

Metobs. B - 139

UEBER

EIN NEUES SCHWERES HORIZONTALPENDEL

MIT MECHANISCHER REGISTRIERUNG

FÜR SEISMISCHE STATIONEN ZWEITEN RANGES.

Von

Fürst B. Galitzin (Goliceyn).

N 2192

2134

ST. PETERSBURG.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Wass. Ostr., 9 Linie, № 12.

1910.

Über ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges.

VON FÜRST B. GALITZIN.

Einleitung.

Bei dem jetzigen Stande der seismologischen Wissenschaft ist es unbedingt notwendig, um eine tiefere und eingehendere Kenntnis der verschiedenen Einzelheiten der wahren Bodenbewegung beim Eintreffen von Erdbebenwellen zu gewinnen, auf seismischen Stationen ersten Ranges möglichst vollkommene Seismographen zu benutzen und nach Möglichkeit darnach zu streben, alle diejenigen störenden Einflüsse, welche die Ableitung der wahren Bodenbewegung erschweren, zu beseitigen. Vor allen Dingen müssen die aufgestellten Apparate wirklich der Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung entsprechen, unter anderem muss ihre Eigenperiode ohne Dämpfung von der Amplitude der Ausschläge unabhängig und das Moment der dämpfenden Kräfte wirklich proportional der Winkelgeschwindigkeit sein; auch müssen die Instrumente, um den störenden Einfluss ihrer Eigenbewegung zu beseitigen, möglichst stark gedämpft sein und dabei noch eine hohe Empfindlichkeit besitzen¹⁾.

Was nun die Art und Weise der Registrierung anbelangt, so ist

¹⁾ Es sei hier bemerkt, dass die in Pulkowa aufgestellten aperiodischen Seismographen unter Anwendung der galvanometrischen Registrierungsmethode diesen Bedingungen im grossen und ganzen genügen.

Man vergleiche meinen Aufsatz: «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente T. III. Livr. 2. (1909). St.-Petersbourg.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Für den Beständigen Secretär, Fürst B. Galitzin.

März 1910.

30675716

zweifellos die optische der mechanischen vorzuziehen, da diese letztere zu viel Unbestimmtheit mit sich führt.

Die reibenden Kräfte bei der Fortbewegung des Schreibstiftes auf dem beruhten Papier sind im hohen Maasse veränderlich; weiter ist das Dämpfungsverhältnis in diesem Falle keineswegs eine konstante Grösse, sondern es ändert seinen Wert mit der Amplitude der Ausschläge; ferner bedarf die Grundgleichung der Pendelbewegung die Einführung einer gewissen Korrektionsgrösse für die Reibung des Schreibstiftes, auf welche Frage ich später näher eingehen werde. Dieses alles führt erhebliche Komplikationen ein und erschwert ganz bedeutend die Ableitung der richtigen Elemente der wahren Bodenbewegung.

Auf seismischen Stationen ersten Ranges, wo man wirklich auf möglichst genaue Resultate Gewicht legt, müsste man freilich auf die mechanische Registrierung verzichten.

Anders steht es mit seismischen Stationen zweiten Ranges, die gewöhnlich in der Nähe gewisser Schüttergebiete errichtet werden. Dort kommt es nicht so viel auf die Ableitung der genauen Elemente der Bodenbewegung an, als vielmehr darauf, möglichst viele, aber doch unbedingt zuverlässige Daten über die Ausbreitung eines Bebens zu sammeln. Wegen der verhältnismässig hohen Betriebskosten bei der optischen Registrierung muss auf dieselbe bei solchen Stationen zweiten Ranges verzichtet werden und man sieht sich gezwungen, die viel weniger vollkommene mechanische Registrierung anzuwenden.

Ich habe mir nun dementsprechend die Aufgabe gestellt, einen Seismographen für Horizontalverschiebungen zu konstruieren, welcher möglichst einfach, billig und bequem in der Handhabung und trotz der Anwendung der mechanischen Registrierung doch imstande sein soll, ziemlich genaue Werte für die Amplitude der wahren Bodenverschiebung zu liefern. Derselbe sollte aus bekannten Gründen auch stark gedämpft sein, zu welchem Zweck ich mich ohne irgend welchen Zweifel sofort für die magnetische Dämpfung entschlossen habe, da diese Dämpfungsart, wie ich mich seitlang in der Praxis überzeugt habe, besonders einfach, bequem und billig ist¹⁾; ausserdem entspricht sie auf Grund der bekannten Induktionsgesetze wirklich den Forderungen der Hauptdifferentialgleichung der Pendelbewegung, was bei einigen Arten der Luftdämpfung, welche ausserdem, wenn sie einigermaassen gross sein soll, eine sehr feine Einregulierung erfordert,

¹⁾ Die beiden dazu nötigen vierschichtigen permanenten Magnete aus Wolframstahl, mit welchen man ein 100 Kilogramm schweres Horizontalpendel bei einer nicht zu kleinen Eigenperiode aperiodisch machen kann, kosten bei Hartmann und Braun in Frankfurt-Bockenheim nur 48 Mark.

mir sehr zweifelhaft erscheint. Weiter halte ich es für prinzipiell notwendig, die Registrierung beider Komponenten der Erdoberflächenverschiebung nicht in einem einzigen Apparat aufzunehmen, sondern dieselben von zwei ganz getrennten Apparaten aufschreiben zu lassen. Ich habe sehr grosse und, ich glaube, auch berechtigte Bedenken gegen die Zerteilung der Bewegung irgend welches Seismographen in zwei Komponenten, da infolge gewisser Reibungsverhältnisse diese beiden Bewegungen nicht ganz unabhängig von einander sein werden.

Als Prototyp für diesen meinen Seismographen habe ich das Horizontalpendel genommen.

Um den störenden Einfluss der veränderlichen Reibung herabzusetzen, habe ich mich für eine Masse von ca. 100 Kilogramm entschlossen. Je grösser die Masse ist, desto weniger machen sich selbstverständlich verschiedene störende Einflüsse der Reibung geltend; ich hielt es aber für überflüssig, bei der von mir zugrunde gelegten Vergrösserung etwa 45 (für unendlich kleine Wellenperioden) zu übertrieben schweren Massen überzugehen. Das Hantieren mit kolossalen Massen ist sehr umständlich und es hat sich auch gezeigt, dass dieselben hier gar nicht erforderlich sind, da man mit einem 100 Kilogramm-Pendel, wie es die später mitzuteilenden Versuche gezeigt haben, sehr gut auskommen kann.

Da das Pendel stark gedämpft sein sollte, so musste zur Vermehrung der Empfindlichkeit der Registrierung eine Vergrösserungsvorrichtung angebracht werden.

Es ist nun eine bekannte Tatsache, dass alle Hebelübertragungen in den regelmässigen Betrieb verschiedener Instrumente grosse Störungen mitbringen. Deshalb wurde auf die Konstruktion dieser Vergrösserungsvorrichtung besondere Aufmerksamkeit gelenkt. Besonders schwierig ist die unmittelbare Verbindung des Pendels mit dem kurzen Arm des Vergrösserungshebels. Die Anwendung einer Gabelverbindung war von vornherein auszuschliessen, da dieselbe entweder einen toten Gang besitzt oder den üblen Umstand, dass der eingreifende Stift öfters festgeklemmt wird, wodurch die ganze Vorrichtung zuweilen gänzlich versagt.

Nach vielem Hin- und Herprobieren, — es wurde unter anderem auch eine magnetische Koppelung versucht —, liess sich eine Vergrösserungsvorrichtung konstruieren, die ausserordentlich leicht ist, keinen toten Gang hat und eine sehr sichere Verbindung mit dem Pendelarm selbst herstellt. Diese Verbindung beweist damit ihre freie Beweglichkeit, dass ihre Einschaltung die Eigenperiode des Pendels, wie wir es weiter sehen werden, recht wenig beeinflusst, was bei anderen Arten von Hebelübertragungen bekanntlich keineswegs zutrifft, da die Eigenperioden der Instrumente mit und

ohne Hebelübertragungen zuweilen ganz erheblich von einander abweichen.

Das vom Mechaniker am Physikalischen Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St.-Petersburg Herrn Masing nach meinen Angaben konstruierte Pendel war seinem Prinzip nach eine Art eines Omori-Bosch'schen Pendels, nur die beiden nach oben gehenden Drähte wurden infolge der grossen Pendelmasse durch Stahlbänder ersetzt.

Das Hauptgewicht legte ich auf die zweckmässigste Konstruktion des unteren Stützpunktes.

Das Aufrufen des Pendels auf einer Spitze habe ich von vornherein aufgegeben. Es ist in der Tat leicht einzusehen, dass bei dieser Art Pendel bei einigermaassen grosser Pendelmasse der Druck auf die Spitze ein sehr grosser sein muss¹⁾. Infolgedessen erfährt diese Spitze gewisse Deformationen; sie wird abgestumpft, wodurch die Empfindlichkeit des Pendels viel einbüsst. Ausserdem können dabei Störungen in der Ruhelage und auch in der Periode des Pendels eintreten. Ich halte deshalb diese Art der Aufhängung von Horizontalpendeln, wenn die Masse derselben einigermaassen gross ist, für durchaus unzulässig. Selbst bei einem ganz leichten Horizontalpendel von nur etwa 64 gr. Masse nach dem Rebeur-Paschwitz'schen Typus mit Zweispitzenaufhängung habe ich eine mit der Zeit eintretende Abstumpfung der Spitzen wahrgenommen, wodurch die Empfindlichkeit der Registrierung dieses Pendels besonders gegen längere Perioden der Bebenwellen vermindert wurde²⁾. Diese Abflachung der Spitzen liess sich nach einiger Zeit von Tätigkeit sehr deutlich unter einem Mikroskop erkennen.

Für den unteren Befestigungspunkt des Pendels wurde eine dünne Stahllamelle genommen, etwa nach der Art, wie Dr. Mainka es vorgeschlagen hat, aber in einer anderen und etwas bequemeren Ausführung. Diese Art der Aufhängung hat sich in der Tat sehr gut bewährt und scheint überhaupt eine sehr zweckmässige zu sein.

In dem folgenden Paragraphen werde ich nun eine mehr detaillierte Beschreibung dieser Art Pendel geben.

¹⁾ Siehe z. B. meine Abhandlung «Ueber eine Abänderung des Zöllner'schen Horizontalpendels». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. II. Livr. 3. St.-Petersbourg.

²⁾ Siehe «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa». Zweite Mitteilung. L. c.

Fig. 1.



§ 1.

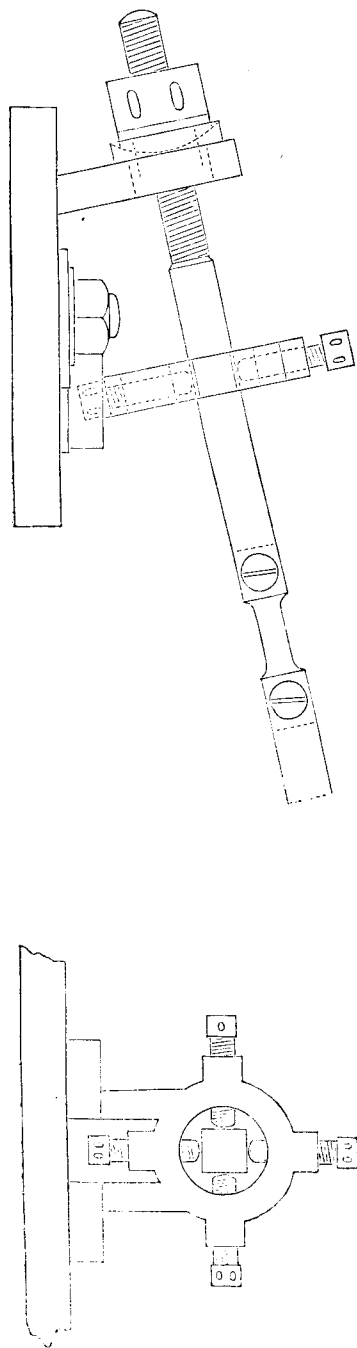
Beschreibung des Instruments.

Die Fig. 1 gibt die Reproduktion einer photographischen Aufnahme des Pendels wieder. Der Registrierapparat ist ein provisorischer, es lässt sich aber dazu jeder beliebige anwenden, nur muss derselbe eine genügend grosse Drehgeschwindigkeit (mindestens $15-20^{\text{m}}/\text{m}$ in der Minute) und einen genügend gleichmässigen Gang besitzen. Das sind allerdings Bedingungen, die für die zweckentsprechende Auswertung von Seismogrammen als unerlässlich zu betrachten sind; leider wird zur Zeit auf die Vervollkommenung der Registrierteile der Seismographen zu wenig Gewicht gelegt.

Der Apparat besitzt kein eigentliches Stativ; es werden einfach oben und unten an der Wand zwei massive gusseiserne Platten befestigt, an denen die Aufhängevorrichtungen angebracht sind. Dadurch gewinnt der Apparat sehr viel an Einfachheit und Billigkeit. Da ich für dieses Pendel die Bedingung der Stabilität und der Möglichkeit, auf lange Eigenperioden einzustellen, forderte, so müsste das Stativ, wenn dasselbe gebaut werden sollte, sehr hoch und folglich, der grossen Pendelmasse wegen, sehr massiv sein, was jedoch sehr umständlich und unbequem wäre. Man muss aber dabei darauf Acht geben, dass die Wand, an welcher das Pendel aufgehängt wird, keinen sehr grossen Temperaturschwankungen ausgesetzt ist. Es darf nicht z. B. eine Aussenwand sein. Es ist dabei garnicht erforderlich, dass die Wand streng vertikal sei, da man durch Unterlegen von passend dicken Metallplatten den Befestigungspunkten immer die richtige Lage geben kann.

Die Pendelmasse selbst von etwa 110 Kilogramm Gewicht besteht aus 3 gusseisernen runden Platten (Halbdurchmesser jeder Platte 14,85 cm., Dicke 7,4 cm.), die durch drei vertikale Bolzen festgehalten werden. Beim Aufstellen des Pendels liegt die Axe dieser Platten etwa vertikal, sodass die Pendelmasse einen vertikal stehenden Zylinder darstellt. Von den Seiten

Fig. 2.



dieser Pendelmasse gehen die beiden erwähnten Stahlbänder nach oben. Dieselben sind unten an einem Bügel angeschraubt, welcher Durchbohrungen besitzt, in die eine horizontale Axe, deren Verlängerung durch den Schwerpunkt der Pendelmasse hindurchgeht, hineingreift, wodurch die Drehbarkeit der Masse um diese Axe erzielt wird. Diese Bänder laufen nach oben zusammen und werden dort an einer kleinen flachen Stahlfeder befestigt, die selbst zwischen zwei kleinen Platten mittelst besonderer Schrauben eingeklemmt ist.

Diese Klemmstelle bildet eben den oberen Befestigungspunkt des Pendels. Die Entfernung dieses Punktes bis zum Schwerpunkt des Pendels beträgt 228,0 cm.

Diese obere Klemmvorrichtung wird an einer Stahlstange befestigt, welche durch einen Ring hindurchgeht und nach oben und unten verschoben werden kann, wodurch man die Lage des oberen Stützpunktes verändern und dadurch das Pendel auf die gewünschte Periode einstellen kann.

Diese Stange wird in dem oben erwähnten Ring durch besondere Schrauben festgehalten. Die entsprechende Anordnung wird aus der Figur 2 ersichtlich.

Zwei Seitenschrauben gestatten dem ganzen System Seitenverstellungen zu geben, um die Pendelstange, die zur Registriervorrichtung geht, in die richtige Lage zu bringen. Zwei andere dienen dazu, den Stützpunkt nach vorn oder hinten zu verschieben und so die Periode zu regulieren.

Die Einrichtung der unteren Befestigung, auf die es bei dieser Art von Pendeln

sehr ankommt, wird aus den folgenden Figuren 3 und 4 ersichtlich.

Fig. 3 gibt eine Ansicht dieser Einrichtungen von der Seite und Figur 4 von oben, wobei zur besseren Anschaulichkeit bei jeder die

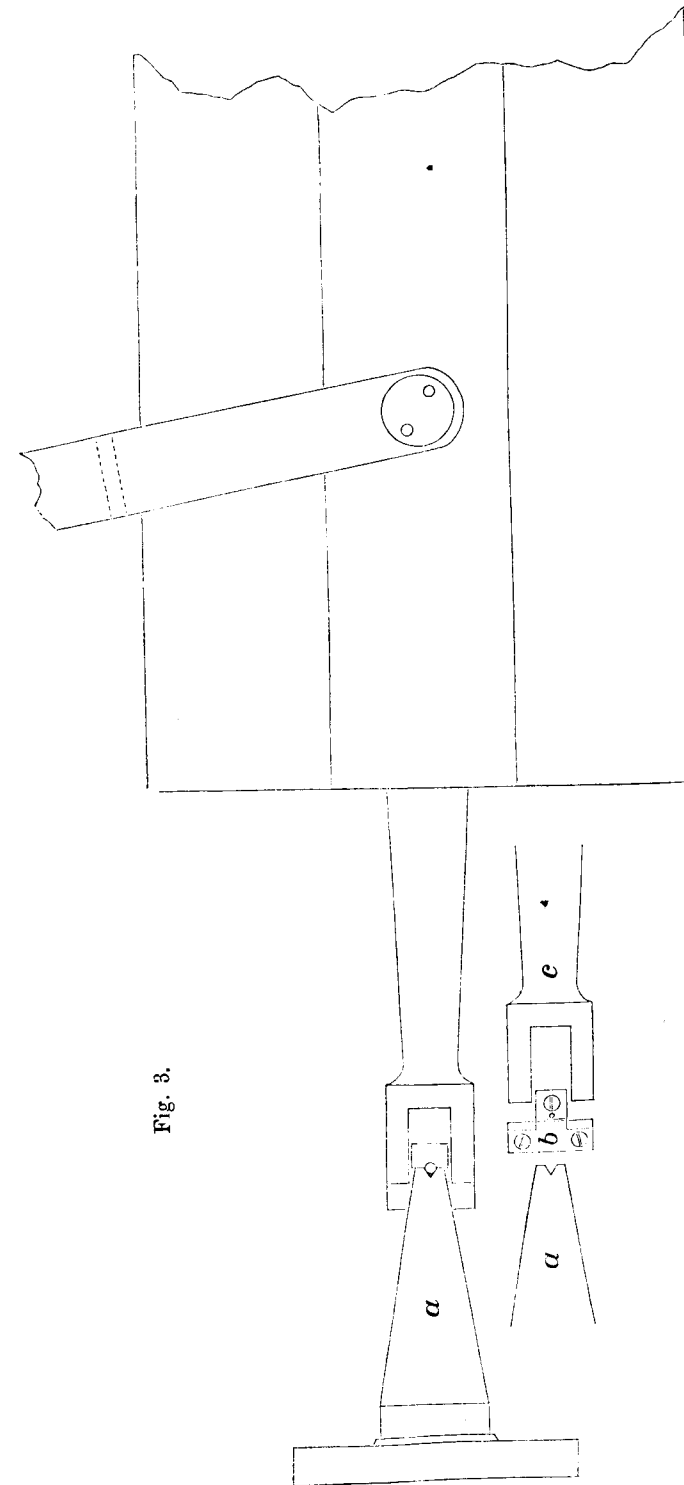


Fig. 3.

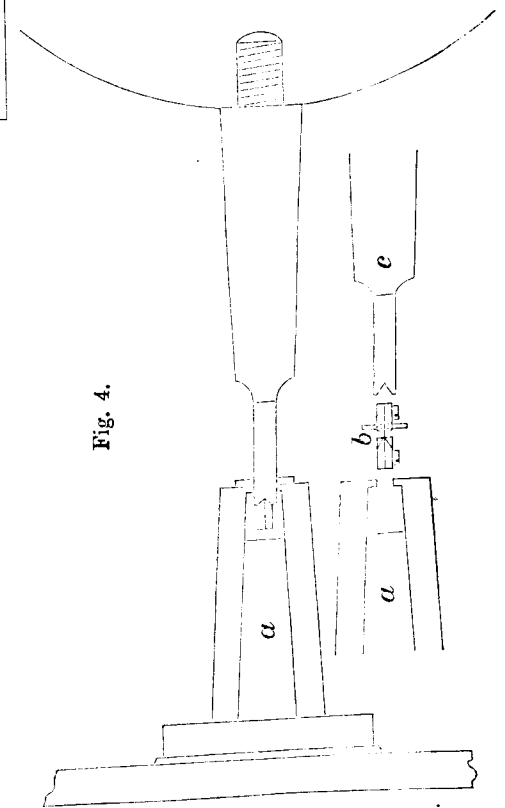


Fig. 4.

einzelnen Teile noch getrennt und auseinander geschoben gezeichnet sind.

