TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

640

ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE ESITUSED

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 640 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE ESITUSED

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1983

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 640.
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на эстонском и английском языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор М. Кильп.
Корректоры М. Кильп, В. Фдяйаер.
Подписано к печати 16.03.1983.
МВ 02936.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 3,19.
Печатных листов 4,75.
Тираж 400.
Заказ № 268.
Цена 45 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.
2 - 2

МОРИТА-КОНТЕКСТЫ И МОНОИДЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДАМИ

А.Г.Григорян

Задача исследования моноидов эндоморфизмов свободных полигонов над моноидами была поставлена Л.А.Скорняковым в его докладе на X Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в г. Новосибирске (см. [5]).

В этой работе рассматривается вопрос о характеризации различных классов полугрупп с помощью свойств моноидов эндоморфизмов тех или иных полигонов. В отличие от теории модулей над кольцом, где имеется довольно большое количество результатов подобного рода, полученных разными методами (см., например, [I, I4]), в случае полигонов над моноидом известно лишь несколько теорем в этом направлении. А именно, в работах [5,I2,I3] фактически доказано (точнее, из этих работ следует), что:

I) полугруппа R регулярна и всякий левый идеал в R главный тогда и только тогда, когда моноид эндоморфизмов любого свободного левого R-полигона регулярен ([5], теорема 4);

2) всякий левый идеал моноида R с нулем порождается идемпотентом тогда и только тогда, когда моноид эндоморфизмов любого свободного левого R-полигона регулярен ([I3], теорема 3.8);

3) моноид R с нулем является бэровским слева (соответственно, бэровским справа, риккартовым слева) тогда и только тогда, когда моноид эндоморфизмов любого свободного левого R-полигона обладает тем же свойством ([I2], теорема 4.I);

4) моноид R с нулем является бэровским справа тогда и только тогда, когда моноид эндоморфизмов любого свободного левого R-полигона риккартов справа ([I2], теорема 4.I).

Заметим, кстати, что эти результаты отличаются от своих теоретико-кольцевых аналогов (см. [I]).

В §I настоящей заметки вводится понятие Морита-контекста для полугрупп (ср. [7]) и приводятся различные примеры Морита-контекстов. Абстрактный класс полугрупп $\mathcal{K}$ называется нормальным, если $\mathcal{K}$ вместе с каждой полугруппой R содержит и любую полугруппу S, связанную с R некоторым "хорошим" Морита-контекстом. Далее доказывается метатеорема, утверждающая, в частности, что если $\mathcal{K}$ - нормальный класс полугрупп, то моноид R с нулем принадлежит $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ лежит моноид эндоморфизмов любого (или некоторого) свободного левого R-полигона. В §2 указан ряд примеров нормальных классов полугрупп и развита теория нормальных полугрупповых радикалов, имеющая и самостоятельный интерес. Полученные в §§I и 2 результаты используются в §3, где из вышеуказанной метатеоремы единым образом выводится ряд конкретных результатов о характеризации различных классов моноидов с нулем с помощью моноидов эндоморфизмов свобод бодных (и некоторых других) полигонов.

Условимся под полигонами над моноидом понимать унитарные полигоны, под полигонами над моноидом с нулем - унитарные полигоны с единственным нулем.

Наконец, мы будем пользоваться следующими обозначениями: 0 - нуль полугруппы или полигона; 1 - единица моноида; $\amalg$ - символ копроизведения (в категории полигонов); если V_R $({}_RW)$- правый (левый) полигон над полугруппой R, то $V\otimes_R W =$ $= V\times W/\sim$, где $\sim$ - наименьшее отношение эквивалентности на $V\times W$ такое, что $(vr, w)\sim(v, rw)$, $v\in V$, $w\in W$, $r\in R$; $\&$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ - обычные логические символы.

§I. Морита-контексты, полигоны без кручения в смысле Басса и метатеорема

Морита-контекст (в случае полугрупп) состоит из двух полугрупп R и S, двух биполигонов ${}_RV_S$ и ${}_SW_R$ и двух биполигонных гомоморфизмов $(\,,\,): V\otimes_S W\longrightarrow R$ и $[\,,\,]: W\otimes_R V\longrightarrow S$, удовлетворяющих условиям ассоциативности:

$$v_1[w, v] = (v_1, w)v, \quad [w, v]w_1 = w(v, w_1)$$

для $v, v_1\in V$ и $w, w_1\in W$ (ср. [7]). В дальнейшем мы часто для удобства будем писать просто vw и wv вместо

(v, w) и $[w, v]$ соответственно.

Примером Морита-контекста может служить <u>стандартный Морита-контекст</u> $(R, V, \mathrm{Hom}_R(V,R), \mathrm{End}_R V)$, определенный с помощью левого полигона V над полугруппой R, где гомоморфизмы $(,)$ и $[,]$ задаются так: $(v, \varphi) = (v)\varphi$ и $(v_1)[\varphi, v] = (v_1, \varphi)v$, где $v, v_1 \in V$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(V, R)$.

Частным случаем стандартного Морита-контекста является контекст (R, Re, eR, eRe), где e - идемпотент полугруппы R и умножения совпадают с умножением элементов в R. Корректность этих утверждений проверяется так же, как и в случае модулей над кольцом.

Скажем, что левый полигон V над полугруппой R <u>не имеет кручения в смысле Басса</u>, если для любых различных элементов $v_1, v_2 \in V$ найдется такое $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(V, R)$, что $v_1\varphi \neq v_2\varphi$. В отличие от кольцевого случая не для любого моноида R всякий свободный R-полигон не имеет кручения в смысле Басса. Например, если R - тривиальный (т.е., одноэлементный) моноид, то свободный R-полигон $R \amalg R$, очевидно, не является полигоном без кручения в смысле Басса. Тем не менее, справедлива

<u>Лемма I</u>. Если R - нетривиальный моноид с нулем, то все свободные левые R-полигоны не имеют кручения в смысле Басса.

<u>Доказательство</u>. Пусть $V = \coprod_{i \in I} R_i$, $R_i \cong R$ - свободный левый R-полигон с нулем 0, $v_j \in R_j$, $v_k \in R_k$ $(j, k \in I)$, $v_j \neq v_k$, $v_j \neq 0$. Если $j = k$, то для $\varphi = \coprod_{i \in I} \mathrm{Id}_{R_i}$ $v_j = v_j\varphi \neq v_k\varphi = v_k$. Если же $j \neq k$, то положим $v\varphi = v$, если $v \in R_j$ и $v\varphi = 0$, если $v \in R_i$. Тогда $v_j = v_j\varphi \neq v_k\varphi = 0$. Лемма доказана.

<u>Замечание</u>. Лемма I не верна для произвольного нетривиального моноида с левым нулем. Например, пусть

$$R = \{1, x, y \mid x^2 = x,\ y^2 = y,\ xy = x,\ yx = y\}.$$

Тогда легко убедиться, что свободный левый R-полигон $R \amalg R$ не является полигоном безкручения в смысле Басса.

Назовем Морита-контекст (R, V, W, S) <u>S-точным</u> (ср. [15]), если полугруппа S неодноэлементна и из того, что $vs_1w = vs_2w$ для всех $v \in V$, $w \in W$ (где $s_1, s_2 \in S$) следует $s_1 = s_2$. Легко видеть, что стандартный Морита-контекст, определенный с помощью левого R-полигона V, не имеющего кручения в смысле Басса, является S-точным, где

$S = \mathrm{End}_R V$.

Абстрактный (т.е., замкнутый относительно изоморфизмов) класс полугрупп $\mathcal{K}$ назовем <u>нормальным</u>, если из того, что $R \in \mathcal{K}$, следует $S \in \mathcal{K}$ для любого S-точного Морита-контекста (R, V, W, S).

<u>Лемма 2</u>. Если $\mathcal{K}$ - нормальный класс полугрупп, $R \in \mathcal{K}$, $e^2 = e \in R$, то $eRe \in \mathcal{K}$.

<u>Доказательство</u>. Легко видеть, что Морита-контекст (R, Re, eR, eRe) является eRe-точным. В самом деле, пусть $re \cdot exe \cdot es = re \cdot eye \cdot es$ для любых $r, s \in R$ (где $x, y \in R$). Тогда для $r = s = e$ имеем

$$exe = e^2 \cdot exe \cdot e^2 = e^2 \cdot eye \cdot e^2 = eye.$$

Поэтому $eRe \in \mathcal{K}$ в силу нормальности класса $\mathcal{K}$.

<u>Следствие</u>. Если $\mathcal{K}$ - нормальный класс полугрупп, моноиды R и S Морита-эквивалентны, $R \in \mathcal{K}$, то и $S \in \mathcal{K}$.

<u>Доказательство</u>. В силу теоремы 6.I из [II] $S \cong eRe$ для некоторого $e^2 = e \in R$.

<u>Метатеорема</u>. Пусть $\mathcal{K}$ - нормальный класс полугрупп. Тогда для моноида R с нулем следующие утверждения эквивалентны:

(I) $R \in \mathcal{K}$;

(2) $S \in \mathcal{K}$ для любого S-точного Морита-контекста (R, V, W, S);

(3) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого левого R-полигона V без кручения в смысле Басса;

(4) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого свободного левого R-полигона V;

(5) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого проективного левого R-полигона V;

(6) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для некоторого свободного левого R-полигона V.

<u>Доказательство</u>. (I)$\Longrightarrow$(2). Непосредственно следует из нормальности класса $\mathcal{K}$.

(2)$\Longrightarrow$(3). Ясно, так как для любого левого R-полигона V без кручения в смысле Басса стандартный Морита-контекст $(R, V, \mathrm{Hom}_R(V, R), \mathrm{End}_R V)$ является $\mathrm{End}_R V$-точным.

(3)$\Longrightarrow$(4). Вытекает из леммы I.

(4)$\Longrightarrow$(5). Поскольку любой проективный левый R-полигон P является ретрактом некоторого свободного R-полигона F ([II], предложение 3.2), то $P \cong Fe$, где $e^2 = e \in \mathrm{End}_R F$.

Следовательно, $\mathrm{End}_R P \cong e(\mathrm{End}_R F)e$ и осталось применить лемму 2.

(5) $\Rightarrow$ (6). Очевидно, так как любой свободный полигон проективен.

(6) $\Rightarrow$ (I). Пусть $\mathrm{End}_R V \subset \mathcal{K}$ для некоторого свободного левого R-полигона V. Тогда $R \cong \mathrm{End}({}_R R) \cong e(\mathrm{End}_R V)e$ для некоторого $e^2 = e \in \mathrm{End}_R V$ и, следовательно, $R \in \mathcal{K}$ в силу леммы 2.

§2. Нормальные радикалы и нормальные классы полугрупп

Как известно, в теории полугрупп радикалы можно рассматривать в двух различных аспектах: либо радикал полугруппы определяется как некоторый ее идеал (см. [2]), либо - как некоторая ее конгруэнция (см., напрмер, [I6]). Определения и свойства различных полугрупповых радикалов можно найти в работах [2,3,4,8,I6].

Полугрупповой радикал ρ, определяемый как идеал, назовем <u>нормальным</u>, если для любого Морита-контекста (R, V, W, S) справедливо $V\rho(S)W \subseteq \rho(R)$. Если же радикал ρ определяется как конгруэнция, то будем говорить, что ρ <u>нормален</u>, если для любого Морита-контекста (R, V, W, S) яз того, что $(x, y) \in \rho(S)$, $x, y \in S$ следует $(vxw, vyw) \in \rho(R)$ для любых $v \in V$, $w \in W$.

Прежде чем привести примеры нормальных радикалов докажем несколько лемм.

<u>Лемма 3</u>. Пусть ρ - нормальный радикал полугрупп и e - идемпотент полугруппы R. Тогда $\rho(eRe) = e\rho(R)e$.

<u>Доказательство.</u> Если ρ определяется как идеал, то лемма доказывается так же, как и в кольцевом случае (см. [9], теорема I.9).

Пусть теперь ρ определяется как конгруэнция и пусть $(x, y) \in \rho(R)$, $x, y \in R$. Тогда $exe = e^2xe^2 \in eRxRe$, $eye \in eRyRe$, и поэтому для Морита-контекста (R, Re, eR, eRe) имеем $(exe, eye) \in \rho(eRe)$ в силу нормальности ρ, т.е. $e\rho(R)e \subseteq \rho(eRe)$.

Обратно, пусть $(x, y) \in \rho(eRe)$, где $x, y \in eRe$. Тогда $x = exe = e^3xe^3 \in e \cdot Re \cdot x \cdot eR \cdot e$, аналогично, $y \in e \cdot Re \cdot y \cdot eR \cdot e$ и, поскольку $(e^2xe^2, e^2ye^2) \in \rho(R)$ в силу нормальности ρ, то $(x, y) \in e\rho(R)e$.

Лемма 4. Полугрупповой радикал ρ нормален тогда и только тогда, когда класс всех ρ-полупростых полугрупп нормален.

Доказательство аналогично кольцевому случаю (см. [10], теорема 10), но для полноты изложения приведем его здесь, например, для случая, когда ρ определяется как конгруэнция.

Необходимость прямо следует из определений.

Достаточность. Пусть (R, V, W, S) - произвольный Морита-контекст. Определим бинарные отношения θ, μ, ν на множествах V, W и S соответственно, полагая

$$(v_1, v_2) \in \theta \Leftrightarrow \forall w \in W \ (v_1 w, v_2 w) \in \rho(R),$$
$$(w_1, w_2) \in \mu \Leftrightarrow \forall v \in V \ (v w_1, v w_2) \in \rho(R),$$
$$(s_1, s_2) \in \nu \Leftrightarrow \forall v \in V, \ \forall w \in W (v s_1 w, v s_2 w) \in \rho(R).$$

Легко проверяется, что θ, μ, ν - конгруэнции на биполигонах ${}_R V_S$, ${}_S W_R$ и полугруппе S соответственно, и, что $(R/\rho(R), V/\theta, W/\mu, S/\nu)$ является S/ν -точным Морита-контекстом. Тогда по условию из ρ-полупростоты полугруппы $R/\rho(R)$ следует ρ-полупростота полугруппы S/ν. Но, так как S/ν - гомоморфный образ полугруппы S, то $\rho(S) \subseteq \nu$ по определению радикала, т.е. для любой пары $(x, y) \in \rho(S)$ и любых $v \in V$, $w \in W$ справедливо $(v x w, v y w) \in \rho(R)$, иначе говоря, радикал ρ нормален. Лемма доказана.

Полугруппа R называется: наследственно редуктивной слева (справа) [4], если для всякого ее идеала A из того, что $x, y \in A$ и $ax = ay$ $(xa = ya)$ для любого $a \in A$ следует, что $x = y$; первичной слева (справа) [4], если для всякого ее идеала A из того, что $x, y \in R$ и $xa = ya$ $(ax = ay)$ для любого $a \in A$ следует, что $x = y$ или R содержит 0 и $A = 0$; квазипервичной [4], если для любых ее идеалов A и B из того, что $AB = 0$ следует, что $A = 0$ или $B = 0$.

Лемма 5. Следующие классы полугрупп нормальны: (а) класс всех наследственно редуктивных слева (справа) полугрупп; (б) класс всех первичных слева (справа) полугрупп; (в) класс всех полугрупп без нильпотентных идеалов; (г) класс всех квазипервичных полугрупп.

Доказательство. Пусть (R, V, W, S) - произвольный S-точный Морита-контекст.

(а) Пусть далее A - идеал полугруппы S, $x, y \in A$ и

$ax = ay$ для любого $a \in A$. Тогда VAW - идеал в R причем для любых $v, v_1 \in V$, $w, w_1 \in W$ и любого $b \in A$

$$v_1 b w_1 v x w = v_1 b w_1 v y w_1$$

так как $bw_1 vx = bw_1 vy$. Отсюда следует, что $vxw = vyw$ в силу наследственно редуктивности слева R. Но тогда $x = y$ ввиду S-точности контекста (R, V, W, S), т.е. полугруппа S наследственно редуктивна слева.

(б) Пусть теперь R - первичная слева полугруппа, A - идеал в S, $x, y \in S$ и $xa = ya$ для всех $a \in A$. Тогда VAW - идеал в R и для любых $v, v_1 \in V$, $b \in A$, $w, w_1 \in W$

$$vxwv_1 bw_1 = vxwv_1 bw_1,$$

так как $xwv_1 b = ywv_1 b$. Отсюда в силу левой первичности R следует, что или $vxw = vyw$, или R содержит 0_R и $VAW = 0_R$. Если R содержит 0_R и $VAW = 0_R$, то и S содержит нуль 0_S, равный $W0_RV$, и $A = 0_S$ в силу S-точности контекста (R, V, W, S). Если же $vxw = vyw$ для любых $v \in V$, $w \in W$, то $x = y$ опять в силу S-точности контекста (R, V, W, S). Таким образом, S первична слева.

(в) Пусть полугруппа R не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Тогда, если $A^n = 0$ для какого-то идеала A полугруппы S, то для идеала VAW полугруппы R справедливо:

$$(VAW)^n \subseteq V[A(WV)]^{n-1} AW \subseteq VA^n W = 0$$

и, поэтому, $VAW = 0$. Следовательно, $A = 0$ в силу S-точности контекста (R, V, W, S).

(г) Пусть теперь полугруппа R квазипервична, $AB = 0$, где A, B - идеалы в S. Тогда VAW и VBW - идеалы в R и $VAW \cdot VBW \subseteq VABW = 0$. Отсюда $VAW = 0$ или $VBW = 0$ в силу квазипервичности R и, значит, $A = 0$ или $B = 0$ ввиду S-точности контекста (R, V, W, S).

Лемма доказана.

<u>Теорема I</u>. Следующие полугрупповые радикалы нормальны:

(а) радикал Джекобсона;

(б) левый (правый) нижний радикал Хенке;

(в) радикал Клиффорда (объединение всех нильидеалов) [3];

(г) радикал Шеврина (объединение всех локально нильпотентных идеалов) [6].

<u>Доказательство</u>. Нормальность радикалов (в) и (г), определяемых как идеалы, доказывается аналогично кольцевому

3

случаю (см. [7], теорема 20). Докажем нормальность первых двух радикалов, определяемых как конгруэнции.

(а). Воспользуемся следующей внутренней характеризацией радикала Джекобсона $J(S)$ полугруппы S (см., например, [16]): $(x,y)\in J(S) \Longleftrightarrow \forall s\in S\ \exists n\,[(xs)^n x=(xs)^n y\ \&\ (ys)^n y=(ys)^n x]$. Пусть (R,V,W,S) – произвольный Морита-контекст, $(x,y)\in J(S)$, $v\in V$, $w\in W$, $r\in R$. Тогда для $wrv\in S$ найдется такое натуральное число n, что $(xwrv)^n x=(xwrv)^n y$ и $(ywrv)^n y=(ywrv)^n x$. Умножив каждое из этих равенств слева на v и справа на w, после перегруппировки получим: $(vxwr)^n vxw = (vxwr)^n vyw$ и $(vywr)^n vyw=(vywr)^n vxw$. Поэтому $(vxw, vyw)\in J(R)$, что и требовалось доказать.

(б) Докажем теперь нормальность правого нижнего радикала L в смысле Хенке (в другой терминологии – радикал Бэра) (определение см. в [8] или в [16]). Для этого в силу леммы 4 достаточно доказать нормальность класса всех L-полупростых полугрупп. Но, как показал А.В.Тищенко, L-полупростота полугруппы равносильна ее наследственно редуктивности слева ([4], предложение 2). Осталось применить лемму 5(а).

§3. Характеризация моноидов с нулем с помощью моноидов эндоморфизмов полигонов

Теорема 2. Пусть $\mathcal{K}$ – один из следующих классов полугрупп:

- класс всех J-полупростых полугрупп, т.е. таких полугрупп R, что $\forall x,y\in R\ (x\neq y)\Longrightarrow \exists r\in R\ \forall n\ [(xr)^n x\neq (xr)^n y \vee (yr)^n y\neq (yr)^n x]$;
- класс всех наследственно редуктивных слева (справа) полугрупп;
- класс всех полугрупп без ненулевых нильидеалов;
- класс всех полугрупп без ненулевых нильпотентных идеалов;
- класс всех полугрупп без ненулевых локально нильпотентных идеалов;
- класс всех первичных слева (справа) полугрупп;
- класс всех квазипервичных полугрупп.

Тогда следующие свойства моноида R с нулем равносильны:

(1) $R \in \mathcal{K}$;

(2) $S \in \mathcal{K}$ для любого S-точного Морита-контекста (R, V, W, S);

(3) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого левого R-полигона V без кручения в смысле Басса;

(4) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого свободного левого R-полигона V;

(5) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для любого проективного левого R-полигона V;

(6) $\mathrm{End}_R V \in \mathcal{K}$ для некоторого свободного левого R-полигона V.

Доказательство следует из метатеоремы, поскольку все указанные классы нормальны в силу результатов §2.

В заключение автор благодарит Л.А.Скорнякова и А.В.Тищенко за ценные замечания.

Литература

1. Бродский Г. М., Кольца эндоморфизмов свободных модулей. Матем. сб., 1974, 94, № 6, 226-242.
2. Григор Р. С., К теории радикалов полугрупп I. Матем. исслед., Кишинев, 1971, 6, вып. 4, 37-55.
3. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2, Москва, 1972.
4. Тищенко А. В., Слабо специальные и специальные радикалы в полугруппах. Матем. сб., 1974, 94, № 4, 551-566.
5. Фляйшер В. Г., Об эндоморфизмах свободных полигонов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 189-205.
6. Шеврин Л. Н., К общей теории полугрупп. Матем. сб., 1961, 53, № 3, 367-386.
7. Amitsur S. A., Rings of quotients and Morita contexts. J. Algebra, 1971, 17, N 2, 273-298.
8. Hoehnke H.-J., Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe. Math. Z., 1965, 89, N 4, 300-311.
9. Jaegermann M., Normal radicals of endomorphism rings of free and projective modules. Fund. Math., 1975, 86, N 3, 237-250.

10. J a e g e r m a n n H., Normal radicals. Fund. Math., 1977, 95, N 3, 147-155.
11. K n a u e r U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoide. Semigroup Forum, 1972, 3, N 3, 359-370.
12. K n a u e r U., M i k h a l e v A. V., Endomorphiam monoide of free acts and 0-wreath products of monoide I. Annihilator properties. Semigroup Forum, 1980, 19, N 2, 177-187.
13. K n a u e r U., M i k h a l e v A. V., Endomorphiem monoide of free acte and 0-wreath products of monoids II. Regularity, Semigroup Forum, 1980, 19, N 3, 189-198.
14. L e n z i n g H., Halberbliche Endomorphiemenringe, Math. Z., 1970, 118, N 3, 219-240.
15. N i c h o l e o n W. K., W a t t e r e J. F., Normal radicals and normal classes of rings. J. Algebra, 1979, 59, N 1, 5-15.
16. R o i z E. N., S c h e i n B. M., Radicals of semigroups. Semigroup Forum, 1978, N 3, 299-344.

Поступило
I6 УI I982

MORITA-KONTEKSTID JA POLÜGOONIDE ENDOMORFISMIMONOIDID

A.G.Grigorjan

R e s ü m e e

On antud mitmete nullelementi eisaldavate monoidide klasside kirjeldused vabade ja projektiivsete polügoonide ning väändeta polügoonide endomorfiemi-monoidide terminites.

MORITA CONTEXTS AND ENDOMORPHISM MONOIDS
OF ACTS OVER MONOIDS

A.G.Grigorian

S u m m a r y

Various clessee of monoids with a zero element are characterized in terme of endomorphism monoids of free, projective and toreionleee acte.

ТРЕУГОЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

У.Кальюлайд
Кафедра алгебры и геометрии

Сплетения групп играют важную роль в изучении групповых многообразий, [4]. В теории многообразий представлений групп имеется аналогичная в свойствах и роли сплетению конструкция треугольного произведения, введенная Б.И.Плоткиным [6]. Применение этой конструкции оказалось плодотворным в изучении полугрупп многообразий групповых пар; см. [7], а также в [10]. Предметом данной работы служат треугольные произведения линейных представлений (над полем K) полугрупп. Эта конструкция может быть введена и многие ее свойства доказаны для любого ассоциативно-коммутативного кольца с единицей K. Ограничение, что K - поле, существенно начиная с §3; возможности,вытекающие из понятия проективной пары, не развиваются. Мотивом для настоящей публикации является возрастающая роль излагаемой конструкции в изучении линейных полугрупповых пар и в алгебраической теории автоматов, [8], [9] и др. Излагаемые ниже результаты кратко изложены в [I], а также содержатся в [3]. Предполагается знакомство читателя с элементами теории пар; язык пар описан во второй и четвертой главах книги [5], в нужном здесь контексте также в [2].

§I. Треугольные произведения представлений групп

Цель этого вводного параграфа состоит в том, чтобы определить понятие треугольного произведения групповых пар, ибо оно служит моделью для введения аналогичной конструкции для полугрупповых пар; подробнее см. [6].

