lequel il a été enseveli jusqu'à présent; mais je n'ai rien de nouveau à y ajouter. J'ai cherché une méthode générale pour résoudre ce problème, ou plutôt ce genre de problèmes, et en pure théorie j'y ai réussi; mais en pratique ma tentative a échoué devant l'obstacle d'un calcul excessivement long, quoique à la vérité fini. Peut-être un jour parviendra-t-on à rendre le calcul plus expéditif par des méthodes convenables d'approxoximation; à présent je ne peux qu'attendre avec le plus grand interêt ce qu'on pourra obtenir par des considérations basées sur des figures géométriques.

(Tiré du Bulletin, T. IX, pag. 39 — 55.)

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9me ligne, № 12).

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME IV.

1:16

$\frac{3}{15}$ October 1867.

Démonstration d'un théorème de Statique, par Ferd. Minding, professeur à Dorpat.

L'idée du centre de gravité ou du centre des forces parallèles est si ancienne et tant de fois discutée, qu'on aurait peine à croire qu'elle pourrait encore devenir l'objet de nouvelles recherches. Cependant, en l'analysant, on reconnaît qu'elle n'est pas fondée uniquement sur le parallélisme des forces, mais qu'encore elle suppose des forces qu'on pourrait regarder comme inhérantes à leurs points d'application, c'est-à-dire qui restent invariables en grandeur et en direction, de quelque manière qu'on fasse tourner le corps auquel elles sont appliquées. Sans changer la position du corps par rapport aux forces, tous les points de la ligne dans laquelle agit la résultante, sont indifférens; ce n'est que par le changement de cette position relative, qu'on rencontre ce point particulier du corps, par lequel passe toujours la résultante et qui a reçu par cette raison le nom usité.

Cette réflexion m'a porté, il y a plus de trente ans, à supprimer la condition du parallélisme des forces et à considérer un corps solide soumis à des forces quelconques, dont chacune soit donnée en intensité et en direction et invariablement attachée à son point d'application, de quelque manière qu'on fasse tourner le corps. Seulement il faut admettre que toutes ces forces, transportées parallèlement et appliquées à un seul point, donnent une résultante différente de zéro, qui sera désignée par R.

Il est vrai qu'on ne saurait trouver dans la nature un tel corps; il n'y a que l'aimant qui, sollicité à la fois par la pesanteur et la force magnétique, réalise d'une manière particulière l'hypothèse proposée, en offrant un système dont les forces sont toutes parallèles à un plan. Encore, pour expliquer sous ce point de vue la statique de l'aimant, faut-il faire abstraction des variations d'intensité et de direction de la force magnétique, et la regarder comme constante.

Quoiqu'il en soit pour les applications, il est nécessaire en théorie de développer l'hypothèse proposée, dont les conséquences ne sont pas dénuées d'interêt.

J'ose donc revenir encore une fois sur ce sujet qui paraît être resté à peu près inconnu à la plupart des géomètres. Mais je n'insisterai pas ici sur des détails tels que je les ai donnés autrefois soit dans le journal de Crelle, soit dans un petit traité de mécanique rationelle qui a paru en 1838; à présent je me bornerai à démontrer succinctement le théorème principal auquel conduit l'hypothèse mentionnée.

Décomposons les forces données suivant trois directions perpendiculaires entre elles, dont la première soit parallèle à la resultante R, obtenue comme il vient d'être dit. Le premier groupe de forces parallèles aura R pour somme et par conséquent il offrira un centre de forces parallèles fixe dans le corps ou

indépendant de la position du corps à l'égard des forces; soit C ce centre, qui sera nommé le *point central.*

Le second groupe de forces parallèles a pour somme zéro. Pour le reduire à un couple à bras fixe dans le corps, appliquons au point C la force R parallèlement à la direction des composantes du second groupe et à la fois la force égale et contraire que je designerai par R', pour la distinguer. Les forces du second groupe, ajoutées à R, donneront avec la somme R un centre A qui sera encore fixe dans le corps, et la force R, appliquée en A, formera avec la force égale et contraire R', appliquée en C, un couple à bras fixe (CA) dans le corps.

Traitant de la même manière le troisième groupe de forces parallèles, on obtiendra encore un centre B, auquel s'applique une force R qui, avec une force égale et contraire R'', appliquée en C, donne un second couple dont le bras CB est fixe dans le corps. Par hypothèse, les forces égales R, R', R'', appliquées au point C, sont perpendiculaires entre elles.