Wie man aus diesen Skizzen ersieht, ist der Teil *b*, welcher eigentlich als Drehungspunkt dient, herausnehmbar und kann nach Bedarf ausgewechselt werden. Das Stück *a* bildet denjenigen Teil, welcher fest an die Wand geschraubt wird. Es ist vorne gabelförmig und besitzt eine horizontale Nute zur Aufnahme des erwähnten Zwischenstückes *b*, welches von besonderer Wichtigkeit ist. *b* selbst enthält eine Stahllamelle von $0,13^m/m$ Dicke, $10,5^m/m$ Höhe und ca. $0,5^m/m$ Spielraum der Drehungsaxe. Diese Lamelle ist zwischen eisernen Klammern mittelst Schrauben befestigt. Die Klammern werden auf der einen Seite durch einen horizontalen Stift durchsetzt, das breitere Paar endet dagegen auf der Seite des freien Spielraumes in einer vertikalen Schneide. Am Pendelgewicht ist ein gabelförmiger Ansatz *c* angebracht, der mit einer vertikalen Nute versehen ist. Bei der Zusammenstellung des Pendels verfährt man in bezug auf den unteren Drehungspunkt folgendermaassen.

Wenn die obere Aufhängung in Ordnung gebracht ist, soll der Teil *c* auf *a* einfach sich stützend aufrufen.

Man nimmt das Stück *b*, hebt das Gewicht etwas nach rechts, setzt den Stift von *b* gegen die horizontale Nute von *a* und lässt vorsichtig die vertikale Nute von *c* gegen die Schneide von *b* sinken. Damit ist die freie Schwingung des Pendels in Gang gesetzt. Durch diese Einrichtung wird erreicht, dass alle Teile der Stahllamelle gleich stark gespannt werden und ein Zerreißen derselben nicht mehr so sehr zu befürchten ist. Diese Art der Verbindung ist insofern noch bequem und zweckmässig, da man immer, wenn nötig, in sehr einfacher Weise die Feder auswechseln kann.

Diese Konstruktion des unteren Stützpunktes des Pendels hat sich als sehr zweckmässig erwiesen. Da die Feder sehr kurz ist, erhält man in der Praxis einen ganz bestimmten unteren Drehungspunkt des Pendels. In der Tat haben die weiter mitzuteilenden Versuche gezeigt, dass die Pendelperiode als unabhängig von den Amplituden der Ausschläge zu betrachten ist; weiter bleibt das Dämpfungsverhältnis des freien Pendels sehr konstant und wenn es einmal auf eine bestimmte Periode eingestellt ist, so behält es dieselbe in höchst befriedigender Weise bei, selbst wenn die Periode sehr gross genommen wird. Es lassen sich in der Tat bei diesem Pendel sehr lange Perioden etwa bis 90 Sekunden in allereinfachster Weise herstellen, wie sie für seismometrische Beobachtungen eigentlich nur selten nötig sind. Dies alles beweist, dass die beschriebene Anordnung ganz zutreffend ist, da die Lage der Drehungsaxe des Pendels unverändert bleibt.

Jetzt gehe ich zur Beschreibung der Registriervorrichtung über.

Fig. 5.

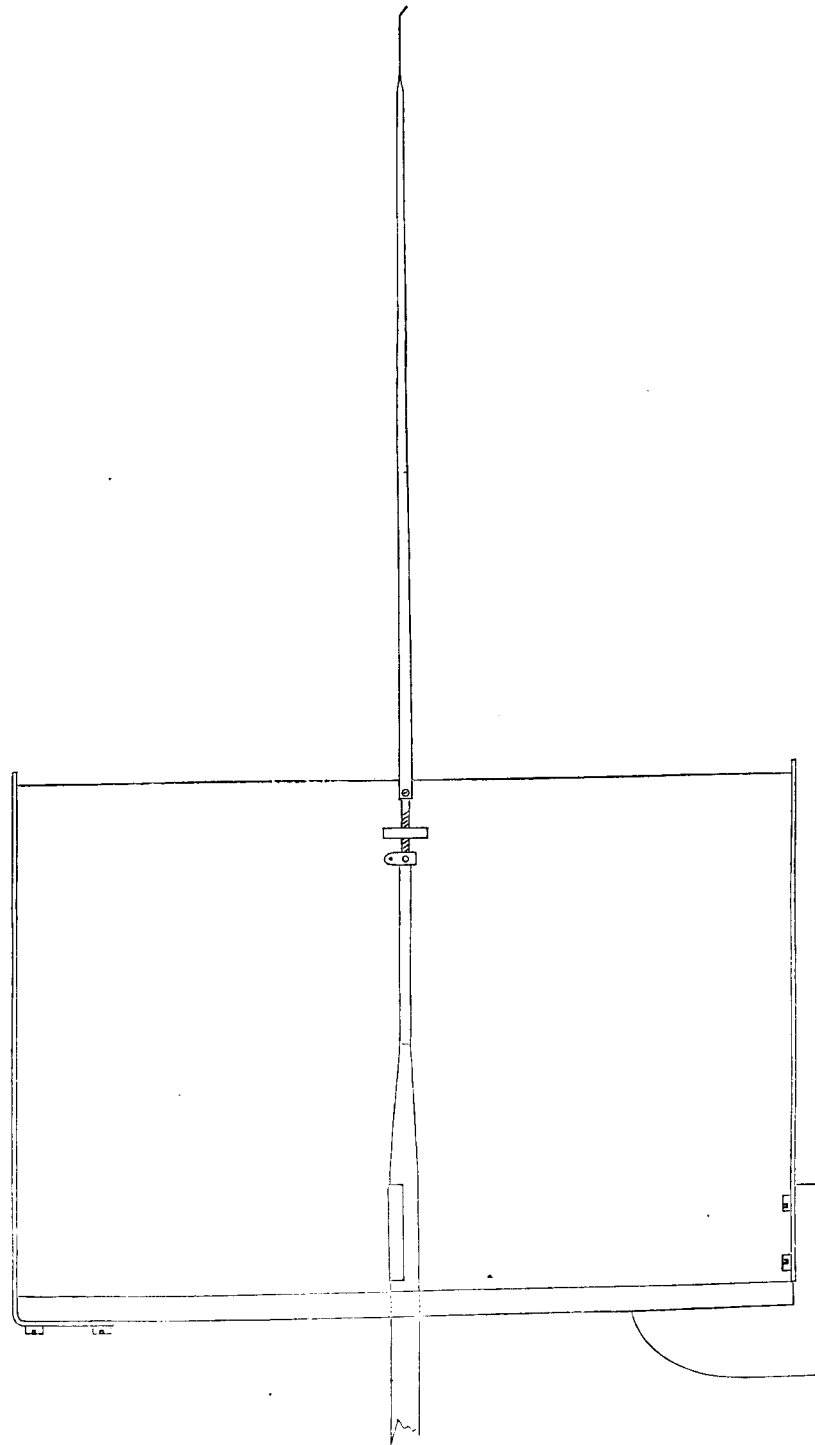
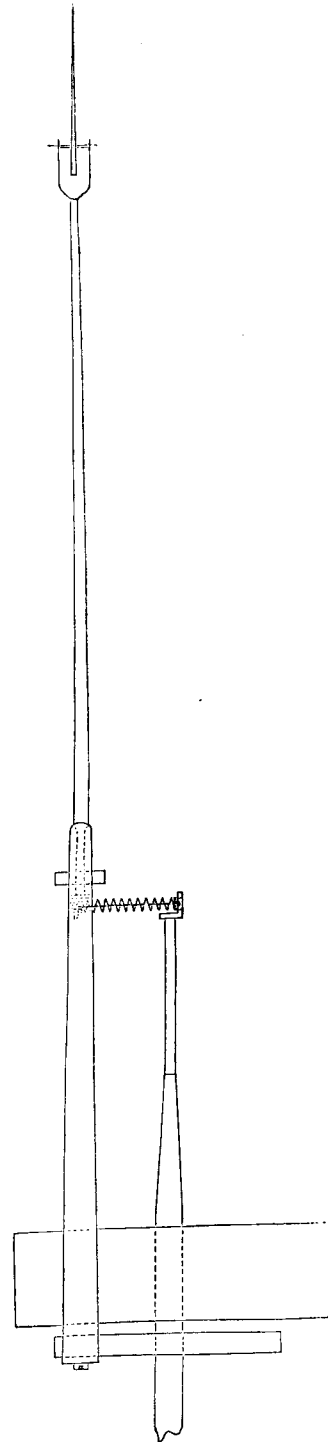


Fig. 6.



An der vorderen Seite der Pendelmasse wird ein 1 m. langes Messingrohr angebracht, von $31,0 \frac{m}{m}$ innerem Durchmesser und $0,7 \frac{m}{m}$ Wanddicke, welches gegen sein äusseres Ende konisch zuläuft und eine dünne Fortsetzung trägt (die ganze Länge dieses Hebels von der Oberfläche des Gewichtes bis zum Angriffspunkt des Vergrößerungshebels betrug 129,1 cm.). An dem äusseren Ende dieses Rohres werden vier Stahldrähte befestigt, welche zu der Pendelmasse gehen und am äusseren Umfang derselben angeschraubt werden. Diese Drähte werden stramm gezogen, wodurch für eine genügende Starrheit dieser langen Messingstange gesorgt ist und die Möglichkeit merklicher Eigenschwingungen derselben vermieden wird.

Die eigentliche Vergrößerungsvorrichtung, auf deren zweckmässige Konstruktion es sehr ankommt, wird an einem besonderen, mit dem Pendel selbst nicht in Verbindung stehenden Gestell, welches die beiden dämpfenden Magnete trägt, befestigt. An diesem Gestell werden oben und unten zwei nach vorn herausragende kleine Messingstreifen angeschraubt, zwischen denen ein dünner Messingdraht von $0,13 \frac{m}{m}$ Durchmesser und 32,4 cm. Länge gespannt wird. Dieser Draht bildet eben die Drehungsaxe der Vergrößerungsvorrichtung. In der Mitte desselben (nach der Höhe) wird der ungleicharmige Hebel angebracht und durch Ausbalanzierung mittelst eines kleinen Laufgewichtes in der horizontalen Lage gehalten.

Die Fig. 5 gibt eine Seitenansicht dieser Vergrößerungsvorrichtung und die Fig. 6. eine Ansicht von oben.

Alle Teile sind möglichst leicht. Durch Anwendung dieses dünnen Drahtes als Drehungsaxe wird die Reibung bei der Drehung auf das Minimum reduziert.

Jetzt kommt es auf die Verbindung des kürzeren Hebelarmes mit der Pendelstange an. Dies ist die allerschwierigste Sache.

Diese Verbindung muss folgenden Bedingungen Genüge leisten:

- 1) Sie muss äusserst leicht sein und fast reibungslos arbeiten;
- 2) die Einführung derselben darf die Eigenperiode des Pendels sehr wenig beeinflussen¹⁾;
- 3) diese Verbindung muss eine ganz sichere sein und nicht eventuell versagen, wie es bei den Gabelverbindungen öfters der Fall ist;
- 4) sie darf keinen toten Gang besitzen.

Nach vielen Bemühungen liess sich endlich eine Art Verbindung

¹⁾ Es ist eine bekannte Tatsache, dass bei vielen Pendeln mit Vergrößerungsvorrichtungen die Einführung einer solchen die Eigenperiode der Schwingungen des freien Pendels in ganz erheblicher Weise herabsetzt.

herstellen, die allen diesen Anforderungen genügt und die fast tadellos funktioniert.

Dieselbe ist an den Figuren 5 und 6 ersichtlich.

Am Ende der früher erwähnten Pendelstange und dem des kürzeren Hebelarmes werden an der Seite einander gegenüber zwei kleine Achathütchen befestigt. Der Vergrößerungshebel wird an die Seite gestellt und sein kürzerer Arm mit einer sehr dünnen und leichten Spiralfeder aus Messing, die an der Seite angebracht wird, mit der Pendelstange verbunden. Dann wird eine Stahlnadel mit den Spitzen in die Hütchen geschoben, von einer Länge, dass die dünne Spirale nur sehr leicht gespannt ist und die Nadel selbst nicht herausfallen kann. Somit ist die Verbindung hergestellt.

Dieselbe hat sich in allerbefriedigendster Weise bewährt, wie die weiter mitzuteilenden Versuche es bewiesen haben.

Am Ende des längeren Hebelarmes wird in üblicher Weise eine ausbalanzierte, um eine horizontale Axe drehbare Schreibfeder angebracht. Als Material für die Schreibfeder habe ich Horn gewählt, da eine solche Feder am Papier sehr geringe Reibung besitzt. Elfenbein wäre vielleicht noch besser gewesen.

Der kürzere Hebelarm darf nicht zu klein genommen werden, sonst können leicht Störungen in dem regelmässigen Betriebe des Instruments eintreten. Ich habe denselben etwa $30 \frac{m}{m}$ lang gewählt und mich mit einer Hebelvergrößerung von etwa 10 begnügt. Da die Vergrößerung des Pendels selbst, d. h. das Verhältnis der Entfernung L des Endes der Pendelstange bis zur Drehungsaxe zur reduzierten Pendellänge l etwa $4\frac{1}{2}$ beträgt, so ergibt sich die totale Vergrößerung des Instruments (für unendlich kleine Perioden der Bebenwellen) etwa gleich 45.

Diese Vergrößerung halte ich für Instrumente, die auf seismischen Stationen zweiten Ranges aufgestellt sein sollen, als genügend¹⁾. Nötigenfalls könnte dieselbe durch Änderung des Verhältnisses der Hebelarme leicht vergrössert werden. Sollte aber der Apparat zur Erforschung von Nahbeben in einem seismischen Gebiet verwendet werden, so könnte man eventuell die Vergrößerungsvorrichtung einfach ausschalten und den Schreibstift am Ende der langen Pendelstange anbringen.

Auf eines möchte ich noch aufmerksam machen. Wenn das Pendel in einem Ort aufgestellt ist, wo der Strassenverkehr sich bemerkbar macht, so zittert die Schreibfeder etwas in der vertikalen Richtung. Dies ist insofern

¹⁾ Man bedenke, dass bei den Milne'schen Pendeln, die so verbreitet sind, die Vergrößerung nur etwa 7 beträgt.

günstig, da es die Reibung des Schreibstiftes am berussten Papier verkleinert¹⁾).

Die Dämpfung an diesem Pendel war eine magnetische, mit Hilfe zweier kleiner, hufeisenförmiger, vierschichtiger, permanenter Magnete aus Wolfram-Stahl, die mir von der Firma Hartmann und Braun in Bockenheim bei Frankfurt a/M. geliefert wurden.

Die Dimensionen derselben waren die folgenden:

Höhe jedes Magneten	14,9	cm.,
Jede Polfläche	3,8 × 3,2	□ cm.,

Entfernung der Mitten der Pole für jeden Magneten 7,1 cm.

Diese Magnete wurden an einem besonderen, mit dem Pendel nicht in Verbindung stehenden Gestell einer über dem anderen angebracht, sodass die ungleichnamigen Pole derselben einander gegenüber zu stehen kamen. Die Magnete wurden mittelst je zweier kleiner, aussen sich befindender Messingklammern in ihrer Lage festgehalten, welche mittelst Schrauben an dem Gestell befestigt waren. Wurden diese Schrauben etwas gelöst, so konnte man die Magnete in vertikaler Richtung mit Hilfe einer besonderen vertikalen Schraube verschieben und somit die einander gegenüber liegenden Pole auf eine beliebige Distanz einstellen. Durch diese Verschiebung der Pole kann man die Stärke der Dämpfung in allereinfachster Weise variieren.

Zwischen den Polen dieser Magnete konnte sich eine möglichst eisenfreie Kupferplatte, die am Ende der Pendelstange befestigt war, frei bewegen.

Die Dimensionen dieser Kupferplatte waren die folgenden:

Länge	13,05	cm.
Breite	3,94	»
Dicke	5,0	m/m.

Diese Art Dämpfung bietet manche sehr erheblichen Vorteile dar.

Erstens erfordert sie keine sehr feinen Einstellungen, da zwischen den Magnetenpolen und der Oberfläche der Kupferplatte immer ein genügend grosser Spielraum frei bleibt. Eine Berührung der Platte mit den Magnetenpolen ist also nicht zu befürchten.

¹⁾ Es sei daran erinnert, dass Marwin, um die Reibung zu vermindern, eine Vorrichtung konstruiert hat, um dieses Erzittern mittelst eines Elektromagneten künstlich herbeizuführen.

Zweitens steht diese Dämpfungsvorrichtung vollkommen offen und man kann sie zu jeder Zeit in Augenschein nehmen und sich überzeugen, ob alles in Ordnung ist.

Drittens lässt sich die Stärke der Dämpfung in äusserst einfacher Weise variieren und dabei sehr grosse Dämpfungsverhältnisse erzielen. Man kann sogar mit nur *einem* Paar solcher kleinen Magnete ein 100 Kilogramm schweres Horizontalpendel von der hier beschriebenen Form, wenn seine Eigenperiode nicht zu klein ist, in ein vollkommen aperiodisches Instrument verwandeln. Würde man die Bedingung der Aperiodizität für kleinere Perioden verwirklichen wollen, so steht es frei, anstatt eines Paares, zwei Paar Magnete zu nehmen.

Viertens erweist sich diese Art der Dämpfung als sehr konstant und von Temperaturänderungen fast gänzlich unabhängig.

Fünftens ist ihre Handhabung sehr einfach und bequem, wobei sie an allen Arten von Seismographen mit aller Leichtigkeit angebracht werden kann.

Sechstens ist sie verhältnismässig sehr billig, eine Bedingung, auf welche viele das Hauptgewicht legen. Es ist sogar die Meinung ausgesprochen worden, dass die magnetische Dämpfung kostspielig sei. Das ist aber durchaus nicht der Fall und eine solche Meinung beruht völlig auf einem Irrtum.

Schliesslich, was vielleicht am wesentlichsten ist, entspricht die magnetische Dämpfung der Forderung der Theorie, nämlich, dass das Moment der dämpfenden Kräfte wirklich proportional der Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung sei.

Aus allen diesen Gründen ziehe ich die magnetische Dämpfung allen anderen Dämpfungsarten ganz entschieden vor.

Bei einem Horizontalpendel von der hier beschriebenen Form ist es durchaus nicht notwendig, seine Dämpfung zu viel in die Höhe zu treiben, sonst wird seine Empfindlichkeit zu viel einbüßen.

In der Praxis, je nach Bedarf und je nach der Seismizität des Gebietes, wo das Pendel aufgestellt wird, wird man sich ein passendes Dämpfungsverhältnis auswählen, dasselbe darf jedoch nicht kleiner als 5 sein, sonst wird die Eigenbewegung des Pendels bei der Auswertung der Seismogramme zu störend wirken.

Den theoretischen Forderungen gemäss wäre es wünschenswert, um den Einfluss der Eigenbewegung des Pendels möglichst zu eliminieren, eine sehr starke Dämpfung einzuführen, aber für Pendel, welche für seismische Stationen zweiten Ranges bestimmt sind und die mechanisch registrieren sollen, ist diese Forderung als überflüssig zu betrachten, da die mechanische Re-

gistrirung, infolge der veränderlichen Reibungsverhältnisse etc., an und für sich so mangelhaft ist, dass das Bestreben, der theoretischen Forderung inbezug auf die Dämpfung Genüge zu leisten, freilich garnicht zweckentsprechend sein würde. Man dürfte die Anwendung aperiodischer Pendel nur den seismischen Stationen ersten Ranges überlassen und zwar unter Anwendung der optischen Registrirung, wobei für eine genügende Empfindlichkeit der Aufzeichnungen gesorgt werden muss.

Um das Pendel nebst Vergrösserungsvorrichtung vor dem Einfluss der Luftströmungen zu schützen, ist es wünschenswert, dasselbe mit einem einfachen, abnehmbaren Schutzkasten, etwa aus Pappe mit Holzrippen zu bedecken.

Was nun die Eigenperiode des Pendels anbelangt, so lässt sich dieselbe aus Schwingungsbeobachtungen bei schwacher Dämpfung (die Magnete werden weit auseinander gezogen oder sogar ganz entfernt) in üblicher Weise leicht erhalten.

Die Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses v des Pendels werde ich erst in einem späteren Paragraphen besprechen, sobald ich den Einfluss der Reibung des Schreibstiftes auf dem berussten Papier einer näheren Betrachtung unterziehen werde.

Die dritte Pendelkonstante, nämlich die reduzierte Pendellänge l , lässt sich mit genügender Genauigkeit aus den Pendeldimensionen berechnen, wobei die Lage der schweren Pendelmasse hauptsächlich maassgebend ist.

Bedeutet nun M die totale Masse des beweglichen Systems, K ihr Trägheitsmoment inbezug auf die Drehungsaxe und D die Entfernung des Schwerpunktes des Systems von derselben, so wird bekanntlich

$$l = \frac{K}{MD} = l_0 + \Delta l.$$

l_0 soll durch die schwere Masse bedingt sein. Δl ist die Korrektur für die übrigen schwingenden Massen.

