NSVL Kõrgema Hariduse Ministeerium

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Aspirant Elmar Reimers

KESKVÄÄRTUSTEOREEMID KAHEKORDSETE RIDADE TEOORIAS

Dissertatsioon

füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi teadusliku kraadi taotlemiseks

Teaduslik juhendaja:

Tartu Riikliku Ülikooli professor füüsika-matemaatika teaduste doktor G. Kangro

Tartu Riikliku Ülikooli Õpetatud Nõukogu koosoleku otsusega 31. oktoobrist 1958. a. on kinnitatud autorile Elmar Gustavi p. Reimers'ile füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi teaduslik kraad. (Väitekiri kaitsti 10. okt. 1958. a. Mat.-Loodusteaduskonna Õpet. Nõukogu avalikul koosolekul).

Tartu 1957

J. Maaroos
TRÜ teaduslik sekretär

S I S U K O R D

		Lk.
	SISSEJUHATUS	
I.	TÄHISTUSED, PÕHIMÕISTED JA ABILAUSED	4
	1.1. Summeeruvuse mõiste	4
	1.2. Tingimused menetluse A tarvis	7
	1.3. Regulaarsus ja multplikatiivsus	8
	1.4. Funktsionaalid ruumis αA. . .	10
II.	KESKVÄÄRTUSTEOREEMID KAHEKORDSETE RIDADE KORRAL	13
	2.1. Perfektsed summeerimismenetlused	13
	2.2. Lõikekoonduvus menetluse summeerimisväljas	14
	2.3. Keskväärtusteoreemid	21
	2.4. Keskväärtusteoreeme rahuldavate menetluste omadused	25
	2.5. Summeerimismenetluse sisalduvus	29
III.	SUMMEERUVATE RIDADE KORRUTAMINE	32
	3.1. Probleemiseade	32
	3.2. Tingimused maatriksite kohta	33
	3.3. Summeerimismenetluste translatiivsus	35
	3.4. Lahendus probleemi I korral	37
	3.5. Lahendus probleemi I korral kui B on ühikmenetlus	46

Lk.

3.6. Lahendus probleemi II korral 48

3.7. Summeerimismenetlused, mis rahuldavad Δ-tingimust 54

IV. KORRUTAMISTEOREEMID RIESZ'I JA VORONOI-NÖRLUND'I MENETLUSTE TARVIS 60

4.1. Korrutamisteoreemid Riesz'i menetluse korral 60

4.2. Korrutamisteoreemid Voronoi-Nörlund'i menetluse korral 65

TSITEERITUD KIRJANDUS 69

SISSEJUHATUS

Hajuvate ridade teooria tekkimisega tekkisid ka uued sellele teooriale omased meetodid. Üheks niisuguseks meetodiks paljude probleemide lahendamisel on siin keskväärtusteoreemide rakendamine. Esimese keskväärtusteoreemi (edaspidi lüh. KVT) andis M. Riesz [18] oma menetluse tarvis juba 1923. aastal. L.S. Bosanquet [2] 1941. aastal tuletas KVT Cesàro menetluse jaoks ja W. Jurkat [6] 1951. aastal Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse tarvis. Samal aastal andsid W. Jurkat ja A. Peyerimhoff [8] hariliku summeeruvuse korral KVT jaoks juba üldise käsitluse. Saadud üldist teooriat rakendasid nad summeeruvustegurite probleemi [8] ja summeerimismenetluste sisalduvuse [9] uurimisel, kusjuures ilmnes, et paljud KVT abil saadud tulemused kehtivad sageli ka menetluste korral, mis ei rahulda KVT nõudeid. W. Jurkat'il [7] õnnestus 1953. aastal selles suunas tulemusi laiendada. Samal ajal uuris A. Peyerimhoff [16] uue KVT abil summeeruvustegurite probleemi absoluutse summeeruvuse korral.

1952. aastal defineeris A. Wilansky [19] menetluse summeerimisväljas nn. tingimuse PMJ, mis andis menetlusele analoogilisi omadusi nagu KVT. Rea seoseid PMJ ja KVT vahel leidis M.S. MacPhail [13] aastal 1954. Võiks veel mainida, et 1952. aastal avaldas Knopp [11] ülevaateartikli Tübingeni matemaatikute töödest, kus muu hulgas refereerib üksikasjalikult ka KVT meetodit.

Kõigis eespool mainitud töödes olid vaatluse all ühekordsed read. 1957. aastal tuletas G. Kangro [10] ühe KVT juba kahekordsete ridade korral, kasutades teda nn. Peyerimhoff'i meetodi [15] laiendamisel kahekordsetele ridadele. Käesoleva töö eesmärgiks on laiendada KVT-de teooria kahekordsetele ridadele ning rakendada teda menetluste sisalduvuse ja ridade korrutamise probleemi uurimisel.

KVT-de teooria laiendamisel kahekordsetele ridadele osutus vajalikuks üldistada lõike g_α ja jadale x vastava lõike x_α^{kl} mõistet. Ühtlasi tuli üldistada ka neid mõisteid, milles esinevad lõiked g_α ja x_α^{kl}, nagu α-perfektsus, NLK ja LK.