I. Для групп A и B множество A^B всех функций из B в A - группа, на которой действует B согласно формуле

$$\forall x, b \in B,\ f \in A^B,\ (f \circ b)(x) = f(xb^{-1}).$$

Сопровождающее возникающую здесь пару (A^B, B) полупрямое произведение $A^B \lambda B$ называется (полным) сплетением групп A и B и обозначается $A \,wr\, B$

Фиксируем ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей K, например, $K = \mathbb{Z}$ и пусть Γ - произвольная группа. Если задано представление группы Γ автоморфизмами некоторого K-модуля G, то говорят о (групповой) паре (G, Γ).

Пусть (A, Σ_1) и (B, Σ_2) - две групповые пары, а $\Phi = \mathrm{Hom}_K(B, A)$ - модуль всех K-гомоморфизмов из B в A. Определим действие групп Σ_1 и Σ_2 в Φ соответственно, с помощью формулы

$$\forall x \in B,\ \sigma_1 \in \Sigma_1,\ \varphi \in \Phi,\ (\varphi \circ \sigma_1)(x) = \varphi(x) \circ \sigma_1 \text{ и}$$

формулы

$$\forall x \in B,\ \sigma_2 \in \Sigma_2,\ \varphi \in \Phi,\ (\varphi \circ \sigma_2)(x) = \varphi(x \circ \sigma_2^{-1}).$$

Приходим к парам (Φ, Σ_1) и (Φ, Σ_2). При этом, перестановочность действия групп Σ_1 и Σ_2 в Φ позволяет определить пару $(\Phi, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Ей соответствует группа $\Gamma = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, в которую вкладываются исходные Φ и $\Sigma_1 \times \Sigma_2$:

$$\Phi \to \bar{\Phi} = \{ \bar{\varphi} = (\varphi, 1) \mid \varphi \in \Phi \} \subset \Gamma,$$

а группа $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ отождествляется с ее образом в Γ при отображении $\sigma_1\sigma_2 \to (\varepsilon, \sigma_1\sigma_2)$. Полупрямому произведению $\Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ соответствует пара $(\bar{\Phi}, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$ - представление группы $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ внутренними автоморфизмами группы $\bar{\Phi}$. Легко убедиться, что

$$(\bar{\Phi}, \Sigma_1 \times \Sigma_2) \cong (\Phi, \Sigma_1 \times \Sigma_2).$$

Пусть $G = A \oplus B$; определяем пару $(G, \bar{\Phi})$. Для этого рассмотрим в G ряд подмодулей $0 \subset A \subset G$. В группе $\mathrm{Aut}\, G$ выделим централизатор $\mathfrak{Z}$ этого ряда, т.е. все автоморфизмы, которые действуют тождественно в A и в G/A.

Отображение $' : \mathfrak{Z} \to \Phi$, которое при всех $b \in B$, $\sigma \in \mathfrak{Z}$ задается формулой $b^{\sigma'} = b \circ \sigma - b$, будет как легко проверяется, изоморфизмом групп $\mathfrak{Z}$ и Φ. Следовательно, имеем правый изоморфизм пар $(G, \bar{\Phi})$ и $(G, \mathfrak{Z})$.

Поставим теперь следующий вопрос. Пусть даны пары (G, Φ) и (G, Σ), а $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$. Каковы необходимые и достаточные условия для существования пары (G, Γ) ? Оказывается, что если выполнено требование

$$\forall g\in G,\ \varphi\in\Phi,\ \sigma\in\Sigma,\ (g\circ\sigma)\circ\varphi=(g\circ\varphi^{\sigma^{-1}})\circ\sigma,$$
то действия групп Φ и Σ можно продолжать до действия группы Γ в G. Применяя это в рассматриваемой ситуации, мы приходим к паре $(A\oplus B,\ Hom_K(B,A)\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2)=(G,\Gamma)$, в которой действие задано формулой
$$\forall a\in A,\ b\in B,\ \varphi\in\Phi,\ \sigma_1\in\Sigma_1,\ \sigma_2\in\Sigma_2,\ (a+b)\circ\varphi\sigma_1\sigma_2=$$
$$=a\circ\sigma_1+b^{\varphi}\circ\sigma_1+b\circ\sigma_2=(a+b^{\varphi})\circ\sigma_1+b\circ\sigma_2.$$

Эта пара (G,Γ) называется треугольным произведением данных пар (A,Σ_1) и (B,Σ_2) и обозначается $(A,\Sigma_1)\triangle(B,\Sigma_2)$.

§2. Треугольное умножение представлений полугрупп

I. Пусть даны полугруппы Φ,Σ_1 и Σ_2; операцию в Φ условимся записывать аддитивно. Предполагаем, что Σ_1 действует справа в Φ и Σ_2 действует слева в Φ, причем требуем поэлементную перестановочность этих двух действий.

На множестве троек[1]
$$\Gamma=\{(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)\mid\varphi\in\Phi,\ \sigma_1\in\Sigma_1,\ \sigma_2\in\Sigma_2\}$$
определяем умножение, полагая
$$(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)\cdot(\varphi',\sigma_1',\sigma_2')=((\sigma_2\cdot\varphi'+\varphi\cdot\sigma_1'),\sigma_1\sigma_1',\sigma_2\sigma_2').$$
Можно проверить ассоциативность такого умножения, и поэтому множество троек Γ приобретает структуру полугруппы, которую назовем тройным произведением полугрупп[2] и обозначаем $\Phi\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2)$.

Для данных пар (A,Σ_1) и (B,Σ_2), где Σ_1 и Σ_2 - полугруппы, действующие в K-модулях A и B, соответственно, полагаем $\Phi=Hom_K^+(B,A)\subset End_K(A\oplus B)$. Естественное действие полугрупп Σ_1 и Σ_2 в Φ приводит к полугруппе $\Gamma=\Phi\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2)$. Действие Γ в $G=A\oplus B$, определенное правилом
$$(a+b)\circ(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)=b^{\varphi}+a\circ\sigma_1+b\circ\sigma_2,$$
согласовано с умножением в полугруппе Γ, и мы приходим к паре (G,Γ), которую обозначим $(A,\Sigma_1)\triangle(B,\Sigma_2)$ и назовем треугольным произведением двух данных пар.

---
[1] Тройку $(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)$ будем в дальнейшем обозначать также $\varphi\sigma_1\sigma_2$.
[2] См. также в [3], стр. 142.

2. На полезную роль этой конструкции в изучении многообразий представлений полугрупп указывает, в частности, следующее наблюдение.

Если пара (A,Σ_1) содержится в многообразии Θ_1, а пара (B,Σ_2) - в многообразии Θ_2, то треугольное произведение $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\nabla(B,\Sigma_2)$ содержится в многообразии $\Theta_1\cdot\Theta_2$.

Для доказательства заметим, что A является Γ-подмодулем в G и поэтому имеем пары (A,Γ) и $(G/A,\Gamma)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & & \Sigma_1 \\ \Gamma=\Phi\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2) \arrow[rru, "\mu_1"] \arrow[r, "\mu"] \arrow[rrd, "\mu_2"'] & \Sigma_1\times\Sigma_2 \arrow[ru, "pr_1"] \arrow[rd, "pr_2"'] & \\ & & \Sigma_2 \end{tikzcd}$$

где "стирание" μ задается формулой $(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)^{\mu}=\sigma_1\sigma_2$, отображение $pr_i:\Sigma_1\times\Sigma_2\to\Sigma_i$ является естественной проекцией и $\mu_i=\mu\cdot pr_i$, $i=1,2$. Легко понять, что $Ker\,\mu_1$ и $Ker\,\mu_2$ действуют тривиально в A и $G/A\cong B$ соответственно. Для всех $a\in A$, $\gamma\in\Gamma$ имеем $a\circ\gamma=$ $=a\circ\gamma^{\mu_1}$, откуда следует существование правого эпиморфизма $(A,\Gamma)\to(A,\Sigma_1)$, а это влечет $(A,\Gamma)\in\Theta_1$. Далее, определяя $\mu_2:G\to B$ как естественное проектирование, приходим к эпиморфизму пар $\mu_2:(G,\Gamma)\to(B,\Sigma_2)$. При этом, ядром μ_2 в G является A. Следовательно, возникает диаграмма

$$\begin{tikzcd} (G,\Gamma) \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d] & (B,\Sigma_2) \\ (G/A,\Gamma) \arrow[r, "\approx"] & (B,\Gamma) \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

существование которой дает $(G/A, \Gamma) \in \theta_2$. Таким образом, имеем $(A, \Gamma) \in \theta_1$ и $(G/A, \Gamma) \in \theta_2$, откуда согласно определению $\theta_1 \cdot \theta_2$ следует $(G, \Gamma) \in \theta_1 \cdot \theta_2$. Утверждение доказано.

3. Исследуем связь группового и полугруппового случая.

Предложение I. Пусть даны представления полугрупп (A, Σ_1) и (B, Σ_2), а (G, Γ) - их треугольное произведение. Действующая полугруппа $\Gamma = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ будет группой в точности тогда, если Σ_1 и Σ_2 являются группами и полугруппа $\Phi = Hom_K^+(B, A)$ трактуется как группа. В случае выполнения отмеченных условий пара (G, Γ) изоморфна паре $(G, \Gamma^*)_*$, являющейся треугольным произведением групповых пар[3] (A, Σ_1) и (B, Σ_2).

Доказательство. Сделаем сначала одно наблюдение.

Пусть Σ_1 и Σ_2 - группы, и трактуем $\Phi = Hom_K(B, A)$ как аддитивную абелеву группу. Покажем, что тогда группой является и $\Gamma = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Для этого заметим, что элемент $(\varphi', \sigma_1', \sigma_2') \in \Gamma$ будет единицей в Γ в точности тогда, когда для любого элемента $(\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$ из Γ имеем

$$(\varphi, \sigma_1, \sigma_2) = (\varphi \cdot \sigma_1' + \sigma_2 \cdot \varphi', \sigma_1 \sigma_1', \sigma_2 \sigma_2') \quad \text{и}$$
$$(\varphi, \sigma_1, \sigma_2) = (\varphi' \cdot \sigma_1 + \sigma_2' \cdot \varphi, \sigma_1' \sigma_1, \sigma_2' \sigma_2). \quad (*)$$

Из этих соотношений следует, в частности, что $\sigma_i' = \varepsilon_i$, где ε_i - единица группы Σ_i, $i = 1, 2$. Учитывая это, равенство первых компонент в тройках соотношений (*) примет вид

$$\varphi \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varphi' = \varphi' \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \varphi = \varphi .$$

Равенство $\varphi = \varphi \cdot \varepsilon_1$ и произвольность выбора элемента $\sigma_2 \in \Sigma_2$ влекут теперь $\varphi + \varepsilon_2 \cdot \varphi' = \varphi$, т.е. $\varphi' = 0$. Следовательно, единицей в Γ может быть тройка $(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где 0 - нулевой гомоморфизм в $Hom_K(B, A)$, что подтверждается непосредственной проверкой.

Аналогично решается вопрос об обратных элементах. Именно, чтобы тройка $(\varphi', \sigma_1', \sigma_2')$ была обратной к $(\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$(\varphi \cdot \sigma_1' + \sigma_2 \cdot \varphi', \sigma_1 \sigma_1', \sigma_2 \sigma_2') = (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{и}$$
$$(\varphi' \cdot \sigma_1 + \sigma_2' \cdot \varphi, \sigma_1' \sigma_1, \sigma_2' \sigma_2) = (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (**)$$

Из (**) следует, что $\sigma_1' = \sigma_1^{-1}$ и $\sigma_2' = \sigma_2^{-1}$. Из равенства

---

[3] В смысле определения из §I.

первых компонент троек в (**) выводим теперь $\varphi\cdot\sigma_1^{-1} = -\sigma_2\cdot\varphi'$ и $\varphi'\cdot\sigma_1 = -\sigma_2^{-1}\cdot\varphi$ – равенства, равносильные $\varphi' = -\sigma_2^{-1}\varphi\sigma_1^{-1}$. Видим, что обратным к тройке $(\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$ может служить $(-\sigma_2^{-1}\cdot\varphi\cdot\sigma_1^{-1}, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1})$; непосредственное вычисление убеждает, что это действительно так. На основании этого наблюдения доказательство первого утверждения предложения немедленно получается проведением стандартных рассуждений в обе стороны импликации.)

Переходим к доказательству второго утверждения. Во-первых ясно, что для подгруппы $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2\} \leq \Gamma$ подпредставление (G, Σ) расщепляется, $(G,\Sigma) \doteq (A \oplus B, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Во-вторых, для любых $(\varphi, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \Phi$ и $(\varphi_1, \sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma$ имеем

$$(\varphi_1,\sigma_1,\sigma_2)^{-1}\cdot(\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\cdot(\varphi_1,\sigma_1,\sigma_2) = (-\sigma_2^{-1}\cdot\varphi_1\cdot\sigma_1^{-1}, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1})\cdot$$
$$\cdot(\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\cdot(\varphi_1,\sigma_1,\sigma_2) = (\sigma_2^{-1}\cdot\varphi\cdot\sigma_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

показывающее инвариантность подгруппы Φ в Γ. Кроме того, непосредственно проверяется точность пары (G,Φ), а также тот факт, что образ Φ в $\mathrm{Aut}\, G$ совпадает с централизатором ряда $0 \subset A \subset G$. В третьих, введем отображение $f: (G,\Gamma) \to (G,\Gamma^*)$, которое тождественно на области действия G, а как отображение $f: \Gamma \to \Gamma^*$ определяется по формуле

$$(\varphi, \sigma_1, \sigma_2)^f := (\varphi\cdot\sigma_1^{-1}, \sigma_1, \sigma_2).$$

Проверка показывает, что рассматриваемое отображение $f: (G,\Gamma) \to (G,\Gamma^*)$, является морфизмом групповых пар и биективно.

Этим доказано второе утверждение, а тем самым и все предложение.

§3. Свойства треугольных произведений полугрупповых пар

I. Как и в предыдущем параграфе, здесь пара (A,Σ) – это действие полугруппы Σ на K-модуле A; при этом, полугруппа Σ моноидом быть не обязана.

Начиная с этого параграфа считается, что K – поле.

<u>Предложение 2</u>. Если пары (A,Σ_1) и (B,Σ_2) являются точными, то точной будет также пара $(G,\Gamma) = (A,\Sigma_1) \triangle (B,\Sigma_2)$.

<u>Доказательство</u>. Допустим противное. Тогда существуют различные элементы $\gamma = (\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$ и $\gamma' = (\varphi', \sigma_1', \sigma_2')$,

которые одинаково действуют в $G=A\oplus B$; имеем $g\circ\gamma=g\circ\gamma'$ для всякого $g\in G$. В силу точности пар (A,Σ_1) и (B,Σ_2) отсюда легко выводится $\gamma=\gamma'$, что противоречит допущению. Предложение доказано.

<u>Предложение 3</u>. Пусть (A,Σ_1) и (B,Σ_2) – две пары, и $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)$ их треугольное произведение. Для любого Γ-подмодуля H в G выполняется либо $H\subset A$, либо $A\subset H$.

<u>Доказательство</u>. Если $A\supset H$, то все доказано. Поэтому, пусть $A\not\supset H$. Тогда существует элемент $h\in H$ такой, что $h\notin A$. Это означает существование таких $a_1\in A$ и $b\in B$, $b\neq 0$, что $h=b+a_1$. Выберим в B базис, содержащий элемент b и рассмотрим произвольное такое отображение φ' этого базиса в A, при котором $b^{\varphi'}=a$. Продолжим φ' до элемента из $\Phi=Hom(B,A)$, который тоже обозначим φ'.

Далее нам потребуется следующее замечание. Пару (A,Σ_1) можно "достроить" до пары (A,Σ_1^*), внешне присоединяя к полугруппе Σ_1 единицу ε, действие которой в A доопределяем формулой $a\circ\varepsilon=a$ для всех $a\in A$. Аналогично получается (B,Σ_2^*) и мы приходим к паре $(G,\Gamma^*)=(A,\Sigma_1^*)\Delta(B,\Sigma_2^*)$. Легко понять, что из Γ-инвариантности подмодуля $H\subset G$ следует Γ^*-инвариантность модуля H и наоборот.

Возьмем теперь $\gamma\in\Gamma^*$, где $\gamma=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varphi'\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\in End G$ и применим его к элементу h. Имеем

$$h\circ\gamma=(b,a_1)\begin{pmatrix}\varepsilon & \varphi'\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}=(b\circ\varepsilon+a_1\circ 0,\ b\circ\varphi'+a_1\circ\varepsilon)=$$
$$=(b,\ b^{\varphi'}+a_1)=(b,a_1)+(0,a)=h+a.$$

Для каждого $a\in A$ удалось найти $\gamma\in\Gamma^*$, что $h\circ\gamma=h+a$, откуда следует $a=h\circ\gamma-h\in H$ в силу сделанного выше замечания относительно модуля H. Поэтому, выводим $A\subset H$, что завершает доказательство.

2. Функториальные свойства треугольного произведения полугрупповых пар хорошо отражены в следующих двух предложениях.

<u>Предложение 4</u>. Пусть имеется гомоморфизм $\nu:(A,\Sigma_1)\to(A',\Sigma_1')$ и произвольная пара (B,Σ_2). Тогда существует гомоморфизм пар

$$\mu:(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)\to(A',\Sigma_1')\Delta(B,\Sigma_2),$$

совпадающий с ν на (A,Σ_1) и тождественный на (B,Σ_2). Более того, если ν – мономорфизм (эпиморфизм), то μ будет также мономорфизмом (эпиморфизмом).

Доказательство. Введем обозначения: $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)$ $(G',\Gamma')=(A',\Sigma_1')\Delta(B,\Sigma_2)$, $\Phi=Hom_K^+(B,A)$ и $\Phi'=Hom_K^+(B,A')$. Морфизм полугрупп $\mu:\Phi\to\Phi'$ задаем формулой

$$\forall\varphi\in\Phi,\ b\in B,\ b^{(\varphi^\mu)}=(b^\varphi)^\nu,$$

а затем "поднимем" его до морфизма полугрупп $\mu:\Gamma\to\Gamma'$, полагая

$$(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)^\mu=(\varphi^\mu,\sigma_1^\nu,\sigma_2).$$

Далее, определяем морфизм K-модулей $\mu: G\to G'$ формулой

$$\forall a\in A,\ b\in B,\ (a+b)^\mu=a^\nu+b.$$

Для любых $a+b\in A\oplus B=G$, $\sigma_1\in\Sigma_1$, $\sigma_2\in\Sigma_2$ и $\varphi\in\Phi$ имеем тогда

$$((a+b)\circ(\varphi,\sigma_1,\sigma_2))^\mu=(a\circ\sigma_1+b^\varphi+b\circ\sigma_2)^\mu=$$
$$=(a\circ\sigma_1+b^\varphi)^\nu+b\circ\sigma_2=a^\nu\circ\sigma_1^\nu+b^{\varphi^\mu}+b\circ\sigma_2=$$
$$=(a^\nu+b)\circ(\varphi^\mu,\sigma_1^\nu,\sigma_2)=(a+b)^\mu\circ(\varphi,\sigma_1,\sigma_2)^\mu.$$

Видим, что исходный морфизм ν продолжен до морфизма пар $\mu:(G,\Gamma)\to(G',\Gamma')$. Очевидно, что μ тождественен на (B,Σ_2). Непосредственно проверяется, что если ν - мономорфизм (эпиморфизм), то μ определяется парой мономорфизмов (эпиморфизмов) $\mu: G\to G'$ и $\Gamma\to\Gamma'$ и поэтому также является мономорфизмом (эпиморфизмом). Предложение доказано.

При фиксированной левой паре треугольное произведение $(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)$ представлений полугрупп можно рассматривать как функтор, но в категории замен. Перед тем, как уточнить результат, напомним определение этой категории.

Объектами рассматриваемой категории замен будут те же пары, но морфизм $\mu:(G,\Gamma)\to(G',\Gamma')$ в категории замен - это два морфизма $\mu: G\to G'$ и $\mu:\Gamma'\to\Gamma$, связанные "условием согласованности"

$$\forall g\in G,\ \gamma'\in\Gamma',\ g^\mu\circ\gamma'=(g\circ\gamma'^\mu)^\mu.$$

Чтобы различать морфизмы пар в категории замен от обычных морфизмов пар, будем их обозначать $(G,\Gamma)\hookrightarrow(G',\Gamma')$.

Предложение 5. Произвольные объект (A,Σ_1) и морфизм $\nu:(B,\Sigma_2)\hookrightarrow(B',\Sigma_2')$ в категории замен представлений полугрупп индуцирует морфизм

$$\mu:(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)\hookrightarrow(A,\Sigma_1)\Delta(B',\Sigma_2')$$

в той же категории.

Доказательство. I) Пусть $(G,\Gamma),(G',\Gamma')$, Φ и Φ' обозначают то же, что и в доказательстве предложения 4. Определяем отображение $\mu : \Phi' \to \Phi$ следующей формулой

$$\forall b \in B, \quad b^{\varphi'^{\mu}} = (b^{\nu})^{\varphi'}.$$

Далее, гомоморфизм $\nu : \Sigma_2' \to \Sigma_2$ продолжим до гомоморфизма прямых произведений $\mu : \Sigma_1 \times \Sigma_2' \to \Sigma_1 \times \Sigma_2$, доопределяя ν тождественным образом на Σ_1. Согласно определению, имеем пары $(\Phi', \Sigma_1 \times \Sigma_2')$ и $(\Phi, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Докажем, что определенная выше пара гомоморфизмов $\mu : \Phi' \to \Phi$ и $\mu : \Sigma_1 \times \Sigma_2' \to \Sigma_1 \times \Sigma_2$ индуцирует морфизм указанных пар в (обыкновенной) категории пар. Действительно при всяком $b \in B$ имеем

$$b^{(\sigma_2' \cdot \varphi' \cdot \sigma_1)^{\mu}} = (b^{\nu})^{\sigma_2' \cdot \varphi' \cdot \sigma_1} = (b^{\nu} \circ \sigma_2')^{\varphi'} \circ \sigma_1 = [(b \circ \sigma_2'^{\nu})^{\nu}]^{\varphi'} \circ \sigma_1 =$$
$$= (b \circ \sigma_2'^{\nu})^{\varphi'^{\mu}} \circ \sigma_1 = (b \circ \sigma_2'^{\mu})^{\varphi'^{\mu}} \circ \sigma_1 = b^{\sigma_2'^{\mu} \cdot \varphi'^{\mu} \cdot \sigma_1}.$$

Мы видим, что $(\sigma_2' \cdot \varphi' \cdot \sigma_1)^{\mu} = \sigma_2'^{\mu} \cdot \varphi'^{\mu} \cdot \sigma_1$. Аналогично можно доказать, что $(\sigma_2' \cdot \varphi')^{\mu} = \sigma_2'^{\mu} \cdot \varphi'^{\mu}$ и $(\varphi' \cdot \sigma_1)^{\mu} = \varphi'^{\mu} \cdot \sigma_1$.

2) Задаем отображение $\mu : \Gamma' \to \Gamma$ формулой

$$(\varphi', \sigma_1, \sigma_2')^{\mu} = (\varphi'^{\mu}, \sigma_1, \sigma_2'^{\mu}).$$

Оказывается, μ является морфизмом тройных произведений, $\mu : \Gamma' \to \Gamma$. Это следует из выкладок:

$$[(\varphi', \sigma_1, \sigma_2') \cdot (\psi', \tau_1, \tau_2')]^{\mu} = (\sigma_2' \cdot \psi' + \varphi' \cdot \tau_1, \sigma_1 \tau_1, \sigma_2' \tau_2')^{\mu} =$$
$$= ((\sigma_2' \cdot \psi' + \varphi' \cdot \tau_1)^{\mu}, \sigma_1 \tau_1, (\sigma_2' \tau_2')^{\mu}) =$$
$$= ((\sigma_2' \cdot \psi')^{\mu} + (\varphi' \cdot \tau_1)^{\mu}, \sigma_1 \tau_1, \sigma_2'^{\mu} \cdot \tau_2'^{\mu} =$$
$$= (\sigma_2'^{\mu} \cdot \psi'^{\mu} + \varphi'^{\mu} \cdot \tau_1^{\mu}, \sigma_1 \tau_1, \sigma_2'^{\mu} \tau_2'^{\mu}) =$$
$$= (\sigma_2'^{\mu} \cdot \psi'^{\mu} + \varphi'^{\mu} \cdot \tau_1, \sigma_1 \tau_1, \sigma_2'^{\mu} \tau_2'^{\mu}) =$$
$$= (\varphi'^{\mu}, \sigma_1, \sigma_2'^{\mu}) \cdot (\psi'^{\mu}, \tau_1, \tau_2'^{\mu}) = (\varphi', \sigma_1, \sigma_2')^{\mu} \cdot (\psi', \tau_1, \tau_2')^{\mu}.$$

3) Далее, формулой $(a+b)^{\mu} = a + b^{\nu}$, $b^{\nu} \in B'$ мы задаем морфизм $\mu : A \oplus B \to A \oplus B'$. Покажем теперь, что определенные выше отображения μ задают морфизм

$$\mu : (A, \Sigma_1) \triangle (B, \Sigma_2) \multimap (A, \Sigma_1) \triangle (B', \Sigma_2')$$

в категории замен. Действительно, при произвольных $a \in A$, $b \in B$, $\varphi' \in \Phi'$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$ и $\sigma_2' \in \Sigma_2'$ имеем с одной стороны

$$(a+b)^{\mu} \circ (\varphi', \sigma_1, \sigma_2') = (a + b^{\nu}) \circ (\varphi', \sigma_1, \sigma_2') = a \circ \sigma_1 + (b^{\nu})^{\varphi'} +$$
$$+ b^{\nu} \circ \sigma_2' = a \circ \sigma_1 + b^{\varphi'^{\mu}} + (b \circ \sigma_2'^{\nu})^{\nu}.$$

С другой стороны, имеем

$$[(a+b) \circ (\varphi', \sigma_1, \sigma_2')^{\mu}]^{\mu} = [(a+b) \circ (\varphi'^{\mu}, \sigma_1, \sigma_2'^{\mu})]^{\mu} =$$
$$= [a \circ \sigma_1 + b^{\varphi'^{\mu}} + b \circ \sigma_2'^{\mu}]^{\mu} = (a \circ \sigma_1 + b^{\varphi'^{\mu}}) + (b \circ \sigma_2'^{\nu})^{\nu};$$

воспользуемся здесь тем, что отображение μ на Σ_2' совпадает с ν. Резюмируя, имеем

$$(a+b)^{\mu} \circ (\varphi', \sigma_1, \sigma_2) = ((a+b) \circ (\varphi', \sigma_1, \sigma_2')^{\mu})^{\mu}.$$

Утверждение доказано, а тем самым и предложение 5.

