



E. ETVERK
A. LINTS
A. VIHMAN

Matemaatika

VII KLASSILE

A-22615
E. ETVERK, A. LINTS, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VII KLASSILE

I OSA

*Lubatud katseõpikuna Eesti NSV
Haridusministeeriumi poolt*

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1959

1. HULKLIIKMETE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

KAHE ARVU SUMMA JA VAHE KORRUTIS.

1. Tuleta meelde ja sõnasta hulkliikmete korrutamise eeskiri.

$$(a+b+\dots)(m+n+\dots) = am+an+\dots+bm+bn+\dots$$

Joon. 1.

Arvuta järgmised korrutised:

$(x + 5)(x + 8)$

$(x + a)(x + b)$

$(2x + a)(3x - b)$

$(5y + 1)(2y - 7)$

$(x - 4y)(x + 0,5y)$

$(m - y)(3m + y)$

$(y + 2)(y + 6)$

$(x + 7)(x - 2)$

$(2x - 3a)(4x + 2b)$

$(x - 2,5)(x - 3)$

2. Korruta ja koonda saadud korrutis.

$(m + n)(m - n)$

$(x + 5)(x - 5)$

$(x + y)(x - y)$

$(a + b)(a - b)$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Kahe arvu summa ja vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega.

3. Arvuta kahe arvu summa ja vahe korrutise valemi põhjal.

$$(x + 1)(x - 1)$$

$$(x + 3)(x - 3)$$

$$(a + 5)(a - 5)$$

$$(a + 6)(a - 6)$$

$$(6 + m)(6 - m)$$

$$(8 + n)(8 - n)$$

$$(b - 1,2)(b + 1,2)$$

$$(a - 0,7)(a + 0,7)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(d - \frac{2}{3}\right)\left(d + \frac{2}{3}\right)$$

4. Arvuta.

$$(3a + 2)(3a - 2)$$

$$(2a + 3)(2a - 3)$$

$$(5a - 3b)(5a + 3b)$$

$$(8m - 4n)(8m + 4n)$$

$$(4 + x)(x - 4)$$

$$(12 - x)(x + 12)$$

$$(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$$

$$(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$$

$$(2x^2 + 7x^3)(2x^2 - 7x^3)$$

$$(5a + 3a^2)(5a - 3a^2)$$

5. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valemit võib kasutada peast arvutamisel.

N ä i d e.

$$42 \cdot 38 = (40 + 2) \cdot (40 - 2) = 1600 - 4 = 1596.$$

6. Korruta peast.

$$21 \cdot 19$$

$$22 \cdot 18$$

$$23 \cdot 17$$

$$53 \cdot 47$$

$$52 \cdot 48$$

$$51 \cdot 49$$

$$43 \cdot 37$$

$$33 \cdot 27$$

$$34 \cdot 26$$

$$3,1 \cdot 2,9$$

$$4,2 \cdot 3,8$$

$$2,1 \cdot 1,9$$

$$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$$

$$2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{4}$$

$$4\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3}$$

7. Lihtsusta.

$$(2x + 1)(2x - 1)(5x - 1) - 20x^3 - 4x^2 + 5x$$

$$(2a^2 + 3)(2a^2 - 3) - 4a(a^3 - 3) + 9$$

$$(x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x + 1) + 12$$

$$(a + 4)(a - 4) - (a + 3)(a - 2) + a + 10$$

$$(a + 5)(a - 5) - (a + 6)(a - 6) - (11 - a)$$

8. Valemist

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

järeldub, et

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Kahe arvu ruutude vahe võrdub nende arvude summa ja vahe korrutisega.

9. Kirjuta korrutisena, kui on võimalik.

$t^2 - 9$	$d^2 - 64$	$a^2 - 25$	$a^2b^2 - 1$
$m^2 - 4$	$49 - y^2$	$9 - k^2$	$x^2y^2 - z^2$
$a^2 - 1$	$b^2 - 100$	$x^2 - 0,16$	$m^2n^2 - t^2$
$1 - x^2$	$25 - z^2$	$c^2 + d^2$	$8u^2 - 25$
$36 + c^2$	$n^2 - 7$	$y^2 - 0,09$	$0,49 - 16x^2$

10. Kahe arvu ruutude vahet saab jagada nii nende arvude summaga kui ka vahega:

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b.$$

$$(a^2 - b^2) : (a - b) = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b.$$

Kahe arvu ruutude vahe jagamisel nende arvude summaga saame nende arvude vahe.

Kahe arvu ruutude vahe jagamisel nende arvude vahega saame nende arvude summa.

Näide.

$$(81 - x^2) : (9 + x) = \frac{81 - x^2}{9 + x} = \frac{(9 + x)(9 - x)}{9 + x} = 9 - x.$$

11. Leia jagatis.

$(a^2 - 4) : (a - 2)$	$(x^2 - 9) : (x - 3)$
$(4b^2 - 16) : (2b - 4)$	$(25a^2 - b^2) : (5a - b)$
$(36m^2 - 4n^2) : (6m + 2n)$	$(81a^2 - 1) : (9a + 1)$
$(0,01 - a^2) : (0,1 + a)$	$(a^2 - 0,04) : (a + 0,2)$
$(x^2 - 0,25) : (x - 0,5)$	$(0,09 - a^2) : (0,3 + a)$

KAHE ARVU SUMMA RUUT.

12. Kirjuta kahe arvu summa ruut korrutisena, korruta ja koonda saadud korrutis.

$(k + m)^2$	$(a + x)^2$
$(x + y)^2$	$(m + n)^2$

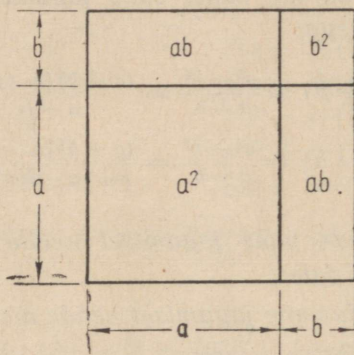
13. Kahe arvu summa ruudu leidmiseks saame valemi:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kahe arvu summa ruut võrdub esimese arvu ruuduga, pluss kahekordne esimese ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

14. Selgita kahe arvu summa ruudu valemi saamist joonise põhjal.



Joon. 2.

15. Leia järgmiste summade ruudud:

$a + 2$	$a + 3$	$a + 4$	$x + 11$
$n + 0,2$	$b + 0,3$	$m + 0,4$	$2a + 0,1$
$2a + b$	$5m + 4$	$5 + 4n$	$3x + 2$
$2x + 5a$	$4a + 6x$	$5b + 4x$	$3m + 6n$
$12x + 2y$	$9a + 10b$	$10a + 3x$	$7a + 5x$

Näide. $(4a + 5b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 5b + (5b)^2 = 16a^2 + 40ab + 25b^2$.

16. Teisenda hulkliige (kui võimalik) summa ruuduks.

$y^2 + 2a + 1$	$y^2 + 6y + 9$
$x^2 + 6x + 9$	$b^2 + 10b + 25$
$m^2 + 2m + 4$	$n^2 + 12n + 36$
$c^2 + 8c + 16$	$z^2 + 6z + 36$
$x^2 + 12x + 36$	$k^2 + 20k + 100$

Näide. $81 + 18a + a^2 = 9^2 + 2 \cdot 9 \cdot a + a^2 = (9 + a)^2$

17. Kahe arvu summa ruutu saab jagada nende arvude summaga.

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = (a + b)^2 : (a + b) = a + b.$$

Näide. $(25 + 10x + x^2) : (5 + x) = (5 + x)^2 : (5 + x) = 5 + x.$

18. Leia jagatis.

$$\begin{array}{ll} (x^2 + 2x + 1) : (x + 1) & (m^2 + 2m + 1) : (m + 1) \\ (a^2 + 6a + 9) : (a + 3) & (x^2 + 10x + 25) : (x + 5) \\ (4 + 4n + n^2) : (2 + n) & (n^2 + 20n + 100) : (n + 10) \\ (b^2 + 8b + 16) : (b + 4) & (x^2 + 14x + 49) : (x + 7) \\ (a^2 + 12a + 36) : (a + 6) & (a^2 + 0,2a + 0,01) : (a + 0,1) \end{array}$$

19. Kahe arvu summa ruudu valemit saab kasutada peast arvutamisel.

Näide.

$$\begin{aligned} 21^2 &= (20 + 1)^2 = 400 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1 = 441; \\ 108^2 &= (100 + 8)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 8 + 8^2 = \\ &= 10\,000 + 1600 + 64 = 11\,664. \end{aligned}$$

20. Arvuta peast.

$$\begin{array}{ccccc} 51^2 & 61^2 & 62^2 & 23^2 & 102^2 \\ 41^2 & 71^2 & 42^2 & 32^2 & 103^2 \\ \left(2\frac{1}{2}\right)^2 & \left(2\frac{1}{4}\right)^2 & \left(3\frac{1}{3}\right)^2 & \left(4\frac{1}{2}\right)^2 & (5,1)^2 \end{array}$$

21. Lihtsusta.

$$\begin{aligned} (a + 2)^2 + (a + 1)(a - 1) - 2a(a + 2) \\ (3 + x)^2 - (x + 2)(x - 2) - 13 \\ (2a + 3)(2a - 3) - (a + 3)(a - 3) - 3a^2 \\ (3x + 1)^2 - 5(x + 2)(x - 2) - 2x(2x + 3) \\ (4x + 1)^2 - (4x + 1)(4x - 1) - 2(4x + 1) \end{aligned}$$

KAHE ARVU VAHE RUUT.

22. Kirjuta kahe arvu vahe ruut korrutisena, korruta ja koonda saadud korrutis.

$$\begin{array}{ll} (a - x)^2 & (m - n)^2 \\ (b - x)^2 & (x - y)^2 \end{array}$$

23. Kahe arvu vahe ruudu leidmiseks saame valemi:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2; \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

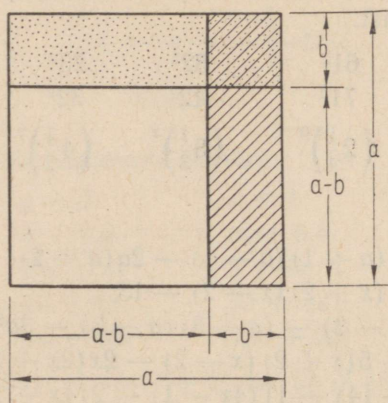
Kahe arvu vahe ruut võrdub esimese arvu ruuduga, miinus kahekordne esimese ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

24. Leia kahe arvu vahe ruut.

$a - m$	$3a - 1$	$4x - 3a$	$0,2a - 5$
$a - 1$	$2x - 1$	$3a - b$	$5x - 0,1$
$2 - a$	$5m - 2$	$5a - 3x$	$0,5x - 2$
$7 - x$	$7a - 3$	$6x - 2$	$0,4a - 10$
$x - 3$	$12x - 1$	$7a - 2x$	$0,3y - 5$

N ä i d e. $(14x - 3)^2 = (14x)^2 - 2 \cdot 14x \cdot 3 + 3^2 =$
 $= 196x^2 - 84x + 9.$

25. Selgita kahe arvu vahe ruudu valemi saamist joonise põhjal.



Joon. 3.

26. Kahe arvu vahe ruudu valemit saab kasutada peast arvutamisel.

N ä i d e.

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841;$$

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9604.$$

27. Arvuta peast.

39^2	18^2	47^2	199^2	$4,9^2$	$(9\frac{1}{2})^2$
38^2	17^2	37^2	198^2	$4,8^2$	$(3\frac{4}{5})^2$

28. Teisenda hulkliige (kui võimalik) vahe ruuduks.

$$s^2 - 2s + 1$$

$$y^2 - 6y + 9$$

$$1 - 2a + a^2$$

$$z^2 - 4z + 4$$

$$n^2 - 10n + 25$$

$$m^2 - 8m + 16$$

$$y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 - 16x + 64$$

$$x^2 - 4x + 16$$

$$a^2 - 14a - 49$$

29. Teisenda hulkliige (kui võimalik) korrutiseks või astmeks.

$$4x^2 + 12x + 9$$

$$1 + x + \frac{1}{4}x^2$$

$$9m^2n^2 - 6mn + 100$$

$$9a^2 - 30a + 25$$

$$25a^2 - b^2$$

$$0,25x^2 - 0,2x + 0,04$$

$$c^2 - 144$$

$$9 - 6a + 4a^2$$

$$r^2 - 0,6r + 0,36$$

$$16m^2 - 7m + 1$$

$$\frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}$$

$$9a^2b^2 - x^2$$

$$25d^2 - 20d + 4$$

$$4 + 6x - 9x^2$$

$$0,04a^2 - 0,04a + 0,01$$

30. Leia jagatis.

$$(a^2 - 2am + m^2) : (a - m)$$

$$(9a^2 - 6a + 1) : (3a - 1)$$

$$(a^2 - 2a + 1) : (a - 1)$$

$$(a^2x^2 - 1) : (ax + 1)$$

$$(4 + 4a + a^2) : (2 + a)$$

$$(4a^2 + 4a + 1) : (2a + 1)$$

$$(25 - x^2) : (5 - x)$$

$$(25m^2 - 20m + 4) : (5m - 2)$$

$$(x^2 - 6x + 9) : (x - 3)$$

$$(36x^2 + 24x + 4) : (6x + 2)$$

KAHE ARVU SUMMA KUUP.

31. Kirjuta kahe arvu summa kuup nende arvude summa ruudu ja samade arvude summa korrutisena, korruta ja koonda saadud korrutis.

$$(x + y)^3$$

$$(m + n)^3$$

$$(k + m)^3$$

$$(a + x)^3$$

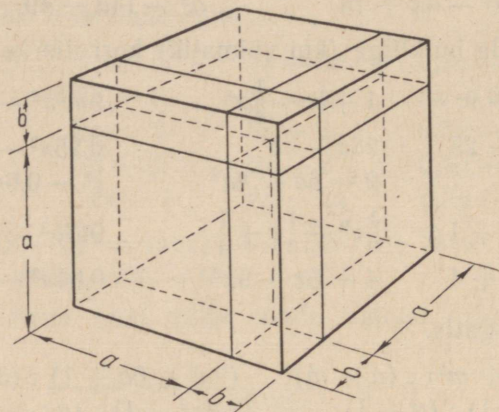
32. Kahe arvu summa kuubi leidmiseks saame tuletada valemi:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Kahe arvu summa kuup võrdub esimese arvu kuubiga, pluss kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, pluss teise arvu kuup.

33. Joonisel 3 kujutatud kuup servapikkusega $a + b$ koosneb 8-st osast: kahest kuubist ja kuuest risttahukast. Selgita joonise põhjal, kui suur on iga osa ruumala, ja samuti ka kahe arvu summa kuubi valemi saamist selle joonise põhjal.



Joon. 4.

34. Arvuta.

1) $(x + 1)^3$

2) $(a + 1)^3$

3) $(5 + c)^3$

$(4 + a)^3$

$(x + 5)^3$

$(b + 4)^3$

$(3m + 4)^3$

$(2n + 3)^3$

$(4a + b)^3$

$(2a + 4b)^3$

$(3x + 2y)^3$

$(2x + 3a)^3$

21^3

$(3,1)^3$

$(10,1)^3$

Näiteid.

$$\begin{aligned} \text{a) } (3a + 5b)^3 &= (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot 5b + 3 \cdot 3a \cdot (5b)^2 + \\ &+ (5b)^3 = 27a^3 + 3 \cdot 9a^2 \cdot 5b + 9a \cdot 25b^2 + 125b^3 = \\ &= 27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (4,1)^3 &= (4 + 0,1)^3 = \\ &= 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 4 \cdot (0,1)^2 + (0,1)^3 = \\ &= 64 + 4,8 + 0,12 + 0,001 = 68,921 \end{aligned}$$

35. Lihtsusta.

$$(m + 1)^3 - (2m + 1)^2 - m(m^2 - m - 1)$$

$$(2x + 3)^3 - 8x(x + 2)(x - 2) - 9(4x^2 + 3)$$

$$(n + 1)^3 + (n - 2)^2 + (n + 3)(n - 3) - n(n^2 + 5n - 2)$$

$$(a + 2)^3 - a(a + 3)^2$$

$$(x + 4)^3 - x(x + 6)^2$$

KAHE ARVU VAHE KUUP.

36. Kirjuta kahe arvu vahe kuup nende arvude vahe ruudu ja samade arvude vahe korrutisena ning arvuta korrutis.

$$(c - d)^3$$

$$(m - n)^3$$

$$(x - y)^3$$

37. Tuletame kahe arvu vahe kuubi leidmiseks valemi:

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b)^2 \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Kahe arvu vahe kuup võrdub esimese arvu kuubiga, miinus kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, miinus teise arvu kuup.

38. Arvuta.

$$\begin{aligned} 1) & (a - 3)^3 \\ & (m - 2)^3 \\ & (2x - y)^3 \\ & (5a - x)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & (2 - x)^3 \\ & (3b - 1)^3 \\ & (3a - 2b)^3 \\ & (4m - 5n)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & (5 - 2a)^3 \\ & (3x - 2)^3 \\ & (4a - 2x)^3 \\ & (6x - 5y)^3 \end{aligned}$$

Näide.

$$\begin{aligned} (3a - 5x)^3 &= (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 5x + 3 \cdot 3a \cdot (5x)^2 - (5x)^3 = \\ &= 27a^3 - 3 \cdot 9a^2 \cdot 5x + 9a \cdot 25x^2 - 125x^3 = \\ &= 27a^3 - 135a^2x + 225ax^2 - 125x^3. \end{aligned}$$

39. Lihtsusta.

$$\begin{aligned} & (2a + 1)^3 - (2a - 1)^3 - 24a^2 \\ & (5 - x)^3 + (x + 5)(x - 5) + x^2(x - 16) \\ & (3m - 2)^3 - 27m(m - 1)^2 \end{aligned}$$

KAHE ARVU KUUPIDE SUMMA.

40. Korruta.

$$\begin{aligned} & (m + n)(m^2 - mn + n^2) \\ & (c + d)(c^2 - cd + d^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ & (a + x)(a^2 - ax + x^2) \end{aligned}$$

41. Nimetame kolmliiget $a^2 - ab + b^2$ kahe arvu vahe mittetäielikuks ruuduks.

Mille poolest kahe arvu vahe mittetäielik ruut erineb kahe arvu vahe ruudust?

42. Korrutise $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ leidmiseks tuletame valemi:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe mittetäieliku ruudu korrutis võrdub nende arvude kuupide summaga.

43. Arvuta.

1) $(a + m)(a^2 - am + m^2)$	2) $(m + c)(m^2 - mc + c^2)$
$(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$	$(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
$(4 + y)(16 - 4y + y^2)$	$(5 + a)(25 - 5a + a^2)$
$(6 + x)(36 - 6x + x^2)$	$(11 + x)(121 - 11x + x^2)$
$(7 + n)(49 + 7n + n^2)$	$(12 - m)(144 - 12m + m^2)$

44. Lihtsusta.

$$(5 + x)(25 - 5x + x^2) - (5 + x)^3 + 15x(x + 6)$$

$$(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a + 2)(a - 2)$$

$$(4 + x)(16 - 4x + x^2) - (8 + x)^2 - x^2(x - 1)$$

45. Teisenda kahe arvu kuupide summa korrutiseks.

$u^3 + v^3$	$a^3 + 1$	$64a^3 + 1$
$x^3 + 8$	$y^3 + 0,001$	$8x^3 + 27$
$27 + a^3$	$64 + m^3$	$125y^3 + 64$

46. Kahe arvu kuupide summa $a^3 + b^3$ jagamisel nende arvude summaga $a + b$ saame jagatiseks nende arvude vahe mittetäieliku ruudu.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

47. Selgita ja sõnasta.

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} = a + b.$$

48. Leia jagatised.

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\frac{8 + a^3}{2 + a}$$

$$\frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1}$$

$$\frac{27 + x^3}{9 - 3x + x^2}$$

49. Arvuta avaldise

$$\frac{1 + x^3}{1 - x + x^2}$$

väärtus, kui $x = \frac{2}{7}$.

KAHE ARVU KUUPIDE VAHE.

50. Korruta.

$$(a - x)(a^2 + ax + x^2)$$

$$(b - y)(b^2 + by + y^2)$$

$$(m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$(n - x)(n^2 + nx + x^2)$$

51. Nimetame kolmeliiget $a^2 + ab + b^2$ kahe arvu summa mittetäielikuks ruuduks.

Mille poolest kahe arvu summa mittetäielik ruut erineb nende arvude summa ruudust?

52. Tuletame korrutise $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ leidmiseks valemi:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = \\ = a^3 - b^3.$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Kahe arvu vahe ja samade arvude mittetäieliku summa ruudu korrutis võrdub nende arvude kuupide vahega.

53. Arvuta.

$$1) (a - m)(a^2 + am + m^2)$$

$$2) (a - n)(a^2 + an + n^2)$$

$$(2 - x)(4 + 2x + x^2)$$

$$(3 - y)(9 + 3y + y^2)$$

$$(m - 1)(m^2 + m + 1)$$

$$(n - 1)(n^2 + n + 1)$$

$$(1 - x)(1 + x + x^2)$$

$$(1 - y)(1 + y + y^2)$$

$$(3 - 2a)(9 + 6a + 4a^2)$$

$$(2x - 4)(4x^2 + 8x + 16)$$

54. Lihtsusta.

$$(4 + x)(16 - 4x + x^2) + (4 - x)(16 + 4x + x^2)$$

$$(2 - a)(4 + 2a + a^2) - (2 + a)(4 - 2a + a^2)$$

55. Teisenda kahe arvu kuupide vahe korrutiseks.

1) $a^3 - x^3$
 $a^3 - 1$
 $x^3 - 8$

2) $125 - m^3$
 $216 - y^3$
 $u^3 - 1000$

3) $8a^3 - 1$
 $27x^2 - 8$
 $64a^3 - 125b^3$

56. Selgita ja sõnasta.

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2;$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b.$$

57. Leia jagatis.

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{8 - a^3}{2 - a}$$

$$\frac{27 - x^3}{9 + 3x + x^2}$$

$$\frac{125 - m^3}{25 + 5m + m^2}$$

58. Arvuta avaldise

$$\frac{1 - x^3}{1 + x + x^2}$$

väärtus, kui $x = \frac{17}{19}$.

KORDAMISEKS.

59. Lihtsusta antud võrduse vasakut poolt ja leia siis saadud võrdusest x .

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

1) $8(2x + 3) + 6(x - 4) = 66$

2) $(5 + x)(2x - 3) - 2(x^2 + x - 8) = 16$

3) $(3 + x)^2 + (4 + x)(4 - x) = 37$

4) $(3 + x)^3 - x^2(9 + x) = 81$

5) $(x - 7)(x^2 + 7x + 49) - x(x^2 - 2) = 1$

6) $7(5x - 4) - 8(4x - 5) = 24$

$$7) (9 - 3x)(4x + 1) - 6(2 + x - 2x^2) = 51$$

$$8) (5 + x)(5 - x) + (x + 6)^2 = 73$$

$$9) (x + 2)^3 - x^2(x + 6) = 56$$

$$10) (x + 4)(x^2 - 4x + 16) + x(5 - x^2) = 79$$

Näide. $(7 - x)(49 + 7x + x^2) + x(x^2 - 4) = 3;$

$$343 - x^3 + x^3 - 4x = 3;$$

$$343 - 4x = 3;$$

$$4x = 343 - 3;$$

$$4x = 340;$$

$$x = 85.$$

60. Ava sulud ja koonda, kui võimalik.

$$1) (a - b)^2 - (a + b)(a - b)$$

$$2) (3x + y)^2 - (3x - y)^2$$

$$3) (a + x)^3 - (a - x)(a^2 + ax + x^2)$$

$$4) (a - x)^3 + (a + x)(a^2 - ax + x^2)$$

$$5) (2a + 1)^3 - 2(a - 1)(a^2 + a + 1)$$

HULKLIKME JAGAMINE HULKLIKMEGA.

61. Vaatleme kaksliikmete $3x + 2$ ja $4x - 5$ korrutamist:

	$3x + 2$	
1. osakorrutis ...	$4x - 5$	
2. osakorrutis ...	$12x^2 + 8x$	
Korrutis ...	$-15x - 10$	
	$12x^2 - 7x - 10$	

Näeme, et korrutis $12x^2 - 7x - 10$ on osakorrutiste $12x^2 + 8x$ ja $-15x - 10$ summa.

Korrutise ja ühe teguri järgi saab jagamise teel leida teise teguri:

$$12x^2 - 7x - 10 \quad | \quad 3x + 2$$

Jagatava kõrgeima astme liige (ehk pealiige) $12x^2$ võrdub jagaja ja jagatise pealiikmete korrutisega. Jagaja pealiikme leiame, kui jagatava pealiikme $12x^2$ jagame jagaja pealiikmega $3x$, saame:

Antud juhul viimane jääk on null, mis tähendab, et jagamine toimus jäägita ning jagatis on $4x - 5$.

62. Selgita hulkliikme $18x^3 + 7x + 12$ jagamist hulkliikmega $3x + 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 18x^3 + 0 + 7x + 12 & 3x + 2 \\
 \hline
 18x^3 + 12x^2 & \hline
 \hline
 -12x^2 + 7x + 12 & \\
 -12x^2 - 8x & \hline
 \hline
 15x + 12 & \\
 15x + 10 & \hline
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

Siin on jagamisel tekkinud jääk 2, sest 2 ei jagu $3x$ -ga.

Kontrolli seda jagamist, tehes kindlaks, kas jagaja ja jagatise korrutis liidetud jäägiga võrdub jagatavaga.

63. Selgita alljärgnevat jagamist ja kontrolli seda korrutamise teel.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4 & 3x^2 - 5x + 1 \\
 \hline
 6x^4 - 10x^3 + 2x^2 & \hline
 \hline
 -9x^3 + 3x^2 + 17x - 4 & \\
 -9x^3 + 15x^2 - 3x & \hline
 \hline
 -12x^2 + 20x - 4 & \\
 -12x^2 + 20x - 4 & \hline
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

64. Selgita alljärgnevat jagamist ja kontrolli seda korrutamise teel.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 0 + 0 + 0 - a^4 & x - a \\
 \hline
 x^4 - ax^3 & \hline
 \hline
 ax^3 + 0 + 0 - a^4 & x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\
 ax^3 - a^2x^2 & \hline
 \hline
 a^2x^2 + 0 - a^4 & \\
 a^2x^2 - a^3x & \hline
 \hline
 a^3x - a^4 & \\
 a^3x - a^4 & \hline
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Vastus. $(x^4 - a^4) : (x - a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$.

65. Eelmistest ülesannetest järeldame järgmise reegli hulkliikme jagamiseks hulkliikmega.

Hulkliikme jagamisel hulkliikmega

- 1) korrastame antud hulkliikmed peatähe kahanevate (või kasvavate) astendajate järjekorras, kui nad ei ole juba korrastatud;
- 2) jagame jagatava pealiikme jagaja pealiikmega, saame jagatise esimese liikme;
- 3) korrutame jagaja jagatise esimese liikmega ja lahutame saadud korrutise jagatavast, saame esimese jäägi;
- 4) jagame esimese jäägi pealiikme jagaja pealiikmega, saame jagatise teise liikme;
- 5) korrutame jagaja jagatise teise liikmega ja lahutame saadud korrutise esimesest jäägist, saame teise jäägi;
- 6) toimime teise jäägiga niisamuti nagu esimese jäägiga, saame jagatise kolmanda liikme; nii jätkame jagamist seni, kuni saame jäägi null, või jäägi, mille pealiige ei jagu jagaja pealiikmega.

Viimasel juhul toimub jagamine jäägiga.

66. Hulkliikme jagamine hulkliikmega toimub nii, nagu mitmekohalise arvu jagamine mitmekohalise aruga, kui arvoud on kirjutatud järkarvude summana:

$$\begin{array}{r|l}
 3852 & 12 \\
 \hline
 36 & 321 \\
 \hline
 25 & \\
 24 & \\
 \hline
 12 & \\
 12 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 3000 + 800 + 50 + 2 & 10 + 2 \\
 \hline
 3000 + 600 & 300 + 20 + 1 \\
 \hline
 200 + 50 + 2 & \\
 200 + 40 & \\
 \hline
 10 + 2 & \\
 10 + 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Leia niiviisi jagatis $4932 : 12$.

67. Leia järgmised jagatised:

- 1) $(63x^2 - 10x - 8) : (7x + 2)$
 $(20a^2 - 57ab + 27b^2) : (5a - 3b)$
 $(30x^2 - 61xy + 28y^2) : (3x - 4y)$
 $(12a^2 - ab - 20b^2) : (4a + 5b)$
 $(12x^2 - 13xy - 35y^2) : (3x - 7y)$

$$2) \begin{aligned} &(x^2 - 2ax - 8a^2) : (x - 2a) \\ &(6x^2 + ax - a^2) : (2x + a) \\ &(10a^2 - 3ab - 27b^2) : (5a - 9b) \\ &(6x^2 - 23xy + 20y^2) : (2x - 5y) \\ &(36a^2 - 71ab + 14b^2) : (9a - 2b) \end{aligned}$$

$$3) \begin{aligned} &(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) : (a + 1) \\ &(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) : (x - y) \\ &(8a^3 + 36a^2 + 54a + 27) : (2a + 3) \\ &(27x^3 - 135x^2 + 225x - 125) : (3x - 5) \\ &(10a^3 + 17a^2 + 23a + 4) : (5a + 1) \end{aligned}$$

$$4) \begin{aligned} &(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) \\ &(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b) \\ &(125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3) : (5a + 2b) \\ &(6a^2b + 9a^3 - 6ab^2 - 4b^3) : (3a + 2b) \\ &(2a^3 + 6ab^2 - 15b^3 - 5a^2b) : (2a - 5b) \end{aligned}$$

$$5) \begin{aligned} &(a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3) : (a^2 - b^2) \\ &(3 + 8x + x^2 - 2x^3) : (1 + 2x - x^2) \\ &(-6 + 13x - 2x^3 - 3x^2) : (2 - x^2 - 3x) \\ &(1 - 5x + 8x^2 - 4x^3) : (1 - 3x + 3x + 2x^2) \\ &(a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1) : (a^4 - a^3 + a^2 + 1) \end{aligned}$$

$$6) \begin{aligned} &(a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5) : (a^3 + b^3) \\ &(3 - 6x^2 + 4x^4 - x^6) : (3 - 3x^2 + x^4) \\ &(1 - 2m^4 - m^2 - m^5 - m^3) : (1 - m^2 - m) \\ &(a^3 + a - 7a^2 + 20) : (a^2 - 3a + 5) \\ &(x^2 - x^3 - 13x + 21) : (x^2 + 2x - 7) \end{aligned}$$

$$7) \begin{aligned} &(a^4 - b^4) : (a - b) \\ &(a^4 - b^4) : (a + b) \\ &(a^5 - b^5) : (a - b) \\ &(a^5 + b^5) : (a + b) \\ &(a^6 - b^6) : (a - b) \end{aligned}$$

68. Arvuta avaldise

$$\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

väärtus, kui $x = 5\frac{3}{4}$.

69. Arvuta avaldise

$$\frac{3a^3 - 7a^2 + 5a - 1}{3a^2 + 4a + 1}$$

väärtus, kui $a = 1\frac{7}{9}$.

70. Leia valemite abil järgmised jagatised:

- 1) $(x^2 - y^2) : (x - y)$
 $(4a^2 - 9b^2) : (2a + 3b)$
 $(a^2 - 1) : (a + 1)$
 $(25x^2 - 49) : (5x + 7)$
 $(100y^2 - 225) : (10y - 15)$
- 2) $(x^2 - 1) : (x - 1)$
 $(9a^2 - 4) : (3a + 2)$
 $(16x^2 - 81) : (4x - 9)$
 $(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2)$
 $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$
- 3) $(x^2 + 14x + 49) : (x + 7)$
 $(x^2 - 10x + 25) : (x - 5)$
 $(9x^2 - 66x + 121) : (3x - 11)$
 $(16x^2 + 40xy + 25y^2) : (4x + 5y)$
 $(81x^2 - 90xy + 25y^2) : (9x - 5y)$
- 4) $(a^2 - 6a + 9) : (a - 3)$
 $(4a^2 + 28a + 49) : (2a + 7)$
 $(9a^2 + 12ab + 4b^2) : (3a + 2b)$
 $(4a^2 + 24ab + 36b^2) : (2a + 6b)$
 $(9a^2 - 48ab + 64b^2) : (3a - 8b)$
- 5) $(a^3 + 1) : (a + 1)$
 $(64a^3 + 1) : (4a + 1)$
 $(x^3 - 1) : (x - 1)$
 $(a^3 + x^3) : (a^2 - ax + x^2)$
 $(8 - a^3) : (4 + 2a + a^2)$

$$6) \begin{aligned} (a^3 + 27) &: (a + 3) \\ (x^3 - 64) &: (x - 4) \\ (1 - x^3) &: (1 + x + x^2) \\ (a^3 + 1) &: (a^2 - a + 1) \\ (125 - a^3) &: (5 - a) \end{aligned}$$

$$7) \begin{aligned} (x^2 - 25) &: (x - 5) \\ \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{16}{81}y^2\right) &: \left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{9}y\right) \\ (x^3 + 125a^3) &: (x + 5a) \\ (a^3 - 1000) &: (a - 10) \\ (x^2 + 4x + 4) &: (x + 2) \end{aligned}$$

$$8) \begin{aligned} (a^4 - 4) &: (a^2 - 2) \\ (x^4 - 16) &: (x^2 + 4) \\ \left(x^6 + \frac{1}{8}\right) &: \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \\ (x^6 - 27) &: (x^2 - 3) \\ \left(\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{8}b^6\right) &: \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b^2\right) \end{aligned}$$

71. Arvuta avaldise

$$\frac{1 - x^3}{1 + x + x^2}$$

väärtus, kui $x = \frac{12}{13}$.

72. Arvuta avaldise

$$\frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1}$$

väärtus, kui $a = \frac{17}{41}$.

73. Arvuta avaldise

$$\frac{a^2 - 10a + 25}{a - 5}$$

väärtus, kui $a = 5\frac{2}{3}$.

74. Arvuta avaldise

$$\frac{4x^2 + 28x + 49}{2x + 7}$$

väärtus, kui $x = 3\frac{1}{2}$.

2. ALGEBRALINE MURD.

ÜKSLEIKMETE SÜT JA VÜK.

75. Kirjuta järgnevad arvud nende algtegurite korrutistena. Vördsete algtegurite korrutis kirjuta astmena.

Näide. $324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^4$

36	54	81	102	510
40	63	82	121	484

76. Lahuta järgnevad arvud algtegureiks.

42	64	86	144	720
45	72	92	150	1050
49	77	96	169	1352

77. Üksleikme algtegureiks on tema kordaja algtegurid ja üksleikmes esinevad tähed. Näiteks üksleikme $60ax^2y^3$ algtegurid on 2, 3, 5, a , x ja y .

