

RUUMI ALGÕPETUSE

SÜSTEMAATILINE KURSUS

7

BLUMI SIC OPUS  
SICUTI V. H. H. H.

2245

NATHING-PERLI

# RUUMI ALGÕPETUSE

(ELEMENTAARSE GEOMEETRIA)

## SÜSTEMAATILINE KURSUS

5542

.....  
INE ANNE  
.....

TALLINNAS, 1919

EESTIMAA KOOLIÕPETAJATE VASTASTIKKU ABIANDMISE SELTSI  
KIRJASTUS

2  
Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu  
55981

A 2990 II

1 15641314

## Eessõna.

Selle õpperaamatu aluseks on võetud A. Nathing'i „Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Real-schulen“, mille tõlkimiseks ja parandamiseks härra Nathing mulle luba andis juba 1904 aastal. Ümber-töötamise juures on raamat aga teistsuguse iseloomu omandanud kui see hra Nathingi raamatul on. Juurde on lisatud:

- 1) sümmeetria mõiste, mis võimalikult täieli-kult ära on kasutatud, nimelt:
  - a) paralleeljoonte peateoreemi tõendakse süm-meetria abil;
  - b) kolmnurkade ja nelinurkade vaatlemisel on ka nende sümmeetriat tähele pandud;
  - c) kohe nelinurkade järele vaadeldakse korra-päraseid paljunurki ja nimelt nende süm-meetriat;
  - d) pärast seda, kui korrapärastes paljunur-kades sümmeetria mõiste esimesele kohale on tõusnud, kui sümmeetria telgede arv ja tsentraalse sümmeetria järk nii suureks kui tahes on kasvanud, muutuvad sõõris need arvud otsatuks, sellega sidet luues paljunurkade ja sõõri vahel ja nagu juba selle peale tähendades, et sõõri peale võib kui korrapäraste paljunurkade piiri peale vaadata.

Sellega kaob sümmeetria mõiste, kui täiesti tuttav, esimeselt kohalt. Me tarvitame teda veel ainult lõpu poole kahe sõõri vastastikkust seisandit vaadeldes.

- 2) projektsiooni mõiste, ja õige varakult, ja tema peal põhjenevad trigonomeetria suuruste mõisted;
- 3) funktsiooni mõiste ja tasapinnaline trigonomeetria, sest just trigonomeetriliste suuruste abil on kerge funktsiooni mõistet selgitada;
- 4) lõpmata-väikeste suuruste ja piiride teooria võimalikult täielt, et seda kergemini ja selgemini põhjendatult välja arvata ringi pikkust ja sõõri pinda, püramiidi ja ümmarguste kehade ruumisuurust (kantsisu).

Kooli tarvidused ei luba mitte alati õppeainet valjult-süsteemaatiliselt korraldada. Mõnikord, ehk küll harva ja ainult kujundamise (ehitamise) ülesannete juures, on tarvis olnud dogmaatiliselt toimetada, selle peale tähendades, et pärastpoole tuleb tõenduse alla tarvitud võtet õigustav teoreem. Kui seda ei oleks tehtud, siis oleks teoreemide tarvidus vähem selge olnud. Pealegi võiks õpilastele huvitavam olla teoreemisid ülesannetega läbi põimida, kui enne teoreemisid õppida ja alles pärast ülesandeid lahendada. Õpetajale jääb ikkagi võimalus eesolevat materjali läbi võtta ka teises järjekorras kui see raamatus esineb.

Kujundamise ülesanded on peaaegu kõik võetud A. Nathingi õpperaamatust; ainult alguses on mõni W. Lietzmann'i raamatust võetud.

Raamatu ümbertöötamisel olen peale nimetud A. Nathingi raamatu tarvitanud:

David Hilbert — Grundlagen der Geometrie;  
Fredrigo Enriques — Fragen der Elementar-  
geometrie;

Emile Boré'l'i

Hadamard'i

Phillips ja Fischer'i,

Долгушин'и,

Извольскій ja teisi venekeelseid õpperaamatuid.

Lõpuks avaldan oma südamlist tänu härra  
David Rootsmannile tema lahke nõuandmise eest  
ja härra Albert Saabergile, et ta raamatu keelise  
redigeerimise lahkesti enda peale on võtnud.

Tallinnas, 7-al jaanuaril 1919.

*Oskar Perli.*



## Alusmõisted.

**1.** Meie arusaamise järele on **ruum** ilmotsatu: ei ole tal algust, ei lõppu, „ei äärt kusagil ja keskkohast igalpool“ (Giordano Bruno). Ruum laotab ennast laiali kolmes peasihis: 1) alla ja üles, 2) paremale ja pahemale poole, 3) ette ja taha poole.

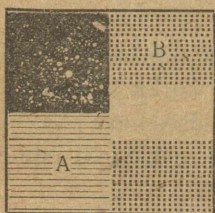
Kõik, mis ruumi tarvitab, nimetame **kehaks**. Kui me kehade peale vaatame matemaatika seisukohast, siis küsime üksnes: 1) missugune kuju on kehal? 2) kui palju ruumi võtab keha oma alla? Teiste omaduste järele meie ei küsi. On meil olemas igalt poolt piiratud ruum, siis võime nende kahe küsimuse peale kosta ja meil on olemas matemaatiline ehk geomeetriline keha. Seepärast: **geomeetriline keha on ruumi igalt poolt piiratud osa. Keha piiri nimetame pinnaks. Pinna piiri nimetame jooneks. Joone piiri nimetame punktiks.**

Näit. Kuubus on kuult poolt piiratud, kuubusel on 6 külge, pinda; kuubuse iga külg on piiratud neiija joonega, kuubuse servadega; iga serv on piiratud kahe punktiga, kuubuse tippudega. Rulli piirideks on 3 pinda — 2 põhi- ja 1 külgpind; iga põhi on piiratud ühe kõverjoonega; tippusid rullil ei ole. Kera piirideks on üksainus pind, millel ei ole servi ega tippusid.

Keha laotab ennast laiali kolmes peasihis: alt üles (ja ümberpöörduvalt), eest tahapoole (ja ümberpöörduvalt), ja pare-

malt poolt pahemale poole (ja ümberpöürdult), kehal on kolm mõedet: pikkus, laius ja kõrgus (sügavus, paksus). Pinnal on kaks mõedet: pikkus ja laius. Näit., kui me järve pinnast räägime, siis mõtleme seda piiri, kus vesi ja õhk kokku puutuvad, seal juures endale ainult kaht mõedet, pikkust ja laiust, ette kujutades. Tahaksime siin kolmandast mõetest kõnelda, siis tõuseksime õhku ehk lähöksime vette, ei jääks aga mitte vee pinnale.

**Joonel on üksainus mõede: pikkus.** Näit. see piir, mis



pinda A lahutab mustast pinnast on joon ja me võime ainult tema pikkusest rääkida. Tahaksime siin laiuusest rääkida, siis peaksime kas musta pinna ehk pinna A peale minema, ei võiks aga mitte ainult piiri peale jääda.

**Punktil ei ole ühtegi mõedet.**

See koht, kus pind B, must ja valge pind kokku jooksevad, on punkt. Ta on nende kolme joone piir, mis musta lahutavad pinnast B, pinda B-d valgest ja valget mustast. Selge on, et siin ei või juttu olla ei pikkusest, laiusest ega kõrgusest.

Punkti tähendakse ära harilikult suure ladinakeelse tähega, näit. punkt A.

Kehad, pinnad, jooned, punktid ja nende kogud kannavad ühist nime: **ruumilised kujutised** (Raumgebilde, пространственные образы).

Ehk küll punkti olla ei või ilma jooneta, millele ta piiriks on, niisama ka joont ilma pinnata ja pinda ilma kehata, oleme siiski sunnitud kergenduseks enesele mõttes ette kujutama üksikuid punkta, üksikuid jooni, pindu ja kehasid.

**2.** Ehk me küll iga joone peal lõpmata palju punkta näidata võime, siiski ei või üksteise järele ritta seatud punktid joont sünnitada, sest punktil ei ole mõedet, pikkust, ja me

kujutame enesele ette punkta vahedega lahutatult\*). Ritta seatud punktid võivad küll mõne joone ära määrata, kuid **joon sünnib ainult siis, kui punkt ruumis edasi liigub, selle liikumise jäljena.** Näit. pliiatsiga paberit mööda vedades saame joone.

Üksteise kõrvale tõmmatud jooned ei või pinda sünnitada\*), ehk nad teda küll ära määrata võivad, sest joontel ei ole laiust ja nende vahele peavad vahed jääma. **Kui aga joon lapiti edasi liigub, siis sünnitab ta pinna.** Näit. noaga leiba ehk õuna lõigates sünnitab noa tera, mis joon on, pinna.

Kujutame endale ette, et mitu pinda on üksteise peale pandud, nii et nende vahel sugugi vaheruumi ei ole, siis ei saa need üksteise peale pandud pinnad keha sünnitada\*), sest pinnal ei ole paksust (kõrgust); **kui aga pind lapiti edasi liigub, siis sünnitab ta keha.** Näit. kui me pehme lume peale astume ja jalg lume sisse vajub, ja kui me jala välja võtame ja jälje pealt kas või paberiga kinni katame, siis on meil olemas igalt poolt piiratud ruum, s. o. geomeetriline keha, mis pinna, meie talla aluse, liikumisest sündis.

**3.** Jooned on **sirged** ja **kõverad**. Igaühele on selge, mis on sirge joon ehk **sirgjoon**. Kui me mõnda rasket asja, näit. hõbedast teelusikat, juuksekarva otsas vabalt rippuda laseme, siis annab see juuksekarv meile mõiste sirgjoonest. Kõverjoon on niisugune joon, millel ühtegi sirget osa ei ole. Vaata lhk. 16 N 7, N 8a, N 8b, N 9.

\*) On olemas ka vaade, mis ütleb: Kui me enesele ette kujutame keha, mille üks mõede nii väheneb, et ta vähemaks saab kui miski suurus; nii väike kui tahes, siis saame **pinna**, millel ainult 2 mõedet on. Kui pinnal üks mõede vähemaks saab kui miski suurus, nii väike kui tahes, siis saame **joone**, millel ainult 1 mõede on. Kui joonel tema pikkus vähemaks saab kui miski suurus, nii väike kui tahes, siis saame **punkti**, millel ühtegi mõedet ei ole. Niisuguse vaate järele võivad küll ritta seatud punktid joont sünnitada, kõrvu seatud jooned pinda sünnitada ja üksteise peale pandud pinnad keha sünnitada.

Sirgjoon sünnib, kui punkt ühes ja sellesamas sihis (kõrvale kaldumata) edasi liigub; kõverjoon sünnib, kui punkt oma liikumise juures oma sihti alatasa (kestvalt) muudab.

Jooni kujutame paberi ehk tahvli peal kriipsudega, mis aga ei ole jooned päris geomeetrilises mõttes, sest neil on olemas niihästi laius, kui paksus: nende sünnitamiseks peab natuke tinti ehk pliitsit paberi peale ja kriiti tahvli peale jääma. Sirgjooni tõmbame me liinjaliga; liinjal peab aga enne ära proovitud olema.

Pinnad on **tasased** ja **kõverad**. Tasane pind ehk lihtsalt **tasapind on niisugune pind, millega ühte langeb iga sirgjoon, millel temaga kaks ühist punkti on**. Kui me, näit., äraproovitud liinjali tasapinna peale paneme ükskõik mis sihis, siis ei paista pinna ja liinjali vahelt valgust läbi. Kõver pind on niisugune pind, millel ühtegi tasast osa ei ole. Kuubusel, näit., on 6 tasapinnalist külge; rullil — 2 tasapinnalist põhja ja 1 kõver külgpind; keral on üksainus kõverpind.

Meie ettekujutamise järel ei ole ka tasapinnal ei algust ega lõppu; ta on ilmotsatu. Ta laotab ennast laiali kahës peasihis ja jagab ilmotsatut ruumi kaheks sümmeetriliseks osaks, nii et ühest ruumiosast teise teisiti tungida ei saa kui tasapinnast läbi tungides.

Jooned, punktid ja nende kogud, mis ühel tasapinnal asenevad, on **tasapinnalised kujutised**.

Igalt poolt piiratud pinna osa on **kujund** (фигура, Figur).

Igalt poolt piiratud tasapinna osa on **tasapinnaline kujund**.

Me ütleme tasapinnal, järjekult ka tasapinnalistel kujunditel, niisuguse omaduse olevat, et teda võib ühest paigast teise viia ja teise poole peale pöörata, Nma et temas kortsusid tekiks ja ilma et sellel tasapinnal olevad kujundid oma kuju, oma suurust ega vastastikkust seisukohta muudaksid. Seda lauset nimetakse ruumi aksioomiks (v. 5) ja seda tasapinna omadust — **tarduvuseks**, me ütleme: **tasapind on tardunud**.

4. Geomeetria on õpetus ruumist, ruumilistest kujutistest: kehadest, pindadest, joontest, punktidest ja nende kogudest. Geomeetria jaguneb kahte jakku: **tasapinnaline geomeetria** ehk **planimeetria** vaatleb neid kujundisi, mis täieliselt tasapinnale ära mahuvad; **ruumiline geomeetria** ehk **stereomeetria** vaatleb neid kujundisi, mis tasapinnale ära ei mahu.

5. Geomeetria õpetused põhjenevad mõne tõe peale, mis nii lihtsad on, et neid võimata on teiste tõdede abil põhjendada, sest nad on kõige lihtsamad tõed, alustõed, ja mis on isenesest nii selged, et tarvis ei ole neid teiste tõdede abil ära seletada. Niisuguseid tõdesid nimetame **aksioomideks** ehk alustõdedeks.

Tuleb ka ette, et aksioomidena niisuguseid tõdesid tarvitakse, mis ainult üht üleval nimetud tingimust täidavad. Aksioomidena tarvitame edaspidi järgmisi tõdesid:

1) Kui kahest suurusest on kumbki eraldi kolmandaga võrdne, siis on nad võrdsed ka isekeskis.

2) Ühe suuruse asemele võidakse panna temaga võrdne suurus.

3) Tervik on suurem kui ükski tema osadest.

4) Tervik on kõigi oma osade summa.

5) Kui võrdsetele suurustele võrdsed suurused juurde lisada, siis saame võrdsed suurused.

6) Kui võrdsetest suurustest ära võtta võrdsed suurused, siis jäävad järele võrdsed suurused.

7) Kui võrdsetele suurustele lisada juurde mittevõrdsed suurused, ehk mittevõrdsetele võrdsed, siis saame mittevõrdsed suurused; see summa nimelt on suurem, milles üks kokkuarvatav on suurem.

8) Kui võrdsetest suurustest ära võtta mittevõrdsed suurused, siis on ülejäägid mittevõrdsed: ülejääk on suurem seal, kust vähem ära võeti.

9) Kui mittevõrdsetest suurustest ära võtta võrdsed suurused, siis on ülejäägid mittevõrdsed; nimelt, kus enam oli, seal jääb ka enam järele.

**Teoreem**'iks nimetame me tõde, mille maksvus juba kindlaks tehtud tõdede peale põhjeneb. Rida arutusi, mille abil teoreemi maksvus ära näidatakse, on teoreemi **tõendus**.

**Järeldus** on teoreem, mille maksvus eelmisest tõest otsekohe järgneb. Teoreem seisab koos kahest jaost, **oletusest** ja **väitest**.

**Väide** sisaldab tõendatavat tõde, mille maksvust kindlaks teha „väidetakse“; **oletus** sisaldab neid tingimusi, mis täidetud peavad olema, et väide õige oleks. Näituseks, oletus: „kui arvu ristsumma on 3-ks jagatav“, väide: „siis on ka arv ise 3-ks jagatav“.

Kui me teatavas teoreemis teeme väite oletuseks ja oletuse väiteks, siis saame nõndanimetud **vastupidise teoreemi**; esialgset teoreemi nimetakse niisugusel korral **päripidiseks**. Kui me teatavas teoreemis tema oletust ja väidet eitame, siis saame selle teoreemi **vastasteoreemi**.

Näituseks:

**I) Päripidine teoreem:** „Kui arvu ristsumma on 3-ks jagatav, siis on ka arv ise 3-ks jagatav“.

**II) Vastupidine teoreem:** „Kui arv on 3-ks jagatav, siis on ka tema ristsumma 3-ks jagatav“.

**III) Päripidise teoreemi vastasteoreem:** „Kui arvu ristsumma ei ole 3-ks jagatav, siis ei ole ka arv ise 3-ks jagatav“.

**IV) Vastupidise teoreemi vastasteoreem:** „Kui arv ei ole 3-ks jagatav, siis ei ole ka tema ristsumma 3-ks jagatav“.

Neist neljast teoreemist on IV-as I-se järeldus, sest „kui arv ei ole 3-ks jagatav, siis ei ole ka tema ristsumma 3-ks jagatav“ seepärast, et „kui oleks ristsumma 3-ks jagatav, siis oleks ka arv ise 3-ks jagatav“ I-se teoreemi järele. III-as teoreem on II-se teoreemi järeldus, sest „kui arvu ristsumma ei ole 3-ks jagatav, siis ei ole ka arv ise 3-ks jagatav“ seepärast, et „kui oleks arv 3-ks jagatav, siis oleks ka tema ristsumma 3-ks jagatav“ II-se teoreemi järele.

Seepärast on neist neljast teoreemist tõendada ainult 2, kas I ja II ehk I ja III, sest üht võetud teoreemi loeme ikka 1-ks, mitte IV.

Teoreemi oletusel, kui ka väitel võib olla mitu osa ja täielikult vastupidiseks teoreemiks loeme seda, milles on oletuse ja väite osad ühepalju ära vahetud.

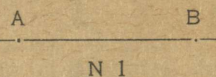
# Planimeetria.

## I-ne peatükk: Sirgjoon ja nurk.

### a) Sirgjoon.

**6. Aksiom.** Kahe punkti läbi on võimalik ühtainust sirgjoont tõmmata.

Näitus: Kui me liinjaliga tõmbame  
sirgjoone läbi kahe punkti ja liinjali  
teiselt poolt punktide külge pannes jälle sirgjoone tõmbame, siis langevad need sirgjooned ühte, kui liinjal õige on. Nii viisi katsutakse ka liinjali.

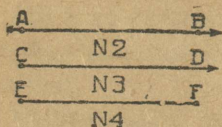


Sellest aksiomist järgneb: 1) Kui kahel sirgjoonel on kaks ühist punkti, siis langevad nad ühte tervel oma ulatusel; 2) kaks punkti määravad sirgjoone seisandi täiesti kindlaks.

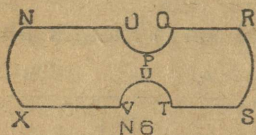
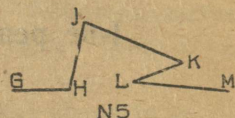
Ülesanne: Antud on 3, 4, 5... n punkti, millest kolm kõrvuolevat punkti kusagil ühe sirgjoone peal ei ole. Nendest sirgjooned läbi tõmmata! Mitu sirgjoont võib nendest läbi tõmmata?

**7.** Meie ettekujutuse järele ulatab sirgjoon mõlemale poole ilmaotsata. Sirgjoont (AB), mida me enesele ette kujutame mõlemale poole ilma otsata pikendatult, nimetame otsatuks sirgjooneks, lihtsalt sirgjooneks ehk sirgeks. Otsatu sirgjoon jagab tasapinna kaheks sümmeetriliseks jaoks, nii et tasapinda mööda edasi liikudes ühe jao pealt teise peale muidu minna ei saa, kui sellest sirgjoonest üle minnes.

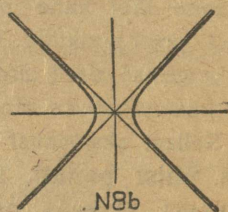
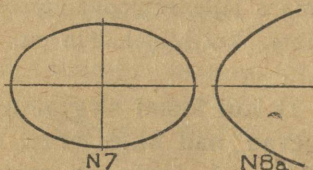
On sirgjoon (CD) ühelt poolt piiratud ja ulatab ta teisele poole ilmaotsata, siis nimetame teda **kiireks**. Sirgjoon (EF), millele mõlemalt poolt piir on pandud, nimetame **joonlõiguks** ehk lihtsalt **lõiguks**. Sirgjoont tähendakse ära kahe suure ladinakeelse tähega; kiirel on üks ja joonlõigul mõlemad tähed otsapunktidel.



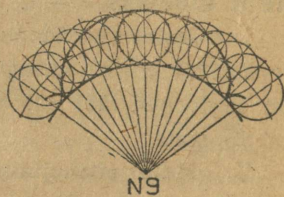
Joon, mis koos seisab mitmest joonlõigust, millest igaüks erilises sihis jookseb, nimetakse **murdjooneks**, näit. GHIKLM.



Joon, mis koos seisab joonlõikudest ja kõverjoontest, näit. NOPQRSTUVX on **segajoon**.

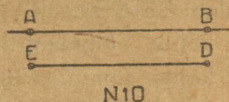


Kahe punkti E ja F vahet arvatakse sirgjoont mööda, mis neist punktidest läbi läheb, ja seda vahet mõeldab joonlõik, mis nende punktide vahel on. Seda vahet nimetakse ka nende punktide kauguseks teineteisest. Räägitakse: **Sirgjoone lõik on kõige lühem kaugus kahe punkti vahel.**



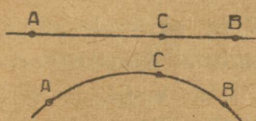
8. Otsatu sirgjoone juures võime vahet teha kahe vastassihi vahel A poolt B poole ja B poolt A poole. Selle järele teeme vahet sirgjoone AB ja sirgjoone BA vahel. Üht sihti

nimetame positiivseks ja teist negatiivseks. Sel põhjal võime ka positiivsetest ja negatiivsetest joonlõikudest kõneleda. Kui ED-d positiivseks lugeda, siis tuleb DE-d negatiivseks lugeda ja ümberpöörduvalt. Kui tarvidust ei ole joone sihti tähele panna, siis võime ka lugeda AB-d ja BA-d üheks ja selleksamaks sirgjooneks ja ED-d ja DE-d üheks ja selleksamaks joonlõiguks.



N10

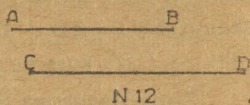
9. Kui 3 punkti A, B ja C sirgjoone ehk kõverjoone peal asenevad nii, et A poolt B poole liikudes meie enne kokku puutume C-ga ja siis alles B-ga, siis ütleme: punkt C on A ja B vahel, punkt B on AC jätku peal, punkt A on BC jätku peal.



N11

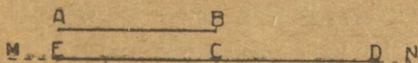
10. Definiitsioon. Kaks joonlõiku ja üleüldse kaks kujundit on võrdsed, kui nad pealeasendamisel teineteist täiesti katavad.

Joonlõikude võrdlemine. Et joonlõikusid AB ja CD teineteisega võrrelda, paigutame CD AB peale nii, et C langeb A peale ja et CD läheb mööda AB-d; kui siis 1) D langeb A ja B vahele, siis on CD lühem kui AB:  $CD < AB$ ; 2) kui D langeb B peale, siis on CD võrdne AB-le:  $CD = AB$ ; 3) kui D langeb AB jätku peale, siis on CD pikem kui AB:  $CD > AB$ .



N12

Ülesanne. Antud joonlõik tuleb asetada antud sirgjoone peale antud punkti juurde. Konstrueerimine. Võtame sirkliga joonlõigu AB, sirkli harude otsi lõigu AB otspunktidesse pannes; siis paneme sirkli ühe haru otsa antud punkti C peale, ja teise haru otsaga tõmbame antud sirgjoone peal CN sihis kriipsu, mis

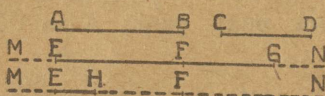


N13

MN lõikab punktis D. CD on otsitav joonlõik:  $CD = AB$ . Ühtlasi võime ka CM sihis ära lõigata  $CE = AB$ . Mõlemad joonlõigud CD ja CE täidavad ülesande nõudeid, kui sihi peale mitte vaadata. Kui aga CD-d positiivseks lugeda, siis tuleb CE-d negatiivseks lugeda. Punktisid D ja E nimetakse C kohta sümmeetrilisteks ja CD ja CE asenevad MN peal C kohta sümmeetriliselt.

Kui sihi peale mitte vaadata ja CD-d üheks joonlõiguks lugeda, siis on punkt C joonlõigu ED keskkohk ja igal joonlõigul on olemas üksainus keskkohk.

**11. Joonlõikude summa, vahe ja mitmekordne. 1-ne ülesanne. Leida kahe joonlõigu summa. Konstrueerimine:**



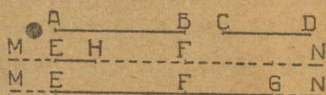
N14

Otsatu sirgjoone MN peale asetame  $EF = AB$  ja  $EF$  jätku peale  $FG = CD$ ; siis on  $EG = AB + CD$ ;  $EG$  on  $AB$  ja  $CD$  summa. On teine

liidetav joonlõik negatiivne, siis peab teda vastassihis asetama, nimelt mitte FN sihis, nagu FG, vaid FM sihis. Siis saame  $EH = AB + DC = AB + (-CD)$ .  $EH$  on  $AB$  ja  $DC$  (ehk  $-CD$ ) summa.

**2-ne ülesanne. Leida kahe joonlõigu vahe. Konstrueerimine:**

Otsatu sirgjoone MN peale asetame  $EF = AB$  ja siis otsapunkti F alates  $EF$ -le vastassihis  $FH = CD$ . Siis on  $EH = AB - CD$ ;  $EH$  on  $AB$  ja  $CD$  vahe, sest  $EH + CD = EH + HF = EF = AB$ .



N15

On võetav joonlõik negatiivne, siis peab teda asetatama mitte FH ega FM sihis, vaid sellele vastassihis FN poole. Siis saame  $EG = AB - DC = AB - (-CD) = AB + CD$ ;  $EG$  on  $AB$  ja  $DC$  (ehk  $-CD$ ) vahe, sest  $EG + DC = EG + GF = EF = AB$ . Sellest on näha: negatiivne joonlõigu juurdeliitmine on seesama, mis positiivse joonlõigu äravõtmine

ja negatiivse joonlõigu äravõtmine on seesama, mis positiivse joonlõigu juurdeliitmine.

**3-as ülesanne.** Antud joonlõiku kasvatada 2-e, 3-e, 4-a, 5-e jne. kordseks. **Konstrueerimine:** Antud joonlõiku

AB kordame liidetavana

2, 3, 4, 5... n korda,

siis saame:  $CD = AB$ ,

$CE = 2 \cdot AB$ , CE on

kahekordne AB;  $CF = 3 \cdot AB$ , CF on kolmekordne AB;;

$CH = 4 \cdot AB$ , CH on neljakordne AB;  $CI = 5 \cdot AB$ , CI on

viiekordne AB jne. On antud joonlõik negatiivne, siis

peame teda vastassõhis asetama, nimelt:  $IH = BA = -AB$

$IF = 2 \cdot BA = 2 \cdot (-AB)$ ;  $IE = 3 \cdot BA = 3 \cdot (-AB)$  jne.

**12. Joonlõikude mõetmine.** Joonlõikude mõetmiseks määratakse kõige esiti kindlaks joonlõik, millega mõedetakse.

Seda kindlaksmääratud joonlõiku nimetakse **üksuseks, mõe-**

**duks, mõetüksuseks, pikkuse üksuseks.** Me tunneme pik-

kuse üksustena sülda, jalga,

küünart, meetrit jne. **Mõet-**

**mine seisab selles, et me**

**teada saame, mitu üksust**

**ehk mitu ja missugust ük-**

**suse jagu on mõedetavas joonlõigus.** Selleks asetame

mõetüksuse mõedetava joonlõigu peale nii mitu korda, mitu

korda see võimalik on.

a) Aseneb mõetüksus mõedetava joonlõigu peale täisar-

vuliselt, siis ilmub mõetmise tagajärjena täisarv, näit. CM

on 1 sentimeeter ja  $AB = 6 \cdot CM = 6$  sentimeetrit.

b) Jääb mõetüksuse asetamise juures mõedetava joon-

lõigu peale üks osa järele,

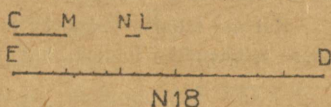
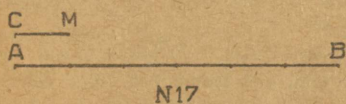
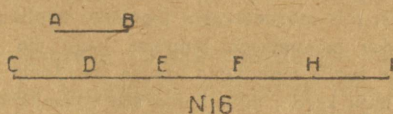
mis üksusest vähem on, siis

mõedame kas kogu joon-

lõiku ehk ainult ülejääki ük-

suse jagudega ja mõetmise tagajärjena ilmub murdarv, näit.

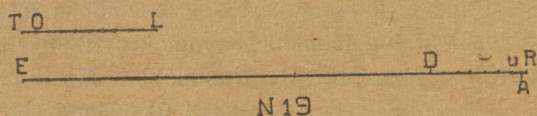
$ED = 23 \cdot \frac{CM}{4} = \frac{23}{4} CM = \frac{23}{4} \text{ cm.} = 5 \frac{3}{4} \text{ cm.}$  Kui mõedu mit-



mendikule iseseisev nimi antakse, siis võib tagajärjena ka täisarv ilmuda. See oleks aga juba joonlõigu ümbermõetmine uue mõeduga, näit.  $ED = 23.NL$ .

c) Kui meil milgi põhjusel korda ei lähe niisugust üksuse jagu leida, mis mõedetavasse joonlõiku täielikult ära mahuks, siis peame ligikaudse mõetmisega leppima, nagu me seda igapäevases elus teeme. Selle tarvis mõhutameme üksuse soovitatavat jagu mõedetava joonlõigu sisse nii mitu korda, mitu korda see võimalik on, ja jätame selle juures ilmsiks tuleva ülejäägi ehk puuduse tähele panemata.

Niisuguse mõetmise tagajärjena esinevad kaks arvu, mille vahe on üksuse võetud mitmendik ja millest üks mõedab antud joonlõigust vähemat, teine aga suuremat joonlõiku. Esimene on mõedetava joonlõigu ligikaudne väärtus puudusega, teine — liiaga, mõlemad on peened üksuse võetud mitmendikuni. Näit.  $TL = 1$  toll.  $TO = \frac{1}{10}$  tolli.



$EU = 3,6$  tolli,  $ER = 3,7$  tolli,  $EU < EA < ER$ . Järjelikult, kui me EA pikkuseks võtame 3,6 tolli ehk 3,7 tolli, siis teeme vea, mis vähem on kui  $\frac{1}{10}$  tolli. Seepärast räägitakse: 3,6 tolli on EA ligikaudne väärtus puudusega peen kuni  $\frac{1}{10}$  tollini ja 3,7 tolli on EA ligikaudne väärtus liiaga peen kuni  $\frac{1}{10}$  tollini. Peenus on  $\frac{1}{10}$  tolli. Tähelepanemata jäetud ülejääk ehk puudutulek on **viga**, mida me nii väikeseks teha võime kui tahame, kui me aga küllalt väikeste üksuse jagudega mõedame. Mõetmise tagajärjena ilmunud arv on mõedetava joonlõigu mõetarv\*). Kui mõetarvu kaasas on mõedu nimetus, siis nimetakse seda arvu nimega arvuks. Joonlõiku, mida aramõedetaks loetakse, tähendakse ära väikese ladinakeelse tähega, näit. joonlõik a, joonlõik x; see täht on ühtlasi joonlõigu mõetarvaks, kui ka tema nimetuseks.

Kui me tahame joonlõiku mõeta täpisealt, siis peame niisuguse üksuse mitmendiku leidma, mis mõedetava joonlõigu sisse täiesti ära

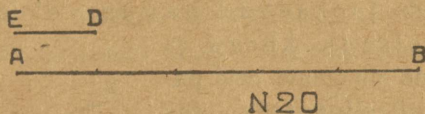
\*) Kui mõedetav joonlõik on positiivne, siis on tema mõetarv ka positiivne; kui mõedetav joonlõik on negatiivne, siis on ka mõetarv negatiivne, sest mõedu sihti loeme alati positiivseks.

mahub. Niisugust üksuse mitmendikku nimetakse üksuse ja joonlõigu ühismõeduks.

Kas igal joonlõigul ja mõetüksusel ühismõetu olemas on ja kuidas teda leida, kui ta olemas on, ja kuidas pikkuse üksust kui ka iga joonlõiku mitmeks ühesuuruseks jaoks jagada, need küsimused jätame edaspidiseks.

**13. Joonlõikude vahekord.** Kahe joonlõigu vahekorraks nimetame esimese joonlõigu mõetarvu siis, kui teine joonlõik mõetüksuseks on võetud. Joonlõikude vahekord näitab, mitu teist joonlõiku esimene joonlõik  $m$  mitu teist joonlõiku esimeses joonlõigus on, mitu korda teine joonlõik esimese sisse mahub, kui esimene joonlõik pikem on kui teine, ehk missugune jagu teisest joonlõigust on esimene joonlõik, kui esimene joonlõik on lühem kui teine. Vahekord on alati nimeta arv.

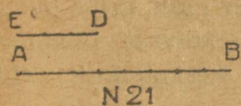
Järjekult on vahekorra leidmine seesama mõetüksuse, ainult selle vahega, et meile tuntud mõetüksuse asemele astub mistahes joonlõik ja vahekord on alati nimeta arv. Ka üleskirjutus on teine. Näitused:



a) Kui ED mahub AB sisse 5 korda, siis mõedab AB 5 ED-d ja AB ja ED vahekord on täisarv 5; üleskirjutult:

$$\frac{AB}{ED} = 5.$$

b) Kui ED kolmas jagu mahub AB sisse 8 korda, siis mõedab AB  $\frac{8}{3}$  ED-d ja AB ja ED vahekord on murd  $\frac{8}{3}$ ; üleskirjutult:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{8}{3} \text{ chk } \frac{AB}{ED} = 2\frac{2}{3}.$$


Sellest võime veel nii aru saada, et AB-l on 8 niisugust võrdset jagu, missuguseid ED-l on 3, ehk kaheksas jagu AB-st on niisama suur kui kolmas jagu ED-st:  $\frac{AB}{8} = \frac{ED}{3}$ ,  $\frac{1}{3} ED = \frac{1}{8} AB$ .

c) Kui meil milgi põhjusel korda ei lähe teise joonlõigu niisugust jagu leida, mis esimese sisse täielikult ära mahuks, siis leiame ligikaudse vahekorra, näit. AB ja ED ligikaudne vahekord, peen kuni  $\frac{1}{100}$ , on 2,67: ligikaudne va-

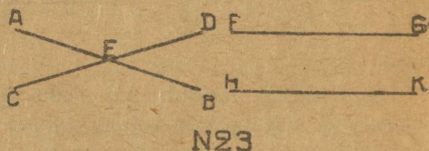
$$\text{hekord } \frac{AB}{ED} = 2,67 \text{ (peen } \frac{1}{100} \text{ **)}$$

Joonlõikude vahekordade asemele võime panna ka nende mõetavude vahekorrad.

**14. Kahe sirgjoone vastastikkune seisand.** 1) Kui kahel sirgjoonel 2 ühist punkti on, siis on neil kõik punktid ühised ja nad langevad ühte tervel oma ulatusel [6].

2) On kahel sirgjoonel ainult 1 ühine punkt, siis **lõikuvad** nad ja see ühine punkt on nende **lõikepunkt**, näit. AB ja CD lõikuvad punktis E.

3) Ei ole kahel sirgjoonel ühtki ühist punkti, kui kaugeme neid ka ei pikendaks (ja on nad mõlemad ühel tasapinnal), siis jooksevad nad tervel oma ulatusel teine teisega kõrvu ja me nimetame neid **paralleeljoonteks** ehk **rööbasjoonteks**. Sõna „paralleel“ tähendame ära märgiga „||“, näit.  $FG \parallel HK$ .



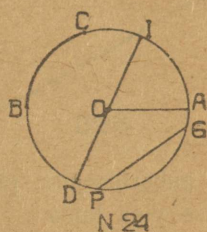
**Ülesanne.** Mitmes punktis lõikuvad 2, 3, 4, 5 ... n sirgjoont?

**15. Ring.** Ring on kinnine kõver joon, mille punktid kõik ühevõrra kaugel on ühest teatavast punktist. Seda teatavat punkti nimetakse ringi keskpunktiks ehk tsentriks (O).

\*\*\*) Et võrreldavad joonlõigud ühesihilised on, seda tähendakse ära positiivse vahekorra abil; et võrreldavad joonlõigud vastassihilised on, seda tähendakse ära negatiivse vahekorra abil.

Ringiga piiratud tasapinna osa nimetame **sõõriks**.

Ringi punkti kaugust keskpunktist nimetakse **raadiuseks** ehk **poolmõetjaks** (OA). Seepärast: **ühe ja selle sama ringi raadiused on isekeskis võrdsed**.



Sellest järgneb :

- 1) On punkti kaugus tsentrist vähem kui raadius, siis on see punkt sõõri sees ;
- 2) On punkti kaugus tsentrist võrdne raadiusele, siis on see punkt ringi peal ;
- 3) On punkti kaugus tsentrist suurem kui raadius, siis on see punkt sõõrist väljas.

Ümberpöördult :

- 1) Sõõri sees oleva punkti kaugus tsentrist on vähem kui raadius ;
- 2) Ringi peal oleva punkti kaugus tsentrist on raadius ;
- 3) Sõõrist väljaspool oleva punkti kaugus tsentrist on suurem kui raadius.

Ringi osa on **kaar** (BC). Joonlõik, mis kaht ringi punkti ühendab, on **pingjoon (siduja)** (PG). Tsentrist läbiminev pingjoon on **diameeter** ehk **läbimõetja** (DI). Diameeter seisab koos kahest raadiusest:  $DE = OD + OE$ . Et ühes ja sellesamas ringis kõik raadiused isekeskis võrdsed on, siis on ka kõik diameetrid isekeskis võrdsed.

**16. Ülesanded.** 1) Tõmmata joonlõik, mis oleks 10 cm pikk ehk 46 mm pikk.

2) Toas pöranda ehk seinale peal joonlõik ära mõeta, mis oleks 3 m pikk.

3) Toa pikkus ja laius ära mõeta peenelt kuni 1 cm-ni.

4) Kirja ümbriku pikkus ja laius ära mõeta peenelt kuni 1 mm-ni.

5) Oma sammu pikkus ära mõeta.



- 6) Kõrvalseisvat joonlõiku RP tuleb a) silma varal mõeta, b) siis mõeduga mõeta ja c) silma-varal-mõetmise viga leida.

- 7) Silma varal ja mõeduga mõeta a) teritamata pliatsi pikkust, b) mingi raamatu pikkust, laiust ja paksust, c) kirjutusvihu pikkust ja laiust,

- d) paberipoogna pikkust ja laiust ja siis silmavaral-mõetmise viga leida.

- 8) Silma varal ja mõeduga mõeta a) laua kõrgust, pikkust ja laiust, b) akna kõrgust ja laiust ja silmavaral-mõetmise viga leida. Kõik need mõetmised tabelisse üles kirjutada!

- 9) Mõeda oma jala, käe, sõrme, küünra, vaksa\*) ja sülla\*\*) pikkust.

- 10) Joonestada joonlõik  $x = d + e$ , kus  $d$  ja  $e$  on antud joonlõigud.

- 11) Joonestada joonlõik  $y = d - e$ , kus  $d$  ja  $e$  on antud joonlõigud.

- 12) Joonestada joonlõik  $z = 6a$ , kus  $a$  on antud joonlõik.

- 13) Antud murdjoon sirgeks tõmmata!

- 14) Joonestada joonlõik  $x = 3a + b - 2c$ , kus  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on antud joonlõigud.

- 15) Antud punkti kui keskpunkti ümber tõmmata antud raadiustega ringid lausaldase joonega, katkestud ja punkteeritud joonega.

- 16) Antud ringis pingjoon tõmmata, millel oleks teatud pikkus.

- 17) Antud sõõris tõmmata antud punkti läbi: a) raadius, b) diameeter, c) pingjoon.

\*) Väike vaks on laialiaetud põidla ja esimese sõrme otsade vahemaa, suur vaks on laialiaetud põidla ja keskmise sõrme otsade vahemaa.

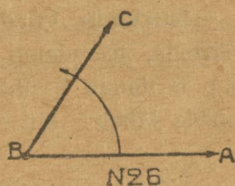
\*\*) Inimese süld on keskmiste sõrmede otsade kaugus teineteisest, kui käed on laiali sirutud.

## b) Nurgad.

**17. Nurga mõiste.** Kui me kiirt tema otsapunkti ümber ühes ja sellesamas sihis keerame nii kaua, kuni ta oma esialgsesse seisandisse tagasi tuleb, siis ütleme, et **kiir tegi täie pöörde**. Pööramisel libiseb kiir üle kogu otsatu tasapinna ja jääb oma esialgse seisandi kohta väga mitmesse seisandisse. Meie arusaamise järele **on kõik täispöörded ühesuurused**, isekeskis võrdsed. Seepärast on võimalik üht kiire seisandit teise kohta, ehk ühe kiire seisandit teise kiire kohta kindlaks määrata, näit. täispöörde jagude abil.

**Definitsioon.** Kui kaks kiirt ühest punktist välja lähevad, siis nimetame nendest kiirtest sünnitud nurgaks seda pöörde suurust, mille abil võib üht kiirt teise kiire seisandisse viia \*).

Mõlemad nurka sünnitavad kiired BA ja BC on nurga **harud** ja nende ühine otsapunkt B on nurga **tipp**. Seda tasapinna osa, millest kiir üle libiseb, nimet. nurga **sisemiseks vallaks**, teist järele jäänud tasapinna osa nim. nurga **välismiseks vallaks**. Et kahtlust ei oleks, missugune tasapinna osa sisemine vald on, märgime teda ära kaarega. Sõna „nurk“ tähendakse kirjas lühemalt ära märgiga  $\sphericalangle$  ehk  $\sphericalangle$ .



