TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. Mitt

MATEMAATILISE LOOGIKA PÕHIMÕISTED JA ÜLESANDED

TARTU 1974

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika kateeder

E. Mitt

MATEMAATILISE LOOGIKA PÕHIMÕISTED JA ÜLESANDED

TARTU 1974

Kinnitatud Matemaatikateaduskonna nõukogus 24. mail 1974

Õppevahend Matemaatikateaduskonna üliõpilastele

I. LAUSEARVUTUS

1. Lause

Lausearvutuse põhiliseks mõisteks on **l a u s e** . Selleks võib olla mistahes grammatiline lause, mille puhul võib rääkida selle sisu vastavusest tegelikkusele. Kui lause sisu vastab tegelikkusele, siis nimetatakse seda lauset **t õ e s e k s** , kui aga lause sisu ei vasta tegelikkusele, siis nimetatakse lauset **v ä ä r a k s** . Lause tegelikkusele vastavuse määr (tõene, väär) on lause **t õ e v ä ä r t u s** . Iga lause on kas tõene või väär, kuid mitte tõene ja väär samaaegselt.

Lausearvutuses vaadeldakse lauseid kui tervikuid ja neid tähistatakse ladina tähestiku väikeste tähtedega, nagu a, b, c, ..., p, q, r. Tõese lause tõeväärtuse tähiseks on t, väära lause tõeväärtuse tähiseks v (kasutatakse ka tähiseid vastavalt 1 ja 0).

Näited

1. Lause "Kolmnurga sisenurkade summa on 360°" on tõene.
2. Lause "2 . 4 = 8" on tõene.
3. Lause "2 > 5" on väär.
4. "Korrutage arvud 2 ja 4" ei ole lausearvutuse lause.
5. "3 + x = 10" ei ole lausearvutuse lause.

Ülesanded

1. Millised järgmistest väljenditest on laused ning millised on nende tõeväärtused:
   1) "Koosinusfunktsioon on paarisfunktsioon";
   2) "(2 + 5)(4 . 7) = 56";
   3) "1969.a. astus inimene esmakordselt Kuu pinnale";
   4) "Iga reaalarvu korral $x|\sin x| \leqslant 1$";
   5) "Kolmnurk ABC on võrdhaarne";

6) "Leidub tasandiga α paralleelne sirge a";

7) "Arv $\frac{4}{9}$ on paarisarv";

8) "$\{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1; 3\}$";

9) "Sulgege raamatud!";

10) "$x < 0$ iga x korral";

11) "$|x| > 0$ iga x korral";

12) "Mistahes arvude a ja b korral $a + b = b + a$";

13) "Mis on Teie nimi?";

14) "Leidub selline x, et $x + 3 < 6$";

15) "Iga x korral $x + 3 < 6$";

16) "$(\sin x)' = \cos x$ iga x korral";

17) "$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ iga x korral"?

2. Loogilised tehted

Loogiliste tehete abil moodustatakse lausetest *liitlauseid*. Lauseid, millest liitlause moodustatakse, nimetatakse komponentlauseteks. Liitlause võib olla kas tõene või väär, kusjuures liitlause tõeväärtus sõltub üksnes komponentlausete tõeväärtustest, mitte aga komponentlausete sisust. Iga lauset võib vaadelda ka liitlausena. Liitlauseid tähistatakse gooti tähestiku tähtedega, nagu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jne.

Kahe lause a ja b *konjunktsiooniks* nimetatakse liitlauset $a \wedge b$ (loetakse: "a ja b"), mis on tõene siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlaused on tõesed.

Konjunktsiooni tõeväärtustabel on järgmine:

a	b	$a \wedge b$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	v

Näited

Olgu antud laused:

"10 on suurem kui 7" = t;

"7 on suurem kui 10" = v;

"6 jagub 3-ga" = t;

"5 jagub 3-ga" = v.

Neist saame moodustada järgmised liitlaused:

1) "10 on suurem kui 7 ja 6 jagub 3-ga" = $t \wedge t = t$;
2) "10 on suurem kui 7 ja 5 jagub 3-ga" = $t \wedge v = v$;
3) "7 on suurem kui 10 ja 6 jagub 3-ga" = $v \wedge t = v$;
4) "7 on suurem kui 10 ja 5 jagub 3-ga" = $v \wedge v = v$.

Kahe lause a ja b *disjunktsiooniks* nimetatakse liitlauset $a \vee b$ (loetakse: "a või b"), mis on väär siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlaused on väärad.

Disjunktsiooni tõeväärtustabel on järgmine:

a	b	$a \vee b$
t	t	t
t	v	t
v	t	t
v	v	v

Näited

1) "10 on suurem kui 7 või 6 jagub 3-ga" = $t \vee t = t$;
2) "10 on suurem kui 7 või 5 jagub 3-ga" = $t \vee v = t$;
3) "7 on suurem kui 10 või 6 jagub 3-ga" = $v \vee t = t$;
4) "7 on suurem kui 10 või 5 jagub 3-ga" = $v \vee v = v$.

Kahe lause a ja b *implikatsiooniks* nimetatakse liitlauset $a \Rightarrow b$ (loetakse: "kui a, siis b"), mis on väär siis ja ainult siis, kui esimene komponentlause a on tõene ning teine komponentlause b on väär.

Implikatsiooni tõeväärtustabel on järgmine:

a	b	$a \Rightarrow b$
t	t	t
t	v	v
v	t	t
v	v	t

Näited

1) "Kui $10 > 7$, siis $6 \vdots 3$" = $t \Rightarrow t = t$;
2) "Kui $10 > 7$, siis $5 \vdots 3$" = $t \Rightarrow v = v$;
3) "Kui $6 > 10$, siis $6 \vdots 3$" = $v \Rightarrow t = t$;
4) "Kui $7 > 10$, siis $5 \vdots 3$" = $v \Rightarrow v = t$.

Kahe lause a ja b *ekvivalentsiks* nimetatakse liitlauset $a \Leftrightarrow b$ (loetakse: "a siis ja ainult siis, kui b"), mis on tõene siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlaused a ja b on samaaegselt kas tõesed või väärad.

Ekvivalentsi tõeväärtustabel on järgmine:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	t

Näited

1) "$10 > 7$ siis ja ainult siis, kui $6 \vdots 3$" = $t \Leftrightarrow t$ = t;
2) "$10 > 7$ siis ja ainult siis, kui $5 \vdots 3$" = $t \Leftrightarrow v$ = v;
3) "$7 > 10$ siis ja ainult siis, kui $6 \vdots 3$" = $v \Leftrightarrow t$ = v;
4) "$7 > 10$ siis ja ainult siis, kui $5 \vdots 3$" = $v \Leftrightarrow v$ = t.

Lause a *e i t u s e k s* nimetatakse liitlauset $\neg a$ (loetakse: "pole tõsi, et a" või "a eitus"), mis on tõene siis, kui lause a on väär.

Lause eituse tõeväärtustabel on järgmine:

a	$\neg a$
t	v
v	t

Näited

1) "Pole tõsi, et $10 > 7$" = $\neg$ t = v;
2) "Pole tõsi, et $7 > 10$" = $\neg$ v = t.

Ülesanded

2. Lausetest a = "$2 = 3$" ja b = "$2^2 = 4$" moodustada 1) konjunktsioon, 2) disjunktsioon, 3) implikatsioon, 4) kahekordne implikatsioon, 5) eitus ning määrata nende liitlausete tõeväärtus.

3. Järgmistes liitlausetes eraldada komponentlaused, määrata loogiline tehe, kirjutada liitlaused üles sümbolites ning leida nende tõeväärtused:
   1) "15 jagub 7-ga ja 12 jagub 2-ga";
   2) "15 jagub 7-ga või 12 jagub 3-ga";
   3) "$1 \neq 5$ või mistahes nurga siinusfunktsioon on paarisfunktsioon";

4) "Rööpküliku vastasküljed on paralleelsed ja rombi diagonaalid on risti";
5) "$5 > 3$ või $5 < 3$";
6) "$8 \vdots 2$ või $8 \vdots 4$";
7) "1 on algarv või 1 on kordarv";
8) "Kui $2 = -2$, siis $2^2 = (-2)^2$";
9) "Kui $2^2 = (-2)^2$, siis $2 = -2$";
10) "Punkt M on kolmnurga ABC nurgapoolitaja AD punkt siis ja ainult siis, kui punkt M asub nurga $\angle$ BAC haaradest võrdsel kaugusel";
11) "$2 \cdot 6 > 11$ siis ja ainult siis, kui $5 < 2$".

4. Esitada järgmised liitlaused konjunktsiooni või disjunktsiooni kujul ning leida tõeväärtused:

1) "$2 \leq 3$";
2) "$2 \geq 3$";
3) "$\tan 45° \geq 1$";
4) "$0 < 2 < 1$";
5) "Murru väärtus suureneb lugeja suurenemisel või nimetaja vähenemisel";
6) "Ristküliku pindala väheneb 2 korda ristküliku aluse või kõrguse vähenemisel 2 korda".

5. Koostada järgmistest lausete paaridest tõesed liitlaused, kasutades selleks kas konjunktsiooni või disjunktsiooni:
1) "Null on väiksem mistahes positiivsest arvust", "Null on suurem mistahes negatiivsest arvust";
2) "Murru lugeja märgi muutmisel murru märk muutub vastupidiseks", "Murru nimetaja märgi muutmisel murru märk muutub vastupidiseks";
3) "$\sqrt{2} < 2$", "$\sqrt{2} > 1$";
4) "$\pi < 4$", "$\pi > 3$";
5) "Arv a on suurem kui arv b", "Arv a ei ole suurem kui arv b".

6. Järgmistes liitlausetes kirjutada punktide asemele sidesõna "ja" või "või", nii et liitlause oleks tõene:
1) "$a \neq 0$ ... $b \neq 0$ korral $a \cdot b \neq 0$", kus a, b - arvud;

2) "$a > 0$ korral ... $b > 0$ korral $a \cdot b > 0$";

3) "Kui $ab < 0$, siis $a < 0$ ... $b > 0$ ... $a > 0$... $b < 0$";

4) "Kui $n \in Q$, siis $\int x^n\,dx$ on võrdne $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ... ... $\ln|x| + C$".

7. Kas järgmised lausete paarid on teineteise eituseks:

1) "$5 < 6$", "$5 > 6$";

2) "a on algarv", "a on kordarv";

3) "a on positiivne arv", "a on negatiivne arv";

4) "Sirged s ja t lõikuvad", "Sirged s ja t on paralleelsed", kui a) sirged s ja t on tasandil, b) sirged s ja t on ruumis?

8. Moodustada järgmiste lausete eitused ning määrata nende tõeväärtused:

1) "$2 < 3$";

2) "$5 \geqslant 7$";

3) "$5 = 5$";

4) "Rombi diagonaalid ei ole võrdsed".

9. Sõnastada järgmised teoreemid implikatsioonina:

1) Pythagorase teoreem;

2) Eukleidese teoreem;

3) teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest.

3. Liitlausete tõeväärtused

Kui komponentlausete tõeväärtused on ette antud, siis liitlause tõeväärtuse leidmiseks tuleb komponentlaused asendada nende tõeväärtustega ning arvestada vastava loogilise tehte definitsiooni.

Näited

1. Olgu $p = v$ ja $q = t$, siis
$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = (v \Rightarrow v) \wedge (t \vee t) = t \wedge t = t.$

2. Olgu $p = v$, $q = t$, $r = t$, siis
$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg r = \neg(v \vee \neg t) \Leftrightarrow \neg t =$
$= \neg(v \vee v) \Leftrightarrow v = \neg v \Leftrightarrow v = t \Leftrightarrow v = v.$

Kui komponentlausete tõeväärtused pole ette antud, siis on liitlause tõeväärtuste leidmiseks otstarbekas kasutada t õ e v ä ä r t u s t a b e l i t . Selleks kirjutame lause, mille tõeväärtustabelit asume koostama, veidi suuremate tähevahedega. Tabeli esimestesse veergudesse kirjutame komponentlaused ning nende tõeväärtused. Vajaduse korral võib lisada veel tabeli lõppu ühe rea, kuhu paigutame tehete järjekorranumbrid etappide kaupa. Liitlause iga komponentlause alla kirjutame selle tõeväärtused, vastava tehtemärgi alla samuti vastavad tõeväärtused.

Näited

1. Liitlause $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ tõeväärtustabel on järgmine:

p	q	$(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$(\neg$	p	$\vee$	$q)$
t	t	t	v	v	t	v	v	t	t	t
t	v	t	t	t	v	v	v	t	v	v
v	t	v	t	v	t	t	t	v	t	t
v	v	v	t	t	v	t	t	v	t	v
		1.	3.	2.	1.	4.	2.	1.	3.	1.

2. Liitlause $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow r$ tõeväärtustabel on järgmine:

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\vee$	$\neg$	$q)$	$\Leftrightarrow$	r
t	t	t	v	t	t	v	t	v	t
t	t	v	v	t	t	v	t	t	v
t	v	t	v	t	t	t	v	v	t
t	v	v	v	t	t	t	v	t	v
v	t	t	t	v	v	v	t	t	t
v	t	v	t	v	v	v	t	v	v
v	v	t	v	v	t	t	v	v	t
v	v	v	v	v	t	t	v	t	v
			4.	1.	3.	2.	1.	5.	1.

Liitlausete tõeväärtustabeleid saab kasutada ka tekstülesannete lahendamiseks, koostades ülesande põhjal üksikutest komponentlausetest liitlause, kirjutades selle üles sümbolites. Tõeväärtustabelist saab leida vastuse ülesandes püstitatud küsimusele.

Näide

Ühes perekonnas on lõunasöögi suhtes kujunenud tavaks, et kui süüakse suppi, siis süüakse ka praadi, ja kui suppi ei sööda, siis süüakse magustoitu, ja kui süüakse salatit, siis ei sööda praadi. Kas lõunasöögiks on ka magustoit, kui salat on juba laual?