Kirjutades üksleikme $60ax^2y^3$ tema algtegurite korrutisena, saame

$$60ax^2y^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$$

78. Kirjuta üksleikme tema algtegurite korrutisena.

$15a$	a^2	m^2n^2	$12a^3bc$
$8x$	$3b^2$	$120ab^3$	$18a^2b^2c^2$
$14b$	$36x^2$	$57x^2y^3$	$8a^5b$
$24a$	$26y^3$	$210ax^2y^3$	$20a^4b^2$
$39z$	$17x^4$	$4a^4b^3x$	$27a^2xy$

79. Leia peast järgmiste arvude SÜT:

9 ja 12	15 ja 35	6; 12 ja 20
10 ja 15	39 ja 52	9; 18 ja 45
21 ja 14	34 ja 51	7; 14 ja 21

80. Arvuta järgmiste arvude SÜT:

112 ja 176	121; 154 ja 165
132 ja 364	102; 136 ja 170
308 ja 392	144; 162 ja 198
360 ja 450	264; 360 ja 600
468 ja 624	104; 525 ja 712

81. Antud üksliikmete suurimaks ühisteguriks nimetame nende üksliikmete kõikide ühiste algtegurite korrutist.

Näide. Üksliikmete $3a^2b^3$, $12a^3bc$ ja $18a^2b^2c^2$ SÜT leiame järgmiselt:

$$\begin{aligned} 3a^2b^3 &= 3 \cdot a^2b^3 \\ 12a^3bc &= 2^2 \cdot 3 \cdot a^3bc \\ 18a^2b^2c^2 &= 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2c^2 \\ \hline \text{SÜT} &= 3 \cdot a^2b \end{aligned}$$

Ühistegurita üksliikmete SÜT on 1.

82. Leia üksliikmete SÜT.

a ja $2a$	$6a$ ja 8	$14ax^2$ ja $21a^2x$
ab ja b	$7ab$ ja $12ac$	$44cy^3$ ja $77c^2y^2$
$3x$ ja $6x$	a^4 ja a^2	$30m^2p^3q$ ja $65mp^2q^3$
x ja x^2	$14y^3$ ja $7y$	$22a^2b^3c^2$ ja $121a^3bc$
a ja b	$18abc$ ja $12ac$	$42ax^2y^3$ ja $35bx^2$

83. Leia kolme üksliikme SÜT.

a) $15ab^2$	b) $16x^3y^2z$	c) $12mn$	d) $26p^3q^2$
$21a^2b$	$24xy^2z^3$	$18n^2$	$65a^2p^2q^3$
$12ab$	$6x^2y^2z^2$	$30mn^2$	$39p^2q^3$

84. Leia peast järgmiste arvude VÜK:

8 ja 12	3; 5 ja 11
12 ja 15	4; 10 ja 16
21 ja 14	5; 12 ja 18
33 ja 22	9; 15 ja 25
24 ja 100	7; 10 ja 21

85. Arvuta järgmiste arvude VÜK:

12; 18; 96 ja 144	240; 810 ja 6300
14; 20; 28 ja 30	42; 56 ja 98
12; 28; 35 ja 40	54; 72 ja 126
12; 20; 36 ja 54	504; 686 ja 1890
18; 24; 32 ja 48	720; 945 ja 3969

86. Antud üksliikmete väikseimaks ühiskordseks nimetame korrutist, mille saame, kui ühe üksliikme korrutame teiste üksliikmete nende algteguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.

Näide. Üksliikmete $40m^2n^3p$ ja $84mnq^2$ VÜK leiame järgmiselt:

$$\begin{aligned} 40m^2n^3p &= 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \\ 84mnq^2 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2 \\ \hline VÜK &= 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m^2n^3pq^2 = \\ &= 840m^2n^3pq^2. \end{aligned}$$

Ühisteguriteta üksliikmete VÜK on nende korrutis. Näiteks $3a^2$ ja $5b$ VÜK on $15a^2b$.

Kui antud üksliikmetest üks jagub kõigi teiste üksliikmetega, siis on ta antud üksliikmete VÜK.

Näiteks üksliikmete $18a^2b$, $54a^2b^2x$ ja $9ab^2$ VÜK on $54a^2b^2x$, sest

$$\begin{aligned} 54a^2b^2x : 18a^2b &= 3bx, \\ 54a^2b^2x : 9ab^2 &= 6ax. \end{aligned}$$

87. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

- | | | | |
|-----------|------------|-----------|--------------|
| 1) $a; 7$ | 2) $2y; y$ | 3) $a; b$ | 4) $ab; ac$ |
| $2a; 8$ | $10x; 5x$ | $2a; 2b$ | $ab; 5ac$ |
| $8a; 2$ | $12b; 4b$ | $2a; 5b$ | $4ab; 16ac$ |
| $12x; 16$ | $2a; 3a$ | $14a; 3b$ | $24ab; 6a$ |
| $51y; 34$ | $6b; 8b$ | $15a; 3b$ | $36ab; 48ac$ |

88. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

- | | | | |
|---------------|--------------|-----------------|---------------|
| 1) $abc; bcd$ | 2) $a^2; a$ | 3) $a^2b; a$ | 4) $a^3; b^3$ |
| $8abc; bcd$ | $a^2; 7a$ | $a^2b; 2a$ | $a^3; ab^3$ |
| $9abc; bc$ | $3a; 7a^2$ | $3a^2b; 6b$ | $a^3; a^2b^3$ |
| $8xyz; 3xy$ | $5a; 15a^2$ | $18a^2b; 54a^2$ | $a^2b; ab^2$ |
| $8xyz; 32xz$ | $28a^2; 35a$ | $45a^2b; 18b^2$ | $ab^2; a^3b$ |

89. Leia iga üksliikmete paari SÜT ja VÜK.

- | | | |
|--------------|-----------------|----------------------|
| 1) $6x; 3x$ | 2) $4np; 2pz$ | 3) $12a^4; 27a^6$ |
| $k^2; 7k$ | $6a^2b; 9b^2$ | $18x^2y^4; 12x^3y^5$ |
| $cv; v$ | $7t^2; 3t^2$ | $15a^2x^3; 35a^3x$ |
| $x^2y; xy^2$ | $12r; 18rp$ | $24x^3y^2; 30xy^4$ |
| $2m^2; 3mn$ | $7abc^2; 14abc$ | $16am^2n; 15am^3n^2$ |

ALGEBRALISE MURRU MÖISTE.

90. 75 cm³ õli kaalub 60 g. Arvuta õli erikaal.

91. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis?

92. Paberi paksuse määramiseks võeti pakk paberit, milles oli n lehte. Paki paksus oli p millimeetrit. Kui paks oli paber?

93. Laua mõõtmed on m ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

94. Ruudukujulise a meetri pikkuse küljega põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$?

95. Murdu, mille liikmetes esineb tähti, nimetatakse **algebra**liseks murruks.

*Algebra*lises murrus $\frac{a}{b}$ tähed a ja b võivad tähendada mistahes arvusid, ainsaks erandiks on, et b ei või olla null. Miks?

96. Murdu $\frac{a}{b}$ võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. Iga arvu võib kirjutada murruna, näiteks $x = \frac{x}{1}$.

97. Kirjuta murruna järgmised arvud:

$$5; 0; a; b; a^2; a^2b; 2a^3b.$$

98. Arvuta murru väärtus, kui temas esinevate tähtede väärtused on antud.

1) $\frac{3a}{5b}$; $a = 15$; $b = 9$.

2) $\frac{6ab}{7c}$; $a = 14$; $b = 7$; $c = 12$.

3) $\frac{4a}{3bc}$; $a = 6$; $b = -2$; $c = 12$.

4) $\frac{x^2}{5b}$; $a = 10$; $x = -2$; $b = 24$.

5) $\frac{a+b}{a-b}$; $a = 2,6$; $b = 2,4$.

6) $\frac{3a+2b}{2a-3b}$; $a = 5$; $b = 3$.

99. Millist väärtust ei või omada murru nimetajas esinev täht igas alljärgnevas murrus:

$$\frac{m}{n}; \frac{3}{n}; \frac{5}{1-x}; \frac{a}{x-2}; \frac{5}{2+a}; \frac{m}{x+3}?$$

MURRU PÕHIOMADUS.

100. Võta alljärgnevast tabelist murru $\frac{a}{b}$ mingi väärtus, korruta selle lugejat ja nimetajat arvuga m ja võrdle murdu $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{ma}{mb}$.

Seejärel jaga murru $\frac{a}{b}$ lugejat ja nimetajat arvuga m ning võrdle murdu $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{a:m}{b:m}$.

$\frac{a}{b}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
m	$\frac{2}{3}$	0,4	-3	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{3}$
$\frac{ma}{mb}$					$\frac{7}{8}$
$\frac{a:m}{b:m}$					$\frac{7}{8}$

Näide. $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$; $m = -1\frac{2}{3}$.

$$\frac{ma}{mb} = \frac{-1\frac{2}{3} \cdot 7}{-1\frac{2}{3} \cdot 8} = \frac{-\frac{5}{3} \cdot 7}{-\frac{5}{3} \cdot 8} = \frac{-\frac{35}{3}}{-\frac{40}{3}} = \frac{35 \cdot 3}{3 \cdot 40} = \frac{7}{8};$$

$$\frac{a:m}{b:m} = \frac{7:(-1\frac{2}{3})}{8:(-1\frac{2}{3})} = \frac{-7:\frac{5}{3}}{-8:\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{21}{5}}{-\frac{24}{5}} = \frac{21 \cdot 5}{5 \cdot 24} = \frac{7}{8}.$$

101. Eelmise ülesande lahendus näitab algebralise murru põhiomadust:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Miks murru lugejat ja nimetajat ei või korrutada ega jagada nulliga?

102. Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse murru laiendamiseks. Arvu, millega murru laiendamisel lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse laiendajaks.

Laiendame näiteks 3-ga murdu $\frac{a}{5}$, saame

$$\frac{a}{5} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 5} = \frac{3a}{15}.$$

103. Laienda

4-ga murdu $\frac{1}{2}$;

5-ga „ $\frac{1}{3}$;

6-ga „ $\frac{1}{4}$;

3-ga „ $\frac{3}{4}$;

8-ga „ $\frac{7}{8}$;

8-ga murdu $\frac{a}{3}$;

3-ga „ $\frac{x}{5}$;

4-ga „ $\frac{2x}{7}$;

3-ga „ $\frac{1}{2a}$;

4-ga „ $\frac{5}{6a}$.

104. Laienda

a-ga murdu $\frac{5}{9}$;

b-ga „ $\frac{8}{13}$;

c-ga „ $\frac{7}{10}$;

3k-ga „ $\frac{7}{12}$;

10x-ga „ $\frac{2}{3}$;

5-ga murdu $\frac{3a}{4c}$;

3n-ga „ $\frac{12m}{17n}$;

2n-ga „ $\frac{12m}{17n}$;

5x-ga „ $\frac{24xy}{25z}$;

3xy² „ $\frac{24xy}{25z}$.

105. Murru laiendamisel antud nimetajani leiame esmalt laiendaja, mille saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga. Saadud jagatisega laiendame antud murdu.

Näiteid. 1) Laienda murd $\frac{2}{37}$ nimetajani 111.

$$111 : 37 = 3; \quad \frac{2}{37} = \frac{6}{111}$$

2) Laienda murd $\frac{2m}{13n}$ nimetajani $52m^2n$.

$$52m^2n : 13n = 4m^2; \quad \frac{2m}{13n} = \frac{8m^3}{52m^2n}$$

Kui võimalik, siis laiendaja leitakse peast.

106. Laienda murd

$\frac{3a}{4b}$ nimetajani $20b$;

$\frac{a}{n}$ nimetajani bn^2 ;

$\frac{5m}{4n}$	„	24n;	$\frac{3}{7}$	„	259;
$\frac{14x}{45y}$	„	180xy ² ;	$\frac{b}{x}$	„	2ax;
$\frac{a}{b}$	„	4a ² b ² ;	$\frac{a}{4b}$	„	12ab ² ;
$\frac{12}{13}$	„	169;	$\frac{3m^2n}{4xy}$	„	12m ² xy.

MURRU TAANDAMINE.

107. Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse murru taandamiseks.

$$\frac{\overset{3}{12}abc}{\underset{2}{8}abc^2} = \frac{3}{2c}; \quad \frac{\overset{4}{8}m^2n}{\underset{2}{8}m^2n^2} = \frac{1}{2nx}$$

108. Missugust murdu nimetatakse taandumatuks? Millega peab murdu taandama, et saada taandumatu murd?

109. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{16}{40}$	2) $\frac{12}{64}$	3) $\frac{14}{35}$	4) $\frac{24}{66}$	5) $\frac{28}{72}$	6) $\frac{21}{63}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{27}{72}$
$\frac{40}{88}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{35}{63}$	$\frac{88}{121}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{24}{70}$
$\frac{27}{63}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{39}{91}$	$\frac{60}{84}$	$\frac{42}{72}$	$\frac{84}{220}$
$\frac{57}{243}$	$\frac{115}{320}$	$\frac{117}{130}$	$\frac{132}{143}$	$\frac{112}{176}$	$\frac{308}{392}$

7) $\frac{2 \cdot 6}{42}$	8) $\frac{-12}{6 \cdot 5}$	9) $\frac{72 \cdot 6}{-36}$	10) $\frac{3 \cdot 12}{18 \cdot 24}$
$\frac{3}{2 \cdot 3}$	$\frac{-8 \cdot 5}{12}$	$\frac{22}{-33 \cdot 9}$	$\frac{-15 \cdot 20}{45 \cdot 30}$
$\frac{4}{3 \cdot 8}$	$\frac{5 \cdot 16}{-32}$	$\frac{17 \cdot (-2)}{-51}$	$\frac{-3 \cdot 8 \cdot 36}{-2 \cdot 9 \cdot 48}$
$\frac{6}{3 \cdot 10}$	$\frac{3 \cdot (-12)}{40}$	$\frac{-36}{-5 \cdot (-24)}$	$\frac{-4 \cdot (-7) \cdot 15}{3 \cdot 7 \cdot 50}$
$\frac{3 \cdot 4}{9}$	$\frac{-36 \cdot 5}{-96}$	$\frac{-75 \cdot 3}{-50}$	$\frac{2 \cdot (-6) \cdot 32}{45 \cdot 5 \cdot (-6)}$

110. Taanda järgmised murrud:

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|---------------------------------|
| 1) $\frac{6a}{4}$ | 2) $\frac{12}{6a}$ | 3) $\frac{ab^2}{abc}$ | 4) $\frac{a^2b}{abc}$ |
| $\frac{6}{2a}$ | $\frac{5a}{10}$ | $\frac{9ax}{15a^2}$ | $\frac{8a^2}{12ax}$ |
| $\frac{8b}{4a}$ | $\frac{9a}{3b}$ | $\frac{15ax^2}{35bx^3}$ | $\frac{9ax^3}{6bx^2}$ |
| $\frac{3a}{5a}$ | $\frac{5c}{7c}$ | $\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$ | $\frac{18a^2b^3y}{24a^2b^3x}$ |
| $\frac{b}{2b}$ | $\frac{n}{3n}$ | $\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$ | $\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$ |
| 5) $\frac{15a^2}{35ab}$ | 6) $\frac{96m^2n^2}{72m^3n^3}$ | 7) $\frac{ab \cdot 5ab}{10ab^2 \cdot 4b^2}$ | |
| $\frac{26ab^2}{65a^2b}$ | $\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$ | $\frac{21x^3 \cdot 6y^3}{7xy \cdot 18xy}$ | |
| $\frac{48a^2bc}{78abc^2}$ | $\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$ | $\frac{39mp^2 \cdot 4n^2p}{26mn \cdot 7np}$ | |
| $\frac{33m^2nx}{48mnx}$ | $\frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5}$ | $\frac{32u^2 \cdot 49v^2}{56uv \cdot 28uv}$ | |
| $\frac{74p^2q^4}{37npq^3}$ | $\frac{105x^2z^2}{360x^3z}$ | $\frac{18x^2 \cdot 32y}{32x^2 \cdot 45y^3}$ | |

MURDUDE ÜHENIMELISTEKS TEISENDAMINE.

111. Milliseid murde nimetatakse isenimelisteks? Milliseid murde nimetatakse ühenimelisteks? Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui nimetajad on ühistegurita?

Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui üks nimetajaist jagub teistega?

Mis võetakse antud isenimeliste murdude ühiseks nimetajaks?

112. Teisenda ühenimelisteks murrud:

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$; | 2) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{5}{21}$; | 3) $\frac{5}{26}$ ja $\frac{1}{51}$; |
| $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$; | $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{15}$; | $\frac{11}{63}$ ja $\frac{13}{126}$; |
| $\frac{2}{7}$ ja $\frac{5}{8}$; | $\frac{3}{5}$ ja $\frac{8}{45}$; | $\frac{13}{54}$ ja $\frac{7}{81}$; |
| $\frac{1}{2}$ ja $\frac{7}{11}$; | $\frac{3}{55}$ ja $\frac{10}{11}$; | $\frac{1}{81}$ ja $\frac{49}{135}$; |
| $\frac{6}{11}$ ja $\frac{7}{12}$; | $\frac{13}{144}$ ja $\frac{7}{12}$; | $\frac{34}{35}$ ja $\frac{54}{55}$; |

$$4) \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \text{ ja } \frac{5}{7};$$

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{7} \text{ ja } \frac{4}{15};$$

$$\frac{23}{24}, \frac{7}{8} \text{ ja } \frac{59}{60};$$

$$5) \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11} \text{ ja } \frac{1}{2};$$

$$\frac{6}{11}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13} \text{ ja } \frac{9}{14};$$

$$\frac{11}{50}, \frac{23}{125}, \frac{29}{150} \text{ ja } \frac{34}{225}.$$

113. Näide. Teisenda murrud $\frac{a}{3b}$ ja $\frac{b}{4c}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Et antud murdude nimetajad on ühistegurita, siis ühiseks nimetajaks on antud nimetajate korrutis.

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Vastavad laiendajad on $4c$ ja $3b$.

Seega,

$$\frac{a}{3b} = \frac{a \cdot 4c}{3b \cdot 4c} = \frac{4ac}{12bc}$$

$$\frac{b}{4c} = \frac{b \cdot 3b}{4c \cdot 3b} = \frac{3b^2}{12bc}.$$

114. Näide. Teisenda murrud

$$\frac{7c}{12abx}, \frac{13x}{20ab^2} \text{ ja } \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks, saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \quad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \quad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3 = 60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$

$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$

$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

115. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{a}{b}$ | 2) $\frac{a}{3b}$ | 3) $\frac{a}{a^2}$ | 4) $\frac{p}{a^2}$ |
| $\frac{c}{\bar{a}}$ | $\frac{c}{4d}$ | $\frac{3}{\bar{b}}$ | $\frac{q}{2ab}$ |
| 5) $\frac{2a^2}{x}$ | 6) $\frac{4x}{a^2}$ | 7) $\frac{2m}{3a^3}$ | 8) $\frac{p}{4m^2n}$ |
| $\frac{3b}{y}$ | $\frac{3y}{2b^2}$ | $\frac{n}{12a^2b}$ | $\frac{3p^2}{2mn^3}$ |
| $\frac{4c}{z}$ | $\frac{5y}{4ab}$ | $\frac{5n}{18ab^2}$ | $\frac{5}{14m^3n^2}$ |
| 9) $\frac{x}{a}$ | 10) $2b$ | 11) $\frac{2p}{3m^2}$ | 12) $\frac{5b}{24a^2c^3}$ |
| a^2 | $\frac{a}{3x^2}$ | $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$ | $5d$ |
| $\frac{y}{3a^3b}$ | $\frac{3ab}{5xy}$ | $3mn$ | $\frac{7a}{36c^2}$ |
| 13) $\frac{5}{a}$ | 14) x | 15) 2 | 16) $\frac{1}{x}$ |
| $\frac{4}{a^2}$ | $\frac{1}{2a}$ | 9 | $\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{1}{a^3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{5x^2}$ | $\frac{1}{x^3}$ |

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

116. Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate summa ja nimetajaks on liidetaivate nimetaja.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n}$$

117. Liida murrud.

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$$

$$\frac{4}{a} + \frac{5}{a}$$

$$\frac{-p}{q} + \frac{2p}{q}$$

$$\frac{8}{15} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{3a}{k} + \frac{a}{k}$$

$$\frac{r}{10s} + \frac{1}{10s}$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$$

$$\frac{5u^3}{b} + \frac{u^3}{b}$$

$$\frac{-3u}{-5v} + \frac{2u}{5v}$$

$$\frac{4R}{9} + \frac{R}{9}$$

$$\frac{7}{2h} + \frac{k}{2h}$$

$$\frac{92a^2}{35y} + \frac{8ab}{35y}$$

$$\frac{p^2}{4} + \frac{3p^2}{4}$$

$$\frac{4m^2}{3n} + \frac{1}{3n}$$

$$\frac{a}{a^2} + \frac{1}{z^2}$$

118. Murru $\frac{1}{2}$ vastandaruks on $-\frac{1}{2}$ ja murru $\frac{a}{b}$ vastandaruks $-\frac{a}{b}$.

Kirjuta järgmiste arvude vastandarvud:

$$-\frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5}; \quad -\frac{a}{b}; \quad -\frac{m}{4}; \quad -\frac{5}{n}.$$

119. Teades, et

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \text{ ja}$$

$$-(-a) = a,$$

saame:

$$-\frac{-a}{b} = -\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}}$$

Edasi saame:

$$-\frac{a}{-b} = -\left(-\frac{a}{a}\right) = \frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}}$$

Laiendades murdu $\frac{a}{b}$ arvuga -1 , saame

$$\frac{a}{b} = \frac{(-1) \cdot a}{(-1) \cdot b} = \frac{-a}{-b}, \text{ seega}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru ees ja murru ühes liikmes.

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru mõlemas liikmes.

120. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4}; \quad -\frac{a}{2}; \quad -\frac{m}{n}; \quad -\frac{-3}{m}; \quad -\frac{a}{-2}.$$

121. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgiga murru ees:

$$\frac{2}{5}; \quad \frac{-x}{2}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{5}{-n}; \quad \frac{n}{-3}.$$

122. Murru lahutamisel liidame lahutatava murru vastandarvu. Selgita järgmist sümbolites kirjutatud arutlust:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} &= \frac{a}{n} + \left(-\frac{b}{n}\right) + \left(-\frac{c}{n}\right) = \\ &= \frac{a}{n} + \frac{-b}{n} + \frac{-c}{n} = \frac{a + (-b) + (-c)}{n} = \frac{a - b - c}{n}. \end{aligned}$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a - b - c}{n}$$

Murdude liitmist ja lahutamist nimetame algebraliseks liitmi-seks.

123. Liida murrud ja kui võimalik, siis taanda tulemus.

$$1) \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{7}{15}$$

$$2) \frac{7a}{10} - \frac{3a}{10}$$

$$\frac{5}{18} + \frac{11}{18} - \frac{7}{18}$$

$$\frac{5g}{16} + \frac{3g}{16}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{2m}{3n} + \frac{m}{3n}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{9}{10} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{15x}{16y} - \frac{7x}{16y}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{9}{28} - \frac{5}{28}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$$

124. Arvuta.

$$1) \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b}$$

$$2) \frac{2a+5}{6} + \frac{3a+2}{6}$$

$$\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{4c^2}{3}$$

$$\frac{4m+8}{3} + \frac{2m-8}{3}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{3a}{x} + \frac{5a}{x}$$

$$\frac{7n+12}{8} - \frac{3n+12}{8}$$

$$\frac{10x}{9a} - \frac{5x}{9a} + \frac{x}{9a}$$

$$\frac{14x-9}{10} - \frac{6x+2}{10}$$

$$\frac{9}{10a^2} - \frac{3}{10a^2} - \frac{1}{10a^2}$$

$$\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}$$

Näide.

$$\frac{16x-3}{7} - \frac{2x-3}{7} = \frac{16x-3-(2x-3)}{7} = \frac{16x-3-2x+3}{7} = \frac{14x}{7} = 2x.$$

125. Arvuta.

$$\frac{m+n}{4p} - \frac{m-n}{4p}$$

$$\frac{3a}{a+b} + \frac{5a}{a+b} + \frac{7a}{a+b}$$

$$\frac{24x-6y}{7} - \frac{10x-48y}{7}$$

$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{a-b}$$

$$\frac{7m+8n}{3m} - \frac{3m-5n}{3m}$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{20a-9}{6b} - \frac{8a-9}{6b}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b+c+d}{x}$$

$$\frac{7x+5}{2y} + \frac{7x-5}{2y}$$

$$\frac{2a+3b}{a-b} - \frac{a+4b}{a-b}$$

126. Isenimeliste murdude algebralisel liitmisel

- 1) leiame nende murdude ühise nimetaja, milleks on antud nimetajate VÜK;
- 2) leiame iga antud murru laiendaja, milleks jagame leitud VÜK iga nimetajaga;
- 3) laiendame iga antud murdu leitud laiendajaga;
- 4) arvutame saadud ühenimeliste murdude summa;
- 5) kui võimalik, siis koondame saadud lugejat;
- 6) kui võimalik, siis taandame.

Näiteid. 1) Leiame summa

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2}.$$

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2} =$$

$$= \frac{2a+\overbrace{b}^b}{2ab} - \frac{a+\overbrace{b}^b}{b^2} + \frac{\overbrace{2a}^{2a}}{b^2} =$$

$$= \frac{2ab+b^2}{2ab^2} - \frac{2a^2+2ab}{2ab^2} + \frac{2a^2}{2ab^2} =$$

$$= \frac{(2ab+b^2) - (2a^2+2ab) + 2a^2}{2ab^2} =$$

$$= \frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2} =$$

$$= \frac{b^2}{2ab^2} = \frac{1}{2a}.$$

1) Ühiseks nimetajaks on $2ab^2$.

2) Laiendajad on:
 $2ab^2 : 2ab = b$;
 $2ab^2 : b^2 = 2a$.

3) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga.

4) Liidame lugejad.

5) Koondame lugeja.

6) Taandame.

2) Arvuta summa $2a + \frac{b^3}{5c^2}$.

$$2a + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{5c^2}{2a} + \frac{1}{5c^2} = \frac{10ac^2 + b^3}{5c^2}.$$

127. Arvuta.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{x}$

$\frac{1}{b} + \frac{1}{y}$

3) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y}$

$\frac{1}{5a} + \frac{1}{7b}$

$\frac{1}{4m} + \frac{1}{5n}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{8u}$

4) $1 + \frac{a}{3}$

$5 + \frac{b}{5}$

$1 + \frac{2}{x}$

$4 + \frac{3}{x}$

$3 + \frac{a}{b}$

5) $a + \frac{b}{c}$

$m + \frac{2m+3n}{2}$

$4 + \frac{a+x}{4}$

$8 + \frac{a-x}{4}$

$2a + \frac{2a+3b}{2b}$

128. Arvuta.

1) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

$\frac{3}{a} - \frac{1}{2a}$

$\frac{5}{a} - \frac{2}{3a}$

$\frac{y}{z} - \frac{z}{mx}$

2) $\frac{2}{3x} - \frac{3}{2y}$

$\frac{4}{5a} - \frac{6}{7b}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

$\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

$\frac{2}{b} - \frac{3}{ab}$

3) $1 - \frac{a}{3}$

$5 - \frac{b}{5}$

$1 - \frac{2}{x}$

$4 - \frac{3}{x}$

$3 - \frac{2}{a}$

4) $5 - \frac{a+x}{3}$

$7 - \frac{a-x}{6}$

$3m - \frac{4m+5n}{3}$

$3a - \frac{8a+3c}{2b}$

$4 - \frac{2+a}{3}$

129. Arvuta.

1) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

$\frac{8}{15} + \frac{2}{5}$

$\frac{5}{8} - \frac{1}{2}$

$\frac{9}{10} - \frac{4}{5}$

$\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$

2) $\frac{a}{4} + \frac{a}{12}$

$\frac{c}{3} - \frac{c}{6}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{3p}$

$\frac{5}{4q} - \frac{3}{2q}$

$\frac{1}{a} + \frac{2}{ab}$

3) $\frac{2m}{ar} - \frac{u}{r}$

$\frac{b}{a^2} + \frac{c}{a}$

$\frac{5u}{6a^2} - \frac{u}{3a}$

$\frac{5}{a^2} - \frac{4}{a^2b^2}$

$\frac{7}{4x^3} + \frac{3}{x^2}$

4) $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab}$

$\frac{m}{x^2y} - \frac{n}{xy^2}$

$\frac{3x}{4a^2b} + \frac{5y}{6ab^2}$

$\frac{5n}{9m^2} - \frac{7p}{6mn^2}$

$\frac{3ab}{10c^2d} + \frac{2c}{15d^2}$

5) $\frac{4a+b}{8} + \frac{2a-b}{8}$

$\frac{a+b}{10} + \frac{a-b}{10}$

$\frac{a+y}{3m} + \frac{2a-y}{3m}$

$\frac{5c-3u}{6n^2} + \frac{7c+12u}{6n^2}$

$\frac{2r-t}{s^2} + \frac{t-r}{s^2}$

6) $\frac{5a+b}{4} + \frac{a+b}{4}$

$\frac{c+nd}{2} - \frac{c-nd}{2}$

$\frac{6x-32}{2R^2} - \frac{4x-37}{2R^2}$

$\frac{58a^2-81}{27D^2} - \frac{58a^2}{27D^2}$

$\frac{19N-23}{8h^3} - \frac{1+19N}{8h^3}$

$$7) \frac{a+4}{2} + \frac{a+5}{3}$$

$$\frac{x+7}{4} + \frac{x-13}{12}$$

$$\frac{x-1}{6} + \frac{x-4}{21}$$

$$\frac{p+2q}{3} - \frac{5p+7q}{24}$$

$$\frac{5a-3b}{14} - \frac{a-b}{6}$$

$$8) \frac{am+bn}{ab} + \frac{am+cn}{ac}$$

$$\frac{a^2+1}{2a} - \frac{a-1}{2}$$

$$\frac{m^2+n^2}{mn} + \frac{m-n}{m}$$

$$\frac{p^2+q^2}{pq} - \frac{p-q}{q}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b+1}{ab}$$

130. Näide. Teisendame mürru $\frac{a}{m-n}$ mürruks nimetajaga $n-m$. Selleks kasutame võrdust

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

Saame

$$\frac{a}{m-n} = -\frac{a}{-(m-n)} = -\frac{a}{-m+n} = -\frac{a}{n-m}$$

$$\boxed{\frac{a}{m-n} = -\frac{a}{n-m}}$$

131. Näide. Arvutame summa

$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m},$$

saame

$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m} = \frac{a}{m-n} - \frac{b}{m-n} = \frac{a-b}{m-n}$$

132. Arvuta.

$$1) \frac{x}{3} - \frac{y}{-3}$$

$$\frac{2}{a} - \frac{1}{-a}$$

$$\frac{4}{3a} + \frac{1}{-3a}$$

$$\frac{1}{a+x} - \frac{1}{-a-x}$$

$$\frac{1}{a-x} + \frac{2}{x-a}$$

$$2) \frac{1}{a-1} - \frac{a}{1-a}$$

$$\frac{m^2}{m-n} - \frac{n^2}{n-m}$$

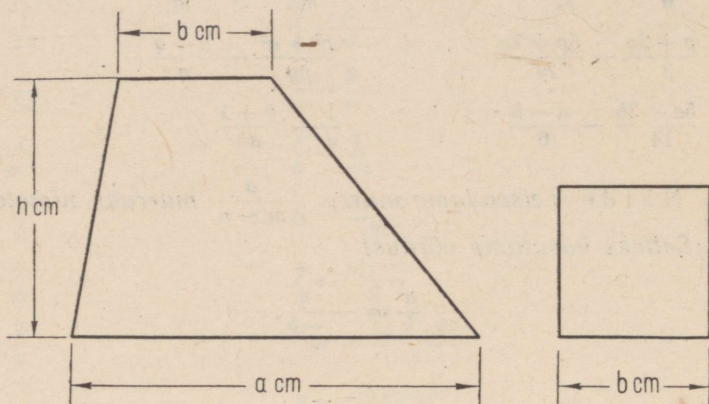
$$\frac{n}{n-2} + \frac{n}{2-n}$$

$$\frac{2a}{a-x} + \frac{a}{x-a}$$

$$\frac{a}{x-a} + \frac{x}{x-a}$$

133. Ühe kolmnurga pindala on $\frac{ah}{2}$ cm², teise pindala on $\frac{bk}{2}$ cm². Kui suur on nende kolmnurkade pindalade summa?

134. Arvuta joonisel 6 kujutatud trapetsi ja ruudu pindalade vahe.



Joon. 6.

135. Silindri kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{b}$ cm² ja külgpindala $\frac{m^2}{2b}$ cm². Kui suur on silindri täispindala?

136. Koonuse põhja pindala on $\frac{\pi a^2}{b^2}$ cm² ja külgpindala $\frac{\pi am}{b}$ cm². Kui suur on koonuse täispindala?

137. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?

138. Kooli esimese klassi õpilastest puudus ühel päeval $\frac{m}{n}$ protsenti; lõppklassis puudus samal päeval $\frac{a}{2n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsenti võrra oli lõppklassis puudujaid vähem kui esimeses klassis?

MURDUDE KORRUTAMINE.

139. Arvuta korrutis ja võimaluse korral taanda.

1) $\frac{3}{4} \cdot 8$

2) $\frac{7}{8} \cdot 12$

3) $21 \cdot \frac{5}{7}$

4) $65 \cdot \frac{19}{30}$

$\frac{5}{6} \cdot 24$

$\frac{3}{5} \cdot 15$

$39 \cdot \frac{11}{13}$

$78 \cdot \frac{7}{12}$

$\frac{7}{12} \cdot 60$

$\frac{9}{10} \cdot 35$

$48 \cdot \frac{5}{8}$

$30 \cdot \frac{23}{42}$

$\frac{11}{15} \cdot 90$

$\frac{13}{18} \cdot 27$

$85 \cdot \frac{12}{17}$

$56 \cdot \frac{9}{16}$

$\frac{9}{17} \cdot 112$

$\frac{11}{24} \cdot 32$

$95 \cdot \frac{15}{19}$

$63 \cdot \frac{25}{27}$

5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

6) $\frac{7}{12} \cdot \frac{24}{35}$

7) $1 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{14}$

8) $\frac{11}{12} \cdot 4 \frac{4}{5}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

$\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{55}$

$3 \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$

$\frac{5}{16} \cdot 7 \frac{1}{9}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$

$\frac{11}{13} \cdot \frac{65}{33}$

$2 \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{22}$

$\frac{7}{10} \cdot 3 \frac{1}{3}$

$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}$

$\frac{17}{15} \cdot \frac{25}{6}$

$7 \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$

$\frac{8}{13} \cdot 3 \frac{1}{4}$

$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{9}$

$\frac{18}{35} \cdot \frac{77}{24}$

$9 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$

$\frac{11}{17} \cdot 5 \frac{2}{3}$

9) $2 \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{1}{2}$

10) $1 \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{12}$

$4 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{1}{3}$

$2 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7}$

$7 \frac{3}{5} \cdot 1 \frac{6}{19}$

$3 \frac{3}{8} \cdot 1 \frac{1}{9} \cdot 5 \frac{1}{2}$

$8 \frac{1}{4} \cdot 1 \frac{5}{11}$

$7 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25}$

$10 \frac{4}{5} \cdot 4 \frac{4}{9}$

$5 \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{29} \cdot 4 \frac{3}{4}$

11) $-3 \cdot \frac{2}{3}$

12) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$

$(-6) \cdot \left(-12 \frac{1}{4}\right)$

$\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$

$-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{-6}$

$-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{8}$

$$-4 \cdot \frac{5}{6} \qquad -\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$2\frac{1}{3} \cdot \frac{-3}{5} \qquad -2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(-8\frac{4}{5}\right)$$

140. Kontrolli valemi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$$

õigsust, täites alljärgneva tabeli.

a	b	m	n	$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$	$\frac{am}{bn}$
3	5	15	18		
0,4	1,5	0,5	0,6		
3	-5	-15	18		
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{25}$		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{14}{25}$		

Murdude korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks on antud murdude nimetajate korrutis.