\* ) Nurga kohta on veel misugused vaated olemas: 1) nurk on kujund, mis sünnitub on kahest lõikuvast sirgjoonest ja nende lõikepunktist. 2) Nurk on kahe lõikuva sirgjoone vahel olev tasapinna määramata osa.

Nurk määratakse kindlaks: 1) kolme ladinakeelse suure tähega, millest tiputäht teiste vahel loetakse ja kirjutakse, näit.  $\angle ABC$  ehk  $\angle CBA$ ; 2) ühe, tipu juures kirjutatava ladinakeelse suure tähega, näit.  $\angle B$ ; 3) ühe väikese, harilikult greekakeelse\*) tähega, mis nurga sisse kirjutakse; 4) nurga sisse kirjutatava numbriga.

Et nurga harudeks kiired on, siis ei või juttugi olla harude pikkusest, ja nurga suurus oleneb ainult üleval nimetud pöörde suurusest, näit.  $\angle ABC$  ja  $\angle MBN$  on üks ja see sama nurk.

Nurga juures võime vahet teha kiire kahe pööramise sihi vahel: vastupäeva ja päripäeva. Ühes sihis pööramise läbi sünnitud nurka võime lugeda positiivseks, ja teises sihis pööramise läbi sünnitud nurka negatiivseks. Näit.



$\angle ABC$  ja  $\angle CBA$  on üks ja see sama nurk, kui kiire pööramise sihti arvesse ei võeta, ja üks nendest on positiivne ja teine negatiivne, kui pööramise siht arvesse võetakse.

Nurk võib sündida ka kahe sirgjoone lõikumisel, näit.  $\angle DEF$ .

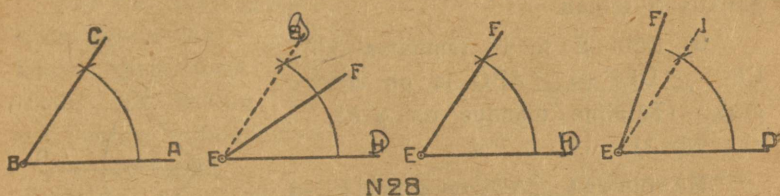
### 18. Definiitsjoon. Kaks nurka on võrdsed, kui nad pealeasendamisel teineteist täiesti katavad.

**Nurkade võrdlemine.** Et kaht nurka ABC ja DEF võrrelda, asendame nurga ABC nii nurga DEF peale, 1) et tipp B tipuga E ühte langeb ja 2) et haru BA haru ED-d mööda läheb; kui siis

\*) Greekakeelsed tähed on järgmised:

|                       |                     |                       |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\alpha$ — alfa,      | $\eta$ — eeta,      | $\nu$ — nü,           | $\upsilon$ — üpsilon, |
| $\beta$ — beeta,      | $\theta$ — theeta,  | $\omicron$ — omikron, | $\varphi$ — fi,       |
| $\gamma$ — gamma,     | $\iota$ — joota,    | $\pi$ — pi,           | $\chi$ — chi,         |
| $\delta$ — delta,     | $\kappa$ — kappa,   | $\rho$ — rho,         | $\psi$ — psi,         |
| $\epsilon$ — epsilon, | $\lambda$ — lambda, | $\sigma$ — sigma,     | $\omega$ — omega.     |
| $\zeta$ — dzeeta      | $\mu$ — mü,         | $\tau$ — tau,         |                       |

- I. BC läheb  $\angle DEF$  välimist valda mööda, näit. EG sihis, siis on  $\angle ABC > \angle DEF$ ;



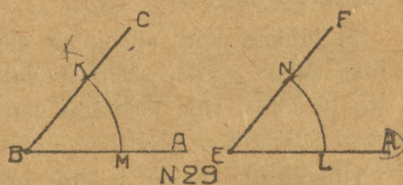
- II. BC läheb EF mööda, siis on  $\angle ABC = \angle DEF$ ;  
 III. BC läheb  $\angle DEF$  sisemist valda mööda, näit. EI sihis, siis on  $\angle ABC < \angle DEF$ .

Ümberpöörduvalt:

- I. Kui  $\angle ABC > \angle DEF$  ja me asendame  $\angle ABC$   $\angle DEF$  peale ülemal kirjeldud viisil, siis läheb haru BC nurga DEF välimist valda mööda.  
 II. Kui  $\angle ABC = \angle DEF$  ja me asendame  $\angle ABC$   $\angle DEF$  peale ülemal kirjeldud viisil, siis läheb haru BC haru EF mööda.  
 III. Kui  $\angle ABC < \angle DEF$  ja me asendame  $\angle ABC$   $\angle DEF$  peale ülemal kirjeldud viisil, siis läheb haru BC nurga DEF sisemist valda mööda.

**Ülesanne.** Antud nurk tuleb sirgjoone pealoleva antud punkti juurde asetada.

**Konstrueerimine:** 1) Antud nurgatippu B tsentriks valides tõmbame vabalt valitud raadiusega kaare ühest nurga harust teiseni; sellesama raadiusega tõmbame, antud punkti E-d tsentriks võttes, kaare alates sirgjoonest ED.



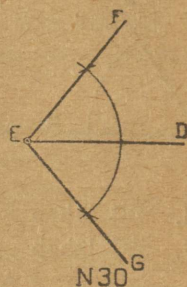
2) Nurgas ABC oleva pöördesuuruse mõedame ära, teda sirkli avausega võttes punktist M punkti K-ni, ja asetame

ta E ümber tõmmatud kaarele seeläbi, et me punkti L ümber raadijusega MK kaare tõmbame, mis endist kaart punktis N lõikab.

3) Läbi E ja N tõmbame kiire EF.  $\angle DEF = \angle ABC$  ja on ~~ole~~ nurk. (Täieline tõendus on § 52, ehk 98, 2).

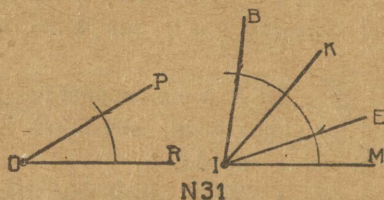
Me võime ka  $\angle ABC$  teisel pool ED-d konstrueerida, nii et  $\angle DEG = \angle ABC$ .

Kui me aga nurga sihi arvesse võtame ja ABC-d positiivseks loeme, siis on  $\angle DEG$  negatiivne ja  $\angle DEG = -\angle ABC = -\angle DEF$ .



### 19. Nurkade summa, vahe, mitmekordne ja jagu.

1) Kui me  $\angle ROP$  niiviisi  $\angle MIK$  tipu juurde asetame, et tipp O langeb tipu I peale, et haru OR läheb haru



IK mööda ja et  $\angle ROP$  sisemine vald läheb  $\angle MIK$  välimist valda mööda, siis läheb haru OP IB sihis ja me saame uue  $\angle MIB$ , mida me  $\angle MIK$  ja  $\angle ROP$  summaks nimetame:  $\angle MIB = \angle MIK + \angle ROP$ .

2) Juhime aga niisuguse asetamise juures  $\angle ROP$  sisemise valla  $\angle MIK$  sisemist valda mööda, nii et haru OP läheb IE sihis, siis nimetame nurka MIE  $\angle MIK$  ja  $\angle ROP$  vaheks:  $\angle MIE = \angle MIK - \angle ROP$ .

**Ülesanne:** kahe, kolme, nelja jne nurga summa leida.

**Ülesanne:** kahe nurga vahe leida, üht nurka teise peale kahel viisil asendades.

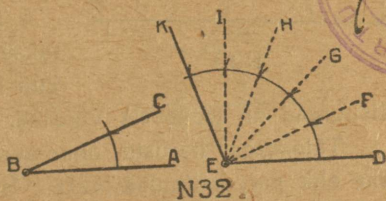
Märkus. Nurkade kokku- ja mahaarvamisel võivad ka positiivsed ja negatiivsed nurgad ette tulla.

3) Kui me  $\angle ABC$  kokkuarvatavana mitu korda järgemööda asetame, siis saame antud nurga mitmekordse näituseks:

$$\angle DEG = 2 \cdot \angle ABC;$$

$$\angle DEH = 3 \cdot \angle ABC;$$

$$\angle DEI = 4 \cdot \angle ABC; \quad \angle DEK = 5 \cdot \angle ABC.$$



4) Sellest näitusest järgneb aga ka, et:  $\angle ABC = \angle DEF = \frac{1}{2} \cdot \angle DEG = \frac{1}{3} \cdot \angle DEH = \frac{1}{4} \cdot \angle DEI = \frac{1}{5} \cdot \angle DEK$ .

Kiir, mis teatavat nurka pooleks jagab, on selle nurga poolitaja ehk **bissektor**. Selge on, et **igal nurgal on olemas üksainus poolitaja (bissektor)**.

**20. Nurkade mõetmine.** Nurkade loomulikuks mõeduks on täispööre. Et aga harilikud nurgad täispöördest vähemad on, siis on nurkade mõeduks võetud 360-es\*) jagu täispöördest. Seda  $\frac{1}{360}$ -ndikku täispöördest nimetakse **kraadiks**.

$$1 \text{ kraad} = 60 \text{ minutit.} \quad 1^\circ = 60'$$

$$1 \text{ minut} = 60 \text{ seekundit.} \quad 1' = 60''$$

Peale selle tarvitakse nurgamõeduks ka nurka, mis on pool täispöördest ja nurka, mis on  $\frac{1}{4}$  täispöördest. Nii võib näit. nurga suurus olla  $78^\circ 5' 29''$ .

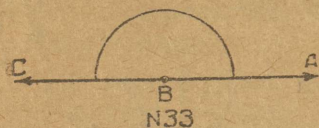
## 21. Nurkade liigid.

1) Nurka, mille harud vastassihhis lähevad, nõnda siis sirgjoone sünnitavad, nimetakse **sirgeks nurgaks**. Ta on

\*) Et kümnefid-süsteemi ka nurkade mõetmises tarvitada, on Prantsusemaal katsutud nurga mõeduks võtta  $\frac{1}{400}$  täispöördest ehk  $\frac{1}{100}$  täispöörde veerandist, aga suurt poolehoidmist ei ole see mõetüksus leidnud.

pool täispöördest, sellega  $180^\circ$  suur, näit.  $\angle ABC$ . Seepärast:

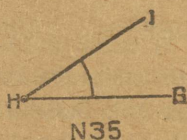
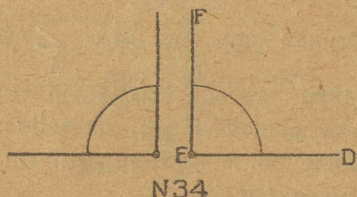
**kõik sirged nurgad on isekeskis võrdsed.**



2) Sirge nurga poolt nimetatakse **täisnurgaks**; ta on järjekult  $90^\circ$  suur, näit.  $\angle DEF$ . Kõik

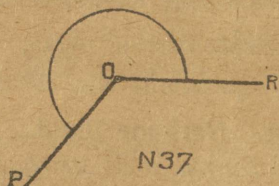
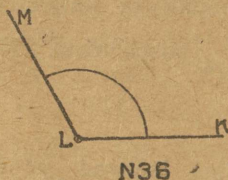
täisnurgad on isekeskis võrdsed.

Täisnurga harusid nimetatakse perpendikulaarseteks joonteks ehk perpendikulaarideks. Nendest räägitakse ka, et nad on teineteise peal püsti ja kirjutakse:  $DE \perp EF$ ,  $EF \perp ED$ .



3) Nurka, mis täisnurgast vähem on, nimetatakse **teravnurgaks**, näit.  $\angle GHI$ .

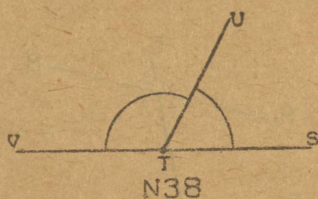
4) Nurka, mis täisnurgast suurem ja sirgest nurgast vähem on, nim. **nürinurgaks** ehk **tõmpnurgaks**, näit.  $\angle KLM$ . Nürinurki ja teravnurki nim. ühise nimega viltunurkadeks. Nüri- ja teravnurkade harusid nim. kaldjoonteks.



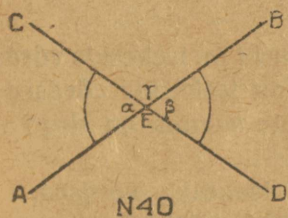
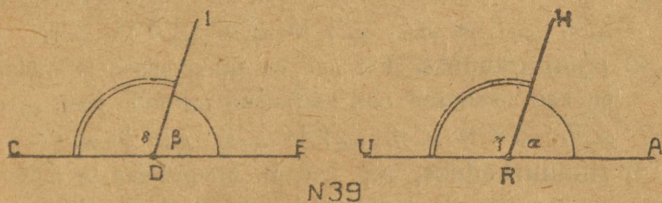
5) Nurka, mis suurem on kui sirge nurk, näit.  $\angle ROP$ , nim. **ülitõmpnurgaks** ehk **ülinürinurgaks**.

6) Kaks nurka, millel on ühine tipp ja üks ühine haru, ja mille teised harud on teineteise jätku peal ning sün-

nitavad järjekult ühe sirgjoone, nim. kõrvunurkadeks, näit.  $\angle STU$  ja  $\angle UTV$ . Joonestusest on näha, et kõrvunurkade summa on sirgenurk ( $180^\circ$ ):  $\angle STU + \angle UTV = \angle STV$ . Sellest järgneb:



- a) On kõrvunurgad isekeskis võrdsed, siis on kumbki nendest täisnurk; ei ole nad mitte võrdsed, siis on üks nendest teravnurk ja teine on nürinurk.
- b) Võrdsete nurkade ehk ühe ja sellesama nurga kõrvunurgad on isekeskis võrdsed; sest kui  $\alpha = \beta$ , siis on  $180^\circ - \alpha = 180^\circ - \beta$  [5,6] ehk  $\angle \gamma = \angle \delta$ .

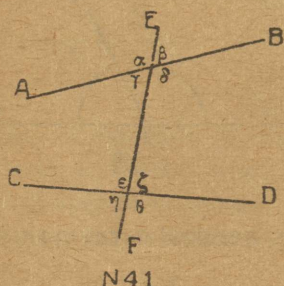


7) Kaks nurka, millel on ühine tipp ja mille harud on teineteise jätku peal ning sünnitavad järjekult kaks sirgjoont, nimet. ristnurkadeks, näit.  $\angle AEC$  ja  $\angle BED$ , ehk  $\angle CEB$  ja  $\angle AED$ . Ristnurgad ( $\alpha$  ja  $\beta$ )

on isekeskis võrdsed, sest nad on ühe ja sellesama nurga ( $\gamma$ ) kõrvunurgad.

• 22. Kui kaks sirgjoont AB ja CD kolmandaga läbi lõigata, siis sünnib 8 nurka.

Neid nurki, mis läbilõigatud joonte AB ja CD vahel on, nim. **sisemisteks**, nimelt nurgad  $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ ; teised 4 nurka, nimelt  $\alpha, \beta, \eta, \theta$ , nimet. **välismisteks**.



On kaks nurka ühelt pool lõikejoont EF, siis nim. neid **ühepoolseteks**; on nad mitmel pool lõikejoont EF, siis nimet. neid **lahkpoolseteks**.

On kahel nurgal neist 8-st olemas ühine tipp, siis on nad kas kõrvnurgad ehk ristnurgad.

Ei ole kahel nurgal neist 8-st ühist tippu, siis nimetakse neid

- 1) **vastavateks nurkadeks**, kui nad on ühepoolsed ja üks on välimine, teine sisemine nurk, näit.  $\angle \alpha$  ja  $\angle \varepsilon$ ,  $\angle \beta$  ja  $\angle \zeta$ ,  $\angle \gamma$  ja  $\angle \eta$ ,  $\angle \delta$  ja  $\angle \theta$ ;
- 2) **põiknurkadeks**, kui nad on lahkpoolsed ja mõlemad on kas sisemised ehk välimised nurgad, näit.  $\angle \alpha$  ja  $\angle \theta$ ,  $\angle \alpha$  ja  $\angle \eta$ ,  $\angle \gamma$  ja  $\angle \zeta$ ,  $\angle \delta$  ja  $\angle \varepsilon$ ;
- 3) **rindnurkadeks**, kui nad on ühepoolsed ja mõlemad on kas sisemised ehk välimised nurgad, näit.  $\angle \alpha$  ja  $\angle \eta$ ,  $\angle \beta$  ja  $\angle \theta$ ,  $\angle \gamma$  ja  $\angle \varepsilon$ ,  $\angle \delta$  ja  $\angle \zeta$ ;

### 23. Teoreem.

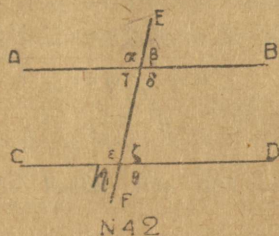
a) Kui üks paar vastavaid nurki on isekeskis võrdsed, ehk b) kui üks paar põiknurki on isekeskis võrdsed, ehk c) kui ühe paari rindnurkade summa on sirge nurk ( $180^\circ$ ), siis on

- I) iga paar vastavaid nurki isekeskis võrdsed,
- II) iga paar põiknurki isekeskis võrdsed
- ja III) iga rindnurkade paari summa sirge nurk.

Ehk: kui õige on üks neist 12-st võrdusest:

- |   |                                    |                                    |
|---|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\angle \alpha = \angle \varepsilon$ | 3) $\angle \gamma = \angle \eta$   | 5) $\angle \alpha = \angle \theta$ |
| 2) $\angle \beta = \angle \zeta$        | 4) $\angle \delta = \angle \theta$ | 6) $\angle \beta = \angle \eta$    |

- 7)  $\angle \gamma = \angle \zeta$  9)  $\angle \alpha + \angle \eta = 180^\circ$  11)  $\angle \gamma + \angle \varepsilon = 180^\circ$   
 8)  $\angle \delta = \angle \varepsilon$  10)  $\angle \beta + \angle \theta = 180^\circ$  12)  $\angle \delta + \angle \zeta = 180^\circ$ ,  
 siis on õiged ka kõik teised 11.



**Tõendus:** a) Kui antud on, et  $\angle \alpha = \angle \varepsilon$ , siis on

- I. 2)  $\angle \beta = \angle \zeta$ , kui võrdsete nurkade,  $\alpha$  ja  $\varepsilon$ , kõrvunurgad [21,6 b];  
 3)  $\angle \gamma = \angle \eta$ , " " "  $\alpha$  ja  $\varepsilon$ , kõrvunurgad;  
 4)  $\angle \delta = \angle \theta$ , " " "  $\beta$  ja  $\zeta$ , kõrvunurgad;  
 II. 6)  $\angle \beta = \angle \eta$ , " " "  $\alpha$  ja  $\varepsilon$ , kõrvunurgad;  
 7)  $\angle \gamma = \angle \zeta$ , " " "  $\alpha$  ja  $\varepsilon$ , kõrvunurgad;  
 5)  $\angle \alpha = \angle \theta$ , sest kumbki neist on võrdne  $\angle \varepsilon$ -ile [21,7; 5,1];  
 8)  $\angle \delta = \angle \varepsilon$ , sest kumbki neist on võrdne  $\angle \alpha$ -le [21,7; 5,1].  
 III. 9)  $\angle \varepsilon + \angle \eta = 180^\circ$  [21,6] 11)  $\angle \gamma + \angle \alpha = 180^\circ$   
 $\angle \alpha = \angle \varepsilon$   $\angle \alpha = \angle \varepsilon$   


---

 $\angle \alpha + \angle \eta = 180^\circ$  [5,2]  $\angle \gamma + \angle \varepsilon = 180^\circ$   
 10)  $\angle \zeta + \angle \theta = 180^\circ$  12)  $\angle \delta + \angle \beta = 180^\circ$   
 $\angle \zeta = \angle \beta$  [A, 1. 2]  $\angle \beta = \angle \zeta$   


---

 $\angle \beta + \angle \theta = 180^\circ$   $\angle \delta + \angle \zeta = 180^\circ$

b) Kui antud on, et  $\angle a = \angle \theta$ , siis on  $\angle a = \angle \varepsilon$ , sest kumbki neist on võrdne  $\angle \theta$ -le [21,7; 5,1]. Sellest järgnevad aga kõik teised võrdused, nagu a)-s tõestatud on.

c) Olgu antud, et  $\angle \alpha + \angle \eta = 180^\circ$ ;

Peale selle teame, et  $\angle \varepsilon + \angle \eta = 180^\circ$  [21,6]

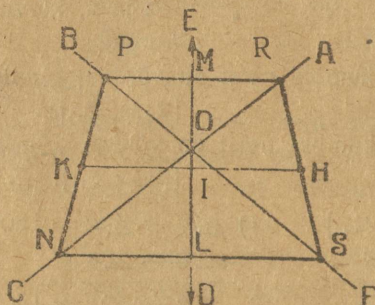
$$\angle \alpha + \angle \eta = \angle \varepsilon + \angle \eta \quad [5,1].$$

Võtame mõlemalt poolt  $\angle \eta$  ära, siis jääb järele [5,6]:  
 $\angle \alpha = \angle \varepsilon$ .

Sellest järgnevad aga kõik teised võrdused, nagu a)-s tõendatud on.

### c) Kujundite sümmeetria.

**24. Kujundite teljeline sümmeetria.** Tähendame ära ristnurkade harude peal ühepikkused lõigud  $ON = OS$  ja  $OR = OP$  ja saadud punktid N, P, R, S ühendame sirgjoone lõikude abil. Nii saame kujundi RPNS.



N. 43.

Ristnurkade tipust O läbi tõmbame  $\angle AOB$  poolitaja DE ja seda DE-d mööda murrame kujundi RPNS kahekorra. Siis läheb OB OA-d mööda, sest et  $\angle EOB = \angle EOA$ ; OC läheb OF-i mööda, sest et  $\angle BOC = \angle AOF$  [18]; P langeb R peale, sest et  $OP = OR$ ; N langeb S peale, sest et  $ON = OS$  ja punktid

L ja M jäävad omale kohale. Järjekult langeb MP ühte MR-ga, LN — LS-ga ja PN — RS-ga [6]. Niiviisi jagab

DE kujundi RPNS kaheks osaks, mis teineteist täiesti kata-  
vad; DE jagab joonise RPNS pooleks — LMPN on pahem  
pool ja LMRS on parem pool.

**Teljeline sümmeetria on kujundite omadus, mis sei-  
sab selles, et kujundi tasapinda võib sirgjoont mööda  
kahekorra murda nii, et üks kujundi pool teist täiesti  
katab.**

Sirgjoon DE, mida mööda kujundi tasapind kahekorra  
murtakse, on **sümmeetria telg**; kujund RPNS on **sümmeetri-  
line** ED kohta ja need punktid, joonlõigud või nurgad, mis  
ED-d mööda kahekorra murdmisel ühte langevad, on ED  
kohta sümmeetrilised punktid, joonlõigud või nurgad.

Kaks kujundit on teatava telje kohta sümmeetriliselt asen-  
dud, kui võimalik on kujundi tasapinda seda telge mööda  
kahekorra murda nii, et kujundid teineteist katavad.

**Märkus.** Kui kõike tasapinda RPNS pöörda telje ED  
ümber ilma murdmata, siis langeb MPNL ühte MRSL-ga ja  
MRSL langeb ühte MPNL-ga ja tasapind on teise poole peale  
pöördud. Järjekult: teljelise sümmeetriaga kujundil on pahem-  
pidi niisamasugune kuju nagu parempidi.

**25.** Selge on, et igal punktil on antud telje kohta  
**oma sümmeetriline punkt, ja nimelt üksainus, sest tasa-  
pinna kahekorra murdmisel telge mööda langeb see punkt ikka  
ühte mõne teiselpool telge oleva punktiga ja ei või ühtlasi  
tema teiste punktidega ühte langeda.**

**1-ne teoreem.** Telje kohte sümmeetrilised punktid  
asenevad sirgjoone peal, mis teljele perpendikulaarne on,  
ja on ühekaugusel telje ja perpendikulaari lõikepunktist.

**Tõendus:** On H ja K (joonist. 43) sümmeetrilised punk-  
tid ja ED — sümmeetria telg, siis tõmbame läbi H ja K  
sirgjoone, mis ED-d punktis I lõikab, ja murrame tasapinna  
kahekorra. Siis langeb punkt K punkti H peale,  $\angle EIK$  lan-  
geb ühte  $\angle EIH$ -ga ja IK langeb ühte IH-ga. Järjel. jagab  
EI (ehk ED) sirge nurga HIK pooleks, s. t.  $\angle EIK$  ja  $\angle EIH$

on täisnurgad ja seepärast on  $HK \perp ED$ . Et  $IK = IH$ -ga ühte langes, siis on ka  $IK = IH$ .

**2-ne teoreem.** Kaks kiirt, mis ühest telje punktist välja ja kahest sümmeetrilisest punktist läbi lähevad, sünnitavad teljega võrdsed ja sümmeetriliselt asendunud nurgad — sest tasapinna kahekorra murdmise puhul telge mööda katavad need nurgad teineteist.

**3-as teoreem.** Kui on kahe joonlõigu otsapunktid mõne telje kohta vastastikku sümmeetrilised, siis on joonlõigud ise ka sümmeetrilised selle telje kohta, sest kui kahekorra murdmisel otsapunktid ühte langevad, siis peavad ka nende vahel olevad joonlõigud ühte langema.

**26.** Kui sirgjoonel olevast punktist läbi tõmmatakse perpendikulaar sellele sirgjoonele, siis öeldakse, et perpendikulaar tõmmatakse ehk kujutatakse „üles“; kui sirgjoonest väljaspool olevast punktist tõmmatakse perpendikulaar sellele sirgjoonele, siis öeldakse, et perpendikulaar tõmmatakse ehk kujutatakse „alla“.

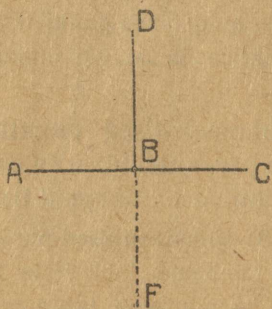
Sirgjooned, mis teineteist läbi lõigates terav- ja tömpnurgad sünnitavad, on kaldjooned. Niihästi perpendikulaarsete joonte, kui ka kaldjoonte lõikepunkti nimetakse nende

„aluseks“, — nii siis: perpendikulaari alus ja kaldjoone alus.

**Teoreem.** Sirgjoonel olevast punktist on võimalik sellele sirgjoonele ainult üht perpendikulaari üles tõmmata.

**Tõestus:** Et igal nurgal on üksainus poolitaja, siis on ka sirge nurga  $ABC$  jaoks olemas üksainus sirgjoon  $BD$ , mis teda kaheks täisnurgaks jaotab.

Niisama võime üheainsa perpendikulaari  $BF$  teisel pool  $AC$ -d üles tõmmata. Et  $\angle CBD$

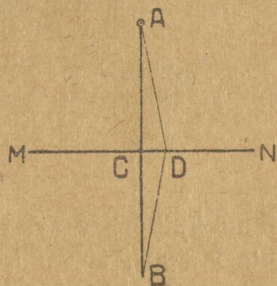


N.44.

ja  $\angle CBF$  on kumbki täisnurk, siis on  $\angle DBF$  sirge nurk ja  $DBF$  on sirgjoon.

**Teoreem.** Sirgjoonest väljaspool olevast punktist on võimalik sellele sirgjoonele alla tõmmata ainult üht perpendikulaari.

**Tõestus.** Olgu võimalik punktist  $A$  kaht perpendikulaari alla tõmmata  $MN$ -le, nimelt  $AC$  ja  $AD$ . Ühendame nende alused  $C$  ja  $D$  punktiga  $B$ , mis on  $A$ -le  $MN$  kohta sümmeetriline. Siis on  $\angle BCN = \angle ACN$  ja  $\angle BDN = \angle ADN$  [25,<sub>2</sub>] ja sellega täisnurgad. Siis on ka nurgad  $ACB$  ja  $ADB$  sirged nurgad ja jooned  $ACB$  ja  $ADB$  — sirgjooned. See ei ole aga võimalik, sest kahe punkti  $A$  ja  $B$  läbi on võimalik ainult üks sirgjoon. Järjekult langevad kõik punktist  $A$  sirgjoone  $MN$  peale alla tõmmatud perpendikulaarid ühte sirgjoonega  $AB$ , mis  $\perp$  on  $MN$ -le [25,<sub>1</sub>], ja meil on  $A$ -st  $MN$  peale üksainus perpendikulaar võimalik.



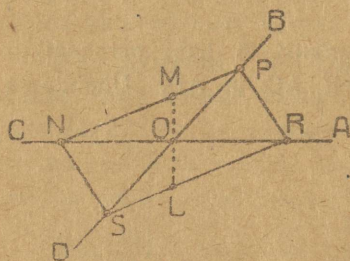
N.45.

**(Teine tõestus.** Oleks ühest punktist  $A$  ühele sirgjoonele  $MN$  kaks perpendikulaari  $AC$  ja  $AD$  võimalik, siis sünnitaksid nad  $\triangle ACD$ , milles sisemiste nurkade summa suurem oleks kui  $180^\circ$  [41].)

**27. Kujundite tsentraalne sümmeetria.** Tähendame ära ristnurga ühe haru ja tema pikenduse peal ühepikkused lõigud  $OP = OS$  ja teise haru ja tema pikenduse peal ühepikkused lõigud  $ON = OR$ ; saadud punktid  $R, P, N, S$  ühendame joonlõikude abil. Nii saame kujundi  $RPNS$ .

Pöörame terve kujundi  $RPNS$  tema tasapinnal ümber punkti  $O$  sirge nurga võrra. Siis näeme, et  $OA$  läheb  $OC$ -d mööda ja  $R$  langeb  $N$ -ga ühte, sest  $OR = ON$ ;

OB läheb OD-d mööda ja P langeb ühte S-ga, OC läheb OA-d mööda ja N langeb ühte R-ga ja OD läheb OB-d mööda ja S langeb ühte P-ga.



N.46.

Et läbi kahe punkti on võimalik tõmmata ainult üht sirgjoont, s'is langeb RP — NS-ga, PN — SR-ga, NS — RP-ga ja SR — PN-ga ühte ja terve kujund RPNS langeb iseenesega ühte.

**Tsentraalne sümmeetria on see kujundite omadus, mis selles seisab, et kujundit võib tema tasa-**

**pinnal ümber teatava punkti pöörata nii, et ta iseendaga ühte langeb;** kujund ise on selle punkti kohta sümmeetriline; punkt, mille ümber kujundit pöördakse, on pöörtsenter ehk sümmeetria tsender; nurk, mille võrra kujundit pöörata tuleb, et ta iseenesega ühte langeks, on pöörnurk. Pöörnurkade arv täispöördes on **sümmeetria järk**. Meie näituses, kujundis [46] RPNS, on pöörnurgaks sirge nurk ehk  $180^{\circ}$ -line nurk; täispööre mõeldab 2 sirget nurka ehk 2 korda  $180^{\circ}$  ja seepärast on kujundil RPNS teise järgu sümmeetria ehk kahekordne tsentraalne sümmeetria.

On kujundisi olemas, millel on kolmanda, neljanda jne järgu sümmeetria, ehk kolmekordne, neljakordne jne tsentraalne sümmeetria.

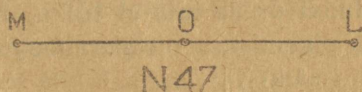
Need punktid, joonlõigud või nurgad, mis pärast pöörmist ühte langevad, on sümmeetrilised antud pöörtsentri kohta.

Selge on, et tsentraalse sümmeetriaga kujundi sümmeetrilised punktid pöörtsentrist ühekaugusel on, näit.  $OP = OS$ .

Ka kaks, kolm, neli jne kujundit võivad antud punkti kohta sümmeetriliselt asendud olla; siis on see punkt nende sümmeetriatsenter.

**28. Teoreem.** Joonlõik, mis kahekordse tsentraalse sümmeetriaga kujundis kaht sümmeetrilist punkti ühendab, läheb sümmeetriatsentrist läbi ja jaguneb temas pooleks.

**Tõestus:** Ühendame sümmeetrilised punktid M ja L sümmeetriatsentriga O. Et punktidel M ja L O kohta ka-



hekordne tsentraalne sümmeetria on, siis on pöörnurk  $\angle LOM$  — sirge nurk, tema harud OL ja OM sünnitavad sirgjoone LOM ja joonlõik ML langeb ühte sirgjoone LOM-ga, nii et LM läheb pöörtsentrist O-st läbi. Et kujundi pööramiseks  $180^\circ$  võrra O omale kohale jääb, L aga M-ga ja M — L-ga ühte langeb, siis on  $OL = OM$ .

**1-ne ülesanne.** Kahekordse tsentraalse sümmeetriaga kujundis leida antud punktile sümmeetriline punkt!

**Lahendamine.** Niisugune punkt on olemas, sest kui me terve kujundi  $180^\circ$  võrra ümber sümmeetriatsetri pöörame, siis langeb antud punkt mingi punktiga ühte. Et seda punkti leida, on tarvis ainult sirgjoon tõmmata läbi antud punkti ja sümmeetriatsetri ja sümmeetriatsetrist teisele poole asetada antud punkti kaugus sümmeetriatsetrist.

**2-ne ülesanne.** Ladinakeelses tähestikus ära näidata sümmeetrilised tähed ja nende sümmeetriatsetri iseloom.

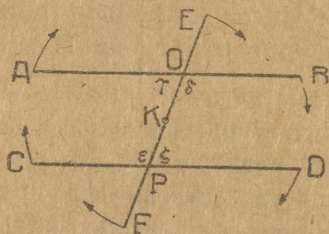
g k  
s x z

## d) Paralleeljooned.

**29. Definiitsjoon.** Kaks sirgjoont, mis ühel tasa-pinnal on ja mis ei lõiku, nii kaugemale kui me ka neid ei pikendaks, on paralleeljooned. Paralleelsuse märgiks on (märk) „ $\parallel$ “.

Pikenduse abil ei ole aga võimalik kindlaks teha, kas antud sirgjooned paralleelsed on ehk mitte. Sirgjoonte paralleelsuse pea-tundemärki, ühtlasi ka paralleeljoonte olemasolemise võimalust, avaldab **paralleeljoonte peateoreem**:

**Kui kahe sirgjoone läbilõikamisel kolmandaga võrdsed põiknurgad sünnivad, siis on läbilõigatud sirgjooned paralleelsed.**



N.48.

**Oletus:**  $\angle \gamma = \angle \xi$ ; (järgelikult ka  $\angle \delta = \angle \epsilon$ ) [23].

**Väide:**  $AB \parallel CD$ .

**Tõestus:** EF lõikab AB-d ja CD-d punktides O ja P. Olgu K joonlõigu OP keskoht, nii et  $KO = KP$ .

Pöörame terve kujundi ümber punkti K  $180^\circ$  võrra. Siis

läheb KE — KF-i mööda ja O langeb P-ga ühte, sest et  $KO = KP$ ; OA läheb PD-d mööda, sest et  $\angle \gamma = \angle \xi$  ja OB läheb PC-d mööda, sest et  $\angle \delta = \angle \epsilon$  ja et OB sünnitab OA-ga ja PC sünnitab PD-ga sirgjoone; KF läheb KE-d mööda ja P langeb O-ga ühte, sest et  $KP = KO$ ; PD läheb OA-d mööda, sest et  $\angle \zeta = \angle \gamma$  ja PC läheb OB-d mööda, sest et  $\angle \epsilon = \angle \delta$  ja et PC sünnitab PD-ga ja OB sünnitab OA-ga sirgjoone. Järgelikult on sellel kujundil kahekordne tsentraalne sümmeetria ja K on sümmeetria tsenter.

Kui nüüd mõelda, et AB ja CD ühelt pool EF-i lõikuvad, näit. paremal pool, punktis z, siis peavad nad lõikuma ka

teisel, s. o. pahemal, pool EF-i, nimelt punktis Z, mis on  $\alpha$ -le K kohta sümmeetriline.

Et aga kahel mitte ühtelangeval sirgjoonel kaht ühist punkti olla ei või, siis ei või sirgjoontel AB ja CD ühtki ühist punkti olla, s. t. AB ja CD on paralleelsed.  $AB \parallel CD$ .

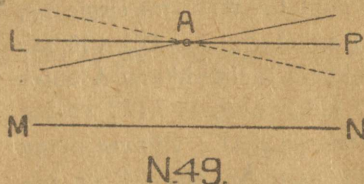
**1-ne järeldus:** Kaks kolmandale perpendikulaarset sirgjoont on vastastikku paralleelsed, sest et nendest sünnitud põiknurgad on täisnurgad, ja seepärast isekeskis võrdsed.

**2-ne järeldus:** Kui kahe sirgjoone läbilõikamisel kolmandaga võrdsed vastavad nurgad sünnivad, siis on läbilõigatud sirgjooned paralleelsed, sest niisugusel korral on ka põiknurgad isekeskis võrdsed [23].

**3-as järeldus:** Kui kahe sirgjoone läbilõikamisel kolmandaga sünnitud rindnurdade summa on sirge nurk, siis on läbilõigatud sirgjooned paralleelsed, sest niisugusel korral on ka põiknurgad isekeskis võrdsed [23].

**30. Paralleeljoonte aksioom.** Väljaspool sirgjoont oleva punkti läbi on võimalik tõmmata üksainus sirgjoont, mis on esimesele paralleelne.

Näit. punkti A läbi on võimalik tõmmata lõpmata palju sirgjooni, aga üksainus nendest, LP, on paralleelne MN-le.



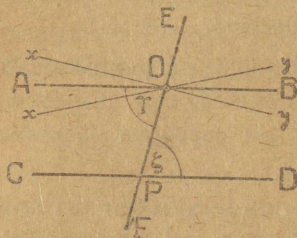
**31. Vastupidine teoreem.** Kahe paralleeljoone läbilõikamisel kolmandaga sünninud 1) põiknurgad on isekeskis võrdsed, 2) vastavad nurgad on isekeskis võrdsed ja 3) rindnurdade summa on sirge nurk.

Oletus:  $AB \parallel CD$ .

Väide:  $\angle \gamma = \angle \zeta$ .

Tõestus: Mõtleme, et  $\angle \gamma$  ei võrdu  $\angle \zeta$ , et  $\angle \gamma$  kas

suurem on kui  $\angle \zeta$  või vähem. Niisugusel korral võime qe<sup>1</sup> punkti O sirgjoone XY nii tõmmata, et ta sirgjoone EF-ga sünnitab nurga  $\angle XOF$ , mis võrdub  $\angle \zeta$ . Siis oleks



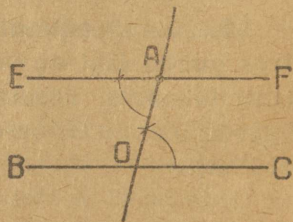
N.50.

aga läbi punkti O' tõmmatud kaks sirgjoont AB ja XY, mis CD-le paralleelsed on, nimelt AB on  $\parallel$  CD oletuse järgi, ja XY on  $\parallel$  CD, sest et  $\angle XOF = \angle \zeta$ . See käib aga paralleeljoonte aksioomi vastu ja on seepärast võimata. Järjekult ei ole võimalik, et  $\angle \gamma$  ei võrduks  $\angle \zeta$ , vaid peab olema  $\angle \gamma = \angle \zeta$ . Kui aga

üks paar põiknurki isekeeskis võrdsed on, siis on iga paar põiknurki isekeeskis võrdsed, iga paar vastavaid nurki on isekeeskis võrdsed ja iga rindnurga paari summa on sirge nurk.

**32. Ülesanne.** Läbi antud punkti tõmmata antud sirgjoonele paralleeljoon.

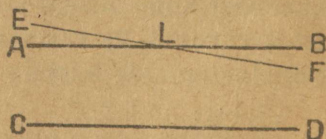
**Konstrueerimine:** Läbi antud punkti A tõmbame sirgjoone, mis antud sirgjoont BC-d lõikab punktis D, ja siis ehitame A juures  $\underline{AD}$  külge nurgale ADC võrdse põiknurga DAE; viimase nurga teine haru AE ehk FE on paralleelne BC-le, sest et  $\angle EAD = \angle ADC$ .



N.51.

**33. Teoreem.** Sirgjoon, mis üht paralleeljoont lõikab, lõikab ka teist.

**Tõestus:** Kui EF, mis AB-d lõikab punktis L, mitte ei lõikaks ka CD-d, mis on AB-le paralleelne, siis oleks läbi lõikepunkti L kaks paralleeljoont CD-letõmmatud, mis võimata on.



N.52.

**34. Teoreem.** Sirgjoon, mis on ühele paralleeljoonele perpendikulaarne, on ka teisele perpendikulaarne.

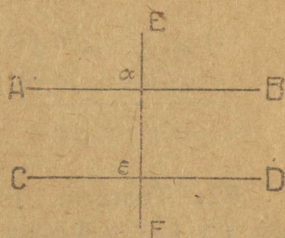
Oletus:  $AB \parallel CD$ ,  $EF \perp AB$ .

Väide:  $EF \perp CD$ .

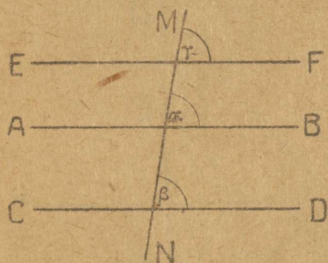
Tõestus: Et  $EF \perp AB$ -d lõikab, siis lõikab ta ka  $CD$ -d; see juures on  $\angle \alpha = \angle \epsilon$ , kui vastavad nurgad, kuna  $AB \parallel CD$ , ja

$\angle \alpha = 90^\circ$ , sest et  $EF \perp AB$ .

$\angle \epsilon = 90^\circ$ , s. t.  $EF \perp CD$ .



N.53.



N.54

**35. Teoreem.** Sirgjoon, mis on ühele paralleeljoonele paralleelne, on ka teisele paralleelne.

Oletus:  $AB \parallel CD$ ,  $EF \parallel AB$ .

Väide:  $EF \parallel CD$ .

Tõestus: Lõikame kõik kolm joont neljandaga  $MN$  läbi, siis on

$\angle \alpha = \angle \beta$ , kui vastavad nurgad paralleeljoonte juures;

$\angle \alpha = \angle \gamma$ , " " " " " "

$\angle \beta = \angle \gamma$  [5.1].