Bedeutet nun d die Entfernung des Schwerpunktes der Pendelmasse von der Drehungsaxe und r den Radius des zylindrischen Gewichtes, so wird

$$l_0 = d + \frac{1}{2} \frac{r^2}{d}.$$

Bei diesem Pendel war

$$d = 30,85 \text{ cm.}$$

$$r = 14,85 \text{ » ,}$$

$$l_0 = 34,4 \text{ cm.}$$

also

Die Korrektur Δl lässt sich aus den bekannten Dimensionen und Gewichten der anderen einzelnen schwingenden Teile des Systems, die meistens eine regelmässige geometrische Form haben, unter Anwendung der bekannten Sätze über die Trägheitsmomente leicht berechnen, wobei nur die Pendelstange und dämpfende Kupferplatte, da sie von der Drehungsaxe weiter entfernt sind, von Belang sind. Auf die Einzelheiten dieser Berechnungen, die ganz einfach sind, brauche ich hier nicht weiter einzugehen.

Bei meinem Pendel ergab sich etwa

$$\Delta l = 3,9 \text{ cm.},$$

also

$$l = 38,3 \text{ cm.}$$

Die Entfernung L_0 des Endes der Pendelstange, wo der kürzere Hebelarm der Vergrösserungsvorrichtung angreift, von der Drehungsaxe betrug 174,8 cm.

Somit ergab sich für die Vergrösserung des Pendels allein

$$V_0 = \frac{L_0}{l} = 4,56.$$

Man könnte selbstverständlich V_0 ganz bedeutend grösser machen, indem man l klein nehmen würde.

Dies liesse sich wohl leicht erzielen, etwa durch Aushöhlung eines Teiles der Pendelmasse selbst. Die Empfindlichkeit des Pendels hätte dabei sehr viel gewonnen; sogar hat neulich Dr. Szirtes¹⁾ eine neue Art eines empfindlichen Pendels vorgeschlagen, wo l ganz klein genommen werden sollte, allein habe ich inbezug auf das Kleinmachen von l gewisse Bedenken, da erstens der prozentische Fehler bei der Bestimmung von l grösser wird und zweitens verschiedene sekundäre Einflüsse den Wert von l sehr stark beeinflussen können, was sich unmittelbar auf den Wert des Vergrösserungsverhältnisses des Pendels V_0 übertragen wird. Alle diese störenden Einflüsse lassen sich jedoch schwer übersehen und kontrollieren.

Ich habe mich also mit einem verhältnismässig kleinen Wert von V_0 begnügt.

Der kürzere Hebelarm a der Vergrösserungsvorrichtung betrug bei diesem Pendel $30,75^m/m$ und der längere b $311,5^m/m$, somit war

$$\frac{b}{a} = 10,13$$

¹⁾ «Uniflares Horizontalpendel». Publications du Bureau Centrale de l'Association internationale de Sismologie. Série A. Mémoires. 1909.

und die totale Vergrößerung V des Pendels (für unendlich kleine Perioden der Bebenwellen)

$$V = \frac{b}{a} V_0 = 46,2.$$

§ 2.

Untersuchungen über die Periode des Pendels.

Die ersten Beobachtungen bezogen sich auf die Frage, ob die Eigenperiode T des frei schwingenden Pendels bei ausgeschalteter Vergrößerungsvorrichtung und Schreibfeder in irgend welcher Weise von der Grösse der Amplituden der Ausschläge abhängig ist. Bei diesen und allen folgenden Beobachtungen war mir der Assistent am Physikalischen Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Herr Wilip in höchster Weise behülflich, wobei ich ihm an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte.

Die Bewegung des Pendels wurde visuel mit Fernrohr und Skala verfolgt. Dazu wurde am Pendel in der unmittelbaren Nähe seiner Drehungsaxe ein kleiner Spiegel befestigt. Die Entfernung dieses Spiegels von der Skala betrug überall genau 1 Meter.

Im Folgenden bedeutet $m_r + m_l$ die mittlere Summe der Ausschläge an der Skala rechts und links, für welche die entsprechende Pendelperiode bestimmt wurde. Zur Messung der Pendelperioden diente ein Löbner'scher Sekundenzähler, dessen Korrektion durch Vergleichung mit einem Chronometer vorher bestimmt wurde.

Diese Beobachtungen wurden für zwei Perioden, eine grössere und eine kleinere ausgeführt. Das entsprechende logarithmische Dekrement war dabei ganz minimal.

Es ergab sich nun folgendes.

$m_r + m_l$	T
128 m/m	56,4
54	55,5
18	55,2
114 m/m	23,2
32	23,3
16	23,5
2	23,2

Die letzten Beobachtungen wurden nochmals in der Nacht wiederholt, um sie von dem etwaigen Einflusse des Strassenverkehrs möglichst zu befreien. Dabei wurde auch das entsprechende Dämpfungsverhältnis v des Pendels, d. h. das Verhältnis zweier nach einander folgender Winkelausschläge des Pendels etwa θ_k und θ_{k+1} (unabhängig vom Vorzeichen derselben) bestimmt.

Es ist also

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}}.$$

Als logarithmisches Dekrement Λ bezeichnen wir die Grösse

$$\Lambda = \text{Log}_{10} v.$$

Die Beobachtungen ergaben nun folgendes.

$m_r + m_l$	T	
100 m/m	23,4	} $\Lambda = 0,00225$ $v = 1,005.$
47	23,3	
8	23,2	
2	23,2	

Die hier angeführten Zahlen lassen erkennen, dass, wenn für eine grosse Eigenperiode des Pendels von etwa 56" eine kleine Abhängigkeit der Periode von der Amplitude im Sinne der Vergrößerung der Periode mit der Amplitude vorliegt, dieselbe doch sehr gering ist. Für eine Periode von 23" ist diese Abhängigkeit fast gar nicht mehr bemerkbar und wir können in der Praxis ohne Zweifel für diese Art Pendel annehmen, dass bei einer mittleren Periode von etwa 25 Sekunden dieselbe für nicht zu grosse Amplituden, die bei seismometrischen Beobachtungen freilich meistens nur in Betracht kommen, ganz und gar unabhängig von den Amplituden der Pendelausschläge ist. Dies ist jedenfalls ein wichtiges Ergebnis, welches zu Gunsten dieser Art Pendel spricht.

Andererseits hat es sich gezeigt, dass sich die Pendelperiode, wenn sie auch gross gewählt wurde, mit der Zeit ausserordentlich konstant erhält.

Dies alles beweist, dass, trotz der Anwendung einer kleinen Feder als unteren Stützpunkt, die Drehungsaxe des Pendels eine ganz bestimmte Lage einnimmt und dieselbe in höchst befriedigender Weise behält.

Die Kleinheit des Dämpfungsverhältnisses v zeigt ausserdem, dass die dämpfende Wirkung der angewandten Federn (oben und unten) eine ganz minimale ist.

Die zweite zu entscheidende Frage bezieht sich auf folgendes.

Welchen etwaigen Einfluss hat die Einschaltung der Vergrößerungsvorrichtung, resp. Schreibfeder auf die Eigenperiode des Pendels selbst?

Es wurden dazu folgende drei Perioden bestimmt:

I) bei ganz frei schwingendem Pendel, II) bei eingeschalteter Vergrößerungsvorrichtung, aber bei gehobener Schreibfeder und III) bei eingeschalteter Vergrößerungsvorrichtung und Schreibfeder, wobei die letztere auf einer Russchicht zeichnete.

Es ergab sich folgendes.

Fall	T
I	23,2
II	22,6 → Sehr schwaches logarithmisches Dekrement.
III	22,8 → Dekrement ein wenig grösser.

Die Beobachtungen wurden nochmals in der Nacht ausgeführt und dabei noch das logarithmische Dekrement resp. Dämpfungsverhältnis ermittelt und zwar aus der Abnahme der Maximalamplituden ohne Berücksichtigung der etwaigen Korrektur ρ für die Reibung des Schreibstiftes am Papier (siehe § 3).

Die Bestimmung der Amplituden geschah immer noch auf visuellem Wege.

Es ergab sich folgendes.

Fall	$m_r + m_t$	T	Λ	ν	
I	8 $\frac{m}{m}$	23,2	0,00225	1,005	
II	13	22,5	0,00418	1,010	
III	15	22,6	0,026	1,06	
			8	0,045	1,11
			4	0,077	1,19
			1	0,120	1,32

Diese Zahlen lehren uns folgendes.

Durch Einschaltung der Vergrößerungsvorrichtung und Schreibfeder wird die Eigenperiode des freien Pendels ein klein wenig vermindert, aber der Unterschied ist auf jeden Fall sehr gering.

Bei manchen Seismographen wird bekanntlich durch Einschaltung der Hebelübertragungen die Eigenperiode des Pendels in ganz merklicher Weise

herabgesetzt, bei diesem Pendel ist jedoch dieser Einfluss äusserst klein. Dies beweist, dass die getroffene Vergrößerungsvorrichtung wirklich äusserst leicht und folglich ganz zweckmässig ist.

Bei Anwendung dieses Pendels für eigentliche seismometrische Beobachtungen wird man selbstverständlich für die Eigenperiode des Pendels denjenigen Wert von T nehmen müssen, welcher sich aus Beobachtungen bei eingeschalteter Vergrößerungsvorrichtung und Schreibfeder ergibt.

Weiter sehen wir, dass diese Vergrößerungsvorrichtung an und für sich fast vollständig reibungslos arbeitet, da das Dämpfungsverhältnis im Falle II $\nu=1,010$ nur um einen äusserst kleinen Betrag grösser ist, als der entsprechende Wert für den Fall I $\nu=1,005$.

Was nun das Dämpfungsverhältnis bei aufgelegter Schreibfeder (Fall III) anbelangt, so ist dasselbe merklich grösser als bei den anderen übrigen Fällen, aber seiner absoluten Grösse nach, infolge der schweren Pendelmasse, doch nicht sehr gross.

Das eine, was dabei recht unangenehm ist, ist der Umstand, dass ν nicht mehr konstant bleibt, sondern mit der Abnahme der Amplituden der Pendelbewegung zunimmt. Diese Veränderlichkeit von ν ist eine inhärente Eigenschaft der mechanischen Registrierungsart, die die Auswertung der entsprechenden Seismogramme in ganz erheblicher Weise erschwert. Will man aus der Ausmessung der regelmässigen, wellenförmigen Stellen eines Seismogrammes zuverlässige Werte für die wahren Amplituden der Bodenverschiebungen ableiten, so muss auf diese Veränderlichkeit von ν Rücksicht genommen werden¹⁾. Dieses lässt sich mit einiger Umständlichkeit durchführen, wie ich es an dem Beispiel der grossen Messina-Katastrophe gezeigt habe²⁾.

Mit einem verhältnismässig leichten, aber gedämpften Horizontalpendel vom Zöllner'schen Typus mit etwa $14\frac{1}{2}$ Klgr. Masse unter Anwendung der mechanischen Registrierung konnte ich ganz zuverlässige Werte für die wahren Amplituden der Bodenbewegung ableiten, wenn ich bei der Bearbeitung des entsprechenden Seismogramms je nach der Grösse der gemessenen Amplitude auf der Kurve das entsprechende Dämpfungsverhältnis einführte. Das Gesetz der Veränderlichkeit von ν musste jedoch zuerst empirisch studiert werden.

Es ist im früheren vorausgesetzt worden, dass ν aus der Abnahme der Maximalamplituden abgeleitet worden ist.

¹⁾ Bei der optischen Registrierung bleibt ν konstant.

²⁾ Siehe «Das Sicilianische Erdbeben am 28. Dezember 1908 nach den Aufzeichnungen der Pulkowa'schen seismischen Station». Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Petersbourg. № 4. 1909.

Also

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}},$$

wenn θ den Winkelausschlag des Pendels bedeutet. Man kann auch die Amplituden y der Kurve bei der mechanischen Registrierung dazu wählen, also etwa

$$v = \frac{y_k}{y_{k+1}}.$$

Es erweist sich dabei, dass v von der Grösse der etwaigen Amplitude abhängig ist. Dies beweist, dass die Pendelbewegung nicht genau der bekannten Differentialgleichung entspricht. Als störende Ursache muss die Reibung des Schreibstiftes am Papier angesehen werden.

Man kann aber das Resultat wesentlich verbessern, indem man in die Grunddifferentialgleichung eine Korrektonsgrösse ρ einführt, die von dieser Reibung gewissermaassen Rechenschaft trägt.

Ich werde jetzt im folgenden Paragraphen diese Frage zuerst eingehend besprechen und erst dann zu der Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses aus Beobachtungen bei verschieden starker Dämpfung (verschiedene Entfernungen der Pole der dämpfenden Magnete) übergehen. Die Registrierung war dabei immer die mechanische, wobei v aus den erhaltenen Kurven abgeleitet werden sollte.

§ 3.

Verallgemeinerte Differentialgleichung der Pendelbewegung bei mechanischer Registrierung.

Denken wir uns nun ein Horizontalpendel von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen, so erhält man, eine optische Registrierung vorausgesetzt, die Kurve seiner Eigenbewegung etwa von der Form der der Fig. 7, wobei die Ordinaten y dieser Kurve bekanntlich folgender Differentialgleichung genügen müssen:

$$y'' + 2\epsilon y' + n^2 y = 0 \dots \dots \dots (1)$$

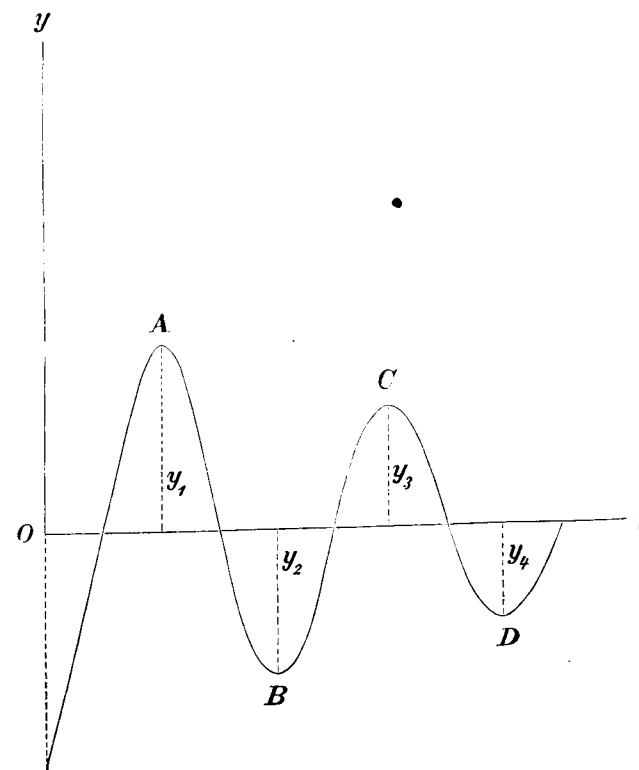
Hierin bedeuten ϵ die Dämpfungskonstante und n eine Konstante,

¹⁾ Wenn y gross ist, so muss eine entsprechende Korrektion Δy angebracht werden. Siehe weiter § 5. Formel (33).

welche von der Eigenperiode T des Pendels ohne Dämpfung unmittelbar abhängt und zwar ist

$$n = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots (2)$$

Fig. 7.



Ist $\epsilon < n$, so stellt die Kurve eine gedämpfte Sinusoide dar. Die Gleichung derselben lautet

$$y = e^{-\epsilon t} [A \cos \gamma t + B \sin \gamma t], \dots \dots \dots (3)$$

wo

$$\gamma = + \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \dots \dots \dots (4)$$

ist.

A und B sind zwei Integrationskonstanten, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{\epsilon}{n} \\ \mu^2 &= 1 - h^2 \\ m &= \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und

so ergibt sich bekanntlich aus der Theorie des Horizontalpendels¹⁾ für das gesuchte Dämpfungsverhältnis, d. h. für das Verhältnis zweier nach einander folgender Maximalamplituden (unabhängig vom Vorzeichen derselben)

$$v = \frac{y_k}{y_{k+1}} = e^{\pi m} \dots \dots \dots (6)$$
$$\Lambda = \text{Log}_{10} v$$

ist das entsprechende logarithmische Dekrement.

Die Konstante n bestimmt sich leicht aus Schwingungen bei schwacher Dämpfung. Sei die entsprechende beobachtete Periode T' und das entsprechende logarithmische Dekrement Λ' , so ist

$$n = \frac{2\pi}{T'} \sqrt{1 + 0,53720\Lambda'^2} \dots \dots \dots (7)$$

Wenn die Dämpfung schwach ist, ist der Unterschied zwischen T und T' äusserst klein.

Alle diese Formeln behalten ihre volle Gültigkeit, wenn die Registrierung eine optische ist.

Im Falle der mechanischen Registrierung, wenn diese mittelst eines Schreibstiftes auf berusstem Papier erfolgt, genügen die Ordinaten y der erhaltenen Kurve nicht mehr genau der Grunddifferentialgleichung (1).

Es muss in diesem Fall in dieselbe eine Korrekursionsgrösse ρ eingeführt werden, wobei die Gleichung folgende Form annimmt²⁾:

$$y'' + 2\epsilon y' + n^2(y + \rho) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

ρ soll eine kleine konstante Grösse sein, die jedoch das Vorzeichen mit y' ändert.

Wenn $y' > 0$ ist, so wird auch $\rho > 0$ und umgekehrt.

Man darf jedoch die Sache nicht so auffassen, als ob diese Annahmen über ρ streng gültig seien. Man darf sie nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit betrachten, die immerhin eine bessere und genauere Auswertung der Seismogramme von mechanisch registrierenden Pendeln gestattet.

Die mechanische Registrierung an und für sich ist mit den Mängeln

¹⁾ Siehe z. B. meinen Aufsatz «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 2. № 1. (1909).

²⁾ Man vergleiche A. Orloff «Sur la Théorie des appareils sismiques». Bulletin astronomique, T. XXIII Année 1906.

der Reibung an berusstem Papier behaftet, die erstens sehr variabel sein kann und zweitens zur Zeit noch so viel Unbestimmtes enthält, dass es ganz und gar unmöglich ist, von allen diesen verschiedenen Umständen in einer Grundformel Rechenschaft zu tragen.

Ganz einwandfreie Resultate wird man doch nicht erhalten und das ist eben einer der Hauptnachteile der mechanischen Registrierungsart; die Einführung der Grösse ρ dürfte aber doch unter den erwähnten Voraussetzungen die Resultate der Kurvenanalyse erheblich verbessern.

Es soll nun von jetzt ab angenommen werden, dass die Kurve der Fig. 7 auf mechanischem Wege erhalten worden ist und es sei eine Anzahl maximaler Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 u. s. w. gemessen worden. Wenn die Schreibfeder merkliche Kreisbögen beschreibt, deren Radius gleich b ist, so muss an diesen gemessenen Ordinaten die Korrektur

$$\Delta y = \frac{1}{6} \frac{y^3}{b^2} \dots \dots \dots (9)$$

angebracht werden¹⁾.

Das allgemeine Integral der Gleichung (8) lautet:

$$(y + \rho) = e^{-\epsilon t} [A \cos \gamma t + B \sin \gamma t] \dots \dots \dots (10)$$

Zwischen den Punkten A und B (siehe die Fig. 7) ist $y' < 0$, folglich wird ρ negativ.

Wollen wir unter ρ immer eine positive Grösse verstehen, so muss für die erwähnte Strecke der Kurve in der Formel (10) statt ρ , $-\rho$ eingesetzt werden.

Rechnen wir die Zeit vom Punkte A aus, so wird in der Formel (10)

$$A = y_1 + \rho$$

und

$$B = \frac{\epsilon}{\gamma} \cdot (y_1 + \rho),$$

also

$$y + \rho = (y_1 + \rho) e^{-\epsilon t} \left[\cos \gamma t + \frac{\epsilon}{\gamma} \sin \gamma t \right].$$

Der der zweiten Maximalamplitude y_2 entsprechende Zeitmoment t_m ergibt sich aus der Gleichung

$$t_m = \frac{\pi}{\gamma}.$$

Es gilt also, unter Berücksichtigung der Beziehungen (4) und (5),

¹⁾ Siehe weiter unten § 5.

nach welchen

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = m \dots \dots \dots (11)$$

wird, die Gleichung

$$(y_2 - \rho) = -(y_1 - \rho)e^{-\pi m} \dots \dots \dots (12)$$

In ganz ähnlicher Weise hat man für die Strecke BC, unter Berücksichtigung, dass ρ jetzt positiv wird,

$$(y_3 + \rho) = -(y_2 + \rho)e^{-\pi m} \dots \dots \dots (13)$$

Das Vorzeichen (—) in dem zweiten Teil der Gleichungen (12) und (13) bedeutet, dass die unter und über der t -Axe liegenden Ordinaten das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Wollen wir nun unter den verschiedenen y immer den absoluten Wert der entsprechenden Ordinaten verstehen und also alle Ordinaten als positiv rechnen, dann gestalten sich die Gleichungen (12) und (13) in die folgenden um:

$$-y_2 - \rho = -(y_1 - \rho)e^{-\pi m}$$

und

$$y_3 + \rho = -(-y_2 + \rho)e^{-\pi m}$$

Setzen wir noch

$$e^{\pi m} = v = (1 + \xi), \dots \dots \dots (14)$$

so ergibt sich schliesslich

$$y_1 - \rho = (y_2 + \rho)(1 + \xi) \dots \dots \dots (15)$$

und

$$y_2 - \rho = (y_3 + \rho)(1 + \xi) \dots \dots \dots (16)$$

Das sind die Beziehungen, von denen wir ausgehen werden. Dabei sind alle Ordinaten als positiv angenommen; ρ ist ebenfalls positiv.

