

Prof. ALBERT BORKVELL

SFÄÄRILINE  
TRIGONOMEETRIA

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“  
TARTU 1940



Jaanuaris

Prof. ALBERT BOKVELL

SFÄÄRILINE  
TRIGONOMEETRIA  
SFÄÄRILINE TRIGONOMEETRIA

DR. JOHANNES KIRIANDUS  
1970 1940



A- 11771 II

Prof. ALBERT BORKVELL

SISUKORD

# SFÄÄRILINE TRIGONOMEETRIA

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“

TARTU 1940

Vastutav toimetaja: H. Kruus. Tehniline toimetaja: J. Ots.  
Korrektor: H. Pürkop. Kirjandus- ja Kirjastusajade Pea-  
valitsuse voliniku nr. MB 1206. Trükipoognaid 4,75. Autori-  
poognaid 3,3. Trükisuurus 500 eks. Trükiluba antud 28. XII  
1940. Paberi formaat 61 × 86 cm. Trükitud nats. „Ilutrüki“  
trükikojas, Tartu, 21. juuni tän. 58. Hind 4 rubla.

Тсс. нг. 769.

Автор: Альберт Борквелл. Название книги: Сферическая  
тригонометрия. На эстонском языке. Госиздат „Научная  
Литература“. Тип.-лит. „Илутрюк“, Тарту, ЭССР.

2



121227

## SISUKORD.

	Lk.
§ 1. Sfääriline kolmnurk . . . . .	5
§ 2. Polaarkolmnurk . . . . .	9
§ 3. Sfäärilise kolmnurga omadusi . . . . .	10
§ 4. Sfäärilise kolmnurga põhivalemite liigitelu . . . . .	15
§ 5. Nurga koosinusvalem . . . . .	16
§ 6. Siinusvalem . . . . .	20
§ 7. Kootangensvalem . . . . .	22
§ 8. Külje koosinusvalem . . . . .	24
§ 9. Täisnurkne sfääriline kolmnurk . . . . .	26
§ 10. Täiskülgne sfääriline kolmnurk . . . . .	30
§ 11. Siinus-koosinusvalemid . . . . .	33
§ 12. Poolnurga valemid . . . . .	34
§ 13. Poolkülje valemid . . . . .	36
§ 14. Delambre'i ja Napier'i valemid . . . . .	38
§ 15. Cagnoli' ja l'Huillier'i valemid . . . . .	41
§ 16. Sfäärilise kolmnurga pindala . . . . .	44
§ 17. Sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringi kaarraadius . . . . .	46
§ 18. Sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarraadius . . . . .	48
§ 19. Sfäärilise kolmnurga kõrgus, bissektor ja mediaan . . . . .	51
§ 20. Sfääriliste kolmnurkade lahendamine . . . . .	53
§ 21. Harjutusülesandeid . . . . .	74



## § 1. Sfääriline kolmnurk.

Kera pinna osa, mis on piiratud kolme suurringi kaarega, nimetatakse sfääriliseks kolmnurgaks, kusjuures suurringide kaared on sfäärilise kolmnurga küljed, mis lõikudes moodustavad kolmnurga nurgad.

Olgu suurringide kaared  $BC = a$ ,  $AC = b$  ja  $AB = c$  sfäärilise kolmnurga  $ABC$  küljed (1. joon.), mis lõikuvad punktides  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ning moodustavad

sfäärilise kolmnurga nurgad:  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,

$\widehat{ABC} = \beta$  ja  $\widehat{ACB} = \gamma$ . Ühendame selle

sfäärilise kolmnurga tipud  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kera keskpunktiga  $O$ , saame kera

keskpunktis kolmetahuse nurga  $OABC$ ,

milles sfäärilise kolmnurga külgede ja kera raadiuse  $R$  suhted määravad tasa-

nurgad  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{AOC}$  ja  $\widehat{BOC}$ , s. o.  $\frac{a}{R}$

määrab  $\widehat{BOC}$ ,  $\frac{b}{R}$  määrab  $\widehat{AOC}$  ja

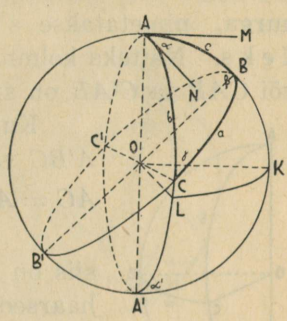
$\frac{c}{R}$  määrab  $\widehat{AOB}$ .

Kui lugeda kera raadius  $R = 1$ , siis kolmetahuse nurga

tasanurgad  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{AOC}$  ja  $\widehat{AOB}$  mõõdetakse otseselt neile vastavate suurringide kaartega, s. o. sfäärilise kolmnurga külgedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

Sfäärilise kolmnurga nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  on võrdsed tähen-

datud kolmetahuse nurga kahetahuste nurkade lineaarsete nurka-



1. joonis.

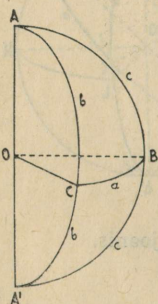
dega, mis on samad, kui sfäärilise kolmnurga tippudes  $A$ ,  $B$  ja  $C$  külgedele  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tõmmatud puutujatest moodustatud nurgad.

Näiteks,  $\alpha = \widehat{MAN}$ .

Pikendades sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kaht külge, näiteks  $b$  ja  $c$ , kuni  $A$  diametraalse vastaspunktini  $A'$ , saame sfäärilise kaksnurga  $ABA'C$ , mille kaks külge on poolringjooned, s. o.  $180^\circ$ , ja mille nurgad  $\alpha = \alpha' = \widehat{MAN} = \widehat{KOL}$  mõõdetakse suurringi kaarega  $KL$ , kus  $KO \perp AA'$  ja  $LO \perp AA'$ .

Tähendab, sfäärilise kaks- ja kolmnurga nurgad kui ka küljed mõõdetakse kraadides, minutites ja sekundites ning nende osades või vastavas radiaalmõõdus, kusjuures sfäärilise kolmnurga küljed on ikka väiksemad kui  $180^\circ$ . Kui sfäärilise kolmnurga üks külge saab poolringjooneks, s. o.  $180^\circ$ , siis saab ka kahe teise külje summa poolringjooneks ja sfääriline kolmnurk muutub siis sfääriliseks kaksnurgaks.

Kaks sfäärilist kolmnurka, mis moodustavad sfäärilise kaksnurga, nimetatakse sfäärilisteks kaaskolmnurkadeks. Näiteks kolmnurgad  $ABC$  ja  $A'BC$ , või  $BAC$  ja  $B'AC$ , või  $CAB$  ja  $C'AB$  on sfäärilised kaaskolmnurgad.

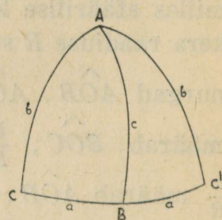


2. joonis.

Kui sfäärilistes kaaskolmnurkades  $ABC$  ja  $A'BC$  vastavad küljed on võrdsed (2. joon.), s. o.  $AC = A'C = b$ ,  $AB = A'B = c$ ,  $BC = a$ ,

siis on nad kongruentsed võrdhaarsed kolmnurgad.

Sfäärilised kolmnurgad  $ABC$  ja  $ABC'$  (3. joon.), milles vastavad küljed on võrdsed, s. o.



3. joonis.

$$BC = BC' = a, \quad AC = AC' = b, \quad AB = c,$$

ja vastavad nurgad on võrdsed, s. o.

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAC'}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{ABC'}, \quad \widehat{ACB} = \widehat{AC'B},$$

kuid ei ole kongruentsed, nimetatakse summeetri-

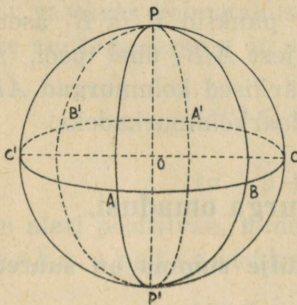
listeks sfäärilisteks kolmnurkadeks. 1. joonisel esinevad kahekaupa sümmeetrilised sfäärilised kolmnurgad:  $ABC$  ja  $A'B'C'$ ,  $AB'C$  ja  $A'BC'$ ,  $A'B'C$  ja  $ABC'$ ,  $A'BC$  ja  $AB'C'$ .

Kui sfäärilises kolmnurgas üks, kaks või kolm nurka on  $90^\circ$ , siis nimetatakse teda täisnurkseks sfääriliseks kolmnurgaks. Ühe täisnurga puhul on täisnurgale vastaskülge sfäärilise kolmnurga hüpotenuusiks ja teised küljed kaatetiteks. Kahe täisnurga puhul esineb sfäärilises kolmnurgas kaks hüpotenuusi ja üks kaatet. Kolme täisnurga puhul on kolm hüpotenuusi ja kaateteid pole.

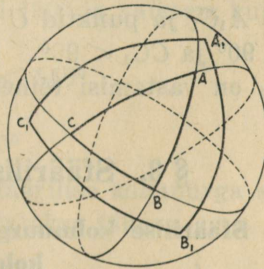
Kui sfäärilises kolmnurgas üks, kaks või kolm külge on  $90^\circ$ , siis nimetatakse teda täiskülgses sfääriliseks kolmnurgaks.

## § 2. Polaarkolmnurk.

Kera pinnal asetsev punkt, mille kaugus suuringi kaare igast punktist on  $90^\circ$ , nimetatakse suuringi kaare pooluseks.



4. joonis.



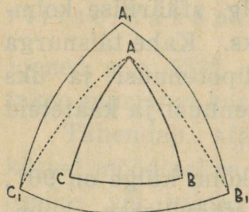
5. joonis.

Suuringi kaarel  $AB$  (4. joon.) või suuringjoonel  $ABC A'B'C'$  on seega kaks poolust  $P$  ja  $P'$ .

Olgu  $ABC$  sfääriline kolmnurk (5. joon.) ja punktid  $A_1$ ,  $B_1$  ja  $C_1$  sfäärilise kolmnurga külgede  $BC$ ,  $AC$  ja  $AB$  ühed poolused. Et sfäärilise kolmnurga küljel kui suuringi kaarel on kaks ühekaugusel asetsevat poolust, siis valime neist selle, mis on lähem külje vastastipule. Olgu niisugused poolused punktid  $A_1$ ,  $B_1$  ja  $C_1$ . Ühendame poolused  $A_1$ ,  $B_1$  ja  $C_1$  suuringide

kaartega, saame samuti sfäärilise kolmnurga  $A_1B_1C_1$ , mis nimeatakse kolmnurga  $ABC$  polaarkolmnurgaks.

Kui  $ABC$  on mingi sfääriline kolmnurk (6. joon.) ja  $A_1B_1C_1$  tema polaarkolmnurk, siis ka überpöörduvalt  $ABC$  on sfäärilise kolmnurga  $A_1B_1C_1$  polaarkolmnurgaks. Ühendame suurringide kaartega sfäärilise kolmnurga tipu  $A$  polaarkolmnurga tippudega  $B_1$  ja  $C_1$ . Et punkt  $B_1$  on külje  $AC$  ja punkt  $C_1$  külje  $AB$  poolus, siis  $AB_1 = AC_1 = 90^\circ$ . Seega punkt  $A$  on külje  $B_1C_1$  poolus. Punktid  $A$  ja  $A_1$  asetsevad tingimuse kohaselt küljest  $BC$  ühel pool, s. o. ühe ja sama poolkera pinnal, kui kera pinda lahutab poolkeradeks suurring, mille kaareks on külge  $BC$ . Siis kaar  $AA_1 < 90^\circ$ .



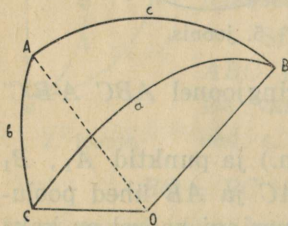
6. joonis.

Et punkt  $A$  on külje  $B_1C_1$  poolus ja  $AA_1 < 90^\circ$ , siis ka punktid  $A$  ja  $A_1$  asetsevad polaarkolmnurga küljest  $B_1C_1$  ühel pool.

Analoogiliselt võime näidata, et punkt  $B$  on külje  $A_1C_1$  ja punkt  $C$  külje  $A_1B_1$  poolus ning et punktid  $B$  ja  $B_1$  asetsevad küljest  $A_1C_1$  ja punktid  $C$  ja  $C_1$  küljest  $A_1B_1$  ühel pool, nii et  $BB_1 < 90^\circ$  ja  $CC_1 < 90^\circ$ . Seega sfäärilised kolmnurgad  $ABC$  ja  $A_1B_1C_1$  on vastamisi teineteisele polaarkolmnurkadeks.

### § 3. Sfäärilise kolmnurga omadusi.

- 1) Sfäärilise kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külge.



7. joonis.

Et sfäärilise kolmnurga küljed mõõdetakse kolmetahuse nurga vastavate tasanurkadega, kus kahe tasanurga summa on suurem kui kolmas tasanurk, siis on ka sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  (7. joon.)

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

- 2) Sfäärilise kolmnurga külgede summa on suurem kui  $0^\circ$  ja väiksem kui  $360^\circ$ .

Et kolmetahuses nurgas kolme tasanurga summa on suurem kui  $0^\circ$  ja väiksem kui  $360^\circ$ , siis on ka vastavas sfäärilises kolmnurgas kolme külje summa suurem kui  $0^\circ$  ja väiksem kui  $360^\circ$ , s. o.

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ .$$

Vahe

$$360^\circ - (a + b + c) ,$$

mis on alati positiivne, nimetatakse sfäärilise kolmnurga sfääriliseks defektiks ja tähistatakse tähega  $d$ , s. o.

$$d = 360^\circ - (a + b + c) ,$$

mis peitub piirides  $0^\circ$ -st  $360^\circ$ -ni, s. o.

$$0^\circ < d < 360^\circ .$$

**3) Sfäärilise kolmnurga nurkade summa on suurem kui  $180^\circ$  ja väiksem kui  $540^\circ$ .**

Et vastavas kolmetahuses nurgas kahetahuste nurkade lineaarsete nurkade summa on suurem kui  $180^\circ$  ja väiksem kui  $540^\circ$ , siis

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ .$$

Vahe

$$(\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ ,$$

mis on alati positiivne, nimetatakse sfäärilise kolmnurga sfääriliseks ekstsessiks ja tähistatakse tähega  $\varepsilon$ , s. o.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ .$$

Et

$$\alpha + \beta + \gamma < 540^\circ ,$$

siis

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ < 360^\circ ,$$

mis näitab, et sfääriline ekstsess peitub piirides  $0^\circ$ -st  $360^\circ$ -ni, s. o.

$$0^\circ < \varepsilon < 360^\circ .$$

**4) Sfäärilise kolmnurga külje ja polaarkolmnurga vastava nurga summa on  $180^\circ$ , ja ümberpöörduvalt: sfäärilise kolmnurga**

nurga ja polaarkolmnurga vastava külje summa on  $180^\circ$ , s. o. kui sfäärilise kolmnurga  $ABC$  küljed ja nurgad on

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma$$

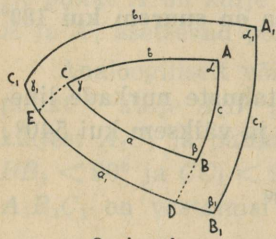
ning polaarkolmnurga  $A_1B_1C_1$  küljed ja nurgad on

$$a_1, b_1, c_1; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

siis

$$\begin{aligned} a + \alpha_1 &= 180^\circ, & b + \beta_1 &= 180^\circ, & c + \gamma_1 &= 180^\circ, \\ a_1 + \alpha &= 180^\circ, & b_1 + \beta &= 180^\circ, & c_1 + \gamma &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Pikendame sfäärilise kolmnurga  $ABC$  (8. joon.) kaks külge, näiteks küljed  $AB$  ja  $AC$ , kuni polaarkolmnurga küljeni  $B_1C_1$ . Saame punktid  $D$  ja  $E$ , kus nüüd  $\alpha$  mõõdetakse kaarega  $DE$ .



8. joonis.

Jooniselt näeme, et

$$\begin{aligned} DE &= DC_1 - (B_1C_1 - B_1E) = \\ &= DC_1 - B_1C_1 + B_1E. \end{aligned}$$

Et punkt  $C_1$  on kaare  $ABD$  poolus, siis  $DC_1 = 90^\circ$ , ja et punkt  $B_1$  on kaare  $ACE$  poolus, siis  $B_1E = 90^\circ$ , ning  $B_1C_1 = a_1$  ja  $DE = \alpha$ . Siis

$$\alpha = 90^\circ - a_1 + 90^\circ = 180^\circ - a_1,$$

millest

$$a_1 + \alpha = 180^\circ.$$

Analoogiliselt saaksime, et

$$b_1 + \beta = 180^\circ, \quad c_1 + \gamma = 180^\circ,$$

ja samuti ka

$$a + \alpha_1 = 180^\circ, \quad b + \beta_1 = 180^\circ, \quad c + \gamma_1 = 180^\circ.$$

5) Sfäärilise kolmnurga sfääriline defekt on võrdne polaarkolmnurga sfäärilise ekstsessiga, ja ümberpöörduvalt: sfäärilise kolmnurga sfääriline ekstsess on võrdne polaarkolmnurga sfäärilise defektiga.

Kui sfäärilise kolmnurga defekt on  $d$  ja ekstsess  $\varepsilon$  ning polaarkolmnurga defekt on  $d_1$  ja ekstsess  $\varepsilon_1$ , siis

$$d = 360^\circ - (a + b + c) = 360^\circ - (180^\circ - \alpha_1 + 180^\circ - \beta_1 + 180^\circ - \gamma_1) = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180^\circ = \varepsilon_1$$

ja

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = 180^\circ - a_1 + 180^\circ - b_1 + 180^\circ - c_1 - 180^\circ = 360^\circ - (a_1 + b_1 + c_1) = d_1.$$

Tähendab,

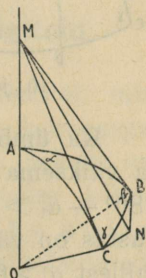
$$d = \varepsilon_1, \quad \varepsilon = d_1.$$

**6) Sfäärilises kolmnurgas võrdsete külgede vastas on võrdsed nurgad, ja ümberpöördult: võrdsete nurkade vastas on võrdsed küljed.**

Olgu sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  (9. joon.)

$$AB = AC < 90^\circ.$$

Tõmbame kera raadiused  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  ning puutujad  $BM$  ja  $CM$  ning  $BN$  ja  $CN$  punktides  $B$  ja  $C$ . Puutujad  $BM$  ja  $CM$  lõikuvad raadiuse  $OA$  pikendusel punktis  $M$ , kusjuures  $BM = CM$ . Samuti  $BN = CN$ . Puutujate  $BN$  ja  $CN$  lõikepunkti  $N$  ühendame punktiga  $M$ . Saame kaks võrdhaarset kolmnurka  $BMN$  ja  $CMN$ , milles  $\widehat{MBN} = \widehat{MCN}$ , mis on sama kui  $\beta = \gamma$ .



9. joonis.

Kui sfäärilise kolmnurga võrdsed küljed on suuremad kui  $90^\circ$ , s. o.

$$AB = AC > 90^\circ,$$

siis puutujad külgedele  $AB$  ja  $AC$  punktides  $B$  ja  $C$  lõikaksid kera raadiuse  $OA$  pikendust allpool keskpunkti  $O$  ja ilmneks eelmisega analoogiline juhtum.

Kui

$$AB = AC = 90^\circ,$$

siis sfäärilise kolmnurga tipp  $A$  on külje  $BC$  poolus ning  $\beta = \gamma = 90^\circ$ .

Überpöördukt: kui sfäärilises kolmnurgas  $\alpha = \beta$ , siis polaarkolmnurgas  $a_1 = b_1$ , sest et  $a_1 = 180^\circ - \alpha$  ja  $b_1 = 180^\circ - \beta$ . Et võrdsete külgede  $a_1$  ja  $b_1$  vastasnurkad on isekeskis võrdsed, s. o.  $\alpha_1 = \beta_1$ , siis ka  $a = b$ , sest  $a = 180^\circ - \alpha_1$  ja  $b = 180^\circ - \beta_1$ .

7) Sfäärilises kolmnurgas suurema nurga vastas on suurem külg, ja überpöördukt: väiksema nurga vastas on väiksem külg.

Olgu sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  (10. joonis.)  $\alpha > \beta$ . Tõmbame suurringi kaare  $AD$  nii, et

$\widehat{BAD} = \beta$ , siis  $AD = BD$  ja

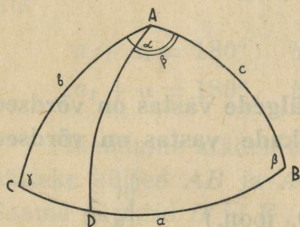
$$AD + DC > AC$$

ehk

$$BD + DC > AC ;$$

tähendab,

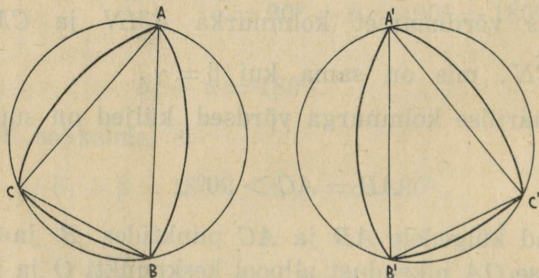
$$a > b .$$



10. joonis.

Ka überpöördukt: suurema külje vastas on suurem nurk ja väiksema külje vastas väiksem nurk. Olgu  $a > b$ , siis ka  $180^\circ - \alpha_1 > 180^\circ - \beta_1$ , millest  $\alpha_1 < \beta_1$ . Et väiksema nurga vastas on väiksem külg, siis  $a_1 < b_1$  ehk  $180^\circ - \alpha < 180^\circ - \beta$ , millest  $\alpha > \beta$ .

8) Sfäärilised sümmeetrilised kolmnurgad on pindvõrdsed.



11. joonis.

Kui kera lõigata kahe tasapinnaga nõnda, et üks tasapind läbib sfäärilise kolmnurga  $ABC$  tipud  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ning teine läbib temaga sümmeetrilise kolmnurga  $A'B'C'$  tipud  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ , siis tekib kaks väikeriingi, mis on sümmeetriliste kolmnurkade külge-

dele vastavatest kõõludest moodustatud tasapinnaliste kolmnurkade  $ABC$  ja  $A'B'C'$  ümber joonestatud ringid (11. joon.). Tasapinnalised kolmnurgad on võrdsed, sest et nende küljed on võrdsete suurringide kaarte vastavad kõõlud. Seega on võrdsed ka väikeringide raadiused ja kerast eraldatud segmentide sfäärilised pindalad. Sümmeetriliste kolmnurkade külgedest ja väikeringide kaartest piiratud segmentide vastavad sfäärilised pinnaosad on kongruentsed, sest vastavad suur- ja väikeringide kaared on kongruentsed. Järelikult on ka segmentide ülejäänud pinnaosad kui sümmeetriliste kolmnurkade  $ABC$  ja  $A'B'C'$  pindalad võrdsed.

#### § 4. Sfäärilise kolmnurga põhivalemite liigitelu.

Sfäärilise kolmnurga lahendamine põhineb valemitel, mis trigonomeetriliste funktsioonide abil seovad sfäärilise kolmnurga külgi ja nurki. Et lahendada sfäärilist kolmnurka, selleks on vaja teada vähemalt kolm elementi, nagu tasapinnalise kolmnurgagi puhul, ainult selle vahega, et vähemalt ühe külje andmine pole siin oluline, mis oli vajalik tasapinnalise kolmnurga lahendamisel. Sfäärilise kolmnurga puhul saame ka siis täieliku lahenduse, kui on antud ainult sfäärilise kolmnurga nurgad.

Sfäärilise kolmnurga kolme antud põhielemendi ja neljanda otsitava põhielemendi funktsionaalsed seosed trigonomeetriliste avaldistena nimetatakse sfäärilise kolmnurga põhivalemiteks. Neid põhivalemeid võime saada üldse 15, sest

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

Põhivalemid jaotame neljaks rühmaks.

Esimesse rühma võtame valemid, mis määravad sfäärilises kolmnurgas vahekorra kolme külje ja ühe nurga vahel, s. o.

$$\begin{aligned} a, b, c, a \\ a, b, c, \beta \\ a, b, c, \gamma, \end{aligned}$$

mis annavad kolm valemit (§ 5 — nurga koosinusvalemid).

Teise rühma võtame valemid, mis määravad vahekorra kahe külje ja nende vastasnurkade vahel, s. o.

$$\begin{aligned} a, b, \alpha, \beta \\ a, c, \alpha, \gamma \\ b, c, \beta, \gamma, \end{aligned}$$

mis annavad samuti kolm valemit (§ 6 — siinusvalemid).

Kolmandasse rühma võtame valemid, mis määravad vahekorra kahe külje ja kahe nurga vahel, kus üks nurkadest on antud külgede vaheline nurk, s. o.

$$\begin{aligned} a, b, \alpha, \gamma \\ a, b, \beta, \gamma \\ a, c, \alpha, \beta \\ a, c, \gamma, \beta \\ b, c, \beta, \alpha \\ b, c, \gamma, \alpha, \end{aligned}$$

mis annavad kuus valemit (§ 7 — kootangensvalemid).

Neljandasse rühma viime need valemid, mis määravad vahekorra ühe külje ja kolme nurga vahel, s. o.

$$\begin{aligned} a, \alpha, \beta, \gamma \\ b, \alpha, \beta, \gamma \\ c, \alpha, \beta, \gamma, \end{aligned}$$

mis annavad jälle kolm valemit (§ 8 — külje koosinusvalemid). Kokku 15 valemit.

## § 5. Nurga koosinusvalem.

1. Olgu sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  (12. joon.) kaks külge, näiteks küljed  $b$  ja  $c$ , väiksemad kui  $90^\circ$  ja kolmas külge  $a$  suurem, väiksem või võrdne  $90^\circ$ . Ühendame sfäärilise kolmnurga tipud  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kera keskpunktiga  $O$ , tõmbame külgedele  $AC$  ja  $AB$  tipus  $A$  puutujad  $AD$  ja  $AE$  ning konstrueerime kolmnurgad  $ODE$  ja  $ADE$ . Esimesest kolmnurgast

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos a$$

ja teisest kolmnurgast

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \alpha$$

Neid võrdusi teineteisest lahutades saame

$$OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos a + 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \alpha = 0.$$

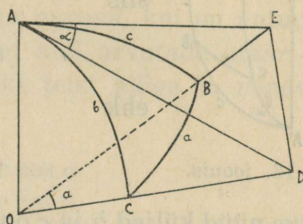
Et viimases võrduses

$$OD^2 - AD^2 = OA^2,$$

$$OE^2 - AE^2 = OA^2,$$

siis

$$2 \cdot OA^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos a + 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \alpha = 0;$$



12. joonis.

jagades saadud võrduse mõlemad pooled korrutisega  $2 \cdot OD \cdot OE$ , saame

$$\frac{OA}{OD} \cdot \frac{OA}{OE} - \cos a + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE} \cdot \cos \alpha = 0$$

ehk

$$\cos b \cos c - \cos a + \sin b \sin c \cos \alpha = 0,$$

millest

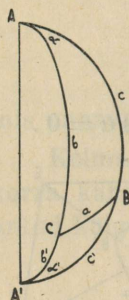
$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

mis nimetatakse sfäärilise kolmnurga nurga koosinusvalemiks. Sfäärilise kolmnurga nurga  $\alpha$  koosinusvalem väljendab funktsionaalset seost sfäärilise kolmnurga külgede  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ning nurga  $\alpha$  vahel, kui küljed  $b$  ja  $c$  on väiksemad kui  $90^\circ$  ja külge  $a$  on suurem, väiksem või võrdne  $90^\circ$ .

Kui aga sfäärilise kolmnurga  $ABC$  küljed  $b$  ja  $c$  või üks neist külgedest on suuremad kui  $90^\circ$ , s. o. kui nad on vahemikus  $90^\circ$ -st  $180^\circ$ -ni, siis jääb kehtivaks sama valem.

a) Oletame, et  $b > 90^\circ$  ja  $c > 90^\circ$ . Täiendame sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kuni sfäärilise kaksnurgani  $ABA'C$  (13. joon.),

saame sfäärilise kaaskolmnurga  $A'BC$ , milles küljed  $b' < 90^\circ$  ja  $c' < 90^\circ$  ning mille kohta kehtib seega saadud valem, s. o.



13. joonis.

Et

$$\cos \alpha' = \frac{\cos a - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'}$$

siis

$$\alpha' = \alpha, \quad b' = 180^\circ - b, \quad c' = 180^\circ - c,$$

ehk

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos (180^\circ - b) \cos (180^\circ - c)}{\sin (180^\circ - b) \sin (180^\circ - c)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

kus nüüd küljed  $b$  ja  $c$  on suuremad kui  $90^\circ$  ning külge  $a$  on suurem, väiksem või võrdne  $90^\circ$

b) Oletame, et sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  üks külge, näiteks  $b > 90^\circ$  ja teine külge  $c < 90^\circ$  (14. joon.). Täiendame selle sfäärilise kolmnurga  $ABC$  sfääriliseks kaksnurgaks  $CBC'A$ , saame sfäärilise kaaskolmnurga  $C'AB$ , milles

$$\cos \alpha' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c}{\sin b' \sin c}$$

Et siin

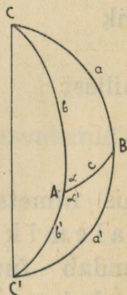
$$\alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad a' = 180^\circ - a, \quad b' = 180^\circ - b,$$

siis

$$-\cos \alpha = \frac{-\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ehk

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$



14. joonis.

Seega sfäärilise kolmnurga nurga koosinusvalem on kehtiv iga sfäärilise kolmnurga suhtes, kus küljed  $a$ ,  $b$  ja  $c$  peituvad vahemikus  $0^\circ$ -st  $180^\circ$ -ni.

Analoogiliselt võime leida vastavad valemid sfäärilise kolmnurga nurkade  $\beta$  ja  $\gamma$  jaoks.

Seega sfäärilise kolmnurga nurkade koosinusvalemid on

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

mille abil võime leida sfäärilise kolmnurga nurgad, kui on antud kolm külge. Samuti võime koosinusvalemil abil arvutada sfäärilise kolmnurga külje, kui on antud kaks teist külge ja nende vaheline nurk, s. o

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

2. Kui täisnurkses sfäärilises kolmnurgas näiteks nurk  $a = 90^\circ$ , siis  $\cos a = 0$  ja esimesest valemist saame

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

s. o. täisnurkses sfäärilises kolmnurgas hüpotenuusi koosinus on võrdne kaatetite koosinuste korrutisega. Selle valemi abil võime leida täisnurkse sfäärilise kolmnurga külje, kui on antud kaks teist külge. Selles valemis  $\cos a$  võib olla positiivne või negatiivne. Kui  $\cos a > 0$ , siis  $\cos b$  ja  $\cos c$  on ühesuguste märkidega ja seega  $b$  ja  $c$  on mõlemad väiksemad kui  $90^\circ$  või mõlemad suuremad kui  $90^\circ$ . Kui  $\cos a < 0$ , siis  $\cos b$  ja  $\cos c$  on isesuguste märkidega ja seega külgedest  $b$  ja  $c$  üks on väiksem kui  $90^\circ$  ja teine suurem kui  $90^\circ$ . Järelikult, täisnurkses sfäärilises kolmnurgas, milles on üks täisnurk, on kas kõik kolm külge väiksemad kui  $90^\circ$  või ainult üks külge on väiksem kui  $90^\circ$ .

Kui sfäärilises kolmnurgas kaks või kolm nurka on täisnurgad, siis tema lahendamiseks pole valemid vaja. Näiteks, kui  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , siis kolmanda nurga tipp  $C$  on külje  $c$  poolus ja seega  $a = b = 90^\circ$  ning  $c = \gamma$ . Kui  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ , siis ka  $a = b = c = 90^\circ$ .

3. Kui täiskülgses sfäärilises kolmnurgas külj  $a = 90^\circ$ , siis  $\cos a = 0$  ja  $\sin a = 1$  ning koosinusvalemid omavad kuju

$$\cos a = -\cot b \cot c$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b}{\sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c}{\sin b},$$

mille abil võime leida täiskülgses sfäärilises kolmnurga nurga, kui on antud otsitava nurga lähisküljed, või ühe lähiskülje antud nurgale, kui veel teine lähiskülj on teada.

## § 6. Siinusvalem.

### 1. Kasutades koosinusvalemit

$$\cos a = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

saame

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}. \end{aligned}$$

Jagame saadud võrduse mõlemad pooled  $\sin^2 a$ -ga ja juurime, saame

$$\frac{\sin a}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c},$$

kus ruutjuur on ainult pluss-märgiga, sest et sfäärilise kolmnurga küljed kui ka nurgad on väiksemad kui  $180^\circ$  ja seega nende siinused on alati positiivsed.

Et viimases võrduses parempoolne osa on sfäärilise kolmnurga kolme külje suhtes sümmeetriline, mis ei muutu, kui me kolmnurga külgi ümber asetame, siis ka

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}$$

ja

$$\frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Seega

$$\frac{\sin a}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = M,$$

mis nimetatakse sfäärilise kolmnurga siinusvalemiks, kus

$$M = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}$$

on sfäärilise kolmnurga moodul.

Siinusvalemi abil võime leida sfäärilise kolmnurga külje, kui on antud kaks nurka ja ühele nurgale vastaskül, või nurga, kui on antud kaks külge ja ühele küljele vastasnurk.

2. Kui täisnurkses sfäärilises kolmnurgas näiteks nurk  $\alpha = 90^\circ$ , siis

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin a \sin \beta \\ \sin c &= \sin a \sin \gamma,\end{aligned}$$

s. o. täisnurkses sfäärilises kolmnurgas kaateti siinus on võrdne vastasnurga ja hüpotenuusi siinuste korrutisega. Saadud valemi abil võime leida antud kaateti ja hüpotenuusi kaudu kaatetile vastasnurga, või kaateti ja tema vastasnurga kaudu hüpotenuusi, või hüpotenuusi ja nurga kaudu nurgale vastaskaateti.

3. Kui täiskülgses sfäärilises kolmnurgas külg  $\alpha = 90^\circ$ , siis

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin a \sin b \\ \sin \gamma &= \sin a \sin c,\end{aligned}$$

mille abil võime leida sfäärilise kolmnurga külje, kui on antud otsitavale küljele ja täisküljele vastasnurgad, või nurga, kui on antud otsitavale nurgale vastaskül ja täisküljele vastasnurk, või täisküljele vastasnurga, kui on antud külge ja tema vastasnurk.

## § 7. Kootangensvalem.

1. Märgime koosinusvalemi kujus

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

ja paigutame  $\cos c$  ja  $\sin c$  asemele

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

ja

$$\sin c = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin a},$$

saame

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \\ &+ \frac{\sin a \sin b \cos a \sin \gamma}{\sin a}, \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} \cos a(1 - \cos^2 b) &= \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \\ &+ \sin a \sin b \cot a \sin \gamma \end{aligned}$$

ehk

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \sin a \sin b \cot a \sin \gamma.$$

Jagame viimase võrduse mõlemad pooled  $\sin a \sin b$ -ga, saame

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot a \sin \gamma,$$

mis nimetatakse sfäärilise kolmnurga kootangensvalemiks. Kootangensvalem väljendab funktsionaalset seost sfäärilise kolmnurga kahe külje ja kahe nurga vahel, kus üks nurkadest on antud külgede vaheline nurk või üks külgedest on antud nurkade vaheline külge.

Arvutades analoogiliselt eelmisega ja arvestades kõiki võimalusi sfäärilise kolmnurga külgede ja nurkade suhtes, võime märkida kuus kootangensvalemit:

$$\cot a \sin b = \cot a \sin \gamma + \cos b \cos \gamma$$

$$\cot a \sin c = \cot a \sin \beta + \cos c \cos \beta$$

$$\cot b \sin a = \cot \beta \sin \gamma + \cos a \cos \gamma$$

$$\cot b \sin c = \cot \beta \sin \alpha + \cos c \cos \alpha$$

$$\cot c \sin a = \cot \gamma \sin \beta + \cos a \cos \beta$$

$$\cot c \sin b = \cot \gamma \sin \alpha + \cos b \cos \alpha,$$

mille abil võime leida sfäärilise kolmnurga külje, kui on antud

kaks nurka ja nende vaheline kül, või nurga, kui on antud kaks külge ja nende vaheline nurk.

2. Kui täisnurkses sfäärilises kolmnurgas nurk  $\alpha = 90^\circ$ , siis

$$\cot a = \cot b \cos \gamma$$

$$\cot a = \cot c \cos \beta$$

$$\cot b \sin c = \cot \beta$$

$$\cot c \sin b = \cot \gamma$$

või muutes saadud võrdustes kootangensid tangensiteks, saame

$$\tan b = \tan a \cos \gamma$$

$$\tan c = \tan a \cos \beta$$

$$\tan b = \sin c \tan \beta$$

$$\tan c = \sin b \tan \gamma,$$

kus esimesed kaks valemit näitavad, et kaateti tangens on võrdne lähisnurga koosinuse ja hüpotenuusi tangensi korrutisega, ning kaks viimast valemit näitavad, et kaateti tangens on võrdne vastasnurga tangensi ja teise kaateti siinuse korrutisega. Neid valemeid võime kasutada täisnurkse sfäärilise kolmnurga puhul, kui on antud kaks külge või üks külge ja nurk.

Kahest viimasest valemist nähtub, et täisnurkse sfäärilise kolmnurga kaatet ja temale vastasnurk on mõlemad kas väiksemad kui  $90^\circ$  või mõlemad suuremad kui  $90^\circ$ , sest külje siinus on ikka positiivne ja seega kaateti ja temale vastasnurga tangensid on siis ühesuguste märkidega.

3. Kui täiskülgses sfäärilises kolmnurgas külge  $a = 90^\circ$ , siis

$$\cot a + \cos b \cot \gamma = 0$$

$$\cot a + \cos c \cot \beta = 0$$

$$\cot b = \cot \beta \sin \gamma$$

$$\cot c = \cot \gamma \sin \beta$$

ehk tangensite kaudu

$$\tan \beta = -\tan a \cos c$$

$$\tan \gamma = -\tan a \cos b$$

$$\tan \beta = \sin \gamma \tan b$$

$$\tan \gamma = \sin \beta \tan c.$$

Neid valemeid võime kasutada, kui on antud üks külge ja üks nurk, või kaks nurka.

## § 8. Külje koosinusvalem.

1. Olgu sfäärilise kolmnurga küljed  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ning nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ , polaarkolmnurga vastavad küljed  $a_1$ ,  $b_1$  ja  $c_1$  ning nurgad  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ja  $\gamma_1$ .

Polaarkolmnurga nurga  $\alpha_1$  koosinusvalem on

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos a_1 - \cos b_1 \cos c_1}{\sin b_1 \sin c_1},$$

kus

$$\alpha_1 = 180^\circ - a, \quad a_1 = 180^\circ - \alpha, \quad b_1 = 180^\circ - \beta, \quad c_1 = 180^\circ - \gamma.$$

Asetades saame

$$-\cos a = \frac{-\cos a - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

ehk

$$\cos a = \frac{\cos a + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma},$$

mis nimetatakse sfäärilise kolmnurga külje koosinusvalemiks. Sfäärilise kolmnurga külje  $a$  koosinusvalem väljendab funktsionaalset seost sfäärilise kolmnurga kolme nurga ja külje  $a$  vahel.

Analoogiliselt võime leida vastavad valemid sfäärilise kolmnurga külgede  $b$  ja  $c$  jaoks.

Seega sfäärilise kolmnurga külgede koosinusvalemid on

$$\cos a = \frac{\cos a + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta + \cos a \cos \gamma}{\sin a \sin \gamma}$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos a \cos \beta}{\sin a \sin \beta},$$

mille abil võime leida sfäärilise kolmnurga küljed, kui on antud kolm nurka. Samuti võime koosinusvalemi abil arvutada ka sfäärilise kolmnurga nurga, kui on antud kaks teist nurka ja nende vaheline külge.

2. Kui täisnurkses sfäärilises kolmnurgas nurk  $\alpha = 90^\circ$ , siis

$$\cos a = \cot \beta \cot \gamma$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}$$

s. o. täisnurkses sfäärilises kolmnurgas hüpoteenuusi koosinus on võrdne hüpoteenuusi lähisnurkade kootangensite korrutisega ja kaateti koosinus on võrdne vastasnurga koosinuse ja lähisnurga siinuse jagatisega. Nende valemite abil võime lahendada täisnurkset sfäärilist kolmnurka, kui on antud kaks nurka või üks külge ja üks nurk.

3. Kui täiskülgses sfäärilises kolmnurgas külge  $a = 90^\circ$ , siis saame

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma,$$

mis võimaldab kolmnurga nurga leidmise, kui teised kaks nurka on teada. Selles valemis  $\cos \alpha$  võib olla positiivne või negatiivne. Kui  $\cos \alpha > 0$ , siis  $\cos \beta$  ja  $\cos \gamma$  on isesuguste märkidega ja seega nurkadest  $\beta$  ja  $\gamma$  üks on väiksem kui  $90^\circ$  ja teine on suurem kui  $90^\circ$ . Kui  $\cos \alpha < 0$ , siis  $\cos \beta$  ja  $\cos \gamma$  on ühesuguste märkidega ja seega  $\beta$  ja  $\gamma$  on mõlemad väiksemad kui  $90^\circ$  või mõlemad suuremad kui  $90^\circ$ . Järelikult täiskülgses sfäärilises kolmnurgas, milles on üks täiskülge, on kõik kolm nurka suuremad kui  $90^\circ$  või ainult üks nurk on suurem kui  $90^\circ$ .

Kui sfäärilises kolmnurgas on kaks või kolm täiskülge, siis tema lahendamiseks valemiteid pole vaja. Sest kui näiteks  $a = b = 90^\circ$ , siis nurga  $\gamma$  tipp on külge  $c$  poolus ja seega  $a = \beta = 90^\circ$  ning  $\gamma = c$ . Kui  $a = b = c = 90^\circ$ , siis ka  $a = \beta = \gamma = 90^\circ$ .

## § 9. Täisnurkne sfääriline kolmnurk.

Kui sfäärilises kolmnurgas näiteks nurk  $\alpha$  on täisnurk, siis selle täisnurkse sfäärilise kolmnurga lahendamiseks on peale täisnurga  $a$  veel vajalik teada kaks teist põhielementi. Seega esineb täisnurkse sfäärilise kolmnurga lahendamisel kuus juhtu, s. o. kui on antud

- 1) kaks kaatetit:  $b, c$ ;
- 2) hüpoteenus ja kaatet:  $a, b; a, c$ ;
- 3) hüpoteenus ja lähisnurk:  $a, \beta, a, \gamma$ ;
- 4) kaatet ja lähisnurk:  $b, \gamma; c, \beta$ ;
- 5) kaks kaatetite vastasnurka:  $\beta, \gamma$ ;
- 6) kaatet ja vastasnurk:  $b, \beta; c, \gamma$ .

Täisnurkse sfäärilise kolmnurga lahendamisel kasutame vastavaid valemeid täisnurkse kolmnurga jaoks leitud valemitest:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\sin b = \sin a \sin \beta$$

$$\sin c = \sin a \sin \gamma$$

$$\tan b = \tan a \cos \gamma$$

$$\tan c = \tan a \cos \beta$$

$$\tan b = \sin c \tan \beta$$

$$\tan c = \sin b \tan \gamma$$

$$\cos a = \cot \beta \cot \gamma$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}$$

1) Esimesel juhul, kui on antud kaatetid  $b$  ja  $c$ , kasutame valemeid

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\tan \beta = \frac{\tan b}{\sin c}$$

$$\tan \gamma = \frac{\tan c}{\sin b}$$

mis võimaldavad ühese lahenduse.

Esimesest valemist nähtub, et täisnurkses sfäärilises kolmnurgas hüpotenuus on  $< 90^\circ$ , kui mõlemad kaated on  $\leq 90^\circ$ , ja hüpotenuus on  $> 90^\circ$ , kui üks kaatet on  $< 90^\circ$  ja teine kaatet on  $> 90^\circ$ . Tähendab, täisnurkses sfäärilises kolmnurgas on kas kõik küljed  $< 90^\circ$  või ainult üks külgedest on  $< 90^\circ$ .

Viimased kaks valemit näitavad, et kaatet ja sellele kaatetile vastasnurk on mõlemad  $\leq 90^\circ$ . Seega täisnurkses sfäärilises kolmnurgas kaatet ja temale vastasnurk asetsevad ikka ühes ja samas ringi veerandis.

2) Teisel juhul, kui on antud hüpotenuus  $a$  ja üks kaatetest, näiteks  $b$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\cos c &= \frac{\cos a}{\cos b} \\ \sin \beta &= \frac{\sin b}{\sin a} \\ \cos \gamma &= \frac{\tan b}{\tan a},\end{aligned}$$

mis võimaldavad lahenduse ainult siis, kui  $\sin b \leq \sin a$ . Teise valemi järgi tekkiv näiv kahesus nurga  $\beta$  suhtes kaob sellega, et nurk  $\beta$  asetseb samas ringi veerandis, milles asetseb vastav kaatet  $b$ . Siin  $b$  ja  $\beta$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$  ning seega on lahendus ühene.

Erijuhul, kui  $a = b = 90^\circ$ , siis teise valemi järgi ka  $\beta = 90^\circ$ , kuid  $c$  ja  $\gamma$  jäävad esimese ja kolmanda valemi järgi määramata.

3) Kolmandal juhul, kui on antud hüpotenuus  $a$  ja üks tema lähisnurkadest, näiteks  $\beta$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin a \sin \beta \\ \tan c &= \tan a \cos \beta \\ \cot \gamma &= \frac{\cos a}{\cot \beta}.\end{aligned}$$

Siin  $b$  ja  $\beta$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$ , sest kaatet  $b$  asetseb samas ringi veerandis, milles asetseb nurk  $\beta$ . Seega on lahendus ühene.

4) Neljandal juhul, kui on antud kaatet ja sellele kaatetile lähisnurk, näiteks  $b$  ja  $\gamma$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\tan b}{\cos \gamma} \\ \tan c &= \sin b \tan \gamma \\ \cos \beta &= \cos b \sin \gamma,\end{aligned}$$

mis annavad ühese lahenduse.

5) Viiel juhul, kui on antud kaatetite vastasnurgad  $\beta$  ja  $\gamma$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\cos a &= \cot \beta \cot \gamma \\ \cos b &= \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \\ \cos c &= \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.\end{aligned}$$

Nende valemite järgi lahendus on ühene ja võimalik ainult siis, kui

$$\begin{aligned}90^\circ \leq \beta + \gamma \leq 270^\circ \\ -90^\circ \leq \beta - \gamma \leq 90^\circ.\end{aligned}$$

Et käesolevate valemite järgi peab olema

$$\begin{aligned}-1 \leq \cot \beta \cot \gamma \leq 1 \\ \cos \beta \leq \sin \gamma \\ \cos \gamma \leq \sin \beta,\end{aligned}$$

siis, kui  $\gamma \leq 90^\circ$ , peitub  $\beta$  väärtus  $90^\circ - \gamma$  ja  $90^\circ + \gamma$  vahel, s. o.

$$90^\circ - \gamma \leq \beta \leq 90^\circ + \gamma,$$

ja kui  $\gamma \geq 90^\circ$ , peitub  $\beta$  väärtus  $90^\circ - (180^\circ - \gamma)$  ja  $90^\circ + (180^\circ - \gamma)$  vahel, s. o.

$$\gamma - 90^\circ \leq \beta \leq 270^\circ - \gamma.$$

Neist võrdusvõrratustest leiame, et

$$\begin{aligned}90^\circ \leq \beta + \gamma \leq 270^\circ \\ -90^\circ \leq \beta - \gamma \leq 90^\circ.\end{aligned}$$

6) Kuuendal juhul, kui on antud kaatet ja sellele kaatetile vastasnurk, näiteks  $b$  ja  $\beta$ , kasutame valemeid

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

$$\sin c = \frac{\tan b}{\tan \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{\cos \beta}{\cos b}$$

Siin on lahendus võimalik ainult siis, kui  $\sin b \leq \sin \beta$  ning  $b$  ja  $\beta$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$ . Kui  $\sin b < \sin \beta$  ning  $b$  ja  $\beta$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$ , siis saame kahese lahenduse. Märgitud valemite järgi saame lahendid:

$$a_1 \text{ ja } a_2 = 180^\circ - a_1$$

$$c_1 \text{ ja } c_2 = 180^\circ - c_1$$

$$\gamma_1 \text{ ja } \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1,$$

mis määravad kaks täisnurkset kaaskolmnurka  $ABC$  ja  $AB'C$  (15. joon.). Juhul, kui  $b = \beta$ , on kaaskolmnurgad kongruentsed võrdkülgised kolmnurgad. Sel juhul loeme lahenduse üheseks.

Kui aga  $b = \beta = 90^\circ$ , siis esimese valemi järgi ka  $a = 90^\circ$ , kuid  $c$  ja  $\gamma$  jäävad teise ja kolmanda valemi järgi määramata.

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas täisnurgaga  $\alpha$  on antud

$$a = 142^\circ 15' 48'', \quad \beta = 145^\circ 30' 26'',$$

siis

$$\sin b = \sin a \sin \beta = \sin 142^\circ 15' 48'' \cdot \sin 145^\circ 30' 26''$$

$$\tan c = \tan a \cos \beta = \tan 142^\circ 15' 48'' \cdot \cos 145^\circ 30' 26''$$

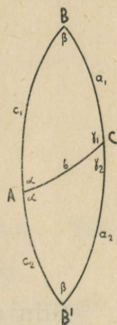
$$\cot \gamma = \frac{\cos a}{\cot \beta} = \frac{\cos 142^\circ 15' 48''}{\cot 145^\circ 30' 26''},$$

mida logaritmidest leiame, et

$$\log \sin b = \bar{1},53982$$

$$\log \tan c = \bar{1},80472$$

$$\log \cot \gamma = \bar{1},73509,$$



15. joonis.

millest

$$b = 159^{\circ} 43' 16'', \quad c = 32^{\circ} 31' 55'', \quad \gamma = 61^{\circ} 28' 56''.$$

Siin on  $b > 90^{\circ}$ , sest et  $\beta > 90^{\circ}$ , ehk — nagu näeme — suurema nurga vastas peab olema suurem külg, s. o. kui  $\beta > \alpha$ , siis ka  $b > a$ .

## § 10. Täiskülgne sfääriline kolmnurk.

Täiskülgse sfäärilise kolmnurga lahendamisel on peale täiskülje  $a$  samuti vajalik veel teada kaks teist põhielementi. Täiskülgsete sfääriliste kolmnurkade lahendamisel kasutame nende lahendamiseks eespool-leitud valemeid:

$$\cos \alpha = -\cot b \cot c$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b}{\sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c}{\sin b}$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin b$$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin c$$

$$\tan \beta = -\tan \alpha \cos c$$

$$\tan \gamma = -\tan \alpha \cos b$$

$$\tan \beta = \sin \gamma \tan b$$

$$\tan \gamma = \sin \beta \tan c$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma.$$

Siin esinevad kolmnurga külgede suhtes samad juhud, mis esinesid täisnurkse sfäärilise kolmnurga nurkade suhtes, ja nurkade suhtes samad juhud, mis esinevad täisnurkse sfäärilise kolmnurga külgede suhtes. Seega esineb täiskülgse sfäärilise kolmnurga lahendamisel samuti kuus juhtu, s. o. kui peale täiskülje  $a$  on antud:

- 1) täiskülje lähisnurgad  $\beta$  ja  $\gamma$ ;
- 2) täiskülje vastasnurk  $\alpha$  ja üks lähisnurkadest  $\beta$  või  $\gamma$ ;
- 3) täiskülje vastasnurk  $\alpha$  ja üks külgedest  $b$  või  $c$ ;
- 4) nurk  $\beta$  ja tema lähiskülg  $c$ , või nurk  $\gamma$  ja lähiskülg  $b$ ;

5) kaks külge  $b$  ja  $c$  ;

6) nurk  $\beta$  ja tema vastaskülge  $b$  , või nurk  $\gamma$  ja vastaskülge  $c$  .

1) Esimesel juhul, kui on antud täiskülje  $a$  lähisnurgad  $\beta$  ja  $\gamma$  , kasutame valemeid

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma$$

$$\tan b = \frac{\tan \beta}{\sin \gamma}$$

$$\tan c = \frac{\tan \gamma}{\sin \beta} ,$$

mis annavad ühese lahenduse.

Esimesest valemist nähtub, et täiskülgses sfäärilises kolmnurgas võivad olla kõik kolm nurka  $> 90^\circ$  või ainult üks nurk on  $> 90^\circ$  .

Viimased kaks valemit näitavad, et kui  $\beta \leq 90^\circ$  ja  $\gamma \leq 90^\circ$  , siis ka vastavalt  $b \leq 90^\circ$  ja  $c \leq 90^\circ$  .

2) Teisel juhul, kui on antud täiskülje  $a$  vastasnurk  $\alpha$  ja üks lähisnurkadest, näiteks  $\beta$  , kasutame valemeid

$$\cos \gamma = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\sin b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\cos c = -\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} ,$$

mis võimaldavad lahenduse ainult siis, kui  $\sin \beta \leq \sin \alpha$  . Siin  $\beta$  ja  $b$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$  ja seega esineb ühene lahendus.

Kui siin  $\alpha = \beta = 90^\circ$  , siis teise valemi järgi ka  $b = 90^\circ$  , kuid  $\gamma$  ja  $c$  jäävad esimese ja kolmanda valemi järgi määramata.

3) Kolmandal juhul, kui on antud täiskülje vastasnurk  $\alpha$  ja nurga  $\alpha$  üks lähiskülgedest, näiteks  $b$  , kasutame valemeid

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin b$$

$$\tan \gamma = -\tan \alpha \cos b$$

$$\cot c = -\frac{\cos \alpha}{\cot b} ,$$

mis määravad ühese lahenduse, sest et siin  $\beta$  ja  $b$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$  .

4) Neljandal juhul, kui on antud näiteks nurk  $\beta$  ja tema lähiskülg  $c$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\frac{\tan \beta}{\cos c} \\ \tan \gamma &= \sin \beta \tan c \\ \cos b &= \cos \beta \sin c,\end{aligned}$$

mis annavad ühese lahenduse.

5) Viiendal juhul, kui on antud küljed  $b$  ja  $c$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\cot b \cot c \\ \cos \beta &= \frac{\cos b}{\sin c} \\ \cos \gamma &= \frac{\cos c}{\sin b},\end{aligned}$$

mis võimaldavad ühese lahenduse ainult siis, kui

$$\begin{aligned}90^\circ &\leq b + c \leq 270^\circ \\ -90^\circ &\leq b - c \leq 90^\circ.\end{aligned}$$

6) Kuuendal juhul, kui on antud näiteks nurk  $\beta$  ja tema vastaskülg  $b$ , kasutame valemeid

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\sin \beta}{\sin b} \\ \sin \gamma &= \frac{\tan \beta}{\tan b} \\ \sin c &= \frac{\cos b}{\cos \beta},\end{aligned}$$

mis võimaldavad kahese lahenduse, kui  $\sin \beta < \sin b$  ning  $\beta$  ja  $b$  on mõlemad  $\leq 90^\circ$ . Juhul, kui  $\beta = b$ , on lahendus ühene.

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas  $a$  on täiskülg ja

$$\alpha = 78^\circ 32' 18'', \quad \beta = 110^\circ 14' 52'',$$

siis

$$\begin{aligned}\sin b &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 110^\circ 14' 52''}{\sin 78^\circ 32' 18''} \\ \cos c &= -\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = -\frac{\tan 110^\circ 14' 52''}{\tan 78^\circ 32' 18''} \\ \cos \gamma &= -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -\frac{\cos 78^\circ 32' 18''}{\cos 110^\circ 14' 52''},\end{aligned}$$

mille logaritmid on

$$\log \sin b = \bar{1},98105$$

$$\log \cos c = \bar{1},74010$$

$$\log \cos \gamma = \bar{1},75904,$$

kust

$$b = 106^{\circ} 48' 16'', \quad c = 56^{\circ} 39' 21'', \quad \gamma = 54^{\circ} 57' 30''.$$

Siin on  $b > 90^{\circ}$ , sest  $\beta > \alpha$ .

## § 11. Siinus-koosinusvalemid.

a) Paigutame nurga koosinusvalemisse

$$\cos a = \sin b \sin c \cos \alpha + \cos b \cos c$$

$\cos c$  asemele

$$\cos c = \sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b,$$

saame

$$\cos a = \sin b \sin c \cos \alpha + \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \cos a \cos^2 b,$$

millest

$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \sin b \sin c \cos \alpha + \sin a \sin b \cos b \cos \gamma$$

ehk

$$\cos a \sin b = \sin c \cos \alpha + \sin a \cos b \cos \gamma.$$

Saadud valem väljendab sfäärilise kolmnurga kolme külje ja kahe nurga seost.

Analoogiliselt arvatades võime märkida kõik võimalikud valemid

$$\cos a \sin b = \sin c \cos \alpha + \sin a \cos b \cos \gamma$$

$$\cos a \sin c = \sin b \cos \alpha + \sin a \cos c \cos \beta$$

$$\cos b \sin a = \sin c \cos \beta + \sin b \cos a \cos \gamma$$

$$\cos b \sin c = \sin a \cos \beta + \sin b \cos c \cos \alpha$$

$$\cos c \sin a = \sin b \cos \gamma + \sin c \cos a \cos \beta$$

$$\cos c \sin b = \sin a \cos \gamma + \sin c \cos b \cos \alpha,$$

mille abil saab lahendada sfäärilist kolmnurka, kui on antud kolm külge ja üks nurk või kaks külge ja kaks nurka.

## b) Siinusvalemist

$$\frac{\sin a}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = M$$

saame

$$\sin a = \frac{\sin a}{M}, \quad \sin b = \frac{\sin \beta}{M}, \quad \sin c = \frac{\sin \gamma}{M}.$$

Paigutame need väärtused eelmistesse valemitesse  $\sin a$ ,  $\sin b$  ja  $\sin c$  asemele, saame

$$\begin{aligned} \cos a \sin \beta &= \sin \gamma \cos a + \sin a \cos b \cos \gamma \\ \cos a \sin \gamma &= \sin \beta \cos a + \sin a \cos c \cos \beta \\ \cos b \sin a &= \sin \gamma \cos \beta + \sin \beta \cos a \cos \gamma \\ \cos b \sin \gamma &= \sin a \cos \beta + \sin \beta \cos c \cos a \\ \cos c \sin a &= \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos a \cos \beta \\ \cos c \sin \beta &= \sin a \cos \gamma + \sin \gamma \cos b \cos a. \end{aligned}$$

Korraldades need saadused eelmise valemiterühma kohaselt, võime märkida viimased valemid järgmiselt:

$$\begin{aligned} \cos a \sin \beta &= \sin \gamma \cos a - \sin a \cos \beta \cos c \\ \cos a \sin \gamma &= \sin \beta \cos a - \sin a \cos \gamma \cos b \\ \cos \beta \sin a &= \sin \gamma \cos \beta - \sin \beta \cos a \cos c \\ \cos \beta \sin \gamma &= \sin a \cos \beta - \sin \beta \cos \gamma \cos a \\ \cos \gamma \sin a &= \sin \beta \cos c - \sin \gamma \cos a \cos b \\ \cos \gamma \sin \beta &= \sin a \cos c - \sin \gamma \cos \beta \cos a, \end{aligned}$$

mis väljendavad sfäärilise kolmnurga kolme nurga ja kahe külje seost. Nende valemite abil saab lahendada sfäärilist kolmnurka, kui on antud kolm nurka ja üks külg või kaks nurka ja kaks külge.

## § 12. Poolnurga valemid.

Asendame valemites

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad \text{ja} \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$\cos a$  nurga koosinusvalemist avaldisega

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

saame

$$\begin{aligned}\sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c}}.\end{aligned}$$

Kui tähistame sfäärilise kolmnurga külgede summa  $2s$ -ga, s. o.

$$a + b + c = 2s,$$

siis

$$a + b - c = 2(s - c)$$

$$a - b + c = 2(s - b)$$

$$b + c - a = 2(s - a)$$

ja

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Jagades teineteisega saadud võrdused, saame

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

Ruutjuured esinevad siin ainult pluss-märgiga, sest et  $\frac{a}{2} < 90^\circ$ , mille trigonomeetrilised funktsioonid on ikka positiivsed.

Analoogiliselt võime leida sfäärilise kolmnurga teiste pool-

nurkade trigonomeetrilised funktsioonid ja seega saada kõik poolnurga valemid:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

Need logaritmitavas kujus esinevad valemid väljendavad funktsionaalset seost sfäärilise kolmnurga kolme külje ja ühe nurga vahel ning neid kasutatakse sfäärilise kolmnurga nurkade leidmisel, kui on antud kolm külge.

### § 13. Poolkülje valemid.

Kui sfäärilise kolmnurga küljed ja nurgad on

$$a, b, c, \quad \alpha, \beta, \gamma,$$

siis tema polaarkolmnurga vastavad küljed ja nurgad on

$$a_1 = 180^\circ - \alpha \quad \alpha_1 = 180^\circ - a$$

$$b_1 = 180^\circ - \beta \quad \beta_1 = 180^\circ - b$$

$$c_1 = 180^\circ - \gamma \quad \gamma_1 = 180^\circ - c$$

ning nende külgede summa

$$\begin{aligned}2s_1 &= 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = \\ &= 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) = 360^\circ - \varepsilon,\end{aligned}$$

millest

$$s_1 = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kohaldades poolnurga valemeid polaarkolmnurga suhtes, milles

$$\sin \frac{a_1}{2} = \sin \frac{180^\circ - a}{2} = \cos \frac{a}{2} \quad \cos \frac{a_1}{2} = \cos \frac{180^\circ - a}{2} = \sin \frac{a}{2}$$

$$\sin \frac{\beta_1}{2} = \sin \frac{180^\circ - b}{2} = \cos \frac{b}{2} \quad \cos \frac{\beta_1}{2} = \cos \frac{180^\circ - b}{2} = \sin \frac{b}{2}$$

$$\sin \frac{\gamma_1}{2} = \sin \frac{180^\circ - c}{2} = \cos \frac{c}{2} \quad \cos \frac{\gamma_1}{2} = \cos \frac{180^\circ - c}{2} = \sin \frac{c}{2}$$

ja

$$s_1 - a_1 = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2} - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s_1 - b_1 = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2} - (180^\circ - \beta) = \beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s_1 - c_1 = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2} - (180^\circ - \gamma) = \gamma - \frac{\varepsilon}{2},$$

saame

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin a \sin \gamma}}$$

$$\sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin a \sin \beta}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left( \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left( \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin a \sin \gamma}}$$

$$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin a \sin \beta}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

$$\tan \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

kus  $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ .

Saadud valemid väljendavad vahekorda ühe külje ja kolme nurga vahel. Sfäärilise kolmnurga lahendamisel nende valemite abil leitakse sfäärilise kolmnurga küljed, kui on antud tema nurgad.

## § 14. Delambre'i ja Napier'i valemid.

1. Paigutame nurkade summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemitesse

$$\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

ja

$$\cos \frac{\alpha \pm \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

poolnurga funktsioonide  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \frac{\beta}{2}$  ja  $\cos \frac{\beta}{2}$  asemele

nende väärtused (§ 12), saame

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin^2 (s-b) \sin (s-c)}{\sin a \sin b \sin^2 c}} \pm \sqrt{\frac{\sin s \sin^2 (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin b \sin^2 c}} = \\ &= \frac{\sin (s-b) \pm \sin (s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}} = \\ &= \frac{\sin (s-b) \pm \sin (s-a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha \pm \beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin^2 s \sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b \sin^2 c}} \mp \\ &\mp \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin^2 (s-c)}{\sin a \sin b \sin^2 c}} = \\ &= \frac{\sin s \mp \sin (s-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin s \mp \sin (s-c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sin (s-b) + \sin (s-a) &= 2 \sin \left( s - \frac{a+b}{2} \right) \cos \frac{a-b}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin (s-b) - \sin (s-a) &= 2 \cos \left( s - \frac{a+b}{2} \right) \sin \frac{a-b}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{c}{2} \sin \frac{a-b}{2},\end{aligned}$$

$$\sin s - \sin (s-c) = 2 \cos \left( s - \frac{c}{2} \right) \sin \frac{c}{2} = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{c}{2},$$

$$\sin s + \sin (s-c) = 2 \sin \left( s - \frac{c}{2} \right) \cos \frac{c}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{c}{2},$$

$$\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2},$$

siis

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Neid valemid nimetatakse Delambre'i valemiteks, mis väljendavad funktsionaalset seost sfäärilise kolmnurga kõigi külgede ja nurkade vahel.

Kõik võimalikud Delambre'i valemid on:

$$\frac{\sin \frac{a+\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{a+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{a+\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{a+\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{a+c}{2}}{\cos \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{a-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{a-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{a-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{a-c}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{a-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{a+c}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \qquad \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

2. Delambre'i valemitest saame jagamise teel nn. Napier'i valemid ehk analoogiad:

$$\frac{\tan \frac{a+\beta}{2}}{\cot \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \qquad \frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{a-\beta}{2}}{\cos \frac{a+\beta}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{a+\gamma}{2}}{\cot \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{a+c}{2}} \qquad \frac{\tan \frac{a+c}{2}}{\tan \frac{b}{2}} = \frac{\cos \frac{a-\gamma}{2}}{\cos \frac{a+\gamma}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{b - c}{2}}{\cos \frac{b + c}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{b + c}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cot \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{a - b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\cot \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{a - c}{2}}{\sin \frac{a + c}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{a - c}{2}}{\tan \frac{b}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{b - c}{2}}{\sin \frac{b + c}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{b - c}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}$$

mis väljendavad sõltuvust sfäärilise kolmnurga kolme nurga ja kahe külje või kolme külje ja kahe nurga vahel.

Napier'i analoogiad koos Delambre'i valemitega leiavad sageli rakendamist astronoomias ja geodeesias.

## § 15. Cagnoli' ja l'Huilier'i valemid.

### 1. Korrutame sfäärilise kolmnurga poolkülje valemid

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

ja

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \alpha \sin \gamma}},$$

saame

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{\sin \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left( \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \alpha \sin \beta}}$$

ehk

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \gamma} \cos \frac{c}{2},$$

millest

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \gamma.$$

Et

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \\ &= \frac{2\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin a \sin b} = \\ &= \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2}}, \end{aligned}$$

siis

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

mida nimetatakse Cagnoli' valemiks ja mille abil leitakse sfääriline ekstsess  $\varepsilon$ , kui on antud sfäärilise kolmnurga kolm külge  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

Siin tuleb võtta ruutjuur ainult pluss-märgiga, sest et

$\frac{\varepsilon}{2} < 180^\circ$ , mille siinus on alati positiivne.

2. Koostame Delambre'i valemitest

$$\frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

järgmised tuletatud võrded

$$\frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a + b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

Et

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon,$$

millest

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma - \varepsilon}{2}$$

ja

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma - \varepsilon}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma - \varepsilon}{2},$$

siis

$$\frac{\cos \frac{\gamma - \varepsilon}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma - \varepsilon}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\gamma - \varepsilon}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma - \varepsilon}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a + b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

ehk (kasutades siinuste ja koosinuste summa ja vahe valemeid)

$$\frac{\sin \frac{2\gamma - \varepsilon}{4} \sin \frac{\varepsilon}{4}}{\cos \frac{2\gamma - \varepsilon}{4} \cos \frac{\varepsilon}{4}} = \frac{\sin \frac{a - b + c}{4} \sin \frac{b - a + c}{4}}{\cos \frac{a - b + c}{4} \cos \frac{b - a + c}{4}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{s - b}{2} \sin \frac{s - a}{2}}{\cos \frac{s - b}{2} \cos \frac{s - a}{2}} = \tan \frac{s - b}{2} \tan \frac{s - a}{2},$$

$$\frac{\cos \frac{2\gamma - \varepsilon}{4} \sin \frac{\varepsilon}{4}}{\sin \frac{2\gamma - \varepsilon}{4} \cos \frac{\varepsilon}{4}} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{4} \sin \frac{a+b-c}{4}}{\cos \frac{a+b+c}{4} \cos \frac{a+b-c}{4}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{s}{2} \sin \frac{s-c}{2}}{\cos \frac{s}{2} \cos \frac{s-c}{2}} = \tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-c}{2}.$$

Korrutades ja juurides saadud võrdusi, leiame

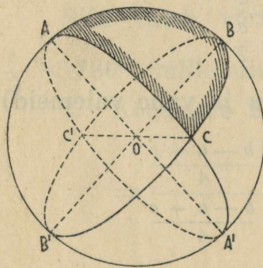
$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}},$$

mida nimetatakse l'Huillier'i valemiks ja mille abil võib samuti leida sfäärilise ekstsessi  $\varepsilon$  väärtuse, kui on antud sfäärilise kolmnurga küljed  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

Siin tuleb ruutjuur samuti võtta ainult pluss-märgiga, sest  $\frac{\varepsilon}{4} < 90^\circ$ , mille tangens on ikka positiivne.

## § 16. Sfäärilise kolmnurga pindala.

Sfäärilise kolmnurga  $ABC$  (16. joon.) pindala  $S$  leidmiseks pikendame sfäärilise kolmnurga küljed  $AB$ ,  $AC$  ja  $BC$  suuringideks, mis moodustavad siis kaheksa sfäärilist kolmnurka



16. joonis.

$ABC$ ,  $ABC'$ ,  $AB'C$ ,  $AB'C'$ ,  
 $A'B'C'$ ,  $A'B'C$ ,  $A'BC'$ ,  $A'BC$ ,

milledest sümmeetrilised paarid on

$ABC$  ja  $A'B'C'$ ,  $ABC'$  ja  $A'B'C$ ,  
 $AB'C$  ja  $A'BC'$ ,  $AB'C'$  ja  $A'BC$ .

Olgu sfäärilise kolmnurga  $ABC$  nurgad

$$\widehat{BAC} = \alpha, \quad \widehat{ABC} = \beta, \quad \widehat{ACB} = \gamma.$$

Sfäärilised kaaskolmnurgad  $ABC$  ja  $A'BC$  moodustavad sfääri-

lise kaksnurga  $ABA'C$ , mille pindala muutub võrdeliselt nur-  
gaga  $\alpha$ . Seega võrre

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\text{pindala } (ABA'C)}{4\pi R^2}$$

määrab sfäärilise kaksnurga  $ABA'C$  pindala, s. o.

$$\text{pindala } (ABA'C) = \frac{2\pi R^2 \alpha}{180^\circ},$$

kus  $R$  on kera raadius.

Sfääriliste kaksnurkade pindalaid

$$ABA'C = ABC + A'BC = \frac{2\pi R^2 \alpha}{180^\circ}$$

$$ACB'B' = ABC + AB'C = \frac{2\pi R^2 \beta}{180^\circ}$$

$$ACB'C' = ABC + ABC' = \frac{2\pi R^2 \gamma}{180^\circ}$$

liites saame

$$2S + ABC + A'BC + AB'C + ABC' = \frac{2\pi R^2}{180^\circ} (\alpha + \beta + \gamma).$$

Et sfäärilised kolmnurgad  $ABC'$  ja  $A'BC$  on sümmeetrilised, siis  
on nende pindalad võrdsed ja seega  $ABC + A'BC + AB'C + ABC'$   
moodustab pool kerapindala, s. o.  $2\pi R^2$ . Seega

$$2S + 2\pi R^2 = \frac{2\pi R^2}{180^\circ} (\alpha + \beta + \gamma),$$

millest

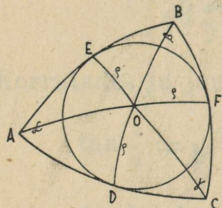
$$S = \frac{\pi R^2}{180^\circ} (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^\circ}.$$

Kui  $R = 1$ , siis

$$S = \frac{\pi \varepsilon}{180^\circ}.$$

## § 17. Sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringi kaarraadius.

1. Poolitame sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  (17. joon.) nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  suurringide kaartega  $AO$  ja  $BO$ , mis lõikuvad punktis  $O$ .



17. joonis.

Punktist  $O$  tõmbame suurringide kaared  $OD$ ,  $OE$  ja  $OF$  risti sfäärilise kolmnurga külgedele, saame neli täisnurkset sfäärilist kolmnurka  $AOD$ ,  $AOE$ ,  $BOE$  ja  $BOF$ . Et kolmnurkades  $AOD$  ja  $AOE$  on ühine hüpotenuus  $AO$  ning  $\widehat{OAD} = \widehat{OAE}$ , siis (§ 9 p. 3 järgi) on ka  $OD = OE$ ,  $AD = AE$  ja  $\widehat{AOD} = \widehat{AOE}$ . Järelikult on sfäärilised kolmnurgad  $AOD$  ja  $AOE$  sümmeetrilised. Samaselt on sümmeetrilised sfäärilised kolmnurgad  $BOE$  ja  $BOF$ , kus  $OE = OF$ . Seega

$$OD = OE = OF = \rho$$

on sfäärilise kolmnurga  $ABC$  sisse joonestatud ringi kaarraadius, kusjuures punkt  $O$  on selle ringi poolus ehk sfääriline keskpunkt.

Ühendades suurringi kaarega keskpunkti  $O$  sfäärilise kolmnurga kolmanda tipuga  $C$ , saame samuti kaks täisnurkset sümmeetrilist kolmnurka, kus võrdsete külgede  $OD$  ja  $OF$  vastasnurgad on võrdsed, s. o.  $\widehat{OCD} = \widehat{OCF}$ , ning seega  $OC$  on nurgapoolitaja. Siis ka  $CD = CF$  ja  $\widehat{COD} = \widehat{COF}$ .

Et

$$BC = BF + FC = a$$

$$AC = AD + DC = b$$

$$AB = AE + EB = c$$

ja

$$a + b + c = 2s.$$

siis

$$AD = AE = s - a$$

$$BE = BF = s - b$$

$$CD = CF = s - c$$

ning täisnurksest sfäärilisest kolmnurgast  $AOD$  saame (§ 7 p. 2)

$$\begin{aligned} \tan \varrho &= \sin AD \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \sin (s - a) \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s}}, \end{aligned}$$

mille järgi võime leida sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringi kaarraadiuse  $\varrho$ .

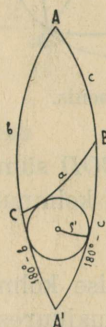
2. Kui sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kaaskolmnurgaks on kolmnurk  $A'BC$  (18. joon.), mille ümbermõõt

$$2s' = a + (180^\circ - b) + (180^\circ - c),$$

millest

$$s' - a = 180^\circ - \frac{a + b + c}{2} = 180^\circ - s,$$

ja sissejoonestatud ringi kaarraadius on  $\varrho'$ , siis



18. joonis.

$$\begin{aligned} \tan \varrho' &= \sin (s' - a) \tan \frac{\alpha}{2} = \sin (180^\circ - s) \tan \frac{\alpha}{2} = \\ &= \sin s \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin (s - a)}}. \end{aligned}$$

Seega sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kolme kaaskolmnurga  $A'BC$ ,  $AB'C$  ja  $ABC'$  sisse joonestatud ringide kaarraadiuste tangensid on:

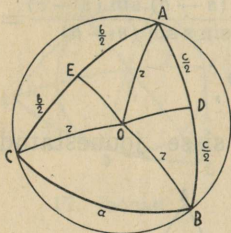
$$\tan \varrho'_a = \sin s \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin (s - a)}}$$

$$\tan \varrho'_b = \sin s \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin (s - b)}}$$

$$\tan \varrho'_c = \sin s \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin (s - c)}}.$$

## § 18. Sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarradius.

1. Poolitame sfäärilise kolmnurga  $ABC$  (19. joon.) küljed  $AB$  ja  $AC$  punktides  $D$  ja  $E$  ning tõmbame neist punktidest risti külgedele  $AB$  ja  $AC$  suuringide kaared  $DO$  ja  $EO$ , mis lõikuvad punktis  $O$ . Ühendame punkti  $O$  ja sfäärilise kolmnurga tipud  $A$ ,  $B$  ja  $C$  suuringide kaartega  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$ , saame neli täisnurkset sfäärilist kolmnurka  $AOD$ ,  $BOD$ ,  $AOE$  ja  $COE$ , mis on kahekaupa sümmeetrilised. Et kolmnurkades  $AOD$  ja  $BOD$  on ühine kaatet  $OD$  ning teised kaatetid on võrdsed, s. o.  $AD = BD$ , siis (§ 9 p. 1 järgi)



19. joonis.

on ka  $OA = OB$ ,  $\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$  ja  $\widehat{OAD} = \widehat{OBD}$ . Seega on sfäärilised kolmnurgad  $AOD$  ja  $BOD$  sümmeetrilised. Samaselt on ka sümmeetrilised sfäärilised kolmnurgad  $AOE$  ja  $COE$ , kus  $OA = OC$ . Seega

$$OA = OB = OC = r$$

on sfäärilise kolmnurga  $ABC$  ümber joonestatud ringi kaarradius, kusjuures punkt  $O$  on selle ringi poolus ehk sfääriline keskpunkt.

Sfäärilise kolmnurga  $ABC$  ümber joonestatud ringi kaarradiuse  $r$  väärtuse leidmiseks võtame ühe täisnurkse kolmnurga, näiteks  $AOD$ , milles  $OA = r$  ja  $AD = \frac{c}{2}$ . Selles kolmnurgas (§ 7 p. 2)

$$\tan r = \frac{\tan \frac{c}{2}}{\cos \widehat{OAD}}.$$

Et sfäärilises kolmnurgas  $ABC$  on

$$\widehat{OAD} + \widehat{OAE} = \alpha, \quad \widehat{OBD} + \widehat{OBC} = \beta, \quad \widehat{OCB} + \widehat{OCE} = \gamma,$$

millest

$$\widehat{OAD} + \gamma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$\widehat{OAD} = 90^\circ - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

siis

$$\tan r = \frac{\tan \frac{c}{2}}{\cos \left[90^\circ - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]} = \frac{\tan \frac{c}{2}}{\sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Analoogiliselt leiame, et ka

$$\tan r = \frac{\tan \frac{a}{2}}{\sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad \tan r = \frac{\tan \frac{b}{2}}{\sin \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Võttes ühe poolkülje tangensvalemi, näiteks

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

ja paigutades eelmisse võrdsusse  $\tan \frac{c}{2}$  asemele, saame

$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

mille järgi leiame sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarraadiuse  $r$ , kui on antud sfäärilise kolmnurga nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .

2. Sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarraadiuse leidmiseks kolmnurga külgede kaudu kasutame poolkülje valemit

$$\sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin \alpha \sin \beta}},$$

millest

$$\begin{aligned} \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{c}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 4 \frac{\sin^2 \frac{c}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Et Cagnoli' valem järgi

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

ja (§ 12)

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}},$$

siis

$$\begin{aligned} \sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right) &= \\ &= \frac{8 \sin^2 \frac{c}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin a \sin b \sin^2 c} = \\ &= \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \end{aligned}$$

ja

$$\tan r = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}.$$

## § 19. Sfäärilise kolmnurga kõrgus, bissektor ja mediaan.

1. Suuringi kaart sfäärilise kolmnurga tipust risti vastasküljele nimetatakse sfäärilise kolmnurga kõrguseks. Sfäärilise kolmnurga  $ABC$  (20. joon.) kõrgus  $AD = h_a$  jagab sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kaheks täisnurkseks sfääriliseks kolmnurgaks  $ABD$  ja  $ACD$ , kus

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$$

ja (§ 6 p. 2)

$$\sin h_a = \sin \beta \sin c = \sin \gamma \sin b,$$

mille järgi leiame sfäärilise kolmnurga kõrguse, kui sfäärilises kolmnurgas on antud kõrgusele vastasnurk ja külg, mis täisnurkses kolmnurgas esineb hüpoteenusina.

Analoogiliselt leiame, et

$$\sin h_b = \sin \alpha \sin c = \sin \gamma \sin a$$

ja

$$\sin h_c = \sin \alpha \sin b = \sin \beta \sin a.$$

2. Suuringi kaart  $AD = l_a$  (21. joon.), mis poolitab sfäärilise kolmnurga  $ABC$  nurga  $\alpha$ , nimetatakse sfäärilise kolmnurga bissektoriks. See bissektor jagab sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kaheks sfääriliseks kolmnurgaks  $ABD$  ja  $ACD$ , milles

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADC}.$$

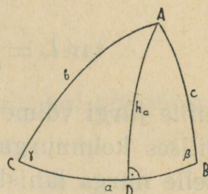
Et

$$\cot \widehat{ADB} = -\cot \widehat{ADC},$$

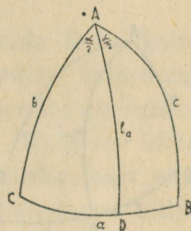
siis kootangensvalemite (§ 7 p. 1) põhjal

$$\cot b \sin l_a = \cot \widehat{ADC} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos l_a \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\cot c \sin l_a = -\cot \widehat{ADC} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos l_a \cos \frac{\alpha}{2}.$$



20. joonis.



21. joonis.

Viimaseid võrdusi liites saame

$$\sin l_a (\cot b + \cot c) = 2 \cos l_a \cos \frac{\alpha}{2},$$

millest

$$\tan l_a = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cot b + \cot c} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin b \sin c}{\sin (b + c)},$$

mille järgi võime leida sfäärilise kolmnurga bissektori, kui sfäärilises kolmnurgas on antud nurk, mida bissektor poolitab, ja selle nurga lähisküljed.

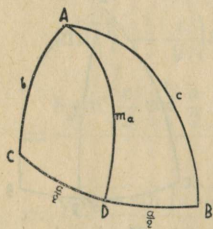
Samuti leiame, et

$$\tan l_b = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} \sin a \sin c}{\sin (a + c)}$$

ja

$$\tan l_c = \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \sin a \sin b}{\sin (a + b)}.$$

3. Suurringi kaart  $AD = m_a$  (22. joon.), mis poolitab sfäärilise kolmnurga  $ABC$  külje  $BC$ , nimetatakse sfäärilise kolmnurga mediaaniks. See mediaan jagab sfäärilise kolmnurga  $ABC$  kaheks sfääriliseks kolmnurgaks  $ABD$  ja  $ACD$ , milles



22. joonis.

$$BD = CD = \frac{a}{2}, \quad \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADC}.$$

Arvestades, et

$$\cos \widehat{ADB} = -\cos \widehat{ADC},$$

siis nurga koosinusvalemite (§ 5 p. 1) põhjal võime märkida

$$\cos m_a \cos \frac{a}{2} = \cos b + \sin m_a \sin \frac{a}{2} \cos \widehat{ADC}$$

$$\cos m_a \cos \frac{a}{2} = \cos c - \sin m_a \sin \frac{a}{2} \cos \widehat{ADC},$$

mida liites saame

$$2 \cos m_a \cos \frac{a}{2} = \cos b + \cos c,$$

millest

$$\cos m_a = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}},$$

mille järgi võime leida küljele  $a$  lastud mediaani, kui sfäärilises kolmnurgas on antud kolm külge.

Analoogiliselt saame

$$\cos m_b = \frac{\cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{b}{2}}$$

ja

$$\cos m_c = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

## § 20. Sfääriliste kolmnurkade lahendamine.

Lahendada sfääriline kolmnurk tähendab leida tema kolme antud elemendi kaudu teised elemendid. Sfäärilise kolmnurga lahendus on alati ühene, kui tema otsitavad elemendid on määratavad koosinuse, tangensi või kootangensi kaudu. Kuid see ühene lahendus määrab alati kaks sümmeetrilist kolmnurka, sest sümmeetrilistes kolmnurkades on vastavad nurgad ja vastavad küljed isekeskis võrdsed. Kui aga sfäärilise kolmnurga otsitavad elemendid on määratavad ainult siinuse kaudu, siis saame kaks lahendust, sest vahemikus  $0^\circ$ -st  $180^\circ$ -ni vastab nurga siinusele kaks nurka: teravnurk ja nürinurk. Samuti vastab ka selles vahemikus külje siinusele kaks külje väärtust.

Sfääriliste kolmnurkade lahendamise juhud võime jaotada kuueks rühmaks, ja nimelt, kui kolmnurgas on antud:

- 1) kolm külge:  $a, b, c$ ;
- 2) kolm nurka:  $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- 3) kaks külge ja nende vaheline nurk:  $a, b, \gamma$ ;  $a, c, \beta$ ;  
 $b, c, \alpha$ ;
- 4) kaks nurka ja nende vaheline külge:  $a, \beta, \gamma$ ;  $b, \alpha, \gamma$ ;  
 $c, \alpha, \beta$ ;
- 5) kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk:  $a, b, \alpha$ ;  
 $a, b, \beta$ ;  $a, c, \alpha$ ;  $a, c, \gamma$ ;  $b, c, \beta$ ;  $b, c, \gamma$ ;
- 6) kaks nurka ja ühe antud nurga vastaskülge:  $a, \alpha, \beta$ ;  
 $b, \alpha, \beta$ ;  $a, \alpha, \gamma$ ;  $c, \alpha, \gamma$ ;  $b, \beta, \gamma$ ;  $c, \beta, \gamma$ .

Sfääriliste kolmnurkade lahendamisel kasutame valemeid, mis omavad logaritmitava kuju.

1) Sfäärilise kolmnurga lahendamiseks kolme antud külje  $a, b$  ja  $c$  puhul võime kasutada poolnurga valemeid

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

kus poolnurga tangensid on alati positiivsed, sest  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$  ja  $\frac{\gamma}{2}$  on väiksemad kui  $90^\circ$ .

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas

$$a = 92^\circ 42' 16'', \quad b = 123^\circ 33' 28'', \quad c = 75^\circ 23' 44'',$$

siis

$$s = \frac{a + b + c}{2} = 145^\circ 49' 44''$$

$$s - a = 53^\circ 07' 28''$$

$$s - b = 22^\circ 16' 16''$$

$$s - c = 70^\circ 26' 00''$$

ning seega

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin 22^{\circ} 16' 16'' \cdot \sin 70^{\circ} 26' 00''}{\sin 145^{\circ} 49' 44'' \cdot \sin 53^{\circ} 07' 28''}} \\ \tan \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin 53^{\circ} 07' 28'' \cdot \sin 70^{\circ} 26' 00''}{\sin 145^{\circ} 49' 44'' \cdot \sin 22^{\circ} 16' 16''}} \\ \tan \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\sin 53^{\circ} 07' 28'' \cdot \sin 22^{\circ} 16' 16''}{\sin 145^{\circ} 49' 44'' \cdot \sin 70^{\circ} 26' 00''}},\end{aligned}$$

mida logaritmidest leiame, et

$$\log \tan \frac{\alpha}{2} = \bar{1},95013$$

$$\log \tan \frac{\beta}{2} = 0,27456$$

$$\log \tan \frac{\gamma}{2} = \bar{1},87902,$$

millest

$$\frac{\alpha}{2} = 41^{\circ} 43' 02'', \quad \frac{\beta}{2} = 62^{\circ} 00' 46'', \quad \frac{\gamma}{2} = 37^{\circ} 07' 16''$$

ja

$$\alpha = 83^{\circ} 26' 04'', \quad \beta = 124^{\circ} 01' 32'', \quad \gamma = 74^{\circ} 14' 32''.$$

Et selle sfäärilise kolmnurga sfääriline ekstsess

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^{\circ} = 101^{\circ} 42' 08'',$$

siis kolmnurga pindala

$$S = \frac{101^{\circ} 42' 08'' \pi}{180^{\circ}} \approx 1,775 \text{ (ruutühikut),}$$

kui lugeda, et sfääri raadius  $R = 1$ .

Sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringi kaarraadiuse tangens on

$$\begin{aligned}\tan \varrho &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin 53^{\circ} 07' 28'' \cdot \sin 22^{\circ} 16' 16'' \cdot \sin 70^{\circ} 26' 00''}{\sin 145^{\circ} 49' 44''}},\end{aligned}$$

mille logaritm

$$\log \tan \varrho = \bar{1},85319,$$

kust sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringi kaarraadius

$$\rho = 35^{\circ} 29' 42''.$$

Sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarraadiuse tangens on

$$\begin{aligned} \tan r &= \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}} = \\ &= \frac{2 \sin 46^{\circ} 21' 08'' \cdot \sin 61^{\circ} 46' 44'' \cdot \sin 37^{\circ} 41' 52''}{\sqrt{\sin 145^{\circ} 49' 44'' \cdot \sin 53^{\circ} 07' 28'' \cdot \sin 22^{\circ} 16' 16'' \cdot \sin 70^{\circ} 26' 00''}}, \end{aligned}$$

mille logaritm

$$\log \tan r = 0,28930,$$

kust sfäärilise kolmnurga ümber joonestatud ringi kaarraadius

$$r = 62^{\circ} 48' 39''.$$

Sfäärilise kolmnurga kõrgused saame valemitest

$$\sin h_a = \sin \beta \sin c = \sin 124^{\circ} 01' 32'' \cdot \sin 75^{\circ} 23' 44''$$

$$\sin h_b = \sin \alpha \sin c = \sin 83^{\circ} 26' 04'' \cdot \sin 75^{\circ} 23' 44''$$

$$\sin h_c = \sin \alpha \sin b = \sin 83^{\circ} 26' 04'' \cdot \sin 123^{\circ} 33' 28'',$$

mille logaritmid on

$$\log \sin h_a = \bar{1},90419$$

$$\log \sin h_b = \bar{1},98287$$

$$\log \sin h_c = \bar{1},91796,$$

kust

$$h_a = 53^{\circ} 19' 13'', \quad h_b = 74^{\circ} 00' 45'', \quad h_c = 55^{\circ} 52' 47''.$$

Sfäärilise kolmnurga bissektorid leiame valemitest.

$$\tan l_a = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin b \sin c}{\sin (b+c)} = \frac{2 \cos 41^{\circ} 43' 02'' \cdot \sin 123^{\circ} 33' 28'' \cdot \sin 75^{\circ} 23' 44''}{\sin 198^{\circ} 57' 12''}$$

$$\tan l_b = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} \sin a \sin c}{\sin (a+c)} = \frac{2 \cos 62^{\circ} 00' 46'' \cdot \sin 92^{\circ} 42' 16'' \cdot \sin 75^{\circ} 23' 44''}{\sin 168^{\circ} 06' 00''}$$

$$\tan l_c = \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \sin a \sin b}{\sin (a+b)} = \frac{2 \cos 37^{\circ} 07' 16'' \cdot \sin 92^{\circ} 42' 16'' \cdot \sin 123^{\circ} 33' 28''}{\sin 216^{\circ} 15' 44''},$$

mille logaritmid on

$$\log (-\tan l_a) = 0,56897$$

$$\log \tan l_b = 0,64341$$

$$\log (-\tan l_c) = 0,35109,$$

kust

$$l_a = 105^{\circ} 05' 54'', \quad l_b = 77^{\circ} 11' 40'', \quad l_c = 114^{\circ} 00' 58''.$$

Sfäärilise kolmnurga mediaanid saame valemitest

$$\cos m_a = \frac{\cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos 99^{\circ} 28' 36'' \cdot \cos 24^{\circ} 04' 52''}{\cos 46^{\circ} 21' 08''}$$

$$\cos m_b = \frac{\cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{b}{2}} = \frac{\cos 84^{\circ} 03' 00'' \cdot \cos 8^{\circ} 38' 46''}{\cos 61^{\circ} 46' 44''}$$

$$\cos m_c = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{\cos 108^{\circ} 07' 52'' \cdot \cos 15^{\circ} 25' 36''}{\cos 37^{\circ} 41' 52''},$$

mille logaritmid on

$$\log (-\cos m_a) = \bar{1},33802$$

$$\log \cos m_b = \bar{1},33589$$

$$\log (-\cos m_c) = \bar{1},57879,$$

kust

$$m_a = 102^{\circ} 34' 43'', \quad m_b = 77^{\circ} 29' 02'', \quad m_c = 112^{\circ} 16' 48''.$$

2) Kolme antud nurga  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  puhul võime kasutada sfäärilise kolmnurga lahendamisel poolkülje valemeid

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left( \alpha - \frac{\epsilon}{2} \right)}{\sin \left( \beta - \frac{\epsilon}{2} \right) \sin \left( \gamma - \frac{\epsilon}{2} \right)}}$$

$$\tan \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left( \beta - \frac{\epsilon}{2} \right)}{\sin \left( \alpha - \frac{\epsilon}{2} \right) \sin \left( \gamma - \frac{\epsilon}{2} \right)}}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left( \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right)}},$$

kus poolkülje tangensid on samuti positiivsed, sest  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  ja  $\frac{c}{2}$  on väiksemad kui  $90^\circ$ .

Näiteks, kui

$$\alpha = 80^\circ 32' 16'', \quad \beta = 53^\circ 27' 32'', \quad \gamma = 111^\circ 45' 08'',$$

kus

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{2} = 32^\circ 52' 28''$$

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} = 47^\circ 39' 48''$$

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} = 20^\circ 35' 04''$$

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} = 78^\circ 52' 40''$$

ja

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin 32^\circ 52' 28'' \cdot \sin 47^\circ 39' 48''}{\sin 20^\circ 35' 04'' \cdot \sin 78^\circ 52' 40''}}$$

$$\tan \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin 32^\circ 52' 28'' \cdot \sin 20^\circ 35' 04''}{\sin 47^\circ 39' 48'' \cdot \sin 78^\circ 52' 40''}}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin 32^\circ 52' 28'' \cdot \sin 78^\circ 52' 40''}{\sin 47^\circ 39' 48'' \cdot \sin 20^\circ 35' 04''}},$$

mille logaritmid on

$$\log \tan \frac{a}{2} = 0,03281$$

$$\log \tan \frac{b}{2} = \bar{1},71007$$

$$\log \tan \frac{c}{2} = 0,15580,$$

kust

$$\frac{a}{2} = 47^\circ 09' 44'', \quad \frac{b}{2} = 27^\circ 09' 19'', \quad \frac{c}{2} = 55^\circ 03' 49''$$

ja

$$a = 94^\circ 19' 28'', \quad b = 54^\circ 18' 38'', \quad c = 110^\circ 07' 38''.$$

Samad lahendid saaksime, kui lahendust sooritaksime polaar-  
kolmnurga kaudu, kus

$$\begin{aligned} a_1 &= 180^\circ - \alpha = 99^\circ 27' 44'' \\ b_1 &= 180^\circ - \beta = 126^\circ 32' 28'' \\ c_1 &= 180^\circ - \gamma = 68^\circ 14' 52'' ; \end{aligned}$$

kasutades polaarkolmnurga suhtes poolnurga valemeid, saaksime

$$\alpha_1 = 85^\circ 40' 32'' , \quad \beta_1 = 125^\circ 41' 22'' , \quad \gamma_1 = 69^\circ 52' 22''$$

ja siis

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - \alpha_1 = 94^\circ 19' 28'' \\ b &= 180^\circ - \beta_1 = 54^\circ 18' 38'' \\ c &= 180^\circ - \gamma_1 = 110^\circ 07' 38'' . \end{aligned}$$

3) Kui sfäärilises kolmnurgas on antud kaks külge ja nende vaheline nurk, siis võime kasutada Napier'i valemeid. Näiteks, kui on antud sfäärilise kolmnurga küljed  $a$  ja  $b$  ning nende vaheline nurk  $\gamma$ , siis

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} \\ \tan \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} , \end{aligned}$$

mille abil leiame  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  ja  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  ning seega ühtlasi ka  $\alpha$  ja  $\beta$  väärtused. Külge  $c$  võime siis leida siinusvalemi

$$\sin c = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin \beta}$$

abil, mis annab kaks külge väärtust:  $c_1$  ja  $c_2 = 180^\circ - c_1$ . Kumb neist külgedest lugeda sfäärilise kolmnurga otsitavaks küljeks, määrab suuremalt osalt sfäärilise kolmnurga järgmine omadus: suurema nurga vastas on suurem külg ja väiksema nurga vastas on väiksem külg. Kui aga mõnikord see omadus ei võimalda õige

külje määramist, siis võib õige külje leidmiseks kasutada pool-  
külje valemit

$$\tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left( \gamma - \frac{\epsilon}{2} \right)}{\sin \left( \alpha - \frac{\epsilon}{2} \right) \sin \left( \beta - \frac{\epsilon}{2} \right)}}$$

mis määrab külje  $c$  ühe ja ainult ühe väärtuse.

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas on antud

$$a = 114^{\circ} 36' 12'', \quad b = 133^{\circ} 55' 24'', \quad \gamma = 16^{\circ} 40' 44'',$$

siis

$$\tan \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\cos \frac{b - a}{2}}{\cos \frac{b + a}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos 9^{\circ} 39' 36''}{\cos 124^{\circ} 15' 48''} \cot 8^{\circ} 20' 22''$$

$$\tan \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\sin \frac{b - a}{2}}{\sin \frac{b + a}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin 9^{\circ} 39' 36''}{\sin 124^{\circ} 15' 48''} \cot 8^{\circ} 20' 22'',$$

mille logaritmid on

$$\log \left( -\tan \frac{\beta + \alpha}{2} \right) = 1,07721$$

$$\log \tan \frac{\beta - \alpha}{2} = 0,14148,$$

kust

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 94^{\circ} 47' 07''$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 54^{\circ} 10' 18''$$

$$\alpha = 40^{\circ} 36' 49''$$

$$\beta = 148^{\circ} 57' 25''.$$

Külje  $c$  leiame valemist

$$\sin c = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin 114^{\circ} 36' 12'' \cdot \sin 16^{\circ} 40' 44''}{\sin 40^{\circ} 36' 49''},$$

mille logaritm on

$$\log \sin c = \bar{1},60302,$$

kust

$$c_1 = 23^\circ 38' 00'', \quad c_2 = 156^\circ 22' 00''.$$

Et väiksema nurga vastas peab olema väiksem külg, siis

$$c = 23^\circ 38' 00''.$$

4) Kahe antud nurga ja nende vahelise külje puhul võime samuti kasutada Napier'i valemeid. Näiteks, kui on antud nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  ning nende vaheline külg  $c$ , siis

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{a-\beta}{2}}{\cos \frac{a+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{a-\beta}{2}}{\sin \frac{a+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2},$$

mille abil leiame  $\frac{a+b}{2}$  ja  $\frac{a-b}{2}$  ning seega ühtlasi ka  $a$  ja  $b$  väärtused. Nurga  $\gamma$  võime siis leida siinusvalemi

$$\sin \gamma = \frac{\sin a \sin c}{\sin a} = \frac{\sin \beta \sin c}{\sin b}$$

abil, mis annab nurgale  $\gamma$  samuti kaks väärtust:  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$ . Kui siin eespool-tähendatud sfäärilise kolmnurga külgede ja nurkade võrdluse omadus ei võimalda õige nurga määramist, siis võime õige nurga leidmiseks kasutada poolnurga valemit

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}},$$

mis määrab nurga  $\gamma$  ühe ja ainult ühe väärtuse.

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas on antud

$$\alpha = 68^\circ 18' 22'', \quad \beta = 42^\circ 54' 36'', \quad c = 161^\circ 06' 42'',$$

siis

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{a-\beta}{2}}{\cos \frac{a+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2} = \frac{\cos 12^{\circ} 41' 53''}{\cos 55^{\circ} 36' 29''} \tan 80^{\circ} 33' 21''$$

$$\tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{a-\beta}{2}}{\sin \frac{a+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2} = \frac{\sin 12^{\circ} 41' 53''}{\sin 55^{\circ} 36' 29''} \tan 80^{\circ} 33' 21'',$$

mille logaritmid on

$$\log \tan \frac{a+b}{2} = 1,01632$$

$$\log \tan \frac{a-b}{2} = 0,20450,$$

kust

$$\frac{a+b}{2} = 84^{\circ} 29' 55''$$

$$\frac{a-b}{2} = 58^{\circ} 01' 02''$$

$$a = 142^{\circ} 30' 57''$$

$$b = 26^{\circ} 28' 53''.$$

Nurga  $\gamma$  leiame valemist

$$\sin \gamma = \frac{\sin a \sin c}{\sin a} = \frac{\sin 68^{\circ} 18' 22'' \cdot \sin 161^{\circ} 06' 42''}{\sin 142^{\circ} 30' 57''},$$

mille logaritmi on

$$\log \sin \gamma = \bar{1},69399,$$

kust

$$\gamma_1 = 29^{\circ} 37' 25'', \quad \gamma_2 = 150^{\circ} 22' 35''.$$

Et suurema külje vastas peab olema suurem nurk, siis

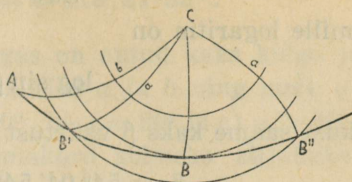
$$\gamma = 150^{\circ} 22' 35''.$$

5) Kui sfäärilises kolmnurgas on antud kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk, siis võime sfäärilise kolmnurga lahendamisel saada kas kaks lahendust, või ühe lahenduse, või mitte ühtegi lahendust.

Kui sfäärilises kolmnurgas on antud näiteks küljed  $a$  ja  $b$  ning nurk  $\alpha$ , siis nurgale  $\beta$  saame siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin \alpha}$$

järgi kaks väärtust:  $\beta_1$  ja  $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ , kui  $\sin a \sin b < \sin a$ , ja ühe väärtuse, kui  $\sin a \sin b = \sin a$ . Viimasel juhul on tegemist täisnurkse sfäärilise kolmnurgaga. Kui aga  $\sin a \sin b > \sin a$ , siis ülesandel puudub lahendus (23. joonis).



23. joonis.

Kui nurga  $\beta$  üks või kaks väärtust on leitud, siis leiame nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  väärtused Napier'i valemite

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}} \tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{a+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \tan \frac{a+b}{2} = \frac{\sin \frac{a+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} \tan \frac{a-b}{2}$$

järgi, kusjuures  $\cot \frac{\gamma}{2}$  ja  $\tan \frac{c}{2}$  peavad olema alati positiivsed.

Et  $\cot \frac{\gamma}{2}$  ja  $\tan \frac{c}{2}$  oleksid siin positiivsed, selleks peavad  $a - b$  ja  $\alpha - \beta$  olema ühesuguse märgiga ning  $a + b$  ja  $\alpha + \beta$  kas mõlemad suuremad kui  $180^\circ$  või mõlemad väiksemad kui  $180^\circ$ .

Leides siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a}$$

järgi nurga  $\beta$  kaks väärtust  $\beta_1$  ja  $\beta_2$ , saame ülesande lahendusel kaks kolmnurka, kui  $\alpha - \beta_1$  ja  $\alpha - \beta_2$  on samase märgiga kui  $a - b$  ning  $\alpha + \beta_1 > 180^\circ$  ja  $\alpha + \beta_2 > 180^\circ$  kui  $a + b > 180^\circ$  või  $\alpha + \beta_1 < 180^\circ$  ja  $\alpha + \beta_2 < 180^\circ$  kui  $a + b < 180^\circ$ .

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas

$$a = 115^\circ 24' 36'', \quad b = 105^\circ 13' 12'', \quad \alpha = 130^\circ 42' 10'',$$

siis

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} = \frac{\sin 130^{\circ} 42' 10'' \cdot \sin 105^{\circ} 13' 12''}{\sin 115^{\circ} 24' 36''},$$

mille logaritmi on

$$\log \sin \beta = \bar{1},90841,$$

kust saame kaks  $\beta$  väärtust

$$\beta_1 = 54^{\circ} 04' 54'', \beta_2 = 125^{\circ} 55' 06'',$$

mis mõlemad kõlbavad ülesande lahenduseks, sest et siin  $\alpha - \beta_1$  ja  $\alpha - \beta_2$  on ühesuguse märgiga ning  $\alpha + \beta_1 > 180^{\circ}$  ja  $\alpha + \beta_2 > 180^{\circ}$ , sest  $a + b > 180^{\circ}$ . Seega esineb siin kaks kolmnurka, s. o. kaks lahendust, kus

$$\cot \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{\alpha - \beta_1}{2} = \frac{\sin 110^{\circ} 18' 54''}{\sin 5^{\circ} 05' 42''} \tan 38^{\circ} 18' 38''$$

$$\tan \frac{c_1}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta_1}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta_1}{2}} \tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin 92^{\circ} 23' 32''}{\sin 38^{\circ} 18' 38''} \tan 5^{\circ} 05' 42''$$

$$\cot \frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{\alpha - \beta_2}{2} = \frac{\sin 110^{\circ} 18' 54''}{\sin 5^{\circ} 05' 42''} \tan 2^{\circ} 23' 32''$$

$$\tan \frac{c_2}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta_2}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta_2}{2}} \tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin 128^{\circ} 18' 38''}{\sin 2^{\circ} 23' 32''} \tan 5^{\circ} 05' 42'',$$

mille logaritmid on

$$\log \cot \frac{\gamma_1}{2} = 0,92131$$

$$\log \tan \frac{c_1}{2} = \bar{1},15745$$

$$\log \cot \frac{\gamma_2}{2} = \bar{1},64459$$

$$\log \tan \frac{c_2}{2} = 0,22431,$$

kust

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 130^\circ 40' 12'', & c_1 &= 160^\circ 21' 18'' \\ \gamma_2 &= 132^\circ 24' 14'', & c_2 &= 118^\circ 21' 32''.\end{aligned}$$

Üldiselt, kui sfäärilises kolmnurgas on antud kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk, näiteks küljed  $a$  ja  $b$  ning nurk  $\alpha$ , siis võib esineda kolm juhtu: a)  $\alpha < 90^\circ$ , b)  $\alpha = 90^\circ$  ja c)  $\alpha > 90^\circ$ , kusjuures iga juhu võime jaotada omakord kolmeks alljuhuks: a)  $b < 90^\circ$ ,  $\beta) b = 90^\circ$  ja  $\gamma) b > 90^\circ$ .

a)  $\alpha < 90^\circ$ .

a) Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin \alpha}$$

järgi leiame, et  $\beta_1 > \alpha$  ja  $\beta_2 > \alpha$ , sest  $\sin b > \sin a$ . Et suurema külje vastas peab olema suurem nurk, siis  $\beta$  mõlemad väärtused rahuldavad seda tingimust ning seega ülesanne võimaldab kaks lahendust.

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis  $\sin \beta = \sin \alpha$  ja ka  $\beta = \alpha < 90^\circ$ , sest võrdsete külgede vastas peavad olema võrdsed nurgad. Sel juhul saame ühe lahenduse, kus nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  leiame valemite

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan a$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos a \tan a$$

järgi.

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Olgu  $a + b < 180^\circ$ ; siis  $b < 180^\circ - a$  ja  $\sin b < \sin a$ . Siin tuleb nurgale  $\beta$  võtta siinusvalemi järgi ainult üks väärtus niisugusena, et  $\beta < \alpha$ , sest väiksema külje vastas peab olema väiksem nurk. Seega saame ühe lahenduse. Kui aga  $a + b \geq 180^\circ$ , siis  $b \geq 180^\circ - a$  ja  $\sin b \geq \sin a$ . Sel juhul puudub üldse lahendus, sest et siin peaks olema  $\beta < \alpha$ , kuid siinusvalemi järgi saame nurgale  $\beta$  kaks väärtust niisugusena, et  $\beta_1 \geq \alpha$  ja  $\beta_2 > \alpha$ .

β) Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a}$$

järgi  $\sin \beta > \sin a$  ja seega mõlemad  $\beta$  väärtused rahuldavad ülesannet, sest  $\beta_1 > a$  ja  $\beta_2 > a$ . Saame kaks lahendust.

Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis siinusvalemi järgi  $\sin \beta = \sin a$  ja  $\beta = a$ . Sel juhul puudub lahendus: sfääriline kolmnurk muutub sfääriliseks kaksnurgaks, sest et nurga  $\gamma$  ja külje  $a$  saaksime valemite

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan a = 0$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos a \tan a = \infty$$

järgi, kust

$$\gamma = 180^\circ, \quad c = 180^\circ.$$

Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis siinusvalemi järgi  $\sin \beta > \sin a$  ja  $\beta > a$ , sest  $\sin b = 1$ . Siin mõlemad  $\beta$  väärtused on suuremad kui  $a$ , s. o.  $\beta_1 > a$  ja  $\beta_2 > a$ . Kuid  $\beta$  peaks olema väiksem kui  $a$ . Seega puudub siin lahendus.

γ) Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Olgu  $a + b < 180^\circ$ . Et siin on ikka  $\sin a < \sin b$ , siis siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a}$$

järgi  $\beta_1 > a$  ja  $\beta_2 > a$ , kui  $\frac{\sin a \sin b}{\sin a} < 1$ , ja  $\beta = 90^\circ$ , kui  $\frac{\sin a \sin b}{\sin a} = 1$ . Kui aga  $\frac{\sin a \sin b}{\sin a} > 1$ , siis puudub lahendus.

Kui  $a + b \geq 180^\circ$ , siis on  $\sin a \geq \sin b$  ning siinusvalemi järgi  $\beta_1 \leq a$  ja  $\beta_2 > a$ , milledest ainult teine võib olla lahenduseks, sest  $\beta$  peab olema suurem kui  $a$ .

Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis  $\sin a = \sin b$  ja siinusvalemi järgi  $\beta_1 = a$  ja  $\beta_2 > a$ . Kuid ühelt poolt  $\beta$  ei või olla suurem kui  $a$  ja

teiselt poolt  $\beta$  ei või olla ka võrdne  $\alpha$ -ga, sest nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  arvutamisevalemite

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan \alpha$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos \alpha \tan a$$

on  $a > 90^\circ$  ja seega  $\cos a \tan \alpha < 0$  ja  $\cos \alpha \tan a < 0$ , mis ei võimalda nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  leidmist. Täheleb, ülesandel puudub lahendus.

Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis on ikka  $\sin a < \sin b$  ja siinusvalemi järgi leitavad  $\beta$  väärtused on suuremad kui  $\alpha$ , s. o.  $\beta_1 > \alpha$  ja  $\beta_2 > \alpha$ . Kuid sisult peaks olema  $\beta < \alpha$ , seepärast puudub lahendus.

b)  $\alpha = 90^\circ$ .

a) Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis siinusvalemi parempoolne osa saab suuremaks kui 1, s. o.

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} > 1,$$

mis ei võimalda ülesande lahendust.

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} = 1,$$

mis samuti ei võimalda ülesande lahendust, sest sel juhul nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  väärtused oleksid  $0^\circ$ , nagu nähtub valemitest

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan \alpha = \infty$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos \alpha \tan a = 0.$$

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Olgu  $a + b < 180^\circ$ ; siis  $b < 180^\circ - a$  ja  $\sin b < \sin a$  ning siinusvalemi järgi  $\beta_1 < \alpha$  ja  $\beta_2 > \alpha$ . Siin võib olla ainult  $\beta < \alpha$ . Seega esineb üks lahendus. Kui aga

$a + b \geq 180^\circ$ , siis puudub lahendus, sest siis  $b \geq 180^\circ - a$  ja  $\sin b \geq \sin a$  ning siinusvalemi järgi saaksime

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} \geq 1,$$

millest  $\beta = 90^\circ$ ; kuid peaks olema  $\beta < \alpha = 90^\circ$ .

β) Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a \leq b$ , siis

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} > 1,$$

mis ei võimalda lahendust.

Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} = 1,$$

millest  $\beta = 90^\circ$ , kusjuures aga nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  arvutamisel tekib määramatus, s. o.

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan a = 0 \cdot \infty$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos a \tan a = 0 \cdot \infty,$$

millest nähtub, et lahendus on määramata.

γ) Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Kui  $a + b \leq 180^\circ$ , siis  $a \leq 180^\circ - b$  ja  $\sin a \leq \sin b$  ning siinusvalem

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} \geq 1$$

näitab, et lahendust pole. Kui aga  $a + b > 180^\circ$ , siis  $\sin a > \sin b$  ning siinusvalemi järgi saame  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 > a$ . Siin peab olema  $\beta > a$ . Seega esineb üks lahendus.

Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a \geq b$ , siis on  $\sin a \leq \sin b$  ja

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a} \geq 1,$$

millest nähtub, et lahendus puudub.

c)  $a > 90^\circ$ .

a) Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis siinusvalemi

$$\sin \beta = \frac{\sin a \sin b}{\sin a}$$

järgi  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 < a$ ; kuid peaks olema  $\beta > a$ , ning seega puudub lahendus.

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis siinusvalemi järgi  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 = a$ . Siin samuti puudub lahendus, sest et  $\beta$  ei või olla väiksem kui  $a$  ega ka võrdne  $a$ -ga, sest viimasel juhul oleksid

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan a < 0.$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos a \tan a < 0.$$

Kui  $b < 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Kui  $a + b \leq 180^\circ$ , siis  $\sin b \leq \sin a$  ja siinusvalemi järgi  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 \geq a$ . Et siin peab olema  $\beta < a$ , siis esineb seega üks lahendus. Kui aga  $a + b > 180^\circ$ , siis  $\sin b > \sin a$  ja siinusvalemi järgi saaksime  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 < a$ , kui ainult

$$\frac{\sin a \sin b}{\sin a} < 1,$$

mis võimaldab kaks lahendust.

$\beta$ ) Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a \leq b$ , siis  $\sin \beta \geq \sin a$ , millest  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 \leq a$ , mis näitab, et puudub lahendus, sest  $\beta$  ei või olla väiksem kui  $a$  ega ka võrdne  $a$ -ga, sest viimasel juhul oleksid

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \cos a \tan a = 0$$

$$\tan \frac{c}{2} = \cos a \tan a = \infty,$$

millest saaksime  $\gamma = 180^\circ$  ja  $c = 180^\circ$ , mis määrab sfäärilise kaksnurga.

Kui  $b = 90^\circ$  ja  $a > b$ , siis siinusvalemi järgi saame  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 < a$ , mis võimaldab kaks lahendust.

γ) Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a < b$ , siis  $a + b$  võib olla väiksem, võrdne või suurem kui  $180^\circ$ . Kui  $a + b \leq 180^\circ$  ja seejuures

$$\frac{\sin a \sin b}{\sin a} < 1, \text{ siis } \sin a \leq \sin b \text{ ja siinusvalemi järgi } \beta_1 < a \text{ ja}$$

$\beta_2 \leq a$  ning seega puudub lahendus. Kui aga  $a + b > 180^\circ$ , siis  $\sin b < \sin a$ , kus nüüd  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 > a$ , mis võimaldab ühe lahenduse.

Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a = b$ , siis siinusvalemi järgi  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 = a$ , mis võimaldab ühe lahenduse.

Kui  $b > 90^\circ$  ja  $a > b$  ning seejuures  $\frac{\sin a \sin b}{\sin a} < 1$ , siis  $\sin a < \sin b$ , kus nüüd  $\beta_1 < a$  ja  $\beta_2 < a$ , mis võimaldab kaks lahendust.

Kokkuvõttes võime märkida selles punktis öeldu skemaatiliselt järgmiselt:

$\alpha < 90^\circ$	{	$b < 90^\circ$	$a < b$ . . . . .	kaks lahendust
			$a = b$ . . . . .	üks lahendus
			$a > b$ ja $a + b < 180^\circ$ . .	üks „
			$a > b$ ja $a + b \geq 180^\circ$ . .	pole lahendus
$\alpha = 90^\circ$	{	$b = 90^\circ$	$a < b$ . . . . .	kaks „
			$a \geq b$ . . . . .	pole „
		$b > 90^\circ$	$a < b$ ja $a + b < 180^\circ$ . .	kaks „
			$a < b$ ja $a + b \geq 180^\circ$ . .	üks lahendus
$\alpha > 90^\circ$	{	$b < 90^\circ$	$a \leq b$ . . . . .	pole „
			$a > b$ ja $a + b < 180^\circ$ . .	üks lahendus
			$a > b$ ja $a + b \geq 180^\circ$ . .	pole lahendus
		$b = 90^\circ$	$a < b$ . . . . .	pole „
			$a = b$ . . . . .	määramata
			$a > b$ . . . . .	pole lahendus
$b > 90^\circ$	$a < b$ ja $a + b \leq 180^\circ$ . .	pole lahendus		
	$a < b$ ja $a + b > 180^\circ$ . .	üks lahendus		
	$a \geq b$ . . . . .	pole lahendus		

$$\alpha > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} b < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \dots \dots \dots \text{pole lahendust} \\ a > b \text{ ja } a + b \leq 180^\circ \dots \dots \text{üks lahendus} \\ a > b \text{ ja } a + b > 180^\circ \dots \dots \text{kaks lahendust} \end{array} \right. \\ \\ b = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \dots \dots \dots \text{pole} \quad ,, \\ a > b \dots \dots \dots \text{kaks} \quad ,, \end{array} \right. \\ \\ b > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a < b \text{ ja } a + b \leq 180^\circ \dots \dots \text{pole} \quad ,, \\ a < b \text{ ja } a + b > 180^\circ \dots \dots \text{üks lahendus} \\ a = b \dots \dots \dots \text{üks} \quad ,, \\ a > b \dots \dots \dots \text{kaks lahendust.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Võimalikkude lahenduste puhul tuleb ikka arvestada, et oleks  $\sin a \sin b \leq \sin a$ .

6) Kui sfäärilises kolmnurgas on antud kaks nurka ja ühe antud nurga vastaskülge, siis võime sfäärilise kolmnurga lahendamisel saada samuti kas kaks lahendust, või ühe lahenduse, või mitte ühtegi lahendust. Kui sfäärilises kolmnurgas on antud näiteks nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  ning külge  $a$ , siis küljele  $b$  võime saada siinusvalemi

$$\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

järgi kaks väärtust:  $b_1$  ja  $b_2 = 180^\circ - b_1$ , kui  $\sin a \sin \beta < \sin a$ , ja ühe väärtuse, kui  $\sin a \sin \beta = \sin a$ . Kui aga  $\sin a \sin \beta > \sin a$ , siis puudub kolmnurgal lahendus.

Kui külje  $b$  üks või kaks väärtust on leitud, võime nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  väärtused saada Napier'i valemite

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}} \tan \frac{a+\beta}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{a-\beta}{2}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{a+\beta}{2}}{\cos \frac{a-\beta}{2}} \tan \frac{a+b}{2} = \frac{\sin \frac{a+\beta}{2}}{\sin \frac{a-\beta}{2}} \tan \frac{a-b}{2}$$

järgi, kusjuures  $\cot \frac{\gamma}{2}$  ja  $\tan \frac{c}{2}$  peavad olema alati positiivsed.

Siin esinevad analoogilised juhud eelmises punktis käsitletud juhtudega, kusjuures nurkade asemele tuleb võtta küljed ja külgede asemele nurgad. Seega võime märkida selle punkti skemaatiliseltselt järgmiselt:

$a < 90^\circ$	$\beta < 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \alpha = \beta \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta < 180^\circ \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta \geq 180^\circ \end{array} \right.$	. . . . .	kaks lahendust
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	üks „	
	$\beta = 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \alpha \geq \beta \end{array} \right.$	. . . . .	kaks „
		. . . . .	pole „	
		. . . . .	pole „	
	$\beta > 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta < 180^\circ \\ \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta \geq 180^\circ \\ \alpha \geq \beta \end{array} \right.$	. . . . .	kaks „
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	pole lahendust	
$a = 90^\circ$	$\beta < 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta < 180^\circ \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta \geq 180^\circ \end{array} \right.$	. . . . .	pole „
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	pole lahendust	
	$\beta = 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \alpha = \beta \end{array} \right.$	. . . . .	pole „
		. . . . .	määramata	
		. . . . .	pole lahendust	
	$\beta > 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta \leq 180^\circ \\ \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta > 180^\circ \\ \alpha \geq \beta \end{array} \right.$	. . . . .	pole lahendust
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	pole lahendust	
$a > 90^\circ$	$\beta < 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta \leq 180^\circ \\ \alpha > \beta \text{ ja } \alpha + \beta > 180^\circ \end{array} \right.$	. . . . .	pole „
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	kaks lahendust	
	$\beta = 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \alpha > \beta \end{array} \right.$	. . . . .	pole „
		. . . . .	kaks „	
		. . . . .	kaks „	
	$\beta > 90^\circ$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta \leq 180^\circ \\ \alpha < \beta \text{ ja } \alpha + \beta > 180^\circ \\ \alpha = \beta \\ \alpha > \beta \end{array} \right.$	. . . . .	pole „
		. . . . .	üks lahendus	
		. . . . .	üks „	
. . . . .	kaks lahendust.			

Siin võimalikkude lahenduste puhul tuleb arvestada, et oleks  $\sin a \sin \beta \leq \sin a$ .

Näiteks, kui sfäärilises kolmnurgas on antud

$$\alpha = 72^{\circ} 53' 14'', \quad \beta = 58^{\circ} 46' 28'', \quad a = 50^{\circ} 15' 18'',$$

siis

$$\sin b = \frac{\sin \beta \sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin 58^{\circ} 46' 28'' \cdot \sin 50^{\circ} 15' 18''}{\sin 72^{\circ} 53' 14''},$$

mille logaritmi on

$$\log \sin b = \bar{1},83757,$$

kust võtame ainult ühe  $b$  väärtuse

$$b = 43^{\circ} 28' 10'',$$

sest väiksema nurga vastas peab olema väiksem külg.

Leiame nurga  $\gamma$  ja külje  $c$  :

$$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin 46^{\circ} 51' 44''}{\sin 3^{\circ} 23' 34''} \tan 7^{\circ} 03' 23''$$

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{a+\beta}{2}}{\sin \frac{a-\beta}{2}} \tan \frac{\alpha-b}{2} = \frac{\sin 65^{\circ} 43' 51''}{\sin 7^{\circ} 03' 23''} \tan 3^{\circ} 23' 34'',$$

mille logaritmid on

$$\log \cot \frac{\gamma}{2} = 0,18363$$

$$\log \tan \frac{c}{2} = \bar{1},64339,$$

kust

$$\gamma = 66^{\circ} 27' 56'', \quad c = 47^{\circ} 29' 30''.$$

## § 21. Harjutusülesanded.

- |                                       |                                  |                                   |
|---------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $a = 72^{\circ} 16' 22''$ ,        | $b = 63^{\circ} 35' 34''$ ,      | $c = 47^{\circ} 44' 56''$ .       |
| 2. $a = 130^{\circ} 28' 12''$ ,       | $b = 82^{\circ} 48' 14''$ ,      | $c = 76^{\circ} 18' 20''$ .       |
| 3. $a = 111^{\circ} 23' 32''$ ,       | $b = 124^{\circ} 06' 24''$ ,     | $c = 81^{\circ} 45' 04''$ .       |
| 4. $a = 102^{\circ} 02' 08''$ ,       | $b = 95^{\circ} 55' 28''$ ,      | $c = 100^{\circ} 40' 40''$ .      |
| 5. $a = 90^{\circ}$ ,                 | $b = 76^{\circ} 52' 26''$ ,      | $c = 43^{\circ} 34' 38''$ .       |
| 6. $a = 90^{\circ}$ ,                 | $b = 141^{\circ} 15' 16''$ ,     | $c = 67^{\circ} 02' 10''$ .       |
| 7. $a = 135^{\circ} 45' 40''$ ,       | $b = 105^{\circ} 55' 04''$ ,     | $c = 90^{\circ}$ .                |
| 8. $\alpha = 75^{\circ} 15' 50''$ ,   | $\beta = 82^{\circ} 25' 22''$ ,  | $\gamma = 67^{\circ} 17' 36''$ .  |
| 9. $\alpha = 135^{\circ} 55' 52''$ ,  | $\beta = 72^{\circ} 05' 18''$ ,  | $\gamma = 69^{\circ} 27' 06''$ .  |
| 10. $\alpha = 118^{\circ} 33' 30''$ , | $\beta = 153^{\circ} 41' 28''$ , | $\gamma = 80^{\circ} 23' 14''$ .  |
| 11. $\alpha = 161^{\circ} 13' 12''$ , | $\beta = 102^{\circ} 39' 32''$ , | $\gamma = 131^{\circ} 41' 34''$ . |
| 12. $\alpha = 90^{\circ}$ ,           | $\beta = 77^{\circ} 17' 40''$ ,  | $\gamma = 59^{\circ} 31' 44''$ .  |
| 13. $\alpha = 90^{\circ}$ ,           | $\beta = 152^{\circ} 53' 54''$ , | $\gamma = 79^{\circ} 07' 56''$ .  |
| 14. $\alpha = 143^{\circ} 34' 06''$ , | $\beta = 103^{\circ} 03' 52''$ , | $\gamma = 90^{\circ}$ .           |
| 15. $a = 81^{\circ} 53' 50''$ ,       | $b = 63^{\circ} 31' 32''$ ,      | $\gamma = 55^{\circ} 11' 14''$ .  |
| 16. $a = 77^{\circ} 59' 08''$ ,       | $c = 99^{\circ} 57' 54''$ ,      | $\beta = 66^{\circ} 55' 44''$ .   |
| 17. $b = 107^{\circ} 33' 20''$ ,      | $c = 59^{\circ} 19' 22''$ ,      | $\alpha = 125^{\circ} 01' 24''$ . |
| 18. $a = 131^{\circ} 55' 24''$ ,      | $b = 113^{\circ} 31' 12''$ ,     | $\gamma = 28^{\circ} 43' 44''$ .  |
| 19. $b = 115^{\circ} 43' 34''$ ,      | $c = 146^{\circ} 51' 02''$ ,     | $\alpha = 130^{\circ} 07' 06''$ . |
| 20. $b = 75^{\circ} 17' 16''$ ,       | $c = 53^{\circ} 43' 32''$ ,      | $\alpha = 90^{\circ}$ .           |
| 21. $a = 73^{\circ} 37' 22''$ ,       | $b = 123^{\circ} 23' 14''$ ,     | $\gamma = 90^{\circ}$ .           |
| 22. $a = 145^{\circ} 05' 14''$ ,      | $c = 127^{\circ} 21' 12''$ ,     | $\beta = 90^{\circ}$ .            |
| 23. $a = 90^{\circ}$ ,                | $b = 66^{\circ} 53' 46''$ ,      | $\gamma = 56^{\circ} 03' 30''$ .  |
| 24. $b = 115^{\circ} 51' 18''$ ,      | $c = 90^{\circ}$ ,               | $\alpha = 71^{\circ} 13' 28''$ .  |
| 25. $a = 121^{\circ} 07' 10''$ ,      | $c = 90^{\circ}$ ,               | $\beta = 133^{\circ} 43' 32''$ .  |
| 26. $\alpha = 72^{\circ} 18' 22''$ ,  | $\beta = 47^{\circ} 54' 36''$ ,  | $c = 56^{\circ} 27' 46''$ .       |
| 27. $\alpha = 63^{\circ} 29' 32''$ ,  | $\gamma = 69^{\circ} 09' 38''$ , | $b = 152^{\circ} 01' 02''$ .      |

- |     |                                   |                                   |                                   |
|-----|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 28. | $\beta = 81^{\circ} 57' 54''$ ,   | $\gamma = 120^{\circ} 35' 12''$ , | $a = 74^{\circ} 47' 16''$ .       |
| 29. | $\alpha = 138^{\circ} 03' 58''$ , | $\beta = 107^{\circ} 05' 02''$ ,  | $c = 26^{\circ} 13' 34''$ .       |
| 30. | $\alpha = 110^{\circ} 49' 24''$ , | $\gamma = 135^{\circ} 53' 32''$ , | $b = 141^{\circ} 03' 18''$ .      |
| 31. | $\beta = 64^{\circ} 46' 42''$ ,   | $\gamma = 78^{\circ} 15' 58''$ ,  | $a = 90^{\circ}$ .                |
| 32. | $\alpha = 117^{\circ} 39' 36''$ , | $\beta = 65^{\circ} 55' 02''$ ,   | $c = 90^{\circ}$ .                |
| 33. | $\alpha = 104^{\circ} 41' 14''$ , | $\gamma = 137^{\circ} 45' 54''$ , | $b = 90^{\circ}$ .                |
| 34. | $\alpha = 90^{\circ}$ ,           | $\beta = 58^{\circ} 43' 28''$ ,   | $c = 71^{\circ} 53' 32''$ .       |
| 35. | $\alpha = 90^{\circ}$ ,           | $\gamma = 65^{\circ} 43' 34''$ ,  | $b = 152^{\circ} 08' 04''$ .      |
| 36. | $\beta = 90^{\circ}$ ,            | $\gamma = 148^{\circ} 19' 24''$ , | $a = 62^{\circ} 21' 22''$ .       |
| 37. | $\alpha = 119^{\circ} 51' 58''$ , | $\gamma = 90^{\circ}$ ,           | $b = 136^{\circ} 55' 42''$ .      |
| 38. | $a = 55^{\circ} 27' 52''$ ,       | $b = 76^{\circ} 57' 04''$ ,       | $\alpha = 64^{\circ} 46' 32''$ .  |
| 39. | $b = 81^{\circ} 05' 02''$ ,       | $c = 62^{\circ} 29' 26''$ ,       | $\beta = 73^{\circ} 37' 36''$ .   |
| 40. | $a = 113^{\circ} 33' 22''$ ,      | $c = 47^{\circ} 27' 30''$ ,       | $\alpha = 52^{\circ} 16' 18''$ .  |
| 41. | $a = 53^{\circ} 35' 28''$ ,       | $b = 97^{\circ} 55' 52''$ ,       | $\alpha = 49^{\circ} 33' 40''$ .  |
| 42. | $b = 103^{\circ} 03' 52''$ ,      | $c = 144^{\circ} 15' 44''$ ,      | $\beta = 62^{\circ} 19' 14''$ .   |
| 43. | $a = 61^{\circ} 43' 38''$ ,       | $b = 90^{\circ}$ ,                | $\alpha = 33^{\circ} 41' 16''$ .  |
| 44. | $b = 67^{\circ} 17' 18''$ ,       | $c = 43^{\circ} 21' 12''$ ,       | $\beta = 116^{\circ} 53' 32''$ .  |
| 45. | $a = 152^{\circ} 25' 52''$ ,      | $b = 75^{\circ} 07' 44''$ ,       | $\alpha = 124^{\circ} 06' 26''$ . |
| 46. | $a = 97^{\circ} 57' 38''$ ,       | $b = 90^{\circ}$ ,                | $\alpha = 132^{\circ} 23' 32''$ . |
| 47. | $b = 59^{\circ} 47' 36''$ ,       | $c = 160^{\circ} 10' 20''$ ,      | $\beta = 117^{\circ} 37' 42''$ .  |
| 48. | $b = 100^{\circ} 17' 26''$ ,      | $c = 153^{\circ} 41' 32''$ ,      | $\gamma = 121^{\circ} 18' 18''$ . |
| 49. | $a = 74^{\circ} 47' 34''$ ,       | $b = 71^{\circ} 17' 42''$ ,       | $\alpha = 90^{\circ}$ .           |
| 50. | $b = 86^{\circ} 13' 44''$ ,       | $c = 102^{\circ} 13' 12''$ ,      | $\beta = 90^{\circ}$ .            |
| 51. | $b = 136^{\circ} 42' 40''$ ,      | $c = 112^{\circ} 51' 16''$ ,      | $\gamma = 90^{\circ}$ .           |
| 52. | $a = 56^{\circ} 45' 34''$ ,       | $\alpha = 62^{\circ} 54' 40''$ ,  | $\beta = 75^{\circ} 57' 48''$ .   |
| 53. | $b = 76^{\circ} 19' 18''$ ,       | $\beta = 75^{\circ} 25' 26''$ ,   | $\gamma = 42^{\circ} 07' 22''$ .  |
| 54. | $c = 40^{\circ} 22' 32''$ ,       | $\beta = 50^{\circ} 05' 12''$ ,   | $\gamma = 114^{\circ} 16' 18''$ . |
| 55. | $a = 52^{\circ} 43' 02''$ ,       | $\alpha = 61^{\circ} 16' 28''$ ,  | $\beta = 90^{\circ}$ .            |
| 56. | $a = 37^{\circ} 41' 14''$ ,       | $\alpha = 22^{\circ} 07' 24''$ ,  | $\beta = 131^{\circ} 43' 52''$ .  |
| 57. | $b = 44^{\circ} 21' 20''$ ,       | $\beta = 96^{\circ} 19' 12''$ ,   | $\gamma = 127^{\circ} 15' 38''$ . |
| 58. | $c = 99^{\circ} 17' 42''$ ,       | $\beta = 54^{\circ} 45' 30''$ ,   | $\gamma = 80^{\circ} 21' 32''$ .  |
| 59. | $a = 107^{\circ} 29' 38''$ ,      | $\alpha = 112^{\circ} 05' 04''$ , | $\gamma = 62^{\circ} 25' 26''$ .  |
| 60. | $a = 113^{\circ} 39' 54''$ ,      | $\alpha = 148^{\circ} 17' 28''$ , | $\beta = 75^{\circ} 53' 42''$ .   |
| 61. | $b = 126^{\circ} 35' 46''$ ,      | $\beta = 135^{\circ} 29' 22''$ ,  | $\gamma = 90^{\circ}$ .           |
| 62. | $a = 131^{\circ} 03' 14''$ ,      | $\alpha = 38^{\circ} 35' 32''$ ,  | $\beta = 162^{\circ} 21' 24''$ .  |
| 63. | $c = 142^{\circ} 18' 18''$ ,      | $\beta = 125^{\circ} 25' 22''$ ,  | $\gamma = 153^{\circ} 13' 10''$ . |

64.  $a = 90^\circ$ ,  $\alpha = 80^\circ 23' 32''$ ,  $\beta = 21^\circ 33' 42''$ .  
65.  $a = 90^\circ$ ,  $\alpha = 118^\circ 51' 46''$ ,  $\gamma = 10^\circ 08' 48''$ .  
66.  $b = 90^\circ$ ,  $\beta = 74^\circ 47' 34''$ ,  $\gamma = 137^\circ 09' 12''$ .  
67.  $c = 90^\circ$ ,  $\beta = 142^\circ 35' 44''$ ,  $\gamma = 106^\circ 27' 56''$ .  
68.  $a = 90^\circ$ ,  $b = 34^\circ 41' 52''$ ,  $\alpha = 53^\circ 57' 54''$ .  
69.  $a = 90^\circ$ ,  $c = 73^\circ 55' 56''$ ,  $\alpha = 108^\circ 17' 16''$ .  
70.  $b = 90^\circ$ ,  $c = 97^\circ 51' 28''$ ,  $\beta = 48^\circ 43' 30''$ .  
71.  $a = 90^\circ$ ,  $c = 101^\circ 01' 52''$ ,  $\alpha = 126^\circ 14' 16''$ .  
72.  $b = 63^\circ 13' 18''$ ,  $\alpha = 78^\circ 19' 44''$ ,  $\beta = 90^\circ$ .  
73.  $c = 105^\circ 53' 44''$ ,  $\beta = 72^\circ 27' 22''$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .  
74.  $a = 52^\circ 55' 54''$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 111^\circ 02' 18''$ .  
75.  $b = 113^\circ 51' 54''$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 122^\circ 16' 16''$ .  
76.  $b = 33^\circ 47' 58''$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 53^\circ 51' 54''$ .  
77.  $a = 155^\circ 25' 32''$ ,  $\alpha = 124^\circ 37' 42''$ ,  $\beta = 90^\circ$ .  
78.  $a = \alpha = 73^\circ 33' 24''$ ,  $\beta = 90^\circ$ .  
79.  $b = \beta = 152^\circ 43' 36''$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .  
80.  $a = 65^\circ$ ,  $\alpha = 150^\circ$ ,  $\beta = 125^\circ$ .

Am

A

11771

121227

Hind 4 rubla