Tähistame komponentlaused järgmiselt: "Süüakse suppi" = s, "Süüakse magustoitu" = m, "Süüakse praadi" = p, "Süüakse salatit" = a. Antud liitlause kirjutame sümbolites järgmiselt:

$$(s \Rightarrow p) \wedge (\neg s \Rightarrow m) \wedge (a \Rightarrow \neg p),$$

mida lühiduse mõttes tähistame tähega b. Kuna ülesandes on antud, et salatit süüakse, siis lause a on tõene. Ülejäänud komponentlausete s, p ja m kohta pole teada, kas nad on tõesed või väärad, seepärast tuleb nende suhtes vaadelda kõiki võimalusi, mida on kokku 8. Koostame liitlause b tõeväärtustabeli:

a	s	p	m	(s	⇒	p)	∧	(¬	s	⇒	m)	∧	(a	⇒	¬	p)
t	t	t	t	t	t	t	t	v	t	t	t	v	t	v	v	t
t	t	t	v	t	t	t	t	v	t	t	v	v	t	v	v	t
t	t	v	t	t	v	v	v	v	t	t	t	v	t	t	t	v
t	t	v	v	t	v	v	v	v	t	t	v	v	t	t	t	v
t	v	t	t	v	t	t	t	t	v	t	t	v	t	v	v	t
t	v	t	v	v	t	t	v	t	v	v	v	v	t	v	v	t
t	v	v	t	v	t	v	t	t	v	t	t	t	t	t	t	v
t	v	v	v	v	t	v	v	t	v	v	v	v	t	t	t	v
				1.	3.	1.	4.	2.	1.	3.	1.	5.	1.	3.	2.	1.

Siit ilmneb, et vaadeldav liitlause on tõene ainult ühel juhul ja nimelt siis, kui a = t, s = v, p = v, m = t, s.t. kui süüakse salatit, siis süüakse ka magustoitu.

Ülesanded

10. Leida järgmiste liitlausete tõeväärtused komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral:
    a) $\neg q \Rightarrow [(p \vee r) \wedge q]$, p = t, q = t, r = v;
    b) $(p \wedge r) \vee (\neg q \vee r)$, p = v, q = t, r = v;
    c) $\neg [r \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)]$, p = t, q = v, r = t;
    d) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, p = v, q = t.

11. Koostada järgmiste liitlausete tõeväärtustabelid:

a) $p \wedge \neg q$,
b) $\neg(p \wedge q)$,
c) $\neg(\neg p \vee q)$,
d) $(p \vee q) \wedge \neg p$,
e) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg p)$,
f) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$,
g) $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,
h) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge r)] \Rightarrow \neg(p \vee r)$.

12. Pioneerilaagrist naasnud Peeter vastab sõprade küsimustele toidu suhtes järgmist:

"Kui ei antud kartuleid, siis anti hapukapsast, ja kui anti kartuleid ja hapukapsast, siis ei antud lillkapsast, ja kui anti lillkapsast ning ei antud kartuleid, siis ei antud ka hapukapsast."

Milliseid nimetatud produkte anti koos; mitu võimalust on?

13. Perekond on puhkuse suhtes otsustanud, et kui nad ei sõida Moskvasse, siis sõidavad nad Riiga, ja kui nad sõidavad Moskvasse, siis sõidavad nad ka Leningradi, ja nad ei sõida Riiga ega Leningradi, või sõidavad Moskvasse.

Mitu reisivõimalust on? Kas on võimalik külastada kõiki kolme linna? Kas sõidavad nad ainult Riiga? Kas sõidavad nad ainult Leningradi?

14. Käitises on kolm tsehhi A, B ja C. Uue toote valmistamise suhtes lepiti kokku järgmist:

1) kui tsehh B ei võta osa uue toote valmistamisest, siis ei võta sellest osa ka tsehh A;

2) kui tsehh B võtab osa uue toote valmistamisest, siis võtavad sellest osa ka tsehhid A ja C.

Kas selle kokkuleppe kohaselt peab ka tsehh C võtma osa uue toote valmistamisest, kui sellest võtab osa tsehh A?

15. Kui üliõpilane läheb pühapäeval kontserdile, siis ei lähe ta teatrisse, ja kui ta ei lähe suusatama, siis istub ta tunnikese kohvikus. On teada, et üliõpilane läks kontserdile. Kas ta oli ka kohvikus?

16. Kokkuleppe kohaselt on asutuste A, B ja C poolt välja töötatud uue projekti kinnitamise kord järgmine: kui projekti kinnitamisest võtavad alguses osa asutused A ja B, siis peab nendega ühinema ka asutus C. Kui kinnitamine toimub asutustes B ja C, siis peab nendega ühinema ka asutus A. Kas on võimalik, et projekt kinnitatakse ainult asutustes A ja C ning asutuse B osavõtt pole vajalik?

4. Järelduvusseos

Liitlauset $\mathcal{L}$ nimetatakse *järelduvaks* liitlausest $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} \vdash \mathcal{L}$), kui liitlause $\mathfrak{A}$ tõesuse korral on tõene ka liitlause $\mathcal{L}$.

Kui liitlausest $\mathfrak{A}$ järeldub liitlause $\mathcal{L}$, siis öeldakse, et liitlausete $\mathfrak{A}$ ja $\mathcal{L}$ vahel kehtib *järelduvusseos*.

Liitlausest $\mathfrak{A}$ järeldub liitlause $\mathcal{L}$, kui $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathcal{L}$ on tõene komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral.

Näide

Kas liitlausest $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$ järeldub liitlause $p \Rightarrow (q \vee r)$?

Ülesande lahendamiseks koostame liitlause

$[(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$

tõeväärtustabeli.

p	q	r	[(p	∨	r)	∧	(p	⇒	q)]	⇒	[p	⇒	(q	∨	r)]
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	t	v	t	t	t	t	t	t	t	t	t	v
t	v	t	t	t	t	v	t	v	v	t	t	t	v	t	t
t	v	v	t	t	v	v	t	v	v	t	t	v	v	v	v
v	t	t	v	t	t	t	v	t	t	t	v	t	t	t	t
v	t	v	v	v	v	v	v	t	t	t	v	t	t	t	v
v	v	t	v	t	t	t	v	t	v	t	v	t	v	t	t
v	v	v	v	v	v	v	v	t	v	t	v	t	v	v	v
			1.	2.	1.	3.	1.	2.	1.	4.	1.	3.	1.	2.	1.

Neljanda veeru põhjal $[(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)] \vdash [p \Rightarrow (q \vee r)]$.

Järelduvusseose kontrollimiseks on olemas ka lihtsam, vähem töömahukas võte. See põhineb vastuväitelisel kontrollil. Et tõestada seose $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ kehtivust, tuleb näidata, et ei leidu komponentlausete selliseid tõeväärtusi, mille korral $\mathfrak{B}$ = v, kuid $\mathfrak{A}$ = t. Tõestuseks eeldataksegi, et $\mathfrak{B}$ = v, ning kui sel juhul $\mathfrak{A}$ ei saa olla tõene, siis ongi tõestatud, et $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

Näide

Olgu $\mathfrak{A} \equiv (p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$
ning $\mathfrak{B} \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$.

Et tõestada seose $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ kehtivust, oletame, et $\mathfrak{B}$ = v. Sel juhul peab olema p = t, q = v ning r = v. Siis aga liitlauses $\mathfrak{A}$ $p \Rightarrow q$ = v ning järelikult ka $\mathfrak{A}$ = v. Seega ei leidu komponentlausete selliseid tõeväärtusi, mille korral $\mathfrak{B}$ on väär, $\mathfrak{A}$ aga tõene. Järelikult $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

Ülesanded

17. Milliste liitlausete paaride korral üks järeldub teisest:
    1) $p \wedge q$,
    2) $p \Rightarrow \neg q$,
    3) $\neg p \vee \neg q$,
    4) $\neg p \vee q$,
    5) $p \wedge \neg q$?

18. Järjestada järgmised liitlaused nii, et igast liitlausest järelduksid kõik temale järgnevad liitlaused:
    1) $\neg p \Leftrightarrow q$,
    2) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$,
    3) $\neg [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$,
    4) $p \vee q$,
    5) $\neg p \wedge q$.

5. Samaväärsed laused

Liitlauset nimetatakse s a m a s e l t   t õ e s e k s (v ä ä r a k s), kui ta on tõene (väär) komponentlausete tõeväärtuste kõigi kombinatsioonide korral.

Liitlauset nimetatakse k e h t e s t a t a v a k s, kui ta on tõene komponentlausete tõeväärtuste vähemalt ühe kombinatsiooni korral.

Liitlauseid $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ nimetatakse s a m a v ä ä r s e t e k s ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), kui nad omavad ühesuguseid tõeväärtusi komponentlausete samade tõeväärtuste korral.

Liitlaused $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ on samaväärsed siis ja ainult siis, kui $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \equiv t$.

Et kindlaks teha, kas liitlause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav, kasutatakse tõeväärtustabeleid.

<u>Näited</u>

1. Kontrollida, kas järgmised liitlaused on samaselt tõesed, samaselt väärad või kehtestatavad:
   1) $(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b$, 3) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,
   2) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$, 4) $[(p \wedge q) \vee \neg q] \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$.

Ülesande lahendamiseks koostame antud liitlausete tõeväärtustabelid.

a	b	(a	⇒	b)	∧	a	∧	¬	b	(a	∧	¬	b)	⇒	¬(a	⇒	b)
t	t	t	t	t	t	t	v	v	t	t	v	v	t	t	v	t	t	t
t	v	t	v	v	v	t	v	t	v	t	t	t	v	t	t	t	v	v
v	t	v	t	t	v	v	v	v	t	v	v	v	t	t	v	v	t	t
v	v	v	t	v	v	v	v	t	v	v	v	t	v	t	v	v	t	v

p	q	¬	(¬	p	∨	q)	⇔	(p	∨	q)	[(p	∧	q)	∨	¬	q]	⇔	(p	∨	¬	q)
t	t	v	v	t	t	t	v	t	t	t	t	t	t	t	v	t	t	t	t	v	t
t	v	t	v	t	v	v	t	t	t	v	t	v	v	t	t	v	t	t	t	t	v
v	t	v	t	v	t	t	v	v	t	t	v	v	t	v	v	t	t	v	v	v	t
v	v	v	t	v	t	v	t	v	v	v	v	v	v	t	t	v	t	v	t	t	v

Nendest tabelitest ilmneb, et

$(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b \equiv v$, $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ - kehtestatav,

$(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b) \equiv t$, $[(p \wedge q) \vee \neg q] \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \equiv t$.

Et otsustada, kas liitlause on samaselt väär või samaselt tõene, võib kasutada ka teist võtet, mis tugineb vastuväitelisel tõestusel.

Olgu vaja tõestada, et $\mathfrak{A} \equiv v$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub komponentlausete tõeväärtuste selline kombinatsioon, mille korral $\mathfrak{A} = t$. Kui see oletus viib vastuolule, siis järelikult ei leidu komponentlausete tõeväärtuste ühtegi sellist kombinatsiooni, mille korral $\mathfrak{A} = t$. Seega $\mathfrak{A} \equiv v$.

Näited

1. Näidata, et $\mathfrak{A} \equiv (a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b \equiv v$.

Oletame, et leidub komponentlausete tõeväärtuste selline kombinatsioon, mille korral $\mathfrak{A} = t$. Püüame leida selle kombinatsiooni.

Et $\mathfrak{A} = t$, peab $a \Rightarrow b = t$, $a = t$ ning $\neg b = t$ ehk $b = v$. Kui aga $a = t$ ja $b = v$, siis ei saa $a \Rightarrow b$ olla tõene. Seega jõudsime vastuolule. See tähendab, et ei leidu komponentlausete tõeväärtuste sellist kombinatsiooni, mille korral $\mathfrak{A} = t$. Järelikult $\mathfrak{A} \equiv v$.

2. Näidata, et $\mathfrak{B} \equiv (a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg (a \Rightarrow b) \equiv t$.

Oletame, et leidub komponentlausete tõeväärtuste selline kombinatsioon, mille korral $\mathfrak{B} = v$. Siis peaks olema $\neg(a \Rightarrow b) = v$ ning $a \wedge \neg b = t$ ehk $a \Rightarrow b = t$, $a = t$, $b = v$. Et aga juhul, kui $a = t$, $b = v$, on implikatsioon $a \Rightarrow b = v$, siis tekib vastuolu. Seega ei leidu komponentlausete tõeväärtuste sellist kombinatsiooni, mille korral $\mathfrak{B} = v$. Järelikult $\mathfrak{B} \equiv t$.

Liitlausete samaväärsuse üle otsustamiseks võib kasutada tõeväärtustabeleid.

3. Kas liitlaused $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee r$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ on samaväärsed?

Ülesande lahendamiseks koostame liitlausete

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad \text{ja}$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

tõeväärtustabelid.

p	q	r	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)$	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	r	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)$	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	t	t	t	v	t	t	t	t	t	v	t	t	t	t	v	t	t	t	t	t	t	v	v
t	v	t	t	t	v	t	t	t	t	v	v	t	t	t	t	v	t	t	t	t	v	v	t	t	t	t
t	v	v	t	v	v	v	v	t	t	v	v	v	v	t	v	v	v	v	t	t	v	v	v	t	v	v
v	t	t	v	v	t	t	t	v	v	v	t	t	t	v	v	t	t	t	t	v	v	t	v	v	v	t
v	t	v	v	v	t	t	v	t	v	v	t	v	v	v	v	t	t	v	t	v	v	t	v	v	v	v
v	v	t	v	v	v	t	t	v	v	v	v	t	t	v	v	v	t	t	t	v	v	v	v	v	v	t
v	v	v	v	v	v	v	v	t	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	t	v	v	v	v	v	v	v
			1.	3.	1	2.	1.	4.	1.	2.	1.	3	1.	1.	3.	1	2.	1.	4.	1	2.	1.	3.	1.	2.	1.

Liitlause $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$ tõeväärtustabeli 4. veerg sisaldab ka tõeväärtusi "v". Seega $p \wedge (q \vee r) \not\equiv (p \wedge q) \vee r$.