141. Esitades täisavaldisse murruna, mille nimetajaks on 1, tuleta valemi $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$ põhjal valem $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$.

142. Arvuta korrutis ja kui võimalik, siis taanda.

1) $\frac{5}{9} \cdot 21$

2) $12 \cdot \frac{5}{9}$

$\frac{3}{x} \cdot a$

$6 \cdot \frac{a}{3b}$

$\frac{c}{u^2} \cdot 2u$

$7m \cdot \frac{5}{u^2}$

$\frac{h}{ab} \cdot a$

$20c \cdot \frac{4ab}{5c}$

$\frac{4f}{g^2h} \cdot fgh$

$9hx^2 \cdot \frac{a}{hx^2}$

$$3) \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{a}{n^2}$$

$$\frac{4a}{b} \cdot \frac{3c}{8a}$$

$$\frac{ab}{6} \cdot \frac{3a}{4b}$$

$$\frac{x^2 u^3}{7} \cdot \frac{14}{a^2 u}$$

$$4) 1 \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{3}{7} a^2 n^2$$

$$2 \frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{x} \cdot 1 \frac{1}{3} \frac{x^2}{c^2}$$

$$\frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{21c} \cdot \frac{7c}{4a}$$

$$\frac{8a^2}{21b^2} \cdot \frac{14b}{15c} \cdot \frac{c}{4a^2}$$

$$1 \frac{3}{4} N^2 u^2 \cdot \frac{8u}{15N^2} \cdot \frac{3N}{4u^2}$$

$$5) (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$nx \cdot \left(-\frac{x}{n}\right)$$

$$(-15m^3 p) \cdot \frac{3x}{10m^2 p}$$

$$(-4at) \cdot \left(-\frac{5a^2 u}{8t^2}\right)$$

$$\left(-3 \frac{qw}{r}\right) \cdot qwr$$

$$6) \frac{5a}{16b^2} \cdot (-32ab^2 c)$$

$$\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2 b^2}{8c}\right)$$

$$\left(-\frac{N}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{5N^3}$$

$$\frac{-a^2 x^3}{13} \cdot \frac{52c}{-ax}$$

$$\frac{h}{5u^2} \cdot \left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$$

143. Korruta kahel viisil ja võrdle tulemusi.

$$\left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(2 + \frac{3}{a}\right)$$

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$$

$$\left(2 + \frac{a}{3}\right) \left(3 - \frac{a}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$$

$$\left(5 - \frac{3}{x}\right) \left(4 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$$

$$\left(7 + \frac{2}{a}\right) \left(7 - \frac{2}{a}\right)$$

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$$

$$\left(5 + \frac{a}{x}\right) \left(5 - \frac{a}{x}\right)$$

$$\left(\frac{2}{a} - \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{b}\right)$$

Näide. $\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right) = \frac{3x+2}{x} \cdot \frac{3x-2}{x} =$

$$= \frac{(3x+2) \cdot (3x-2)}{x \cdot x} = \frac{9x^2-4}{x^2}$$

$$\left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right) = 3^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 9 - \frac{4}{x^2} = \frac{9x^2-4}{x^2}$$

144. Teosta tehted.

$$1) \frac{a+b}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$\frac{m+4}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a-b)$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \cdot (p+q)$$

$$\frac{a+2}{3} \cdot \frac{a+3}{4}$$

$$2) \left(\frac{x}{4a} - \frac{y}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{5a} - \frac{y}{5}\right)$$

$$\frac{a+b}{7} \cdot \frac{a-b}{14}$$

$$\frac{m-n}{5} \cdot \frac{m+n}{16}$$

$$\left(\frac{p}{6} - \frac{q}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{9} + \frac{q}{3}\right)$$

$$\left(\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{4}\right)$$

MURRU ASTENDAMINE.

145. Et aste on võrdsete tegurite korrutis, siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Üldiselt,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ tegurit}}$

146. Astenda.

$$1) \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x}{9}\right)^2$$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^3$$

$$3) \left(-\frac{5a^2}{6b^3}\right)^2$$

$$\left(\frac{3x^2}{10y^2}\right)^3$$

$$\left(-\frac{y^3}{6x^2}\right)^3$$

$$\left(\frac{a^3}{3b}\right)^2$$

$$\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^3$$

$$5) \left(\frac{a+2}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2$$

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^3$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$$

$$\begin{array}{cccc}
2) \left(\frac{4a}{5}\right)^2 & 4) \left(\frac{3m}{4n}\right)^2 & 6) \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 & 7) \left(2 + \frac{a}{2}\right)^3 \\
\left(-\frac{7b}{8}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2N}\right)^2 & \left(\frac{a}{2} - 2\right)^2 & \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2}\right)^3 \\
\left(-\frac{8c}{15}\right)^3 & \left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^3 & \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}n\right)^3 \\
\left(\frac{9d}{10}\right)^3 & \left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b\right)^2 & \left(m + \frac{3}{4}\right)^3 \\
\left(-\frac{11e}{15}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2m^2x}\right)^3 & \left(\frac{a}{n} - 1\right)^3 & \left(\frac{2}{5} - \frac{2n}{3}\right)^3
\end{array}$$

MURDUDE JAGAMINE.

147. Arvuta.

$$\begin{array}{cccc}
1) \frac{12}{35} : 6 & 2) \frac{3}{5} : 5 & 3) \frac{15}{16} : 10 & 4) 28 : \frac{7}{10} \\
\frac{14}{15} : 7 & \frac{6}{7} : 3 & \frac{28}{33} : 35 & 16 : \frac{8}{13} \\
\frac{27}{48} : 9 & \frac{3}{8} : 7 & \frac{63}{50} : 14 & 20 : \frac{4}{5} \\
\frac{36}{55} : 12 & \frac{7}{16} : 2 & \frac{52}{105} : 12 & 64 : \frac{16}{17} \\
\frac{65}{72} : 13 & \frac{5}{21} : 4 & \frac{84}{95} : 60 & 80 : \frac{10}{11} \\
5) \frac{2}{3} : \frac{4}{7} & 6) \frac{5}{24} : \frac{35}{12} & 7) 1 \frac{14}{15} : \frac{29}{45} & 8) -2 \frac{3}{5} : 6 \frac{1}{2} \\
\frac{3}{5} : \frac{6}{11} & \frac{27}{55} : \frac{3}{22} & 5 \frac{11}{14} : \frac{-18}{35} & 4 \frac{3}{8} : -2 \frac{5}{8} \\
\frac{5}{16} : \frac{5}{7} & \frac{24}{65} : \frac{12}{91} & 3 \frac{5}{12} : \frac{5}{-16} & 5 \frac{4}{9} : -4 \frac{2}{3} \\
\frac{9}{14} : \frac{11}{35} & \frac{4}{9} : \frac{8}{27} & -9 \frac{3}{8} : \frac{-15}{24} & 7 \frac{7}{8} : 5 \frac{1}{4} \\
\frac{7}{12} : \frac{31}{24} & \frac{1}{3} : \frac{7}{30} & -2 \frac{3}{5} : \frac{13}{-15} & -8 \frac{1}{4} : -3 \frac{2}{3}
\end{array}$$

148. Murru $\frac{a}{b}$ pöördaro on $\frac{b}{a}$, sest

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Mis on murru $-\frac{a}{b}$ pöördarvuks?

Nimeta murdude

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{6}, \quad \frac{m}{n}, \quad -\frac{m}{n}, \quad a, \quad -b, \quad \frac{1}{a}$$

pöördarvud.

149. Jagada murd $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{m}{n}$, tähendab leida niisugune arv, mille korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ saame jagatava $\frac{a}{b}$.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$$

Selleks on tarvis näidata, et võrduse parema poole korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ saame jagatava $\frac{a}{b}$.

Korrutame:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{an}{bm} \cdot \frac{m}{n} = \frac{anm}{bmn} = \frac{a}{b}.$$

Seega,

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}}$$

Murru jagamisel murruga korrutame esimese murru teise murru pöördarvuga.

150. Esitades arvu a murruna ja kasutades murdude jagamise eeskirja, tõesta võrdused:

$$a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \quad \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}.$$

151. Arvuta.

1) $\frac{a}{5} : 5$

2) $2\frac{1}{4}a : 3$

3) $\frac{2a}{5} : a$

$\frac{2x}{5} : 4$

$6\frac{1}{2}b^2 : 2b$

$\frac{ab}{8} : b$

$-\frac{6m}{5} : 2$

$-3\frac{1}{3}xy : (-10)$

$3\frac{1}{5} : 8a$

$-\frac{3n}{8} : (-27)$

$4\frac{1}{6}x^2y : 50$

$\frac{12xy}{17} : 3x$

$\frac{8p}{9} : 16$

$1\frac{1}{2}m^3 : 15$

$\frac{42pq}{5} : 21p$

4) $\frac{x}{5} : 2\frac{1}{3}$

$\frac{2a}{9} : 3\frac{1}{9}$

$\frac{a}{10} : 1\frac{2}{5}$

$3\frac{1}{3}u : 6\frac{2}{3}$

$6\frac{2}{3}a^3 : 1\frac{2}{3}$

5) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{b}$

$\frac{x}{8} : \frac{x^2}{4}$

$\frac{3q^3}{4} : \frac{16q}{15}$

$\frac{18p}{5} : \frac{27p^3}{35}$

$\frac{m^2}{2} : \frac{m^2}{10}$

6) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b}$

$\frac{a^2}{b^2} : \frac{b}{a}$

$\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$

$\frac{2x}{3y} : \frac{2y}{3x}$

$\frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2}$

152. Arvuta.

1) $\frac{b^2}{a} : 3a$

$\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$

$\frac{16b}{a^2} : 4b^3$

$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$

$\frac{2c^2}{5x} : (-14c^3x)$

2) $\left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$

$\left(\frac{-a}{b}\right) : 7ac^2$

$\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$

$\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$

$\left(\frac{8c^2n}{3f}\right) : (-4cf)$

3) $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$

$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$

$\frac{x^3}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$

$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$

4) $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\left(-\frac{156a^4b^3}{17m}\right) : \left(-\frac{12a^2b}{17m}\right)$

$\frac{72u^5}{v^2} : 84\frac{u^3}{v^2}$

$\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$

153. Näide. Teisenda mitmekordset murdu

$$\frac{7}{25} : \frac{14}{15}$$

jagamise teel.

Lahendus.

$$\frac{7}{25} : \frac{14}{15} = \frac{7}{25} \cdot \frac{15}{14} = \frac{7 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{3}{10}$$

154. Näide. Teisenda mitmekordset murdu

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. Laiendades antud murdu cx -ga, saame

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}} = \frac{acx + bx^2}{1} = acx + bx^2.$$

155. Teisenda.

$$\frac{3}{4} \\ \frac{9}$$

$$\frac{1}{1} \\ \frac{a}$$

$$\frac{x - \frac{x}{3}}{2x}$$

$$\frac{8}{3} \\ \frac{5}$$

$$\frac{a}{2} \\ \frac{2}$$

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{c}$$

$$\frac{a}{b} \\ \frac{c}$$

$$\frac{-b^2}{a} \\ \frac{b}$$

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{\frac{1}{c}}$$

$$\frac{a}{b} \\ \frac{c}{d}$$

$$\frac{-b^2}{a} \\ \frac{b}$$

$$\frac{m + \frac{1}{4}}{m + \frac{1}{6}}$$

$$\frac{3x}{8y^2} \\ \frac{5x^2}{12y}$$

$$\frac{16b}{a^2} \\ \frac{4b^3}$$

$$\frac{2 + \frac{1}{a}}{3 + \frac{1}{a}}$$

KORDAMISEKS.

156. Taanda antud murd.

a) $\frac{-12a^3b^4c^5}{-36a^4b^4c^5}$;

b) $\frac{-72a^3b^4c^5x^6y^7}{-9a^3b^2c}$.

157. Arvuta korrutis

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right)$$

kahel viisil ja võrdle tulemusi.

158. a) Kirjuta hulkliige

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

astmena.

b) Kirjuta hulkliige

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

astmena.

159. a) Tõesta, et võrdus

$$(-a + b)(-a - b) = (a + b)(a - b)$$

on õige.

b) Tõesta, et võrdus

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

on õige.

160. Tõesta, et võrdus

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$

on õige.

161. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a - b)^2$, et tulemus oleks võrdne avaldisega $(a + b)^2$?

162. Millise avaldise peab lahutama arvude a ja b summa kuubist, et tulemus oleks võrdne a ja b kuupide summaga?

163. Arvuta x antud võrdest.

a) $\frac{x}{m} = \frac{5n}{2m}$;

b) $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2b^2}{x}$.

164. Teisenda murd

$$-\frac{-x^2 - x + 1}{2}$$

murruks, mille ees ei ole miinusmärki.

165. Teisenda murd $\frac{-a+b}{-x-y}$ niisuguseks murruks, milles lugeja ega nimetaja esimese liikme ees ei ole miinusmärki.

166. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

167. Toa pikkus on $\frac{a^2}{2b}$ meetrit ja laius $\frac{b}{3a}$ meetrit. Arvuta toa põranda pindala.

168. Kolmnurga alus on $\frac{2a}{b}$ cm ja kõrgus $\frac{b}{a}$ cm. Leia pindala.

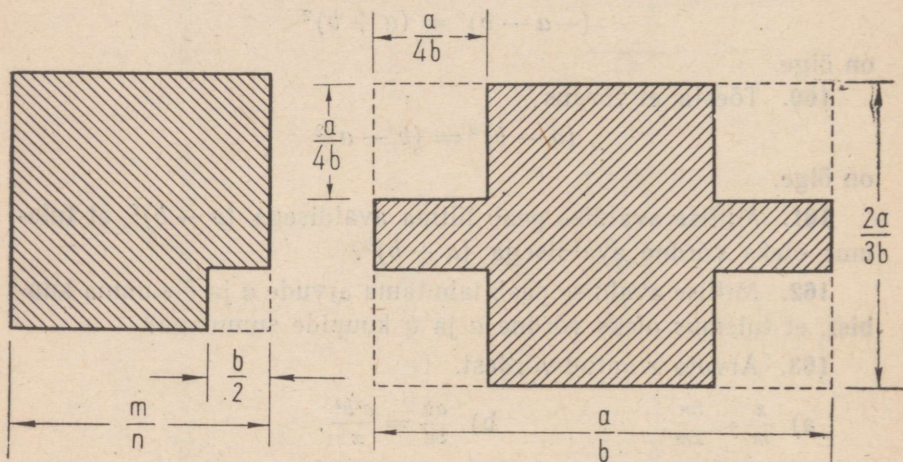
169. Kolmnurga küljed on $\frac{a}{b}$ cm, $\frac{2a}{b}$ cm ja $\frac{b-a}{2b}$ cm. Leia kolmnurga ümbermõõt.

170. Rööpküliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{m}$ cm ja $\frac{2a-b}{m}$ cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

171. Plekist ruudu külje pikkus on a mm. Soojenedes paisus ruudu külg 1 mm võrra. Leia pindala, mille võrra plekist ruudu pindala suurenes soojenedes.

172. Vasest kuubi serv, mille pikkus on b mm, paisus kuumenemisel 1 mm võrra. Leia, mille võrra suurenes kuubi ruumala.

173. Arvuta joonisel 7 antud kujundi pindala.



Joon. 7.

Joon. 8.

174. Arvuta joonisel 8 antud kujundi pindala.

175. Teosta võrduse vasakul poolel jagamine ja arvuta siis saadud võrdusest x :

1) $\frac{21x^2 - x - 2}{7x + 2} = 8;$

2) $\frac{20x^2 - 57x + 27}{5x - 3} = 7;$

3) $\frac{30x^2 - 61x + 28}{3x - 4} = 33;$

4) $\frac{2x^3 + 3x^2 - 13x + 6}{x^2 + 3x - 2} = 11;$

5) $\frac{2x^3 - x^2 - 8x - 3}{x^2 - 2x - 1} = 13.$

3. HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS.

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS ÜHISE TEGURI SULGUDE ETTE TOOMISEGA.

176. Jagades hulkliikme

$$am + bm - cm$$

arvuga m , saame

$$(am + bm - cm) : m = a + b - c.$$

Et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis

$$am + bm - cm = m(a + b - c).$$

Nii on hulkliige $am + bm - cm$ teisendatud korrutiseks $m(a + b - c)$. Selle kohta öeldakse, et hulkliige on lahutatud tegureiks.

Hulkliikme teisendamist korrutiseks nimetatakse hulkliikme tegureiks lahutamiseks.

177. Jaga hulkliige

$$12x^2 - 18x + 30$$

tema liikmete suurima ühisteguriga 6 ning kirjuta seejärel antud hulkliige korrutisena, s. t. lahuta see hulkliige tegureiks.

178. Mis on hulkliikme $ak - bk - ck$ liikmete ühiseks teguriks? Jaga see hulkliige tema liikmete ühise teguriga ja esita siis antud hulkliige korrutisena.

179. Jaga hulkliige

$$9a^5x^2 - 6a^3x^3 + 15a^2x^5$$

tema liikmete suurima ühisteguriga. Lahuta antud hulkliige tegureiks.

180. Ülesandeis 176—179 kirjeldatud hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse ühise teguri sulgude ette toomise võtteks.

Antud hulkliikme lahutamisel tegureiks sulgude ette toomise võttega toimime järgmiselt:

- 1) leiame hulkliikme liikmete SÜT ja kirjutame selle tegurina sulgude ette;
- 2) sulgudesse kirjutame teise teguri, milleks on antud hulkliikme ja sulgude ees seisva teguri jagatis.

Näide.

$$12a^2b - 18a^3b^2 - 24a^4b^3 = 6a^2b(2 - 3ab - 4a^2b^2),$$

sest $12a^2b : 6a^2b = 2,$

$$-18a^3b^2 : 6a^2b = -3ab,$$

$$-24a^4b^3 : 6a^2b = -4a^2b^2.$$

181. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3a + 3b$

$$3a + 6$$

$$9a - 6$$

$$12 - 4a$$

$$21 - 35a$$

2) $6a - 3x$

$$7x - 14a$$

$$15x + 3a$$

$$16a - 24x$$

$$72x - 9a$$

3) $mn + mx$

$$Q^2 - PQ$$

$$mv^2 - gv$$

$$2st - 6at^2$$

$$14N^2 - 7Nc$$

4) $16r^3 - 24r^2$

$$4u^3 - u^4$$

$$pq^2 - 3p^2q$$

$$m^3 + 5am^2$$

$$15h^2k^3 - 9h^3k$$

182. Kui antud hulkliikme üks liikmetest on liikmete SÜT, siis saab tuua selle liikme sulgude ette. Sulgudes on sel korral üheks liikmeks $+1$ või -1 .

Näiteid.

$$3a + 3 = 3(a + 1)$$

$$2ab - a = a(2b - 1)$$

183. Lahuta alljärgnevad kaksliikmed tegureiks.

1) $6ax - 6a$

$$5a^2 - 10ab$$

$$6ax - 12a^2$$

$$9x^2 - 18ax$$

$$3a^2b + 3b$$

2) $x^2 + 2ax^2$

$$12a^2 - 4a^2x$$

$$10ax - 15bx$$

$$12ax^2 - 10a^2x$$

$$a^2b^2 - ab$$

184. Too -2 sulgude ette.

a) $-6a - 4b$

b) $-2x^2 + 10x - 12$

c) $-8a^2 - 6a - 2$

185. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$$6ax - 9bx + 21cx$$

$$42a^2y - 35ay^2 + 7ay$$

$$9cz^4 - 21c^2z^3 - 15c^3z^2$$

$$-12ax^2 - 9ax - 6a$$

$$-5 + 10x - 15x^2$$

186. Jagades hulkliikme

$$7u(3a - 2) + 5(3a - 2)$$

kaksliikmega $3a - 2$, saame

$$[7u(3a - 2) + 5(3a - 2)]: (3a - 2) = 7u + 5.$$

Siit järeldame, et

$$7u(3a - 2) + 5(3a - 2) = (3a - 2)(7u + 5).$$

Hulkliikme

$$7u(3a - 2) + 5(3a - 2)$$

liikmete ühiseks teguriks on hulkliige $3a - 2$. Sellest näeme, et kui antud hulkliikme liikmetel on hulkliikmeline ühistegur, siis võib tuua selle sulgude ette.

187. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$$\begin{aligned} &a(3m + n) + b(3m + n) \\ &5(x - 2y) + a(x - 2y) \\ &(a + b)(2x + y) + a(2x + y) \\ &m(u + a) - n(u + 2) \\ &2(3b - v) - 3v(3b - v) \end{aligned}$$

188. Lahutame hulkliikme

$$m(1 + a + a^2) - (1 + a + a^2)$$

tegereiks. Liikmete ühiseks teguriks on kolmeliige $1 + a + a^2$. Kirjutame selle sulgude ette esimeseks teguriks; et ta on hulkliikmeline tegur, siis peame kirjutama sulgudesse.

Nii saame

$$m(1 + a + a^2) - (1 + a + a^2) = (1 + a + a^2)(m - 1),$$

sest

$$\frac{m(1 + a + a^2)}{1 + a + a^2} = m \text{ ja } \frac{-(1 + a + a^2)}{1 + a + a^2} = -1.$$

189. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$$\begin{aligned} &a(1 + x) - (1 + x) \\ &a(1 + x + x^2) - (1 + x + x^2) \\ &x(a^2 - a + 1) - 2(a^2 - a + 1) \\ &m(5x - 1) - (n + 2)(5x - 1) \\ &(3a + 2b)(m + 3c) - (2a + b)(m + 3c) \end{aligned}$$

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS VALEMITE KASUTAMISEGA.

190. Kui hulkliige on kahe arvu ruutude vahe, siis tema tegureiks lahutamisel saab kasutada valemit

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

(vt ül. 8.)

Näiteid. a) $16a^2 - 81b^2 = (4a)^2 - (9b)^2 =$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ 4a \qquad \qquad 9b \\ = (4a + 9b)(4a - 9b). \end{array}$$

b) $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 =$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ 2x + 3y \qquad 2x - 3y \\ = [(2x + 3y) + (2x - 3y)] \cdot [(2x + 3y) - (2x - 3y)] = \\ = (4x \cdot 6y) = 24xy. \end{array}$$

191. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) $x^2 - 1$

2) $1 - x^2$

3) $4x^2 - 9y^2$

$y^2 - 4$

$a^2 - 9$

$0,16a^2 - 0,09b^2$

$25 - y^2$

$64u^2 - v^2$

$9a^2 - (2x - 1)^2$

$49 - 9x^2$

$x^2 - \frac{9}{25}$

$(3a + b)^2 - (a - 3b)^2$

$0,04 - c^2$

$a^2 - 0,49$

$(a + b)^2 - (a - b)^2$

192. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) $ax^2 - ay^2$

2) $2a^2 - 2b^2$

$a^3 - ax^2$

$8 - 18x^2$

$\pi R^2 - \pi r^2$

$2\pi R^2 - 2\pi r^2$

$27a^2 - 12b^2$

$50a^2 - 98b^2$

$s^3 t^2 - s$

$9a^3 x^2 - a$

Näide. $18a^3 m^2 - 50a = 2a(9a^2 m^2 - 25) =$

$= 2a[(3am)^2 - 5^2] = 2a(3am + 5)(3am - 5).$

193. Valemist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

järeldame võrduse poolte vahetamise teel, et

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Samal viisil järeldame valemist

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

et

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Neist valemeist näeme, et kui kolmliikme kaks liiget on kahe arvu ruudud ja üks liige on nende arvude kahekordne korrutis, siis selle kolmliikme saab kirjutada nende arvude summa või vahe ruuduna, s. t. selle kolmliikme saab lahutada tegureiks.

Näiteid. a) $4a^2 + 12ab + 9b^2 =$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & 2a & 2 \cdot 2a \cdot 3b & 3b & 3b & \\ = & (2a)^2 & + & 2 \cdot 2a \cdot 3b & + & (3b)^2 & = (2a + 3b)^2. \end{array}$$

b) $36m^2 - 60mn + 25n^2 =$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & 6m & 2 \cdot 6m \cdot 5n & 5n & 5n & \\ = & (6m)^2 & - & 2 \cdot 6m \cdot 5n & + & (5n)^2 & = (6m - 5n)^2. \end{array}$$

194. Lahuta järgmised hulkliikmed võimaluse korral tegureiks:

1) $x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 2x + 3$

$x^2 + 14x + 49$

$x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 18x + 72$

2) $25 - 10y + y^2$

$1 + 2z + z^2$

$4u + 8 + u^2$

$v^2 - 2v - 1$

$t^2 - 16t + 64$

3) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

$4f^2 + 4f + 1$

$x^2 - 0,2x + 0,01$

$x^2 - 2,4x + 1,44$

$x^2 - 0,6x - 0,09$

4) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

$16g^2 - 16g + 4$

$h^2 - 6ah + 9a^2$

$c^2 - 4ck + 4k^2$

$25m^2 - 30mn + 9n^2$

195. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) $3a^2 - 6a + 3$

$5a^2 + 10a + 5$

$ax^2 + 4ax + 4a$

$7x^2 - 14x + 7$

$2x^2 - 16x + 32$

2) $6a^2 + 12a + 6$

$50y^2 + 20y + 2$

$av^2 - 2av + a$

$3m^2 - 48m + 19^2$

$5 + 10z + 5z^2$

196. Lahuta järgnevad kolmliikmed tegureiks:

1) $-a^2 - 8a - 16$

$-x^2 + 10x - 25$

$2x - x^2 - 1$

2) $-x^2 - 4x - 4$

$2ab - a^2 - b^2$

$-x^2 + 6x - 9$

N ä i d e. $10a^2 - a^2 - 25 = -(-10a + a^2 + 25) =$
 $= -(a^2 - 10a + 25) = -(a - 5)^2.$

197. Valemeist

$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ja

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

saame järeldada, et

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

ja

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Neid valemeid saab hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada siis, kui hulkliikmes on neli liiget, milledest kaks on kahe arvu kuubid, üks on kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis ning üks on kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis.

$$\begin{array}{cccccccc} \text{N ä i d e.} & a^3 & + & 12a^2 & + & 48a & + & 64 & = & a^3 & + & 3 \cdot a^2 \cdot 4 & + & 3 \cdot a \cdot 4^2 & + \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & a & & 3 \cdot a^2 \cdot 4 & & 3 \cdot a \cdot 16 & & 4 & & & & & & & & & \\ & & & + & 4^3 & = & (a + 4)^3. & & & & & & & & & & \end{array}$$

198. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

$$\begin{aligned} 1) & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ & 8 - 12a + 6a^2 - a^3 \\ & c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ & -a^3 - 30a^2 - 300a - 1000 \end{aligned}$$

$$y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$$

$$\begin{aligned} 2) & x^3 + 18x^2 + 108x + 216 \\ & 1 + 0,03p + 0,0003p^2 + 0,000001p^3 \\ & 125 - 75z + 15z^2 - z^3 \\ & 8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3 \\ & 125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3 \end{aligned}$$

199. Valemeist

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

ja

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

saame järeldada, et

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

ja

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Neist valemest näeme, et kui hulkliige on kahe arvu kuupide summa või kuupide vahe, siis saab seda hulkliiget lahutada tegureiks, kirjutades üheks teguriks nende arvude summa (või vahe) ja teiseks teguriks nende arvude vahe (või summa) mittetäieliku ruudu.

$$\begin{aligned} \text{N ä i d e. } 8a^3 - 27b &= (2a)^3 - (3b)^3 = \\ &\quad \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 2a & 3b \end{array} \\ &= (2a - 3b)[(2a)^2 + 2a \cdot 3b + (3b)^2] = \\ &= (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2). \end{aligned}$$

200. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks:

$$1) \begin{array}{l} a^3 + 125 \\ 64 - x^3 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{l} 250p^3 + 54q^3r^3 \\ x^3 - 0,008 \end{array}$$

$$8x^3 + 1$$

$$\frac{1}{8} - 8a^3$$

$$27a^3 - 8b^3$$

$$125u^3 + 216$$

$$z^3 + 0,01$$

$$128a^3b^2 - 432b^2c^3$$

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS LIIKMETE RÜHMITAMISE VÕTTEGA.

201. *Hulkliikme*

$$m(a + b) + n(a + b)$$

tegureiks lahutamisel saame kasutada ühise teguri sulgude ette toomise võtet, sest hulkliikme liikmetel on ühiseks teguriks $(a + b)$. Tuues selle ühise teguri sulgude ette, saame

$$m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n).$$

Hulkliikme

$$m(a + b) + n(a + b)$$

võib anda ka kujul

$$ma + mb + na + nb.$$

Kui seda hulkliiget hakata lahutama tegureiks, siis näeme, et kõikidel tema liikmetel ei ole ühist tegurit, kuid esimesel kahel liikmel on ühiseks teguriks m , kahel viimasel aga n .

Rühmitades selle hulkliikme liikmed nii, et igas rühmas oleks ühise teguriga liikmed, siis saame

$$(ma + mb) + (na + nb).$$

Kummaski rühmas saab nüüd tuua ühise teguri sulgude ette.
Seega saame

$$(ma + mb) + (na + nb) = m(a + b) + n(a + b).$$

Sel viisil oleme saanud hulkliikme niisugusel kujul, et kõikidel liikmetel on ühine tegur $(a + b)$, mille võime tuua sulgude ette. Nii saame lõpuks:

$$ma + mb + na + nb = (ma + mb) + (na + nb) = m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n).$$

Niisugust hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse liikmete rühmitamise võtteks.

Lahuta hulkliige

$$ma + mb + na + nb$$

tegureiks, rühmitades liikmed nii, et esimeses rühmas oleks liikmed ühise teguriga a , teises rühmas liikmed ühise teguriga b . Võrdle tulemust eespool saadud tulemusega.

202. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks liikmete rühmitamise võttega.

$$\begin{aligned} 1) \quad & ax + ay + 2x + 2y \\ & n^2 + nz + 5n + 5z \\ & u^2 + 7u + au + 7a \\ & 3a^2 + 2ab + 6a + 4b \\ & 6x^2 - 13x + 6xy - 13y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 2ax - au + 4bx + 2bu \\ & 5Nc - 5Nd + 7c^2 - 7cd \\ & z^2 - hz + 11z - 11h \\ & 8x^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 4y^3 \\ & ax^2 - bx^2 + ax - bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & t^2 - at - 3t + 3a \\ & 8m^2 - 4mn - 6m + 3n \\ & 16pq - 12q - 8pr + 6r \\ & 20ab - 4b - 5a - 1 \\ & 5z^2 - 5hz + ah - az \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & x^3 + x^2 + x + 1 \\ & x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \\ & 3x^3 - 7x^2 - 9x + 21 \\ & x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \\ & 5x^3 - 35x^2 + x - 7 \end{aligned}$$

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS MITME VÕTTEGA.

203. Hulkliikmete tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, kui saadud korrutises hulkliikmeline tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav. Näiteks, kui hulkliige

$$3ax^2 - 3ay^2$$

on ühise teguri $3a$ sulgude ette toomisega teisendatud korrutiseks

$$3a(x^2 - y^2),$$

siis tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, sest teine tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Tegureiks ei ole lahutatavad näiteks järgmised hulkliikmed:

$$\begin{array}{lll} a + b; & a - b; & a^2 + ab + b^2; \\ a^2 - ab + b^2; & a^2 + b^2; & 2x - 4y + 3xy. \end{array}$$

Hulkliikme tegureiks lahutamine on lõpetatud siis, kui ta on teisendatud niisuguseks korrutiseks, mille ükski hulkliikmeline tegur ei ole enam tegureiks lahutatav.

Näide.

$$3ax^2 - 3ay^2 = 3a(x^2 - y^2) = 3a(x + y)(x - y)$$

Siin on tegureiks lahutamine lõpetatud, sest kumbagi hulkliikmelist tegurit ei saa enam tegureiks lahutada.

Hulkliikme tegureiks lahutamisel vaatame kõigepealt, kas kõigil liikmetel on ühine tegur; kui on, siis toome selle sulgude ette. Seejärel vaatame, kas sulgudes olevat avaldist saab veel tegureiks lahutada kas valemite kasutamise või liikmete rühmitamise võttega; kui see on võimalik, siis tuleb seda teha.

Näide.

$$\begin{aligned} 6ax^2 - 12ax - 9bx^2 + 18bx &= 3x(2ax - 4a - 3bx + 6b) = \\ &= 3x[(2ax - 4a) - (3bx - 6b)] = \\ &= 3x[2a(x - 2) - 3b(x - 2)] = 3x[(x - 2)(2a - 3b)] = \\ &= 3x(x - 2)(2a - 3b). \end{aligned}$$

204. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3x^2 - 6x + 3$

$6 - 24p^2q^2$

$5y^2 - 1445$

$11x^2 - 66x + 99$

$u^2 - 1,21$

2) $7a^2b^2 - 7c^4$

$245Q^2 - 140Q + 20$

$121a^2b^2 - 100c^2d^2$

$24x^2 + 72x + 54$

$4f^2 - \frac{9}{25}$

3) $3a^3 - 12a$

$4a^4 + 4ab^3$

$x^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

$5ax^3 - 40ax^2 + 80ax$

4) $a^4 - ab^3$

$a^2 + 2ab + b^2 - x^2$

$a^2 - b^2 - a - b$

$2a - 3b - 4a^2 + 9b^2$

$3k^4 - 6k^3 + 3k^2$

205. Et antud arvu korrutada 100-ga ja siis tulemusega liita mingi kahekohaline arv, tuleb ainult antud arvu lõppu kirjutada see kahekohaline arv.

