

Tartu Ülikool
Matemaatika-Informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Triin Teesalu

Finantsandmete modelleerimine Arhimeediliste ja
ekstremaalväärtuste koopulatega

Magistritöö (30 EAP)
Finants- ja kindlustusmatemaatika eriala

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2014

Finantsandmete modelleerimine Arhimeediliste ja ekstremaalväärtuste koopulatega

Antud magistritöö eesmärgiks on anda lühiülevaade kahemõõtmelistest Arhimeedilistest ja ekstremaalväärtuste koopulatest ning nende rakendusest finantsandmetele. Selgitatakse nende koopulate põhimõisteid ning tähtsamaid tulemusi. Sõltuvusel on tähtis roll koopulate praktilises rakenduses, seega on selgitatud astakorrelatsioonide ja sabasõltuvuse kordajate mõisteid. Peale selle on kirjeldatud erinevaid meetodeid parameetrite hindamiseks ning parima koopula sobitamiseks finantsandmetele. Vaadeldud koopulaid on rakendatud valuutakursside andmestikele ning kulla- ja naftahinna indeksitele.

Märksõnad: Arhimeedilised koopula, ekstremaalväärtuste koopula, astakorrelatsioonid, sabasõltuvuse kordajad, generaator, Pickandsi sõltuvusfunktsioon, suurima tõepära meetod

Modelling of Financial Data Using Archimedean and Extreme Value Copulas

The purpose of this master's thesis is to give an overview of bivariate Archimedean and extreme value copulas and their application in financial data. Main definitions are given and explained, as well as central theorems to copula theory are proved. Dependence has an important role in practical applications of copulas, hence rank correlations and tail dependence coefficients are introduced. Furthermore, a few different methods for the estimation of copula parameters are given along with an approach how to fit the best copula in case of financial data. Selected copulas have been applied to currency exchange rates as well as to gold and oil indices.

Keywords: Archimedean copula, extreme value copula, rank correlations, tail dependence coefficients, generator function, Pickandsi dependence function, maximum likelihood method

Sisukord

1	Sissejuhatus	4
2	Koopulad	5
2.1	Mõisted ja definitsioonid	5
2.2	Sklari teoreem, koopulate seos juhuslike suurustega	8
3	Arhimeedilised koopulad	11
3.1	Mõisted ja definitsioonid	11
3.2	Arhimeediliste koopulate omadused	14
3.3	Sõltuvuse mõõdikud	15
3.4	Arhimeediliste koopulate klassid	17
3.4.1	Gumbeli koopula (1960)	17
3.4.2	Franki koopula (1979)	18
3.4.3	Ali-Mikhail-Haq koopula (1978)	19
3.4.4	Joe koopula (1993)	19
4	Ekstremaalväärtuste koopulad	22
4.1	Sõltuvuse mõõdikud	25
4.2	Ekstremaalväärtuste koopulate klassid	26
4.2.1	Gumbeli koopula (1978)	26
4.2.2	Galambosi koopula (1975)	26
4.2.3	Tawni koopula (1988)	28
4.2.4	Hüsler-Reissi koopula (1975)	28
5	Arhimeediliste ja ekstremaalväärtuste koopulate rakendamine	30
5.1	Parameetrite hindamine	30
5.1.1	Suurima tõepära meetod	30
5.1.2	IFM meetod	31

5.1.3	CML meetod	32
5.2	Andmete kirjeldus	33
5.2.1	EUR/USD ja JPY/USD	33
5.2.2	GLD ja OIL	34
5.3	Koopulate rakendamine	35
5.3.1	EUR/USD ja JPY/USD	35
5.3.2	GLD ja OIL	37
5.4	Mudeli sobivuse kontrollimine	39
5.4.1	EUR/USD ja JPY/USD	39
5.4.2	GLD ja OIL	40
6	Kokkuvõte	41
	Viited	42
	Lisa 1 - Aegridade graafikud	44
	Lisa 2 - EUR/USD ja JPY/USD sobitatud tihedused ja kvantiilide graafikud	46
	Lisa 3 - GLD ja OIL sobitatud tihedused ja kvantiilide graafikud	48

1 Sissejuhatus

Esimest korda kasutati sõna koopula aastal 1959 (Sklar), esimesed artiklid, mis sidusid koopula teooria juhuslike suurustega, kirjutati 1980ndate alguses ning 1990ndatel sai koopulatest väga populaarne vahend finants- ja kindlustusandmete rakenduses.

Antud töö eesmärk on anda ülevaade koopulateooria põhimõistetest ja tulemustest ning rakendada neid finantsandmetele. Peatükis 2 on defineeritud koopula teooria põhimõisted ning tähtsamad tulemused. Peatükis 3 on keskendutud Arhimeediliste koopulate perele, mis on laialt kasutusel oma lihtsa kuju tõttu, nimelt on Arhimeedilised koopulad vaid ühemuutuja funktsioonid ning seetõttu on neid lihtne käsitleda ning kasutada andmete modelleerimisel. Kirjeldatud on ka mõned Arhimeediliste koopulate klassid detailsemalt, kus on ära toodud ka vastavate koopulate astakkorrelatsioonid Kendalli τ ja Spearmani ρ ning sabasõltuvuse kordajad. Peatükk 4 käsitleb ekstremaalväärtuste koopulatega seotud mõisteid ning tähtsamaid tulemusi ning annab lühida ülevaate ekstremaalväärtuste koopulate omadustest ning kasutusvaldkondadest. Erinevate koopulate rakendamisele on pühendatud peatükk 5, mille eesmärk on näidata, kuidas praktikas on võimalik defineeritud mudeleid kasutada. Esimeses osas antakse ülevaade erinevatest parameetrite hindamismeetoditest ning teises pooles analüüsitakse peatükkides 3 ja 4 kirjeldatud koopulaid kahel erineval juhul - euro ja jaapani jeeni valuutakursside ning kulla- ja naftahinna indeksi käitumise modelleerimisel. Peatüki lõpus on analüüsitud leitud koopulate sobivust andmetele.

Tööl on 3 lisa jaotuste ja andmete võrdlustulemustest. Töö kirjutamiseks on kasutatud tekstitöötlusprogrammi $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Andmete analüüsiks ning jooniste jaoks on kasutatud rakendustarkvara R 3.0.2 ja R 3.0.3. Erinevaid tarkvara R versioone on kasutatud, kuna ilmnes "*copula*" paketi kasutamisel uuema versiooniga probleeme. Tööle on lisatud CD plaat koostatud R -programmidega.

2 Koopulad

2.1 Mõisted ja definitsioonid

Käesolevas punktis on ära toodud koopulate teooria põhimõisted, mida edaspidi on kasutatud. Alltoodud definitsioonides on kasutatud laiendatud reaaltelge $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Definitsioon 1. Olgu S_1, S_2 hulga $\overline{\mathbb{R}}$ mittetühjad alamhulgad ja olgu $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Olgu $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ristkülik, mille kõik tipud asuvad funktsiooni H määramispiirkonnas, siis selle ristküliku H -ruumala on antud kujul

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Definitsioon 2. Funktsioon H on 2-kasvav, kui $V_H(B) \geq 0$ iga ristküliku B korral, mille tipud kuuluvad funktsiooni H määramispiirkonda.

Definitsioon 3. Olgu a_1 hulga S_1 vähim element ja a_2 hulga S_2 vähim element, siis funktsioon $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ on maandatud, kui $H(x, a_1) = 0 = H(a_1, y)$ iga $(x, y) \in S_1 \times S_2$ korral. Olgu b_1 hulga S_1 suurim element ja b_2 hulga S_2 vähim element, siis funktsioonil $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ on servad, milleks on funktsioonid F ja G , kus funktsiooni F määramispiirkonnaks on S_1 ja funktsiooni G määramispiirkonnaks on S_2 :

$$F(x) = H(x, b_2) \quad \forall x \in S_1,$$

$$G(y) = H(b_1, y) \quad \forall y \in S_2.$$

Definitsioon 4. Kahemõõtmeline alamkoopula on funktsioon C' järgmiste omadustega:

1. C' määramispiirkond on $S_1 \times S_2$, kus S_1 ja S_2 on $\mathbf{I} = [0, 1]$ alamhulgad, nii et $\{0, 1\} \in S_1$ ja $\{0, 1\} \in S_2$.
2. C' on maandatud ja 2-kasvav;

3. Iga $u \in S_1$ ja $v \in S_2$ korral, $C'(u, 1) = u$ ja $C'(1, v) = v$.

Definitsioon 5. Kahemõõtmeline koopula on alamkoopula C , mille määramispiirkonnaks on \mathbf{I}^2 . Teisisõnu, kahemõõtmeline koopula on funktsioon $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$, millel on järgmised omadused.

1. Iga $u, v \in \mathbf{I}$ korral

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

ja

$$C(u, 1) = u, C(1, v) = v;$$

2. Iga $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$ korral, tingimusel et $u_1 \leq u_2$ ja $v_1 \leq v_2$ kehtib võrratus

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Järgnevalt on ära toodud üks tähtis teoreem alamkoopulate omaduste kohta, kuid kuna iga koopula on ka alamkoopula, siis kehtib see teoreem ka koopulate korral.

Teoreem 1. Olgu C' alamkoopula, siis iga u, v , mis on alamkoopula C' määramispiirkonnas, kehtib võrratus:

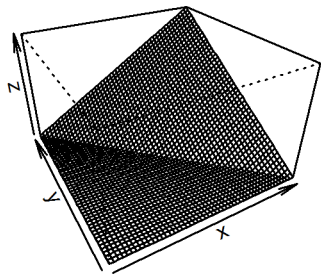
$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v).$$

Tõestuse võib leida nii McNeil, Frey ja Embrechtsi raamatust [15, lk. 188-189] kui ka Nelseni raamatust [16, lk.11]. Tegemist on Fréchet-Höfdingi tõketega koopulatele. Kahemõõtmelisel juhul on nii alumine kui ülemine tõke koopula, seega kui tähistada alumine tõke $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ ja ülemine tõke $M(u, v) = \min(u, v)$, siis iga koopula C ja $\forall(u, v) \in \mathbf{I}^2$ korral kehtib

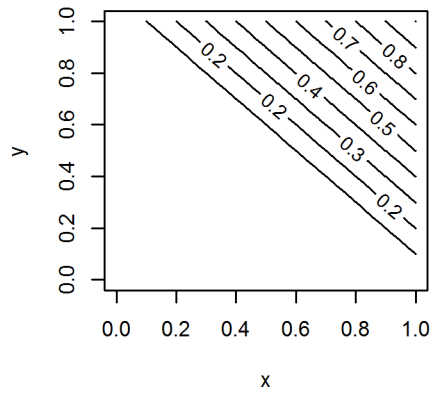
$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

Neile lisaks on veel üks tähtis koopula - korrutiskoopula:

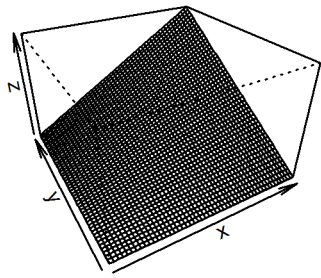
$$\Pi(u, v) = uv.$$



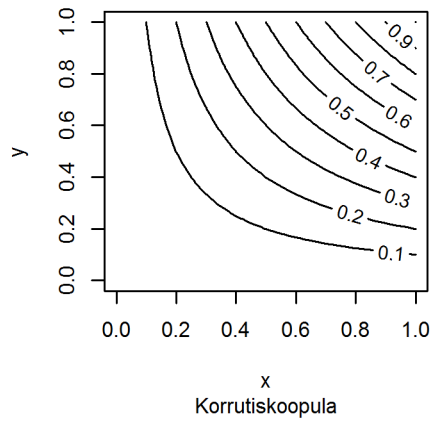
Fréchet-Höfdingi alumine töke



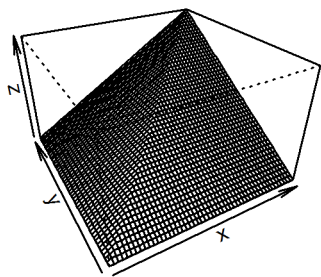
Fréchet-Höfdingi alumine töke



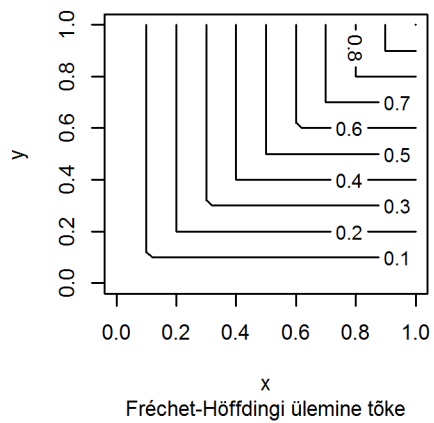
Korrutiskoopula



Korrutiskoopula



Fréchet-Höfdingi ülemine töke



Fréchet-Höfdingi ülemine töke

Joonis 1. Fundametaalsete koopulate jaotusfunktsioonid (vasakul) ja kontuurgraafikud (paremal)

2.2 Sklari teoreem, koopulate seos juhuslike suurustega

Järgnevalt sõnastatud teoreem on kesksel kohal koopula teooria põimimisel mitmemõõtmeliste jaotusfunktsioonidega ja nende marginaaljaotustega. Kuid eelnevalt paneme kirja mõned mõisted, millele antud teoreem baseerub. Edaspidises eeldame, et juhuslike suuruste X ja Y jaotusfunktsioonid F ja G on pidevad.