Wollen wir nun die Gleichungen (15) und (16) addieren, so folgt

$$(y_1 + y_2) - 2\rho = \{(y_2 + y_3) + 2\rho\}(1 + \xi) \dots \dots \dots (17)$$

In ähnlicher Weise können wir schreiben

$$(y_2 + y_3) - 2\rho = \{(y_3 + y_4) + 2\rho\}(1 + \xi),$$

also allgemein

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\rho = \{(y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\rho\}(1 + \xi) \dots \dots \dots (18)$$

In dieser Gleichung tritt immer die Summe benachbarter Ordinaten (immer als positiv angenommen) auf. Diese Summe ist unabhängig von einem etwaigen Fehler in der Lage der Nulllinie. Das ist eine wesentlich günstige Bedingung, da sich die Summe der Ordinaten $y_k + y_{k+1}$ immer ziemlich genau aus der entsprechenden Kurve entnehmen lässt.

Ist nun die Dämpfung des Pendels sehr gering, so wird v sich wenig von der Einheit unterscheiden und ξ wird sehr klein sein.

Setzen wir also in erster Annäherung $\xi = 0$, so ergibt sich aus der Beziehung (18),

$$\rho = \frac{1}{4} [(y_k + y_{k+1}) - (y_{k+1} + y_{k+2})] \dots \dots \dots (19)$$

Man kann sich eben dieser Näherungsformel zur Bestimmung von ρ bedienen, wenn das entsprechende Pendel schwach gedämpft ist. Man erhält dabei eine ganze Anzahl Werte für ρ und es lässt sich leicht verfolgen, ob ρ wirklich konstant bleibt, oder von der Grösse der mittleren Amplitude etwa y_{k+1} abhängig ist.

Genauer kann man in folgender Weise verfahren.

Vernachlässigen wir das Produkt zweier kleiner Grössen $\rho\xi$, so ergibt sich aus der Beziehung (18)

$$(y_{k+1} + y_{k+2})\xi + 4\rho = (y_k + y_{k+1}) - (y_{k+1} + y_{k+2}) \dots \dots \dots (20)$$

Setzen wir

$$y_{k+1} + y_{k+2} = a_k \left. \dots \dots \dots (21) \right\}$$

und

$$(y_k + y_{k+1}) - (y_{k+1} + y_{k+2}) = m_k,$$

dann wird

$$a_k \xi + 4\rho = m_k \dots \dots \dots (22)$$

Bildet man nun zwei Gleichungen von der Form der Gleichung (22), so kann man aus diesen die beiden gesuchten Unbekannten ξ und ρ berechnen.

Man kann dabei die Kurve Stück für Stück untersuchen und sehen, ob ρ und die Dämpfungskonstante $v = 1 + \xi$ konstant bleiben.

Man kann aber eine Anzahl von Gleichungen wie (22) bilden und dieselben nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln.

Dies alles setzt aber voraus, dass die Dämpfung wirklich klein ist, dass also v sich wenig von der Einheit unterscheidet.

Wenn aber die Dämpfung eine merkliche Grösse erreicht, so muss man sich schön der strengen Formeln bedienen.

Nach den Gleichungen (18) und (14) können wir schreiben, wenn wir

noch zur Vereinfachung folgende Bezeichnung einführen

$$w_k = y_k + y_{k+1}, \dots \dots \dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} w_k - 2\rho &= (w_{k+1} + 2\rho) \cdot v \\ w_{k+1} - 2\rho &= (w_{k+2} + 2\rho) \cdot v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Aus diesen Gleichungen kann man immer eine der beiden Unbekannten eliminieren und die andere also berechnen.

So erhält man

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{(w_{k+1})^2 - w_k w_{k+2}}{w_k - w_{k+2}} \dots \dots \dots (25)$$

und

$$v = \frac{w_k - w_{k+1}}{w_{k+1} - w_{k+2}} \dots \dots \dots (26)$$

Die Formeln (25) und (26) sind strenge Ausdrücke für die beiden Grössen ρ und v , mit welchen man das Verhalten dieser Grössen für verschiedene Teile der Kurve verfolgen kann.

Man darf sie jedoch bei kleinen Dämpfungsverhältnissen v nicht anwenden, da sie in diesem Fall eine für die genauen Berechnungen ungünstige Form annehmen, da die Unbekannten sich als das Verhältnis zweier kleiner Grössen ergeben würden.

Anstatt die Grössen ρ und v stellenweise aus der Kurve zu bestimmen, kann man sich auch bei der Benutzung der Formeln (25) und (26) der Methode der kleinsten Quadrate bedienen.

Man bestimme (bei grösseren Werten von v) aus (25) und (26) ein Paar Werte von ρ und v , etwa ρ_0 und v_0 und setze dann

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \eta \\ v &= v_0 + \zeta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

wo η und ζ zwei kleine Grössen bedeuten sollen.

Indem man das Produkt $\eta\zeta$ vernachlässigt, erhält man aus der ersten der Gleichungen (24) eine Gleichung von der folgenden Form:

$$A_k \eta + B_k \zeta = C_k, \dots \dots \dots (28)$$

wo A_k , B_k und C_k die folgende Bedeutung haben:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= 2(1 + v_0) \\ B_k &= w_{k+1} + 2\rho_0 \\ C_k &= w_k - v_0 w_{k+1} - 2\rho_0(1 + v_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Das System der Gleichungen (28) lässt sich nun leicht nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln.

Mit Hilfe der hier entwickelten Formeln lässt sich nun die Reibungskonstante ρ bei Anwendung der mechanischen Registrierungsart untersuchen. Es ergibt sich auch daraus der korrigierte Wert (inbezug auf ρ) des Dämpfungsverhältnisses v .

Nach diesen Auseinandersetzungen wollen wir zu der Frage, der experimentellen Bestimmung von ρ und v bei dieser Art Pendel übergehen.

§ 4.

Untersuchungen über das Dämpfungsverhältnis des Pendels.

Die Registrierung war dabei stets eine mechanische, auf berusstem Papier. Die Trommelgeschwindigkeit wurde ziemlich gross genommen etwa 74,5^m/_m auf eine Minute, wobei jede einzelne Sekunde auf dem Papierbogen auf einer besonderen Hilfslinie markiert wurde.

Die Berussung des Papiers erfolgte auf zweierlei Art: erstens, mittelst eines gewöhnlichen Gasbrenners und zweitens mit Hilfe eines Petroleumdochtes, da es sich dabei auch darum handelte, die Abhängigkeit der Reibung (ρ und v) von der Art der Berussung etwas näher zu verfolgen.

Die Russschicht wurde möglichst dünn gewählt und auf die möglichst gleichmässige Verteilung derselben auf dem entsprechenden Papierbogen besondere Aufmerksamkeit gelenkt.

Die Versuche wurden bei 4 verschiedenen Stärken der Dämpfung ausgeführt.

- Erstens ganz ohne Magnete, Kurven № I,
- zweitens bei einer Poldistanz der Magnete von 15,0^m/_m, Kurven № II,
- drittens » » » » » 11,2 » , » № III
- und viertens » » » » » 8,0 » , » № IV.

Ich werde jetzt die Ergebnisse dieser Versuche der Reihe nach beschreiben.

Vor Beginn der eigentlichen Beobachtungen wurde die Vergrösse-

rungsvorrichtung weggenommen und der Schreibstift direkt am Ende des Pendelarmes angebracht.

Im Folgenden bedeute wie früher $y_k + y_{k+1}$ die Summe der benachbarten Amplituden der Pendelausschläge nach oben und unten (unabhängig vom Vorzeichen derselben), T die Eigenperiode des Pendels (ohne Dämpfung), Λ das logarithmische Dekrement und v das Dämpfungsverhältnis.

Es ergab sich in diesem Fall Folgendes. (Die dämpfenden Magnete sind ganz entfernt¹⁾).

Gasberussung.

	$y_k + y_{k+1}$	T	Λ	v
Grössere Amplit. Zwischen	86,3 ^m / _m und 70,4 ^m / _m	20,41	0,0037	1,009
Kleinere » »	21,2 » 18,3	20,35	0,0027	1,006

Petroleumberussung.

	$y_k + y_{k+1}$	T	Λ	v
Grössere Amplit. Zwischen	88,6 ^m / _m und 68,7 ^m / _m	20,41	0,0046	1,011
Kleinere » »	21,3 » 17,1	20,35	0,0040	1,009

Diese Zahlen zeigen erstens, dass die Eigenperiode des Pendels für praktische Zwecke als unabhängig von den Amplituden der Ausschläge zu betrachten ist. Dies ist ein neuer Beleg für die Zweckmässigkeit der hier getroffenen Aufhängung des Pendels. Bei Gas- und Petroleumberussung erhält man genau dieselben Werte von T .

Die Dämpfung ist in diesem Fall ganz minimal, doch scheinbar etwas grösser bei Petroleum- als bei Gasberussung. v ist etwa von derselben Grössenordnung, wie bei dem freischwingenden Pendel ($v = 1,005$, vergl. Fall I in § 2). Folglich übt die Reibung des Schreibstiftes am Papier in diesem Fall (bei ausgeschalteter Vergrösserungsvorrichtung) eine ganz minimale dämpfende Wirkung aus.

¹⁾ Da in diesem Fall die Dämpfung äusserst klein und die Vergrösserungsvorrichtung ausgeschaltet war, so habe ich Λ direkt aus der Abnahme der Amplituden ermittelt, wozu ich die bekannte Formel

$$\Lambda = \frac{\text{Log}(y_1 + y_2) - \text{Log}(y_{i-1} + y_i)}{i - 2}$$

verwendet habe. In meinem Fall war $i = 26$.

Nach diesen Vorversuchen wurde nun die Vergrösserungsvorrichtung eingeschaltet und die Kurven № I (die Dämpfungsplatte ganz ohne Magnete) aufgenommen.

Es ergaben sich dabei für die Eigenperiode des Pendels folgende Werte.

Bei Gasberussung	$T = 19,8$
Bei Petroleumberussung	$T = 19,9$.

Die Eigenperiode des Pendels war also etwas kleiner geworden, als im vorigen Falle. Dies wird durch den Einfluss der Vergrösserungsvorrichtung bedingt, die Abnahme von T bei dieser Art Pendel ist aber auf jeden Fall ziemlich unbedeutend.

Nun ging man zur Bestimmung von ρ über. Da die Dämpfung gering war, so wurde zuerst von der Näherungsformel (19) Gebrauch gemacht.

Es stellte sich dabei heraus, dass für kleinere Amplituden ρ sich kleiner ergibt, als für grössere, der Unterschied aber ist nicht sehr bedeutend.

Bei Gasberussung, bei Abnahme von $y_k + y_{k+1}$ von 144,4 ^m/_m bis auf 39,1 ^m/_m sinkt ρ von 1,5 ^m/_m bis auf 1,0 ^m/_m herab. Der Mittelwert von ρ beträgt also etwa 1,3 ^m/_m.

Bei Petroleumberussung, wenn sich $y_k + y_{k+1}$ von 150,3 ^m/_m bis 6,2 ^m/_m ändert, vermindert sich ρ von 1,8 ^m/_m bis auf 0,8 ^m/_m. Der Mittelwert von ρ beträgt also gleichfalls etwa 1,3 ^m/_m.

Nun wurden dieselben experimentellen Daten nach der Methode der kleinsten Quadrate bei Zugrundelegung der Formeln (22), (21) und (14) behandelt.

Es ergab sich zwischen denselben Grenzen für $y_k + y_{k+1}$

Bei Gasberussung	$\rho = 0,84$ ^m / _m	$\xi = 0,0195$	$v = 1,0195$
Bei Petroleumberussung	$\rho = 1,07$	$\xi = 0,0216$	$v = 1,0216$

Der Unterschied mit den früher gefundenen Mittelwerten von ρ ist nicht gross.

Das Dämpfungsverhältnis v hat sich ziemlich klein ergeben. Dieses beweist, dass auch bei Anwendung der Vergrösserungsvorrichtung die dämpfende Wirkung der Reibung des Schreibstiftes am berussten Papier, wenn die Amplituden nicht zu klein sind, ebenfalls unbedeutend ist.

Diese Reibung scheint bei Gasberussung kleiner zu sein, als bei

Petroleumberussung, da im ersten Falle ρ und v beide sich etwas kleiner ergeben haben.

Nun wurden die dämpfenden Magnete aufgesetzt, ihre Pole auf eine Entfernung von $15,0 \text{ m/m}$ eingestellt und alsdann die Kurven № II aufgenommen¹⁾. Es wurden 4 Kurven beiderlei Art erhalten.

Da die Dämpfung nicht mehr sehr klein war, so hat man sich zur Berechnung von ρ und v schon der strengen Formeln (25) und (26) bedient.

Die Bestimmung von ρ wurde nur für den Fall der Gasberussung ausgeführt. Im Folgenden bedeute y_k die mittlere Amplitude der Ausschläge für den zugehörigen Wert von ρ .

Es ergab sich Folgendes:

y_k	ρ
49 m/m	$1,3 \text{ m/m}$
25	0,5
12	0,3
6	0,2
3	0,1
12 m/m	$0,3 \text{ m/m}$
6	0,1
3	— 0,1
13 m/m	$0,5 \text{ m/m}$
6	0,1
3	0,1
27 m/m	$0,5 \text{ m/m}$
13	0,7
6	0,1
3	0,0

Nun gehen wir zu den Werten des Dämpfungsverhältnisses v über. Ich werde dabei auch die einzelnen Werte der verschiedenen $w_k = y_k + y_{k+1}$ ²⁾

¹⁾ Es sei dabei bemerkt, dass, um vergleichbare Resultate zu erzielen, alle Kurven (№№ I, II, III und IV) bei Gas - resp. Petroleumberussung, auf einem und demselben Papierstreifen nach einander aufgenommen wurden.

²⁾ An diesen Werten sind die früher erwähnten Korrekturen Δy schon angebracht.

und ausserdem den Wert des etwaigen Dämpfungsverhältnisses v_1 , abgeleitet ohne Berücksichtigung der Korrektur für ρ einfach aus der Beziehung

$$v_1 = \frac{y_k + y_{k+1}}{y_{k+1} + y_{k+2}} = \frac{w_k}{w_{k+1}} \text{ } ^1)$$

angeben.

Gasberussung.

w_k	v	v_1
$154,9 \text{ m/m}$		1,91
81,2	1,82	2,00
40,7	1,93	2,07
19,7	1,96	2,19
9,0	2,06	2,37
3,8	Im Mittel $v = 1,94$	
$38,9 \text{ m/m}$		2,03
19,15	1,93	2,15
8,92	2,09	2,22
4,02	Im Mittel $v = 2,01$	
$41,7 \text{ m/m}$		2,05
20,3	1,91	2,23
9,1	2,15	2,33
3,9	Im Mittel $v = 2,03$	
$84,9 \text{ m/m}$		1,95
43,6	1,88	2,02
21,6	1,84	2,24
9,65	2,15	2,35
4,1	Im Mittel $v = 1,96$	

Als Mittel der vier einzelnen Mittelwerte von v ergibt sich

$$v = 1,99.$$

¹⁾ Durch die Bildung der Summe der Amplituden eliminiert man den Fehler von der etwaigen unrichtigen Lage der Nulllinie.

Petroleumberussung.

w_k	v	v_1
103,6 ^m / _m		
51,3	2,22	2,02
24,3	1,97	2,11
10,6	2,23	2,29
4,45	2,20	2,38
1,65	<u>Im Mittel $v = 2,16$</u>	2,70
43,0 ^m / _m		
19,95	1,99	2,16
8,35	2,23	2,39
3,15	<u>Im Mittel $v = 2,11$</u>	2,65
55,85 ^m / _m		
26,6	1,91	2,10
11,3	2,23	2,35
4,45	<u>Im Mittel $v = 2,07$</u>	2,54
78,8 ^m / _m		
39,55	1,82	1,99
18,0	2,08	2,20
7,65	<u>Im Mittel $v = 1,95$</u>	2,35

Als Mittel der vier einzelnen Mittelwerte von v ergibt sich

$$v = 2,07.$$

Aus den hier angeführten Zahlenangaben für die Kurven № II lassen sich folgende Schlüsse ziehen.

Bei Anwendung einer magnetischen, wenn auch ziemlich schwachen Dämpfung, ergab sich ρ für kleinere Amplituden, etwa bis zu 25 ^m/_m, überhaupt sehr klein. Mit Abnahme von y_k nimmt auch im Allgemeinen ρ in

ganz deutlicher Weise ab und für ganz kleine Amplituden wird ρ überhaupt ganz minimal. Dies ist ein sehr günstiger Umstand, da man bei seismometrischen Beobachtungen mit Instrumenten mit kleiner Vergrößerung hauptsächlich nur mit kleinen Amplituden zu tun hat.

Was nun das wahre Dämpfungsverhältnis v anbelangt, so tritt eine kleine Zunahme von v mit Verkleinerung von y_k ein, aber die Unterschiede in den einzelnen Werten von v sind überhaupt unbedeutend und, wenn man sich mit einer Genauigkeit von 0,1 — 0,2 in dem Werte von v begnügt, was für seismische Stationen zweiten Ranges wohl als ganz ausreichend zu betrachten ist, so kann man für v einfach Mittelwerte bilden.

Es besteht weiter kein wesentlicher Unterschied zwischen den Mittelwerten von v bei Gas- und Petroleumberussung, da die magnetische Dämpfung die Dämpfung von der Reibung des Schreibstiftes am Papier schon reichlich genug überdeckt.

Hätte man das Dämpfungsverhältnis direkt aus den Werten der maximalen Amplituden ohne Berücksichtigung der Korrektur für ρ abgeleitet (Werte von v_1), so würde man viel weniger konstante Werte für das Dämpfungsverhältnis bekommen haben, wobei die Zunahme von v_1 mit der Verkleinerung von y_k eine ganz ausgeprägte ist.

Wir sehen also, dass die Einführung der Korrektur ρ für die Reibung des Schreibstiftes das Resultat der Verarbeitung der Kurven ganz wesentlich verbessert, da v sich jetzt als viel konstanter gestaltet. Das noch übrigbleibende kleine Anwachsen von v mit der Abnahme von y_k liegt vielleicht schon in der Natur der Sache selbst.

Gehen wir jetzt zu dem dritten Fall über.

Die Magnete wurden auf eine Entfernung von 11,2 ^m/_m eingestellt und alsdann die Kurven № III aufgenommen. Für die Gasberussung erhielt man 5 und für die Petroleumberussung 4 verschiedene Kurven.

Bei der Gasberussung ergaben sich folgende Werte für ρ (nach Formel (25) berechnet).

y_k	ρ
33 ^m / _m	0,6 ^m / _m
10	0,3
3	— 0,1
21 ^m / _m	0,5 ^m / _m
7	0

y_k	ρ
31 m/m	0,5 m/m
10	0,1
3	0,1
25 m/m	0,4 m/m
8	0
13 m/m	0 m/m
4	0,2

Für die Dämpfungsverhältnisse v und v_1 erhielt man folgende Zahlen:

<i>Gasberussung.</i>		
w_k	v	v_1
119,25 m/m		
39,05	2,93	3,05
11,7	3,11	3,34
2,9	Im Mittel $v = 3,02$	4,03
76,1 m/m		
24,55	2,93	3,10
6,95	3,56	3,53
2,0	Im Mittel $v = 3,25$	3,48
115,05 m/m		
36,95	3,00	3,11
10,9	3,47	3,39
3,4	Im Mittel $v = 3,24$	3,21
89,5 m/m		
28,8	2,99	3,11
8,5	3,38	3,39
2,5	Im Mittel $v = 3,19$	3,40

w_k	v	v_1
47,45 m/m		3,18
14,9	3,18	3,20
4,65	2,89	4,23
1,1	Im Mittel $v = 3,04$	

Als Mittel der fünf einzelnen Mittelwerte von v folgt:

$$v = 3,15.$$

Petroleumberussung.

w_k	v	v_1
87,9 m/m		3,24
27,15	3,04	3,80
7,15	3,60	4,47
1,6	Im Mittel $v = 3,32$	
86,2 m/m		3,24
26,6	3,01	3,91
6,8		
80,3 m/m		3,21
25,0	2,97	3,91
6,4		
64,1 m/m		3,37
19,05	3,18	3,89
4,9		

Als Mittel der 4 Werte von v für die 4 erhaltenen Kurven ergibt sich:

$$v = 3,12.$$

Die erhaltenen Zahlen zeigen uns nun Folgendes.
 ρ ist wiederum für kleine Amplituden sehr klein und nimmt mit abnehmenden Amplituden im Allgemeinen ab.

Was nun die absoluten Werte von ρ bei verschiedenen Werten von y_k anbelangt, so sind dieselben freilich als identisch mit denen der Kurven № II anzunehmen. Dies beweist, dass ρ in erster Annäherung als unabhängig von der Stärke der etwaigen magnetischen Dämpfung zu betrachten ist.