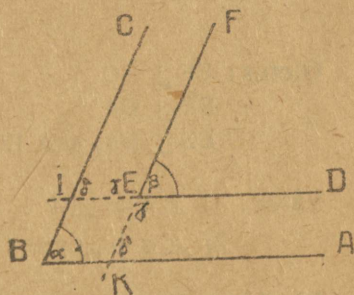
$EF \parallel CD$  [29.2].

**36. Teoreem.** Paralleelsete harudega nurgad on kas võrdsed, ehk nende summa on sirge nurk.

Oletus:  $ED \parallel BA$ ,  $EF \parallel BC$ .

Väide:  $\angle \beta = \angle \alpha$  ja  $\angle \alpha + \angle \gamma = 180^\circ$ .

Tõestus: Pikendame  $DE$ -d, kuni tema  $BC$ -d lõikab

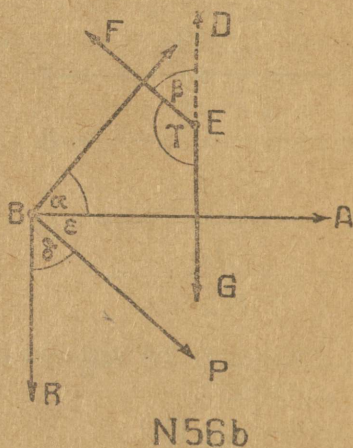
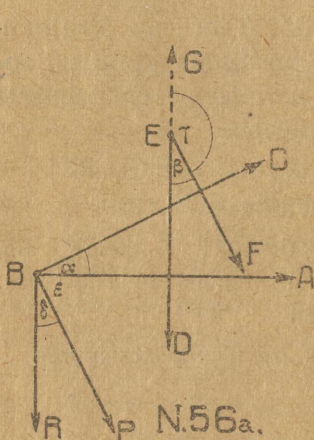


N.55.

punktis I, ehk pikendame FE-d, kuni tema BA-d lõikab punktis K, siis sünnib  $\angle \delta$ .

$$\begin{array}{l}
 1) \angle \beta = \angle \delta \quad [31] \\
 \quad \angle \alpha = \angle \delta \quad [31] \\
 \hline
 \quad \angle \beta = \angle \alpha
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 2) \angle \delta + \angle \gamma = 180^\circ \quad [31] \\
 \quad \angle \alpha = \angle \delta \quad [31] \\
 \hline
 \quad \angle \alpha + \angle \gamma = 180^\circ
 \end{array}$$

**37. Teoreem.** Perpendikulaarsete harudega nurgad on kas isekeskis võrdsed, ehk nende summa on sirge nurk.



**Oletus:**  $EF \perp BC$   
 $ED \perp BA$   
 $EG \perp BA$ , sest EG on DE pikendus.

**Väide:** 1)  $\angle \alpha = \angle \beta$   
 2)  $\angle \alpha + \angle \gamma = 180^\circ$ .

**Tõestus:** Tõmbame  $BP \parallel EF$  ja  $BR \parallel ED$  ehk  $BR \parallel EG$ .  
 Siis on [36]  $\angle \beta = \angle \delta$  ja  $\angle \delta + \angle \gamma = 180^\circ$ .

|            |    |                   |   |                   |  |                   |
|------------|----|-------------------|---|-------------------|--|-------------------|
|            | Et | BP $\parallel$ EF | , | BR $\parallel$ ED |  | BR $\parallel$ EG |
| ja         |    | EF $\perp$ BC     |   | ED $\perp$ BA     |  | EG $\perp$ BA     |
| siis on ka |    | BP $\perp$ BC     |   | BR $\perp$ BA     |  | BR $\perp$ BA     |

Järjekult

|     |    |   |   |   |  |
|-----|----|---|---|---|--|
|     | on | $\angle PBC = 90^\circ$                         | , | $\angle RBA = 90^\circ$                         |  |
| ehk |    | $\angle \alpha + \angle \varepsilon = 90^\circ$ |   | $\angle \delta + \angle \varepsilon = 90^\circ$ |  |
|     |    | $\angle \alpha + \angle \varepsilon =$          |   | $\angle \delta + \angle \varepsilon$            |  |
|     |    | $\angle \varepsilon =$                          |   | $\angle \varepsilon$                            |  |

|    |                 |   |                 |  |
|----|-----------------|---|-----------------|--|
| 1) | $\angle \alpha$ | = | $\angle \delta$ |  |
|    | $\angle \beta$  | = | $\angle \delta$ |  |
|    | $\angle \alpha$ | = | $\angle \beta$  |  |

|    |                                 |  |   |  |
|----|---------------------------------|--|---|--|
| 2) | $\angle \delta = \angle \alpha$ |  | $\angle \delta + \angle \gamma = 180^\circ$ |  |
|    |                                 |  | $\angle \alpha + \angle \gamma = 180^\circ$ |  |

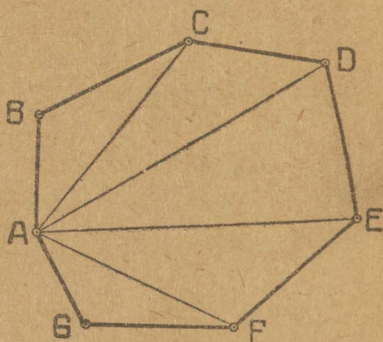
## II-ne peatükk: Kolmnurgad.

**38. Kujundid.** Tasapinnaliseks kujundiks nimetasime [3] tasapinna piiratud osa. On tasapinnalise kujundi piirideks kõverjooned, siis on see kujund kõverjooneline; on tema piirideks sirgjoone lõigud, siis on ta sirgjooneline kujund ehk paljunurk. Järjekult: **Paljunurk on joonlõikudega piiratud tasapinna osa.** Missuguses punktis üks joonlõik lõppeb, selles peab teine joonlõik algama ja viimane lõik lõppeb selles punktis, milles esimene algab.

Paljunurka piiravad joonlõigud on paljunurga küljed.

Külgede otsapunktid on paljunurga tipud.

Paljunurga külgede summa on paljunurga **übermõet** ehk **perimeeter**; kõiki külgi ühtekokku võetult ühes nende kuju ja seisukohaga nimetakse paljunurga **piirdeks**.

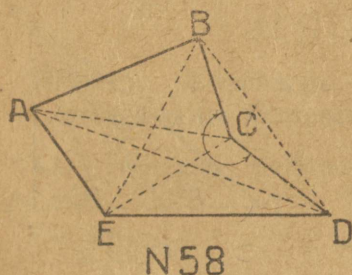


N57

Paljunurga **sisenurgaks** nimetame seda nurka, mille tippuks on paljunurga tipp, mille harudeks on paljunurga küljed ja mille sisemine vald paljunurga sisemise vallaga ühte langeb. Sisenurga kõrvunurka nimetakse **välisnurgaks**, näit.  $\angle EFH$ . Paljunurga **diagonaal** on see joonlõik, mis paljunurga kaht mitte järjes olevat tippu ühendab, näit. AC, AD, AE, AF jne.

Et iga külje lõpupunkt on järgneva külje alguspunkt, siis on igal paljunurgal niipalju tippusid kui palju külgi; et iga tipu juures on üks sisnurk, siis on paljunurgal niisama palju sisnurki kui palju tippusid ja külgi. Külgede arvu järele on olemas: kolmnurgad, nelinurgad, viisnurgad jne. Harilikus kõnes kolmnurki ja nelinurki paljunurkadeks ei nimetata.

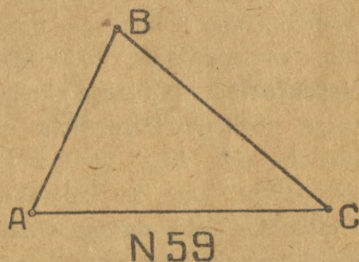
Ühest paljunurga tipust ei või me diagonaali tõmmata temasse enesesse ega kahte teise tippu, mis temast väljaminevate külgede peal on; teistesse tippudesse on võimalik diagonaali tõmmata. Kui paljunurga külgede arv on  $n$ , siis võime ühest tipust  $(n-3)$  diagonaali tõmmata; kõigist tippudest kokku  $n \cdot (n-3)$  diagonaali. Seejuures on aga iga diagonaal arvatud 2 korda, sinna ja tagasi; nii et diagonaalide arv tõepoolest 2 korda vähem on. Järjekult võib paljunurgas, millel  $n$  külge on, üleüldse  $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$  eri diagonaali tõmmata.



Kui paljunurgal kõik nurgad viltunurgad on, s. t. kui tal ühtki ülinürinurka ei ole ja kui ükski külge teist ei lõika, siis on kõik diagonaalid paljunurga sisemises vallas; on aga paljunurgal mõni ülinürinurk olemas, siis on ka mõni diagonaal väljaspool paljunurga valda,

näit. BD. Meie vaatleme edaspidi ainult esimest seltsi paljunurki.

**39. Kolmnurk.** Kolmnurgal on 3 külge, 3 tippu, 3 nurka, aga tal ei ole ühtki diagonaali. Kaks kolmnurga tippu on ühe külje otsapunktid ja kolmas tipp on selle külje vastas; ta on selle

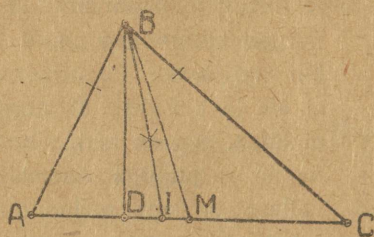


külje vastastipp, kuna külg selle tipu vastaskülg on.

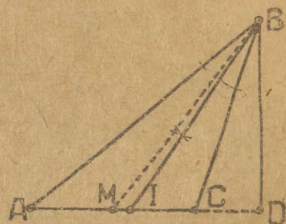
**Nurk**, mille tipp on antud külje vastas, on ise ka antud külje vastas, ja teda nimetakse selle külje **vastasnurgaks**, teised 2 nurka on selle külje juures ja neid nimetakse selle külje **lähisnurkadeks**. Näit.  $\angle B$  on külje AC vastas,  $\angle A$  ja  $\angle C$  on külje AC juures.

**Külg**, mille vastas on antud nurk, on ise ka selle nurga vastas, on selle nurga **vastaskülg**; teised 2 külge piiravad seda nurka, on seda **nurka piiravad küljed** ja **nurk on nende kahe külje vahel**, on nende **vahelnurk**.

Iga kolmnurga külge võidakse kolmnurga aluseks võtta; siis on tema vastastipp — **kolmnurga tipp**. Näit. kui me AC aluseks võtame, siis on B kolmnurga tipp.



N. 60a.



N. 60b

Kolmnurga tipust aluse ehk tema pikenduse peale alla tõmmatud perpendikulaar on kolmnurga **kõrgus**, näit. BD. Joonlõik, mis kolmnurga tippu vastaskülje keskkohaga ühendab, on **mediaan**, näit. BM. Kui nurga **poolitajast** ehk **bissektorist** räägitakse kolmnurgas, siis mõeldakse seda nurga poolitaja lõiku, mis ulatab nurga tipust kuni vastasküljeni, näit. BI. Et iga külge võidakse kolmnurga aluseks võtta, siis on kolmnurgal 3 kõrgust, 3 mediaani ja 3 bissektorit ehk nurgapoolitajat. Sõna kolmnurk tähendakse ära lühendult märgiga  $\triangle$ .

40. Teoreem. Kolmnurga välisnurk on temaga mitte kõrvuolevate sisenurcade summa.

Oletus:  $\angle BCD$  on kolmnurga  $ABC$  välisnurk.

Väide:  $\angle BCD = \angle A + \angle B$ .

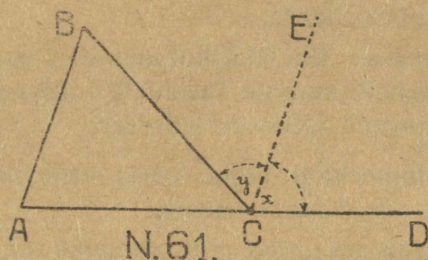
Tõestus: Tõmbame  $CE \parallel AB$ -le, siis on:

$\angle x = \angle A$ , kui vastavad nurgad,

$\angle y = \angle B$ , kui põiknurgad;

$$\angle x + \angle y = \angle A + \angle B$$

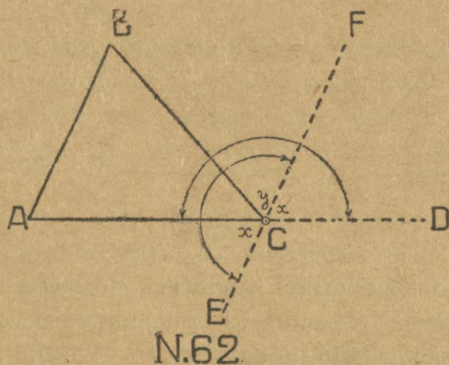
ehk:  $\angle BCD = \angle A + \angle B$ .



Järeldus: Kolmnurga välisnurk on suurem, kui ükski temaga mitte kõrvuolev sisenurk.

41. Teoreem. Kolmnurga sisenurcade summa on sirge nurk.

Väide:  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ .



**Tõestus:** Tipust C tõmbame  $EF \parallel AB$ -le;

siis on:  $\angle A = \angle x$   
 $\angle B = \angle y$   
 $\angle C = \angle C$

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle x + \angle y + \angle C = \angle DCA = \angle ECF$ ,  
a  $\angle DCA$  ehk  $\angle ECF$  on sirge nurk.

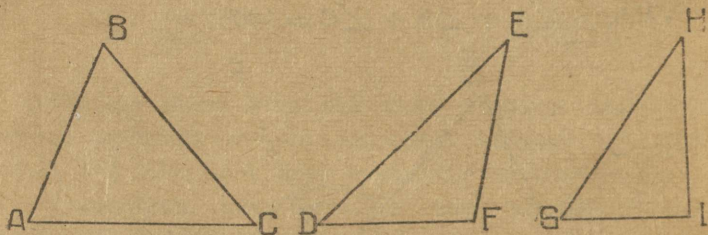
1-ne järeldus: Kolmnurgas võib olla ainult üks täisnurk, ehk üks tõmpnurk.

2-ne järeldus: Kui kolmnurgas 2 nurka teada on, siis on ka kolmas teada.

3-as järeldus: Kui ühe kolmnurga 2 nurka on teise kolmnurga kahele nurgale vastavalt võrdsed, siis on ka kolmandad nurgad isekeskis võrdsed.

42. Kolmnurkade liigid. Oma välimise kuju poolest nurkade järele nimetakse kolmnurka:

- 1) **teravnurkseks**, kui kõik 3 nurka on teravnurgad, näit.  $\triangle ABC$ ;
- 2) **tõmpnurkseks**, kui tal 1 nurk on tõmpnurk, näituseks  $\triangle DEF$ ;
- 3) **täisnurkseks**, kui tal 1 nurk on täisnurk, näit.  $\triangle GHI$ .



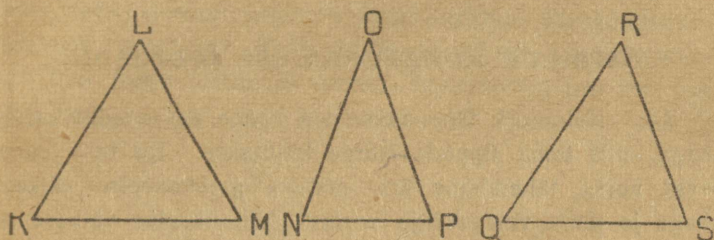
N.63.

Terav- ja tõmpnurkset kolmnurka nimetame ühise nimega **viltunurkseteks**. Täisnurkses kolmnurgas nimetakse täisnurga vastaskülge **hüpoteenus**'iks — **kaldküljeks** — GH,

ja täisnurka sünnitavaid külgi — **kateetideks** ehk **ristkülgedeks** — IG ja IH. Täisnurkses kolmnurgas on teravnurkade summa täisnurk.

Külgede järele nimetakse kolmnurka:

- 1) **võrdkülgseks**, kui kõik 3 külge isekeskis võrdsed on, näit.  $\triangle KLM$ ;
- 2) **sarikkolmnurgaks**, kui 2 külge on isekeskis võrdsed, kolmas aga ei ole, näit.  $\triangle NOP$ ;
- 3) **isekülgseks**, kui igal küljel on isesugune pikkus, näit.  $\triangle QRS$ .



N.64.

Sarikkolmnurgas võetakse harilikult see külg, mis teistega ühepikkune ei ole, **aluseks** ja tema vastastipp on kolmnurga **tipp**, mõlemad võrdsed küljed on kolmnurga **tiivad** (**sarikad**).

**43. Kujundite kongruentsus.** Kujundis pöörame oma tähelepanemist tema kuju ja tema suuruse peale.

Kaks kujundit, mis lähevad oma suuruse poolest ühte, aga oma kuju poolest lahku, on **võrdsed** ehk **ühesuurused**. Märk „ $\cong$ “.

Kaks kujundit, mis lähevad oma kuju poolest ühte, aga oma suuruse poolest lahku, on **sarnased**. Märk „ $\sim$ “.

Kaks kujundit, mis lähevad kuju ning suuruse poolest ühte, on **kongruentsed**.

Kaht kujundit, millel on üks ja seesama kuju ja üks ja

seesama suurus, võidakse teineteise peale nõnda paigutada, et nad teineteist täiesti katavad, et nad „ühtivad“.

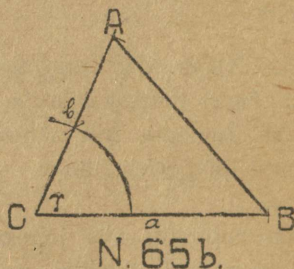
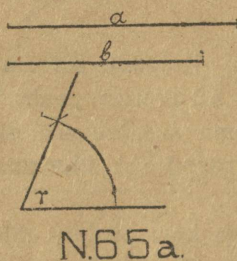
Seepärast: kaht kujundit nimetakse kongruentseks ( $\cong$ ), kui nad pealepaigutamisel teineteist täiesti katavad.

Need kongruentsete kujundite osad, näit. tipud, küljed, nurgad, kõrgused jne., mis pealepaigutamisel ühtivad, ühte langevad, on samapaiksed ehk vastavad (homoloogsed). Seepärast: kongruentsete kujundite samapaiksed osad on isekeskis võrdsed.

### Esimene kongruentsuse teoreem.

44. Kolmnurk tähendakse ära kolme suure ladinakeelse tähega, mis tema tippude juurde kirjutakse. Iga tipu juures olevat nurka tähendame ära vastava greekakeelse väikese tähega ja tema vastaskülge vastava ladinakeelse väikese tähega, nii et, näit., tipu A juures on  $\angle \alpha$  ja tipu A ja  $\angle \alpha$  vastas on külg a, kuna küljed b ja c nurka  $\alpha$ -t piiravad ja tipus A-s kokku jooksevad.

1-ne ülesanne. Kahest küljest a ja b ja nende vahel olevast nurgast  $\gamma$  tuleb kolmnurk konstrueerida.



Antud: a, b,  $\gamma$ .

Konstrueerimine: 1) Konstrueerime  $\angle C = \angle \gamma$  [18];  
2) Nurga C ühe haru peale asetame  $CB = a$ ;

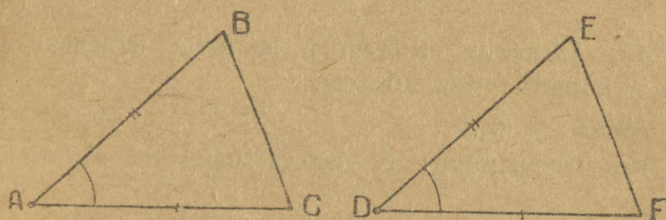
3) ja teise haru peale asetame  $CA = b$ ;

4) B ja A ühendame sirgjoone abil.

$\triangle ABC$  on otsitav kolmnurk.

Me võime konstrueerimise juures asetada  $CB = a$  paremale ehk vassakule poole punktist C, ja nurga  $\gamma$  kas ülevalpool ehk allpool CB-d konstrueerida.

Kuidas me ka seda kolmnurka ei konstrueeriks, ikka sünnivad konstrueeritud kolmnurgad oma kuju ja suuruse poolest ühte; seda tõestab järgmine kolmnurkade kongruentsuse esimene teoreem: Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad kahe külje ja nende vahelnurga poolest ühte sünnivad.



N.66.

Oletus:  $AC = DF$

$AB = DE$

$\angle A = \angle D$

Väide:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

Tõestus:  $\triangle ABC$  paigutame  $\triangle DEF$  peale nii, 1) et A langeks D peale ja 2) et AC läheks DF mööda; siis:

1) AB läheb DE-d mööda, sest et  $\angle A = \angle D$ ;

2) tipp C langeb tipu F peale, sest et  $AC = DF$ ;

3) tipp B langeb tipu E peale, sest et  $AB = DE$  ja

4) külj BC ühtib külje EF-ga, sest nende otsapunktid on ühte langenud ja kahe punkti vahel on võimalik ainult üks sirgjoon.

Niiviisi katavad kolmnurgad ABC ja DEF teineteist täielikult ja on seepärast kongruentsed, s. t.  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

**1-ne järeldus.** Kahe külje ja nende vahelnurga läbi on kolmnurga kuju ja suurus täiesti kindlaks määratud.

**2-ne järeldus.** Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui nad mõlemate kateetide poolest ühte sünnivad.

**2-ne ülesanne:** Sarikkolmnurk konstrueerida antud küljest ja tipu juures olevast nurgast.

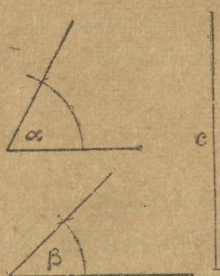
### Teine kongruentsuse teoreem.

**45. Ülesanne.** Küljest  $c$  ja tema lähisnurkadest  $\alpha$  ja  $\beta$  konstrueerida kolmnurk.

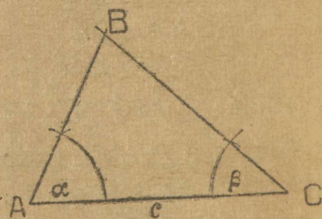
Antud:  $c, \alpha, \beta$ .

**Konstrueerimine:** 1) Teatava sirgjoone peale asetame  $AB = c$ ;

2) AB peal konstrueerime A juures  $\angle A = \alpha$  ja



N.67a.



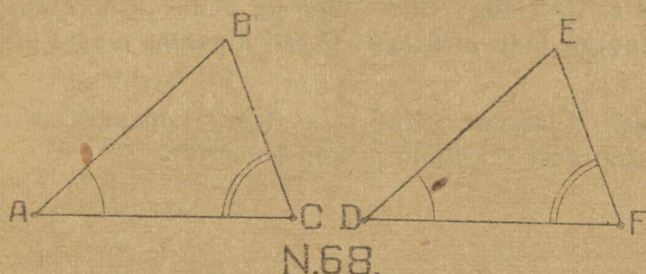
N.67b.

3) B juures  $\angle B = \beta$ .

4) Nende nurkade teised harud lõikuvad tipus C.

$\triangle ABC$  on otsitav.

Kuigi me nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  kohad ära vahetame ehk neid AB-st allapoole konstrueerime, siiski saame kuju ja suuruse poolt ainult ühe kolmnurga. Seda tõestab **kolmnurkade kongruentsuse teine teoreem: Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad ühe külje ja tema mõlemate lähisnurkade poolt ühte sünnivad.**



**Oletus:**  $AC = DF$   
 $\angle A = \angle D$   
 $\angle C = \angle F$

**Väide:**  $\triangle ABC = \triangle DEF$

**Tõestus:**  $\triangle ABC$  paigutame  $\triangle DEF$  peale nii,

1) et A langeks D peale ja 2) et AC läheks DF mööda; siis:

- 1) C langeb F peale, sest et  $AC = DF$ ;
- 2) AB läheb DE-d mööda, sest et  $\angle A = \angle D$ ;
- 3) CB läheb FE-d mööda, sest et  $\angle C = \angle F$ ;
- 4) tipp B langeb tipu E peale, sest et kaks sirgjoont võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Niiviisi katavad kolmnurgad ABG ja DEF teineteist täielikult ja on seepärast kongruentsed, s. t.  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

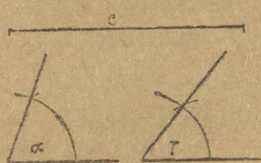
**1-ne järeldus:** Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad ühte sünnivad ühe külje ja kahe nurga poolt [41,8].

2-ne järeldus: Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui neil on üks võrdne kateet ja üks võrdne ja samapaikne teravnurk.

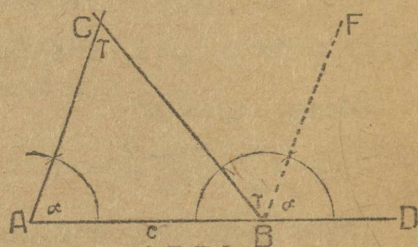
3-as järeldus: Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui nad hüpotenuusi ja teravnurga pooldest ühte sünnivad.

4-as järeldus: Ühe külje ja kahe nurga läbi on kolmnurga kaju ja suurus täiesti kindlaks määratud.

46. Ülesanne. Küljest  $c$ , tema lähisnurgast  $\alpha$  ja vastasnurgast  $\gamma$  kolmnurk konstrueerida.



N.69a



N.69b.

Antud:  $c, \alpha, \gamma$ .

Konstrueerimine: 1) Sirgjoone AD peale asetame  $AB = c$ .

2) AD peale A ja B juure asetame antud nurga  $\alpha$  nii, et  $\angle A = \alpha$  ja  $\angle FBD = \alpha$ ; siis on  $BF \parallel AC$  [29<sub>2</sub>].

3) FB peale B juure asetame antud nurga  $\gamma$  nii, et  $\angle FBC = \gamma$ ; sellega võtame sirgest nurgast  $\angle ABD$  ära  $\alpha + \gamma$ , nii et järele jääb kolmnurga kolmas nurk  $\angle ABC = \beta$ , ehk külje AB teine lähisnurk.

4) Konstrueeritud nurga  $FBC = \gamma$  teine haru lõikab A juures konstrueeritud nurga A haru punktis C.

$\triangle ABC$  on otsitav.

**Tõestus:**  $\angle FBD = \angle A (= \angle \alpha)$ ; seepärast on  $BF \parallel AC$ .  
 Et  $BF \parallel AC$ , siis on  $\angle C = \angle FBC = \angle \gamma$ . Peale selle on  $\angle A = \alpha$  ja  $AB = c$ .

Järjekult täidab  $\triangle ABC$  kõiki nõudeid ja on otsitud  $\triangle$ .

Kolmnurga külgede ja nurkade vahekord.

**47. Teoreem.** Kolmnurga võrdsete külgede vastas on võrdsed nurgad.

Oletus:  $AB = BC$ .

Väide:  $\angle A = \angle C$ .

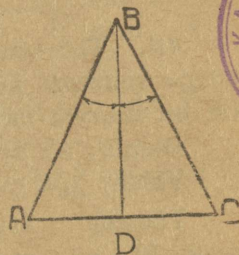
**Tõestus:** Olgu  $BD$  nurga  $B$  poolitaja, mis alust  $AC$ -d lõikab punktis  $D$ ,  
 siis on  $AB = BC$ ,

$$BD = BD,$$

$$\angle ABD = \angle CBD$$

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ [k. k. l. t. *]}$$

$$\angle A = \angle C \text{ [43].}$$



N. 70.

**1-ne järeldus:** Sarikkolmnurgas on aluse lähisnurgad isekeskis võrdsed ja mõlemad on teravad.

**2-ne järeldus:** Võrdkülgses kolmnurgas on kõik nurgad isekeskis võrdsed ja igaüks on  $60^\circ$  suur.

**Ülesanded:** 1) Sarikkolmnurk konstrueerida alusest ja aluse lähisnurgast.

2) Sarikkolmnurk konstrueerida tiivast ja aluse lähisnurgast.

3) Teised sarikkolmnurga nurgad leida, kui aluse lähisnurga suurus on: a)  $40^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $60^\circ$ ; d)  $72^\circ$ ; e)  $36^\circ$ ; f)  $68^\circ$ ; g)  $108^\circ 12'$ .

4) Sarikkolmnurga tipunurk on suur: a)  $90^\circ$ ; b)  $120^\circ$ ; c)  $36^\circ$ ; d)  $60^\circ$ ; e)  $80^\circ$ ; f)  $124^\circ 28'$ ; g)  $97^\circ 6' 28''$ . Kui suured on aluse lähisnurgad?

\*) k. k. l. t. = kolmnurkade kongruentsuse esimene teoreem.

**Vastupidine teoreem.** Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed. [Kujund 70.]

Oletus:  $\angle A = \angle C$ .

Väide:  $AB = BC$ .

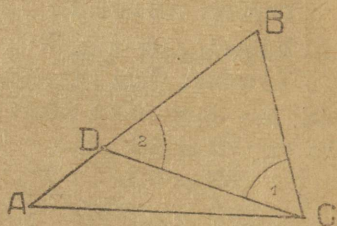
Tõestus: Nurga B jagame pooleks sirgjoone BD abil, mis AC-d D-s lõikab. Siis on:  $BD = BD$ ,  $\angle A = \angle C$  ja  $\angle ABD = \angle CBD$ . Järjekult [45,<sub>1</sub>] on  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$  ja sellega ka  $AB = BC$ .

48. Teoreem. Kolmnurga suurema külje vastas on ka suurem nurk.

Oletus:  $AB > BC$ .

Väide:  $\angle C > \angle A$ .

Tõestus: Asetame BA peale BC nii, et  $BD = BC$  ja ühendame D C-ga. Siis leiame:



N.71.

$\angle C > \angle 1$ , sest tervik on suurem kui tema osa [5,<sub>3</sub>];

$\angle 1 = \angle 2$ , sest  $BD = BD$ ;

$\angle 2 > \angle A$ , kui kolmnurga ADC välisnurk.

---

$\angle C > \angle A$ .

✓ **Vastupidine teoreem.** Kolmnurga suurema nurga vastas on ka suurem külg.

Oletus:  $\angle C > \angle A$ .

Väide:  $AB > BC$ .

Tõestus (vastuväiteline): 1)  $AB$  ei või olla vähem kui  $BC$ , sest muidu oleks (päripidise teoreemi põhjal)  $\angle C < \angle A$ .

2)  $AB$  ei või olla võrdne  $BC$ -le, sest muidu oleks  $\angle C = \angle A$ .

Nii jääb ainu võimalusena üle, et  $AB > BC$ .

Järeldus. Täisnurkses kolmnurgas on hüpoteenus kõige pikem külg.

Kolmnurga külgede summa ja vahe.

49. Teoreem. Kolmnurgas on kahe külje summa suurem kui kolmas külg.

Oletus:  $AB$  on kõige suurem külg  $\triangle$ -as  $ABC$ .

Väide:

$$AD + DB > AB.$$

Tõestus: Teeme murdjoone  $ADB$  sirgeks selle läbi, et me asetame  $AD$  pikenduse peale  $DC = DB$ ; siis on  $AC = AD + DB$ .

Ühendame  $C-B$ -ga; siis on  $\triangle$ -as  $BCD$ :

$\angle \alpha = \angle \beta$ . Aga  $\angle \beta$  on ainult osa  $\angle ABC$ -st; seepärast:  $\angle ABC > \angle \beta$

$$\angle ABC > \angle \alpha$$

$\triangle$ -as  $ABC$  [48 järele]:  $AC > AB$ ;

see tähendab:  $AD + DB > AB$ .

50. Teoreem. Kolmnurgas on kahe külje vahe vähem kui kolmas külg.

Väide:  $AB - BC < AC$ .

Tõestus: Asetame  $BA$  peale  $BC$  nii, et  $BD = BC$  ja ühendame  $C D$ -ga. Siis on  $\angle \alpha = \angle \beta < 90^\circ$  [47,1] ja  $AD = AB - BC$ . [40, järeld.] järele on  $\angle \gamma < \angle \beta$  ja järjelikult

$$\angle \gamma < 90^\circ$$

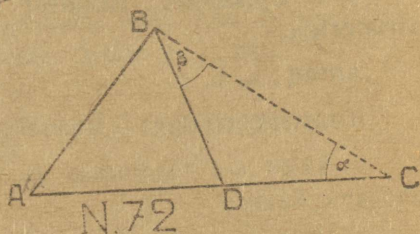
[21,6a] järele on:  $\angle \delta > 90^\circ$

$$\angle \gamma < \angle \delta$$

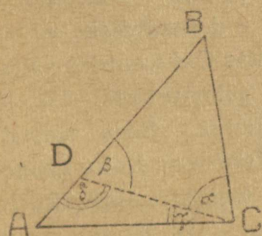
$$AD < AC$$

ehk  $AB - BC < AC$ .

Teine tõestuse viis: Teada on, et  $AC + CB > AB$  ehk  $AB < AC + CB$ . Kui mõlemalt poolt ära võtta  $BC$ , siis saame  $AB - BC < AC$  [5,9].



N.72



N.73.

## Kolmas kongruentsuse teoreem.

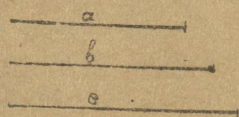
51. Ülesanne. Kolmest küljest kolmnurk konstrueerida.

Antud:  $a, b, c$ .

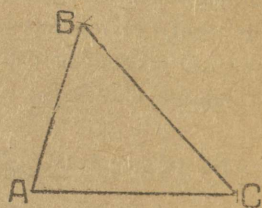
Konstrueerimine: 1) Mõne sirgjoone peale asetame  $AC = b$ ;

2) külge  $a$ -d raadiuseks ja tippu  $C$ -d tsentriks võttes tõmbame kaare;

3) Külge  $c$ -d raadiuseks ja tippu  $A$ -d tsentriks võttes tõmbame kaare;



N.74 a.



N.74 b.

4) Need kaks kaart lõikuvad tipus  $B$ ;

5)  $B$  ühendame  $A$ -ga ja  $C$ -ga.

$\triangle ABC$  on otsitav.

Ehk küll kaared lõikuvad kahes punktis — ülevalpool  $a$  allpool  $AC$ -d, ja ehk küll me võime  $a$ -d raadiuseks võttes  $A$ -d tsentriks võtta ja  $c$ -d raadiuseks võttes  $C$ -d tsentriks võtta, siiski on kõigil niiviisi konstrueeritud kolmnurkadel üks ja seesama kuju ja üks ja seesama suurus. Seda tõestab kolmnurkade kongruentsuse kolmas teoreem: Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad kõigi kolme külge poolest ühte sünnivad.

Oletus:  $DE = AB$

$EF = BC$

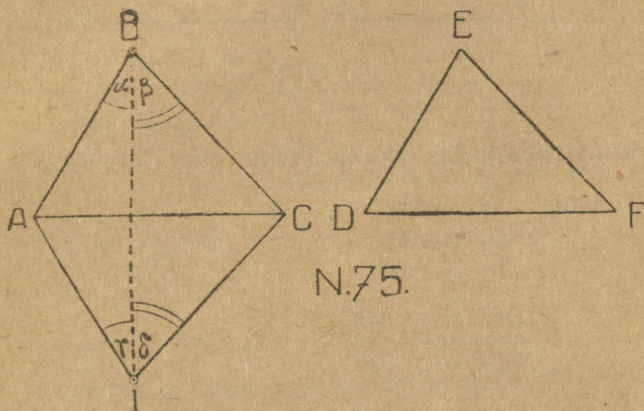
$DF = AC$ .

Väide:  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ .

Tõestus:  $\triangle DEF$  paigutame  $\triangle ABC$  külge nii,

- 1) et D langeks A peale,
- 2) et DF läheks AC-d mööda ja
- 3) et  $\triangle DEF$  teisele poole AC-d langeks.

Siis: 1) F langeb C peale, sest  $DF = AC$  ja 2)  $\triangle DEF$  aseneb  $\triangle AIC$  kohale. Ühendame nüüd tipu B tipu I-ga, siis saame kaks sarikkolmnurka  $\triangle BAI$  ja  $\triangle BCI$ .



$$\begin{array}{l} \triangle\text{-as } BAI \text{ on } \angle\alpha = \angle\gamma, \text{ sest } AI = AB, \\ \triangle\text{-as } BCI \text{ on } \angle\beta = \angle\delta, \text{ sest } CI = CB. \\ \hline \angle B = \angle I = \angle E. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Niiviisi on } \angle E = \angle B \\ DE = AB \\ EF = BC \end{array}$$

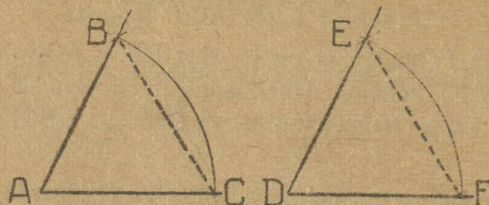
$$\triangle DEF \cong \triangle ABC \text{ [k. k. I. t.]}$$

Järeldus: Kolme külje abil on kolmnurga kuju ja suurus täiesti kindlaks määratud.

Ülesanded: 1) Sarikkolmnurk konstrueerida alusest ja küljest.

2) Võrdkülgne kolmnurk konstrueerida antud küljest.

52. 1-ne ülesanne: Antud nurk tuleb sirgjoone peal antud punkti juure asetada.



N.76.

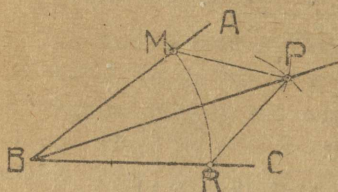
Konstrueerimine: Vaata [18].

Tõestus:  $DE = AB$   
 $DF = AC$   
 $FE = CB$

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC$$

$$\angle EDF = \angle BAC.$$

2-ne ülesanne: Antud nurk pooleks jagada.



N.77

Konstrueerimine: 1) Tähendame ära antud nurga harrude peal mingisugused võrdsed lõiked  $BM = BR$ .

2) Ükskõik kui pikkade, kuid siiski võrdsete raadiustega kujutame punktidest M ja R kaared, mis lõikuvad punktis P.

3) Läbi B ja P tõmbame sirgjoone BP. BP jagab nurga ABC pooleks, nii et  $\angle ABP = \angle PBC$ .

Tõestus:  $\triangle MBP \cong \triangle RBP$ , sest et  $MB = RB$ ,  $BP = BP$  ja  $MP = RP$ ; seepärast  $\angle ABP = \angle CBP$ .

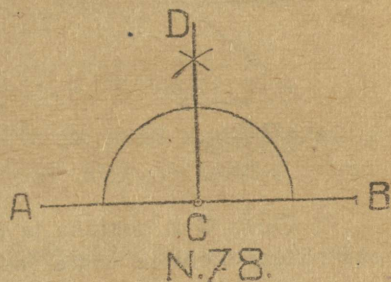
Ülesanded: 3) Sirge nurk pooleks jagada.

4) Konstrueerida täisnurk antud sirgjoone peal antud punkti juures.

5) Sarikkolmnurga tipunurk pooleks jagada.

6-es ülesanne: Sirgjoone peal antud punktist perpendikulaar sellele sirgjoonele tõmmata.

Konstrueerimine: Selleks on tarvis ainult seda punkti sirge nurga tipuks ja sirgjoont sirge nurga harudeks võtta ja sirge nurk pooleks jagada.



$$\frac{\angle ACD = \angle BCD}{DC \perp AB.}$$

81) Konstrueerida täisnurkne  $\triangle$ : 7) kateetidest;

82) 8) kateedist ja tema teravast lähisnurgast;

83) 9) kateedist ja tema vastasnurgast;

10) hüpotenuusist ja teravast nurgast;

84) 11) sarikkolmnurk alusest ja tipunurgast;

85) 12) täisnurkne sarikkolmnurk hüpotenuusist.

86) 13) Täisnurk kolmeks võrdseks jaoks jagada.

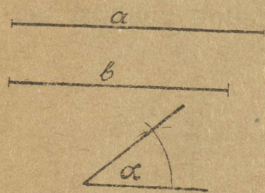
### Neljas kongruentsuse teoreem.

53. Ülesanne. Kahest küljest ja suurema külje vastasnurgast konstrueerida kolmnurk.

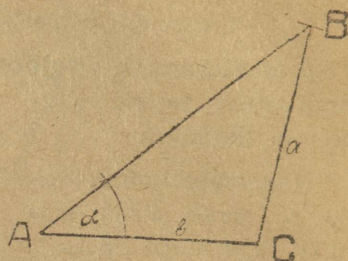
Antud:  $a, b, a; a > b.$

**Konstrueerimine:** 1) konstrueerime  $\angle A = \alpha$ .

2) Konstrueeritud nurga ühe haru peale asetame seda nurka piirava külje  $b$  nii, et  $AC = b$ ;



N.79a.



N.79b.

3) Tippu C-d tsentriks ja nurga vastaskülge  $a$ -d raadiusseks võttes tõmbame kaare, mis nurga A teist haru lõikab punktis B.

4) B ja C ühendame sirgjoonega.

$\triangle ABC$  on otsitav.

**Kolmnurkade kongruentsuse neljas teoreem:** Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad kahe külje ja suurema külje vastasnurga poolest ühte sünnivad.

Oletus:  $DF = AC$ ,  $DF > DE$

$DE = AB$ ,  $AC > AB$

$\angle E = \angle B$ .

Väide:  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ .

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$  nii  $\triangle ABC$  külge,

1) et D langeks A peale,

2) et DF läheks AC-d mööda ja

3) et  $\triangle DEF$  teisele poole AC-d langeks.

Siis: 1) F langeb C peale, sest et  $DF = AC$  ja 2)  $\triangle DEF$  aseneb  $\triangle AIC$  kohale.

Ühendame nüüd punkti B punkti I-ga, siis saame 2 kolmnurka:  $\triangle BAI$  ja  $\triangle BCI$ .

Me teame, et  $\angle B = \angle I (= \angle E)$ ;

$\triangle$ -gas BAI on  $\angle \alpha = \angle \gamma$ , sest  $AB = AI$ .

$\triangle$ -gas BCI on  $\angle \beta = \angle \delta$   
 $IC = BC$ , ehk  $EF = BC$ .