Definitsioon 6. *Funktsioon F on jaotusfunktsioon määramispiirkonnaga $\bar{\mathbb{R}}$ kui*

1. F on mittekahanev,
2. $F(-\infty) = 0$ ja $F(\infty) = 1$.

Nõnda defineeritud jaotusfunktsioon pideval juhul täidab ka paremalt pidevuse nõude.

Definitsioon 7. *Funktsioon H on ühisjaotusfunktsioon määramispiirkonnaga $\bar{\mathbb{R}}^2$ kui*

1. H on 2-kasvav,
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ ja $H(\infty, \infty) = 1$.

Seega funktsioon H on maandatud ja funktsioonil H on servad F ja G defineeritud kujul $F(x) = H(x, \infty)$ ja $G(y) = H(\infty, y)$.

Olgu juhuslikud suurused X ja Y vastavalt jaotusfunktsioonidega F ja G . On teada, et $F(X) = U \sim U(0, 1)$ ja $G(Y) = V \sim U(0, 1)$. Siis

$$F(x) = P(X \leq x) = P(U \leq F(x)) = P(F^{-1}(U) \leq x)$$

ja

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(V \leq G(y)) = P(G^{-1}(V) \leq y).$$

Teoreem 2. (Sklar 1959) Olgu H ühisjaotusfunktsioon servadega F ja G , siis eksisteerib koopula C , mille korral $\forall x, y \in \bar{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Kui F ja G on pidevad funktsioonid, siis C on ühene, vastasel juhul on C määratud funktsioonide F ja G muutumispiirkonnaga.

Kehtib ka vastupidine, ehk siis kui C on koopula ning F ja G on jaotusfunktsioonid, siis funktsioon $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ on ühisjaotusfunktsioon servadega F ja G .

Tõestus. Kui $(X, Y)^T$ jaotusfunktsioon on H , iga $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$, kehtib

$$H(x, y) = P[F(X) \leq F(x), G(Y) \leq G(y)].$$

Kuna F ja G on pidevad, siis koopula definitsioonist ja eeltoodud tulemusest järeldub, et $(F(X), G(Y))$ ühisjaotusfunktsioon on koopula C . Seega

$$C(F(x), G(y)) = H(x, y).$$

Kui tähistada $x = F^{-1}(u)$ ja $y = G^{-1}(v)$, kus $0 \leq u, v \leq 1$, siis saab kirjutada ka saadud tulemuse järgmisel kujul:

$$C(u, v) = C(F(F^{-1}(u)), G(G^{-1}(v))) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)),$$

millest järeldub üksühene seos koopula C ning ühisjaotusfunktsiooni H ja selle marginaalide F ja G vahel pideval juhul.

Teistpidi, eeldame, et C on ühisjaotusfunktsioonile H ja selle marginaalidele, F ja G , vastav koopula. Olgu juhuslik vektor $(U, V)^T$ jaotusfunktsiooniga C . Defineerime $X = F^{-1}(U)$, $Y = G^{-1}(V)$, millest järeldub, et

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(U \leq F(x), V \leq G(y)) = C(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

□

Seega Sklari teoreemist järeldub, et kahemõõtmelise koopula C , ühisjaotusfunktsiooni H ning servade F ja G korral kehtivad:

1. $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$,
2. $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$.

Definitsioon 8. *Kui juhuslik vektor (X, Y) on ühisjaotusfunktsiooniga H ning pidevate marginaaljaotustega F ja G , siis juhuslike suuruste $F(X) = U \sim U(0, 1)$ ja $G(Y) = V \sim U(0, 1)$ koopula C on $(F(X), G(Y))$ jaotusfunktsioon.*

Kui juhusliku vektori marginaaljaotused on pidevad, siis sellele vastav koopula on invariantne vektori komponentide rangelt kasvavate teisenduste suhtes. See teeb koopulatest väga kasuliku vahendi empiiriliste andmete modelleerimisel. Kuna koopula puhul on tegemist jaotusfunktsiooniga, siis pideval juhul saab avaldada ka koopula tiheduse. Kuigi kõikidel koopulatel tihedust pole võimalik leida, siis pidevate marginaaljaotuste puhul on koopula tihedus kujul:

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v},$$

kui $C(u, v)$ on pidevalt diferentseeruv mõlema argumenti järgi. Kui tegemist on koopulaga, millel on absoluutselt pidev ühisjaotusfunktsioon H , mis on rangelt kasvav, ja pidevad marginaaljaotused F ja G , siis on võimalik leida tuletis funktsioonist $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$. Sel juhul avaldub koopula tihedus kujul:

$$c(u, v) = \frac{h(F^{-1}(u), G^{-1}(v))}{f(F^{-1}(u))g(F^{-1}(v))},$$

kus h on ühistihedus ning f ja g on marginaaltihedused. Koopula tihedust kasutatakse koopula sobitamisel andmetele, näiteks suurima tõepära meetodil.

Antud peatükk kirjeldas koopulate tähtsamaid omadusi, millele baseeruvalt on järgmises peatükis kirjeldatud ühte laialtkasutatavat koopulate klassi - Arhiimedilisi koopulaid.

3 Arhimeedilised koopulad

3.1 Mõisted ja definitsioonid

Koopulate kasutamine kindlustusmatemaatikas on laialt levinud, kuna koopulate ülesehitus võimaldab analüüsida ja modelleerida kindlustusandmetes esinevaid sõltuvusstruktuure. Viimastel aastatel on palju tähelepanu pööratud koopulate ühele alamklassile, Arhimeedilistele koopulatele, mis on määratud täielikult läbi ühemuutuja funktsiooni ning on seetõttu lihtsamini käsitlevate analüütiliste omadustega. Arhimeedilised koopulad on populaarsed kindlustusmatemaatikas, kuna neis on paindlikkust ja nad on esitatavad analüütilisel kujul. Kuna need koopulad sisaldavad infot sõltuvusstruktuuri kohta, saab Arhimeediliste koopulatega modelleerida tegelikke mitmemõõtmelisi andmeid, millel esineb asümmeetrilisus sõltuvusstruktuuris. [5][22].

Arhimeedilised koopulad on praktikas, näiteks kindlustuses ja portfellihaldu- duses, väga populaarsed seetõttu, et tihti on mõistlik eeldada, et suurem sõltuvus on suurtel kahjudel kui suurtel rahalistel kasudel. Peale selle saab Arhimeediliste koopulatega konstrueerida palju erinevaid sõltuvusstruktuure. Lisaks on Arhimeedilised koopulad avaldatavad väga lihtsal kujul, võrreldes näiteks Gaussi ja t -koopulaga. Järgnevalt on ära toodud mõned definitsioonid ja tulemused R. Nelseni raamatust [16, ptk 4], mille abil saab defineerida Arhimeediliste koopulate klasse.

Definitsioon 9. Olgu φ pidev ja rangelt kahanev funktsioon, $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$, nii et $\varphi(1) = 0$. Siis φ üldistatud pöördfunktsioon $\varphi^{[-1]}$ määramispiirkonnaga $[0, \infty]$ on antud kujul:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t,) & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Lemma 1. Olgu φ pidev ja rangelt kahanev funktsioon, $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ ja olgu $\varphi^{[-1]}$ tema üldistatud pöördfunktsioon.

Olgu funktsioon $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ kujul: $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Siis

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

$$C(u, 1) = u \text{ ja } C(1, v) = v.$$

Tõestus.

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$$

ja

$$C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u.$$

Samad tulemused kehtivad ka $C(0, v)$ ja $C(1, v)$ korral. \square

Järgmine lemma annab tarviliku ja piisava tingimuse, selleks et Lemmas 1 ddefineeritud funktsioon C oleks 2-kasvav.

Lemma 2. *Rahuldagu φ , $\varphi^{[-1]}$ ja funktsioon C Lemmas 1 toodud tingimusi. Siis C on 2-kasvav parajasti siis kui $\forall v \in \mathbf{I}$ korral kehtib*

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1, \quad u_1 \leq u_2.$$

Tõestus. Kuna $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ on võrdne $V_C = ([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$, seega $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ kehtib alati kui C on 2-kasvav. Nüüd eeldame, et $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$. C on pidev, kuna φ ja $\varphi^{[-1]}$ on pidevad, seega leidub $t \in \mathbf{I}$ nii, et $C(t, v_2) = v_1$, või $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$. Siit saame, et

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)), \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)), \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t), \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2). \end{aligned}$$

Seega C on 2-kasvav. \square

Järgnev teoreem määrab Arhimeediliste koopulate klassi koos kõigi eeldustega.

Teoreem 3. *Olgu φ pidev, rangelt kahanev funktsioon, $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ nii et $\varphi(1) = 0$ ja olgu $\varphi^{[-1]}$ funktsiooni φ üldistatud pöördfunktsioon Definitsioonist 9. Siis funktsioon $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

on Arhimeediline koopula siis ja ainult siis, kui φ on kumer.

Tõestus. Kuna oleme juba näidanud, et C rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= 0 = C(0, v), \\ C(u, 1) &= u \text{ ja } C(1, v) = v, \end{aligned}$$

siis Lemmast 2 järeldub, et tuleb näidata, et $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ siis ja ainult siis kui φ on kumer.

$$\begin{aligned} C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1 &\Leftrightarrow u_1 + C(u_2, v) \leq u_2 + C(u_1, v) \\ &\Leftrightarrow u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)). \end{aligned}$$

Kui defineerime $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ ja $c = \varphi(v)$, s.t. $u_1 = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1))$, siis $\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c)$, kus $a \geq b$ ja $c \geq 0$.

Nüüd eeldame, et $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ kehtib. Siis iga $s, t \in [0, \infty]$ korral, tingimusel et $0 \leq s < t$, valides $a = (s + t)/2$, $b = s$ ja $c = (t - s)/2$ saame eelnevast, et

$$\varphi^{[-1]}(\frac{s + t}{2}) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2},$$

mis vastab kumera funktsiooni definitsioonile, kui võtta $\gamma = \frac{1}{2}$. Seega $\varphi^{[-1]}$ on kumer, kuna ta on pidev. Nüüd eeldame, et $\varphi^{[-1]}$ on kumer. Fikseerime $a, b, c \in \mathbf{I}$ nii, et $a \geq b$ ja $c \geq 0$. Olgu $\gamma = \frac{a-b}{a-b+c}$, siis $a = (1 - \gamma)b + \gamma(a + c)$ ja $b + c = \gamma b + (1 - \gamma)(a + c)$. Saame

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a + c);$$

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(b+c) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c); \\ \varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) &\leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a+c),\end{aligned}$$

mis, nagu eelnevalt näidatud, on samaväärne väitega

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1.$$

□

Koopulad, mida saab sel viisil konstrueerida, on Arhimeedilised koopulad. Funktsiooni φ nimetatakse koopula generaatoriks ning kui $\varphi(0) = \infty$, siis nimetatakse funktsiooni φ rangeks generaatoriks.

3.2 Arhimeediliste koopulate omadused

Järgmises teoreemis tuuakse välja mõningad Arhimeediliste koopulate omadused.

Teoreem 4. *Olgu C Arhimeediline koopula generaatoriga φ . Siis*

1. C on sümmeetriline, st $C(u, v) = C(v, u) \forall u, v \in I$;
2. C on assotsiatiivne, st $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \forall u, v, w \in I$;
3. kui $c > 0$ on konstant ja funktsioon φ on C generaator, siis $c\varphi$ on ka C generaator.

Tõestus. 1. C on sümmeetriline:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v, u).$$

2. C on assotsiatiivne:

$$\begin{aligned}
C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))] + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)] \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w))]) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) + \varphi(C(u, w)) = C(u, C(v, w)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))] + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)] \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w))]) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) + \varphi(C(u, w)) = C(u, C(v, w)).
\end{aligned}$$

3. Kui $c\varphi = \varphi^*$, siis

$$\begin{aligned}
C^*(u, v) &= \varphi^{*[-1]}(\varphi^*(u) + \varphi^*(v)) = \frac{1}{c}\varphi^{[-1]}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = C(u, v).
\end{aligned}$$

□

3.3 Sõltuvuse moodsid

Sõltuvuse mõõtmiseks koopulate puhul kasutatakse astakkorrelatsioone, kuna nad on invariantseid monotoonsete teisenduste suhtes, ning sabasõltuvuse kordajaid. Arhimeediliste koopulate puhul avaldub Kendalli τ väga lihtsal kujul generaatori kaudu.