Dieses Resultat ist insofern günstig, als es gestattet, diese Grösse ρ bei verhältnismässig schwacher Dämpfung zu untersuchen (etwa bei $v = 1,5 - 2$). Man kann sich dann eine Tabelle der Werte von ρ (durch graphische Interpolation) herstellen und bei Bearbeitung verschiedener Kurven und Seismogramme für jede gemessene Amplitude den entsprechenden Wert von ρ in Betracht ziehen.

Was nun die Werte des Dämpfungsverhältnisses v anbelangt, so sind dieselben etwas mehr veränderlich als bei den Kurven № II, die Unterschiede sind aber nicht sehr beträchtlich, wenn man Rücksicht auf die Genauigkeit nimmt, mit welcher v für praktische Zwecke ermittelt werden soll. Nötigenfalls kann man von dieser Veränderlichkeit von v bei verschiedenen mittleren Amplituden Rechenschaft tragen und bei Bearbeitung der Seismogramme in Betracht ziehen. Dadurch wird man selbstverständlich bessere Resultate erzielen.

Das mittlere Dämpfungsverhältnis v bei Gas- und Petroleumberussung ergibt sich fast identisch.

Was nun die Werte von v_1 anbelangt, so sind sie im Allgemeinen etwas grösser als die entsprechenden Werte von v , die Unterschiede sind aber wiederum für grössere Amplituden nicht sehr gross. Nur für ganz kleine Amplituden nimmt v_1 in den meisten Fällen stark zu.

Gehen wir jetzt zu den letzten Kurven № IV über.

Es wurden bei Gasberussung 5 und bei Petroleumberussung 4 verschiedene Kurven aufgenommen.

Die Dämpfung wurde dabei ziemlich stark gewählt. Die entsprechende Entfernung der Pole der dämpfenden Magnete betrug dabei $8,0 \text{ m/m}$.

Bei einer so starken Dämpfung ist die genaue Bestimmung von v ziemlich schwierig.

Man muss nämlich für die Berechnung von v nach der Formel (26) drei Werte w_k für die Summen der Ordinaten haben. Nun wird bei starker Dämpfung die dritte Summe w_{k+2} im Allgemeinen sehr klein und infolgedessen kann sie mit einem verhältnismässig grossen prozentischen Fehler behaftet werden. Dadurch wird die genaue Bestimmung von v sehr erschwert.

Man kann aber zur Bestimmung von v einen anderen Weg einschlagen und sich nur mit zwei Werten von w_k begnügen, wenn ρ als Funktion von y_k schon bekannt ist.

Dazu greifen wir zu der ersten der Gleichungen (24) zurück.

Es seien also drei Ordinaten y_1, y_2, y_3 gemessen.

Die ihnen entsprechenden Werte von ρ seien ρ_1, ρ_2 und ρ_3 .

Dann können wir auf Grund der Gleichungen (24) mit genügender Annäherung schreiben

$$(y_1 + y_2) - (\rho_1 + \rho_2) = \{(y_2 + y_3) + (\rho_2 + \rho_3)\} v,$$

oder

$$v = \frac{(y_1 + y_2) - (\rho_1 + \rho_2)}{(y_2 + y_3) + (\rho_2 + \rho_3)} \dots \dots \dots (30)$$

Für stärkere Dämpfungsverhältnisse ist diese Formel viel bequemer, als die Formel (26). Von derselben habe ich eben bei den Kurven № IV Gebrauch gemacht. Es wurde dazu zuerst eine Kurve für die Abhängigkeit von ρ von y_k auf Grund der Ergebnisse für die Kurven № II und № III aufgezeichnet und aus dieser die den verschiedenen y_k entsprechenden Werte von ρ_k entnommen.

Um sich jedoch zu überzeugen, inwieweit die Benutzung der Formel (30) zu richtigen Resultaten führt, wurde für die erste der Kurven № II bei Gasberussung der Wert von v nochmals nach der Formel (30) berechnet.

Es ergab sich dabei Folgendes:

w_k	v
154,9 m/m	1,81
81,2	1,88
40,7	1,96
19,7	2,08
9,0	2,26
3,8	

Vergleicht man diese Werte mit den früher gefundenen Zahlen, so sieht man, dass sie bis etwa auf 0,1 identisch ausfallen.

Die Anwendung der Formel (30) ist also vollständig zulässig.

Es haben sich nun bei der Bearbeitung der Kurven № IV folgende Werte für die Dämpfungsverhältnisse v und v_1 ergeben.

Gasberussung.

w_k	v	v_1
67,1 ^m / _m	8,09	8,44
7,95		
73,1 ^m / _m	8,33	8,70
8,4		
106,4 ^m / _m	8,06	8,44
12,6		
70,9 ^m / _m	8,60	8,97
7,9		
66,55 ^m / _m	8,34	8,70
7,65		
Im Mittel	$v = 8,28.$	

Petroleumberussung.

w_k	v	v_1
77,15 ^m / _m	9,13	9,52
8,10		
59,65 ^m / _m	10,15	10,46
5,70		
51,9 ^m / _m	10,73	11,04
4,7		
100,0 ^m / _m	8,85	9,26
10,8		
Im Mittel	$v = 9,72.$	

Die hier angeführten Zahlen zeigen erstens, dass bei einer Poldistanz von 8,0 ^m/_m, wo also auf jeder Seite der dämpfenden Kupferplatte noch ein 1,5 ^m/_m freier Spielraum bleibt, die Dämpfung schon ganz beträchtlich geworden ist.

Die Werte von v sind nicht mehr so konstant, wie in den früheren Fällen und ändern sich etwas von einer Kurve zur anderen, aber für grössere Dämpfungsverhältnisse, wie die hier vorkommenden, sind solche Änderungen von keinem grossen Belang.

Überhaupt ist die genaue Bestimmung von v , wenn die Dämpfung schon gross geworden ist, eine sehr schwierige Aufgabe, speziell für kleinere Amplituden der Ausschläge. Es ist wohl anzunehmen, dass für ganz kleine Werte von y_k , v sich noch grösser ergeben würde.

v_1 ist überhaupt immer grösser als v , wie es auch nach der Formel (30) sein soll, da in ihr alle ρ immer als positive Grössen anzunehmen sind, aber bei den hier vorkommenden Werten von w_k , die nie sehr klein waren, sind diese Unterschiede gar nicht bedeutend. Auf jeden Fall sind sie kleiner, als die Unterschiede zwischen den einzelnen Werten von v .

Fassen wir nun die Resultate dieser mannigfaltigen Versuche zusammen, so sehen wir, dass die Einführung des Korrektionsgliedes ρ in die Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung sich als ganz zweckmässig erwiesen hat. Dadurch erreicht man eine viel bessere Konstanz des Dämpfungsverhältnisses v , speziell für kleine Amplituden, aber, trotz der Einführung von ρ , ist v bei ganz kleinen Amplituden etwas grösser, als bei grösseren Werten derselben. Die Unterschiede sind, in Anbetracht der Genauigkeit, mit welcher v für praktische Zwecke ermittelt werden muss, nicht sehr bedeutend, so dass man sich zuweilen mit einem Mittelwert von v begnügen kann. Nötigenfalls kann von der Änderung von v mit den Amplituden der Ausschläge Rechenschaft getragen werden.

Bei Anwendung der magnetischen Dämpfung hat sich ρ als eine ziemlich kleine Grösse ergeben, es ist aber nicht konstant, sondern nimmt mit Verkleinerung der Amplituden ab. Für ganz kleine Amplituden ist ρ äusserst klein, was zum Zweck der Auswertung der Seismogramme ein sehr günstiger Umstand ist.

Wir sehen also, dass die Voraussetzung über die Konstanz von ρ nicht vollkommen zutreffend ist; da aber ρ als klein sich ergeben hat, so ist dieser Umstand von keiner so grossen Bedeutung. Auf jeden Fall werden durch die Einführung von ρ die Resultate der Kurvenanalyse ganz bedeutend verbessert. Es bedarf noch weiterer, ziemlich eingehender Untersuchungen, um das Gesetz der Änderung von ρ bei Anwendung der mechanischen Registrierungsart klar zu legen.

Zum Schluss sei bemerkt, dass die verschiedenen hier angegebenen Formeln, zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses v nur dann angewandt werden können, wenn die Stärke der Dämpfung eine bestimmte Grenze nicht überschritten hat, wo man also mindestens 3 maximale Amplituden auf der entsprechenden Kurve mit genügender Genauigkeit noch messen kann.

Ist das nicht der Fall, so kann man von keiner dieser Formeln mehr Gebrauch machen.

Bei einem sehr stark gedämpften Horizontalpendel kann man sich jedoch besonderer Methoden bedienen, die ich erst in einer anderen Abhandlung besprechen werde.

§ 5.

Anwendung des Pendels für seismometrische Beobachtungen.

Die Versuche, welche mit dieser Art Pendel ausgeführt worden sind, haben also gezeigt, dass dieses Instrument bei passender Behandlung für seismometrische Zwecke vollkommen geeignet ist. Wie es zu verwenden ist, lässt sich aus allem hier Mitgeteilten und aus den Entwicklungen, die im § 2 meiner früher erwähnten Abhandlung ¹⁾ niedergelegt sind, sehr gut übersehen.

Der Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit halber werde ich jedoch diese Frage nochmals hier kurz behandeln und die entsprechenden Formeln zusammenstellen.

Hat man ein solches Pendel zur Verfügung, so wird man am besten tun, es in einem Kellerraum, wo die Temperaturschwankungen gering sind, aufzustellen. Das Lokal darf jedoch nicht zu feucht und ausserdem darf es nicht den Erschütterungen des Strassenverkehrs zu stark ausgesetzt sein. Die Wand, an welcher das Pendel aufgehängt wird, darf nicht von der Sonne bestrahlt werden; am besten wähle man eine innere Wand.

Um beide Komponenten der Bodenbewegung registrieren zu können, ist es wünschenswert, zwei Pendel senkrecht zu einander aufzustellen, das eine für die N — S und das andere für die E — W Komponente ²⁾. Als Re-

¹⁾ Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 2. № 1 (1909).

²⁾ Diese Pendel werden vom Mechaniker am Physikalischen Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg Herrn Masing nebst Vergrösserungsvorrichtung, dämpfenden Magneten, Ersatzfedern etc., aber jedoch ohne Registrierapparat, zum Preise von 150 Rubel das Stück geliefert.

gistrierapparat kann man irgend welchen entsprechenden Apparat anwenden, nur muss er einen möglichst gleichmässigen Gang haben und die Trommelgeschwindigkeit darf nicht zu klein sein, jedenfalls nicht kleiner als 15^m/_m in der Minute, sonst wird die Erforschung kurzer seismischer Wellen sehr erschwert sein ¹⁾.

Das zum Registrieren anzuwendende Papier muss möglichst glatt ²⁾ sein, darf keine Poren besitzen und muss mit einer dünnen gleichmässig verteilten Russschicht überzogen werden, am besten von einem gewöhnlichen Gasbrenner mit Russflamme.

Bei der Aufstellung des Pendels muss man der richtigen Montierung der Vergrösserungsvorrichtung besondere Aufmerksamkeit widmen und sich vorher überzeugen, dass alles richtig funktioniert.

Für die Eigenperiode T des Pendels ohne Dämpfung bei eingeschalteter Vergrösserungsvorrichtung wähle man eine Periode von 20 bis 25 Sekunden.

Was nun die Stärke der Dämpfung anbelangt, so richte man dieselbe durch Annäherung der Magnetenpole nach Bedarf ein, aber das entsprechende Dämpfungsverhältnis muss auf jeden Fall nicht kleiner als 5 gewählt werden. Je grösser v ist, desto besser werden die theoretischen Forderungen zur genauen Auswertung der Seismogramme erfüllt, es kann aber bei dieser Art Pendel jedoch vorkommen, dass bei zu starker Dämpfung die Empfindlichkeit der Registrierung keine genügende wird.

Was nun die verschiedenen Pendelkonstanten anbelangt, so wird die reduzierte Pendellänge l durch Ausmessungen in der in § 1 angegebenen Weise bestimmt, unter Berücksichtigung der verschiedenen Korrekturen für die einzelnen schwingenden Massen.

Die Entfernung L_0 der Drehungsaxe vom Ende des Pendels, wo der kürzere Hebelarm der Vergrösserungsvorrichtung eingreift, so wie die Längen des kürzeren und längeren Hebelarmes selbst a und b werden direkt ausgemessen.

Ist nun also

$$L = \frac{b}{a} L_0 \dots \dots \dots (31)$$

bekannt, so stellt

$$V = \frac{L}{l} \dots \dots \dots (32)$$

¹⁾ Ziemlich gute, wenn auch einfache Apparate kann man von Bosch in Strassburg in E. (Münstergasse) beziehen; Preis pro Stück 300 Mark. Sehr vollkommene und genaue Registrierapparate werden von dem eben erwähnten Mechaniker Herrn Masing in Petersburg zum Preise von 350 Rubel geliefert. Bei diesen letzten Registrierapparaten ist jedoch die Entfernung der Lienen auf der Trommel eine so grosse, dass man sie für zwei Komponenten zugleich verwerten kann.

²⁾ Sehr gutes Papier kann man von E. Zimmermann in Leipzig beziehen (Emilienstrasse 21).

die Vergrößerung des Pendels für unendlich kleine Perioden der Erdbebenwellen dar.

Die Eigenperiode des Pendels T bestimme man aus Schwingungsbeobachtungen bei sehr schwacher Dämpfung (bei ganz entfernten Magneten). Es lohnt sich dabei, sich der visuellen Methode mittelst Fernrohrs und Skala zu bedienen (man befestige dazu einen kleinen Spiegel in der Nähe der Drehungsaxe des Pendels).

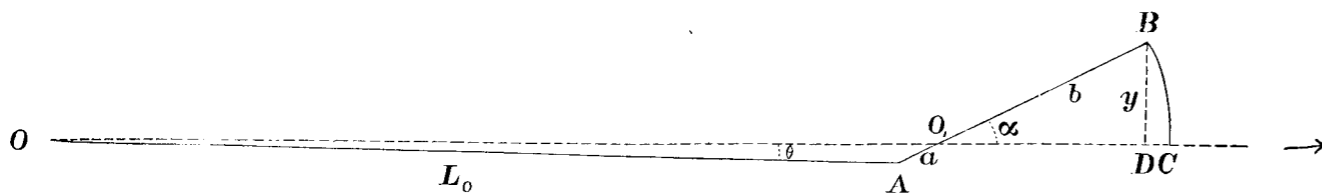
Bei Anwendung der mechanischen Registrierungsart, speziell bei Anwendung von Hebelübertragungen, muss man noch auf folgenden Umstand Acht geben.

Bei Ablenkung des Pendels beschreibt der Schreibstift am Papier nicht mehr gerade Linien, wie bei der optischen Registrierung, sondern Kreisbögen, somit werden die auf der Kurve gemessenen Ordinaten nicht mehr proportional den Winkelablenkungen des Pendels; sie bedürfen also einer kleinen positiven Korrektur Δy . Weiter geben auf der Zeitaxe die Abszissen der verschiedenen Punkte der Kurve nicht die entsprechenden wahren Zeitmomente wieder, sondern sie sind etwas grösser als die wahren, da die Trommel sich immer unter dem Schreibstift vom Pendel fortbewegt. Man muss also eine kleine negative Korrektur Δt anbringen.

Wollen wir nun die entsprechenden Korrekturen für die Amplituden und Zeiten bestimmen.

Es sei $OA = L_0$, wie oben, die Länge der Pendelstange selbst, die wir als gross voraussetzen wollen, a die des kürzeren und b des längeren Hebelarmes (Siehe die Fig. 8).

Fig. 8.



Das Pendel werde von seiner Ruhelage um einen sehr kleinen Winkel θ gedreht, dann drehe sich der Vergrößerungshebel um den Winkel α .

Mit genügender Annäherung kann man setzen

$$\alpha = \frac{L_0}{a} \theta.$$

Der entsprechende Ausschlag des Schreibstiftes auf der Registrier-

trommel, welcher sich nach rechts in der Richtung des Pfeils fortbewegen soll, sei y .

Da α klein ist, so kann man setzen:

$$y = b \cdot \sin \alpha = b\alpha \left[1 - \frac{\alpha^2}{6} \right].$$

Wir müssten aber an der Registriertrommel Ausschläge bekommen, die den Winkelausschlägen des Pendels wirklich proportional sind.

Bedeute nun

$$y_m = L_0 \frac{b}{a} \theta = b\alpha,$$

so wird die gemessene Amplitude y kleiner ausfallen als y_m ; sie bedarf infolgedessen einer kleinen positiven Korrektur

$$\Delta y = y_m - y = \frac{1}{6} b\alpha^3.$$

Es ergibt sich also, auf Grund der oberen Beziehung

$$\Delta y = \frac{1}{6} \frac{y^3}{b^2}, \dots \dots \dots (33)$$

wobei y im Verhältnis zu b klein sein soll.

Das ist die gesuchte Amplitudenkorrektur.

Wollen wir nun die Zeitkorrektur Δt bestimmen. Bedeute λ die Länge einer Sekunde auf der Registriertrommel, so ersieht man aus der Figur 8, dass die Abszisse des Punktes B einem Moment entspricht, welcher um $\frac{CD}{\lambda}$ grösser als der wahre ist.

Die Zeitkorrektur ist also immer eine negative Grösse, also

$$\Delta t = - \frac{CD}{\lambda}.$$

Nun ist

$$CD = b(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} b\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{y^2}{b},$$

folglich wird

$$\Delta t = - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\lambda b} \dots \dots \dots (34)$$

Bei Ausmessung der entsprechenden Kurven müssen, wenn die Amplituden nicht sehr klein sind, diese beiden Korrekturen immer berücksichtigt werden.

Nach der Bestimmung von T gehe man zur Bestimmung von ρ über. Man setze die Magnete auf, nehme ein Dämpfungsverhältnis v etwa gleich

1,5 — 2 und lasse das Pendel die Kurve seiner Eigenbewegung schreiben. Man messe dann eine Anzahl Maximalordinaten y_k , bringe an denselben die Korrekturen Δy an und bestimme ρ nach der Formel (25)¹⁾

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{(y_{k+1} + y_{k+2})^2 - (y_k + y_{k+1})(y_{k+2} + y_{k+3})}{(y_k + y_{k+1}) - (y_{k+2} + y_{k+3})}$$

Dieses ρ entspricht etwa einer mittleren Amplitude

$$\frac{y_k + y_{k+1} + y_{k+2} + y_{k+3}}{4}$$

Hat man also ρ für verschiedene mittlere Amplituden ermittelt, so trage man diese Werte auf ein Koordinatennetz auf und stelle sich durch graphische Interpolation eine kleine Tabelle für ρ zusammen. Es ist wünschenswert diese Bestimmungen mehrmals zu wiederholen und zwar bei verschiedenen Werten von v ; ρ wird sich im Allgemeinen recht klein ergeben.

Wenn ρ für verschiedene Amplituden y_k einmal bekannt ist, so stelle man die dämpfenden Magnete auf die gewählte definitive Entfernung ein und gehe zur Bestimmung des wahren Dämpfungsverhältnisses v über.

Wenn die Dämpfung nicht zu stark ist, bediene man sich der Formel (26)

$$v = \frac{w_k - w_{k+1}}{w_{k+1} - w_{k+2}}, \dots \dots \dots (26)$$

wo

$$w_k = y_k + y_{k+1} \dots \dots \dots (23)$$

bedeutet.

Bei ziemlich starker Dämpfung wende man die Formel (30) an

$$v = \frac{(y_1 + y_2) - (\rho_1 + \rho_2)}{(y_2 + y_3) + (\rho_2 + \rho_3)}, \dots \dots \dots (30)$$

unter Bezugnahme der schon bekannten Werte von ρ .

Bei sehr starker Dämpfung muss man sich schon anderer Methoden bedienen.

Bei Anwendung jeder dieser Methoden ist selbstverständlich auf die früher erwähnten Korrekturen Δy Rücksicht zu nehmen. Indem man noch bei diesen Versuchen die Grösse des ersten anfänglichen Ausschlags y_1 des Pendels variiert, kann man zum Teil die Änderung von v mit der Grösse der mittleren Amplitude y_k studieren, sich ebenfalls eine kleine Tabelle für

¹⁾ Siehe noch die Gleichung (23).

v herstellen und bei der Bearbeitung der Seismogramme für jede gemessene Amplitude das entsprechende v heranziehen; bei starker magnetischer Dämpfung aber kann man sich meistens mit einem mittleren Wert von v begnügen.

v bedeutet hier das *wahre* Dämpfungsverhältnis, welches durch die Formel (6)

$$v = e^{\pi m} \dots \dots \dots (6)$$

bestimmt ist.

Ist v einmal bekannt, so findet man daraus

$$m = \frac{1}{\pi \text{Lg}_{10} e} \cdot \text{Lg}_{10} v = 0,73295 \text{Lg}_{10} v \dots \dots \dots (35)$$

und auf Grund der Beziehungen (5) erhält man

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + m^2} \dots \dots \dots (36)$$

μ^2 ist gerade diejenige Grösse, welche, inbezug auf die Dämpfung, für das Verhalten des Pendels gegen Erdbebenwellen maassgebend ist (siehe Formel (46)). Je stärker die Dämpfung ist, desto kleiner wird μ^2 .