Kuid liitlause $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv t$, järelikult

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Ülesanded

19. Otsustada, kas järgmised lausete paarid on samaväärsed:

1) $(a \wedge b) \vee r$ ja $a \wedge (b \vee c)$;
2) $\neg(x \Rightarrow \neg y)$ ja $\neg x \vee \neg y$;
3) $p \Leftrightarrow \neg q$ ja $\neg(q \vee \neg p)$;
4) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ ja $\neg(p \vee q)$;
5) $p \wedge \neg q$ ja $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg q$;
6) $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \vee q) \Rightarrow r$;
7) $(p \vee r) \Rightarrow r$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
8) $\neg(a \wedge b \wedge \neg c)$ ja $c \wedge (\neg b \Rightarrow a)$;
9) $\neg(p \vee q)$ ja $\neg p \wedge \neg q$;
10) $p \vee (q \wedge r)$ ja $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

6. Põhisamasused

Rida liitlausete samaväärsusi, mida kasutatakse liitlausete teisendamiseks, nimetatakse p õ h i s a m a s u s t e k s .

Põhisamasused:

1° $\neg\neg p \equiv p$;
2° $p \vee q \equiv q \vee p$;
3° $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$;
4° $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
5° $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$;
6° $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
7° $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
8° $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$;
9° $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$;

10° $p \wedge p \equiv p$;

11° $p \vee p \equiv p$;

12° $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$;

13° $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$;

14° $p \wedge t \equiv p$;

15° $p \wedge v \equiv v$;

16° $p \vee t \equiv t$;

17° $p \vee v \equiv p$;

18° $p \vee \neg p \equiv t$;

19° $p \wedge \neg p \equiv v$.

7. Liitlausete teisendamine

Kasutades põhisamasusi võib liitlauseid teisendada, asendades kogu lause või selle osa temaga samaväärse lausega. Siin on analoogia algebraliste avaldiste samasusteisendustega.

Samasusteisendusi võib kasutada liitlausete lihtsustamiseks või samaväärsuse näitamiseks.

Näited

1. Lihtsustada liitlause $\neg(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.

$$\neg(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \overset{(12^\circ)}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \overset{(8^\circ)}{\equiv}$$
$$\equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p \overset{(6^\circ)}{\equiv} (p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q \vee p) \overset{(11^\circ)}{\equiv}$$
$$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p) \overset{(10^\circ)}{\equiv} p \vee \neg q.$$

2. Teisendada liitlause $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \Rightarrow q) \vee r$ nii, et märk "$\neg$" esineks ainult komponentlausete ees.

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \Rightarrow q) \vee r \overset{(12^\circ)}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \vee q) \vee r \overset{(8^\circ)}{\equiv}$$
$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \vee r.$$

3. Tõestada, et $\neg p \vee (p \wedge q) \equiv \neg p \vee q$.

$$\neg p \vee (p \wedge q) \overset{(7^\circ)}{\equiv} (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \overset{(18^\circ)}{\equiv} t \wedge (\neg p \vee q) \overset{(14^\circ)}{\equiv}$$
$$\equiv \neg p \vee q.$$

Ülesanded

20. Lihtsustada järgmised liitlaused:

1) $\neg(\neg a \vee b) \Rightarrow (a \vee b) \wedge b$;
2) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \wedge p$;
3) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \vee b)$;
4) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (c \Rightarrow a)$;
5) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
6) $\neg[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \neg a)$;
7) $(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \vee q)$;
8) $\neg[p \wedge q \wedge (p \Rightarrow \neg q)]$.

21. Teisendada järgmised liitlaused nii, et märk " ⌉ " esineks ainult komponentlausete ees:

1) $\neg(\neg p \vee q)$;
2) $\neg[(p \wedge q) \vee \neg r]$;
3) $\neg[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow \neg(p \wedge r)$;
4) $\neg[p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge r]$;
5) $\neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee r]$.

22. Teisendada järgmised liitlaused nii, et nad sisaldaksid ainult märke " ∧ " ja " ⌉ ":

1) $\neg p \wedge q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
2) $p \vee q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$;
3) $(\neg a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee b)$;
4) $\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow \neg q)$;
5) $(p \Leftrightarrow q) \vee p$.

23. Teisendada järgmised liitlaused nii, et nad sisaldaksid ainult märke " ∨ " ja " ⌉ ":

1) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$;
2) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg q \wedge p)$;
3) $(p \Rightarrow q) \wedge p$;
4) $(p \Leftrightarrow q) \wedge p$;
5) $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \neg c) \Rightarrow (c \Rightarrow \neg a)$.

24. Tõestada järgmised samaväärsused:

1) $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$;
2) $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$;

3) $a \vee b \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$;
4) $a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$;
5) $a \vee (a \wedge c) \equiv a$;
6) $a \wedge (a \vee b) \equiv a$;
7) $\neg(a \Rightarrow b) \equiv a \wedge \neg b$;
8) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow b \equiv a \vee b$;
9) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \equiv a$;
10) $a \Leftrightarrow b \equiv \neg a \Leftrightarrow \neg b$;
11) $(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \equiv a$;
12) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \equiv a \Rightarrow b$;
13) $a \vee (\neg a \wedge b) \equiv a \vee b$;
14) $a \wedge (\neg a \vee b) \equiv a \wedge b$;
15) $\neg a \vee (a \wedge b) \equiv \neg a \wedge b$.

8. Normaalkujud

Komponentlausete või nende eituste disjunktsiooni nimetatakse e l e m e n t a a r d i s j u n k t s i o o n i k s .

Komponentlausete või nende eituste konjunktsiooni nimetatakse e l e m e n t a a r k o n j u n k t s i o o n i k s .

Liitlause d i s j u n k t i i v s e k s (k o n j u n k t i i v s e k s) n o r m a a l k u j u k s nimetatakse temaga samaväärset liitlauset, mis kujutab endast elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni (elementaardisjunktsioonide konjunktsiooni).

Iga lause jaoks eksisteerib nii disjunktiivne kui ka konjunktiivne normaalkuju. Normaalkujud pole üheselt määratud.

Näited

1. Teisendada järgmised liitlaused disjunktiivsele normaalkujule:
   a) $p \vee [(q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)]$;
   b) $\neg(\neg a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee b)$.

Lause teisendamisel normaalkujule kasutame põhisamasusi:

a) $p \vee [(q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)] \equiv p \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee$
$\vee (r \wedge p) \vee (r \wedge \neg q)$.

See ongi antud lause disjunktiivne normaalkuju, kus esimesel kohal asuv elementaarkonjunktsioon koosneb vaid ühest komponentlausest p.

b) $\neg(\neg a \vee b) \Longleftrightarrow (a \vee b) \equiv [\neg(\neg a \vee b) \wedge (a \vee b)] \vee$
$\vee [(\neg a \vee b) \wedge \neg(a \vee b)] \equiv [(a \wedge \neg b) \wedge (a \vee b)] \vee$
$\vee [(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) \equiv (a \wedge \neg b \wedge a) \vee$
$\vee (a \wedge \neg b \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg b) \equiv$
$\equiv \ldots$

Tulemus ongi antud lause disjunktiivne normaalkuju. Tavaliselt aga lihtsustame seda tulemust veel vaid põhisamasuste 10°, 11°, 14° - 19° põhjal. Antud näite korral:

$\ldots \equiv (a \wedge \neg b) \vee v \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee v \equiv$
$\equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

2. Teisendada järgmised liitlaused konjunktiivsele normaalkujule:

a) $(a \Longrightarrow b) \wedge \neg(a \vee b)$;
b) $\neg(\neg a \vee b) \Longleftrightarrow (a \vee b)$.

Kasutame põhisamasusi:

a) $(a \Longrightarrow b) \wedge \neg(a \vee b) \equiv (\neg a \vee b) \wedge (\neg a) \wedge (\neg b)$.

Saadud tulemus ongi antud liitlause konjunktiivne normaalkuju, milles kaks viimast elementaarkonjunktsiooni koosnevad kumbki vaid ühest komponentlausest.

b) $\neg(\neg a \vee b) \Longleftrightarrow (a \vee b) \equiv$
$\equiv [\neg(\neg a \vee b) \wedge (a \vee b)] \vee [(\neg a \vee b) \wedge \neg(a \vee b)] \equiv$
$\equiv [a \wedge \neg b \wedge (a \vee b)] \vee [(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b)] \equiv$
$\equiv (a \wedge \neg b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee$
$\vee (b \wedge \neg a \wedge \neg b) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \equiv$
$\equiv (a \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg b) \quad \ldots$

Tulemusena saimegi antud lause konjunktiivse normaalkuju.
Lihtsustame vaid veel:

$\ldots \equiv t \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge \neg b \equiv$
$\equiv (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge \neg b.$

Selleks, et liitlause oleks samaselt tõene, on tarvilik ja piisav, et tema konjunktiivse normaalkuju iga elementaardisjunktsioon sisaldaks vähemalt ühte komponentlauset ja selle eitust.

Selleks, et liitlause oleks samaselt väär, on tarvilik ja piisav, et tema disjunktsiivse normaalkuju iga elementaarkonjunktsioon sisaldaks vähemalt ühte komponentlauset ja selle eitust.

Näited

1. Selgitada, kas järgmised laused on samaselt tõesed:
a) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$;
b) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$.

Teisendame liitlause konjunktiivsele normaalkujule:
a) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p \equiv \neg(p \wedge q) \vee (q \wedge p) \equiv$
$\equiv \neg p \vee \neg q \vee (q \wedge p) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee p) \equiv t$;

b) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \equiv$
$\equiv (a \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg a \vee \neg c) \wedge (a \vee c \vee \neg b) \wedge (a \vee c \vee \neg c) \wedge$
$\wedge (b \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg c) \wedge (b \vee c \vee \neg b) \wedge$
$\wedge (b \vee c \vee \neg c) \not\equiv t.$

Et saadud konjunktiivses normaalkujus 2 elementaardisjunktsiooni ($a \vee c \vee \neg b$ ja $b \vee \neg a \vee \neg c$) ei sisalda komponentlauset ja selle eitust, siis ei ole antud liitlause samaselt tõene.

2. Selgitada, kas järgmised liitlaused on samaselt väärad:
a) $\neg[(a \vee b) \Rightarrow (b \vee a)]$;
b) $(a \Leftrightarrow b) \wedge [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)]$.

Selleks teisendame liitlause disjunktiivsele normaalkujule:
a) $\neg[(a \vee b) \Rightarrow (b \vee a)] \equiv \neg[\neg(a \vee b) \vee (b \vee a)] \equiv$
$\equiv (a \vee b) \wedge \neg b \wedge \neg a \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg a) \vee$
$\vee (b \wedge \neg b \wedge \neg a) \equiv v$;

b) $(a \Leftrightarrow b) \wedge [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)] \equiv$

$$\equiv [(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)] \wedge [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)] \equiv$$
$$\equiv (a \wedge b \wedge a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge \neg a \wedge b) \vee$$
$$\vee (\neg a \wedge \neg b \wedge a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg a \wedge b) \equiv v.$$

<u>Ülesanded</u>

25. Teisendada järgmised laused disjunktiivsele normaalkujule:
1) $[a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow b$,
2) $p \wedge \neg(\neg q \wedge r) \wedge (k \vee \ell)$,
3) $a \wedge (a \Rightarrow b)$,
4) $(a \vee b) \wedge [(a \wedge b) \vee c] \vee \neg c$,
5) $\neg(a \wedge b) \vee (a \Rightarrow b)$,
6) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$,
7) $\neg(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \vee q)$,
8) $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow \neg p \vee r$,
9) $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$,
10) $\neg(\neg a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee b)$.

26. Teisendada järgmised liitlaused konjunktiivsele normaalkujule:
1) $[a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow b$,
2) $(a \vee b) \Rightarrow \neg a \wedge b$,
3) $p \vee (q \wedge r)$,
4) $a \vee (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$,
5) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \vee q)$,
6) $(a \Rightarrow b) \vee a \vee \neg b$,
7) $\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q$,
8) $a \vee b \vee (\neg c \wedge a \wedge b)$,
9) $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$,
10) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

27. Tõestada, et järgmised liitlaused on samaselt väärad:
1) $(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b$,
2) $a \wedge \neg(b \Rightarrow a)$,
3) $(a \Leftrightarrow b) \wedge [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)]$,
4) $b \wedge a \wedge \neg(a \vee b)$,

5) $\neg[\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$,
6) $q \wedge p \wedge \neg(p \vee q)$,
7) $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$,
8) $\neg[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)]$.

28. Tõestada, et järgmised laused on samaselt tõesed:
1) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$,
2) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$,
3) $\neg(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow [\neg a \vee (a \wedge b)]$,
4) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$,
5) $[(a \Rightarrow b) \wedge \neg b] \Rightarrow \neg a$,
6) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$,
7) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
8) $\neg(a \Leftrightarrow b) \vee [\neg(a \wedge \neg b) \wedge (a \vee \neg b)]$.

29. Neli tüdrukut Mare, Niina, Olga ja Piia käisid võistlustel ja said ühel alal esimesed neli kohta. Enne võistlusi ennustati, et
1) Olga tuleb teiseks, Piia kolmandaks;
2) Olga tuleb esimeseks, Niina teiseks;
3) Mare tuleb teiseks, Piia neljandaks.
Osutus, et igas ennustuses üks osa täitus, teine mitte. Millisele kohale keegi tuli?

30. Arno, Sergei, Peeter ja Tiit pidid koristama 7., 8., 9. ja 10. klassiruumi, igaüks ühe. Üldkorrapidaja leidis, et 10. klass oli lohakalt koristatud. Küsimusele, kes millise klassi koristas, vastasid poisid järgmist:
Arno: "Mina koristasin 7. klassi, Tiit 8. klassi",
Peeter: "Mina koristasin 9. klassi, Arno 8. klassi",
Sergei: "Mina koristasin 8. klassi, Peeter 10. klassi".
Tiit oli juba ära läinud.

Edasisel küsitlemisel selgus, et iga poisi vastuses oli üks osa tõene, teine mitte.