Lause 1. Olgu X ja Y juhuslikud suurused koopulaga C , mille generaatoriks on φ . Siis X ja Y vaheline Kendalli astakkorrelatsioonikordaja τ on antud valemiga:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Tõestuse leiab Nelseni raamatust [16, lk. 163]. Samuti nagu Kendallil τ , sõltuvad ka Arhimeediliste koopulate sabasõltuvuse kordajad vaid vastava koopula generaatorist. Kuid esmalt defineerime alumise ja ülemise sabasõltuvuse kordaja üldisel kujul:

Definitsioon 10. *Olgu X ja Y pidevad juhuslikud suurused jaotusfunktsioonidega F ja G , siis ülemine sabasõltuvuse kordaja λ_U on piirväärtus tinglikust tõenäosusest, kui juhuslik suurus Y on suurem mingist väärtusest, siis juhuslik suurus X on suurem samast väärtusest:*

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[F(X) > t | G(Y) > t]$$

ning alumine sabasõltuvuse kordaja λ_L on siis vastavalt piirväärtus tinglikust tõenäosusest:

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[F(X) \leq t | G(Y) \leq t].$$

Kordajad λ_U ja λ_L sõltuvad ainult juhuslike suuruste X ja Y koopulast viisil, mis on sõnastatud järgmises teoreemis.

Teoreem 5. *Kehtigu definitsiooni 10 tähistused. Olgu juhuslike suuruste X ja Y koopula C , siis*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t},$$

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{P[X > F^{-1}(t), Y > G^{-1}(t)]}{P(Y > G^{-1}(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - F(F^{-1}(t)) - G(G^{-1}(t)) + H(F^{-1}(t), G^{-1}(t))}{1 - G(G^{-1}(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t} = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t}, \\ \lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P[X \leq F^{-1}(t), Y \leq G^{-1}(t)]}{P(Y \leq G^{-1}(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{H(F^{-1}(t), G^{-1}(t))}{G(G^{-1}(t))} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}. \end{aligned}$$

□

λ_U ja λ_L on võimalik viia ka alternatiivsele kujule generaatori kaudu, tule-
nevalt Arhimeedilise koopula definitsioonist $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$.

Lause 2. *Olgu C Arhimeediline koopula generaatoriga φ , siis*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{1 - t} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi^{[-1]}(x)}$$

ja

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)}.$$

3.4 Arhimeediliste koopulate klassid

Järgnevalt on välja toodud mõned Arhimeediliste koopulate klassid artik-
list [1], mida on kasutatud töö teises pooles modelleerimiseks.

3.4.1 Gumbeli koopula (1960)

Gumbeli koopula generaator avaldub parameetri θ kaudu

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta,$$

kus θ väärtused on lõigus $[1, \infty)$. Kahemõõtmelisel juhul on Gumbeli koopula

$$C_{Gu}(u, v) = \exp\left(-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right).$$

Gumbeli koopulale on omane tugev sõltuvus ülemises sabas. Juhul kui $\theta = 1$,
siis on tegemist korrutiskoopulaga, samas kui $\theta \rightarrow \infty$, läheneb koopula Fréchet-
Höfddingi alumisele tõkkele. Sabasõltuvuse kordajad on $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ ja $\lambda_L = 0$.
Kendalli τ avaldub samuti üsna lihtsasti koopula parameetri kaudu, $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$,
ning Spearmani ρ kordajal puudub analüütiline kuju. Kahemõõtmelise Gumbeli
koopula korral on võimalik ka tihedusfunktsioon [21] välja kirjutada, kõrgema

dimensiooni korral on see juba keerulisem:

$$\begin{aligned} c(u, v) &= \frac{\partial^2 C_{Gu}(u, v)}{\partial u \partial v} \\ &= C_{Gu}(u, v) \frac{1}{uv} ((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{-2+2/\theta} (\ln u \ln v)^{\theta-1} \\ &\quad \times [1 + (\theta - 1)((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{-1/\theta}]. \end{aligned}$$

3.4.2 Franki koopula (1979)

Franki koopula generaator on φ avaldub kujul:

$$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1},$$

millele vastav koopula on

$$C_{Fr}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Franki koopula on defineeritud kui parameeter $\theta \in (\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ning kui $\theta \rightarrow -\infty$, siis läheneb Franki koopula Fréchet-Höfddingi ülemisele tõkkele ning $\theta \rightarrow \infty$ korral Fréchet-Höfddingi alumisele tõkkele. Franki koopulale vastav tihedus on

$$c(u, v) = \frac{\theta e^{\theta u} e^{\theta v}}{(e^\theta - 1) \left(1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{e^\theta - 1} \right)^2}.$$

Franki koopula üks puudus on see, et sellega ei ole võimalik sabasõltuvust modelleerida, kuna nii ülemine kui alumine sabasõltuvuse kordaja on võrdsed nulliga. Kendalli τ ja Spearmani ρ aga avalduvad kujul:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)], \\ \rho &= 1 - \frac{12}{\theta} [D_1(\theta) - D_2(\theta)], \end{aligned}$$

kus $D_k(x)$ on Debye funktsioon, mis on defineeritud iga positiivse täisarvu k korral:

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

Seega Franki koopula on sobilik modelleerimaks nõrka sabasõltuvust. [4]

3.4.3 Ali-Mikhail-Haq koopula (1978)

Ali-Mikhail-Haq koopula generaator on kujul

$$\varphi(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}.$$

Nõnda defineeritud generaatorile vastab koopula:

$$C_{AMH}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)},$$

kus koopula parameeter θ on kuulub lõiku $[-1, 1]$. Ali-Mikhail-Haq koopula on ainus Nelseni raamatus [16] kirjeldatud Arhimeediline koopula, mis võimaldab modelleerida nii positiivset kui ka negatiivset sõltuvust, kuid samal ajal mõlemad sabasõltuvuse kordajad on nullid. Ali-Mikhail-Haq koopulale vastav Kendalli τ on parameetriga θ seotud järgmiselt:

$$\tau = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2 \ln(1 - \theta)}{3\theta^2}.$$

Sarnaselt Claytoni koopulaga on Ali-Mikhail-Haq koopula korral Spearmani ρ astakorrelatsiooni kordaja seotud parameetriga θ küllalt keerulise avaldisega [13],

$$\rho = \frac{12(1 + \theta) di \log(1 - \theta) - 24(1 - \theta) \ln(1 - \theta)}{\theta^2} - \frac{3(\theta + 12)}{\theta},$$

kus dilogaritm funktsioon $di \log(x)$ on defineeritud järgnevalt:

$$di \log(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 - t} dt.$$

Tihedusfunktsioon on kirjutatav kujul:

$$c(u, v) = \frac{1 + \theta[(1 + u)(1 + v) - 3] + \theta^2(1 - u)(1 - v)}{[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]^3}.$$

3.4.4 Joe koopula (1993)

Joe koopula generaator on

$$\varphi(t) = -\ln(1 - (1 - t)^\theta)$$

ning sellele vastav koopula on

$$C_J(u, v) = 1 - ((1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta)^{1/\theta},$$

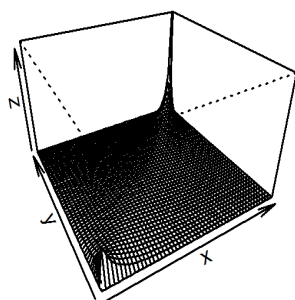
kus parameeter θ on vahemikus $[1, \infty)$. Joe koopula korral ei ole Kendall'i τ astakkorrelatsioonikordajal analüütilist kuju, kuid seda saab integraali abil kirja panna kujul:

$$\tau = \int_0^1 \frac{\ln(1 - t^\theta)(1 - \theta^\theta)}{t^{\theta-1}} dt.$$

Joe koopula korral võtab τ väärtusi vahemikus $[0, 1]$, kus $\theta = 1$ korral on tegemist korrutiskoopulaga. Kui $\theta \neq 1$, siis Joe koopula ülemine saba sarnaneb Gumbeli koopula omaga, kuid alumine saba on hajusam kui Gumbeli koopulal [2].

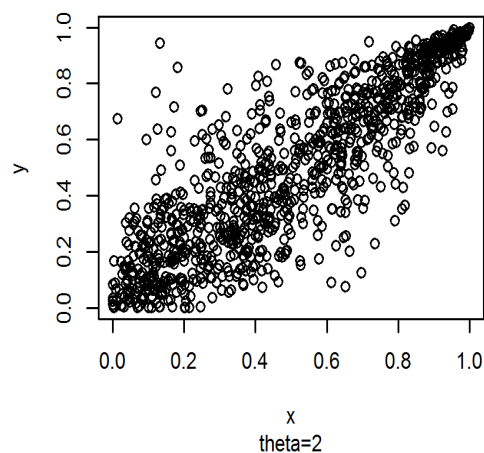
Joonisel 2 on ära toodud graafiliselt näited Gumbeli, Joe ja Ali-Mikhail-Haq koopulate tihedusfunktsioonidest ja hajuvusgraafikutest vabalt valitud θ korral. On näha, et nii Gumbeli kui ka Joe koopula korral on tugev ülemise saba sõltuvus. Ali-Mikhail-Haq koopula on esitatud, kui θ on negatiivne. On selgelt näha, mil viisil kirjeldab Ali-Mikhail-Haq koopula negatiivset sõltuvust.

Gumbeli koopula tihedus

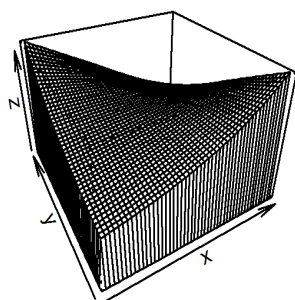


theta=2

Gumbel koopula

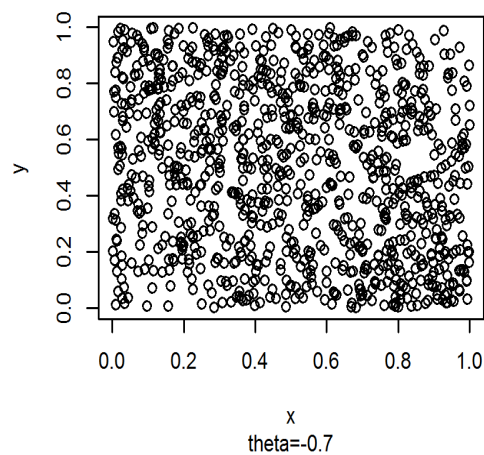


Ali-Mikhail-Haq koopula tihedus

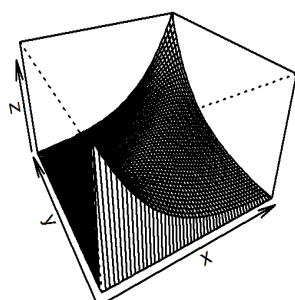


theta=-0.7

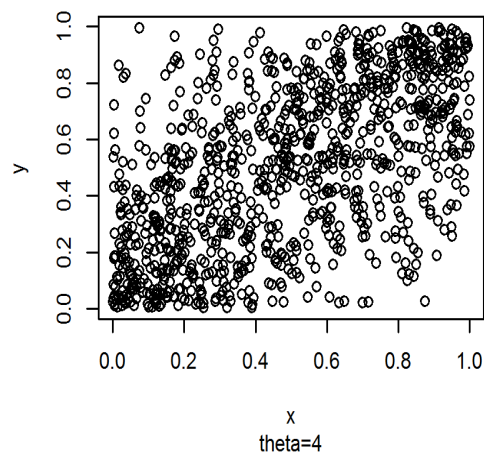
Ali-Mikhail-Haq koopula



Frank koopula tihedus, theta=4



Frank koopula



Joonis 2. Arhimeediliste koopulate tihedusfunktsioonid (vasakul) ja hajuvusgraafikud (paremal).

4 Ekstremaalväärtuste koopulad

Ekstremaalväärtuste teooria rakendusi on palju, kuna paljudes valdkondades, sealhulgas ka finants- ja kindlustusmatemaatikas, ekstremaalsed sündmused võivad omada tõsiseid tagajärgi ja seetõttu on tarvis pöörata erilist tähelepanu nende modelleerimisele. Sellistes olukordades pakuvad ekstremaalväärtuste koopulad sobivaid mudeleid sõltuvusstruktuuri jaoks [9].

Selleks, et defineerida ekstremaalväärtuste koopula, on tarvilik defineerida mõningad põhimõisted ekstremaalväärtuste teoriast. Lihtsuse mõttes keskenduma kahemõõtmelisele juhule.