Näide.

$$100 \cdot 37 + 46 = 3746$$

Arvuta peast:

$$100 \cdot 58 + 12$$

$$100 \cdot 375 + 39$$

$$100 \cdot 8 + 34$$

206. Peast saab kergesti korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10.

Olgu ühe arvu numbrid a ja b , teise numbrid b ja c , kusjuures $b + c = 10$.

$$\begin{aligned} \text{Korrutades need arvud saame } & (10a + b) \cdot (10a + c) = \\ = & 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 100a^2 + 10a(b + c) + bc = \\ = & 100a^2 + 10a \cdot 10 + bc = 100a^2 + 100a + bc = \\ = & 100a(a + 1) + bc. \end{aligned}$$

Seega

$$(10a + b) \cdot (10a + c) = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + bc$$

Selleks et korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10, tuleb nende arvude algusnumber korrutada 1 võrra suurema arvuga ning tulemusele kirjutada lõppu juurde lõpunumbrite korrutis.

$$83 \cdot 87 = \underline{7221}$$

Märkus. Kui antud arvude lõpunumbrid on 1 ja 9, siis tuleb algusnumbri ja 1 võrra suurendatud arvu korrutisele kirjutada juurde 09. Miks?

207. Korruta peast.

1) $72 \cdot 78$

2) $36 \cdot 34$

3) $49 \cdot 41$

$56 \cdot 54$

$23 \cdot 27$

$48 \cdot 42$

$71 \cdot 79$

$88 \cdot 82$

$94 \cdot 96$

17 · 13

22 · 28

77 · 73

57 · 53

24 · 26

38 · 32

208. 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmine taandub kahe võrdse arvu korrutamisele, millede algsnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10. Seega saame 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmiseks järgmise eeskirja:

et leida 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruutu, tuleb selle arvu esimene number korrutada 1 võrra suurema arvuga ja tulemusele kirjutada lõppu juurde 25.

N ä i d e.

$$35^2 = 1225.$$

$$3 \cdot 4$$

209. Arvuta peast järgmised ruudud.

75^2	95^2	55^2	25^2	45^2
$8,5^2$	$6,5^2$	$7,5^2$	$3,5^2$	$5,5^2$

HULKLIHKMETE SUURIMA ÜHISTEGURI (SÜT) LEIDMINE.

210. Antud hulklihkmete SÜT leidmiseks lahutame need hulklihkmed tegureiks ja moodustame siis kõikide ühiste tegurite korrutise.

N ä i d e. Leiame hulklihkmete

$$15h^2 - 15h,$$

$$9h^3 - 9h \text{ ja}$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h$$

suurima ühisteguri.

L a h e n d u s.

$$15h^2 - 15h = 15h(h - 1) = 3 \cdot 5 \cdot h \cdot (h - 1);$$

$$9h^3 - 9h = 9h(h^2 - 1) = 3^2 \cdot h(h + 1)(h - 1);$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h = 24h(h^2 - 2h + 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot h(h - 1)^2.$$

$$\text{SÜT} = 3h(h - 1).$$

211. Leia iga järgmise avaldisepaari SÜT:

1) $8mnp$

$12m^2np - 4mn^2p$

2) $a^2x + ax^2$

$a^2x - ax^2$

3) $15pq - 5p$

$10p^2 + 15p$

4) $7a^2 - 21ab$

$5a - 15b$

5) $a^2 - 1$

$a + 1$

6) $5(a + x)^2$

$10(a^2 - x^2)$

7) $N^2 - 9$

$N^2 - 6N + 9$

9) $m^2n^2 - 1$

$5mn^2 + 5n$

8) a^3

$a^2x + ax^2$

10) $u^3 - c^2u$

$u^3 - 2u^2c + uc^2$

212. Leia iga järgmise avaldisekolmiku SÜT:

1) $x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 1$

$5x - 5$

3) $25 - 36x^2$

$5 + 6x$

$36x^2 - 60x + 25$

5) $4(a + 1)^2$

$6a^2 - 6$

$2a^2 + 4a + 2$

2) $9 - x^2$

$x^2 + 6x + 9$

$2x + 6$

4) $2a - 5$

$10 - 4a$

$6a - 15$

6) $a^2 - b^2 + a - b$

$3a^2 - 6a + 3$

$5a^2 - 5b^2$

HULKLIIKMETE VÄIKSEIMA ÜHISKORDSE (VÜK) LEIDMINE

213. Antud hulkliikmete VÜK leidmiseks lahutame kõik need hulkliikmed tegureiks, misjärel moodustame korrutise, mille tegureiks on ühe hulkliikme kõik tegurid ning teiste hulkliikmete tegurite hulgast need, mis võetud hulkliikme tegurite hulgas ei esine.

Näide. Leiame hulkliikmete $4N^2x - 4N^2$, $6N(x^2 + 2x + 1)$ ja $20Nx^2 - 20N$ väikseima ühiskordse.

Lahendus.

$4N^2x - 4N^2 = 4N^2(x - 1) = 2^2 \cdot N^2(x - 1);$

$6N(x^2 + 2x + 1) = 6N(x + 1)^2 = 2 \cdot 3 \cdot N(x + 1)^2;$

$20Nx^2 - 20N = 20N(x^2 - 1) = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x + 1)(x - 1).$

$$\begin{aligned} \text{VÜK} &= 2^2 \cdot N^2(x - 1) \cdot 3 \cdot (x + 1)^2 \cdot 5 = \\ &= 60N^2(x - 1)(x + 1)^2. \end{aligned}$$

214. Leia järgmiste avaldisepaaride VÜK:

1) 5

$5a - 5x$

2) 12

$12a + 5b$

3) m

$m^2 + m$

4) Ny

$N^2 - N$

5) $4a + 4n$

$5a - 5n$

6) $a^3 - aR^2$

$6a - 6R$

7) $x^2 - u^2$

$7x + 7u$

8) $1 - x^2$

$(x - 1)(x + 2)$

9) $(v - 9)^2$

$(18 - 2v)^2$

215. Leia iga järgmise kolme hulkliikme VÜK:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $(b - 7)^2$
$b^2 - 7b$
$5b$ | 2) ax
$a^2 + ax$
$ax + x^2$ | 3) $3x^2 - 48$
$3x - 12$
$(x + 4)^2$ |
| 4) $(x - 3)^2$
$x^2 - 9$
$5x - 15$ | 5) $3(n^2 - 1)$
$(n - 1)(n^2 + 1)$
$n^3 + n$ | 6) $2(x - 1)^2$
$7(x + 1)^2$
$14(x^2 - 1)$ |
| 7) $a(a + b) + a^2 - b^2$
$4a^2 - 4ab + b^2$
$a^2 - b^2$ | 8) $a^2 - 4$
$a^3 + 8$
$a^2 + 2a + 4$ | |
| 9) $a^3 - a^2 + a - 1$
$a^3 + a^2 + a + 1$
$a^4 - 1$ | 10) $8ab + 16b^2$
$a^2b + 4ab^2 + 4b^3$
a^3 | |

HULKLIKMELISTE LIIKMETEGA MURRUD.

MURDUDE TAANDAMINE

216. Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis sellise murru taandamiseks lahutame tema lugeja ja nimetaja tegureiks. Juhul, kui lugejal ja nimetajal on ühiseid tegureid, siis nende ühiste teguritega taandame murdu.

Näiteid.

1. Taanda murd $\frac{3ab + 3b}{6b + 6ab}$.

Lahendus. $\frac{3ab + 3b}{6b + 6ab} = \frac{3b(a + 1)}{3b(1 + a)} = \frac{3b(a + 1)}{6b(a + 1)} = \frac{1}{2}$.

2. Taanda murd $\frac{(x + 3)(x + 2) + 2(x - 3)}{x^2 + 14x + 49}$.

Lahendus,

$$(x + 3)(x + 2) + 2(x - 3) = x^2 + 5x + 6 + 2x - 6 =$$

$$= x^2 + 7x = x(x + 7);$$

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2;$$

$$\frac{(x + 3)(x + 2) + 2(x - 3)}{x^2 + 14x + 49} = \frac{x(x + 7)}{(x + 7)^2} = \frac{x}{x + 7}.$$

3. Taanda murd $\frac{2ab - 2b}{8b - 8ab}$.

Lahendus.

$$\frac{2ab - 2b}{8b - 8ab} = \frac{2b(a - 1)}{8b(1 - a)} = \frac{a - 1}{4(1 - a)} = -\frac{1 - a}{4(1 - a)} = -\frac{1}{4}.$$

217. Taanda võimaluse korral iga järgmine murd.

$$1) \frac{9m + 18}{9m - 27}$$

$$\frac{ab - ac}{ad + ac}$$

$$\frac{a^2 - a}{ab + a}$$

$$\frac{2x - 2}{2x + 7}$$

$$\frac{a - ax}{n - nx}$$

$$2) \frac{7h + 14}{7h - 35}$$

$$\frac{2e - 1}{2e + 3}$$

$$\frac{n + n^2}{l + n}$$

$$\frac{ar + a^2r^2}{a + ar}$$

$$\frac{6u^3 - 6u^2}{u - 1}$$

$$3) \frac{3abc - 7abu}{3ac - 7au}$$

$$\frac{ns + nt}{sv + tv}$$

$$\frac{a^2 - az}{ab - bz}$$

$$\frac{Q^3 + Q^2}{Q^3 + Q}$$

$$\frac{5z^3 - 6z}{15z^2 - 18}$$

$$4) \frac{4x^2 - 4x + 1}{10x - 5}$$

$$\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^3 - z}$$

$$\frac{25 - 10v + v^2}{25a - av^2}$$

$$\frac{9p^2 - 16q^2}{6p + 8q}$$

$$\frac{gh^2 - gf^2}{kh + kf}$$

$$5) \frac{ay^2 - 2ay + a}{y - 1}$$

$$\frac{u^3 - 2u^2 + u}{2u - 2}$$

$$\frac{4x^2 - 1}{4x + 2}$$

$$\frac{4n^2 + 25}{16n^4 - 625}$$

$$\frac{1 - Q^4}{Q^2 + 1}$$

$$6) \frac{x - a}{a - x}$$

$$\frac{5nz - 15}{3 - nz}$$

$$\frac{15a^2 - 20ab}{21am - 28bm}$$

$$\frac{1 - h^2}{ch^2 - c}$$

$$\frac{ab - bc}{ad - dc}$$

$$7) \frac{by - b}{1 - y}$$

$$\frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$$

$$\frac{2a - 5b}{15b - 6a}$$

$$\frac{abd^2 - abc}{abc - abd^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

$$8) \frac{a^2 - 1}{1 + a}$$

$$\frac{d^2u^2 - 9d^2}{du - 3d}$$

$$\frac{(nz + 1)^3}{n^2z^2 - 1}$$

$$\frac{a - x}{a - x}$$

$$\frac{6 - x}{x^2 - 36}$$

$$9) \frac{c^2 - 16}{4 - c}$$

$$\frac{w^2 - 1}{(w + 1)^2}$$

$$\frac{m^3n - mn^3}{mn^2 - m^2n}$$

$$\frac{a - b}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{3h - k}{k^2 - 9h^2}$$

$$10) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{m^2 - 2mn + n^2}{n - m}$$

$$\frac{u^2 - v^3}{u^2 - 2uv + v^2}$$

$$\frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$$

$$\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$11) \frac{9 - p^2}{p + 3}$$

$$\frac{-p - q}{p^2 + 2pq + q^2}$$

$$\frac{9a^2 - 16b^2}{9a^2 - 24ab + 16b^2}$$

$$\frac{x^2 - y^2 - (x + y)z}{x^2 - y^2 + xz + yz}$$

$$\frac{m^4 - m}{m^4 - m^2}$$

218. Arvuta avaldise

$$\frac{2a^3 + 3a^2 - 20a - 30}{4a^2 - 9}$$

väärtus, kui $a = 11$.

219. Arvuta avaldise

$$\frac{8x^2 + 16x + 32}{x^3 - 8}$$

väärtus, kui $x = 3$.

220. Näita, et murru

$$\frac{n^2 - nx + n - x}{n^2 - nx - n + x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

221. Näita, et murru

$$\frac{m^2 + 2m - mx - 2x}{m^2 + 3m - mx - 3x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

MURDUDE LAIENDAMINE.

222. Laienda murd $\frac{11}{17}$ nimetajani 391. Kuidas leiad laiendaja?

223. Näide. Laienda murd $\frac{2a - b}{a + 3b}$ nimetajani $2a^2 + 7ab + 3b^2$.

$$\begin{array}{r} \text{Lahendus. } 2a^2 + 7ab + 3b^2 \left| \frac{a + 3b}{2a^2 + 6ab} \right. \\ \hline ab + 3b^2 \\ ab + 3b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{2a-b}{a+3b} = \frac{(2a-b) \cdot (2a+b)}{(a+3b) \cdot (2a+b)} = \frac{4a^2 - b^2}{2a^2 + 7ab + 3b^2}$$

224. Laienda järgmised murrud antud nimetajani:

- 1) $\frac{1}{a+b}$ nimetajani $a^2 - b^2$
- 2) $\frac{a-b}{a+b}$ „ $a^2 + 2ab + b^2$
- 3) $\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2 - 2xy + y^2$
- 4) $\frac{m+n}{m-n}$ „ $m^2 - n^2$
- 5) $\frac{a+b}{a-b}$ „ $a^3 - b^3$
- 6) $\frac{m-n}{m+n}$ „ $m^3 + n^3$
- 7) $\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $21a^2 + 5a - 4$
- 8) $\frac{2x-3}{5x+7}$ „ $15x^2 + 11x - 14$

MURDUDE ÜHENIMELISTEKS TEISENDAMINE.

225. Tuleta meelde, kuidas teisendatakse murde ühenimelisteks.

Teisenda ühenimelisteks murrud

$$\frac{5}{54}, \quad \frac{7}{81} \text{ ja } \frac{19}{135}.$$

226. Näide. Teisenda murrud

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} \text{ ja } \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

ühenimelisteks.

$$\text{Lahendus. } a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\text{VÜK} = (a+b)^2(a-b).$$

Esimese murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b) : (a^2 + 2ab + b^2) = a-b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b) : (a^2 - b^2) = a+b.$$

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a-b) \cdot (a-b)}{(a^2+2ab+b^2) \cdot (a-b)} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)}$$

ja

$$\frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{2ab \cdot (a+b)}{(a^2-b^2)(a+b)} = \frac{2ab \cdot (a+b)}{(a+b)(a-b)(a+b)} = \frac{2ab(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}$$

227. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{a+b}$ ja $\frac{b}{a-b}$

2) $\frac{m}{m-n}$ ja $\frac{n}{m+n}$

3) $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$

4) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ ja $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$

5) $\frac{b}{a(a+b)}$, $\frac{a}{b(a-b)}$ ja $\frac{ab}{a^2-b^2}$

6) $\frac{c+d}{d(c-d)}$, $\frac{c-d}{d(c+d)}$ ja $\frac{cd}{c^2-d^2}$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

228. Kuidas toimub isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine?

Arvuta avaldis

$$\frac{12}{35} + \frac{29}{42} - \frac{61}{70}$$

229. Näide. Teosta tehted:

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3} - \frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3} - \frac{1}{mn+n^2}$$

Lahendus.

1) Lahutame nimetajad tegureiks ja leiame nimetajate VUK, mis on antud murdude ühiseks nimetajaks:

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$m^2n - mn^2 + n^3 = n(m^2 - mn + n^2)$$

$$mn + n^2 = n(m+n)$$

$$VUK = (m+n)(m^2 - mn + n^2)n.$$

2) Jagades leitud VUK iga murru nimetajaga, leiame iga murru laiendaja:

$$n, m + n \text{ ja } m^2 - mn + n^2.$$

3) Laiendame iga murdu vastava laiendajaga ja liidame laiendatud murrud:

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{n}^n}{m^3 + n^3} - \frac{\overbrace{m+n}^{m+n}}{m^2n - mn^2 + n^3} - \frac{\overbrace{m^2 - mn + n^2}^{m^2 - mn + n^2}}{mn + n^2} = \\ & = \frac{n(m-2n) - (m+n)(m-n) - (m^2 - mn + n^2)}{(m+n)(m^2 - mn + n^2)n} = \\ & = \frac{mn - 2n^2 - m^2 + n^2 - m^2 + mn - n^2}{(m+n)(m^2 - mn + n^2)n}. \end{aligned}$$

4) Koondame lugeja, saame

$$\frac{2mn - 2n^2 - 2m^2}{(m+n)(m^2 - mn + n^2)n}$$

5) Kui võimalik, siis taandame. Taandamise võimaluse selgitamiseks lahutame lugeja tegureiks:

$$\begin{aligned} \frac{2mn - 2n^2 - 2m^2}{(m+n)(m^2 - mn + n^2)n} &= \frac{-2(m^2 - mn + n^2)}{(m+n)(m^2 - mn + n^2)n} = \\ &= \frac{-2}{(m+n)n} = -\frac{2}{n(m+n)}. \end{aligned}$$

Vastus.

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3} - \frac{m+n}{m^2n-mn^2+n^3} - \frac{1}{mn+n^2} = -\frac{2}{n(m+n)}.$$

230. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2+a-2}{a^2-1}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2+a-2}{a^2-1} &= \frac{a+1}{a} + \frac{a+1}{2a} - \frac{1}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{2a+2}{(a+1)(a-1)} = \frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{a-1}. \end{aligned}$$

231. Teosta järgmised tehted:

$$1) \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{4-3a}{a-1} - \frac{4a-5}{1-a}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{x}{2x-c} + \frac{c}{2x}$$

$$\frac{x-y}{x+3y} - \frac{x+y}{3y}$$

$$2) \frac{1}{2u-v} - \frac{1}{2u+v}$$

$$\frac{7b-8a}{3b-2a} - \frac{b-4a}{2b-3a}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{4a-b}{a^2+ab}$$

$$\frac{1}{1-c} - \frac{1}{c+1}$$

$$\frac{7n}{5m^2-m} - \frac{2n}{10m-2}$$

$$3) \frac{4}{x-1} + \frac{3}{1-x}$$

$$\frac{a}{b(x+1)} - \frac{b}{a(1-x)}$$

$$\frac{m+2n}{m} - \frac{m+2n}{m-2n}$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{4a+x}{4a-x} + \frac{4a-x}{x-4a}$$

$$4) \frac{2}{1-a^2} - \frac{2}{a-1}$$

$$\frac{2a+3x}{2a-3x} - \frac{2a-3x}{3x-2a}$$

$$\frac{5}{y-1} - \frac{3}{2y+1} + \frac{1}{y+1}$$

$$\frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7}$$

$$\frac{2x-19}{3x-7} - \frac{5x}{6x-8} - \frac{1}{2}$$

$$5) \frac{2}{2a+3} + \frac{3}{3-2a} + \frac{2a+15}{4a^2-9}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b-2a} - \frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$$

$$\frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{2}{(a-1)(3-a)} + \frac{1}{(a-1)(a-2)}$$

$$\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+ac}{(a+c)(b-a)} + \frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$$

$$\frac{2}{a+b} + \frac{3}{a-b} + \frac{4a-5b}{a^2-b^2}$$

$$6) \frac{a-2b}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \frac{1}{ab+b^2}$$

$$\frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$$

$$\frac{2}{4+a} - \frac{a-3}{16-4a+a^2} - \frac{a^2-9a}{64+a^3}$$

$$\frac{1}{2m-3n} - \frac{2m+3n}{4m^2+6mn+9n^2} - \frac{6mn}{8m^3-27n^3}$$

$$\frac{a+1}{2a-2} + \frac{a^2+3}{2-2a^2} + \frac{2a-3}{a+1}$$

232. Näide. Kirjuta avaldis

$$a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b}$$

murruna.

Lahendus.

$$a - b = \frac{a - b}{1} = \frac{b(a - b)}{b} = \frac{ab - b^2}{b};$$

seega

$$\begin{aligned} a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} &= \frac{ab - b^2}{b} - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} = \\ &= \frac{ab - b^2 - a^2 + b^2 - ab}{b} = \frac{-a^2}{b} = -\frac{a^2}{b}. \end{aligned}$$

233. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

1) $1 + \frac{d}{1-d}$

4) $\frac{b}{b+x} + 1$

2) $1 + n + \frac{n^2}{1-n}$

5) $x - 3 + \frac{7}{x+3}$

3) $a - b - \frac{a^2 - b^2}{a}$

6) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} - 2 - \frac{x - 1}{2 - x}$

234. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutine läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse v liitrit vett?

235. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal k meetri ujumiseks vastuvoolu rohkem, kui sama vahemaa ujumiseks pärioolu?

Kui palju aega kulub ujujal k meetri edasi-tagasi ujumiseks?

236. Teisenda liigmurd $\frac{91}{17}$ segaarvuks.

Ühe ja sama tähe astendajate järgi korrastatud lugeja ja nimetajaga algebralist murdu nimetatakse liigmurruks (selle tähe suhtes), kui lugeja aste on nimetaja astmest kõrgem või sellega võrdne. Näiteks

$$\frac{x^3 + xy^2 - y^3}{x + 2y}$$

on liigmurd.

Kui lugeja aste on nimetaja astmest madalam, siis murdu nimetatakse lihtmurruks.

Näiteks

$$\frac{x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

on lihtmurd.

Nii nagu aritmeetilist liigmurdu saab teisendada segaarvuks, nii saab ka algebralist liigmurdu avaldada täisavaldise ja lihtmurru summana. Selleks jagatakse lugeja nimetajaga; saadud jagatis võetakse otsitava summa esimeseks liidetavaks, teiseks liidetavaks saab murd, mille lugejaks on jagamisel tekkinud jääk ja nimetajaks on antud lihtmurru nimetaja.

N ä i d e. Teisendame liigmurru

$$\frac{2a^2 - 5ab + b^2}{a - 3b}$$

täisavaldise ja lihtmurru summaks.

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{r|l} 2a^2 - 5ab + b^2 & a - 3b \\ 2a^2 - 6ab & 2a + b \\ \hline ab + b^2 & \\ ab - 3b^2 & \\ \hline 4b^2 & \end{array}$$

$$\frac{2a^2 - 5ab + b^2}{a - 3b} = 2a + b + \frac{4b^2}{a - 3b}.$$

Liigmurru avaldamist täisavaldise ja lihtmurru summana nimetatakse täisosa eraldamiseks.

237. Eralda täisosa järgmistes liigmurdudes:

1) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$

2) $\frac{x^3 + xy^2 - y^3}{x + 2y}$

3) $\frac{x^3 + 7x^2 + 13x - 22}{x^2 + 2x - 3}$

4) $\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 1}{x^2 + 1}$

MURDUDE KORRUTAMINE.

238. Korruta.

1) $3 \cdot \frac{5}{6}$

2) $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{28}{45}$

3) $\frac{113}{355} \cdot 1 \frac{2}{113}$

$14 \cdot \frac{2}{7}$

$\frac{17}{18} \cdot \frac{27}{34} \cdot \frac{9}{16}$

$100 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

$3a \cdot \frac{b}{6a}$

$\left(\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2}$

$1 \frac{1}{3} \cdot 20 \frac{1}{4}$

$\frac{a}{10b} \cdot 5b$

$\left(-\frac{2a}{3b}\right) \cdot \left(-\frac{6c}{4a}\right) \cdot 2b$

$1 \frac{5}{7} \cdot 11 \frac{9}{20}$

239. Näide. Leia korrutis

$$(4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2 + a}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} (4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2 + a} &= \frac{(4 - a^2) \cdot 3a}{2 + a} = \frac{3a(2 + a)(2 - a)}{2 + a} = \\ &= 3a(2 - a) = 6a - 3a^2. \end{aligned}$$

240. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u} &= \frac{(x^2 - 4u^2) \cdot (x^2 - u^2)}{(x + u) \cdot (x + 2u)} = \\ &= \frac{(x + 2u)(x - 2u) \cdot (x + u)(x - u)}{(x + u) \cdot (x + 2u)} = (x - 2u)(x - u). \end{aligned}$$

241. Korruta.

$$\begin{aligned} 1) \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{y}{x^2 + xy} \\ - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a - 4b} \right) \\ (2x - 2a) \cdot \frac{c}{x - a} \end{aligned}$$

$$\frac{m + n}{7m} \cdot \frac{5m}{2m - 2n}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{m}{n - 1} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{m + mn} \\ \frac{x + 7u}{x - 7u} \cdot (x^2 - 49u^2) \\ \frac{x^2 - u^2}{2a + 2b} \cdot \frac{a + b}{3x + 3u} \\ \frac{x^2 - 1}{4} \cdot \frac{12}{x - 1} \\ \frac{u^2 - 4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u - 4v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{5p(p - q)}{3r(p + q)} \cdot \frac{3(p^2 + q^2)}{5(p^2 - q^2)} \\ \frac{4r^2 + 8r}{3r + 9} \cdot \frac{15r + 45}{14r^2 + 28r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{a^2 + ab}{3bc} \cdot \frac{12c}{a^2 - b^2} \\ - \frac{10b^2 - 10a^2}{a^2} \cdot \left(\frac{b^2 + a^2}{5a + 5b} \right) \\ (x + 1) \cdot \frac{3}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{4n + 1}{6 - 10n} \cdot (5n - 3)$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{4ax - 4x}{a + 1} \cdot \frac{1}{4(a - 1)} \\ \frac{x + a}{x - a} \cdot \frac{3a}{x^2 - a^2} \\ \frac{9 - z^2}{3z} \cdot \frac{z}{3 + z} \\ \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{5x}{x^2 - 1} \\ \frac{s^2 - 3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2 - 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{ad - ab}{bc + cd} \cdot \frac{ab + ad}{bc - cd} \\ \frac{a^2 + 4a + 4}{3a + 6} \cdot \frac{6a - 12}{a^2 - 4} \end{aligned}$$

$$\frac{3a+3}{a^2+6a+9} \cdot \frac{6a+18}{a^2-1}$$

$$\frac{a}{a-b} \cdot \left(-\frac{b-a}{c}\right)$$

$$-\frac{ab+ac}{cd-bd} \cdot \frac{ab-ac}{bd+cd}$$

$$\frac{9-6b+b^2}{3+b} \cdot \frac{9+6b+b^2}{3b-4b^2}$$

$$\frac{7a^2+28a+28}{21a^2-189} \cdot \frac{3a^2-18a+27}{a^2-4}$$

$$\frac{3a^2-3}{2a^2+8a+8} \cdot \frac{a^2-4}{6a^2-12a+6}$$

MURDUDE JAGAMINE.

242. Leia jagatised.

1) $\frac{39}{67} : \frac{52}{134}$

$25 : \frac{13}{15}$

$\frac{15}{16} : 5$

$12\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$

3) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{5}{a}$

$\frac{6a^2}{25b^2} : \frac{3a}{5b}$

$a^2b : \frac{ab^2}{n}$

$\frac{4ax}{b} : 8ax^2$

2) $\frac{22}{35} : \frac{33}{70}$

$7 : \frac{14}{15}$

$-\frac{5}{8} : 15$

$13\frac{1}{3} : 4\frac{4}{9}$

4) $-\frac{2x}{3y} : \left(-\frac{2y}{3x}\right)$

$\frac{8m^2n}{15k} : \frac{2mn^2}{3k}$

$-m^2 : \left(-\frac{2a^2}{m}\right)$

$\frac{8c^2n}{3a} : 4ac$

243. Näide. Leia jagatis:

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4).$$

Lahendus. Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \frac{3a+2}{2(9a^2-4)} = \frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} = \frac{1}{2(3a-2)}.$$

244. Näide. Leia jagatis:

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördarvuga, saame

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} = \frac{6 \cdot (a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} = \frac{3(a+x)}{1} = 3(a+x).$$

245. Leia järgmised jagatised:

$$1) \frac{a+b}{c} : (a+b)$$

$$2) \frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$$

$$\frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$$

$$\frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$$

$$\frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{a-1} : (4a^2-1)$$

$$c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$$

$$(2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$$

$$(x+2y) : \left(\frac{x+2y}{4n}\right)$$

$$(a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$$

$$(14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$$

$$(a^3-n^3) : \frac{a^2+an+n^2}{a-n}$$

246. Näide. Leia jagatis.

$$\frac{a^2-a-6}{x} : \frac{a+2}{x^2-x}.$$

Lahendus. Esimese murru lugeja tegureiks lahutamisel saame:

$$a^2-a-6 = a^2-3a+2a-6 = (a^2-3a) + (2a-6) = a(a-3) + 2(a-3) = (a-3)(a+2).$$

Teise murru nimetaja saab tegureiks lahutada järgmiselt:

$$x^2-x = x(x-1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöördarvuga ning taandades, saame:

$$\begin{aligned} \frac{a^2-a-6}{x} : \frac{a+2}{x^2-x} &= \frac{(a-3)(a+2) \cdot x(x-1)}{x(a+2)} = \\ &= \frac{(a-3)(x-1)}{1} = (a-3)(x-1). \end{aligned}$$

247. Leia järgmised jagatised:

$$1) \frac{x^2-ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$$

$$2) \frac{2x-4}{5a} : \frac{x-2}{15a^2}$$

$$\frac{a^2-x^2}{ax} : \frac{a+x}{a^2x^2}$$

$$\frac{(m+n)^2}{4m-4n} : \frac{6m+6n}{m-n}$$

$$\frac{p^2+pq}{rx+sx} : \frac{p^3+p^2q}{rx^3+sx^3}$$

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$$

$$\frac{105f^2}{gh-1} : \frac{84fg}{1-gh}$$

$$\left(\frac{Q}{2} - \frac{2}{Q}\right) : \frac{Q+2}{4Q}$$

$$(R^2 - 2 + \frac{1}{R^2}) : 3(R - \frac{1}{R})$$

$$\frac{2a}{x-2} : \frac{4}{2-x}$$

KÕIK TEHTED MURDUDEGA.

248. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2 - 4).$$

Lahendus. Sulgudes olevate murdude ühiseks nimetajaks on $(a-2)(a+2)$. Vastavad laiendajad on $a+2$ ja $a-2$. Niisiis

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2 - 4) &= \frac{(a+2)(a+2) + (a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} \cdot (a^2 - 4) = \\ &= \frac{(a^2 + 4a + 4 + a^2 - 4a + 4)(a^2 - 4)}{a^2 - 4} = 2a^2 + 8. \end{aligned}$$

249. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$$

$$2) \left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$$

$$\left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}\right) \cdot (a^2 - 1)$$

$$\left(\frac{a-3}{a+3} + \frac{a+3}{a-3}\right) \cdot (a^2 - 9)$$

250. Näide. Lihtsusta avaldis

$$2 + \frac{2}{a-2} : 2 - \frac{2}{a+2}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{a-2} : 2 - \frac{2}{a+2} &= \left(2 + \frac{2}{a-2}\right) : \left(2 - \frac{2}{a+2}\right) = \frac{2(a-2) + 2}{a-2} : \frac{2(a+2) - 2}{a+2} = \\ &= \frac{2a-4+2}{a-2} : \frac{2a+4-2}{a+2} = \frac{2a-2}{a-2} : \frac{2a+2}{a+2} = \frac{(2a-2)(a+2)}{(a-2)(2a+2)} = \\ &= \frac{2(a-1)(a+2)}{(a-2) \cdot 2(a+1)} = \frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+1)} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - a - 2}. \end{aligned}$$

251. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \frac{x + \frac{x}{2}}{x - \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1 - \frac{p}{q}}{\frac{q-p}{r}}$$

$$\frac{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}$$

$$\frac{1+c}{1+\frac{1}{c}}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{m-1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

$$2) \frac{a + \frac{1}{3}}{a - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1 - \frac{b}{a}}{a + b}$$

$$\frac{a + \frac{5}{6}b}{a - \frac{4}{9}b} - 1$$

$$\frac{\frac{5m}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$$

252. Näide. Lihtsusta avaldis

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right].$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right] = \\ & = \frac{(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{(a-b)^2 + ab}{ab} = \\ & = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{a^2 - 2ab + b^2 + ab}{ab} = \\ & = \frac{a^3 + b^3}{3ab} : \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} = \frac{(a^2 + b^3)ab}{3ab(a^2 - ab + b^2)} = \\ & = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{3(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a+b}{3}. \end{aligned}$$

253. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a+1} \right) \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}a \right)^2$$

$$2) \frac{a^2 + ax}{2x} : (a^2 - x^2) \cdot \frac{(a+x)^2}{4ax} - 1$$

$$3) \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right)$$

$$4) \frac{a-x}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) : \frac{a^2+x^2}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)$$

$$5) \left(a - 2 + \frac{1}{a}\right) : \left(a^2 - a - 1 + \frac{1}{a}\right)$$

KORDAMISEKS.

254. Näita, et

$$a) (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$

$$b) (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

255. Lahuta kahel viisil tegureiks:

$$a) x^2 + 3x^2 + 3x + 1;$$

$$b) x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

256. Näita, et kumbki alljärgnev võrdus on õige:

$$a) x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2 - 3x + 1)^2;$$

$$b) (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

257. Arvuta x võrdest:

$$a) \frac{x}{a^2 - a + 1} = \frac{a + 1}{a^3 + 1};$$

$$b) \frac{n-1}{n^3-1} = \frac{x}{n^2+n+1}.$$

258. Arvuta x võrdusest:

$$a) (x-2)(x^2+2x+4) - (x+1)^3 + x(3x+4) = 1;$$

$$b) x(x-2)^2 - (x+1)(x^2-x+1) + 4x^2 = 15.$$

259. Eralda täisosa liigmurrus:

$$a) \frac{3a^4 + 10a^3 - 6a^2 + 25a - 1}{a^2 + 4a - 1};$$

$$b) \frac{12x^2 - x - 6}{4x^2 - 4x - 15}.$$

260. Lihtsusta avaldised:

$$1) \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} + \frac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}$$

$$2) \frac{a(a-b) - b(a+b)}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$$

$$3) \left[\frac{(a-x)^2}{ax} + 1\right] : \left[\frac{(a+x)^3}{3ax} - a - x\right]$$

$$4) \left(\frac{x^4 - x - 3x^3 + 3x^2}{x^3y - y^4} : \frac{x^4 + x^2 - 2x^3}{x^2y^2 + xy^3 + y^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} : \frac{x^3y + xy^3 + 2x^2y^2}{x^4 - y^4} \right)$$

$$5) \left(\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2} \right)$$

$$6) \left[\frac{1}{(b-a)^3} : \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{a+b} \right] : \frac{2a^2}{a^2 - b^2} + 1 : (a^2 + a)$$

$$7) \left(\frac{1}{b^2 - b} : \frac{a^2}{a - b^3} + \frac{1}{a + b} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1 + b} \right)$$

4. SIRGETE LÖIKUMINE JA PARALLEELSUS. MATEMAATILISED LAUSED.

261. a) Mis on algarv? Mis on paarisarv? Mis on kahe arvu väikseim ühiskordne? Mida nimetatakse kahe arvu suurimaks ühisteguriks?

b) Mis on rööpkülik? Mida nimetatakse kolmnurga kõrguseks? Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Missugust kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, missugust nürinurkseks?

262. Lauset, mis selgitab mingi uue mõiste sisu, nimetatakse **definiitsiooniks**.

Definiitsioon on seega vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele «Mis see on?».