Niiviisi on:  $EF = BC$

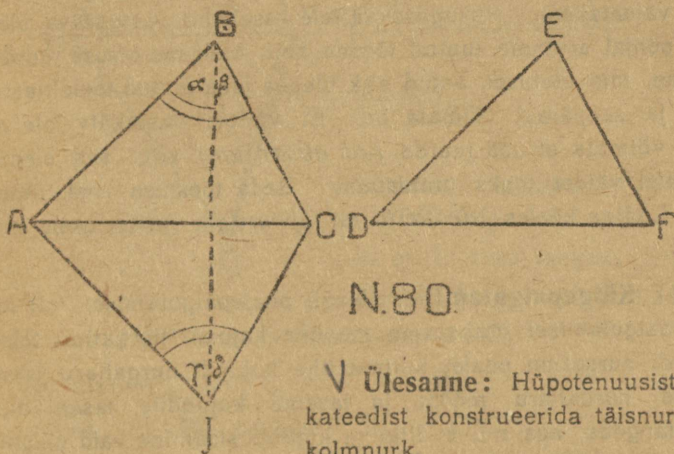
$DF = AC$  ehk  $\angle E = \angle B$

$DE = AB$

$\triangle DEF \cong \triangle ABC$  [k. k. III-nda ehk I-se t. j.]

1-ne järeldus: Kahe külje ja neist suurema külje vastasnurga läbi on kolmnurga kuju ja suurus täiesti kindlaks määratud.

2-ne järeldus: Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui nad hüpoteenuusi ja ühe kateedi paari poolest ühte sünnivad.



Ülesanne: Hüpotenuusist ja kateedist konstrueerida täisnurkne kolmnurk. 84

54. Tõestamise viisid. Teoreemide tõestamisel tarvitame järgmisi võtteid: 1) pealepaigutamist, 2) otsekohest tõestust, 3) vastuväitelist tõestust ja 4) külgepaigutamist.

1) **Pealepaigutamine.** Kujundite teineteise peale paigutamist algame nurga tipust. Kui nurkade tipud teineteise peale on langenud, siis juhime ühe kujundi nurga haru teise kujundi nurga haru mööda; ja viimaks pöörame pealepaigutatavat kujundit tema ühtelangenud haru, kui telje, ümber nii kaua, kuni ühe kujundi tasapind teise kujundi tasapinnaga ühte langeb ja ühe kujundi sisemine vald teise kujundi sisemise valla peale langeb. Sellega lõppeb meie tegevus; meile jääb järele ainult tähele panna, kuhu langevad nurga teine haru, kujundi külgede otsapunktid ja terve pealepaigutatav kujund.

2) **Otsekohene tõestus.** Selle nime alla ühendame neid võtteid, milles me oletuse ja juba tuntud tõdede põhjal järeldame ja ühe otsuse juurest teise juurde üle läheme nii kaua, kuni me selle otsuse juurde jõuame, mida me tõeks teha väitsime.

3) **Vastuväiteline tõestus** seisab selles, et me oletame tõeks seda, mis väitele otsekohe vastu käib (sellele, mida tõeks teha väidetakse). Niisuguse väitele otsekohe vastukäiva oletuse põhjal arutame tuntud tõdede abil, kuni me otsuse juurde jõuame, mis oletuses antud ehk ülepea juba tuntud tõele vastu käib ja seepärast võimata on. Et väitele vastukäiv oletus meid võimata otsuse juurde (*ad absurdum*) viib, siis oleme sunnitud väidet tõeks tunnistama. Seda tõestuse viisi nimetatakse Ladina keeles: *deductio ad absurdum* (mõttetusele viimine).

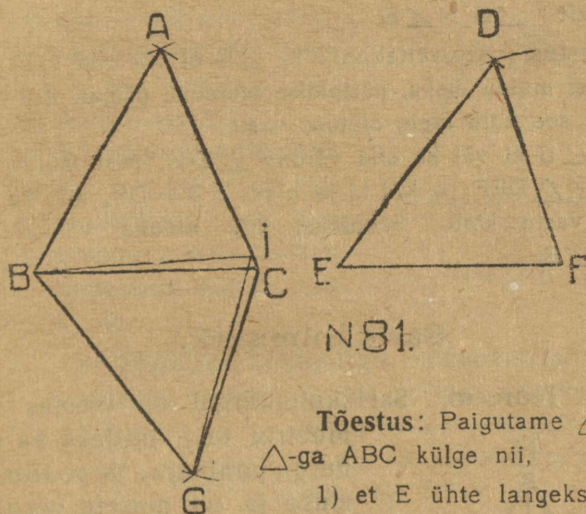
4) **Külgepaigutamine.** Nagu pealepaigutamisel, nii ka külgepaigutamisel mahutame me ühe kujundi nurgatipu teise kujundi nurgatipu peale, juhime ühe kujundi nurgaharu teise kujundi nurgaharu mööda ja laseme kujundite tasapinnad ühte langeda, aga nii, et liikuva kujundi sisemine vald paigaloleva kujundi välimise valla peale langeks. Siis sünnitavad need kaks kujundit ühe kujundi, milles me mõne abijoone tõmbame. Edasi otsekohest tõestust tarvitades jõuame soovitud otsusele.

Kolmnurkade mitte-kongruentsus.

55. Teoreem. Kui ühe kolmnurga kaks külge vastavalt võrduvad teise kolmnurga kahele küljele, aga nende vahel olevad nurgad võrdsed mitte ei ole, siis on neist suurema nurga vastas suurem külg.

Oletus:  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $\angle B > \angle E$ .

Väide:  $AC > DF$ .



N.81.

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$   
 $\triangle$ -ga ABC külge nii,

- 1) et E ühte langeks B-ga,
- 2) et EF langeks BD-d peale ja

3) et  $\triangle DEF$  langeks teiselepoole BC-d.

Siis aseneb  $\triangle DEF$   $\triangle BGC$  kohale.

Jagame  $\angle ABG$  pooleks. Et  $\angle ABC > \angle GBC$  (ehk  $\angle DEF$ ), siis läheb  $\angle$ -ga ABG poolitaja  $\angle$ -ga ABC sisemist valda mööda ja lõikab AC-d punktis I.

Ühendame G ja I ja vaatleme  $\triangle$ -ki ABI ja GBI, ja pärast veel  $\triangle$ -a GIC.

$$\begin{aligned}
 AB &= BG (= DE) \\
 BI &= BI \\
 \angle ABI &= \angle GBI \text{ (jagat.)} \\
 \triangle ABI &\cong \triangle GBI \\
 AI &= GI.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangle\text{-as } GIC &\text{ on } GI + IC < CG, \\
 \text{aga} & \quad \quad \quad GI = AI \text{ ja } CG = DF \\
 & \quad \quad \quad \hline
 & \quad \quad \quad AI + IC > DF, \\
 \text{ehk} & \quad \quad \quad AC > DF.
 \end{aligned}$$

**Vastupidine teoreem:** Kui ühe kolmnurga kaks külge vastavalt võrduvad teise kolmnurga kahele küljele, aga kolmandad küljed võrdsed mitte ei ole, siis on neist suurema vastas ka suurem nurk.

**Oletus:**  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $AC > DF$ .

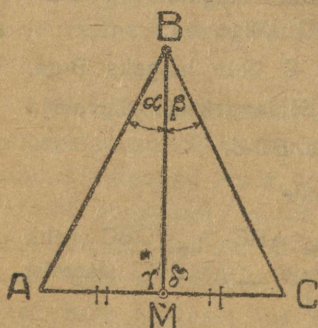
**Väide:**  $\angle B > \angle E$ .

**Tõestus** (vastuväiteline): 1)  $\angle B$  ei või olla vähem kui  $\angle E$ , sest muidu oleks, päripidise teoreemi põhjal,  $AC$  vähem kui  $DF$ ; see käib meie oletuse vastu.

2)  $\angle B$  ei või ka olla võrdne  $\angle E$ -le, sest muidu oleks  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  [k. k. I t.] ja oleks  $AC = DF$ , mis ka meie oletuse vastu käib. Seepärast jääb ainuke võimalus, et  $\angle B > \angle E$ .

### Sarikkolmnurk.

56. Teoreem. Sarikkolmuurgal on olemas sümmeetria telg, milleks on tipunurga poolitaja; ta poolitab ka aluse ja on alusele perpendikulaarne.



N.82.

**Oletus:**  $AB = BC$ ,  
 $\angle \alpha = \angle \beta$ .

**Väide:**  $BM$  on sümme. telg,  
 $AM = MC$ ,  $BM \perp AC$ .

**Tõestus:** Murrame  $\triangle ABC$  nurgapoolitajat  $BM$  mööda kahekorra, siis läheb  $BC$   $BA$ -d mööda,

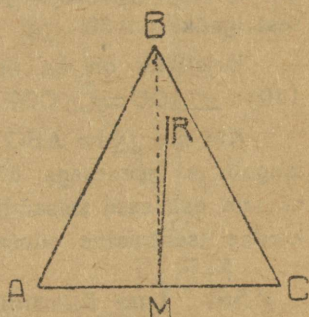
sest et  $\angle \alpha = \angle \beta$ , C langeb A peale, sest et  $BC = BA$ , MC langeb ühte BA-ga ja  $\triangle$ -gad ABM ja CBM katavad teineteist täiesti. Järgelikult on nurgapoolitaja BM  $\triangle$ -ga ABC sümmeetria telg ja A ja C on BM kohta sümmeetrilised punktid. Sellest järgneb,  $MC = MA$  ja  $BM \perp AC$  [25,1].

**Vastupidised teoreemid:** Sarikkolmnurgas langeb sümmeetria teljega ühte 1) aluse

**mediaan** — sest läbi kahe punkti B ja M on võimalik ühtainust sirgjoont tõmmata [6].

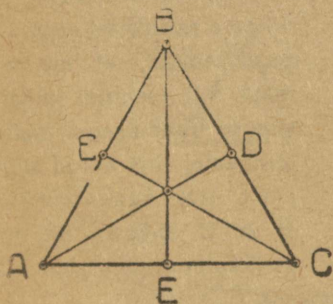
2) **kõrgus** — sest antud punktist B antud sirgjoone AC peale on võimalik alla tõmmata ühtainust perpendikulaari [26],

3) **aluse keskpPENDIKULAAR** — sest antud punktist M on võimalik antud sirgjoonele AC üles tõmmata ühtainust perpendikulaari [26] ja niisugustena esineb juba sümmeetria telg.



N.83.

57. Võrdkülgse kolmnurga sümmeetria. Võrdkülgses kolmnurgas võime igaüht külge aluseks võtta, seepärast on võrdkülgtsel kolmnurgal 3 sümmeetria telge — AD, BE, CF\*).



N.84

Kõik kolm sümmeetria telge lõikuvad ühes punktis; see punkt on võrdkülgse kolmnurga sümmeetria tšenter ja võrdkülgsel kolmnurgal on kolmekeelne tsentraalne sümmeetria.

**Tõestus:** Et  $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$  ja et AD ja

\*) Joon. N. 84 palutakse külje B peal olevat tähte lugeda „F“ ja  $\triangle$ -gas olevat lõikepunkti lugeda „O“.

CF on sümmeetria teljed, siis on  $\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$   
 $OA = OC$  ja sarikkolmnurkade AOC ja ABC ühise aluse AC  
keskperpendikulaar läheb nende tippudest O ja B läbi ja  
langeb ühte  $\triangle$ -ga ABC sümmeetria teljega BE, mis niiviisi  
AD ja CF lõikepunktist O läbi läheb.

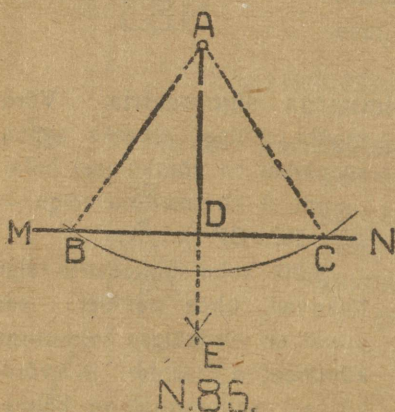
Võrdkõlgne  $\triangle ABC$  jaguneb kolmeks kongruentseks  
sarikkolmnurgaks:  $\triangle AOC \cong \triangle COB \cong \triangle BOA$ , sest nende  
alused on ühepikkused ja aluste lähisnurgad on ühesuured,  
sest igaüks on  $30^\circ$ .

Järjekult on ka tipunurgad ühesuured ja igaüks on  
 $120^\circ$ :  $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$ .

Kui me  $\triangle$ -ka ABC pöörame O ümber  $120^\circ$  võrra, siis  
langeb ta iseenesega ühte ja pärast kolmandat pööret tuleb  
ta oma esimesse seisandisse tagasi. Järjekult on tal kolme-  
kordne tsentraalne sümmeetria ja O on sümmeetria tsepter.

758. 1-ne ülesanne. Väljaspool sirgjoont olevast

punktist selle sirgjoone  
peale tõmmata perpen-  
dikulaar.



**Konstrueerimine:**

1) Antud punkti A  
võtame sarikkolmnurga ti-  
puks seeläbi, et me te-  
mast kui tsestrist mingi-  
suguse raadiusega kaare  
tõmbame, mis antud sirg-  
joont MN kahes punktis  
B ja C lõikab. BC on  
sarikkolmnurga alus ja

AB ja AC on tema tiivad (sarikad).

2) Nüüd poolitame sarikkolmnurga tipunurga BAC see-  
läbi, et punktide B ja C mõne ühise raadiusega kaared  
tõmbame, mis lõikuvad punktis E.

3) A ja E läbi tõmbame sirgjoone AE (ehk AD).  $AE \perp MN$  ehk  $AD \perp MN$  [56].

✓ 2-ne ülesanne. Antud joonlõik pooleks jagada.

**Konstrueerimine.** A-d ja B-d tsentriteks võttes tõmbame võrdsete raadiustega kaks kaart, mis punktides E ja D lõikuvad.

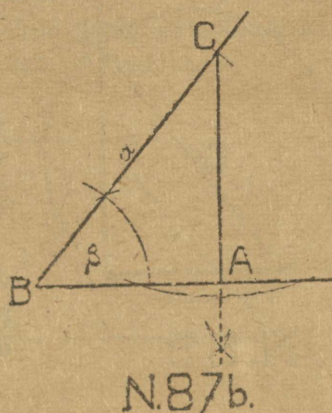
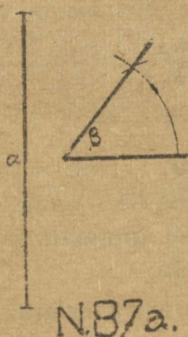
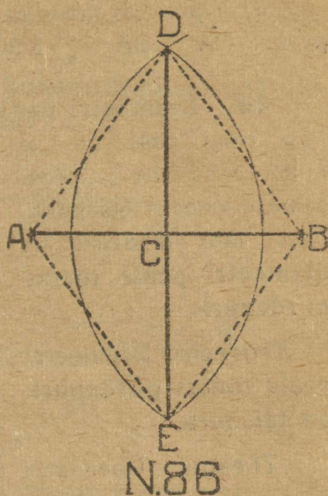
Sirgjoon ED jagab AB pooleks ja  $ED \perp AB$ .

**Tõestus.**  $\triangle DAB$  on sari- kolmnurk ja DE tema tipunurga poolitaja.

Järjel.  $AC = CB$  ja  $ED \perp AB$  [56].

3-as ülesanne. Antud joonlõigu keskkohast tõmata perpendikulaar. Vaata 2-ne ülesanne.

✓ 4-as ülesanne. Hüpotenuusist ja teravnurgast konstrueerida täisnurkne kolmnurk.



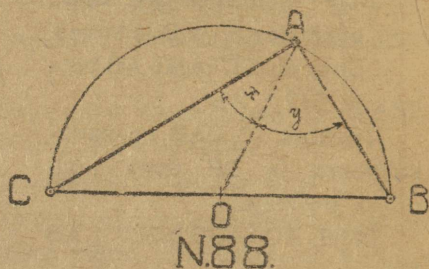
**Konstrueerimine:** 1) Konstrueerime antud teravnurga  $\angle B = \beta$ .

2) Nurga B ühe haru peale asetame antud hüpoteenusi a,  $BC = a$ .

3) Tipust C tõmbame perpendikulaari nurga B teise haru peale:  $CA \perp BA$ .  $\triangle ABC$  on otsitav.

**59. Diameetri peale toetav piirdenurk.** Nurk, mille tipp ringi peal on, ja mille harud ühe ja selle sama diameetri otsapunktidest läbi lähevad, on diameetri peale toetav piirdenurk.

**Teoreem.** Diameetri peale toetav piirdenurk on täisnurk.



**Tõestus:** Ühendame tippu A tsentriga O, siis on:

$\triangle$ -gas AOC  $AO = CO$ , seepärast

$$\angle x = \angle C \quad [47].$$

$\triangle$ -gas AOB  $AO = BO$ , seepärast

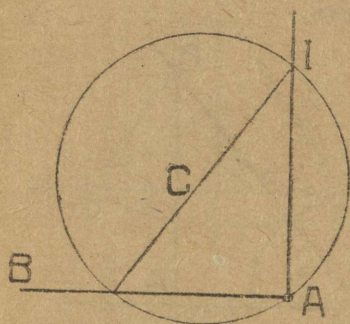
$$\angle y = \angle B$$

---


$$\angle x + \angle y = \angle C + \angle B.$$

$$\text{ehk: } \angle A = \angle B + \angle C.$$

Et  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , siis saame, kui me summa  $\angle B + \angle C$  asemele paneme  $\angle A$ :  $2\angle A = 180^\circ$ ; järjekult:  $\angle A = 90^\circ$ .



N.89.

**60. 1-ne ülesanne.** Joonlõigule tema otsapunkti tõmmata perpendikulaar.

**Konstrueerimine:**

1) Tsentriks võttes väljaspool AB-d olevat punkti C-d, tõmbame ringi, mis A-st läbi läheb ja AB-d lõikab punktis D.

2) Läbi lõikepunkti D ja tsentri C tõmbame diameetri DI.

3) Läbi A ja I tõmmatud sirgjoon AI on otsitav:  $AI \perp AB$  sest et  $\angle DAI = 90^\circ$ , ta on piirdenurk, mis ennast diameetri peale toetab [59].

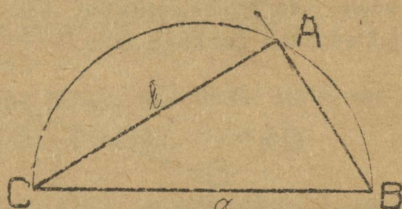
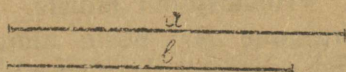
**2-ne ülesanne. Täisnurkne kolmnurk konstrueerida hüpoteenusist ja kateedist. Antud: a, b.**

**Konstrueerimine:**

1) Antud hüpoteenuusi  $CB = a$  võtame diameetriks, CB-d pooliks jagades leiame tsentri ja tõmbame CB üle poolringi.

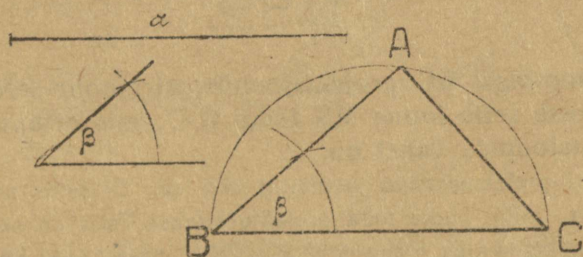
2) Selle poolringi sisse tõmbame pingjoone  $CA = b$ .

$\triangle CAB$  on otsitav, sest  $\angle CAB$  on diameetri peale toetav piirdenurk ja seega  $90^\circ$ .



N.90.

**3-as ülesanne. Täisnurkne kolmnurk konstrueerida hüpoteenusist ja teravnurgast. Antud: a,  $\beta$ .**



N.91.

**Konstrueerimine:** 1) Antud hüpoteenuusi  $CB = a$  võtame diameetriks ja tõmbame tema üle poolringi.

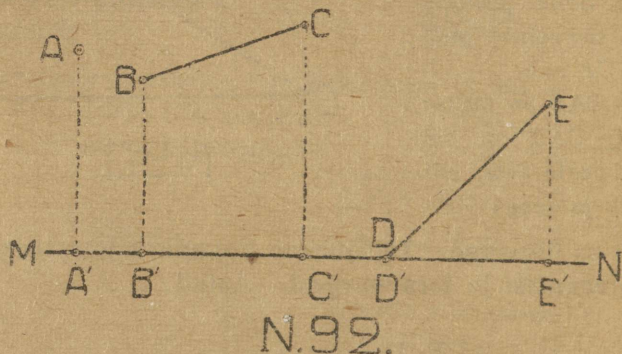
2) CB peal konstrueerime B juures antud teravnurga  $B = \beta$ , mille teine haru poolringi punktis A lõikab.

$\triangle BAC$  on otsitav, sest  $\angle BAC$  on diameetri peale toetatav piirdenurk ja seega täisnurk  $90^\circ$ .

4-as ülesanne. Sarikkolmnurk konstrueerida küljest ja kõrgusest.

61. Projektsjoooni mõiste. Punkti A projektsjoooniks sirgjoone MN peale nimetakse A-st MN peale tõmmatud perpendikulaari ( $AA'$ ) alust  $A'$ .

Kui punkt ise (näit. D) selle sirgjoone peal on, mille peale teda projekteeritakse, siis langeb projektsjoon ( $D'$ ) projekteeritava punktiga ühte.



Joonlõigu BC projektsjoooniks sirgjoone MN peale nimetakse selle joone MN lõiku  $B'C'$ , mis otsapunktide projektsjooonide vahel on.

Kui projekteeritava joonlõigu üks ots D selle sirgjoone peal on, mille peale teda projekteeritakse, siis on see lõigu DE projektsjoooniks joone MN lõik  $DE'$ , mille üheks otsapunktiks D ise on ja teiseks otsapunktiks on punkti E projektsjoon  $E'$  MN peale.

Joonlõiku DE-d ennast nimetame **projekteeritavaks**, perpendikulaari  $EE'$ -d **projekteerijaks** ja projekteeritavast ja

projektsjoonist sünnitud nurka  $\angle EDE'$ -d nimetame **kallakuseks** ehk **tõusuks**.

Edaspidi on meil tegemist peaaesjalikult selle projektsjooni erijuhtumisega. Siin on selge, et projekteeritav  $DE$  on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, projekteerija  $EE'$  ja projektsjoon  $DE'$  on kateetid.

## Perpendikulaar ja kaldjooned.

**62. a) Teoreem.** Kui väljaspool sirgjoont olevast punktist selle sirgjoone peale on tõmmatud perpendikulaar ja kaldjooned, siis:

- 1) on perpendikulaar lühem kui ükski kaldjoon;
- 2) võrdsetele projektsjoonidele vastab  $a$  ja  $v$  kaldjooned;
- 3) pikemale projektsjoonile vastab pikem kaldjoon.

Oletus:

- 1)  $AP \perp MN$
- 2)  $PC = PB$
- 3)  $PD > PB$ .

Väide:

- 1)  $AP < AB$
- 2)  $AC = AB$
- 3)  $AD > AB$ .

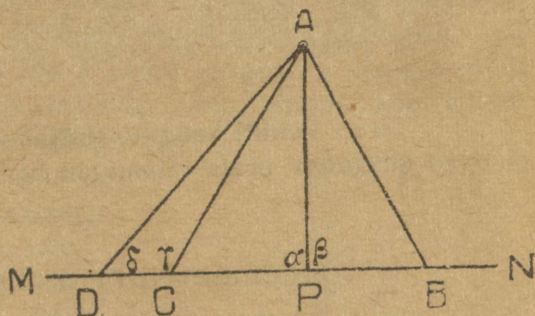
Tõestus:

- 1) Täisnurkses kolmnurgas  $APB$  on

kateet  $AP$  vähem kui hüpotenuus  $AB$  [48, järeldus].

2)  $\triangle APC \cong \triangle APB$ , sest  $AP = AP$ ,  $PC = PB$ ,  $\angle \alpha = \angle \beta (= 90^\circ)$ , järele on  $AC = AB$ .

3) Et  $AP \perp MN$ , siis on  $\angle \alpha = 90^\circ$  ja  $\angle \gamma > 90^\circ$ , sest ta on kolmnurga  $APC$  välisnurk; et kolmnurga  $ADC$



N93.

$\angle \gamma > 90^\circ$ , siis on  $\angle \delta < 90^\circ$  ja  $\angle \gamma > \angle \delta$ ; seepärast on  $AD > AC$  [48] ehk  $AD > AB$ .

**b) Vastupidised teoreemid:** Kui antud punktist antud sirgjoone peale tõmmata igasugused sirgjooned, siis:

1) kõige lühem nendest on perpendikulaarne antud sirgjoonele;

2) võrdsetel kaldjoontel on võrdsed projektsioonid;

3) pikemal kaldjoonel on pikem projektsioon.

**1-ne tõestus:** Ei oleks see kõige lühem joon AP mitte perpendikulaarne MN-le; siis peaks aga, päripidise teoreemi põhjal, see „mingi teine joon“ veel lühem olema kui kõige lühem joon AP, mis ometi võimata on.

**2-ne tõestus:** Kui  $AC = AB$  ja  $AP \perp CB$  siis on  $\triangle CAB$  — sarikkolmnurk ja  $PC = PB$  [56].

**3-as tõestus:** Kui  $AD > AB$ , siis ei või olla  $PD < PB$ , sest muidu peaks olema  $AD < AB$ ; ka ei või olla  $PD = PB$ , sest muidu peaks olema  $AD = AB$ . Jääb ainuke võimalus, et  $PD > PB$ .

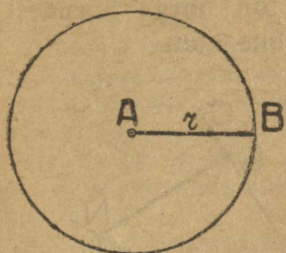
us. Punkti kaugust sirgjoonest esitab sellest punktist sirgjoone peale tõmmatud perpendikulaar.

## Geomeetriline koht.

**63. Ülesanne.** Leida punkt, mis antud punktist A on antud kaugusel r.

**Lahendamine.** Antud punktist A tõmbame kiire mis tahes sihis ja selle kiire peale asetame antud kauguse  $AB = r$ . Punkt B täidab antud nõuet. Kiire AB võime mis tahes sihis võtta. Seepärast mitte ainult punkt B, vaid ka kõik punktid, mis leiduvad punktist A kui tsentrist raadiusega r tõmmatud ringil, täidavad antud nõuet. Punktid, mis sõõri

sees on, niisama ka punktid, mis väljaspool sõõri on, ei täida seda nõuet mitte, sest esimeste punktide kaugus tsentrist A on vähem kui  $r$ , ja viimaste punktide kaugus tsentrist A on suurem kui  $r$ . Siiski on ka ringi peal olevaid punkteisid lõpmata palju ja meie ülesandel on lõpmata palju lahendusi.



N.94.

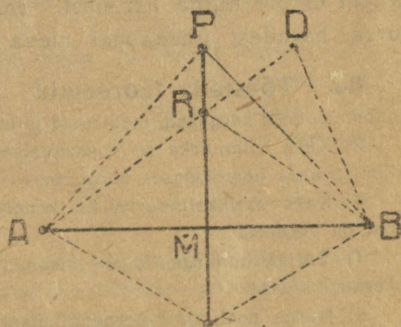
Ülesandel, millel lõpmata palju lahendusi on, nimetakse **umbmääraseks**. Kui seesuguse ülesande lahendamisel ühe punkti asemel saadakse lõpmata palju ühe joone peal olevaid punkteisid, siis nimetakse seda joont **antud punkti geomeetriliseks kohaks**.

Definitsioon. Antud punkti geomeetiline koht on joon (ehk mitu joont), mille kõigil punktidel on selle punkti käest nõutav omadus, ilma et väljaspool seda joont veel mingi niisugune punkt oleks. Järjekult:

1) Antud punktist A antud kaugusel  $r$  oleva punkti geomeetiline koht on ring, mis tõmmatakse antud punktist A ja antud kaugusega  $r$ .

2-ne näitus. Kahest antud punktist ühekaugel oleva punkti geomeetiline koht on neid kaht punkti ühendava joonlõigu keskpärdikulaar.

Tõestus: 1)  $AP = BP$ ,  $AR = BR$ ,  $AN = BN$ , sest et  $AM = MB$  ja võrdsetele projektsioonidele vastavad võrdsed kaldjooned [62,2];

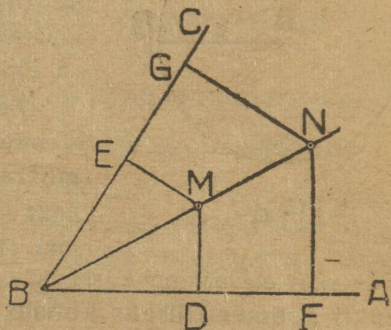


N.95.

2)  $DR + RB > DB$ ; aga  $RB = RA$ , järjekult  $DR + RA > DB$ ; s. o.  $DA > DB$ .

3-as näitus: Nurga poolitaja on nurga harudest ühekaugel oleva punkti geomeetiline koht.

Tõestus: 1) Näitame, et iga poolitaja peal olev punkt ühekaugel on nurga harudest. Selleks võtame punkti M ja tõmbame  $MD \perp AB$  ja  $ME \perp CB$ . Siis on:  $MB = MB$ ,  $\angle D = \angle E$  ( $= 90^\circ$ ),  $\angle MBD = \angle MBE$ ; järjel.  $\triangle MBD \cong \triangle MBE$  ja seega  $MD = ME$ .



N.96.

2) Näitame, et iga nurga harudest ühekaugel olev punkt on nurga poolitaja peal. Selleks võtame punkti N nii, et  $NF \perp AB$  ja  $NG \perp CB$ , ja  $NF = NG$ . Siis on:  $NB = NB$ ,  $NF = NG$ ,  $\angle F = \angle G$  ( $= 90^\circ$ ); järjel.  $\triangle NBF \cong \triangle NBC$  ja seega  $\angle NBF = \angle NBC$ . See tähendab, et NB on nurga poolitaja. Sellest järgneb aga, et iga punkt, mis väljaspool nurga poolitajat on, mitte ühekaugel ei ole nurga harudest. Järjekult on nurga poolitaja nurga harudest ühekaugel oleva punkti geomeetiline koht.

**64. Tõestada teoreemid:** 1) Kongruentsetes kolmnurkades on homoloogsed kõrgused, mediaanid ja nurga-poolitajad isekeskis võrdsed.

2) Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui nad ühte sünnivad kahes küljes ja ühes homoloogses kõrguses.

3) Kaks sarikkolmnurka on kongruentsed, kui neil alused ja kõrgused on võrdsed.

4) Sarikkolmnurgas aluse otsapunktidest tõmmatud kõrgused on isekeskis võrdsed.

5) Nurga poolitajale perpendikulaarne sirgjoon lõikab nurga harudest ühepikkused tükid ära.

6) Kui kolmnurga sees olevat punkti D ühendada nurga tippudega A ja B, siis on  $\angle ADB > \angle ACB$ .

7) Sarikkolmnurga tipu juures oleva välisnurga poolitaja on alusele paralleelne.

8) See sirgjoon, mis sarikkolmnurgas ühendab aluse otsapunktide projektsioonisid külgede peale, on alusele paralleelne.

9) Kui me ühest kolmnurga tipust tõmbame kõrguse ja nurgapoolitaja, siis on nende vahel olev nurk pool osa kolmnurga teiste nurkade vahest

10) Kolmnurgas sünnitavad kahe nurga poolitajad niisuguse nurga, mis  $90^\circ$  võrra suurem on kui kolmas nurk.

11) Kui kolmnurgas ühe külje keskohta tõmmatud mediaan selle külje pool on, siis on see kolmnurk täisnurkne.

12) Sarikkolmnurga aluse punktist sarikate (tiibade) peale tõmmatud perpendikulaaride summa võrdub külje peale tõmmatud kõrgusele.

13) Võrdkülge kolmnurga sees olevast punktist tema külgede peale tõmmatud perpendikulaaride summa võrdub selle kolmnurga kõrgusele.

14) Kui teatavat punkti seespool kolmnurka ühendada kolmnurga tippudega, siis on ühendusjoonte summa vähem kui kolmnurga ümbermõet ja suurem kui tema poolümbermõetu.

15) Kui kahe nurga harud vastastikku perpendikulaarsed on ja ühe nurga tipp on väljaspool teise nurga valda, siis sünnitab ühe nurga poolitaja teise nurga harudega võrdsed nurgad.

## Konstrueerimise ülesanded. Abikujundi meetod.

**65.** Ülesanded, milles nõutakse konstrueerida kolmnurka tema külgedest ja nurkadest, on alus-ülesanded. Neid kolmnurga alus-ülesandeid on neli:

- 1) Konstrueerida kolmnurk kahest küljest ja nende vahel olevas nurgast [44].
- 2) " " " " ühest " " " " tema kahest lähisnurgast [45].
- 3) " " " " kolmest " " " " [51].
- 4) " " " " kahest " " ja ühele nendest vastasolevast nurgast [53].

Lisame neile neljale veel alus-ülesannetena juurde järgmised, mis ise kas tõesti alus-ülesanded on, ehk mida me alus-ülesannetena tarvitame:

- 5) Antud joonlõik teise sirgjoone peale asetada [10].
- 6) Antud punkti juurde antud sirgjoone peal asetada antud nurk [18].
- 7) Antud sirgjoonele läbi antud punkti tõmmata paralleeljoon [32];
- 8) Antud nurk pooleks jagada [52,2].

- 9) Antud sirgjoonele tema peal antud punktist tõmmata perpendikulaar [52,3].
- 10) " " väljaspool teda antud punktist " " [58,1].
- 11) Antud joonlõik pooleks jagada [58,2].
- 12) Joonlõigule tema otsapunktist tõmmata perpendikulaar [60,1].
- 13) Konstrueerida kolmnurk ühest küljest, ühest vastasolevast ja ühest lähisnurgast [46].
- 14) " " täisnurkne kolmnurk hüpotenuusist ja ühest teravnurgast [58,4 ehk 60,3].
- 15) " " " " " " ja kateedist [60,2 ehk 53].
- 16) " " " " kateetidest [44].
- 17) " " " " kateedist ja tema lähisnurgast [45].
- 18) " " " " " " " " vastasolevast nurgast [46].
- 19) Sarikkolmnurk konstrueerida alusest ja sarikast (tiivast) [51,1].
- 20) " " " " aluse lähisnurgast [47,1].
- 21) " " " " sarikast ja tipunurgast [44].
- 22) " " " " aluse lähisnurgast [47,1].
- 23) " " " " " " kõrgusest [53 ehk 60,4].

On kolmnurgas külgede ehk nurkade asemel teised osad antud, näit. kõrgused, mediaanid, nurgapoolitajad jne, siis katsutakse seda ülesannet ühe alus-ülesande (1—4) tüüpuse alla mahutada. Selleks otstarbeks joonestakse silmavara kolmnurk, millel umbes nõutud kuju on, ja tema sisse joonestakse kõik antud osad. Antud osad, mille kaudu kolmnurk konstrueerida tuleb, on tarvis kuidagi ära tähendada. Niiviisi saame me kujundis mitu kolmnurka ja nende seast peame siis niisuguse leidma, mida ühe (eelpool ettetoodud) alus-ülesande tüüpuse järele võib konstrueerida. Oleme niisuguse kolmnurga leidnud, siis konstrueerime tema kõigi selle alus-ülesande nõuete järele, mille alla tema sünnib; selle konstrueerimise läbi leiame harilikult mingi uue otsitava kolmnurga osa, mille kaudu kolmnurka ennast võidakse konstrueerida. Konstrueerimise ülesande lahendamise otsimist nimetakse tema **analüüsiks**.

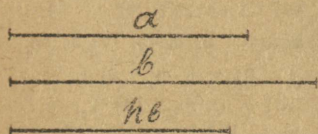
**Näitus :** Kolmnurk konstrueerida alusest, kõrgusest ja küljest.

**Analüüs.** Olgu ABC silmavaraal joonestud kolmnurk, mille sees ka kõrgus BD näha on. Antud osad, küljed BC ja AC, kõrgus BD ja täisnurgad BDC ja BDA, on ära märgitud. Kui me nüüd kõik ettetulevad kolmnurgad ABD, BDC ja ABC läbi vaatame, siis näeme, et ainult kolmnurka BDC-d on võimalik antud osadest konstrueerida, nimelt kahest küljest (BC ja BD) ja nendest suuremale vastasolevast nurgast (BDC) [65,4 ehk 65,15]. On  $\triangle BDC$  konstrueeritud, siis on sellega ka otsitava

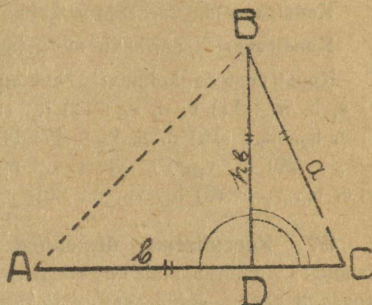
kolmnurga ABC nurk C leitud ja me võime siis otsitava  $\triangle ABC$ -d konstrueerida kahest küljest BC ja AC ja nende vahel olevast nurgast BCA [65<sub>1</sub>].

Andmed:  $a, b, h_b$ .

Analüüs.



N.97a



N.97b.

**Konstrueerimine:** Konstrueerime enne  $\triangle BDC$  § 53-da järele, siis pikendame külge CD-d, asetame tema peale  $CA = b$  ja ühendame A-d B-ga.

Kui konstrueerimine täide on saadetud, siis on tarvis ära näidata, et konstrueeritud kuju ülesande tingimusi täidab, s. o. et iga antud suurus õigel kohal on. Niisugust äranäitamist nimetakse tõestuseks. Tõestus on analüüsi vastupidine protsess.

**66.** Lüheduse pärast tarvitame edaspidi järgmisi tähendusi:

- a tähendab nurga A ehk  $\alpha$  vastasolevat kolmnurga külge,
- b " " B "  $\beta$  " " " "
- c " " C "  $\gamma$  " " " "
- $h_a$  " tipust A külge a peale alla tõmmatud kõrgust ( $h$  — hauteur = Höhe),
- $h_b$  " " B " b " " " "
- $h_c$  " " C " c " " " "
- $m_a$  " tipust A külge a keskkohani tõmmatud mediaani,
- $m_b$  " " B " b " " " "
- $m_c$  " " C " c " " " "
- $v_a$  " A kuni küljeni a tõmmatud nurga A ehk  $\alpha$  poolitajat,
- $v_b$  " " B " b " " " B "  $\beta$  "
- $v_c$  " " C " c " " " C "  $\gamma$  "
- p " külge b projektsiooni külge a peale, } Seepärast on:
- q " " c " " a " }  $p + q = a$ .

Täisnurkses kolmnurgas on a — hüotenuus, b ja c on kpteetid.

Sarikkolmnurgas on  $a$  — alus ja  $b$  on sarikas (tiib),  $\alpha$  on tipunurk ja  $\beta$  on aluse lähisnurk.

**Ülesanded:** Konstrueerida täisnurkne kolmnurk, kui on antud: 1)  $b, p$ ; 2)  $h_a, \beta$ ; 3)  $h_a, q$ .

Konstrueerida võrdkülgne kolmnurk, kui on antud: 4)  $a$ ; 5)  $h$ .

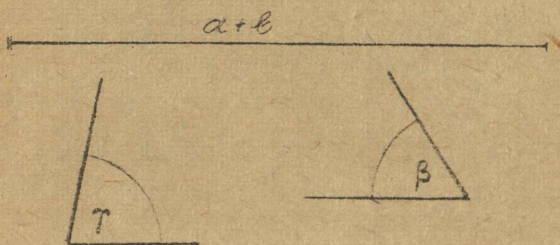
Konstrueerida sarikkolmnurk, kui on antud: 6)  $a, \alpha$ ; 7)  $a, h_b$ .

Konstrueerida kolmnurk, kui on antud: 8)  $a, b, h_c$ ; 9)  $b, \beta, h_a$ ; 10)  $a, b, m_a$ ; 11)  $b, a, v_\alpha$ ; 12)  $h_a, \alpha, \beta$ ; 13)  $b, a, m_c$ ; 14)  $h_a, m_a, \beta$ ; 15)  $a, h_a, m_a$ ; 16)  $\alpha, \beta, v_\gamma$ ; 17)  $b, h_a, v_\alpha$ ; 18)  $b, a, q$ ; 19)  $p, q, \alpha + \beta$ ; 20)  $h_a, v_\alpha, \beta$ ; 21)  $c, h_a, m_c$ ; 22)  $b, h_a, m_a$ ; 23)  $h_b, m_c, \alpha$ ; 24)  $a, h_b, v_\gamma$ ; 25)  $h_a, v_\alpha, \alpha$ ; 26)  $h_a, h_b, p$ ; 27)  $h_a, m_a, q$ .

**67. Keerulisemad ülesanded.** Mitte igakord ei saa me otsekohe niisugust kolmnurka, mida ühe alustüüpuse (1—4) järele konstrueerida võiks. Sagedasti peame antud osad otsitavatega sündsäl kombel ühendama, kas mõnda paralleeljoont tõmmates ehk mitteühendatud tippusid ühendades jne. Kui kolmnurkade antud osade seas joonlõikude, külgede, kõrguste jne summad ja vahed ette tulevad, siis peab neid esialgse kujundi sisse nii mahutatama, et me kergesti konstrueeritava kolmnurga saame, kui me nende otsapunktid kujundi tippudega ühendame.

**Näitus: kolmnurk konstrueerida, kui antud on  $a + b, \gamma, \beta$ .**

**Andmed:**

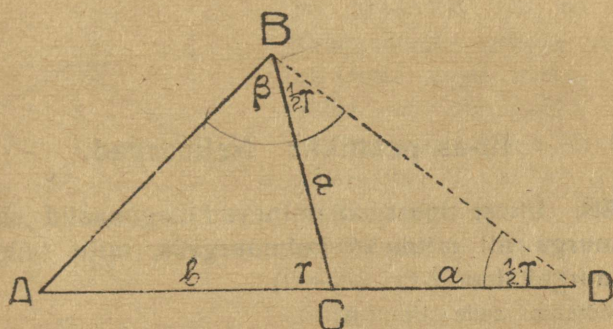


N.98a.