Olgu $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ valim sõltumatuid, sama jaotusega juhuslikke vektoreid ühisjaotusfunktsiooniga H , marginaaljaotustega F, G ja koopulaga C . Üldsust kitsendamata eeldame, et H on pidev. Vaatame järgmist koordinaatide maksimumidest koosnevat vektorit:

$$\mathbf{M}_n = (X_{(n)}, Y_{(n)})^T = (\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}, \max_{1 \leq i \leq n} \{Y_i\})^T,$$

kus $X_{(n)}$ on juhuslike suuruste $X_i, 1 \leq i \leq n$ maksimumväärtus ja $Y_{(n)}$ on juhuslike suuruste $Y_i, 1 \leq i \leq n$ maksimumväärtus, mille jaotusfunktsioonid on vastavalt $F_{(n)}$ ja $G_{(n)}$ ning kuna

$$F(x) = P[X_i \leq x]$$

ja

$$G(y) = P[Y_i \leq y] \quad \forall i \in (1, n),$$

siis sellest tulenevalt

$$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= P[X_{(n)} \leq x] = P[X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x] \\ &= P[X_1 \leq x]P[X_2 \leq x] \dots P[X_n \leq x] = [F(x)]^n, \\ G_{(n)}(y) &= P[Y_{(n)} \leq y] = P[Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \dots, Y_n \leq y] \\ &= P[Y_1 \leq y]P[Y_2 \leq y] \dots P[Y_n \leq y] = [G(y)]^n. \end{aligned}$$

Saadud tulemuse põhjal on võimalik esitada ka $(X_{(n)}, Y_{(n)})$ ühisjaotusfunktsioon $H_n(x, y)$:

$$H_n(x, y) = [H(x, y)]^n = [C(F(x), G(y))]^n = [C([F_{(n)}(x)]^{1/n}, [G_{(n)}(y)]^{1/n})]^n.$$

ning seetõttu, kui C on koopula ja n on positiivne täisarv, siis

$$C_{(n)}(u, v) = (C(u^{1/n}, v^{1/n}))^n \quad u, v \in \mathbf{I}$$

on sõltumatute ja sama jaotusega (SSJ) juhuslike vektorite (X_i, Y_i) , $i \in [1, n]$ maksimumidele vastav koopula. [16] Ekstremaalväärtuste koopulate pere koosneb nende koopulate C_n piirväärtustest, kui n läheneb lõpmatusse.

Definitsioon 11. Koopula C_* on ekstremaalväärtuste koopula (EVK), kui leidub selline koopula C , mille korral

$$C_*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(u^{1/n}, v^{1/n})^n,$$

kus $u, v \in [0, 1]$. Siis öeldakse, et koopula C on ekstremaalväärtuste koopula C_* külgetõmbepiirkonnas.

Ekstremaalväärtuste koopulat on võimalik esitada ka teisiti, kasutades max-stabiilsuse mõistet.

Definitsioon 12. Jaotusfunktsioon $F(x)$ on max-stabiilne, kui leiduvad konstandid $A_k \geq 0$ ja $B_k \in \mathbb{R}$, nii et mistahes $k \in \mathbb{N}$ ja x korral kehtib

$$[F(x)]^k = F(A_k x + B_k).$$

Seega max-stabiilne jaotus on selline, mille korral SSJ koosneva valimi maksimaalse elemendi jaotusfunktsioon on sama tüüpi esialgse jaotusfunktsiooniga [12].

Koopulate mõistes tähendab see, et iga täisarvulise $m \geq 1$ ja $\forall(u, v) \in [0, 1]^2$ korral on koopula $C(u, v) = C(u^{1/m}, v^{1/m})^m$ max-stabiilne.

Teoreem 6. Koopula on ekstremaalväärtuste koopula siis ja ainult siis kui ta on max-stabiilne.

Tõestus. Eeltoodud definitsioonidest on lihtne näha, et max-stabiilne koopula on iseenese külgetõmbepiirkonnas ja seega peab olema ka ise ekstremaalväärtuste koopula.

Teistpidi, koopula kuulub ekstremaalväärtuste koopulate klassi, kui ta on max-stabiilne. Kui C_* on ekstremaalväärtuste koopula, siis see tähendab, et

$$C_*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(u^{1/n}, v^{1/n})^n$$

mingi koopula C puhul. Seega fikseeritud $m \geq 1$ ja $n = mk$ korral

$$C_*(u, v) = C(u^{1/m}, v^{1/m})^m = \lim_{k \rightarrow \infty} C(u^{1/mk}, v^{1/mk})^{mk} = C(u^{1/n}, v^{1/n})^n$$

□

Kahemõõtmelistel ekstremaalväärtuste koopulatel on ka alternatiivne, lihtsam kuju, mis avaldub nn. Pickandsi sõltuvusfunktsiooni kaudu.

Definitsioon 13. Olgu C_* ekstremaalväärtuste koopula. Funktsiooni $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$,

$$A(t) = -\ln C_*(e^{-(1-t)}, e^{-t})$$

nimetatakse Pickandsi sõltuvusfunktsiooniks. [18]

Teoreem 7. Olgu C_* ekstremaalväärtuste koopula, siis

$$C_*(u, v) = \exp \left(\ln(uv) A \left(\frac{\ln v}{\ln(uv)} \right) \right)$$

sobivalt valitud Pickandsi sõltuvusfunktsiooni A korral. Seejuures peavad järgnevad tingimused olema täidetud:

1. $A(0) = A(1) = 1$,
2. $\max\{t, t - 1\} \leq A(t) \leq 1$,
3. A on kumer.

Kahemõõtmelisel juhul on eelmise teoreemi põhjal võimalik konstrueerida ekstremaalväärtuste koopulaid üsna lihtsalt, ainsad piirangud tulenevad funktsioonile A esitatud tingimustest. Joonisel 3 on graafiliselt näidatud nelja erineva ekstremaalväärtuste koopula klassi korral, kuidas muutub Pickandsi funktsiooni kuju erinevate parameetri θ väärtuste korral.

4.1 Sõltuvuse mõõdikud

Kõik C_* astakkorrelatsioonid nagu Kendall's τ ja Spearmani ρ on alati mittenegatiivsed ning avalduvad vastavalt kujul:

$$\tau = 4 \iint_{[0,1]^2} C_*(u, v) dC_*(u, v) - 1 = \int_0^1 \frac{t(1-t)}{A(t)} dA'(t)$$

ja

$$\rho_S = 12 \iint_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \frac{1}{(1+A(t))^2} dt - 3.$$

Diferentsiaal $d(A'(t))$ kannab Stjeltjesi integrandi nime ja eksisteerib, kuna A on kumer funktsioon lõigul $[0, 1]$. Kui sõltuvusfunktsioon $A(t)$ on kaks korda diferentseeruv, siis saab selle asendada $A''(t) dt$. [Tõestus. Hürlimann. W, Hutchinson-Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas] Sabasõltuvuse uurimine ekstremaalväärtuste koopulate puhul on väga loomulik, kuna suuri muutused leiavad aset just sabades. Kui on defineeritud ekstremaalväärtuste koopula C_* sabasõltuvusfunktsiooniga l ja Pickandsi sõltuvusfunktsiooniga $A(t)$, siis koopula C , mis on koopula C_* külgetõmbepiirkonnas, ülemine sabasõltuvuse koefitsient avaldub kujul:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P(U_1 > u | U_2 > u) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2t - 1 + C(1-t, 1-t)) = 2 - l(1, 1) \\ &= 2(1 - A(1/2)) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Alumise sabasõltuvuse koefitsendi leidmine on triviaalne.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{(2A(1/2)-1)} = \begin{cases} 0, & \text{kui } A(1/2) > 1/2, \\ 1, & \text{kui } A(1/2) = 1/2 \end{cases}$$

Seega, ekstremaalväärtuste koopulad on asümptootiliselt sõltumatud alumises sabas, kui pole tegemist täieliku sõltuvusega, $A(1/2) = 1/2$.

4.2 Ekstremaalväärtuste koopulate klassid

4.2.1 Gumbeli koopula (1978)

Gumbeli koopula kannab ka nime logistiline koopula ja on ainuke koopula, mis kuulub nii Arhimeediliste kui ka ekstremaalväärtuste koopulate klassi. Ehk siis $\theta \in [1, \infty)$ korral leidub Pickandsi sõltuvusfunktsioon $A(t)$ kujul:

$$A(t) = (t^\theta + (1-t)^\theta)^{1/\theta},$$

kus $t \in [0, 1]$. On lihtne näha, et nõnda defineeritud funktsioon $A(t)$ vastab eeltoodud teoreemi tingimustele, seega Gumbeli koopula näol on tegemist ka ekstremaalväärtuste koopulaga.

4.2.2 Galambose koopula (1975)

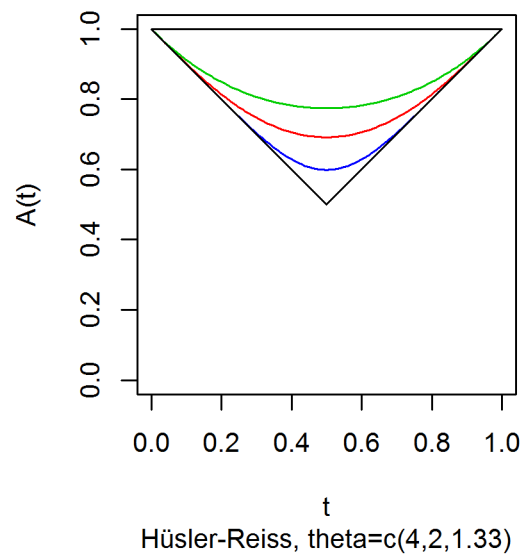
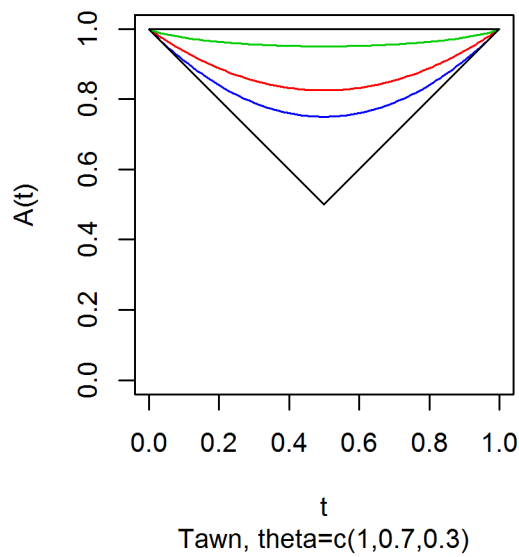
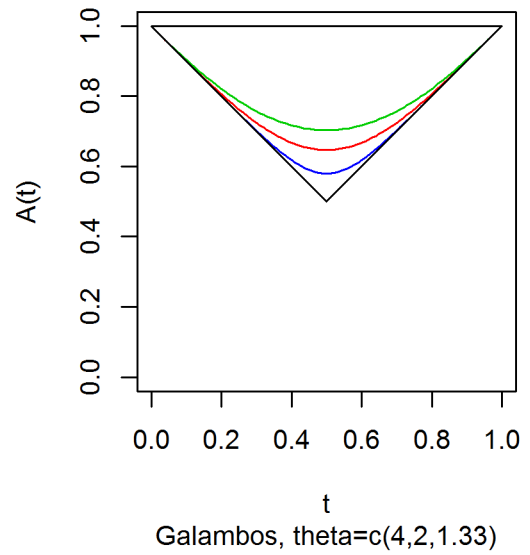
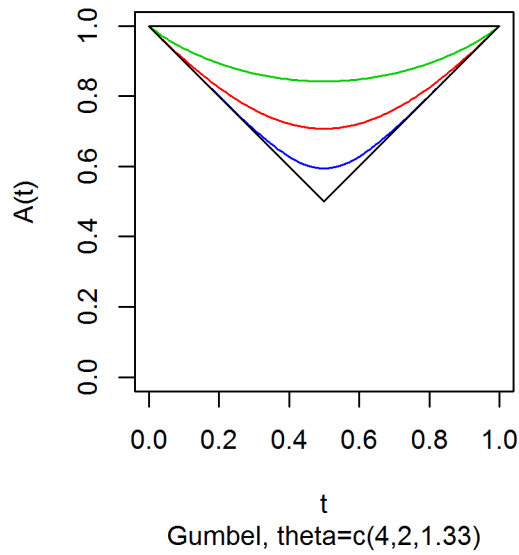
Galambose koopula, teise nimetusega negatiivne logistiline koopula, kuulub samuti ekstremaalväärtuste koopulate klassi. Galambose koopulale vastav Pickandsi sõltuvusfunktsioon on

$$A(t) = 1 - t^{-1/\theta} + (1-t)^{-1/\theta-\theta},$$

kus $\theta \in [0, \infty]$ ning koopula ise on kujul

$$C_{Gal}(u, v) = uv \exp \left([(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{-1/\theta} \right).$$

Kui $\theta = 0$, siis taandub koopula korrutiskoopulaks ning kui $\theta = \infty$, siis on tulemuseks täielik sõltuvus. Ülemine sabasõltuvuse kordaja on $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$.



Joonis 3. Ekstremaalväärtuste koopulatele vastavad Pickandsi sõltuvusfunktsioonid. Sinine joon tähistab kõige suuremat θ väärtust ja roheline kõige väiksemat.