Töös on saadud järgmised tulemused: a) on antud tarvilikud ja piisavad tingimused NLK ja LK jaoks menetluse A summeerimisväljas αA, b) on selgitatud vahekord NLK, LK ja α-perfektsuse vahel, c) on näidatud, millised omadused on KVT-sid rahuldavatel menetlustel, d) on leitud piisavaid tingimusi menetluste sisalduvuseks ning tarvilikke ja piisavaid tingimusi Cauchy' korrutisrea summeerimiseks.

Töö koosneb 4-st peatükist. Peatükis 1. anname põhimõisted ja üldised abilaused, samuti ka kasutatava tähistuse. Peatükk 2 sisaldabki keskväärtusteoreemide teooria kahekordsete ridade korral. Peatükid 3 ja 4 on rakendusliku iseloomuga, kusjuures esimeses anname üldised korrutusteoreemid ja teises rakendame neid Riesz'i ja Voronoi-Nörlundi menetluste korral.

Käesoleva dissertatsiooni põhilised teoreetilised tulemused on avaldatud Tartu Riikliku Ülikooli Toimetistes [17].

1. TÄHISTUSED, PÕHIMÕISTED JA ABILAUSED

1.1. <u>Summeeruvuse mõiste</u>. Me vaatleme järgmisi kahekordsete jadade[1] $x=\{x_{\mu\nu}\}$ klasse: b - tõkestatud jadade klass (kui $|x_{\mu\nu}|<M$, kus M on konstant), c - koonduvate jadade klass (eksisteerib $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=\xi$), bc - tõkestatult koonduvate jadade klass ($x\in c$ ja $x\in b$), rc - regulaarselt koonduvate jadade klass ($x\in c$ ja eksisteerivad $\lim\limits_{\mu\to\infty} x_{\mu\nu}=x^{\nu}$ ning $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=x_{\mu}$)[2], a - absoluutselt koonduvate jadade klass[3] ($\sum|\bar{\Delta}_{\mu\nu}x_{\mu\nu}|<\infty$) ja nulliks koonduvate jadade klasse bcn ($x\in bc$ ja $\xi=0$), rcn ($x\in rc$ ja $\xi=0$), rcrn ($x\in rc$ ja $\xi=x^{\nu}=x_{\mu}=0$), an ($x\in a$ ja $\xi=0$) ning arn ($x\in a$ ja $x\in rcrn$).

Edaspidi tähistame tähtedega α, α' ja α'' ühte klassidest bc, bcn, rc, rcn, rcrn, a, an ja arn; tähtedega β, β' ja β'' ühte klassidest bc, bcn, rc, rcn ja rcrn; täh-

---

[1] Kui indeksite muutumispiirkond ei ole näidatud, siis omandavad nad kõik täisarvulised väärtused 0,1,2,... .

[2] Edaspidi jada regulaarse koonduvuse korral alati kasutame piirväärtuste sellist tähistamist. Näiteks, kui jada $\{y_{\mu\nu}\}$ koondub regulaarselt, siis tähistame $y_{\mu}=\lim\limits_{\nu\to\infty} y_{\mu\nu}$ ja $y^{\nu}=\lim\limits_{\mu\to\infty} y_{\mu\nu}$.

[3] Siin ja edaspidi $\sum$ tähendab $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty}$, $\bar{\Delta}_{\nu}x_{\nu}= x_{\nu}-x_{\nu-1}$ ja $\bar{\Delta}_{\mu\nu}x_{\mu\nu}=\bar{\Delta}_{\mu}(\bar{\Delta}_{\nu}x_{\mu\nu})=\bar{\Delta}_{\nu}(\bar{\Delta}_{\mu}x_{\mu\nu})$.

tedega r, r' ja r" ühte klassidest rc, rcn ja rcrn; tähtedega γ, γ' ja γ'' ühte klassidest a, an ja arn.

Defineerime nüüd rea

$$\sum a_{kl} \tag{1.1.1}$$

summeeruvuse mõiste. Olgu $x = \{x_{\mu\nu}\} = \{\sum_{kl=0}^{\mu\nu} a_{kl}\}$. Me ütleme, et rida (1.1.1) on α-summeeruv kolmnurkse menetlusega $A = (a_{mn\mu\nu})$ (ehk A_α-summeeruv) summaks $A(x)$, kui jada $\{A_{mn}(x)\} \in \alpha$, kus

$$A_{mn}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu},$$

ja kui $\lim_{mn\to\infty} A_{mn}(x) = A(x)$.

Kõigi A_α-summeeruvate jadade hulga tähistame αA abil. αA on menetluse A α-summeerimisväli. Kui A on ühikmenetlus[4], siis tema α-summeerimisväljaks on klass α ja sel korral A_α-summeeruvuse asemel võime kõnelda lihtsalt α-koonduvusest.

Käesolevas töös vaatleme ainult kolmnurkseid summeerimismenetlusi[5] ja seepärast me seda ei hakka alati märkima.

---

[4] $A = (a_{mn\mu\nu})$ on ühikmenetlus kui

$$a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mu = m \text{ ja } \nu = n, \\ 0, & \text{ülejäänud indeksite korral.} \end{cases}$$

[5] Menetlus $A = (a_{mn\mu\nu})$ on kolmnurkne, kui $a_{mn\mu\nu} = 0$ niipea kui $\mu > k$ või $\nu > n$ või $\mu, \nu > m, n$. Menetlust A nimetame normaalseks, kui ta on kolmnurkne ja $a_{mnmn} \neq 0$.