3. <u>Предложение 6</u>. Пусть даны пары (A,Σ_1) и (B,Σ_2), а (G,Γ) – их треугольное произведение. При всяком Γ-подмодуле $H \leqslant G$, содержащем A, существует правый эпиморфизм

$$(H,\Gamma) \twoheadrightarrow (A,\Sigma_1) \triangle (B \cap H, \Sigma_2).$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим $B' = B \cap H$, $\Phi = Hom^+(B,A)$ и $\Phi' = Hom^+(B',A)$. Имеем $G = A+B$, а из $A \subset H$ следует $H = A+B'$. Имеем также $\Gamma = \Phi\lambda(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Пусть $\Gamma' = \Phi'\lambda(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$; тогда $(A,\Sigma_1) \triangle (B',\Sigma_2) = (H,\Gamma')$.

Всякий элемент $\varphi \in \Phi$ действует также из B' в A; соответствующий элемент в Φ' обозначим φ^{π}. Возникает отображение $\pi: \Phi \to \Phi'$. Заметим, что всякий элемент $\varphi' \in \Phi'$ можно рассматривать как ограничение на B' некоторого гомоморфизма $\varphi \in \Phi$; это вытекает из хорошо известных фактов о векторных пространствах. Следовательно, $\pi: \Phi \to \Phi'$ является эпиморфизмом. Оказывается, он индуцирует правый эпиморфизм пар $(H,\Gamma) \to (H,\Gamma')$. С целью это доказать определяем отображение $\pi: \Gamma \to \Gamma'$ следующей формулой

$$\forall \varphi \in \Phi, \sigma_1 \in \Sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_2, \ (\varphi,\sigma_1,\sigma_2)^{\pi} = (\varphi^{\pi},\sigma_1,\sigma_2).$$

Сюръективность π очевидна. Более того, π является гомоморфизмом полугрупп. Действительно, пусть $\gamma = (\varphi,\sigma_1,\sigma_2)$ и $\gamma' = (\varphi',\sigma_1',\sigma_2')$ – любые элементы из Γ. Легко понять, что для равенства $(\gamma\gamma')^{\pi} = \gamma^{\pi} \cdot \gamma'^{\pi}$ достаточно, чтобы элементы $\delta = (\varphi\cdot\sigma_1' + \sigma_2\cdot\varphi')^{\pi}$ и $\lambda = (\varphi^{\pi}\cdot\sigma_1' + \sigma_2\cdot\varphi'^{\pi})$ в $Hom(B',A)$ были бы равными. Однако, это вытекает из того очевидного факта, что при всех $b \in B'$ имеет место равенство $b^{\delta} = b^{\lambda}$.

Полагая еще $h^{\pi} = h$ при всех $h \in H$, мы имеем пару гомоморфизмов $\pi: H \to H$, $\Gamma \to \Gamma'$. Перестановочность отображения π с действием в соответствующих парах проверяется непосредственно развертыванием определений, и поэтому опускается. Предложение доказано.

<u>Предложение 7</u>. Пусть даны две пары (A,Σ_1) и (B,Σ_2) и пусть (G,Γ) – их треугольное произведение. Для всякого радикала $\mathcal{F}$, удовлетворяющего условию $\mathcal{F}(A,\Sigma_1) < A$, имеет место равенство $\mathcal{F}(G,\Gamma) = \mathcal{F}(A,\Sigma_1)$. Если же $\mathcal{F}$ - вербал, для которого $\mathcal{F}(B,\Sigma_2) > 0$, то $\mathcal{F}(G,\Gamma) = A + \mathcal{F}(B,\Sigma_2)$.

<u>Доказательство</u>, состоящее в повторении аргументов, с помощью которых устанавливается соответствующий факт в

групповом случае (см. [6], лемма 2), опускается.

4. В нижеследующих предложениях отражена связь между Δ-операцией и операцией декартового умножения пар, в частности, возведения пар в декартову степень.

Предложение 8. Пусть дан произвольный набор пар $(A_i,\Sigma_i)_{i\in I}$ и пара (B,Σ'). Тогда пару $(\prod_{i\in I}(A_i,\Sigma_i))\Delta(B,\Sigma')$ можно вложить в пару $\prod_{i\in I}((A_i,\Sigma_i)\Delta(B,\Sigma'))$.

Если в этом предложении полагать все пары $(A_i,\Sigma_i), i\in I$, равными (A,Σ), то из него вытекает полезное

Следствие 9. Пусть даны произвольные пары (A,Σ) и (B,Σ'). Тогда при любом множестве (индексов) I пару $(A,\Sigma)^I\Delta(B,\Sigma')$ можно вложить в пару $((A,\Sigma)\Delta(B,\Sigma'))^I$.

Мы ограничимся здесь доказательством следующего предложения I0; добавим лишь, что предложение 8 доказывается сходными же рассуждениями.

Предложение I0. Пусть даны произвольные пары (A,Σ_1) и (B,Σ_2). Тогда при любом множестве (индексов) I пару $(A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2)^I$ можно вложить в пару $((A,\Sigma_1)\Delta(B,\Sigma_2))^I$.

Доказательство. Введем три отображения

1) $\omega: A+B^I \to (A+B)^I$,

2) $\tau: \Sigma_1\times\Sigma_2^I \to (\Sigma_1\times\Sigma_2)^I$,

3) $\nu: Hom(B^I, A)\to(Hom(B,A))^I$

Их определения таковы.

Во-первых, при всех $a\in A$ и $\bar{b}\in B^I$ определяется $(a+\bar{b})^\omega$ формулой $(a+\bar{b})^\omega=\hat{a}+\bar{b}$, где $\hat{a}(i)=a$ для всех $i\in I$. Очевидно, $\hat{a}$ является постоянной функцией $I\to A$, принимающей на всей области I одно и то же значение $a\in A$; при этом, $\hat{a}+\bar{b}$ является функцией $I\to A+B$, как и требуется.

Во-вторых, пусть даны любые $\sigma_1\in\Sigma_1$ и $\bar{\sigma}_2\in\Sigma_2^I$. Полагаем $(\sigma_1\bar{\sigma}_2)^\tau=\hat{\sigma}_1\cdot\bar{\sigma}_2$, где $\hat{\sigma}_1(i)=\sigma_1$ для всякого $i\in I$.

В-третьих, для всякого $\varphi\in Hom(B^I,A)$ определяем $\varphi^\nu\in(Hom(B,A))^I$ следующим условием

$$\forall i\in I,\ \bar{b}\in B^I,\ [\bar{b}(i)]^{\varphi^\nu(i)}=\bar{b}^\varphi.$$

Легко понять, что ν - изоморфизм, отображения ω и τ - мономорфизмы.

Пару отображений τ и ν можно объединить в гомоморфизм полугрупп

$$\mu: Hom(B^I, A)\lambda(\Sigma_1 \times \Sigma_2^I) \to (Hom(B,A)\lambda(\Sigma_1 \times \Sigma_2))^I,$$

если задать отображение μ формулой

$$(\varphi, \sigma_1, \bar{\sigma}_2)^\mu = (\varphi^\nu, \hat{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2).$$

Следует проверить, что отображение μ совместимо с умножением в тройном произведении. Так как $\widehat{\sigma_1\sigma_1'} = \hat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma_1'}$ очевидно, то сравнение элементов $[(\varphi,\sigma_1,\bar{\sigma}_2)(\varphi',\sigma_1',\bar{\sigma}_2')]^\mu$ и $(\varphi,\sigma_1,\bar{\sigma}_2)^\mu \cdot (\varphi',\sigma_1',\bar{\sigma}_2')^\mu$ сводится к проверке того, что выражения $(\bar{\sigma}_2\cdot\varphi' + \varphi\cdot\sigma_1')^\nu$ и $(\bar{\sigma}_2\cdot\varphi'^\nu + \varphi^\nu\cdot\widehat{\sigma_1'})$ представляют один и тот же элемент в $(Hom(B,A))^I$. С этой целью возьмем произвольные $\bar{b} \in B^I$, $i \in I$, и вычислим

$$[\bar{b}(i)]^{(\bar{\sigma}_2\cdot\varphi' + \varphi\cdot\sigma_1')^\nu(i)} = \bar{b}^{(\bar{\sigma}_2\cdot\varphi' + \varphi\cdot\sigma_1')} =$$
$$= (\bar{b}\circ\bar{\sigma}_2)^{\varphi'} + (\bar{b}^\varphi)\circ\sigma_1' = [(\bar{b}\circ\bar{\sigma}_2)(i)]^{\varphi'^\nu(i)} + [\bar{b}(i)]^{\varphi^\nu(i)}\circ\sigma_1' =$$
$$= [\bar{b}(i)\circ\bar{\sigma}_2(i)]^{\varphi'^\nu(i)} + [\bar{b}(i)]^{\varphi^\nu(i)}\circ\sigma_1' =$$
$$= [\bar{b}(i)]^{(\bar{\sigma}_2\cdot\varphi'^\nu + \varphi^\nu\cdot\widehat{\sigma_1'})(i)}$$

Таким образом, приходим к условию

$$\forall i \in I,\ (\bar{\sigma}_2\cdot\varphi' + \varphi\cdot\sigma_1')^\nu(i) = (\bar{\sigma}_2\cdot\varphi'^\nu + \varphi^\nu\cdot\widehat{\sigma_1'})(i),$$

которое, очевидно, равносильно требуемому равенству.

Остается устновить, что морфизмы μ и ω определяют мономорфизм пар

$$\mu^*: (A + B^I, Hom(B^I,A)\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2^I)) \to ((A+B)^I, (Hom(B,A)\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2))^I).$$

Единственная не вполне очевидная часть в доказательстве этого утверждения - проверка совместимости отображения μ^*, определенного в помощью ω и μ с действиями пар.

В самом деле, для произвольных $a \in A$, $\bar{b} \in B^I$, $\varphi \in Hom(B^I, A)$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\bar{\sigma}_2 \in \Sigma_2^I$ имеем

$$(a + \bar{b})^\omega \circ (\varphi, \sigma_1, \bar{\sigma}_2)^\mu = (\hat{a} + \bar{b})\circ(\varphi^\nu, \hat{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) =$$
$$= \bar{b}^{\varphi^\nu} + \hat{a}\circ\hat{\sigma}_1 + \bar{b}\circ\bar{\sigma}_2 = (\bar{b}^{\varphi^\nu} + \widehat{a\circ\sigma_1}) + \bar{b}\circ\bar{\sigma}_2 =$$
$$= \widehat{\bar{b}^\varphi + a\circ\sigma_1} + \bar{b}\circ\bar{\sigma}_2 = [(\bar{b}^\varphi + a\circ\sigma_1) + \bar{b}\circ\bar{\sigma}_2]^\omega =$$
$$= [(a + \bar{b})\circ(\varphi, \sigma_1, \bar{\sigma}_2)]^\omega$$

Следует лишь добавить, что здесь мы воспользовались равенством элементов $\bar{b}^{\varphi^\nu} + \widehat{a\circ\sigma_1}$ и $\widehat{\bar{b}^\varphi + a\circ\sigma_1}$, которое вытекает из соотношений

$$\forall i \in I,\ \widehat{(\bar{b}^\varphi + a\circ\sigma_1)}(i) = \bar{b}^\varphi + a\circ\sigma_1 =$$

$$= [\bar{b}(i)]^{\varphi^\nu(i)} + \widehat{a \circ \sigma_1}(i) =$$

$$= (\bar{b}^{\varphi^\nu} + \widehat{a \circ \sigma_1})(i).$$

На этом доказательство предложения 10 закончено.

§4. Аналог теоремы Калужнина-Краснера

Изучение вложений точной пары в треугольные произведения пар, в том или ином смысле более просто устроенных, может существенно прояснить строение данной пары. Возможность такого подхода гарантируется следующим результатом.

Предложение 11. Пусть дана любая пара (G,Γ), и пусть A - некоторый Γ-подмодуль в G, а Σ_1 и Σ_2 - полугруппы эндоморфизмов, индуцируемые полугруппой Γ в A и в G/A соответственно. Тогда пару (G,Γ) можно вложить в качестве подпары в треугольное произведение $(A,\Sigma_1)\triangle(G/A,\Sigma_2)$.

Доказательство. Воспользуемся точностью пары (G,Γ) и заменим полугруппу Γ отвечающей ей подполугруппой в $\mathrm{End}\, G$; так приходим к паре, (справа) изоморфной исходной паре (G,Γ). Поэтому можно считать дальше, что Γ содержится в $\mathrm{End}\, G$.

Для любого элемента $\gamma\in\Gamma$ символами γ^μ и γ^ν обозначим, соответственно, эндоморфизмы пространств A и G/A, индуцируемые γ. При этом, пусть $\Gamma^\mu = \Sigma_1'$ и $\Gamma^\nu = \Sigma_2'$. Далее, в G найдем дополнительное к A K-подпространство B. Это дает для G прямое разложение $G = A + B$, которое сопровождается естественным эпиморфизмом $\alpha: G\to G/A$ и проектированием $\beta: G\to B$. Отображение α можно рассматривать также как изоморфизм $\alpha: B\to G/A$ и это придает однозначный смысл обозначению α^{-1}; в частности, при любом $g\in G$ имеем $(g^\alpha)^{\alpha^{-1}} = g^\beta$. Пара $(G/A, \Sigma_2')$ и отображение α индуцируют пару (B,Σ_2'); для $b\in B$ и $\gamma\in\Gamma$, $\gamma^\nu = \sigma_2'\in\Sigma_2'$ имеем

$$b\circ\sigma_2' = (b^\alpha\circ\sigma_2')^{\alpha^{-1}} = ((b\circ\gamma)^\alpha)^{\alpha^{-1}} = (b\circ\gamma)^\beta.$$

Исходим от разложения $G = A+B$ и сопоставим всем элементам $\sigma_1'\in\Sigma_1'$ и $\sigma_2'\in\Sigma_2'$ соответственно, элементы

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \sigma_1' \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2' & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

из $End\,G$, чем устанавливаем вложения $\Sigma_i' \to \Sigma_i \subset End\,G$. При этом, для всякого элемента $g \in G$, $g = a + b$ имеем

$$g^{\sigma_1} = (b+a)^{\sigma_1} = b + a \circ \sigma_1' \quad \text{и} \quad g^{\sigma_2} = (b+a)^{\sigma_2} = b \circ \sigma_2' + a .$$

Далее, заметив, что из $b^{\sigma_2} = b \circ \sigma_2' = (b \cdot \gamma)^{\beta}$ вытекает $b \cdot \gamma - b \circ \sigma_2' \in A$, определяем отображение $\varphi' : B \to A$ согласно формуле $b^{\varphi'} = b \cdot \gamma - b \circ \sigma_2'$; легко непосредственно проверить, что $\varphi' \in Hom(B, A)$. Полугруппу $Hom(B, A)$ также будем рассматривать как подполугруппу Φ в $End\,G$, сопоставляя всем элементам $\varphi' \in Hom(B, A)$ эндоморфизмы $\varphi = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varphi' \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ пространства G. Имеем при этом $g^{\varphi} = (a+b)^{\varphi} = a + b^{\varphi'} + b$.

Пусть $\Gamma' = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Согласно нашему построению, $(G, \Gamma') = (A, \Sigma_1) \vartriangle (B, \Sigma_2)$.

Отображение $\sigma_1 \varphi \sigma_2 \to (\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$ индуцирует изоморфизм подполугруппы $\Sigma_1 \Phi \Sigma_2$ из $End\,G$ с полугруппой $\Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ и обозначим этот изоморфизм π. Действительно, так как в $End\,G$ выполняется равенство

$$\sigma_1 \varphi \sigma_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \sigma_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varphi' \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2' & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2' & \varphi' \\ 0 & \sigma_1' \end{pmatrix},$$

то имеем

$$[(\sigma_1 \varphi \sigma_2)(\bar\sigma_1 \bar\varphi \bar\sigma_2)]^{\pi} = \left[\begin{pmatrix} \sigma_2' & \varphi' \\ 0 & \sigma_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar\sigma_2' & \bar\varphi' \\ 0 & \bar\sigma_1' \end{pmatrix} \right]^{\pi} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_2' \bar\sigma_2' & \sigma_2' \cdot \bar\varphi' + \varphi' \cdot \bar\sigma_1' \\ 0 & \sigma_1' \bar\sigma_1' \end{pmatrix}^{\pi} = \begin{pmatrix} (\sigma_2 \bar\sigma_2)' & (\sigma_2 \cdot \bar\varphi + \varphi \cdot \bar\sigma_1)' \\ 0 & (\sigma_1 \bar\sigma_1)' \end{pmatrix}^{\pi} =$$

$$= ((\sigma_2 \cdot \bar\varphi + \varphi \cdot \bar\sigma_1), \sigma_1 \bar\sigma_1, \sigma_2 \bar\sigma_2) = (\varphi, \sigma_1, \sigma_2) \cdot (\bar\varphi, \bar\sigma_1, \bar\sigma_2) = (\sigma_1 \varphi \sigma_2)^{\pi} (\bar\sigma_1 \bar\varphi \bar\sigma_2)^{\pi}.$$

Биективность π очевидна.

Оказывается, что полугруппу Γ рассматриваемую как подполугруппу в $End\,G$ можно вложить в $\Sigma_1 \Phi \Sigma_2$. Для доказательства возьмем любой элемент $\gamma \in \Gamma$ и пусть $\gamma^{\mu} = \sigma_1'$ и $\gamma^{\nu} = \sigma_2'$. Далее, пусть φ', φ, σ_1 и σ_2 получены описанными выше способами. Докажем, что $\gamma = \sigma_1 \varphi \sigma_2$. Левая и правая части этого предполагаемого равенства являются элементами из $End\,G$ и поэтому для их отождествления достаточно для всех $g = a + b \in G$ доказать, что $g^{\tau} = g^{\sigma_1 \varphi \sigma_2}$.

Имеем, с одной стороны $g^{\tau} = (a+b)^{\tau} = a^{\tau} + b^{\tau} = a \circ \sigma_1' + b^{\varphi'} + b \circ \sigma_2'$.

С другой стороны,

$$g^{\sigma_1 \varphi \sigma_2} = (b+a)^{\sigma_1 \varphi \sigma_2} = \left[(b,a)\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \sigma_1'' \end{pmatrix}\right]^{\varphi \sigma_2} =$$

$$= \left[(b, a \cdot \sigma_1')\begin{pmatrix} \varepsilon & \varphi' \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right]^{\sigma_2} = (b, b^{\varphi'} + a \circ \sigma_1)\begin{pmatrix} \sigma_2' & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= (b \circ \sigma_2', \; b^{\varphi'} + a \circ \sigma_1'),$$

т.е. $g^{\sigma_1 \varphi \sigma_2}$ равно $a \circ \sigma_1' + b^{\varphi'} + b \circ \sigma_2'$ – выражению, совпадающему с полученным ранее выражением для g^{τ}. Нужное равенство установлено.

В результате построено вложение $(G,\Gamma) \to (G,\Gamma')$, что вместе с изоморфизмом $(G,\Gamma') = (A,\Sigma_1) \Delta (B,\Sigma_2) \xrightarrow{*} \to (A,\Sigma_1) \Delta (G/A, \Sigma_2)$ дает требуемое вложение.

Предложение доказано.

Литература

1. К а л ь ю л а й д У. Э., Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. Успехи матем. наук, XXXII, 4(1977), 253-254.
2. К а л ь ю л а й д У., Замечания о многообразиях представлений полугрупп и линейных автоматов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 431. 47-67.
3. К а л ь ю л а й д У.Э., Треугольное произведение. Деп., РЖ 1979, 2А136.
4. Н е й м а н Х., Многообразия групп. Москва, 1969.
5. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
6. П л о т к и н Б. И., Треугольные произведения пар. Уч. зап. Латвийск. ун-та, 1971, 151. 140-170.
7. П л о т к и н Б. И., Г р и н б е р г А. С., О полугруппах многообразий, связанных с представлениями групп. Сиб. матем. ж. XIII, 5(1972), 1030-1053.
8. Ф и н к е л ь ш т е й н М. Я., Декомпозиция линейных автоматов. Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1979, № 4, 93.
9. E i l e n b e r g S., Automata, languages and machines, vol. B. Acad. Press, New York, 1976.
10. V o v e i S. M., Triangular products of group representations and their applications. Progress in Math.,

Birkhäuser, Boston, 1981.

Поступило
3 УII 1982

POOLRÜHMADE LINEAARESITUSTE KOLMNURKKORRUTIS

U.Kaljulaid

Резюме

Rühmade esituste muutkondade uurimisel on osutunud kasulikuks esituste kolmnurkkorrutamine, [6]. Käesolevas töös defineeritakse vastav konstruktsioon poolrühmade esituste korral ja uuritakse eel teel saadava esituse omadusi. Muuhulgas, tõestatakse poolrühmade lineaaresituste jaoks Kalužnin-Krasneri teoreemi analoog.

TRIANGULAR PRODUCT OF LINEAR SEMIGROUP ACTIONS

U.Kaljulaid

Summary

Triangular product of group representations, introduced by B.I.Plotkin [6], has been a useful tool for investigation of varieties of representations. In the present paper the corresponding construction for semigroup actions and some of its properties are considered. It is the 'semigroup part' of the author's manuscript [3]. The motivation for this late publication is continuing interest in this construction [8,10] and so it may be useful to have a detailed version of semigroup case available.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОНОИДОВ ПО СВОЙСТВАМ ИХ ФАКТОРПОЛИГОНОВ РИСА

М. Кильп
Кафедра алгебры и геометрии

Известно много результатов, позволяющих судить о свойствах моноида по свойствам полигонов над ним (см., например, статьи 3,4,5,7,8,9]). В [9] Кнауер и Петрич дают классификацию моноидов по свойствам "быть без кручения", плоскостности (в смысле Штенстрема [10], сильной плоскостности по терминологии статьи [4]), проективности и свободы полигонов. Так как понятия сильной плоскостности и "быть без кручения" являются весьма далекими друг от друга, мы рассматриваем три промежуточных понятия. Это понятия плоскостности, слабой плоскостности и специальной слабой плоскостности. В этой статье мы дадим описание моноидов, над которыми все левые факторполигоны Риса являются плоскими (слабо плоскими, специально слабо плоскими).

Пусть S - моноид. Множество M называется левым полигоном моноида S или левым S-полигоном, если для любых $s \in S$ и $m \in M$ определено произведение $sm \in M$, причем $(st)m = s(tm)$ и $1m = m$ для всех $s, t \in S$ и $m \in M$. Аналогично определяются правые S-полигоны. Пусть теперь A - правый S-полигон и M - левый S-полигон. В [3] следующим образом определяется тензорное произведение $A \otimes M$ полигонов A и M. В прямом произведении $A \times M$ множеств A и M задается отношение θ: $(a_1, m_1)\, \theta\, (a_2, m_2)$, где $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$, тогда и только тогда, когда найдется такая конечная цепочка пар из $A \times M$, что первая пара цепочки совпадает (a_1, m_1), последняя пара совпадает (a_2, m_2), а переход от каждой пары цепочки к последующей осуществляется при помощи переброски элемента из S, т.е. от пары (as, m), где $a \in A$, $m \in M$, $s \in S$, переходят к паре (a, sm), или наоборот. Отношение θ оказывается отношением эквивалентности. Фактормножество

$A\times M/\theta$ называется тензорным произведением $A\otimes_S M$ полигонов A и M Класс эквивалентности, в который входит пара (a,m) обозначается через $a\otimes m$.