Definiitsiooni andmine on defineerimine.

Näiteks lause «Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed» on definiitsioon, sest selle lausega selgitatakse mõiste «rööpkülik» sisu.

Definiitsiooni saab alati anda niisugusel kujul, et selles esineb sõna «nimetatakse». Näiteks võrdkülgse kolmnurga definiitsiooni saab anda kujul «Võrdkülgseks kolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille küljed on võrdsed».

263. Anna järgmiste mõistete definiitsioonid: teravnurk, sirg-nurk, kaarekraad, ring, võrdsed kujundid.

264. Lauseid, mis väljendavad geomeetriliste kujundite (või arvude) omadusi, nimetatakse **aksioomideks ja teoreemideks**.

Aksioom ehk põhilause on võimalikult lihtsa sisuga lause, mida ei ole vaja ja ei saagi põhjendada veel lihtsamate tõdede abil, sest aksioomist lihtsamaid tõdesid ei leidu.

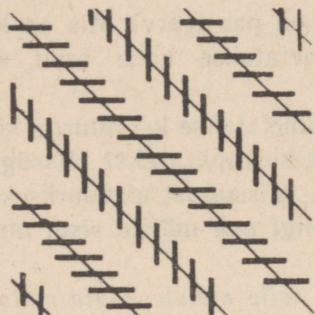
Näiteks sirgjoone omadustest kasutame aksioomina lauset «Kaht punkti läbib ainult üks sirge».

Teoreem on niisugune lause, milles sisalduvat väidet saab ja tuleb põhjendada varem tundmaõpitud tõdede abil.

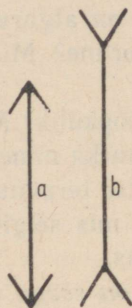
Seda põhjendamist nimetatakse teoreemi tõestamiseks.

265. Teoreemi tõestamine toimub sel teel, et tuntud tõdedest (aksioomidest ja teoreemidest) järeldatakse järjest uusi tõdesid, kuni jõutakse selleni, mida soovitakse tõestada. Nõnda tõestatakse teoreem siis arutluse ja mõtlemise teel, mitte aga vaatluse ja mõõtmise abil. Et üksinda vaatluse teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged, seda kinnitab muuseas nn. optiliste petete esinemine.

266. a) Kontrolli, kas joonisel 9 esinevad sirged on paralleelsed või mitte.



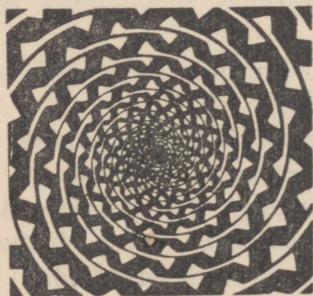
Joon. 9.



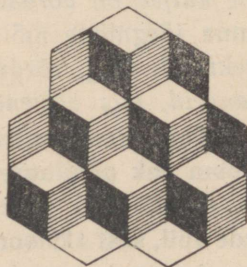
Joon. 10.

b) Kumb lõikudest a ja b joonisel 10 on pikem?

c) Kas joonis 11 kujutab spiraale või ühise keskpunktiga ringjooni? Kontrolli oma arvamist sirkli abil.



Joon. 11.

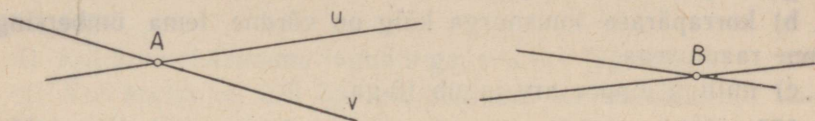


Joon. 12.

d) Mitu kuupi on kujutatud joonisel 12? Pööra joonist 180° võrra ja vaata uuesti.

267. Teoreem kahe sirge lõikumisest:
kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.

Tõepoolest, kui punktis A lõikuvad sirged u ja v lõikuksid (kusa-



Joon. 13.

gil kaugel) veel mingis teises punktis B (joon. 13), siis kaht punkti A ja B läbiks kaks sirget, nimelt u ja v . Kuid see pole võimalik, järelikult kaks sirget lõikuvad ainult ühes punktis.

268. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad kahe kolmnurga võrdsuse tingimusi.

269. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad võrdhaarse kolmnurga omadusi.

270. Tuleta meelde teoreem

- ristküliku pindalast;
- kolmnurga pindalast;
- träpetsi pindalast.

271. Tuleta meelde teoreem, mis väljendab

- millal arv jagub 9-ga;
- millal arv jagub 5-ga;
- millal arv jagub 2-ga.

272. Joonesta kaks punkti ja ühenda nad mitmesuguste joonte abil. Missugune neist on kõige lühem? Kontrolli seda niidi abil.

Seda sirglõigu omadust väljendab järgmine aksioom:

sirglõik on kõige lühem tee kahe punkti vahel.

273. Iga teoreemi saab sõnastada nii, et üks osa temast algab sõnaga «kui» ja teine osa sõnaga «siis».

Näiteks teoreemi «Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed» saab sõnastada ka nii: «Kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema alusnurgad on võrdsed.»

Seda osa teoreemist, mis algab sõnaga «kui», nimetatakse teoreemi eelduseks, ja seda osa, mis algab sõnaga «siis» — teoreemi väiteks.

Teoreemi eelduses öeldakse, missugusest kujundist on teoreemis jutt, ja väites esitatakse mingi uus tõsiasi selle kujundi kohta.

274. Leia iga alljärgneva teoreemi eeldus ja väide ning sõnasta iga teoreem nii, et temas esineksid sõnad «kui» ja «siis»:

a) võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks;

b) korrapärase kuusnurga külg on võrdne tema ümberringjoone raadiusega.

c) nulliga lõppev arv jagub 10-ga.

275. Kui teoreemis vahetada eeldus väitega, s. t. teha eeldus väiteks ja väide eelduseks, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse antud teoreemi pöördteoreemiks.

Näiteks teoreemi «Kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasnurgad» pöördteoreemiks on teoreem «Kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasküljed.»

Mõne teoreemi pöördteoreem on õige, mõne mitte. Näiteks õige teoreemi «Kui arv lõpeb nulliga, siis ta jagub 5-ga» pöördteoreem on «Kui arv jagub 5-ga, siis ta lõpeb nulliga», mis ei ole aga õige. Seega pöördteoreem vajab omaette tõestust.

276. Moodusta iga järgneva teoreemi pöördteoreem ja uuri, kas ta on õige või mitte:

a) kui kumbki kahest liidetavast jagub 5-ga, siis ka nende summa jagub 5-ga;

b) kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema kõrgus poolitab aluse;

c) kui kaks sirget on paralleelsed, siis nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal;

d) kui kumbki kahest liidetavast on paaritu arv, siis nende summa on paarisarv.

277. Otsusta, mis saab järeldada igast allpool antud tõest (eeldusest).

a) Arv x ei ole negatiivne.

b) Arv a ei ole suurem kui 12.

c) VII klassis ei ole üle 30 ega alla 29 õpilase.

d) Kumbki lõikudest a ja b ei ole teisest pikem.

e) Lahutatavat suurendati 5 võrra.

278. Tee järeldus igast järgnevast eelduste paarist:

$$\begin{array}{llll} 1) a = b & 2) a > b & 3) x = a + b & 4) s = a + b \\ & b < c & x = a + c & b = a \end{array}$$

279. Otsusta, kas järgnevad väited on õiged või mitte.

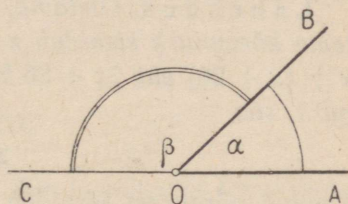
a) Kui $x = 4$, siis $3x - 10 > 4$.

- b) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.
 c) Iga võrdhaarne kolmnurk on võrdkülgne.
 d) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.
 e) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 4-ga, siis summa jagub 8-ga.
 f) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.
 g) Kui koolis on 370 õpilast, siis seal leidub vähemalt kaks õpilast, kelle sünnipäev on ühel ja samal päeval.

KÕRVUNURGAD.

280. Nurki tähistatakse sageli väikeste kreeka tähtedega α (alfa), β (beeta), γ (gamma), δ (delta) jne. See täht kirjutatakse nurga sisse (joon. 12). Kirjas selle tähise ette nurga märki ei kirjutata, näiteks $\alpha = 75^\circ$, mitte $\angle \alpha = 75^\circ$.

281. Joonesta mingi nurk α ja pikenda tema üht haara üle nurga tipu O (joon. 14). Siis nurga α kõrvvale tekib uus nurk, ütleme β ehk $\angle BOC$ (joon. 14). Nurki α ja β nimetatakse teineteise kõrvnurkadeks.



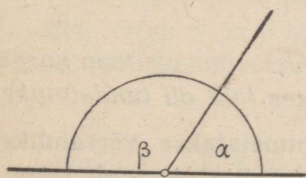
Joon. 14.

Kaht nurka nimetatakse kõrvnurkadeks, kui neil on ühine tipp ja üks ühine haar, kuna teised haarad moodustavad sirgjoone.

Leia jooniselt 14 nurkade α ja β ühine tipp ja ühine haar. Misuguse joone moodustavad nende nurkade teised haarad?

282. Joonesta kaks lõikuvat sirget AB ja CD , tähista nende lõikumispunkt ja selle juures tekkinud nurgad. Nimeta nüüd joonise järgi seal esinevad kõrvnurkade paarid ja iga paari puhul nurkade ühine haar.

283. Missuguse nurga saab, kui liita kõrvnurkad, s. o. kõrvvõtta nende ühine haar (joon. 15)?



Joon. 15.

Kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Sümbolites:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

284. Avalda

a) α tema kõrvunurga β kaudu;

b) β tema kõrvunurga α kaudu.

285. Kui suur on nurk, mis on võrdne oma kõrvunurgaga? Kuidas saaks täisnurka defineerida kõrvunurga mõiste abil?

286. Mis liiki on teravnurga kõrvunurk, nürinurga kõrvunurk?

VÖRRAND.

287. Näide. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 26° võrra väiksem?

Lahendus. Oletame, et otsitav nurk sisaldab x kraadi. Siis tema kõrvunurk sisaldab $x + 26$ kraadi ja nende summa sisaldab $x + (x + 26)$ ehk $2x + 26$ kraadi. Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis

$$2x + 26 = 180.$$

Saadud võrdusest järeldub (kuidas?), et

$$2x = 180 - 26$$

ehk

$$2x = 154,$$

seega

$$x = 77.$$

Kontroll. Kui nurk on 77 kraadi, siis tema kõrvunurk peab olema $180 - 77 = 103$ kraadi. Lahutades sellest 77 kraadi, näeme, et saadud nurk on oma kõrvunurgast tõepoolest 26 kraadi võrra väiksem.

Vastus. Otsitav nurk on 72° .

288. Eelmise ülesande lahendamisel tähistasime otsitava nurga tähega (x) ja koostasime võrduse, milles see täht oli tundmatuks.

Võrdust, mis sisaldab tundmatut, nimetatakse võrrandiks.

Tundmatu leidmist võrrandist nimetatakse võrrandi lahendamiseks.

Ülesande lahendamine võrrandi abil algab otsitava suuruse tähistamisest mingi tähega, millele järgneb võrrandi koostamine ühes tarviliku selgitusega ja võrrandi lahendamine. Saadud lahendit, s. o. tundmatu leitud väärtust tuleb kontrollida. See peab toimuma ülesande teksti, mitte koostatud võrrandi põhjal, sest viimane võib sisaldada juba viga. Lahendi kontrollimisele järgneb vastus. Võrrandi koostamisel pea silmas, et võrrandis tavaliselt nimetusi ei kirjutata.

Lahenda järgnevad ülesanded võrrandi abil.

289. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 34° võrra suurem?

290. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 15° võrra väiksem?

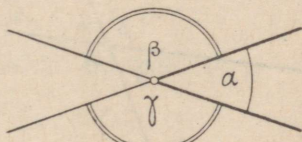
291. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 3 korda suurem?

292. Kui suur on kumbki kõrvunurkadest, kui nende vahe on 9 korda väiksem nende summast?

TIPPNURGAD.

293. Joonesta mingi nurk α (joon. 16) ja pikenda tema mõlemat haara üle nurga tipu.

Kummagi haara pikendamisel üle nurga tipu (joon. 16.) tekib nurgale α kõrvunurk: α ja β on kõrvunurgad, samuti α ja γ on kõrvunurgad. Nurki β ja γ nimetatakse teineteise suhtes tippnurkadeks.



Joon. 16.

Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui neil leidub ühine kõrvunurk.

Mitu tippnurkade paari tekib kahe sirge lõikumisel?

294. Olgu β ja γ tippnurgad ning α nende ühine kõrvunurk (joon. 16). Siis

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ ja } \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Avaldades neist võrdustest tippnurgad β ja γ , saame

$$\beta = 180^\circ - \alpha \text{ ja } \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

$$\beta = \gamma.$$

Sellest selgub, et

tippnurgad on võrdsed.

295. Joonesta kaks lõikuvat sirget ja tähista tekkinud nurgad ringjärjekorras tähtedega α , β , γ , δ . Mitu tippnurkade paari ja mitu kõrvunurkade paari on tekkinud?

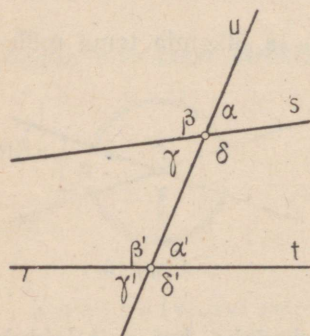
296. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on üks 78° . Kui suured on teised nurgad?

297. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on kahe nurga summa 128° . Leia iga tekkinud nurga suurus.

298. Kahe tippnurga summa on $158^\circ 20'$. Kui suur on nende ühine kõrvunurk?

KAHE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

299. Lõikame kaht sirget s ja t mingi kolmanda sirgega u (joon. 17). Tähistame sirgete u ja s lõikumisel tekkinud nurgad tähtedega α , β , γ ja δ , sirgete u ja t lõikumisel tekkinud nurgad aga tähtedega α' , β' , γ' , δ' (loe: alfa prim jne.).



Joon. 17.

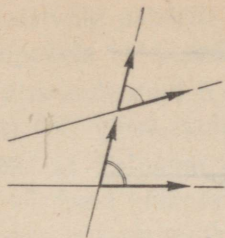
Kuidas nimetatakse nurki α ja γ , β' ja δ' , γ ja δ , α' ja γ' , γ' ja β' ?

300. Nurkadest, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga ja asetsevad eri lõikepunktide juures, on mõnele paarile antud erinimetused.

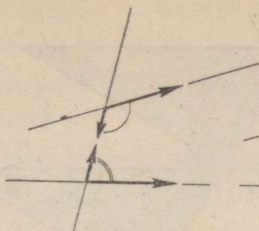
1) Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad ühtepidi, nimetatakse kaasnurkadeks (joon. 18).

Joonisel 17 on kaasnurkadeks α ja α' , β ja β' , γ ja γ' , δ ja δ' .

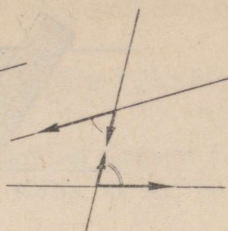
2) Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse (seesmisteks) lähisnurkadeks (joon. 19). Joonisel 17 on lähisnurkadeks γ ja β' , δ ja α' .



Joon. 18.



Joon. 19.



Joon. 20.

3) Kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse põiknurkadeks (joon. 20). Joonisel 17 on põiknurkadeks γ ja α' , δ ja β' .

301. Arvuta joonisel 17 esinevad nurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui $\alpha = 54^\circ$ ja $\beta = \beta'$.

302. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe kaasnurga summa on 153° ja üks neist on 70° .

303. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega on tekkinud üks paar võrdseid kaasnurki, näiteks $\alpha = \alpha'$ (joon. 17). Mis saab öelda siis teiste kaasnurkade kohta? põiknurkade kohta? lähisnurkade kohta?

304. Joonisel 17 $\gamma = \alpha'$. Mis saab öelda nurkade δ ja α' , α ja α' ning β ja β' kohta?

KAHE SIRGE PARALLEELSUS.

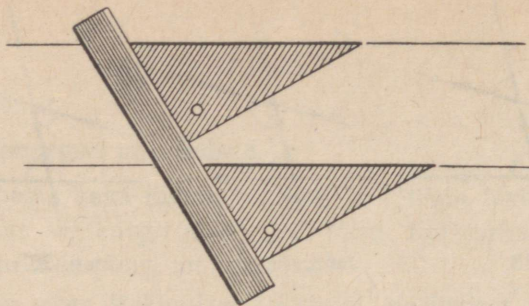
305. Kaht sirget, mis asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks.

Kahe sirge u ja v paralleelsust märgitakse nii: $u \parallel v$.

Too näiteid paralleelsetest sirgetest.

306. Paralleelseid sirgeid oleme joonestanud rööplükke abil (joon. 21). Paralleelsete sirgete joonestamise võtte näitab, et

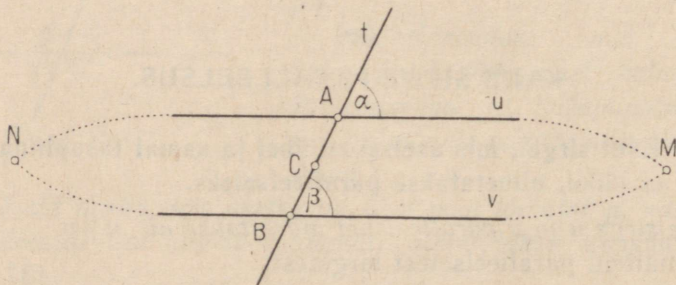
kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib üks paar võrdseid kaasnurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.



Joon. 21.

Siin (joon. 21) on lõikavaks sirgeks joonlaua serv ja võrdsete kaasnurkade tekitajaks nurklaua nurk (kahes asendis). Tõestame selle teoreemi. Selleks eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t on tekkinud võrdsed kaasnurgad α ja β (joon. 22), mille tipud on vastavalt A ja B . Kui kogu joonis pöörata 180° võrra lõigu AB keskpunkti C ümber, siis ühtib joonis oma endise asendiga, sest punkt A satub punkti B kohale (kuna $AC = BC$), sirge u sirge v kohale (kuna nurk α ühtib nurga β tippnurgaga) ja sirge v sirge u kohale. Kui sirged u ja v lõikuksid ühel pool sirget t (näiteks paremal punktis M), siis kirjeldatud pööramine näitab, et neil leiduks veel teine lõikepunkt teisel pool sirget t (punkt N). Et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis, siis u ja v ei või lõikuda, s. t. $u \parallel v$.

Seda teoreemi nimetame kahe sirge paralleelsuse esimeseks tunnuseks.



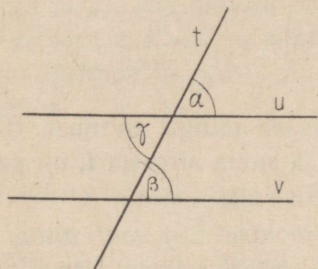
Joon. 22.

307. Valmista endale õppevahend eelmise teoreemi tõestamiseks. Selleks tee joonis 22 paksemale paberile, kopeeri siis see sealt

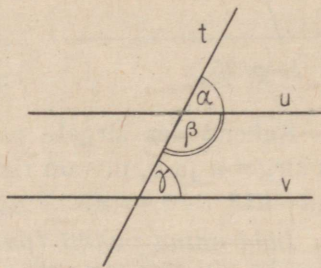
läbipaistvale paberile (kalkale) ja kinnita need joonised punktis C nõõpnõela või peenikese naela abil.

Näita selle mudeli abil, kuhu satub nurk α pärast ühe lehe pöörämist 180° võrra, kuhu nurk β .

308. a) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis paar võrdseid põiknurki γ ja β (joon. 23). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja β on võrdsed ja seega $u \parallel v$.



Joon. 23.



Joon. 24.

b) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis üks paar lähisnurki β ja γ , millede summa on sirgnurk (joon. 24). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja γ on võrdsed ja seega $u \parallel v$.

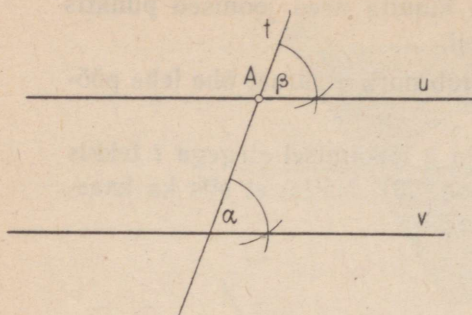
Siit saame kahe sirge paralleelsuse teise ja kolmanda tunnuse.

Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib üks paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed. Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib üks paar lähisnurki, millede summa on sirgnurk, siis need kaks sirget on paralleelsed.

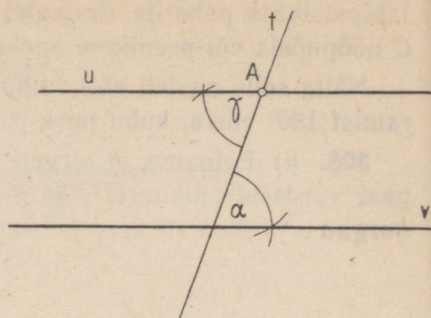
309. *Sirgete paralleelsuse esimene ja teine tunnus võimaldavad joonestada antud sirgele v paralleelse sirge läbi antud punkti A , kasutades ainult sirklit ja joonlauda. Selleks võtame läbi A vabalt mingi sirge t , mis lõikab antud sirget v ja ehitame punkti A juurde sirgete t ja v vahelise nurgaga α võrdse kaasnurga β (joon. 25) või nurgaga α võrdse põiknurga γ (joon. 26).*

Ehitatud nurga teine haar u läbib punkti A ja on paralleelne sirgega v .

Teosta need konstruktsioonid, võttes vabalt sirge ja väljaspool sirget ühe punkti.



Joon. 25.



Joon. 26.

310. Rakendades sirgete paralleelsuse mingit tunnust, näita, et kaks sirget u ja v , mis on risti ühe ja sama sirgega t , on paralleelsed.

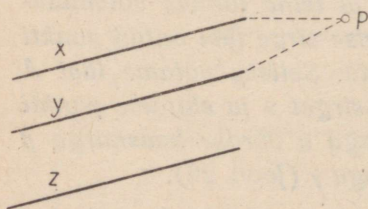
311. Läbi antud punkti (punkt A joonisel 25) saab antud sirgele (sirge v joonisel 25) joonestada paralleelse sirge mitmel viisil. Kogemused näitavad, et sõltumatult ehitamisviisist saame läbi antud punkti ikka ainult ühe paralleeli sirgele v . Seda tõsiasja väljendab järgmine nn. paralleelide aksioom:

läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, ei lähe rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seega kõik sirged, mis läbivad punkti A joonisel 25, lõikavad sirget v , välja arvatud sirge u .

312. Paralleelide aksioomist tuleneb hulk järeldusi. Märgime neist kaks lihtsamat.

a) Kui kumbki kahest sirgest on paralleelne ühe ja sama sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed.



Joon. 27.

Eeldus. $x \parallel z$; $y \parallel z$
(joon. 27).

Väide. $x \parallel y$.

Tõestus. Kui x ja y ei oleks paralleelsed, siis nad lõikuksid mingis punktis P . Seda punkti läbiks siis kaks sirgega

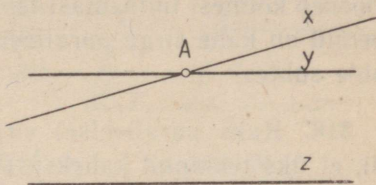
z paralleelset sirget, nimelt x ja y . Kuid see on vastuolus paralleelide aksioomiga, tähendab $x \parallel y$.

b) Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist.

Eeldus. $y \parallel z$; x ja y lõikuvad punktis A (joon. 28).

Väide. x ja z lõikuvad.

Tõestus. Kui sirge x ei lõikaks sirget z , siis oleks ta sellega paralleelne ja seega läbi sirgete x ja y lõikepunkti A läheks kaks sirget (x ja y), mis oleksid paralleelsed sirgega z . Kuid see pole võimalik. Tähendab, sirge x lõikab ka sirget z .



Joon. 28.

KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

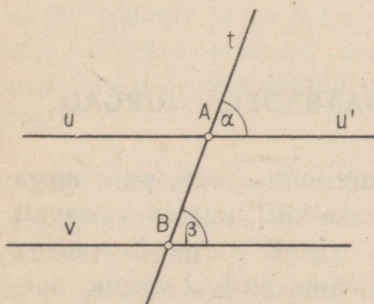
313. Joonesta rööplükke abil kaks paralleelset sirget, lõika need mingi sirgega, mōõda tekkinud nurgad ja kirjuta tulemused joonisele. Mis paned tähele: a) iga kahe kaasnurka kohta; b) iga kahe põiknurka kohta; c) iga kahe lähisnurka kohta? Kontrolli tehtud tähelepanekuid mingi teise lõikaja puhul.

314. Tõestame, et

kui kaks paralleelset sirget lõigata sirgega, siis

- 1) iga kaks kaasnurka on võrdsed,
- 2) iga kaks põiknurka on võrdsed,
- 3) iga kahe lähisnurka summa on sirgnurk.

Tõestus. Olgu u ja v kaks paralleelset sirget, mida sirge t lõikab vastavalt punktides A ja B (joon. 29). Tõestame, et mistahes kaks kaasnurka, näiteks nurgad α ja β , on võrdsed. Selleks kujutleme, et oleme ehitanud punkti A



Joon. 29.

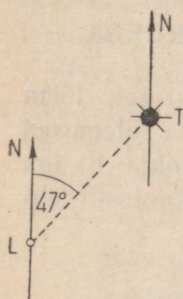
juurde nurgaga β võrdse kaasnurka. Selle nurga üks haar asetseb sirgel t ja ühtib nurga α ühe haaraga, kuna teine haar u' on kahe sirge paralleelsuse esimese tunnuse põhjal paralleelne sirgega v . Kuid paralleelide aksioomi põhjal peab ta siis ühtima sirgega u , sest läbi punkti A ei lähe rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne sirge-

ga v. Seega nurk α ühtib nurgaga β võrdse nurgaga, tähendab $\alpha = \beta$. Samal viisil saab tõestada teoreemi teisi väiteid.

315. Eelmises ülesandes antud teoreem on liitteoreem, mis koosneb kolmest lihtsamast teoreemist. Sõnasta need. Mis need teoreemid on kahe sirge paralleelsuse tunnuseid väljendavate teoreemide suhtes?

316. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 57° . Kui suured on teised nurgad?

317. Näita, et kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.



318. Laevalt (L) peiliti tuletorni (T) sihis N $47^\circ E$ (joon. 30). Mis sihis paistab tuletornist laev? Kui suur on $\angle LTN$?

319. a) On antud kaks paralleelset sirget s ja t . Sirgel s on võetud kaks punkti A ja B , millest on tõmmatud ristlõigud AC ja BD sirgele t . Tõesta, et need ristlõigud on võrdsed, s. t. punktid A ja B on sirgest t võrdsetel kaugustel.

Joon. 30.

Näpunäide. Ühenda punktid C ja B ning vaatle tekkinud kolmnurki.

Kahe paralleelse sirge vahelise ristlõigu pikkust nimetame nende sirgete vaheliseks kauguseks. See kaugus on igal pool üks ja sama.

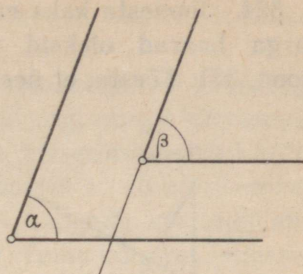
b) Joonesta antud sirgega paralleelne sirge, mis asetseb sellest antud kaugusel. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

320. a) Joonesta mingi terav- või nürinurk α , võta selle nurga sees punkt ja tõmba sellest punktist kaks kiirt, mis on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised võetud nurga haaradega (joon. 31). Tõesta, et nende kiirte vaheline nurk β võrdub nurgaga α .

b) Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes nurga β tipp nii, et üks nurk ei asetseks teise sees.

Kui ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised teise nurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.



Joon. 31.

c) Mis nurgad saab vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurkadest, kui ühe nurga tipp võtta teise haaral või selle pikendusel üle tipu?

321. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete ja vastandsuunaliste haaradega nurka ja võrdle neid teineteisega.

N ä p u n ä i d e. Võta abiks ühe nurga tippnurk.

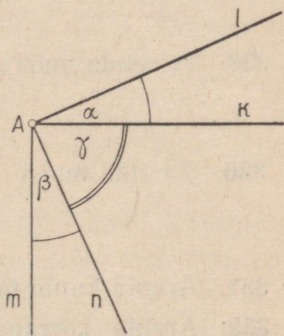
322. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka, mille ühed haarad on samasuunalised ja teised vastandsuunalised. Missugune seos valitseb nende nurkade vahel?

N ä p u n ä i d e. Võta abiks ühe nurga kõrvunurk.

VASTAVALT RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

323. a) Joonesta mingi teravnurk α , mille haarad olgu k ja l , ning tõmba selle nurga tipust kaks uut kiirt m ja n nii, et need oleksid vastavalt risti nurga α haaradega ja moodustaksid teravnurga, ütleme β (joon. 32): $m \perp k$; $n \perp l$; $\beta < 90^\circ$. Mõõda nurgad α ja β . Näita, et need nurgad on alati võrdsed.

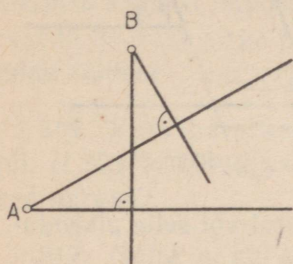
Selleks pane tähele, et joonisel 32 $\alpha + \gamma = 90^\circ$ (miks?) ja ka $\beta + \gamma = 90^\circ$ (miks?). Mis saad, kui esimesest võrdusest avaldad α ja teisest β ? Mis nähtub saadud avaldisest?



Joon. 32.

b) Lahenda eelmine ülesanne uuesti, joonestades kiired m ja n nii, et nende vaheline nurk β' oleks nürinurk. Mis nurk on β' endise nurga β suhtes? Mis sellest järeldeb α ja β' summa kohta?

324. Joonesta kaks erinevate tippudega teravnurka nii, et ühe nurga haarad oleksid vastavalt risti teise nurga haaradega (joon. 33). Tõesta, et need nurgad on võrdsed. Selleks kasuta abinurka, mille tipp ühtib ühe antud nurga tipuga ja haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised teise antud nurga haaradega.



Joon. 33.

Kui ühe teravnurga haarad (või nende pikendused) on vastavalt risti teise teravnurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

325. Valmista endale joonis 33 ja täienda see nurga β kõrvunurgaga CBD . Kuidas nurga CBD haarad asetsevad nurga A haarade suhtes? Kas $\angle CBD$ on terav- või nürinurk? Kui suur on nurkade A ja CBD summa? Mis saab öelda vastavalt ristuvate haaradega nurkade kohta, kui üks neist on teravnurk ja teine nürinurk?

326. Joonesta kaks nürinurka nii, et ühe nurga haarad oleksid vastavalt risti teise nurga haaradega. Tõesta, et need nurgad on võrdsed.

327. Tõesta, et võrdhaarse kolmnurga haarale joonestatud kõrguse ja kolmnurga aluse vaheline nurk on pool kolmnurga tipunurgast.

328. Kahest vastavalt ristuvate haaradega nurgast üks on teisest 36° võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

KORDAMISEKS.

329. Teisenda murruks avaldis

$$x + 6 - \frac{x^2 - 40}{x - 6}.$$

330. Taanda murd

$$\frac{3u^2 - 27}{u^3 - 27}.$$

331. Arvuta kuubi täispindala, kui kuubi serv on 0,8 dm.

332. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 14 cm ja kõrgus on 18 cm.

333. Üks kõrvunurkadest on teisest 4 korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

334. Kahe vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurga summa on $135^{\circ}20'$. Kui suur on kummagi nurga kõrvunurk?

335. Kolmes korvis on kokku 155 õuna. Teises korvis on 3 korda rohkem õunu kui esimeses ja kolmandas korvis on 10 õuna rohkem kui esimeses. Mitu õuna on igas korvis? Lahenda võrrandi abil.

336. Kolmnurga übermõõt on 37 cm. Teine külge on esimesest kaks korda pikem ja kolmas on teisest 3 cm lühem. Kui pikad on küljed? Lahenda võrrandi abil.

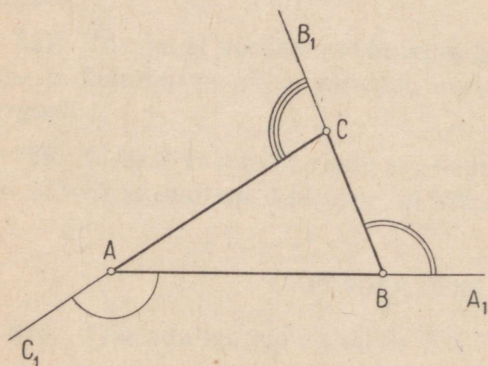
5. KOLMNURKADE JA NELINURKADE TÄHTSAMAD OMADUSED.

KOLMNURGA NURKADE SUMMA.

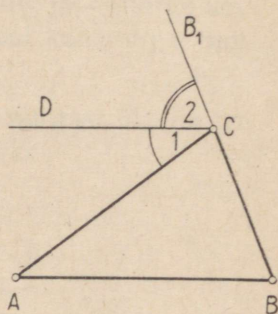
337. Joonesta kolmnurk ja selle kolmnurga mingi nurga kõrvunurk. Mis selleks teha? Joonesta ka kolmnurga teiste nurkade kõrvunurgad, pikendades iga külge ainult üks kord.

Kolmnurga nurga (ehk sisenurga) kõrvunurka nimetatakse kolmnurga välisnurgaks.

Mitu välisnurka on igal kolmnurgal? Nimeta neid jooniselt 34.



Joon. 34.



Joon. 35.

338. Joonesta kolmnurk ABC ja tema välisnurk, mille tipuks on punkt C (joon. 35). Selleks, et näha kuidas välisnurga suurus on seotud sisenurkadega, joonestatakse läbi C sirge CD , mis on paralleelne nurga C vastasküljega AB . Mis toimub välisnurgaga? Missuguse nurgaga võrdub $\angle 1$, missugusega $\angle 2$ (joon. 35) ja miks? Millega võrdub siis välisnurk ACB_1 ? Mis saaks samal viisil tões-

tada tipu A juures oleva välisnurga kohta, mis tipu B juures oleva välisnurga kohta?

Kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

339. Tõesta eelmises ülesandes sõnastatud teoreem tipu B juures oleva välisnurga kohta.

340. Põhjenda väidet:

kolmnurga välisnurk on suurem temaga mitte kõrvuti asetsevast sisenurgast.