Me nimetame menetlust A α-pööratavaks kui mistahes jadale $\{A_{mn}(x)\}\in\alpha$ vastab üks ja ainult üks jada $x\in\alpha A$. Kolmnurkne menetlus on α-pööratav, kui ta on normaalne[5].

Kui menetlus A on normaalne, siis võime igale jadale $x\in\beta A$ defineerida normi

(1.1.2) $$\|x\|_A = \sup_{\mu,\nu=0,1,\dots} |A_{\mu\nu}(x)|,$$

ja igale jadale $x\in\gamma A$ normi

(1.1.3) $$\|x\|_{|A|} = \sum |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|.$$

Sellisel normeerimisel menetluse A summeerimisväljad βA ja γA muutuvad BK-ruumideks, s.o. Banach'i ruumideks, kus leiab aset koonduvus koordinaatide järgi.

Ruumides αA vaatleme järgmisi eritüüpi jadasid: $e_{\mu\nu}$ - jada, mille kõik elemendid on nullid, peale elemendi indeksitega μ,ν , mis on 1; e_μ - jada, kus vaid μ-s rida on nullist erinev ja koosneb arvudest 1 ; e^ν - jada, kus vaid ν-s veerg on nullist erinev ja koosneb arvudest 1; $\bar{e}_\mu$ - jada, mille kõik elemendid on võrdsed nulliga peale μ-nda rea, kus 0 ja 1 asetsevad mistahes järjekorras; $\bar{e}^\nu$ - jada, kus kõik elemendid on võrdsed nulliga peale ν-nda veeru, kus 0 ja 1 asetsevad mistahes järjekorras; e - jada, mille elementideks on arvud 1.

Me ütleme, et hulk G asetseb ruumis αA tihedalt kui mistahes $x\in\alpha A$ ja mistahes $\varepsilon>0$ korral leidub selline element $g\in G$, et $\|x-g\|<\varepsilon$, kusjuures norm määratakse $\alpha=\beta$ korral valemi (1.1.2) ja $\alpha=\gamma$ korral valemi (1.1.3) järgi. Me nimetame hulka $E \subset \alpha A$ ruumi αA põhihulgaks, kui E kõigi elementide lineaarsete kombintasioonide hulk asetseb tihedalt ruumis αA.

Ruumides α põhihulga moodustavad järgmised jadad[6]: 1) ruumis bc - $e_{\mu\nu}$, $\bar{e}_\mu$, $\bar{e}^\nu$ ja e; 2) ruumis bcn - $e_{\mu\nu}$, $\bar{e}_\mu$ ja $\bar{e}^\nu$; 3) ruumis rc - $e_{\mu\nu}$, e_μ, e^ν ja e; 4) ruumis rcn - $e_{\mu\nu}$, e_μ ja e^ν; 5) ruumis rcrn - $e_{\mu\nu}$; 6) ruumis a - $e_{\mu\nu}$, e_μ, e^ν ja e; 7) ruumis an - $e_{\mu\nu}$, e_μ ja e^ν; 8) ruumis arn - $e_{\mu\nu}$.

1.2. Tingimused menetluse A tarvis.

(a) $$\lim_{mn\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0,$$

(b) $$\lim_{m\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0,$$

(b') $$\lim_{m\to\infty} a_{mn\mu\nu} = a^n_{\mu\nu}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{mn\mu\nu} = a_{m\mu\nu},$$

(c) $$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \nu = n, \\ 0, & \text{kui } \nu < n, \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mu = m, \\ 0, & \text{kui } \mu < m, \end{cases} \end{cases}$$

(c') $$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} L^n, & \text{kui } \nu = n, \\ 0, & \text{kui } \nu < n, \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} L_m, & \text{kui } \mu = m, \\ 0, & \text{kui } \mu < m, \end{cases} \end{cases}$$

---

[6] Juhud 1)-5) on tõestanud J.D. Hill ja H.I. Hamilton [5]. Juhud 6)-8) järelduvad analoogiliselt.

(d) $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = 0, \quad \lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = 0,$

(e) $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} = 1,$

(e') $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} = L,$

(f) $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} |a_{mn\mu\nu}| = 0, \quad \lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} |a_{mn\mu\nu}| = 0,$

(g) eksisteerivad sellised arvud $a_{\mu\nu}^{n}$ ja $a_{m\mu\nu}$, et

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m} |a_{mn\mu\nu} - a_{\mu\nu}^{n}| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} |a_{mn\mu\nu} - a_{m\mu\nu}| = 0,$$

(h) $\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}| \leq N_1,$

(i) $\left|\sum\limits_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu}\right| \leq N_2,$

(j) $\sum\limits_{mn=0}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_{mn} \sum\limits_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu}\right| \leq N_3 .$

On näha, et tingimuse (i) asemele võime võtta tingimuse $\left|\sum\limits_{\mu\nu=kl}^{mn} a_{mn\mu\nu}\right| \leq N_2$ ja tingimuse (j) asemele $\sum\limits_{mn=kl}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_{mn} \sum\limits_{\mu\nu=kl}^{mn} a_{mn\mu\nu}\right| \leq N_3 .$

1.3. <u>Regulaarsus ja multiplikatiivsus</u>. Me ütleme, et menetlus A on L-multiplikatiivne teisenduse $\alpha \to \alpha'$ suhtes kui kõik klassi α jadad on $A_{\alpha'}$-summeeruvad ja kui iga $x \in \alpha$ korral kehtib võrdus $A(x) = L \lim\limits_{mn\to\infty} x_{mn}$.