Kes millise klassi koristas?

31. Perekond koosseisus isa A, ema B ja kolm tütart C, D ja E ostis televiisori. Otsustati, et esimesel õhtul

vaadatakse televiisorit järgmise kokkuleppe alusel:

1) kui saadet vaatab isa A, siis vaatab ka ema B;
2) saadet vaatavad tütred D ja E mõlemad või üks neist;
3) kahest perekonnaliikmest - ema B ja tütar C - vaatavad saadet üks ja ainult üks;
4) saadet vaatavad kas tütred C ja D mõlemad või ei kumbki neist;
5) kui saadet vaatab tütar E, siis vaatavad seda ka isa A ja tütar D.

Kes perekonnaliikmetest vaatasid televiisorit sellel õhtul?

32. Õppejõud esitas üliõpilasele 5 küsimust, millele tuli kirjalikult vastata kas "ja" või "ei". Üliõpilane teadis vastust vaid teisele küsimusele. Kuid ta teadis veel, et

1) vastused esimesele ja viiendale küsimusele on vastupidised;
2) küsimusi, mis nõuavad vastust "ja", on rohkem kui küsimusi, mis nõuavad vastust "ei";
3) õppejõud ei anna kunagi järgemööda kolme küsimust, millele tuleb vastata "ja".

Üliõpilane vastas kõikidele küsimustele õigesti.

Milline oli teise küsimuse vastus ("ja" või "ei"), mida üliõpilane teadis?

33. Vahetunnil lõhuti klassi aken. Süüdlane oli üks neljast poisist, kas Toomas, Kalev, Laur või Mart. Õpilaste küsitlemisel vastasid nad järgmist:

Toomas: 1)"Akent ei lõhkunud mina", 2) "Marti ma ei tundnudki enne kooli tulekut", 3) "Akna lõi katki Kalev";

Laur: 1) "Ma pole süüdi", 2) "Ma isegi ei käinud akna juures", 3) "Mart teab, kes akna lõhkus";

Kalev: 1) "Ma pole süüdi", 2) "Akna lõhkus Mart",

3) "Toomas valetab, kui ütleb, et ma lõhkusin akna";
Mart: 1) "Ma pole süüdi", 2) "Akna lõhkus Laur",
3) "Toomas võib vastutada minu eest, sest tunneb mind lapsepõlvest saadik".

Edasisel uurimisel selgus, et iga poisi kolmest vastusest on kaks tõesed, üks mitte. Kes oli süüdi?

34. Kuus õpilast Kask, Tamm, Ehin, Hang, Ilves ja Luts võtsid osa olümpiaadist. Kaks neist lahendasid ära kõik ülesanded. Küsimusele, kes need olid, vastati, et kõik ülesanded lahendasid ära

1) Kask ja Ehin,
2) Tamm ja Luts,
3) Luts ja Kask,
4) Tamm ja Ilves,
5) Hang ja Kask.

Neljas vastuses on üks nimi õige, teine mitte, ühes vastuses pole aga kumbki nimi õige. Kes lahendas ära kõik ülesanded?

35. Mingi zooloogia-aia lindude kohta kehtivad järgmised väited:

1) laululinnud on kas suured või teatava omadusega Y;
2) linnud, kellel pole omadust Y, on kas mittesuured või neil pole omadust X;
3) laululinnud ühes suurte lindudega hõlmavad kõik linnud omadusega X;
4) iga mittesuur lind on kas laululind või lind omadusega X;
5) lindude hulgas, kes on omadusega X, pole neid, kellel on omadus Y ja kes on ühtlasi suured ning pole samaaegselt laululinnud.

Selgitada, kas linnud omadusega X on laululinnud või mitte või kas nad on suured või mittesuured linnud. Samasugused küsimused selgitada ka omaduse Y puhul.

36. Mingil ballil viibinud neidude kohta kehtivad järgmised väited:

1) iga neid oli kas hästi kasvatatud, lõbus, noor või ilus;
2) kõik mittetantsivad neiud olid mitteilusad ja iga tantsiv neid oli kas hästi kasvatatud, lõbus või noor;
3) kui eraldada mittenoored neiud, võis ülejäänud neidude kohta öelda, et nad on kas ilusad, lõbusad või hästi kasvatatud;
4) kui eraldada kõik mittenoored ja seejärel kõik mitteilusad neiud, siis jäid järele hästi kasvatatud või lõbusad neiud;
5) kui eraldada kõik mittelõbusad neiud, jäid järele kas hästi kasvatatud või noored või ilusad neiud;
6) ballil ei olnud neide, kes olles noored ja lõbusad, polnud samaaegselt ilusad ja hästi kasvatatud;
7) noorte neidude hulgas polnud selliseid, kes olid ilusad ja lõbusad, kuid polnud hästi kasvatatud;
8) iga hästi kasvatatud neid oli kas noor, ilus või lõbus;
9) iga hästi kasvatatud ja ühtlasi ilus neid oli kas lõbus või noor;
10) iga mittelõbus neid polnud kas noor, ilus või hästi kasvatatud;
11) kõik hästi kasvatatud ja lõbusad neiud, kes polnud noored, olid ilusad;
12) mittenoored neiud olid kas mittelõbusad, mitteilusad või mitte hästi kasvatatud;
13) mitteilusate neiude hulgas polnud neide, kes olid samaaegselt hästi kasvatatud, noored ja lõbusad;
14) kui lahkusid kõik mitte hästi kasvatatud neiud, kõik mittenoored neiud, kõik mittelõbusad neiud ja kõik mitteilusad neiud, siis ühtegi neidu enam ballile ei jäänud.

Selgitada ballil viibinud neidude rühmade vahekorrad.

9. Täielikud normaalkujud

Liitlause **täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks** nimetatakse selle liitlause disjunktiivset normaalkuju, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1° selles ei esine kahte ühesugust elementaarkonjunktsiooni;

2° iga elementaarkonjunktsioon sisaldab iga komponentlauset täpselt üks kord.

Viimane tingimus tähendab, et:

1) ükski elementaarkonjunktsioon ei sisalda kahte ühesugust komponentlauset;

2) ükski elementaarkonjunktsioon ei sisalda komponentlauset ja selle eitust;

3) igas elementaarkonjunktsioonis esineb iga komponentlause (või selle eitus).

Liitlause **täielikuks konjunktiivseks normaalkujuks** nimetatakse selle liitlause konjunktiivset normaalkuju, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1° selles ei esine kahte ühesugust elementaardisjunktsiooni;

2° iga elementaardisjunktsioon sisaldab komponentlauset täpselt üks kord.

Samaselt vääral liitlausel ei ole täielikku disjunktiivset normaalkuju, samaselt tõesel liitlausel ei ole aga täielikku konjunktiivset normaalkuju.

Näited

1. Teisendada järgmised liitlaused täielikule disjunktiivsele normaakujule:

   a) $a \vee [b \wedge (a \vee \neg b)$,

   b) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$,

c) $\neg(a \Leftrightarrow b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$.

a) $a \vee [b \wedge (a \vee \neg b)] \equiv a \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg b) \equiv \ldots$

Et siin esimene elementaarkonjunktsioon koosneb vaid ühest komponentlausest a ning ei sisalda komponentlauset b, siis, arvestades, et $a \wedge t \equiv a$ ja ka $a \wedge (b \vee \neg b) \equiv a$, asendame a temaga samaväärse lausega $a \wedge (b \vee \neg b)$:

$\ldots \equiv a \wedge (b \vee \neg b) \vee (b \wedge a) \vee v \equiv$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$.

b) $(a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b) \equiv \neg a \vee b \vee (a \wedge \neg b) \equiv$

$\equiv [\neg a \wedge (b \vee \neg b)] \vee [b \wedge (a \vee \neg a)] \vee (a \wedge \neg b) \equiv$

$\equiv (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b) \equiv$

$\equiv (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$.

c) $\neg(a \Leftrightarrow b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \equiv$

$\equiv \neg[(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)] \wedge [(\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee$

$\vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg b)] \equiv$

$\equiv [(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)] \wedge [(\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a)] \equiv$

$\equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg b \wedge b \wedge a) \vee$

$\vee (b \wedge \neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a \wedge b \wedge a) \equiv v \vee v \equiv v$.

Märkus: Vaadeldaval liitlausel puudub täielik disjunktiivne normaalkuju, sest liitlause on samaselt väär.

2. Teisendada järgmised liitlaused täielikule konjunktiivsele normaalkujule:

a) $(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \vee b)$,

b) $(a \vee b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$,

c) $\neg(a \wedge b) \vee (a \Rightarrow b)$.

a) $(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \vee b) \equiv (\neg a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b \equiv$

$\equiv (\neg a \vee b) \wedge [\neg a \vee (b \wedge \neg b)] \wedge [\neg b \vee (a \wedge \neg a)] \equiv$

$\equiv (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg a) \equiv$

$\equiv (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg b)$.

b) $(a \vee b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \equiv (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c) \equiv$

$\equiv (\neg a \vee \neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee c) \equiv$

$\equiv [\neg a \vee c \vee (b \wedge \neg b)] \wedge (\neg b \vee \neg a \vee c) \equiv$

$\equiv (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee c) \equiv$
$\equiv (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$.

c) $\neg(a \wedge b) \vee (a \Rightarrow b) \equiv \neg a \vee \neg b \vee \neg a \vee b \equiv t$.

Et vaadeldav liitlause on samaselt tõene, siis puudub tal täielik konjunktiivne normaalkuju.

Ülesanded

37. Teisendada järgmised liitlaused täielikule disjunktiivsele normaalkujule:
1) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$,
2) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow \neg c)$,
3) $(a \Leftrightarrow b) \vee a$,
4) $(a \vee b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$,
5) $\neg(a \Leftrightarrow b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$,
6) $\neg(a \wedge \neg b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow c)$,
7) $(a \Leftrightarrow b) \wedge [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)]$.

38. Teisendada järgmised liitlaused täielikule konjunktiivsele normaalkujule:
1) $(a \Leftrightarrow b) \vee a$,
2) $(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b$,
3) $(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (a \Rightarrow c)$,
4) $(a \vee b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$,
5) $\neg(\neg a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee b)$,
6) $p \vee [(q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)]$,
7) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$.

39. Teisendada järgmised liitlaused täielikule disjunktiivsele ja konjunktiivsele normaalkujule:
1) $a \wedge b$,
2) $a \vee b$,
3) $a \Rightarrow b$,
4) $a \Leftrightarrow b$.

10. Liitlausete moodustamine etteantud tõeväärtuste järgi

Liitlausete moodustamiseks nende etteantud tõeväärtuste järgi kasutame kas täielikku disjunktiivset või konjunktiivset normaalkuju: täieliku disjunktiivse normaalkuju koostamisel arvestame kõiki võimalusi, millal liitlause on tõene; täieliku konjunktiivse normaalkuju koostamisel arvestame kõiki võimalusi, millal liitlause on väär.

Näide

Koostada liitlause $\mathfrak{A}(a, b, c)$ tõeväärtustabeli põhjal selle liitlause nii täielik disjunktiivne kui ka konjunktiivne normaalkuju.

a	b	c	$\mathfrak{A}(a, b, c)$
t	t	t	v
t	t	v	t
t	v	t	t
t	v	v	v
v	t	t	v
v	t	v	v
v	v	t	t
v	v	v	t

Liitlause $\mathfrak{A}(a, b, c)$ täielik disjunktiivne normaalkuju on

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

ning täielik konjunktiivne normaalkuju

$$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c).$$

Ülesanded

40. Koostada liitlaused nende etteantud tõeväärtuste järgi:

p	q	r	$\mathfrak{A}(p,q,r)$	$\mathfrak{B}(p,q,r)$	$\mathfrak{C}(p,q,r)$	$\mathfrak{D}(p,q,r)$
t	t	t	v	v	v	t
t	t	v	t	v	v	v
t	v	t	t	v	v	t
t	v	v	v	v	v	v
v	t	t	v	t	t	t
v	t	v	v	t	v	t
v	v	t	t	v	v	v
v	v	v	v	t	v	v

41. Matkaja asub ühes linnadest A või B, kuid millises, ei ole teada. Selle teadasaamiseks võib esitada ainult ühe küsimuse, millele saadakse vastuseks kas "ja" või "ei", kusjuures see vastus võib osutuda tõeseks või vääraks. Milline peab olema küsimus, et selle vastuse põhjal otsustada, kus asub matkaja?

42. Loogik sattus vangi. Ta heideti keldrisse ning mõisteti surma. Vaenlaste pealik pakkus aga vangile pääsemisvõimalust. Ta ütles: "Sellest keldrist on kaks väljapääsu. Üks viib sind surma, teine vabadusse. Valida võid neist ükskõik kumma. Valikut teha aitavad sul minu kaks sõjameest. Nad jäävad siia, et vastata sinu ühele küsimusele. Kuid hoiatan sind, et üks sõjameestest räägib alati tõtt, teine valetab alati." Pealik lahkus, arvates, et oli vangile andnud vaid vähest lootust juhuslikuks pääsemiseks. Mõelnud hetke, esitas loogik ühe küsimuse ning pääses vabadusse. Milline oli see küsimus?

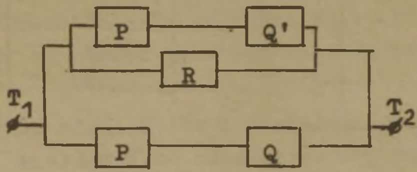
11. Liitlausete rakendusi kontaktskeemide analüüsimisel ja sünteesimisel

Kontaktskeemide tööd on võimalik kirjeldada lausearvutuse mõistete abil.

Tähistame lause "Kontakt A laseb voolu läbi" tähega a, selle lause eitust aga vastavalt $\neg a$. Kontaktid tähistega näiteks B ja B' on alati vastupidises asendis (s.t. kui üks laseb voolu läbi, siis teine mitte).