**Analüüs.** Olgu ABC otsitav kolmnurk, milles  $\beta$  ja  $\gamma$  teada on. Et ka  $a + b$  sisse joonestada, pikendame AC-d CB =  $a$  võrra; siis on  $AD = AC + GB = b + a = a + b$ . Siis ei saa me aga veel mitte kolmnurka, mida konstrueerida võiks, küll

aga siis  $\triangle ABD$ , kui me D ja B ühendame [65,13], sest temas on teada  $AD = a + b$ ,  $\angle A = 180^\circ - (\beta + \gamma)$  ja  $\angle D = \frac{1}{2}\gamma$ ,  $\angle D = \frac{1}{2}\gamma$  seepärast, et  $\triangle BCD$  on sarikkolmnurk ( $CD = CB$ ) ja  $\angle ACB = \gamma$  on tipu juures olev välisnurk. Kui  $\triangle ABD$  on konstrueeritud, siis on ka kerge kon-

strueerida  $\triangle BCD$ , milles alus  $BD$  leitud ja  $\angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}\gamma$  teada on. Sellega on siis ka punkt  $C$  leitud ja  $\triangle ABC$  konstrueeritud.



N.98 b.

**Ülesanded:** Konstrueerida kolmnurk, kus antud on: 1)  $a + b, c, \beta$  ( $a$ ); 2)  $a + b, c, \gamma$ ; 3)  $a + b, h_a, \beta$ ; 4)  $a - b, c, \beta$ ; 5)  $a - b, h_a, \beta$ .

Täisnurkne kolmnurk konstrueerida, kui on antud: 6)  $a + b, c$ ; 7)  $a, b + c$ ; 8)  $a + b, \gamma$ ; 9)  $b - c, a$ ; 10)  $b - c, \beta$ ; 11)  $a - b, c$ ; 12)  $a - b, \beta$ .

Sarikkolmnurk konstrueerida, kui on antud: 13)  $a + b, a$ ; 14)  $a - b, \beta$ .

Võrdkülgne kolmnurk konstrueerida, kui on antud: 15)  $a + h$ ; 16)  $a - h$ .

Konstrueerida kolmnurk, kui on antud: 17)  $a - b, c, \gamma$ ; 18)  $a - b, a, \beta$ ; 19)  $a + b + c, \beta, \gamma$ ; 20)  $a + b, h_a, \beta$ ; 21)  $a + b - c, \beta, \gamma$ ; 22)  $a + c - b, h_a, \beta$ .

Täisnurkne kolmnurk konstrueerida, kui on antud: 23)  $a + b + c, \beta$ ; 24)  $c + b - a, \gamma$ ; 25)  $a + b - c, \gamma$ ; 26)  $p - q, \gamma$ ; 27)  $b + c, \beta - \gamma$ .

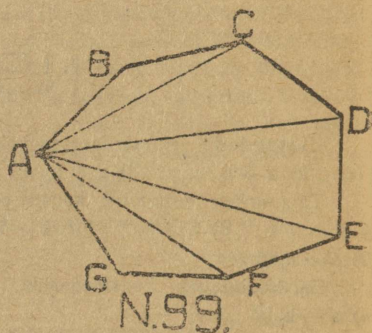
Kui kolmnurgas kõrguse aluspunktist  $\Delta$ lates  $q$  asetada  $p$  peale, siis sünnib kolmnurk, mille külgedeks on  $b, c$  ja  $p - q$  ja nurkadeks  $\gamma, 180^\circ - \beta$  ja  $\beta - \gamma$ .

Konstrueerida kolmnurk, kui on antud: 28)  $p - q, b, c$ ; 29)  $p - q, c, \beta$ ; 30)  $b, c, \beta - \gamma$ ; 31)  $b, p - q, \beta - \gamma$ ; 32)  $a + h_c, c, \beta$ ; 33)  $p - h_a, a, \gamma$ ; 34)  $p, q, b - h_a$ ; 35)  $b + p + h_a, c, \gamma$ ; 36)  $b + h_a, p - q, \gamma$ .

### III-as peatükk: Nelinurgad.

**68.** Ühest tipust väljaminevad diagonaalid jaotavad paljunurga nii mitmeks kolmnurgaks, mitu külge on paljunurgal ilma 2-ta:  $(n - 2)$ .

Võtame selle tipu A, millest diagonaalid välja lähevad, kõigi kolmnurkade tipuks, siis on sellest tipust väljaminevad diagonaalid ja 2 külge AB ja AG kolmnurkade küljed ja kolmnurkade alusteks võivad olla ainult ülejäänud  $(n - 2)$  küljed ja iga külge on iseäralise kolmnurga alus. Sellega on kolmnurkade arv 2-e võrra (2-e arvul) vähem kui külgede arv.



**69. Teoreem.** Paljunurga sisenurkade summa teeb välja nii mitu sirget nurka ( $180^\circ$ ), mitu külge paljunurgal on ilma 2-ta:  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

**1-ne tõestus:** Ühest tipust väljaminevad diagonaalid jaotavad paljunurga nii mitmeks kolmnurgaks, mitu külge paljunurgal on ilma 2-ta  $(n - 2)$  ja iga kolmnurga sisenurkade summa on sirgenurk [41]. Et nende kolmnurkade sisenurkade summa ühtlasi ka paljunurga sisenurkade summa on, siis on paljunurkade sisenurkade summa nii mitu sirget nurka, mitu külge paljunurgal on ilma 2-ta, s. o.  $(n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$ .

**2-ne tõestus:** Võtame paljunurga sees mingi punkti O ja ühendame selle tippudega. Et kolmnurga nurkade summa

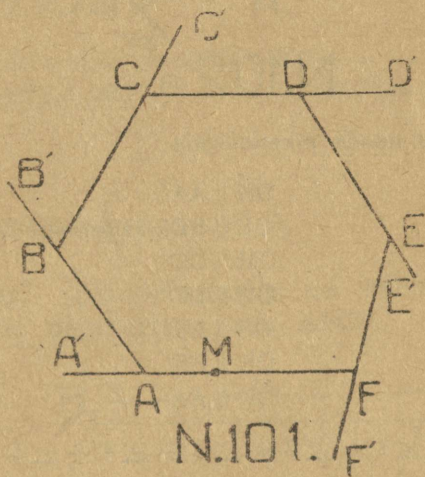
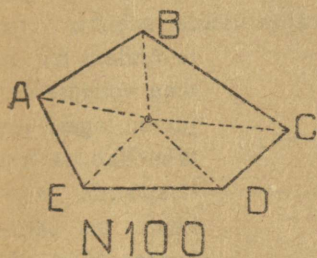
on sirgenurk, siis on kõigi kolmnurkade nurkade summa nii mitu sirget nurka, mitu külge on paljunurgal. Sellest summast peame ära võtma ühise tipu O ümber olevate nurkade summa, s. o. täispöörde ehk 2 sirgetnurka =  $= 360^\circ$ . Siis jääb järele paljunurga sisenurkade summa,

mis on n.  $180^\circ - 360^\circ = 180^\circ \cdot (n - 2)$ .

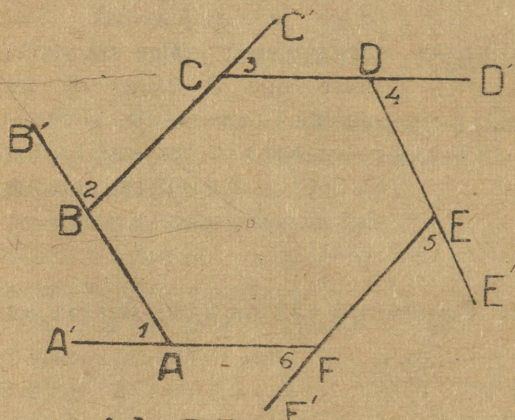
**√ 70. Teoreem.** Paljunurga välisnurkade summa on täispööre ( $360^\circ$ ).

**1-ne tõestus:** Vaatame paljunurga piirde peale kui kinnise murtud joone peale ja joonlõikude — paljunurga külgede — peale kui punkti liikumise jälgede peale. Hakaku punkt liikuma mitte tipust, vaid mingist külje, näit. FA, peal olevast punktist M. Esiti liigub punkt M AA' sihis. Tippu A-sse jõudes peab punkt oma liikumise sihti järsku muutma AA' pealt ABB' peale; niiviisi pöörab liikumise siht ennast paljunurga välisnurka A'AB võrra.

Kui punkt jõuab B-sse, siis pöörab tema liikumise siht ennast jälle paljunurga välisnurka B'BC võrra jne. Kui



punkt jõuab F-sse, siis muudab ta oma liikumise sihti  $FF'$  pealt  $FAA'$  peale, ta pöörab ennast viimase välisnurga  $F'FA$  võrra. Sellega on liikumise siht ennast pööranud esialgse sihiga võrreldes kõigi paljunurga välisnurkade summa võrra



N.102 a.

ja ühtlasi tuli ta oma esialgse sihi juurde tagasi, see tähendab, ta tegi täispöörde. Järjekult on paljunurgas kõigi välisnurkade summa täispöörde ehk  $360^\circ$ .

## 2-ne tõestus:

Mingist punkti  $O$  tõmbame paralleeljooned paljunurga külgedele

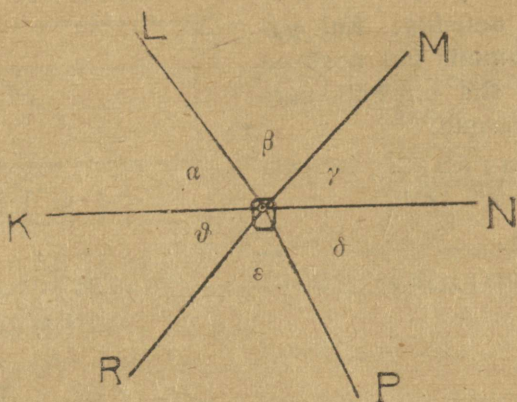
ja nende pikendustele :

|                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| $OK \parallel AA'$              |                                  |
| $OL \parallel BB'$ , järjekult: | $\angle 1 = \angle \alpha,$      |
| $OM \parallel CC'$ ,            | „ $\angle 2 = \angle \beta,$     |
| $ON \parallel DD'$ ,            | „ $\angle 3 = \angle \gamma,$    |
| $OP \parallel EE'$ ,            | „ $\angle 4 = \angle \delta,$    |
| $OR \parallel FF'$ ,            | „ $\angle 5 = \angle \epsilon,$  |
| $OK \parallel AA'$ ,            | „ $\angle 6 = \angle \vartheta,$ |

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma + \angle \delta + \angle \epsilon + \angle \vartheta = 360^\circ.$$

**3-as tõestus:** Iga sisemine nurk ühes oma kõrvunurgaga, s. o. sellesama tipu juures oleva välisnurgaga, kokku sünnitab sirge nurga  $180^\circ$ . Kui paljunurgal on  $n$  külge (tippu ehk nurka) siis on niisuguseid kõrvunurki olemas  $n$  paari ja

nende summa on  $180^\circ \cdot n$ . Kui sellest summast sisenur-  
kade summa  $180^\circ \cdot (n-2)$  ära võtta, siis jääb välisnur-



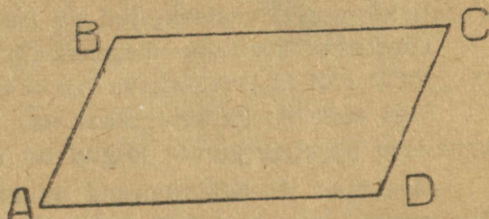
N.102b.

kade summa järele, mille suurus on järjekult :  
 $180^\circ \cdot n - (180^\circ \cdot n - 360^\circ) = 180^\circ n - 180^\circ \cdot n + 360^\circ = 360^\circ$ .

### Parallelogrammid.

✓ 71. Definiitsjoon. Parallelogramm on nelinurk,  
mille vastasküljed on paralleelsed, näit. ABCD.

Parallelogrammi  
nurkade omadu-  
sed. 1-ne oma-  
dus : Parallelo-  
grammi vastasnur-  
gad on võrdsed,  
sest nende harud  
on paarikaupa pa-  
ralleelsed.



N 103

2-ne omadus: Parallelogrammis on ühe külje lähisnurkade summa sirgenurk, sest need nurgad on paralleeljoonte rindnurgad.

3-as omadus: Kui parallelogrammis üks nurk on täisnurk, siis on kõik nurgad täisnurgad.

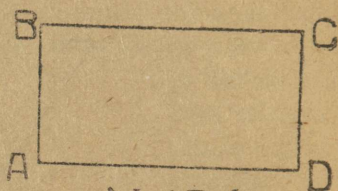
Oletus:  $AB \parallel CD, BC \parallel AD$   
ja  $\angle A = d^*$  ( $90^\circ$ ).

Väide:  $\angle B = \angle C = \angle D = d$ .

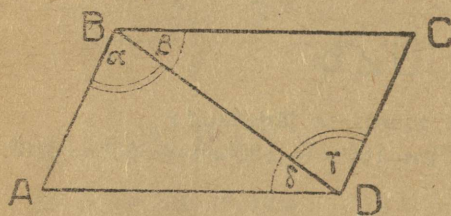
Tõestus:  $\angle B = \angle D = 2d - \angle A = 2d - d = 1d$ , s. t.

$\angle B = \angle D = 1d$ ,

$\angle C = \angle A = d$  s. t.  $\angle C = 1d$ .



N.104.



N.105.

✓ 72. Teoreem.

Diagonaal jagab parallelogrammi kaheks kongruentseks kolmnurgaks.

Oletus:  $AB \parallel CD,$   
 $BC \parallel AD.$

Väide:  $\triangle ABD \cong$   
 $\triangle BCD.$

Tõestus:  $BD = BD, \angle \alpha = \angle \gamma, \angle \delta = \angle \beta$

$\triangle ABD \cong \triangle BCD$  [k. k. II. t.].

✓ 73. Parallelogrammi külgede omadus: Teoreem.  
Parallelogrammi vastasküljed on isekeskis võrdsed.

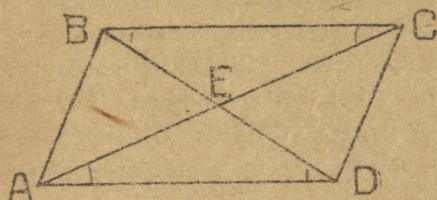
Tõestus: Tõmbame diagonaali BD, siis on  $\triangle ABD \cong$   
 $\triangle BCD$  [72] ja järjestikult ka  $AB = CD$  ja  $AD = BC$ .

Seda teoreemi loetakse teisiti veel nii: Paralleeljoonte vahelised paralleeljoonte lõigud on isekeskis võrdsed.

Järeldus: Paralleeljooned on üksteisest igal kohal ühekaugel.

\*) d tähendab täisnurka; prantsuskeeles on *droit* — õige.

Märkus: Üht parallelogrammi külge võib aluseks võtta; siis on parallelogrammi kõrguseks mingist vastaskülje punktist aluse ehk tema pikenduse peale tõmmatud perpendikulaar.



N.106.

Oletus:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ .

Väide:  $AE = EC$ ,  $BE = ED$ .

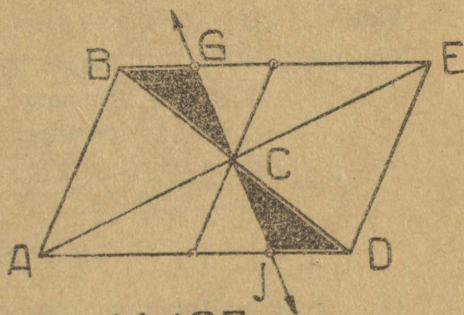
Tõestus:  $AD = BC$ , kui paralleelsete vastasküljed,  
 $\angle EAD = \angle ECB$ , kui paralleeljoonte põiknurgad,  
 $\angle EDA = \angle EBC$ , " " "

$$\triangle AED \cong \triangle CEB \text{ [k. k. II. t.]}$$

$$AE = EC, DE = EB.$$

✓ 74. Parallelogrammi diagonaalide omadus. Teoreem: Parallelogrammi diagonaalid poolitavad teineteist vastastikku.

75. Teoreem. Parallelogrammil on kahekordne tsentraalne sümmeetria; diagonaalide lõikepunkt on tema sümmeetria tsepter ja tema piirde (vastaskülgedes) ja diagonaalide lõikepunktist läbimineva sirgjoone lõikepunktid on sümmeetrilised punktid.

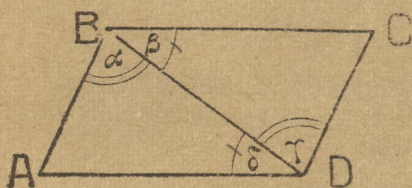


N.107.

Tõestus: Pöörame  $\parallel ABED$   $180^\circ$  võrra ümber C, siis: läheb CA mööda CE-d ja A langeb E peale, sest  $CA = CE$ ,

CE läheb mööda CA-d ja E langeb A peale, sest  $CE = CA$ ,  
 CB „ „ CD-d „ B „ D „ „  $CB = CD$ ,  
 CD „ „ CB-d „ D „ B „ „  $CD = CB$ ;  
 AB langeb ED peale, BE langeb DA peale, ED langeb AB  
 peale ja DA langeb BE peale, sest kahe punkti läbi on või-  
 malik ainult üht sirgjoont tõmmata; CF läheb mööda CG-d  
 ja CG läheb mööda CF-i — kui kõike kujundit  $180^\circ$  võrra  
 ümber C pöörata — ja F langeb G-ga ja G langeb F-ga  
 ühte, sest kaks sirgjoont võivad lõikuda ainult ühes punktis.

**76. 1-ne vastupidine teoreem.** Kui nelinurgas üks



N.108.

paar vastaskülgi on  
 isekeskis paralleel-  
 sed ja võrdsed, siis  
 on ka teine paar ise-  
 keskis paralleelsed ja  
 võrdsed, s. t. niisu-  
 gune nelinurk on  
 parallelogramm.

Oletus:  $BC \parallel DA$ ,  
 $BC = DA$ .

Väide:  $CD \parallel AB$ ,  $CD = AB$ .

Tõestus:  $BC = DA$ , oletuse järgi;

$BD = BD$ , tõmmatud diagonaal on ühine külg;

$\angle \beta = \angle \gamma$ , paralleeljoonte põiknurgad.

$\triangle BCD \cong \triangle DAB$  [k. k. I. t.]

$CD = AB$ ,  $\angle \gamma = \angle \alpha$

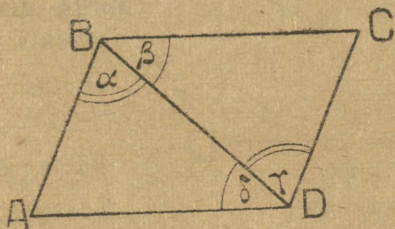
$CD \parallel AB$ , s. t. ABCD on par-mm.

**77. 2-ne vastupidine teoreem:** Kui nelinurgas  
 vastasküljed on paarikaupa isekeskis võrdsed, siis on  
 nad ka paralleelsed, s. t. niisugune nelinurk on paral-  
 lelogramm.

Oletus:  $BC = DA$ ,  $CD = AB$ .

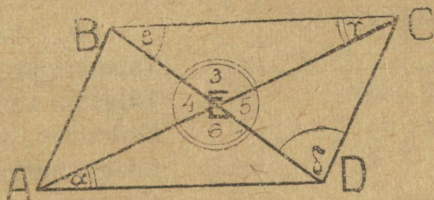
Väide:  $BC \parallel DA$ ,  $CD \parallel AB$ .

Tõestus:  $BC = DA, CD = AB, BD = BD$   
 $\triangle BCD \cong \triangle DAB$  [k. k. III. t.]  
 $\angle \beta = \angle \delta, \angle \gamma = \angle \alpha$   
 $BC \parallel DA, CD \parallel AB$ , s. t. ABCD on par-mm.



N.109.

✓ 78. 3 as vastupidine teoreem. Nelinurk, mille diagonaalid teineteist poolitavad, on parallelogramm.



N.110.

Oletus:  $AE = EC, BE = ED$ .

Väide:  $AD \parallel BC, AB \parallel CD$ .

Tõestus:  $AE = EC$                        $AE = EC$   
 $ED = EB$                                $BE = ED$   
 $\angle 1 = \angle 3$                              $\angle 2 = \angle 4$

$\triangle AED \cong \triangle BEC$                        $\triangle AEB \cong \triangle CED$

$\angle \alpha = \angle \gamma$                                $\angle \beta = \angle \delta$

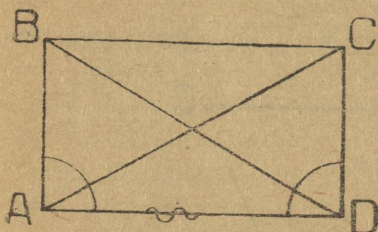
$AD \parallel BC$

$AB \parallel CD$                       s. t. ABCD

on parallelogramm.

Isesugused parallelogrammid.

79. Täisnelinurk on parallelogramm, millel kõik nurgad on täisnurgad.



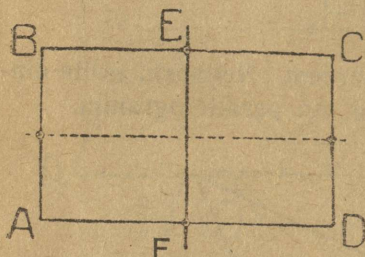
N.111.

**Teoreem.** Täisnelinurga diagonaalid on isekeskis võrdsed.

**Oletus:**  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ .

**Väide:**  $AC = BD$ .

**Tõestus:**  $DA = AD$ ,  $DC = AB$ ,  $\angle D = \angle A (= 90^\circ)$ ; järjekult [k. k. I. t. järele]  $\triangle ACD \cong \triangle BDA$ ; järjekult:  $AC = BD$ .



N.112.

80. Teoreem.

Täisnelinurga vastaskülgede keskohtadest läbiminev sirgjoon on täisnelinurga sümmeeria telg.

**Tõestus:**  $BE = AF$ ,  $BE \parallel AF$ , kui paralleelsete vastaskülgede pooled;

$$AB = EF, AB \parallel EF \quad [76]$$

$$AB \perp AD, AB \perp BC$$

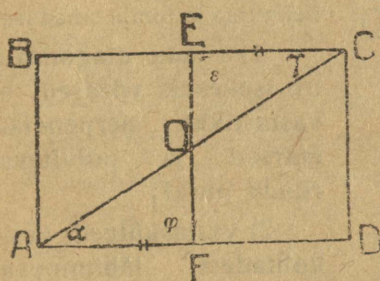
$$EF \perp AD, EF \perp BC$$

Kui me nüüd ABCD EF mööda kahekorra murrame, siis läheb EC mööda EB-d, sest  $\angle CEF = \angle BEF$  ja C langeb B peale, sest  $EC = EB$ ;  
 " " FD FA-d " "  $\angle DFE = \angle AFE$  ja D langeb A peale, sest  $FD = FA$ .  
 CD katub BA-d, sest nende otsapunktid langesid ühte.

Järeldus: Täisnelinurgal on 2 sümmeetria telge; need teljed poolitavad teineteist.

81. Teoreem. Täisnelinurga diagonaal ja sümmeetria telg poolitavad teineteist.

Tõestus:  $EC = FA$ ,  $\angle \gamma = \angle \alpha$ ,  $\angle \varepsilon = \angle \varphi$ ,  
 $\triangle EOC \cong \triangle FOA$  [k. k. III. t.] järele  
 $EO = OF$ ,  $OC = OA$ .



N.113.

√ 82. Romb on parallelogramm, mille küljed on kõik isekeskis võrdsed.

Teoreem: Rombi diagonaalid on vastastikku perpendikulaarsed ja poolitavad rombi nurki.

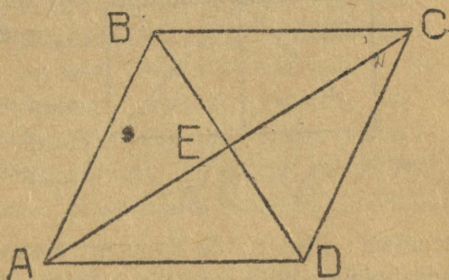
Oletus:  $AB = BC = CD = DA$ .

Väide:  $CA \perp BD$ ,  $\angle BCE = \angle DCE$ .

Tõestus: Et  $BE = ED$  [74], siis on sarikkolmnurgas BCD [56]  $CE \perp BD$  ehk  $CA \perp BD$  ja  $\angle BCE = \angle DCE$ .

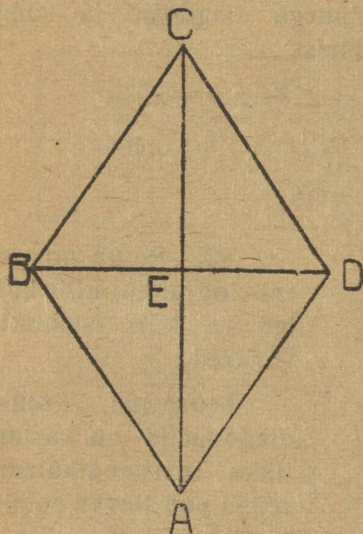
Järeldus: Rombi diagonaalid on rombi sümmeetria teljed.

Vastupidine teoreem: Perpendikulaarsete diagonaalidega parallelogramm on romb.

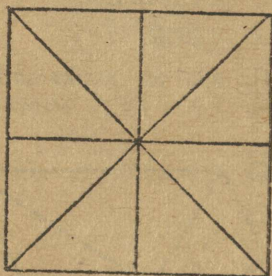


N.114 a.

Tõestus:  $\triangle BCE = \triangle DCE$  [k. k. I. t.] Järele, sest  $BE = ED$ ,  $CE = CE$  ja  $\angle BEC = \angle DEC (= 90^\circ)$ ; järjel.  $AD = BC = CD = AB$ .



N.114b.



N.115.

V 83. Ruut on parallelogramm (nelinurk), mille nurgad on kõik täisnurgad ja mille küljed on isekeksis võrdsed. S. t. ruut on ühtlasi täisnelinurk ja romb, ja seepärast on temal kõik täisnelinurga ja rombi omadused:

1) ruudu diagonaalid on isekeksis võrdsed, on vastastikku perpendikulaarsed ja poolitavad ruudu nurki;

2) vastaskülgede keskkohtadest läbiminevad sirgjooned ja diagonaalid on ruudu sümmeetria teljed

3) ruudu 4 sümmeetria telge jooksevad kokku ühes punktis, mis on ruudule 4-ja kordse sümmeetria tsentriks.

Tõepoolest, kui ruutu sümmeetria tsentri ümber pöörata  $90^\circ$  võrra, siis langeb ta iseenesega ühte.

Ülesanne. Tõestada

teoreem: Kui ruudu tippudest alates iga külje peale ühes ja sellesamas sihis asetada võrdsed lõigud ja saadud punktid ühendada, siis sünnib uus ruut.

## Trapeets.

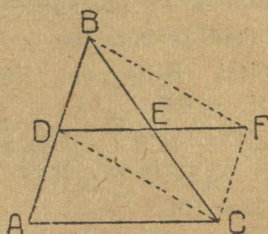
✓ 84. Teoreem. Kolmnurgas on kahe külje keskohti ühendav joonlõik pool osa kolmandast küljest ja paralleelne temale.

Oletus:  $AD = DB$ ,  $CE = EB$ .

Väide:  $DE = \frac{1}{2}AC$   
 $DE \parallel AC$ .

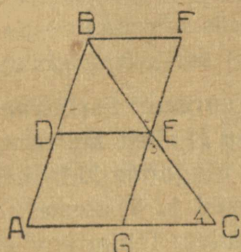
Tõestus: Asetame  $DE$  pikenduse peale  $EF = DE$ ; ühendame  $F$   $B$ -ga ja  $C$ -ga, ja  $D$   $C$ -ga.

Et  $BE = EC$  ja  $DE = EF$ , siis on  $CFBD$  par-mm [78]. See tähendab:  $FC \parallel BD$ ,  $FC = BD$ . Et  $DA$  on  $BD$  pikendus, siis on ka:  $FC \parallel DA$  ja  $FC = DA$ . Järjel. [76]  $DF \parallel AC$  ja  $DF = AC$ ; Aga  $DE = \frac{1}{2}DF$ ; siis on:  $DE \parallel AC$  ja  $DE = \frac{1}{2}AC$ .



N.116.

Ülesanne: Tõestada see teoreem tarvitades joon. № 117.



N.117

✓ 85. Definiitsjoon. Trapeets on nelinurk, mille kaks vastaskülge on paralleelsed ja mille teised kaks külge paralleelsed ei ole. Paralleelsed küljed on trapeetsi alused; trapeetsi kõrguseks nimetakse aluste kaugust teineteisest. Trapeetsi keskjoon

on see joonlõik, mis mitte paralleelsete joonte keskohti ühendab.

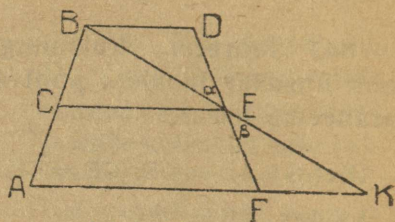
✓ Teoreem. Trapeetsi keskjoon on alustele paralleelne ja on aluste poolsumma.

**Oletus:**  $AF \parallel BD$ ,  $AC = CB$ ,  $DE = EF$ .

**Väide:**  $EC \parallel AF \parallel BD$ ;

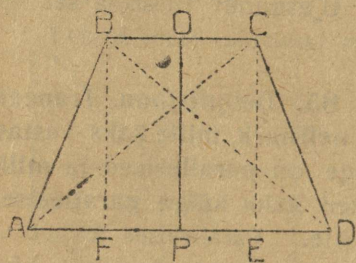
$$CE = \frac{AF + BD}{2}.$$

**Tõestus:** Tõmbame B ja E läbi sirgjoone, kuni ta AF pikendust K-s lõikab ja vaatleme kolmnurki BED ja FEK.  $DE = EF$ ,  $\angle \alpha = \angle \beta$ ,  $\angle D = \angle F$ ; järjekult on  $\triangle BED \cong \triangle KEF$  [k. k. II. t.]; sellega on:  $BE = EK$  ja  $BD = FK$ .



N.118.

Niiviisi on  $\triangle$ -gas ABK punkt E külje BK keskoht ja  $AK = AF + FK = AF + BD$ . Et  $\triangle$ -gas ABK on  $AC = CB$  ja  $BE = EK$ , siis on [84 järgi]  $CE \parallel AK$  ja  $CE = \frac{1}{2}AK$ , ehk  $CE \parallel AF \parallel BD$  ja  $CE = \frac{AF + BD}{2}$ .



N.119.

**Oletus:**  $BC \parallel AD$ ,  $AB = CD$ ;  $AP = PD$ ,  $BO = OC$ .

- Väide:**
- 1)  $\angle BAP = \angle CDP$  ja  $\angle ABO = \angle DCO$ ;
  - 2)  $AC = BD$ ;
  - 3) OP on trapeetsi ABCD sümmeetria telg.

**86.** Kui trapeetsi mitteparalleelsed küljed võrdsed on, siis nimetakse seda trapeetsi sarik-trapeetsiks.

**Teoreem.** Sariktrapeetsis on 1) aluse lähisnurgad ja 2) diagonaalid isekeskis võrdsed ja 3) aluste keskohtadest läbiminev sirgjoon ou selle trapeetsi sümmeetria telg.

**Tõestus:** 1) Tõmbame kõrgused BF ja CE. Siis on:  
 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$  [k. k. IV. t.], sest  $AB = CD$ ,  $BF = CE$ ,  
 $\angle BFA = \angle CED$ .

$\angle BAF = \angle CDE$  ja  $\angle ABF = \angle DCE$ ; } +  
 $\angle FBO = \angle ECO$ , } kui täisnurgad;

$\angle BAP = \angle CDP$  ja  $\angle ABO = \angle DCO$ .

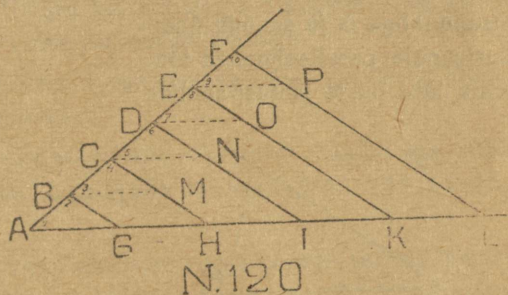
2)  $\triangle ADC \cong \triangle DAB$  [k. k. I. t.], sest  $AD = AD$ ,  $DC = AB$  ja  
 $\angle ADC = \angle DAB$ , nagu tõestud;

$AC = DB$ .

3) OP on täisnelinurga FBCE [80] sümmeetria telg,  $\triangle ECD \cong$   
 $\triangle FBA$  ja kujundi kahekorra murdmisel OP-d mööda kata-  
 vad OCDP ja OBAP teineteist.

Märkus: Kui nelinurgas üks paar vastaskülgi paral-  
 leelsed on ja teine paar isekeskis võrdsed, siis on see neli-  
 nurk kas parallelogramm või sarik-trapeets.

✓ **87. Teoreem.** Kui nurga ühe haru peale asetada  
 võrdsed joon-  
 lõigud ja läbi  
 jaotuspunktide  
 tõmmata paral-  
 leeljooned, siis  
 asenevad ka  
 teise haru peale  
 joonlõigud, mis  
 isekeskis võrd-  
 sed on.



**Oletus:**  $AB = BC = CD = DE = EF$ ,  
 $BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK \parallel FL$ .

**Väide:**  $AG = GH = HI = IK = KL$ .

**Tõestus:** Läbi jaotuspunktide B, C, D, E tõmbame AL-le  
 paralleeljooned; siis on:

$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 6 = \angle 9$ , kui vastavad nurgad;

$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = \angle 10$ ,

$AB = BC = CD = DE = EF$ , oletuse järele.

$\triangle ABG \cong \triangle BCM \cong \triangle CDN \cong \triangle DEO \cong \triangle EFP$  [k. k. II. t.]

$AG = BM = CN = DO = EP$

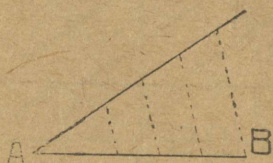
$\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$   
 $GH \quad HI \quad IK \quad KL$

$AG = GH = HI = IK = KL$ .

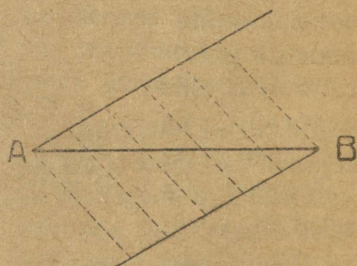
**Järeldus:** [84 ja 85 vastup. teor.]: **Sirgjoon**, mis kolmnurgas ehk trapeetsis ühe külje keskkohast läbi läheb alusele paralleelselt, jagab teise külje pooleks.

**Ülesanne.** Antud joonlõik jagada  $n$  võrdsesse jakku.

**Konstrueerimine.** Et  $AB$ -d  $n$  võrdsesse jakku jagada, on tarvis ainult ühest otsast  $A$  tõmmata sirgjoon, mis  $AB$ -ga mingi nurga sünnitab, selle sirgjoone peale asetada  $n$  missugust tahes võrdset jagu, viimast jaotuspunkti ühendada teise otsapunktiga  $B$  ja saadud ühendusjoonele paralleeljooned tõmmata läbi teiste jaotuspunktide.



N.121a.



N.121b.

Ehk: Tõmbame kummagist otsast sirgjooned, mis  $AB$ -ga mistahes võrdsed põiknurgad sünnitavad; nende peale asetame, otsadest alates,  $n$  mistahes võrdset jagu. Sirgjooned, mis vastavaid jaotuspunktid ühendavad, jagavad  $AB$   $n$  võrdsesse jakku.

**88. Tõestada teoreemid:** 1) Kongruentsed paljunur-  
gad jaotakse vastavate diagonaalide läbi vastavalt kongruent-  
seteks kolmnurkadeks.

2) Kaks parallelogrammi on kongruentsed, kui ühe pa-  
rallelogrammi diagonaalid ja üks külg võrduvad vastavalt teise  
parallelogrammi diagonaalidele ja ühele küljele.

3) Kaks parallelogrammi on kongruentsed, kui ühe pa-  
rallelogrammi nurk, külg ja selle külje peale tõmmatud kõr-  
gus võrduvad teise par-grammi vastavatele elementidele.

4) Kaks trapeetsi on kongruentsed, kui ühe trapeetsi kõik  
4 külge võrduvad vastavalt teise trapeetsi 4-le küljele. [Tar-  
vis ühest tippust küljele paralleeljoon tõmmata].

5) Kaks nelinurka on kongruentsed, kui neil on vasta-  
valt võrdsed küljed ja üks võrdne ja homoloogne (sama-  
paikne) nurk.

6) Täisnelinurga (rombi) külgede keskkohad on rombi  
(täisnelinurga) tipud.

7) Nelinurga külgede keskkohad on niisuguse parallelo-  
grammi tipud, mille küljed on nelinurga diagonaalidele paral-  
leelsed ja võrduvad vastavalt nende pooltele.

8) Joonõigud, mis nelinurga vastaskülgede keskkohiti ühen-  
davad, poolitavad teineteist.

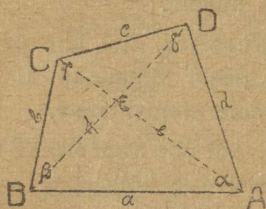
9) Kui rombis vastasnurkade tippudest saadik iga külje  
peale asetada võrdsed lõigud, siis on saadud punktid täisneli-  
nurga tipud.

10) Nende perpendikulaaride summa, mis sarikkolmnur-  
gas mingist aluse punktist külgede peale on tõmmatud, võr-  
dub külje peale tõmmatud kõrgusele.

11) Mingist võrdkülgse kolmnurga sisemisest punktist  
tema külgede peale tõmmatud perpendikulaaride summa võr-  
dub selle kolmnurga kõrgusele.

12) Täisnelinurga nurkade poolitajad sünnitavad ruudu;  
par-grammi nurkade poolitajad sünnitavad täisnelinurga.

**89. Ülesanded.** Et nelinurki ehk paljunurki konstrueerida, jaotakse nad diagonaalide ehk teiste abijoonte abil kolmnurkadeks, mis siis konstrueerida tulevad. Näit. parallelogramm jaotakse diagonaali abil 2-ks kongruentseks kolmnurgaks; trapeets jaotakse küljele paralleelse sirgjoone abil, mis ühest tipust välja läheb, kolmnurgaks ja parallelogrammiks.



N122

Allpool ettetoodud näitustes tähendame lühiduse otstarbel nelinurga elemendid nii ära, nagu kõrvalseisev kujund näitab. Peale selle on par-grammis  $h_a$  ja  $h_b$  külgede a ja b peale tõmmatud kõrgused.

Trapeetsis on a ja c — alused, m — keskjoon.

Konstrueerida ruut, kui on antud: 1) a; 2) e.

„ täisnelinurk, kui on antud: 3) a, e; 4) e,  $\varepsilon$ ; 5) a,  $\varepsilon$ .

„ romb, kui on antud: 6) a, e; 7) e, f; 8) a, h; 9) e, h.

„ parallelogramm, kui on antud: 10) e, f,  $\varepsilon$ ; 11) a, b,  $h_a$ ; 12) b, f,  $h_a$ ; 13) a,  $h_a$ ,  $h_b$ ; 14) e, f,  $h_a$ ; 15) e,  $h_a$ ,  $h_b$ ; 16) a, e, f; 17) a, e,  $\varepsilon$ .

„ trapeets, kui on antud: 18) a, b,  $\gamma$ ,  $\delta$ ; 19) a, c, f,  $\beta$ ; 20) a, b, d,  $\alpha$ ; 21) b, f, h,  $\alpha$ ; 22) a, c, f, h; 23) a, e, f, d; 24) a, b, c,  $\alpha$ ; 25) b, h, e, f; 26) a, h, e, f; 27) a, h,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ; 28) m, d, c,  $\alpha$ .

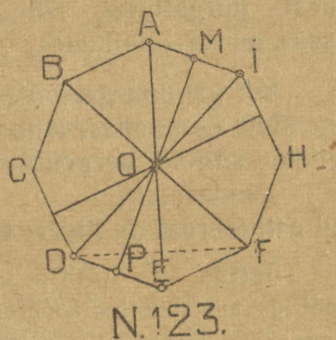
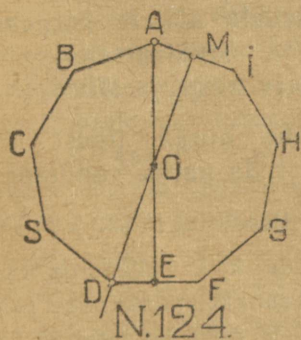
„ nelinurk, kui on antud: 29) a, b, c, e, f; 30) b, c, e, f,  $\varepsilon$ ; 31) a, b,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

## IV-jas peatükk. Korrapärased paljunurgad.

✓ 90. Definiitsjoon. Paljunurk on korrapärane, kui temal on  $n$ -kordne tsentraalne sümmeetria, kus  $n$  on külgede arv. Sümmeetria tsentrit nim. paljunurga tsentriks. Näit. võrdkülgne kolmnurk on korrapärane kolmnurk, ruut on korrapärane nelinurk.

**Teoreem.** Korrapärases paljunurgas on :

- I. kõik küljed ühepikkused;
- II. kõik nurgad isekeskis võrdsed (ühesuurused);
- III. kõik tipud tsentrist ühekaugel;
- IV. kõik küljed tsentrist ühekaugel.



**Tõestus:** Olgu antud paljunurgal  $n$  külge, sellega ka  $n$  nurka ja  $n$  tippu.

Kui me teda pöörame tsentri ümber  $\frac{1}{n}$ -diku täispöörde võrra, siis langeb tema, definiitsjooni järele, iseendaga ühte.