Если левый S-полигон M зафиксировать, то $\otimes_S M$ оказывается функтором из категории всех правых S-полигонов в категорию множеств. Будем говорить, что левый S-полигон M является плоским, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет мономорфизмы. Другими словами можно сказать, что левый S-полигон M называется плоским, если из того, что A - подполигон правого S-полигона B, а элементы $a_1\otimes m_1$ и $a_2\otimes m_2$ (где $a_1,a_2\in A$, $m_1,m_2\in M$) различны в тензорном произведении $A\otimes_S M$, всегда следует, что элементы $a_1\otimes m_1$ и $a_2\otimes m_2$ являются различными в тензорном произведении $B\otimes_S M$ (см. [3]).

Будем говорить, что левый S-полигон M является <u>слабо плоским</u>, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет все включения $I\subseteq S$, где I - правый идеал моноида S. Левый S-полигон M является <u>специально слабо плоским</u>, если $\otimes_S M$ сохраняет все включения $aS\subseteq S$, где $a\in S$.

Очевидно, каждый плоский полигон является слабо плоским, а каждый слабо плоский полигон - специально слабо плоским.

Левый S-полигон M называется полигоном без кручения (см. [9]), если из равенства $sx=sy$, где $x,y\in M$ и s является сократимым слева элементом моноида S, всегда следует равенство $a=b$.

Следующие три вспомогательных результата оказываются нам полезными в дальнейшем.

<u>Лемма I</u> ([3]). Пусть M - левый S-полигон. Тогда между $S\otimes_S M$ и SM существует взаимно-однозначное соответствие (заданное правилом $s\otimes m \leftrightarrow sm$ для всех $s\in S$ и $m\in M$).

<u>Лемма 2</u> ([4]). Пусть M - левый S-полигон. Если функтор $\otimes_S M$ сохраняет все включения подполигонов с не более чем двумя образующими в некоторый правый S-полигон B, то $\otimes_S M$ сохраняет все включения подполигонов в B.

Напомним, что правый S-полигон A является <u>инъективным относительно включения</u> $i: B\to C$, если для любого S-гомоморфизма $f: B\to A$, где B и C - правые S-полигоны, существует гомоморфизм $g: C\to A$, так что $f=gi$. Если A является инъективным относительно всех включений правых S-полигонов, то A является инъективным (см. [5]).

Пусть M - левый S-полигон, и $K = \{k_1, k_2\}$-множество. Пусть $M^* = Hom(M, K)$ - множество всех отображений из M в K. Определим $(fs)(a) = f(sa)$ для всех $f \in M^*$ и $s \in S$. Тогда M^* оказывается правым S-полигоном, который называется полигоном характеров полигона M (см. [I]).

Теорема 3 (теорема 8 в [I]). Левый S-полигон M является плоским тогда и только тогда, когда его полигон характеров M^* является инъективным.

Из этой теоремы получается полезная в дальнейшем

Теорема 4. Пусть M - левый S-полигон. Если функтор $\otimes_S M$ сохраняет все включения во все циклические полигоны, то M является плоским.

Доказательство. В [I] и (в более общей ситуации) в [2], теорема 2, доказано, что функтор $\otimes_S M$ сохраняет включение $\iota \quad A \to B$ правых S-полигонов тогда и только тогда, когда M^* инъективен относительно включения ι. Предположим теперь, что $\otimes_S M$ сохраняет все включения подполигонов во все циклические правые полигоны. Тогда M^* является инъективным относительно всех включений в циклические полигоны. По теореме 1 из [5] M^* является инъективным. Из теоремы 3 следует теперь, что M является плоским.

Покажем теперь, что свойство "быть без кручения" следует из специальной слабой плоскостности.

Предложение 5. Каждый специально слабо плоский полигон является полигоном без кручения.

Доказательство. Пусть M - специально слабо плоский левый S-полигон. Пусть $sx = sy$, где $x, y \in M$ и $s \in S$ - сократимый слева элемент. По лемме I $s \otimes x = s \otimes y$ в тензорном произведении $\otimes_S M$. Так как M является специально слабо плоским, то функтор $S \otimes_S M$ сохраняет включение $sS \subseteq S$ и мы имеем равенство $s \otimes x = s \otimes y$ в тензорном произведении $sS \otimes M$. Это означает, что существует такая цепочка пар элементов в $sS \times M$ и перебросок элементов из S, которая приводит нас от пары (s, x) к паре (s, y). Пусть этой цепочкой будет

$$(s, x) \to (su_1, m_1) \to \ldots \to (su_i, m_i) \to \ldots \to (su_n, m_n) \to (s, y).$$

Легко доказать, что для всех пар (su_i, m_i) имеет место равенство $u_i m_i = x$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, чтобы получить пару (su_1, m_1) из пары (s, x) мы должны иметь $x = u_1 m_1$. Чтобы получить третью пару (su_2, m_2) из пары (su_1, m_1) мы должны иметь $su_1 = su_2 t$ и $tm_1 = m_2$ для некоторого $t \in S$. Но тогда, сокращая на s, получим $u_1 = u_2 t$. Следовательно, $u_2 m_2 = u_2 t m_1 = u_1 m_1 = x$. Продолжая, получим $x = u_i m_i$ для всех i. Начиная с другого конца нашей последовательности, получим $y = u_i m_i$ для всех пар (su_i, m_i). Из этих равенств получим $x = y$.

Определим теперь S-полигоны, по свойствам которых мы классифицируем моноиды в этой статье. Пусть I – некоторый левый идеал моноида S. Факторполигон левого S-полигона S по левой конгруэнции, один класс которой состоит из всех элементов левого идеала I, а все остальные классы – одноэлементны, называется <u>факторполигоном Риса</u> моноида S по левому идеалу I и обозначается через S/I. Как обычно $\bar{s}$ обозначает класс факторполигона S/I, содержащий элемент s. Класс, состоящий из элементов левого идеала I обозначается через $\bar{0}$ (даже тогда, когда S не содержит нулевого элемента).

Выясним теперь, когда факторполигон Риса моноида S является специально слабо плоским.

<u>Предложение 6</u>. Факторполигон Риса S/I моноида S по левому идеалу I является специально слабо плоским тогда и только тогда, когда для каждого элемента $a \in I$ существует такой элемент $\ell \in I$, что $a\ell = a$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть включение $I \subset S$ является строгим и пусть S/I – специально слабо плоский полигон. Из этого следует, что для всех $a \in S$ функтор $\otimes S/I$ сохраняет включение $aS \subseteq S$. Пусть a – произвольный элемент из I. Тогда $a\bar{1} = a\bar{0}$ и в тензорном произведении $aS \otimes S/I$ должно выполняться равенство $a \otimes \bar{1} = a \otimes \bar{0}$. Следовательно, существует конечная цепочка перебросок элементов моноида S, приводящая нас в $aS \times S/I$ от пары $(a, \bar{1})$ к паре $(a, \bar{0})$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что последней в нашей цепочке будет первая пара со второй компонентой $\bar{0}$. Пусть $(au, \bar{v}) \in aS \times S/I$ – пара предшествующая последней паре. Легко показать, что для всех пар $(as, \bar{t})$ из нашей последовательности, за исключением последней пары,

имеет место равенство $a = ast$. Следовательно, $a = auv$. Чтобы получить последнюю пару, мы должны иметь $u = axy$ для некоторых $x, y \in S$ и последняя пара имеет вид $(ax, y\bar{v})$. По предположению $y\bar{v} = \bar{0}$. Значит, $yv \in I$. Теперь

$$a = auv = a(xyv), \quad \ell = xyv \in I,$$

и, следовательно, $a\ell = a$.

Достаточность. Пусть I - левый идеал моноида S. Предположим, что для каждого $a \in I$ существует $\ell \in I$, так что $a\ell = a$. Пусть $s \in S$ - произвольный элемент и пусть для некоторых $\bar{x}, \bar{y} \in S/I$ имеет место равенство $s\bar{x} = s\bar{y}$. Мы должны показать, что $s \otimes \bar{x} = s \otimes \bar{y}$ в тензорном произведении $sS \otimes S/I$. Если $sx \notin I$, то $sx = sy$ и

$$s \otimes \bar{x} = sx \otimes \bar{1} = sy \otimes \bar{1} = s \otimes \bar{y}.$$

Если $sx \in I$, то $s\bar{x} = s\bar{y} = s\bar{0}$ и нам будет достаточно показать, что $s \otimes \bar{x} = s \otimes \bar{0}$ в $aS \otimes S/I$. Пусть $t \in I$ такой элемент, что $sx = sxt$. Тогда

$$s \otimes \bar{x} = sx \otimes \bar{1} = sxt \otimes \bar{1} = sx \otimes t\bar{1} =$$
$$= sx \otimes \bar{t} = sx \otimes \bar{0} = s \otimes x\bar{0} = s \otimes \bar{0}.$$

Следующее предложение показывает, что на уровне факторполигонов Риса понятия плоскостности и слабой плоскостности совпадают.

Предложение 7. Пусть I - левый идеал моноида S. Тогда следующие условия равносильны:

(I) S/I является плоским,

(2) S/I является слабо плоским,

(3) для каждого элемента $a \in I$ существует элемент $\ell \in I$, так что $a\ell = a$, и для любых $x, y \in S$ существуют элементы $u, v \in S$, так что $xu = yv$.

Доказательство. Импликация (I) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть I - собственный левый идеал моноида S. Пусть факторполигон S/I является слабо плоским и пусть $a \in I$. Так как слабо плоский полигон является специально слабо плоским, то S/I является специально слабо плоским и, по предложению 6, существует $\ell \in I$, так что $a\ell = a$. Пусть теперь $x, y \in I$. Тогда $x\bar{1} = y\bar{1}$. Так как функтор $\otimes S/I$ должен сохранять включение $xS \cup yS \subseteq S$, то в $(xS \cup yS) \otimes S/I$ должно выполняться равенство

9

$x\otimes\bar{1}=y\otimes\bar{1}$. Но $x\otimes\bar{1}=x\otimes\bar{0}$ в $xS\otimes S/I$ и $y\otimes\bar{1}=y\otimes\bar{0}$ в $yS\otimes S/I$. Следовательно, в $(xS\cup yS)\otimes S/I$ имеет место равенство $x\otimes\bar{0}=y\otimes\bar{0}$. Если $xS\subseteq yS$ или $yS\subseteq xS$, то нужные элементы $s,t\in S$, конечно, существуют. В общем случае существует конечная цепочка перебросок, приводящая нас в $(xS\cup yS)\times S/I$ от пары $(x,\bar{0})$ к паре $(y,\bar{0})$. Пусть $(xu,\bar{v})$ – последняя пара цепочки до того, пока мы в первый раз попадем в $yS\times S/I$. Тогда должны существовать $k,l\in S$ такие, что $xuk=yl$. Так как I – левый идеал моноида S, то вторая часть условия (3) имеет место для всех $x,y\in S$.

Докажем теперь импликацию $(3)\Rightarrow(1)$.

Пусть aS – циклический правый S-полигон, и $l,c\in aS$. Пусть I – такой левый идеал моноида S, для которого удовлетворяется условие (3). По теореме 4 мы должны показать, что функтор $\otimes S/I$ сохраняет включение $lS\cup cS\subseteq aS$. Пусть $l=ax$, $c=ay$, $x,y\in S$, и пусть $ax\otimes\bar{s}=ay\otimes\bar{t}$ в тензорном произведении $aS\otimes S/I$. Тогда существует конечная цепочка пар в $aS\times S/I$ и перебросок, приводящая нас от пары $(ax,\bar{s})$ к паре $(ay,\bar{t})$. Если все вторые компоненты пар нашей цепочки отличны от $\bar{0}$, то $axs=ayt$ и

$$ax\otimes\bar{s}=a(xs)\otimes\bar{1}=a(yt)\otimes\bar{1}=ay\otimes\bar{t}.$$

В противном случае имеют место равенства

$$ax\otimes\bar{s}=a\otimes\bar{0}=ay\otimes\bar{t}.$$

Тогда, конечно, $ax\otimes\bar{s}=ax\otimes\bar{0}$ и $ay\otimes\bar{t}=ay\otimes\bar{0}$ в тензорном произведении $aS\otimes S/I$. Мы покажем, что эти равенства имеют место также и в тензорных произведениях $axS\otimes S/I$ и $ayS\otimes S/I$, соответственно, а равенство $ax\otimes\bar{0}=ay\otimes\bar{0}$ выполняется в тензорном произведении $(axS\cup ayS)\otimes S/I$. Отметим, что все пары $(au,\bar{v})$ с начала нашей последовательности до последней пары со второй компонентой, не равной $\bar{0}$, обладают свойством $axs=auv$. Чтобы получить следующую пару мы должны иметь $au=ars$, $sv\in I$. Теперь для $i=rsv\in I$ имеем $axs=ai$. По первой части свойства (3) существует элемент $i_1\in I$, так что $ii_1=i$. Из $axs=ai$ следует $axsi_1=axs$. Следовательно,

$$ax\otimes\bar{s}=axs\otimes\bar{1}=axsi_1\otimes\bar{1}=axs\otimes\bar{i_1}=ax\otimes\bar{0}$$

в тензорном произведении $axS\otimes S/I$. Аналогично можно доказать, что $ay\otimes\bar{t}=ay\otimes\bar{0}$ в тензорном произведении

$ayS \otimes {}^{S}/_{I}$. По второй части условия (3) существуют элементы $u, v \in S$, так что $xu = yv$. Тогда $ax \otimes \bar{0} = ax \otimes u\bar{0} = axu \otimes \bar{0} = ayv \otimes \bar{0} = ay \otimes v\bar{0} = ay \otimes \bar{0}$ в тензорном произведении $(axS \cup ayS) \otimes {}^{S}/_{I}$.

Следующие две теоремы дают описания моноидов, все факторполигоны Риса которых специально слабо плоские (плоские)

Теорема 8. Все левые факторполигоны Риса моноида S являются специально слабо плоскими тогда и только тогда, когда моноид S регулярен.

Доказательство. Необходимость. Пусть все левые факторполигоны Риса моноида S являются специально слабо плоскими. Пусть $a \in S$ - произвольный элемент. Тогда, по предположению, ${}^{S}/_{Sa}$ является специально слабо плоским. Из предложения 6 мы получим, что для a существует такой элемент $b \in Sa$, что $a = ab$. Пусть $b = xa$ для $x \in S$. Тогда $a = axa$. Следовательно, моноид S регулярен.

Достаточность. Пусть S - регулярный моноид, I - левый идеал моноида S и $a \in I$. Из регулярности моноида S следует существование элемента $x \in S$ такого, что $a = axa$. Теперь $b = xa \in Sa \subseteq I$ и $a = ab$. По предложению 6 ${}^{S}/_{I}$ является специально слабо плоским.

Теорема 9. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

(I) все левые факторполигоны моноида S являются слабо плоскими,

(2) все левые факторполигоны моноида S являются плоскими,

(3) S - регулярный моноид и для любых $x, y \in S$ существуют такие $s, t \in S$, что $xs = yt$.

Доказательство. Эквивалентность условий (I) и (2) следует из предложения 7. Докажем импликацию (2)$\Rightarrow$(3). Если все левые факторполигоны Риса моноида S являются плоскими, то они являются специально слабо плоскими, и, по теореме 8, S является регулярным моноидом. Из условия (2) следует, что нулевой полигон ${}^{S}/_{S}$ является плоским, откуда по предложению 7 следует, что для любых $x, y \in S$ существуют такие элементы $s, t \in S$, что $xs = yt$.

Докажем, наконец, импликацию (3)$\Rightarrow$(2). Пусть ${}^{S}/_{I}$ - факторполигон Риса моноида S по левому идеалу I и пусть $a \in I$. Учитывая предложение 7 нам достаточно показать, что для a существует элемент $b \in I$ такой, что $ab = a$.

Так как S - регулярный моноид, то существует $x \in S$, такой что $axa=a$. Теперь $l=xa \in I$ и $al=a$. Следовательно, факторполигон S/I является плоским.

Литература

1. Дорофеева М. П., Инъективные и плоские полигоны над наследственными моноидами. Вестник Моск. ун-та, Сер. I, мат.-мех., 1973, 47-51.
2. Кацов Е. Б., Тензорные произведения функторов. Сиб. матем. ж., 1978, 19, 318-327.
3. Кильп М., О плоских полигонах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 66-72.
4. Кильп М., К гомологической классификации моноидов. Сиб. матем. ж., 1972, 13, 578-586.
5. Скорняков Л. А., О гомологической классификации моноидов. Сиб. матем. ж., 1969, 10, 1139-1143.
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Vol. I, II. Amer. Math. Soc., Providence, 1961, 1967.
7. Kilp, M., Commutative monoids all of whose principal ideals are projective. Semigroup Forum, 1973, 334-339.
8. Knauer, U., Characterisation of monoids by properties of their cyclic or finitely generated right acts and their right ideals (preprint), Oldenburg, 1981.
9. Knauer, U., Petrich M., Characterisation of monoids by torsion free, flat, projective, and fr free acts. Arch. Math., 1981, 36. 289-294.
10. Stenström, B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 1972, 315-334.

Поступило
19 IУ 1982

MONOIDIDE KLASSIFIKATSIOON NENDE REES'I FAKTORITE OMADUSTE JÄRGI

M. Kilp

R e s ü m e e

Monoidi S Rees'i faktoriks S/I vasakpoolse ideaali I järgi nimetatakse vasakpoolse S-polügooni faktorpolügooni, mille üheks klassiks on I, teised klassid aga üheelemendilised. Tööe antakse selliste monoidide kirjeldus, mille kõik Rees'i faktorid on spetsiaalselt nõrgalt lamedad.

CHARACTERIZATION OF MONOIDS BY PROPERTIES OF THEIR LEFT REES FACTORS

M. Kilp

S u m m a r y

A left S-act M is weakly flat if the functor $\otimes M$ preserves all inclusions $I \subseteq S$ where I is a right ideal of S. A left S-act M is principally weekly flat if the functor $\otimes M$ preserves all inolueione $aS \subseteq S$ where $a \in S$. A left S-act M is torsion free if $sa = sb$, with $a, b \in M$ and s a left cancellable element of S, implies $a = b$.

It is shown that every principally weakly flat act is torsion free.

Let I be a left ideal of a monoid S. The factor act of S by a left congruence one class of which consists of all elements of I and the other classes consist of single elements of S is callee a left Rees factor of S by the left ideal I.

Theorem 8. All left Rees factors of a monoid S are principally weakly flat if and only if S is regular.

Theorem 9. All left Rees factors of a monoid S are weakly flat if and only if S is regular and for all $x, y \in S$ there exist $s, t \in S$ such that $xs = yt$.

АНАЛОГИ КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫХ КОЛЕЦ ДЛЯ МОНОИДОВ II

П.Нормак
Таллинский пединститут

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [4]. Покажем, именно, что нет "хорошего" моноида, который мог бы служить аналогом квазифробениусово кольца.

Все рассмотрения в дальнейшем введутся в категорий левых S-полигонов, где S – фиксированный моноид. Для необходимых определении ссылаемся на работу [4].

Полигон C называется конечно связанным, если существует точная последовательность $K \rightrightarrows F \longrightarrow C$, где K – конечно порожденный и F – конечно порожденный свободный полигоны. Обозначим через E одноэлементную группу. Полигоном характеров A^* левого S-полигона A называется правый S-полигон $Hom_E(A, \underline{2})$, где $\underline{2}$ – двухэлементный E-полигон. Полигон A называется сильно плоским, если функтор $\cdot \otimes A$ сохраняет уравнители и коуниверсальные квадраты. Моноид S называется совершенным слева, если любой сильно плоский левый S-полигон проективен. Моноид S называется нётеровым (артиновым) слева, если любая возрастающая (убывающая) цепочка левых конгруэнций на моноиде S стабилизируется. Назовем полигон A простым, если он подпрямо неразложим и его подполигонами являются только сам A и, может быть, еще одноэлементный полигон Θ. Левый S-полигон A называется образующим (кообразующим), если для любых различных гомоморфизмов $\alpha, \beta : X \longrightarrow Y$ существует гомоморфизм $\gamma : A \longrightarrow X$ ($\gamma : Y \longrightarrow A$), такой что $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$ ($\gamma\alpha \neq \gamma\beta$). Полигон A называется вполне проективным (вполне инъективным), если A – проективный образующий (инъективный кообразующий) в категории левых S-полигонов.

Лемма I ([9], теорема 5.3). Следующие свойства S-полигона A эквивалентны:

I) Полигон A сильно плоский.

2) Любой гомоморфизм $B \to A$, где B – конечно связан, можно пропускать через конечно порожденный свободный S-полигон.

3) Если $sa = tb$, где $s, t \in S$, $a, b \in A$, то существуют элементы $s', t' \in S$ и $c \in A$ такие, что $ss' = tt'$, $a = s'c$ и $b = t'c$; кроме того, если $a = b$, то s' и t' можно выбрать так, что $s' = t'$.

Лемма 2. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Любой циклический конечно связанный S-полигон вложим в проективный S-полигон.

2) Любой циклический конечно связанный S-полигон вложим в сильно плоский S-полигон.

3) S – либо единичная группа, либо единичная группа с нулем.

Доказательство. Импликация I) $\Rightarrow$ 2) следует из того, что любой проективный полигон является сильно плоским ([3], лемма 3).

2) $\Rightarrow$ 3). Если S – единичная группа, то все доказано. Пусть теперь $s, t \in S$, $s \neq t$, и ϱ – левая конгруэнция на S, порожденная парой (s, t). По теореме 2 работы [5] полигон S/ϱ является конечно связанным и, следовательно, вложим в некоторый сильно плоский S-полигон A. Поскольку в полигоне S/ϱ мы имеем $s\bar{1} = \bar{s} = \bar{t} = t\bar{1}$, где $\bar{s}$ обозначает класс эквивалентности ϱ в S, содержащий элемент $s \in S$, то по лемме I существуют элементы $u \in S$, $a \in A$, такие, что $su = tu$ и $\bar{1} = ua$. Если $1 \notin Ss \cup St$, то класс $\bar{1}$ не содержит элементов, отличных от единицы 1 моноида S ([7], §10, теорема 3). Тогда $ua = 1$ и $s = sua = tua = t$. Полученное противоречие показывает, что $S = Ss \cup St$ для всех пар $(s, t) \in S \times S$, где $s \neq t$. Если теперь $Ss = S$ для всех элементов $s \in S$, то S – группа, что противоречит существованию элемента $u \in S$ такого, что $su = tu$. Итак, $Sx \subsetneq S$ для некоторого единственного элемента $x \in S$. Если $px = a \neq x$ для некоторого элемента $p \in S$, то, учитывая равенство $S = Sx \cup Sa$, получим $S = Sa = Spx \subseteq Sx \subsetneq S$. Следовательно, $Sx = x$. Пусть $b \in S \setminus \{x\}$. Так как $S = Sb$, то существует элемент

$c \in S$ такой, что $x = cb$. Если $c \in S \setminus \{x\}$, то $Sx = Scb = Sb = S$, что противоречит условию $Sx \subsetneq S$. Следовательно, x - внешний нуль моноида S и $G = S \setminus \{x\}$ - группа. Но тогда из равенств $su = tu$, $ua = 1$ мы получим, что $u = x$ и $x = 1$, т.е. ϱ является единичной левой конгруэнцией на моноиде S для любых двух различных элементов $s, t \in S$. Следовательно, G - единичная группа и S - единичная группа с нулем.

Теперь мы в состоянии привести аналог условия I0, приведенного в работе [4].

<u>Предложение I</u>. Любой циклический левый и любой циклический правый S-полигоны содержатся в некотором проективном S-полигоне тогда и только тогда, когда либо S - единичная группа, либо S - единичная группа с нулем.

Доказательство следует прямо из леммы 2, поскольку описанные там моноиды - коммутативные.