Näited

1. Koostada liitlause, mis vastab antud skeemile, ning uurida selle skeemi tööd.



Et kõige ülemises harus on P ja Q' järjestikku, siis kirjeldab selle haru tööd liitlause $p \wedge \neg q$. Kogu vooluringi tööd aga kirjeldab liitlause

$$[(p \wedge \neg q) \vee r] \vee (p \wedge q) .$$

Et selgitada, kas klemmide T_1 ja T_2 vahel tekib üldse vool ning kontaktide milliste asendite korral tekib vool, selleks kasutame moodustatud liitlause tõeväärtustabelit.

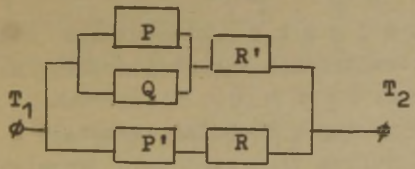
p	q	r	[(p	$\wedge$	$\neg$	q)	$\vee$	r]	$\vee$	(p	$\wedge$	q)
t	t	t	t	v	v	t	t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	v	v	t	v	v	t	t	t	t
t	v	t	t	t	t	v	t	t	t	t	v	v
t	v	v	t	t	t	v	t	v	t	t	v	v
v	t	t	v	v	v	t	t	t	t	v	v	t
v	t	v	v	v	v	t	v	v	v	v	v	t
v	v	t	v	v	t	v	t	t	t	v	v	v
v	v	v	v	v	t	v	v	v	v	v	v	v

Koostatud tabelist ilmneb, et klemmide T_1 ja T_2 vahel ei teki voolu vaid kontaktide asendi kahe kombinatsiooni korral: 1) kui P ja R ei lase voolu läbi, Q aga laseb voolu läbi; 2) kui ükski kontaktidest P, Q ja R ei lase voolu läbi.

2. Joonestada skeem, mis vastab liitlausele

$[(p \vee q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$.

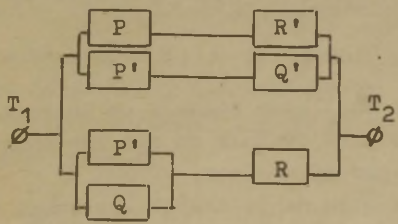
Arvestades seda, et lausete disjunktsioon kirjeldab paralleelset lülitust, konjunktsioon aga järjestikust lülitust, siis vastavalt eespool tehtud kokkuleppele saame järgmise skeemi:



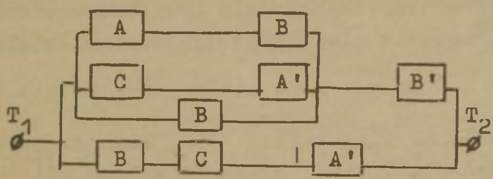
Ülesanded

43. Koostada liitlause, mis vastab antud skeemile, ning uurida skeemi tööd.

1)



2)



44. Konstrueerida skeemid, mis vastavad järgmistele liitlausetele:

1) $(r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge p) \vee (r \wedge p)$,

2) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$,
3) $[\neg r \wedge (q \vee p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,
4) $[(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \wedge r)$.

12. Seos liitlausete ja nende tõehulkade vahel

Liitlause t õ e h u l g a k s nimetatakse hulka, mille elementideks on tõeväärtuste kombinatsioonid, mille korral liitlause on tõene.

Tähistades lausete p ning q tõehulki vastavalt P ja Q, saame liitlausete tõehulgad üles kirjutada järgmiselt:

liitlause	tõehulk
$p \wedge q$	$P \cap Q$
$p \vee q$	$P \cup Q$
$p \Rightarrow q$	$\bar{P} \cup Q$
$p \Leftrightarrow q$	$(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q})$
$\neg p$	$\bar{P}$
$p \wedge \neg q$	$P \setminus Q$

Samaselt tõese liitlause tõehulk on universaalne hulk, samaselt väära liitlause tõehulk on aga tühihulk. Samaväärsete lausete tõehulgad on võrdsed.

Seos liitlausete ja nende tõehulkade vahel võimaldab lahendada

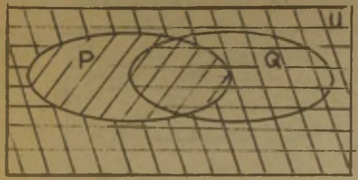
1) lausearvutuse ülesandeid hulgateooria abil;
2) hulgateooria ülesandeid lausearvutuse abil.

Näited

1. Otsustada Venni diagrammide abil, kas järgmised liitlaused on samaselt tõesed, samaselt väärad või kehtestatavad:

   a) $p \vee (\neg p \vee q)$,
   b) $(q \wedge p) \wedge \neg (p \vee q)$,
   c) $(p \Rightarrow \neg q) \wedge p$.

a) Liitlause $p \vee (\neg p \vee q)$ tõehulk on $P \cup (\bar{P} \cup Q)$. Kujutame selle tõehulga Venni diagrammil:



P - ///

$\bar{P}$ - \\\

$\bar{P} \cup Q$ - ≡

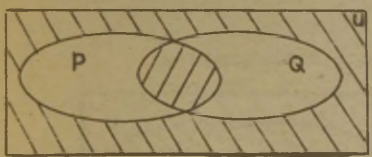
$P \cup (\bar{P} \cup Q) = U.$

Järelikult $p \vee (\neg p \vee q) \equiv t.$

b) Liitlause $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$ tõehulk on

$(Q \cap P) \cap (\overline{P \cup Q})$.

Kujutame selle Venni diagrammil:



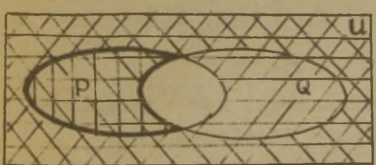
$Q \cap P$ - ///

$\overline{P \cup Q}$ - \\\

$(Q \cap P) \cap (\overline{P \cup Q}) = \emptyset$.

Järelikult $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q) \equiv v.$

c) Liitlause $(p \Rightarrow \neg q) \wedge p$ tõehulk on $(\bar{P} \cup \bar{Q}) \cap P$. Kujutame selle hulga Venni diagrammil:



$\bar{P}$ - ///

$\bar{Q}$ - \\\

$\bar{P} \cup \bar{Q}$ - ≡

$(\bar{P} \cup \bar{Q}) \cap P$ - |||.

Et $(\bar{P} \cup \bar{Q}) \cap P \neq U$ ja

$(\bar{P} \cup \bar{Q}) \cap P \neq \emptyset$, siis

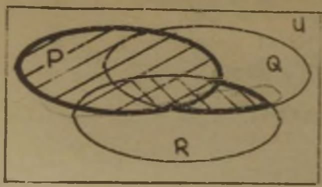
on liitlause $(p \Rightarrow \neg q) \wedge p$ kehtestatav, kuid mitte samaselt tõene lause.

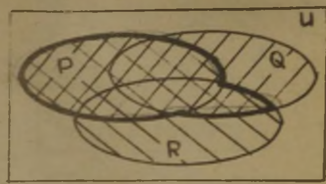
2. Kontrollida Venni diagrammide abil järgmiste samaväärsuste kehtivust:

a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \neg p \vee q$.

a) Liitlause $p \vee (q \wedge r)$ tõehulk on $A = P \cup (Q \cap R)$ ning liitlause $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ tõehulk on $B = (P \cup Q) \cap \cap (P \cup R)$. Kujutame hulgad A ja B Venni diagrammidel:



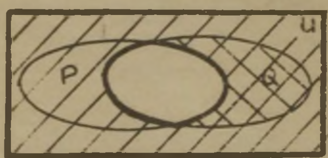


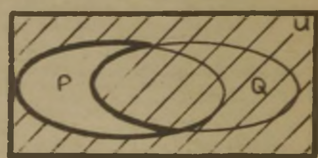
Et $A = B$, siis

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

b) Liitlause $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$ tõehulk on $A = \overline{P \cap Q} \cup (\overline{P} \cap Q)$ ning liitlause $\neg p \vee q$ tõehulk on $B = \overline{P} \cup Q$.

Kujutame hulgad A ja B Venni diagrammidel:





Et $A \neq B$, s.t. $\overline{P \cap Q} \cup (\overline{P} \cap Q) \neq \overline{P} \cup Q$, siis

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge q) \not\equiv \neg p \vee q.$$

3. Kasutades Venni diagramme, otsustada, kas järgmiste liitlausete paaride vahel kehtib järelduvusseos:
   a) $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$ ja $p \Rightarrow (q \vee r)$,
   b) $(p \vee r) \Rightarrow r$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

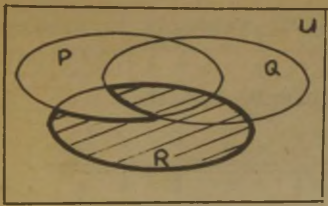
a) Liitlause $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$ tõehulk on

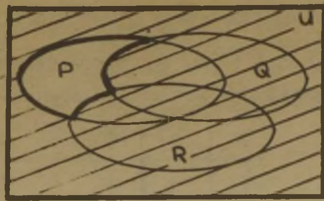
$$A = (P \cup R) \cap (\overline{P} \cup Q)$$

ning liitlause $p \Rightarrow (q \vee r)$ tõehulk on

$$B = \overline{P} \cup Q \cup R.$$

Kujutame hulgad A ja B Venni diagrammidel:



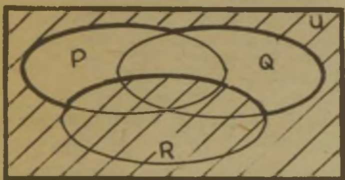


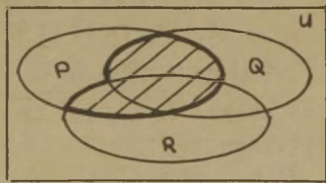
Venni diagrammidelt ilmneb, et $A \subset B$, siis järelikult

$$(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q) \vdash p \Rightarrow (q \vee r).$$

6) Liitlause $(p \vee r) \Rightarrow r$ tõehulk on $A = \overline{P \cup R} \cup R$ ning liitlause $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tõehulk on $B = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$.

Kujutame hulgad A ja B Venni diagrammidel:





Venni diagrammidelt selgub, et $A \not\subset B$ ning ka $B \not\subset A$. Järelikult ei kehti liitlausete

$$(p \vee r) \Rightarrow r \quad \text{ja} \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

vahel järelduvusseost, s.t.

$$(p \vee r) \Rightarrow r \not\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

ja ka

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \not\vdash (p \vee r) \Rightarrow r.$$

4. Tõeväärtustabelite abil otsustada, milline järgmistest hulkadest on universaalne hulk, tühihulk või universaalse hulga mittetühi osahulk:
   a) $(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q)$,
   b) $\overline{P \cup R \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R$,[*]
   c) $\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})}$.

---

[*] Hulgateooria ülesanded, mida käesolevas paragrahvis lahendatakse lausearvutuse abil, on lahendatavad ka otseselt hulgateooria mõistete ja seoste põhjal.

a) Hulka $(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q)$ võib vaadelda liitlause $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ tõehulgana.

Koostame selle liitlause tõeväärtustabeli:

p	q	(p	$\vee$	q)	$\wedge$	($\neg$	p	$\vee$	q)
t	t	t	t	t	$\boxed{t}$	v	t	t	t
t	v	t	t	v	$\boxed{v}$	v	t	v	v
v	t	v	t	t	$\boxed{t}$	t	v	t	t
v	v	v	v	v	$\boxed{v}$	t	v	t	v

Et vaadeldav liitlause ei ole samaselt väär, siis vastav hulk ei ole tühihulk, s.t.

$$(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \neq \emptyset .$$

Et ka $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \not\equiv t$, siis ka

$$(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \neq U.$$

Vaid $(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \subset U.$

b) Hulka $\overline{(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R$ võib vaadelda liitlause

$$\neg[(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg p \vee q \vee r$$

tõehulgana.

p	q	r	$\neg$	[(p	$\vee$	r)	$\wedge$	($\neg$p	$\vee$	q)]	$\vee$	$\neg$p	$\vee$	q	$\vee$	r
t	t	t	v	t	t	t	t	v	t	t	v	v	t	t	$\boxed{t}$	t
t	t	v	v	t	t	v	t	v	t	t	v	v	t	t	$\boxed{t}$	v
t	v	t	t	t	t	t	v	v	v	v	t	v	t	v	$\boxed{t}$	t
t	v	v	t	t	t	v	v	v	v	v	t	v	t	v	$\boxed{t}$	v
v	t	t	v	v	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	$\boxed{t}$	t
v	t	v	t	v	v	v	v	t	t	t	t	t	t	t	$\boxed{t}$	v
v	v	t	v	v	t	t	t	t	t	v	t	t	t	v	$\boxed{t}$	t
v	v	v	t	v	v	v	v	t	t	v	t	t	t	v	$\boxed{t}$	v

Et $\neg[(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg p \vee q \vee r \equiv t$, siis

$$\overline{(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R = U.$$

c) Hulgale $\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})}$ vastab liitlause

$$\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q).$$

p	q	¬	(p	∨	q)	∧	¬	(p	∨	¬q)
t	t	v	t	t	t	v	v	t	t	v
t	v	v	t	t	v	v	v	t	t	t
v	t	v	v	t	t	v	t	v	v	v
v	v	t	v	v	v	v	v	v	t	t

Tõeväärtustabelist nähtub, et

$$\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q) \equiv v.$$

Järelikult

$$\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})} = \emptyset .$$

5. Kasutades lausearvutusteisendusi otsustada, milline järgmistest hulkadest on universaalne hulk, tühihulk või universaalse hulga mittetühi osahulk:
   a) $(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q)$,
   b) $\overline{(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R$,
   c) $\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})}$.

a) Et antud hulgale $(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q)$ vastav liitlause $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ on konjunktiivsel normaalkujul, kuid elementaardisjunktsioonid ei sisalda lauset ja selle eitust, siis järelikult vaadeldav liitlause ei ole samaselt tõene. Seega

$$(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \neq U.$$

Teisendame vaadeldava liitlause disjunktiivsele normaalkujule, et otsustada, kas liitlause on samaselt väär:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge q).$$