Selle juures langeb ühte iga külg, iga nurk, iga tipp iga külje peale tõmmatud perpendikulaar teise järjekorras oleva küljega, nurgaga, tipuga, külje peale tõmmatud perpendikulaariga. Ühe täispöörde jooksul, kuna paljunurk oma esimesse seisandisse tagasi tuleb, sünnib see ühtelangemine n korda. Niiviisi langeb siis ühte iga külg iga teise küljega, iga nurk iga teise nurgaga, iga tipp iga teise tipuga, iga külje peale tõmmatud perpendikulaar iga teise külje peale tõmmatud perpendikulaariga. Järjekult on korrapärases paljunurgas: I. kõik küljed ühepikkused, II. kõik nurgad isekeskis võrdsed (ühesuurused), III. kõik tipud tsentrist ühekaugel ja IV. kõik küljed tsentrist ühekaugel.

Paljunurga külje kaugust tsentrist nim. tema **apoteemiks**.

**91. Teoreem. Korrapärases paljunurgas läheb iga**

a) nurgapoolitaja

b) külje keskperpendikulaar

I. paljunurga tsentrist läbi, II. on paljunurga sümmeetria telg ja III. läheb veel

ühest nurgatipust läbi, seda nurka poolitades,

ühe külje keskkohast läbi, sellele küljele perpendikulaarselt,

kui paljunurgal on paarisarv külgi, ja läheb

ühe külje keskkohast läbi, sellele küljele perpendikulaarselt,

ühe nurga tipust läbi, seda nurka poolitades,

kui paljunurgal on liigiarv külgi. [Joonestus № 123 ja № 124].

✓ **Tõestus.** a) I. Kui ühendada kõik paljunurga tipud tsentriga, siis sünnib n kongruentset sarikkolmnurka, sest paljunurga kõik küljed on ühepikkused ja tipud on tsentrist ühekaugel. Järjekult on:  $\angle OBA = \angle OAB = \angle OAI = \angle OIA = \angle OIH = \dots$  jne. See tähendab, et paljunurga nurkade poolitajad lähevad tsentrist läbi.

b) I. Kui nüüd paljunurga külgede keskkohast perpendikulaarid üles tõmmata, siis lähevad need perpendikulaarid

rid tsentrist läbi, sest sarikkolmnurga aluse keskkohast üles-  
tõmmatud perpendikulaar läheb tipust läbi.

a) II. Murrame paljunurga nurgapoolitaja AE-d mööda kahekorra, siis läheb AI mööda AB-d, sest  $\angle EAI = \angle EAB$ ; I langeb B peale, sest et  $AI = AB$ , Edasi: IH läheb BC-d mööda, sest et  $\angle I = \angle B$ ; H langeb C peale, sest et  $IH = BC$  jne. kuni viimaks F langeb D peale.

III. Et D ja F sümmeetrilised on AE kohta, siis on  $AE \perp DF$ -le ja AE jagab DF pooleks.

On paljunurgal paarisarv külgi ja sellega ka paarisarv tippusid, siis on peale D ja F veel üks tipp olemas, mis D ja F-ga sarikkolmnurga sünnitavad ja mille aluseks on joon-  
lõik DF ja tipuks E. Et nüüd sümmeetria telg DF keskkohast perpendikulaarselt läbi läheb, siis läheb ta ka sarikkolmnurga tipust E läbi ja jagab tipu juures oleva nurga pooleks [56<sub>3</sub>].

On paljunurgal liigiarv külgi ja tippusid, siis on D ja F tema viimased tipud ja DF tema viimane külj, ja sümmeetria telg läheb tema keskkohast perpendikulaarselt läbi.

b) II. Murrame nüüd paljunurga külje keskperpendikulaari MP-d mööda kahekorra, siis läheb MI mööda MA-d, sest  $\angle PMI = \angle PMA (= 90^\circ)$ , I langeb A peale, sest  $MI = MA$ . IH läheb AB-d mööda, sest  $\angle I = \angle A$ , ja H langeb B peale, sest et  $IH = AB$  jne., kuni viimaks E langeb D peale, kui paljunurgal paarisarv külgi ja tippusid on [№ 123], ehk F langeb S peale [№ 124], kui paljunurgal liigiarv külgi ja tippusid on.

III. Et E ja D ühes paljunurgas, F ja S teises paljunurgas sümmeetrilised on MP kohta, siis on MP perpendikulaarne ED-le, ehk FS-le ja läheb tema keskkohast läbi.

On paljunurgal paarisarv külgi ja tippusid, siis on E ja D viimased tipud ja DE on viimane külj, mis paari sünnitab külje AI-ga. Nii viisi, kui paljunurgal paarisarv külgi on, siis on külje AI keskperpendikulaar MP paljunurga sümmeetria telg ja ta läheb veel ühe külje ED keskkohast läbi perpendikulaarselt selle küljele.

On paljunurgal liigarv külgi ja tippusid, siis on peale F ja S veel üks tipp D olemas, millel paari ei ole ja mis F ja S-ga sarikkolmnurga FDS sünnitavad. Selle sarikkolmnurga aluseks on joonlõik FS ja tipuks D. Et MP perpendikulaarne on FS-le ja tema keskohast läbi läheb, siis läheb ta ka tipust D läbi ja jagab tipu juures oleva nurga D pooleks. Niiviisi, kui paljunurgal liigarv külgi on, siis on külje AI keskperpendikulaar MP paljunurga sümmeetria telg, ta läheb ühest nurgatipust läbi ja poolitab selle nurga.

**Järeldus:** Korrapärasel paljunurgal on nii mitu sümmeetria telge, mitmekordne on tema tsentraalne sümmeetria.

Kui paljunurgal n külge ja sellega ka n-kordne tsentraalne sümmeetria on, siis on tal n külje-keskperpendikulaari ja n nurgapoolitajat.

On n paarisarv, siis on iga külje-keskperpendikulaar ka veel ühe teise külje keskperpendikulaar ja iga nurgapoolitaja on veel ühe teise nurga poolitaja; sellega on niisugusel korrapärasel paljunurgal  $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$  sümmeetria telge.

On n liigarv, siis on iga külje-keskperpendikulaar ka ühtlasi ühe nurga poolitaja ja sellega on niisugusel korrapärasel paljunurgal n sümmeetria telge.

## V-es peatükk. Sõõr ja ring.

**92.** Ringist on meil juba järgmist teada :

- 1) Ring on kinnine kõver joon, mille punktid on kõik ühekaugel ühest antud punktist [15, ehk 63,<sub>1</sub>],
- 2) Ring on antud punktist ühekaugel olevate punktide geomeetiline koht; antud punkti nimetakse tsentriks.
- 3) Ringiga piiratud tasapinna osa on sõõr.
- 4) Ringi punktide kaugus tsentrist on raadius.
- 5) Ringi osa on kaar.
- 6) Kahte ringi punkti ühendav joonlõik on pingjoon.
- 7) Tsentrist läbiminev pingjoon on diameeter ehk läbimõetja.

Neist definiitsioonidest järgneb :

- 1) Ühe ja sellesama sõõri raadiused on isekeskis võrdsed.
- 2) Kui ühe punkti kaugus sõõri tsentrist vähem on kui raadius, siis on see punkt sõõri sees ;  
kui ühe punkti kaugus sõõri tsentrist raadius on, siis on see punkt ringi peal ;  
kui ühe punkti kaugus sõõri tsentrist suurem on kui raadius, siis on see punkt sõõrist väljas.

Ümberpöördult :

Sõõri sees oleva punkti kaugus tsentrist on vähem kui raadius ;  
ringi peal oleva punkti kaugus tsentrist on raadius ;  
sõõrist väljaspool oleva punkti kaugus tsentrist on suurem kui raadius.

- 3) Diameeter on kahe raadiuse summa ja
- 4) ühe ja sellesama sõõri diameetrid on isekeskis võrdsed.

**93. Teoreem.** Võrdsete raadiustega ringid on ise-keskis võrdsed.

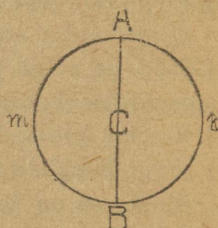


N.125.

**Tõestus:** Asetame sõõri C sõõri O peale nii, et nende tsentrid ühte langevad; siis langevad ka ringid ühte, sest nende punktid on kõik tsentrist ühekaugel.

**94. Teoreem.** Diameeter jagab sõõri ja ringi pooleks.

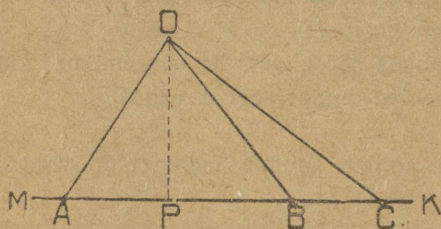
**Tõestus:** Murrame sõõri diameetrit AB-d mööda kahekorra, siis jäävad otsapunktid A ja B omale kohale, aga kaare AmB punktid langevad ühte kaare AkB punktidega, sest kõik ringi punktid on tsentrist ühekaugel, ja et sõõri pind tardunud on, siis ei löö ta kahekorra murdmisel kortsusid.



N.126.

**Järeldus:** Sõõril on niihästi teljeline, kui ka tsentraalne sümmeetria; iga diameeter on sümmeetria telg ja tsentraalse sümmeetria järk on lõpmatus.

**95. Teoreem.** Ringil ja sirgjoonel ei või üle kahe ühise punkti olla.



N.127.

**Tõestus:** Olgu ringil, mille tsentriks O on, sirgjoonega MK 3 ühist punkti A, B ja C, siis on OA, OB ja OC raadiused ja seepärast iseekeskis võrdsed.

Tõmbame O-st MK peale perpendikulaari OP; siis oleks aga võrdsetel kaldjoontel OB ja OC mittevõrdsed projektsioonid PB ja PC, mis võimata on [62, b, 2.]

1-ne järeldus: Läbi 3-e punkti, mis ühe sirgjoone peal on, ei ole võimalik ringi tõmmata.

2-ne järeldus: Ükski ringi osa ei või sirgjoonega ühte langeda.

Sirgjoon, millel ringiga 2 ühist punkti, on lõikaja;

" " " " 1 ühine punkt, on riivaja ja ühine punkt on riivaspunkt.

**96. Teoreem.** Läbi 3-e punkti, mis mitte ühe sirgjoone peal ei ole, on võimalik ringi tõmmata ja nimelt ühtainust.

**Tõestus:** Ühendame A-d B-ga ja B-d C-ga ja AB ja BC keskkohast tõmbame üles preperdikulaarid:  $PO \perp AB$  ja  $MO \perp BC$ . Need preperdikulaarid lõikavad teineteist punktis O.

Et  $AB = PB$ , siis on  $OA = OB$  [62-a, 2 ehk 63, 2];

et  $BM = MC$ , siis on  $OB = OC$  [62-a, 2 ehk 63, 2];

$$OA = OB = OC, \text{ s. t.}$$

kolme punkti ühendava kahe joonlõigu keskperpendikulaaride lõikepunkt on ühekaugel kõigist neist kolmest punktist.

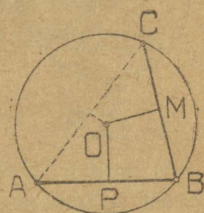
Seepärast, kui punktist O raadiusega  $OA = OB = OC$  ringi tõmmata, siis läheb see ring läbi antud punktide A, B ja C.

Et  $OA = OC$ , siis on  $\triangle AOC$  — sarikkolmnurk ja tema aluse AC keskperpendikulaar läheb läbi tema tipu O. Seepärast, kui me AB ehk BC asemel võtame AC, siis saame tsentriks ikka sellesama punkti O ja raadiuseks sellesama joonlõigu  $OA = OB = OC$ . Niiviisi on meil üksainus tsenter ja üksainus raadius ja järjekult ka üksainus ring.

**Ülesanne.** Antud sõõri tsenter leida!

**Lahendamine:** Ringi peal võtame 3 punkti, tõmbame nende läbi 2 pingjoont ja nende pingjoonte keskkohadelt tõmbame preperdikulaarid üles.

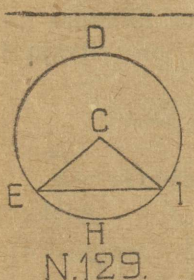
Nende preperdikulaaride lõikepunkt ongi otsitav tsenter.



N.128.

## Kaar, tsentrinurk ja pingjoon.

**97. Seletused.** Tsentrinurgaks nim. niisugust nurka, mille tipuks on tsepter ja harudeks raadiused.



N.129.

Igale kaarele vastab üks tsentrinurk ja üks pingjoon. Igale tsentrinurgale vastab üks kaar ja üks pingjoon, mille peale ta toetab. Aga igale pingjoonele vastavad kaks erilist kaart ja kaks erilist tsentrinurka, millest harilikult üks suurem ja teine vähem on kui poolringi ehk sirgenurk, näit. pingjoonele EI vastavad kaared EHI ja EDI ja nende kaarte peale toetavad tsentrinurgad. Kui räägitakse pingjoonest ja temale vastavatest kaartest ehk tsentrinurkadest, siis mõeldakse harilikult kaari, mis poolringist ja tsentrinurka, mis sirgest nurgast vähemad on.

**Sektor** ehk **sõõri väljalõige** on sõõri osa, mis piiratud on kahe raadiusega ja kaarega, näit. EDIC.

**Segment** ehk **sõõri ärälõige** on sõõri osa, mis piiratud pingjoone ja kaarega, näit. EIHE.

**Kaared** (segmentid ja sektorid) on võrdsed, kui nad pealepaigutamisel teineteist katavad.

**98. Teoreem.** Võrdsetele kaartele vastavad võrdsed pingjooned ja võrdsed tsentrinurgad.

**Oletus:**  $\frown AB = \frown CD$ .

**Väide:** 1)  $AB = CD$ ;

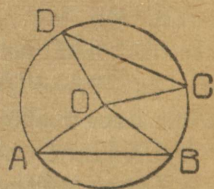
2)  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ .

**Tõestus:** Pöörame sektori AOB tsentri O ümber nii, et raadius OA läheks raadiust OC-d mööda; siis:

1) A langeb C peale, sest  $AO = OC$ ;

2)  $\frown AB$  läheb  $\frown CD$ -d mööda,

sest et kõik ringi punktid on ühekaugel tsentrist;



N.130.

3) B langeb D peale, sest  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ ;

4) OB langeb OD peale, sest nende otsapunktid on ühte langenud.

Järjekult: 1) pingjoon AB langeb pingjoone CD peale, sest nende otsapunktid on ühte langenud, ja seepärast on  $AB = CD$ ;

2)  $\sphericalangle AOB$  langeb ühte  $\sphericalangle COD$ -ga ja seepärast on  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ .

**1-ne vastupidine teoreem.** Võrdsetele tsentrinurkadele vastavad võrdsed kaared ja võrdsed pingjooned.

Oletus:  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ .

Väide: 1)  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ ; 2)  $AB = CD$ .

Tõestus: Pöörame sektori AOB tsentri O ümber nii, et raadius OA läheks raadiust OC-d mööda; siis

1) A langeb C peale, sest  $OA = OC$ ;

2) OB läheb OD-d mööda, sest et  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ ;

3) B langeb D peale, sest et  $OB = OD$ .

Järjekult: 1)  $\sphericalangle AB$  langeb ühte CD-ga, sest et kõik ringi punktid on tsentrist ühekaugel ja nende otsapunktid langesid ühte; seepärast on  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ .

2) AB langeb ühte CD-ga, sest et nende otsapunktid langesid ühte; seepärast on  $AB = CD$ .

**2-ne vastupidine teoreem.** Võrdsetele pingjoontele vastavad võrdsed tsentrinurgad ja võrdsed kaared.

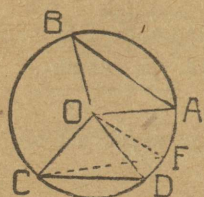
Tõestus: k. k. III. t. järele on  $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ; järjekult [97]  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$  ja  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ .

**99. Teoreem.** Suuremale kaarele vastab suurem tsentrinurk ja suurem pingjoon, kui suurem kaar poolringist suurem ei ole.

Oletus:  $\sphericalangle AB > \sphericalangle CD$ .

Väide: 1)  $\angle AOB > \angle COD$ ; 2)  $AB > CD$ .

Tõestus: Pöörame sektori AOB tsentri O ümber nii, et OA läheks OC-d mööda, siis: 1) A langeb C peale, sest et  $OA = OC$ ;



N.131

2)  $\frown AB$  läheb  $\frown CD$ -d mööda, sest et kõik nende punktid on tsentrist O ühekaugel;

3) B langeb  $\frown CD$  pikenduse peale [9] näit. punkti F, sest et  $\frown AB > \frown CD$ ;

4) seepärast läheb OB nurga COD välimist valda mööda OF sihis.

Järgelikult on  $\angle AOB > \angle COD$  [18].

Et näidata, et  $AB > CD$ , vaatleme kolmnurki AOB ja COD. Neis leiame, et:  $OA = OC$ ,  $OB = OD$ , aga  $\angle AOB > \angle COD$ ; järgelikult [55]  $AB > CD$ .

**1-ne vastupidine teoreem:** Suuremale tsentrinurgale vastab suurem kaar ja ka suurem pingjoon, kui suurem tsentrinurk sirgest nurgast suurem ei ole.

Oletus:  $\angle AOB > \angle COD$ .

Väide: 1)  $\frown AB > \frown CD$ ; 2)  $AB > CD$ .

Tõestus (vastuväiteline): Oleks  $\frown AB < \frown CD$ , siis oleks otsekoheste teoreemi järgi, ka  $\angle AOB < \angle COD$ , see käib aga oletuse vastu; oleks  $\frown AB = \frown CD$ , siis oleks [98] ka  $\angle AOB = \angle COD$ , mis ka oletuse vastu käib. Järgelikult võib ainult olla  $\frown AB > \frown CD$  ja selllega ühtlasi ka  $AB > CD$ .

**2-ne vastupidine teoreem.** Suuremale pingjoonele vastab suurem tsentrinurk ja suurem kaar, kui tsentrinurgad sirgestnurgast ja kaared poolringist suuremad ei ole.

Tõestus: Et  $AO = CO$ ,  $BO = DO$  ja  $AB > CD$ , siis on [55] järele  $\angle AOB > \angle COD$  ja järgelikult ka  $\frown AB > \frown CD$  [99,1],

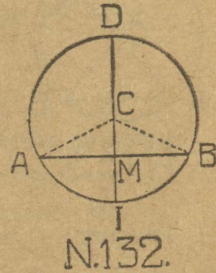
**Ülesanne.** Tõestada 1-ne vastupidine teoreem pealepaigutamise abil.

## Pingjooned.

**100. Teoreem.** Pingjoonele perpendikulaarne raadius ehk diameeter poolitab sedä pingjoont, temale vastavaid tsentrinurki ja kaari.

**Oletus:**  $DI \perp AB$  ehk  $CI \perp AB$ .

- Väide:**
- 1)  $AM = MB$ .
  - 2)  $\angle ACI = \angle ICB$  ja  $\angle ACD = \angle DCB$ .
  - 3)  $\frown AI = \frown IB$  ja  $\frown AD = \frown DB$ .



**Tõestus:** Ühendame tsentri pingjoone otsapunktidega A ja B; siis on  $AC = CB$  ja  $\triangle ACB$  on sarikkolmnurk; et see juures on  $CM \perp AB$ , siis on

$$\begin{array}{l|l}
 \underline{AM = MB \text{ ja } \angle ACM = \angle MCB} [56,1] & \frown IAD = \frown IBD \\
 \text{s. t. } \underline{\angle ACI = \angle ICB} & \frown IA = \frown IB \\
 \underline{\frown AI = \frown IB} [98,1] & \underline{\frown AD = \frown BD \text{ ja } \angle ACD = \angle BCD.}
 \end{array}$$

**Märkus:** DI on kõige selle kujundi sümmeetria telg.

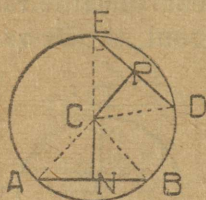
**1-ne vastupidine teoreem:** Pingjoont poolitajad raadius ja diameeter on sellele pingjoonele perpendikulaarsed [56].

**2-ne vastupidine teoreem:** Tsentrinurka poolitaja raadius või diameeter on sellele tsentrinurgale vastavale pingjoonele perpendikulaarne [56,2].

**3-as vastupidine teoreem:** Kaart poolitaja raadius või diameeter on sellele kaarele vastavale pingjoonele perpendikulaarne. Tõestus: Et  $\frown AI = \frown IB$ , siis on  $\angle ACI = \angle ICB$  [98] ja  $CI \perp AB$  [56,2].

**4-jas vastupidine teoreem:** Pingjoone keskperpendikulaar läheb tsentrist läbi ja poolitab pingjoonele vastavaid kaari [56,3].

5-es vastupidine teoreem: Sirgjoon, mis kaare ja pingjoone keskkohast läbi läheb, läheb ka läbi tsentri ja on pingjoonele perpendikulaarne, sest mõlemad punktid on pingjoonele perpendikulaarse diameetri peal. ¶



N.133.

**101. Teoreem.** Võrdsed pingjooned on tsentrist ühekaugel.

Oletus:  $AB = DE$ ,  $CN \perp AB$ ,  
 $CP \perp DE$ .

Väide:  $CN = CP$ .

Tõestus:  $\triangle ACB \cong \triangle DCE$  [k. k. III. t.]  
 $CN = CP$  [43]

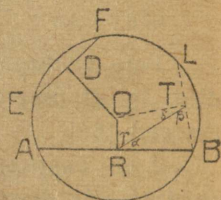
Vastupidine teoreem. Tsentrist ühekaugel olevad pingjooned on isekeesis võrdsed. Tõestagu õpilased!

**102. Teoreem.** Pikem pingjoon on tsentrile ligemal.

Oletus:  $AB > EF$ ,  $OR \perp AB$ ,  
 $OD \perp EF$ .

Väide:  $OR < OD$ .

Tõestus: Asetame pingjoone EF pingjoone BL kohale, nii et  $BL = EF$  ja tõmbame  $OT \perp BL$ ; siis on [101]  $OT = OD$  ja  $AB > BL$ .



N.134

Ühendame R T-ga;

siis on  $\triangle$ -gas BRT:  $RB > BT$ , sest et  $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}BL$ .

$$\underline{\angle \beta > \angle \alpha} \text{ [48]}$$

$$\underline{\angle \delta < \angle \gamma}, \text{ sest } 90^\circ - \beta < 90^\circ - \alpha$$

$$\underline{OR < OT} \text{ [48]; et aga } OT = OD, \text{ siis}$$

$$OR < OD.$$

Vastupidine teoreem: Kahest pingjoonest on see pikem, mis tsentrile ligem on.

Tõestus: Et  $OR < OD$ ,  
ehk  $OR < OT$ ,

siis on ka  $\angle \delta < \angle \gamma$  [48];

$\angle \beta > \angle \alpha$ , sest  $90^\circ - \delta > 90^\circ - \gamma$ ;

$RB > BT$

$AB > BL$  ehk  $AB > EF$ .

Järeldus: Diameeter on kõige suurem pingjoon.

Tõestuseks ühendame pingjoone otsad tsentriga, siis on kahe raadiuse summa ehk diameeter pingjoonest pikem.

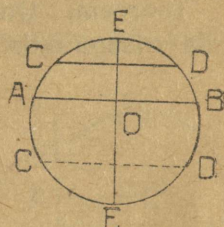
**103. Teoreem.** Paralleelsete pingjoonte vahel olevad kaared on võrdsed.

Oletus:  $CD \parallel AB$ .

Väide:  $\sphericalangle AC = \sphericalangle BD$ .

Tõestus: Tõmbame diameetri  $EE \perp AB$ ; siis on [100]  $\sphericalangle AE = \sphericalangle BE$  ja  $EE \perp CD$  [34]; järjel.  $\sphericalangle CE = \sphericalangle DE$

$\sphericalangle AC = \sphericalangle BD$ .



N.135

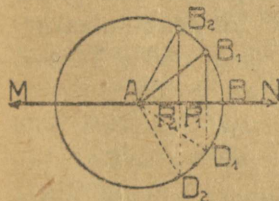
**104. Teoreem.** Kui projekteeritavat muutmata jätta ja kallakust muuta  $0^\circ$ -st kuni  $90^\circ$ -ni, siis vastab suuremale kallakusele suurem projekteerija ja väheni projektsjoon.

Oletus:  $AB_2 = AB_1$ ,

$\angle NAB_2 > \angle NAB_1$ ;

Väide:  $B_2P_2 > B_1P_1$ ;

$AP_2 < AP_1$ .



N.136.

Tõestus: Tõmbame ringi, raadiuseks võttes projekteeritavat  $AB$ -d, ja pikendame projekteerijaid  $B_1P_1$  ja  $B_2P_2$  teisele poole  $MN$ -i nii kaugele,

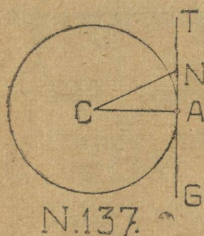
et nad ringiga lõikuvad punktides  $D_1$  ja  $D_2$ . Siis leiame :  
 et  $\angle B_2AN > \angle B_1AN$  ja et  $\angle B_2AD_2 = 2 \cdot \angle B_2AN$  ja  
 $\angle B_1AD_1 = 2 \cdot \angle B_1AN$ , siis on ka  
 $\angle B_2AD_2 > \angle B_1AD_1$  ja mõlemad on vähemad kui  $180^\circ$ ;

$$\frac{B_2D_2 > B_1D_1 \text{ [99,1]} \text{ ehk } 2B_2P_2 > 2B_1P_1}{AP_2 < AP_1 \text{ [102]} \text{ ja } B_2P_2 > B_1P_1.}$$

## Riivaja.

**105.** Riivajaks nimetasime meie [95] sirgjoont, millel ringiga üks ühine punkt on; seda ühist punkti nimetasime riivaspunktiks.

**Teoreem.** On sirgjoon perpendikulaarne raadiusele tema otsapunktis, siis on ta ringi riivaja.



**Oletus:**  $TG \perp CA$ , TG läheb raadiuse otsapunktist A-st läbi.

**Väide:** TG on riivaja, s. t. TG-l on ringiga üksainus ühine punkt.

**Tõestus:** Kui me mingit TG peal võetud punkti N tsentriga C ühendame, siis on CN kaldjoon TG-le ja seepärast on  $CN > CA$ . See tähendab, et punkt N on väljaspool sõõri ja A on ringi ja TG ainus ühine punkt. Järjelikult on TG riivaja.

**1-ne vastupidine teoreem:** Riivaspunkti tõmmatud raadius ehk diameeter on riivajale perpendikulaarne. **Tõestus:** Et A riivaspunkt on, siis on mingi riivaja TG peal võetud punkt N väljaspool sõõri; seepärast on  $CN > CA$  ja kõigist sirgjoontest, mida tsentrist C riivaja TG peale võib tõmmata, on CA kõige lühem. Järjelikult [62, b<sub>1</sub>] on  $CA \perp TG$ .

**2-ne vastupidine teoreem.** Tsentrist riivaja peale tõmmatud perpendikulaar läheb riivaspunkti. **Tõestus:**

Vastasel korral saaksime riivapunkti tsentriga ühendades kaks perpendikulaari ühest punktist C ühe sirgjoone TG peale, mis võimata on.

**3-as vastupidine teoreem:** Riivapunkti riivajale tõmmatud perpendikulaar läheb ringi tsentrist läbi, muidu saaksime tsentrit riivapunktiga ühendades riivapunktis kaks perpendikulaari riivajale.

**Järeldus:** Kui sirgjoone kauguseks ringi tsentrist raadius on, siis riivab see sirgjoon ringi; on sirgjoone kaugus tsentrist lühem kui raadius, siis lõikab sirgjoon ringi; on sirgjoone kaugus tsentrist pikem kui raadius, siis ei ole sirgjoonel ja ringil ühtegi ühist punkti.

**Tõestada teoreem:** Pingjoonele paralleelne riivaja poolitab pingjoonele vastavat kaart.

**106. 1-ne ülesanne.** Sirgjoon tõmmata, mis antud ringi antud punktis riivab. Antud punkti ühendame tsentriga ja saadud raadiusel tõmbame tema otsapunktis A perpendikulaari.

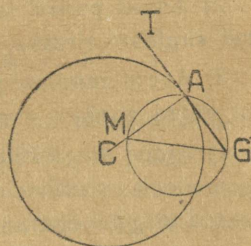
**2-ne ülesanne.** Väljaspool sõõri C antud punktist T tõmmata selle ringile riivaja.

**Konstrueerimine:** 1) Ühendame punkt T tsentriga C sirgjoone abil;

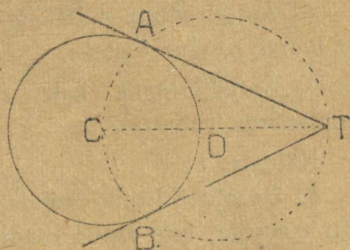
2) Joonlõigu TC jagame pooleks punktis D;

3) TC ümber tõmbame ringi TC-d diameetriks võttes; see ring D lõikab ringi C-d kahes punktis A ja B;

4) T ja A, ning T ja B läbi tõmmatud sirgjooned TA ja TB on otsitud riivajad, sest  $\angle CAT =$



N.138.



N.139.

$= 90^\circ$  ja  $\angle CBT = 90^\circ$ , kui diameetri CT peale toetavad piirdeurged [59].

**Teoreem:** Ühest ja sellest samast punktist ühe ja sellesama ringi külge tõmmatud riivajate lõigud, ühisest väljamineku punktist kuni riivaspunktideni arvatud, on ühepikkused, ja sirgjoon, mis seda riivajate ühist väljamineku punkti ringi tsentriga ühendab, jagab riivajate sünnitatud nurga pooleks.

**Tõestus:**  $\triangle TAC \cong \triangle TBC$  [k. k. IV. t põhjal, sest  $TC = TC$ ,  
 $AC = BC$  ja  $\angle TAC = \angle TBC$ ].  
 $TA = TB$  ja  $\angle ATC = \angle BTC$ .

**Järeldus:** TC on selle kujundi sümmeetria telg.

**107. Ülesanded.** 1) Sõõri sees antud punkti läbi pingjoon tõmmata nii, et see punkt teda poolitaks.

2) Antud punkti tsentriks võttes ring tõmmata nii, et ta antud sirgjoont riivaks.

3) Antud raadiusega ring tõmmata nii, et ta antud sirgjoont antud punktis riivaks.

4) Antud ringi külge riivaja tõmmata nii, et ta antud sirgjoonele a) paralleelne oleks, b) perpendikulaarne oleks, c) antud sirgjoonega antud nurga sünnitaks.

5) Antud ringi külge riivaja tõmmata nii, et antud paralleeljooned tema küljest antud joonlõigu ära lõikaksid.

6) Antud sõõris diameeter tõmmata nii, et ta antud punkti antud kaugusel oleks.

7) Antud ringile kaks riivajat tõmmata nii, et nad antud nurga sünnitaksid.

Näidata, et

8) Geomeetriliseks kohaks (lühendatult G. k.) niisuguse ringi tsentriks, mis antud raadiusega tõmmatud ja antud punkti läbi läheb, on antud punkti kui tsentrist antud raadiusega tõmmatud ring.

9) G. k. niisuguse ringi tsentriks, mis antud sirgjoont antud punktis riivab, on sellele sirgjoonele selles punktis tõmmatud perpendikulaar.

10) G. k. ringi tsentriks, mis kaht lõikuvat sirgjoont riivab, on nendest sirgjoontest sünitatud nurkade poolitajad.

11) G. k. niisuguse ringi tsentriks, mis kaht paralleeljoont riivab, on neile paralleeljoontele paralleelne, nende keskelt läbi tõmmatud sirgjoon.

12) G. k. niisuguse ringi tsentriks, millele raadiuseks antud joonlõik  $r$  on ja mis antud sirgjoont riivab, on mõlemad  $r$  kaugel antud sirgjoonest olevad paralleeljooned.

13) G. k. kahest antud punktist läbimineva ringi tsentriks on neid punkta ühendava joonlõigu keskperpendikulaar.

## Nurgad sõõris.

**108. Piirdenurgad.** Piirdenurk on niisugune nurk, mille tipp on ringi peal ja mille harudeks on pingjooned. Igale piirdenurgale vastab üks kaar, mille peale ta toetab, üks pingjoon ja üks tsentrinurk, mis sellesama kaare peale toetab.

**Teoreem.** Piirdenurk on pool sellesama kaare peale toetavast tsentri nurgast.

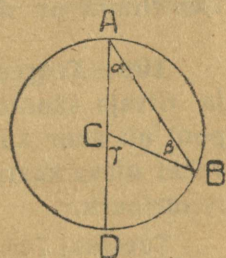
**I-ne juhus:** Sõõri tsepter on piirdenurga ühe haru peal.

**Tõestus:**  $\angle \alpha + \beta = \angle \gamma$  [40]

$\angle \beta = \angle \alpha$  [47]

$2 \angle \alpha = \angle \gamma$

$\angle \alpha = \frac{1}{2} \angle \gamma$



N.140a.

**II-ne juhus:** Sõõri tsepter on piirdenurga siseses vallas.

**III-as juhus:** Sõõri tsepter on piirdenurga väliseses vallas.

**Tõestus:** Tõmbame läbi A ja C diameetri AD, siis on:

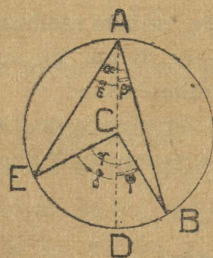
$$\left. \begin{aligned} \angle \varepsilon &= \frac{1}{2} \angle \delta \\ \angle \beta &= \frac{1}{2} \angle \varphi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(1-sejuhuse)} \\ \text{põhjal} \end{array} \left. \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \begin{aligned} \angle \varepsilon &= \frac{1}{2} \cdot \angle \delta \\ \angle \beta &= \frac{1}{2} \cdot \angle \varphi \end{aligned}$$


---

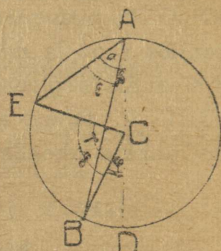

$$\begin{aligned} \angle \varepsilon + \angle \beta &= \frac{1}{2} (\angle \delta + \angle \varphi) & \angle \varepsilon - \angle \beta &= \frac{1}{2} (\angle \delta - \angle \varphi) \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned} \angle \alpha &= \frac{1}{2} \cdot \angle \gamma & \angle \alpha &= \frac{1}{2} \cdot \angle \gamma \end{aligned}$$



N.140b.



N.140c.

I-ne järeldus: Kõik piirdenurgad, mis ilu sellesama kaare peale toetavad, on isekeskis võrdsed.

II-ne järeldus: Diameetri peale toetav piirdenurk on täisnurk, sest temale vastav tsentrinurk on sirgenurk.

**109. Teoreem.** Pingjoone ja riivaja sünnitatud nurk on pool nii suur kui tema harude vahel oleva kaare peale toetav tsentrinurk.

**Tõestus:** Tõmbame diameetri

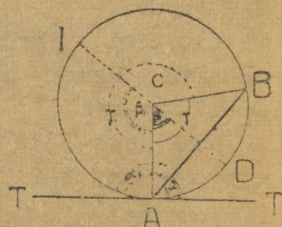
$DI \perp AB$ , siis on:  $\angle \beta = \frac{1}{2} \angle \gamma$  [100],  $\angle \beta_1 = \frac{1}{2} \angle \gamma_1$ ;

Aga [105, 1 järele] on

$CA \perp AT^*$ ); järjel.:  $\angle \beta = \angle \alpha$  [37],  $\angle \beta_1 = \angle \alpha_1$ ;

$\angle \alpha = \frac{1}{2} \cdot \angle \gamma$ ,  $\angle \alpha_1 = \frac{1}{2} \angle \gamma_1$ .

\*) C on tsenter.



N.141

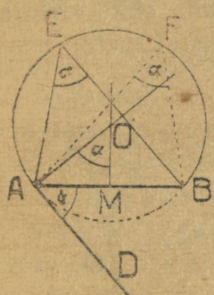
Riivaja ja pingjoone sünnitatud nurka tuleb ka piirdeurkade hulka arvata.

**110. Seletus.** Kaart, mille peal leiduvad antud nurgale võrdsete piirdeurkade tipud, nimetakse **antud nurka mahutavaks kaareks.**

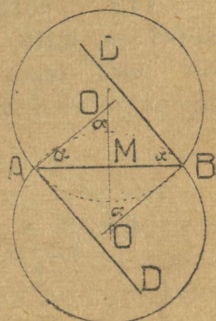
**Ülesanne** Antud pingjoone üle tõmmata kaar, mis antud nurka piirdeurkana mahutab.

**Konstrueerimine:** Antud pingjoone  $AB$  külge ühe tema otsapunkti juures

asetame antud nurga  $a$  :  $\angle DAB = a$ . Jagame  $AB$  pooleks punktis  $M$ . Punktidest  $M$  ja  $A$  tõmbame perpendikulaarid antud nurga harudele. Nende perpendikulaaride lõikepunktist  $O$  tõmbame raadiusega  $OA$



N.142a.



N.142b.

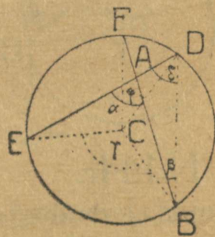
kaare  $AEFB$ .  $\sphericalcap AEFB$  on otsitav.

**Tõestus:** Ühendame miski punkti  $E$  ehk  $F$  pingjoone otsadega  $A$  ja  $B$ . Siis on:

$$\angle AEB = \angle AFB = \angle AOM = \angle DAB = a.$$

**Märkus:** Kaared võivad sümmeetriliselt kummalegi poole  $AB$ -d aseneda selle järele, kuhu poole  $AB$ -d me nurga asetame.

**111. Teoreem.** Nurk, mille tipp on sõõri sees, on pool temaga ja tema ristnurgaga ühe ja nendesamade kaarte peale toetavate tsentrinurkade summast.



N.143.

Tõestus: Ühendame D B-ga ja tsentri C pingjoonte otsadega E, F, D ja B;

siis on  $\angle \alpha = \angle \delta + \angle \beta$ , kui  $\triangle ABD$  välisnurk [40].

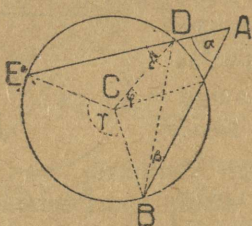
Aga  $\angle \delta = \frac{1}{2} \angle \gamma$  [108]

$$\angle \beta = \frac{1}{2} \angle \varphi$$

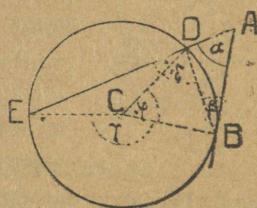
---


$$\angle \alpha = \frac{1}{2} (\angle \gamma + \angle \varphi).$$

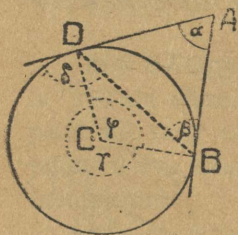
**112. Teoreem.** Nurk, mille tipp on väljaspool sõõri ja mille harudeks on lõikajad ehk riivajad on pool tema harude vahele olevate kaarte peale toetavate tsentrinurkade vahest.



N.144a.



N.144b.



N.144c.

Tõestus: Võimalik on 3 juhust; igas kolmes juhuses on  $\angle \delta$   $\triangle$ -ga ABD välisnurk ja seepärast on:

$$\angle \delta = \angle \alpha + \angle \beta; \text{ ehk: } \angle \alpha = \angle \delta - \angle \beta.$$

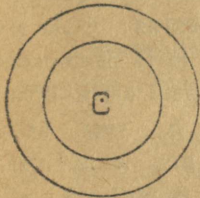
Et aga  $\angle \delta = \frac{1}{2} \angle \gamma$  ja  $\angle \beta = \frac{1}{2} \angle \varphi$ ,

siis on:  $\angle \alpha = \frac{1}{2} (\angle \gamma - \angle \varphi).$

Järeldus: G.k. punktile, kust antud joonlõik antud vaatenurga all näha, on seda nurka mahutav ja antud joonlõigu kui pingjoone üle tõmmatud kaar.

## Kaks sõõri.

**113. Seletus.** Kaks sõõri, millel ühine tsepter, on **ühistsentrilised**, kaks sõõri mille igal-ühel on eri tsepter, on **eritsentrilised** ehk **ekstsentrilised**.

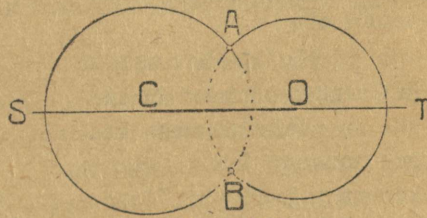


N.145.

[Kaks ühistsentrilist sõõri võrdsete raadiustega katavad teineteist [93], eri-raadiustega ringidel ei ole ühiseid punkta ja üks sõõr on täiesti teise sees].

Enam kui kaks ühist punkti ei või kahel eritsentrilisel sõõril olla, muidu langeksid nad ühte [95, 96]. Kaks ringi, millel 2 ühistpunkti on, **lõikuvad**, kaks ringi, millel 1 ühine punkt on, **riivavad teineteist**, ja nimelt **väljastpoolt**, kui kumbki sõõr väljaspool teist on, ja **seestpoolt**, kui üks sõõr täiesti teise sees on. Kahe eritsentrilise sõõri tseptritest läbiminev otsatu sirgjoon on nende sõõride **tseptrijoon** ja nende tseptridega piiratud tseptrijoone lõik on **tseptrite kaugus**. **Tseptrijoon on kahe sõõri sünnitatud kujundi sümmeeria telg**, sest tema peal olevad diameetrid on kumbki oma sõõri sümmeeria telg.

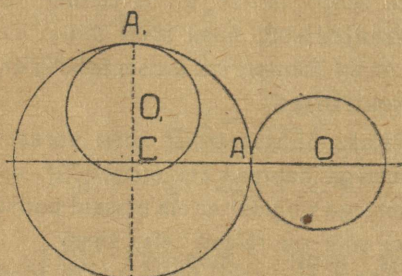
**114. Teoreem.** On kahel ekstsentrilisel ringil üks ühine punkt väljaspool tseptrijoont, siis on neil ka teine ühine punkt väljaspool tseptrijoont, nimelt teiseks ühiseks punktiks on esimesele punktile A tseptrijoone ST kohta sümmeetriline punkt B.



N. 146.

**Järeldus:** Kahe lõikuva ringi tseptrijoon poolitab nende ringide ühist pingjoont ja on temale perpendikulaarne [25,1].

**115. Teoreem.** On kahel ringil tsentrijoone peal ühine punkt, siis riivavad nad teineteist.



N.147

**Tõestus:** Oleks ringidel C ja O peale tsentrijoone peal oleva ühise punkti A veel ühine punkt, mis ainult väljaspool tsentrijoont olla võib, siis oleks neil ka [114 järele] veel teine väljaspool tsentrijoont olev

ühine punkt [114], seega kõiges kokku 3 ühist punkti ja nad langeksid ühte [96].

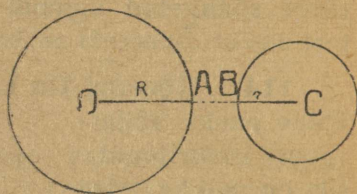
**Vastupidine teoreem:** Kahe teineteist riivava ringi riivapunkt on tsentrijoone peal [114, 115].

**116. Kahe sõõri vastastikkune seisand.** Lüheduse pä-  
rast tähendagu  $R$  — ühe sõõri  
raadiust,  $r$  — teise sõõri ra-  
adiust ja  $d$  — tsentrite kaugust.

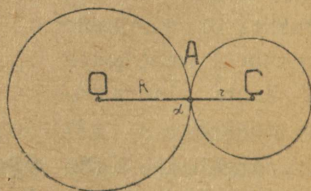
Kaks sõõri võivad teine-  
teise kohta järgmises 5 sei-  
sandis olla:

I. Kui kumbki sõõr  $O$   
ja  $C$  väljaspool teist sõõri on,  
siis on nende tsentrite kau-  
gus suurem kui raadiuste  
summa:  $d > R + r$ . Tõepoo-  
lest:  $OC = OA + AB + BC$   
ja  $OA$  on suurem kui  $OA +$   
 $+ BC$ , nimelt  $AB$  võrra.

**Ümberpöörduvalt:** Kui  
 $d > R + r$ , siis on sõõrid  
väljaspool teineteist [N 148].



N.148.



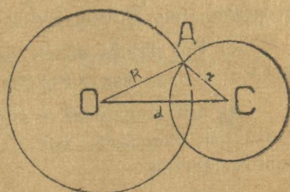
N.149

II. Kui sõõrid teineteist väljaspool riivavad, siis on nende tsentrite kaugus nende raadiuste summa:  $d = R + r$ . Tõepoolest:  $OC = OA + AC$ .

**Ümberpöördult:** Kui  $d = R + r$ , siis riivavad sõõrid teineteist väljaspool. [N 149].

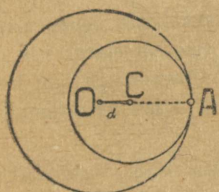
III. Kui ringid lõikuvad, siis on tsentrite kaugus vähem kui raadiuste summa ja suurem kui raadiuste vahe:  $d < R + r$  ja  $d > R - r$ .

Tõepoolest:  $\triangle$ -gas  $OAC$  on  $OC < OA + AC$  ja  $OC > OA - AC$ .



N.150.

**Ümberpöördult:** Kui  $d < R + r$  ja  $d > R - r$ , siis lõikuvad ringid.

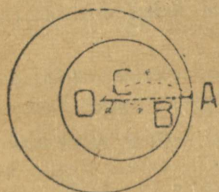


N.151.

IV. Kui ringid teineteist riivavad seespool, siis on tsentrite kaugus nende raadiuste vahe:  $d = R - r$ .

Tõepoolest:  $OC = OA - CA$ .

**Ümberpöördult:** Kui  $d = R - r$ , siis riivavad ringid teineteist seespool.



N.152.

V. Kui üks sõõr C täiesti teise O sees on, siis on tsentrite kaugus vähem kui raadiuste vahe:  $d < R - r$ .

Tõepoolest:  $OA - CB = OC + BA$ ; järjekul on  $OC < OA - CB$ , nimelt  $BA$  võrra.

**Ümberpöördult:** Kui  $d < R - r$ , siis on üks sõõr täielikult teise sees.

**Märkus:** Kõik vastupidised teoreemid tõestatakse pärast otsekoheste teoreemide tõestamist vastuväiteliselt.

• **117. Teoreemid tõestada.** 1) Kahe võrdse riivajate nurga tipud on tsentrist ühekaugel.

2) Kui kaks võrdset lõikajate nurka ühe ja sellesama pingjoone peale toetavad, siis on nende harude vahel olevad kaared isekeskis võrdsed.

3) Kui üks ring teist seestpoolt riivab ja kui vähem ring suurema ringi tsentrist läbi läheb, siis poolitab vähem ring kõiki suurema ringi pingjooni, mis riivaspunktist välja lähevad.

4) Kui mõnes sõõris kaks piirdenurka ABC ja DEF isekeskis võrdsed on, siis on kas  $AF \parallel CD$  ehk  $AF = CD$ .

5) Kui ringi peal 4 mistahes punkti võtta ja iga kahe vastaskaare keskkohiti ühendada, siis on ühendatavad sirgjooned teineteisele perpendikulaarsed.

6) Kui lõikajate sünnitatud nurga üks haru läbi tsentri läheb ja teise haru välimine osa raadiusele võrdub, siis on üks harude vahel olev kaar 3 korda nii suur kui teine kaar.

7) Kui me kolmnurga 2 külge diameetriteks võtame ja nende üle ringid tõmbame, siis lõikuvad need ringid kolmanda külje peal tema vastastipu projektsioonis.

8) Kui kahe lõikuva ringi tsentri kauguse keskkohata nende ringide lõikepunktiga ühendada ja selle ühendusjoonega ring tõmmata, siis poolitab see ring igat joonlõiku, mis antud ringile lõikepunktist läbi nende ringideni tõmmatakse. (Juhatus: Igast tsentrist tuleb selle joonlõigu peale perpendikulaar tõmmata).

**Geomeetrilised kohad.** 9) G. k. niisuguse ringi tsentri-le, mis antud ringi antud punktis riivab, on antud punktist ja antud ringi tsentrist läbiminev sirgjoon.

10) G. k. niisuguse ringi tsentri-le, mille raadius on  $r$  ja mis antud ringi  $R$  riivab, on mõlemad antud ringile ühistsentrilised ringid raadiustega  $R + r$  ja  $R - r$ .

11) G. k. niisuguse ringi tsentri-le, mis antud sirgjoonest antud pikkusega pingjooned ära lõikab, on kaks antud sirgjoonele paralleelset joont.

12) G. k. niisuguse ringi teentri-le, mis antud ringi nii lõikab, et nende ühisel pingjoonel on antud pikkus, on kaks antud ringile ühistsentrilist ringi.

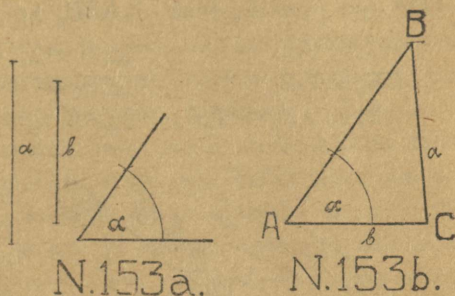
✓ **118. Konstrueerimise ülesande uurimine.** Ülesanne: Kahest küljest ja ühe külje vastasnurgast  $\triangle$  konstrueerida.

**Konstrueerimine:** 1) Konstrueerime  $\angle A = \alpha$ ;

2) nurga A ühe haru peale asetame seda nurka piirav külge  $b$  nii et  $AC = b$ ;

Antud:  $a, b, \alpha$ .

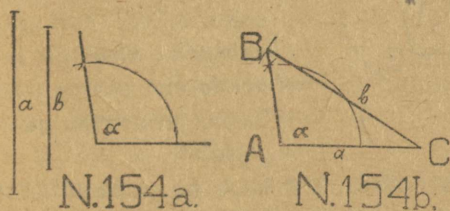
3) tipust C raadiusega  $a$  tõmbame kaare, mis lõikab  $\angle A$  teist haru punktis B;



4) B ja C ühendame sirgjoone abil.  $\triangle ABC$  on otsitav [53].

**Uurimine:** I. Kui  $a > b$ , siis läheb punktist C raadiusega  $a$  tõmmatud kaar tipu A tagant mööda ja lõikab haru AD-d

ühes punktis  $B_0$  (teine lõikepunkt on DA pikenduse peal), sest võetud raadius on pikem kui tipu C kaugus harust AB:  $a > h_c = CP$ . [N 155]. Lahendusena esineb



1 kolmnurk —  $\triangle ACB_0$  [N 155]. Külge  $a$  peab iseenesest pikem olema kui  $b$ , kui  $\angle \alpha$  on tõmpnurk [N 154] ehk täisnurk. Kui me  $a$ -d vähendame, siis hakkab lõikepunkt B lähenema tipule A; me saame aga ikkagi 1 lahenduse — 1 kolmnurga, näit.  $\triangle ACB_1$  nii kaua, kui  $a > b$ .

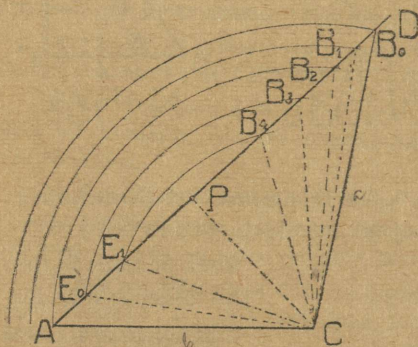
II. Kui  $a$  saab võrdseks  $b$ -le,  $a = b$ , siis ilmub ka teine lõikepunkt, nimelt kaar läheb tipust A läbi; lahendusena esineb 1 sarikkolmnurk —  $\triangle ACB_2$ .

III. Kui me edasi vähendame  $a$ -d, nii et  $a < b$ , siis hakkab AD-d mööda liikudes, B lähenema A-le ja E — kaugemale minema A-st, sellega teineteisele ja punkti P-le lähenedes.

Selle juures on olemas 3 võimalust: 1)  $b > a > h_c$ ; 2)  $b > a = h_c$ ; 3)  $b > h_c > a$ .

✓ 1) Niikaua kui  $a > h_c$ , saame lahendusena 2 kolmnurka:  $\triangle ACB_3$  ja  $\triangle ACE_0$  (ehk  $\triangle ACB_4$  ja  $\triangle ACE_1$ ) nii et

$$\begin{aligned} AC_3 &= AC & \angle A &= \angle A (= \alpha) \\ CE_0 &= CB_3 & \angle E_0 &= 180^\circ - \angle B_3 \\ AE_0 &= AB_3 - E_0B_3 & \angle ACE_0 &= \angle ACB_3 - \angle B_3CE_0. \end{aligned}$$



N.155

2) Kui  $a$  väheneb niipalju, et saab  $a = h_c$  ( $= CP$ ), siis on punktid  $B$  ja  $E$  teineteisele niikaugele lähenedud, et nad ühte langevad punktis  $P$ ; kaar, mis tsentrist  $C$  tõmmatakse raadiusega  $a$ , ei lõika enam  $AD$ -d, vaid riiwab teda ainult ja lahendusena saame 1-he täisnurkse kolmnurga —  $\triangle ACP$ .

× 3) Kui  $a$ -d edasi vähendada, siis kaob nurga harul  $AD$ -l ja tsentrist  $C$  tõmmatud kaarel ühine punkt ära, kaar ei ulatagi haruni  $AD$  ja me ei saagi kolmnurka — ülesanne on võimata.

### Kokkuvõtte.

- a) Kui  $a > 90^\circ$ , siis on  $a > b$ , ja ülesandel on 1 lahendus, tõpnurkne  $\triangle$ .  
 b) „  $a = 90^\circ$ , „ „  $a > b$ , „ „ „ 1 „ täisnurkne  $\triangle$ .  
 c) „  $a < 90^\circ$  ja I.  $a > b$ , „ „ „ 1 „ „  
    „ II.  $a = b$ , „ „ „ 1 „ sarikkolmnurka;  
    III.  $a < b$ , see juures aga:  
    1)  $a > h_c$ , siis 2 lahendust, millest 1 — tõpnurkne;  
    2)  $a = h_c$ , „ 1 „ „  $\triangle$  on täisnurkne.  
    3)  $a < h_c$ , „ 0 „ „ ülesanne võimata.

Sellest näitusest selgub, et konstrueerimise ülesande uurimise abil saame teada, kas ülesanne ülepea võimalik on,



**Konstrueerimine:** 1) Jagame OC pooleks punktis M.

2) Raadiusega  $MO = MC = \frac{1}{2}OC$  tõmbame ringi OC ümber, seda diameetriks võttes.

3) Asetame CL EO peale nii, et  $EF = CL$ , siis saame  $OF = R - r$ .

4) O ümber tõmbame raadiusega  $OF = R - r$  ringi, mis M ümber tõmmatud ringi kahes punktis D ja  $D_1$  lõikab.

5) Punktide O ja D ning punktide O ja  $D_1$  läbi tõmbame raadiused OA ja  $OA_1$ .

6) Punktidest A ja  $A_1$  tõmbame raadiusega  $DC = D_1C$  kaared, mis ringi C-d lõikavad punktides B ja  $B_1$ .

7) Läbi A ja B, läbi  $A_1$  ja  $B_1$  tõmbame sirgjooned. AB ja  $A_1B_1$  on otsitavad riivajad.

$$\begin{array}{ll} \text{Tõestus: } OA = R & DA = CB \\ OD = R - r & AB = DC \\ \hline DA = r = CB & DA \parallel CB, AB \parallel DC [77] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \angle ODC = 90^\circ [59; 108,2] & OA \perp AB \\ AB \parallel DC & OA \parallel CB \\ \hline \angle OAB = 90^\circ & CB \perp AB. \end{array}$$

Et AB kummagile raadiusele OA ja CB perpendikulaarne on nende otsapunktis, siis on ta ringide O ja C ühine riivaja.

**Uurimine.** 1) Niikaua kui  $OF = R - r$  vähem on kui  $OC = d$  [116], lõikab punktist O raadiusega OF tõmmatud ring punktist M raadiusega  $MO = MC = \frac{1}{2}OC$  tõmmatud ringi 2-es punktis ja me saame 2 ühist välist riivajat, mis tsentrijoone kohta sümmeetrilised on.

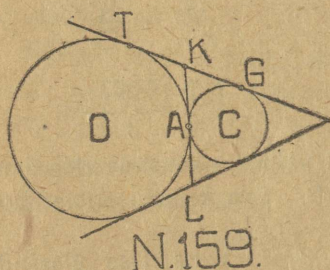
2) On  $OF = OC$ , s. t.  $R - r = d$ , siis riivab punktist O raadiusega OF tõmmatud ring ringi M ja me saame 1 ühise välise riivaja. Teisiti see olla ei või, sest ring C riivab ringi O seestpoolt  $R - r = d$ .

3) On  $OF > OC$ , s. t.  $R - r > d$  siis ei ole punktist O raadiusega OF tõmmatud ringil ja ringil M ühtegi ühist



semine riivaja. Selle juures ise sisemise riivaja osa, mis riivaspunkti ja sisemise ja välimise riivaja lõikepunkti vahel, on pool välimisest riivajast riivaspunkti riivaspunktini arvatud ja sisemine riivaja jagab välimise riivaja pooleks. Tõepoolest:  $KT = KA = KG = \frac{1}{2}TG$  [106]. Järjekult on ka  $KL = TG$ .

**3-as järeldus:** Kui ringid lõikuvad, siis on neil 2 ühist välimist riivajat; ühist sisemist riivajat ei ole.



**4-jas järeldus:** Kui ringid teineteist riivavad seestpoolt, siis on neil ainult 1 ühine välimine riivaja.

**5-es järeldus:** Kui üks ring täiesti teise sees on, siis ei ole neil ühiseid riivajaid.

### Väljaarvamise ülesanded.

1) Kahe teineteist riivava ringi külge on ühised välimised riivajad tõmmatud. Igas ringis on riivaspunktid teineteisega ühendatud pingjoonte abil, mille pikkus vastavalt  $a=15$  m. ja  $b=7$  m. on. Kui pikk on ühine riivaja?

2) Kahe teineteist riivava ringi külge on ühine välimine riivaja tõmmatud. Kummagis ringis on riivaspunkt tsentrijoone peale projekteeritud ja projekteerijate pikkus on vastavalt  $e=34,56$  m. ja  $f=61,44$  m. Kui pikk on ühine (välimine) riivaja, riivaspunkti riivaspunktini arvatud?

Sissekujundatud ja ümberkujundatud paljunurgad.

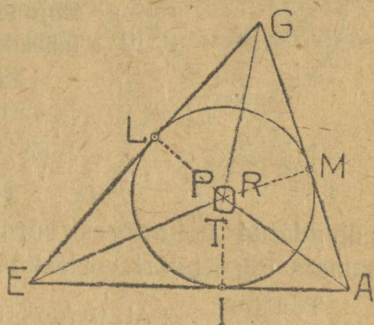
**120. Seletused.** Paljunurk on ringi sisse kujundatud, kui paljunurga küljed on ringi pingjooned; ring on siis paljunurgale ümber kujundatud. Paljunurk on ringile ümberkujundatud, kui paljunurga küljed ringi riivajad on; ring on siis paljunurgale sisse kujundatud.

**Teoreem.** Iga kolmnurga ümber on võimalik ringi kujundada ja nimelt ühtainust.

**Tõestus:** Kolmnurga küljed peavad siis ringi pingjooned olema ja ring peab kolmnurga tippudest läbi minema. Me teame aga [96], et läbi 3-e punkti, mis mitte ühe sirgjoone peal ei ole, on võimalik ringi tõmmata ja nimelt ühtainust.

**121. Teoreem.** Iga kolmnurga sisse on võimalik ringi kujundada ja nimelt ühtainust.

**Konstrueerimine.** Kui otsitavad ringi riivajad peavad kolmnurga küljed ühekaugel olema ringi tsentrist. Et nurgapoolitaja on geometriliseks kohaks niisugusele punktile, mis ühekaugel on nurga harudest, siis tõmbame  $\sphericalangle$ -a A poolitaja AP ja  $\sphericalangle$ -a E poolitaja ER. AP ja ER lõikuvad punktis O. Punktist O tõmbame perpendikulaarid kõige kolme külje



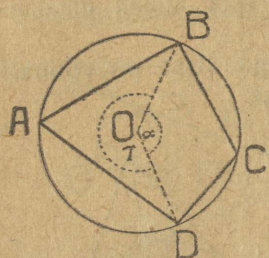
N.160.

peale:  $OI \perp AE$ ,  $OM \perp AG$ ,  $OL \perp EG$ . Siis on:  $OI = OM$  ja  $OI = OA$ , järjestikult  $OL = OI = OM$ . Kui me nüüd punkti O raadiusega  $OI = OL = OM$  ringi tõmbame, siis riivab see ring igat kolmnurga külge ja on seega sissekujundatud ring. Et O ühekaugel on ka nurga G külgedest,  $OL = OM$ , siis on ta  $\sphericalangle$ -a G poolitaja peal ja ka  $\sphericalangle$ -a G poolitaja GT läheb punktist O läbi, nii et missuguseid 2 nurka meie ka ei poolitaks, ikka saame tsentriks punkti O ja raadiuseks  $OL = OI = OM$ . See tähendab, et kolmnurgale AEG on võimalik sisse kujundada ühtainust ringi.

**122. Teoreem.** Igas sissekujundatud neljurgas annab vastasnurkade summa sirgenurga.

**Tõestus:** Ühendame O B-ga ja D-ga,  
 siis on  $\angle A = \frac{1}{2}\alpha$ , [108].  
 $\angle C = \frac{1}{2}\gamma$ ;

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$



N.161.

**Vastupidine teoreem.** Kui nelinurga vastasnurkade summa sirgenurga ( $2d = 180^\circ$ ) annab, siis võib selle nelinurga ümber ringi kujundada. (Tõestatakse vastuväiteliselt).

**Järeldus:** Ruudu, täisnelinurga ja sarik trapeetsi ümber on võimalik ringi kujundada.

**123. Teoreem.** Igas ümberkujundatud nelinurgas võrdub ühe paari vastaskülgede summa teise paari vastaskülgede summale.

**Tõestus:**

|    |   |               |   |    |    |
|----|---|---------------|---|----|----|
| AB | { | AL = AP [106] | } | BC | AD |
|    |   | BL = BM       |   |    |    |
| CD |   | CN = CM       |   |    |    |
|    |   | DN = DP       |   |    |    |

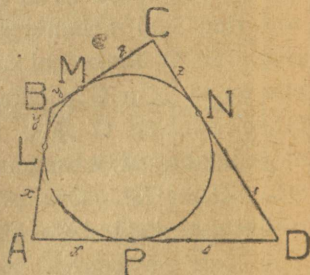
---

$AB + CD = AD + BC.$

Ehk: Need summad seisavad koos neljast vastavalt võrdsest kokkuarvatavast joonlõigust  $x, y, z, t$ , [106].

**Vastupidine teoreem:**  
 Kui nelinurgas ühe paari vastaskülgede summa teise paari vastaskülgede summale võrdub, siis on võimalik selle nelinurga sisse ringi kujundada.

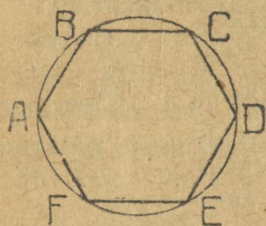
**Järeldus:** Ruudu ja rombi sisse on võimalik ringi kujundada.



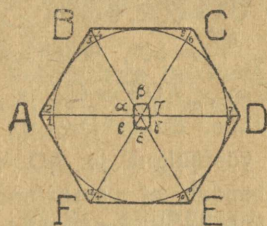
N.162.

**124. Teoreem.** Iga korrapärase paljunurga ümber ja sisse on võimalik ringi kujundada — sest paljunurga tsenter on ühekaugel kõigist tema tippudest ja ühekaugel kõigist tema külgedest [90, III. IV.]. Ümberkujundatud ringi raadiuseks on paljunurga tipu kaugus tsentrist ja sissekujundatud ringi raadiuseks on apoteem.

**125. Teoreem.** Kui ring jaotada mitmeks ( $n$ ) võrdseks jaoks ja I. jaotuspunktid järjekorras ühendada pingjoonte abil, ehk II. läbi jaotuspunktide tõmmata riivajad, siis saame I. korrapärase sissekujundatud paljunurga, II. korrapärase ümberkujundatud paljunurga.

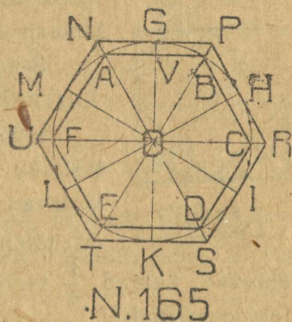


N.163



N.164.

**Tõestus:** Pöörame ringi tema tsentri ümber  $\frac{1}{n}$ -diku täispöörde võrra, siis libiseb ring iseennast mööda ja iga jaotuspunkt langeb ühte teise järjekorras oleva jaotuspunktiga, sest kõik nende vahel olevad kaared on isekekeskis võrdsed. Järjekult langevad ühte ka neid ühendavad pingjooned, sest nende otsapunktid langesid ühte, ja nende läbi tõmmatud riivajad, sest jaotuspunktidesse tõmmatud raadiusetele on igaühele tema otsapunktis üksainus perpendikulaar võimalik.



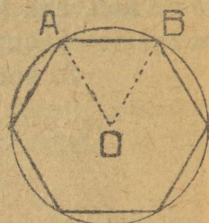
N.165

**Järeldus:** Kui me ringile tõmbame riivajad, mis paralleelsed on temale sissekujundatud korrapärase paljunurga külgedele, siis saame korrapärase ümberkujundatud paljunurga [105, lõpp; 125, II.]. Selle ümberkujundatud paljunurga nurkade poolitajad langevad ühte sissekujundatud paljunurga vastavate nurkade poolitajatega — sest näit. NO on kujundi GNMO sümmeetria telg.

**126. 1-ne ülesanne.** Antud ringi sisse korrapärase kuusnurk kujundada.

**Analüüs.** Olgu AB korrapärase kuusnurga külge; siis on  $\sphericalangle AB$   $\frac{1}{6}$  tervest ringist ja  $\sphericalangle AOB = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ .

Et  $OA = OB$ , siis on  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ . Järgelikult on  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle AOB = 60^\circ$  ja  $\triangle AOB$  on võrdnurkne. Sellest järgneb, et  $\triangle AOB$  on ka võrdkülgne ja  $AO = AB = OB$ . See tähendab, et sissekujundatud kuusnurga külge on niisama pikk kui ringi raadius. [Vormel:  $a_b = R$ ].

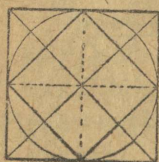


N.166

**Konstrueerimine:** Asetame raadiuse sõõri sisse pingjoonena — ta mahub just 6 korda.

**2-ne ülesanne.** Antud ringi sisse korrapärase kolmnurk kujundada.

**Konstrueerimine:** Jagame ringi kuueks, nagu 1-ses ülesandes juhatud, ja ühendame pingjoontega jaotuspunktid, ikka üht vahele jättes.



N.167

**3-as ülesanne.** Antud ringi sisse korrapärase nelinurk (ruut) kujundada.

**Konstrueerimine:** Tõmbame kaks vastastikku perpendikulaarset diameetrit — nad jaotavad ringi neljaks, sest kui tseentrinurgad on täisnurgad, s. t.  $\frac{1}{4}$  täispöördest, siis on vastavad kaared  $\frac{1}{4}$  tervest ringist. Jaotuspunktid ühendame pingjoonte abil.

**Järeldus:** Joonestusest on otsekohe näha, et ümberku jundatud korrapärase nelinurga (ruudu) külg on niisama pikk kui diameeter. [Vormel:  $b_4 = 2r$ ].

**Ülesanded:** Konstrueerida korrapärane sissekujundatud  
4) 8-nurk; 5) 16-nurk; 6) 12-nurk.

Konstrueerida korrapärane ümberkujundatud 7) 6-nurk;  
8) 3-nurk; 9) 12-nurk; 10) 8-nurk.

### Kolmnurga tähtsad punktid.

**127. Teoreem.** Kõigi kolmnurga külgede keskperpendikulaarid jooksevad ühes punktis kokku; see punkt on kolmnurga ümber kujundatud sõõri tsenter.

Tõestus: Vaata § 96 ja § 120.

**128. Teoreem.** Kõigi kolmnurga nurkade poolitajad jooksevad ühes punktis kokku; see punkt on sissekujundatud sõõri tsenter.

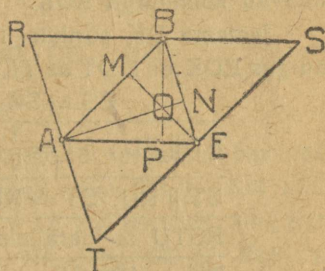
Tõestus: Vaata § 121.

✓ **129. Teoreem.** Kõik kolm kolmnurga kõrgust jooksevad ühes punktis kokku; seda punkti nimetakse ortotsentriks.

**Oletus:**  $EM \perp AB$ ,  $AN \perp BE$ ,  
 $BP \perp AE$ .

**Väide:**  $EM$ ,  $AN$  ja  $BP$  jooksevad ühes punktis kokku.

**Tõestus:** Tõmbame iga tipu  $A$ ,  $B$  ja  $E$  läbi vastasküljele paralleeljoone; need paralleeljooned sünnitavad, teineteisega lõikudes, uue kolmnurga  $RST$ , nii et  $RS \parallel AE$ ,  $ST \parallel AB$ ,  $RT \parallel BE$ .



N.168.

Et  $RB \parallel AE$ ,  $RA \parallel BE$ ;  $AT \parallel BE$ ,  $TE \parallel AB$ ;  $ES \parallel AB$ ,  $BS \parallel AE$   
721.  $RB=AE$ ,  $RA=BE$ ;  $T=BE$ ,  $TE=AB$ ;  $ES=AB$ ,  $BS=AE$   
ja  $AE=RB$

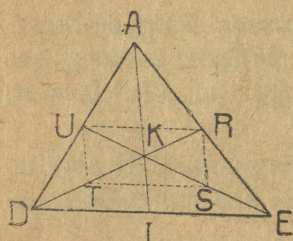
$RA=AT$ ,

$TE=ES$

$BS=RB$ .

Järjekult on antud kolmnurga ABE tipud uue kolmnurga RST külgede keskkohad, ja antud kolmnurga kõrgused on uue kolmnurga külgede keskerpendikulaarid; viimastena jooksevad nad ühes punktis O kokku [125]. Seda punkti nimetatakse **ortotsentriks**.

**√130. Teoreem.** Kõik kolm kolmnurga mediaani jooksevad ühes punktis kokku ja jagunevad seal kaheks üheksaks nii, et tipupoolne osa 2 korda nii suur on kui küljepoolne osa; seda punkti nimetatakse kolmnurga raskuse tsentriks (punktiks).



N.169.

**Oletus:**  $EI = ID$ ,  $DU = UA$ ,  
 $AR = RE$ .

:  $EU$ ,  $DR$  ja  $AI$  jooksevad kokku ühes punktis  $K$ , ja  $EK = 2 \cdot KU$ ,  $DK = 2 \cdot KR$ ,  $AK = 2 \cdot KI$ .

**Tõestus:** Vaatleme kaht mediaani, näit.  $EU$  ja  $DR$ . Nemad lõikuvad punktis  $K$  ja sünnitavad kolmnurga  $EDK$ .

Jaotame  $DK$  punktis  $T$  ja  $EK$  punktis  $S$  pooleks. Kolmnurgas  $EDK$  on:  $DT = TK$ , kolmnurgas  $EDA$  on:  $DU = UA$ ;

$$\frac{ES = SK;}{ER = RA}$$

$$\frac{ST \parallel ED; ST = \frac{1}{2} \cdot ED \text{ [84]}; RU \parallel ED; RU = \frac{1}{2} \cdot ED.}{ST \parallel RU, ST = RU.}$$

$$RSTU \text{ on parallelogramm [76].}$$

$$TK = KR, SK = KU \text{ [74].}$$

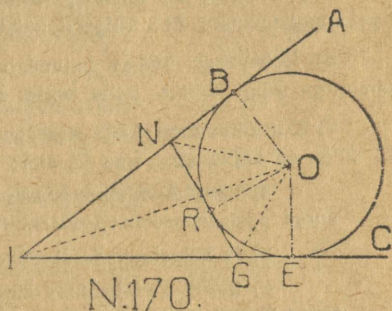
Niiviisi on:  $DT = TK = KR$  ja  $DK = 2 \cdot KR$ ;  $ES = SK = KU$  ja  $EK = 2 \cdot KU$ .

Sellest on näha, et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid kahte osasse nii, et tipupoolne osa 2 korda nii suur on kui küljepoolne osa (vahekorras 2:1). Ettetoodud tõestus

on täiesti üldine ja maksab ka mediaani AI kohta. Sellest järgneb, et ka kolmas mediaan AI läheb läbi punkti K, mis DR-d ja EU-d nimetud vahekorras (2:1) jagab, ja jagatakse temas nimetud vahekorras.

Seda punkti nimetakse kolmnurga raskuse tsentriks. [See nimetus on füüsikast võetud].

**131. Teoreem.** Kolmnurga ühe sisemise nurga ja tema vastaskülje juures oleva kahe välisnurga poolitajad jooksevad ühes punktis kokku. See punkt on tsentriks niisugusele ringile, mis nimetud külge ja teiste külgede pikendusi riivab. Seda ringi kutsetakse külgekujundatud ringiks.



**Tõestus:** Olgu O nurkade ANG ja CGN poolitajate lõikepunkt ja tõmbame punktist O perpendikulaarid nende nurkade harude peale;  $OB \perp AN$ ,  $OR \perp NG$ ,  $OE \perp GC$ .

Siis on  $OB = OR = OE$  [63,8].

Et OB ja OE on punkti O kaugused nurga AIC harudest, siis on punkt O nurga AIC poolitaja peal [63,8]. Kui nüüd raadiusega  $OB = OR = OE$  punktist O, kui tsentrist, ring tõmmata, siis riivab see ring NG-d, NA-d ja GC-d. See ring on kolmnurgale ING külgekujundatud, nimelt külje NG külge kujundatud ring.

Igal kolmnurgal on 3 külgekujundatud ringi, igal küljel 1.

**Ülesanne:** Antud kolmnurga külge tõmmata kõik tema külgekujundatud ringid.

**132. Ülesanded.** Tõestada teoreemid: 1) Võrdkülgse kolmnurga ümberkujundatud ringi raadius on 2 korda nii suur kui tema sisse kujundatud ringi raadius.

2) Kui igast kolmnurga tipust ümberkujundatud ringi diameeter tõmmata ja nende diameetrite teised otsapunktid ühendada, siis saame antud kolmnurgale kongruentse kolmnurga.

3) Iga nelinurga nurkade poolitajad sünnitavad nelinurga, mille ümber võidakse ringi kujundada.

4) Kui kolmnurga kõrguste aluspunktid ühendada, siis sünnib uus kolmnurk, mille nurki esimese kolmnurga kõrgused poolitavad (sisse kujundatud nelinurk).

5) Kolmnurga nurgapoolitaja lõikab selle kolmnurga ümber kujundatud ringi punktis, mis ühekaugel on kahest teisest kolmnurga tipust sissekujundatud ning ühe külgekujundatud ringi tsentrist.

6) Kolmnurga ümber kujundatud ringi punktide projektsioonid kolmnurga kõigi kolme külje peale asenevad kõik ühe sirgjoone peal.

7) Kui kolmnurga ABC sisse on kujundatud ring O ja tema külje BC külge on kujundatud ring D, siis:

a) tipust A väljaminev sissekujundatud ringi riivaja on kolmnurga poolperimeetrist vastaskülje a võrra vähem,

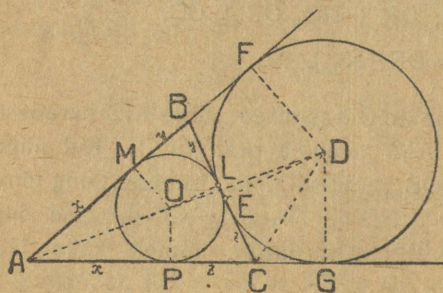
b) ja külgekujundatud riivaja võrdub poolperimeetritele;

c) tipust B väljaminev külgekujundatud ringi riivaja võrdub tipust C väljamineva sissekujundatud ringi riivajale;

d) riivaspunktide kaugus teineteisest selle külje peal mille külge sõõr D kujundatud ei ole, võrdub sellele küljele, mille külge ta on kujundatud;

e) riivaspunktide kaugus teineteisest selle külje peal, mille külge ring D on kujundatud, võrdub kahe teise külje vahele;

f) nurk ADC, mille all külgekujundatud ringi tsentrist näha on kolmnurga



N 171.

külg AC, mille külge ring D kujundatud ei ole, on pool nii suur kui selle külje vastasnurk B.

**Tõestus:** Tähendame ettetulevad jooniõigud järgmiselt ära:

$$\begin{array}{llll} BC = a & AM = AP = x & AG = AF = x' & y + z = a \\ AC = b & BM = BL = y & BE = BF = y' & x + z = b \\ AB = c & CL = CP = z & CE = CG = z' & x + y = c \end{array}$$

$a + b + c = 2p$  Siis on kujundist näha, et:  $2x + 2y + 2z = 2p$ ;  $x + y + z = p$

$$\begin{array}{llll} 1) \quad \begin{array}{l} x + y + z = p \\ y + z = a \\ \hline x = p - a \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + z = b \\ \hline y = p - b \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + y = c \\ \hline z = p - c \end{array} & \begin{array}{l} 2) \quad BE + CE = y' + z' = a \\ AG - CG = x' - z' = b \\ \hline AF - CF = x' - y' = c \\ \hline 2x' = 2p \\ x' = p \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3) \quad \begin{array}{l} x' - y' = c \\ p' - y' = c \\ \hline y' = p - c = z \end{array} & \begin{array}{l} x' - z' = b \\ p' - z' = b \\ \hline z' = p - b = y \end{array} & 4) \quad \begin{array}{l} PG = AG - AP \\ PG = x' - x \\ \hline PG = p - (p - a) \\ PG = a = BC \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5) \quad LE = BC - (BL + CE) \\ LE = BC - 2BL \quad (y = z') \\ LE = a - 2(p - b) = a - 2p + 2b \\ LE = a - (a + b + c) + 2b = b - c \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \angle ADC &= 180^\circ - (\angle DAC + \angle ACD) = 180^\circ - \left( \frac{A}{2} + C + \frac{180^\circ - C}{2} \right) = \\ &= 180^\circ - \frac{A}{2} - C - 90^\circ + \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A + C}{2} = \frac{B}{2} \end{aligned}$$

**Konstrueerimise ülesanded.** Järgmistes ülesannetes on: R — ümberkujundatud ringi raadius, r — sissekujundatud ringi raadius,  $r_a, r_b, r_c$  — külgekujundatud ringide raadiused, p — poolperimeeter.

Konstrueerida sissekujundatud nelinurk, kui antud on: 1) R, a, b; R,  $\alpha, \beta$ ; 3) R, a,  $h_c$ ; 4) R, c ( $\gamma$ ), a + b; 5) r, c,  $\alpha$ ; 6) r,  $\alpha, \beta$ ; 7) a,  $h_c, r$ ; 8)  $h_c, \sqrt{\gamma}, r$ ; 9) C,  $r_c, a$ ; 10) r,  $r_c, c$ ; 11) r,  $r_c, a - b$ ; 12) p, r,  $r_c$ ; 13) C,  $r_c, a$ ; 14) r,  $r_c, A$ ; 15) a,  $m_b, m_c$ .

Konstrueerida kolmnurk, kui antud on: 16) R, a, c, f; 17) R, a, b, e; 18) R, a, C, D.

Konstrueerida ümberkujundatud nelinurk, kui antud on: 19) r, a, e, A; 20) r, a, A, C; 21) a, b, c, e.

Konstrueerida sarik-trapeets, millele võidakse ring sisse kujundada, kui on antud: 22) r, b; 23) r, a; 24) r, c.

## Konstrueerimise ülesande täielik lahendamine.

**133.** Konstrueerimise ülesande täielik lahendamine seisab koos 4-st jaost: analüüsis, konstrueerimisest, tõestustest [65] ja uurimisest [118].

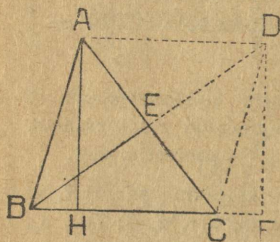
**I. Analüüsis** oletame me ülesannet lahendatuks ja leiame ülesandes need vahekorrad, mis ülesandes antud ja otsitavaid suurusi seovad ja mis meile konstrueerimist võimaldavad.

**II. Konstrueerimine** saadab analüüsis leitud kava täide, antud suuruste kaudu otsitavaid konstrueerides.

**III. Tõestus** näitab, et konstrueerimise abil leitud suurused kõiki ülesande tingimusi täidavad; ta on analüüsi vastupidine protsess.

**IV. Uurimise** abil saame teada, kas ülesanne ülepea võimalik on, missugune peab vahekord olema antud suuruste vahel, et ülesanne võimalik oleks ja kas ülesandel on üks ehk mitu lahendust. Selleks peame konstrueerimise veel kord läbi vaatama ja iga üksiku osakonstrueerimise juures üht vastavat suurust, kui võimalik katketult, ühes ja sellesamas mõttes (suurendades ehk vähendades) muutes, kindlaks tegema, kas ta ülepea lahendatav on ehk missugustel tingimustel ta lahendatav on ja mitu lahendust saadakse. See juures peab tähelepanu iseäranis selle peale juhitama, kas kahel sirgjoonel, ehk sirgjoonel ja ringil, ehk kahel ringil ühiseid punkta on või mitte. Seda on kerge kindlaks teha §§ 29, 105 järel., 116 põhjal ja niiviisi leiame ülesannet võimaldavad tingimused ja lahenduste arvu.

**Näitus: Konstrueerida kolmnurk, kui antud on  $a, h_a, m_b$ .**



N172.

**II. Konstrueerimine.**

- 1) Mingi sirgjoone MN peal tõmbame perpendikulaari  $FD \perp MN$ .
- 2) Selle perpendikulaari peale asetame  $FD = h_a$ .
- 3) Punktist D tõmbame kaare raadiusega  $2m_b$ ; see lõikab sirgjoont MN punktis B.
- 4) Punktist B alates asetame MN sihis  $BC = a$ ; punkti C ühendame D-ga.

**I. Analüüs.** Olgu ABC — otsitav kolmnurk. Pikendame BE-d teise võrra, nii et  $ED = BE = m_b$ , ja ühendame D-d A-ga ja C-ga. Siis on BADC — parallelogramm [78], mida me  $\triangle BDF$  abil ( $BD = 2m_b, DF = h_a, \angle F = 90^\circ$ ) konstrueerida võime ja diagonaal AC jagab selle parallelogrammi kaheks kongruentseks kolmnurgaks, millest üks on otsitav  $\triangle ABC$ .



viimaks  $m_b$  saab võrdseks  $\frac{1}{2} h_b$ -le, ehk  $2 m_b = h_a$ , siis sulavad B ja P punktis F ühte, ja C ja K sulavad punktis Q ühte. Ülesandel on 1 lahendus.

3) Kui  $m_b$  edasi väheneb, nii et on  $m_b < \frac{1}{2} h_a$ , siis ei ole kaarel ega sirgjoonel MN enam ühtegi ühist punkti, kolmnurka me ei saa ja ülesanne saab võimatuks. Ülesandel on 0 lahendust.

### Konstrueerimise ülesannete lahendamine geomeetriseliste kohtade meetodi abil.

**134. Ülesanne.** Punkt leida, mis kahest antud punktist A ja B ühekaugel ja kolmandast antud punktist O antud kaugusel a on.

**Analüüs.** Otsitav punkt peab kaht tingimust täitma: 1) ta peab A-st ja B-st ühekaugel olema ja 2) ta peab O-st kaugusel a olema.

Kui me esialgu 2-se tingimuse tähelepanemata jätame ja ainult nõuame, et otsitav punkt peab A-st ja B-st ühekaugel olema, siis saab ülesanne umbmääraseks, ja kõik punktid, mis niisugust nõuet rahuldavad, järjestikult ka otsitav, leiduvad, § 63, 2 järele, joonlõigu AB keskerpendikulaari peal.

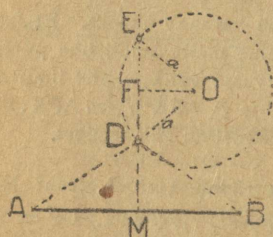
Kui me aga 1-se tingimuse tähelepanemata jätame ja ainult nõuame, et otsitav punkt peab O-st kaugusel a olema, siis saab ülesanne jälle umbmääraseks ja kõik punktid, mis seda nõuet rahuldavad, järjestikult ka otsitav, leiduvad, § 63,1 järele O ümber raadiusega a tõmmatud ringi peal.

Niiviisi leiame, et otsitud punkt peab olema niihästi AB keskerpendikulaari kui ka O ümber raadiusega a tõmmatud ringi peal; see tähendab, ta on nende kahe joone lõikepunkt.

**Konstrueerimine.** 1) Ühendame A B-ga ja tõmbame AB-le keskerpendikulaari; 2) O ümber tõmbame raadiusega a ringi. Lõikepunktid D ja E on otsitud punktid.

**Tõestus:** Ühendame D A-ga, B-ga ja O-ga. Siis on  $DO = a$ , kui ringi O raadius ja  $DA = DB$ , sest neil kaldjoontel on võrdsed projektsjoonid.

**Uurimine.** O ümber tõmmatud ringil võib AB keskerpendikulaariga olla kas 1) 2 ühist punkti, 2) 1 ühine punkt, 3) ei ühtegi ühist punkti, mis sellest oleneb, kas on 1)  $a > OF$ , 2)  $a = OF$ , 3)  $a < OF$ .



N 174.

Valime  $a > OF$ , siis on tõmmatud joonel 2 ühist punkti D ja E ja ülesandel 2 lahendust. Hakkame A-d vähendama, siis hakkavad D ja E teineteisele liginema, kuni nad, kui saab  $a = OF$ , punktis F ühte sulavad ülesandele 1-e lahenduse andes, ja viimaks, kui saab  $a < OF$ , ära kaovad, nii et ülesandel O lahendust on.

**Metoodi seletus.** Need ülesanded, mille sisu peaaesjalikult sellesse koondub, et üht punkti, näit. ringi tsentrit, kolmnurga tippu jne. leida, lahendatakse nii, et üks tingimus kõrvale jäetakse ja leitakse otsitavale punktile see geomeetiline koht, mis teisele tingimusele vastab; siis jäetakse teine tingimus kõrvale ja leitakse sellesamale punktile see geomeetiline koht, mis esimesele tingimusele vastab. Mõlemate geomeetriliste kohtade lõikepunkt ongi otsitav punkt.

Sagedasti ongi üks otsitava punkti geomeetrilise koht ülesandes juba antud.

**135. Jäädavad ja muutuvad suurused.** I. Et konstrueerimise ülesandeid uurida, pidime mõnel suurusel muutmata alles hoidma selle väärtuse, mis temale alguses anti; teiste suuruste väärtusi pidime aga ikka ja ikka muutma. Näituseks: Ülesandes: „ehitada kolmnurk tema kahe külje ja ühele nendest vastas oleva nurga abil [118],“ muutsime tema külge a-d. Ülesandes: „ehitada kolmnurk a,  $h_a$ ,  $m_b$  abil,“ muutsime mediaani  $m_b$  väärtust, kuna me a ja  $h_a$  esialgsed väärtused alles hoidsime. Et uurida ülesannet: „punkt leida, mis kahest antud punktist A ja B ühekaugel ja antud punktist O a kaugel on,“ muutsime antud kaugust a ja jätsime muutmata punktide A ja B kauguse teineteisest ja O kauguse OF perpendikulaarist ME.

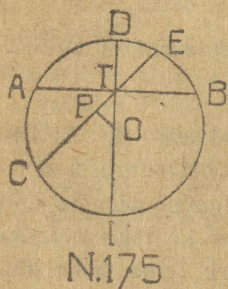
Niiviisi näeme, et geometrias on olemas kahte liiki suurused.

**Suurust, mis omale üht ja sedasama väärtust alles hoiab, nimetakse jäädavaks suuruseks.** Suurust, mis ülesande lahendamisel ehk küsimuse uurimise juures mitu väärtust omandab, nimetakse muutuvaks suuruseks.

On olemas suurusi, mis milgi tingimusel oma väärtust ei muuda; näit. paljunurga välisnurkade summa on ikka, külgede arvu peale vaatamata,  $360^\circ$ . Need on absoluut-jäädavad

suurused. Teised suurused on jäädavad ainult antud tingimustel, teataval juhusel.

II. Muutuvad suurused on oma hulga poolest: piiratud, lõpmata väikesed ja lõpmata suured. Muutuvat suurust nimetakse piiratuks, kui ta omandada ei või väärtusi, mis ühest teatud väärtusest suuremad ja teisest vähemad on. Näitus. Antud sõõris läbi antud punkti tõmmatud pingjoon on piiratud suurus. Tõestus: Sõõris



O punktist T läbiminev pingjoon ei või I) suurem olla kui diameeter [102 järeld.], (ja ei või) II) vähem olla kui läbi T minevale diameetrile perpendikulaarne pingjoon AB, sest viimane on tsentrist O kaugemal kui ükski teine läbi T minev pingjoon  $OT > OP$ .

Muutuvat suurust nimetakse lõpmata väikseks, kui ta teatud seaduse järele muutudes võib saada vähemaks kui ükski kindlaks määratud suurus, olgu see kui väike tahes. Näitus: Korrapärase paljunurga välisnurk on lõpmata väike suurus, sest niisuguse paljunurga külgede arvu  $n$  suurendades võime välisnurga  $\frac{360^\circ}{n}$  väiksemaks teha kui ükski ette kindlaks määratud nurk.

Muutuvat suurust nimetakse lõpmata suureks, kui ta teatud seaduse järele muutudes võib saada suuremaks kui ükski kindlaks määratud suurus, olgu see kui suur tahes. Näitus: Antud sõõris antud punkti läbi tõmmatud lõikajat võime pikemaks teha kui ükski kindlaks määratud joonlõik, olgu see kui pikk tahes.

Jäädavast suurusest nimetame muutuva suuruse piiriks, kui nende vahe on lõpmata väike suurus. Näit., sirgenurk on korrapärase paljunurga sisenurga piir, sest paljunurga sisenurk on muutuv suurus, kui me külgede arvu muudame,

kuna sirgenurk jäädav suurus on ja nende vaheks on välisnurk, mis külgede arvu suurendamisel lõpmatu väike suurus on.

III. Ülesandes: „konstrueerida kolmnurk kahest küljest a ja b ja ühele neist vastas olevast nurgast A“ muutsime meie ise külje a väärtusi, b-d ja A-d muutmata jättes. Külje a muutmiselega muutusid iseendast nurgad C ja B ning külge c. Sellest näeme, et muutumise põhjuste järele langevad suurused kahte liiki:

**Nilsugust suurust, mille muutumine ei olene ühestki teisest suurusest, mille väärtusi me ise oma heaksarvamise järele valime, nimetame me argumendiks (põhisuuruseks).**

**Niisugust suurust, mille väärtuste muutumine on mingi teise suuruse väärtuste muutumise tagajärg ja mis oleneb mingi teise suuruse muutumisest, nimetame funktsiooniks (järelsuuruseks).**

Kui suuruse c muutumine oleneb suuruse a muutumisest, siis öeldakse: „c on a funktsioon,“ ja kirjutatakse: „ $c=f(a)$ .“

Algebrast teame, et „summa on oma kokkuarvatavate funktsioon, vahe on vähendatava ja võetava funktsioon, kasvatis on tegurite funktsioon, vahekord on jagatava ja jagaja funktsioon“ jne. Kui c muutub selle tagajärjel, et muutus a, siis võime ka, teiselt poolt, a-d sundida oma väärtusi muutma selle läbi, et me c väärtusi muudame. See tähendab, kui c on a funktsioon, siis on ka a c funktsioon. Seepärast räägitakse: argument ja funktsioon on vastastikku vastupidised funktsioonid.

IV. Suurus muutub katketult piirides a-st kuni b-ni, kuni tema a-st b peale üle minnes kõik a ja b vahel olevad väärtused läbi jookseb ja ühe väärtuse järele teise, esimesele otsekohe järgneva väärtuse omandab, ennast lõpmata väikese suuruse võrra muutes, ehk nagu räägitakse, „lõpmata väikesi juurdetulekuid omandades.“

Näit., vaadeldud ülesannetes muutusid kõik suurused katketult.



On ka suurusi olemas, mis muutuvad, nõnda ütelda, **hüpetega**. Näit. paljunurga nurkade summa  $180^\circ$  ( $n - 2$ ) muutub hüpetega, sest nurkade arv võib ainult loomulik, täisarv olla. Nii on kolmnurga nurkade summa  $180^\circ$ , nelinurga n. s. on  $360^\circ$ , viisnurga n. s.  $540^\circ$  jne. ja see summa ei saa olla ialgi  $400^\circ$  ega  $630^\circ$ .

Kui argumendi muutumisel a-st alates funktsjoon katketult muutub ja argumendi lähenemisega b-le funktsiooni absoluutne väärtus kasvab ja saab lõpmata suureks siis, kui saab argument b-ks, kuna ta järgneval argumendi muutumisel sellesamas sihis omandab jälle piiratud väärtusi, siis räägitakse, et **funktsioonil on b juures katke olemas, ehk funktsioon katkeb b juures**.

**136. Ülesanded.** Järgmistes ülesannetes tähendagu P, P' ..... antud punkta, S, S' ..... antud sirgjooni, O, O' ..... antud ringisid.

Punkt leida, mis S (ehk O) peal on ja 1) P-st a kaugusel on; 2) kahest paralleeljoonest ühekaugel on; 3) S'-st ja S''-st ühekaugel on; 4) P-st ja P'-st ühekaugel on; 5) S'-st ja S''-st ühekaugel on.

Ring kujundada, mille tšenter S peal on ja mis 6) läbi P ja P' läheb; 7) S'-t ja S''-t riivab; 8) S'-t riivab P-s; 9) kaht paralleeljoont riivab.

Antud raadiusega r ring kujundada, mis 10) läbi P ja P' läheb; 11) S-i riivab ja läbi P läheb; 12) S-i ja O-d riivab; 13) O-d riivab P-s; 14) läbi P läheb ja O-d riivab; 15) S-i ja S' riivab; 16) O-d ja O' riivab; 17) S-i riivab P-s; 18) O riivab ja S-st oma diameetri ära lõikab.

Ring kujundada, mis 19) läbi P, P' ja P'' läheb; 20) läbi P läheb ja S-i riivab P'-s; 21) läbi P läheb ja O-d riivab P'-s; 22) S ja S' riivab ja S nimelt P-s; 23) S, S' ja S'' riivab; 24) O-d ja S-i riivab O-d nimelt P-s.

Antud raadiusega ring kujundada, mis 25) O ja O' lõikab nii, et tal nende ringidega võrdsed, ühised, antud pikkusega pingjooned oleksid; 26) O-d riivab ja S-st antud pikkusega pingjoone ära lõikab; 27) O ja S lõikab nii, et tal O-ga üks ja S-ga teine antud pikkusega pingjoon oleks.

**137. Geomeetrilised kohad.** 16) G. k. ringi võrdsete pingjoonte keskohtadele on sellele ringile ühistsentriline ring.

17) G. k. kõigi ringis O läbi P minevate pingjoonte keskohtadele on ring, mille diameetrik on OP.

18) G. k. antud pikkusega riivajate otsapunktidele on antud ringile ühistsentriline ring.

19) G. k. niisugustele punktidele, millest antud ring antud nurga all näha, on antud ringile ühistsentriline ring.

20) G. k. niisuguse kolmnurga tipule, millel antud alus ja antud tipunurk on, on kaar, mis antud alust pingjoonena ja antud nurka piiridenergana mahutab.

**138. Ülesanded.** 1) Läbi P tõmmata O-le lõikaja nii, et O temast antud pikkusega pingjoone ära lõikaks.

2) O-le riivaja tõmmata, millest O' antud pikkusega pingjoone ära lõikaks.

3) Leida punkt, millest O-le ja O'-le antud pikkusega riivajad võib tõmmata.

4) O sees läbi P pingjoon tõmmata, mida antud pingjoon poolitaks.

5) O sees antud pikkusega pingjoon tõmmata, mille keskoht S-st ja S'-st ühekaugel oleks.

6) S ehk P peal punkt leida, millest oma seisandi poolest antud joonlõik antud nurga all näha oleks.

7) Punkt leida, millest O ja O' antud nurkade all näha oleksid. Kolmnurk konstrueerida, kui antud on: 8)  $a, \alpha, ha$ ; 9)  $a, \alpha, m_a$ . Täisnurkne kolmnurk konstrueerida, kui antud on: 10)  $a, p$ ; 11)  $p, q$ .

12) Antud kolmnurgas punkt leida, millest kolmnurga küljed kõik ühe ja sellesama nurga all näha oleksid.

13) Kolmnurk konstrueerida, kui antud on  $a$  ja mõlemad  $\alpha$  poolitaja läbi sünnitatud  $a$  lõigud.

14) Sirgjoon tõmmata, mille lõikudel O sees ja O ja S vahel antud pikkused oleksid.

**139. Segiülesanded.** 1) Läbi antud nurga harude sirgjoon tõmmata niiviisi, et tema harude vahel oleval lõigul antud pikkus oleks ja et ta ühe haruga antud nurga sünnitaks.

2) Läbi P sirgjoon tõmmata, mis P'-st ja P''-st ühekaugel oleks.

3) Nurga harude vahel antud punkti läbi sirgjoon tõmmata, nii et see punkt seda nurga harude vahel olevat sirgjoone lõiku poolitaks.

4) S-le paralleeljoon tõmmata, nii et tema kauguste summa P-st ja P'-st antud joonlõigule võrduks.

5) Kolmnurga sisse romb kujundada niiviisi, et tema külg kolmnurga aluse ja üks tipp kolmnurga külje peal antud punktis aseneks.

6) Kolmnurga sisse parallelogramm kujundada, kui diagonaalide lõikepunkt antud on.

Kolmnurk konstrueerida, kui antud on: 7)  $R, c, m_c$ ; 8)  $R, C, r$ ; 9)  $c, C, r_c$ ;

10)  $a, m_b, m_c$ ; 11)  $a, b, m_c$ ; 12)  $m_a, m_b, m_c$ .

Nelinurk konstrueerida, kui antud on: 13) a, b, e, f,  $\delta$ ; 14) b, c, e,  $\angle BAC$ ,  $\angle DAC$ . [89]

Sissekujundatud nelinurk konstrueerida, kui antud on: 15) b, c, f, A; 16) R, e, f, s; 17) e, f, a, s; 18) a, c, R,  $\beta + \gamma$ .

Ümberkujundatud nelinurk konstrueerida, kui antud on: 19) r, a,  $\gamma$ , f; 20) a,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

21) Konstrueerida nelinurk, mille 2 külge pingjooned ja 2 külge riivajad oleksid, kui antud on: a, e, R.

22) O sisse antud pikkusega pingjoon tõmmata, nii et ta P-st antud kaugusel oleks.

23) Läbi P sirgjoon tõmmata nii, et selle sirgjoone peale projekteeritud P' ja P'' kaugused P-st antud summa annaksid.

24) Läbi P ja P' paralleeljooned tõmmata nii, et O neist pingjooned ära lõikaks, mille summa (vahe) a on.

25) Läbi kolmnurga alusele paralleeljoon tõmmata nii, et tema kolmnurga sees olev lõik võrdne oleks nende külgede lõikude summale (vahele), mis lõikjoone ja aluse vahel on.

26) O sisse kolmnurk kujundada, mille kaks külge läbi P ja P' läheksid ja mille kolmas külge a oleks.

27) Kolmnurga tippude ümber teineteist riivajad ringid kujundada.

28) O sisse 3 (4) ringi kujundada, millest iga kaks ringi teineteist riivaksid.

29) Läbi P tõmmata O-le lõikaja, mida O poolitaks.

30) Antud on O ja tema kaks riivajat. Kolmas riivaja O-le tõmmata nii, et tema antud riivajate vahel olev lõik = a oleks.

31) Läbi P sirgjoon tõmmata nii, et tema kahe ühistsentrilise ringi vahel olev lõik = a oleks.

32) Antud kolmnurga ühe külje peal niisugune punkt leida, et temast teiste külgede peale tõmmatud perpendikulaarid antud summa (vahe) = a annaksid.

|                               |  |                     |
|-------------------------------|--|---------------------|
| alus                          | основание  | Basis Grundlinie    |
| analüüs (eritlus)             | анализ   | Analyse             |
| apoteem                       | апофема  | Apothem             |
| argument                      | аргумент   | Argument            |
| asendama, peale<br>as. —      | откладывать  | abtragen            |
| äraldõige (segment)           | отрѣзок (круговой),<br>сегмент                     | Segment             |
| definitsoon                   | опредѣленіе  | Definition          |
| diagonaal                     | діагональ  | Diagonale           |
| diameeter                     | діаметр  | Diameter            |
| ekstsentriline                | эксцентрический                                    | exzentrisch         |
| funktsioon                    | функція  | Funktion            |
| geomeetriline koht            | геометрическое<br>мѣсто                            | d. geometrische Ort |
| haru (nurga h.)               | сторона (угла)                                     | Schenkel(d.Winkels) |
| homoloogne<br>(v. samapaikne) | одинаково-располо-<br>женный, соответ-<br>ственный | homolog             |
| hüpoteenus (kald-<br>külge)   | гипотенуза   | Hypotenuse          |
| isekülgne                     | разносторонній                                     | ungleichseitig      |
| jäädav                        | постоянный   | constant, beständig |
| järeldus                      | слѣдствіе  | Zusatz              |

|                      |   |                                |
|----------------------|---|--------------------------------|
| järelsuurus          | зависимая пере-<br>мѣнная вел.                  | die abhängige Grösse           |
| järijeldama          | умозаключать                                    | folgern                        |
| järk (sümmeetria j.) | порядок (п. симмет-<br>рии)                     | Ordnung (d. Sym-<br>metrie)    |
| joon                 | линія   | Linie                          |
| joonlõik             | отрѣзок (прямой)                                | Strecke                        |
| kaar                 | дуга  | Bogen                          |
| kähekorra murdma     | перегибать                                      | umbiegen                       |
| kaldjoon             | наклонная (линія)                               | schiefe (Gerade,<br>Linie)     |
| kaldkülg             | гипотенуза                                      | Hypotenuse                     |
| kallakus             | угол наклоненія                                 |                                |
| kateet               | катет   | Kathete                        |
| katketu              | непрерывный                                     | stetig                         |
| katma                | покрывать                                       | decken                         |
| keha                 | тѣло  | Körper                         |
| kera                 | шар   | Kugel                          |
| keskjoon             | средняя линия                                   | Mittellinie (d. Trape-<br>zes) |
| keskkoht             | середина  | d. Mitte                       |
| keskperpendikulaar   | перпендикуляр, воз-<br>ставленный из<br>средины | Mittelsenkrechte               |
| keskpunkt            | центр   | Mittelpunkt                    |
| kiir                 | луч   | Strahl                         |
| kokkuvõte            | резюме  | Resumé                         |
| kolmnurk             | треугольник                                     | Dreieck                        |
| kongruentne,         | конгруэнтный (рав-<br>ный)                      | kongruent                      |
| kongruentsus         | конгруэнция                                     | Kongruenz                      |
| konstrueerima        | строить   | konstruieren                   |
| k-mine               | по—ение   | Konstruktion                   |
| k-mise ülesanne      | задача на по-<br>строение                       | Konstruktionsauf-<br>gabe      |

|                       |                    |                      |
|-----------------------|--------------------|----------------------|
| kontsentriline        | концентрический    | konzentrisch         |
| korrapärane           | правильный         | regelmässig, regulär |
| kõrgus                | высота             | Höhe                 |
| kõver                 | кривой             | krumm                |
| kõverjoon             | кривая (линия)     | die Curve (krumme    |
| kraad                 | градус             | Grad [Linie]         |
| kriips                | черта              | Strich               |
| kuju                  | форма              | Form, Gestalt        |
| kujund                | фигура             | Figur                |
| kujutis               | образ              | Gebilde              |
| kuubus                | куб                | Würfel, Kubus        |
| külg                  | сторона            | Seite                |
| külgekujundatud       | внѣвписанный       | anbeschrieben        |
| läbimõetja            | диаметр            | Durchmesser          |
| lahendama             | рѣшать             | lösen                |
| lahendamine, lahendus | рѣшение            | auflösung            |
| lähisnurk             | прилежащій угол    | anliegender Winkel   |
| lahkpoolsed           | разносторонніе     |                      |
| lahktsentriline       | эксцентрический    | exzentrisch          |
| laius                 | ширина             | Breite               |
| liidefav (joonlõik)   | слагаемый(отрѣзок) | der Summand          |
| lõikaja               | сѣкущая            | Sekante              |
| lõikama               | пересѣкать         | schneiden            |
| lõikepunkt            | точка пересѣченія  | Schnittpunkt         |
| lõikumata             | пересѣкаться       | sich schneiden       |
| lõpmata suur          | безконечно-большой | unendlich gross      |
| lõpmata väike         | безконечно-малый   | unendlich klein      |
| lõpmatus              | безконечность      | Unendlichkeit        |
| mahutav (kaar)        | вмѣщающій          | fassend              |
| mediaan               | медіана            | Mittellinie          |
| metood                | метод              | Methode              |
| mõede                 | измѣреніе          | Ausdehnung           |

|                 |   |                           |
|-----------------|---|---------------------------|
| mõet            | мѣра                                    | d. Maass                  |
| mõetüksus       | единица мѣры                            | Maasseinheit              |
| muutuv          | перемѣнный                              | veränderlich, variabel    |
| negatiivne      | отрицательный                           | negativ                   |
| nelinurk        | четыреугольник                          | Viereck                   |
| nurk            | угол                                    | Winkel                    |
| kõrvunurgad     | смежные углы                            | Nebenwinkel               |
| lähisnurk       | прилежащий угол                         | anliegender Winkel        |
| nürinurk        | тупой угол                              | stumpfer Winkel           |
| põiknurgad      | накрестлежашіе углы                     | Wechselwinkel             |
| rindnurgad      | внѣшніе и внутренніе односторонніе углы | Gegenwinkel               |
| ristnurgad      | вертикальные углы                       | Scheitelwinkel            |
| sirge nurk      | развернутый угол                        | gestreckter Winkel        |
| täisnurk        | прямой                                  | rechter „                 |
| terav nurk      | острый                                  | spitzer „                 |
| ülinüri nurk    | сверхтупой                              | überstumpfer „            |
| vastasnurk      | противолежашій уг.                      | gegenüberliegender Winkel |
| vastavad nurgad | соотвѣтственные углы                    | correspondierende Winkel  |
| nüri            | тупой                                   | stumpf                    |
| nürinurkne      | тупоугольный                            | stumpfwinklig             |
| oletus          | предположеніе, условіе                  | Voraussetzung             |
| otsatu          | бесконечный                             | unendlich                 |
| paljunurk       | многоугольный                           | Vieleck                   |
| paralleelne     | параллельный                            | parallel                  |
| parallelogramm  | параллелограмм                          | Parallelogramm            |
| peale paigutama | совмѣщать, накладывать                  | zur Deckung bringen       |
| peen (kuni...)  | точный (до...)                          | genau (bis auf)           |

|                               |                                |   |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| perpendikulaar, -ne           | перпендикуляр,<br>-ный         | d. Perpendikulär,<br>d. Lot, d. Senk-<br>rechte, -senkrecht |
| piir                          | предѣл                         | Grenze, Grenzwert   |
| piiratud (suurus)             | конечный (-ая вели-<br>чина)   | endlich (-e Grösse)   |
| piiravad küljed               | стороны, заключа-<br>ющие угол | die den Winkel ein-<br>schliessenden Sei-                   |
| piire, om. piirde             | периферія,                     | Peripherie [ten   |
| piirdenurk                    | вписанный угол                 | Peripheriewinkel  |
| pikendus                      | продолженіе                    | Verlängerung  |
| pikkus                        | длина                          | Länge   |
| pind                          | поверхность                    | Fläche  |
| dingjooon (siduja)            | хорда                          | Sehne   |
| planimeetria                  | планиметрия                    | Planimetrie   |
| poolitaja (nurga)             | биссектриса (угла)             | Winkelhalbierende   |
| poolmõetja                    | радіус                         | Halbmesser  |
| positiivne                    | положительный                  | positiv   |
| pöörtsenter                   | центр вращенія                 | Drehzentrum   |
| põhisuurus                    | независимая пере-<br>мѣнная    | d. unabhängige Ve-<br>ränderliche                           |
| projekteerija                 | проектирующая<br>(прямая)      | die Projektierende  |
| projekteeritav<br>(jooonlõik) | проектируемый<br>(отрѣзок)     | die zu projektierende<br>(Strecke)                          |
| projektsjooon                 | проекція                       | Projektion  |
| punkt                         | точка                          | Punkt   |
| raadius                       | радіус                         | Radius  |
| raskusepunkt, tsenter         | центр тяжести                  | Schwerpunkt   |
| riivaja                       | касательная                    | Tangente  |
| riivama                       | касаться                       | berühren  |
| riivaspunkt                   | точка касанія                  | Berührungspunkt   |
| ring                          | окружность                     | Kreislinie  |
| romb                          | ромб                           | Rhombus   |
| rull, silinder                | цилиндр                        | Cylinder, Walze   |

|                                   |                                    |   |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|
| ruum                              | пространство                       | Raum  |
| ruut                              | квадрат                            | Quadrat   |
| samapaikne<br>(homologne, vastav) | одинаково располо-<br>женный       | gleichliegend, homo-<br>log                       |
| sarikad                           | стороны (равнобедр.<br>т-ка)       | d. Schenkel<br>(d. gleichschenkligen<br>Dreiecks) |
| sarikkolmnurk                     | равнобедренный<br>тр-к             | gleichschenkliges<br>Dreieck                      |
| sariktrapeets                     | равнобокая трапе-<br>ция           | gleichschenkliges<br>Trapez                       |
| sarnane                           | подобный                           | ähnlich   |
| seisand                           | положение                          | Lage  |
| seotud suurus                     | зависимая перемен-<br>ная величина | d. abhängige Grösse                               |
| serv                              | ребро                              | Kante   |
| siduv suurus                      | независимая пере-<br>менная вел.   | d. unabhängige Ver-<br>änderliche (Grösse)        |
| siht                              | направление                        | Richtung  |
| sirgjoon                          | прямая линия                       | gerade Linie                                      |
| sisse kujundama                   | вписывать                          | einschreiben                                      |
| sissekujundatud                   | вписанный                          | eingeschrieben                                    |
| sõõr                              | круг                               | Kreis   |
| stereomeetria                     | стереометрия                       | Stereometrie                                      |
| sümmeetria                        | симметрия                          | Symmetrie   |
| sümmeetriline                     | симметричный                       | symmetrisch                                       |
| tarduvus                          | отвердлость                        | Starrheit   |
| tasane                            | плоский                            | eben  |
| tasapind                          | плоскость                          | die Ebene   |
| täisnelinurk                      | прямоугольник                      | Rechteck  |
| täisnurkne                        | прямоугольный                      | rechtwinklig                                      |
| täispööre                         | полный оборот                      | ganze Umdrehung                                   |
| telg                              | ось                                | Achse   |
| teljeline                         | осевой                             | Achsen-   |
| teoreem                           | теорема                            | Theorem, Lehrsatz                                 |

|                             |                               |                                |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| päripidine t.               | прямая теорема                | d. direkte Lehrsatz            |
| vastupidine t.              | обратная теорема              | d. Umkehrung e.<br>Lehrsatzes  |
| vastasteoreem               | противоположная т.            | d. Gegensatz                   |
| teravnurkne                 | остроугольный                 | spitzwinklig                   |
| tiib v. sarikas             | сторона (боковая)             | Schenkel                       |
| tingimus                    | условіе                       | Bedingung                      |
| tipp                        | вершина                       | Ecke, Spitze,<br>Scheitelpunkt |
| toetama (m-gi peale)        | опираться                     | zugehören                      |
| toetav                      | опирающийся                   | (zugehörig)                    |
| tõde                        | истина                        | Wahrheit                       |
| tõendus                     | утверждение                   | Behauptung                     |
| tõestus                     | доказательство                | Beweis                         |
| trapeets                    | трапеция                      | Trapez                         |
| tsenter                     | центр                         | Zentrum                        |
| tsentraalne                 | центральный                   | zentral                        |
| tsentrijoon                 | линія центров                 | d. Zentrale                    |
| tsentrite kaugus            | разстояние центров            | Zentralabstand                 |
| ulatus                      | протяжение                    | Ausdehnung                     |
| uurimine                    | изслѣдование                  | Determination,<br>(Diskussion) |
| ühistsentrilised            | концентрический               | konzentrisch                   |
| ühte langema                | совпадать                     | zusammenfallen                 |
| ühte sündima                | согласоваться, схо-<br>диться | übereinstimmen                 |
| ühtima                      | совмѣщаться                   | sich decken                    |
| ühtivus (kongruent-<br>sus) | равенство, конгру-<br>энція   | Kongruenz                      |
| üksus                       | единица                       | Einheit                        |
| üंबर kujundama              | описать                       | umschreiben                    |
| üंबरkujundatud              | описанный                     | umschrieben                    |
| üंबरmõet                    | периметр                      | Umfang, Perimeter              |
| umbmäärane                  | неопредѣленный                | unbestimmt                     |
| vahe, vahemaa               | разстояние                    | Strecke, Entfernung            |

|                            |                             |                            |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| vahekord                   | отношение                   | Verhältnis                 |
| vahelnurk, vahelolev nurk  | заключенный угол            | der eingeschlossene Winkel |
| vald                       | область                     | Gebiet                     |
| vastassiht                 | противоположное направление | entgegengesetzte Richtung  |
| vastas- (külk, nurk, tipp) | противолежащий              | gegenüberliegend           |
| vastas olema               | лежать против               | gegenüberliegen            |
| vastav                     | соответственный             | entsprechend               |
| vastupidine                | обратный                    | umgekehrt                  |
| väide                      | утверждение, заключение     | Behauptung                 |
| väljalõige (sektor)        | вырѣзок, сектор             | Sektor                     |
| viltunurkne                | косоугольный                | schiefwinklig              |
| võrd-                      | равно                       | gleich                     |
| võrdkülgne                 | равносторонний              | gleichseitig               |
| võrdne                     | равный                      | gleich                     |
| võrdus                     | равенство                   | Gleichung                  |
| võrduma                    | равняться                   | gleichen, gleich sein      |

## Vigade parandused ja õiendused.

Enne raamatu tarvitusele võtmist palutakse järgmised ülesleitud vead ära parandada:

| hk. | rida            |                     | asemel lugeda: | peal              |
|-----|-----------------|---------------------|----------------|-------------------|
| 13  | 7 ülev.         | peale               | "              | peal              |
| 14  | 2 "             | peale               | "              | peal              |
|     | 3 "             | tõendus             | "              | tõestus           |
|     | 7 "             | tõendatavat         | "              | tõestatavat       |
|     | 5 alt           | tõendada            | "              | tõestada          |
| 15  | 10 "            | kõrvuolevat punkti  | "              | punkti            |
|     | 6 "             | ilmaotsata          | "              | ilma otsata       |
| 16  | 2 ülev.         | ilmaotsata          | "              | ilma otsata       |
|     | 2 alt           | vahel A poolt       | "              | vahel: A poolt    |
| 17  | 14 ülev.        | (ja edaspidi) jätku | "              | pikenduse         |
| 21  | 2 "             | ühismõeduks         | "              | ühiseks mõeduks   |
| 23  | 11 alt          | DE = OD + OE        | "              | DI = OD + OI      |
| 26  | 1 ülev.         | määratakse kindlaks | "              | tähendatakse ära  |
|     | 23 "            | pealeasendamisel    | "              | pealepaigutamisel |
|     | 25 "            | asendame            | "              | paigutame         |
| 27  | 7, 10, 13 ülev. | asendame            | "              | paigutame         |
|     | 18 ülev.        | nurgatippu          | "              | nurga tippu       |
| 28  | 6 "             | tõendus             | "              | tõestus           |
|     | 1 alt           | asendades           | "              | paigutades        |
| 30  | 1 "             | jätku               | "              | pikenduse         |
| 31  | 10 "            | jätku               | "              | pikenduse         |
| 33  | 4 ülev.         | Tõendus             | "              | Tõestus           |
| 34  | 10 "            | tõendatud           | "              | tõestatud         |
| 35  | 2 "             | joonise             | "              | kujundi           |
|     | 6 "             | pool                | "              | osa               |
|     | 14 "            | kujundi             | "              | kujundite         |
|     | 6 alt           | Tõendus             | "              | tõestus           |

|      |            |                               |                |   |
|------|------------|-------------------------------|----------------|---|
| lhk. | rida       |                               |                |   |
| 38   | 2 alt      | asendud                       | asemel lugeda: | paigutatud  |
|      | 1 "        | sümmeetriatsenter             | " "            | sümmeetria tsenter  |
| 39   | 3 ülev.    | sümmeetriatsentrist           | " "            | sümmeetria tsentrist  |
|      | 7 "        | sümmeetriatsentriga           | " "            | sümmeetria tsentriga  |
|      | 12 "       | lan                           | " "            | lan-  |
| 40   | 6 alt      | $\angle \varrho$              | " "            | $\frac{7}{5}$   |
|      | 1 "        | z                             | " "            | X   |
| 41   | 2 ülev.    | z-le                          | " "            | X-le  |
|      | 15 alt     | üksainus                      | " "            | ühtainust   |
| 42   | 1 ülev.    | □□□□                          | " "            | läbi  |
| 55   | 2 alt      | kahe nurga                    | " "            | kahe samapaikse nurga   |
| 67   | 7 "        | teiselepoole                  | " "            | teisele poole   |
| 68   | 12 "       | Sarikkolmuurgal               | " "            | Sarikkolmnurgal   |
| 69   | 2 ülev.    | BA-ga                         | " "            | MA-ga   |
| 74   | 4 "        | täisnurk 90°                  | " "            | täisnurk,   |
| 76   | 10 "       | MN-le;                        | " "            | MN-le, vaid MN-le perpendikulaarne oleks mingi teine sirgjoon |
| 79   | 4 "        | külgede                       | asemel lugeda: | tiibade   |
|      | 12 "       | külje                         | " "            | tiiva   |
|      | 7 alt      | nurgas                        | " "            | nurgast   |
|      | 13 "       | vahel olevas                  | " "            | vahelolevast  |
| 81   | 10 "       | G                             | " "            | C   |
|      | 1 "        | hüotenuus, b ja c on kpteedid | asemel lugeda: | hüpoteenuus, b ja c on kateedid.                              |
| 84   | 14 "       | iseäralise                    | asemel lugeda: | erilise   |
| 86   | 2 "        | sirge nurga 180°              | " "            | sirge nurga (180°)  |
| 94   | 10 "       | 4-ja kordse                   | " "            | 4-kordse  |
| 95   | 14 ülev.   | $DE = \frac{1}{2}DE$          | " "            | $DE = \frac{1}{2}DF$  |
| 96   | 6 alt      | ou                            | " "            | on  |
| 102  | 1 ülev.    | iga tipp iga                  | " "            | iga tipp, iga   |
| 104  | 19 "       | paijunurgal                   | " "            | paijunurgal   |
| 106  | 3 "        | Asetame                       | " "            | Paigutame   |
|      | 1 alt      | projektsioonid                | " "            | projektsjoonid  |
| 110  | 12 "       | otsekohese                    | " "            | päripidise  |
| 111  | 11 "       | [56]                          | " "            | [56, <sub>1</sub> ]   |
| 111  | 8 ja 4 alt | [56, <sub>2</sub> ]           | " "            | [56]  |
| 115  | 5 alt      | lõikab                        | " "            | lõikab  |
| 119  | 6 ülev.    | Ülesanne Antud                | " "            | Ülesanne: Antud   |
| 124  | 12 "       | ühendatavad                   | " "            | ühendavad   |
|      | 22 "       | ringile                       | " "            | ringide   |

|      |        |       |  |                               |
|------|--------|-------|--|-------------------------------|
| lhk. | rida   |       |  |                               |
| 124  | 6      | alt   | teentrile  | asemel lugeda: tsentrile      |
| 125  | 4 ja 5 | ülev. | piirav külge   | " " piirava külge             |
|      | 9      | ülev. | $\angle -\alpha$   | " " $\angle -a$               |
| 126  | 7      | alt   | sarikkolmnurka   | " " sarikkolmnurk             |
| 131  | 2      | "     | neliurgas  | " " nelinurgas                |
| 132  | 12     | ülev. | sarik trapeetsi  | " " sariktrapeetsi            |
| 134  | 19     | "     | $a_b = R$  | " " $a_b = R$                 |
| 135  | 1      | "     | ümberku  | " " ümberku-                  |
| 138  | 13     | "     | tipust'  | " " tipust,                   |
|      | 15     | "     | punktide   | " " punkti                    |
|      | 21     | "     | külgekujundatud riivaja asemel lugeda: külgekujundatud ringi riivaja |                               |
| 139  | 8      | "     | AF — CF  | asemel lugeda AF — BF         |
|      | 12     | "     | $p' - y' = c$ $p' - z' = b$  | " " $p - y' = c$ $p - z' = b$ |
| 45   | 4      | "     | vastas olevast   | " " vastasolevast             |

Trükkimisel masina juures ette tulnud vea pärast puuduvad mõnes eksemplaris tähed, nii et

|      |     |     |    |        |           |        |         |  |
|------|-----|-----|----|--------|-----------|--------|---------|--|
| lhk. | 17  | rea | 9  | peal   | alt       | tuleb  | lugeda: | pikem                                    |
| "    | 21  | "   | 14 | "      | ülev.     | "      | "       | joonlõik                                 |
| "    | 55  | ja  | 56 | puudub | lehekülje | number |         |  |
| "    | 56  | rea | 2  | peal   | ülev.     | tuleb  | lugeda: | gruentsed                                |
| "    | 58  | "   | 9  | "      | alt       | "      | "       | suurem                                   |
| "    | "   | "   | 6  | "      | "         | "      | "       | (vastuväiteline)                         |
| "    | "   | "   | 5  | "      | "         | "      | "       | (päripidise)                             |
| "    | 60  | "   | 13 | "      | "         | "      | "       | ja allpool                               |
| "    | 69  | "   | 6  | "      | "         | "      | "       | külgsel                                  |
| "    | "   | "   | 5  | "      | "         | "      | "       | kordne                                   |
| "    | "   | "   | 3  | "      | "         | "      | "       | $= \angle BCA$                           |
| "    | "   | "   | 2  | "      | "         | "      | "       | külje AB peal                            |
| "    | 75  | "   | 12 | "      | ülev.     | "      | "       | vastavad võrdsed                         |
| "    | "   | "   | 3  | "      | alt       | "      | "       | $AC = AB$                                |
| "    | 76  | "   | 11 | "      | "         | "      | "       | Järeldus.                                |
| "    | 115 | "   | 7  | "      | ülev.     | "      | "       | lis 2 perpendikulaari                    |
| "    | "   | "   | 8  | "      | "         | "      | "       | : Kui sirgjoone                          |
| "    | 118 | "   | 15 | "      | alt       | "      | "       | piirdenurgad, mis                        |
| "    | 129 | "   | 3  | "      | ülev.     | "      | "       | on ringi O sees                          |
| "    | 130 | "   | 1  | "      | "         | "      | "       | juures: ühise                            |
| "    | 135 | "   | 3  | "      | alt       | "      | "       | [73] $RB = AE$ , $RA = BE$ ; $AT = BE$ , |
| "    | 136 | "   | 7  | "      | ülev.     | "      | "       | jooksevad                                |
| "    | "   | "   | 14 | "      | "         | "      | "       | <b>Väide:</b> EU, DR                     |

Joonestustes on järgmised puudused leitud:

- lhk. 25 joonestus N. 26 — harude peal puuduvad tähed M ja N;  
" 26 greekakeelses tähestikus puudub tähe  $\nu$  — nü järel täht  $\xi$  — ksi;  
" 27 joonestus N. 29 — haru BC peal puudub täht K;  
" 42 " N. 51 — peab tähe O asemel olema täht D;  
" 46 " N. 57 — puudub GF pikendus FH;  
" 72 " N. 87 — AB ja ringi lõikepunkti nimetus puudub, peab olema D;  
" 107 " N. 128 — tulevad punktid A, B ja O ühendada punktiga O.

Peale selle võiks veel lhk. 45 lõppu juurde lisada järgmine teine tõestus: Nihutame  $\sphericalangle$ -ga DEF (ühes  $\sphericalangle$ -gaga FEG) tema tasapinnal edasi nii, et tema harud paralleelseteks jäävad iseenestele, kuni tipp E langeb tipu B peale. Siis jääb  $EF \perp BC$  ja  $ED \perp BA$  ehk  $BP \perp BC$  ja  $BR \perp BA$ . Pöörame nüüd  $\sphericalangle$ -ga DEF tema tipu E (ehk B) ümber täisnurga võrra, siis läheb EF (BP) BC-d mööda, sest  $\sphericalangle PBC = 90^\circ$ , ja ED (BR) läheb BA-d mööda, sest  $\sphericalangle RBA = 90^\circ$  ja EG läheb AB pikendust mööda. Nii vijsi langeb  $\sphericalangle DEF$  ühte  $\sphericalangle$ -gaga ABC ja on järjelikult võrdsed, kuna  $\sphericalangle FEG$  saab  $\sphericalangle$ -ga ABC kõrvunurgaks ja järjelikult on nurkade ABC ja FEG summa sirge nurk.