<u>Предложение 2</u>. Левый S-полигон A является кообразующим в категории S-полигонов тогда и только тогда, когда A содержит иньективную оболочку любого простого S-полигона.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть B - простой левый S-полигон. Так как B не имеет собственных подполигонов, то либо $B = \{\theta_1\}$ или $B = \{\theta_1, \theta_2\}$, где θ_1, θ_2 - одноэлементные полигоны, либо существует элемент $b \in B$ такой, что $B = Sb$. Пусть $B = \{\theta_1, \theta_2\}$ и пусть $\alpha, \beta : B \longrightarrow E(B)$ - гомоморфизмы, такие, что $\alpha(\theta_i) = \theta_i$, $\beta(\theta_i) = \theta_j$, $i \neq j$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, то существует гомоморфизм $\gamma : E(B) \longrightarrow A$ такой, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Если $\operatorname{Ker} \gamma \neq \Delta_{E(B)}$, то $\operatorname{Ker} \gamma|_B \neq \Delta_B$, поскольку $E(B)$ - существенное расширение полигона B. Следовательно, $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2)$, что противоречит условию $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \gamma = \Delta_{E(B)}$. Пусть теперь существует элемент $b_0 \in B$ такой, что $Sb_0 = B$. Поскольку полигон B подпрямо неразложим, то существуют элементы $b_1, b_2 \in B$ такие, что $b_1 \varrho b_2$ для любой собственной конгруэнции ϱ на B. Пусть элементы $s, t \in S$ такие, что $sb_0 = b_1$ и $tb_0 = b_2$. Пусть гомоморфизмы $\alpha, \beta : B \longrightarrow E(B)$ и $\gamma : E(B) \longrightarrow A$ такие, что $\alpha(b) = sb$, $\beta(b) = tb$, $b \in B$ и $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Для любого элемента $b \in B$ существует элемент $u \in S$ такой, что $ub_0 = b$. Имеем $\gamma\alpha(b) = \gamma\alpha(ub_0) = u\gamma\alpha(b_0) = u\gamma(sb_0) = u\gamma(b_1)$ и $\gamma\beta(b) = \gamma\beta(ub_0) = u\gamma(tb_0) = u\gamma(b_2)$. Если теперь

Ker $\gamma \neq \Delta_{E(B)}$, то Ker $\gamma|_B \neq \Delta_B$ и, следовательно $(b_1, b_2) \in$ Ker γ. Тогда $\gamma\alpha(b) = u\gamma(b_1) = u\gamma(b_2) = \gamma\beta(b)$, что противоречит условию $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Следовательно, Ker $\gamma = \Delta$, то есть γ - мономорфизм.

<u>Достаточность</u>. Пусть нам заданы гомоморфизмы $\alpha, \beta : X \longrightarrow Y$ такие, что $\alpha \neq \beta$. Тогда существует элемент $x \in X$ такой, что $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Рассмотрим на Y максимальную конгруэнцию ρ такую, что $\alpha(x) \not\rho\, \beta(x)$ и пусть $\pi : Y \longrightarrow Y/\rho$ - естественный эпиморфизм. Покажем теперь, что существует простой подполигон $P \subsetneq Y/\rho$ такой, что $\pi\alpha(x), \pi\beta(x) \in P$. Действительно, если Y/ρ не прост, то существует ненулевой подполигон $Z \subsetneq Y/\rho$. Если теперь $\pi\alpha(x), \pi\beta(x) \in Y/\rho \setminus Z$ или $\pi\alpha(x) \in Z$, $\pi\beta(x) \in Y/\rho \setminus Z$ или $\pi\alpha(x) \in Y/\rho \setminus Z$, $\pi\beta(x) \in Z$, то, рассмотрев полигон $(Y/\rho)/\rho_1$, где $x \rho_1 y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in Z$, и естественный эпиморфизм $\bar{\pi} : Y/\rho \longrightarrow (Y/\rho)/\rho_1$, мы получим $\bar{\pi}\pi\alpha(x) \neq \bar{\pi}\pi\beta(x)$.
Это противоречит выбору ρ как максимальной конгруенции, разделяющей $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Следовательно, для любого ненулевого подполигона $Z \subset Y/\rho$ мы имеем $\pi\alpha(x), \pi\beta(x) \in Z$. Пересечение $\bigcap_i Z_i = P$ всех ненулевых подполигонов полигона Y/ρ является, очевидно, простым полигоном, содержащий элементы $\pi\alpha(x)$ и $\pi\beta(x)$. По предположению имеем вложение $\iota : E(P) \to A$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & E(P) \\
Y/\rho \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & P \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "\iota'"']
\end{tikzcd}$$

где ι' и i - естественные вложения. Поскольку полигон $E(P)$ - иньективен, то существует гомоморфизм $\varphi : Y/\rho \longrightarrow E(P)$ такой, что $\varphi i = \iota'$. Так как $\pi\alpha(x), \pi\beta(x) \in P \subsetneq Y/\rho$ и $\pi\alpha(x) \neq \pi\beta(x)$, то имеем $\varphi\pi\alpha(x) \neq \varphi\pi\beta(x)$ и, следовательно, поскольку ι - вложение, получаем $\iota\varphi\pi\alpha(x) \neq$ $\neq \iota\varphi\pi\beta(x)$. Следовательно, полигон A - кообразующий в категории S-полигонов.

<u>Лемма 3</u>. Все циклические вполне проективные S-полигоны вполне иньективны тогда и только тогда, когда моноид S

самоинъективен и любой простой S-полигон изоморфен некоторому левому идеалу моноида S.

<u>Доказательство</u>. Необходимость следует из предложения 2 и из того, что моноид S как левый S-полигон является вполне проективным.

<u>Достаточность</u>. Пусть A - циклический вполне проективный S-полигон. Тогда по предложению 4.I работы [8] существует эпиморфизм $\varphi : A \longrightarrow S$. Полигон A как проективный полигон является ретрактом S и, следовательно, иньективен. Пусть теперь $\mathcal{X}$ - некоторый простой S-полигон. Можно взять $\mathcal{X} \subseteq S$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & S \\ E(\mathcal{X}) \arrow[ur, "\psi"] & \mathcal{X} \arrow[u, "i"'] \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

где i и j - естественные вложения. Поскольку $E(\mathcal{X})$ - существенное расширение полигона $\mathcal{X}$ и S - инъективен, то существует вложение ψ. Следовательно, $E(\mathcal{X})$ - будучи ретрактом в S оказывается проективным. Тогда существует гомоморфизм χ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E(\mathcal{X}) \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & S \end{tikzcd}$$

коммутативна. Поскольку ψ - вложение, то и χ - вложение. Таким образом, $E(\mathcal{X}) \subseteq A$. По предложению 2 полигон A является вполне иньективным.

<u>Теорема</u> I. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Все свободные S-полигоны вполне инъективны.

2) Все вполне проективные S-полигоны вполне инъективны.

3) S - самоинъективен с нулем и любой простой S-полигон изоморфен некоторому левому идеалу моноида S.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ I) очевидна, поскольку по предложению 4.I работы [8] любой свободный S-полигон - вполне проективен. Импликация I) $\Longrightarrow$ 3) следует из леммы 3 и теоремы I работы [4].

3) $\Longrightarrow$ 2). По теореме I работы [4] любой вполне проективный S-полигон иньективен. По следствию 4.5 работы [8] каждый образующий содержит циклический образующий. Теперь условие 2) следует из леммы 3.

Имеет место следующая очевидная

Лемма 4. Ретракт сильно плоского полигона - сильно плоский.

Пусть теперь $S = \{0, 1\}$ - единичная группа с нулем и пусть M - конечное множество, содержащее не менее двух элементов. Определим на множестве $\bar{M} = M \cup \{*\}$ структуру S-полигона:

$$s x = \begin{cases} x, & \text{если } s = 1 \\ *, & \text{если } s = 0. \end{cases}$$

Пусть $m_1 \neq m_2 \in M$. Тогда имеем $0 m_1 = * = 0 m_2$. Если полигон $\bar{M}$ вложим в сильно плоский S-полигон A, то по лемме I существуют элементы $s_1, s_2 \in S$ и $a \in A$ такие, что $m_1 = s_1 a$ и $m_2 = s_2 a$. Ясно, что $s_1 \neq 0 \neq s_2$. Следовательно, $s_1 = s_2 = 1$, откуда $m_1 = m_2$, что невозможно в силу выбора элементов m_1 и m_2. Таким образом, учитывая лемму 2, мы получили следующую

Лемма 5. Если все конечно связанные S-полигоны вложимы в сильно плоские полигоны, то S - единичная группа.

Лемма 6 ([8], предложение 3.3). Копроизведение $\coprod_I A_i$ S-полигонов A_i, $i \in I$, проективно тогда и только тогда, когда каждый полигон A_i, $i \in I$, проективен.

Теорема 2. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

I) Все иньективные S-полигоны проективны.

2) Все вполне иньективные S-полигоны вполне проективны.

3) Все вполне иньективные S-полигоны проективны.

4) Все иньективные S-полигоны сильно плоские.

5) Иньективная оболочка любого конечно связанного S-полигона сильно плоская.

6) Любой S-полигон вложим в свободный S-полигон.

7) Любой конечно связанный S-полигон вложим в свободный S-полигон.

8) Полигон характеров A^* любого свободного правого S-полигона A является сильно плоским.

9) Любой S-полигон вложим в сильно плоский S-полигон.

I0) S – единичная группа.

<u>Доказательство</u>. Ясно, что из условия I0) следуют все условия I) – 9). Эквивалентность условии I) и I0) доказана в работе [2] (следствие к теореме 4). Импликации 2)$\Longrightarrow$3) и 6)$\Longrightarrow$9)$\Longrightarrow$4) очевидны. Импликация 9)$\Longrightarrow$I0) следует из леммы 5.

3)$\Longrightarrow$I). Пусть $\{Z_i\}$ – множество всех попарно неизоморфных простых S-полигонов и пусть $A = \coprod_i Z_i$. Пусть K – множество индексов, для которого $|K| > |S|$. Рассмотрим полигон $C = E(\coprod_k A_k)$, $k \in K$, $A_k \simeq A$. По предложению 2 полигон C является вполне инъективным и, следовательно, проективным. По лемме 4 работы [8] имеем $C \simeq \coprod_j Se_j$ для некоторого множества J. Поскольку инъективный полигон C всегда содержит нулевой подполигон, то моноид S содержит правый нуль $0'$. Поскольку, очевидно, $|J| > 1$, то по предложению 3 и лемме 2 работы [4] моноид S содержит нуль 0. Если теперь B – произвольный инъективный S-полигон, то $B \amalg C$ вполне инъективен по предложениям 3 работы [4] и 2 и, следовательно, проективен. Тогда по условию и по лемме 6 полигон B проективен.

5)$\Longrightarrow$7). Пусть A – некоторый конечно связанный S-полигон. Тогда по лемме I существует свободный S-полигон F и гомоморфизмы $\alpha : A \longrightarrow F$ и $\beta : F \longrightarrow E(A)$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & E(A) \\ & F \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Поскольку ι – вложение, то и α – вложение.

4)$\Longrightarrow$8). Импликация следует из того, что полигон характеров любого свободного полигона инъективен ([I], теорема 8).

8)$\Longrightarrow$4). Пусть I – инъективный S-полигон и $F \longrightarrow I^*$ – эпиморфизм, где F – свободный правый S-полигон. Тогда $I^{**} \longrightarrow F^*$ мономорфизм. Поскольку $I \subset I^{**}$, то I – ретракт полигона F^* и, следовательно, сильно плоский по лемме 4.

7)$\Longrightarrow$4). Пусть I - инъективный S-полигон и $\varphi : K \longrightarrow I$ - гомоморфизм, где K - конечно связанный S-полигон. Пусть $\iota : K \longrightarrow F$ - вложение, где F - свободный S-полигон. Тогда существует гомоморфизм $\varkappa : F \longrightarrow I$ такой, что $\varphi = \varkappa \iota$. По лемме I полигон I - сильно плоский.

Примечание. Заметим, что в категории R-модулей условия, соответствующие условиям I) и 2) теоремы I, условиям I)-3) и 6) теоремы 2, а также условию предложения I, эквивалентны квазифробениусовости кольца R. Все перечисленные условия имеют гомологический характер. Кроме того, известны также условия, описывающие строение квазифробениусовых колец. Их аналогами в случае моноидов служат:

I. Самоинъективные слева и нётеровы слева моноиды.

2. Самоинъективные слева и артиновы слева моноиды.

3. Самоинъективные справа и нётеровы справа моноиды.

4. Самоинъективные справа и артиновы справа моноиды.

Пример I работы [4] дает самоинъективный нётеров слева и артинов слева моноид, который не является самоинъективным справа, поскольку не содержит левых нулей. Следовательно, класс самоинъективных слева и нётеровых (артиновых) слева моноидов не совпадает классом самоинъективных справа и нётеровых (артиновых) справа моноидов. Следующие примеры покажут, что последние четыре класса моноидов, а также классы моноидов, описанные в теоремах I и 2, в теореме I работы [4] и в предложении I, попарно различны.

Пример I. Пусть $S = \theta \cup G$, где $G = C(p^\infty)$ - полициклическая группа и θ - внешне присоединенный нуль. Поскольку G - коммутативная группа, то конгруэнций на ней находятся во взаимно однозначном соответствии с её подгруппами. Ясно, что моноид S не нётеров. Так как любая собственная подгруппа G конечна, то моноид S артинов. Самоинъективность моноида следует из леммы 2.6 работы [6]. Ясно также, что моноид S не принадлежит классу моноидов, описанные в теореме I. Действительно, единственными идеалами моноида S являются S и θ в то время как, например, двуэлементный S-полигон $M = \{x, a\}$, где $sx = x$, $s \in S$, и

$$sa = \begin{cases} x, & \text{если } s = \theta, \\ a, & \text{если } s \in G, \end{cases}$$

является простым.

Пример 2. Пусть $S = \Theta \cup \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - аддитивная группа целых чисел Θ - внешне присоединенный нуль. По [6, лемма 2.6] моноид S является самоинъективным. Ясно, что моноид S нётеров, но не артинов.

Литература

1. Дорофеева М. П., Иньективные и плоские полигоны над наследственными моноидами. Вести. Моск. ун-та, № 1 (1973), 47-51.
2. Дорофеева М. П., О некоторых свойствах категории полигонов. I-II, № 5652-73, Деп. ВИНИТИ.
3. Кильп М., К гомологической классификации моноидов. Сибирск. матем. ж., 13(1972), № 3, 578-586.
4. Нормак П., Аналоги квазифробениусовых колец для моноидов I, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 556(1981), 38-46.
5. Нормак П., О нётеровых и конечно связанных полигонах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 431(1977), 37-46.
6. Feller E. H., Santos R. L., Completely injective semigroups with central idempotents. Glasgow Math. J., 10(1969), № 1, 16-20.
7. Grätzer G., Universal Algebra. Van Nostrand, 1968.
8. Knauer U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum, 3(1972), 359-370.
9. Stenström B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr. 48(1971), 315-334.

Поступило
15 VI 1982

QF-RINGIDE ANALOOGIAID MONOIDIDE KORRAL. II

P. Normak

R e s ü m e e

Artikkel on jätkuks artiklile [4]. Näidatakse, et ei leidu "head" QF-ringide analoogi monoidide jaoks, kuna monoidide korral vaetavad tingimused defineerivad erinevad monoidide klassid.

ANALOGIES OF QF-RINGS FOR MONOIDS. II

P. Normak

S u m m a r y

This paper continues the investigations begun in [4]. For a monoid S we consider left S-sets satisfying certain properties. All of these properties in the case of rings are equivalent to the ring to be a QF-ring. It is proved that these properties define different classes of monoids and therefore it is impossible to define QF-monoids in natural way. Cogenerators in the category of S-sets are also described.

ГЛАВНЫЕ ЛЕВЫЕ ИДЕАЛЫ И $\mathcal{L}$-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГРИНА В ПОЛИКАТЕГОРИЯХ

Э. Реди

Таллинский педагогический институт

Главные идеалы и эквивалентности Грина в полугруппах хорошо изучены [2, гл. 2]. Я.А.Хенно [4] рассматривал аналогичные понятия для систем Менгера. В настоящей работе мы исследуем главные левые идеалы и $\mathcal{L}$-эквивалентность Грина для поликатегорий [3]. Отметим, что в работе [3] автором описаны все односторонние идеалы симметрических поликатегорий над слабо полными полиграфами.

Напомним понятия полиграфа и поликатегории. При $I \neq \phi$ элементы из I^{m+1} обозначаются через $(i_1, i_2, \ldots, i_m; j)$ и называются m-мерными гранями над I. Введем обозначение $\overline{I}$ для совокупности всех граней над I. Пусть $\Pi = \{\overset{1}{\times}, \overset{2}{\times}, \ldots\}$ есть сигнатура, состоящая из символов бинарных операций. Операция $\overset{u}{\times}$ определяется в $\overline{I}$ формулой

$$(i_1, \ldots, i_m; j_u) \overset{u}{\times} (j_1, \ldots, j_n; k) = (j_1, \ldots, j_{u-1}, i_1, \ldots, i_m, j_{u+1}, \ldots, j_n; k)$$

Пара (I, J), где $\phi \neq J \subseteq \overline{I}$ и J замкнуто относительно операций из Π, называется <u>полиграфом</u> над I, а множество $P = \{m \mid J_m = J \cap I^{m+1} \neq \phi\}$ называется <u>спектром</u> этого полиграфа.

<u>Определение I.</u> Набор[I]

$$\mathbb{A} = (I, J, A^j_{i_1^m}, \Pi)$$

называется <u>поликатегорией</u> над (I, J), если

I) всякой грани $(i_1^m; j)$ из J однозначно сопоставлено непустое множество $A^j_{i_1^m}$ причем эти множества попарно не пересекаются.

[I] Будем пользоваться кратким обозначением последовательностей $i_t^m = i_t i_{t+1} \ldots i_m$, если $t \leq m$, и $i_t^m = \phi$, если $t > m$.

2) операция $\overset{u}{\times}$ сопоставляет любым $a \in A^{ju}_{i_1^m}$ и $b \in A^{k}_{j_1^n}$ при $u \leq n$ определенный элемент $a \overset{u}{\times} b$ из $A^{k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^n}$ так, что выполняются равенства[2]

$$a \overset{u}{\times} (b \overset{v}{\times} c) = b \overset{m \oplus v}{\times} (a \overset{u}{\times} c) \quad \text{при} \quad 1 \leq u < v \leq n, \tag{I}$$

$$(d \overset{u}{\times} b) \overset{v}{\times} c = d \overset{u \oplus v}{\times} (b \overset{v}{\times} c) \quad \text{при} \quad u \leq n,\ v \leq r \tag{2}$$

для всех $a \in A^{ku}_{i_1^m}$, $b \in A^{kv}_{j_1^n}$, $c \in A^{l}_{k_1^r}$, $d \in A^{ju}_{i_1^m}$.

Введем обозначение

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \bigcup_{(i_1^m; j) \in J} B^{j}_{i_1^m}$$

для объединения системы подмножеств $B^{j}_{i_1^m} \subseteq A^{j}_{i_1^m}$ поликатегории $\mathbb{A}$.

<u>Определение 2</u>. Если $a \in A^{j}_{i_1^m}$, то грань $(i_1^m; j)$ называется <u>носителем</u>, а число m – <u>арностью</u> элемента a и обозначается через $|a|$. Обозначим через ν отображение, сопоставляющее каждому элементу его носитель. Таким образом $\widetilde{\mathbb{B}}\nu$ означает носитель подмножества $\widetilde{\mathbb{B}} \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}$. Из этих обозначений вытекают формулы

$$(a \overset{u}{\times} b)\nu = (a\nu) \overset{u}{\times} (b\nu), \quad |a \overset{u}{\times} b| = |a| \oplus |b|. \tag{3}$$

<u>Определение 3.</u> Поликатегория $\mathbb{B}$ над (I', J') называется левым идеалом поликатегории $\mathbb{A}$ над (I, J), если $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$, $\widetilde{\mathbb{B}} \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}$ и для любых $a \in \widetilde{\mathbb{A}}$, $b \in \widetilde{\mathbb{B}}$, $a\nu = (i_1^m; j_u)$, $b\nu = (j_1^n; k)$, $u \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется $a \overset{u}{\times} b \in \widetilde{\mathbb{B}}$.

Нетрудно проверить, что если пересечение левых идеалов поликатегории $\mathbb{A}$ как подмножеств из $\widetilde{\mathbb{A}}$ непусто, то оно является левым идеалом поликатегории $\mathbb{A}$. Поэтому мы можем главные левые идеалы определить обычным образом.

<u>Определение 4</u>. <u>Главным левым идеалом</u> $\mathbb{L}(a)$, порожденным элементом a, называется пересечение всех левых идеалов поликатегории, содержащих элемент a. Два элемента a и b из $\widetilde{\mathbb{A}}$ называются <u>$\mathcal{L}$-эквивалентными</u>, если порожденные ими главные левые идеалы совпадают. Определенные этим отношением классы эквивалентности называются <u>$\mathcal{L}$-классами</u>, причем $\mathcal{L}$-класс, содержащий элемент a, обозначается через L_a.

---

[2] Мы вводим обозначение $m \oplus v = m + v - 1$ для всех целых чисел $m \geq 0$, $v > 0$.

Полиграфы можно считать тривиальными поликатегориями (с одноэлементными основными множествами). Тем самым, определены и их левые идеалы. Однако нам удобнее изложить определение и для этого частного случая.

Определение 5. Полиграф $(\mathrm{I}', \mathrm{J}')$ называется левым идеалом полиграфа (I, J), если $\mathrm{I}' \subseteq \mathrm{I}, \mathrm{J}' \subseteq \mathrm{J}$ и для всех $(i_1^m; j_u) \in \mathrm{J}$, $(j_1^n; k) \in \mathrm{J}'$, $u \leq n$ и грань $(j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^n; k) = (i_1^m; j_u) \overset{u}{\times} (j_1^n; k)$ принадлежит J'.

Главный левый идеал, порожденнный гранью $(j_1^m; k)$ обозначим через $(\mathrm{I}, L(j_1^m; k))$.

Лемма I. Носитель (главного левого идеала поликатегории является (главным) левым идеалом носителя этой поликатегории.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ над $(\mathrm{I}', \mathrm{J}')$ является левым идеалом поликатегории $\mathbf{A}$ над (I, J). Носителем для $\mathbf{B}$ является $\widetilde{\mathbf{B}}\nu = \mathrm{J}'$. Для произвольных $(i_1^m; j_u) \in \mathrm{J}$, $(j_1^n; k) \in \mathrm{J}'$ $u \leq n$ существуют такие элементы $a \in \widetilde{\mathbf{A}}$, $b \in \widetilde{\mathbf{B}}$, что $a\nu = (i_1^m; j_u)$, $b\nu = (j_1^n; k)$. Так как, $\mathbb{B}$ есть левый идеал, то $a \overset{u}{\times} b \in \widetilde{\mathbf{B}}$. Теперь, в силу формул (3), имеем $(a\nu) \overset{u}{\times} (b\nu) = (a \overset{u}{\times} b)\nu \in \widetilde{\mathbf{B}}\nu = \mathrm{J}'$ Значит, $(\mathrm{I}', \mathrm{J}')$ является левым идеалом полиграфа (I, J).

Докажем аналогичное утверждение для главных левых идеалов, точнее, докажем равенство

$$\widetilde{\mathbb{L}(a)}\, \nu = L(a\nu). \tag{4}$$

Образуем набор $\mathbf{C}$ над $(\mathrm{I}, L(a\nu))$, состоящий из полных множеств с индексами, принадлежащими главному левому идеалу $(\mathrm{I}, L(a\nu))$ полиграфа (I, J). Набор $\mathbf{C}$ является левым идеалом поликатегории $\mathbf{A}$, содержащим элемент a. Поэтому $\mathbb{L}(a) \subset \mathbf{C}$ и тем самым $\widetilde{\mathbb{L}(a)}\nu \subset \widetilde{\mathbf{C}}\nu = L(a\nu)$.

С другой стороны, в силу непустоты всех основных множеств поликатегории, в $\mathbb{L}(a)$ все множества с индексами из $L(a\nu)$ тоже непусты. Значит, $L(a\nu) \subseteq \widetilde{\mathbb{L}(a)}\,\nu$. Этим равенство (4) доказано.

Следствие 2. Носитель $\mathcal{L}$-класса поликатегории содержится в соответствующем $\mathcal{L}$-классе основного полиграфа, т.е. имеет место включение

$$\widetilde{\mathbb{L}_a}\, \nu \subseteq L_{a\nu}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $b \in \mathbb{L}_a$. Тогда $\mathbb{L}(b) = \mathbb{L}(a)$, кроме того, $\widetilde{\mathbb{L}(b)}\nu = \widetilde{\mathbb{L}(a)}\nu$. Значит,

$$b\nu \in L(b\nu) \underset{(4)}{=} \widetilde{\mathbb{L}(b)}\,\nu = \widetilde{\mathbb{L}(a)}\,\nu \underset{(4)}{=} L(a\nu).$$

Аналогично, $a\nu \in L(b\nu)$, т.е. $(a\nu)\mathcal{L}(b\nu)$. Следовательно, $b\nu \in L_{a\nu}$ и $L_a\nu \subseteq L_{a\nu}$.

<u>Следствие 3.</u> Множество элементов поликатегории, индексы которых принадлежат данному $\mathcal{L}$-классу основного полиграфа, распадается наполные $\mathcal{L}$-классы поликатегории, т.е.

$$\widetilde{C} = \{c \in \widetilde{A} \mid c\nu \in L_{(j_1^n;k)}\} = \bigcup_{c \in \widetilde{C}} L_c . \tag{6}$$

<u>Доказательство.</u>Пусть $c \in \widetilde{C}$. Покажем, что тогда $L_c \subseteq \widetilde{C}$. Действительно, для $b \in L_c$ имеем

$$b\nu \in L_c\nu \underset{(5)}{\subseteq} L_{c\nu} \underset{(6)}{=} L_{(j_1^n;k)} .$$

Значит, $b \in \widetilde{C}$ и этим показано, что $L_c \subseteq \widetilde{C}$.