Nach Beendigung aller dieser Vorversuche ist das Pendel schon für seismometrische Beobachtungen fertig.

Im Folgenden möge jetzt Einiges über die Bearbeitung der Erdbendiagramme gesagt werden.

Die Momente des Eintreffens der ersten und zweiten Vorläufer P und S , wenn dieselben genügend scharf ausgeprägt sind, der Anfang der langen Wellen L und das Ende F des Bebens lassen sich aus den entsprechenden Seismogrammen direkt entnehmen.

Wollen wir uns nun mit der Bestimmung der absoluten Grösse der Amplitude der Bodenverschiebungen x_m beim Eintreten der Maximalphase befassen.

Man sucht auf den entsprechenden Seismogrammen diejenigen Stellen aus, wo die Pendelbewegung einen möglichst regelmässigen sinusartigen Charakter aufweist. Man misst dann die entsprechende Amplitude y auf der Kurve und bestimmt die zugehörige Periode T_p ¹⁾. Bei stark gedämpften Pendeln entsprechen bekanntlich solche Stellen der Seismogramme wirklich harmonischen Erdbebenwellen, wo die nach den Seismogrammen gemessene Periode T_p mit der Periode der Erdbebenwellen zusammenfällt.

¹⁾ Es muss dazu auf den Seismogrammen eine besondere Zeitmarkierung von einer guten Uhr angebracht werden, am besten jede Minute.

Setzen wir also voraus, dass die Bodenbewegung, etwa die N—S oder E—W Komponente, an dieser Stelle nach folgendem Gesetze erfolgt

$$x = x_m \sin(pt + \delta) \dots \dots \dots (37)$$

x_m ist die gesuchte Maximalamplitude der Bodenverschiebungen,

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \dots \dots \dots (38)$$

und δ die anfängliche Phase der Bodenbewegung, welche jetzt keine weitere Bedeutung hat.

Bedeute nun θ den entsprechenden Winkelausschlag des Pendels und ist keine Reibung des Schreibstiftes vorhanden, so muss bekanntlich θ der folgenden Differentialgleichung genügen:

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0 \dots \dots \dots (39)$$

ϵ ist die Dämpfungskonstante,

$$n = \frac{2\pi}{T} \text{ } ^1,$$

und l die reduzierte Pendellänge.

Dabei ist

$$h = \frac{\epsilon}{n}$$

und

$$\mu^2 = 1 - h^2 \text{ } ^2) \dots \dots \dots (40)$$

Nun ergibt sich bekanntlich aus (39) bei Zugrundelegung der Beziehung (37) ³⁾ bei genügend starker Dämpfung und bei nicht zu kleinen Werten von t ,

$$\theta = \frac{x_m}{l} \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau) + \delta\}, \dots \dots \dots (41)$$

wo

$$u = \frac{T_p}{T}, \dots \dots \dots (42)$$

$$f(u) = \left[\frac{2u}{(1+u^2)} \right]^2 \dots \dots \dots (43)$$

¹⁾ T ist die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung.

²⁾ Man vergleiche die Formel (5).

³⁾ Man siehe «Seismometrische Beobachtungen in Palkowa. Zweite Mitteilung». L. c. Formel (20).

und

$$\tau = \frac{T_p}{2\pi} \arctg \left\{ h \frac{2u}{u^2-1} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

ist.

Nun ist

$$\theta = \frac{y}{L},$$

infolgedessen erhält man aus der Grundgleichung (8) mit Berücksichtigung der Korrektur ρ für die Reibung

$$(y + \rho) = \frac{L}{l} x_m \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau) + \delta\} \dots \dots (45)$$

ρ ist positiv, wenn $y' > 0$ wird und umgekehrt.

Bedeute nun y_m die maximale gemessene Ordinate, so bekommt man, mit Bezugnahme auf die Beziehung (32) für die gesuchte Amplitude der Bodenverschiebungen x_m folgenden Ausdruck:

$$x_m = \frac{1}{V} (1+u^2) \sqrt{1-\mu^2 f(u)} \cdot (y_m + \rho_m) \dots \dots \dots (46)$$

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn wir allen gemessenen Ordinaten, sei es nach oben, sei es nach unten, das Vorzeichen $+$ beilegen, ρ_m immer als eine positive additive Konstante zu y_m hinzugefügt werden muss. ρ_m ist aus der früher entworfenen Tabelle zu entnehmen.

y_m bedeutet hier die schon um Δy korrigierte Ordinate der Kurve.

Da die Periode T_p der Erdbebenwellen aus dem entsprechenden Seismogramm direkt zu entnehmen ist, so ist $u = \frac{T_p}{T}$ bekannt.

V und μ^2 sind zwei bekannte Pendelkonstanten, somit kann man x_m sehr leicht nach der Formel (46) berechnen ¹⁾.

Zur Erleichterung dieser Rechnungen habe ich eine Tabelle der Werte $\text{Log}(1+u^2)$ von $u = 0,01$ bis $u = 4,00$ berechnet und in einem speziellen Aufsatz «Hilftabellen zur Auswertung von Seismogrammen bei Anwendung aperiodischer Instrumente» publiziert ²⁾. Diese Tabelle möge nochmals hier als Tabelle I am Schluss dieser Abhandlung reproduziert werden. Es findet sich in meiner früheren Notiz auch eine kleine Tabelle der Werte von u für

¹⁾ Bei Ausmessung der Ordinaten eines Seismogrammes muss man sich merken, ob der gewählte Punkt oberhalb oder unterhalb der Nulllinie liegt, um zu wissen, ob der dem abgeleiteten Wert von x_m entsprechende Moment t_m einer Bodenverschiebung etwa nach N oder S zugeordnet ist. Bei dieser Art Pendel mit Vergrößerungsvorrichtung entspricht z. B. eine Ablenkung der Schreibfeder nach N einer Bodenverschiebung ebenfalls in derselben Richtung.

²⁾ Siehe Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 1 (1908).

verschiedene Werte von T_p und T , aber jedermann kann sich leicht für sein Pendel, wo T gegeben wird, eine kleine Tabelle der Werte von u für verschiedene T_p herstellen.

Weiter habe ich noch eine Tabelle der Werte $\text{Log} f(u)$ berechnet (von $u=0,01$ bis $u=4,00$). Sie ist am Schluss dieser Abhandlung als Tabelle II gegeben.

Mit Benutzung dieser Tabellen ist die Bestimmung der wahren Amplituden der Bodenbewegung eine sehr einfache Aufgabe.

Es erübrigt noch Folgendes zu bemerken.

Die Formel (41) zeigt, dass auf der Pendelkurve das der Bodenbewegung entsprechende Maximum y_m immer τ Sekunden später eintritt.

τ hängt nicht nur von der Periode der entsprechenden Erdbebenwelle, sondern nach (44) auch von u und h , also von der Eigenperiode des Pendels und der Stärke der Dämpfung ab.

Will man also einen rationellen Vergleich der Momente des Eintreffens einer und derselben Bebenphase auf verschiedenen seismischen Stationen vornehmen, so darf man nicht mehr die Momente der entsprechenden Maximen auf den Seismogrammen nehmen, da auf verschiedenen Stationen keine identischen Pendel (inbezug auf Periode und Dämpfungsstärke) verwendet werden. Bei einer genauen Analyse der Gesetze der Fortpflanzung der Bebenwellen, speziell für kleine Entfernungen, könnte das zu grossen Irrtümern führen, da bei einigermaassen grossen Werten von T_p , τ sich durchaus nicht klein erweist. Man wird indessen bei Bearbeitung der Seismogramme immer am besten tun, bei der Auswertung verschiedener Maximen nicht den Moment des Maximums auf der Kurve, sondern den entsprechenden wahren Moment der maximalen Bodenverschiebung angeben.

Dazu muss man zuerst zu der Abszisse des entsprechenden Maximums auf der Kurve die negative Korrektion Δt nach Formel (34) hinzufügen und dann noch den Wert von τ abziehen.

Zur Erleichterung dieser Rechnungen habe ich eine spezielle Tabelle der Werte von $\frac{\tau}{T_p}$ für verschiedene Werte von μ^2 , von $\mu^2=-0,2^1$ bis $\mu^2=0,9$, berechnet und zwar von $u=0,1$ bis $u=4,0$. Dieselbe befindet sich am Schluss dieser Abhandlung als Tabelle III angegeben. Für $u=0$ wird $\frac{\tau}{T_p} = 0,500$ sein.

Zum Schluss ist noch eine vierte Tabelle der proportionalen Teile angeführt²⁾.

¹⁾ Die sehr kleine und negative Werthe von μ^2 entsprechen äusserst stark gedämpften Pendeln.

²⁾ Die hier angegebenen Tabellen können selbstverständlich auch bei anderen Typen von gedämpften Seismographen zur Auswertung von Seismogrammen verwendet werden.

Unter Berücksichtigung alles dessen, was hier mitgeteilt wurde, wird man wohl mit einiger Übung, bei der Bearbeitung der Seismogramme von einem verhältnismässig einfachen Horizontalpendel von der hier beschriebenen Form auch bei Anwendung der mechanischen Registrierung, ganz vertrauenswürdige Angaben für die verschiedenen Daten bezüglich der Erdbebenwellen bekommen.

§ 6.

Schlussfolgerungen.

Wollen wir nun zum Schluss die Hauptergebnisse dieser ganzen Untersuchung nochmals kurz zusammenfassen.

Das hier beschriebene schwere Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung ist im Grunde ein sehr einfaches und bequem zu handhabendes Instrument. Es besitzt kein eigentliches Stativ und lässt sich an einer entsprechend orientierten Wand direkt anbringen.

Die Stützstifte sind durch Federn ersetzt, was speziell für den unteren Befestigungspunkt von besonderer Wichtigkeit ist, da von einer etwaigen Abstumpfung der Spitzen, die bei seismometrischen Beobachtungen zuweilen so lästig ist, nicht mehr die Rede sein kann.

Die untere Feder ist sehr kurz und dünn und in der Weise angebracht, dass man sie immer sehr leicht auswechseln kann.

Trotz der Anwendung der Federn hat das Pendel eine ganz bestimmte Drehungsaxe.

Die Eigenperiode des Pendels kann für praktische Zwecke als unabhängig von den Amplituden der Ausschläge betrachtet werden, was ebenfalls eine sehr wichtige Eigenschaft ist. Man kann sehr leicht diese Art Pendel auf eine sehr grosse Eigenperiode einstellen, wobei dieselbe ihren Wert in höchst befriedigender Weise behält.

Die zum Befestigungszwecke dienenden Federn üben fast keine dämpfende Wirkung aus.

Zur Vermehrung der Empfindlichkeit der Aufzeichnungen wird am Ende des ziemlich langen Hebelarmes eine Vergrösserungsvorrichtung (Hebelübertragung) angebracht.

Dieselbe zeichnet sich durch ausserordentliche Leichtigkeit aus. Als Drehungsaxe wird ein dünner Messing- oder Stahldraht benutzt. Die Verbindung mit dem Pendelarm geschieht mittelst einer in Achathütchen lie-

genden Stahlnadel. Eine dünne, äusserst leichte Spiralfeder hält beide Teile zusammen.

Diese Vergrösserungsvorrichtung arbeitet fast ganz reibungslos und setzt die Eigenperiode des Pendels nur um einen sehr kleinen Betrag herab. Sie besitzt keinen toten Gang und die Verbindung mit dem Pendelarm ist eine ganz sichere.

Die Dämpfung ist eine magnetische.

Obgleich die Pendelmasse ca. 100 Kilogramm beträgt, reichen zur Erzielung einer sehr starken Dämpfung zwei kleine permanente Magnete auf einem besonderen Gestell vollständig aus. Es ist sogar möglich mit denselben das betreffende Pendel, wenn seine Eigenperiode nicht zu klein gewählt wird, in ein vollkommen aperiodisches Instrument zu verwandeln.

Diese Art Dämpfung bietet manche erheblichen Vorteile dar. Erstens erfordert sie keine feinen Einstellungen, da immer zwischen der dämpfenden Kupferplatte und den Polflächen der Magnete ein genügend breiter Spielraum frei bleibt. Zweitens steht diese Dämpfungsvorrichtung vollkommen offen, somit kann sie immer sehr leicht kontrolliert werden. Drittens lässt sich die Stärke der Dämpfung sehr leicht variieren und auf eine bestimmte Grösse einstellen. Viertens erweist sich diese Dämpfung als sehr konstant und das Hantieren mit derselben ist besonders einfach und bequem. Sie lässt sich auch leicht an jedem Typus von Seismographen anbringen und zeichnet sich durch Billigkeit aus. Schliesslich entspricht die magnetische Dämpfung den Forderungen der Theorie, wonach das Moment der dämpfenden Kräfte proportional der Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung sein soll.

Die normale Vergrösserung des Pendels ist etwa gleich 45, was für seismische Stationen zweiten Ranges als genügend angesehen werden darf.

Wegen der Grösse der angewandten Pendelmasse ist die dämpfende Wirkung des Schreibstiftes am Papier gering.

Bei Anwendung der mechanischen Registrierungsart muss in die Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung ein Korrektionsglied ρ , welches sich zu den Ordinaten y der Kurve der Pendelbewegung addiert, eingeführt werden.

ρ ändert sein Vorzeichen mit der Änderung der Richtung der Geschwindigkeit y' .

Bei dieser Art Pendel bei Anwendung der magnetischen Dämpfung ist ρ im Allgemeinen sehr klein, es bleibt aber nicht ganz konstant, sondern nimmt mit abnehmenden Amplituden ab. Für kleine Amplituden ist ρ ganz minimal, was für seismometrische Zwecke ein sehr günstiger Umstand ist, da man bei Erdbebenwellen bei wenig empfindlichen Pendeln hauptsächlich nur mit kleinen Pendelausschlägen zu tun hat.

ρ ist als unabhängig von der etwaigen Stärke der magnetischen Dämpfung zu betrachten, somit kann es in der in den §§ 3 und 4 angegebenen Weise aus Versuchen bei verhältnismässig schwacher Dämpfung ermittelt werden. Man kann sich dann leicht eine Tabelle der Änderung von ρ mit der mittleren Amplitude der Pendelausschläge y herstellen und von derselben bei der Auswertung von Seismogrammen Gebrauch machen.

Durch Einführung des Korrektionsgliedes ρ ergeben sich aus den Beobachtungen bei Anwendung der mechanischen Registrierung viel konstantere Werte für das Dämpfungsverhältniss v des Pendels.

Für sehr kleine Amplituden nimmt v (auch bei Berücksichtigung von ρ) etwas zu.

Zur Bestimmung von v kann man sich, je nach der Stärke der Dämpfung einer oder der anderen der hier angegebenen Methoden bedienen.

Es lässt sich teilweise aus den Versuchen die Abhängigkeit von v von der mittleren Amplitude y ermitteln, aber für praktische Zwecke kann man sich bei starker Dämpfung meistens mit einem mittleren Wert von v begnügen.

Durch Einführung des Korrektionsgliedes ρ in die Differentialgleichung der Pendelbewegung werden die Resultate der Kurvenanalyse bei mechanischer Registrierungsart wesentlich verbessert, die Annahme über die Konstanz von ρ entspricht aber nicht vollständig den Erfahrungen. Es sind unbedingt weitere, genauere Untersuchungen nötig, um die Eigenschaften der Funktion ρ klar zu legen und die entsprechenden nötigen Korrekturen in die Grunddifferentialgleichung einzuverleiben.

Bei mechanischer Registrierung, speziell bei Anwendung einer Vergrösserungsvorrichtung, bedürfen die aus den Pendelkurven gemessenen Koordinaten der Kurvenpunkte gewisser Amplituden- resp. Zeitkorrekturen, die durch den Umstand bedingt sind, dass die Schreibfeder bei Ablenkung des Pendels nicht gerade Linien sondern Kreisbögen beschreibt.

Bei optischer Registrierung fallen alle diese Korrekturen weg, infolgedessen ist diese Art der Registrierung der mechanischen weit überlegen.

Das hier beschriebene Horizontalpendel lässt sich sehr gut für seismometrische Zwecke anwenden. Wie es dabei zu behandeln ist, ist in § 5 dieser Abhandlung ausführlich angegeben.

Es lässt sich aus den Aufzeichnungen desselben, unter Berücksichtigung aller nötigen Korrekturen, wenn die Dämpfung genügend stark gewählt wird (v mindestens nicht kleiner als 5), die wahre Amplitude der Bodenverschiebungen beim Eintreffen von einfachen, harmonischen Erdbebenwellen sehr gut ableiten. Für den Moment des Eintreffens einer bestimmten Bebenphase darf man nicht den entsprechenden Moment an dem Seismo-

gramm angeben, da in demselben immer eine bestimmte Zeitverspätung τ eintritt, die von der Eigenperiode und Stärke der Dämpfung des Pendels abhängig ist, sondern man muss immer auf den Moment der entsprechenden wahren Bodenbewegung zurückgreifen und nur einen solchen in den seismischen Berichten angeben.

Zur Erleichterung aller dieser Rechnungen sind am Schluss dieser Abhandlung vier Tabellen beigegeben, die für alle Arten gedämpfter Seismographen anwendbar sind und die genaue Auswertung von Seismogrammen in erheblicher Weise vereinfachen können.

Unter Berücksichtigung aller hier angegebener Einzelheiten und Vorichtsmaassregeln bezüglich der Anwendung dieses Pendels für seismometrische Zwecke, wird man wohl imstande sein, mit demselben ganz zuverlässige Daten über Erdbebenwellen zu sammeln, deshalb glaube ich, dass diese neue Art schweren Horizontalpendels mit mechanischer Registrierung an seismischen Stationen zweiten Ranges gute Dienste leisten kann.

Tabelle I.

Log (1 + u^2).

u	$\text{Log}(1+u^2)$	Δ	u	$\text{Log}(1+u^2)$	Δ	u	$\text{Log}(1+u^2)$	Δ	u	$\text{Log}(1+u^2)$	Δ
0,01	0,0000		0,21	0,0187		0,41	0,0675		0,61	0,1374	
		0,0002			0,0018			0,0031			0,0039
0,02	0,0002		0,22	0,0205		0,42	0,0706		0,62	0,1413	
		2			19			31			39
0,03	0,0004		0,23	0,0224		0,43	0,0737		0,63	0,1452	
		3			19			32			39
0,04	0,0007		0,24	0,0243		0,44	0,0769		0,64	0,1491	
		4			20			32			40
0,05	0,0011		0,25	0,0263		0,45	0,0801		0,65	0,1531	
		5			21			33			39
0,06	0,0016		0,26	0,0284		0,46	0,0834		0,66	0,1570	
		5			22			33			40
0,07	0,0021		0,27	0,0306		0,47	0,0867		0,67	0,1610	
		7			22			33			41
0,08	0,0028		0,28	0,0328		0,48	0,0900		0,68	0,1651	
		7			23			35			40
0,09	0,0035		0,29	0,0351		0,49	0,0935		0,69	0,1691	
		8			23			34			41
0,10	0,0043		0,30	0,0374		0,50	0,0969		0,70	0,1732	
		9			25			35			41
0,11	0,0052		0,31	0,0399		0,51	0,1004		0,71	0,1773	
		10			24			35			41
0,12	0,0062		0,32	0,0423		0,52	0,1039		0,72	0,1814	
		11			26			36			41
0,13	0,0073		0,33	0,0449		0,53	0,1075		0,73	0,1855	
		11			26			36			42
0,14	0,0084		0,34	0,0475		0,54	0,1111		0,74	0,1897	
		13			27			37			41
0,15	0,0097		0,35	0,0502		0,55	0,1148		0,75	0,1938	
		13			27			37			42
0,16	0,0110		0,36	0,0529		0,56	0,1185		0,76	0,1980	
		14			28			37			42
0,17	0,0124		0,37	0,0557		0,57	0,1222		0,77	0,2022	
		14			29			37			42
0,18	0,0138		0,38	0,0586		0,58	0,1259		0,78	0,2064	
		16			29			38			42
0,19	0,0154		0,39	0,0615		0,59	0,1297		0,79	0,2106	
		16			30			38			42
0,20	0,0170		0,40	0,0645		0,60	0,1335		0,80	0,2148	
		17			30			39			43

u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ
0,81	0,2191		1,01	0,3054		1,21	0,3917		1,41	0,4754	
0,82	0,2233	0,0042	1,02	0,3097	0,0043	1,22	0,3959	0,0042	1,42	0,4795	0,0041
0,83	0,2276	43	1,03	0,3141	44	1,23	0,4002	43	1,43	0,4836	41
0,84	0,2319	43	1,04	0,3184	43	1,24	0,4044	42	1,44	0,4876	40
0,85	0,2362	43	1,05	0,3227	43	1,25	0,4087	43	1,45	0,4917	41
0,86	0,2404	42	1,06	0,3271	44	1,26	0,4129	42	1,46	0,4958	41
0,87	0,2447	43	1,07	0,3314	43	1,27	0,4171	42	1,47	0,4998	40
0,88	0,2491	44	1,08	0,3357	43	1,28	0,4213	42	1,48	0,5038	40
0,89	0,2534	43	1,09	0,3401	44	1,29	0,4256	43	1,49	0,5079	41
0,90	0,2577	43	1,10	0,3444	43	1,30	0,4298	42	1,50	0,5119	40
0,91	0,2620	43	1,11	0,3487	43	1,31	0,4339	41	1,51	0,5159	40
0,92	0,2663	43	1,12	0,3530	43	1,32	0,4381	42	1,52	0,5199	40
0,93	0,2707	44	1,13	0,3573	43	1,33	0,4423	42	1,53	0,5239	40
0,94	0,2750	43	1,14	0,3617	44	1,34	0,4465	42	1,54	0,5278	39
0,95	0,2793	43	1,15	0,3660	43	1,35	0,4506	41	1,55	0,5318	40
0,96	0,2837	44	1,16	0,3703	43	1,36	0,4548	42	1,56	0,5357	39
0,97	0,2880	43	1,17	0,3745	42	1,37	0,4589	41	1,57	0,5397	40
0,98	0,2923	43	1,18	0,3788	43	1,38	0,4631	42	1,58	0,5436	39
0,99	0,2967	44	1,19	0,3831	43	1,39	0,4672	41	1,59	0,5475	39
1,00	0,3010	43	1,20	0,3874	43	1,40	0,4713	41	1,60	0,5514	39
		44			43			41			39

u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ
1,61	0,5553		1,81	0,6310		2,01	0,7024		2,21	0,7697	0,0082
1,62	0,5592	0,0039	1,82	0,6347	0,0037	2,02	0,7059	0,0085	2,22	0,7729	33
1,63	0,5631	39	1,83	0,6384	37	2,03	0,7093	34	2,23	0,7762	32
1,64	0,5670	39	1,84	0,6420	36	2,04	0,7128	35	2,24	0,7794	33
1,65	0,5708	38	1,85	0,6457	37	2,05	0,7162	34	2,25	0,7827	32
1,66	0,5747	39	1,86	0,6493	36	2,06	0,7196	34	2,26	0,7859	32
1,67	0,5785	38	1,87	0,6529	36	2,07	0,7230	34	2,27	0,7891	32
1,68	0,5823	38	1,88	0,6565	36	2,08	0,7264	34	2,28	0,7923	32
1,69	0,5861	38	1,89	0,6601	36	2,09	0,7298	34	2,29	0,7955	32
1,70	0,5899	38	1,90	0,6637	36	2,10	0,7332	34	2,30	0,7987	31
1,71	0,5937	38	1,91	0,6673	36	2,11	0,7366	33	2,31	0,8018	32
1,72	0,5975	38	1,92	0,6708	35	2,12	0,7399	33	2,32	0,8050	31
1,73	0,6013	38	1,93	0,6744	36	2,13	0,7433	34	2,33	0,8081	32
1,74	0,6050	37	1,94	0,6779	35	2,14	0,7466	33	2,34	0,8113	31
1,75	0,6088	38	1,95	0,6815	36	2,15	0,7499	33	2,35	0,8144	31
1,76	0,6125	37	1,96	0,6850	35	2,16	0,7532	33	2,36	0,8175	32
1,77	0,6163	38	1,97	0,6885	35	2,17	0,7566	34	2,37	0,8207	31
1,78	0,6200	37	1,98	0,6920	35	2,18	0,7598	32	2,38	0,8238	31
1,79	0,6237	37	1,99	0,6955	35	2,19	0,7631	33	2,39	0,8269	30
1,80	0,6274	37	2,00	0,6990	35	2,20	0,7664	33	2,40	0,8299	31
		36			34			33			

u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ
2,41	0,8330		2,61	0,8928		2,81	0,9492		3,01	1,0026	
2,42	0,8361	0,0031	2,62	0,8957	0,0029	2,82	0,9519	0,0027	3,02	1,0052	0,0026
2,43	0,8392	31	2,63	0,8986	29	2,83	0,9547	28	3,03	1,0078	26
2,44	0,8422	30	2,64	0,9014	28	2,84	0,9574	27	3,04	1,0104	26
2,45	0,8453	31	2,65	0,9043	29	2,85	0,9601	27	3,05	1,0129	25
2,46	0,8483	30	2,66	0,9072	29	2,86	0,9628	27	3,06	1,0155	26
2,47	0,8513	30	2,67	0,9100	28	2,87	0,9655	27	3,07	1,0181	26
2,48	0,8543	30	2,68	0,9129	29	2,88	0,9682	27	3,08	1,0206	25
2,49	0,8573	30	2,69	0,9157	28	2,89	0,9709	27	3,09	1,0232	26
2,50	0,8603	30	2,70	0,9186	29	2,90	0,9736	27	3,10	1,0257	25
2,51	0,8633	30	2,71	0,9214	28	2,91	0,9763	27	3,11	1,0282	25
2,52	0,8663	30	2,72	0,9242	28	2,92	0,9789	26	3,12	1,0308	26
2,53	0,8693	30	2,73	0,9270	28	2,93	0,9816	27	3,13	1,0333	25
2,54	0,8722	29	2,74	0,9298	28	2,94	0,9842	26	3,14	1,0358	25
2,55	0,8752	30	2,75	0,9326	28	2,95	0,9869	27	3,15	1,0383	25
2,56	0,8782	30	2,76	0,9354	28	2,96	0,9895	26	3,16	1,0408	25
2,57	0,8811	29	2,77	0,9382	28	2,97	0,9922	27	3,17	1,0433	25
2,58	0,8840	29	2,78	0,9409	27	2,98	0,9948	26	3,18	1,0458	25
2,59	0,8869	29	2,79	0,9437	28	2,99	0,9974	26	3,19	1,0483	25
2,60	0,8899	30	2,80	0,9465	28	3,00	1,0000	26	3,20	1,0508	25
		29			27			26			24

u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ	u	Log ($1+u^2$)	Δ
3,21	1,0532		3,41	1,1013		3,61	1,1471		3,81	1,1908	
3,22	1,0557	0,0025	3,42	1,1037	0,0024	3,62	1,1494	0,0023	3,82	1,1929	0,0021
3,23	1,0582	25	3,43	1,1060	23	3,63	1,1516	22	3,83	1,1950	21
3,24	1,0606	24	3,44	1,1083	23	3,64	1,1538	22	3,84	1,1972	22
3,25	1,0631	25	3,45	1,1107	24	3,65	1,1560	22	3,85	1,1993	21
3,26	1,0655	24	3,46	1,1130	23	3,66	1,1582	22	3,86	1,2014	21
3,27	1,0679	24	3,47	1,1153	23	3,67	1,1604	22	3,87	1,2035	21
3,28	1,0703	24	3,48	1,1176	23	3,68	1,1626	22	3,88	1,2056	21
3,29	1,0728	25	3,49	1,1199	23	3,69	1,1648	22	3,89	1,2077	21
3,30	1,0752	24	3,50	1,1222	24	3,70	1,1670	22	3,90	1,2098	21
3,31	1,0776	24	3,51	1,1245	23	3,71	1,1692	22	3,91	1,2119	21
3,32	1,0800	24	3,52	1,1268	23	3,72	1,1714	22	3,92	1,2140	21
3,33	1,0824	24	3,53	1,1291	23	3,73	1,1736	22	3,93	1,2160	20
3,34	1,0848	24	3,54	1,1313	24	3,74	1,1757	21	3,94	1,2181	21
3,35	1,0872	24	3,55	1,1336	23	3,75	1,1779	22	3,95	1,2202	21
3,36	1,0895	23	3,56	1,1359	23	3,76	1,1801	22	3,96	1,2222	20
3,37	1,0919	24	3,57	1,1381	22	3,77	1,1822	21	3,97	1,2243	21
3,38	1,0943	24	3,58	1,1404	23	3,78	1,1844	22	3,98	1,2264	21
3,39	1,0966	23	3,59	1,1426	22	3,79	1,1865	21	3,99	1,2284	20
3,40	1,0990	24	3,60	1,1449	23	3,80	1,1886	21	4,00	1,2304	20
		23			22			22			

Tabelle II.

Log $f(u)$.

$$f(u) = \left[\frac{2u}{1+u^2} \right]^2.$$

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
0,01	$\bar{4},6020$	+ 0,6018	0,26	$\bar{1},3752$	+ 0,0285
0,02	$\bar{3},2038$	0,3517	0,27	$\bar{1},4037$	0,0271
0,03	$\bar{3},5555$	0,2493	0,28	$\bar{1},4308$	0,0259
0,04	$\bar{3},8048$	0,1930	0,29	$\bar{1},4567$	0,0247
0,05	$\bar{3},9978$	0,1574	0,30	$\bar{1},4814$	0,0237
0,06	$\bar{2},1552$	0,1328	0,31	$\bar{1},5051$	0,0226
0,07	$\bar{2},2880$	0,1147	0,32	$\bar{1},5277$	0,0216
0,08	$\bar{2},4027$	0,1008	0,33	$\bar{1},5493$	0,0207
0,09	$\bar{2},5035$	0,0899	0,34	$\bar{1},5700$	0,0198
0,10	$\bar{2},5934$	0,0810	0,35	$\bar{1},5898$	0,0190
0,11	$\bar{2},6744$	0,0736	0,36	$\bar{1},6088$	0,0182
0,12	$\bar{2},7480$	0,0674	0,37	$\bar{1},6270$	0,0175
0,13	$\bar{2},8154$	0,0621	0,38	$\bar{1},6445$	0,0167
0,14	$\bar{2},8775$	0,0574	0,39	$\bar{1},6612$	0,0161
0,15	$\bar{2},9349$	0,0534	0,40	$\bar{1},6773$	0,0154
0,16	$\bar{2},9883$	0,0499	0,41	$\bar{1},6927$	0,0147
0,17	$\bar{1},0382$	0,0467	0,42	$\bar{1},7074$	0,0142
0,18	$\bar{1},0849$	0,0439	0,43	$\bar{1},7216$	0,0136
0,19	$\bar{1},1288$	0,0413	0,44	$\bar{1},7352$	0,0131
0,20	$\bar{1},1701$	0,0389	0,45	$\bar{1},7483$	0,0126
0,21	$\bar{1},2090$	0,0368	0,46	$\bar{1},7609$	0,0120
0,22	$\bar{1},2458$	0,0349	0,47	$\bar{1},7729$	0,0115
0,23	$\bar{1},2807$	0,0331	0,48	$\bar{1},7844$	0,0111
0,24	$\bar{1},3138$	0,0315	0,49	$\bar{1},7955$	0,0107
0,25	$\bar{1},3453$	0,0299	0,50	$\bar{1},8062$	0,0102

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
0,51	$\bar{1},8164$	+0,0098 94 90 86 83	0,76	$\bar{1},9677$	+0,0030 27 27 25 23
0,52	$\bar{1},8262$		0,77	$\bar{1},9707$	
0,53	$\bar{1},8356$		0,78	$\bar{1},9734$	
0,54	$\bar{1},8446$		0,79	$\bar{1},9761$	
0,55	$\bar{1},8532$		0,80	$\bar{1},9786$	
0,56	$\bar{1},8615$	79 76 73 70 67	0,81	$\bar{1},9809$	21 20 19 17 16
0,57	$\bar{1},8694$		0,82	$\bar{1},9830$	
0,58	$\bar{1},8770$		0,83	$\bar{1},9850$	
0,59	$\bar{1},8843$		0,84	$\bar{1},9869$	
0,60	$\bar{1},8913$		0,85	$\bar{1},9886$	
0,61	$\bar{1},8980$	63 61 58 56 53	0,86	$\bar{1},9902$	14 13 12 11 9
0,62	$\bar{1},9043$		0,87	$\bar{1},9916$	
0,63	$\bar{1},9104$		0,88	$\bar{1},9929$	
0,64	$\bar{1},9162$		0,89	$\bar{1},9941$	
0,65	$\bar{1},9218$		0,90	$\bar{1},9952$	
0,66	$\bar{1},9271$	50 48 46 44 41	0,91	$\bar{1},9961$	9 7 6 5 5
0,67	$\bar{1},9321$		0,92	$\bar{1},9970$	
0,68	$\bar{1},9369$		0,93	$\bar{1},9977$	
0,69	$\bar{1},9415$		0,94	$\bar{1},9983$	
0,70	$\bar{1},9459$		0,95	$\bar{1},9988$	
0,71	$\bar{1},9500$	39 38 35 33 32	0,96	$\bar{1},9993$	3 2 2 0 0
0,72	$\bar{1},9539$		0,97	$\bar{1},9996$	
0,73	$\bar{1},9577$		0,98	$\bar{1},9998$	
0,74	$\bar{1},9612$		0,99	0,0000	
0,75	$\bar{1},9645$		1,00	0,0000	

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
1,01	0,0000	-0,0002 2 3 3 5	1,26	$\bar{1},9770$	-0,0016 16 17 17 17
1,02	$\bar{1},9998$		1,27	$\bar{1},9754$	
1,03	$\bar{1},9996$		1,28	$\bar{1},9738$	
1,04	$\bar{1},9993$		1,29	$\bar{1},9721$	
1,05	$\bar{1},9990$		1,30	$\bar{1},9704$	
1,06	$\bar{1},9985$	5 6 6 7 8	1,31	$\bar{1},9687$	18 17 19 19 18
1,07	$\bar{1},9980$		1,32	$\bar{1},9669$	
1,08	$\bar{1},9974$		1,33	$\bar{1},9652$	
1,09	$\bar{1},9968$		1,34	$\bar{1},9633$	
1,10	$\bar{1},9961$		1,35	$\bar{1},9614$	
1,11	$\bar{1},9953$	9 9 9 11 10	1,36	$\bar{1},9596$	19 20 20 20 20
1,12	$\bar{1},9944$		1,37	$\bar{1},9577$	
1,13	$\bar{1},9935$		1,38	$\bar{1},9557$	
1,14	$\bar{1},9926$		1,39	$\bar{1},9537$	
1,15	$\bar{1},9915$		1,40	$\bar{1},9517$	
1,16	$\bar{1},9905$	12 11 13 13 13	1,41	$\bar{1},9497$	20 21 21 21 22
1,17	$\bar{1},9893$		1,42	$\bar{1},9477$	
1,18	$\bar{1},9882$		1,43	$\bar{1},9456$	
1,19	$\bar{1},9869$		1,44	$\bar{1},9435$	
1,20	$\bar{1},9856$		1,45	$\bar{1},9414$	
1,21	$\bar{1},9843$	14 14 14 16 15	1,46	$\bar{1},9392$	21 22 22 22 22
1,22	$\bar{1},9829$		1,47	$\bar{1},9371$	
1,23	$\bar{1},9815$		1,48	$\bar{1},9349$	
1,24	$\bar{1},9801$		1,49	$\bar{1},9327$	
1,25	$\bar{1},9785$		1,50	$\bar{1},9305$	

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
1,51	$\bar{1},9283$		1,76	$\bar{1},8680$	
1,52	$\bar{1},9260$	-0,0023	1,77	$\bar{1},8655$	-0,0025
1,53	$\bar{1},9237$	23	1,78	$\bar{1},8630$	25
1,54	$\bar{1},9214$	23	1,79	$\bar{1},8604$	26
1,55	$\bar{1},9191$	23	1,80	$\bar{1},8579$	25
		23			26
1,56	$\bar{1},9168$	23	1,81	$\bar{1},8553$	25
1,57	$\bar{1},9145$	24	1,82	$\bar{1},8528$	26
1,58	$\bar{1},9121$	23	1,83	$\bar{1},8502$	26
1,59	$\bar{1},9098$	24	1,84	$\bar{1},8476$	25
1,60	$\bar{1},9074$	24	1,85	$\bar{1},8451$	26
		24			26
1,61	$\bar{1},9050$	24	1,86	$\bar{1},8425$	26
1,62	$\bar{1},9026$	24	1,87	$\bar{1},8399$	26
1,63	$\bar{1},9002$	24	1,88	$\bar{1},8373$	26
1,64	$\bar{1},8978$	25	1,89	$\bar{1},8347$	25
1,65	$\bar{1},8953$	24	1,90	$\bar{1},8322$	26
		24			26
1,66	$\bar{1},8929$	24	1,91	$\bar{1},8296$	26
1,67	$\bar{1},8905$	25	1,92	$\bar{1},8270$	26
1,68	$\bar{1},8880$	25	1,93	$\bar{1},8244$	26
1,69	$\bar{1},8855$	24	1,94	$\bar{1},8218$	26
1,70	$\bar{1},8831$	25	1,95	$\bar{1},8192$	26
		25			26
1,71	$\bar{1},8806$	25	1,96	$\bar{1},8166$	26
1,72	$\bar{1},8781$	25	1,97	$\bar{1},8140$	26
1,73	$\bar{1},8756$	25	1,98	$\bar{1},8114$	26
1,74	$\bar{1},8731$	26	1,99	$\bar{1},8088$	26
1,75	$\bar{1},8705$	25	2,00	$\bar{1},8062$	26

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
2,01	$\bar{1},8036$		2,26	$\bar{1},7385$	
2,02	$\bar{1},8010$	-0,0026	2,27	$\bar{1},7360$	-0,0025
2,03	$\bar{1},7984$	26	2,28	$\bar{1},7334$	26
2,04	$\bar{1},7958$	26	2,29	$\bar{1},7308$	26
2,05	$\bar{1},7931$	27	2,30	$\bar{1},7282$	26
		26			26
2,06	$\bar{1},7905$	26	2,31	$\bar{1},7256$	25
2,07	$\bar{1},7879$	26	2,32	$\bar{1},7231$	26
2,08	$\bar{1},7853$	26	2,33	$\bar{1},7205$	26
2,09	$\bar{1},7827$	26	2,34	$\bar{1},7179$	25
2,10	$\bar{1},7801$	26	2,35	$\bar{1},7154$	26
		26			26
2,11	$\bar{1},7775$	26	2,36	$\bar{1},7128$	25
2,12	$\bar{1},7749$	26	2,37	$\bar{1},7103$	26
2,13	$\bar{1},7723$	26	2,38	$\bar{1},7077$	26
2,14	$\bar{1},7697$	26	2,39	$\bar{1},7051$	25
2,15	$\bar{1},7671$	26	2,40	$\bar{1},7026$	26
		26			26
2,16	$\bar{1},7645$	26	2,41	$\bar{1},7000$	25
2,17	$\bar{1},7619$	26	2,42	$\bar{1},6975$	25
2,18	$\bar{1},7593$	26	2,43	$\bar{1},6950$	26
2,19	$\bar{1},7567$	26	2,44	$\bar{1},6924$	25
2,20	$\bar{1},7541$	26	2,45	$\bar{1},6899$	25
		26			25
2,21	$\bar{1},7515$	26	2,46	$\bar{1},6874$	26
2,22	$\bar{1},7489$	26	2,47	$\bar{1},6848$	25
2,23	$\bar{1},7463$	26	2,48	$\bar{1},6823$	25
2,24	$\bar{1},7437$	26	2,49	$\bar{1},6798$	25
2,25	$\bar{1},7411$	26	2,50	$\bar{1},6773$	26

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
2,51	1,6747	-0,0025	2,76	1,6131	-0,0024
2,52	1,6722	25	2,77	1,6107	24
2,53	1,6697	25	2,78	1,6083	24
2,54	1,6672	25	2,79	1,6059	24
2,55	1,6647	25	2,80	1,6035	24
2,56	1,6622	25	2,81	1,6011	24
2,57	1,6597	24	2,82	1,5987	24
2,58	1,6573	25	2,83	1,5963	24
2,59	1,6548	25	2,84	1,5939	24
2,60	1,6523	25	2,85	1,5915	23
2,61	1,6498	25	2,86	1,5892	24
2,62	1,6473	24	2,87	1,5868	24
2,63	1,6449	25	2,88	1,5844	24
2,64	1,6424	25	2,89	1,5820	23
2,65	1,6399	24	2,90	1,5797	24
2,66	1,6375	25	2,91	1,5773	23
2,67	1,6350	24	2,92	1,5750	24
2,68	1,6326	25	2,93	1,5726	23
2,69	1,6301	24	2,94	1,5703	24
2,70	1,6277	25	2,95	1,5679	23
2,71	1,6252	24	2,96	1,5656	23
2,72	1,6228	24	2,97	1,5633	24
2,73	1,6204	25	2,98	1,5609	23
2,74	1,6179	24	2,99	1,5586	23
2,75	1,6155	24	3,00	1,5563	23

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
3,01	1,5540	-0,0023	3,26	1,4975	-0,0022
3,02	1,5517	23	3,27	1,4953	22
3,03	1,5494	23	3,28	1,4931	22
3,04	1,5471	23	3,29	1,4909	22
3,05	1,5448	23	3,30	1,4887	22
3,06	1,5425	23	3,31	1,4865	21
3,07	1,5402	23	3,32	1,4844	22
3,08	1,5379	23	3,33	1,4822	22
3,09	1,5356	23	3,34	1,4800	22
3,10	1,5333	22	3,35	1,4778	21
3,11	1,5311	23	3,36	1,4757	22
3,12	1,5288	23	3,37	1,4735	21
3,13	1,5265	22	3,38	1,4714	22
3,14	1,5243	23	3,39	1,4692	22
3,15	1,5220	22	3,40	1,4670	21
3,16	1,5198	23	3,41	1,4649	21
3,17	1,5175	22	3,42	1,4628	22
3,18	1,5153	22	3,43	1,4606	21
3,19	1,5131	23	3,44	1,4585	22
3,20	1,5108	22	3,45	1,4563	21
3,21	1,5086	22	3,46	1,4542	21
3,22	1,5064	23	3,47	1,4521	21
3,23	1,5041	22	3,48	1,4500	21
3,24	1,5019	22	3,49	1,4479	21
3,25	1,4997	22	3,50	1,4458	21

u	$\text{Log } f(u)$	Δ	u	$\text{Log } f(u)$	Δ
3,51	1,4437	-0,0021	3,76	1,3923	-0,0020
3,52	1,4416	22	3,77	1,3903	20
3,53	1,4394	20	3,78	1,3883	20
3,54	1,4374	21	3,79	1,3863	20
3,55	1,4353	21	3,80	1,3843	20
3,56	1,4332	21	3,81	1,3823	19
3,57	1,4311	21	3,82	1,3804	20
3,58	1,4290	20	3,83	1,3784	20
3,59	1,4270	21	3,84	1,3764	20
3,60	1,4249	21	3,85	1,3744	19
3,61	1,4228	20	3,86	1,3725	20
3,62	1,4208	21	3,87	1,3705	20
3,63	1,4187	20	3,88	1,3685	19
3,64	1,4167	21	3,89	1,3666	20
3,65	1,4146	20	3,90	1,3646	19
3,66	1,4126	21	3,91	1,3627	20
3,67	1,4105	20	3,92	1,3607	19
3,68	1,4085	20	3,93	1,3588	19
3,69	1,4065	21	3,94	1,3569	20
3,70	1,4044	20	3,95	1,3549	19
3,71	1,4024	20	3,96	1,3530	19
3,72	1,4004	20	3,97	1,3511	20
3,73	1,3984	21	3,98	1,3491	19
3,74	1,3963	20	3,99	1,3472	19
3,75	1,3943	20	4,00	1,3453	

Tabelle III.

$$\frac{\tau}{T_p} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left\{ h \frac{2u}{u^2 - 1} \right\}.$$

$$h = \sqrt{1 - \mu^2}.$$

u	$\mu^2 = -0,2$		$\mu^2 = -0,1$		$\mu^2 = 0,0$		$\mu^2 = 0,1$	
	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.
0,1	0,465	-0,0	0,467	-0,0	0,468	-0,0	0,470	-0,0
0,2	0,432	33	0,434	33	0,437	31	0,440	30
0,3	0,400	32	0,404	30	0,407	30	0,411	29
0,4	0,372	28	0,375	29	0,379	28	0,383	28
0,5	0,346	26	0,349	26	0,352	27	0,356	27
0,6	0,322	24	0,325	24	0,328	24	0,332	24
0,7	0,301	21	0,303	22	0,306	22	0,308	24
0,8	0,282	19	0,284	19	0,285	21	0,287	21
0,9	0,265	17	0,266	19	0,267	18	0,268	19
1,0	0,250	15	0,250	18	0,250	17	0,250	18
1,1	0,236	14	0,236	16	0,235	15	0,234	16
1,2	0,224	12	0,222	14	0,221	14	0,220	14
1,3	0,212	12	0,211	11	0,209	12	0,207	13
1,4	0,202	10	0,200	11	0,197	12	0,195	12
1,5	0,192	10	0,190	10	0,187	10	0,184	11
1,6	0,183	9	0,181	9	0,178	9	0,174	10
1,7	0,175	8	0,172	9	0,169	9	0,166	8
1,8	0,168	7	0,165	7	0,161	8	0,158	8
1,9	0,161	7	0,158	7	0,154	7	0,150	8
2,0	0,154	7	0,151	7	0,148	6	0,144	6
2,1	0,148	6	0,145	6	0,141	7	0,137	7
2,2	0,143	5	0,140	5	0,136	5	0,132	5
2,3	0,138	5	0,134	6	0,131	5	0,126	6
2,4	0,133	5	0,129	5	0,126	5	0,121	5
2,5	0,128	5	0,125	4	0,121	5	0,117	4
2,6	0,124	4	0,121	4	0,117	4	0,113	4
2,7	0,120	4	0,117	4	0,113	4	0,109	4
2,8	0,116	4	0,113	4	0,109	4	0,105	4
2,9	0,113	3	0,109	4	0,106	3	0,102	3
3,0	0,109	4	0,106	3	0,102	4	0,098	4
3,1	0,106	3	0,103	3	0,099	3	0,095	3
3,2	0,103	3	0,100	3	0,096	3	0,092	2
3,3	0,100	3	0,097	3	0,094	2	0,090	3
3,4	0,098	2	0,095	2	0,091	3	0,087	2
3,5	0,095	3	0,092	3	0,089	2	0,085	2
3,6	0,093	2	0,090	2	0,086	3	0,083	2
3,7	0,090	3	0,087	3	0,084	2	0,080	3
3,8	0,088	2	0,085	2	0,082	2	0,078	2
3,9	0,086	2	0,083	2	0,080	2	0,076	2
4,0	0,084	2	0,081	2	0,078	2	0,075	1

u	$\mu^2 = 0,2$		$\mu^2 = 0,3$		$\mu^2 = 0,4$		$\mu^2 = 0,5$	
	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.
0,1	0,472	-0,0	0,473	-0,0	0,475	-0,0	0,477	-0,0
0,2	0,443	29	0,447	28	0,450	25	0,454	23
0,3	0,415	28	0,420	27	0,425	25	0,431	23
0,4	0,388	27	0,393	27	0,399	26	0,406	25
0,5	0,361	27	0,366	27	0,372	27	0,380	26
0,6	0,336	25	0,340	26	0,346	26	0,353	27
0,7	0,312	24	0,315	25	0,320	26	0,326	27
0,8	0,289	23	0,292	23	0,295	25	0,299	27
0,9	0,269	20	0,270	22	0,272	23	0,274	25
0,1	0,250	19	0,250	20	0,250	22	0,250	24
1,1	0,233	17	0,232	18	0,230	20	0,229	21
1,2	0,218	15	0,216	16	0,213	17	0,210	19
1,3	0,204	14	0,201	15	0,197	16	0,193	17
1,4	0,192	12	0,188	13	0,184	13	0,178	15
1,5	0,181	11	0,176	12	0,171	13	0,165	13
1,6	0,171	10	0,166	10	0,161	10	0,154	11
1,7	0,162	9	0,157	9	0,151	10	0,144	10
1,8	0,153	9	0,148	9	0,142	9	0,135	9
1,9	0,146	7	0,141	7	0,135	7	0,127	8
2,0	0,139	7	0,134	7	0,128	7	0,120	7
2,1	0,133	6	0,127	6	0,121	6	0,114	6
2,2	0,127	6	0,122	5	0,116	5	0,108	6
2,3	0,122	5	0,116	6	0,110	6	0,103	5
2,4	0,117	5	0,112	4	0,106	4	0,099	4
2,5	0,112	5	0,107	5	0,101	5	0,094	5
2,6	0,108	4	0,103	4	0,097	4	0,090	4
2,7	0,104	4	0,099	3	0,093	3	0,087	3
2,8	0,101	3	0,096	3	0,090	3	0,084	3
2,9	0,097	4	0,092	4	0,087	3	0,080	4
3,0	0,094	3	0,089	3	0,084	3	0,078	2
3,1	0,091	3	0,086	3	0,081	3	0,075	3
3,2	0,088	3	0,084	2	0,078	3	0,072	3
3,3	0,086	2	0,081	3	0,076	2	0,070	2
3,4	0,083	3	0,079	2	0,074	2	0,068	2
3,5	0,081	2	0,076	3	0,071	3	0,066	2
3,6	0,079	2	0,074	2	0,069	2	0,064	2
3,7	0,077	2	0,072	2	0,068	1	0,062	2
3,8	0,075	2	0,070	2	0,066	2	0,061	1
3,9	0,073	2	0,069	1	0,064	2	0,059	2
4,0	0,071	2	0,067	2	0,062	2	0,057	2

u	$\mu^2 = 0,6$		$\mu^2 = 0,7$		$\mu^2 = 0,8$		$\mu^2 = 0,9$	
	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.	$\frac{\tau}{T_p}$	Diff.
0,1	0,480	-0,0	0,482	-0,0	0,486	-0,0	0,490	-0,0
0,2	0,459	21	0,464	18	0,471	15	0,479	11
0,3	0,437	22	0,445	19	0,454	17	0,467	12
0,4	0,414	23	0,423	22	0,436	18	0,453	14
0,5	0,389	25	0,400	23	0,414	22	0,437	16
0,6	0,361	28	0,373	27	0,389	25	0,415	22
0,7	0,333	28	0,343	30	0,359	30	0,386	29
0,8	0,304	29	0,312	31	0,324	35	0,348	38
0,9	0,276	28	0,280	32	0,287	37	0,301	47
1,0	0,250	26	0,250	30	0,250	37	0,250	51
1,1	0,226	24	0,223	27	0,217	33	0,203	47
1,2	0,205	21	0,199	24	0,188	29	0,166	37
1,3	0,187	18	0,178	21	0,165	23	0,139	27
1,4	0,171	16	0,161	17	0,146	19	0,119	20
1,5	0,157	14	0,146	15	0,131	15	0,103	16
1,6	0,145	12	0,134	12	0,118	13	0,092	11
1,7	0,135	10	0,124	10	0,108	10	0,082	10
1,8	0,126	9	0,115	9	0,099	9	0,075	7
1,9	0,118	8	0,107	8	0,092	7	0,069	6
2,0	0,111	7	0,100	6	0,086	6	0,064	5
2,1	0,105	6	0,094	5	0,080	5	0,059	5
2,2	0,100	5	0,089	4	0,075	4	0,055	4
2,3	0,095	5	0,085	4	0,071	4	0,052	3
2,4	0,090	5	0,080	5	0,067	4	0,049	3
2,5	0,086	4	0,077	3	0,064	3	0,047	2
2,6	0,083	3	0,073	4	0,061	3	0,044	3
2,7	0,079	3	0,070	3	0,058	3	0,042	2
2,8	0,076	3	0,067	3	0,056	2	0,040	2
2,9	0,073	3	0,064	3	0,054	2	0,039	1
3,0	0,070	3	0,062	2	0,052	2	0,037	2
3,1	0,068	2	0,060	2	0,050	2	0,036	1
3,2	0,066	2	0,058	2	0,048	2	0,034	2
3,3	0,064	2	0,056	2	0,046	2	0,033	1
3,4	0,062	2	0,054	2	0,045	1	0,032	1
3,5	0,060	2	0,052	2	0,043	2	0,031	1
3,6	0,058	2	0,051	1	0,042	1	0,030	1
3,7	0,056	2	0,049	1	0,041	1	0,029	1
3,8	0,055	1	0,048	1	0,039	1	0,028	1
3,9	0,053	2	0,046	1	0,038	1	0,027	1
4,0	0,052	1	0,045	1	0,037	1	0,027	0

Tabelle IV.

Proportionale Teile.

$\Delta=1$

1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1

$\Delta=6$

1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5

$\Delta=11$

1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10

$\Delta=16$

1	2
2	3
3	5
4	6
5	8
6	10
7	11
8	13
9	14

$\Delta=21$

1	2
2	4
3	6
4	8
5	11
6	13
7	15
8	17
9	19

$\Delta=2$

1	0
2	0
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	2
9	2

$\Delta=7$

1	1
2	1
3	2
4	3
5	4
6	4
7	5
8	6
9	6

$\Delta=12$

1	1
2	2
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	10
9	11

$\Delta=17$

1	2
2	3
3	5
4	7
5	9
6	10
7	12
8	14
9	15

$\Delta=22$

1	2
2	4
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	18
9	20

$\Delta=3$

1	0
2	1
3	1
4	1
5	2
6	2
7	2
8	2
9	3

$\Delta=8$

1	1
2	2
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	6
9	7

$\Delta=13$

1	1
2	3
3	4
4	5
5	7
6	8
7	9
8	10
9	12

$\Delta=18$

1	2
2	4
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	14
9	16

$\Delta=23$

1	2
2	5
3	7
4	9
5	12
6	14
7	16
8	18
9	21

$\Delta=4$

1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	4

$\Delta=9$

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	5
7	6
8	7
9	8

$\Delta=14$

1	1
2	3
3	4
4	6
5	7
6	8
7	10
8	11
9	13

$\Delta=19$

1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	11
7	13
8	15
9	17

$\Delta=24$

1	2
2	5
3	7
4	10
5	12
6	14
7	17
8	19
9	22

$\Delta=5$

1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5

$\Delta=10$

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

$\Delta=15$

1	2
2	3
3	5
4	6
5	8
6	9
7	11
8	12
9	14

$\Delta=20$

1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18

$\Delta=25$

1	3
2	5
3	8
4	10
5	13
6	15
7	18
8	20
9	23

$\Delta=26$
1 3
2 5
3 8
4 10
5 13
6 16
7 18
8 21
9 23

$\Delta=31$
1 3
2 6
3 9
4 12
5 16
6 19
7 22
8 25
9 28

$\Delta=36$
1 4
2 7
3 11
4 14
5 18
6 22
7 25
8 29
9 32

$\Delta=41$
1 4
2 8
3 12
4 16
5 21
6 25
7 29
8 33
9 37

$\Delta=46$
1 5
2 9
3 14
4 18
5 23
6 28
7 32
8 37
9 41

$\Delta=51$
1 5
2 10
3 15
4 20
5 26
6 31
7 36
8 41
9 46

$\Delta=56$
1 6
2 11
3 17
4 22
5 28
6 34
7 39
8 45
9 50

$\Delta=61$
1 6
2 12
3 18
4 24
5 31
6 37
7 43
8 49
9 55

$\Delta=66$
1 7
2 13
3 20
4 26
5 33
6 40
7 46
8 53
9 59

$\Delta=71$
1 7
2 14
3 21
4 28
5 36
6 43
7 50
8 57
9 64

$\Delta=27$
1 3
2 5
3 8
4 11
5 14
6 16
7 19
8 22
9 24

$\Delta=32$
1 3
2 6
3 10
4 13
5 16
6 19
7 22
8 26
9 29

$\Delta=37$
1 4
2 7
3 11
4 15
5 19
6 22
7 26
8 30
9 33

$\Delta=42$
1 4
2 8
3 13
4 17
5 21
6 25
7 29
8 34
9 38

$\Delta=47$
1 5
2 9
3 14
4 19
5 24
6 28
7 33
8 38
9 42

$\Delta=52$
1 5
2 10
3 16
4 21
5 26
6 31
7 36
8 42
9 47

$\Delta=57$
1 6
2 11
3 17
4 23
5 29
6 34
7 40
8 46
9 51

$\Delta=62$
1 6
2 12
3 19
4 25
5 31
6 37
7 43
8 50
9 56

$\Delta=67$
1 7
2 13
3 20
4 27
5 34
6 40
7 47
8 54
9 60

$\Delta=72$
1 7
2 14
3 22
4 29
5 36
6 43
7 50
8 58
9 65

$\Delta=28$
1 3
2 6
3 8
4 11
5 14
6 17
7 20
8 22
9 25

$\Delta=33$
1 3
2 7
3 10
4 13
5 17
6 20
7 23
8 26
9 30

$\Delta=38$
1 4
2 8
3 11
4 15
5 19
6 23
7 27
8 30
9 34

$\Delta=43$
1 4
2 9
3 13
4 17
5 22
6 26
7 30
8 34
9 39

$\Delta=48$
1 5
2 10
3 14
4 19
5 24
6 29
7 34
8 38
9 43

$\Delta=53$
1 5
2 11
3 16
4 21
5 27
6 32
7 37
8 42
9 48

$\Delta=58$
1 6
2 12
3 17
4 23
5 29
6 35
7 41
8 46
9 52

$\Delta=63$
1 6
2 13
3 19
4 25
5 32
6 38
7 44
8 50
9 57

$\Delta=68$
1 7
2 14
3 20
4 27
5 34
6 41
7 48
8 54
9 61

$\Delta=73$
1 7
2 15
3 22
4 29
5 37
6 44
7 51
8 58
9 66

$\Delta=29$
1 3
2 6
3 9
4 12
5 15
6 17
7 20
8 23
9 26

$\Delta=34$
1 3
2 7
3 10
4 14
5 17
6 20
7 24
8 27
9 31

$\Delta=39$
1 4
2 8
3 12
4 16
5 20
6 23
7 27
8 31
9 35

$\Delta=44$
1 4
2 9
3 13
4 18
5 22
6 26
7 31
8 35
9 40

$\Delta=49$
1 5
2 10
3 15
4 20
5 25
6 29
7 34
8 39
9 44

$\Delta=54$
1 5
2 11
3 16
4 22
5 27
6 32
7 38
8 43
9 49

$\Delta=59$
1 6
2 12
3 18
4 24
5 30
6 35
7 41
8 47
9 53

$\Delta=64$
1 6
2 13
3 19
4 26
5 32
6 38
7 45
8 51
9 58

$\Delta=69$
1 7
2 14
3 21
4 28
5 35
6 41
7 48
8 55
9 62

$\Delta=74$
1 7
2 15
3 22
4 30
5 37
6 44
7 52
8 59
9 67

$\Delta=30$
1 3
2 6
3 9
4 12
5 15
6 18
7 21
8 24
9 27

$\Delta=35$
1 4
2 7
3 11
4 14
5 18
6 21
7 25
8 28
9 32

$\Delta=40$
1 4
2 8
3 12
4 16
5 20
6 24
7 28
8 32
9 36

$\Delta=45$
1 5
2 9
3 14
4 18
5 23
6 27
7 32
8 36
9 41

$\Delta=50$
1 5
2 10
3 15
4 20
5 25
6 30
7 35
8 40
9 45

$\Delta=55$
1 6
2 11
3 17
4 22
5 28
6 33
7 39
8 44
9 50

$\Delta=60$
1 6
2 12
3 18
4 24
5 30
6 36
7 42
8 48
9 54

$\Delta=65$
1 7
2 13
3 20
4 26
5 33
6 39
7 46
8 52
9 59

$\Delta=70$
1 7
2 14
3 21
4 28
5 35
6 42
7 49
8 56
9 63

$\Delta=75$
1 8
2 15
3 23
4 30
5 38
6 45
7 53
8 60
9 68

$\Delta=76$

1	8
2	15
3	23
4	30
5	38
6	46
7	53
8	61
9	68

$\Delta=81$

1	8
2	16
3	24
4	32
5	41
6	49
7	57
8	65
9	73

$\Delta=86$

1	9
2	17
3	26
4	34
5	43
6	52
7	60
8	69
9	77

$\Delta=91$

1	9
2	18
3	27
4	36
5	46
6	55
7	64
8	73
9	82

$\Delta=96$

1	10
2	19
3	29
4	38
5	48
6	58
7	67
8	77
9	86

$\Delta=77$

1	8
2	15
3	23
4	31
5	39
6	46
7	54
8	62
9	69

$\Delta=82$

1	8
2	16
3	25
4	33
5	41
6	49
7	57
8	66
9	74

$\Delta=87$

1	9
2	17
3	26
4	35
5	44
6	52
7	61
8	70
9	78

$\Delta=92$

1	9
2	18
3	28
4	37
5	46
6	55
7	64
8	74
9	83

$\Delta=97$

1	10
2	19
3	29
4	39
5	49
6	58
7	68
8	78
9	87

$\Delta=78$

1	8
2	16
3	23
4	31
5	39
6	47
7	55
8	62
9	70

$\Delta=83$

1	8
2	17
3	25
4	33
5	42
6	50
7	58
8	66
9	75

$\Delta=88$

1	9
2	18
3	26
4	35
5	44
6	53
7	62
8	70
9	79

$\Delta=93$

1	9
2	19
3	28
4	37
5	47
6	56
7	65
8	74
9	84

$\Delta=98$

1	10
2	20
3	29
4	39
5	49
6	59
7	69
8	78
9	88

$\Delta=79$

1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	47
7	55
8	63
9	71

$\Delta=84$

1	8
2	17
3	25
4	34
5	42
6	50
7	59
8	67
9	76

$\Delta=89$

1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	53
7	62
8	71
9	80

$\Delta=94$

1	9
2	19
3	28
4	38
5	47
6	56
7	66
8	75
9	85

$\Delta=99$

1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	59
7	69
8	79
9	89

$\Delta=80$

1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48
7	56
8	64
9	72

$\Delta=85$

1	9
2	17
3	26
4	34
5	43
6	51
7	60
8	68
9	77

$\Delta=90$

1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	63
8	72
9	81

$\Delta=95$

1	10
2	19
3	29
4	38
5	48
6	57
7	67
8	76
9	86

$\Delta=100$

1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90