Et saadud disjunktiivse normaalkuju iga elementaarkonjunktsioon ei sisalda lauset ja selle eitust, siis pole liitlause samaselt väär:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \not\equiv v.$$

Järelikult

$$(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \neq \emptyset .$$

Seega

$$(P \cup Q) \cap (\bar{P} \cup Q) \subset U.$$

b) Teisendame hulgale

$$\overline{(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R$$

vastava liitlause konjunktiivsele normaakujule:

$$\begin{aligned}
&\neg[(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)] \vee \neg p \vee q \vee r \equiv \\
&\equiv \neg(p \vee r) \vee \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p \vee q \vee r \equiv \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \vee r \equiv \\
&\equiv (\neg p \vee p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge \\
&\wedge (\neg r \vee p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee q \vee r) \equiv t.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\overline{(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)} \cup \bar{P} \cup Q \cup R = U.$$

c) Teisendame hulgale

$$\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})}$$

vastava liitlause disjunktiivsele normaalkujule:

$$\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge q \equiv v.$$

Järelikult

$$\overline{(P \cup Q)} \cap \overline{(P \cup \bar{Q})} = \emptyset .$$

6. Tõeväärtustabelite abil otsustada, milline hulk on teise osahulk:

   a) $\bar{P} \cup Q \cup R$ ja $(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)$,

   b) $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$ ja $\overline{P \cup R} \cup R$.

a) Koostame hulkadele $\bar{P} \cup Q \cup R$ ja $(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q)$ vastavate liitlausete

$$\neg p \vee q \vee r \quad \text{ja} \quad (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$$

tõeväärtustabelid:

p	q	r	$(\neg p$	$\vee$	$q)$	$\vee$	r	$(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(\neg p$	$\vee$	$q)$
t	t	t	v	t	t	t	t	t	t	t	t	v	t	t
t	t	v	v	t	t	t	v	t	t	v	t	v	t	t
t	v	t	v	v	v	t	t	t	t	t	v	v	v	v
t	v	v	v	v	v	v	v	t	t	v	v	v	v	v
v	t	t	t	t	t	t	t	v	t	t	t	t	t	t
v	t	v	t	t	t	t	v	v	v	v	v	t	t	t
v	v	t	t	t	v	t	t	v	t	t	t	t	t	v
v	v	v	t	t	v	t	v	v	v	v	v	t	t	v

Tabelitest ilmneb, et

$$(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg p \vee q \vee r) \equiv t,$$

järelikult

$$(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \vdash (\neg p \vee q \vee r).$$

Seega

$$(P \cup R) \cap (\bar{P} \cup Q) \subset \bar{P} \cup Q \cup R.$$

b) Koostame hulkadele $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$ ja $\overline{P \cup R} \cup R$ vastavate liitlausete

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{ning} \quad \neg(p \vee r) \vee r$$

tõeväärtustabelid:

p	q	r	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r)$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$r)$	$\vee$	r
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	v	t	t	t	t	t
t	t	v	t	t	t	t	t	v	v	v	t	t	v	v	v
t	v	t	t	v	v	t	t	t	t	v	t	t	t	t	t
t	v	v	t	v	v	v	t	v	v	v	t	t	v	v	v
v	t	t	v	v	t	v	v	v	t	v	v	t	t	t	t
v	t	v	v	v	t	v	v	v	v	t	v	v	v	t	v
v	v	t	v	v	v	v	v	v	t	v	v	t	t	t	t
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	t	v	v	v	t	v

Tabelitest ilmneb, et

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \nvdash \neg(p \vee r) \vee r$$

ning ka

$$\neg(p \vee r) \vee r \nvdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Järelikult

$$(P \cap Q) \cup (P \cap R) \not\subset \overline{P \cup R} \cup R$$

ja ka

$$\overline{P \cup R} \cup R \not\subset (P \cap Q) \cup (P \cap R).$$

7. Tõeväärtustabelite abil otsustada, millised järgmistest hulkadest on võrdsed:

$$A = \overline{(P \cap Q)} \cup (\bar{P} \cap Q), \quad B = \bar{P} \cup Q,$$
$$C = (Q \setminus P) \cup \bar{Q}.$$

Kirjutame hulkadele A, B ja C vastavad liitlaused

$$\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q),$$
$$\neg p \vee q,$$
$$(q \wedge \neg p) \vee \neg q$$

ning koostame nende tõeväärtustabelid:

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	$\neg p$	$\vee$	q	$(q$	$\wedge$	$\neg p)$	$\vee$	$\neg q$
t	t	v	t	t	t	v	v	v	t	v	t	t	t	v	v	v	v
t	v	t	t	v	v	t	v	v	v	v	v	v	v	v	v	t	t
v	t	t	v	v	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	v
v	v	t	v	v	v	t	t	v	v	t	t	v	v	v	t	t	t

Tabelitest ilmneb, et

$$\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \not\equiv \neg p \vee q,$$
$$\neg p \vee q \not\equiv (q \wedge \neg p) \vee \neg q,$$

kuid

$$\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (q \wedge \neg p) \vee \neg q.$$

Järelikult

$$\overline{(P \cap Q)} \cup (\bar{P} \cap Q) = (Q \setminus P) \cup \bar{Q}.$$

Ülesanded

45. Venni diagrammide abil otsustada, millised järgmistest liitlausetest on samaselt tõesed, millised samaselt väärad ning millised kehtestatavad:

1) $(a \Rightarrow b) \wedge a \wedge \neg b$,
2) $a \wedge \neg(b \Rightarrow a)$,
3) $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$,
4) $\neg[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)]$,
5) $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$,

6) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$,
7) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$,
8) $(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$.

46. Venni diagrammide abil otsustada, kas järgmised liitlaused on samaväärsed:
1) $a \Longrightarrow \neg b$ ja $\neg a \vee \neg b$,
2) $\neg(a \Longrightarrow \neg b)$ ja $\neg a \vee \neg b$,
3) $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg p \vee q$ ja $q \Longrightarrow p$,
4) $\neg(q \wedge \neg p)$ ja $[(p \Rightarrow q) \Longrightarrow \neg p \vee q] \wedge$
$\wedge [(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$,
5) $\neg(a \wedge \neg b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow a)$ ja $\neg(a \Rightarrow b) \vee a \vee b$,
6) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ ja $a \Rightarrow b$,
7) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ ja a,
8) $(\neg a \vee \neg b) \wedge c$ ja $\neg[(a \wedge b) \vee \neg c]$.

47. Venni diagrammide abil otsustada, kas järgmiste liitlausete vahel kehtib järelduvusseos:
1) $p \wedge (q \vee r)$ ja $p \vee (q \wedge r)$,
2) $p \wedge \neg q$ ja $p \wedge (q \vee r)$,
3) $\neg p \wedge \neg q$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
4) $p \wedge \neg q$ ja $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Longleftrightarrow (p \vee \neg q)$,
5) $(a \wedge b) \vee \neg b$ ja $a \vee \neg b$,
6) $\neg a \Rightarrow (a \wedge b)$ ja $a \vee \neg b$,
7) $\neg(a \wedge b) \vee a$ ja $a \Rightarrow \neg b$,
8) $\neg[(a \wedge \neg a) \Rightarrow (a \wedge b)]$ ja $\neg a \vee \neg b$.

48. Tõeväärtustabelite abil otsustada, milline järgmistest hulkadest on tühihulk, milline universaalne hulk ja milline universaalse hulga mittetühi osahulk:
1) $(P \cup Q) \cap (\overline{P \cup Q})$,
2) $\overline{\bar{A} \cup B} \cap (A \cup \bar{B})$,
3) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$,
4) $[(A \setminus B) \cup \bar{A}] \cap \bar{B}$,
5) $\overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup B}$,
6) $A \cap \overline{(\bar{B} \cup A)}$,
7) $\bar{A} \cup (A \cap B)$,
8) $\overline{B \setminus A} \cap \bar{A}$.

49. Lausearvutuse samasusteisenduste abil lahendada ülesanne nr. 48.

50. Tõeväärtustabelite abil otsustada, milline hulk on teise osahulk:

1) $\overline{\overline{A} \cup B}$ ja $(B \setminus A) \cup B$,

2) $A \cap B$ ja $U \setminus \overline{A \cap B}$,

3) $(P \cap Q) \cup (R \setminus P)$ ja $P \cap Q \cap \overline{R}$,

4) $\overline{P \cup Q}$ ja $\overline{P \cup Q \cup R}$,

5) $\overline{P \cap Q \cap R}$ ja $(P \setminus Q) \setminus R$,

6) $Q \cap R \cap \overline{P}$ ja $\overline{R \cup Q}$,

7) $(\overline{R} \cup P) \cap Q$ ja $\overline{P} \cup Q$,

8) $\overline{P} \cup Q \cup R$ ja $(P \cap Q \cap \overline{R}) \cap R \setminus P$.

51. Tõeväärtustabelite abil otsustada, kas hulgad on võrdsed:

1) $P \cap \overline{Q}$ ja $(\overline{P} \cup \overline{Q}) \setminus Q$,

2) $\overline{P \cap \overline{Q}}$ ja $\overline{P} \setminus Q$,

3) $A \cup \overline{B}$ ja $\overline{B \setminus \overline{A}}$,

4) $\overline{P \setminus Q}$ ja $\overline{P} \cup Q$,

5) $(A \cup B) \setminus C$ ja $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

6) $A \cap \overline{B} \cap C$ ja $[(A \cup C) \setminus B]$,

7) $(A \cap B) \cup \overline{A}$ ja $\overline{A \setminus B}$,

8) $\overline{A} \setminus B$ ja $A \cup B$.

II. PREDIKAATARVUTUS

1. Predikaadi mõiste

Predikaatarvutuses vaadeldakse lause kahte osa: 1) indiviid või indiviidid ja 2) predikaat. Indiviidid on objektid, mille kohta lauses midagi väidetakse, predikaat väljendab aga indiviidide teatud omadust või nendevahelist seost.

Olgu näiteks indiviidide hulgaks naturaalarvude hulk N. Siis predikaat "... on algarv" väljendab arvude ühte omadust - olla algarv. Kuid predikaat "... on suurem kui ..." väljendab indiviidide, antud juhul naturaalarvude omavahelist seost. Indiviidide omavahelist seost väljendab ka predikaat "... ja ... summa on ...". Punktide asemele kirjutatakse indiviidi üldtähis x, y või z, mis on muutujaks vastavas indiviidide hulgas, predikaate aga tähistatakse tähtedega A, B, ..., P, Q, R, S ..., ning nende järele kirjutatakse sulgudes indiviidide üldtähis. Indiviidide hulki tähistatakse vastavalt indiviidide üldtähisele X, Y, Z. Vaadeldud predikaate tähistame näiteks järgmiselt:

$A(x) \equiv$ "x on algarv", kus $x \in X = N$;

$S(x, y) \equiv$ "x on suurem kui y", kus $x \in X = N$, $y \in Y = N$;

$B(x, y, z) \equiv$ "x ja y summa on z", kus $x \in X = N$, $y \in Y = N$, $z \in Z = N$.

Predikaadis esinevate muutujate arvu järgi nimetatakse predikaate ühe-, kahe-, kolme- jne. kohalisteks predikaatideks.

Kui indiviidide hulk pole ette antud, siis vaadeldakse sellena kõige laiemat hulka, mille elementide korral predikaadist saadav lause omab mõtet.

2. Predikaadi tõehulk

Predikaadi P(x) **t õ e h u l g a k s** nimetatakse hulka P, mille elementideks on indiviidid, mille korral predikaat muutub tõeseks lauseks. Seega

$$P = \{x \mid P(x) = t\}.$$

Predikaadi $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tõehulgaks on hulk, mille elementideks on korteežid $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mille korral predikaat muutub tõeseks lauseks. Järelikult

$$Q = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t\}.$$

Predikaadi tõehulga leidmiseks on otstarbekas kasutada tõeväärtustabeleid, kui indiviidide hulgad on diskreetsed.

Näited

1. Leida predikaadi $P(x) \equiv$ "x on algarv", $x \in X = \{1; 2; 3; \ldots; 9; 10\}$ tõehulk.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(x)	v	t	t	v	t	v	t	v	v	v

Tabelist ilmneb, et

$P(1) = v$, $P(2) = t$, $P(3) = t$, $P(4) = v$, $P(5) = t$, $P(6) = v$, $P(7) = t$, $P(8) = v$, $P(9) = v$, $P(10) = v$.

Seega, antud predikaadi P(x) tõehulk

$$P = \{x \mid x \text{ on algarv}\} = \{2; 3; 5; 7\}.$$

2. Leida predikaadi $Q(x, y) \equiv$ "$x < y$" tõehulk, kui $X = Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

x \ y	1	2	3	4	5
1	v	t	t	t	t
2	v	v	t	t	t
3	v	v	v	t	t
4	v	v	v	v	t
5	v	v	v	v	v

Seega

$Q = \{(x, y) \mid x < y\} =$

$= \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2,3); (2,4); (2,5); (3, 4); (3, 5); (4, 5)\}.$

Ülesanded

52. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid:

1) $2 + x = 4$,
2) $2^0 = 1$,
3) $x^2 > 0$,
4) $x + 2 < y - 3$,
5) $|2| = 2$,
6) $z \geqslant 5$,
7) sirge x on paralleelne sirgega y,
8) $x^2 = y^2$,
9) $-3 \leqslant 3$?

53. Leida järgmiste predikaatide tõehulgad:

1) $P(x) \equiv$ "x on paarisarv", $X = \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$;
2) $Q(x) \equiv$ "$x^2 > 0$", $X = \{x \mid -2 < x < 3\}$;
3) $R(x, y) \equiv$ "$x + 2 = y$",
$X = Y = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 6; 7\}$;
4) $S(x, y) \equiv$ "$x > y + 1$",
$X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $Y = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

3. Tehted predikaatidega

Kõik lausearvutuse tehted on ülekantavad predikaatarvutusse. Neile lisanduvad veel ainult predikaatarvutusele omased ~~tehted~~- kvantorid. Ü l d i s u s e k v a n t o r i rakendamine predikaadile P(x) on loogiline tehe, mis muudab selle predikaadi lauseks "Kõikidel x-del on omadus P(x)" ehk "Iga x korral on P(x) tõene" või lühidalt "Iga x korral P(x)".