Этим установлена важность изучения главных левых идеалов полиграфов. Однако мы проведем такое исследование только для слабо полных [3] полиграфов. Полиграф (I, J) называется <u>слабо полным</u>, если он содержит всесозможные одномерные грани над I (т.е., если $J_1 = I^2$). Как известно [3], слабо полный полиграф полностью определяется своим спектром P и состоит из всех граней над I, размерности которых принадлежат P. При этом P является $\oplus$-полугруппой в N^+ (в $\oplus$-полугруппе положительных целых чисел), или совпадает с одним из множеств $\{0;1\}$ и $\mathbb{N}$.

Пусть в дальнейшем P есть $\oplus$-подполугруппа в N^+ и тем самым $0 \notin P$. Для любых $r \in P$ и $k \in I$ введем обозначение

$$L[I, P, k, r] = \{(\iota_1^n; k) \mid n = p \oplus r,\ p \in P,\ \iota_1, \ldots, \iota_n \in I\}. \tag{7}$$

<u>Предложение 4</u>. Полиграфы $(I, L[I, P, k, r])$, где $r \in P$, $k \in I$, и только они являются главными левыми идеалами слабо полного полиграфа $[I; P]$ над I со спектром P.

<u>Доказательство</u>. Действительно, для любых граней $(\iota_1^m; j_u)$, $(j_1^n; k)$ и чисел $u \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in P$, $n = s \oplus r$, $s \in P$ произведение $(j_1^{u-1}, \iota_1^m, j_{u+1}^n; k)$ принаждежит $L[I, P, k, r]$ поскольку $m \oplus n = (m \oplus s) \oplus r$ и $m \oplus s \in P$. Все идеалы $(I, L[I, P, k, r])$ являются главными поскольку они порождаются любой гранью размерности r с концом k. Действительно, для любого числа $n = s \oplus r$ грань $(\iota_1^n; k)$ из $L[I, P, k, r]$ представима в виде произведения

$$(\iota_1^n; k) = (\iota_1^s; j_1) \overset{1}{\times} (\iota_{s+1}; j_2) \overset{2}{\times} \ldots (\iota_n; j_r) \overset{r}{\times} (j_1^r; k)$$

и тем самым принадлежит главному левому идеалу, порожденному гранью $(j_1^n;k)$. Значит, $(I, L[I,P,k,r]) = (I, L(j_1^n;k))$.

Следствие 5. При $0 \notin P$ $\mathcal{L}$-классы полиграфа $[I;P]$ состоят из всех граней с одинаковой размерностью и равными концами.

Доказательство. Действительно, для любых $(i_1^r;k)$, $(j_1^r;k)$, в силу предложения 4, имеем $L(i_1^r;k) = L[I,P,k,r] = L(j_1^r;k)$. Наоборот, если $L(i_1^n;k) = L(j_1^r;l)$, то $k=l$, $n=s\circledast r$, $r=p\circledast n$, причем $s \geqslant 1$, $p \geqslant 1$. Следовательно, $r=n$.

Определение 6. Элемент $e_i \in A_i^i$ называется i-единицей поликатегории $\mathbf{A}$, если

$$a \overset{1}{\times} e_i = a, \quad e_i \overset{u}{\times} b = b \tag{8}$$

для всех $a, b \in \widetilde{\mathbf{A}}$, $a\nu = (i_1^m; i)$, $b\nu = (j_1^{u-1}, i, j_{u+1}^n; k)$, $u \in n$.

Пусть A_i^i не содержит единицы поликатегории $\mathbf{A}$. Положим тогда $A_i^{1i} = A_i^i \cup \{e_i\}$, где элемент e_i не содержится в множестве $\widetilde{\mathbf{A}}$. Во всех остальных случаях положим $A_{i_1^m}^{1j} = A_{i_1^m}^j$. Введем также обозначение $J^1 = J \cup \{(i,i) \mid i \in I\}$. Тогда $\mathbf{A}^1 = (I, J^1, A_{i_1^m}^{1j}, \Pi)$ является поликатегорией, если операции из Π доопределить по формулам (8). Мы будем говорить, что $\mathbf{A}^1$ получена из $\mathbf{A}$ присоединением единиц.

Отметим, что совокупность левых идеалов поликатегории $\mathbf{A}$ и совокупность таких левых идеалов поликатегории $\mathbf{A}^1$, которые не содержат присоединенных единиц, совпадают.

В дальнейшем предположим, что поликатегория $\mathbf{A}$ содержит полный комплект единиц.

Предложение 6. Пусть $a\nu = (j_1^n;k)$. Элемент b из $\widetilde{\mathbf{A}}$ принадлежит $\mathbf{L}(a)$ тогда и только тогда, когда существуют такие грани $(i_{11},\ldots,i_{1m_1};j_1), \ldots, (i_{n1},\ldots,i_{nm_n};j_n)$ и такие элементы $c_1,\ldots,c_n \in \widetilde{\mathbf{A}}$ $(c_t\nu = (i_{t1},\ldots,i_{tm_t};j_t))$, что

$$b = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} a. \tag{9}$$

Доказательство. В силу определения, произвольному левому идеалу $\mathbf{B}$ поликатегории $\mathbf{A}$, содержащему элемент a, принадлежат и все произведения вида (9). Остается показать, что набор множеств, состоящих из элементов вида (9), сам является левым идеалом поликатегории $\mathbf{A}$. Сперва заметим, что элемент a представим в виде (9). Действительно, $a = e_{j_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{j_n} \overset{n}{\times} a$, где элементы e_{j_t} являются единицами поликатегории $\mathbf{A}$.

Пусть $b = c_1 \overset{1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a$, $d \in \tilde{\mathbb{A}}$, причем произведение $d \overset{\nu}{\times} b$ определено. Преобразуем произведение $d \overset{\nu}{\times} b$ к виду (9). Поскольку $|c_1 \overset{1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a| = |c_1| + \dots + |c_n|$, то существует такое s, что

$$|c_1| + \dots + |c_{s-1}| < \nu \le |c_1| + \dots + |c_s|.$$

Далее ведем рассуждения индуктивно по числу s. Если $s = 1$, то ввиду формулы (2), имеем

$$d \overset{\nu}{\times} [c_1 \overset{1}{\times} (c_2 \overset{2}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a)] = (d \overset{\nu}{\times} c_1) \overset{1}{\times} (c_2 \overset{2}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a).$$

Пусть для $s = t$ уже показано, что произведение $d \overset{\nu}{\times} b$ приводимо к виду (9) и пусть $s = t+1$. Пользовав формулой (I), получим

$$d \overset{\nu}{\times} [c_1 \overset{1}{\times} (c_2 \overset{2}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a)] = c_1 \overset{1}{\times} [d \overset{\nu-|c_1|+1}{\times} (c_2 \overset{2}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a)].$$

Поскольку $|c_2| + \dots + |c_t| < \nu - |c_1| + 1 \le |c_2| + \dots + |c_{t+1}|$, то, ввиду предположения индукции, выражение в квадратных скобках приводимо к виду $c_2 \overset{2}{\times} \dots c_t \overset{t}{\times} (d \overset{\nu'}{\times} c_{t+1}) \overset{t+1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a$. Значит, имеем

$$d \overset{\nu}{\times} (c_1 \overset{1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a) = c_1 \overset{1}{\times} \dots c_t \overset{t}{\times} (d \overset{\nu'}{\times} c_{t+1}) \overset{t+1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a.$$

Предложение 7. Элементы a и b поликатегории $\mathbb{A}$ над $[I;P]$ являются $\mathcal{L}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $a\nu = (j_1^n; k)$, $b\nu = (i_1^n; k)$ и существуют такие элементы $c_s, d_s \in \tilde{\mathbb{A}}$, $c_s\nu = (i_s; j_s)$, $d_s\nu = (j_s; i_s)$, $(s = 1, \dots, n)$, что

$$b = c_1 \overset{1}{\times} \dots c_n \overset{n}{\times} a, \quad a = d_1 \overset{1}{\times} \dots d_n \overset{n}{\times} a. \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть $a\nu = (j_1^n; k)$ и $a \mathcal{L} b$. Тогда, в силу следствий 2 и 5, носитель элемента b имеет вид $(i_1^n; k)$.

Поскольку $b \in \mathbb{L}(a)$ и $a \in \mathbb{L}(b)$, то из предложения 6 следует существование таких элементов $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \tilde{\mathbb{A}}$, что выполняются равенства (10). Кроме того, при помощи формул (3), мы получаем отсюда, что $c_s\nu = (i_s; j_s)$, $d_s\nu = (j_s; i_s)$ $(s = 1, \dots, n)$.

Предложение 8. Отношение $\mathcal{L}$ является правой конгруэнцией поликатегории $\mathbb{A}$ над полиграфом $[I;P]$ т.е. если $a \mathcal{L} b$ и $a \overset{\nu}{\times} f$ определено, то определено и $b \overset{\nu}{\times} f$, причем $(a \overset{\nu}{\times} f) \mathcal{L} (b \overset{\nu}{\times} f)$.

Доказательство. Пусть $a \mathcal{L} b$ и $a\nu = (j_1^n; k)$. Тогда, в силу предыдущего предложения, $b\nu = (i_1^n; k)$, существуют такие элементы $c_s, d_s \in \tilde{\mathbb{A}}$, что $c_s\nu = (i_s; j_s)$ и $d_s\nu = (j_s; i_s)$ $(s = 1, \dots, n)$, причем выполняются равенства (10). Пусть $f \in \tilde{\mathbb{A}}$, $f\nu = (k_1^r; l)$ и $k_\nu = k$. Тогда произведение $a \overset{\nu}{\times} f$ определено, а также определено и произведение $b \overset{\nu}{\times} f$. Покажем, что $(a \overset{\nu}{\times} f) \mathcal{L} (b \overset{\nu}{\times} f)$ Действительно, применив n раз равенство (2), получим

$$b \overset{v}{\times} f = (c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} a) \overset{v}{\times} f \underset{(1)}{=} c_1 \overset{v}{\times} [(c_2 \overset{2}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} a) \overset{v}{\times} f] =$$
$$= \ldots \underset{(2)}{=} c_1 \overset{v}{\times} c_2 \overset{v+1}{\times} \ldots c_n \overset{n \circ v}{\times} (a \overset{v}{\times} f)$$

Аналогично имеем

$$a \overset{v}{\times} f = d_1 \overset{v}{\times} \ldots d_n \overset{n \circ v}{\times} (b \overset{v}{\times} f).$$

Если ввести обозначения $c'_{v \circ s} = c_s$ и $d'_{v \circ s} = d_s$ при $s = 1, \ldots, n$, а $c'_s = e_{t_s}$ и $d'_s = e_{k_s}$ при $s = 1, \ldots, v-1, v+n, \ldots, n \circ r$, то имеем равенства

$$b \overset{v}{\times} f = c'_1 \overset{1}{\times} \ldots c'_{n \circ r} \overset{n \circ r}{\times} (a \overset{v}{\times} f), \quad a \overset{v}{\times} f = d'_1 \overset{1}{\times} \ldots d'_{n \circ r} \overset{n \circ r}{\times} (b \overset{v}{\times} f).$$

В силу предложения 7, это означает, что $(a \overset{v}{\times} f) \mathcal{L} (b \overset{v}{\times} f)$.

Предложение доказана.

Применим полученные результаты для симметрических поликатегорий $S_{[I;P]}$ [3] над фиксированной системой множеств $M = (M_i; i \in I)$ и над слабо полным полиграфом $[I;P]$. Напомним, что $S_{[I;P]}$ есть поликатегория над $[I;P]$ с основными множествами $S^j_{i_1^m} = \{f : M_{i_1^m} = M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_m} \to M_j\}$, в которых операция $\overset{u}{\times}$ определяется формулой

$$x_1^{m \circ n} (f \overset{u}{\times} g) = x_1 \ldots x_{u-1} (x_u \ldots x_{m \circ u} f) x_{m+u} \ldots x_{m \circ n}\, g \qquad \text{(II)}$$

для всех $(x_1^{m \circ n}) \in M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^n} = M_{j_1} \times \ldots \times M_{j_{u-1}} \times M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_m} \times M_{j_{u+1}} \times \ldots \times M_{j_n}$, $f \in S^{k_u}_{i_1^m}$, $g \in S^k_{j_1^n}$, $u = 1, \ldots, n$.

<u>Следствие 9</u>. Две функции f и g симметрической поликатегории $S_{[I;P]}$ являются $\mathcal{L}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $f \in S^k_{i_1^n}$ и $g \in S^k_{j_1^n}$, причем существуют такие одноместные функции $c_s \in S^{j_s}_{i_s}$ и $d_s \in S^{i_s}_{j_s}$ $(s = 1, \ldots, n)$, что

$$f = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g, \quad g = d_1 \overset{1}{\times} \ldots d_n \overset{n}{\times} f.$$

<u>Доказательство</u>. Утверждение есть частный случай предложения 7.

<u>Определение 7</u>. Если существуют такие обратимые функции $c_s \in S^{j_s}_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, n)$, что $f = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g$, то мы говорим что функции $f \in S^k_{i_1^n}$ и $g \in S^k_{j_1^n}$ являются $\mathcal{L}$-изотопными [1, стр. 10].

<u>Предложение 10.</u> $\mathcal{L}$-изотопные функции являются $\mathcal{L}$-эквивалентными.

<u>Доказательство</u>. Пусть функции f, g, c_s $(s = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют требованиям определения 7 и пусть $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n$ суть обратные функции для $c_1, \ldots, c_n$, соответственно. Тогда

$$\bar{c}_1 \overset{1}{\times} \ldots \bar{c}_n \overset{n}{\times} f = \bar{c}_1 \overset{1}{\times} \ldots \bar{c}_n \overset{n}{\times} (c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g) =$$
$$= (\bar{c}_1 \times c_1) \overset{1}{\times} \ldots (\bar{c}_n \times c_n) \overset{n}{\times} g = e_{j_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{j_n} \overset{n}{\times} g = g.$$

Теперь утверждение вытекает из предыдущего следствия.

Если для функции $f \in S^k_{i_\eta}$ существуют такие элементы $x_1 \in \in M_{i_1}, \dots, x_n \in M_{i_n}, x'_s \in M_{i_s}$, что $x_1^n f \neq x_1^{s-1} x'_s x_{s+1}^n f$, то говорят, что <u>s-тый аргумент является существенным</u> для функции f. В противном случае говорят, что <u>s-тый аргумент фиктивен</u> для функции f.

<u>Предложение II</u>. Если функции $f \in S^k_{i\eta}$ и $g \in S^k_{j\eta}$ $\mathcal{L}$-эквивалентны в $S_{[I;P]}$, то у них одни и те же существенные и фиктивные аргументы.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f = c_1 \overset{1}{x} \dots c_n \overset{n}{x} g$, где $c_1 \in S^{j_1}_{i_1}, \dots, c_n \in S^{j_n}_{i_n}$ и для функции g s-тый аргумент фиктивен. Тогда для любых $x_1 \in M_{i_1}, \dots, x_n \in M_{i_n}$, $x'_s \in M_{i_s}$ имеем

$$x_1^n f = x_1^n (c_1 \overset{1}{x} \dots c_n \overset{n}{x} g) = \dots \underset{(14)}{=} (x_1 c_1) \dots (x_n c_n) g = (x_1 c_1) \dots (x'_s c_s)$$

$$\dots (x_n c_n) \overset{n}{x} g = \dots \underset{(14)}{=} x_1^{s-1} x'_s x_{s+1}^n (c_1 \overset{1}{x} \dots c_n \overset{n}{x} g) = x_1^{s-1} x'_s x_{s+1}^n f.$$

Значит, для функции f также s-тый аргумент является фиктивным. Теперь утверждение вытекает из следствия 9.

Для примера будем рассматривать позиционную алгебру [I, стр. I27] логики $S(E_2)$ т.е. поликатегорию всех ненульместных функций, определенных и принимающих значения в множестве $E_2 = \{0; 1\}$.

<u>Следствие I2</u>. В $S(E_2)$ две функции $\mathcal{L}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда одна получится из другой отрицанием некоторых аргументов.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f \mathcal{L} g$. Тогда $f = c_1 \overset{1}{x} \dots c_n \overset{n}{x} g$ и $g = d_1 \overset{1}{x} \dots d_n \overset{n}{x} f$ для подходящих одноместных функций. Если в обоих функциях s-тые аргументы фиктивны, то можно считать $c_s = d_s = e$, где e – тождественная функция. Если s-тые аргументы существенны, то или $c_s = d_s = e$ или $c_s = d_s = \bar{e}$, где $\bar{e}$ – функция отрицания. В силу предыдущего следствия, все аргументы $\mathcal{L}$-эквивалентных функций одновременно или существены, или фиктивны для обоих функций.

С другой стороны, если функция f получается из функции g отрицанием некоторых аргументов, то можно на остальные места вложить тождественную функцию. Значит, $f = c_1 \overset{1}{x} \dots c_n \overset{n}{x} g$, где все функции $c_1, \dots, c_n$ обратимы. В силу предложения I0, имеем, что $f \mathcal{L} g$.

Поскольку в $S(E_2)$ нет других одноместных функций кроме константных и обратимых, то утверждение доказано.

Следствие I3. Всякий $\mathcal{L}$-класс n-местных функций из $S(E_2)$ содержит 2^m функций, где $m \leq s$, причем s есть число существенных аргументов функций данного класса.

Доказательство. Утверждение следует из предыдущего, ввиду того, что отрицание фиктивного аргумента сохраняет функцию. Кроме того может оказаться, что одновременное отрицание нескольких существенных аргументов сохраняет функцию.

Пример I. Введем для двуместных функций логики обозначения следующим образом: В двух первых столбцах таблицы укажем значения аргументов, а в остальных столбцах значения самих функций.

Таблицв I.

Нумерация двуместных функций логики

x_I	x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0	0	0	0	0	I	I	I	I	0	0	0	0	I	I	I	I
0	I	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I
0	0	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I

Составим таблицу, которая показывает какие функции получаются из данной функции отрицанием первого, второго и обоих аргументов:

Таблица 2.

Отрицание аргументов

	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5
$\bar{e}\overset{1}{x}$	0	4	8	I2	I	5	9	I4	2	6	I0	I4	3	7	II	I5
$\bar{e}\overset{2}{x}$	0	2	I	3	8	I0	9	II	4	6	5	7	I2	I4	I3	I5
$\bar{e}\overset{1}{x}\bar{e}\overset{2}{x}$	0	8	4	I2	2	I0	6	I3	I	9	5	I3	3	II	7	I5

Обозначив $\mathcal{L}$-классы наименьшим номером функции, входящей в его, получим следующие $\mathcal{L}$-классы.

$L_0 = \{0\}$, $L_1 = \{I;2;4;8\}$, $L_5 = \{5;I0\}$, $L_3 = \{3;I2\}$, $L_6 = \{6;9\}$, $L_7 = \{7;II;I3;I4\}$, $L_{15} = \{I5\}$.

Изложим описание $\mathcal{L}$-классов еще и через ретрактов [I, стр. 9]. Приведем определение специального вида ретракта

Определение 8. Назовем (u,m)-ретрактом функции $f \in S^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^n}$ всякую функцию $f'(a_1^m) \in S_{j_1^{u-1} j_{u+1}^n}$, определенную формулой

$$x_1^{u-1} x_{u+1}^n f(a_1^m) = x_1^{u-1} a_1^m x_{u+1}^n f \tag{I2}$$

для всех $(x_1^{u-1}, x_{u+1}^n) \in M_{j_1} \times \ldots \times M_{j_{u-1}} \times M_{j_{u+1}} \times \ldots \times M_{j_n}$.

Множество всех (u,m)-ретрактов функции f обозначим через $T_{u,m}(f)$.

Лемма I4. Для функций $f \in S^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^n}$ и $g \in S^k_{j_1^n}$ существует в $S_{[I;P]}$ такая функция h, что $f = h \overset{u}{\times} g$, тогда и только тогда, когда $T_{u,m}(f) \subseteq T_{u,1}(g)$.

Доказательство. Утверждение является частным случаем леммы 4.I из статьи 3. для поликатегорий над слабо полным полиграфом.

Предложение I5. Две функции f и g из $S_{[I;P]}$ являются $\mathcal{L}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют такие функции f_s и g_s $(s=2,\ldots,n)$, что

$$T_{u,1}(f) \subseteq T_{u,1}(f_2),\ T_{2,1}(f_2) \subseteq T_{2,1}(f_3), \ldots, T_{n,1}(f_n) \subseteq T_{n,1}(g),$$

$$T_{u,1}(g) \subseteq T_{u,1}(g_2),\ T_{2,1}(g_2) \subseteq T_{2,1}(g_3), \ldots, T_{n,1}(g_n) \subseteq T_{n,1}(f).$$

Доказательство. В силу следствия 9 функции f и g являются $\mathcal{L}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $f \in S^k_{i_1^n}$ и $g \in S^k_{j_1^n}$, причем существуют такие одноместные функции $c_s \in S^{j_s}_{i_s}$ и $d_s \in S^{i_s}_{j_s}$, что $f = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g$ и $g = d_1 \overset{1}{\times} \ldots d_n \overset{n}{\times} f$. Воспользовавшись обозначениями $f_s = c_s \overset{s}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g$ и $g_s = d_s \overset{s}{\times} \ldots d_n \overset{n}{\times} f$ при $s=2,\ldots,n$, мы получаем требуемое утверждение из предыдущей леммы.

Следствие I6. Если $f = c_1 \overset{1}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g$ и все одноместные функции $c_1, \ldots, c_n$ обратимые, то существуют такие функции $f_2, \ldots, f_n$, что

$$T_{1,1}(f) = T_{1,1}(f_2),\ T_{2,1}(f_2) = T_{2,1}(f_3), \ldots, T_{n,1}(f_n) = T_{n,1}(g). \tag{I3}$$

Доказательство. Введем обозначения $f_s = c_s \overset{s}{\times} \ldots c_n \overset{n}{\times} g$ $(s = 2, \ldots, n)$. Тогда имеем равенства $f = c_1 \overset{1}{\times} f_2, \ldots, f_n = c_n \overset{n}{\times} g$ и $f_2 = \bar{c}_1 \overset{1}{\times} f, \ldots, g = \bar{c}_n \overset{n}{\times} f_n$. Поэтому из леммы I4 следуют включения $T_{1,1}(f) \subseteq T_{1,1}(f_2) \subseteq T_{1,1}(f), \ldots, T_{n,1}(f_n) \subseteq T_{n,1}(g) \subseteq T_{n,1}(f_n)$. Значит, выполняются равенства (I3).

Следствие I7. В $S(E_2)$ две n-местные функции f и g являются $\mathcal{L}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют такие n-местные функции $f_2, \ldots, f_n$, что выполняются равенства (I3).

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из следствий I2 и I6.

Пример 2. Применим последнее следствие для двуместных функций логики. Приведем множества $T_{1,1}(f)$ и $T_{2,1}(f)$ в виде таблицы.

Таблица 3.

Системы ретрактов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_{1,1}$	0	$0e$	$0\bar{e}$	01	$e0$	e	$e\bar{e}$	$e1$	$\bar{e}0$	$\bar{e}e$	$\bar{e}$	$\bar{e}1$	10	$1e$	$1\bar{e}$	1
$T_{2,1}$	0	$0e$	$e0$	e	$0\bar{e}$	01	$e\bar{e}$	$e1$	$\bar{e}0$	$\bar{e}e$	10	$1e$	$\bar{e}$	$\bar{e}1$	$1\bar{e}$	1

Здесь 0 , 1 означают одноместные константы, e - тождественную функцию, а $\bar{e}$ - функцию отрицания.

Сразу видно, что $\{0\}$ и $\{15\}$ образуют отдельные $\mathcal{L}$-классы. Имеем $L_1 = \{1;2;4;8\}$, поскольку выполняются равенства

$$T_{1,1}(1)=T_{1,1}(4),\ T_{2,1}(1)=T_{2,1}(2),\ T_{2,1}(4)=T_{2,1}(8),\ T_{1,1}(2)=T_{1,1}(8).$$

Аналогично доказывается и состав остальных $\mathcal{L}$ -классов.

Литература

1. Белоусов В. Д. n-арные квазигруппы. Кишинев, 1976.
2. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. Москва, 1972.
3. Реди Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 31-61.
4. Хенно Я., Эквивалентности Грина в системах Менгера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 37-46.

Поступило
20 VI 1982

VASAKPOOLSED PEAIDEAALID JA GREENI $\mathcal{L}$-EKVIVALENTS POLÜKATEGOORIATES

E.Redi

R e s ü m e e

Tööe eeitatakse üks tarvilik ja üks piisav tingimus elementide $\mathcal{L}$-ekvivalentsuseks ühikutega polüketegoorias. Seejärel tuuakse $\mathcal{L}$-klasside näide loogika positsiooneee algebras. Sümmeetriliste polükategooriate korral antakse funktsioonide $\mathcal{L}$-ekvivalentsuse tunnus nende retraktide süsteemide kaudu.

