrow m\_ME_s \cdot 2$$

$$\quad T2 \leftarrow \mathrm{Vork}(m2,a,b)$$

$$\quad \text{for } i \in 0..m2-1$$

$$\quad\quad \text{for } j \in 0..m2-1$$

$$\quad\quad\quad AApsi2_{i,i} \leftarrow \int_a^{T2_i} \left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]^2 dt + \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} \left[\left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}\right]^2\right] dt$$

$$\quad\quad\quad AApsi2_{i,j} \leftarrow \int_a^{T2_j} \left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T2_j}^{T2_{j+1}} \left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i > j$$

$$\quad\quad\quad AApsi2_{i,j} \leftarrow \int_a^{T2_i} \left[\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_i-t)^1}{1!}\right]\cdot\left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right] dt + \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} \left[\frac{(T2_{j+1}-t)^1}{1!} - \frac{(T2_j-t)^1}{1!}\right]\cdot\frac{(T2_{i+1}-t)^1}{1!}\, dt \quad \text{if } i < j$$

$$\quad \text{for } j \in s$$

$$\quad\quad \text{for } i \in 0..m2-1$$

$$\quad\quad\quad fpsi2_{i,j} \leftarrow \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} f(t,d_j)\, dt$$

$$\quad\quad Kor2^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi2, fpsi2^{\langle j\rangle}\right)$$

$$\quad\quad dME2_{0,j} \leftarrow \frac{\left[\sum_{i=0}^{\frac{m2}{4}-1}\left[(Kor2_{4\cdot i,j}-kor2_{i,j})\cdot fpsi2_{4\cdot i,j} + (Kor2_{4\cdot i+1,j}-kor2_{i,j})\cdot fpsi2_{4\cdot i+1,j} + (Kor2_{4\cdot i+2,j}-kor2_{i,j})\cdot fpsi2_{4\cdot i+2,j} + (Kor2_{4\cdot i+3,j}-kor2_{i,j})\cdot fpsi2_{4\cdot i+3,j}\right]\right]}{2\cdot\sqrt{\frac{(b-a)}{m2}\cdot\left[\sum_{i=0}^{\frac{m2}{4}-1}\left[(Kor2_{4\cdot i,j}-kor2_{i,j})^2 + (Kor2_{4\cdot i+1,j}-kor2_{i,j})^2 + (Kor2_{4\cdot i+2,j}-kor2_{i,j})^2 + (Kor2_{4\cdot i+3,j}-kor2_{i,j})^2\right]\right]}} \quad \text{if } \mathrm{mod}(m2,4) = 0$$

$$\quad\quad dME2_{0,j} \leftarrow 0 \quad \text{if } k = 1 \wedge m\_ME_j = 1$$

$$\quad\quad \text{for } i \in 0..m2-1$$

$$\quad\quad\quad kor2_{i,j} \leftarrow Kor2_{i,j}$$

$$\text{for } s \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$$

$$\quad mn3_{0,s} \leftarrow mn2_{0,s} \quad \text{if } dME2_{0,s} > d_s$$

$$\quad mn3_{0,s} \leftarrow m\_ME_s \quad \text{otherwise}$$

$$\mathrm{stack}(mn2, mn3, dME2)$$

Lisa 5. Programmid Phillipsi ülesande kohta

$\mathrm{vvm}(n1,n2,d) :=$

$\text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$

$\quad \text{for } i \in 0..2^{n2}$

$\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow 0$

$\text{for } n \in n1..n2$

$\quad m \leftarrow 2^{n}$

$\quad mn_{n-n1} \leftarrow 2^{n}$

$\quad T \leftarrow \mathrm{Vork}(m,a,b)$

$\quad \text{for } i \in 0..m-1$

$\quad\quad \text{for } j \in 0..m-1$

$$AApsi_{i,j} \leftarrow \int_a^b \int_{T_i}^{T_{i+1}} K(t,s)\,dt \cdot \int_{T_j}^{T_{j+1}} K(t,s)\,dt\,ds$$

$\quad \text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$

$\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1$

$$fpsi_{i,j} \leftarrow \int_{T_i}^{T_{i+1}} f\left(t,d_j\right)dt$$

$$Kor^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi, fpsi^{\langle j\rangle}\right)$$

$$viga_{n-n1,j} \leftarrow \sqrt{\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(Kor_{i,j}\cdot\int_{T_i}^{T_{i+1}} K(t,s)\,dt\right) - u\_t(s)\right]^2 ds}$$

$$dME_{n-n1-1,j} \leftarrow \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i,j}-kor_{i,j}\right)\cdot fpsi_{2\cdot i,j}\right] + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i+1,j}-kor_{i,j}\right)\cdot fpsi_{2\cdot i+1,j}\right]}{2\cdot\sqrt{\dfrac{(b-a)}{m}\cdot\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(Kor_{2\cdot i,j}-kor_{i,j}\right)^2+\left(Kor_{2\cdot i+1,j}-kor_{i,j}\right)^2\right]}} \quad \text{if } n > n1$$

$\quad\quad \text{for } i \in 0..m-1$

$\quad\quad\quad kor_{i,j} \leftarrow Kor_{i,j}$

$\text{for } j \in 0..\mathrm{rows}(d)-1$

$\quad m\_opt_j \leftarrow 2^{n1}$

$\quad n \leftarrow n1+1$

$\quad \text{while } n \le n2 \wedge viga_{n-n1,j} \le viga_{n-n1-1,j}$

$\quad\quad m\_opt_j \leftarrow 2^{n}$

$\quad\quad n \leftarrow n+1$

$\quad m\_ME_j \leftarrow 2^{n1}$

$\quad n \leftarrow n1+1$

$\quad \text{while } n \le n2 \wedge dME_{n-n1-1,j} > d_j$

$\quad\quad m\_ME_j \leftarrow 2^{n}$

$\quad\quad n \leftarrow n+1$

$pais \leftarrow \mathrm{augment}\left(\text{"delta"}, d^T, d^T\right)$

$\mathrm{stack}\left(pais, \mathrm{augment}\left(mn, viga, \mathrm{stack}\left(dME, d^T\right)\right), \mathrm{augment}\left(\text{"m\_opt, m\_ME"}, m\_opt^T, m\_ME^T\right)\right)$

m_ME

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vvm2}(n1,n2,d) := \\
&\quad m\_ME \leftarrow \mathrm{vvm}(n1,n2,d) \\
&\quad \text{for } j \in 0..\,\mathrm{rows}(d)-1 \\
&\quad\quad \text{for } i \in 0..\,2^{n2} \\
&\quad\quad\quad kor2_{i,j} \leftarrow 0 \\
&\quad \text{for } s \in 0..\,\mathrm{rows}(d)-1 \\
&\quad\quad m2 \leftarrow m\_ME_s \cdot 2 \\
&\quad\quad mn2_{0,s} \leftarrow m\_ME_s \cdot 2 \\
&\quad\quad T2 \leftarrow \mathrm{Vork}(m2,a,b) \\
&\quad\quad \text{for } i \in 0..\,m2-1 \\
&\quad\quad\quad \text{for } j \in 0..\,i \\
&\quad\quad\quad\quad AApsi2_{i,j} \leftarrow \int_a^b \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} K(t,s)\,dt \cdot \int_{T2_j}^{T2_{j+1}} K(t,s)\,dt\,ds \\
&\quad\quad\quad\quad AApsi2_{j,i} \leftarrow AApsi2_{i,j} \\
&\quad\quad \text{for } j \in s \\
&\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..\,m2-1 \\
&\quad\quad\quad\quad fpsi2_{i,j} \leftarrow \int_{T2_i}^{T2_{i+1}} f\left(t,d_j\right) dt \\
&\quad\quad\quad Kor2^{\langle j\rangle} \leftarrow \mathrm{lsolve}\left(AApsi2, fpsi2^{\langle j\rangle}\right) \\
&\quad\quad\quad dME2_{0,j} \leftarrow \frac{\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m2}{4}-1} \left[\left(Kor2_{4\cdot i,j}-kor2_{i,j}\right)\cdot fpsi2_{4\cdot i,j} + \left(Kor2_{4\cdot i+1,j}-kor2_{i,j}\right)\cdot fpsi2_{4\cdot i+1,j} + \left(Kor2_{4\cdot i+2,j}-kor2_{i,j}\right)\cdot fpsi2_{4\cdot i+2,j} + \left(Kor2_{4\cdot i+3,j}-kor2_{i,j}\right)\cdot fpsi2_{4\cdot i+3,j}\right]\right]}{2\cdot\sqrt{\dfrac{(b-a)}{m2}\cdot\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{m2}{4}-1}\left[\left(Kor2_{4\cdot i,j}-kor2_{i,j}\right)^2 + \left(Kor2_{4\cdot i+1,j}-kor2_{i,j}\right)^2 + \left(Kor2_{4\cdot i+2,j}-kor2_{i,j}\right)^2 + \left(Kor2_{4\cdot i+3,j}-kor2_{i,j}\right)^2\right]\right]}} \ \text{ if } \mathrm{mod}(m2,4) = 0 \\
&\quad\quad\quad dME2_{0,j} \leftarrow 0 \ \text{ if } k = 1 \wedge m\_ME_j = 1 \\
&\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..\,m2-1 \\
&\quad\quad\quad\quad kor2_{i,j} \leftarrow Kor2_{i,j} \\
&\quad \text{for } s \in 0..\,\mathrm{rows}(d)-1 \\
&\quad\quad mn3_{0,s} \leftarrow mn2_{0,s} \ \text{ if } dME2_{0,s} > d_s \\
&\quad\quad mn3_{0,s} \leftarrow m\_ME_s \ \text{ otherwise} \\
&\quad \mathrm{stack}(mn2, mn3, dME2)
\end{aligned}
$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Tuuli Puhkim,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Projektsiooniruumi dimensiooni valikust mittekorrektsete ülesannete iseregulariseerimisel vähima vea meetodiga“, mille juhendaja on dots Uno Hämarik,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **03.06.2014**