Ueber die

Reduction der scheinbaren und wahren Monddistanzen auf einander.

Eine

zur Erlangung der Magisterwürde

bei der

Physiko-Mathematischen Facultät der Kaiserlichen

Universität Dorpat

verfasste

Abhandlung

von

Ludwig Schwarz.

Hiezu eine Figurentafel.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1865.

Der Druck ist gestattet und die gesetzliche Zahl von Exemplaren an die Censurbehörde abzuliefern.

Dorpat, den 9. Juni 1865.

№ 24. **Dr. C. Schmidt,**

(L. S.) d. Z. Dekan der physiko-mathematischen Facultät.

Inhalt.

Die einst so berühmte Aufgabe „die Erfindung der Länge zur See" hat durch die Vervollkommnung der Chronometer eine so einfache Lösung gefunden, dass der Seemann nur in ganz besonderen Fällen zur Messung von Monddistanzen seine Zuflucht nehmen wird, um die geographische Länge seines Schiffes zu bestimmen; denn selten wird jetzt ein Schiff eine grössere Reise unternehmen, ohne mit einem oder mehreren guten Chronometern versehen zu sein, deren täglicher Gang hinreichend genau bekannt ist; eine Zeitbestimmung genügt dem Seefahrer dann, die Länge seines Standortes zu ermitteln und zwar mit einer Genauigkeit, welche in der Regel diejenige übertreffen wird, welche er durch Messung selbst mehrerer Reihen von Monddistanzen zu erreichen im Stande wäre. Diesem Umstande ist es zum Theil zuzuschreiben, dass die von Bessel so eingehend motivirten Vorschläge zu einer strengeren Berechnung der Länge aus Monddistanzen keinen Eingang gefunden haben und die Seeleute nach wie vor mittlere Refractionen und Parallaxentafeln gebrauchen und die Wirknng der Parallaxe des Mondes auf das Azimut vernachlässigen. In der That werden *grosse* Fehler in der gesuchten Länge nur ausnahmsweise eintreten können; die Vernachlässigung der Einführung der vollkommen genauen Beträge der Refraction, Parallaxe und Azimutänderung wird im Allgemeinen nur einen Fehler erzeugen, der gegen die Unsicherheit, mit welcher vom Schiffe aus eine Monddistanz gemessen wird, als klein angesehen werden darf.

Hat aber die Aufgabe für den Seefahrer ihre ehemalige grosse Bedeutung verloren und wird derselbe sich auch jetzt noch mit derjenigen Gränze der Genauigkeit begnügen, innerhalb welcher die Lösung anfangs gefordert wurde [1]), so findet doch das Mittel der Längenbestimmung durch

---

1) Das Parlament von England bestimmte eine Belohnung von 20,000 Pfund Sterling demjenigen, welcher die Länge zur See auf einen halben Grad genau zu finden vermöchte.

Monddistanzen auf dem Festlande noch vielfache Anwendung, wo die Möglichkeit der genaueren Messung die strengere Berechnung fordert. Mit Ausschluss von Europa ist von den übrigen Welttheilen nur ein geringer Flächenraum für die Zwecke einer genauen Mappirung genügend erforscht; wissenschaftliche Expeditionen in die wenig bekannten Gebiete, wenn sie überhaupt mathematisch-geographische Zwecke im Auge haben, werden nur selten grössere astronomische Instrumente, welche einer festen Aufstellung bedürfen, mit sich führen können; diejenigen Instrumente hingegen, mit welchen Monddistanzen gemessen werden, sind leicht transportabel, ihre Anwendung ist nicht von einem sicheren Stativ und festem Boden bedingt. Hiedurch empfehlen sie sich als Begleiter bei allen wissenschaftlichen Explorationen, weil ohne weitere Vorbereitungen in kurzer Zeit eine brauchbare Ortsbestimmung gewonnen werden kann. Bei keiner der wissenschaftlichen Expeditionen, welche in den letzten funfzehn Jahren von der Russischen Regierung unternommen wurden, fehlte ein Astronom und die bei weitem grössere Hälfte der gewonnenen Ortsbestimmungen in Asien sind aus Beobachtungen abgeleitet worden, welche mit dem Spiegelkreise gemacht sind. Ich selbst habe sehr viele Monddistanzen gemessen und noch mehr berechnet. In dieser Erfahrung glaubte ich die Berechtigung zu finden, die Auseinandersetzung der strengen und auf ein Minimum von arithmetischen Operationen gebrachten Methode, nach welcher ich gerechnet habe, nicht für unwichtig zu halten. Warum ich aber eine neue Methode der Berechnung gebe, nachdem Bessel diesen Gegenstand bereits mit vollkommener Strenge behandelt hat[2]), darüber werde ich mich erst später bequem aussprechen können, nachdem ich das Wesentliche der Methode Bessel's werde auseinander gesetzt haben.

Ehe ich jedoch zur Darlegung der verschiedenen Methoden der Berechnung der Monddistanzen übergehe, halte ich es für geboten, das Wichtigste über den Grad der Genauigkeit von Ortsbestimmungen, welcher durch Messung von Monddistanzen und Anwendung eines 10zölligen Pistor-Martins'schen Patentkreises erreicht worden ist, vorauszuschicken. Denn es ist unmöglich, über den Werth einer Rechnungsmethode richtig zu urtheilen, wenn man die Genauigkeit, der das gesuchte Resultat überhaupt fähig ist, nicht kennt. Was ich aber über die letztere mittheilen werde, entnehme ich meinen eigenen Erfahrungen und kann zur Rechtfertigung dessen nur anführen, dass wohl Niemand zahlreichere Beobachtungen mit dem Patentkreise gemacht hat als ich, und dass ich stets bemüht war, mir über den objectiven Werth einer gewonnenen Ortsbestimmung die

2) Astronom. Nachrichten. Band X, № 218, S. 17.

strengste Rechenschaft zu geben. — Aus mehr als tausendfach wiederholten Messungen der Berührung der Ränder der beiden Sonnenbilder, und zwar an verschiedenen Punkten des Limbus, ergiebt sich, dass *eine* solche Berührung gemessen wird mit dem wahrscheinlichen Fehler $= \pm 3'',31$; eine Berührung der beiden Bilder eines Sterns wird gemessen mit dem wahrscheinlichen Fehler $= \pm 4'',36$. Diese beiden Zahlen sind aus der Messung von Circummeridianhöhen der Sonne und anderer Fixsterne abgeleitet worden. Aus einer grossen Reihe von Monddistanzen folgt, dass die Berührung des Mondrandes mit einem anderen Gestirne gemessen wird mit dem wahrscheinlichen Fehler $= \pm 5'',6$. Da nun zur Bestimmung eines Winkels zwei Messungen gehören — die Bestimmung des Nullpunktes kommt noch hinzu — so folgt, dass die einfache Bestimmung

der Höhe der Sonne mit d. wahrsch. Fehler $= \pm 4'',7$
„ eines Fixsterne „ „ $= \pm 6'',2$
„ einer Monddistanz „ „ $= \pm 6'',9$

gemessen wird. — Diese Zahlen sind jedoch nicht maassgebend für die Genauigkeit, mit welcher eine Polhöhe oder Länge eines Ortes wirklich bestimmt wird, sondern sie geben nur die äusserste Gränze dieser Genauigkeit an. Aus den zahlreichen Bestimmungen der Polhöhe von Irkutzk, welche mit einem und demselben Patentkreise gemacht sind, folgt, dass *eine* Polhöhe den wahrscheinlichen Fehler $= \pm 3'',9$ hat; und aus einer grossen Reihe von Längenbestimmungen von Irkutzk durch Monddistanzen ergiebt sich, dass *eine* Länge den wahrscheinlichen Fehler $= \pm 15,4$ Zeitsecunden hat. Da nun zu einer Bestimmung der Polhöhe oder Länge nie weniger als neun Messungen verwandt wurden, so mussten der wahrsch. Fehler einer Polhöhe höchstens $= \pm 1'',6$ und einer Länge $= \pm 4^s,5$ erwartet werden. Der direkt gefundene ist aber 3 bis 4 mal grösser, als der aus den Beobachtungsfehlern allein folgende; es sind demnach neben den letzteren noch andere, dem Instrumente und seiner Einrichtung eigenthümliche Fehler vorhanden, deren Natur bis jetzt noch nicht vollständig aufgeklärt worden ist und welche daher auch nicht vollständig eliminirt werden können.

Für meinen besonderen Zweck entnehme ich aus dem eben Beigebrachten den Beleg für die Behauptung, dass bei jeder Methode der Reduction der scheinbaren Monddistanz auf die wahre, oder umgekehrt, diejenigen Reductionselemente, welche weniger als ein bis zwei Zehntel Bogensecunde betragen, vernachlässigt werden können. Denn einem Fehler von einer Secunde Bogen in der Distanz entspricht im Mittel ein Fehler von zwei Secunden Zeit in der Länge; der wahrscheinliche Fehler *einer* Längenbestimmung ist aber $= \pm 15^s,4$ Zeitsecunden gefunden worden, über funfzig Bestimmungen werden demnach im Mittel erst eine Länge geben, deren wahrscheinlicher Fehler $= \pm 2$ Zeitsecunden wäre. Wohl nur selten werden aber mehr als 10 bis 15 einzelne Bestimmungen gemacht werden — dazu gehören schon drei Abende — aber selbst bei hundert Bestimmungen ist der wahrscheinliche Fehler des Mittels von $\pm 1^s,5$ noch so gross, dass man ein paar Zehntel Zeitsecunde unberücksichtigt lassen darf. Ueberhaupt ist eine Genauigkeit einer *absoluten* Längenbestimmung von einem Zehntel einer Zeitsecunde, mit welchen Hülfsmitteln man dieselbe auch zu erreichen suchen möge, völlig illusorisch; denn welcher Aufwand von Zeit, Scharfsinn und mechanischen Hülfsmitteln gehört schon dazu, um die *relative* Länge zweier Orte mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0,1$ Zeitsecunden zu erhalten. Ich erinnere nur an die Länge von Paris, an die Chronometerexpeditionen, welche von der Nicolai-Sternwarte ausgingen und an die neueste Bestimmung der relativen Länge der Sternwarten Berlin und Leipzig.

§ 1.

Die vollständige Lösung des Problems „die Länge zur See“ zu finden, erfordert erstens, dass man diejenigen Himmelserscheinungen erkenne, welche hiezu am anwendbarsten sind, dass man zweitens die Werkzeuge schaffe, diese Erscheinungen vom Schiffe aus zu beobachten, und endlich drittens, dass man es möglich mache, aus diesen Beobachtungen ein brauchbares Resultat zu ziehen. Der erste Theil des Problems war schon lange gelöst, bevor die Lösung des letzten überhaupt möglich war; schon Ptolomäus deutet darauf hin, dass die Bewegung des Mondes ein Mittel abgebe, Längenunterschiede auf der Erdoberfläche zu bestimmen. Der Entdecker der *Methode* der Monddistanzen ist aber Amerigo Vespucci, wie aus einem Briefe von ihm an Lorenzo dei Medici vom Jahre 1499 hervorgeht[3]. Den zweiten Theil des Problems löste Newton, welcher 1699 das später unter dem Namen des Hadley'schen Sextanten so bekannt gewordene Instrument erfand. Den dritten Theil endlich löste Tobias Mayer, welcher 1755 seine Mondstafeln dem englischen Admiralitäts-Collegium übergab. Die Ziehung des Resultats, d. h. die Herleitung der Länge aus der angestellten Beobachtung kann als vierter Theil des Problems angesehen werden, und seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts ist diese specielle Aufgabe vielfach behandelt worden.

Das Wesen der Bestimmung der Länge eines Ortes A auf der Erdoberfläche durch Monddistanzen, beruht darin, den wahren *Winkelabstand* des Mondes, D, von einem gegebenen Gestirne für eine gegebene Zeit T des Ortes A zu ermitteln. Diejenigen astronomischen Ephemeriden, welche auch den Zwecken der mathematischen Geographie dienen sollen, enthalten solche Winkelabstände des Mondes von einer gewissen Anzahl von Sternen, vorausberechnet für das ganze Jahr und in gleichen Zeitinter-

3) Siehe Note 1.

vallen. Die Distanz D wird nun einer gewissen Zeit τ der Ephemeride entsprechen; der Unterschied $T-\tau$ ist die Länge des Ortes A in Bezug auf den Meridian desjenigen Ortes, für welchen die Ephemeride gilt. Die Distanz D — wie sie vom Mittelpunkte der Erde aus erscheint — kann selbstverständlich nicht Gegenstand der Messung sein; gemessen wird der *scheinbare* Winkelabstand D', in welche die wahre, durch die Wirkung der Parallaxe und Refraction verändert worden ist, und die zu lösende Aufgabe besteht darin, wenn D gegeben ist, D' zu finden, oder wenn D' gegeben ist, D zu finden. Dieses kann auf zweifache Art geleistet werden: entweder dass man die Grössen D und D' selbst, oder dass man ihren Unterschied zu berechnen lehrt; und in der That sind beide Wege von den Geometern verfolgt worden.

Die Wirkung der Parallaxe auf den Ort eines Gestirns, wenn wir den Horizont zur Grundebene nehmen, hat zur Folge, dass die Zenithdistanz und das Azimut des Gestirns vergrössert werden; beim Monde kann die Aenderung in der ersten Coordinate einen Grad übersteigen, in der zweiten beträgt sie höchstens zwölf Secunden. Bei den übrigen Gestirnen erreicht die erstere nur wenige Secunden, die zweite kann gleich Null gesetzt werden. Ginge die Richtung der Schwere auf der Erdoberfläche stets durch den Mittelpunkt der Erde, so wäre die Wirkung auf das Azimut für alle Gestirne gleich Null; ein sehr geringer Theil der Aenderung der Zenithdistanz — höchstens 2 bis 3 Secunden — und die ganze Aenderung im Azimut ist die Folge der Abweichung der Figur der Erde von der Kugelgestalt. Beim Monde wird auch der Winkeldurchmesser durch die Parallaxe merkbar afficirt, die Figur der Scheibe bleibt jedoch ein Kreis. — Die Refraction hingegen verkleinert die Zenithdistanz des Gestirns, lässt aber das Azimut ungeändert; beim Monde und der Sonne ist die Wirkung der Refraction auf die einzelnen Punkte der Umschreibung bei grosser Zenithdistanz merkbar verschieden und die Figur der Scheibe ändert sich in Folge dessen. — Alle Methoden der Berechnung der Monddistanzen, welche noch jetzt im Gebrauch sind, oder überhaupt vorgeschlagen wurden, haben das Gemeinsame, dass sie die Wirkung der sphäroidischen Gestalt unseres Erdkörpers entweder gar nicht berücksichtigen, oder doch getrennt behandeln und die Veränderung der Figur der Mond- und Sonnenscheibe durch die Refraction ausser Acht lassen; nur Bessel berücksichtigt beides vollständig und im Nautischen Jahrbuch, von Dr. Bremiker herausgegeben, findet sich eine Tafel für die Correction des Radius, um die Distanz vom Rande des Mondes oder der Sonne auf den Mittelpunkt des betreffenden Gestirns zu reduciren.

§ 2

Sehen wir von der sphäroidischen Gestalt der Erde und von der Aenderung der Mond- und Sonnenscheibe durch die Refraction ab, so vereinfacht sich die Aufgabe ungemein. Sei in Fig. I, Z das scheinbare Zenith des Beobachtungsortes, d. h. derjenige Punkt am Himmel, in welchem die verlängerte Lothlinie des Orts den Himmel trifft, M' der Ort des Mondes, S' der des andern Gestirns, wie dieselben vom Beobachtungsorte aus erscheinen, dann ist der Winkel $M'ZS' = E$ der Unterschied der Azimute, und $MZ = \zeta'$ und $S'Z = \mathfrak{z}'$ sind die scheinbaren Zenithdistanzen der beiden Gestirne. M und S seien die Orte des Mondes und des anderen Gestirns vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen, also $MZ = \zeta$ und $SZ = \mathfrak{z}$ die wahren Zenithdistanzen. Die Aufgabe kommt nun darauf hinaus, aus der gemessenen scheinbaren Distanz $M'S' = D'$ und den Zenithdistanzen ζ' und $\mathfrak{z}'$ den Winkel E zu finden; mit Hilfe dieses Winkels und der Zenithdistanzen ζ und $\mathfrak{z}$ wird dann die wahre Distanz $MS = D$ zu berechnen sein. Die hiezu vorgeschlagenen Methoden setzen voraus, dass die Zenithdistanzen ZM' und ZS' und die Distanz $M'S'$ durch direkte Messung erhalten werden. Ist aber ZM' bekannt, so findet man mit Hilfe von Tafeln, welche für jede scheinbare Zenithdistanz die algebraische Summe der Wirkungen der Parallaxe — unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde — und der Refraction auf die Zenithdistanz berechnet erhalten, durch Interpolation und Subtraction ZM; ebenso einfach berechnet man aus einer anderen Tafel ZS, wenn ZS' gegeben ist. — Der Winkel E ist den beiden Dreiecken $M'S'Z$ und MSZ gemeinschaftlich; für die diesem Winkel gegenüberliegenden Seiten gelten die folgenden Gleichungen:

$$\cos D' = \cos \zeta' \cos \mathfrak{z}' + \sin \zeta' \sin \mathfrak{z}' \cos E \qquad \text{(I)}$$
$$\cos D = \cos \zeta \cos \mathfrak{z} + \sin \zeta \sin \mathfrak{z} \cos E$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen $\cos E$, so erhalten wir eine Gleichung zwischen D, der gesuchten Grösse, und den bekannten Grössen D', ζ', $\mathfrak{z}'$, ζ und $\mathfrak{z}$. Die verschiedenen Methoden, welche die wahre Distanz zu berechnen lehren, unterscheiden sich von einander nur durch die Art und Weise, wie sie diese letzte Gleichung behandeln.

Die berühmteste ist die Borda'sche. Dieselbe wurde veröffentlicht in dem Werkchen „Description et usage du cercle de réflection avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques“ par le Chevalier de Borda. Paris 1787, und findet sich daselbst auf den Seiten 76 bis 80. Die Elimination führt zunächst auf die folgende Gleichung

$$\frac{\cos D' - \cos \zeta' \cos \mathfrak{z}'}{\sin \zeta' \sin \mathfrak{z}'} = \frac{\cos D - \cos \zeta \cos \mathfrak{z}}{\sin \zeta \sin \mathfrak{z}} \qquad \text{(II)}$$

es ist aber:

$$\cos \zeta' \cos z' = \sin \zeta' \sin z' + \cos(\zeta' + z')$$

und $\quad \cos \zeta \cos z = \sin \zeta \sin z + \cos(\zeta + z)$

daher kann man für dieselbe schreiben

$$\frac{\cos D' - \cos(\zeta' + z')}{\sin \zeta' \sin z'} = \frac{\cos D - \cos(\zeta + z)}{\sin \zeta \sin z}$$

Da nun ferner:

$$\begin{aligned} \cos D' - \cos(\zeta' + z') &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' + D') \sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' - D') \\ \cos D &= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} D \\ \cos(\zeta + z) &= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(\zeta + z) \end{aligned}$$

so erhält man durch Umstellung aus der obigen Gleichung die folgende:

$$\sin^2 \frac{D}{2} = \sin^2 \tfrac{1}{2}(\zeta + z) - \sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' + D') \sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' - D') \frac{\sin \zeta \sin z}{\sin \zeta' \sin z'}$$

Borda setzt

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\zeta + z)} \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' + D') \sin \tfrac{1}{2}(\zeta' + z' - D') \frac{\sin \zeta \sin z}{\sin \zeta' \sin z'}}, = \sin Q;$$

mit dieser Bezeichnung ist

$$\sin^2 \frac{D}{2} = \sin^2 \tfrac{1}{2}(\zeta + z) \cos^2 Q$$

oder endlich

$$\sin \frac{D}{2} = \sin \tfrac{1}{2}(\zeta + z) \cos Q. \tag{III}$$

Diese Form ist einfach und bequem, da der Ausdruck für $\sin Q$ für die Rechnung mit Logarithmen eingerichtet ist; man muss jedoch siebenstellige Tafeln anwenden und sehr genau interpoliren, wenn man der Zehntel Bogensecunde sicher sein will.

Den Einfluss der sphäroidischen Gestalt der Erde auf die Distanz behandelt Borda getrennt und er gelangt nach einer weitläufigen Entwickelung zu einem zweitheiligen Ausdrucke für die wahre Distanz, von welchem der erste Theil das obige D ist, wenn man in dem Ausdrucke für $\sin Q$ das ζ, die wahre Zenithdistanz des Mondes, nicht mit der wahren Horizontal-Parallaxe π des Mondes, sondern mit einer fingirten Parallaxe $= (1 + \mu \sin^2 \varphi)\pi$ berechnet, wo μ die Abplattung der Erde und φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bedeuten; der zweite Theil ist

$$= 2\mu\pi \, . \sin \varphi \left(\frac{\sin d}{\sin D} - \operatorname{cotg} D \sin \delta\right) \tag{IV}$$

wo δ die Declination des Mondes und d die Declination des andern Gestirns bezeichnen.

Die Veränderung der Figur der Mond- und Sonnenscheibe durch die Refraction berücksichtigt Borda gar nicht, sondern reducirt die durch die Messung erhaltene Distanz der Ränder auf die Distanz der Mittelpunkte, indem er für den Mond den durch die Parallaxe vergrösserten

Radius — für welchen er ebenfalls eine Tafel giebt — und für die Sonne einfach den Radius in Rechnung bringt.

Die Borda'sche Methode der Berechnung der Monddistanzen findet noch jetzt ihre volle Anwendung. Nicht nur hat Bohnenberger dieselbe in seinem vortrefflichen Werke „Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung", Göttingen 1795, aufgenommen, sondern auch Sawitsch giebt nur diese in seinem „Abriss der practischen Astronomie", Hamburg 1851, an. Letzterer berücksichtigt zwar die Wirkung der Refraction auf den Halbmesser des Mondes und der Sonne, aber ich kann mich damit nicht einverstanden erklären, dass er die Figur der Scheibe als *eine* Ellipse behandelt, deren Abplattung $= \frac{\rho-\rho'}{2r'}$, wo ρ und ρ' die Refractionen für den oberen und unteren Rand bedeuten; die Scheibe besteht vielmehr aus 2 halben Ellipsen, welche die grosse Achse gemeinschaftlich haben, deren kleine Achsen aber merklich von einander verschieden sind.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass die von Borda gegebenen Tafeln jetzt keine Anwendung mehr finden, weil die Refractionstafeln seitdem wesentlich verbessert worden sind und die von Borda gebrauchte Abplattung $= \frac{1}{200}$ erheblich falsch ist.

Eine andere Endgleichung für die wahre Distanz ist die von Maskelyne im Jahre 1766 in den „Tables requisite etc." pag. 65 mitgetheilte, welche von Dunthorne herrührt. Wenn man in der Gleichung (III) für $\cos\zeta'\cos\mathfrak{z}'$ und $\cos\zeta\cos\mathfrak{z}$ resp. schreibt $\cos(\zeta'-\mathfrak{z}') - \sin\zeta'\sin\mathfrak{z}'$ und $\cos(\zeta-\mathfrak{z}) - \sin\zeta\sin\mathfrak{z}$, so erhält man durch blosse Umstellung

$$\cos D = \cos(\zeta-\mathfrak{z}) - \frac{\sin\zeta\sin\mathfrak{z}}{\sin\zeta'\sin\mathfrak{z}'}(\cos(\zeta'-\mathfrak{z}') - \cos D') \tag{V}$$

Das Verhältniss $\frac{\sin\mathfrak{z}}{\sin\mathfrak{z}'}$ ist für Zenithdistanzen unter 80^0 als constant $=1{,}000275$ anzusehen; das Verhältniss $\frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'}$ findet man in den genannten Tafeln für die Argumente Parallaxe und Höhe des Mondes berechnet; mit Hilfe der natürlichen Sinus- und Cosinustafeln lässt sich daher nach der Dunthorn-schen Formel recht bequem rechnen, wenn D gross ist. Dieselbe wird noch jetzt ebenso wie die Borda'sche in der englischen Marine gebraucht. Norie giebt in seinem Werke „A complete Epitome of Practical-Navigation", zwölfte Stereotyp-Ausgabe, London 1839, diese beiden Methoden und noch drei andere, welche auf Näherungsformeln beruhen. In Bezug auf diese letzteren verweise ich auf den Aufsatz von Enke im Berliner Jahrbuch von 1842.

Es ist nicht meine Absicht, alle die verschiedenen für die numerische Rechnung mehr oder weniger bequemen Formeln, welche aus den Grundgleichungen (I) abgeleitet worden sind, besonders aufzuführen[4]). Nur die von Bremiker in den Astronom. Nachrichten, Band XXX, pag. 716, entwickelte Methode, welche das Nautische Jahrbuch für 1852 zuerst mittheilt und empfiehlt und auch die einzige ist, welche Brünnow in seinem Handbuche der sphärischen Astronomie beibringt, darf ich nicht unerwähnt lassen. Bremiker geht von der Dunthorneschen Formel aus, schreibt d für $\zeta - \mathfrak{z}$, d' für $\zeta' - \mathfrak{z}'$, setzt $\frac{\sin\zeta \sin\mathfrak{z}}{\sin\zeta' \sin\mathfrak{z}'} = \frac{1}{C}$, $\frac{\cos d'}{C} = \cos d''$ und $\frac{\cos D'}{C} = \cos D''$, wodurch die Grundgleichung übergeht in

$$\cos D - \cos D'' = \cos d - \cos d''$$

Aus dieser Gleichung folgt nach bekannter Transformation und den Winkel für den Sinus setzend, dass

$$D - D'' = (d - d'')\frac{\sin\frac{1}{2}(d + d'')}{\sin\frac{1}{2}(D + D'')} \qquad \text{(VI)}$$

Nur selten wird man auf der rechten Seite D nicht mit D' verwechseln dürfen; bezeichnet man daher $(d - d'')\frac{\sin\frac{1}{2}(d + d'')}{\sin\frac{1}{2}(D' + D'')}$ mit x, so erhält man in den meisten Fällen mit ausreichender Genauigkeit die wahre Distanz aus der Gleichung

$$D = D'' + x$$

Die Formel VI ist genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung der Refraction und Parallaxe inclusive; in dem Nautischen Jahrbuch sind Tafeln gegeben, um das nach dieser Formel berechnete D wegen Abplattung der Erde zu corrigiren und zur genaueren Reduction der Distanz vom Rande auf den Mittelpunkt des Gestirns. Die Formeln aber, nach welchen diese nur die ganzen Secunden angebenden Correctionstafeln berechnet sind, finde ich nicht aufgeführt.

Die eben besprochene Methode unterscheidet sich von der Borda'schen und Dunthorne'schen dadurch, dass sie den *Unterschied* der wahren und scheinbaren Distanzen zu berechnen lehrt. So viel mir bekannt ist, schlägt Delambre zuerst diesen Weg vor; in der Connaissance des Tems für 1804, pag. 254, giebt er mehrere Reihen zur Berechnung von x an, wobei er aber auch von der Kugelgestalt der Erde ausgeht und die Wirkung der sphäroidischen Gestalt unberücksichtigt lässt. Erst Legendre behandelte diese Methode ausführlicher und veröffentlichte dieselbe in den Mémoires de l'Institut des Sciences etc. Tome IV, Janvier 1806, unter dem Titel „Nouvelle formule pour réduire en distances vrais les distances apparentes de la lune au soleil ou à une étoile.“ Er setzt gleichfalls die Kugelgestalt voraus und verbessert die unter dieser Voraussetzung ge-

4) Siehe Note 2.

fundene Distanz mit Hülfe einer Correctionsformel, welche mit der Borda-schen identisch ist. Sein Verfahren ist folgendes. Bezeichnen $\mathfrak{d}\zeta'$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{z}'$ die Summe der Veränderungen, welche die Zenithdistanzen des Mondes und des andern Gestirns durch Parallaxe und Refraction erfahren und ist $x = D - D'$, so wird ein erster Näherungswerth von x gefunden aus der Gleichung

$$x = -\cos M' \mathfrak{d}\zeta' + \cos S' \mathfrak{d}\mathfrak{z}'$$
$$= -\frac{\cos \mathfrak{z}' - \cos \zeta' \cos D'}{\sin \zeta' \sin D'} \mathfrak{d}\zeta' + \frac{\cos \zeta' - \cos \mathfrak{z}' \cos D'}{\sin \mathfrak{z}' \sin D'} \mathfrak{d}\mathfrak{z}'$$

Nach einem von Legendre zu Anfang seines Memoire's bewiesenen Satze wird nun, wenn man in dem Ausdrucke rechts für ζ', $\mathfrak{z}'$ und D' resp. setzt $\zeta' + \frac{\mathfrak{d}\zeta'}{2}$, $\mathfrak{z}' - \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{z}'}{2}$ und $D' + \frac{x}{2}$ das daraus hervorgehende x genau sein bis auf die Glieder zweiter Ordnung inclusive. Legendre bezeichnet ferner $\zeta' + \frac{\mathfrak{d}\zeta'}{2}$, $\mathfrak{z}' - \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{z}'}{2}$ und $D' + \frac{x}{2}$ resp. mit a, b und d, setzt für $\frac{1}{\sin d}$ und $\frac{\cos d}{\sin d}$ die gleichwerthigen Ausdrücke $\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} d$ und $\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} d - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} d$, bezeichnet $\frac{\mathfrak{d}\zeta'}{\cos a}$ mit M und $\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{z}'}{\cos b}$ durch N; nach einer einfachen Transformation gelangt er dadurch zu der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2} (\sin a - \sin b)(M + N) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} d - \tfrac{1}{2} (\sin a + \sin b)(M - N) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d \qquad \text{(VII)}$$

Er hat besondere Tafeln für die Grössen M und N berechnet und dem Memoire beigegeben, um die Benutzung seiner Methode so bequem als möglich zu machen; allein mir ist nicht bekannt, dass dieselbe Eingang gefunden hat. Den Einfluss der Refraction auf die Figur der Mond- und Sonnenscheibe berücksichtigt Legendre gar nicht.

Die bisher mitgetheilten Formeln zur Ermittelung der wahren Distanz unter Voraussetzung der Kugelstalt der Erde sind mehr oder weniger elegant, doch ist diese Eleganz auf Kosten der Vollständigkeit gewonnen worden; dieselbe schwindet, wenn man die Correctionsglieder wegen der Abplattung zu jenen Formeln hinzunimmt. Vernachlässigt man aber die Abplattung, so kann unter Umständen in der gefundenen Länge ein Fehler von 24 Zeitsekunden zurückbleiben; lässt man die Wirkung der Refraction auf die Figur der Mond- und Sonnenscheibe ausser Acht, so wird, wenn eines der beiden Gestirne 5^0 über dem Horizont und das andere nahe am Zenith steht, die ermittelte Länge um beinahe 45 Zeitsecunden fehlerhaft sein; und wollte man nur mittlere Refractionen anwenden, so können die Fehler in der Länge noch beträchtlicher werden, wenn bei extremem Luftdrucke oder extremer Temperatur die Gestirne in geringer Höhe über dem Horizonte standen. Solche extreme Fälle treten gewiss nur ganz ausnahmsweise ein; meistens wird die Anwendung der bisher gebräuchlichen Rechnungsvorschriften schon zu einem guten Näherungswerthe für die gesuchte Länge führen. Sucht man jedoch das *strenge* Resultat der Beobachtung einer Monddistanz, so verschwindet der Vortheil, den jene für das praktische Rechnen bequem zugerichteten Formeln zu haben scheinen. Denn dann muss auch die Voraussetzung fallen gelassen werden, bei welcher dieselben allerdings rasch zum Ziele führen. Sie sezten alle voraus, dass die scheinbaren Zenithdistanzen der beiden Gestirne direkt durch die Messung erhalten werden. Bekanntlich wird dieser Voraussetzung bei der Beobachtung von Monddistanzen zur See entsprochen, bei welcher 3 Beobachter thätig sind, von denen einer die Distanz nimmt, während die anderen beiden die Höhen der verglichenen Gestirne messen. — Zur See ist man oft gezwungen, so zu verfahren, wenn man seiner Polhöhe auf viele Minuten nicht sicher ist, oder die gesuchte Länge in möglichst kurzer Zeit zu kennen verlangt. — Hat man eine genaue Polhöhe, so ist es stets zweckmässiger, die Zenithdistanzen der beiden Gestirne für das Moment der Beobachtung der Monddistanz zu berechnen, bei welcher Rechnung auch die Azimute der Gestirne erhalten werden. Kennt man diese beiden Coordinaten, so wird die Berechnung der selbst auf das Zehntel der Bogensecunde richtigen Beträge der Parallaxe in Zenithdistanz und Azimut nur wenig mehr Zeit erfordern, als wenn man dieselben aus den Tafeln interpoliren wollte, wo dann immer noch die Zehntel unsicher bleiben würden, da die Tafeln nur die ganzen Secunden angeben. Ebenso unerlässlich ist die Kenntniss der Zenithdistanzen der verglichenen Gestirne, wenn man die genauen Beträge der Refraction in die Rechnung einführen will. — Diese Betrachtungen berechtigen mich zu der Behauptung, dass die Berechnung des strengen Resultats der Beobachtung einer Monddistanz nach den gebräuchlichen Methoden entweder ganz unmöglich ist, oder ohne Benutzung der Tafeln eine so grosse Anzahl von arithmetishen Operationen erfordert, dass die Zweckmässigkeit dieser Methoden in Frage gestellt wird.

Ich wende mich jetzt zu der Methode Bessels, welche einen noch grösseren Aufwand von Rechnung nöthig macht, aber den Vorzug hat, die Aufgabe vollständig zu lösen.

§ 3.

Das Wesentliche, wodurch Bessel's Behandlung der Aufgabe sich von der aller andern Geometer unterscheidet besteht erstens darin, wie er die Abplattung der Erde in Rechnug bringt, zweitens, wie er die Veränderung der Figur der Mond- und Sonnenscheibe durch die Strahlenbrechung umgeht und drittens, wie er den Fall, wenn die Entfernung der

Sonne vom Monde zu berechnen ist, auf den einfacheren reducirt, wenn der Winkelabstand eines Fixsterns vom Monde der Rechnung unterliegt.

Die Abplattung berücksichtigt Bessel auf folgende Weise: Denken wir uns das Loth auf die Erdoberfläche im Beobachtungsorte, dessen Polhöhe $= \varphi$ sei, in's Innere der Erde verlängert, so wird dasselbe die Erdachse schneiden. Auf diesen Durchschnittspunkt O reducirt Bessel erst alle bei den späteren Rechnungen zu brauchenden Winkelgrössen, die für den Mittelpunkt der Erde gelten, und behandelt dann das Problem, als wenn die Erde eine Kugel wäre, deren Radius gleich ist der Entfernung des Punktes O vom Beobachtungsorte.

Die Entfernung des Punktes O vom Mittelpunkte der Erde ist $= -\frac{a\varepsilon\varepsilon \sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon \sin^2\varphi}}, = -ai$; seine Entfernung vom Beobachtungsorte $= \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon \sin^2\varphi}}$, wo a den Aequatoreal-Durchmesser der Erde und ε die Excentricität ihrer Meridiane ausdrückt; i ist eine sehr kleine Grösse. Die übrigen von Bessel gebrauchten Bezeichnungen sind:

für den Mond:

α die Rectascension
δ „ Declination
π „ Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe
ρ der Halbmesser
Q „ Positionswinkel des Mondes am andern Gestirn
d die Distanz des Mondes vom andern Gestirn
r „ Entfernung vom Mittelpunkte der Erde
z „ Zenithdistanz.

Dieselben Grössen mit einem Komma versehen, gelten für den Punkt O; mit einem Accent versehen für den Beobachtungsort.

für das andere Gestirn:

A die Rectasention
Δ „ Declination
q der Parallactische Winkel
Z die Zenithdistanz
t der Stundenwinkel.

In der Figur II bedeutet P den Pol, Z das Zenith, L den vom Punkte O gesehenen Ort des Mondes, L' denselben vom Beobachtungsorte aus; S den Ort des Sternes; es ist also Winkel $PSZ = q$; Winkel $ZSL = Q, - q = P,$ und Winkel $ZSL' = P'$.

Für den Mittelpunkt der Erde sind die Distanz des Mondes von einem Fixsterne und der Positionswinkel des Mondes am Stern, wenn die Rectascensionen und Declinationen der beiden Gestirne bekannt sind, gegeben durch die 3 Gleichungen:

$$\cos d = \sin \varDelta \sin \delta + \cos \varDelta \cos \delta \cos (a - A) \qquad \text{(VIII)}$$
$$\sin d \cos Q = \cos \varDelta \sin \delta - \sin \varDelta \cos \delta \cos (a - A)$$
$$\sin d \sin Q = \cos \delta \sin (a - A)$$

Für den Punkt O bestehen dieselben Beziehungen; es ist also auch

$$\cos d_{,} = \sin \varDelta \sin \delta_{,} + \cos \varDelta \cos \delta_{,} \cos (a - A)$$
$$\sin d_{,} \cos Q_{,} = \cos \varDelta \sin \delta_{,} - \sin \varDelta \cos \delta_{,} \cos (a - A)$$
$$\sin d_{,} \sin Q_{,} = \cos \delta \sin (a - \mathrm{A})$$

Ferner bestehen zwischen den Grössen $r\, r_{,}$ δ und $\delta_{,}$ die beiden Relationen

$$r_{,} \cos \delta_{,} = r \cos \delta \text{ und } r \sin \delta + \mathrm{ai} = r_{,} \sin \delta_{,}$$

Aus diesen Gleichungen entwickelt Bessel die folgenden Näherungsformeln für $r_{,}$ $d_{,}$ und $Q_{,}$:

$$\left.\begin{aligned}
r_{,} &= r + \mathrm{ai} \sin \delta \\
d_{,} &= d - \frac{a}{r}\, i\, (\sin \varDelta \sin d - \cos \varDelta \cos d \cos Q) \\
Q_{,} &= Q - \frac{ai}{r} \frac{\cos \varDelta \sin Q}{\sin d}
\end{aligned}\right.$$

Die Grössen $\pi_{,}$ und $\rho_{,}$ ergeben sich aus den Gleichungen (IX)

$$\left.\begin{aligned}
\sin \pi_{,} &= \frac{a}{r_{,} \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin^2 \varphi}} \\
\sin \rho_{,} &= \frac{r}{r_{,}} \sin \rho
\end{aligned}\right\}$$

Die beiden Systeme von Gleichungen (VIII und IX) geben Alles, was zur Reduction der für den Mittelpunkt der Erde geltenden Winkelgrössen auf den Punkt O erforderlich ist.

Die Wirkungen der Parallaxe und Strahlenbrechung untersucht Bessel gesondert. Es sei d' die Distanz, in welche $d_{,}$ durch die erstere übergeht, wenn man vom Punkte O an den Beobachtungsort versetzt wird, E der Unterschied der Azimute von Mond und Stern und $Q_{,} - q = P_{,}$; zwischen diesen und den Zenithdistanzen bestehen für den Punkt O die Beziehungen:

$$\cos d_{,} = \cos Z \cos z_{,} + \sin Z \sin z_{,} \cos E$$
$$\sin d_{,} \cos P_{,} = \sin Z \cos z_{,} - \cos Z \sin z_{,} \cos E$$
$$\sin d_{,} \sin P_{,} = - \sin z_{,} \sin E$$

und für den Beobachtungsort zwischen den entsprechenden Grössen:

$$\cos d' = \cos Z \cos z' + \sin Z \sin z' \cos E$$
$$\sin d' \cos P' = \sin Z \cos z' - \cos Z \sin z' \cos E$$
$$\sin d' \sin P' = - \sin z' \sin E$$

Ferner ist, wenn $r_{,} = 1$ gesetzt wird, $r' \cos z = \cos z' - \sin \pi_{,}$ und $r' \sin z' = \sin z_{,}$. Aus diesen Gleichungen eliminirt Bessel die Zenithdistanzen des Mondes und E und gelangt zu den folgenden, aus denen d' r' und P' zu berechnen sind:

$$
\begin{aligned}
r' \cos d' &= \cos d_{,} - \sin \pi_{,} \cos Z \qquad\qquad (X)\\
r' \sin d' \cos (P' - P_{,}) &= \sin d_{,} - \sin \pi_{,} \sin Z \cos P_{,}\\
r' \sin d' \sin (P' - P_{,}) &= \sin \pi_{,} \sin Z \sin P_{,}
\end{aligned}
$$

nachdem Z und das in $P_{,}$ vorkommende q aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\cos Z &= \sin \varDelta \sin \varphi + \cos \varDelta \cos \varphi \cos t \qquad\qquad (XI)\\
\sin Z \cos q &= \cos \varDelta \sin \varphi - \sin \varDelta \cos \varphi \cos t\\
\sin Z \sin q &= \cos \varphi \sin t
\end{aligned}
$$

erhalten sind.

Die Grösse d' ist die Distanz des Sterns vom Mittelpunkte des Mondes; da nun $\rho' = \frac{\rho_{,}}{r'}$, so ist die Distanz des Sterns vom näheren oder entfernteren Rande des Mondes

$$d'' = d' \mp \rho'$$

Hierauf geht Bessel zur Betrachtung der Wirkung der Strahlenbrechung über. Er bezieht letztere nicht auf das Centrum des Mondes, sondern auf denjenigen Punkt des Mondrandes, in welchem der grösste Kreis durch das Centrum des Mondes, den Stern und den Beobachtungsort den Mondrand schneidet. Die Zenithdistanz dieses Punktes sei z'', der Winkel zwischen z'' und d'' sei $360^0 - p'$; diese Grössen werden berechnet, wenn man macht $\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} Z \cos P'$

aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\cos z'' &= \cos Z \sec H \cos (d'' - H)\\
\sin z'' \cos p' &= \cos Z \sec H \sin (d'' - H) \qquad\qquad (XII)\\
\sin z'' \sin p' &= - \sin Z \sin P'
\end{aligned}
$$

Der genaue Betrag der Refraction für die Zenithdistanz z'' und den Stand der meteorologischen Instrumente sei $= R''$, für die Zenithdistanz $Z_{,} = R$; d''' bezeichne die Distanz, in welche d'' durch die Wirkung der Strahlenbrechung übergeht; dann ist

$$\cos d''' = \cos (z'' - R'') \cos (Z - R) + \frac{\sin (z'' - R'') \sin (Z - R)}{\sin z'' \sin Z} (\cos d'' - \cos z \cos Z)$$

Aus dieser Gleichung entwickelt Bessel eine bis auf das Quadrat der Refraction inclusive genaue Formel zur Berechnung von d''', nämlich

$$d''' = d'' - k \operatorname{tg} (d'' - H) - K \operatorname{tg} H - \sin \tfrac{1}{4}'' \left(\frac{\operatorname{tg} Z \sin P}{\cos (d'' - H)}\right)^2 \left(k^2 \sin 2 H + K^2 \sin 2 (d'' - H)\right) \qquad (XIII)$$

wo $k = R'' \operatorname{cotg} z''$ und $K = R \operatorname{cotg} Z$ gesetzt sind.

Die Grösse d''' ist es, welche gemessen wird; Streng genommen liegt die gemessene Distanz nicht in dem grössten Kreise, welcher durch den Mittelpunkt des Mondes und den Stern geht, sondern in demjenigen, welcher am Sterne anfängt und auf dem Rande der nicht mehr kreisförmigen Scheibe des Mondes senkrecht steht; Bessel beweist jedoch, dass dieselbe von dem Bogen d''', selbst wenn der Mond 85° Zenithdistanz hat, noch nicht um $\frac{1}{8}$ einer Bogensecunde verschieden ist. Indem er die Refraction für den Punkt am Mondrande in Rechnung bringt und durch den eben erwähnten Beweis umgeht Bessel die Untersuchung über die Veränderung der Figur der Mondscheibe durch die Strahlenbrechung.

Nennen wir die Distanz, welche durch die Messung erhalten wird, d^{IV}; dieselbe wird mit den berechneten d''' in der Regel nicht übereinstimmen. Abgesehen von den Fehlern der Beobachtung sagt der Unterschied $d^{IV} - d'''$ aus, dass der vorausgesetzte Längenunterschied m des Beobachtungsortes vom Meridian der Ephemeride fehlerhaft ist; bezeichnet man nun mit n' die Veränderung von d''' in einer Zeitsecunde dieses Unterschiedes, so ist die an die vorausgesetzte Länge anzubringende Correction

$$=\frac{d^{IV} - d'''}{n'}$$

Den Werth von n' leitet Bessel aus der Gleichung XIII ab. Er lässt die Glieder zweiter Ordnung fort und differentirt die so erhaltene Gleichung

$$d''' = d'' - k \operatorname{tg}(d'' - H) - K \operatorname{tg} H$$

in Bezug auf d'' und H. Er gelangt hiedurch zu einem für alle Fälle ausreichenden Näherungswerth für n', nämlich

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial d}\, a \cos d - \frac{k \sin 1'' (1+\beta)}{\cos (d'' - H)}\right) \tag{XIV}$$

in welchen n die Aenderung der wahren Distanz in derselben Zeiteinheit ausdrückt — welche aus der Ephemeride entnommen wird — a für $\sin \pi$, $\sin Z \sin P$, und β für $\frac{\partial Q_1}{\partial d} \operatorname{tg} Z \sin P$, $\sin d'' \sin (d'' - 2H)$ gesetzt sind. In den meisten Fällen reicht es schon aus, wenn wir setzen

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 - \frac{k \sin 1''}{\cos (d'' - H)^2}\right) \tag{XV}$$

Den Fall, dass das mit dem Monde verglichene Gestirn die Sonne ist, führt Bessel auf den vorigen Fall zurück, indem er den Punkt, in welchem die vom Mittelpunkte des Mondes durch den Mittelpunkt der Sonne gehende Linie den Himmel trifft, als einen Fixstern ansieht und nun die durch die Parallaxe bewirkte Veränderung der Distanz des Mondes und der Sonne von diesem Punkte nach den eben gegebenen Vorschriften berechnet; der Unterschied dieser Wirkungen ist die Veränderung der Distanz des Mondes von der Sonne. Den Bogen zwischen der Sonne und diesem fingirten Fixsterne nennt Bessel den Ergänzungsbogen. Es ist einleuchtend, dass dieser Fall einen noch grösseren Aufwand von Rechnungen bedingt, als der einfachere. Da es aber nicht meine Absicht ist, die Methode Bessel's mit allen Einzelheiten wiederzugeben, sondern nur das Wesentliche derselben hervorzuheben und eine Einsicht in die

Summe von Rechnungen möglich zu machen, durch welche man nach seiner Methode zu dem gesuchten Resultate gelangt, so darf ich mit dem hier Mitgetheilten meine Absicht als erreicht betrachten. Bessel schlägt vor, dass die astronomischen Ephemeriden, welche Monddistanzen geben, zur Erleichterung der Rechnung noch die folgenden Grössen mit aufführen:

1) den Logarithmus von $w\varepsilon^2 \sin \pi (\sin \varDelta \sin d - \cos \varDelta \cos d \cos Q)$ [5])

2) Q und den Logarithmus von $w\varepsilon^2 \sin \pi \frac{\cos \varDelta \cos Q}{\sin d}$

3) $\log \sin \pi$, $\log \rho$ und den Logarithmus von $43429\, \varepsilon^2 \sin \pi \sin \delta$.

4) die Rectascension der Sonne weniger die Rectascension des Sterns, sowie die Declination des Sterns.

5) den Ergänzungsbogen.

Den Rechnern der Ephemeriden würde es einen nur sehr geringen Zuwachs von Arbeit verursachen, wenn sie diese verlangten Grössen mit berechnen wollten. Sind aber diese Grössen gegeben, so erfordert die Reduction der Monddistanzen nach Bessel's Methode nur wenig mehr arithmetische Operationen, als die gebräuchlichen Methoden solche nothwendig machen, wie Bessel dies an zweien Beispielen gezeigt hat. Die Herausgeber der Ephemeriden haben aber bis jetzt dem Vorschlage Bessel's noch nicht Folge gegeben.

Wenn ich nun dargethan zu haben glaube, dass einerseits die Methoden der Berechnung von Monddistanzen nicht streng sind, andrerseits die einzige strenge eine sehr grosse Summe von Zahlenoperationen mit sich bringt, so darf ich es wohl als gerechtfertigt ansehen, einen anderen Weg zu suchen, auf welchem man ein eben so strenges Resultat mit bedeutend weniger Mühe erreicht. Die Methode, welche dieses leistet, und welche ich im Folgenden entwickeln werde, gehört eigentlich Herrn Döllen, astronome supérieur an der Nicolai-Sternwarte, an. Er theilte mir vor einigen Jahren eine Formel zur Reduction von Monddistanzen mit, die er in seinen Vorlesungen über practische Astronomie giebt. Ich habe diese Formel vielfach angewandt und mich überzeugt, dass sie in allen Fällen, wenn man streng rechnen will, rascher zum Ziele führt, als irgend eine der bisher bekannten. Dies veranlasste mich, die durch die Formel gegebene Methode vollständig zu begründen, namentlich was die Correction der Distanz wegen der verschiedenen Wirkung der Strahlenbrechung auf die einzelnen Punkte der Mond- und Sonnenscheibe betrifft.

---

5) $w = 206264'',8$.

§ 4.

In der Figur III bezeichnet P den Pol, $P'Z'ZP$ den Meridian, Z das scheinbare, Z' das geocentrische Zenith eines Ortes B auf der Erde, dessen Polhöhe φ und dessen Länge in Bezug auf den Meridian, für welchen die Ephemeride gilt, L ist , $+$ wenn B westlich, — wenn B östlich von jenem Meridiane liegt. Die mittlere Zeit der Beobachtung sei T, dann ist die Zeit der Ephemeride $= T + L = \tau$. Für diesen Zeitmoment nimmt man aus derselben die Rectascension, Declination, Parallaxe, den Radius und die Entfernungen der beiden Gestirne, die für den Mittelpunkt der Erde gelten; ich werde diese Grössen mit denselben Buchstaben bezeichnen, wie dies oben geschehen ist. Für dasselbe Moment sei auch $MZ = z$ und $MZP' = \mathfrak{A}$ die wahre Zenithdistanz und das wahre Azimut des Mondes; $SZ = \mathfrak{z}$ und $SZP' = \mathfrak{a}$ seien die gleichnamigen Grössen für ein anderes Gestirn, dessen wahrer Winkelabstand vom Monde $MS = D$ ist; der dem Bogen D im sphärischen Dreiecke MZS gegenüberliegende Winkel $MZS = E$ ist der Unterschied der Azimute der beiden Gestirne; die entsprechenden scheinbaren, für den Beobachtungsort geltenden Grössen bezeichne ich mit z', $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{a}'$, D' und E'.

Die Grösse z ist der Unterschied der Richtungen vom Mittelpunkte der Erde, C, zum Centrum des Mondes und zum Punkte Z, der unendlich weit ist; der Unterschied der Richtung vom Orte B zu jenen beiden Punkten ist von z verschieden, weil der Mond in endlicher Entfernung von uns ist; der Mond bleibt aber in der Ebene, welche durch seinen Mittelpunkt und die Linie CBZ' geht und muss sich von Z entfernen, weil B in der Richtung von C nach Z' liegt; $M_,$ bezeichne die Richtung, in welcher der Mond von B aus gesehen wird, dann ist $M_,Z = z_,$ die durch die Wirkung der Parallaxe geänderte Zenithdistanz des Mondes. Das Azimut ist von C aus gesehen MZP', vom Orte B aus hingegen $M_,ZP'$ und es ist einleuchtend, dass $M_,ZP'$ stets grösser sein wird als MZP'. — Durch die Strahlenbrechung wird aber der Punkt $M_,$ dem Zenithe Z wieder genähert; es erfolgt diese Wirkung im Verticalkreise des Mondes, sie lässt daher das Azimut $M_,ZP'$ ungeändert. Beichnet M' nunmehr die Richtung des Mondscentrums von B aus, so ist $M'Z = z'$ seine scheinbare Zenithdistanz, in welche z durch die Gesammtwirkung der Parallaxe und Strahlenbrechung übergegangen ist. — Für das andere Gestirn gelten dieselben Betrachtungen. Bei dem Monde ist die Wirkung der Parallaxe stets grösser, als die der Strahlenbrechung; für jedes andere Gestirn findet das Umgekehrte statt; die Gesammtwirkung der Parallaxe und Refraction auf die Zenithdistanz des Mondes kann nahe 55 Minuten betragen und hat ihr Maximum bei circa 75°, für das andere Gestirn wird der Betrag lediglich von dem der Wirkung der Refraction bestimmt, welche im Horizont ihr Maximum von circa 33 Minuten hat. Ich setze aber in dem Folgenden voraus, dass die Zenithdistanzen 85° nie beträchtlich übersteigen, denn bei so geringen Höhen der Gestirne wird sowohl die Messung der Distanz, als auch die Berechnung der Wirkung der Refraction unsicher; bei 85° Zenithdistanz beträgt die Refraction nahezu 10 Minuten. Bei dem Monde kann die Wirkung der Parallaxe auf das Azimut 12 Secunden betragen, bei jedem andern Gestirn übersteigt dieselbe nicht ein Zehntel der Secunde und bleibt daher hier unberücksichtigt.

Drücken wir die Summe der Aenderungen, welche z erleidet, um in z' überzugehen durch $\mathfrak{d}z$ aus und dem entsprechend die von $\mathfrak{z}$ und E durch $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}E$, so dass $z' = z + \mathfrak{d}z$, $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + \mathfrak{d}\mathfrak{z}$, $E' = E + \mathfrak{d}E$ und setzen $D' = D + x$ so können wir die beiden Grundgleichungen (I) schreiben

$$\cos D = \cos z \cos \mathfrak{z} + \sin z \sin \mathfrak{z} \cos E$$

$$\cos (D + x) = \cos (z + \mathfrak{d}\mathfrak{z}) \cos (\mathfrak{z} + \mathfrak{d}\mathfrak{z}) + \sin (z + \mathfrak{d}z) \sin (\mathfrak{z} + \mathfrak{d}\mathfrak{z}) \cos (E + \mathfrak{d}E)$$

Die rechte Seite der zweiten Gleichung können wir nach dem Taylor'schen Theorem in eine Reihe entwickeln. Es ist allgemein

$$F(z + \mathfrak{d}z, \mathfrak{z} + \mathfrak{d}\mathfrak{z}, E + \mathfrak{d}E) = F(z, \mathfrak{z}, E) + \mathfrak{d}z \left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}z}\right) + \mathfrak{d}\mathfrak{z} \left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}\mathfrak{z}}\right) + \mathfrak{d}E \left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}E}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{d}z^2}{2} . \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}z^2}\right) + \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{z}^2}{2} + \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}\mathfrak{z}^2}\right) + \frac{\mathfrak{d}E^2}{2} \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}E^2}\right) + \mathfrak{d}z\mathfrak{d}\mathfrak{z} \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}z\mathfrak{d}\mathfrak{z}}\right) + \mathfrak{d}\mathfrak{z}\mathfrak{d}E \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}\mathfrak{z}\mathfrak{d}E}\right) + \mathfrak{d}E\mathfrak{d}z \left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}E\mathfrak{d}z}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{d}z^3}{1.2.3} \left(\frac{\mathfrak{d}^3 F}{\mathfrak{d}z^3}\right) + \ldots\ldots$$

In unserem Falle ist

$$F(z + \mathfrak{d}z, \mathfrak{z} + \mathfrak{d}\mathfrak{z}, E + \mathfrak{d}E) = \cos (D + x)$$
$$\text{und } F(z, \mathfrak{z}, E) = \cos D$$

folglich:

$$\left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}z}\right) = - \sin z \cos \mathfrak{z} + \cos z \sin \mathfrak{z} \cos E = - \sin D \cos M$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}\mathfrak{z}}\right) = - \cos z \sin \mathfrak{z} + \sin z \cos \mathfrak{z} \cos E = - \sin D \cos S$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}F}{\mathfrak{d}E}\right) = - \sin z \sin \mathfrak{z} \sin E = - \sin D \sin z \sin M$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}z^2}\right) = - \cos D$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}\ \mathfrak{z}^2}\right) = - \cos D$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}E}\right) = \sin z \sin \mathfrak{z} \cos E$$

$$\left(\frac{\mathfrak{d}^2 F}{\mathfrak{d}z\mathfrak{d}\mathfrak{z}}\right) = \sin z \sin \mathfrak{z} + \cos z \cos \mathfrak{z} \cos E = \cos D - 2 \cos (z + \mathfrak{z}) \sin^2 \frac{E}{2}$$

$$\left(\frac{d^2F}{d\mathfrak{z}\,dE}\right) = -\sin z \cos \mathfrak{z} \sin E \quad = -\sin D \cos \mathfrak{z} \sin S$$
$$\left(\frac{d^2F}{dE\,dz}\right) = -\cos z \sin \mathfrak{z} \sin E = -\sin D \cos z \sin M$$
$$\left(\frac{d^3F}{dz^3}\right) = \sin D \cos M$$

wo die Buchstaben M nnd S gebraucht sind, um die Winkel im sphärischen Dreieck MZS zu bezeichnen, welche ihren Scheitel in diesen Punkten haben; dem entsprechend werde ich später die Buchstaben M' und S' verwenden. Demnach erhält man

$$\cos(D+x) = \cos D - dz \sin D \cos M - d\mathfrak{z} \sin D \cos S - dE \sin D \sin z \sin M$$
$$- \frac{dz^2}{2}\cos D - \frac{d\mathfrak{z}^2}{2}\cos D - \frac{dE^2}{2} \sin z \sin \mathfrak{z} \cos E$$
$$+ dz\,d\mathfrak{z}\left(\cos D - 2\cos(z+\mathfrak{z})\sin^2\frac{E}{2}\right) - dz\,dE \sin D \cos \mathfrak{z} \sin S - dE\,dz \sin D \cos z \sin M$$
$$+ \frac{dz^3}{1.2.3.}\sin D \cos M + \ldots\ldots$$

wobei die Grössen dz, $d\mathfrak{z}$, dE und x als in Theilen des Radius ausgedrückt zu verstehen sind, d. h. dass für dz u. s. w. eigentlich stehen sollte $dz \sin 1'' = \frac{dz}{206264{,}8}$. Bringt man $\cos D$ auf die linke Seite, setzt für $\cos(D+x) - \cos D$ den gleichwerthigen Ausdruck $-2\sin(D+\frac{x}{2})\sin\frac{x}{2}$, multiplicirt auf beiden Seiten mit -1, zieht die in $\cos D$ multiplicirten Glieder zusammen, setzt $\sin D$ als allgemeinen Factor heraus und dividirt auf beiden Seiten durch $\sin(D+\frac{x}{2})$, so ergiebt sich aus der obigen Gleichung die folgende:

$$2\sin\frac{x}{2} = \frac{\sin D}{\sin(D+\frac{x}{2})}\Big(dz \cos M + dz \cos S + dE \sin z \sin M + 2\left(\frac{dz - d\mathfrak{z}}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} D$$
$$+ 2\,dz\,d\mathfrak{z}\,\frac{\cos(z+\mathfrak{z})\sin^2\frac{E}{2}}{\sin D} + dz\,dE \cos\mathfrak{z}\sin S + dE\,dz \cos z \sin M + \frac{dE^2}{2}\,\frac{\sin z \sin\mathfrak{z}\cos E}{\sin D}$$
$$- \frac{dz^3}{1.2.3.}\cos M - \ldots\Big)$$

Die Glieder dritter Ordnung können fortgelassen werden; die Vernachlässigung der Summe aller würde in dem äussersten Falle, wenn der Mond in der kleinsten Entfernung von der Erde ist, gleichzeitig die beiden Gestirne in demselben Vertical stehen und der Mond circa 75° Zenithdistanz hat, in dem gesuchten x noch nicht einen Fehler von $\frac{1}{7}$ Secunde erzeugen. Schreiben wir nun $\frac{x}{2}$ für $\sin\frac{x}{2}$ und drücken die Grössen x, dz, $d\mathfrak{z}$ und dE im Folgenden wieder Bögen aus, so wird

$$x = \frac{\sin D}{\sin(D+\frac{x}{2})}\Big(dz \cos M + d\mathfrak{z}\cos S + dE \sin z \sin M + 2\sin 1''\left(\frac{dz - d\mathfrak{z}}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} D$$
$$+ 2\sin 1''\,\frac{\cos(z+\mathfrak{z})\sin^2\frac{E}{2}}{\sin D} + \sin 1''\, d\mathfrak{z}\,dE \cos\mathfrak{z}\sin S + \sin 1''\, dE\,dz \cos z \sin M$$
$$+ \sin 1''\, dE^2\,\frac{\sin z \sin \mathfrak{z}\cos E}{2 . \sin D}\Big)$$

Auch von den Gliedern zweiter Ordnung können einige fortgelassen werden, und die anderen sind nur unter Umständen von Bedeutung. Diejenigen, welche $\sin D$ im Nenner haben, könnten sehr gross werden, wenn D sehr klein ist; jedoch kommen in der Praxis Distanzen unter 10^0 nicht vor und die Ephemeriden nehmen solche auch gar nicht auf; $\frac{1}{\sin D}$ wird daher nie grösser als 6 sein. Demzufolge ist das Glied in $\mathfrak{d}E^2$ stets zu vernachlässigen, da der Betrag immer unter $\frac{1}{400}$ Secunde bleibt. Das Glied in $\mathfrak{d}\mathfrak{z}\mathfrak{d}E$ erreicht in dem äussersten Falle, wo das mit dem Monde verglichene Gestirn im Horizont steht, also $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ nahezu 2000 Secunden beträgt, noch nicht den Betrag von 0,1 Secunde und fällt daher auch fort. In der Praxis vermeidet man sogar, wenn irgend thunlich, Monddistanzen zu nehmen, wenn eines der beiden Gestirne mehr als 80^0 Zenithdistanz hat, denn nur ganz ausnahmsweise wird in solchem Falle eine sichere Messung gemacht werden können; bei 85^0 Zenithdistanz wird dieselbe selbstverständlich noch schwieriger. Auch die Reduction der Monddistanz wird dann unsicher, da die Wirkung der Strahlenbrechung für Zenithdistanzen über 85^0 nicht mehr auf einige Zehntel der Secunde genau berechnet werden kann, indem die Beträge verschieden ausfallen, je nach dem Gesetze der Abnahme der Temperatur mit zunehmender Höhe über dem Erdboden, welches man zu Grunde legt.

Das Glied in $\mathfrak{d}z\mathfrak{d}E$ wird ebenfalls nie von Bedeutung sein. Es ist $\mathfrak{d}z$ stets kleiner als $\pi \sin z$, wo π die Aequatoreal-Horizontalparallaxe bedeutet, folglich ist $\sin 1'' \pi\, \mathfrak{d}E \sin z \cos z \sin M = \sin 1'' \pi\, \mathfrak{d}E \frac{\sin 2z}{2} \sin M >$ $\sin 1'' \mathfrak{d}z\mathfrak{d}E \cos z \sin M$ Der Ausdruck auf der linken Seite hat aber sein Maximum für $z = 45^0$ und dieses Maximum selbst beträgt noch nicht 0,1 einer Secunde, um so mehr wird $\sin 1'' \mathfrak{d}z\mathfrak{d}E \cos z \sin M$ in jedem Falle zu vernachlässigen sein.

Die bis jetzt betrachteten Glieder kommen nie in Betracht, auch ihre Summe kann nie von Bedeutung werden; der Factor $\frac{\sin D}{\sin (D + \frac{x}{2})}$ in welchem $\frac{x}{2}$ dreissig Minuten nie übersteigt und D stets grösser als 10 Grad vorausgesetzt wird, schwankt um 1 herum und seine äussersten Gränzen sind $\frac{19}{20}$ und $\frac{21}{20}$. Derselbe ändert also in unserer Behauptung nichts.

Das Glied $2 \sin 1'' \mathfrak{d}z\, \mathfrak{d}\mathfrak{z} \frac{\sin^2 \frac{E}{2} \cos (z + \mathfrak{z})}{\sin D}$ ist immer unbedeutend, wenn E entweder sehr klein, oder sehr nahe $= 180^0$ ist. Für $E = 180^0$, wo dann $D = z + \mathfrak{z}$ ist, erreicht dieses Glied für die Werthe von $\mathfrak{z} = 32^0\, 46'$, $z = 24^0\, 29'$ und $D = 57^0\, 15'$ im Maximum noch nicht den Betrag von $\frac{1}{3}$

einer Secunde. Ist aber E nahe $=90^{0}$ und dabei $z=75^{0}$, $\mathfrak{z}=85^{0}$, so beträgt dasselbe gegen 10 Secunden, was auch nahezu der Maximalwerth dieses Gliedes ist. In den zumeist vorkommenden Fällen erreicht dieses Glied jedoch nur den Betrag von wenigen Zehnteln der Secunde, da $z+\mathfrak{z}$ in diesen Fällen von 90^{0} nicht viel verschieden ist. Das Glied $2\sin 1''\left(\frac{\mathfrak{d}z-\mathfrak{d}\mathfrak{z}}{2}\right)^2\operatorname{cotg} D$ kann sehr gross werden, denn $\mathfrak{d}z$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ haben stets entgegengesetzte Zeichen und $\mathfrak{d}z-\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ wird im Maximum fast 4000 Secunden betragen können; für $D=10^{0}$ wird daher der Werth dieses Gliedes fast 240 Secunden erreichen.

Von den Gliedern erster Ordnung bleibt nur das in $\mathfrak{d}E$ multiplicirte sehr klein und zwar unter 12 Secunden.

Die Gleichung für x wird also bedeutend kürzer; nach Fortlassung der immer unbedeutenden Glieder lauten sie jetzt:

$$x=\frac{\sin D}{\sin(D+\frac{x}{2})}\left(\mathfrak{d}z\cos M+\mathfrak{d}\mathfrak{z}\cos S+\mathfrak{d}E\sin M\sin z+2\sin 1''\left(\frac{\mathfrak{d}z-\mathfrak{d}\mathfrak{z}}{2}\right)^2\operatorname{cotg} D + \frac{2\sin 1''\sin^2\frac{E}{2}\cos(z+\mathfrak{z})}{\sin D}\right)\mathfrak{d}z\mathfrak{d}\mathfrak{z} \qquad \text{(XVI)}$$

Das x steht nicht explicite da und die Lösung der Aufgabe ist demnach keine vollständige zu nennen; vom analytischen Standpunkte aus mag man sie verwerfen; für die Praxis ist sie eben so gut wie eine vollständige und bequemer. Der Ausdruck in der Klammer ist der erste Näherungswerth von x, und dieser mit dem Factor $\frac{\sin D}{\sin(D+\frac{x}{2})}$ multiplicirt giebt das gesuchte x schon so genau, dass eine Wiederholung der Berechnung dieses Factors in der Regel nicht mehr erforderlich wird. Nur wenn die Distanz sehr klein und die Reduction selbst sehr gross ist, wird eine solche nothwendig werden können, aber die Rechnung ist so kurz und einfach, dass von dieser Seite her kein Einwand gegen die Methode gemacht werden darf.

Gehen wir von den beiden Grundgleichungen aus, in denen statt der wahren Grössen — Zenithdistanzen und Azimut — die scheinbaren stehen, während die Beziehungen zwischen diesen und jenen dieselben bleiben, also von den beiden Gleichungen:

$$\cos D'=\cos z'\cos\mathfrak{z}'+\sin z'\sin\mathfrak{z}'\cos E'$$

$$\cos(D'-\tfrac{x}{2})=\cos(z'-\mathfrak{d}\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{z}'-\mathfrak{d}\mathfrak{z})+\sin(z'-\mathfrak{d}z)\sin(\mathfrak{z}'-\mathfrak{d}\mathfrak{z})\cos(E'-\mathfrak{d}E)$$

und führen dieselbe Entwickelung durch, so erhalten wir, wie leicht zu übersehen,

$$x=\frac{\sin D'}{\sin(D'-\frac{x}{2})}\left(\cos M'\,\mathfrak{d}z+\cos S'\,\mathfrak{d}\mathfrak{z}+\sin M'\sin z'\,\mathfrak{d}E - 2\sin 1''\frac{(\mathfrak{d}z-\mathfrak{d}\mathfrak{z})}{2}\operatorname{cotg} D'-2\sin 1''\,\mathfrak{d}z\,\mathfrak{d}\mathfrak{z}\,\frac{\sin 2\frac{E'}{2}\cos(z'+\mathfrak{z}')}{\sin D'}\right) \qquad \text{(XVII)}$$

Man kann eine von diesen beiden Formeln zur Berechnung von x wählen; später wird sich zeigen, dass die Winkel M' und S' auch bei der Reduction der Distanz vom Rande auf den Mittelpunkt des Mondes und der Sonne gebraucht werden und daher die Formel XVII im Allgemeinen vorzuziehen ist. Welche Formel man aber auch gebrauchen mag, in jedem Falle reichen fünfstellige Logarithmentafeln zur strengen Berechnung von x aus; auch brauchen dabei die Winkel D, M, S, z und $\mathfrak{z}$ nicht genauer als auf die Zehntel der Minute bekannt zu sein; die Grössen $\mathfrak{d}z$, $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}E$ werden im Allgemeinen von derselben Genauigkeit sein müssen, mit welcher man die Reductionsgrösse x zu kennen wünscht. — Zunächst ist demnach anzugeben, wie die eben genannten Winkel mit der geforderten Genauigkeit zu ermitteln sind.

§ 5.

Der Unterschied der Rectascension und der Sternzeit der Beobachtung ist der Stundenwinkel; für den Mond heisse er t. Aus demselben, der Declination des Mondes und der Polhöhe des Beobachtungsortes werden die Zenithdistanz und das Azimut — welches immer von Süden nach Ost und West bis 180° gezählt wird — für dieses Gestirn gefunden aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{z} &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \\ -\sin \mathrm{z} \cos \mathfrak{A} &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t \\ \sin \mathrm{z} \sin \mathfrak{A} &= \cos \delta \sin t \end{aligned}$$

oder, wenn man den Hülfswinkel γ einführt, der dnrch die Gleichung gegeben ist:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}$$

aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t} \\ \operatorname{tg} \mathfrak{A} &= \frac{\operatorname{tg} t \cos \gamma}{\sin (\varphi - \gamma)} \\ \operatorname{tg} \mathrm{z} &= \frac{\operatorname{tg} (\varphi - \gamma)}{\cos \mathfrak{A}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII)}$$

Ganz auf demselben Wege erhält man für das andere Gestirn aus den entsprechenden Stücken die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z}$.

Will man die Formel (XVI) anwenden, so entnimmt man das D durch eine leichte Interpolation aus der Ephemeride und berechnet die Winkel M und S aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{M - S}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{1}{2} (\mathfrak{z} - \mathrm{z})}{\sin \frac{1}{2} (\mathrm{z} + \mathfrak{z})} \\ \operatorname{tg} \frac{M + S}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{E}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} (\mathfrak{z} - \mathrm{z})}{\cos \frac{1}{2} (\mathrm{z} + \mathfrak{z})} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIX)}$$

Dieselben könnte man bequemer erhalten aus den beiden Gleichungen:

$$\sin M = \frac{\sin E \sin \mathfrak{z}}{\sin D}$$

$$\text{und} \sin S = \frac{\sin E \sin z}{\sin D}$$

Wenn jedoch M nahe an 90^0 ist, so ist der Uebergang vom Sinus auf den Cosinus ungenau und das grösste Glied der Reductionsformel, nämlich $\cos M \mathfrak{d} z$, wird fehlerhaft werden können, daher sich diese beiden Gleichungen im Allgemeinen nicht empfehlen lassen.

Da nun die Grössen z, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, M und S alle durch die Tangente gefunden worden, so wird, bei strenger Anwendung fünfstelliger Logarithmentafeln, unter allen Umständen auch das Zehntel der Minute bei denselben zu verbürgen sein.

Um die Formel XVII anzuwenden, müssen wir die scheinbaren Winkelgrössen kennen. Es ist aber $z' = z + \mathfrak{d}z = z + \mathfrak{d}_\pi z + \mathfrak{d}_R z_,$; $\mathfrak{d}_\pi z$ ist die Aenderung der wahren Zenithdistanz durch die Parallaxe und $\mathfrak{d}_R z_,$ die Aenderung von $z + d_\pi z = z_,$ durch die Strahlenbrechung. Dem analog ist $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + \mathfrak{d}_\pi \mathfrak{z} + \mathfrak{d}_R \mathfrak{z}_,$ und $E' = E + \mathfrak{d}_\pi E$ zu verstehen. — Die Wirkungen der Parallaxe auf Zenithdistanz und Azimut werden auf folgende Weise ermittelt. Es sei p die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde, ausgedrückt in Theilen des $= a = 1$ angenommenen Radius des Aequators, und φ' die geocentrische Breite des Beobachtungsortes, so wird, wenn wir mit Bessel die Abplattung $= \frac{1}{299,153}$ annehmen, φ' am bequemsten gefunden aus der Gleichung

$$tg\, \varphi' = \frac{b^2}{a^2}\, tg\, \varphi$$

wo b die halbe kleine Achse des als Ellipse betrachteten Meridians bedeutet und $\log \frac{b^2}{a^2} = 9{,}9970916$ ist; p erhält man mit für unseren Zweck völlig ausreichender Genauigkeit aus der Formel

$$\log p = 9{,}999275 + 0{,}000727 \cos 2\varphi \text{ [6])}$$

Nennen wir r die Entfernung des Mondes vom Centrum der Erde und r' die vom Beobachtungsorte, so ist $\frac{1}{r} = \sin \pi$; der dem Beobachtungsorte entsprechende Winkelhalbmesser des Mondes ρ' ist gegeben

6) Im Berliner Jahrbuch für 1852 und in den Tables de la lune von Hansen ist eine Tafel für φ und $\log \rho$ gegeben, aus der man diese Grössen fast ohne Rechnung entnimmt; es ist zu wünschen, dass bei einer neuen Ausgabe der Schumacher'schen Hülfstafeln, dieses Täfelchen mit aufgenommen würde.

durch die Gleichung $\sin\rho' = \sin\rho\,\frac{r}{r'}$, oder eben so genau durch $\rho' = \rho\,\frac{r}{r'}$ . .
Dann findet man $\mathfrak{A}'$ aus der Gleichung:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \frac{p \sin\pi \,.\, (\varphi - \varphi') \sin\mathfrak{A}}{\sin z} \qquad (\mathrm{XX^a})$$

oder, wenn z sehr klein ist, aus der strengen Formel:

$$tg\,(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}) = \frac{\dfrac{p \,.\, \sin\pi \,.\, \sin(\varphi - \varphi') \sin\mathfrak{A}}{\sin z}}{1 - \dfrac{p \sin\pi \,.\, \sin(\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}}{\sin z}}; \qquad (\mathrm{XX^b})$$

$z_, - z = \mathfrak{d}\pi z$ aus der Formel:

$$tg\,(z_, - z) = \frac{\mathrm{p} \sin\pi \sin\bigl(z - (\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}\bigr)}{1 - \mathrm{p} \sin\pi \cos\bigl(z - (\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}\bigr)} \qquad (\mathrm{XXI})$$

und endlich ρ' aus

$$\rho' = \frac{r}{1 - p \sin\pi \cos\bigl(z - (\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}\bigr)} \qquad (\mathrm{XXII})$$

Die elegante von Enke gegebene Ableitung dieser Formeln aus den drei Grundgleichungen:

$$r' \sin z_, \cos\mathfrak{A}' = r \sin z \cos\mathfrak{A} - p \sin(\varphi - \varphi')$$
$$r' \sin z_, \sin\mathfrak{A}' = r \sin z \sin\mathfrak{A}$$
$$r' \cos z_, \qquad = r \cos z - p \cos(\varphi - \varphi')$$

findet sich in Brünnow's sphärischer Astronomie, 2. Auflage, Seite 155 und ich habe sie daher hier nicht wiederholen wollen. In Bezug auf die Gleichung (XXII) bemerke ich nur, dass dieselbe erhalten wird, wenn man die daselbst gegebenen beiden Gleichungen:

$$\frac{r'}{r} \sin(z_, - z) = p \sin\pi \sin\bigl(z - (\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}\bigr)$$
$$\frac{r'}{r} \cos(z_, - z) = 1 - p \sin\pi \cos\bigl(\mathrm{z} - (\varphi - \varphi') \cos\mathfrak{A}\bigr)$$

deren Division durch einander auf $tg\,(\mathrm{z}_, - \mathrm{z})$ führt, quadrirt, addirt und dann auf beiden Seiten die Wurzel auszieht.

Für das andere Gestirn haben wir nur $\mathfrak{d}\pi\mathfrak{z}$ zu berechnen; bezeichnen wir die Parallaxe desselben mit π', so ist

$$\mathfrak{d}\pi\mathfrak{z} = \pi' \sin\mathfrak{z}. \qquad (\mathrm{XXIII})$$

Die Veränderungen der Zenithdistanzen $\mathrm{z}_,$ und $\mathfrak{z}_,$ durch die Strahlenbrechung werden berechnet mit Hülfe der Bessel'schen Refractionstafeln, welche in den Tabulis Regiomontanis pag. 558 u. ff. gegeben und auch in die Sammlung der Hülfstafeln von Schumacher aufgenommen sind. Es ist nämlich

$$\mathfrak{d}_R \mathfrak{z}_, = \alpha \beta^A \gamma^\lambda \operatorname{tg} \mathfrak{z}' \qquad \text{(XXIV)}$$

in welcher Formel α, A und λ von der scheinbaren Zenithdistanz abhängende und mit derselben sich nur sehr langsam ändernde Grössen sind, β durch den Stand des Barometers und der Temperatur des Quecksilbers in demselben und endlich γ durch die Temperatur der Luft am Beobachtungsorte bestimmt werden. Diese Tafeln haben die scheinbare Zenithdistanz zum Argumente, die Grösse, welche wir suchen. Für unseren Zweck wird es aber meist schon ausreichen, wenn wir zur Berechnung von $\mathfrak{d}_R \mathfrak{z}_,$ die der Zenithdistanz $\mathfrak{z}_,$ entsprechende mittlere Refraction von $\mathfrak{z}_,$ abziehen und mit der so erhaltenen, angenähert richtigen, scheinbaren Zenithdistanz ($\mathfrak{z}'$) in die Tafeln eingehen. In Bessel's astronomischen Untersuchungen, Band I, und in der oben citirten Abhandlung von Bessel über die Berechnung der Länge aus Monddistanzen, finden sich jedoch Tafeln, welche die wahre Zenithdistanz — hier $\mathfrak{z}_,$ — zum Argumente haben und es würde den Rechnern sehr gedient sein, wenn auch diese letzteren Tafeln in der Schumacher'schen Sammlung bei einer späteren Ausgabe einen Platz fänden.

Ganz auf dieselbe Weise berechnet man $\mathfrak{d}_R \mathfrak{z}_{,}$.

Haben wir $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'$ und E' gefunden, so werden aus diesen Grössen M' und S' berechnet, ganz analog wie die Winkel M und S aus $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{z}$ und E nach der Formel (XIX) gefunden werden.

Zur Anwendung der Formel (XVII) bedürfen wir nun noch der scheinbaren Distanz D' — des Winkelabstandes des Sterns oder des Mittelpunktes der Sonne vom Mittelpunkte des Mondes. Diese Grösse wird aber nicht unmittelbar durch die Messung erhalten; gemessen wird, in dem Falle wo es sich um die Entfernung eines Sterns vom Monde handelt, der kürzeste Abstand des Sterns von dem erleuchteten Theile der in Folge der Wirkung der Strahlenbrechung nicht mehr kreisförmigen Scheibe des Mondes, und in dem Falle, wo es sich um die Entfernung der Sonne vom Monde handelt, der kürzeste Abstand der nächsten Ränder der nicht mehr kreisförmigen Mond- und Sonnenscheiben von einander. Der grösste Kreis, in welchem dieser kürzeste Abstand liegt, fällt nicht mit dem grössten Kreise zusammen, welcher durch die Mittelpunkte und den Beobachtungsort geht. Letzteres würde nur dann eintreffen, wenn die Scheiben Kreise wären. Es wird nun allgemein angenommen, dass durch die Wirkung der Strahlenbrechung die kreisförmigen Umschreibungen des Mondes und der Sonne in elliptische übergehen; strenger, dass die Figur der Umschreibung aus zwei halben Ellipsen besteht, die eine gemeinschaftliche grosse Achse haben; die kleine Achse der oberen Ellipse ist um den Unterschied der Refractionen für den Mittelpunkt und den oberen Rand kleiner als die grosse Achse, und die kleine Achse der unteren Ellipse um den Unterschied der Refractionen für den unteren Rand und den Mittelpunkt. Bezeichnet man den in Betracht kommenden Unterschied für die Mondscheide mit $\Delta\rho'$, für die Sonnenscheibe mit $\Delta\rho'$ und nennt den unmittelbar gemessenen kürzesten Abstand D'', so ist

$$D' = D'' \mp (\rho' - \Delta\rho' \cos^2 M') \qquad (\mathrm{XXV^a})$$

wenn die Distanz eines Sternes vom Monde gesucht wird; das Zeichen — gilt für den entfernteren, das Zeichen + für den näheren Rand; wird die Distanz der Sonne vom Monde gesucht, so ist

$$D' = D'' + \rho' - \Delta\rho' \cos^2 M' + \rho'' - \Delta\rho'' \cos^2 S'. \qquad (\mathrm{XXV^b})$$

Welchen Fehler man bei Anwendung dieser beiden letzten Formeln im äussersten Falle begehen kann, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden.

§ 6.

Es sei Fig. III C der Mittelpunkt der kreisförmigen Scheibe des Mondes oder der Sonne, B ein Punkt des Randes; die Zenithdistanz von C heisse z die von B z'; der grösste Kreis der durch C, B und den Beobachtungsort gelegt ist, mache mit dem Vertical von C den Winkel M, welcher $= o$ ist, wenn B dem oberen Rande der Scheibe entspricht; der Radius der Scheibe sei ρ. Dann ist

$$\cos z' = \cos z \cos \rho + \sin z \sin \rho \cos M$$

Da ρ im äussersten Falle 1000 Secunden, oder in Theilen des Radius $\frac{1}{206}$ beträgt, so können wir mit ausreichender Annäherung $\cos \rho = 1 - \frac{\rho^2}{2}$ und $\sin \rho = \rho$ setzen und erhalten somit

$$\cos z' = \cos z \left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) + \rho \sin z \cos M \qquad \text{oder}$$

$$\cos z' - \cos z = \rho \sin z \cos M - \frac{\rho^2}{2} \cos z \qquad \text{und nach be-}$$

kannter Transformation

$$\Delta z = z' - z = \frac{1}{\sin\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)} \left(-\rho \sin z \cos M + \frac{\rho^2}{2} \cos z\right)$$

und da

$$\frac{1}{\sin\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)} = \operatorname{cosec} z - \frac{\Delta z}{2} \operatorname{cotg} z \operatorname{cosec} z + \frac{\Delta z^2}{8} \left(1 + 2 \operatorname{cotg} \frac{2}{z}\right) \operatorname{cosec} z \text{ ist,}$$

so wird

$$\Delta z = \left(\operatorname{cosec} z - \frac{\Delta z}{2} \operatorname{cotg} z \operatorname{cosec} z + \frac{\Delta z^2}{8}(1 + 2 \operatorname{cotg}^2 z) \operatorname{cosec} z\right)\left(-\rho \sin z \cos M + \frac{\rho^2}{2} \cos z\right)$$

Die Grösse Δz ist von der Ordnung von ρ, vernachlässigen wir daher bei der letzteren die Glieder von höherer Ordnung als der zweiten, so dürfen wir auch die Glieder, welche in $\Delta z \rho^2$ oder $\Delta z^2 \rho$ multiplicirt sind, vernachlässigen; führen wir daher die angedeutete Multiplication auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung aus und lassen die Glieder der dritten Ordnung fort, so kommen wir, nach Zusammenziehung der Glieder in Δz, zu der folgenden Gleichung:

$$\Delta z \left(1 - \frac{\rho}{2} \operatorname{cotg} z \cos M\right) = -\rho \cos M + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z$$

welche, wenn wir durch den Factor von Δz auf beiden Seiten dividiren, übergeht in

$$\Delta z = z' - z = -\rho \cos M + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M$$

aus welcher folgt, dass

$$z' = z - \rho \cos M + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M \qquad \text{(XXVI)}$$

Die folgende Untersuchung bezweckt die Bestimmung des Einflusses der Refraction auf die Figur der äusseren Umschreibung des Mondes oder der Sonne; bei einer Zenithdistanz von 5^0 ist dieser Einfluss verschwindend, es wird daher die Cotangente von z nie grösser als 11,5 vorausgesetzt. Das letzte Glied auf der rechten Seite beträgt für $M = 90^0$ und $\rho = 1000'' = \frac{1}{206}$, $28'',8$; die vernachlässigten Glieder werden daher voraussichtlich noch nicht ein Zehntel einer Bogensecunde betragen. Führt man die Entwickelung bis zu den Gliedern dritter Ordnung inclusive wirklich aus, so ergiebt sich, dass das Glied in ρ^3 noch nicht 0,003 einer Secunde ausmacht. Es wird demnach der Werth von z' durch die Gleichung (XXVI) vollkommen genau bestimmt. Ich bemerke nur noch, dass, wenn z', z und ρ Bögen bedeuten, das letzte Glied der Gleichung noch den Factor $\frac{1}{206265} = \sin 1''$ erhalten muss.

Bezeichnet β den Unterschied der Azimute des Mittelpunkts des Mondes und des Punktes am Rande, so haben wir zu seiner Bestimmung die Gleichung

$$\sin z' \sin \beta = \sin M \sin \rho$$

aus welcher mit Berücksichtigung der eben gefundenen Relation zwischen z' und z, der Winkel β mit ausreichender Genauigkeit gefunden wird

$$\beta = \frac{\rho \sin M}{\sin z}(1 + \rho \cos M \operatorname{cotg} z)$$

Wird der Mittelpunkt des Mondes durch die Strahlenbrechung um die Grösse $\alpha\beta^A\gamma^\lambda \operatorname{tg} z$ dem Zenithe genähert, so wird ein Punkt seines Randes um die Grösse $\alpha'\beta^{A'}\gamma^{\lambda'} \operatorname{tg} z' = \alpha'\beta'\gamma^{\lambda'} \operatorname{tg}(z - \rho \cos M + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M)$ dem Zenithe näher gebracht. Setzen wir $\alpha\beta^A\gamma^\lambda = k$ und $\alpha'\beta^{A'}\gamma^{\lambda'} = k'$, so sind k und k' kleine Grössen, welche im Maximum noch nicht 58″ betragen und von der Zenithdistanz abhängen, sich aber mit derselben nur sehr langsam ändern. In unserem Falle ändern sich die Zenithdistanzen selbst nur um höchstens 34 Minuten und es ist daher erlaubt, die Aenderung von k für ein solches Intervall der Aenderung der Zenithdistanz proportional zu setzen. Es bezeichne $\varkappa$ die Aenderung von k für die Aenderung von 1 Secunde in der Zenithdistanz; für $z = 85^0$ ist $\varkappa = 0{,}00052$. Entspricht nun k der Zenithdistanz des Mittelpunktes des Mondes, so ist das der Zenithdistanz eines Punktes seines Randes entsprechende

$$\begin{aligned} k' &= k + \varkappa(z - z') \\ &= k + \varkappa\rho \cos M - \varkappa \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M \end{aligned}$$

wo wir das letzte Glied um so mehr fortlassen können, da cotg z für grosse Zenithdistanzen, die bei unserer Untersuchung nur in Betracht kommen werden, klein ist. Es ist somit in allen Fällen mit ausreichender Genauigkeit zu setzen

$$k' = k + \varkappa\rho \cos M.$$

In der Figur IV bedeutet ***FGIB*** die kreisförmige Scheibe; die einzelnen Punkte derselben werden durch die Strahlenbrechung ungleich gehoben und ***F'G'I'B'*** bezeichne die Figur, in welche der Kreis durch die Wirkung der Refraction übergegangen ist. Der Radius, welchen man in Anwendung zu bringen hat, um die gemessene Distanz eines Sterns vom Punkte ***B'*** auf den Mittelpunkt ***C'*** des Mondes zu reduciren, ist daher $B'C' = \rho_{,}$. Die Zenithdistanz von ***C'*** ist $z - k \operatorname{tg} z$, die von ***B'*** ist $z' - k' \operatorname{tg} z'$; der Winkel ***B'ZC'*** ist β. Für das sphärische Dreieck ***BCZ*** gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\rho &= \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos\beta \\ \sin\rho \cos M &= \sin z \cos z' - \cos z \sin z' \cos\beta \\ \sin\rho \sin M &= \sin z' \sin\beta \end{aligned}$$

und für das sphärische Dreieck ***B'C'Z***:

$$\cos\rho_{,} = \cos(z - k\,\mathrm{tg}\,z)\cos(z' - k'\,\mathrm{tg}\,z') + \sin(z - k\,\mathrm{tg}\,z)\sin(z' - k'\,\mathrm{tg}\,z')\cos\beta$$
$$\sin\rho_{,}\cos M' = \sin(z - k\,\mathrm{tg}\,z)\cos(z' - k'\,\mathrm{tg}\,z') - \cos(z - k\,\mathrm{tg}\,z)\sin(z' - k'\,\mathrm{tg}\,z')\cos\beta$$
$$\sin\rho_{,}\sin M' = \sin(z' - k'\,\mathrm{tg}\,z')\sin\beta$$

Entwickelt man die rechten Seiten der letzten 3 Gleichungen, indem man setzt: $\cos k\mathrm{tg}z = 1 - \frac{k^2\mathrm{tg}z^2}{2}$, $\sin k\mathrm{tg}z = k\mathrm{tg}z$, $\cos k'\,\mathrm{tg}\,z' = 1 - \frac{k'^2\,\mathrm{tg}^2\,z'}{2}$, $\sin k'\,\mathrm{tg}\,z' = k'\mathrm{tg}\,z'$, $\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$, $\sin\beta = \beta$ und die Glieder der 3ten und höheren Ordnung fortlässt, so erhält man für die letzten drei Gleichungen die folgenden:

$$\cos\rho_{,} = \cos\rho + \sin(z - z')\,(k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z') - \tfrac{1}{2}(k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z')^2$$
$$\sin\rho_{,}\cos M' = \sin\rho\cos M - (k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z')$$
$$\sin\rho_{,}\sin M' = \sin\rho\sin M - k'\sin z'\,\beta$$

Setzt man hier $\cos\rho_{,} = 1 - \frac{\rho_{,}^2}{2}$ und $\sin\rho_{,} = \rho_{,}$; dem entsprechend $\cos\rho = 1 - \frac{\rho^2}{2}$, und $+\sin\rho = \rho$; entwickelt $\sin(z - z')$ uud $\sin z'$ ebenfalls bis zu den Gliedern zweiter Ordnung inclusive, so gehen die letzteren Gleichungen endlich über in die folgenden:

$$\begin{aligned} \rho_{,}^2 &= \rho^2 - 2\rho\cos M(k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z') + (k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z')^2 \\ \rho_{,}\cos M' &= \rho\cos M - (k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z') \\ \rho_{,}\sin M' &= \rho\sin M(1 - k') \end{aligned} \qquad \text{(XXVII)}$$

Der Ausdruck $k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z'$, wenn wir in denselben die oben gefundenen Werthe für k' und z' einführen, lautet:

$$k\,\mathrm{tg}\,z - (k + \rho\varkappa\cos M)\,\mathrm{tg}\left(z - \rho\cos M + \frac{\rho^2}{2}\mathrm{cotg}\,z\sin^2 M\right)$$

Er hat ein Maximum für $M = o$ welches wir mit $\Delta\rho$ bezeichnen wollen, also

$$\Delta\rho = k\,\mathrm{tg}\,z - (k + \varkappa\rho)\,\mathrm{tg}\,(z - \rho)$$

Für eine Zehithdistanz von 85^0 und $\rho = 1000$ Secunden ist $\Delta\rho$ höchstens $= 27''$; für kleinere Zenithdistanzen wird es rasch kleiner, und für $z = 45^0$ beträgt es nur noch etwa 1 Secunde. Für $M = 90^0$ ist dagegen $k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z'$ nur um ein Glied zweiter Ordnung von Null verschieden. Es liegt daher nahe, diesen Unterschied von dem Winkel M abhängig zu machen und zu setzen

$$k\,\mathrm{tg}\,z - k'\,\mathrm{tg}\,z' = \Delta\rho\cos M.$$

Entwickeln wir $\mathrm{tg}\,(z - \rho)$ in eine Reihe, nämlich:

$$\mathrm{tg}\,(z - \rho) = \mathrm{tg}\,z - \rho\,(1 + \mathrm{tg}^2 z) + \rho^2\,\mathrm{tg}\,z\,(1 + \mathrm{tg}^2 z)\ldots\ldots$$

so wird

$$\Delta\rho \cos M = -\rho x \cos M \operatorname{tg} z + (k + \rho x)\,\rho \cos M\,(1 + \operatorname{tg}^2 z)$$
$$- (k + x\rho)\,\rho^2 \cos M \operatorname{tg} z\,(1 + \operatorname{tg}^2 z) + \ldots.$$

Entwickeln wir ebenso $\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg}\left(z - \rho \cos M + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M\right)$ in eine Reihe und führen die Multiplication derselben mit $k' = k + \rho x \cos M$ aus, so erhalten wir für den Unterschied $k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z'$ die folgende Reihe.

$$k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z' = -\rho x \cos M \operatorname{tg} z + (k + \rho x \cos M)\left(\rho \cos M - \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M\right)(1 + \operatorname{tg}^2 z)$$
$$- (k + \rho x \cos M)\left(\rho \cos M - \frac{\rho^2}{2} \operatorname{cotg} z \sin^2 M\right)^2 \operatorname{tg} z\,(1 + \operatorname{tg}^2 z)$$

Vergleichen wir die beiden Reihen für $\Delta\rho \cos M$ und $k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z'$ mit einander, so ergiebt sich, dass die Glieder in ρ in beiden gleich sind, der Unterschied beider Reihen wird also nur noch in ρ^2 multiplicirte Glieder enthalten; ziehen wird dieselben zusammen, so erhalten wir den Unterschied

$$\Delta\rho \cos M - (k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z') = \rho^2 (1 + \operatorname{tg}^2 z)\left(\cos M (1 - \cos M)(x - k \operatorname{tg} z) + k \sin^2 M \operatorname{cotg} z\right)$$

Dieser Unterschied hat ein Maximum für $M = 60^0$, welches für $z = 85^0$ und $\rho = 1000$ Secunden nur etwa $\frac{1}{3}$ einer Secunde beträgt. Für kleinere Zenithdistanzen wird dieses Maximum sehr rasch kleiner und für $z = 80^0$ und $\rho = 1000''$ erreicht dasselbe nicht mehr $\frac{1}{16}$ einer Secunde. Es wird also, wenn wir für $k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z'$ den Werth $\Delta\rho \cos M$ gebrauchen, letzterer um $\frac{1}{3}$ einer Secunde fehlerhaft sein können und dieser Fehler kann mit seinem vollen Betrage in der schliesslich erhaltenen scheinbaren Distanz D' stehen bleiben. Wenn man jedoch bedenkt, dass die Messung von Monddistanzen sehr unsicher ist, wenn eines der beiden Gestirne nur 5^0 über dem Horizont steht, so wird man einen in der Berechnung dieser Messung übrigbleibenden Fehler von köchstens $\frac{1}{3}$ einer Secunde wohl übersehen dürfen. Sollte jedoch die äusserste Strenge der Rechnung erforderlich werden, so steht dem nichts im Wege, dass man den Unterschied von $\Delta\rho \cos M - (k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z')$ nach obiger Formel ermittelt.

Setzen wir nun für $k \operatorname{tg} z - k' \operatorname{tg} z'$ in den Gleichungen XXVII $\Delta\rho \cos M$ so gehen dieselben über in die folgenden:

$$\rho_{,}^2 = \rho^2 - 2\,\rho\Delta\rho \cos^2 M + \Delta\rho^2 \cos^2 M$$
$$\rho_{,} \cos M' = (\rho - \Delta\rho) \cos M$$
$$\rho_{,} \sin M' = \rho \sin M\,(1 - k')$$

Für die erste Gleichung können wir auch schreiben:

$$\rho_{,}^{2} = (\rho - \varDelta\rho \cos^2 M)^2 + \varDelta\rho^2 \cos^2 M \sin^2 M$$
$$= (\rho - \varDelta\rho \cos^2 M)^2 \left(1 + \left(\frac{\varDelta\rho \sin M \cos M}{\rho - \varDelta\rho \cos^2 M}\right)^2\right)$$

und wenn wir die Wurzel auf beiden Seiten ausziehen, so erhalten wir:

$$\rho_{,} = (\rho - \varDelta\rho \cos^2 M)\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varDelta\rho \sin M \cos M}{\rho - \varDelta\rho \cos^2 M}\right)^2\right)$$

Es ist aber $\frac{1}{2}\left(\frac{\varDelta\rho \sin M \cos M}{\rho - \varDelta\rho \cos^2 M}\right)^2$ im Maximum noch unter 0,0001, wir werden daher $\rho_{,}$ stets auf das Zehntel der Secunde richtig erhalten, auch wenn wir dieses quadratische Glied vernachlässigen. Somit erhalten wir schliesslich

$$\rho_{,} = \rho - \varDelta\rho \cos^2 M.$$

Betrachten wir nun die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\rho_{,}^2 \sin^2 M'}{a^2} + \frac{\rho_{,}^2 \cos^2 M'}{b^2} = 1$$

Die Abplattung derselben $\frac{a-b}{a}$ sei μ. Drücken wir $\rho_{,}$ durch μ und a aus, so ergiebt sich:

$$\rho_{,} = a - (a - b) \cos^2 M'$$

wobei das Quadrat der Abplattung vernachlässigt ist. Es ist aber in unserem Falle $a = \rho$ und $a - b = \varDelta\rho$ folglich wird

$$\rho_{,} = \rho - \varDelta\rho \cos^2 M'$$

Wir könnten also die durch die Strahlenbrechung veränderte Figur der Mond- oder Sonnenscheibe als eine der Ellipse sehr nahe kommende ansehen, wenn wir den Winkel M' mit M vertauschen dürften. Für nicht sehr grosse Zenithdistanzen wird $\varDelta\rho$ so klein, dass wir durch Vertauschung von M mit M' in der That keinen irgend erheblichen Fehler in $\rho_{,}$ begehen werden, da, wie wir sogleich sehen werden, M und M' höchstens um 46 Minuten von einander verschieden sind. Somit erscheint also die Annahme, dass die durch die Refraction veränderte Figur der Mond- und Sonnenscheibe eine Ellipse ist, im Allgemeinen gerechtfertigt. Den Unterschied M' — M finden wir aus der zweiten Gleichung:

$$\rho' \cos M' = \cos M (\rho - \varDelta\rho)$$

Wenn wir auf der linken Seite durch ρ' und auf der rechten durch $\rho - \varDelta\rho \cos^2 M$ dividiren, so wird

$$\cos M' = \cos M - \cos M \sin^2 M \left(\frac{\varDelta\rho}{\rho} + \frac{\varDelta\rho^2}{\rho^2} \cos^2 M\right)$$

oder

$$\cos M - \cos M' = 2 \sin \frac{M' - M}{2} \sin \frac{M' + M}{2} = \cos M \sin^2 M \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\rho^2}{\rho^2} \cos^2 M \right)$$

aus welcher sich ergiebt, wenn wir nur das erste Glied suchen,

$$M' = M + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2M$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat ein Maximum für $M = 45^0$; für $z = 85^0$ und $\rho = 1000$ ist $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}027$; demnach sind M' und M höchstens um 46 Minuten von einander verschieden. Vertauschen wir daher bei der Berechnung von ρ den Winkel M mit M', so würden wir im äussersten Falle ρ nur um $\frac{1}{3}$ einer Secunde fehlerhaft erhalten können. Aus dieser Gleichung folgt aber, dass

$$M = M' - \tfrac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2M$$

im zweiten Glied der rechten Seite können wir nun ohne Weiteres für $2M$ schreiben $2M'$; hierdurch kann der Winkel M im Maximum allerdings um 36 Secunden fehlerhaft ausfallen, welcher Fehler jedoch gleich Null zu achten ist, indem er das gesuchte ρ, noch nicht um ein Hundertstel einer Secunde ändert. Es ist demnach schliesslich

$$\rho' = \rho - \Delta\rho \cos^2 \left(M' - \tfrac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2M'\right)$$

Wir würden hiemit die Frage als erledigt ansehen dürfen, wenn die Entfernung des Sterns vom Punkte B' gemessen wäre, wie wir oben voraussetzten. Der Bogen grössten Kreises, in welchem der kürzeste Abstand des Sterns vom elliptischen Rande des Mondes liegt, trifft den Rand aber nicht im Punkte B' sondern in einem andern. In der Figur V bezeichne $F'G'I'$ die der Ellipse sehr nahe kommende Umschreibung der Mondscheibe, P' einen Punkt derselben, dessen Zenithdistanz $z_,'$ ist; S' den Ort des Sterns, dessen Zenithdistanz $= \mathfrak{z}'$ ist; die Distanz des Sterns vom Punkte P' sei D'', der Unterschied der Azimute des Sterns und des Mittelpunktes des Mondes sei E, der Unterschied der Azimute des Punktes P' und des Mondcentrums sei β; endlich sei Winkel $ZC'P' = \mathfrak{M}'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos D'' &= \cos \mathfrak{z}' \cos z_,' + \sin \mathfrak{z}' \sin z_,' \cos (E - \beta) \\ &= \cos \mathfrak{z}' \cos z_,' + \sin \mathfrak{z}' \sin z_,' \cos E \cos \beta + \sin \mathfrak{z}' \sin z_,' \sin E \sin \beta \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \cos z_,' &= \cos z \cos \rho_, + \sin z \sin \rho_, \cos \mathfrak{M}' \\ \sin z'_, \cos \beta &= \sin z \cos \rho_, - \cos z \sin \rho_, \cos \mathfrak{M}' \\ \sin z'_, \cos \beta &= \sin \rho_, \sin \mathfrak{M}' \end{aligned}$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung für $\cos D''$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos D'' = \cos \mathfrak{z}' \,(\cos z \cos \rho_{,} + \sin z \sin \rho_{,} \cos \mathfrak{M}')\\ + \sin \mathfrak{z}' \cos E\,(\sin z \cos \rho_{,} - \cos z \sin \rho_{,} \cos \mathfrak{M}')\\ + \sin \rho_{,} \sin \mathfrak{M}' \sin \mathfrak{z}' \sin E\end{aligned}$$

Nehmen wir von dem Ausdruck auf der rechten Seite die Ableitung nach $\mathfrak{M}'$, setzen dieselbe $= o$, so bestimmt diese Gleichung denjenigen Werth von $\mathfrak{M}'$, für welchen die Entfernung des Sterns vom Mondrande ein Minimum oder Maximum wird. Die Grössen $\mathfrak{z}'$, z und E sind constant, während $\rho_{,}$ eine Function von $\mathfrak{M}'$ ist. Wir gelangen dadurch zu der folgenden Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&-(\cos z \cos \mathfrak{z}' + \sin z \sin \mathfrak{z}' \cos E) \sin \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}\\ &+(\sin z \cos \mathfrak{z}' - \cos z \sin \mathfrak{z}' \cos E) \cos \mathfrak{M}' \cos \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}\\ &-(\sin z \cos \mathfrak{z}' - \cos z \sin \mathfrak{z}' \cos E) \sin \mathfrak{M}' \sin \rho_{,}\\ &+\sin \mathfrak{z}' \sin E \cos \mathfrak{M}' \sin \rho_{,}\\ &+\sin \mathfrak{z}' \sin E \sin \mathfrak{M}' \cos \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}\end{aligned}\right\} = o$$

Betrachten wir aber das sphärische Dreieck $ZC'S$, in welchem die Seite $C'S'$ mit $\mathfrak{D}$ und der Winkel $ZC'S'$ mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden mögen; für dasselbe bestehen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}\cos z \cos \mathfrak{z}' + \sin z \sin \mathfrak{z}' \cos E &= \cos \mathfrak{D}\\ \sin z \cos \mathfrak{z}' - \cos z \sin \mathfrak{z}' \cos E &= \sin \mathfrak{D} \cos \mathfrak{M}\\ \sin z \sin E &= \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{M}\end{aligned}$$

Setzen wir diese constanten Grössen in die eben entwickelte Bedingungs-Gleichung ein, so lautet dieselbe

$$o = \left\{\begin{aligned}&-\cos \mathfrak{D} \sin \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'} + \sin \mathfrak{D} \cos \mathfrak{M} \cos \mathfrak{M}' \cos \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'} + \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{M} \sin \mathfrak{M}' \cos \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}\\ &-\sin \mathfrak{D} \cos \mathfrak{M} \sin \mathfrak{M}' \sin \rho_{,} + \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{M} \cos \mathfrak{M}' \sin \rho_{,}\end{aligned}\right.$$

Man übersieht leicht, dass diese letztere sich umformen lässt in die folgende

$$-\cos \mathfrak{D} \sin \rho_{,} \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'} + \sin \mathfrak{D} \cos \rho' \frac{\mathfrak{d}\rho_{,}}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'} \cos(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) - \sin \mathfrak{D} \sin \rho_{,} \sin(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = o$$

Diese Gleichung lehrt uns zunächst, dass $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ keine Lösung derselben ist, denn unter dieser Voraussetzung folgt

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{D} = \operatorname{cotg} \rho_{,}$$

was unmöglich ist. Der grösste Kreis zwischen Stern und Mittelpunkt des Mondes fällt demnach nie mit demjenigen grössten Kreise zusammen, in welchem der kürzeste Abstand des Sterns vom Mondrande liegt. Andrerseits wissen wir aber aus dem Vorhergehenden, dass die Abplattung der nahezu elliptischen Mondscheibe im äussersten Falle 0,027 ist, daher der Unterschied $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$ nur ein kleiner Winkel sein kann. Einen ersten Näherungswerth für diesen Unterschied erhalten wir demnach aus der obigen Gleichung, wenn wir in derselben $\sin(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$ und $\cos(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = 1$ setzen. Durch diese Annahme ergiebt sich

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = (\operatorname{cotg} \rho_, - \operatorname{cotg} \mathfrak{D}) \frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}$$

Der Factor $\frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}$ ist positiv, wenn $\mathfrak{M}'$ im ersten oder dritten, negativ, wenn derselbe im zweiten oder vierten Quadranten liegt. Nach der Voraussetzung soll nun $\mathfrak{D}$ nicht kleiner sein als 10^0, mithin $\operatorname{cotg} D$ nicht grösser als 6; und da Distanzen, die viel grösser als 135^0 sind, nach der Natur der Instrumente, welche zum Messen von Monddistanzen dienen, nicht vorkommen können, so ist -1 die andere Gränze des Werthes $\operatorname{cotg} D$. Aus der Gleichung für den Radius Vector ergiebt sich für eine Zenithdistanz des Mondcentrums $= 85^0$ und $\rho = 1000''$, $\frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}_,} = 26''$; der Werth von $\operatorname{cotg} \rho_,$ ist dann höchstens $= 218{,}3$; somit erhalten wir schliesslich den Maximalwerth vom $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$, in einer Zenithdistanz von 85^0, $= \pm 1^0\, 35'$. Die Winkel $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}$ werden nur gebraucht, um den Radius Vector zu berechnen, daher kommt bei ihrer Bestimmung ein Fehler von 2 bis 3 Minuten nicht in Betracht; ein solcher Fehler würde in dem gesuchten ρ nur einen Fehler von 1 bis 2 Hundertstel zur Folge haben. Wir können daher $\operatorname{cotg} \mathfrak{D}$ gegen $\operatorname{cotg} \rho_,$ stets vernachlässigen; demnach erhalten wir

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = \operatorname{cotg} \rho_, \frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}'}$$

Es ist aber $\frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}\mathfrak{M}_,} = \frac{\mathfrak{d}\rho_,}{\mathfrak{d}M'} = \Delta\rho \sin 2M'$; und $\operatorname{cotg} \rho_, = \frac{1}{\rho_,}$ setzend, ergiebt sich schliesslich

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = \frac{\Delta\rho}{\rho_,} \sin 2M'$$

Wenden wir uns nun zu der eigentlichen Aufgabe. In der Figur VI ist $C'S' = \mathfrak{D} = D'$ derjenige Bogen grössten Kreises zwischen dem Mittelpunkte des Mondes und dem Stern, welchen wir suchen; $S'\mathfrak{B}' = D''$ die kürzeste Entfernung zwischen dem Sterne und dem Rande des Mondes, welche unmittelbar durch die Messung erhalten wird, der Winkel $ZC'S' = M'$, Winkel $S'C'\mathfrak{B}' = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$, der Winkel $C'S'\mathfrak{B}'$ heisse q und derselbe ist stets noch kleiner als $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$; der Radius Vector $C'\mathfrak{B}'$ sei $\rho_{,,}$. Um aus dem gemessenen kürzesten Abstande des Sterns vom Rande den Abstand des Sterns vom Mittelpunkte des Mondes zu finden, müssen wir den Unterschied $D' - D''$, welcher von der Ordnung des Radius Vectors ist, kennen. In dem sphärischen Dreiecke $C'S'\mathfrak{B}'$ bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\sin \rho_{,,} \cos (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = \sin D' \cos D'' - \cos D' \sin D'' \cos q$$
$$\sin \rho_{,,} \sin (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = \sin D'' \sin p$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\rho_{,,} \left(1 - \frac{(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2}{2}\right) = D' - D'' + \tfrac{1}{2} \cos D' \sin D'' q^2$$

aus der zweiten

$$q = \rho_{,,} \frac{(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})}{\sin D''}$$

Setzen wir diesen Werth von q ein, so folgt aus der ersten durch blosse Umstellung

$$D' - D'' = \rho_{,,} - \rho_{,,} \frac{(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2}{2} \left(1 + \frac{\cos D'}{\sin D''} \rho_{,,}\right)$$
$$= \rho_{,,} - \rho_{,,} \frac{(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2}{2}$$

weil wir den Factor des zweiten Gliedes der rechten Seitevernachlässigen dürfen. Wir dürfen aber auch $\rho_{,,}$, wo er als Factor vom $(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2$ auftritt, mit $\rho_{,}$ vertauschen, von welchem er noch nicht um $\frac{1}{206265}$ verschieden ist. Somit erhalten wir

$$D' - D'' = \rho_{,,} - \frac{\rho_{,} (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2}{2}$$

Nun ist

$$\rho_{,,} = \rho - \varDelta\rho \cos^2 \left(M' + \mathfrak{M}' - \mathfrak{M} - \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta\rho}{\rho} \sin 2 (M' + \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}\right)$$
$$= \rho - \varDelta\rho \cos^2 \left(M' + \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta\rho}{\rho_{,}} \sin 2 M'\right)$$
$$= \rho - \varDelta\rho \cos^2 M' + 2 \frac{\varDelta\rho^2}{\rho_{,}} \cos^2 M' \sin^2 M'$$

und

$$\frac{(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})^2}{2} = \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta\rho^2}{\rho_{,}^2} \sin z^2 M' = 2 \frac{\varDelta\rho^2}{\rho_{,}^2} \cos^2 M' \sin^2 M'$$

Folglich wird, nach Einsetzung dieser Werthe in die letzte Gleichung für $D' - D''$,

$$D' - D'' = \rho - \Delta\rho \cos^2 M'$$
$$D' = D'' + \rho - \Delta\rho \cos^2 M'$$

Die beiden Gleichungen: $M = M' - \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2M'$ und $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = \frac{\Delta\rho}{\rho_{,}} \sin 2M'$ führen sehr einfach auf die geometrische Betrachtung, dass, um D' aus $S'\mathfrak{B}'$ zu finden, man weder den Radius Vector, welcher im grössten Kreise von D' liegt, noch denjenigen, welcher mit der kürzesten Entfernung zusammmenstösst, anzuwenden hat, sondern denjenigen, welcher zwischen jenen beiden Radien Vectoren gerade in der Mitte liegt.

In dem Falle, wo der erleuchtete Rand des Mondes der entferntere ist, ist der der Seite D'' gegenüberliegende Winkel $180^0 - (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})$; folglich lautet die erste der beiden Gleichungen, von denen wir ausgingen,

$$-\sin \rho_{,,} \cos (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = \sin D' \cos D'' - \cos D' \sin D'' \cos q$$

und wir erhalten schliesslich $D' - D''$ negativ, daher ist in diesem Falle

$$D' = D'' - (\rho - \Delta\rho \cos^2 M')$$

Hiebei ist nun zu bemerken, dass strenge genommen $\Delta\rho$ in der letzten Gleichung den Unterschied der Refractionen für den unteren Rand und den Mittelpunkt des Mondes ausdrücken muss. Wenn der Mond nur 5^0 über dem Horizonte steht, ist das $\Delta\rho$ für die obere Ellipse von dem $\Delta\rho$ für die untere Ellipse circa 3,6 Secunden verschieden, eine Grösse, welche wir um so weniger vernachlässigen dürfen, da dieselbe, wenn die beiden Gestirne nahezu gleiche Azimute haben und der Stern dem Zenithe beträchtlich näher steht als der Mond, fast mit ihrem vollen Betrage in der Reduction der Distanz vom Rande auf den Mittelpunkt auftritt. Bei einer Zenithdistanz des Mondes von 80^0 ist der Unterschied der beiden $\Delta\rho$ nicht viel von 0,5 Secunden verschieden; so dass für noch kleinere Zenithdistanzen, wenn wir die beiden $\Delta\rho$ durch $\Delta_{,}\rho$ und $\Delta'\rho$ von einander unterscheiden, ein mittleres $\Delta\rho = \frac{\Delta_{,}\rho + \Delta'\rho}{2}$ angewandt werden kann. Welches $\Delta\rho$ man aber anzuwenden hat, wenn der Mond sehr niedrig steht, das ergiebt sich sofort aus dem gegenseitigen Stande der beiden Gestirne durch den blossen Anblick.

Betrachten wir nun den Fall, dass der kürzeste Abstand des Sonnenrandes vom Mondrande gemessen ist, so kann dieser auf den vorigen zurückgeführt werden. Der Bogen grössten Kreises, in welchem diese kürzeste Entfernung liegt, schneidet stets den Bogen grössten Kreises zwischen den Mittelpunkten des Mondes und der Sonne. In Fignr VII sei Q dieser Dnrchschnittspunkt, dann ist

$$D'' = Q\mathfrak{B}' + Q\mathfrak{B}_,$$

und

$$D' = QC' + QC_,$$

Nach dem vorigen dürfen wir aber setzen

$$QC' = Q\mathfrak{B}' + \rho - \Delta o \cos^2 M'$$

und

$$QC_, = Q\mathfrak{B}_, + \rho' - \Delta\rho' \cos^2 S'$$

wo wie früher ρ' den Radius Vector der Sonne und S' den, dem Winkel M' entsprechenden, Winkel am Mittelpunkte der Sonne, zwischen dem Vertical derselben und der scheinbaren Distanz, bedeuten. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt aber

$$D' = D'' + \rho - \Delta\rho \cos^2 M' + \rho' - \Delta\rho' \cos^2 S'$$

Die in diesen Paragraphen gegebene Herleitung der Formeln für die Reduction der Distanz vom Rande auf den Mittelpunkt, ist, so viel mir bekannt, die einzige veröffentlichte. Ich glaube dargethan zu haben, dass bei Anwendung derselben kein Fehler von einem Zehntel einer Secunde begangen werden kann.

Diese Untersuchung über die Veränderung, welche eine kreisförmige Scheibe durch die Wirkung der Strahlenbrechung erleidet, hat das Verfahren, wie man bisher die Veränderung bei der Reduction von Monddistanzen in Rechnung brachte, vollständig gerechtfertigt. Das ist vollkommen richtig in Bezug auf den Effect, aber incorrect in Bezug auf den Grund des Verfahrens. Die Reduction vom Rande auf den Mittelpunkt, $\rho - \Delta\rho \cos^2 M'$, ist nicht deshalb richtig, weil die veränderte Form der Scheibe eine Ellipse von der Abplattung $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ist und die wirklich gemessene Grösse $S\mathfrak{B}'$ ist — siehe Figur VI — sondern weil diese beiden Annahmen zwei Fehler erzeugen, welche sich gegenseitig aufheben. Erstens ist der Radius Vector in der veränderten Figur nicht abhängig vom $\cos^2$ des Winkels am Mittelpunkte d i e s e r Figur, sondern am Mittelpunkte der kreisförmigen Scheibe, denn $\rho_, = \rho - \Delta\rho \cos^2 M$; zweitens ist die gemessene Grösse nicht der Bogen $S'\mathfrak{B}$, sondern der Bogen $S'\mathfrak{B}'$, welcher am Sterne anhebt und auf dem Rande der veränderten Figur senkrecht steht. Nimmt man aber $S'\mathfrak{B}$ für $S'\mathfrak{B}'$, so setzt man den gemessenen Bogen fast genau um dieselbe Grösse zu klein, um welche man den Radius Vector zu gross erhält, wenn man M' für M nimmt.

§ 7.

Nachdem ich die Methode, welche ich zur Berechnung von Monddistanzen anwende, vollständig entwickelt und begründet habe, kann ich nicht umhin, ehe ich diese Arbeit schliesse, auf die Vorzüge derselben noch einmal zurückzukommen. In theoretischer Hinsicht hat sie den Vorzug, dass sie die Reduction so weit genau zu ermitteln lehrt, als unsere Kenntniss der Oerter der Himmelskörper und die Wirkung der Strahlenbrechung reicht, und in practischer Hinsicht, dass die Berechnung der Reductionsgrösse nicht mehr arithmetische Operationen nothwendig macht, als irgend eine der bisher vorgeschlagenen und zur Anwendung gekommenen Methoden, wobei nicht zu übersehen ist, dass die letzteren den Gebrauch von siebenstelligen Logarithmentafeln erfordern, während man bei der ersteren mit fünfstelligen ausreicht. Ist die Distanz sehr klein, so genügen bei der Borda'schen nicht einmal siebenstellige Tafeln, während selbst in dem seltenen Falle, wo die Distanz nur 5° beträgt, für die Döllen'sche Methode, denn mit diesem Namen muss man sie bezeichnen, noch immer fünfstellige Tafeln genügen.

Dem Einwande, dass die Resultate der Längenbestimmung aus Monddistanzen, selbst wenn sie mit völliger Strenge aus den Beobachtungen abgeleitet worden sind, noch so stark von einander abweichen, dass die Nothwendigkeit der Anwendung einer strengen Methode der Berechnung in Frage gestellt wird, begegne ich mit der Bemerkung, dass die Quelle, aus welcher diese grossen Differenzen zwischen den einzelnen Resultaten hervorgehen, nur dann mit Sicherheit wird erkannt werden können, wenn dieselbe nicht durch eine mangelhafte Methode der Berechnung der Resultate getrübt ist. Nach meinem Dafürhalten sind es blos die optischen Bestandtheile am Patentkreise und Sextanten, welche die grossen Abweichungen in den Längenbestimmungen verursachen: die Kleinheit des Fernrohrs und die viermalige Brechung, welche der Lichtstrahl erleidet, ehe er in das Fernrohr gelangt, und nicht der geringe Durchmesser des Limbus oder die Schwierigkeit einer genauen Messung der Berührung von Mond und Stern. Ungleichheiten in der Dichtigkeit der Glassmasse der Spiegel und des Prisma's, geringe Verschiedenheiten der Temperatur der einzelnen Theile dieser Apparate können den gemessenen Winkel fehlerhaft machen; ob aber überhaupt die Fehler dieselben bleiben, wenn man bloss Distanzen zweier Lichtpunkte misst, oder andere werden, sobald man grosse Lichtscheiben, wie Sonne und Mond, beobachtet, dass wird nur entschieden werden können, wenn man beide Beobachtungen mit einander combinirt, dabei aber das Resultat jeder Beobachtung für sich mit völliger Strenge berechnet hat.

Note 1. Einen Auszug aus diesem Briefe Amerigo Vespucci's an Lorenzo dei Medici fand ich in Zach's Monatlicher Correspondenz Band XXII pag. 530 u. ff., und theile hier denjenigen Theil mit, welcher sich auf die Längenbestimmung bezieht.

... „*Quanto alla Longitudine, dico che in saperla trovai tanta difficoltà, che ebbi grandissimo travaglio in conoscer certo il cammino che avevo fatto per la via della Longitudine; e tanto travagliai che al fine non trovai miglior cosa che era a guardare e veder di notte le opposizioni dell' un Pianeta con l'altro, e muover la luna con gli altri Pianeti.... Il Pianeta della Luna è più leggier di corso che nessun altro, e riscontravalo con l'Almanacco di Giovanni da Monteregio che fu composto al Meridione della città di Ferrara, accordandolo con le calcolazioni del Re D. Alfonso; e dipoi di molte notte che ebbi fatto sperienza, una notte fra l'altre.... che fu in conjunzione della Luna con Marte.... trovai.... Una notte infra l'altre essendo ai* 23 *d'Agosto* 1499, *che fu in conjunzione della Luna con Marte, la quale secondo l'Almanacco aveva a essere a mezza notte o mezz'ora prima, trovai che quando la Luna salì all' Orizzonte nostro, che fu un' orà e mezzo dipoi disposto il sole, avea passato il Pianeta alla parte dell' Oriente, dico che la Luna stava più orientale che Marte d'un grado e alcun minuto più, e a mezza notte stava più all' Oriente* 5 *gradi e mezzo poco più o meno. Di modo che fatta la perpensione, se* 24 *Ore mi vagliano* 360 *gradi, che mi varanno* 5 *Ore e mezzo? trovo che mi varanno* 82 *gradi e mezzo, e tanto mi trovavo di Longitudine dal Meridiano della Città di Calis etc....*"

Amerigo Vespucci fuhr auf allen seinen Seereisen aus dem Hafen von Cadix aus und sein Vorrath von Instrumenten und Büchern bestand in einem Quadranten, einem Astrolabio, einem Kalender von Monteregio und den Alphonsinischen Tafeln. Diese Ausrüstung beweist schon, dass Amerigo Vespucci ein wissenschaftlich gebildeter Seemann war; er kannte nicht nur den Gebrauch der mitgeführten astronomischen Apparate, sondern er wusste denselben auch eine so geniale Anwendung zu geben, dass ihm mit Recht die unsterbliche Ehre vindicirt wird, der Erfinder der Methode der Längenbestimmung durch Monddistanzen zu sein. Eifrig bemüht, auf irgend eine Weise die geographische Länge seines Schiffes zu bestimmen, fand er keinen bessern Weg, als die Vergleichung der Stellung der Planeten und des Mondes. Er hatte durch Rechnung gefunden, dass am 23. August 1499 der Mond mit dem Planeten Mars für den Meridian von Cadix um Mitternacht in Conjunction sein musste; anderthalb Stunden nach Sonnenuntergang, also etwa $7\frac{1}{2}$ Uhr Abends desselben Tages, ging der Mond auf seinem Schiffe auf und befand sich schon nahezu einen Grad östlich vom Mars; aber um Mitternacht war er $5\frac{1}{2}$ Grad von diesem Planeten entfernt; er hatte somit nach dieser Beobachtung in $4\frac{1}{2}$ Stunden einen Weg von $4\frac{1}{2}$ Graden zurückgelegt, also in einer Stunde einen Grad. Wenn nun, schliesst Amerigo weiter, 24 Stunden mir soviel werth sind, wie 360 Grad, welchen Werth haben dann die $5\frac{1}{2}$ Stunden? Ich fand, dass sie $82\frac{1}{2}$ Grad werth sind, und um so viel Grade der Länge befanden wir uns vom Meridiane von Cadix. — Wie roh auch die Beobachtungen waren und wie falsch die mittlere Bewegung des Mondes von einem Grade in der Stunde auch ist, die Schlussfolgerung ist richtig: dass von der Mitternacht in Cadix bis zur Mitternacht auf dem Schiffe so viel Stunden sind, als der Quotient aus der mittleren stündlichen Bewegung des Mondes in den Weg desselben während dieser Zeit, Einheiten hat. Dass Amerigo diese Schlussfolgerung machte, ist eben das Geniale und dadurch ward er der Erfinder der Methode der Längenbestimmung ein Jahrhundert vor Keppler.

Note 2. Da ich eine gedrängte Darstellung der Geschichte der Längenbestimmung durch Monddistanzen nicht besser geben kann, als Zach 1801 im IV Bande seiner monatlichen Correspondenz pag. 623, so lasse ich diese Stelle hier folgen:

„Johann Werner, ein Nürnberger, war der erste, der im Jahre 1514 in seinen Anmerkungen über das I Buch der Geographie des Ptolomäus die Beobachtung der Abstände der Fixsterne vom Monde zur Erfindung der Meeres-Länge vorschlug. Peter Bienewitz (Apianus), ein Sachse, brachte dieselbe Methode im Jahre 1524 in Vorschlag; er erklärte sehr bestimmt, wie man Abstände des Mondes von solchen Sternen, welche in der Nähe der Ecliptik liegen, zu Längenbestimmungen gebrauchen solle. Orontius Fineus, Professor der Mathematik in Paris, und Gemma Frisius, ein Arzt in Antwerpen, kamen im Jahre 1530 auf denselben Gedanken, Peter Nunnez (Nonius), Professor zu Coimbra und Daniel Santbeck aus Nimwegen, kannten diese Methode im Jahre 1560, Keppler empfahl sie im Jahre 1600 und Joh. Morinus, Arzt und Professor der Mathematik in Paris, schlug sie 1633 dem Cardinal Richelieu und im Jahre 1645 dem Cardinal Mazarin vor.

Gegen die Methode fand man damals nichts anderes, und mit Grund, einzuwenden, als die Unvollkommenheit der Monds-Tafeln. Karl II, König von England, liess daher im Jahre 1665 die Greenwicher Sternwarte erbauen, und gab dem berühmten Flamsteed und allen seinen Nachfolgern zur Bestallung auf, die Tafeln der Bewegung aller Himmelskörper und die Lage der Fixsterne auf das allergenaueste zu berichtigen, um die so sehr gewünschte Sache, die Länge zur See zu finden, und die Kunst der Schifffahrt dadurch zu verbessern. Durch Hülfe dieser Flamsteedschen Beobachtungen schuf Newton seine unsterbliche Monds-Theorie; diese legte den ersten Grundstein zu allen nachfolgenden Verbesserungen von d'Alembert, Clairaut, La Grange, Euler, Tobias Mayer bis auf La Place.

Flamsteed's Nachfolger, Edm. Halley, versäumte nichts, die Mondstafeln durch Beobachtungen und durch den Cycle von Saros zu berichtigen und zu verbessern. Allein es fehlte noch an Werkzeugen, womit die Monds-Abstände auf schwankenden Schiffen zur See gemacht werden konnten. Newton erfand dieses Instrument im Jahre 1699, welches nachher unter dem Namen Hadley'scher Sextant so allgemein bekannt geworden. Allein Hadley, Hooke und Fouchy machen auf dieselbe Erfindung Ansprüche. So viel ist gewiss, dass dieses optische Werkzeug nicht vor dem Jahre 1732 bekannt und in Gebrauch war. Es wurde in der Folge von Dollond, Ramsden, Tob. Mayer, Borda u. a. m. sehr ansehnlich verbessert und für den Gebrauch zu Lande und zur See immer zweckmässiger und brauchbarer eingerichtet.

Im Jahre 1750 prüfte und untersuchte der Abbé La Caille diese Methode auf seiner Reise nach dem Vorgebirge der guten Hoffnung; da er aber seine Beobachtungen nur mit Halley'schen Mondstafeln vergleichen konnte, so war keine grosse Genauigkeit zu erwarten. Im Jahre 1755 übergab Tobias Mayer seine ersten Mondstafeln dem Englischen Admiralitäts-Collegium, und Capitain Campbell war in den Jahren 1757, 58 und 59 der erste Seefahrer, welcher mit einem messingenen Hadley-schen Sextanten Mondsabstände mit einer gewissen Genauigkeit beobachtet hatte, welche Bradley nach den Mayer'schen Tafeln berechnet und die erwünschte Uebereinstimmung gefunden hatte. In denselben Jahren, als man diese Methode in England untersuchte und prüfte, war Carsten-Niebuhr, nachmaliger königl. Dänischer Justizrath, in Göttingen durch seinen grossen Lehrer Tob. Mayer damit schon so vertraut gemacht, dass er ohne irgend eine fremde Beihülfe die Länge aus seines Lehrers handschriftlichen Mondstafeln selbst berechnen konnte und schon zu Anfang des Jahres 1761 dergleichen Beobachtungen nicht nur selbst zur See angestellt, sondern auch selbst berechnet und daraus die Längen von Cap Vincent, Cap Spartel, Gibraltar und Marseille auf eine bewundernswürdig genaue Art hergeleitet hat. Dieses geschah in demselben Jahre, und noch ehe Maskelyne nach St. Helena ausgeschickt wurde, den Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe 1761 zu beobachten und bei dieser Gelegenheit die Mayer'schen Mondstafeln und die Methode der Mondsabstände zur See zu prüfen."

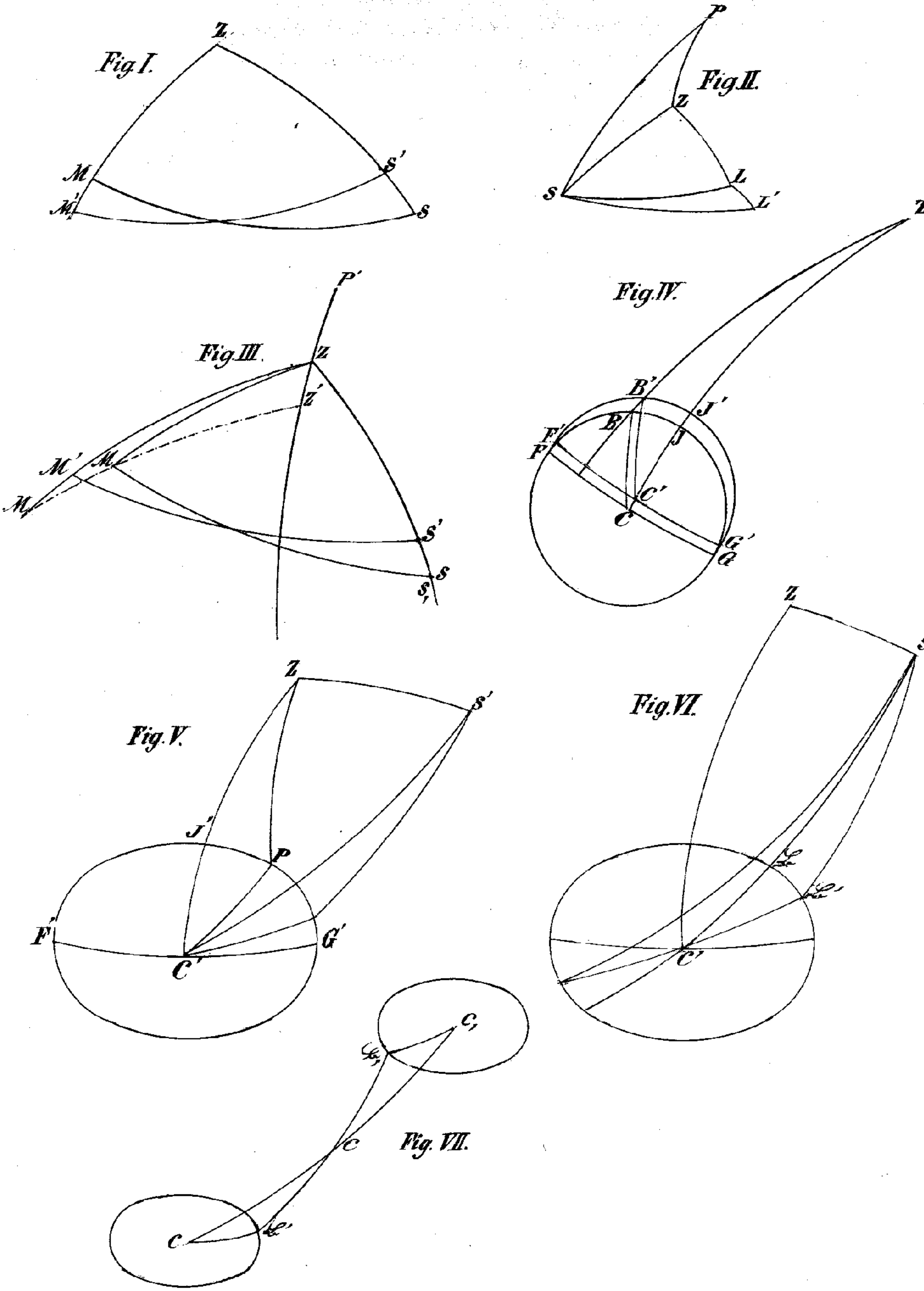
In den Bänden IV und V der Monatl. Correspondenz sind in einer Reihe von Aufsätzen die Resultate der Beobachtungen von Carsten-Niebuhr veröffentlicht worden, welcher in seiner späteren Stellung als königl. Dänischer Justizrath die Astronomie nicht weiter cultivirt und auch die Resultate seiner Reise in den Jahren 1761 und 62 nicht selbst bekannt gemacht hat. Auf die Bitte von Zach übergab er demselben seine Manuscripte und aus der Bearbeitung derselben sind die obigen Aufsätze entstanden; für ihn wird das Verdienst in Anspruch genommen, der erste Beobachter zu sein, welcher die Methode der Längenbestimmung durch Mondsabstände auf dem festen Lande angewandt und zuverlässige Resultate erzielt hat. In Alexandrien und Kahira hat Carsten-Niebuhr sehr viel beobachtet; die Polhöhe des ersten Ortes bestimmte er am 6. Oct. 1761 aus 7 Sternen, die Länge aus 9 verschiedenen Abständen am 10., 11., 13., 22. und 23. October; die Polhöhe des zweiten Ortes aus 13 Sternen, am 30. Nov. und 4. Dec., und die Länge aus 7 verschiedenen Abständen, welche er am 10. und 11. Decbr. 1761 und am 12. Jan. 1762 maass. Aus diesen Bestimmungen habe ich den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Polhöhe $= \pm 9''$ und den einer Längenbestimmung $= \pm 23$ Zeitsecunden gefunden; diese Zahlen beweisen, dass Carsten-Niebuhr ein ausgezeichneter Beobachter war.

Die Methode der Mondsabstände und der Hadley'sche Sextant bewährten sich zur See, besonders seit das Instrument durch Ramsden und Troughton vervollkommnet worden; dasselbe ist noch jetzt fast allgemein im Gebrauch. In Russland sind in der Marine die „Pistor und Martins'schen Patentkreise" seit einiger Zeit mehr und mehr in Aufnahme gekommen, welche darin einen grossen Vorzug vor den Sextanten haben, dass die Excentricitätsfehler ganz fortfallen, der todte Gang auf-gehoben ist und die Lichtstärke der Bilder mit dem gemessenen Bogen wächst; der Umstand aber, dass die Sextanten bedeutend leichter sind als die Vollkreise, sichert den ersteren noch auf lange Zeit einen Platz neben den letzteren.

Neben den Methoden, die wahre Distanz aus der scheinbaren durch Rechnung zu finden, waren in Frankreich, England und Holland zu Ende des vergangenen Jahrhunderts die graphischen Methoden im Gebrauch. Der durch Reisen nach Madagaskar, Ostindien und Marokko berühmte französische Astronom Alexis Rochon hatte ein Instrument erfunden und verfertigen lassen, das aus 3 Kreisen besteht; die Grundformeln hiezu stehen in der Connaissance des tems, an VI pag. 275; Richer's Reductions-Kreis erhielt 1791 den Preis und findet sich beschrieben in La Lande's Abregé de navigation pag. 63, und in der Connaissance des tems, an IV pag. 220 stehen die Formeln, welche der Construction dieses Instruments zu Grunde liegen und der Beweis derselben von La Grange. Le Guin hat ebenfalls ein solches Instrument erfunden und 1790 die Beschreibung desselben in England herausgegeben, wo er ein Patent auf dasselbe nahm; weniger kostbar sind die Tafeln Margette's zum Behufe der graphischen Reduction der Mondsdistanzen, und sehr gerühmt wurde die Reductionskarte in gross Folio vom Schiffslieutenant Maignon. Mit Hilfe dieser Apparate soll die Reduction auf 5 bis 9 Bogensecunden genau gefunden werden können, was ich sehr bezweifeln muss, und es wird nicht nur der hohe Preis der Verbreitung dieser Instrumente hinderlich gewesen sein.

Thesen.

1. Ohne Hypothese kein Fortschritt.
2. Jeder Fortschritt ist ein Rückschritt.
3. Ein Viereck hat keinen Inhalt.
4. Die physische Zusammengehörigkeit des Sirius und seines Begleiters ist als erwiesen anzusehen.
5. Der Biela'sche Comet war stets ein Doppelcomet.
6. Der Ort des Punktes, welcher am Himmel die Richtung der Bewegung unseres Sonnensystems bezeichnet, wird auf dem bisher betretenen Wege nicht in viel engere Grenzen eingeschlossen werden können.



Lith. v. C. Schulz, Dorpat.