4.2.3 Tawni koopula (1988)

Antud töös vaadeldav Tawni koopula vastab Pickandsi sõltuvusfunktsioonile, mis on kujul:

$$A(t) = 1 - \theta t + \theta t^2,$$

kus $\theta \in [0, 1]$ ja $\theta = 1$ korral saavutatakse täielik sõltuvus ning $\theta = 0$ korral sõltmatus ehk siis korrutiskoopula. Seega Tawni koopula kaju on antud valemiga:

$$C_T(u, v) = uv \exp\left(-\frac{\theta \ln u \ln v}{\ln(uv)}\right).$$

Nii defineeritud Tawni koopula puhul on tegemist erijuhuga asümmeetrilisest mudelist, seega seda on võimalik viia üldisemale kujule, kui võtta Pickandsi sõltuvusfunktsiooniks

$$A(t) = \phi t^3 + \theta t^2 - (\theta + \phi)t + 1,$$

kus $\theta \geq 0$, $\theta + \phi \leq 1$, $\theta + 2\phi \leq 1$ ja $\theta + 3\phi \geq 0$ [20].

4.2.4 Hüsler-Reissi koopula (1975)

Hüsler-Reissi koopula on mingis mõttes Gaussi koopula üldistus, ehk siis kui Gaussi koopula korrelatsioonikordaja ρ võib muutuda olenevalt valimimahust, $\rho_n \rightarrow 1$ kui $n \rightarrow \infty$. Kui

$$(1 - \rho_n) \ln n \rightarrow \theta^2, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nõnda saab defineerida Hüsler-Reissi koopula:

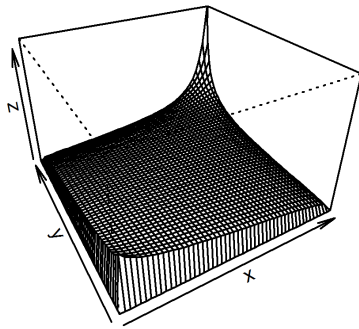
$$C(u, v) = \exp\left(-\ln u \Phi\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta \ln\left(\frac{\ln u}{\ln v}\right)\right) - \ln v \Phi\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta \ln\left(\frac{\ln v}{\ln u}\right)\right)\right),$$

mille korral Pickandsi sõltuvusfunktsioon on kujul:

$$A(t) = (1 - t)\Phi\left(\theta + \frac{1}{2\theta} \ln\left(\frac{1 - \theta}{\theta}\right)\right) + t\Phi\left(\theta + \frac{1}{2\theta} \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)\right),$$

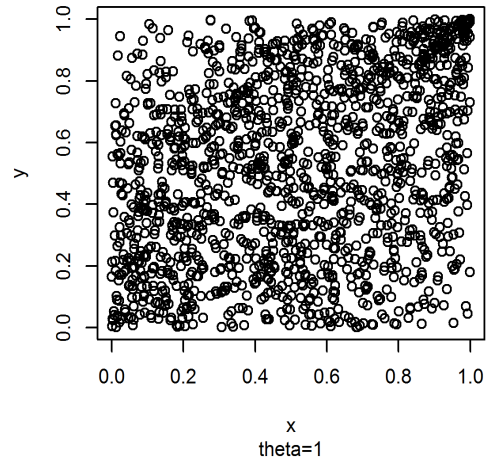
kus Φ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon ning $t \in [0, 1]$. Kui $\theta = 0$, siis taandub koopula korrutiskoopulaks ning kui $\theta = \infty$, siis on tulemuseks täielik sõltuvus. Ülemine sabasõltuvuse kordaja on $\lambda_U = 2 - 2\Phi(\theta/2)$. [8] [14]

Galambosi koopula tihedus

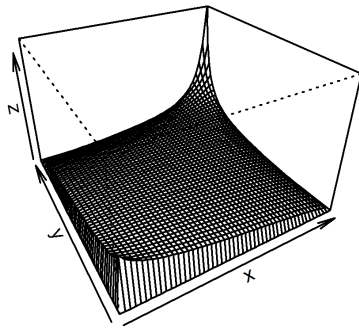


theta=1

Galambosi koopula

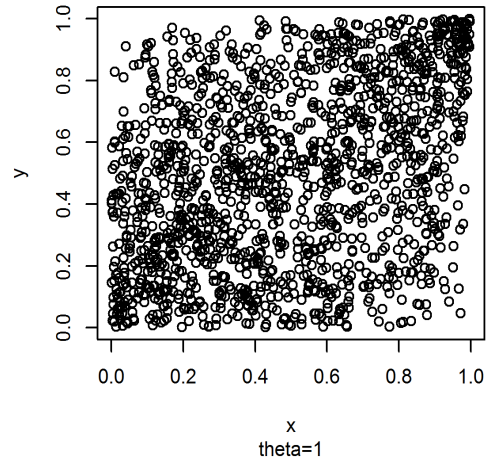


Hüsler-Reissi koopula tihedus

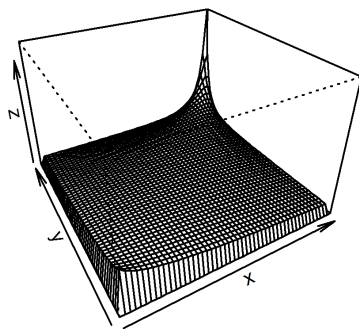


theta=2

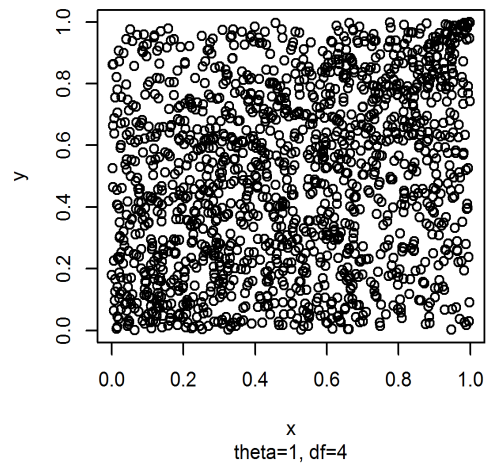
Hüsler-Reissi koopula



Tawni koopula tihedus, theta=1



Tawni koopula



Joonis 4. Ekstreemalväärtuste koopulate tihedusfunktsioonid (vasakul) ja hajuvusgraafikud (paremal).

5 Arhimeediliste ja ekstremaalväärtuste koopulate rakendamine

Antud töös vaadeldud Arhimeedilised koopulad on kõik üheparameetrilised, seega eesmärgiks on hinnata parameetrit θ . Kõige laiemalt on kasutusel suurima tõepära meetod, mis on lihtsasti kasutatav kahe- ja kolmemõõtmelisel juhul, kuid kõrgemate dimensioonide korral muutub arvutuslikult keeruliseks. Teine võimalus on hinnata parameetreid kahe sammuga ehk kõigepealt marginaaljaotuste parameetrid ja seejärel koopula parameetrid, kasutades igal sammul suurima tõepära meetodit, on IFM (*inference function for margins*). Kolmas laialt kasutuses olev meetod on kanooniline suurima tõepära meetod (CML), mis on atraktiivne, kuna marginaaljaotusi ei ole tarvis leida. Järgnevalt on lühidalt kirjeldatud kõik ülaltoodud meetodid. Teisi meetodeid, sealhulgas ka mitteparameetrilisi meetodeid sobiva koopula leidmiseks võib leida näiteks Cherubini, Luciano ja Vecchiato raamatust [3, ptk 5].

5.1 Parameetrite hindamine

5.1.1 Suurima tõepära meetod

Olgu antud üldkogumit kirjeldav juhuslik maatriks $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T$ tihedusega $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ning SSJ vaatlused $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Siis tõepärafunktsioon avaldub kujul:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i; \boldsymbol{\theta})$$

ning kuna logaritmi on monotoonne funktsioon, siis parameetri suurima tõepära hinnangu leidmisel võib kasutada ka log-tõepära funktsiooni

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln h(x_i, y_i)$$

Hinnangud suurima tõepära meetodil parameetrile θ saadakse

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \arg \max_{\theta} \ell(\theta)$$

Nagu esimeses peatükis defineeritud, avaldub koopula tihedus kujul:

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v},$$

pidevate juhuslike suuruste X ja Y ning nende jaotusfunktsioonide F ja G kaudu

$$c(u, v) = \frac{h(F^{-1}(u), G^{-1}(v))}{f(F^{-1}(u))g(F^{-1}(v))},$$

kus h on ühistihedus ning f ja g on marginaaltihedused. Kui avaldada ühistihedus h , kasutades seoseid $u = F(x)$ ja $v = G(y)$, siis

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y).$$

Saame kahemõõtmelisel juhul log-tõepära funktsiooni avaldada kujul:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i), G(y_i)) + \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln g(y_i)$$

Siis suurima tõepära hinnang $\hat{\theta}$ maksimiseerib log-tõepära.

5.1.2 IFM meetod

Kuna eeltoodud meetodi korral tuleb hinnata kõik parameetrid nii koopula kui ka marginaaljaotuste parameetrid korraga, võib see olla arvutuslikult väga aeganõudev. Kui vaadata saadud log-tõepära funktsiooni, siis on näha, et see koosneb kahest positiivse avaldise summast, seetõttu pakuti välja meetod hinnata esimesel sammul marginaaljaotuste parameetrid ning seejärel koopula parameetrid, [10].

1.

$$\hat{\theta}_1 = \arg \max_{\theta_1} (\ell_X(\theta_1) + \ell_Y(\theta_1)) = \arg \max_{\theta_1} \left(\sum_{i=1}^n \ln f(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln g(y_i) \right)$$

2. Kasutades esimesel sammul saadud hinnangut marginaaljaotuste parameetritele $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$, hinnatakse koopula parameeter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_2} \ell_C(\boldsymbol{\theta}_1) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_2} \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i), G(y_i))$$

Hinnang kirjutatakse vektorina $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{IFM} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)^T$. Üldiselt, pole saadud hinnangud võrdsed, kuna IFM meetodil leitud hinnang saadakse järgneva võrrandisüsteemi lahendusena:

$$\left(\frac{\partial \ell_X}{\partial \theta_{1,X}}, \frac{\partial \ell_Y}{\partial \theta_{1,Y}}, \frac{\partial \ell_C}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \right) = \mathbf{0}^T,$$

samal ajal kui suurima tõepära meetodil leitud hinnang saadakse:

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_{1,X}}, \frac{\partial \ell}{\partial \theta_{1,Y}}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \right) = \mathbf{0}^T$$

5.1.3 CML meetod

Koopula parameetreid saab hinnata ka marginaaljaotusi teadmata. CML hindamismeetodi puhul teisendatakse valim standardse ühtlase jaotusega juhuslikeks suurusteks ja seejärel hinnatakse koopula parameetrid suurima tõepära meetodil.

1. $u_i = \hat{F}(x_i)$ ja $v_i = \hat{G}(y_i)$, $i = 1, \dots, n$
2. $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_2} \sum_{i=1}^n \ln c(\hat{F}(x_i), \hat{G}(y_i))$.

Antud töös on kasutatud neist meetoditest kahte viimast, IFM ja CML. Parima mudeli valime Akaike informatsioonikriteeriumi (AIC) järgi. Parima sobivuse annab koopula, millele vastab kõige väiksem AIC-i väärtus.

$$AIC = -2\ell(\boldsymbol{\theta}) + 2k,$$

kus k on koopula parameetrite arv.

5.2 Andmete kirjeldus

Esmalt on kirjeldatud euro ja jaapani jeeni kursimuutuste sõltuvust ajavahemikul 4. jaanuar 2000 - 28. märts 2014. Vaatluse alla võetud andmed on saadud *PACIFIC Exchange Rate Service* internetileheküljelt [19]. Järgnevalt on vaadeldud nafta ja kulla hinna omavahelist seost analüüsidest kahe börsil kaubeldava fondi (*ETF*) - *SPDR Gold Shares (GLD)* ja *iPath S&P GSCI Crude Oil TR Index ETN (OIL)* - samaaegset käitumist. Kasutatud on sulgemishindu ajavahemikul 16. august 2006 - 14.mai 2014. GLD eesmärk on imiteerida kulla hinna käitumist kümnendiku untsi täpsusega. OIL on Goldman Sachs Commodity indeksi osaindeks, mis baseerub toornafta hinnaliikumistel. Andmed on saadud *Yahoo! Finance* internetileheküljelt [6]. Nii valuutakursside kui ka teise andmestiku puhul on kasutatud päevaseid andmeid, mida on keskmiselt 252 tükki aastas. Analüüsitavate ridade illustreerivad graafikud on toodud Lisas 1.