Üldisuse kvantorit, rakendatuna predikaadile P(x), tähistatakse kujul

$$\forall x \; P(x).$$

O l e m a s o l u k v a n t o r i rakendamine predikaadile P(x) on loogiline tehe, mis muudab selle lauseks "Leidub selline x, millel on omadus P(x)" ehk "Mõne x korral on tõene P(x)" või lühidalt "Mõne x korral P(x)". Olemasolu kvantorit, rakendatuna predikaadile P(x), tähistatakse

$$\exists x\ P(x).$$

Kvantori rakendamine predikaadile seob selles vastava muutuja. Lauseid võib vaadelda nullkohaliste predikaatidena.

Kasutades kvantoreid ning teisi predikaatidega teostatavaid tehteid, saab matemaatilisi lauseid lühidalt, täpselt ja ülevaatlikult kirja panna. Esitame olulisemad neist järgmises tabelis.

Lause	
sõnastatult	sümbolites
1. Kõik A on B	$\forall x\ [A(x) \Rightarrow B(x)]$
2. Mõni A on B	$\exists x\ [A(x) \wedge B(x)]$
3. Mitte ükski A ei ole B	$\forall x\ [A(x) \Rightarrow \neg B(x)]$ *
4. Mõni A ei ole B	$\exists x\ [A(x) \wedge \neg B(x)]$
5. Leidub vähemalt üks (mitte vähem kui üks) element x, mille korral A(x)	$\exists x\ A(x)$
6. Leidub ülimalt üks (mitte enam kui üks) element x, mille korral A(x)	$\forall x \forall y\ [A(x) \wedge A(y) \Rightarrow (x=y)]$
7. Leidub üks ja ainult üks element x, mille korral A(x)	$\exists x\ A(x) \wedge \forall x \forall y\ [A(x) \wedge A(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x = y)]$
8. Leidub vähemalt kaks (mitte vähem kui kaks) elementi x ja y, mille korral A(x) ja A(y)	$\exists x \exists y [A(x) \wedge A(y) \wedge (x \neq y)]$
9. Leidub ülimalt kaks (mitte enam kui kaks) elementi x ja y, mille korral A(x) ja A(y)	$\forall x \forall y \forall z\ [A(x) \wedge A(y) \wedge$ $\wedge A(z) \Rightarrow (z = x) \vee z = y)]$
10. Leidub kaks ja ainult kaks sellist elementi x ja y, et A(x) ja A(y)	$\exists x \exists y \{ A(x) \wedge A(y) \wedge (x \neq y) \wedge$ $\wedge \forall z\ [A(z) \Rightarrow (z = x) \vee$ $\vee (z = y)]$

*Aristotelese (klassikalises) süllogistikas mõistetakse otsustusi 1. ja 3. veidi teisiti. Seal eeldatakse, et selline A leidub, s.t. 1. $\forall x [A(x) \Rightarrow B(x)] \wedge \exists x\ A(x)$, 3. $\forall x [A(x) \Rightarrow \neg B(x)] \wedge \exists x\ A(x)$.

Ülesanded

54. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid:
    1) milline ka poleks arv x, ikkagi leidub selline arv y, et $x + 1 = y$;
    2) leidub sirge x, mis on paralleelne sirgega y;
    3) leidub arv x, mis jagub arvuga y;
    4) kui $x < y$, siis leidub arv z nii, et $x < z$?

55. Leida järgmiste lausete tõeväärtused:
    1) leidub vähemalt üks selline arv x, et $x + 3 = 5$;
    2) leidub ülimalt üks selline arv x, et $x + 3 > 5$;
    3) leidub üks selline arv x, et $x + 3 > 5$;
    4) leidub mitte vähem kui üks selline arv x, et $ax = b$;
    5) leidub ainuke selline arv x, et $ax = b$;
    6) leidub ülimalt kaks sellist arvu x, et $x^2 = 4$;
    7) leidub kaks ja ainult kaks sellist arvu x, et $x^2 = 4$;
    8) leidub kaks ja ainult kaks sellist arvu x, et $ax^2 + bx + c = 0$;
    9) leidub vähemalt kaks sellist arvu x, et $ax^2 + bx + c = 0$;
    10) leidub kaks ja ainult kaks sellist arvu x, et $x^2 - 5x + 6 = 0$;
    11) leidub üks ja ainult üks selline sirge a, mis läbib kahte antud punkti;
    12) sirgel ja ringjoonel leidub mitte enam kui kaks ühist punkti?

56. Leida järgmiste lausete tõeväärtused:
    1) $\forall x \forall y \, (x^2 = y)$,
    2) $\forall x \exists y \, (x^2 = y)$,
    3) $\forall y \forall x \, (x^2 = y)$,
    4) $\forall y \exists x \, (x^2 = y)$,
    5) $\exists x \forall y \, (x^2 = y)$,
    6) $\exists x \exists y \, (x^2 = y)$,

7) $\exists y \forall x \ (x^2 = y)$,
8) $\exists y \exists x \ (x^2 = y)$.

57. Leida järgmiste lausete tõeväärtused, kui $x, y \in \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$:

1) $\forall x \forall y \ (x \geqslant y)$,
2) $\forall x \exists y \ (x \geqslant y)$,
3) $\forall y \forall x \ (x \geqslant y)$,
4) $\forall y \exists x \ (x \geqslant y)$,
5) $\exists x \forall y \ (x \geqslant y)$,
6) $\exists x \exists y \ (x \geqslant y)$,
7) $\exists y \forall x \ (x \geqslant y)$,
8) $\exists y \exists x \ (x \geqslant y)$.

58. Sõnastada järgmised laused ja määrata nende tõeväärtused:

1) $\exists x \ (x + 1 = x)$, kus $x \in R$;
2) $\forall x \ (|x| = -x)$, kus $x \in R$;
3) $\forall x \forall y \ (x = y + 1)$, kus $x, y \in R$;
4) $\exists x \forall y \ (x + y = y)$, kus $x, y \in R$;
5) $\exists x \forall y \ (x = y + 1)$, kus $x, y \in R$;
6) $\forall x \forall y \exists x \ (x + y = z)$, kus $x, y, z \in R$;
7) $\forall x \exists y \ Q(x; y)$, kus x ja y on tasandi suvalised sirged, $Q(x; y) \equiv$ "sirge x lõikab sirget y";
8) $\forall x \ \forall y \ [Q(x; y) \Rightarrow \neg (x \parallel y)$, kus x ja y on tasandi suvalised sirged; $Q(x; y) \equiv$ "sirge x lõikab sirget y";
9) $\forall x \forall y \ [Q(x; y) \vee (x \parallel y)]$, kus x ja y on tasandi suvalised sirged, $Q(x; y) \equiv$ "sirge x lõikab sirget y";
10) $\forall x \forall y \ [Q(x; y) \wedge \exists z \ (x \parallel y) \Rightarrow Q(z, x)]$, kus x, y, z on tasandi suvalised sirged, $Q(x; y) \equiv$ "sirge x lõikab sirget y";
11) $\forall y \exists x \ Q(x; y)$, kus $Q(x; y) \equiv$ "x on y-i isa";
12) $\exists x \forall y \ Q(x; y)$, kus $Q(x; y) \equiv$ "x on y-i isa".

59. Kirjutada järgmiste predikaatide ette vastavad kvantorid, et saadav lause oleks tõene:

1) $(x + y)z = xz + yz$,
2) $3x = 6$,
3) $x + 1 > 5$,
4) $|x| \geqslant 0$,
5) $x^2 < 0$,
6) $|\cos x| \geqslant 1$,
7) $\log x > 0$,
8) $(x = y) \vee (x < y) \vee (x > y)$,
9) $x \parallel y$, kus x ja y on suvalised sirged,
10) $(x \parallel y) \wedge (y \parallel z) \Rightarrow (x \parallel z)$, kus x, y ja z on suvalised sirged.

60. Kirjutada lause kvantorite ja predikaatide abil ning määrata lause tõeväärtus:

1) leidub selline x, et mistahes a korral $ax = a$;
2) mistahes arvude a ja b korral leidub selline x, et $a + b = x$;
3) mistahes arvude a ja b korral leidub selline arv x, et $a + x = b$;
4) leidub selline arv x, et mistahes arvu a ja mistahes arvu b korral $x = ab$;
5) mistahes arvude a ja b korral leidub selline arv x, et $x = ab$,
6) ei leidu sellist ratsionaalarvu x, et $x^2 = 2$.

61. Kirjutada järgmised laused kahe- või kolmekohaliste predikaatide ning kvantorite abil:

1) kui esemed on ühesugused, siis on ka nende omadused ühesugused;
2) iga nullist erineva arvu korral leidub temaga jaguv arv;
3) igale naturaalarvule järgneb naturaalarv, kusjuures kaks erinevat arvu ei saa järgneda ühele ja samale arvule;
4) tasandi mistahes kaks sirget kas omavad ühist punkti või ei oma;

5) sirge mistahes kahe erineva punkti vahel asub vähemalt üks punkt, mis ei ühti antud punktidega;
6) kahte erinevat punkti läbib vaid üks sirge;
7) kui naturaalarvude korrutis jagub algarvuga, siis jagub selle arvuga vähemalt üks tegureist;
8) kolme mitte ühel sirgel asuvat punkti läbib ainult üks tasand.

62. Formuleerida järgmised liitlaused:

1) $\forall x\ [E(x) \Rightarrow \neg S(x)]$,
kus $X = \{x \mid x$ on elusolend$\}$, $E(x) \equiv$ "x on inimene", $S(x) \equiv$ "x on surematu olend";
2) $\exists x\ [R(x) \wedge A(x)]$,
kus $X = \{x \mid x$ on võrrand$\}$, $R(x) \equiv$ "x on ruutvõrrand", $A(x) \equiv$ "x-il on reaalsed lahendid";
3) $\neg \exists x\ [R(x) \wedge (x^2 = 2)]$,
kus $X = \{x \mid x$ on reaalarv$\}$, $R(x) \equiv$ "x on ratsionaalarv";
4) $\exists x\ [N(x) \wedge \neg A(x) \wedge \neg K(r)]$,
kus $X = \{x \mid x$ on reaalarv$\}$, $N(x) \equiv$ "x on naturaalarv", $A(x) \equiv$ "x on algarv", $K(x) \equiv$ "x on kordarv";
5) $\forall x\ [K(x) \Rightarrow S(x)] \wedge \exists x\ [S(x) \wedge \neg K(x)]$,
kus $X = \{x \mid x$ on geomeetriline kujund$\}$,
$K(x) \equiv$ "x on korrapärane kujund",
$S(x) \equiv$ "x on sümmeetriaine kujund".

63. Kirjutada järgmised laused kvantorite ja ühekohaliste predikaatide abil ning näidata indiviidide hulgad:

1) iga murd on reaalarv;
2) mõned murrud on taandatavad;
3) mitte ükski üliõpilane ei hilinenud täna loengule;
4) mõned maleringi liikmed ei võtnud turniirist osa;
5) mistahes ristkülik on rööpkülik,
6) mõningad hulknurgad on korrapärased, mõningad mitte;
7) leidub trigonomeetrilisi paarisfunktsioone, kuid iga trigonomeetriline funktsioon on perioodiline;

8) igal positiivsel reaalarvul eksisteerib logaritm;
9) ei leidu naturaalarvu, mis vahetult eelneks arvule 1;
10) mistahes reaalarvu ruut on positiivne.

4. Põhisamasused

Predikaati $P(x)$ nimetatakse s a m a s e l t t õ e s e k s (s a m a s e l t v ä ä r a k s), kui ta muutub tõeseks (vääraks) lauseks iga indiviidi korral indiviidide hulgast. Järelikult samaselt tõese predikaadi $P(x)$ tõehulk P on võrdne indiviidide hulgaga X, samaselt väära predikaadi tõehulk on aga tühihulk.

Predikaati nimetatakse k e h t e s t a t a v a k s , kui ta muutub tõeseks lauseks vähemalt ühe indiviidi korral. Seega, kehtestatava predikaadi tõehulk on indiviidide hulga mittetühi osahulk.

Predikaate nimetatakse s a m a v ä ä r s e t e k s , kui nad omandavad samu tõeväärtusi samade indiviidide korral. Seega, predikaadid on samaväärsed, kui nende indiviidide hulgad ja tõehulgad on võrdsed.

Kõik lausearvutuses kehtivad põhisamasused on üle kantavad predikaatarvutusse:

1° $\neg\neg A(x) \equiv A(x)$;

2° $A(x) \vee B(x) \equiv B(x) \vee A(x)$;

3° $[A(x) \vee B(x)] \vee C(x) \equiv A(x) \vee [B(x) \vee C(x)]$;

4° $A(x) \wedge B(x) \equiv B(x) \wedge A(x)$;

5° $[A(x) \wedge B(x)] \wedge C(x) \equiv A(x) \wedge [B(x) \wedge C(x)]$;

6° $A(x) \wedge [B(x) \vee C(x)] \equiv [A(x) \wedge B(x)] \vee [A(x) \wedge C(x)]$;

7° $A(x) \vee [B(x) \wedge C(x)] \equiv [A(x) \vee B(x)] \wedge [A(x) \vee C(x)]$;

8° $\neg[A(x) \vee B(x)] \equiv \neg A(x) \wedge \neg B(x)$;

9° $\neg[A(x) \wedge B(x)] \equiv \neg A(x) \vee \neg B(x)$;

10° $A(x) \wedge A(x) \equiv A(x)$;

11° $A(x) \vee A(x) \equiv A(x)$;

12° $A(x) \Rightarrow B(x) \equiv \neg A(x) \vee B(x)$;

$13°\ A(x) \Leftrightarrow B(x) \equiv [A(x) \wedge B(x)] \vee [\neg A(x) \wedge \neg B(x)]$;

$14°\ A(x) \wedge t \equiv A(x)$;

$15°\ A(x) \wedge v \equiv v$;

$16°\ A(x) \vee t \equiv t$;

$17°\ A(x) \vee v \equiv A(x)$;

$18°\ A(x) \vee \neg A(x) \equiv t$;

$19°\ A(x) \wedge \neg A(x) \equiv v$.