Le plan du triangle ACB est le *plan central*, qui est fixe dans le corps comme l'est le point central. Mais les points A et B se déplacent, toutefois en restant toujours dans le plan central, selon qu'on aura choisi la direction des composantes du second groupe ou bien, ce qui revient au même, la direction de la force R' et avec elle celle de R''. On peut profiter de ce déplacement des points A et B, pour rendre droit l'angle ACB.

Soient x et y deux axes choisis arbitrairement dans le plan central, mais perpendiculaires entre eux et partant de l'origine C, et supposons qu'on ait pour le point A, $x = a$, $y = b$ et pour le point B, $x = a'$, $y = b'$. Imaginons de plus, pour simplifier, que le corps soit tellement placé à l'égard des forces, que la force R, appliquée en C, soit perpendiculaire au plan central; par conséquent les forces R' et R'', également appliquées en C, seront situées dans le plan central, de même que les forces appliquées en A et B, qui forment avec R' et R'' les deux couples dont les bras sont CA, CB.

Décomposons ces quatre forces suivant deux droites α et β, également perpendiculaires entre elles et situées dans le plan ACB. Soit u l'angle compris entre la force R appliquée en A, et la première direction α; $\frac{\pi}{2} + u$ sera l'angle entre la force R appliquée en B et la même direction α. En décomposant toutes les forces suivant les directions α et β, on aura le tableau suivant:

composantes	suivant α	suivant β	coordonnées des points d'application
de R en A	$+\cos u$	$+\sin u$	a, b
de R en B	$-\sin u$	$+\cos u$	a', b'
de R' en C	$-\cos u$	$-\sin u$	$0, 0$
de R'' en C	$+\sin u$	$-\cos u$	$0, 0$

en omettant partout le facteur R, qu'on peut regarder comme égal à l'unité de force.

Maintenant, de même qu'auparavant, appliquons au point C la force R dans la direction α et avec elle son égale et contraire R_1. Mettant à part R_1, et ajoutant R ou 1 aux composantes parallèles à α, on obtiendra avec la somme 1 un nouveau centre A', dont les coordonnées seront:

$$\xi = a\cos u - a'\sin u, \quad \eta = b\cos u - b'\sin u.$$

En opérant de la même manière sur les composantes parallèles à β, on aura avec une force $R_2 = R$

appliquée en C, un autre centre B', dont voici les coordonnées:

$$\xi' = a\sin u + a'\cos u, \quad \eta' = b\sin u + b'\cos u,$$

auquel s'applique la force R, formant un couple avec R_2.

Pour rendre droit l'angle $A'CB'$, il faut faire $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$, ce qui donne:

$$2(aa' + bb')\cos 2u - (a'^2 + b'^2 - a^2 - b^2)\sin 2u = 0,$$

ou bien

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2(aa' + bb')}{a'^2 + b'^2 - a^2 - b^2},$$

équation qui détermine, sans ambiguité, les directions de décomposition qu'il faut adopter pour rendre le bras CA perpendiculaire à CB, et par cela achever la réduction du système des forces données.

Cela posé, prenons l'axe des x sur le bras CA, celui des y sur CB, et représentons par le tableau suivant les composantes des cinq forces dont il s'agit, pour une position quelconque du corps:

Composantes	suivant x	y	z	coordonnées des points d'application
de R en C	a	b	c	$0, 0, 0$
de R_1 en C	a'	b'	c'	$0, 0, 0$
de R_2 en C	a''	b''	c''	$0, 0, 0$
de R en A	$-a'$	$-b'$	$-c'$	$p, 0, 0$
de R en B	$-a''$	$-b''$	$-c''$	$0, q, 0$

en posant les bras $CA = p$, $CB = q$. On aura les relations connues:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0, \text{ etc.}$$

Avec ces élémens on formera aisement les équations de la résultante associée au couple minimum, dont le moment soit V, et qui est, comme on le sait, perpendiculaire à la résultante. On aura pour cette droite:

$$bz - cy = L - aV,\quad cx - az = M - bV,$$
$$ay - bx = N - cV \text{ et } V = La + Mb + Nc,$$

L, M, N étant les expressions connues des moments:

$$L = \Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma),\quad M = \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha),$$
$$N = \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta),$$

dans lesquelles il faut substituer les composantes actuelles avec les coordonnées de leurs points d'application. On trouve pour les parties de L, M, N provenant de la force en A, en mettant pour P l'unité, respectivement

$$0,\quad -pc',\quad +pb';$$

pour les parties provenant de la force en B:

$$+qc'',\quad 0,\quad -qa'';$$

donc on aura les moments:

$$L = +qc'',\quad M = -pc',\quad N = +pb' - qa'',$$

d'où l'on tire: $V = q(ac'' - a''c) - p(bc' - b'c)$,
ce qui revient, comme on sait, à $V = qb' - pa''$.