5.2.1 EUR/USD ja JPY/USD

Andmed on jagatud kaheks osaks, esimesele osale on sobitatud mudel ning teise osaga saab hinnata mudeli sobivust. Vaatluse all on valuutakursside muutus - $(x_i - x_{i-1})/x_{i-1}$. Sobiva koopula leidmiseks on kasutatud kahte meetodit, peatüki alguses kirjeldatud IFM ja CML. Esimese jaoks on tarvis leida andmetele sobivad marginaaljaotused. Selleks on leitud andmetelt keskvärtus, standardhälve, asümmeetriakordaja ja järsakuskordaja.

	keskväärtus	stadardhälve	asümmeetria-kordaja	järsakuskordaja
EUR/USD	-6.430419e-05	0.006491005	0.008353763	4.844038
JPY/USD	2.062606e-07	0.00652616	-0.3992467	5.706784

Tabel 1. EUR/USD, JPY/USD - keskvärtus, standardhälve, asümmeetriakordaja ja järsakuskordaja

Tabelist 1 võib järeldada, et andmed normaaljaotusest ei pärine, kuna normaaljaotuse puhul on järsakuskordaja 3, kuid antud andmete korral on kordaja suurem. Samas on esimesel juhul tegemist sümmeetrilise jaotusega, teisel juhul on lisandunud teatav ebasümmeetria. EUR/USD kursile sobib näiteks üldistatud veajaotus (GED), mille tihedusfunktsioon $f(x)$ avaldub kujul:

$$f(x) = \frac{1}{2p(1/p)\Gamma(1 + 1/p)\sigma_p} \exp^{-\frac{|x-\mu|^p}{p\sigma_p^p}},$$

kus μ on asukohaparameeter, σ_p on skaalaparameeter ja p on kujuparameeter. Kui $p = 2$ siis on tegemist normaaljaotusega ja kui $p = 1$, siis on tulemuseks Laplace'i jaotus. JPY/USD andmerekale on sobitatud Laplace'i jaotus tihedusfunktsiooniga

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-a|}{b}\right),$$

kus a on asukohaparameeter ja b on skaalaparameeter, kusjuures dispersioon $\sigma^2 = 2b^2$. Parameetrid hinnati suurima tõepära meetodil. EUR/USD parameetrite hinnangud GED jaotusest - $\hat{\mu} = -0.00006501103$, $\hat{\sigma}_p = 0.005300597$ ja $\hat{p} = 1.269271$. JPY/USD parameetrite hinnangud, kui andmed on Laplace'i jaotusest on järgmised, $\hat{a} = 0.00009016874$ ja $\hat{b} = 0.004827775$. Tiheduste võrdlust normaaljaotusega saab graafiliselt näha Lisast 2.

5.2.2 GLD ja OIL

Sarnaselt EUR/USD ja JPY/USD valuutakurssidega on andmed jagatud kahte rühma. Sobiva koopula leidmiseks on kasutatud samuti IFM ja CML meetodeid. Marginaaljaotuste leidmiseks on kõigepealt tabelis 2 ära toodud keskväärtaus, standardhälve, asümmeetriakordaja ja järsakuskordaja.

	keskväärtus	standardhälve	asümmeetria-kordaja	järsakuskordaja
GLD	0.0008135305	0.01384946	0.106439	8.818267
OIL	-0.0002395033	0.0249674	-0.1586173	5.002125

Tabel 2. GLD,OIL - keskväärtaus, standardhälve, asümmeetriakordaja ja järsakuskordaja

GLD andmereale sobitati GED, Laplace'i ja Johnsoni jaotusi. Kuna andmetel on üksikud väärtused kaugel ülemisel sabal, siis parima marginaaljaotuse leidmine on keeruline. Parima sobivusega jaotuseks valiti Johnson SU (*Johnson System Unbounded*) parameetritega $\hat{\gamma} = 0.1327, \hat{\delta} = 1.307, \hat{\xi} = 0.00251$ ja $\hat{\lambda} = 0.0132$. Johnson SU jaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi}\sqrt{z^2+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma + \delta \ln(z^2 + 1))^2\right),$$

kus $z = \frac{x-\xi}{\lambda}$, $x \in (-\infty, \infty)$, γ ja δ on kujuparameetrid, λ on skaalaparameeter ning ξ on asukohaparameeter. Johnson SU jaotuse kohta saab täpsemalt lugeda artiklist [11].

OIL indeksi andmetele sobitati GED, Johnsoni ja logistilist jaotust, parimaks osutus logistiline jaotus asukoha parameetriga $\hat{\mu} = -0.000019$ ja skaalaparameetriga $\hat{s} = 0.0134$. Logistilise jaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}{s\left(1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)^2\right)},$$

kus μ on asukohaparameeter ja s on skaalaparameeter. Vastavad kvantiilide graafikud ja histogrammi sobitatud jaotustega leiab lisast 3.

5.3 Koopulate rakendamine

5.3.1 EUR/USD ja JPY/USD

Pärast sobivate marginaaljaotuste leidmist tuleb saadud tulemused teiseda standardse ühtlase jaotusega vektoriteks ning seejärel saab sobitada erinevaid koopulate klasse. Arhimeedilistest koopulatest on kasutatud Franki, Joe ja Ali-Mikhail-Haqi koopulaid ning EV koopulatest on kasutatud Gumbeli, Galambose, Tawni ja Hüsler-Reissi koopulaid. IFM ja CML meetodil leitud parameetri θ hinnangud on antud alltoodud tabelis 3 koos kriteeriumi AIC väärtusega.

Koopula	IFM		CML	
	$\hat{\theta}$	AIC	$\hat{\theta}$	AIC
Gumbel	1.291	-288.96	1.278	-279.50
Frank	2.335	-309.53	2.397	-312.57
AMH	0.793	-308.34	0.789	-306.21
Joe	1.368	-212.18	1.335	-197.78
Tawn	0.611	-336.39	0.601	-329.18
Galambos	0.532	-247.94	0.514	-237.00
Hüsler-Reiss	0.844	-210.45	0.822	-200.67
Gauss	0.321	-242.18	0.318	-241.36

Tabel 3. Koopulate parameetrite hinnangud ja AIC

Väikseima AIC väärtuse järgi otsustades on sobivaimad mudelid Arhimeediliste koopulate perest Franki koopula parameetriga $\theta = 2.397$ ja Ali-Mikhail-Haqi koopula parameetriga $\theta = 0.789$ ning isegi kui võrrelda valimi Kendalli as-takorrelatsioonikordajat τ vastava koopula näitajaga, siis tundub, et mudelid sobivad hästi. Kuid probleem tekib, kui uurida, kuidas käituvad sabasõltuvuse kordajad. Nimelt, ei Franki ega Ali-Mikhail-Haqi koopula ei võta arvesse sabasõltuvust ja neile vastavad sabasõltuvuse kordajad on võrdsed nulliga. Kuid testides, kas andmetel on ülemises sabas sõltuvus, on tulemuseks on nullist erinev kordaja. Nullhüpootesiks on juhuslike suuruste X ja Y sõltuvus. Selleks on kasutatud suurust

$$C_i = (X_i + Y_i)/c,$$

kus $i = 1, \dots, n$ ning $C_i < 1$, $i = 1, \dots, n$. Seatakse lävend c nii, et 10%-15% valimimahust seda ületaks. Defineeritakse $\bar{C}_i = C_i | C_{i-1}, \dots, C_1$, $i = 1, \dots, m$ ning test statistik on antud kujul:

$$-\frac{\sum_{i=1}^m (\ln \tilde{c}_i + m)}{\sqrt{m}},$$

kus $\tilde{c}_i = \frac{u+v}{c} \mathbf{1}_{u+v > c}$. Eeldatakse, et test statistik on $N(0, 1)$ jaotusest. Kasutatud protseduuri pakkusid välja Reiss ja Thomas (2007) [17]. Seega olenevalt analüüsi eesmärgist, peab väga kriitiliselt suhtuma koopula valikusse. Antud

juhul tuleb arvestada, et suurte muutuste korral mudel hästi andmeid ei kirjelda. Seega tuleks proovida alternatiive, näiteks ekstremaalväärtuste koopulaid, mille hulgas on ka Arhimeediliste koopulate perre kuuluv Gumbeli koopula, mis AIC väärtuse järgi nii hästi küll ei sobi, kuid samal ajal võtab arvesse ülemise saba sõltuvust, $\lambda_U = 0.28$. Tabelist 3 on ka näha, et Tawni koopula võiks sobida isegi paremini, AIC on kõigi sobitatud koopulate hulgast sel juhul kõige väiksem. $\lambda_U = 0.300$.

	Empiiriline	Frank	AMH	Gumbel	Tawn
Kendalli τ	0.244	0.252	0.229	0.218	0.228
Spearmani ρ	0.345	0.372		0.321	0.330
λ_U	0.250	0	0	0.280	0.300

Tabel 4. Empiiriline ning CML meetodil sobitatud koopulate Kendalli τ , Spearmani ρ ja ülemine sabasõltuvuse kordaja λ_U

5.3.2 GLD ja OIL

Järgides sarnast protseduuri nagu euro ja jaapani jeeni korral, on kulla ja nafta hinnamuuttuste analüüsitulemused esitatud järgnevas tabelis, kus on äraa toodud IFM ja CML meetodil saadud θ hinnangud ja vastav kriteeriumi AIC väärtus.

Koopula	IFM		CML	
	$\hat{\theta}$	AIC	$\hat{\theta}$	AIC
Gumbel	1.321	-187.34	1.327	-156.13
Frank	2.621	-187.65	2.604	-149.46
AMH	0.828	-183.71	0.837	-141.36
Joe	1.390	-135.65	1.400	-119.89
Tawn	0.656	-214.62	0.661	-179.66
Galambos	0.561	-162.04	0.572	-135.89
Hüsler-Reiss	0.867	-138.11	0.891	-118.33
Gauss	0.352	-158.70	0.363	-126.41

Tabel 5. Koopulate parameetrite ja AIC

AIC väärtuse järgi otsustades, on sobivaimateks Tawni ja Gumbeli koopula ning seejärel Franki koopula. Alltoodud tabelis 6 on vastavate mudelite astakorrelatsioonikordajad ning ülemine sabasõltuvuse kordaja. Taaskord, kuna Franki koopula ei suuda võtta arvesse sabasõltuvust ja andmetes aga avaldub sabasõltuvus, siis võib-olla sobivad paremini koopulad, mille korral esineb sabasõltuvust. Üldiselt, kuna nii Tawni kui ka Gumbeli koopula ülemine sabasõltuvuse kordaja on nullist erinev ning ka neile vastavad AIC väärtused on väiksemad kui Franki koopulal, siis on soovitage jääda nende mudelite juurde.

	Empiiriline	Frank	Gumbel	Tawn
Kendalli τ	0.261	0.272	0.246	0.254
Spearmani ρ	0.367	0.399	0.360	0.367
λ_U	0.500	0	0.314	0.330

Tabel 6. Empiiriline ning CML meetodil sobitatud koopulate Kendalli τ , Spearmani ρ ja ülemine sabasõltuvuse kordaja λ_U

5.4 Mudeli sobivuse kontrollimine

Järgnevalt on vaadeldud, kui hästi sobivad saadud mudelid tulevikuandmetele. Pseudovaatlused on defineeritud samamoodi nagu CML meetodis: $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$, siis neile vastav empiiriline jaotus on

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i \leq u, V_i \leq v)},$$

kus $u, v \in [0, 1]$. Kasutatud on kooskõlatesti, mis mõõdab kaugust C_n ja suurima tõepära meetodil saadud koopula C_{θ_n} vahel. Cramér von Misese testi puhul on nullhüpoteesi kohaselt andmed antud koopulast.

$$H_0 : C(\cdot) \in \{C(\cdot, \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta)\}$$

Vastav test baseerub mitteparameetrilisel hinnangufunktsioonil $C_n(\cdot)$ ja CML meetodil hinnatud koopulal $C(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, selleks on kasutatud astakutel põhinevat Cramér von Misese teststatistikut:

$$S_n = \int_{[0,1]^2} n \left(C_n(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \right)^2 dC_n(\mathbf{u}),$$

kus ligikaudse p-väärtuse leidmiseks on kasutatud parameetrilist bootstrappi. Protseduur on esitatud Genest, C., Rémillard, B. ja Beaudoin, D. artiklist [7], kus on kirjeldatud ka teisi koopulate testimiseks mõeldud kooskõlateste. Statistiku suured väärtused viivad H_0 kummutamiseni, seega kui p-väärtused on suuremad kui 0.05, siis jääme nullhüpoteesi juurde.

5.4.1 EUR/USD ja JPY/USD

Sobivaimateks mudeliteks EUR/USD ja JPY/USD korral olid Ali-Mikhail-Haqi ja Franki koopulad, kuid arvesse tuleks võtta, et kumbki neist ei võimalda võtta arvesse sabasõltuvust. Tawni koopula test-statistiku p-väärtus jäi 0.05 piirimaile. Kuna tegemist on ekstremaalväärtuste koopulaga, siis suurema andmemahu korral oleks ka Tawni koopula sobivus parem.

	Frank	AMH	Gumbel	Tawn
test-statistik	0.025	0.0223	0.0414	0.0365
p-väärtus	0.1334	0.2542	0.02547	0.04845

Tabel 7. Cramér von Misese testi tulemused

5.4.2 GLD ja OIL

Indeksite GLD ja OIL korral saadi parimaks mudeliks Tawni koopula, mille sobivuse kontrollimisel täheldati, et Cramér von Misese test statistiku p-väärtus oli suurem kui 0.1, kuid sarnaselt EUR/USD ja JPY/USD andmeridadega on andmemaht küllaltki väike ning saadud tulemustesse tuleks suhtuda ettevaatlikkusega. Andmetega on kooskõlas ka Franki koopula p-väärtusega 0.074, kuid tuleb arvestada, et andmetes oli sees märkimisväärne sabasõltuvus, mida Franki koopula arvesse ei võta.