Esitatud põhisamasusi võib tõestada predikaatide samaväärsuse definitsioonist lähtudes.

Näited

1. Tõestada põhisamasus 9°

$$\neg[A(x) \wedge B(x)] \equiv \neg A(x) \vee \neg B(x).$$

Oletame, et samasuse vasakul poolel olevast predikaadist saame $x = x_0$ korral väära lause, s.t. et $\neg[A(x_0) \wedge \wedge B(x_0)] = v$. Sel juhul $A(x_0) \wedge B(x_0) = t$. Viimasest järeldub, et $A(x_0) = t$ ja $B(x_0) = t$. Siis aga $\neg A(x_0) = v$ ja $\neg B(x_0) = v$ ning ka $\neg A(x_0) \vee \neg B(x_0) = v$. Seega, kui teatud indiviidi x korral predikaat samasuse vasakul poolel muutub vääraks lauseks, siis muutub sama indiviidi x korral vääraks lauseks ka predikaat samasuse paremal poolel.

Oletame nüüd, et samasuse parem pool muutub vääraks lauseks $x = x_0$ korral, s.t. et $\neg A(x_0) \vee \neg B(x_0) = v$. Siis $\neg A(x_0) = v$ ja $\neg B(x_0) = v$. Siit tuleneb, et $A(x_0) = t$ ja $B(x_0) = t$ ning $A(x_0) \wedge B(x_0) = t$. Siis aga $\neg[A(x_0) \wedge \wedge B(x_0)] = v$. Seega, kui teatud x korral samasuse parem pool muutub vääraks lauseks, siis muutub selle x korral vääraks lauseks ka samasuse vasak pool.

Järelikult omandavad predikaadid

$$\neg[A(x) \wedge B(x)] \quad \text{ning} \quad \neg A(x) \vee \neg B(x)$$

samade indiviidide korral samu tõeväärtusi. Seega

$$\neg[A(x) \wedge B(x)] \equiv \neg A(x) \vee \neg B(x).$$

Põhisamasusi 1° - 19° saab aga tõestada ka lihtsamalt, lähtudes lausearvutuse põhisamasustest ning tehes nendes vastavad asendused. Näiteks predikaatarvutuse põhisamasuse

$$12° \quad A(x) \Rightarrow B(x) \equiv \neg A(x) \vee B(x)$$

saame lausearvutuse põhisamasusest

$$12^\circ \quad p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q,$$

asendades viimases lause p predikaadiga A(x) ning lause q predikaadiga B(x).

Et sellise asenduse teel saame predikaatide samaväärsuse, tuleneb lausearvutuse liitlausete samaväärsuse definitsioonist.

Rida predikaatarvutuse põhisamasusi on seotud kvantoritega:

$20^\circ\ \forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x) \equiv \forall x\ [A(x) \wedge B(x)];$

$21^\circ\ \exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x) \equiv \exists x\ [A(x) \vee B(x)];$

$22^\circ\ \neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x \neg A(x);$

$23^\circ\ \neg \forall x\ A(x) \equiv \exists x \neg A(x);$

$24^\circ\ \neg \forall x \neg A(x) \equiv \exists\ x\ A(x);$

$25^\circ\ \neg \exists x \neg A(x) \equiv \forall x\ A(x);$

$26^\circ\ \forall x \forall y\ A(x, y) \equiv \forall y \forall x\ A(x, y);$

$27^\circ\ \exists x \exists y\ A(x, y) \equiv \exists y \exists x\ A(x, y);$

$28^\circ\ \forall x\ A(x) \vee c \equiv \forall x\ [A(x) \vee c]$, kus c on lause;

$29^\circ\ \exists x\ A(x) \wedge c \equiv \exists x\ [A(x) \wedge c]$, kus c on lause;

Esitatud põhisamasused tõestatakse loogilise arutelu teel, tuginedes predikaatide samaväärsuse definitsioonile.

Näited

1. Tõestada samasus 20°

$$\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x) \equiv \forall x\ [A(x) \wedge B(x)].$$

Oletame, et samasuse vasakul poolel on tõene lause . See tähendab, et $\forall x\ A(x)$ on tõene ja ka $\forall x\ B(x)$ on tõene. Siis on tõene ka $A(x) \wedge B(x)$ iga x korral. Seega, kui samasuse vasakul poolel on tõene lause, siis on tõene lause ka samasuse paremal poolel.

Oletame nüüd, et samasuse paremal poolel on tõene lause. See tähendab, et iga x korral on $A(x) \wedge B(x)$ tõene lause. Siis peab nii A(x) kui ka B(x) muutuma tõeseks lauseks iga x korral. Seega, kui samasuse paremal poolel on tõene lause, siis on tõene lause ka vasakul poolel.

Järelikult

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, [A(x) \wedge B(x)].$$

2. Tõestada samasus 29°

$$\exists x\, A(x) \wedge c \equiv \exists x\, [A(x) \wedge c], \text{ kus } c \text{ on lause.}$$

Oletame, et samasuse vasakul poolel on tõene lause. Sel juhul c = t ning leidub selline indiviid x_0, et $A(x_0) = t$. See aga tähendabki, et leidub selline indiviid x, mille korral $A(x) \wedge c$ muutub tõeseks lauseks. Seega, kui samasuse vasakul poolel on tõene lause, siis on tõene lause ka paremal poolel.

Oletame nüüd, et samasuse paremal poolel on tõene lause. Siis leidub selline indiviid x_0, mille korral $A(x_0) \wedge c = t$ ehk $A(x_0) = t$ ja $c = t$. $A(x_0) = t$ aga tähendabki, et $\exists x\, A(x) = t$. Et aga $\exists x\, A(x)$ on tõene ja c on tõene, siis on samasuse vasakul poolel tõene lause.

Järelikult

$$\exists x\, A(x) \wedge c \equiv \exists x\, [A(x) \wedge c].$$

Ülesanded

64. Tõestada põhisamasus 21°.

65. Tõestada põhisamasused 22° ja 23°.

66. Tõestada põhisamasused 24° ja 25°.

67. Tõestada põhisamasused 26° ja 27°.

Analoogiline seos põhisamasusega 20° disjunktsiooni korral ei kehti, s.t.

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \not\equiv \forall x\, [A(x) \vee B(x)],$$

küll aga kehtib järelduvusseos:

30° $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\, [A(x) \vee B(x)]$.

Ka

$$\exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \not\equiv \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x),$$

kuid kehtib järelduvusseos:

31° $\exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \vdash \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$.

Mittesamaväärsuse tõestamiseks piisab ühest näitest, kus vaadeldavad laused ei oma samu tõeväärtusi.

Näide

Tõestada, et

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\, [A(x) \vee B(x)],$$

kuid

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \not\equiv \forall x\, [A(x) \vee B(x)].$$

Järelduvusseose kehtivuse kontrollimiseks tuleb näidata, et kui

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$$

on tõene, siis on tõene ka

$$\forall x\, [A(x) \vee B(x)].$$

Kui $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) = t$, siis kas

$$\forall x\, A(x) = t \quad \text{või} \quad \forall x\, B(x) = t \quad \text{või}$$

$$\forall x\, A(x) = t \quad \text{ning} \quad \forall x\, B(x) = t.$$

Olgu $\forall x\, A(x) = t$. Siis on ka $A(x) \vee B(x)$ iga x korral tõene, s.t. $\forall x\, [A(x) \vee B(x)] = t$.

Seega kehtib

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\, [A(x) \vee B(x)].$$

Olgu $\forall x\, B(x) = t$. Siis on ka $A(x) \vee B(x) = t$ iga x korral, s.t.

$$\forall x\, [A(x) \vee B(x)] = t.$$

Näitame nüüd, et

$$\forall x\, [A(x) \vee B(x)] \nvdash \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x).$$

Oletame, et

$$\forall x\, [A(x) \vee B(x)] = t.$$

Siit aga ei järeldu, et iga x korral kas $A(x)$ või $B(x)$ või mõlemad oleksid tõesed.

Olgu näiteks

$A(x) \equiv$ "x on paarisarv",

$B(x) \equiv$ "x on paarituarv",

kus $x \in X = N = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \dots\}$.

Siis $A(x) \vee B(x)$ on tõene iga x korral. Kuid

$\forall x\, A(x) = v$ ja $\forall x\, B(x) = v$ ning ka $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) = v$.

Eituse rakendamine matemaatikas sageli kasutatavatele otsustustele (üldjaatav, osajaatav, üldeitav, osaeitav) annab järgmised samaväärsused:

32° $\neg \forall x [S(x) \Rightarrow P(x)] \equiv \exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$;

33° $\neg \exists x [S(x) \wedge P(x)] \equiv \forall x [\neg S(x) \vee \neg P(x)]$;

34° $\neg \forall x [S(x) \Rightarrow \neg P(x)] \equiv \exists x [S(x) \wedge P(x)]$;

35° $\neg \exists x [S(x) \wedge \neg P(x)] \equiv \forall x [\neg S(x) \vee P(x)]$.

Ülesanded

68. Millised järgmistest lausetest on lause "Kõik A on B" eituse erinevad formuleeringud:
    1) pole tõsi, et kõik A on B;
    2) kõik A ei ole B;
    3) mitte iga A pole B;
    4) mõni A pole B;
    5) leidub selline A, mis ei ole B;
    6) mitte ükski A pole B?

69. Kirjutada järgmised laused predikaatide ja kvantorite abil ning moodustada nende eitused ja määrata viimaste tõeväärtused:
    1) kõik naturaalarvud on paarisarvud;
    2) mõned irratsionaalarvud ei ole reaalarvud;
    3) iga korrapärase hulknurga diagonaalid on võrdsed;
    4) iga diferentseeruv funktsioon on pidev;
    5) leidub trigonomeetrilisi paarisfunktsioone;
    6) mitte kõik võrrandid ei oma reaalarvulisi lahendeid;
    7) mõned kolmnurgad on võrdhaarsed ja täisnurksed;
    8) igal korrapärasel hulknurgal on ümberringjoon ja siseringjoon;
    9) iga arv, mis jagub 2-ga ja 3-ga, jagub ka 6-ga;
    10) mistahes arvude a ja b korral leidub arv c nii, et c = ab.

70. Kas järgmistes lausepaarides on üks teise eituseks:

1) iga rombi diagonaalid on risti,
   iga rombi diagonaalid ei ole risti;
2) mõned naturaalarvud on paarisarvud,
   mõned naturaalarvud on paaritud arvud;
3) mistahes kolmnurga kõrgused on võrdsed,
   mitte iga kolmnurga kõrgused pole võrdsed;
4) on olemas mittekorrapärased hulktahukad,
   on olemas korrapärased hulktahukad?

71. Leida järgmiste lausete eitused ning sõnastada need:

1) $\forall x[(x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$;
2) $\exists x(x^2 = 2 \wedge x \in Q)$;
3) $\exists x \exists y[(x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow (xy = 0)]$;
4) $\forall x \exists y (x + y \neq x)$, $x, y \in Z$.

72. Moodustada igast järgmisest teoreemist $\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)]$ vastandteoreem $\forall x[\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)]$ algul sümbolites, seejärel sõnastada ning leida tõeväärtus:

1) kui kahest tegurist vähemalt üks on võrdne nulliga, siis ka korrutis võrdub nulliga:
   $\forall x \ \forall y \ [(x = 0) \vee (y = 0) \Rightarrow (xy = 0)]$;
2) kui kaks arvu ei ole võrdsed, siis leidub kolmas arv, mis asub oma suuruselt nende vahel:
   $\forall x \ \forall y \{(x \neq y) \wedge (x < y) \Rightarrow \exists z[(x < z) \wedge (z < y)]\}$;
3) kui tasapinnal α leidub sirge a ning temaga paralleelne sirge b, mis ei asu tasapinnal α, siis sirge b on paralleelne tasapinnaga α:
   $\forall \alpha \ \forall b \{\exists a[(a \in \alpha) \wedge (a \parallel b) \wedge (b \notin \alpha)] \Rightarrow (b \parallel \alpha)\}$;
4) kui iga liidetav jagub 5-ga, siis jagub ka nende summa 5-ga:
   $\forall a \ \forall b \ [(a \vdots 5) \wedge (b \vdots 5) \Rightarrow (a + b \vdots 5)]$;
5) mistahes arvude a ($a \neq 0$) ja b korral leidub arv x, mis rahuldab võrrandit $ax = b$:
   $\forall a \ \forall b \ [(a \neq 0) \Rightarrow \exists x \ (ax = b)\}$

6) kui tasandi kaks sirget a ja b on risti mingi kolmanda sirgega c, siis on nad omavahel paralleelsed:

$$\forall a \, \forall b \left\{ \exists c [(a \perp c) \land (b \perp c)] \Rightarrow (a \parallel b) \right\}.$$

Kasutatud kirjandus

1. A. Kolman, O. Zich. Huvitav loogika. Tallinn, 1970.
2. I. Kull. Matemaatiline loogika. Tallinn, 1964.
3. С.Г. Гиндинкин. Алгебра логики в задачах. Москва, 1972.
4. И.Я. Депман. Первое знакомство с математической логикой. Ленинград, 1965.
5. М.Е. Драбкина. Логические упражнения по элементарной математике. Минск, 1965.
6. Методический сборник по математике. (Материалы для факультативных и внеклассных занятий.) Калининград, 1971.

Sisukord

Э. Митт

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja A. Vassil

Korrektor J. Laanekask

Paljundamisele antud 18.VII 74. Rotaatoripaber 30x42.1/4. Trükipoognaid 4,0. Tingtrükipoognaid 3,72. Arvestuspoognaid 2,74. Trükiarv 400. MB 00492. Tell. nr. 859.
TRÜ rotaprint, ENSV, Tartu, Pälsoni tn. 14.

Hind 10 kop.