Les équations de la résultante associée au couple minimum, seront donc:

$$bz - cy = qc'' - aV,\quad cx - az = -pc' - bV,$$
$$ay - px = pb' - qa'' - cV,\quad V = qb' - pa''.$$

On s'assurera aisément qu'il existe une infinité de positions qui satisfont à la condition $qb' - pa'' = 0$, dans lesquelles par conséquent le moment V est zéro et le système se réduit à une résultante unique, dont voici les équations:

$$\begin{aligned} bz - cy &= qc'' \\ cx - az &= -pc' \\ ay - bx &= pb' - qa'', \\ qb' - pa'' &= 0. \end{aligned}$$

Cherchons les points d'intersection de cette résultante avec le plan xz. Pour cela on a, en posant

$y = 0$, par la première et la troisième des équations qu'on vient d'établir, et sans avoir égard à la seconde, qui n'est, comme on sait, qu'une conséquence de l'ensemble des autres équations:

$$bz = qc'',\quad -bx = pb' - qa''.$$

Élevant au carré la seconde de ces équations et en y ajoutant $(qb' - pa'')^2 = 0$, on aura:

$$b^2x^2 + (qb' - pa'')^2 = (pb' - qa'')^2$$

ou bien:

$$b^2x^2 + q^2b'^2 + p^2a''^2 = p^2b'^2 + q^2a''^2,$$

ce qui donne: $\dfrac{b^2x^2}{q^2 - p^2} = a''^2 - b'^2.$

En ajoutant la première équation, également élevée au carré, c'est-à-dire

$$\frac{b^2z^2}{q^2} = c''^2,$$

on aura

$$b^2\left\{\frac{x^2}{q^2 - p^2} + \frac{z^2}{q^2}\right\} = a''^2 + c''^2 - b'^2 = 1 - b'^2 - b''^2 = b^2;$$

donc on aura définitivement:

$$\frac{x^2}{q^2 - p^2} + \frac{z^2}{q^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(A)}$$

équation qui indique la suite des points du plan xz, dans lesquels seulement la résultante unique du système, si elle existe, peut rencontrer le plan xz.

De la même manière on cherchera le lieu des intersections de la résultante avec le plan yz, en posant $x = 0$; on aura

$$az = pc',\quad ay = pb' - qa'',\quad pa'' - qb' = 0$$

d'où l'on tire:

$$\frac{y^2}{p^2 - q^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(B)}$$

mais il est plus court de former immédiatement cette seconde équation d'après l'analogie avec la première.

L'inspection des formules **(A)** et **(B)** fait voir, que dans toutes les positions du corps relativement aux forces données, dans lesquelles les forces peuvent être remplacées par une résultante unique, positions qui existent en nombre infini, cette résultante, loin de pouvoir traverser le corps d'une manière quelconque, ne peut que couper à la fois les deux courbes fixes dans le corps, dont on vient de trouver les équations.

Ces courbes sont situées dans deux plans perpendiculaires entre eux, que j'ai autrefois appelés plans moyens; l'une est une ellipse, l'autre une hyperbole; les foyers de chacune d'elles sont les sommets de l'autre.

Il y a des cas particuliers remarquables. Si l'un des bras p ou q est zéro, l'ellipse devient un cercle et l'hyperbole une droite perpendiculaire au plan du cercle et passant par son centre. Dans ce cas il n'y a pas de plan central, mais seulement un axe central, qui est cette même droite; c'est le cas de l'aimant.

Si $p = q$, on a un système bien singulier dans lequel toutes les résultantes uniques passent par l'un ou l'autre de deux points isolés, situés sur l'axe des z de part et d'autre du point central à la distance p de ce point.

(Tiré du Bulletin, T. XII, pag. 233 — 239.)

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

6.

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME V.