Me ütleme, et menetlus A on täielikult L-multiplikatiivne teisenduse $\alpha \to \alpha'$ suhtes kui ta on L-multiplikatiivne teisenduse $\alpha \to \alpha'$ suhtes ja kui kehtivad võrdused $\lim\limits_{m\to\infty} A_{mn}(x) =$

$= L^n \lim_{m\to\infty} x_{mn}, \ \lim_{n\to\infty} A_{mn}(x) = L_m \lim_{n\to\infty} x_{mn}$

niipea kui piirväärtused $m\to\infty$ ja $n\to\infty$ korral eksisteerivad. Kui menetlus A on L-multiplikatiivne teisenduse $\alpha\to\alpha'$ suhtes ja $L=1$, siis ütleme, et menetlus A on ($\alpha\to\alpha'$)-regulaarne. Kui aga menetlus A on täielikult L-multiplikatiivne teisenduse $\alpha\to\alpha'$ suhtes ja $L=L^n=L_m=1$, siis ütleme, et menetlus A on täielikult ($\alpha\to\alpha'$)-regulaarne. Juhul kui $\alpha=\alpha'$ ütleme lihtsalt, et menetlus A on α-regulaarne (vastavalt täielikult α-regulaarne).

L e m m a 1.3.1. Järgmised tingimused on tarvilikud ja piisavad täielikuks L-multiplikatiivsuseks teisenduse

1) bc $\to$ bc korral: (a), (b), (c'), (e'), (f) , (h),
2) rc $\to$ rc korral: (a), (b), (c'), (d), (e'), (h),
3) a $\to$ rc korral: (a), (b), (c'), (d) , (e'), (i),
4) a $\to$ a korral: (a), (b), (c'), (d) , (e'), (j),

ja L-multiplikatiivsuseks teisenduse

a $\to$ bc korral: (a), (d), (e'), (i).

L e m m a 1.3.2. Menetlus A on siis ja ainult siis

1) bc -regulaarne, kui (a),(e),(f),(h),
2) (bc $\to$ rc)-regulaarne, kui (a),(b'),(e),(f),(g),(h),
3) (rc $\to$ bc)-regulaarne, kui (a),(d), (e),(h),
4) (a $\to$ bc)-regulaarne, kui (a),(d), (e),(i),
5) täielikult bc-regulaarne, kui (a),(b),(c),(e),(f),(h) ,
6) täielikult rc-regulaarne, kui (a),(b),(c),(d),(e),(h),
7) täielikult rcn-regulaarne, kui (a),(b),(d),(h),
8) täielikult a-regulaarne, kui (a),(b),(c),(d),(e),(j),
täielikult arn-regulaarne, kui (a),(b),(j),
9) täielikult (a $\to$ rc)-regulaarne, kui (a),(b),(c),(d), (e),(i).

L e m m a 1.3.3. Menetlus A teisendab rc-koonduva jada bcn-koonduvaks siis ja ainult siis, kui (a), (d), (e'), kus $L=0$ ja (h).

Lemmad 1.3.1, 1.3.2 ja 1.3.3 järelduvad kergesti vastavatest üldisematest Hamilton'i [3] ja Mears'i [14] tingimustest.

Allpool (peatükk 3) kasutame mõistet, et menetlus on täielikult ($\alpha', \alpha'' \to \alpha$)-regulaarne, mis tähendab, et A on täielikult nii ($\alpha' \to \alpha$)-regulaarne kui ka ($\alpha'' \to \alpha$)-regulaarne.

1.4. Funktsionaalid ruumis αA .

L e m m a 1.4.1. Iga pidev lineaarne funktsionaal[7] fx esitub järgmisel kujul

1) ruumis rcA : $fx = \alpha A(x) + \sum \alpha_\mu A_\mu(x) + \sum \alpha^\nu A^\nu(x) + \sum \alpha_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)$

ja $\|f\| = |\alpha| + \sum |\alpha_\mu| + \sum |\alpha^\nu| + \sum |\alpha_{\mu\nu}|$;

2) ruumis $rcnA$: sama mis ruumis rcA , kus $\alpha = 0$;

3) ruumis $rcrnA$: sama mis ruumis rcA , kus $\alpha = \alpha_\mu = \alpha^\nu = 0$;

---

[7] Funktsionaali f nimetame lineaarseks kui $f(ax+by) = afx + bfy$ iga $x, y \in \alpha A$ korral (a, b on mistahes arvud) ja pidevaks kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et võrratusest $\|x_1 - x_2\| < \delta$ järeldub $|fx_1 - fx_2| < \varepsilon$, kus $x_1, x_2 \in \alpha A$. Lineaarse funktsionaali pidevuseks ruumis αA on tarvilik ja piisav, et leiduks selline arv N , et kehtib $|fx| \leq N \|x\|$ iga $x \in \alpha A$ korral.

4) ruumis γA : $fx = \sum \alpha_{\mu\nu} \bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)$, kus $|\alpha_{\mu\nu}| < M$

ja $\|f\| = \sup\limits_{\mu,\nu=0,1,\ldots} |\alpha_{\mu\nu}|$.

Selle lemma kehtivust võime analoogiliselt tõestada nagu töödes [15] ja [16], kasutades pideva lineaarse funktsionaali üldkuju ruumes $\imath$ ja γ . Tõepoolest, kirjutades maatriksteisenduse üles operaatorkujul $y = Ax$, saame normaalse A korral, et $x = A^{-1}y$ iga $x \in \alpha A$ korral, kus A^{-1} on A pöördteisendus. Kui f on mistahes pidev lineaarne funktsionaal αA-s , siis $fx = fA^{-1}y = hy$, kus h on juba mingi pidev lineaarne funktsionaal ruumis α .

Ruumis rc pideva lineaarse funktsionaali üldkuju leidis J.D. Hill [4]. Ruumes rcn ja rcrn saame analoogiliselt ja ruumis γ nagu töös [16].

Kui A on ühikmenetlus, siis $A_{\mu\nu}(x) = x_{\mu\nu}$, $A_{\mu}(x) = x_{\mu}$, $A^{\nu}(x) = x^{\nu}$ ja lemma 1.4.1 annab meile pideva lineaarse funktsionaali üldkuju ruumes $\imath$ ja γ .

Ruumis $\ell c A$ vaatleme järgmise kujuga pidevaid lineaarseid funktsionaale:

(1.4.1) $$fx = \alpha A(x) + \sum \alpha_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x),$$

kus $$\|f\| = |\alpha| + \sum |\alpha_{\mu\nu}|,$$

ja ruumis $\ell c n A$

(1.4.2) $$fx = \sum \alpha_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x), \quad \text{kus} \quad \|f\| = \sum |\alpha_{\mu\nu}| .$$

Neis ruumes mistahes pidevat lineaarset funktsionaali ei saa esitada sel kujul, kuid esitatud funktsionaalide klassid haaravad seda tüüpi funktsionaale, mida meil allpool tarvis läheb.

Allpool sageli kasutame Abel-Hardy teisendust

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu} b_{\mu\nu} = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \Delta_{\mu\nu} a_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{\mu\nu} b_{ij},$$

kus $a_{\mu\nu}=0$, kui $\mu>m$ või $\nu>n$ või $\mu,\nu>m,n$.

2. KESKVÄÄRTUSTEOREEMID KAHEKORDSETE RIDADE KORRAL

2.1. <u>Perfektsed summeerimismenetlused</u>. Perfektse summeerimismenetluse mõiste defineerime lõigete abil. Lõike $g_\alpha = \{g^\alpha_{\mu\nu}\}$ summeerimisväljas αA defineerime kui ruumi α põhihulga elementide lineaarse kombinatsiooni. Näiteks, ruumi rcA korral

$$g_{rc} = ge + \sum_{\mu=0}^{k_0} g_\mu e_\mu + \sum_{\nu=0}^{l_0} g^\nu e^\nu + \sum_{\mu\nu=0}^{k_0 l_0} g_{\mu\nu} e_{\mu\nu}, \tag{2.1.1}$$

kus g, g_μ, g^ν ja $g_{\mu\nu}$ on mistahes arvud, ruumi aA korral $g_a = g_{rc}$ jne. Kui on vaja näidata, et lõikes g_α lineaarne kombinatsioon lõpeb indeksitega k_0, l_0, me kirjutame $\overset{k_0 l_0}{g_\alpha}$.

Kui menetlus A on täielikult α-regulaarne, siis $g_\alpha \in \alpha A$, sest g_α on α-koonduv jada. Näiteks, võrdusest

$$A_{mn}(g_{rc}) = \sum_{\mu\nu=0}^{k_0 l_0} a_{mn\mu\nu} g_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{k_0} g_\mu \sum_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} + \sum_{\nu=0}^{l_0} g^\nu \sum_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} + g \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} \tag{2.1.2}$$

järeldub $g_{rc} \in rcA$, kui A on täielikult rc-regulaarne. Teistel juhtudel võime kasutada analoogilisi võrdusi, nagu (2.1.2).

D e f i n i t s i o o n 2.1.1. Me nimetame normaalset menetlust A α-perfektseks, kui ta on täielikult α-regulaarne ja kui mistahes $x \in \alpha A$ ja mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige g_α, et kehtib

(2.1.3) $$\|x - g_\alpha\| < \varepsilon,$$

kus norm defineeritakse valemi (1.1.2) järgi kui $\alpha = \beta$ ja valemi (1.1.3) järgi kui $\alpha = \gamma$.

Definitsioonist on näha, et A α-perfektsuse korral $\lim_{k_0 l_0 \to \infty} \|x - g_\alpha^{k_0 l_0}\| = 0$. Kui kehtib (2.1.3), siis lõiked g_α asetsevad tihedalt ruumis αA. Tähendagu $[\alpha]$ ruumi α põhihulka. Arvestades lõike g_α definitsiooni, näeme, et kehtib järgmine

L e m m a 2.1.1. Normaalne täielikult α-regulaarne menetlus A on siis ja ainult siis α-perfektne, kui $[\alpha]$ on ruumi αA põhihulgaks.