341. Mis tuleb liita kolmnurga tipu C juures oleva välisnurgaga, et saada kolmnurga kõikide sisenurkade summa? Kui suur on see summa?

Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

342. Miks kolmnurgas ei saa olla kaht täisnurka ega kaht nürinurka? Kas leidub kolmnurka, mille üks nurk on täisnurk ja teine nürinurk? Miks?

343. On antud, et ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga. Mis järeldub kolmandate nurkade kohta? Seda kasutades näita, et

kui ühe kolmnurga kaks nurka ja ühe nurga vastaskülge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurga ja ühe nurga vastasküljega, siis kolmnurgad on võrdsed.

344. a) Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

b) Täisnurkse kolmnurga üks sisenurk on a . Leia välisnurgad.

345. a) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52^{\circ}10'$. Kui suured on kolmnurga välisnurgad?

b) Võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurk on 138° . Kui suured on sisenurgad?

346. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu $1:2:3$? Lahenda võrrandi abil.

347. Kolmnurga kaks välisnurka on 81° ja $117^{\circ}40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

348. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 18° võrra suurem. Leia kolmnurga sise- ja välisnurgad. Lahenda võrrandi abil.

KUMER HULKNUURK.

349. Tähistata tasapinnal neli punkti nii, et nende hulgas ei leia kolme punkti, mis asetseksid ühel sirgel. Ühenda need punktid järjekorras lõikude abil ja nimeta saadud nelinurka, tema tippe ja külgi.

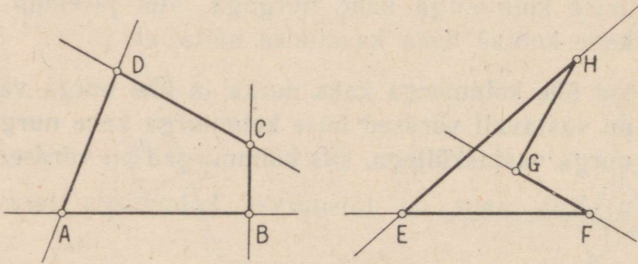
Lahenda see ülesanne teist korda, ühendades võetud punktid nelinurgaks mingis teises järjekorras.

350. Võta eelmise ülesande eeskujul viis punkti ja ühenda need mitmel viisil viisnurgaks.

351. Kuidas nimetatakse kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. ühise nimega?

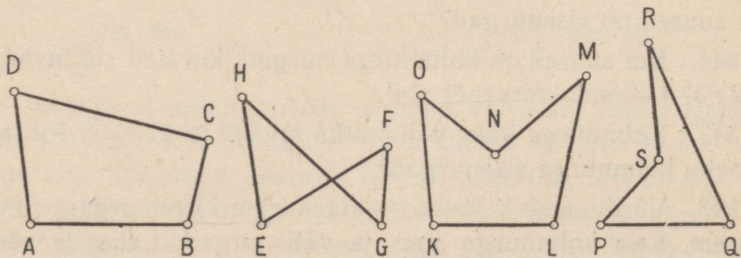
352. Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga külje pikendamisel saadakse sirge, millest hulknurga teised küljed on kõik ühel ja samal pool.

Näiteks joonisel 36 kujutatud nelinurk $ABCD$ on kumer (miks?), kuid nelinurk $EFGH$ ei ole kumer, sest pikendades viimase külge FG saame sirge, millest selle nelinurga külge EF on ühel pool, külge GH aga teisel pool.



Joon. 36.

Missugused joonisel 37 esitatud hulknurkadest ei ole kumerad ja miks?



Joon. 37.

Kas kolmnurk saab olla mittekumer?

353. Lõiku, mis ühendab hulknurga kaht tippu ja ei ole tema küljeks, nimetatakse hulknurga diagonaaliks.

Mitu diagonaali on nelinurgal, mitu viisnurgal?

354. Mitu diagonaali saab tõmmata viisnurga, seitsenurga, kümmenurga ühest tipust?

N ä p u n ä i d e. *Leia enne, mitmesse tippu diagonaali ei saa tõmmata.*

355. Edaspidi vaatleme ainult kumeraid hulknurki. Selgita joo- nise abil, et kumera hulknurga iga nurk (ehk sisnurk) on väiksem kui sirgnurk, kuna aga mittekumeral hulknurgal võib see olla sirg- nurgast suurem.

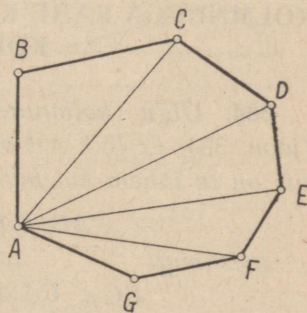
Sisenurga kõrvunurka nimetatakse hulknurga välisnurgaks.

KUMERA HULKNURGA NURKADE SUMMA.

356. a) Joonesta mingi nelinurk ja leia sisnurkade summa, tükeldades nelinurga tema diagonaaliga kolmnurkadeks.

b) Joonesta mingi viisnurk ja tõmba tema ühest tipust kõik võimalikud diagonaalid. Mitmeks kolmnurgaks tükeldus viisnurk? Kui suur on kokku nende kolmnurkade sisnurkade summa? Kui- das selle põhjal leida viisnurga sisnurkade summat?

357. *Kui hulknurgal on n tippu, siis selle hulknurga tipust tõmmatud diago- naalid jaotavad hulknurga $n - 2$ kolm- nurgaks, sest selle tipu vastas on hulkn- nurgal $n - 2$ külge, milledest igaüks saab ühe kolmnurga aluseks (joon. 38). Nende kolmnurkade sisnurkade summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Niisama suur on ka hulknurga sisnurkade summa, sest hulknurga nurgad on kas kolmnurkade nurkadeks või koosnevad neist ja ainult neist. Seega*



Joon. 38.

kumera hulknurga sisnurkade summa võrdub $(n - 2) \cdot 180^\circ$, kus n on hulknurga tippude arv.

358. Arvuta hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv on 4; 6; 9; 12.

359. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 900° ; 12 täisnurka; 5 sirgnurka; 2340° ? Lahenda võrrandi abil.

360. Kui suur on hulknurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurka summa? Kui suur on siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa kokku?

Hulknurga välisnurkade summa saamiseks lahuta sise- ja välisnurkade kogusummast sisenurkade summa ja näita, et

iga hulknurga välisnurkade summa võrdub 360° .

361. Korrapärase hulknurga sisenurgad on teatavasti võrdsed. Mis sellest järeldub välisnurkade kohta? Kui suur on korrapärase hulknurga välisnurk, kui hulknurga tippude arv on 3; 5; 6; 8; n ?

Kuidas leida nende hulknurkade sisenurga suurust, kui välisnurka suurus on teada?

Korrapärase hulknurga iga välisnurk on $360^\circ : n$ ja iga sisenurk siis $180^\circ - 360^\circ : n$, kus n on hulknurga tippude arv.

Anna avaldisele $180^\circ - 360^\circ : n$ murru kuju.

362. a) Arvuta korrapärase 15-nurga sisenurk ja välisnurk.

b) Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15° ?

c) Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135° ?

363. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv kasvab kolme võrra? viie võrra?

KOLMNURGA KAHE KÜLJE SUMMA JA VAHE VÖRDLEMINE KOLMANDA KÜLJEGA.

364. Olgu kolmnurga ABC külgede pikkused a , b ja c (joon. 39). Et lõik AB on kõige lühem tee punktide A ja B vahel, siis on ta lühem kui murdjoon ACB :

$$AB < BC + AC \text{ ehk } c < a + b.$$

Niisamuti

$$BC < CA + AB \text{ ehk } a < b + c;$$

$$AC < AB + BC \text{ ehk } b < c + a.$$

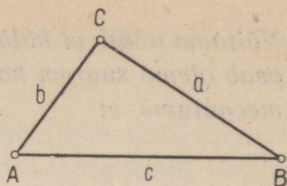
Seega

kolmnurga iga külg on väiksem tema kahe teise külje summast.

365. Võtame kolm lõiku a , b , ja c nii, et kõige pikem neist, ütleme a , on suurem kahe teise summast või võrdub nende summaga:

$$a > b + c \text{ või } a = b + c.$$

Proovime ehitada kolmnurka, mille küljed võrduvad lõikudega a , b ja c . Selleks joonestame esmalt lõigu pikkusega a ja siis tema otspunktide ümber ringjooned, mille raadiused on vastavalt b ja c . Selgub, et kolmnurga joonestamine ei õnnestu, sest selleks tarvilikud abiringjooned raadiustega b ja c ei lõiku (joon. 40 ja 41). Kolmnurk tekib alles siis, kui külgi b ja c (või ühte neist) pikendada nii, et $a < b + c$ (joon. 42). Sellest selgub, et



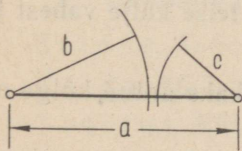
Joon. 39.

antud kolmest lõigust saab ehitada kolmnurga ainult siis, kui suurim neist on lühem kahe teise summast.

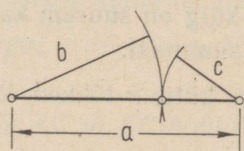
Näiteks lõikudest $a = 15$ cm, $b = 27$ cm ja $c = 12$ cm ei saa ehitada kolmnurka, sest suurim lõik b ei ole väiksem lõikude a ja c summast.

366. Otsusta, kas leidub kolmnurk, mille küljed on pikkusega

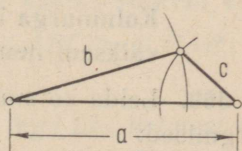
- 5 m, 7 m ja 10 m;
- 1,5 m, 4 dm ja 2,5 dm;
- 7,4 dm, 3,7 dm ja 2,9 dm;
- 35 cm, 18,9 m ja 19,2 m.



Joon. 40.



Joon. 41.



Joon. 42.

367. Otsusta, kas leidub võrdhaarne kolmnurk, millel

- alus on 15 cm ja haar on 7 cm;
- alus on 7 cm ja haar on 15 cm;
- alus on 7,8 m ja haar on 3,9 m;
- ümberrõõt on 6 m ja haar on 12 dm.

368. Olgu antud kolmnurga kahe külje pikkused näiteks a ja b , kusjuures $a > b$. Varem leidsime, et siis kolmas külge $c < a + b$.

Näitame nüüd, et kolmas külge c ei saa olla kuitahes väike, vaid ta peab olema suurem kahe teise külge vahest, s. t. $c > a - b$. Selleks meenutame, et

$$a < b + c.$$

Kui vähendada selle võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama suuruse b võrra, siis vasak pool jääb ikkagi paremast väiksemaks, s. t.

$$a - b < b + c - b$$

ehk

$$a - b < c.$$

Lugedes seda võrratust paremalt vasakule, saame

$$c > a - b.$$

Nii oleme saanud külge c pikkusele kaks tõket, s. o. kaks arvu, milledest ühest külge c pikkus on suurem ja teisest väiksem. Tulemust saab üles märkida järgmiselt:

$$a - b < c < a + b.$$

Seda loetakse nii: c on suurem a ja b vahest ning väiksem a ja b summast.

Näide. Kui $a = 4$ cm ja $b = 1,5$ cm, siis

$$4 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm} < c < 4 \text{ cm} + 1,5 \text{ cm}$$

$$2,5 \text{ cm} < c < 5,5 \text{ cm}.$$

Kolmnurga iga külge on suurem kahe teise külge vahest ja väiksem nende summast.

369. Leida kolmnurga külge x tüked, kui kaks antud külge on järgmised:

- a) 5,7 cm ja 6,3 cm; b) 18 dm ja 7 dm;
c) 3,5 m ja 8,4 m; d) $8\frac{3}{4}$ m ja $6\frac{2}{3}$ m.

370. Kolmnurga kahe lühema külge pikkused on 35 cm ja 47 cm. Missugused on kolmanda külge tüked?

371. Missugused on kolmnurga lühema külge tüked, kui kaks pikemat külge on 7,8 dm ja 13,1 dm?

SEOSSED KOLMNURGA KÜLGEDE JA NURKADE VAHEL.

372. Joonesta mingi kolmnurk, mõõda tema kaks mittevõrdset külge ja nende vastas asetsevad nurgad. Missuguse külje vastas asetseb suurem nurk?

373. Tõestame, et

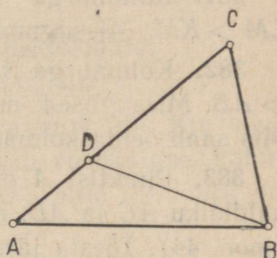
kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus. Kolmnurgas ABC külg $AC > BC$ (joon. 43).

Väide. $\angle ABC > \angle CAB$.

Tõestus. Märgime küljel AC punkti D nii, et $DC = BC$ ja ühendame punktid D ning B . Siis kolmnurgas BCD nurgad CDB ja DBC on võrdsed (miks?). Et $\angle CDB$ on kolmnurga ADB välisnurk, siis on ta suurem kui temaga mitte kõrvuti asetsev sisenurk A .

Seega $\angle CDB > \angle CAB$. Et $\angle CDB = \angle DBC$, siis ka $\angle DBC > \angle CAB$. Kuid $\angle DBC$ on osa nurgast ABC , mistõttu ka $\angle ABC > \angle CAB$. Sellega on väide tõestatud.



Joon. 43.

374. Tõestame, et on õige ka eelmise teoreemi pöördteoreem:

kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus. Kolmnurgas ABC (joon. 43) $\angle ABC > \angle CAB$.

Väide. $AC > BC$.

Tõestus. Külgede AC ja BC kohta on õige üks kolmest väitest:

$$AC < BC \text{ või } AC = BC \text{ või } AC > BC.$$

Neist esimene väide ei saa olla õige, sest otsese teoreemi järgi peaks siis olema $\angle ABC < \angle CAB$, mis on vastuolus eeldusega. Samal põhjusel ei saa ka teine väide olla õige, sest sellest järelduks, et nurgad ABC ja CAB on võrdsed. Nii jääb püsima ainult kolmas väide, s. t. $AC > BC$.

Samal viisil saab näidata, et

kolmnurgas asetsevad võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

375. Kolmnurga ABC kohta on teada, et $\angle A = 78^\circ$ ja $\angle B = 37^\circ$. Järjesta kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

376. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on $\angle A$ ja $\angle B$. Leia pikem kaatet, kui $\angle A = 34^\circ$.

377. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45° . Mis saab öelda kaatetite kohta?

378. Missugune külg on täisnurkses kolmnurgas kõige pikem? Missugune külg on nürinurkses kolmnurgas kõige pikem?

379. Kolmnurga küljed on $AB = 7,8$ cm, $BC = 9,4$ cm ja $AC = 5,6$ cm. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

380. Võrdhaarse kolmnurga alus on $8,4$ dm ja ümbermõõt 23 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?

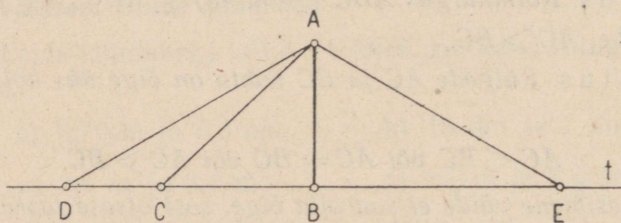
381. Kolmnurga KLM kohta on teada, et $\angle L > \angle M$ ja $LM > KM$. Missugune on kolmnurga suurim nurk?

382. Kolmnurga ABC külgede kohta on teada, et $BC > AC > AB$. Missugused nurgad on selles kolmnurgas teravnurgad? Mis saab öelda kolmanda nurga suuruse kohta?

383. Punktist A on sirgele t tõmmatud ristlõik AB ja kaks kaldlõiku AC ja AD , mis asetsevad ristlõigust ühel ja samal pool (joon. 44). Tõesta järgmised väited:

- 1) $AB < AC$ ja $AB < AD$;
- 2) kui $BC < BD$, siis ka $AC < AD$.

N ä p u n ä i d e. Teise väite tõestamiseks vaatle kolmnurka ADC .



Joon. 44.

384. Olgu punktist A (joon. 44) sirgele t tõmmatud ristlõik AB ja kaldlõik AC . Nimetame punkti B ristlõigu aluspunktiks ja punkti C kaldlõigu aluspunktiks ning neid aluspunkte ühendavat lõiku BC kaldlõigu AC projektsiooniks sirgel t .

Nimeta kaldlõigu AD (joon. 44) aluspunkt ja projektsioon.

385. Tõesta, kasutades kolmnurkade võrdsust, et kui ühest ja samast punktist on sirgele tõmmatud kaks kaldlõiku, millede projektsioonid on võrdsed, siis on võrdsed ka need kaldlõigud (joon. 44).

386. Tõesta, et kui ühest ja samast punktist on sirgele tõmmatud kaks kaldlõiku, millede projektsioonid ei ole võrdsed, siis suurem kaldlõik on see, millel on suurem projektsioon.

N ä p u n ä i d e. *Kaldlõigud võivad asetseda ristlõigust kas ühel ja samal pool või erineval pool. Esimest juhtumit on vaadeldud üllesandes 383; teisel juhtumil pööra kolmnurk, mille moodustavad ristlõik, kaldlõik ja selle projektsioon, ümber ristlõigu teisele poole ja jätkka tõestust endisel viisil.*

387. Tõesta, et kui ühest ja samast punktist on sirgele tõmmatud kaks kaldlõiku, siis

- 1) võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed projektsioonid;
- 2) suuremal kaldlõigul on suurem projektsioon.

388. Olgu täisnurkse kolmnurga üks teravnurk 30° . Kui suur on teine teravnurk? Kuidas seda teades saab võrdkülgse kolmnurga abil joonestada täisnurkset kolmnurka, mille üks nurk on 30° ja hüpotenuus on antud?

Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille üks nurk on 30° ja hüpotenuus on 5 cm. Kui pikk on selles kolmnurgas 30° -se nurga vastaskaatet?

389. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks nurk on 30° , täienda see kolmnurk võrdkülgseks kolmnurgaks ja tõesta, et **täisnurkses kolmnurgas 30° -se nurga vastaskaatet võrdub poole hüpotenuusiga.**

390. Kui pikk on telefoniposti tugi, mis moodustab postiga nurga 30° , kui posti ja toe vaheline kaugus mööda maapinda on 1,8 m?

391. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 60° ja hüpotenuusi ning väiksema kaateti summa on 24 dm. Kui pikk on hüpotenuus?

RÖÖPKÜLIKU OMADUSED.

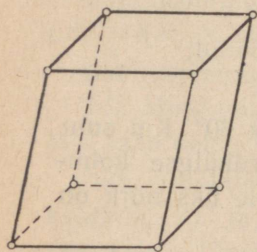
392. Joonesta kaks paralleelset sirget ja lõika neid kahe paralleelse sirgega. Kuidas nimetatakse tekkinud nelinurka?

Rööpkülik on nelinurk, millel on kaks paari paralleelseid vastaskülgi. Rööpkülikut nimetatakse ka parallelogrammiks.

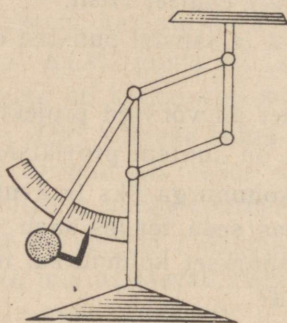
Kuidas nimetatakse keha (joon. 45), mille kõik tahud on rööpkülikud?

393. Rööpkülik leiab tehnikas sageli rakendamist. Joonised 46 kuni 49 kujutavad mõningaid esemeid, millede juures on kasutatud rööpkülikut (kirjakaal, lauakaal, jalgratta lamp, hambaarsti riistade laud).

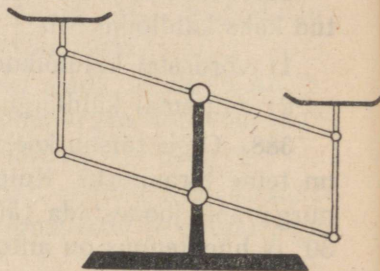
Selgita, miks on sobiv viimase kahe eseme kinnitamisel kasutada rööpkülikut.



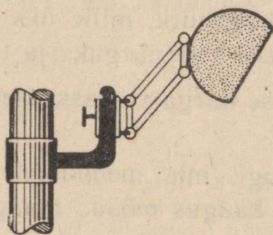
Joon. 45.



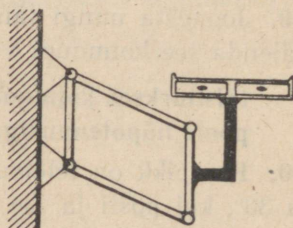
Joon. 46.



Joon. 47.



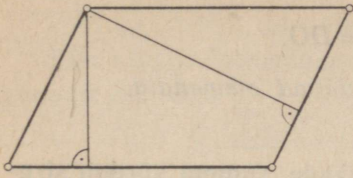
Joon. 48.



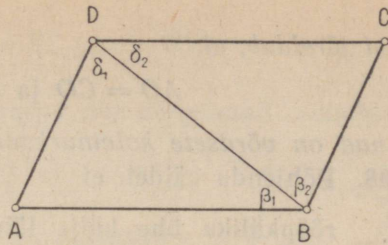
Joon. 49.

394. Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse tema kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust (joon. 50).

Joonesta mingi rööpkülik ühes tema kahe kõrgusega, mōõda alused ja kõrgused, arvuta pindala kahel viisil ja võrdle tulemusi. Millest on tingitud tulemuste erinevus, kui see esineb?



Joon. 50.



Joon. 51.

395. Tõestame, et

rööpküliku diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Eeldus. $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joon. 51).

Väide. $\triangle ABD = \triangle CDB$.

Tõestus. Kolmnurkadel ABD ja CDB on ühine külg BD . Selle külje lähisnurkadest $\beta_1 = \beta_2$ kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning $\delta_1 = \delta_2$ kui põiknurgad paralleelide AD ja BC juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN põhjal järeldame eeltoodust, et $\triangle ABD = \triangle CDB$, mida oligi vaja tõestada.

396. Vaadeldes rööpküliku tükeldamisel saadud kolmnurkade vastavaid elemente, järelda eelmisest teoreemist, et

- 1) rööpküliku vastasküljed on võrdsed ja
- 2) rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.

397. Joonestame mingi rööpküliku $ABCD$ ühes tema mõlema diagonaaliga ja tõestame, et

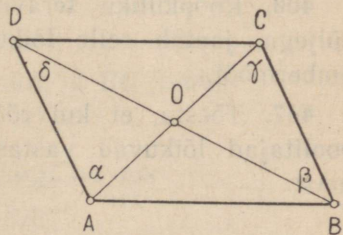
rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joon. 52).

Väide. $AO = CO$ ja $BO = DO$.

Tõestus. Kolmnurkade AOD ja COB külgedest $AD = BC$, sest nad on rööpküliku vastasküljed.

Nende külgede lähisnurkadest $\alpha = \gamma$ kui põiknurgad paralleelide AD ja BC lõikaja AC juures ja $\delta = \beta$ kui põiknurgad samade paralleelide lõikaja BD juures. Kuid siis kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN järgi



Joon. 52.

$$\triangle AOD = \triangle COB.$$

Sellest järeldub, et

$$AO = CO \text{ ja } BO = DO,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid.

398. Põhjenda väidet, et

rööpküliku ühe külje lähisnurkade summa võrdub sirg-
nurgaga.

399. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külge on teisest
1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

400. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külge on $\frac{5}{6}$ teisest.
Kui pikad on küljed?

401. Rööpküliku üks nurk on $57^{\circ}15'$. Kui suured on teised
nurgad?

402. Rööpküliku üks nurk on $52^{\circ}20'$ suurem kui teine. Leida
nurkade suurused.

403. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktidest
on joonestatud sirged paralleelselt haaradega. Leia saadud rööp-
küliku ümbermõõt, kui võrdhaarse kolmnurga haar on 12 cm.

404. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paral-
leelsed.

405. Tõesta, et rööpküliku mistahes külje lähisnurkade pooli-
tajad on risti.

406. Rööpküliku teravnurga poolitaja, lõikudes rööpküliku
küljega, jaotab selle lõikudeks 8 cm ja 3 cm. Leia rööpküliku
ümbermõõt.

407. Tõesta, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade
poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külge on pool pike-
mast.

RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

408. *Selleks et otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik või
mitte, saab kasutada peale rööpküliku definitsiooni veel mitmeid
teisi teoreeme, mis sisaldavad rööpküliku tunnuseid. Ühe tunnuse
annab järgmine teoreem:*

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

Eeldus. $AB = DC$ ja $AD = BC$ (joon. 53).

Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC . Siis

$$\triangle ABC = \triangle ACD,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ ja } \gamma_1 = \alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

409. Teine teoreem, mis võimaldab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:

nelinurk, millel on üks paar võrdseid ja paralleelseid vastaskülgi, on rööpkülik.

Eeldus. $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joon. 53).

Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Kolmnurkadel ADC ja ABC on peale ühise külje AC veel eelduse järgi

$$AD = BC$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AD ja BC juures

$$\alpha_2 = \gamma_1.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KNK järgi on siis

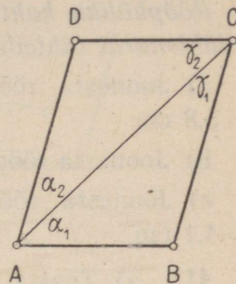
$$\triangle ADC = \triangle CBA.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$\alpha_1 = \gamma_2$$

ja seega nelinurga $ABCD$ vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

410. Rööpküliku tunnused koos kolmnurkade konstrueerimise oskusega võimaldavad ehitada rööpkülikut tema antud elemen-



Joon. 53.

tide järgi. Selleks ehitame nende elementide järgi esmalt ühe kolmnurga, milleks diagonaal jaotab rööpküliku, ja siis teise. Teostanud konstruktsiooni, põhjendame, et saadud nelinurk on rööpkülik.

Rööpküliku kaht lähiskülge tähistame tähtedega a ja b , külje a lähisnurki tähtedega α ja β , diagonaale tähtedega e ja f .

a) Joonesta rööpkülik, millel $a = 3,9$ cm, $b = 2,9$ cm ja $e = 5,8$ cm.

b) Joonesta rööpkülik, millel $a = 4,5$ cm, $\alpha = 48^\circ$ ja $f = 4,2$ cm.

c) Joonesta rööpkülik, millel $a = 5,5$ cm, $\beta = 130^\circ$ ja $b = 4,1$ cm.

411. a) Tõesta, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

b) Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades ehita rööpkülik, millel $a = 5,7$ cm, $e = 7,2$ cm ja $f = 5,2$ cm.

RÖÖPKÜLIKU ERILIIGID.

412. Praktikast esinevad sageli niisugused rööpkülikud, mille nurgad või küljed või nji nurgad kui ka küljed on võrdsed. Selliseid rööpkülikuid nimetatakse vastavalt ristkülikuteks, rombideks või ruutudeks (joon. 54).

a) Ristkülik on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed.

Et rööpküliku nurkade summa on 360° , siis ristküliku iga nurk peab olema $360^\circ : 4$ ehk 90° . Seega ristkülik on täisnurkne rööpkülik. Niisuguse rööpküliku saame, kui tema ühe nurga teeme täisnurgaks (joon. 54).

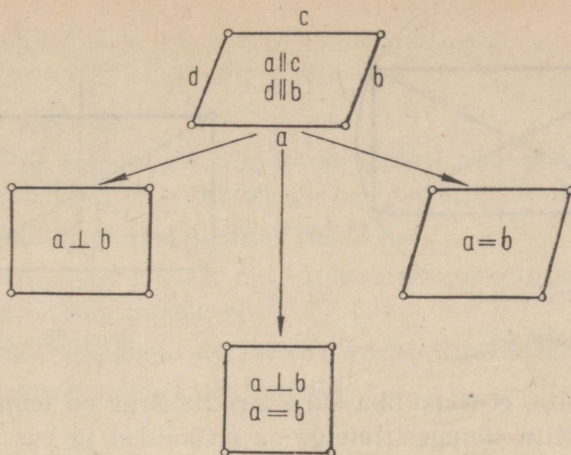
Põhjenda väidet, et kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis on ka teised nurgad täisnurgad.

b) Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

Rombi saame, kui rööpküliku ühe tipu lähisküljed teeme võrdseiks, sest siis on rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu kõik küljed võrdsed (joon. 54). Seega,

romb on võrdkülgne rööpkülik.

c) Ruut on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed ja küljed on võrdsed (joon. 54).



Joon. 54.

413. a) Kuidas defineerida ruutu ristküliku kaudu (joon. 54)?
 b) Kuidas defineerida ruutu rombi kaudu (joon. 54)?

RISTKÜLIKU OMADUSED.

414. Rööpküliku igal eriliigil on muidugi kõik rööpküliku omadused. Kuid peale nende on igal eriliigil veel omad eriomadused. Kui kõneldakse ristküliku või rombi omadustest, siis mõeldakse tavaliselt neid eriomadusi. Vaatleme neid.

Joonesta ristkülik $ABCD$ ühes tema diagonaalidega AC ja BD , vaatle kolmnurki ABC ja BAD ning tõesta teoreem:

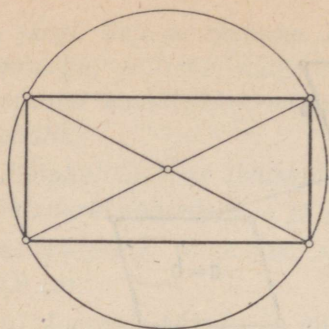
ristküliku diagonaalid on võrdsed.

415. Kasutades rööpküliku diagonaalide omadust ja ristküliku diagonaalide eriomadust, tõesta teoreem:

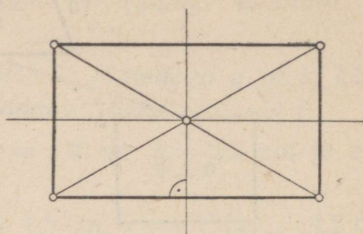
ristküliku diagonaalide lõikepunkt on ristküliku tippudest võrdsetel kaugustel.

Joonesta ringjoon, mis läbib ristküliku kõiki tippe. Mis on selle ringjoone keskpunktiks? raadiuseks?

Ringjoont, mis läbib ristküliku kõiki tippe, nimetatakse ristküliku ümberringjooneks (joon. 55).



Joon. 55.



Joon. 56.

416. Näita, et ristküliku külje keskristsirge on tema sümmeetriateljeks. Mitu sümmeetriatelge on ristkülikul ja kus need teljed lõikuvad (joon. 56)?

417. a) Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

b) Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

c) Joonesta ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 45° .

418. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

ROMBI OMADUSED.

419. Rombi eriomadustest tähtsaimat väljendab teoreem:

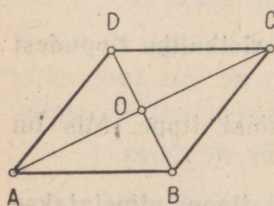
rombi diagonaalid on teineteisega risti.

Eeldus. Nelinurgas $ABCD$ (joon. 57) $AB = BC = CD = AD$.

Väide. $AC \perp BD$.

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ACD . Eelduse järgi

$$AD = CD$$



Joon. 57.

ja seega kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis diagonaalide lõikepunkt O on kolmnurga ACD aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja tipu ühenduslõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO \perp AC$$

ehk

$$AC \perp BD,$$

mida tuligi tõestada.

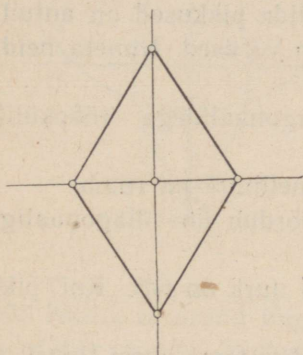
Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Nii poolitab DO nurga ADC ; seega on tõestatud ka teoreem:

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

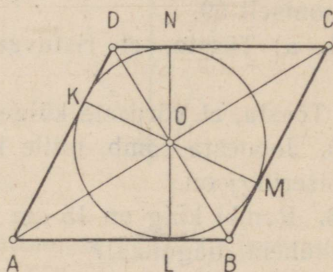
420. Tuleta meelde, mis on võrdhaarse kolmnurga sümmeetriateljeks ja järelda sellest, et

rombi diagonaal on rombi sümmeetriateljeks (joon. 58).

Mitu sümmeetriatelge on rombil?



Joon. 58.



Joon. 59.

421. Tõestame, et

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.

Eeldus. Nelinurk $ABCD$ on romb ja O on tema diagonaalide lõikepunkt; $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$ (joon. 59).

Väide. $OK = OL = OM = ON$.

Tõestus. On teada, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga haaradest. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nii nurga A kui ka nurga C haaradest, seega

$$OK = OL \text{ ja } OM = ON.$$

Sama punkt O kui diagonaali BD punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja seega

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame

$$OK = OL = OM = ON,$$

mida tuligi tõestada.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK , läbib punkte K , L , M ja N . Seda ringjoont nimetatakse rombi siseringjooneks (joon. 59).

422. a) Joonesta romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

b) Joonesta romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45° .

c) Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

423. Tõesta, et rombi kõrgused on võrdsed. Nimeta neid kõrgusi jooniselt 59.

424. a) Tõesta, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

b) Tõesta, et võrdsete külgedega nelinurk on romb.

425. Joonesta romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga, ja selle siseringjoon.

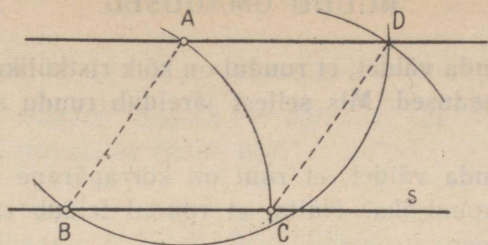
426. Rombi külg on 15 cm ja üks nurk on 60° . Kui pikk on rombi lühem diagonaal?

427. Rombi kõrgus, mis on tõmmatud tema ühest tipust, poolitab külje. Leia, kui suured on rombi nurgad.

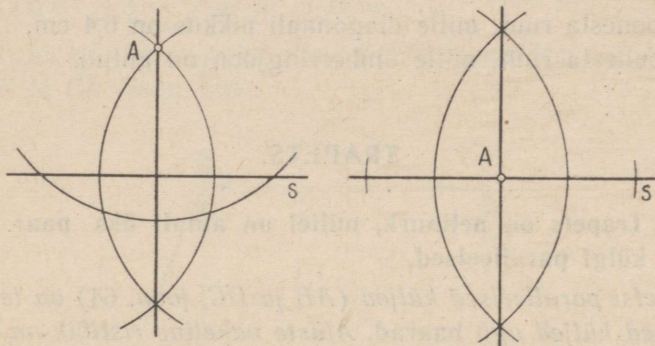
428. Rombi joonestamisega saab kergesti lahendada mitmeid konstruktsioonülesandeid sirkli ja joonlaua abil. Lahendame näiteks järgmise ülesande: tõmmata läbi väljaspool antud sirget asetseva punkti sirge, mis oleks paralleelne antud sirgega.

Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkti A (joon. 60). Võtame sirgel s vabalt punkti B ja joonestame sirkli ja joonlaua abil rombi $ABCD$, mille üheks küljeks on lõik AB ja teine külg BC on sirgel s . Külje BC vastaskülje pikendamisel saadav sirge AD ongi otsitav sirge, sest ta läbib punkti A ja on paralleelne sirgega s .

429. Näita, et antud sirgele s ristsirge joonestamine läbi antud punkti A sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel, asetsegu antud punkt väljaspool antud sirget või sellel sirgel (joon. 61). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

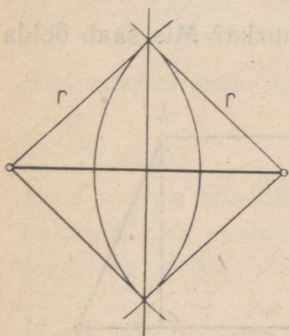


Joon. 60.

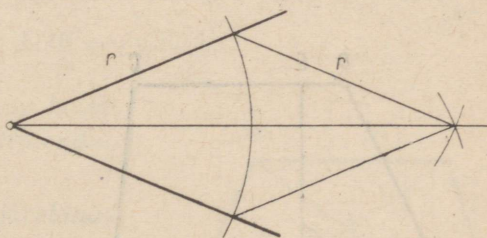


Joon. 61.

430. Näita, et antud lõigu poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 62). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?



Joon. 62.



Joon. 63.

431. Näita, et nurga poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 63). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

RUUDU OMADUSED.

432. Põhjenda väidet, et ruudul on kõik ristküliku ja ühtlasi ka kõik rombi omadused. Mis sellest järeldeb ruudu sümmeetriatelgede kohta?

433. Põhjenda väidet, et ruut on korrapärane nelinurk. Mis on ruudu keskpunktiks? Näita, et ruudul leidub siseringjoon ja ka ümberringjoon.

434. a) Joonesta sirkli ja joonlaua abil ruut, mille üheks küljeks jääb antud lõik.

b) Joonesta ruut, mille diagonaali pikkus on 6,4 cm.

c) Joonesta ruut, mille ümberringjoon on antud.

TRAPETS.

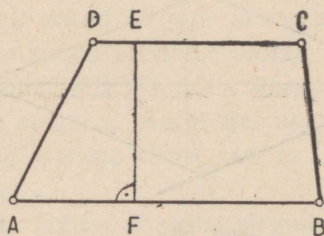
435. Trapets on nelinurk, millel on ainult üks paar vastaskülgi paralleelsed.

Trapetsi paralleelsed küljed (AB ja DC , joon. 64) on tema alused, teised küljed aga haarad. Aluste vaheline ristlõik on trapetsi kõrgus (EF , joon. 64).

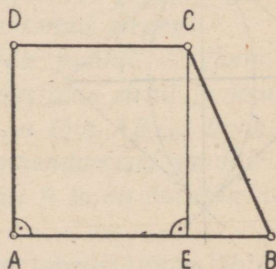
Kui suur on trapetsi haara lähisnurkade summa? Kui suur on trapetsi kõikide sisenurkade summa?

436. Trapetsit, mille üks haar on alustega risti, nimetatakse täisnurkseks trapetsiks (joon. 65).

Kui suured on täisnurkse trapetsi kaks nurka? Mis saab öelda tema kõrguse kohta?



Joon. 64.



Joon. 65.

437. Joonesta täisnurkne trapets, mille

a) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning lühem haar on 3,3 cm;

- b) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning pikem haar on 3,3 cm;
 c) pikem alus on 6 cm ja haarad on 4 cm ja 5,5 cm;
 d) üks alus on 6,4 cm ja diagonaalid on 5,4 cm ja 7,5 cm.

438. Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda võrdhaarseks trapetsiks (joon. 66).

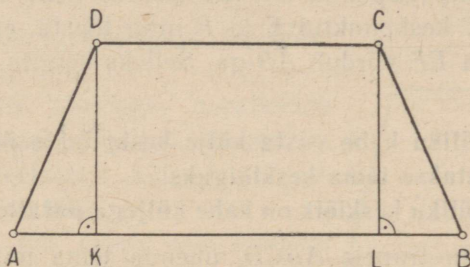
Tõestame, et

võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

Eeldus. $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$.

Väide. $\angle A = \angle B$ ja $\angle D = \angle C$.

Tõestus. Joonestame aluse DC otspunktidest trapetsi kõrgused DK ja CL (joon. 66).



Joon. 66.

Et paralleelsete sirgete vahelised ristlõigud on võrdsed, siis $DK = CL$. Eelduse järgi $AD = BC$ ja joonise järgi $\angle K = \angle L$.

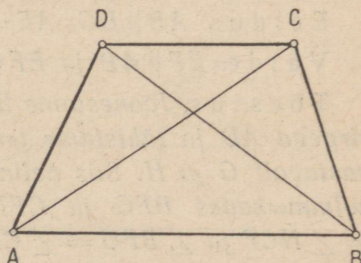
Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN saame, et

$$\triangle ADK = \triangle BCL.$$

Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega ka $\angle A = \angle B$.

Sellest on kerge järeldada (kuidas?), et $\angle D = \angle C$.

439. Võrreldes kolmnurki ABD ja ABC (joon. 67), tõesta, et võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.



Joon. 67.

440. Joonesta võrdhaarne trapets, mille

a) alus on 6 cm, haar 3 cm ja nendevaheline nurk on 60° ;

b) alus, haar ja diagonaal on antud;

c) alused on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3 cm.

441. Kui suur on võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa?

442. Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

443. Mis on võrdhaarse trapetsi sümmeetriateljeks? Joonesta sirkli ja joonlaua abil mingi võrdhaarne trapets ning siis tema sümmeetriatelg.

TRAPETSI KESKLÕIK.

444. Joonesta rööpkülik $ABCD$, ühenda selle rööpküliku külgedele AD ja BC keskpunktid E ja F ning tõesta, et EF on paralleelne AB -ga ja EF võrdub AB -ga. Selleks selgita, mis liiki nelinurk on $ABFE$.

Rööpküliku kahe vastaskülje keskpunkte ühendavat lõiku nimetatakse tema kesklõiguks.

Rööpküliku kesklõik on kahe küljega paralleelne ja võrdne.

445. Joonesta trapets $ABCD$, ühenda tema mitteparalleelsete külgedele AD ja BC keskpunktid E ja F ning tee mõõtmise teel kindlaks, et EF on paralleelne trapetsi alustega ja võrdub aluste poolsummagaga.

Trapetsi mitteparalleelsete külgedele keskpunkte ühendavat lõiku nimetatakse trapetsi kesklõiguks.

446. Tõestame teoreemi:

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub aluste poolsummagaga.

Eeldus. $AB \parallel DC$; $AE = DE$; $BF = CF$ (joon. 68).

Väide. $EF \parallel AB$ ja $EF = (AB + DC) : 2$.

Tõestus. Joonestame läbi punkti F sirge, mis on paralleelne sirgega AD ja tähistame tema lõikepunktid sirgetega AB ja DC vastavalt G ja H . Siis nelinurk $AGHD$ on rööpkülik (miks?). Et kolmnurkades BFG ja CFH on $BF = CF$ (miks?), $\angle GBF = \angle HCF$ ja $\angle BFG = \angle CFH$ (miks?), siis need kolmnurgad on võrdsed. Sellest järeldub, et $CF = HF$ ja $CB = CH$ (miks?). Kuid

siis punkt F on rööpküliliku $AGHD$ külje GH keskpunkt ja EF on sama rööpküliliku kesklõik. Seega $EF \parallel AG$ ja $EF = AG$ ehk teisiti $EF \parallel AB$ ja $EF = (AG + DH) : 2$. Et lõikude GB ja CH võrdsuse tõttu

$$AB + DC = AG + GB + DH - CH = AG + DH,$$

siis

$$EF = (AB + DC) : 2,$$

nagu väitsime.

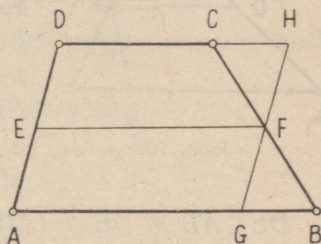
447. a) Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

b) Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

c) Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

448. Eelmisest teoreemist järeldub, et

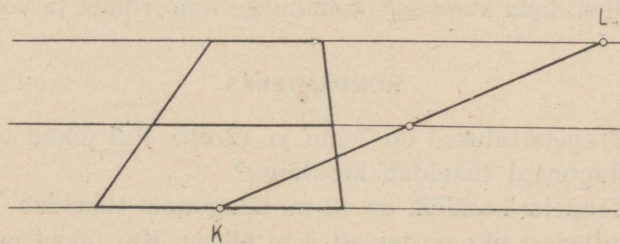
trapetsi alustega paralleelne sirge, mis poolitab ühe mitteparalleelsetest külgedest, poolitab ka teise.



Joon. 68.

Tõepoolest, kui (joon. 68) trapetsi $ABCD$ alustega paralleelne sirge s , mis poolitab külje AD , ei poolitaks külge BC , siis läbi külje AD keskpunkti E läheks kaks sirget, mis on paralleelsed trapetsi alustega, nimelt sirge s ja sirge EF . Kuid see pole võimalik.

449. Joonesta mingi trapetsi ühes tema kesklõiguga ja pikenda aluseid ning kesklõiku. Saad kolm sirget, milledest keskmine poolitab iga lõigu, mis ühendab kaht äärmist, näiteks lõigu KL joonisel 69. Miks on see nii? Poolita niisuguse joonise abil mõned vabalt võetud lõigud.



Joon. 69.

KOLMNURGA KESKLÕIK.

450. Joonesta mingi isekülgne kolmnurk, ühenda selle kahe külje keskpunktid, mõõda saadud lõigu pikkus ja võrdle seda kolmanda küljega.

Kolmnurga külje keskpunkte ühendavat lõiku nimetatakse kolmnurga kesklõiguks. Neid lõike on kolmnurgal kolm.

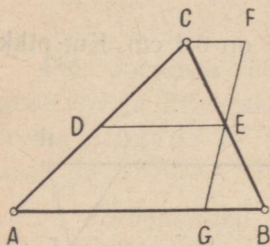
Tõestame, et

kolmnurga iga kesklõik on ühe küljega paralleelne ja võrdub poolega sellest küljest.

Eeldus. $AD = CD$ ja $BE = CE$
(joon. 70).

Väide. $DE \parallel AB$ ja $DE = AB : 2$.

Tõestus. Kui läbi punkti C joonestada sirgega AB paralleelne sirge ja need kaks paralleeli ühendada mingi lõiguga FG , siis tekib trapets $ACFG$ (joon. 70), milles DE on kesklõiguks (miks?). Ühtlasi $CF = BG$ (miks?). Et trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub poolega aluste summast, siis



Joon. 70.

$$DE \parallel AB \text{ ja } DE = (AG + CF) : 2 = (AB - BG + CF) : 2 = AB : 2.$$

451. a) Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on selle küljed?

b) Kolmnurga külgede pikkused a , b ja c avalduvad kahe arvu x ja y kaudu järgmiselt:

$$a = 4x - 2y; \quad b = 3x + y; \quad c = 5x - 3y.$$

Avalda x ja y antud kolmnurga kesklõikudest moodustuva kolmnurga küljed. Leia kummagi kolmnurga übermõõt ja võrdle neid.

KORDAMISEKS.

452. Trapetsi alused on 7 dm ja 12 dm. Kui pikad on lõigud, milleks diagonaal tükeldab kesklõigu?

453. Trapetsi kesklõik on 12 m. Diagonaal tükeldab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 3 m pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

454. Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe ja sama rombi tippudeks.

455. Tõesta, et rombi külgede keskpunktid on ühe ja sama ristküliku tippudeks.

456. Tõesta, et kui ruudu kaks vastastippu ühendada ruudu külgede keskpunktidega, siis tekib romb.

457. Pioneerid matkasid kompassi järgi esiteks 3 km sihis $N30^{\circ}E$, siis 2 km sihis $N40^{\circ}W$ ja lõpuks veel 4 km sihis $N40^{\circ}E$. Valmista nende teest joonis mõõdus 1 : 100 000 ja leia sellest, kui kaugel olid pioneerid matka lõpul oma lähtekohast otsejoones.

458. Laev sõitis esiteks kursiga $N60^{\circ}E$, siis kursiga E ja lõpuks kursiga $S30^{\circ}W$. Kuidas esimene teelõik asetseb viimase suhtes?

459. Millega võrdub trapetsi pindala? Avalda trapetsi pindala tema kesklõigu ja kõrguse kaudu.

460. Missugune kujund tekib, kui võrdhaarse trapetsi külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

461. Missugune kujund tekib, kui nelinurga külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

N ä p u n ä i d e. *Kasuta nelinurga diagonaale.*

6. TEHTED LIGIKAUDSETE ARVUDEGA.

ARVUDE ÜMARDAMINE JA SELLEST TEKKIV VIGA.

462. Arvu 1254 saab ümardada sadadeni kahel viisil, nimelt võttes 1254 asemele 1200 või 1300. Esimest ümardamist nimetatakse ümardamiseks puuduga, teist aga ümardamiseks liiaga.

Vastavalt sellele on arv 1200 arvu 1254 ligikaudne väärtus puuduga ja arv 1300 arvu 1254 ligikaudne väärtus liiaga.

Asendades antud arvu ükskõik kummaga nendest ligikaudsetest väärtustest, teeme vea, mida nimetatakse ümardamisveaks. Puuduga ümardamise juhul on siin ümardamisviga 1254 — 1200, s. o. 54, liiaga ümardamise puhul 1300 — 1254, s. o. 46.

463. Maakera läbimõõt poolusest pooluseni on 12 713,8 km. Anna maakera läbimõõdu ligikaudne väärtus tuhandetes kilomeetrites. Kui suure vea teed, kui ümardad selle arvu tuhandeteni puuduga? liiaga?

Kummal juhul on viga väiksem?

464. a) Euroopa pindala on 9 439 926 km². Ümarda see arv tuhandeteni nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

b) Ringjoone pikkuse ja ringi läbimõõdu suhe on 3,141592653... Ümarda see arv sajandikeni nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

Täisarvude ümardamisel asendatakse iga ärajääv number nulliga, kümnendmurdude ümardamisel jäetakse aga lõpunumbrid lihtsalt ära.

N ä i d e. 1685 \approx 1700 (ümardatult sadadeni);

37,658 \approx 37,7 (ümardatult kümnendikeni).

465. Selleks et ümardamisviga oleks võimalikult väike, on kokku lepitud

ümardada liiaga, kui esimene ärajääv või nulliga asendatav number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja ümardada puuduga, kui esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3 või 4.

Järgnevates ülesannetes ümarda ikka selle reegli järgi.

466. Ümarda kümneteni arvud

37,4; 182; 1645; 5,6; 2049; 305.

Määra ümardamisvead ning leia nende hulgast suurim.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnelisteni?

N ä i d e. $716,4 \approx 720$; ümardamisviga on 3,6.

467. Ümarda kümnendikeni

3,78; 4,348; 6,85; 29,391; 36,54; 0,259.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnendikeni?

468. Ümarda täismeeitriteks

2,7 m; 16,3 m; 28,5 m; 39,4 m; 128 dm; 365 dm; 984 dm; 191 cm; 236 cm; 3799 cm; 5830 cm.

Missugune on ümardamisel tekkiva vea ülemmäär, kui mingi pikkuse ümardame täismeeitriteks?

469. Suurimat võimalikku ümardamisviga nimetatakse ümardamisvea ülemmääraks.

Ümardades kümneteni on vea ülemmäär 5 (vt. ül. 466), ümardades kümnendikeni on vea ülemmäär 0,05 (vt. ül. 467) jne. Üldiselt:

ümardades arve ülesandes 465 antud reegli kohaselt mingi järguni on ümardamisvea ülemmääraks pool selle järgu ühikust, milleni ümardati.

Ümardades arve näiteks tuhandeteni, on ümardamisvea ülemmääraks pool tuhandest, s. o. 500.

470. Kui suur on vea ülemmäär, kui arv ümardati sadadeni? sajandikeni? ühtedeni? kümneteni? tuhandikeni?

471. Ümarda järgmised arvud

a) tuhandikeni:	b) sajandikeni:	c) kümnendikeni
0,2096	19,407	48,805
27,0607	8,095	4,83
4,00852	5,5428	0,754
6,90049	11,1065	127,896
1,82171	1,009	6,695
15,0999	2,999	14,051

472. Ümarda järgmised arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks 5:

1237,698; 75,6789; 465,5664; 791,1243; 65,0075.

473. Ümarda eelmise ülesande arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks: a) 0,5; b) 50; c) 0,005; d) 0,05.

474. Ümarda järgmised arvud

a) sajandikeni: 0,2093; 27,0605; 4,00202.

b) ühtedeni: 1,23; 0,746; 19,507; 8,09; 2,103.

c) tuhandikeni: 0,7385; 9,2297; 16,3776; 9,999.

d) kümneteni: 18,1; 96,2; 15,099; 19,101; 85,5.

e) tuhandeteni: 817,8; 1511; 3690; 12723; 999.

f) kümnendikeni: 2,53; 0,95; 6,678; 0,6099.

475. Ümarda järgmised arvud kümneteni ning määra ümardamisviga: 503; 817; 4305; 21 658; 12 814.

476. Ümarda järgmised arvud tuhandeteni ning määra ümardamisviga: 23 458; 13 709; 100 998; 365 651.

477. Ümarda järgmised arvud ühtedeni ning määra ümardamisviga: 0,8; 3,7; 15,5; 0,379; 1,813; 2,972.

478. Ümarda järgmised arvud kümnendikeni ning määra ümardamisviga: 8,512; 11,395; 0,403; 4,08; 6,17; 10,0098.

479. Ümarda järgmised arvud sajandikeni ning määra ümardamisviga: 9,647; 12,784; 0,231; 1,054; 19,6723; 0,455; 7,0993.

ARVU ALAM- JA ÜLEMTÖKE.

480. *Olgu mingi arvu x ümardamisel sadadeni saadud 2700, s. t. $x \approx 2700$. Kui ümardamine on toimunud ülesandes 465 antud reegli kohaselt, siis arv x , mille täpne väärtus ei ole teada, peab olema väiksem kui 2750, kuid suurem kui 2650 (mõnikord ka viimasega võrdne):*

$$2650 < x < 2750.$$

Arve 2650 ja 2750 nimetame arvu x tōketeks, nimelt on 2650 tema alamtōke ja 2750 tema ülemtōke.

481. Okaa jõe pikkus p on sadade kilomeetriteni ümardatult 1500 km. Anna pikkuse p tōkked.

482. Tervete meetriteni ümardatult on koolimaja pikkus $p \approx 42$ m ja laius $l \approx 14$ m. Anna suuruste p ja l tōkked.

483. Olgu tundmatu arvu x ümardamisel saadud tema ligikaudseks väärtuseks a , kusjuures selle ligikaudse väärtuse vea ülemmäär on v . Siis on arvu x ülemtõke $a + v$ ja alamtõke $a - v$:

$$a - v < x < a + v.$$

Seega

arvu ülemtõke võrdub selle arvu ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära summaga, alamtõke võrdub ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära vahega.

Näide. Kui $x \approx 15,4$ ja $v = 0,05$,

siis

$$15,4 - 0,05 < x < 15,4 + 0,05$$

ehk

$$15,35 < x < 15,45.$$

484. Ümardamisel kümnendikeni saadi arvud:

$$a = 53,8; b = 14,3; c = 187,6; d = 48,5.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke? Vastus anna kujul:

$$53,75 < a < 53,85.$$

485. Ümardamisel sajandikeni saadi arvud:

$$a = 1,07; b = 0,12; c = 19,36; d = 187,05.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

486. Ümardamisel tuhandikeni saadi arvud:

$$a = 16,825; b = 4,791; c = 63,559; d = 191,099.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

487. Anna järgmiste suuruste tõkked nende suuruste ligikaudsete väärtuste põhjal:

$$a = 0,8; b = 6,5; c = 1,25; d = 12,683; e = 79; f = 6300;$$

$$g = 48\,000; h = 6795; i = 21.$$

488. Kui kirjutatakse, et klassi pikkus on 12,0 m, siis tähetakse sellega öelda, et viga mõõtmisel ei ületa 0,05 meetrit:

Kui suur on klassi pikkuse alam- ja ülemtõke?

Miks ei või selle arvu lõpust nulli kustutada? Kuidas mõjuks nulli kustutamine vea ülemmäärale?

489. Missugune on vea ülemmäär ning ülem- ja alamtõke kui kirjutatakse, et mingi raskus on 16,0 t? 9,00 ts? 25,000 kg? 0,030 t?

TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD.

490. *Igasugune arvutamine seisneb antud arvude kaudu otsitava te arvude leidmises. Antud arvud on võetud sageli igapäevasest elust, on saadud seega mõõtmise, loendamise ja arvutamise teel, kusjuures need andmed on sageli ümardatud.*

Kõik ümardamise teel saadud arvud on ligikaudsed.

491. Missuguse vea ülemmääraga saab mõõta pikkusi mõõdupuu abil, millel pole a) detsimeetritest peenemaid jaotusi, b) sentimeetritest peenemaid jaotusi, c) millimeetritest peenemaid jaotusi?

Kõik mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

Mõõtmisel saadud arve kirjutatakse ikka nii, et mõõtmisviga oleks mitte suurem kui pool arvu viimase järgu ühikust. Seega tuleb mõõtmisel saadud ligikaudseid arve mõista ja kirjutada niisamuti, nagu ümardamisel saadud ligikaudseid arvegi.

Näiteid. 1) Kui tänava laius $l \approx 8,4$ m, siis see tähendab, et

$$8,35 \text{ m} < l < 8,45 \text{ m}.$$

2) Kui laua pikkus $p \approx 1,20$ m, siis see tähendab, et

$$1,195 \text{ m} < p < 1,205 \text{ m}.$$

3) Kui rauatüki kaalumisel saadi $k \approx 73,0$ g, siis see tähendab, et

$$72,95 \text{ g} < k < 73,05 \text{ g}.$$

492. a) Loendamisel saame ligikaudsed arvud, kui loendatavaid esemeid on palju, kui nad loendamise ajal muudavad oma asukohta, on paigutatud korrapäratult jne.

Kuigi loendamise tulemus on mõnikord täpne arv, tuleb see arvutamise ja meelespidamise hõlbustamiseks asendada ümardamisel saadava ligikaudse arvuga. Näiteks linna elanike arvuks saadi rahvaloendusel 271 826 inimest, mis ümardatakse arvuks 272 000.

b) Ligikaudsed arvud võivad tekkida ka arvutamise tulemusena. Olgu näiteks vaja jaotada 24 m traati 7-ks võrdseks osaks. Siis iga osa pikkus meetrites on

$$24 : 7 = 3,428 \dots$$

Tulemuse kasutamiseks peame selle ümardama kümnendikeni, sajandikeni, tuhandikeni jne. Igal juhul saame jagatiseks ligikaudse arvu.

493. *Asudes lahendama ükskõik millist ülesannet on kõigepealt vaja endale selgeks teha, missugused selles ülesandes esinevad andmed on ligikaudsed ja missugused täpsed.*

Näiteks ülesandes: «Korrapärase kaheksanurga külje pikkuseks saadi mõõtmisel 5,7 m. Kui suur on selle kaheksanurga ümbermõõt?» esinev arv 8 on täpne arv, 5,7 aga ligikaudne arv, kuna see on saadud mõõtmise tulemusena.

494. Otsusta, kas alltoodud arvud väljendavad suuruse täpset või ligikaudset väärtust.

- a) Kooli õpilaste arv on nimekirja järgi 791.
- b) Linnas on 72 000 elanikku.
- c) Tööline sai kassast 820 rubla palka.
- d) Rong sõitis Tallinnast Moskvasse 23 tundi.
- e) Isa, ema ja poja vanus on kokku 112 aastat.
- f) Muuseumi külastas kuu jooksul 2500 inimest.
- g) Kauplusest müüdi nädala jooksul 450 paari jalatseid.
- h) Raamatukogu raamatute arv on 25 000.
- i) Raudteerööpa pikkus on 10,35 m.
- j) Jalgratta ratta kõrgus on 0,63 m.
- k) Bensiniivaadi maht on 125 l.

495. Aruta läbi ülesanded 610—620 ja määra kindlaks, kas neis esinevad arvud on täpsed või ligikaudsed.

496. *Eelmistes klassides õppisime teostama tehteid täpsete arvudega ja jätsime tulemused enamasti ümardamata. Vaatleme nüüd, kuidas tuleb tehete tulemusi ümardada, kui arutamisel kasutavad andmed on ligikaudsed.*

LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE.

497. *Õpilased mõõtsid jaama kaugust koolimajast. Seda teostati osade kaupa. Saadi järgmised tulemused: koolimajast sidekontorini on 229 m, sidekontorist apteegini 198 m ja apteegist raudteejaamani 377 m. Kui kaugel asetseb raudteejaam koolimajast?*

Koolimaja

Sidekontor

Apteeke

Raudteejaam

Liites need arvud, saame:

$$\begin{array}{r} 229 \\ + 198 \\ \hline 377 \\ \hline 804 \end{array}$$

Ülesande andmed on saadud mõõtmise teel ja on seega ligikaudsed. Järelikult on ligikaudne ka saadud summa. Kuidas tuleb see summa ümardada?

Sellele küsimusele vastuse saamiseks leiame otsitava summa alamtõkke, liites liidetavate alamtõkked, ja summa ülemtõkke, liites liidetavate ülemtõkked.

Summa alamtõke:

$$\begin{array}{r} 228,5 \\ + 197,5 \\ \hline 376,5 \\ \hline 802,5 \end{array}$$

Summa ülemtõke:

$$\begin{array}{r} 229,5 \\ + 198,5 \\ \hline 377,5 \\ \hline 805,5 \end{array}$$

Seega teame otsitavast kaugusest x järgmist:

$$802,5 < x < 805,5.$$

Võrdleme otsitava summa ligikaudset väärtust, tema alam- ja ülemtõket omavahel.

804
802,5
805,5

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama sajaliste ning üks ja sama kümneliste number (8 ja 0). Üheliste numbrid on erinevad: 4, 2 ja 5. Lepime kokku kirjutada ligikaudsete arvudega arvutamisel tulemusi nii, et kõik nendes esinevad numbrid oleksid õiged, peale viimase, mis võib õigest erineda. (Selleks viimaseks numbriks ei tohi olla muidugi mingi juhuslikult võetud number, vaid arvutamisel või ümardamisel saadud number). Selle kokkuleppe kohaselt võtame otsitava summa ligikaudseks väärtuseks 804. Seda pole enam vaja ümardada, sest ta vastab ülaltoodud kokkuleppele.

Vastus. Raudteejaama kaugus koolimajast on 804 m.

498. Teostades tehteid ligikaudsete arvudega ei ole tulemuse vea ülemäär enam pool ligikaudse arvu viimase järgu ühikust. Lahutades eelmises ülesandes vaadeldud summa ülemtõkkest 805,5 selle ligikaudse väärtuse 804, saame 1,5. Sama tulemuse saame kui ligikaudsest väärtusest 804 lahutame alamtõkke 802,5. Täheleb, ligikaudse arvu 804 vea ülemäär on juba 1,5. Kui ligikaudse

arvu vea ülemmäär ei ole pool tema viimase järgu ühikust, siis märgitakse see ülemmäär sageli selle arvu järele sulgudesse:

$$x \approx 804(\pm 1,5).$$

See kirjutus tähendab, et

$$805 - 1,5 < x < 804 + 1,5.$$

Anna järgmiste ligikaudsete arvude tőkked.

$$a \approx 18,7(\pm 1,3); b \approx 0,80(\pm 0,007); c \approx 120(\pm 15).$$

499. Kaalumise teel määrati kindlaks, et tühi pudel kaalub 239,2 g ja kork 5,24 g. Pudelisse valati 25 g vett. Kui palju kaalub nüüd pudel koos vee ja korgiga?

Alamtõke	Ligikaudne väärtus	Ülemtõke
239,15	239,2	239,25
+ 5,235	+ 5,24	+ 5,245
24,5	25	25,5
268,885	269,44	269,995

Õigeid numbraid, nagu nende kolme summa kõrvutamine näitab, on saadud summas ainult kaks: 2 ja 6 (sajalised ja kümnelised). Sel põhjusel on õige ümardada summa ühtedeni:

$$269,44 \approx 269.$$

Vastus. Pudel koos korgi ja veega kaalub 269 g.

500. Missugused järgud on antud eelmise ülesande esimeses liidetavas? teises liidetavas? kolmandas liidetavas?

Missugune on kõige madalam järk, mis kõikides andmetes on antud?

Missuguse järguni tuli ümardada ligikaudsete arvude summa?

Ligikaudsete arvude summa tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis kõikides liidetavates on teada.

Märkus. Kui mõni liidetav on täpne arv, siis selle järgu määramisel, milleni summat ümardada, seda liidetavat ei arvestata. Näiteks, kui ülesandes 499 oleks 25 täpne arv, siis tuleks summa ümardada esimese ligikaudse liidetava järgi, s.o. kümnendikeni.

501. Tee kindlaks, millise järguni tuleb ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjale vastavalt ümardada iga järgmine ligikaudsete arvude summa:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $29,594 + 3,7 + 0,9009$; | d) $444,4 + 2,22 + 111,111$; |
| b) $0,00825 + 0,002 + 0,87$; | e) $0,2093 + 27 + 4,008$; |
| c) $9,4 + 2,7327 + 7,26$; | f) $0,08 + 0,10023 + 0,7$. |

502. Ümarda järgmised summad vastavalt ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjadele:

a) $57,028 + 0,3 + 84 = 141,328 \dots$

b) $0,2 + 49,35 + 0,069 = 49,619 \dots$

c) $40 + 0,91 + 51,7 = 92,61 \dots$

503. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa ning ümarda see:

a) $137\ 000 + 680 + 31\ 200 + 1700;$

b) $395 + 710 + 2900 + 3600;$

c) $478\ 000 + 6750 + 4781 + 5400.$

504. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa ning ümarda see:

a) $0,52 + 0,079;$

b) $1,038 + 12,5;$

c) $4,8 + 0,475;$

d) $12,57 + 0,617 + 32;$

e) $0,725 + 0,6482 + 0,01686;$

f) $15,240 + 2,6463 + 0,81418;$

g) $52,3 + 432 + 250 + 26,4.$

505. Turist käis 94 km jalgsi, sõitis 895,6 km rongiga ja 240 km laevaga. Kui pikk oli kogu teekond?

506. Ühes tükis on 17,25 m nõõri, teises 19 m ja kolmandas 21,3 m. Mitu meetrit nõõri on kolmes tükis kokku?

507. Kolmnurga külgede mõõtmisel saadi pikkused 20,7 m, 14,53 m ja 21 m. Arvuta kolmnurga übermõõt.

508. Kollase vase valmistamiseks võeti 64,1 kg punast vaske, 32,75 kg tsinki ja 2,863 kg tina. Kui palju kaaluvad võetud metallid kokku?

509. Nelinurkse aia ümber ehitati tara. Aia üks külg oli 20 m, teine külg 16,8 m, kolmas 184 dm ja neljas 22,75 m. Kui pikk on kogu tara?

510. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbri koma järel ja leia summa S.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{11}{12} + \frac{11}{15}.$$

Kontrolli saadud tulemuse õigsust, sooritades tehted harilike murdudega ning teisendades siis tulemuse kümnendmurruks ühe kohaga koma järel.

511. Teisenda liidetavad kümnendmurdudeks kahe kohaga koma järel ning leia tulemus.

a) $4\frac{1}{7} + 5\frac{4}{9} + 3\frac{5}{11}$;

c) $11\frac{15}{309} + 111\frac{17}{412} + 1\frac{1}{206}$;

b) $10\frac{5}{9} + 6\frac{6}{11} + \frac{4}{7}$;

d) $4\frac{5}{63} + 5\frac{1}{79} + \frac{11}{51}$.

512. Ristkülikukujulise maatüki pikkus on 1240 m ja laius 236 m. Leia selle maatüki ümbermõõt.

513. Maja ehitamiseks vajatakse 1 532 000 punast tellist ja 325 500 silikaatkivi. Mitu kivi on vaja selle maja ehitamiseks?

514. Kolhoosi maa-alast on põldude all 1550 ha, metsa all 640 ha, heinamaa all 1360 ha ning muuks otstarbeks kasutatakse 345 ha. Kui palju maad on sellel kolhoosil?

LIGIKAUDSETE ARVUDE LAHUTAMINE.

515. Olgu vaja leida ligikaudsete arvude 22,8 ja 1,248 vahe. Teostades lahutamise, saame:

$$\begin{array}{r} 22,8 \\ - 1,248 \\ \hline 21,552 \end{array}$$

Millise järguni ümardada saadud vahet?

Leiame vahe alamtõkke, lahutades vähendatava alamtõkkest lahutatava ülemtõkke, sest vahe on seda väiksem, mida väiksem on vähendatav ning mida suurem on lahutatav.

$$\begin{array}{r} 22,75 \\ - 1,2485 \\ \hline 21,5015 \end{array}$$

Vahe ülemtõkke leidmiseks lahutame vähendatava ülemtõkkest lahutatava alamtõkke, sest vahe on seda suurem, mida suurem on vähendatav ja mida väiksem on lahutatav:

$$\begin{array}{r} 22,85 \\ - 1,2475 \\ \hline 21,6025. \end{array}$$

Seega teame otsitavast vahest x järgmist:

$$21,5015 < x < 21,6025.$$

Võrdleme leitud vahet tema alam- ja ülemtõkkega:

21 552
21,5015
21,6025

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama kümneliste ning üks ja sama üheliste number (2, 1). Küm-nendike numbris on erinevusi: 5, 5 ja 6. Vastavalt arvutamise tulemuste kirjutamise kokkuleppele peame ümardama:

$$21,552 \approx 21,6.$$

Tulemusest saame teha sama järelduse, mis liitmise puhulgi:

ligikaudsete arvude vahe tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis on teada nii vähendatavas kui ka lahutatavas.