LEFT PRINCIPAL IDEALS AND GREEN'S $\mathcal{L}$-RELATION IN POLYCATEGORIES

E.Redi

S u m m a r y

Left ideals and $\mathcal{L}$-relation are defined for polycategories. A necessary and a sufficient conditions are given for elements to be $\mathcal{L}$-related. An example of $\mathcal{L}$-classes in position algebras [1] of logic is presented. Connection between $\mathcal{L}$-relation for functions end their systems of retraction is pointed out.

ИЗОТОПИЯ В ПОЛИКАТЕГОРИЯХ

Э. Реди

Таллинский педагогический институт

В настоящей работе исследуются отношения $\mathcal{L}$-изотопии, $\mathcal{R}$-изотопии и изотопии в поликатегориях. Отметим, что изотопия является обобщением изотопии в позиционных алгебрах Белоусова [I, с. I43] на многоосновную систему. Отношение $\mathcal{L}$-изотопии является притом обобщением главной изотопии Белоусова [I, с. I2].

Обратим внимание еще на то, что термин "группоид" понимается в смысле Эресмана и его определение можно найти в книге [6, с. 8I], а термин " -группоид" означает группоид Брандта [6, с. 83].

Пусть $\mathbb{A} = (I, J, A^j_{i,m}, \Pi)$ является строго унитарной поликатегорией [3,4], хотя будем ее называть просто поликатегорией.

<u>Определение I</u>. Элемент $g \in A^j_i$ называется обратимым в поликатегории $\mathbb{A}$, если существует элемент (обратный для g) $\tilde{g} \in A^i_j$ так, что

$$g \overset{1}{\times} \tilde{g} = e_i, \quad \tilde{g} \overset{1}{\times} g = e_j \tag{I}$$

где $e_i \in A^i_i$ и $e_j \in A^j_j$ соответствующие единицы поликатегории $\mathbb{A}$.

Пусть $G^j_i = \{g \in A^j_i \mid g$ - обратим в $\mathbb{A}\}$ и $J'_1 = \{(i,j) \in J \mid G^j_i \neq \phi\}$. Тогда набор $\mathbb{G}_{\mathbb{A}} = (I, J'_1, G^j_i, \overset{1}{\times})$ называется группоидом обратимых элементов или, аналогично работе [7, с. 40], фундаментом поликатегории $\mathbb{A}$.

<u>Лемма I</u>. Фундамент поликатегории $\mathbb{A}$ является ее подгруппоидом.

<u>Доказательство</u>. Равенства

$$(g \overset{1}{\times} h) \overset{1}{\times} (\tilde{h} \overset{1}{\times} \tilde{g}) = g \overset{1}{\times} (h \overset{1}{\times} \tilde{h}) \overset{1}{\times} \tilde{g} = g \overset{1}{\times} e_j \overset{1}{\times} \tilde{g} = g \overset{1}{\times} \tilde{g} = e_i,$$

$$(\tilde{h} \overset{1}{\times} \tilde{g}) \overset{1}{\times} (g \overset{1}{\times} h) = \tilde{h} \overset{1}{\times} (\tilde{g} \overset{1}{\times} g) \overset{1}{\times} h = \tilde{h} \overset{1}{\times} e_j \overset{1}{\times} h = \tilde{h} \overset{1}{\times} h = e_k$$

для любых $g \in G^j_i$, $h \in G^k_j$ показывают, что набор $\mathbb{G}_{\mathbb{A}}$ замкнут относительно $\overset{1}{\times}$-умножения. Отметим, что $e_i \in G^i_i (i \in I)$ и $\tilde{\tilde{g}} = g$

при любом $g \in G_i^j$. Значит, $\mathfrak{G}_A$ является подгруппоидом в A.

Определение 2. Элементы a и b поликатегории A называются

1) $\mathcal{L}$-изотопными и пишется $a \lambda b$, если $a \in A^k_{i_1^n}$, $b \in A^k_{j_1^n}$ и существуют обратимые элементы $g_1 \in G^{i_1}_{j_1}, \ldots, g_n \in G^{i_n}_{j_n}$ так, что

$$b = g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a; \tag{2}$$

2) $\mathcal{R}$-изотопными и пишется $a \rho b$, если $a \in A^k_{i_1^n}$, $b \in A^l_{i_1^n}$ и существует обратимый элемент $g \in G^l_k$ так, что

$$b = a \overset{1}{\times} g; \tag{3}$$

3) изотопными и пишется $a \tau b$, если $a \in A^k_{i_1^n}$, $b \in A^l_{j_1^n}$ и существуют обратимые $g_1 \in G^{i_1}_{j_1}, \ldots, g_n \in G^{i_n}_{j_n}, g \in G^l_k$ так, что

$$b = g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a \overset{1}{\times} g. \tag{4}$$

Лемма 2. Изотопия, $\mathcal{L}$-изотопия и $\mathcal{R}$-изотопия являются эквивалентностями на A, причем изотопия является объединением $\mathcal{L}$-изотопии и $\mathcal{R}$-изотопии.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{L}$-изотопия является эквивалентностью на A. Сперва заметим, что $a \lambda a$, в силу равенства $e_{i_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{i_n} \overset{n}{\times} a = a$, для всякого $a \in A^k_{i_1^n}$.

Если $a \lambda b$, то $a \in A^k_{i_1^n}$ и $b \in A^k_{j_1^n}$, причем выполняются равенство (2) при подходящих обратимых элементах $g_1 \in G^{i_1}_{j_1}, \ldots, g_n \in G^{i_n}_{j_n}$. Пусть $\tilde{g}_1 \in G^{j_1}_{i_1}, \ldots, \tilde{g} \in G^{j_n}_{i_n}$ их обратные элементы. Тогда, ввиду законов ассоциативности и частичной коммутативности поликатегории, имеем

$$\tilde{g}_1 \overset{1}{\times} \ldots \tilde{g}_n \overset{n}{\times} b = \tilde{g}_1 \overset{1}{\times} \ldots \tilde{g}_n \overset{n}{\times} (g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a) =$$
$$= (\tilde{g}_1 \overset{1}{\times} g_1) \overset{1}{\times} \ldots (\tilde{g}_n \overset{1}{\times} g_n) \overset{n}{\times} a = e_{i_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{i_n} \overset{n}{\times} a = a.$$

Значит, $b \lambda a$ и $\mathcal{L}$-изотопия симметричное отношение.

Если $a \lambda b$ и $b \lambda c$, то $b = g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a$ и $c = h_1 \overset{1}{\times} \ldots h_n \overset{n}{\times} b$. Но, тогда

$$c = h_1 \overset{1}{\times} \ldots h_n \overset{n}{\times} (g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a) = (h_1 \overset{1}{\times} g_1) \overset{1}{\times} \ldots (h_n \overset{1}{\times} g_n) \overset{n}{\times} a,$$

причем элементы $h_1 \overset{1}{\times} g_1, \ldots, h_n \overset{1}{\times} g_n$ обратимые, ввиду леммы 1.

Этим доказано, что $\mathcal{L}$-изотопия является эквивалентностью на A. Аналогично доказывается и факт, что $\mathcal{R}$-изотопия и изотопия являются эквивалентностями на A.

$\mathcal{L}$-изотопия ($\mathcal{R}$-изотопия) является подотношением изотопии, поскольку равенство (2) (равенство (3)) равносильно равенству $b = g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} a \overset{1}{\times} e_k$ (равенству $b = e_{i_1} \overset{1}{\times} \dots e_{i_n} \overset{n}{\times} a \overset{1}{\times} g$).

Для доказательства второго утверждения мы покажем, что $\mathcal{L}$-изотопия и $\mathcal{R}$-изотопия коммутируют на A т.е. $a(\lambda\rho)b$ тогда и только тогда, когда $a(\rho\lambda)b$.

Пусть $a(\lambda\rho)b$, т.е. $a \in A^{k}_{i,n}$, $b \in A^{l}_{j_1 n}$ и существует $c \in A^{k}_{j_1 n}$ так, что $a\lambda c$ и $c\rho b$. Тогда $c = g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} a$ и $b = c \overset{1}{\times} g$. Введем обозначение $d = a \overset{1}{\times} g$. Теперь имеем $a\rho d$, а из-за равенства

$$g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} d = g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} (a \overset{1}{\times} g) = (g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} a) \overset{1}{\times} g = c \overset{1}{\times} g = b,$$

имеем также отношение $d \lambda b$. Следовательно, выполняется $a(\rho\lambda)b$ и тем самым выполняется включение отношений $\lambda\rho \subset \rho\lambda$. Поскольку отношения λ и ρ симметричны на A, то это включение введет [2, с. 34] за собой равенство $\lambda\rho = \rho\lambda$, а также равенства $\rho \vee \lambda = \lambda \vee \rho = \rho\lambda = \lambda\rho$.

Непосредственно из определения 2 следует, что $\tau \subset \lambda\rho$. Этим доказан факт, что $\tau = \lambda \vee \rho$, т.е. изотопия является объединением $\mathcal{L}$-изотопии и $\mathcal{R}$-изотопии в структуре эквивалентностей на A.

Лемма 3. $\mathcal{L}$-изотопия является правой конгруэнцией поликатегории A, т.е. если $a\lambda b$ и $a \overset{u}{\times} f$ определено, то определено и $b \overset{u}{\times} f$, причем $(a \overset{u}{\times} f)\lambda(b \overset{u}{\times} f)$. $\mathcal{R}$-изотопия является левой конгруэнцией поликатегории A, т.е. если $a\rho b$ и $d \overset{u}{\times} a$ определено, то определено и $d \overset{u}{\times} b$, причем $(d \overset{u}{\times} a)\,\rho\,(d \overset{u}{\times} b)$. Изотопия является как левой так и правой конгруэнцией поликатегории A.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{L}$-изотопия является правой конгруэнцией поликатегории A. Пусть $a\lambda b$ и $a \overset{u}{\times} f$ определено. Тогда $a \in A^{k}_{i,n}$, $b \in A^{k}_{j,n}$, $f \in A^{l}_{k,r}$, $k_u = k$ и выполняется равенство (2). Теперь ввиду ассоциативности и частичной коммутативности выполняются равенства

$$e_{k_1} \overset{1}{\times} \dots e_{k_{u-1}} \overset{u-1}{\times} g_1 \overset{u}{\times} \dots g_n \overset{u+n-1}{\times} e_{k_{u+1}} \overset{u+n}{\times} \dots e_{k_r} \overset{n+r-1}{\times} (a \overset{u}{\times} f) =$$

$$= e_{k_1} \overset{1}{\times} \dots e_{k_{u-1}} \overset{u-1}{\times} (g_1 \overset{1}{\times} \dots g_n \overset{n}{\times} a) \overset{u}{\times} e_{k_{u+1}} \overset{u+1}{\times} \dots e_{k_r} \overset{r}{\times} f \underset{(2)}{=}$$

$$= e_{k_1} \overset{1}{\times} \dots e_{k_{u-1}} \overset{u-1}{\times} b \overset{u}{\times} e_{k_{u+1}} \overset{u+1}{\times} \dots e_{k_r} \overset{r}{\times} f =$$

$$= b \overset{u}{\times} (e_{k_1} \overset{1}{\times} \dots e_{k_{u-1}} \overset{u-1}{\times} e_{k_{u+1}} \overset{u+1}{\times} \dots e_{k_r} \overset{r}{\times} f) = b \overset{u}{\times} f.$$

Значит, $(a \overset{u}{\times} f)\lambda(b \overset{u}{\times} f)$ и $\mathcal{L}$-изотопия является правой конгруэнцией.

Два последнего утверждения доказываются аналогично.

Класс $\mathcal{L}$-изотопии ($\mathcal{R}$-изотопии, изотопии), содержащий элемент a, обозначим через Λ_a (P_a, T_a). Поставим далее цель найти порядки этих классов. Это удается нам при помощи теории группоидов. Это вполне естественно, поскольку фундамент $G_A = (I, J'_\iota, G'_\iota, \overset{1}{\times})$ поликатегории A является группоидом.

Отметим сперва обстоятельство, что все множества $G^\iota_\iota (\iota \in I)$ являются группами относительно $\overset{1}{\times}$-умножения. Обозначим их через $\mathcal{G}_\iota$ $(\iota \in I)$.

Пусть $I_j = \{\iota \in I \mid G^j_\iota \neq \emptyset\}$. Тогда набор $G_{A_j} = (I, I^2_j, G^k_\iota, \overset{1}{\times})$ является B-группоидом [6, с. 83] и назовем его <u>максимальным B-подгруппоидом поликатегории A, принадлежащим индексу j (или единице e_j)</u>. Поскольку $I = \bigcup_{j \in I} I_j$, причем разные множества I_j и I_k не пересекаются, то группоид G_A является суммой [6, с. 84] максимальных B-подгруппоидов G_{A_j} $(j \in I)$.

Из теории B-группоидов [5] нам известно, что в G_{A_j} для всех $\iota, k \in I_j$ имеем $|G^k_\iota| = |G^j_j| = \gamma_j$, причем это общее число γ_j называется <u>порядком B-группоида</u> G_{A_j}, а число $\rho_j = |I_j|$, т.е. число разных единиц B-группоида G_{A_j} называется <u>рангом</u> его.

Пусть $j_1, \ldots, j_n \in I$. Возьмем максимальные B-подгруппоиды, принадлежащие этим индексам, и образуем их прямое произведение

$$G_{A_{j_1^n}} = G_{A_{j_1}} \times \ldots \times G_{A_{j_n}} .$$

Набор $G_{A_{j_1^n}}$ является B-группоидом [6, с. 84]. Этот B-группоид $G_{A_{j_1^n}}$ имеет порядок $\gamma = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_n}$ и ранг $\rho = \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_n}$. Одной из его подгрупп является группа $\mathcal{G}_{j_1^n} = \mathcal{G}_{j_1} \times \ldots \times \mathcal{G}_{j_n}$, т.е. прямое произведение указанных групп.

Пусть $\mathcal{H}$ является подгруппой в группе $\mathcal{G}_{j_1^n}$ и пусть $\varkappa = |\mathcal{H}|$. По работе [5] мы знаем, что разных комплексов вида $(g^n_1) \overset{1}{\times} \mathcal{H}$ в B-группоиде $G_{A_{j_1^n}}$ существует $\gamma\rho/\varkappa$ штук. Также известно, что все эти комплексы равномощны подгруппе $\mathcal{H}$ и тот факт, что разные комплексы попарно не пересекаются. Отметим еще обстоятельство, что понятие комплекса является обобщением на B-группоиды понятия смежного класса по подгруппе в группе.

Определение 3. Группой $\mathcal{L}$-инвариантности элемента $a \in A_{J_1^n}^k$ поликатегории A называется подгруппа

$$Jnv_a^{\mathcal{L}} = \{(g_1^n) \in \mathcal{G}_{J_1^n} \mid g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a = a\}. \qquad (5)$$

Лемма 4. Множество $Jnv_a^{\mathcal{L}}$ всякого элемента $a \in A_{J_1^n}^k$ поликатегории A является подгруппой группы $\mathcal{G}_{J_1^n}$.

Доказательство. Сперва заметим, что множество $Jnv_a^{\mathcal{L}}$ не пусто, так как $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \in Jnv_a^{\mathcal{L}}$, в силу равенства

$$e_{j_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{j_n} \overset{n}{\times} a = a.$$

Пусть (g_1^n) и (h_1^n) принадлежат $Jnv_a^{\mathcal{L}}$. Тогда имеем

$$(g_1 \overset{1}{\times} h_1) \overset{1}{\times} \ldots (g_n \overset{n}{\times} h_n) \overset{n}{\times} a = g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} (h_1 \overset{1}{\times} \ldots h_n \overset{n}{\times} a) \underset{(5)}{=}$$
$$= g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a = a.$$

Значит, $(g_1^n) \overset{1}{\times} (h_1^n) \in Jnv_a^{\mathcal{L}}$ и множество $Jnv_a^{\mathcal{L}}$ замкнуто относительно $\overset{1}{\times}$-умножения.

Пусть $(g_1^n) \in Jnv_a^{\mathcal{L}}$ и $(\tilde{g}_1^n)$ его обратный элемент в группе $\mathcal{G}_{J_1^n}$. Тогда имеют место равенства

$$\tilde{g}_1 \overset{1}{\times} \ldots \tilde{g}_n \overset{n}{\times} a \underset{(5)}{=} \tilde{g}_1 \overset{1}{\times} \ldots \tilde{g}_n \overset{n}{\times} (g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a) =$$
$$= (\tilde{g}_1 \overset{1}{\times} g_1) \overset{1}{\times} \ldots (\tilde{g}_n \overset{n}{\times} g_n) \overset{n}{\times} a = e_{j_1} \overset{1}{\times} \ldots e_{j_n} \overset{n}{\times} a = a.$$

Этим доказано, что множество $Jnv_a^{\mathcal{L}}$ замкнуто относительно взятия обратного элемента. Следовательно, $Jnv_a^{\mathcal{L}}$ является подгруппой в $\mathcal{G}_{J_1^n}$.

Обозначим через μ_a порядок этой группы, т.е. положим $\mu_a = |Jnv_a^{\mathcal{L}}|$. В силу теоремы Лагранжа число μ_a является делителем порядка всей группы $\mathcal{G}_{J_1^n}$, т.е. числа $\gamma = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_n}$.

Теорема 5. Порядок класса $\mathcal{L}$-изотопии Λ_a, содержащего элемент $a \in A_{J_1^n}^k$, поликатегории A равен числу $\rho\gamma/\mu_a$, где $\mu_a = |Jnv_a^{\mathcal{L}}|$, ρ - ранг и γ - порядок прямого произведения $G_{A_{J_1^n}}$ максимальных B-подгруппоидов поликатегории A, принадлежащих индексам $j_1, \ldots, j_n$.

Доказательство. По работе [5] нам известно, что число $\rho\gamma/\mu_a$ показывает число разных комплексов вида $(g_1^n) \overset{1}{\times} Jnv_a^{\mathcal{L}}$ в B-группоиде $G_{A_{J_1^n}}$. Покажем, что существует биекция между множеством таких комплексов и классом Λ_a. Определим соответствие φ следующим образом:

$$\varphi: (g_1^n) \overset{1}{\times} Jnv_a^{\mathcal{L}} \mapsto g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a. \qquad (6)$$

Покажем сперва, что φ определно корректно, т.е. другому представителю (f_1^n) этого комплекса $(g_1^n) \overset{1}{\times} Jnv_a^{\mathcal{L}}$ соответствует этот же левоизотоп элемента a. Действительно, набор (f_1^n) представим в виде $(f_1^n)=(g_1^n)\overset{1}{\times}(h_1^n)$, где $(h_1^n)\in Jnv_a^{\mathcal{L}}$. Поэтому

$$f_1\overset{1}{\times}\ldots f_n\overset{n}{\times}a=(g_1\overset{1}{\times}h_1)\overset{1}{\times}\ldots(g_n\overset{1}{\times}h_n)\overset{n}{\times}a=$$

$$=g_1\overset{1}{\times}\ldots g_n\overset{n}{\times}(h_1\overset{1}{\times}\ldots h_n\overset{n}{\times}a)\underset{(5)}{=}g_1\overset{1}{\times}\ldots g_n\overset{n}{\times}a.$$

Непосредственно из правила (6) понятно, что φ является сюрьекцией на класс Λ_a.

Покажем, что φ является инъекцией. Пусть $g_1\overset{1}{\times}\ldots g_n\overset{n}{\times}a=f_1\overset{1}{\times}\ldots f_n\overset{n}{\times}a$. Надо убедиться в том, что в этом случае комплексы $(g_1^n)\overset{1}{\times}Jnv_a^{\mathcal{L}}$ и $(f_1^n)\overset{1}{\times}Jnv_a^{\mathcal{L}}$ совпадают.

Из заданного равенства вытекает, что

$$\tilde{g}_1\overset{1}{\times}\ldots\tilde{g}_n\overset{n}{\times}(g_1\overset{1}{\times}\ldots g_n\overset{n}{\times}a)=\tilde{g}_1\overset{1}{\times}\ldots\tilde{g}_n\overset{n}{\times}(f_1\overset{1}{\times}\ldots f_n\overset{n}{\times}a).$$

Ввиду ассоциативности и частичной коммутативности, имеем равенство

$$(\tilde{g}_1\overset{1}{\times}g_1)\overset{1}{\times}\ldots(\tilde{g}_n\overset{1}{\times}g_n)\overset{n}{\times}a=(\tilde{g}_1\overset{1}{\times}f_1)\overset{1}{\times}\ldots(\tilde{g}_n\overset{1}{\times}f_n)\overset{n}{\times}a.$$

Как выше, можем получить равносильное равенство

$$a=(\tilde{g}_1\overset{1}{\times}f_1)\overset{1}{\times}\ldots(\tilde{g}_n\overset{1}{\times}f_n)\overset{n}{\times}a.$$

Значит, $(\tilde{g}_1^n)\overset{1}{\times}(f_1^n)=(h_1^n)\in Jnv_a^{\mathcal{L}}$. Но последнее равенство равносильно равенству $(f_1^n)=(g_1^n)\overset{1}{\times}(h_1^n)$, которое показывает, что $(f_1^n)\in(g_1^n)\overset{1}{\times}Jnv_a^{\mathcal{L}}$. Поскольку разные комплексы не пересекаются, то имеет место равенство комплексов

$$(g_1^n)\overset{1}{\times}Jnv_a^{\mathcal{L}}=(f_1^n)\overset{1}{\times}Jnv_a^{\mathcal{L}}.$$

Следовательно, φ является биъекцией и $|\Lambda_a|=\varrho\gamma/\mu_a$.

<u>Определение 4</u>. Группой $\mathcal{R}$-инвариантности элемента $a\in A_{j_1^n}^k$ поликатегории $\mathbf{A}$ называется подгруппа

$$Jnv_a^{\mathcal{R}}=\{g\in\mathcal{G}_k \mid a\overset{j}{\times}g=a\}. \qquad (7)$$

Аналогично лемме 4 можно проверить, что множество $Jnv_a^{\mathcal{R}}$, на самом деле, является подгруппой группы $\mathcal{G}_k$.

Точно также как теорема 5 доказывается следующее утверждение.

<u>Теорема 6</u>. Порядок класса $\mathcal{R}$-изотопии P_a, содержащего элемент $a\in A_{j_1^n}^k$, поликатегории $\mathbf{A}$ равен числу $\varrho_k\gamma_k/\nu_a$, где $\nu_a=|Jnv_a^{\mathcal{R}}|$, ϱ_k - ранг и γ_k - порядок максимального В-подгруппоида $\mathcal{G}_{Ak}$ поликатегории A, принадлежащего индексу k.

Определение 5. Группой инвариантности элемента $a \in A^k_{j_1^n}$ поликатегории A называется подгруппа

$$\mathrm{Jnv}_a = \{(g_1^n, g) \in \mathcal{G}_{j_1^n k} \mid g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a \overset{1}{\times} g = a\}. \qquad (8)$$

Аналогично лемме 4 доказывается, что множество Jnv_a, действительно, образует подгруппу группы $\mathcal{G}_{j_1^n k}$.

Пусть $G_{Aj_1^n k}$ есть прямое произведение максимальных B-подгруппоидов $G_{Aj_1}, \ldots, G_{Aj_n}, G_{Ak}$ поликатегории A, принадлежащих индексам $j_1, \ldots, j_n$ и k соответственно. Правилом

$$(g_1^n) \overset{1}{\times} \mathrm{Jnv}_a \overset{1}{\times} g \longmapsto g_1 \overset{1}{\times} \ldots g_n \overset{n}{\times} a \overset{1}{\times} g$$

определяется биекция между множеством комплексов вида $(g_1^n) \overset{1}{\times} \mathrm{Jnv}_a \overset{1}{\times} g$ в B-группоиде $G_{Aj_1^n k}$ и классом изотопии T_a.

Ввиду работы [5], таких комплексов всего $\rho\gamma / \omega_a$, где $\omega_a = |\mathrm{Jnv}_a|$ штук. Поэтому, аналогично теореме 5, доказывается последнее наше утверждение.

Теорема 7. Порядок класса изотопии T_a, содержащего элемент $a \in A^k_{j_1^n}$, поликатегории A равен числу $\rho\gamma/\omega_a$, где $\omega_a = |\mathrm{Jnv}_a|$, ρ - ранг и γ - порядок прямого произведения $G_{Aj_1^n k}$ максимальных B-подгруппоидов поликатегории A, принадлежащих индексам $j_1, \ldots, j_n$ и k.