	Frank	AMH	Gumbel	Tawn
test-statistik	0.0277	0.0404	0.0356	0.0296
p-väärtus	0.07443	0.02448	0.03946	0.1024

Tabel 8. Cramér von Misese testi tulemused

6 Kokkuvõte

Töö eesmärgiks on anda ülevaade koopulate teoriast, eelkõige Arhimeediliste ja ekstremaalväärtuste koopulate peredest ning rakendada neid finantsandmetele. Arhimeedilised koopulad on küll lihtsasti konstrueeritavad ja sõltuvad vaid ühemuutuja funktsioonist, kuid selle tõttu on neil ka puudused, näiteks asümmeetriat diagonaalteelje suhtes nad modelleerida ei suuda. On küll juba välja pakutud uusi ja keerulisemaid mudeleid, mis oma täiendustega kaotavad ära jaotuse lihtsa kuju. Ekstremaalväärtuste koopulate rakendusi on palju, kuna praktikas on suure tähtsusega raskete sabadega jaotuste sabasõltuvuse modelleerimine. Mudelite usaldusväärsus sõltub andmemahu suurusel; samuti nagu Arhimeedilised koopulad, on ekstremaalväärtuste koopulad diagonaalteelje suhtes sümmeetrilised.

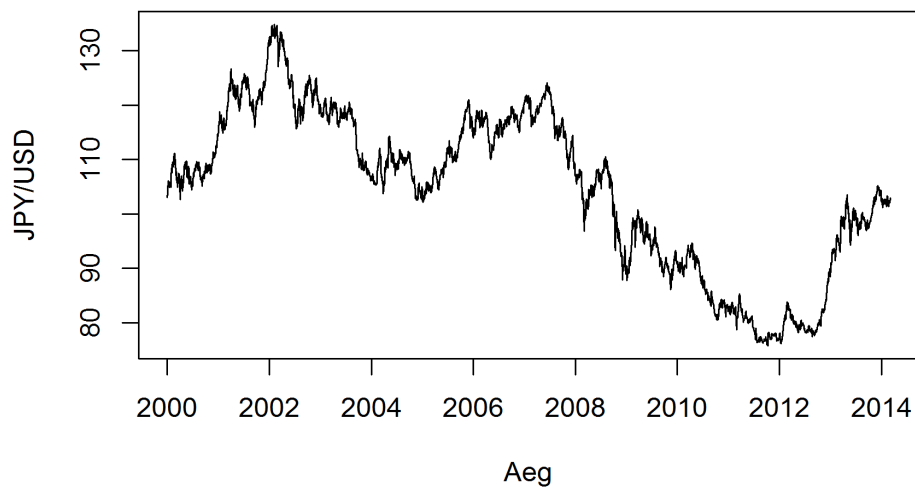
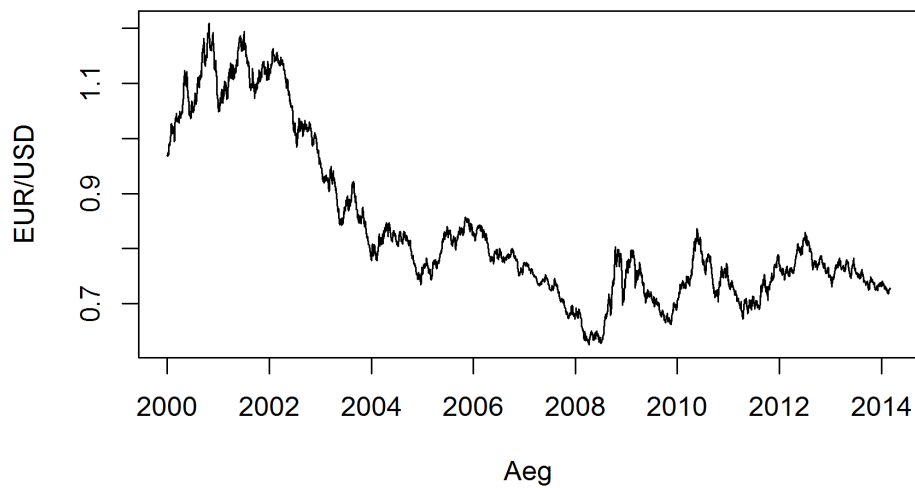
Antud töös on modelleeritud euro ja jaapani jeeni suhet ning kulla- ning naftahinna indeksite suhet. Sobiva koopula leidmiseks kasutati suurima tõepära hinnangut parameetrile θ ning parim mudel valiti väikseima AIC kriteeriumi väärtuste järgi. Toodud näidete põhjal osutus Tawni koopula parimaks andmete mudeliks.

Viited

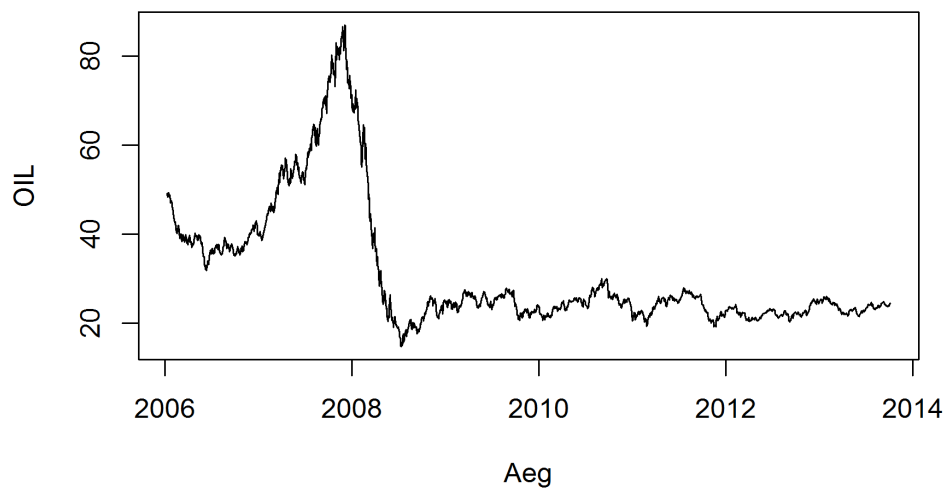
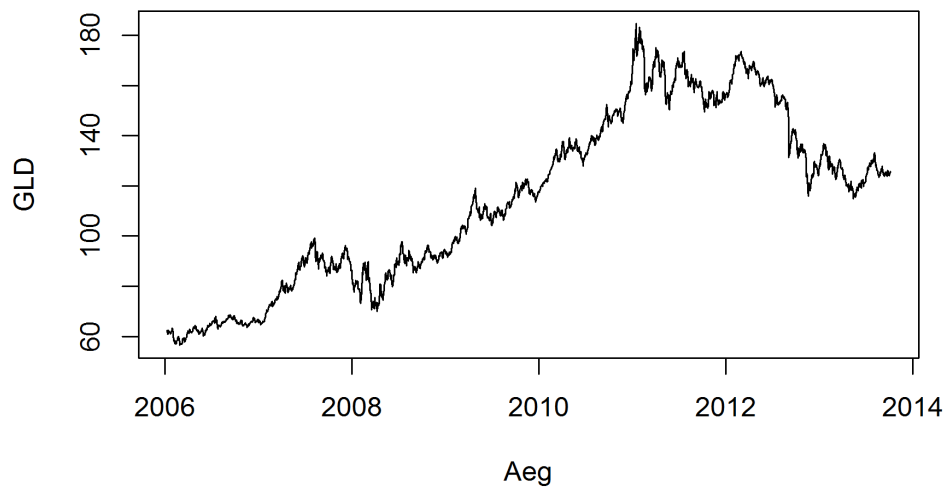
- [1] K. Aas. Modelling the Dependence Structure of Financial Assets: A Survey of Four Copulas. *Norwegian Computing Center*, 2004.
- [2] C. R. Bhat. A Copula-Based Approach to Accommodate Residential Self-Selection in Travel Behaviour Modelling. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43(7):749–765, 2009.
- [3] U. Cherubini, E. Luciano, and W. Vecchiato. *Copula Methods in Finance*. John Wiley and Sons Ltd, 2004.
- [4] S. C. Chiou and R.Š. Tsay. A Copula-based Approach to Option Pricing and Risk Assessment. *Journal of Data Science*, (6):274–301, 2008.
- [5] M. Denuit, O. Purcaru, and I. van Keilegom. Bivariate Archimedean Copula Models for Censored Data in Non-Life Insurance. *Journal of Actuarial Practice*, 13, 2006.
- [6] Yahoo! Finance. Url: <http://finance.yahoo.com/>.
- [7] C. Genest, B. Rémillard, and D. Beaudoin. Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44:199–213, 2007.
- [8] G. Gudendorf. *Nonparametric estimation of multivariate extreme-value copulas*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2012.
- [9] G. Gudendorf and J. Segers. Extreme-Value Copulas. *Copula Theory and Its Applications*, 2010.
- [10] H. Joe and J. J. Xu. The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. *Department of Statistics, University of British Columbia*, 1996.

- [11] N. L. Johnson. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika*, 36:149–176, 1949.
- [12] A. Kaasik. Jaotused finantsmatemaatikas, 2012.
- [13] P. Kumar. Probability Distributions and Estimation of Ali-Mikhail-Haq Copula. *Applied Mathematical Sciences*, 4(14):657–666, 2010. Mathematics Department, University of Northern British Columbia.
- [14] R. Mathieu and S. Mohammed. Extreme Value Copulas and Max-stable Processes. *Journal de la Société Française de Statistique*, 153(3):138–150, 2012.
- [15] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2005.
- [16] R. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 2006.
- [17] R.-D. Reiss and M. Thomas. *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, 3rd edition, 2007.
- [18] G. Salvadori, C. de Michele, N.T. Kottegoda, and R. Rosso. *Extremes in Nature: an Approach Using Copulas*. Springer, 2007.
- [19] PACIFIC Exchange Rate Service. Url: <http://fx.sauder.ubc.ca/>.
- [20] R. L. Smith. Multivariate threshold methods. In Galambos. J., J. Lechner, E.Šimiu, and N. Macri, editors, *Extreme Value Theory and Applications*, volume 1, pages 224–248. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [21] G. G. Venter. Tails of Copulas. In *ASTIN Washington*, pages 68–113, USA, 2001.
- [22] Q. Xu. *Estimating and Evaluating the Archimedean-Copula-Base Models in Financial Risk Management*. PhD thesis, Massey University, Auckland, New Zealand, 2008.

Lisa 1 - Aegridade graafikud

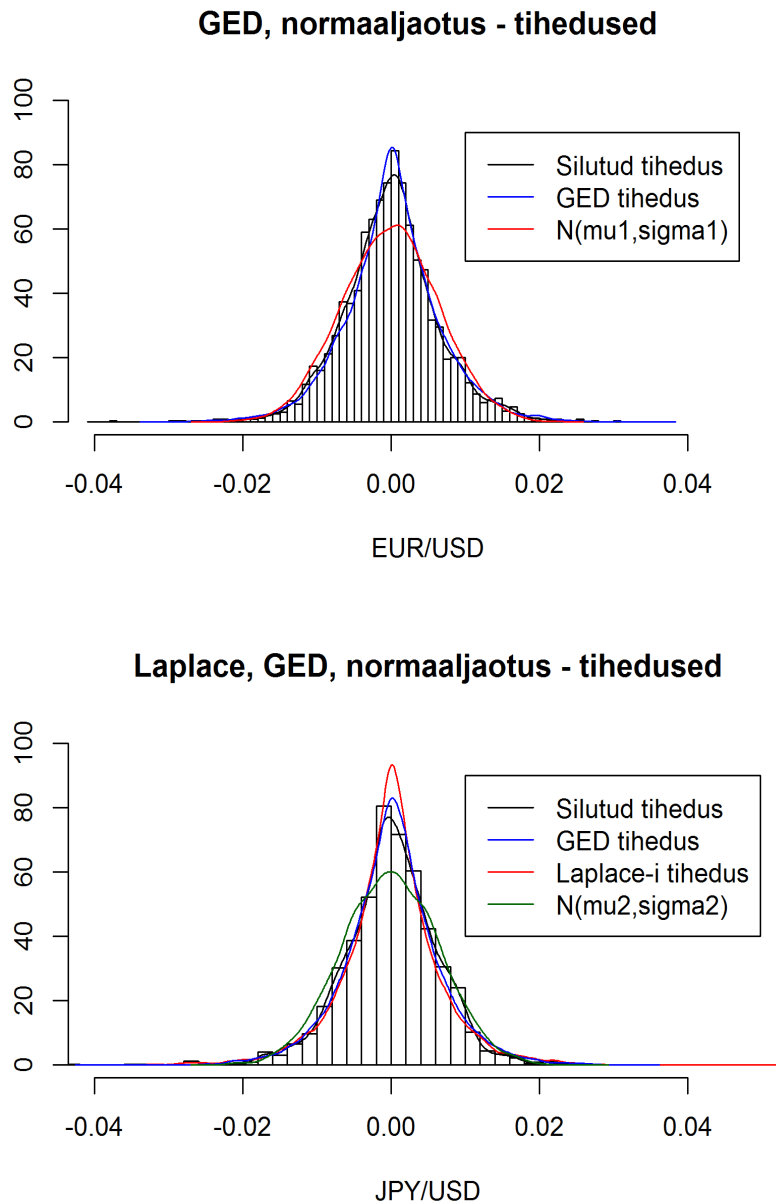


Joonis 5. EUR/USD ja JPY/USD aegread

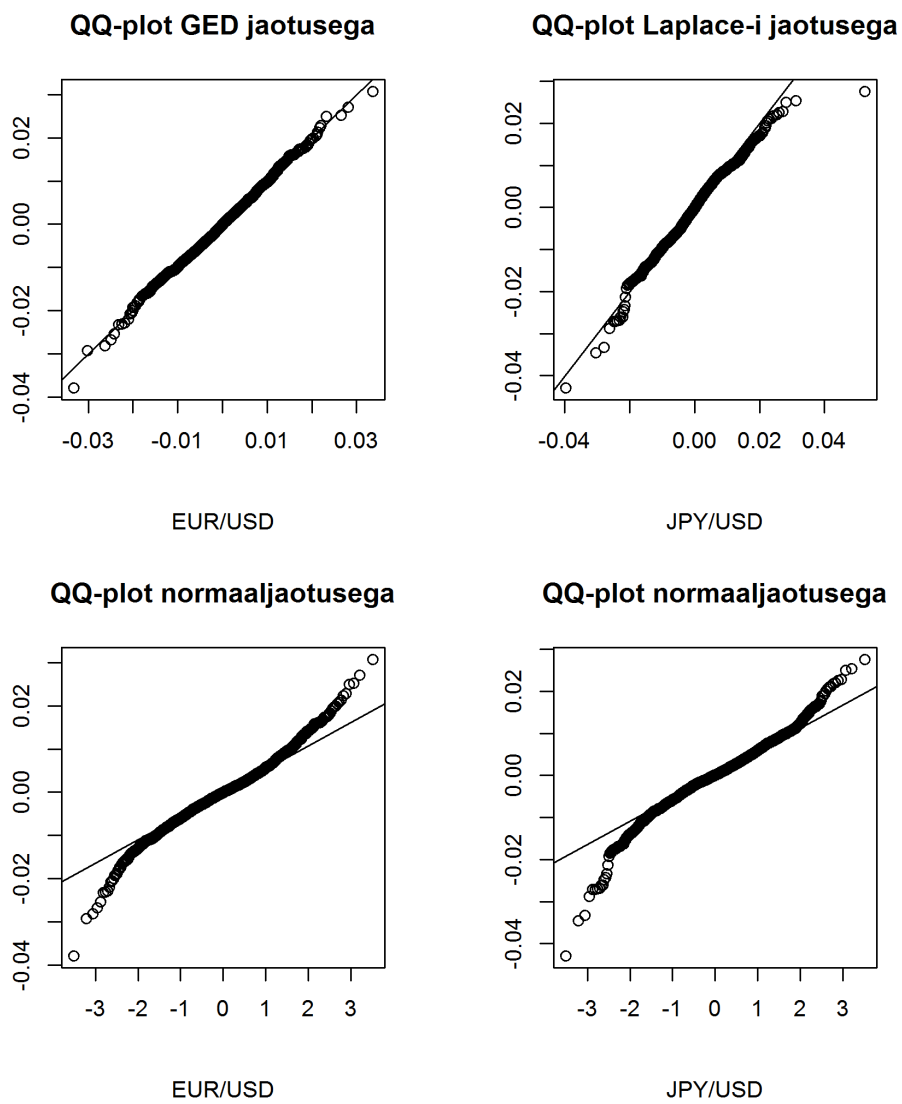


Joonis 6. GLD ja OIL aegread

Lisa 2 - EUR/USD ja JPY/USD sobitatud tihedused ja kvantiilide graafikud

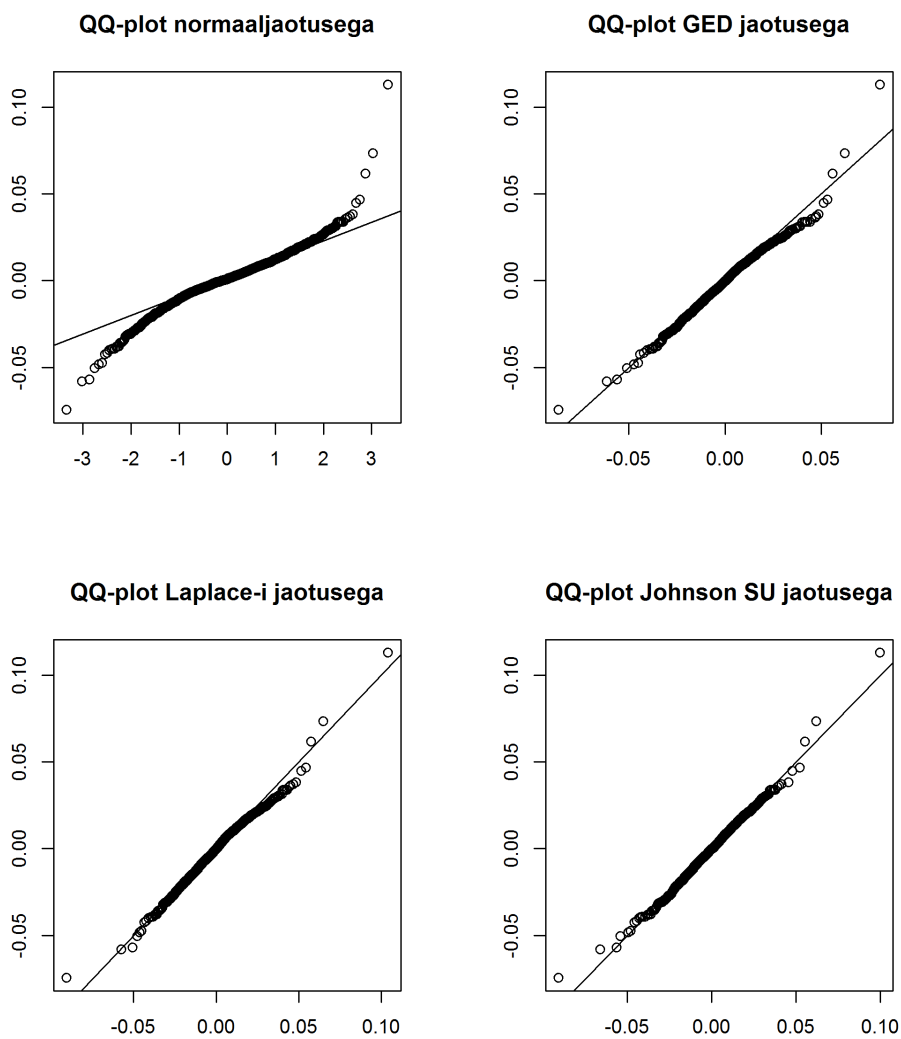


Joonis 7. EUR/USD ja JPY/USD histogrammid ning tiheduste võrdlus normaaljaotusega. μ_1 ja σ_1 on EUR/USD keskvärtus ja standardhälve. μ_2 ja σ_2 on JPY/USD keskvärtus ja standardhälve.

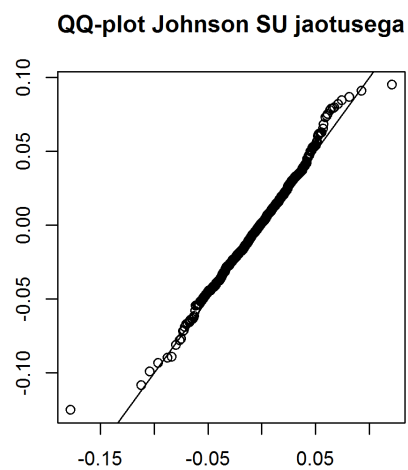
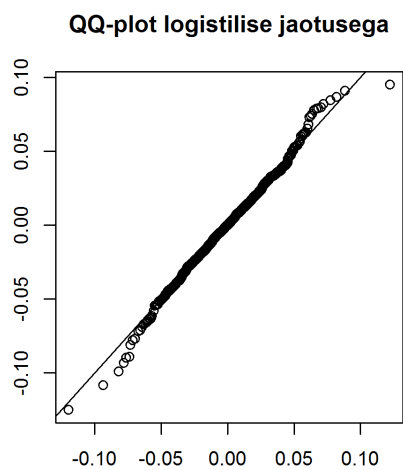
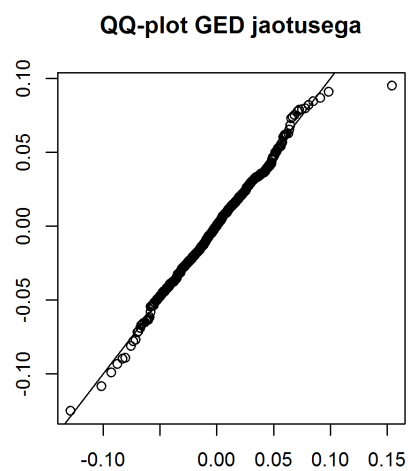
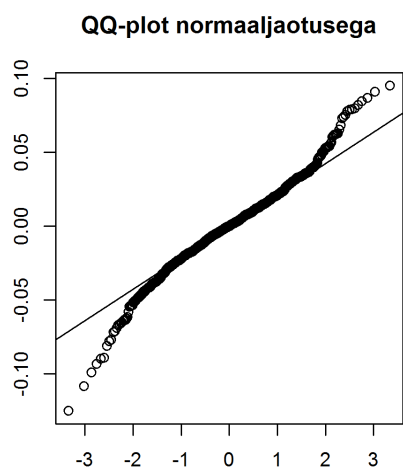


Joonis 8. EUR/USD ja JPY/USD QQ-plotid

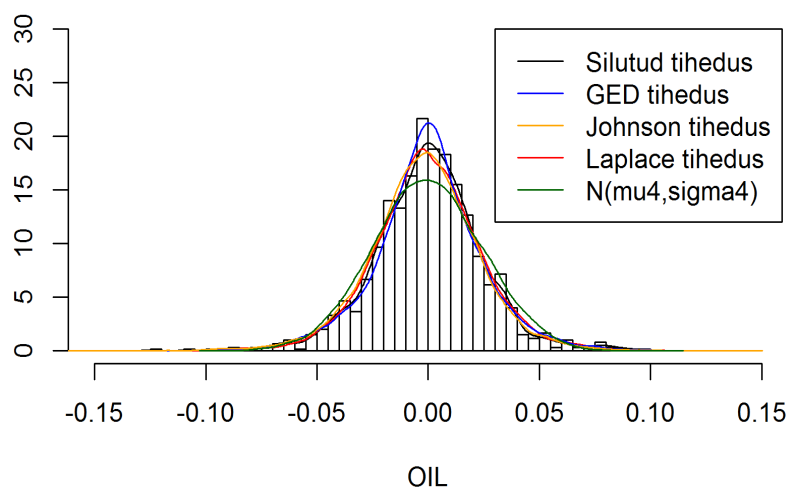
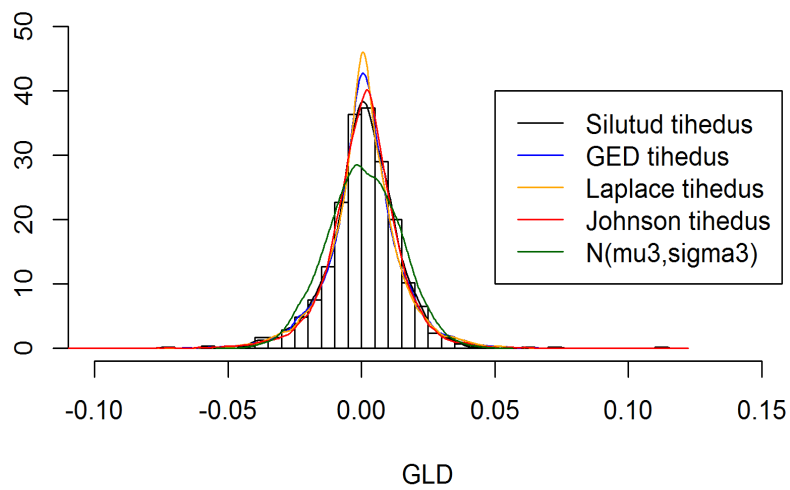
Lisa 3 - GLD ja OIL sobitatud tihedused ja kvantiilide graafikud



Joonis 9. GLD indeksi kvantiilide graafikud



Joonis 10. OIL indeksi kvantilide graafikud



Joonis 11. GLD ja OIL indeksite histogrammid ning tiheduste võrdlus normaaljaotusega. μ_3 ja σ_3 on GLD keskvärtus ja standardhälve. μ_4 ja σ_4 on OIL keskvärtus ja standardhälve.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Triin Teesalu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Finantsandmete modelleerimine Arhimeediliste ja ekstremaalväärtuste koopulatega”, mille juhendaja on prof. Tõnu Kollo,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 19.05.2014