516. Tee arvutamata kindlaks, mitu numbrit saame koma järel vastavalt vahe ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude vahes:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| a) 276,1 — 69,8943; | d) 0,75958 — 0,6; |
| b) 97,8 — 0,8594; | e) 7,8004 — 2,23; |
| c) 784,4908 — 35,3; | f) 3,5 — 0,789. |

517. Ümarda järgmised vahed vastavalt vahe ümardamise eeskirjale:

- a) $10,7 - 0,532 = 10,168 \approx \dots$
b) $15,348 - 8,3 = 7,048 \approx \dots$
c) $2 - 1,221 = 0,779 \approx \dots$

518. Teosta järgmised ligikaudsete arvude lahutamised ning ümarda vahe:

- | | | |
|---------------|---------------|-----------------|
| 1) 9 — 0,85; | 2) 81 — 0,09; | 3) 5,6 — 2,367; |
| 17 — 0,24; | 48 — 28,58; | 17,993 — 8,4; |
| 15 — 13,351; | 30 — 18,86; | 29,72 — 8,643; |
| 500 — 14,275; | 8,65 — 7. | 4,153 — 2,9. |

519. Leia järgmiste ligikaudsete arvude vahe:

- | | | |
|---------------|-----------------|---------------|
| 1) 377 — 2,35 | 2) 8,1 — 5,906 | 3) 74,38 — 27 |
| 58,41 — 55,7 | 738 — 69,465 | 115,25 — 49 |
| 12 — 1,18 | 895,1 — 386,472 | 4,195 — 2,5 |
| 684,42 — 36,8 | 85 — 68,642 | 98 — 10,75 |
| 4,7 — 0,522 | 0,2 — 0,057 | 60 — 21,40. |

520. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbriga koma järel ning arvuta alltoodud arvude vahe.

a) $\frac{9}{10} - \frac{1}{15}$

d) $\frac{11}{18} - \frac{11}{90}$

b) $\frac{15}{27} - \frac{1}{18}$

e) $\frac{13}{85} - \frac{11}{17}$

c) $\frac{25}{27} - \frac{10}{21}$

f) $\frac{17}{70} - \frac{11}{35}$

Kontrolli saadud tulemuste õigsust, teostades tehted harilike murdudega ning teisendades vahe kümnendmurruks.

521. Kahe ligikaudse arvu summa on 120,4. Üks liidetavatest on 50,98. Leia teine liidetav.

522. Auto, sõites kiirusega 68,7 km tunnis, möödub teisest samas suunas sõitvast autost, mille kiirus on 49 km. Kui kaugel olid need autod üks tund enne kohtumist?

523. Sulatati 64,85 kg vaske, 32,755 kg tsinki ja 2,1 kg tina. Metalli kadu sulatamisel oli 2215 g. Leia saadud sulami kaal.

524. Linnas A on ligikaudu 175 000 elanikku, linnas B aga 89 500 elanikku. Kui palju on linnas A elanikke enam?

525. Sovhoosi metsas kasvas ligikaudu 5200 puud. Aasta jooksul raiuti maha ligikaudu 860 puud. Mitu puud on veel sovhoosi metsas?

526. Kütteladu sai 15 500 m³ puid. Sellest on laos järel 210 m³. Kui palju puid on müüdnud?

527. Pudel koos petrooleumiga kaalub 1,42 kg, pudel kaalub 0,543 kg. Kui palju kaalub pudelis olev petrooleum?

528. Korterite põrandapindala on 79,43 m², sellest on ahjude all 5,325 m². Kui palju on vaba põrandapinda?

529. Mensuuris on 62,0 cm³ vett. Mensuuri lasti tinatükk, mille järel veepind tõusis 94,35 cm³-ni. Kui suur on tinatüki ruumala?

530. Kauba brutokaal on 1,23 t, taarakaal 0,150 t. Kui palju kaalub kaup?

531. Leia järgmised vahed, kui üks arvudest on ligikaudne ja teine täpne arv (täpne arv on antud jämedas kirjas):

a) 0,96 — 0,5; b) 3,2 — 0,12; a) 3,27 — 0,2;

d) 8,065 — 0,0035.

Märkus. Täpset arvu vahe ümardamisel ei arvestata (vt. ül. nr. 500).

LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE

532. Arvutame korrutise $7 \cdot 0,052$, milles esimene tegur on täpne ja teine ligikaudne arv, ning küsime, missuguse järguni tuleb tulemus ümardada.

Korrutades antud arvud, saame

$$7 \cdot 0,052 = 0,364.$$

Et teise teguri vea ülemmäär on 0,005, siis võib arvutatud korrutis õigest tulemusest erineda juba kuni

$$7 \cdot 0,005 = 0,0035$$

võrra. Seega ei ole arvutatud korrutise viimasel järgunumbril 4 mingit mõtet ja me ümardame korrutise sajandikeni:

$$7 \cdot 0,052 = 0,364.$$

533. Eelmises ülesandes toodud näite eeskujul saaksime:

$$70 \cdot 0,052 = 3,6;$$

$$0,7 \cdot 0,052 = 0,036;$$

$$7 \cdot 0,0052 = 0,036;$$

$$0,07 \cdot 5200 = 360.$$

Selleks, et sõnastada siit silmnähtavat ümardamisreeglit, jätame nii ligikaudses teguris (0,052; 0,0052; 5200) kui ka korrutises (0,36; 3,6; 0,036; 360) koma ja nullid arvu kirjutise alguses ja lõpus ära ning vaatleme siis saadud numbrite rühmi 52 ja 36. Esimest numbrite rühma (52) nimetatakse teguri tüveks ja teist (36) korrutise tüveks. Arvu tüves esinevad numbrid on arvu tüvenumbrid.

Ligikaudse täisarvu tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui arvu lõpus olevad nullid ära jätame. Ligikaudse kümnendmurru tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui koma ja arvu ees olevad nullid ära jätame.

Näiteid.

a) 5200, tüvi 52;

b) 360, tüvi 36;

c) 0,07, tüvi 7;

d) 0,070, tüvi 70.

Nagu näeme, on eespool saadud korrutistes niisama palju tüvenumbreid, kui palju neid on ligikaudses teguris.

*Ligikaudsed arvud
0,7 ja 0,70
ei tähenda
ühte ja sama!*

Joon. 71.

Seega:

täpse arvu ja ligikaudse arvu korrutis tuleb ümardada nii, et korrutises oleks niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses teguris.

534. Kirjuta järgmiste ligikaudsete arvude tüved:

250; 7500; 0,07; 1,005; 0,070; 0,3009; 3,090.

Märkus. Kümnennumru lõpus olevad nullid kuuluvad tüvenumbrite hulka.

535. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes: 24; 356; 502; 7004; 20 604; 250; 3100; 2050; 302 400; 5 003 000?

536. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises, kümneteni ümaratud ligikaudses arvus: 230; 480; 1040; 20 050; 11 700?

Näide. 390 → 2 tüvenumbrit;

107 000 → 5 tüvenumbrit.

537. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises ligikaudses arvus: 8,5; 0,42; 0,703; 6,05; 1,003; 201,03; 0,03; 0,004; 2,60; 8,240; 8,040; 0,070; 0,2080; 0,300; 2,500; 603,100; 2004,50?

Näide. 0,005 → 1 tüvenumber;

2,050 → 4 tüvenumbrit;

0,700 → 3 tüvenumbrit.

538. Missugune erinevus on kirjutustel: «temperatuur on 37°» ja «temperatuur on 37,0°»?

539. Arvuta võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkuse mõõtmisel saadi 0,73 m.

540. Arvuta ruudu ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 5,8 dm.

541. Arvuta korrapärase kuusnurga übermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 13,6 cm.

542. Arvuta järgmised korrutised, kui esimene tegur on täpne arv ja teine ligikaudne arv.

- a) $8 \cdot 0,0042$; c) $98 \cdot 1,37$; e) $59 \cdot 0,20$;
12 · 0,751; d) $60 \cdot 0,68$; f) $75 \cdot 9800$.

Näide. $31 \cdot 0,60 = 18,60 \approx 19$;
 $22 \cdot 970 = 21\,340 \approx 21\,000$.

543. Klassi pikkus on 11,3 m ja laius 8,4 m. Kui suur on klassi põranda pindala?

Pindala leidmiseks tuleb pikkust ja laiust väljendavad arvud korrutada:

$$\begin{array}{r} \times \quad 11,3 \\ \quad 8,4 \\ \hline \quad 452 \\ \quad 904 \\ \hline 94,92 \end{array}$$

Klassi pikkust ja laiust väljendavad arvud on ligikaudsed (miks?), mistõttu korrutis tuleb ümardada. Küsime, missuguse järguni tuleb seda teha?

Antud arvude alamtõkked on 12,25 ja 8,35, ülemtõkked on 12,35 ja 8,45.

Korrutis omandab väikseima väärtuse, kui tegurid on võimalikult väikesed. Leiame korrutise alamtõkke, korrutades tegurite alamtõkked:

$$\begin{array}{r} \times \quad 11,25 \\ \quad 8,35 \\ \hline \quad 5625 \\ \quad 3375 \\ \quad 9000 \\ \hline 93,9375 \end{array}$$

Nüüd korrutame tegurite ülemtõkked, et leida korrutise ülemtõkke.

$$\begin{array}{r} \times \quad 11,35 \\ \quad 8,45 \\ \hline \quad 5675 \\ \quad 4540 \\ \quad 9080 \\ \hline 95,9075 \end{array}$$

Kõrvutame nüüd kõik kolm korrutist.

Antud arvude korrutis: 94,92

Alamtõkete korrutis: 93,9375

Ülemtõkete korrutis: 95,9075

Igas korrutises on kümnete number üks ja sama (9). Üheliste arv aga on juba erinev: 4, 3, 5. Järelikult tuleb korrutis ümardada ühtedeni. Seega $94,92 \approx 95$.

Mitu tüvenumbrit on esimeses teguris? teises teguris? Mitu tüvenumbrit on korrutises?

Millise järelduse võid teha?

Kahe ligikaudse arvu korrutist tuleb ümardada nii, et korrutises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga teguris.

545. Määra arvutamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude korrutistes:

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|-------------------------|
| a) $7 \cdot 3,587$; | d) $121 \cdot 1,0042$; | g) $0,57 \cdot 0,305$; |
| b) $22 \cdot 5,87$; | e) $1308 \cdot 0,00561$; | h) $5,8 \cdot 0,001$; |
| c) $1,008 \cdot 81$; | f) $44 \cdot 0,207$; | i) $0,3 \cdot 7,84$. |

546. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude korrutised vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale:

- | | |
|--|---|
| a) $0,8 \cdot 16,9 = 13,52 \approx \dots$ | d) $366 \cdot 90 = 32\,940 \approx \dots$ |
| b) $7,2 \cdot 0,09 = 0,0648 \approx \dots$ | e) $0,79 \cdot 6,41 = 5,0639 \approx \dots$ |
| c) $24,0 \cdot 481 = 119\,769 \approx \dots$ | f) $0,03 \cdot 0,07 = 0,0021 \approx \dots$ |

547. Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutised:

- | | | |
|--------------------|----------------------|------------------------|
| 1) $15 \cdot 2,34$ | 2) $15,2 \cdot 0,03$ | 3) $17,007 \cdot 4,08$ |
| $1,6 \cdot 0,25$ | $0,07 \cdot 15,25$ | $5,08 \cdot 0,0149$ |
| $7,5 \cdot 0,014$ | $0,156 \cdot 1,7$ | $6,8 \cdot 0,93$ |
| $1,01 \cdot 2,04$ | $16,15 \cdot 0,08$ | $0,991 \cdot 0,89$ |
| $0,09 \cdot 3,07$ | $23 \cdot 4,08$ | $6,07 \cdot 0,305$ |

548. Leia ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki pikkus on 1,72 km ja laius 0,34 km.

549. Laoplatsile veeti 16 250 m³ tammepalke. Arvuta palkide kaal, kui üks kuupmeeter palke kaalub 0,85 tonni.

550. Kui palju kaalub 17,5 m³ kivisütt, kui 1 m³ kivisütt kaalub 1,3 tonni?

551. Leia korrapärase kuusnurga übermõõt, kui kuusnurga pikkuseks saadi mõõtmisel 12,24 cm.

Mitu tüvenumbrit tuleb võtta siin korrutises? Miks?

552. Teosta järgmised korrutamised (üks tegureist on ligikaudne arv; teine — täpne arv, mis on trükitud jämedas kirjas).

- 1) $8 \cdot 6,57$; 3) $0,283 \cdot 734$; 5) $90 \cdot 375$;
2) $0,85 \cdot 375$; 4) $70 \cdot 4,8$; 6) $7 \cdot 12,8$.

553. Leia korrutised:

- 1) $5\frac{1}{9} \cdot 2\frac{4}{7}$; 2) $\frac{8}{11} \cdot \frac{11}{18}$ ja 3) $5\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{11}$

kahel viisil: a) teisenda iga harilik murd kümnendmurruks ning ümarda tulemust; b) leia korrutis harilike murdude korrutamise teel ning teisenda tulemus kümnendmurruks.

Harilike murdude teisendamisel kümnendmurruks ümarda arvud esimeses ülesandes kümnendikeni, teises sajandikeni ja kolmandas tuhandikeni.

Võrdle mõlemal teel saadud korrutisi.

554. Kolhoosniku perekond töötas aasta jooksul välja 731 normipäeva. Kui palju teravilja sai see perekond, kui iga normipäeva kohta arvestati 8,2 kg?

555. Sovhoosis on nisu all 1250 ha. Kui palju nisu saab sovhoo, kui loodetav saak on 18,5 ts hektarilt?

556. Töölise brigaad töötas maantee parandamisel 132 tundi, korrastades keskmiselt 24 m maanteed tunnis. Mitu meetrit maanteed parandas see brigaad?

557. Põranda värvimiseks kulub 0,142 kg värvi ruutmeetrile. Kui palju värvi on vaja 43 m^2 suuruse põranda värvimiseks?

558. Leia $18,5 \text{ m}^3$ kivisöe kaal, kui 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 t.

559. Kui palju kaalub 12,87 m pikkune raudtala, mille jooksva meetri kaal on 60,4 kg?

560. Arvuta oma klassi põranda pindala.

561. Arvuta oma korteri põranda pindala.

562. Veoauto koormasse mahub 1600 kg turvast. Kui palju turvast tuuakse kohale 19 koormaga?

563. Kaupluses oli 23 tükki vahariiet, igas tükis 23,0 m. Kui palju vahariiet oli selles kaupluses kokku?

564. Kui palju kaaluvad 36 kaubavagunit, kui ühe vaguni keskmine kaal koos kaubaga on 23,76 t?

565. Katusepleki tahvel kaalub 4,52 kg. Kui palju kaalub 50 sellist tahvlit?

566. Kahe punkti vaheline kaugus plaanil on 8,3 cm. Leia nende punktide vaheline tõeline kaugus, kui plaani mõõt on 1 : 250.

567. Maatüki pindala plaani järgi on 3,3 cm². Leia selle maatüki tõeline pindala, kui 1 cm plaanil kujutab 50 m.

568. Pudel kaalub 0,0475 kg. Kui palju kaaluvad 120 sellist pudelit?

LIGIKAUDSETE ARVUDE JAGAMINE.

569. *Olgu vaja jagada ligikaudne arv 72,4 ligikaudse arvuga 0,13.*

$$72,4 : 0,13 = 7240 : 13 = 556,923 \dots$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \underline{90} \\ - \underline{120} \\ 30 \\ \underline{40} \\ 1 \end{array}$$

Kuna siin jagamine nähtavasti ei lõpe, siis on väga oluline teada, kui kaugele jagamist jätkata.

Küsimusele vastamiseks leiame otsitava jagatise alam- ja ülemtõkke.

Jagatis omandab väikseima väärtuse siis, kui jagatav on võimalikult väike ja jagaja võimalikult suur. Seetõttu jagatise alamtõkkeks on jagatava alamtõkke ja jagaja ülemtõkke jagatis:

$$72,35 : 0,135 = 535,9 \dots$$

Jagatise ülemtõkkeks on jagatava ülemtõkke ja jagaja alamtõkke jagatis:

$$72,45 : 0,125 = 595,6.$$

Võrdleme nüüd antud ligikaudsete arvude jagatist tema alam- ja ülemtõkkega.

Ligikaudsete arvude jagatis: 556,923 ...

Jagatise alamtõkke: 535,9 ...

Jagatise ülemtõkke: 995,6.

Näeme, et jagatistes on ühesugused ainult sajaliste numbrid (5). Kümneliste number on igas jagatises juba isesugune: 5, 3, 9. Seega tuleb jagatis ümardada kümneteni:

$$72,4 : 0,13 = 556,923 \dots \approx 560.$$

Mitu tüvenumbrit on jagatavas? Mitu jagajas? Mitme tüvenumbriga saime jagatise?

570. Eeltoodud näide kinnitab, et ligikaudsete arvude jagatise ümardamisel kehtib sama reegel, mis nende arvude korrutise ümardamiselgi:

ligikaudsete arvude jagatis tuleb ümardada nii, et jagatises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on väiksema tüvenumbrite arvuga andmes.

571. Kontrolli selle reegli õigsust, jagades eelmise näite eeskujul ligikaudsed arvud $4,3 : 5,73$, siis esimese arvu alamtökke teise arvu ülemtökkega ja lõpuks esimese arvu ülemtökke teise arvu alamtökkega. Mitu kohta tuleb jagatises säilitada?

572. Määra ilma jagamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale järgmistes ligikaudsete arvude jagatistes:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $75 : 8$; | d) $9,6 : 0,08$; | g) $55,23 : 14$; |
| b) $6,18 : 0,0013$; | e) $0,3825 : 0,581$; | h) $628,125 : 33,5$; |
| c) $90,3062 : 30,1$; | f) $1,33 : 0,6$; | i) $4,75 : 6$. |

573. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude jagatised vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale.

- | | |
|---|--|
| a) $135 : 1,9 = 71,05 \dots \approx \dots$ | d) $72,5 : 11 = 6,59 \dots \approx \dots$ |
| b) $143,8 : 0,15 = 958,6 \dots \approx \dots$ | e) $57,3 : 0,13 = 440,7 \dots \approx \dots$ |
| c) $8,5 : 9 = 0,944 \dots \approx \dots$ | f) $0,2 : 65 = 0,0307 \dots \approx \dots$ |

574. Leia järgmised ligikaudsete arvude jagatised:

- | | | | |
|------------------|-----------------|---------------|------------------|
| 1) $15,56 : 6,7$ | 2) $4,28 : 0,7$ | 3) $822 : 76$ | 4) $72,4 : 0,13$ |
| $18,63 : 0,8$ | $4,8 : 0,284$ | $8 : 34$ | $0,12 : 37,8$ |
| $32,4 : 23,3$ | $0,036 : 2,7$ | $384 : 287$ | $341,3 : 12$ |
| $382,6 : 36,8$ | $7,8 : 3,62$ | $362 : 236$ | $5 : 22,5$ |

575. Ristküliku pindala on $15,12 \text{ cm}^2$. Ristküliku ühe külje pikkus on $3,6 \text{ cm}$. Leia teise külje pikkus.

576. Toa põranda pindala on $69,2 \text{ m}^2$. Kui suur peab olema selle toa kõrgus, et toas oleks 250 m^3 õhku?

577. Ristkülikukujuliselt põllult, mille pindala on 54 ha, saadi 834 ts nisu. Kui suur on keskmine nisusaak hektarilt?

578. 32,7 m pikkune traat on vaja jaotada 16 võrdseks tükiks. Leia iga tüki pikkus.

Siin arv 32,7 m on ligikaudne arv, 16 aga täpne arv. Kuna $16 = 16,0 = 16,00 = 16,000$ jne., s. t. täpsel arvul võime kujutleda ükskõik kui mitu tüvenumbrit, siis määratakse jagatise tüvenumbrite arv ligikaudse andme tüvenumbrite arvu järgi.

$$32,7 \text{ m} : 16 = 2,044 \text{ m} \approx 2,04 \text{ m}.$$

579. Teosta järgmised jagamised, kus üks arvudest on täpne arv (trükitud jämeda kirjaga).

1) 2,6 : 165	2) 573 : 4,3	3) 900 : 96	4) 1,05 : 12
27 : 2,37	435 : 13	37,4 : 19	0,1 : 26
23,45 : 3	0,81 : 8	72 : 0,13	12 : 37,8

580. Kahe linna vahemaa on 955 km. Mitme tunniga läbib selle vahemaa rong, kui selle keskmine kiirus on 52 km tunnis?

581. 83 ha suuruselt maa-alalt saadi 1430 t kartuleid. Kui suur on keskmine kartulisaak hektarilt?

582. Mitu vagunit on vaja 7500 t kauba veoks, kui kasutada 17 t kandejõuga vaguneid?

583. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 19,45 ha. Selle maatüki laius on 230 m. Leia maatüki pikkus.

584. 1442 km raudteeliini ehitamine maksis 179 000 000 rubla. Leia raudtee ühe kilomeetri ehitamise hind.

585. Sovhoos eraldas 250 ha suuruse põllu väetamiseks 63,45 t mineraalväetist. Kui palju mineraalväetist tuleb külvata 1 hektarile?

586. Kolhoosnik sai töö eest 1342 kg teravilja. Mitu normipäeva töötas see kolhoosnik, kui iga normipäeva kohta arvestati 5,61 kg teravilja?

587. Rull traati kaalub 38,54 kg. Mitu meetrit traati on selles rullis, kui 1 m traati kaalub 0,528 kg?

588. Kui suur on tsemenditünni ruumala, kui tünn mahutab 0,106 t tsementi, 1 m³ tsementi kaalub aga 1,4 t?

589. Naftaveo tsistern mahutab 38,8 t naftat. Mitu sellist tsisterni on vaja 2138 t nafta veoks?

590. 1 m³ seatina kaalub 11,3 g, 1 cm³ inglistina aga 7,3 g. Mitu korda on seatina inglistinast raskem?

591. Klassi ruumala on $235,34 \text{ m}^3$. Klassi põranda pindala on $48,3 \text{ m}^2$. Leia klassi kõrgus.

592. Heli levimiskiirus õhus on $333,3 \text{ m}$ sekundis. Kui kaua aja pärast on kuulda müristamist, kui välku löi 8690 m kaugusel?

593. 94-st võrdse pikkusega veektorust saadi 762 m pikkune torustik. Kui pikk on iga toru?

594. Koolimaja ruumala on $24\,986 \text{ m}^3$. Selles koolis õpib ligikaudu 1100 õpilast. Mitu kuupmeetrit ehituse mahust tuleb iga õpilase kohta?

595. 25 ühesugust polti kaaluvad $7,82 \text{ kg}$. Kui raske on iga polt?

596. 50 ühesugust raamatut kaaluvad $21,32 \text{ kg}$. Kui raske on iga raamat?

ÜLESANDEID.

597. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks. Tulemused arvuta ümardatult kümnendikeni.

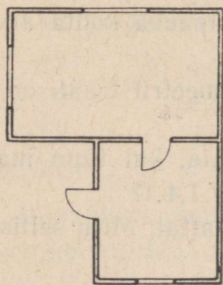
$$\text{a) } \frac{3\frac{5}{6} + 1\frac{4}{9} - 2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}};$$

$$\text{c) } \frac{(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}};$$

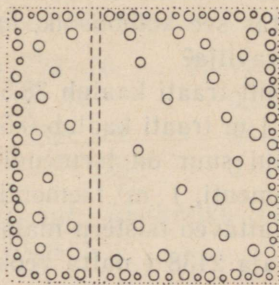
$$\text{b) } \frac{4\frac{4}{5} + 3\frac{7}{10} - 2\frac{3}{4}}{2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2}};$$

$$\text{d) } \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) : 1\frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{9}}.$$

598. Kui palju kaalub kuusepuust palk, mille ristlõige on ristkülik mõõtmetega $168 \text{ mm} \times 113 \text{ mm}$, palgi pikkus aga $4,29 \text{ m}$ ja kui 1 dm^3 kuusepuud kaalub $0,5 \text{ kg}$?



Joon. 72.



Joon. 73.

599. Kui palju tuleb maksta plaanil (joon. 72) näidatud kahe toa põranda värvimise eest, kui 1 m² värvimine maksab 1,85 rubla? Mõõt 1 : 250.

600. Leia suhkrupeedi saak ristkülikukujuliselt põllult, mille pikkus plaanil (mõõdusuhe 1 : 10 000) on 2,5 cm ja laius 1,2 cm, kui suhkrupeedi saak hektarilt on 550 ts.

601. Ruudukujulist metsalanki (joon. 73) läbib tee, mis jaotab selle langi kaheks mittevõrdseks osaks. Langi üks osa on teisest 526,5 a võrra suurem. Kui see tee oleks aetud 40,5 m võrra paremale, siis oleks ta langi täpselt poolitanud.

Kui suur on selle metsalangi pindala?

602. Tühi klaaskolb kaalub 24,8 g, veega täidetult 74,6 g, petrooleumiga täidetult aga 64,9 g. Arvuta nende andmete põhjal, kui palju kaalub 1 cm³ petrooleumi.

603. Ristkülikukujuline tükk plekki kaalub 149,3 g. Selle plekitüki pikkus on 32,3 cm ja laius 12,7 cm. Mõõtmisel saadi selle plekitüki paksuseks $\frac{1}{2}$ mm. Leia plekitüki paksus arvutamise teel ja võrdle seda mõõtmise tulemusega, kui raua erikaal on 7,8.

604. Ristkülikukujuline vaskplaat kaeti ühelt küljelt niklikorraga. Enne nikeldamist kaalus see plaat 48,7 g, pärast nikeldamist aga 49,5 g. Plaadi pikkus on 11,3 cm ja laius 6,5 cm. Nikli erikaal on 8,9. Leia niklikihi paksus.

605. Vundamendikaevise pikkus on 7,3 m, laius 5,5 m ja sügavus 3,5 m. Mitu autokoormat mulda tuleb sealt ära vedada, kui on teada, et 1 m³ mulda kaalub 2,13 t ja auto kandejõud on 2,5 tonni?

606. Aia pikkus on 67,5 m ja laius 56,25 m. Mitu pange vett on vaja selle aia kastmiseks, kui maapinda tahetakse niisutada niisama tugevasti, nagu seda tegi vihmahoog, mis sadememõõtja järgi andis veekihi paksuseks 5,25 mm?

Pang mahutab 12,3 liitrit vett.

607. Tornikiõige kõrgemal asuvast aknast allavisatud kivi jõudis maapinnani 4 sekundiga. On teada, et vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgmise sekundiga 9,8 m võrra rohkem kui eelmises sekundis.

Leia selle tornikiõrgus, kui torni tipuni on viimasest aknast veel 4 m.

608. Teosta tehted ligikaudsete arvudega:

- a) $(2500 + 46,12 - 11\,220 : 38) : 8$.
b) $0,28 : (0,64 \cdot 0,843 + 0,78 \cdot 0,8 - 26,078 : 32,6)$.
c) $(2,17 \cdot 4,3 + 3,07 : 0,3 - 7,8 \cdot 1,2) \cdot 0,8$.
d) $3,58 : 12 - 0,28) \cdot 8 + 0,028$.
e) $(5,05 : 200) \cdot 63 - 0,4725$.

Märkus. Jämedas kirjas on antud täpsed arvud.

609. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks sajandikeni.

a) $\frac{(7\frac{5}{6} - 6\frac{7}{8}) \cdot 13\frac{1}{3}}{3\frac{11}{12}};$

b) $\frac{7\frac{1}{3} + 8\frac{1}{6}}{5\frac{1}{2} - 1\frac{7}{12}} \cdot 10\frac{3}{7}$.

610. Lennuk, mille kiirus on 270 km tunnis, peab lendama punktist A punkti B, mis asub lähtekohast põhja suunas 1000 km kaugusel, ning siis uuesti tagasi punkti A.

a) Leia, kui kaua kestab lend tulevaimse ilmaga.

b) Kui kaua kestab lend lõunatuule puhul, mis puhub kiirusega 37,5 km tunnis?

611. Risttahukakujulise metallitüki pikkus on 0,14 m, laius 0,4 dm ja paksus 2 cm. See metallitükk kaalub 873,6 g. Teise samast metallist risttahukakujulise metallitüki mõõtmed on 0,09 m \times 0,8 dm \times 0,2 dm. Kui palju kaalub teine metallitükk?

612. Viljapeade noppimine pärast lõikust annab täiendavalt miljoneid tsentnereid teravilja. Kooliõpilased korjasid 125 ha suuruselt nisupõllult viljapäid, kusjuures igalt ruutmeetritl leiti neid keskmiselt 4. Kui palju teravilja saadi õpilaste poolt kogutud viljapeadest, kui igas viljapeas olevate terade kaaluks arvata 1 g?

613. Toa pikkus on 8,4 m, laius 6,5 m ja kõrgus 4 m. Sellel toal on 3 akent, kõrgusega 1,64 m ja laiusega 1,2 m, ja kaks ust, mille kõrgus on 2 m 20 cm ja laius 1 m. Mitu rulli tapeeti on vaja osta selle toa tapeetimiseks, kui tapeedirulli laius on 50 cm ja tapeeti on rullis 12 m, kui kadudeks arvestada 10%?

614. Viljasalve pikkus on 12 m ja laius 8 m. Vilja sügavus salves on 1,5 m. Selleks et teada saada, kui palju kaalub salves olev vili, võeti kast sisemiste mõõtmetega 0,5 m \times 0,5 m \times 0,4 m, täideti see ääreni viljaga ning kaaluti. Kastitais teri kaalus 80 kg.

Kui palju kaalub salves olev vili?

615. Katuse katmiseks kasutati riskülikukujulisi katusekive, mille pikkus oli 25 cm ja laius 17 cm. Katus koosneb kahest riskülikukujulisest osast, kummagi pikkus on 14 m ja laius 6,25 m. Kui palju kive on vaja selle katuse katmiseks, kui on teada, et katusekivide osaliselt üksteise peale asetamisel katab iga kivi katust 40% ulatuses kivi pindalast.

616. Nõu koos veega kaalus 68,4 kg. Kui sellest nõust kallati ära 78% seal olevast veest, siis kaalus nõu koos ülejäänud veega 28,3 kg. Kui palju kaalub tühi nõu?

617. Tühi nõu kaalub 15,2 g, elavhõbedaga täidetult aga 263 g. Leia selle nõu ruumala, kui on teada, et 1 cm³ elavhõbedat kaalub 13,6 g.

618. Kolhoosi 42 ha suuruselt nisupõllult saadi 15,2 hektarilt keskmiseks saagiks 20,3 ts hektarilt, ülejäänud osalt 13,1 ts hektarilt. Kui suur oli keskmine nisusaak selle põllu igalt hektarilt?

619. Rong koosneb vedurist koos tendriga, mis kokku kaaluvad 76 t, ja 35-st kaubavagunist. Iga vagun koos kaubaga kaalub keskmiselt 23 t. Rong kulutab 1 km pikkuse tee läbimiseks rongikaalu iga tonni kohta 32 g kivisütt. Kui palju kivisütt peab vedur peale võtma sõiduks Tallinnast Tartusse, mille vahemaa on ümmarguselt 200 km?

620. Metsatukas kasvab 900 puud, neist on 300 männid ja ülejäänud kased. Kogu metsatuka puidu juurdekasv aastas on 2,3 m³. Iga mäni juurdekasv aastas moodustab 0,003 m³. Arvutada iga kase juurdekasv aastas.

621. Pirita-Kose-Kloostrimetsa võidusõidu ringraja pikkus on 6,7554 km. Sõitja läbis selle 3 minuti 27 sekundiga. Arvuta keskmise kiiruse alamtõke ja ülemtõke. Kas saab uskuda võistluse korraldajate teadet, et sõitja keskmine kiirus oli 117,485 km tunnis?

622. Kui suure täpsusega peaks olema mõõdetud võidusõidu ringraja pikkus ja aeg, et saada tulemust 118,631 km/t, kusjuures sõiduaeg on 3 minutit 25 sekundit?

KORDAMISEKS.

623. Kuidas leida ligikaudsete arvude

a) summa ülemtõket? alamtõket?

- b) vahe ülemtõket? alamtõket?
- c) korrutise ülemtõket? alamtõket?
- d) jagatise ülemtõket? alamtõket?

624. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude summat ja vahet?

625. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

SISUKORD.

1. Hulkliikmete korrutamine ja jagamine.

Kahe arvu summa ja vahe korrutis	3
Kahe arvu summa ruut	5
Kahe arvu vahe ruut	7
Kahe arvu summa kuup	9
Kahe arvu vahe kuup	11
Kahe arvu kuupide summa	11
Kahe arvu kuupide vahe	13
Kordamiseks	14
Hulkliikmete jagamine	16
Kordamiseks	19

2. Algebraalne murd.

Uksliikmete SÜT ja VÜK	22
Algebraalse murru mõiste	25
Murru põhiomadus	26
Murru laiendamine	
Murru taandamine	28
Murdude ühenimelisteks teisendamine	29
Murdude liitmine ja lahutamine	31
Murdude korrutamine	39
Murru astendamine	42
Murdude jagamine	43
Kordamiseks	46

3. Hulkliikmete lahutamine tegureiks.

Hulkliikmete lahutamine tegureiks	49
Hulkliikmete lahutamine tegureiks valemite kasutamisega	52
Hulkliikmete lahutamine tegureiks liikmete rühmitamise võttega	55
Hulkliikmete lahutamine tegureiks mitme võttega	56
Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmine	59
Hulkliikmete väikseima ühiskordse leidmine	60
Hulkliikmeliste liikmete murrud	61
Murdude taandamine	61

Murdude laiendamine	63
Murdude ühenimelisteks teisendamise	64
Murdude liitmine ja lahutamine	65
Murdude korrutamine	69
Murdude jagamine	71
Kõik tehted murdudega	73
Kordamiseks	75

4. Sirgete lõikumine ja paralleelsus.

Matemaatilised laused	77
Kõrvnurgad	81
Võrrand	82
Tippnurgad	83
Kahe sirge lõikamine sirgega	84
Kahe sirge paralleelsus	85
Kahe paralleelse sirge lõikamine sirgega	89
Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad	90
Vastavalt ristuvate haaradega nurgad	91
Kordamiseks	92

5. Kolmnurkade ja nelinurkade tähtsamad omadused.

Kolmnurga nurkade summa	94
Kumer hulknurk	96
Kumera hulknurga nurkade summa	97
Kolmnurga kahe külje summa ja vahe võrdlemine kolmanda küljega	98
Seosed kolmnurga külgede ja nurkade vahel	101
Rööpküliku omadused	103
Rööpküliku tunnused	106
Rööpküliku eriliigid	108
Ristküliku omadused	109
Rombi omadused	110
Ruudu omadused	114
Trapets	114
Trapetsi kesklõik	116
Kolmnurga kesklõik	118
Kordamiseks	118

6. Tehted ligikaudsete arvudega.

Arvude ümardamine ja sellest tekkiv viga	120
Arvu alamtõke ja ülemtõke	122
Täpsed ja ligikaudsed arvud	124
Ligikaudsete arvude liitmine	125
Ligikaudsete arvude lahutamine	129
Ligikaudsete arvude korrutamine	132
Ligikaudsete arvude jagamine	137
Ülesandeid	140
Kordamiseks	143

Этverk Элмар Германович
Линц Алфред Юханович
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ VII КЛ.

На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahre
Korrektor S. Kõiv

Ladumisele antud 29. VI 1959. Trükkimisele antud
29. VII 1959. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 9,25.
Arvutuspoognaid 6,68. Trükiarv 2500. MB-07048. Tellimise nr. 1007. Hans Heidemanni nim. trükkikoda, Tartu, Olikooli 17/19.

Hind rubl. 1.40

Rbl. 1.40

ARH (A)
A-22643

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00480629 7