Литература

1. Белоусов В. Д. n-арные квазигруппы. - Кишинев: Штиинца, 1972, 227 с.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. - Т. I. М.: Мир, 1972. - 285 с.
3. Реди Э. Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, т. 336, с. 31-61.
4. Реди Э. Главные левые идеалы и $\mathcal{L}$-эквивалентность Грина в поликатегориях. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, (наст. сб. стр. 48-59).
5. Brandt, H. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs. - Math. Ann. 1926, Bd. 96, S. 360-366.
6. Hasse, M., Michler, L. Theorie der Kategorien. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966, - 358 S.

7. P ö s c h e l, R., K a l u ž n i n, L. A. Funktionen- und Relationenalgebren. - Berlin: - DVW, 1979.- 265 s.

Поступило
12 V 1982

ISOTOOPIA POLÜKATEGOORIATES

R. Redi

R e s ü m e e

Töös käsitletakse $\mathcal{L}$-isotoopiat, $\mathcal{R}$-isotoopiat ja isotoopiat polükategooriates [3,4]. Siinjuures isotoopia ($\mathcal{L}$-isotoopia) on V.Belousovi [1] poolt positsioonsetes algebrates vaadeldud (pea-) isotoopia üldistus mitmealuselistele süsteemidele. Artiklis saadakse valemid $\mathcal{L}$-isotoopia, $\mathcal{R}$-isotoopia ja isotoopia klasside võimsuste määramiseks. Selleks kasutatakse invariantsusrühma mõistet ning kompleksite teooriat Brandti rühmoidides [5,6].

ISOTOPY IN A POLYCATEGORIES

R. Redi

S u m m a r y

In this paper $\mathcal{L}$-isotopy, $\mathcal{R}$-isotopy end isotopy in polycategories [3,4] are considered. There isotopy ($\mathcal{L}$-isotopy) is a generalisation of (main) isotopy investigated by V.Belousov [1] in positional algebras to the case of many-based systems. Formulas for finding cardinalities of classes of $\mathcal{L}$- isotopy, $\mathcal{R}$-isotopy and isotopy are given. For this the concept of the invariance group and the theory of complexes in Brandt grupoids [5,6] are used.

РЕГУЛЯРНЫЕ В НУЛЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

В. Фляйшер
Кафедра математического анализа

В настоящей статье рассматриваются многообразия абелевых Ω-алгебр с нулем. Алгебра $\mathcal{A}$ сигнатуры Ω называется абелевой, если любые две операции из Ω перестановочны на $\mathcal{A}$. Если, кроме того, множество Ω_0 нульарных операций из Ω непусто, то все нульарные операции из Ω_0 отмечают в $\mathcal{A}$ один и тот же элемент $0 \in \mathcal{A}$, являющийся наименьшей подалгеброй в $\mathcal{A}$ (см. [2], стр. 87-88). В этом случае мы говорим, что $\mathcal{A}$ есть абелева Ω-алгебра с нулем.

Элемент a, принадлежащий Ω-алгебре $\mathcal{A}$, называется регулярным (см. [5]), если всякая конгруэнция на $\mathcal{A}$ однозначно определяется классом, содержащим элемент a. Алгебра $\mathcal{A}$ называется регулярной в нуле (или 0-регулярной), если элемент $0 \in \mathcal{A}$ является регулярным.

Пусть $\mathfrak{A}$ - произвольное многообразие, состоящее из регулярных в нуле абелевых Ω-алгебр. Основным результатом настоящей статьи является описание таких многообразий $\mathfrak{A}$ в которых все Ω-алгебры проективны, соответственно инъективны. Мы покажем, что в многообразии $\mathfrak{A}$ регулярных в нуле абелевых Ω-алгебр все алгебры проективны (или все алгебры инъективны) тогда и только тогда, когда многообразие $\mathfrak{A}$ полиномиально эквивалентно многообразию модулей над прямой суммой конечного числа полей.

Всюду в дальнейшем через $\mathfrak{A}$ обозначено произвольное невырожденное многообразие регулярных в нуле абелевых Ω-алгебр. Как и в работах автора [6], [7], изучение многообразий абелевых Ω-алгебр с нулем мы будем вести на языке Ω-колец и полигонов над ними, используя понятие полиномиальной эквивалентности.

<u>Лемма I</u>. ([4], лемма I0). Всякое невырожденное многообразие абелевых Ω-алгебр с нулем полиномиально эквивалент-

но многообразию полигонов над подходящим коммутативным Ω-кольцом $\mathcal{A}$ (т.е. Ω-кольцом, у которого Ω-алгебра $(\mathcal{A},\Omega)$ абелева и полугруппа $(\mathcal{A},\cdot)$ коммутативна) с нулем 0 и единицей 1.

В дальнейшем, на основании леммы I, мы будем рассматривать многообразие $\mathfrak{A}$ как многообразие полигонов над некоторым коммутативным Ω-кольцом $\mathcal{A}$ с нулем 0 и единицей 1. Напомним, что Ω-кольцо $\mathcal{A}$ называется простым, если на $\mathcal{A}$ отсутствуют нетривиальные конгрувнции.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{A}$ является простым Ω-кольцом и пусть все $\mathcal{A}$-полигоны из многообразия $\mathfrak{A}$ проективны (иньективны). Тогда Ω-кольцо $\mathcal{A}$ полиномиально эквивалентно полю, а многообразие $\mathfrak{A}$ полиномиально эквивалентно многообразию векторных пространств над этим полем.

<u>Доказательство</u>. В работе [6] показано, что если в многообразии $\mathcal{B}$ полигонов над простым коммутативным Ω-кольцом B все полигоны проективны (иньективны), то Ω-кольцо B полиномиально эквивалентно либо полю и тогда $\mathcal{B}$ - многообразию векторных пространств над ним, либо двухэлементному моноиду $[1,0]$ и $\mathcal{B}$ - многообразию множеств с отмеченным элементом. Для доказательства леммы остается лишь заметить, что в многообразии множеств с отмеченным элементом любое n-элементное множество при $n>2$ не является 0-регулярной алгеброй.

Для произвольного элемента $a\in\mathcal{A}$ через σ_a обозначим конгруэнцию на Ω-кольце $\mathcal{A}$, порожденную элементом a, т.е.

$(b,c)\in\sigma_a$ тогда и только тогда, если $ab=ac$ для произвольных $b,c\in\mathcal{A}$.

Доказательства следующих двух лемм для Ω-колец аналогичны соответствующим доказательством для полуколец. Последние приведены в работе [6] (см. леммы 4 и 8).

<u>Лемма 3</u>. Если все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ проективны, то всякая конгруэнция ρ на $\mathcal{A}$ порождается некоторым идемпотентом e из $\mathcal{A}$, т.е. $\rho=\sigma_e$, где $e^2=e$.

<u>Лемма 4</u>. Если все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ иньективны, то всякий идеал R в Ω-кольце $\mathcal{A}$ порождается некоторым идемпотентом $e\in\mathcal{A}$, т.е. $R=e\mathcal{A}$, $e^2=e$.

Заметим, что на Ω-кольце $\mathcal{A}$ существуют максимальные конгруэнции, как максимальные конгруэнции, разделяющие элементы 1 и 0 из $\mathcal{A}$ (см. [I], стр. I03).

Теорема I. Пусть все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ проективны, соответственно инъективны. Тогда пересечение всех максимальных конгруэнций на $\mathcal{A}$ есть тождественная конгруэнция σ_1.

Доказательство. Предположим вначале, что все $\mathcal{A}$-полигоны из многообразия $\mathfrak{A}$ проективны и пусть конгруэнция ρ есть пересечение всех максимальных конгруэнций на $\mathcal{A}$. Предположим, что $\rho \neq \sigma_1$. По лемме 3 имеем, что $\rho = \sigma_e$ для некоторого идемпотента $e \neq 1$. Так как $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{A}$ является регулярным в нуле, то ввиду $\rho \neq \sigma_1$ нулевой класс $[0]_\rho$ конгруэнции ρ состоит не только из $0 \in \mathcal{A}$. Другими словами, найдется элемент $a \neq 0$ из $\mathcal{A}$ такой, что $a \in [0]_\rho$. Последнее означает, что $(a, 0) \in \rho$, т.е. $ea = e0 = 0$.

Рассмотрим теперь конгруэнцию σ_a, порожденную элементом $a \in \mathcal{A}$ и пусть τ - максимальная конгруэнция на $\mathcal{A}$, для которой $\sigma_a \leq \tau$. Из $ae = a \cdot 0$ следует $(e, 0) \in \sigma_a$ и значит $(e, 0) \in \tau$. С другой стороны, поскольку τ есть максимальная конгруэнция, то $\rho \leq \tau$. А значит из $(e, 1) \in \sigma_e = \rho$ следует $(e, 1) \in \tau$. Но тогда необходимо $(1, 0) \in \tau$, что противоречит нетривиальности конгруэнции τ. Полученное противоречие доказывает, что $\rho = \sigma_1$.

Предположим теперь, что все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ являются иньективными и пусть, как и прежде, ρ есть пересечение всех максимальных конгруэнций на $\mathcal{A}$. Ясно, что $R = [0]_\rho$ является идеалом в Ω-кольце $\mathcal{A}$. Если $\rho \neq \sigma_1$ то из регулярности в нуле $\mathcal{A}$-полигона $\mathcal{A}$ следует $R \neq 0$. По лемме 4 отсюда вытекает, что $R = e\mathcal{A}$ для некоторого идемпотента $e \neq 0$. Рассмотрим максимальную конгруэнцию τ на $\mathcal{A}$, для которой $\tau \geq \sigma_e$. Из $ee = e \cdot 1$ вытекает $(e, 1) \in \sigma_e$ и значит $(e, 1) \in \tau$. Однако, ввиду $(e, 0) \in \rho$ и $\rho \leq \tau$ мы имеем $(e, 0) \in \tau$ и, следовательно, $(1, 0) \in \tau$, что противоречит нетривиальности конгруэнции τ. Полученное противоречие доказывает, что $\rho = \sigma_1$. Теорема доказана.

Следствие I. Если все $\mathcal{A}$-полигоны из многообразия $\mathfrak{A}$ проективны, соответственно иньективны, то Ω-кольцо $\mathcal{A}$ разлагается в подпрямое произведение простых Ω-колец $\mathcal{B}_i$ $(i \in \mathcal{I})$, каждое из которых полиномиально эквивалентно полю.

Доказательство. Пусть ρ_i $(i \in \mathcal{I})$ - совокупность максимальных конгруэнций на Ω-кольце $\mathcal{A}$. По теореме I получаем, что Ω-кольцо $\mathcal{A}$ разлагается в подпрямое произведение Ω-колец $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}/\rho_i$ $(i \in \mathfrak{I})$, которые, ввиду максимальности ρ_i являются простыми. Поскольку всякий $\mathcal{B}_i$-полигон естественным образом может быть рассмотрен, как $\mathcal{A}$-полигон, и при этом всякий $\mathcal{B}_i$-гомоморфизм является и $\mathcal{A}$-гомоморфизмом, то все $\mathcal{B}_i$-полигоны являются проективными, соответственно иньективными. Отсюда на основании леммы 2 следует, что Ω-кольцо $\mathcal{B}_i$ полиномиально эквивалентно полю при любом $i \in \mathfrak{I}$.

На основании следствия I элементы Ω-кольца $\mathcal{A}$ можно отождествлять с $|\mathfrak{I}|$-мерными вектрами $(b_1, \dots, b_i, \dots)$, где $b_i \in \mathcal{A}/\rho_i$ для каждого $i \in \mathfrak{I}$, причем операции из $\{\Omega, \cdot\}$ определены на этих векторах покомпонентно. Для каждого $i \in \mathfrak{I}$ через e_i обозначим единицу Ω-кольца $\mathcal{B}_i$. Нулевой элемент Ω-кольца $\mathcal{B}_i$ обозначим через 0 (это не должно вызвать путаницы, ибо из контекста будет ясно, о нуле какого Ω-кольца идет речь). Для произвольного $b_i \in \mathcal{B}_i$ через $\bar{b}_i$ обозначим вектор, у которого i-ая компонента равна b_i, а все остальные компоненты равны нулю. Для произвольного вектора $a \in \mathcal{A}$ будем обозначать его i-ую компоненту через $a(i)$.

<u>Замечание I</u>. Отметим, что если в разложении Ω-кольца $\mathcal{A}$ в подпрямое произведение $\prod\limits_{i \in \mathfrak{I}}^{*} \mathcal{B}_i$ для некоторых $i, j \in \mathfrak{I}$ каждому $x \in \mathcal{B}_i$ соответствует ровно один $y \in \mathcal{B}_j$ так, что из $x = a(i)$ следует $y = a(j)$ при любом $a \in \mathcal{A}$, то Ω-кольцо $\mathcal{B}_i$ можно без ущерба исключить из подпрямого произведения $\prod\limits_{i \in \mathfrak{I}}^{*} \mathcal{B}_i$. Поэтому далее, без ограничения общности, будем предполагать, что уже ни одно Ω-кольцо $\mathcal{B}_i$ нельзя исключить из подпрямого произведения $\prod\limits_{i \in \mathfrak{I}}^{*} \mathcal{B}_i$. Другими словами, это значит, что для любых $i, j \in \mathfrak{I}$ найдутся элементы $x \in \mathcal{B}_i$, $y, z \in \mathcal{B}_j$ $(y \neq z)$ и векторы $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что

$$x = a(i), \quad y = a(j), \quad x = b(i), \quad z = b(j).$$

<u>Лемма 5</u>. Пусть все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ проективны. Тогда множество $\mathfrak{I}$ в разложении $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in \mathfrak{I}}^{*} \mathcal{B}_i$ конечно, причем для каждого $i \in \mathfrak{I}$ вектор $\bar{e}_i$ принадлежит $\mathcal{A}$.

<u>Доказательство</u>. Для произвольного $i \in \mathfrak{I}$ через ρ_i обозначим конгруэнцию на векторах из $\mathcal{A}$, определенную следующим образом:

$(a, b) \in \rho_i$ тогда и только тогда, если $a(i) = b(i)$ для произвольных $a, b \in \mathcal{A}$. По лемме 3 конгруэнция ρ_i по-

порождается идемпотентом $c \in \mathcal{A}$, т.е. $a(i) = b(i)$ тогда и только тогда, если $ca = cb$. Поскольку c является идемпотентом, то для любого $j \in \mathcal{I}$ элемент $c(j)$ является идемпотентом в $\mathcal{B}_j$. Однако, ввиду следствия I, мультипликативная полугруппа Ω-кольца $\mathcal{B}_j$ есть группа с нулем. Поэтому либо $c(j) = e_j$, либо $c(j) = 0 \in \mathcal{B}_j$. Покажем, что $c(i) = e_i$ и $c(j) = 0$ для любого $j \neq i$. Действительно, на основании замечания I для любого $j \neq i$ найдутся элементы $x \in \mathcal{B}_i$, $y, z \in \mathcal{B}_j$ $(y \neq z)$ и векторы $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что

$$x = a(i) \quad , \quad y = a(j)$$
$$x = b(i) \quad , \quad z = b(j).$$

Так как $a(i) = b(i)$, то $(a,b) \in \rho_i$ и значит $ca = cb$. Тогда $ca(j) = cb(j)$, т.е. $c(j)y = c(j)z$. Отсюда, ввиду $y \neq z$ следует $c(j) = 0 \in \mathcal{B}_j$. Теперь ясно, что $c(i) = e_i$, ибо в противном случае $c(i) = 0 \in \mathcal{B}_i$ и значит $c = 0 \in \mathcal{A}$, что противоречит нетривиальности конгруэнции ρ_i, порождаемой элементом $c \in \mathcal{A}$.

Таким образом, мы показали, что $c = \bar{e}_i \in \mathcal{A}$. Остается доказать, что множество $\mathcal{I}$ конечно. Предположим противное и определим на $\mathcal{A}$ конгруэнцию ρ следующим образом: для произвольных $a, b \in \mathcal{A}$

$(a,b) \in \rho$ тогда и только тогда, если множество

$$J = \{ i \in \mathcal{I} \mid a(i) \neq b(i) \} \quad \text{конечно.}$$

По лемме 3 конгруэнция ρ порождается некоторым идемпотентом $c \in \mathcal{A}$. Из определения ρ следует, что $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \in \rho$ для любых $i, j \in \mathcal{I}$. Следовательно, должно выполняться $c\bar{e}_i = c\bar{e}_j$ или, что то же самое, $\overline{c(i)} = \overline{c(j)}$. Отсюда следует $c(i) = 0 \in \mathcal{B}_i$, $c(j) = 0 \in \mathcal{B}_j$ и значит $c = 0 \in \mathcal{A}$. Но тогда конгруэнция ρ должна быть тривиальной, склеивающей все элементы из $\mathcal{A}$ в один класс, т.е. $(1, 0) \in \rho$. Это противоречит определению конгруэнции ρ. Лемма доказана.

На основании леммы 5 мы можем считать в дальнейшем, что Ω-кольцо $\mathcal{A}$ разлагается в подпрямое произведение Ω-колец $\mathcal{B}_i$, число которых n $(n \geq 1)$, т.е. $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$. Каждое Ω-кольцо $\mathcal{B}_i$, как отмечено в следствии I, полиномиально эквивалентно полю. Обозначим аддитивную операцию сложения в поле $\mathcal{B}_i$ через $\oplus$, тогда из полиномиальной эквивалентности Ω-кольца $\mathcal{B}_i$ полю $(\mathcal{B}_i, \oplus, \cdot)$ следует, что для любой m-арной $(m \geq 2)$ операции $\omega \in \Omega$ найдутся такие

$\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{mi} \in \mathcal{B}_i$, что

$$x_1 \ldots x_m\, \omega = x_1 \alpha_{1i} \oplus \ldots \oplus x_m \alpha_{mi}$$

для произвольных $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{B}_i$.

<u>Лемма 6</u>. Если все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ проективны, то $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{A}$ порождается элементами $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$.

<u>Лемма 7</u>. Пусть все $\mathcal{A}$-полигоны из $\mathfrak{A}$ инъективны. Тогда множество $\mathcal{I}$ в разложении $\mathcal{A} = \prod_{i\in\mathcal{I}}^{*} \mathcal{B}_i$ конечно, для каждого $i \in \mathcal{I}$ вектор $\bar{e}_i$ принадлежит $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{A}$ порождается элементами $\{\bar{e}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$.

<u>Доказательство</u>. Определим на векторах из $\mathcal{A}$ конгруэнцию ρ_j следующим образом: для произвольных $a, b \in \mathcal{A}$

$$(a, b) \in \rho_j \Leftrightarrow a(i) = b(i) \quad \text{для всех } i \in \mathcal{I} \setminus \{j\}.$$

Если конгруэнция ρ_j совпадает с тождественной конгруэнцией σ_1, то Ω-кольцо $\mathcal{B}_j$ можно исключить из подпрямого произведения $\prod_{i\in\mathcal{I}}^{*} \mathcal{B}_i$. На основании замечания I мы можем считать, что $\rho_j \neq \sigma_1$. Ввиду 0-регулярности $\mathcal{A}$-полигона $\mathcal{A}$ класс конгруэнции ρ_j , содержащий $0 \in \mathcal{A}$, является неодноэлементным правым идеалом R в Ω-кольце $\mathcal{A}$. По лемме 4 идеал R порождается идемпотентом e , причем $e \neq 0$. Поскольку $(e, 0) \in \rho_j$, то все компоненты вектора e кроме j-ой, равны нулю, а j-ая компонента ввиду идемпотентности e и $e \neq 0$ равна e_j . Таким образом $e = \bar{e}_j \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь подполигон C в $\mathcal{A}$-полигоне $\mathcal{A}$, порожденный элементами $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Ясно, что C - идеал в Ω-кольце $\mathcal{A}$ и по лемме 4 выполняется $C = f\mathcal{A}$ для некоторого идемпотента $f \in \mathcal{A}$. Но тогда $f\bar{e}_i = \bar{e}_i$ для любого $i \in \mathcal{I}$ откуда следует, что i-ая компонента вектора f есть e_i при любом $i \in \mathcal{I}$, т.е. $f = 1 \in \mathcal{A}$. Так как $f \in C$, то найдется некоторый n-арный полином $p(x_1, \ldots, x_n)$ в системе операций $\Omega \cup \{\cdot a \mid a \in \mathcal{A}\}$ и векторы $\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_n} \in \mathcal{A}$ такие, что $1 = p(\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_n})$. Но это означает, что $|\mathcal{I}| = n$ и тем самым лемма доказана.

<u>Теорема 2</u>. Если все $\mathcal{A}$-полигоны из многообразия $\mathfrak{A}$ проективны, соответственно инъективны, то Ω-кольцо $\mathcal{A}$ полиномиально эквивалентно прямой сумме конечного числа полей.

<u>Доказательство</u>. На основе лемм 6 и 7 мы имеем, что Ω-кольцо $\mathcal{A}$ разлагается в подпрямое произведение конечного числа Ω-колец $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ полиномиально эквивалентных, соответственно полям $(\mathcal{B}_i, \oplus, \cdot)$ причем $1 = p(e_1, \ldots, e_n)$

для некоторого n-арного полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$ в системе операций $\Omega \cup \{\cdot a \mid a \in A\}$.

Отметим, что ввиду полиномиальной эквивалентности Ω-кольца B_i полю $(B_i, \oplus, \cdot)$ при произвольном $i\ (1 \leq i \leq n)$ операция $\oplus$ является бинарным полиномом в системе операций $\Omega \cup \{\cdot b \mid b \in B_i\}$. Если все операции вида $\cdot b_i$ $(b_i \in B_i)$, встречающиеся в полиноме $\oplus$ заменить соответственно на операцию $\cdot \bar{b}_i$ $(\bar{b}_i \in A)$, то мы получим бинарный полином в системе операций $\Omega \cup \{\cdot a \mid a \in A\}$, который будем обозначать „$+_i$".

Определим теперь бинарный полином "+" в системе операций $\Omega \cup \{\cdot a \mid a \in A\}$ следующим образом:

$$x + y = p(x\bar{e}_1 +_1 y\bar{e}_1, x\bar{e}_2 +_2 y\bar{e}_2, \ldots x\bar{e}_n +_n y\bar{e}_n).$$

Тогда в Ω-кольце A имеем

$$1 + 0 = p(1\cdot\bar{e}_1 +_1 0, \ldots, 1\bar{e}_n +_n 0) = p(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = 1;$$

$$0 + 1 = p(0 +_1 1\cdot\bar{e}_1, \ldots, 0 +_n 1\cdot\bar{e}_n) = p(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = 1.$$

Как показано в доказательстве теоремы 3 из [6], из равенства $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ следует, что $(A, +, \cdot)$ является коммутативным полукольцом и Ω-кольцо A полиномиально эквивалентно полукольцу $(A, +, \cdot)$. При этом каждый A-полигон B полиномиально эквивалентен полумодулю $(B, +)$ над полукольцом $(A, +, \cdot)$.

В работе [3] полностью описаны полукольца, над которыми все полумодули проективны, соответственно иньективны. Из результатов этой работы и из того, что полученное полукольцо $(A, +, \cdot)$ является полукольцом с аддитивно нейтральным нулем и коммутативной полугруппой следует, что A есть прямая сумма конечного числа полей и значит полумодули над кольцом $(A, +, \cdot)$ суть A-модули. Теорема доказана.

Литература

1. К о н П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
2. К у р о ш А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. Москва, 1974.
3. Ф л я й ш е р В. Г., О гомологической классификации полуколец с нулем. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 366, 42-75.
4. Ф л я й ш е р В. Г., Ω-кольца, над которыми все поли-

гсны n-свободны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 56-83.

5. C s á k á n y , B., Characterizations of regular varieties. Acta Sci. Math., 31, 3-4, 1970, 187-189.

6. F l e i s c h e r, V., Projective and injective varieties of Abelian varieties. Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Vol 17, Contributions to Universal Algebra, Szeged, 1975, 113-132.

7. F l e i s c h e r V., On projective Hamiltonian varieties, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Vol 29, Universal Algebra, Esztergoni, 1977, 271-287.

Поступило
12.VI 1982

NULLIS REGULAARSED ALGEBRATE MUUTKONNAD

V. Fljašer

R e s ü m e e

Artiklis vaadeldakse nullelemendiga Abeli Ω-algebrate muutkonda $\mathfrak{A}$, milles kõik algebrad on regulaarsed nullis, s.t. iga kongruents suvalisel algebral muutkonnast $\mathfrak{A}$ määratakse klassiga, mis sisaldab nullelementi. Antakse selliste muutkondade täielik kirjeldus, milles kõik algebrad on kas projektiivsed või kõik injektiivsed.

REGULAR IN ZERO VARIETIES OF ALGEBRAS

V. Fleischer

S u m m a r y

Varieties $\mathfrak{A}$ of Abelian Ω-algebras with zero in which all Ω-algebras are regular in zero, i.e. every congruence on an arbitrary algebra from $\mathfrak{A}$ is determined by the class containing the zero, are studied. It is proved that in a such variety $\mathfrak{A}$ all Ω-algebrae are projective or all ones are injective iff $\mathfrak{A}$ is polynomially equivalent to some variety of R-modules, where R is a direct sum of finitely many fields.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD