Seine Excellenz der Herr Kurländische Civilgouverneur, alle hohe Beamte und Autoritäten des Landes und der Stadt, die hochwürdige Geistlichkeit aller Confessionen, die Eltern und Verwandten der Schüler des Gymnasiums, so wie alle Freunde der Wissenschaft werden hiedurch hochachtungsvoll und ergebenst eingeladen, die öffentliche Prüfung und den feierlichen Actus im hiesigen Gymnasium mit Ihrer Gegenwart beehren zu wollen.

Die öffentliche Prüfung wird am Mittwoch den 13ten December Vormittags von 8 bis 12 Uhr gleichzeitig in allen Classen stattfinden.

Der Actus wird am Donnerstag den 21sten December um 11 Uhr Vormittags beginnen mit dem Chorale:

Lobe den Herrn, den mächtigen König der Ehren;
Stimme Du Seele mit ein zu den himmlischen Chören!
Komme zu Hauf;
Psalter und Harfe wacht auf,
Lasset den Lobgesang hören!

Lobe den Herren, was Odem hat, lobe den Namen,
Lob' ihn, was in mir ist, mit dem erkorenen Samen!
Er ist Dein Licht!
Seele vergiß es ja nicht!
Lob' ihn in Ewigkeit, Amen.

Nach diesem wird der Herr Oberlehrer Vogel eine Rede halten: Ueber das Verhältniß der classischen Studien zur geistigen Entwickelung der männlichen Jugend.

Darauf werden folgende Schüler der ersten Classe reden:

Vorkampff-Laue in griechischer Sprache: *Περὶ Δεμοσθένους* (über Demosthenes).
Neumann in lateinischer Sprache: Quibus causis factum est, ut tragoedia apud Romanos minus prospere, quam apud Graecos exculta sit?
Straus in deutscher Sprache: Ueber die Sinne des Menschen.
Engelmann in russischer Sprache: О козловѣ и сентиментальномъ направленіи въ Русской Литературѣ.
Virion in französischer Sprache: Influence des croisades sur la culture des peuples de l'Europe au moyen âge.

Sodann wird der Gouvernements-Schuldirector Bericht abstatten über die Thätigkeit und die Ereignisse des Gymnasiums im verflossenen Schuljahre und folgende Schüler der Anstalt feierlich mit dem Zeugnisse der Reife entlassen:

Johann August von Engelmann, aus Mitau.
Johann Carl Neumann, aus Mitau.
Emil Wilhelm Straus, aus Mitau.
Heinrich Eduard Vorkampff-Laue, aus Mitau.
Wasilii Fadejew, aus Mitau.
Hugo Behr, aus Mitau.

Zum Schluß die Nationalhymne: Боже Царя храни!

Die öffentlichen Prüfungen in den übrigen Kronsschulen in Mitau werden stattfinden:

1) in der Mitauschen Kreisschule Vormittags den 15ten December;
2) in der höheren Töchterschule St. Trinitatis in Mitau den 14ten December Vormittags;
3) in der St. Annen-Elementarschule Vormittags den 16ten December;
4) in der Armen-Elementarschule Vormittags den 16ten December;
5) in der dritten Elementarschule Vormittags den 16ten December;
6) in der Römisch-Katholischen Elementarschule Nachmittags den 15ten December;
7) in der Alexander-Elementarschule den 15ten December Nachmittags;
8) in der St. Trinitatis-Kirchspielsschule den 13ten December Vormittags.

Mitau, den 5ten December 1850.

Kurländischer Gouvernements-Schuldirector:

Collegienrath und Ritter **Belago.**

Beobachtungen

über die

Elasticität der Metalle,

angestellt

von

A. W. Napiersky,

Cand. philos. und Oberlehrer der mathematischen Wissenschaften
am Gymnasium zu Mitau.

Mitau.

Gedruckt bei Johann Friedrich Steffenhagen und Sohn.

1850.

Der Druck ist gestattet.

Dorpat, den 21. October 1850.

(L. S.) Censor **Fr. Neue.**

Unter allen Naturkörpern gehören die Metalle zu den über die ganze Erde verbreitetsten und nothwendigsten. Es ist daher vom größten Interesse, die besonderen Eigenschaften derselben auf's genaueste zu erforschen. Eine der merkwürdigsten Eigenschaften der Metalle ist ihre verschiedene Elasticität. Ich theile im Folgenden meine Beobachtungen über die Elasticität dreier Metalldräthe, eines Eisen-, eines Messing- und eines Silberdraths mit. Diese experimentelle Untersuchung ist eine Wiederholung der Versuche, welche in St. Petersburg vom Akademiker Staatsrath Kupffer angestellt, und deren Resultate im vorigen Jahre in einem Auszuge aus den Memoiren der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaft veröffentlicht worden sind. *)

Wenn ein Drath an seinem oberen Ende befestigt, am unteren aber durch ein Gewicht gespannt wird, und man dreht dieses Gewicht in horizontaler Ebene um seine verticale Axe, welche mit der Axe des Draths zusammenfällt, so beginnt eine Reihe von Schwingungen, die dnrch die elastische Kraft des Drathes hervorgebracht werden, und es ist auch ohne mathematische Entwickelung leicht einzusehen, daß die Schwingungen um so schneller vor sich gehen, je größer die Kraft ist, welche das Gewicht in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn es daraus entfernt wird, und daß man mithin die Dauer einer Schwingung als Maß der elastischen Kraft des Draths gebrauchen könne. Schon Coulomb bediente sich dieser Methode um die Gesetze der Torsions-Elasticität zu ermitteln.

Bezeichnet man mit ℓ die Länge des Draths, mit t die Dauer einer Schwingung, mit k das Trägheitsmoment des angehängten Gewichtes, ist ferner g der doppelte Fallraum der ersten Secunde und π die bekannte Zahl 3,14159 . . . ., so lehrt die Mechanik, daß

$$n = \frac{\pi^2 k}{g t^2},$$

*) Siehe: **Recherches experimentales sur l'elasticité des métaux par A. Kupffer. (Extrait des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg, sciences mathématiques T. V.) St. Petersbourg. 1849.**

wo n die elastische Kraft des Drathes ist, d. h. dasjenige Gewicht, welches man an einem Hebelsarm = 1 anwenden muß, um den Drath an einem Ende um einen der Einheit gleichen Bogen zu drehen. Als Längeneinheit ist im Folgenden der Russische Zoll, als Gewichtseinheit das Russische Pfund und als Zeiteinheit die Secunde gebraucht worden. Ist nun der Halbmesser des Draths r und bedeutet μ die elastische Kraft eines Draths von der Länge 1 und dem Halbmesser 1, so ist

$$\mu = n \,.\, \frac{\ell}{r^4} \text{ und } \delta = \frac{1}{5\mu},$$

wo mit δ die Ausdehnung bezeichnet wird, welche ein Cylinder von der Länge 1 und dem Radius 1 durch die Gewichtseinheit erleidet.

Ich gehe nun zur Beschreibung des zu diesen Versuchen hergestellten Apparats über. Tafel I. stellt denselben im Ganzen dar; aa′ ist ein starkes Brett, das zu beiden Seiten in die Mauer des Fensters befestigt ist; bb′ ist der Metalldrath, cc′ ein eiserner Cylinder von ungefähr 22 Zoll Länge und ¾ Zoll Durchmesser, welcher horizontal am unteren Ende des Draths aufgehängt ist. Dieser Cylinder der auf Tafel II. Fig. 1. besonders abgebildet ist, hat auf seiner Oberfläche, in einer geraden Linie parallel mit der Axe, acht kleine konische Vertiefungen, welche von der Mitte des Cylinders nach beiden Seiten gleich weit abstehen. Ihre Entfernung von einander wurde mit microskopischer Genauigkeit gemessen und fand sich wie folgt:

$$\begin{array}{llll}
\text{Punct } 4 \text{ bis } 7 & = 2e_1 & = & 7{,}9891 \\
\text{— } 3 \text{ — } 8 & = 2e_2 & = & 11{,}9851 \\
\text{— } 2 \text{ — } 9 & = 2e_3 & = & 15{,}9868 \\
\text{— } 1 \text{ — } 10 & = 2e_4 & = & 19{,}9908.
\end{array}$$

Diese konischen Vertiefungen dienen zur Aufnahme der stählernen Spitzen der aus Bleiplatten bestehenden Gewichte P, P, von denen eins auf Tafel II. Fig. 2. abgebildet ist. Das untere so wie auch das obere Ende des Draths wurde eingeklemmt zwischen die beiden Hälften eines stählernen Klobens f, welche durch eine Schraube s an einander gepreßt wurden. Der Kloben f ist mit dem Spiegelhalter ghik verbunden, jedoch so, daß sich dieser mit dem Cylinder um die Axe des Draths drehen läßt, ohne daß der Drath selbst eine Drehung erleidet. An den verticalen Säulen des Spiegelhalters gk und hi läßt sich der Spiegel mn auf und nieder bewegen. Mit dem Spiegelhalter ist der eiserne Cylinder cc′ unveränderlich durch das Stück ℓ verbunden. Der eiserne Cylinder ist bei den Schwingungen von einem runden Holzkasten AB, Tafel I. eingeschlossen, welcher die

Luftströmungen abhalten soll und im Mittelpunct des oberen Deckels ein Loch hat, um den Drath durchzulassen. Der Spiegel befindet sich unmittelbar über dem kreisrunden Deckel des Kastens, auf welchem ein an der inneren Seite getheilter Kreis befestigt ist, dessen Mittelpunct in die Verlängerung des Draths fällt und dessen Theilung durch den Spiegel reflectirt in dem in einiger Entfernung aufgestellten Fernrohre F sichtbar ist. Versetzt man nun den Drath in Schwingungen, so bewegt sich die Scala scheinbar an dem Verticalfaden des Fernrohrs vor- und rückwärts, und man kann nun die Elongationen zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage notiren und hieraus die Amplitude der Schwingung berechnen, welche nach den Gesetzen der Spiegelung gleich ist der Hälfte der beobachteten Amplitude. Geht die Verlängerung der Axe des Draths nicht durch den Mittelpunct des Kreises, so ist die beobachtete Amplitude mit einem Fehler behaftet, welchen ich so viel als möglich durch genaue Centrirung zu vermeiden suchte. Die Axe des Fernrohrs wurde in eine auf dem Spiegel senkrechte und durch den Mittelpunct des Kreises gehende Ebene gebracht. Ist nun der Drath in Ruhe, so geht der Verticalfaden des Fernrohrs durch irgend einen Strich der Theilung und es wurden nun die Vorübergänge dieses Theilstriches am Faden des Fernrohrs beobachtet, woraus auf bekannte Weise die Dauer einer Schwingung abgeleitet wurde. *)

Als Beispiel führe ich folgende Beobachtung ausführlich an:

I.		II.		III.	
$21^h 11' 38,'' 5$	246,0	$21^h 32' 59,'' 0$	158,0	$21^h 54' 18,'' 7$	105,0
51, 0	245,5	33 11, 8	158,5	31, 0	106,0
12 3, 9	243,0	24, 6	157,0	44, 3	104,5
16, 7	243,0	37, 5	157,0	57, 0	105,0
29, 6	241,0	50, 3	155,5	55 10, 0	103,5
42, 0	241,0	34 3, 0	156,0	22, 5	104,5
55, 5	239,0	15, 7	154,0	35, 5	103,0
13 8, 0	239,0	28, 4	154,5	48, 0	103,9
20, 9	236,5	41, 5	153,0	56 1, 0	102,0
33, 5	236,5	54, 0	153,1	14, 0	103,0
46, 5	234,5	35 6, 8	151,5	26, 5	101,1

*) Siehe: Resultate des magnetischen Vereins pag. 58 Jahrgang 1837, wo Gauß eine Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines Magnetstabs giebt.

IV.		V.	
$22^h 15' 37,'' 5$	72,5	$22^h 36' 55,'' 5$	51,1
50, 0	73,5	37 8, 0	52,2
16 2, 8	72,0	21, 0	51,0
15, 6	73,0	33, 5	52,0
28, 5	71,3	46, 5	50,7
40, 9	72,3	59, 0	52,0
54, 0	71,0	38 12, 0	50,2
17 6, 8	72,0	24, 6	51,5
19, 7	70,3	37, 5	50,0
33, 0	71,3	50, 0	51,0
45, 0	70,0	39 3, 0	49,8

Diese Beobachtungen bestehen aus 4 Sätzen; in jedem enthält die erste Columne die Zeiten der Vorübergänge des Theilstrichs 0 (die Theilung des Kreises nahm vom 0 Strich nach beiden Seiten zu) am Faden des Fernrohrs, die zweite die Elongationspuncte, immer mit der Elongation beginnend, welche dem ersten Vorübergange folgte. Hieraus erhält man:

	I.			II.			III.	
0	$21^h 11, 44,'' 8$	491,5	100	$21^h 33' 5,'' 4$	316,5	200	$21^h 54' 24,'' 9$	211,0
1	57, 5	488,5	101	18, 2	315,5	201	37, 7	210,5
2	12 10, 3	486,0	102	31, 1	314,0	202	50, 7	209,5
3	23, 2	484,0	103	43, 9	312,5	203	55 3, 5	208,5
4	35, 8	482,0	104	56, 7	311,5	204	16, 3	208,0
5	48, 8	480,0	105	34 9, 4	310,0	205	29, 0	207,5
6	13 1, 8	478,0	106	22, 1	308,5	206	41, 8	206,9
7	14, 5	475,5	107	35, 0	307,5	207	54, 5	205,9
8	27, 2	473,0	108	47, 8	306,1	208	56 7, 5	205,0
9	40, 0	471,0	109	35 0, 4	304,6	209	20, 3	204,1

IV.			V.		
300	22h 15′ 43,″8	146,0	400	22h 37′ 1,″8	103,3
301	56, 4	145,5	401	14, 5	103,2
302	16 9, 2	145,0	402	27, 3	103,0
303	22, 1	144,3	403	40, 0	102,7
304	34, 7	143,6	404	52, 8	102,7
305	47, 5	143,3	405	38 5, 5	102,2
306	17 0, 4	143,0	406	18, 3	101,7
307	13, 3	142,3	407	31, 1	101,5
308	26, 4	141,6	408	43, 8	101,0
309	39, 0	141,3	409	56, 5	100,8

Hier ergeben sich in I. die Ziffern der ersten Columne von selbst; für die anderen Sätze werden sie so gefunden: aus 0 und 9 erhält man den genäherten Werth der Schwingungsdauer = 12,″80. Das Zeitintervall von 0 bis 100 beträgt 21′20,″6 = 1280,″6. Diese Zahl durch 12,80 dividirt giebt 100. Es sind also zwischen dem ersten und zweiten Satz 100 Schwingungen verflossen. Die zweite Columne eines jeden Satzes enthält die Elongationszeiten d. h. die Mittel aus den beobachteten Durchgangszeiten. Die dritte Columne enthält die beobachteten Amplituden.

Die Schwingungsdauer läßt sich nun genauer herleiten. Die Dauer von hundert Schwingungen findet sich aus:

0 — 100	21′20,″6
1 — 101	20, 7
2 — 102	20, 8
3 — 103	20, 7
4 — 104	20, 9
5 — 105	20, 6
6 — 106	20, 3
7 — 107	20, 5
8 — 108	20, 6
9 — 109	20, 4

im Mittel 21′20,″61 und daher die Dauer einer Schwingung = 12,″8061. Ebenso erhält man zwischen den anderen Sätzen der Schwingungsdauer: 12,″7962; 12,″7866; 12,″7788.

Um für die so eben erhaltenen Zahlen die zugehörigen Schwingungsbögen zu berechnen, gehe ich von der Hypothese aus, daß die Schwingungsbögen von einem Satze zum anderen in geometrischer Progression abnehmen. Sie werden auf folgende Weise gefunden: die arithmetischen Mittel der beobachteten Amplituden für die fünf Sätze sind 480,95; 310,67; 207,69; 143,59; 102,21. Bildet man auf einander folgend aus je zwei dieser Zahlen die geometrischen Mittel und multiplicirt dieselben mit 0,111524 (ein Theil der Kreistheilung war = 0,°223048), so erhält man die gesuchten Schwingungsbögen in Graden: 43,°109; 28,°329; 19,°259; 13,°511.

Wie man sieht nimmt die Schwingungsdauer mit der Abnahme der Schwingungsbögen zugleich ab, und es bleibt nun noch übrig die Zeit einer unendlich kleinen Schwingung zu finden d. h. den Grenzwerth, welchem sich die Dauer einer Schwingung nähert, während die Schwingungsbögen sich dem Verschwinden unendlich nähern. Kupffer hat gezeigt, daß diese Abnahme der Quadratwurzel aus der Amplitude proportional ist, und dieses Gesetz findet auch in den folgenden Beobachtungen seine Bestätigung. Nennt man daher die auf unendlich kleine Bögen reducirte Dauer einer Schwingung t und bezeichnet mit α eine aus der Beobachtung herzuleitende Constante, so hat man zur Berechnung von t und α folgende 4 Gleichungen:

$$t + \alpha\sqrt{43{,}109} = 12{,}8061$$
$$t + \alpha\sqrt{28{,}329} = 12{,}7962$$
$$t + \alpha\sqrt{19{,}259} = 12{,}7866$$
$$t + \alpha\sqrt{13{,}511} = 12{,}7788$$

Hieraus ergiebt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\alpha = 0{,}0094384;\quad t = 12{,}7448.$$

Die Differenzen der hiermit berechneten und der beobachteten Werthe der Schwingungsdauer sind:

$$+0{,}0007;\ -0{,}0012;\ -0{,}0004;\ +0{,}0007.$$

Auf die Schwingungsdauer hat die Temperatur des Draths einen bedeutenden Einfluß, denn bei Zunahme der Temperatur findet auch eine Zunahme der Schwingungsdauer statt. Es wurde daher unmittelbar vor und nach jeder Beobachtungsreihe ein nahe der Mitte des Draths angebrachtes Thermometer M abgelesen und das Mittel aus beiden Ablesungen als die der beobachteten Schwingungsdauer zugehörige Temperatur betrachtet. Ist nun t' die auf die Normaltemperatur + 13,°3 R. reducirte Schwingungsdauer und T die beobachtete Temperatur, so hat man

$$t' = t\,[1 - \beta\,(T - 13{,}3)]$$

wo β eine aus Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmende Constante ist. Für den Eisendrath fand sich, wie aus den nachfolgenden Beobachtungen ersichtlich,

$\beta = 0{,}0002501$ und hiermit für das angeführte Beispiel wo $T = + 9{,}^o3$ ist $t' = 12{,}''7575$.

Bei den Schwingungen hat noch der Widerstand der Luft einen Einfluß auf die Schwingungsdauer; derselbe ist wol auf die Endresultate dieser Beobachtungen nicht bedeutend und überdies nicht leicht zu bestimmen. Aus diesen Gründen habe ich den Widerstand der Luft unberücksichtigt gelassen.

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des eisernen Cylinders nebst der Spiegelvorrichtung habe ich das von Gauß bei Magnetstäben angewandte Verfahren *) eingeschlagen. Ist nämlich k das Trägheitsmoment des eisernen Cylinders nebst der Spiegelvorrichtung, p die Masse jeder der in gleichen Entfernungen von der Mitte des Cylinders angehängten gleichen Gewichte nebst ihren Bügeln, 2e ihre Entfernung von einander und C das Trägheitsmoment der Gewichte in Bezug auf eine verticale Axe, welche durch die Stahlspitzen und die Schwerpuncte der Gewichte gezogen wird, so hat man:

$$\begin{aligned} g\,n\,t_1'^2 &= \pi^2 (k + C + 2p\,e_1^2) \\ g\,n\,t_2'^2 &= \pi^2 (k + C + 2p\,e_2^2) \\ g\,n\,t_3'^2 &= \pi^2 (k + C + 2p\,e_3^2) \\ g\,n\,t_4'^2 &= \pi^2 (k + C + 2p\,e_4^2) \end{aligned}$$

und für die Schwingungen ohne Belastung:

$$g\,n\,t'^2 = \pi^2 k.$$

Diesen Gleichungen kann man noch eine andere Gestalt geben. Setzt man nämlich $x = \dfrac{n\,g}{2p\,\pi^2}$ und $y = \dfrac{k + C}{2p}$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x\,t_1'^2 &= e_1^2 + y \\ x\,t_2'^2 &= e_2^2 + y \\ x\,t_3'^2 &= e_3^2 + y \\ x\,t_4'^2 &= e_4^2 + y \end{aligned}\right\} \quad (\Delta)$$

woraus sich x und y findet und sodann $k + C$ und n.

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate kann hier noch folgendermaaßen verfahren werden:

*) Siehe: Gauss, Intensitas vis magneticae etc. pag. 20. sqq.

Man berechne erst die Werthe für x und y aus der ersten und letzten der Gleichungen ($\triangle$); diese berechneten Werthe seien x' und y' und setze nun $x = x' + dx$; $y = y' + dy$. Durch Differentiation der Gleichung $t^2 = \frac{e^2 + y}{x}$ erhält man aber auch:

$$dt = \frac{dy}{2t\,x} - \frac{(e^2 + y)}{2t\,x^2} \,.\, dx.$$

In diese letzte Gleichung setzt man für x und y die berechneten Werthe x' und y'; die Werthe von t in ihr werden besonders aus den genäherten Werthen x' und y' berechnet; dt ist der Unterschied der beobachteten und berechneten Werthe von t, für die erste und letzte Gleichung also o. Auf diese Weise hat man eben so viel Gleichungen als Beobachtungen und findet die Verbesserungen dx und dy.

Die Länge des Draths wurde mit Hilfe eines Maßstabs von festem Holze gemessen, dessen Enden durch die beiden Hälften eines stählernen Cylinders, der nach der Länge der Axe durchschnitten war, gebildet wurden. Die Grundfläche dieses Cylinders ist sphärisch; an dem einen Ende des Maßstabs ist der Cylinder unveränderlich befestigt, an dem andern Ende läßt er sich durch eine Schraube an einer Theilung, die mit einem Nonius versehen ist, verschieben. Legt man nun das unbewegliche Ende dieses Maßstabs an die untere Fläche des Klobens, in welchen das obere Ende des Draths gepreßt ist, und bewegt den unteren Halbcylinder mittelst der Schraube so lange, bis seine untere Fläche die obere des Klobens, in welchen das untere Ende des Draths eingeschraubt ist, berührt, so erhält man durch Ablesung an der Theilung die Länge des Draths.

Der Halbmesser r des Draths wurde nach Beendigung der Schwingungsbeobachtungen durch Abwägung in destillirtem Wasser bestimmt, ganz auf dieselbe Weise wie dies in dem angeführten Werke Recherches experimentales etc. beschrieben ist und nach der daselbst angegebenen Formel berechnet, welche ich der Vollständigkeit wegen hersetze:

$$r = \sqrt{\frac{0{,}99985\,q + p\,\beta}{\gamma\,\pi\,\ell}}$$

wo β für Messing und Eisen $= 0{,}00015$, für Silber aber $= 0{,}00012$ ist, q das Gewicht einer dem Volumen des Draths gleichkommenden Wassermasse, p das Gewicht des Draths in der Luft, γ das Gewicht eines Cubikzolls Wasser bei der Temperatur, die das Wasser während der Abwägung hatte, und ℓ die Länge des Draths bedeutet. Zu gleicher Zeit erhält man das Gewicht eines Cubikzolls des zu untersuchenden Metalls durch den Ausdruck $p\gamma : (0{,}99985\,q + p\beta)$, wo γ in Pfunden ausgedrückt ist.

So fand sich für den angewandten Eisendrath: sein Gewicht in der Luft $p = 233{,}95$ Doli, $q = 30{,}18$ Doli, $\ell = 52{,}5929$ Zoll, woraus $r = 0{,}02228715$ Zoll, das Gewicht eines Cubikzolls Eisen $= 0{,}309310$ Pfund und daher das specifische Gewicht $= 7{,}7386$. Eine directe Messung des Radius mit einem Microskop gab für das eine Ende des Draths $r = 0{,}0219926$ Zoll.

Für den Messingdrath war $p = 459{,}8$; $q = 54{,}8$; $\ell = 52{,}5758$, folglich $r = 0{,}0300441$; Gewicht eines Cubikzolls Messing $= 0{,}334635$; specifisches Gewicht $= 8{,}3722$.

Beim Silberdrath ergab die Abwägung $p = 720{,}8$; $q = 70{,}2$; $\ell = 52{,}6058$, woraus $r = 0{,}0339725$, Gewicht eines Cubikzolls Silber $= 0{,}410048$; specifisches Gewicht $= 10{,}2567$.

Ich lasse nun die Beobachtungen der Schwingungsdauer folgen:

I. Eisendrath.

No. 1. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite. Länge des Draths bei $+ 13{,}^{\circ}3$ R. $= 52{,}5929$. Halbmesser $= 0{,}02228715$. Entfernung der Gewichte von der Axe des Draths $= 9{,}9954$ Zoll. Temperatur $= + 5{,}^{\circ}9$ R.

Beobachtete Dauer einer Schwingung.	Schwingungsbogen.	Ber. — Beob.
26,"5154	57,°558	— 0,0007
26, 5004	45, 926	— 0,0010
26, 4820	37, 141	+ 0,0046
26, 4786	30, 408	— 0,0029

$\alpha = 0{,}018834$; $t = 26{,}''3718$.

No. 2. Dieselbe Belastung in derselben Entfernung. Temperatur $= + 5{,}^{\circ}6$ R.

26,"4936	48,°720	+ 0,0007
26, 4824	38, 922	— 0,0005
26, 4730	31, 485	— 0,0015
26, 4614	25, 832	+ 0,0013

$\alpha = 0{,}016677$; $t = 26{,}3779$.

No. 3. Dieselbe Belastung in derselben Entfernung. Temperatur $= + 11{,}^{\circ}2$ R.

26,"5264	61,°603	+ 0,0012
26, 5160	47, 819	— 0,0023
26, 5008	37, 443	+ 0,0011
26, 4916	29, 530	+ 0,0002

$\alpha = 0{,}014826$; $t = 26{,}4112$.

Zur Bestimmung von β hat man aus No. 1, No. 2 und No. 3 folgende Gleichungen:

$$t' = 26{,}3718\ (1 + 7{,}4\ \beta)$$
$$t' = 26{,}3779\ (1 + 7{,}7\ \beta)$$
$$t' = 26{,}4112\ (1 + 2{,}1\ \beta)$$

woraus $t' = 26,''4249$, $\beta = 0{,}0002501$; α im Mittel $= 0{,}01678$. Mit diesem Werthe von β und t' ergiebt sich:

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
26,"3760	26,3718	+ 0,0042
26, 3740	26,3779	— 0,0039
26, 4110	26,4112	— 0,0002

und man hat zur Reduction der Schwingungsdauer auf die Temperatur $13\frac{1}{3}^{\circ}$ den Ausdruck

$$t' = t\ [1 + (T - 13{,}3)\ .\ 0{,}0002501]$$

No. 4. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926 Zoll von der Axe des Draths. Temperatur $= + 6,^{\circ}5$ R.

16,"8896	36,°804	+ 0,0006
16, 8842	29, 946	— 0,0004
16, 8790	24, 539	— 0,0008
16, 8724	20, 258	+ 0,0009

$\alpha = 0{,}010813$ $t = 16,''8246$; $t' = 16,''8532$.

No. 5. Dieselbe Belastung in der Entfernung 3,9946. Temperatur $= + 10,^{\circ}5$ R.

12,"4860	51,°084	+ 0,0006
12, 4818	41, 218	— 0,0001
12, 4798	33, 650	— 0,0023
12, 4724	27, 722	+ 0,0015

$\alpha = 0{,}006731$; $t = 12,''4385$; $t' = 12,''4472$.

No. 6. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite, in der Entfernung 3,9946 Zoll von der Axe des Draths. Temperatur $= + 11,^{\circ}6$ R.

9,"9096	46,°935	— 0,0001
9, 9054	37, 656	+ 0,0002
9, 9030	30, 585	— 0,0006
9, 8986	25, 124	+ 0,0010
9, 8968	20, 849	+ 0,0004
9, 8958	17, 465	— 0,0007

$\alpha = 0{,}005367$; $t = 9,''8727$; $t' = 9,''8769$.

No. 7. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926. Temperatur = + 9,°3. R.

12,"8061	43,°109	+ 0,0007
12, 7962	28, 329	— 0,0012
12, 7866	19, 259	— 0,0004
12, 7788	13, 511	+ 0,0007

$\alpha = 0{,}0094384$; $t = 12,''7448$; $t' = 12,''7575$.

No. 8. Dieselbe Belastung in der Entfernung 7,9934. Temperatur = + 12,°1 R.

16,"0266	52,°806	— 0,0003
16, 0102	33, 520	+ 0,0006
15, 9995	22, 011	— 0,0002
15, 9907	14, 885	— 0,0002

$\alpha = 0{,}010480$; $t = 15,''9501$; $t' = 15,''9549$.

No. 9. Dieselbe Belastung in der Entfernung 9,9954. Temperatur = + 11,°8 R.

19,"3869	49,°778	+ 0,0002
19, 3728	34, 909	— 0,0009
19, 3586	25, 117	+ 0,0014
19, 3513	18, 503	— 0,0007

$\alpha = 0{,}013231$; $t = 19,''2937$; $t' = 19,''3009$.

No. 10. Schwingungen ohne Belastung. Temperatur = + 13,°3 R.

6,"1757	19,°721	+ 0,0004
6, 1728	13, 291	— 0,0007
6, 1694	9, 274	— 0,0002
6, 1664	6, 636	+ 0,0004

$\alpha = 0{,}004977$; $t = 6,''1540$; $t' = 6,''1540$.

II. Messingdrath.

No. 11. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite. Länge des Draths bei + 13⅓° R. = 52,5758 Zoll. Radius = 0,0300441 Zoll. Entfernung der Gewichte von der Axe des Draths = 9,9954 Zoll. Temperatur = + 15,°0 R.

Schwingungsdauer.	Amplitude.	Ber. — Beob.
21,"6148	49,°704	+ 0,0018
21, 6088	40, 243	— 0,0018
21, 6006	32, 671	— 0,0022
21, 5888	26, 738	+ 0,0022

$\alpha = 0{,}013584$; $t = 21,''5208$; $t' = 21,''5115$. *)

*) Siehe pag. 16.

No. 12. Dieselbe Belastung in der Entfernung 7,9934. Temperatur = + 13,°5 R.

17,"6108	39,°912	+ 0,0018
17, 6062	33, 211	— 0,0007
17, 6020	27, 717	— 0,0029
17, 5938	23, 274	— 0,0003
17, 5870	19, 728	+ 0,0016
17, 5840	16, 886	+ 0,0003

$\alpha = 0{,}012806$; t = 17,"5317; t' = 17,"5306.

No. 13. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926. Temperatur = + 14,°1 R.

13,"7792	52,°490	+ 0,0014
13, 7728	42, 672	— 0,0005
13, 7662	34, 883	— 0,0012
13, 7584	28, 774	+ 0,0003
13, 7574	23, 979	— 0,0041
13, 7446	20, 200	+ 0,0040

$\alpha = 0{,}011654$; t = 13,"6962; t' = 13,"6935.

No. 14. Dieselbe Belastung in der Entfernung 3,9946. Temperatur = + 15,°6 R.

10,"1730	42,°414	— 0,0004
10, 1664	34, 768	+ 0,0014
10, 1638	28, 708	— 0,0003
10, 1602	23, 907	— 0,0004
10, 1580	20, 111	— 0,0014
10, 1544	17, 078	— 0,0006
10, 1498	14, 651	+ 0,0016

$\alpha = 0{,}0079115$; t = 10,"1211; t' = 10,"1152.

No. 15. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite in der Entfernung 9,9954 Zoll. Temperatur = + 16,°0 R.

15,"7848	39,°169	+ 0,0006
15, 7782	32, 025	— 0,0012
15, 7698	26, 427	— 0,0002
15, 7622	22, 019	+ 0,0011
15, 7584	18, 548	— 0,0005
15, 7532	15, 823	0,0000

$\alpha = 0{,}014130$; t = 15,"6970; t' = 15,"6903.

No. 16. Dieselbe Belastung in der Entfernung 7,9934. Temperatur = + 14,°7 R.

13,"0436	47,°666	+ 0,0020
13, 0394	38, 616	— 0,0012
13, 0346	31, 515	— 0,0028
13, 0262	25, 985	+ 0,0001
13, 0190	21, 676	+ 0,0026
13, 0180	18, 274	— 0,0005

$\alpha = 0{,}010672$; t = 12,"9719; t' = 12,"9673.

No. 17. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926. Temperatur = + 15,°9 R.

10,"4428	45,°800	— 0,0007
10, 4330	37, 080	+ 0,0025
10, 4312	30, 283	— 0,0013
10, 4266	24, 969	— 0,0016
10, 4210	20, 797	— 0,0002
10, 4160	17, 520	+ 0,0012

$\alpha = 0{,}0096462$; t = 10,"3768; t' = 10,"3700.

No. 18. Dieselbe Belastung in der Entfernung 3,9946 Zoll. Temperatur = + 15,°2 R.

8,"0694	40,°382	+ 0,0002
8, 0605	26, 755	+ 0,0003
8, 0559	18, 529	— 0,0015
8, 0486	13, 458	+ 0,0011

$\alpha = 0{,}0074293$; t = 8,"0224; t' = 8,"01855.

No. 19. Schwingungen ohne Belastung. Temperatur = + 15,°4 R.

5,"1234	23,°894	+ 0,0002
5, 1201	16, 560	— 0,0007
5, 1154	12, 067	+ 1,0010
5, 1145	9, 156	— 0,0004

$\alpha = 0{,}005093$; t = 5,"0987.

No. 20. Ohne Belastung. Temperatur = + 14,°2 R.

5,"1201	29,°928	+ 0,0004
5, 1171	20, 583	— 0,0005
5, 1145	14, 809	— 0,0009
5, 1106	11, 137	+ 0,0008

$\alpha = 0{,}0043218$; t = 5,"0970.

No. 21. Ohne Belastung. Temperatur = + 19,°0 R.

5,"1294	34,°588	+ 0,0001
5, 1243	22, 895	+ 0,0003
5, 1218	15, 766	— 0,0009
5, 1177	11, 383	+ 0,0006

$\alpha = 0{,}0044701$; $t = 5{,}''1032$.

Aus No. 19, No. 20 und No. 21 ergibt sich $\beta = 0{,}000251586$; $t' = 5{,}''0959$, mithin

$$t' = t\,[1 - (T - 13{,}3)\ 0{,}000251586].$$

III. Silberdrath.

No. 22. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite. Länge des Draths = 52,6058 Zoll. Radius = 0,0339725 Zoll. Entfernung der Gewichte von der Axe des Draths = 9,9954 Zoll. Temperatur = + 12,°8 R.

Schwingungsdauer.	Amplitude.	Ber. — Beob.
19,"6398	45,°481	0,0000
19, 6374	40, 484	0,0000
19, 6348	36, 178	+ 0,0005
19, 6336	32, 392	— 0,0003

$\alpha = 0{,}0061056$; $t = 19{,}''5986$; $t' = 19{,}''6007$. *)

No. 23. Dieselbe Belastung in der Entfernung 7,9934 Zoll. Temperatur = + 11,°4 R.

16,"0175	49,°619	0,0000
16, 0159	40, 874	— 0,0001
16, 0143	33, 675	— 0,0001
16, 0127	27, 667	0,0000

$\alpha = 0{,}0026864$; $t = 15{,}''9986$; $t' = 16{,}''0051$

No. 24. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926 Zoll. Temperatur = + 12,°3 R.

12,"5194	45,°748	+ 0,0003
12, 5190	37, 617	— 0,0006
12, 5170	30, 848	+ 0,0002
12, 5160	25, 179	+ 0,0001

$\alpha = 0{,}0020862$; $t = 12{,}''5056$; $t' = 12{,}''5083$.

---

*) Siehe pag. 18.

No. 25. Dieselbe Belastung in der Entfernung 3,9946 Zoll. Temperatur = + 12,°5 R.

9,"2452	37,°810	+ 0,0003
9, 2449	29, 759	— 0,0006
9, 2429	23, 359	+ 0,0004
9, 2424	18, 238	0,0000

$\alpha = 0{,}0016556$; t = 9,"2353; t′ = 9,"2369.

No. 26. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite in der Entfernung 9,9954 Zoll. Temperatur = + 12,°1 R.

14,"4493	39,°990	— 0,0001
14, 4474	32, 393	+ 0,0001
14, 4461	26, 277	— 0,0001

$\alpha = 0{,}0026771$; t = 14,"4323; t′ = 14,"4360.

No. 27. Dieselbe Belastung in der Entfernung 7,9934 Zoll. Temperatur = + 9,°9 R.

11,"9346	43,°542	— 0,0005
11, 9311	35, 275	+ 0,0006
11, 9290	28, 503	+ 0,0005
11, 9281	22, 963	— 0,0005

$\alpha = 0{,}0036217$; t = 11,"9102; t′ = 11,"9189.

No. 28. Dieselbe Belastung in der Entfernung 5,9926 Zoll. Temperatur = + 11,°3 R.

9,"5525	46,°422	— 0,0002
9, 5498	35, 710	0,0000
9, 5471	27, 461	+ 0,0006
9, 5463	20, 990	— 0,0005

$\alpha = 0{,}0028845$; t = 9,"5326; t′ = 9,"5367.

No. 29. Dieselbe Belastung in der Entfernung 3,9946 Zoll. Temperatur = + 11,°4 R.

7,"3826	35,°123	+ 0,0005
7, 3814	24, 655	— 0,0007
7, 3790	17, 194	— 0,0004
7, 3763	12, 029	+ 0,0006

$\alpha = 0{,}0025523$; t = 7,"3680.

No. 30. Dieselbe Belastung in derselben Entfernung. Temperatur = + 9,°7 R.

7,"3801	34,°905	+ 0,0008
7, 3798	24, 791	— 0,0014
7, 3765	17, 597	— 0,0001
7, 3741	12, 561	+ 0,0005

$\alpha = 0{,}0026378$; t = 7,"3653.

Aus den beiden letzten Nummern hat man zur Bestimmung des Einflusses der Temperatur

$$t' = 7{,}3653\ (1 + 3{,}6\ \beta)$$
$$t' = 7{,}3680\ (1 + 1{,}9\ \beta)$$

woraus $t' = 7{,}''3710$; $\beta = 0{,}00021573$ und man erhält zur Reduction auf die Temperatur $13\frac{1}{3}^\circ$ den Ausdruck:

$$t' = t\ [1 - (T - 13{,}3)\ 0{,}00021573].$$

Ich stelle nun die den vorhergehenden Beobachtungen entnommenen Werthe zusammen:

I. Eisendrath.

A. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite; $2p = 22{,}3771$.

Schwingungsdauer t'.	Entfernung der Belastung von der Axe des Draths e.	α
26,"4249	9,9954	0,01678
......	7,9934	......
16, 8532	5,9926	0,010813
12, 4472	3,9946	0,006731

Hieraus erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Anwendung der Gleichung $t^2 x = y + e^2$:

$$x = 0{,}154511;\ y = 7{,}97971 \text{ und hiermit}$$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
26,"4244	26,"4249	— 0,0005
16, 8542	16, 8532	+ 0,0010
12, 4466	12, 4472	— 0,0006

Setzt man nun $g = 386{,}462$ *), so erhält man aus $k + C = 2py$ und $n = 2px\pi^2 : g$

$$k + C = 178{,}563;\ n = 0{,}0882992.$$

*) Den Fallraum der ersten Secunde habe ich nach dem Ausdrucke $193{,}033088 - 0{,}5006307 \cdot \cos 2b$ berechnet, wo b die Polhöhe von Mitau $= 56^\circ\ 39{,}'1$ bedeutet.

B. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite; 2p = 11,3203.

t′	e	α
19,″3009	9,9954	0,013251
15, 9549	7,9934	0,010480
12, 7575	5,9926	0,009438
9, 8769	3,9946	0,005367

woraus auf dieselbe Weise:

$$x = 0{,}305295;\quad y = 13{,}8114.$$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
19,″3000	19,″3009	— 0,0009
15, 9539	15, 9549	— 0,0010
12, 7619	12, 7575	+ 0,0044
9, 8745	9, 8769	— 0,0024

$$k + C = 156{,}349;\quad n = 0{,}0882614.$$

II. Messingdrath.

A. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite. 2p = 22,3771.

t′	e	α
21,″5115	9,9954	0,013584
17, 5306	7,9934	0,012806
13, 6935	5,9926	0,011654
10, 1152	3,9946	0,007911

$$x = 0{,}233152;\quad y = 7{,}8615.$$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
21,″4995	21,″5115	— 0,0120
17, 5432	17, 5306	+ 0,0126
13, 7019	13, 6935	+ 0,0084
10, 1073	10, 1152	— 0,0079

$$k + C = 175{,}918;\quad n = 0{,}133240.$$

B. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite. 2p = 11,3203.

t′	e	α
15,″6903	9,9954	0,014130
12, 9673	7,9934	0,010672
10, 3700	5,9926	0,009646
8, 0185	3,9946	0,007429

$$x = 0{,}461554;\quad y = 13{,}7198.$$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
15,"6903	15,"6903	0,0000
12, 9676	12, 9673	+ 0,0003
10, 3697	10, 3700	— 0,0003
8, 0185	8, 0185	0,0000

$k + C = 155{,}3125;\ n = 0{,}133436.$

III. Silberdrath.

A. Belastung von 11,18855 Pfund auf jeder Seite. $2p = 22{,}3771.$

t'	e	α
19,"6007	9,9954	0,0061056
16, 0051	7,9934	0,0026864
12, 5083	5,9926	0,0020862
9, 2369	3,9946	0,0016556

$x = 0{,}280821;\ y = 8{,}01225.$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
19,"6036	19,"6007	+ 0,0029
16, 0018	16, 0051	— 0,0033
12, 5064	12, 5083	— 0,0019
9, 2387	9, 2369	+ 0,0018

$k + C = 179{,}291;\ n = 0{,}160482.$

B. Belastung von 5,66015 Pfund auf jeder Seite. $2p = 11{,}3203.$

t'	e	α
14,"4360	9,9954	0,0026771
11, 9189	7,9934	0,0036217
9, 5367	5,9926	0,0028845
7, 3710	3,9946	0,0025950

$x = 0{,}545296;\ y = 13{,}6636.$

Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
14,"4318	14,"4360	— 0,0042
11, 9260	11, 9189	+ 0,0071
9, 5349	9, 5367	— 0,0018
7, 3702	7, 3710	— 0,0008

$k + C = 154{,}676;\ n = 0{,}157646.$

Aus dem Vorhergehenden hat man nun:

Metall.	Belastung.	n	l	r
Eisendrath	22,3771	0,0882992	52,5929	0,02228715.
	11,3203	0,0882614		
Messingdrath	22,3771	0,133240	52,5758	0,0300441.
	11,3203	0,133436		
Silberdrath	22,3771	0,160482	52,6058	0,0339725.
	11,3203	0,157646		

Die Längen der Dräthe wurden bei der größten Belastung gemessen, und bedürfen bei geringerer Belastung einer Correction $= \frac{\ell\,\delta}{r^2}$ für jedes Pfund. Leitet man daher aus Obigem einen genäherten Werth für δ her, so ergibt sich diese Verbesserung leicht. So fand sich:

Metall.	Belastung.	Länge.
Eisendrath	22,3771	52,5929
	11,3203	52,5805
	0	52,5681
Messingdrath . . .	22,3771	52,5758
	11,3203	52,5609
	0	52,5460
Silberdrath . . .	22,3771	52,6058
	11,3203	52,5900

Der Einfluß der verschiedenen Belastung auf den Halbmesser des Draths ist zu unbedeutend, um ihn in Rechnung zu bringen.

Nach den Formeln $\mu = n \,.\, \frac{\ell}{r^4}$ und $\delta = \frac{1}{5\mu}$ erhält man jetzt:

Metall.	Belastung.	log μ	δ	Mittel.
Eisendrath	22,3771	7,274664	0,0000000106259	106294
	11,3203	7,274376	106329	
Messingdrath	22,3771	6,934382	0,0000000232621	232483
	11,3203	6,934897	232345	
Silberdrath	22,3771	6,801952	0,0000000315557	318439
	11,3203	6,794078	321321	

Aus den Mittelwerthen von δ ergibt sich für den Eisendrath log $\mu = 7{,}274522$, für den Messingdrath log $\mu = 6{,}934639$. Berechnet man nun hiermit das Trägheitsmoment k nach dem Ausdruck $k = \frac{r^4 \mu t^2 g}{\ell \pi^2}$, wo für t die Schwingungsdauer der Beobachtungen ohne Belastung zu nehmen ist, so erhält man:

$$k = 130{,}961$$
$$k = 135{,}640.$$

Im Mittel ist $k = 133{,}301$. Mit diesem Werthe von k ergiebt sich aus den Schwingungsbeobachtungen ohne Belastung

für den Eisendrath $\log \mu = 7{,}282214$ $\delta = 0{,}0000000104428$

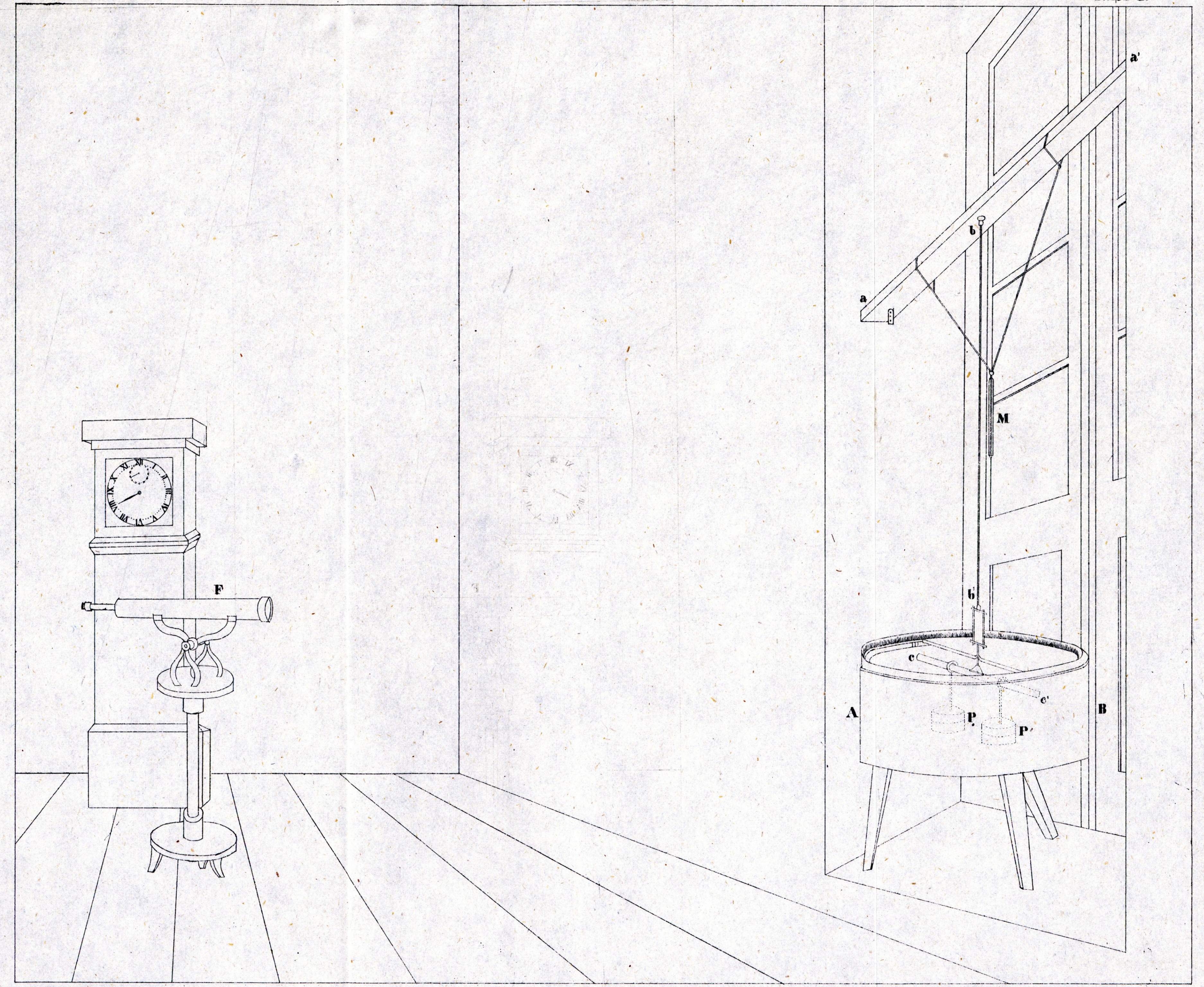
Messingdrath $\log \mu = 6{,}927084$ $\delta = 0{,}0000000236562$

Zum Schluß stelle ich sämmtliche Resultate wie folgt zusammen:

Metall.	Belastung.	δ	Mittel.
Eisendrath	22,3771	0,0000000106259	105672
	11,3203	106329	
	0	104428	
Messingdrath	22,3771	0,0000000232621	233843
	11,3203	232345	
	0	236562	
Silberdrath	22,3771	0,0000000315557	318439
	11,3203	321321	

Mitau, am 15ten October 1850.

Tafel I.



Tafel II.

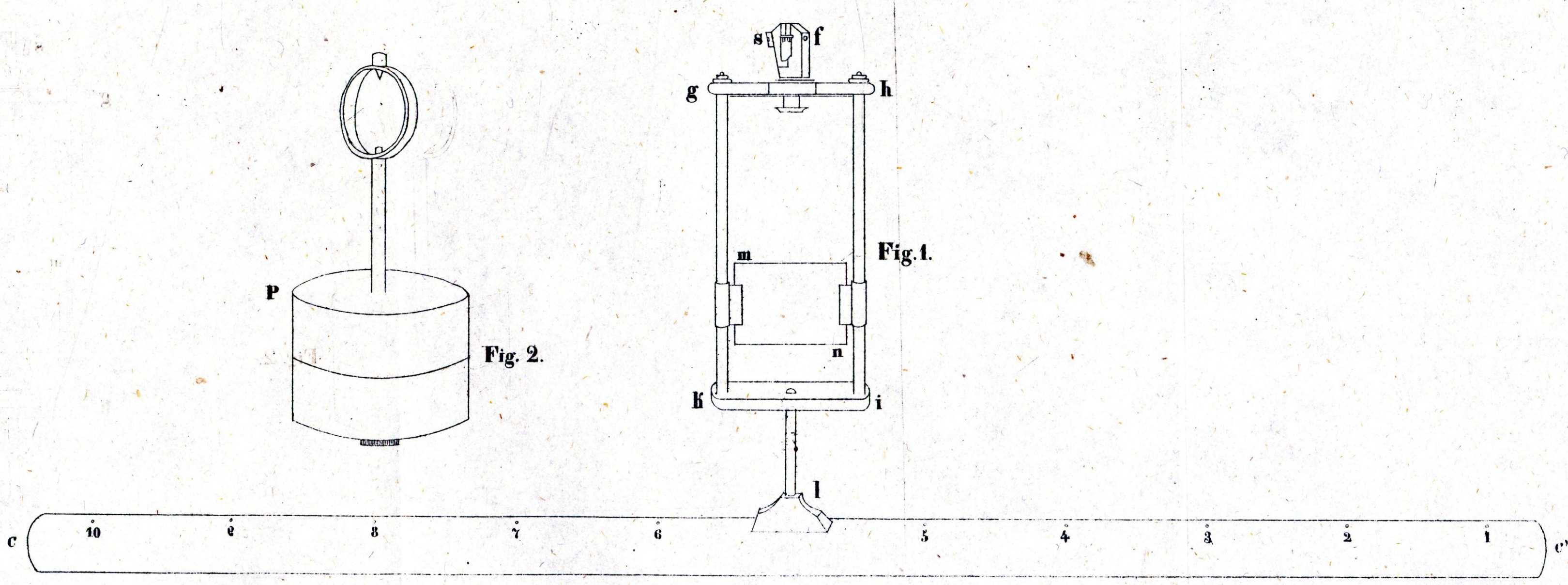


Fig. 2.

Fig. 1.