L e m m a 2.1.2. Normaalne täielikult α-regulaarne menetlus A on siis ja ainult siis α-perfektne, kui iga ruumis αA määratud pideva lineaarse funktsionaali f korral, mil

(2.1.4) $f x_0 = 0$ iga $x_0 \in [\alpha]$ korral,

järeldub

(2.1.5) $f x = 0$ iga $x \in \alpha A$ korral.

Lemma 2.1.2 järeldub vahetult lemmast 2.1.1 (S.Banach [1], lhk. 58, teoreem 7.).

2.2. <u>Lõikekoonduvus menetluse summeerimisväljas</u>. Defineerime jadale $x \in \alpha A$ lõike x_α^{kl} järgmiselt:

1) kui $x \in bcA$, siis

$$\overset{\kappa l}{x}_{bc} = A(x)e + \overset{\kappa}{y} + \overset{l}{z} + \sum_{\mu\nu=0}^{\kappa l}(x_{\mu\nu} - \overset{\kappa}{y}_{\mu\nu} - \overset{l}{z}_{\mu\nu} - A(x))\, e_{\mu\nu},$$

kus $\overset{\kappa}{y} = \{\overset{\kappa}{y}_{\mu\nu}\} = \sum_{\mu\nu=0}^{\kappa,\, n(\kappa)}(A_{\mu\nu}(x) - A(x))(\overset{\kappa}{\bar{e}}_{\mu})_{\nu},$

$$\overset{l}{z} = \{\overset{l}{z}_{\mu\nu}\} = \sum_{\mu\nu=0}^{m(l),\, l}(A_{\mu\nu}(x) - A(x))\,(\overset{l}{\bar{e}}{}^{\nu})_{\mu},$$

milles $(\overset{\kappa}{\bar{e}}_{\mu})_{\nu}$ ja $(\overset{l}{\bar{e}}{}^{\nu})_{\mu}$ on vastavalt $\bar{e}_{\mu}$ ja $\bar{e}^{\nu}$ tüüpi jadad, kusjuures arvude 0 ja 1 paigutus neis sõltub vastavalt indeksist κ, ν ja l, μ ja on selline, et jadades $\overset{\kappa}{y}$ ja $\overset{l}{z}$ igasse kohta tuleb parajasti üks element $A_{\mu\nu}(x) - A(x)$;

2) kui $x \in bcnA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{bcn} = \overset{\kappa l}{x}_{bc}$, kus $A(x) = 0$;

3) kui $x \in rcA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{rc} = A(x)e + \sum_{\mu=0}^{\kappa}(A_{\mu}(x) - A(x))\, e_{\mu} +$

$$+ \sum_{\nu=0}^{l}(A^{\nu}(x) - A(x))e^{\nu} + \sum_{\mu\nu=0}^{\kappa l}(x_{\mu\nu} - A_{\mu}(x) - A^{\nu}(x) + A(x))\, e_{\mu\nu};$$

4) kui $x \in rcnA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{rcn} = \overset{\kappa l}{x}_{rc}$, kus $A(x) = 0$;

5) kui $x \in rcrnA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{rcrn} = \overset{\kappa l}{x}_{rc}$, kus $A(x) = A_{\mu}(x) = A^{\nu}(x) = 0$,

6) kui $x \in aA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{a} = \overset{\kappa l}{x}_{rc}$;

7) kui $x \in anA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{an} = \overset{\kappa l}{x}_{rcn}$;

8) kui $x \in arnA$, siis $\overset{\kappa l}{x}_{arn} = \overset{\kappa l}{x}_{rcrn}$.

Definitsiooni järgi lõige $\overset{\kappa l}{x}_{\alpha}$ jadale x on erijuhtum paragrahvis 2.1. defineeritud üldisest lõikest g_{α} . Seepärast, kui menetlus A on täielikult α-regulaarne, $\overset{\kappa l}{x}_{\alpha} \in \alpha A$.

Olgu $y = \overset{kl}{x}_\alpha$. Vaadeldes jada y kui harilikku jada, võime temale ka koostada lõike $\overset{ij}{y}_\alpha$. Sel korral kehtib järgmine seos:

$$\overset{ij}{y}_\alpha = \begin{cases} \overset{ij}{x}_\alpha, & \text{kui } i,j \leq k,l; \\ \overset{kl}{x}_\alpha, & \text{kui } i,j \geq k,l; \\ \overset{il}{x}_\alpha, & \text{kui } i \leq k \text{ ja } j \geq l; \\ \overset{kj}{x}_\alpha, & \text{kui } i \geq k \text{ ja } j \leq l. \end{cases}$$

Näeme, et $\overset{kl}{y}_\alpha = \overset{kl}{x}_\alpha$, mida kasutame allpool.

Defineerime lõikekoonduvuse mõiste. Me ütleme, et ruumis αA leiab aset lõikekoonduvus (lüh. LK), kui iga $x \in \alpha A$ korral $\lim\limits_{kl \to \infty} \overset{kl}{x}_\alpha = x$ normi järgi (kusjuures $\alpha = bc, bcn$ puhul oletame veel, et on võimalik jadasid $(\overset{k}{e}_\mu)_\nu$ ja $(\overset{l}{e}^\nu)_\mu$ nii valida, et viimane võrdus kehtib), kus normi defineerime valemi (1.1.2) järgi, kui $\alpha = \beta$, ja valemi (1.1.3) järgi, kui $\alpha = \gamma$. Me ütleme, et ruumis αA leiab aset nõrk lõikekoonduvus (NLK), kui mistahes ruumis αA pideva lineaarse funktsionaali f korral $\lim\limits_{kl \to \infty} f\overset{kl}{x}_\alpha = fx$ iga $x \in \alpha A$ korral ($\alpha = bc, bcn$ korral jällegi oletame veel, et leiduvad jadad $(\overset{k}{e}_\mu)_\nu$ ja $(\overset{l}{e}^\nu)_\mu$, mis toovad viimase võrduse juurde).

Kuna ruumes bcA ja $bcnA$ funktsionaali üldkuju ei ole teada, siis edaspidi NLK definitsiooni neis ruumes mõistame vaid funktsionaalide korral, mille kuju on antud vastavalt valemitega (1.4.1) ja (1.4.2).

On näha, et LK-st järeldub alati NLK, sest $|fx - f\overset{kl}{x}_\alpha| \leq$ $\leq \|f\| \|x - \overset{kl}{x}_\alpha\|$. Näitena märgime, et ruumes α alati leiab aset LK ja järelikult ka NLK.

T e o r e e m 2.2.1. Kui normaalne menetlus A on täielikult α-regulaarne ja ruumis αA leiab aset NLK, siis menetlus A on α-perfektne.

T õ e s t u s. Olgu f mistahes ruumis αA määratud pidev lineaarne funktsionaal, mis saab nulliks ruumi α põhihulgal $[\alpha]$. Arvestades $\overset{kl}{x}_\alpha$ definitsiooni, näeme, et ka $f\overset{kl}{x}_\alpha = 0$. NLK tõttu aga $fx = \lim\limits_{kl\to\infty} f\overset{kl}{x}_\alpha$, kust ilmselt $fx=0$ iga $x\in\alpha A$ korral. Lemma 2.1.2 järgi menetlus A on α-perfektne.

Kuna ruumide bcA ja $bcnA$ korral omadust NLK kokkuleppe kohaselt mõistame vaid teatava klassi funktsionaalide korral, siis on vaja näidata veel, et need klassid haaravad kõike funktsionaale, mis saavad nulliks ruumide bc ja bcn põhihulkadel $[bc]$ ja $[bcn]$. Nagu eespool märkisime ruumis bcn on alati LK, siis mistahes ruumis bcn pideva lineaarse funktsionaali h korral võrratusest $|hx - h(\overset{kl}{x}_{bcn})| \leq$ $\leq \|h\| \, \|x - \overset{kl}{x}_{bcn}\| \to 0$ ($k,l\to\infty$, $x\in bcn$) järeldub $hx = \lim\limits_{kl\to\infty} h(\overset{kl}{x}_{bcn})$, mis annab meile teatava üldavaldise h jaoks. Kuna iga ruumis $bcnA$ määratud pideva lineaarse funktsionaali f korral leidub selline h, et $fx = hy$, kus $y\in bcn$ (vt. Lemma 1.4.1 tõestust), siis saame ka f jaoks üldavaldise. Võrdustades nüüd nii saadud fx-i nulliga jadadel $e_{\mu\nu}$, $\bar{e}_\mu$, $\bar{e}^\nu$ ja e, mis moodustavad hulga $[bcn]$, näeme, et lemmas 2.1.2 esinevad funktsionaalid on kujuga (1.4.2) Analoogiliselt saame sama ka bcA kohta.

T e o r e e m 2.2.2. Olgu normaalne menetlus A täielikult β-regulaarne. Ruumis βA leiab aset NLK siis ja ainult siis, kui kehtib tingimus

$$\| \overset{kl}{x}_\beta \|_A \leq K \|x\|_A , \tag{2.2.1}$$

kus norm defineeritakse valemiga (1.1.2) ja K on konstant.

T õ e s t u s. Kasutame nõrga koonduvuse mõistet. Me ütleme, et jada x_{kl} $k,l \to \infty$ korral koondub nõrgalt jadaks x ruumis β kui kehtib $\lim_{kl \to \infty} f x_{kl} = f x$ iga ruumis β määratud pideva lineaarse funktsionaali f korral. Võrreldes nüüd pideva lineaarse funktsionaali üldkuju ruumides βA ja β, näeme, et on vaja näidata, et jada $\{A_{mn}(\overset{kl}{x}_\beta)\}$ $k,l \to \infty$ korral koondub nõrgalt jadaks $\{A_{mn}(x)\}$ ruumis β.

Toome sisse järgmised tingimused jadale $x_{kl} = \{x_{mn}^{kl}\}$:

$$\sup_{m,n=0,1,\dots} | x_{mn}^{kl} | \leq K \qquad (K = \text{const}); \tag{2.2.2}$$

$$\lim_{kl \to \infty} x_{mn}^{kl} = x_{mn} ; \tag{2.2.3}$$

$$\lim_{kl \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} x_{mn}^{kl} \right) = \lim_{m \to \infty} x_{mn}, \quad \lim_{kl \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} x_{mn}^{kl} \right) = \lim_{n \to \infty} x_{mn}; \tag{2.2.4}$$

$$\lim_{kl \to \infty} \left(\lim_{mn \to \infty} x_{mn}^{kl} \right) = \lim_{mn \to \infty} x_{mn} . \tag{2.2.5}$$

Analoogiliselt nagu ühekordsete jadade korral (vt. S. Banach [1], lhk. 136-137) võib saada järgmised tarvilikud ja piisavad tingimused jada $x_{kl} = \{x_{mn}^{kl}\}$ nõrgaks koonduvuseks jadaks $x = \{x_{\mu\nu}\}$ ruumis 1) bc: (2.2.2), (2.2.3), (2.2.5); 2) bcn: (2.2.2), (2.2.3); 3) rc: (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5); 4) rcn: (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4); 5) rcrn: (2.2.2), (2.2.3).

NLK-ks ruumis βA (2.2.2) annab tarviliku ja piisava tingimuse, kuna ülejäänud tingimused on alati täidetud. Näiteks, rcA korral tingimuste (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5) kehtivus järeldub võrdusest

$$A_{mn}(\overset{kl}{x}_{\varkappa}) = \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu}(x_{\mu\nu} - A_\mu(x) - A^\nu(x) + A(x)) +$$

$$(2.2.6) \qquad + \sum_{\mu=0}^{k}(A_\mu(x) - A(x))\sum_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} + \sum_{\nu=0}^{l}(A^\nu(x) - A(x))\sum_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} A(x) .$$

Seega NLK jaoks ruumis βA saame tingimuse

$$(2.2.7) \qquad \sup_{m,n=0,1,\ldots} |A_{mn}(\overset{kl}{x}_\beta)| \leq \mathcal{K}(x),$$

kus $\mathcal{K}(x)$ on vaid x-st sõltuv suurus. Kuna $x_{\mu\nu}(x)$ ja $A_{\mu\nu}(x)$ ja siit ka $A_{mn}(\overset{kl}{x}_\beta)$ on pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumis βA[8], siis $|A_{mn}(\overset{kl}{x}_\beta)| \leq \mathcal{K}_{mnkl} \|x\|_A$. Tingimuse (2.2.7) tõttu viimasest saamegi (2.2.1).

---

[8] Ruumis βA koonduvuse tõttu koordinaatide järgi tingimusest $x_k = \{x^k_{\mu\nu}\} \to x = \{x_{\mu\nu}\}$ järeldub $x^k_{\mu\nu} \to x_{\mu\nu}$ ehk $x_{\mu\nu}(x_k) \to x_{\mu\nu}(x)$. Järelikult funktsionaalid $x_{\mu\nu}(x)$ on pidevad.

T e o r e e m 2.2.3. Menetlus A olgu normaalne ja täielikult β-regulaarne. Kui ruumis βA leiab aset NLK, siis ka LK.

T õ e s t u s. Teoreemi 2.2.1 järgi A on β-perfektne. Järelikult iga $x \in \beta A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige $\overset{k_0 l_0}{g_\beta}$, et $\| x - g_\beta \| < \varepsilon / (K+1)$, kus K on tingimusest (2.2.1). Olgu $k = k_0$ ja $l = l_0$, siis jadale $y = g_\beta$ moodustatud lõige $\overset{kl}{y_\beta} = g_\beta$. NLK tõttu kehtib tingimus (2.2.1) iga $x \in \beta A$ korral. Kuna $\overset{kl}{x_\beta} - \overset{kl}{y_\beta} \in \beta A$, siis võime kirjutada

$$\| x - \overset{kl}{x_\beta} \| \leq \| x - g_\beta \| + \| \overset{kl}{x_\beta} - \overset{kl}{y_\beta} \| \leq (K+1) \| x - g_\beta \| < \varepsilon ,$$

kusjuures bcA ja bcnA korral lõigetes $\overset{kl}{x}_{bc}$ ja $\overset{kl}{x}_{bcn}$ jadad $(\overset{k}{e}_\mu)_\nu$, $(\overset{l}{e}{}^\nu)_\mu$ valime samad, mis on vastavalt lõigetes g_{bc} ja g_{bcn} (vastasel juhul $\beta = bc$, bcn korral ei tarvitse võrratus $\| \overset{kl}{x_\beta} - g_\beta \| \leq K \| x - g_\beta \|$ kehtida). Kui $k_0, l_0 \to \infty$, siis $\varepsilon \to 0$, mis tõestabki väite.

T e o r e e m 2.2.4. Menetlus A olgu normaalne ja täielikult γ-regulaarne. Ruumis γA leiab aset LK siis ja ainult siis, kui

$$\lim_{kl \to \infty} \Big(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \Big) | \bar{\delta}_{mn} A_{mn} (\overset{kl}{x_\gamma}) | = 0 . \tag{2.2.8}$$

Teoreemi kehtivus ilmneb võrdusest $\lim\limits_{kl \to \infty} \| \overset{kl}{x_\gamma} - x \|_{|A|} = 0$, kusjuures arvestame, et $\overset{kl}{x_\gamma} = (\overset{kl}{x_\gamma} - x) + x$.

2.3. Keskväärtusteoreemid. Defineerime kolmnurkse menetluse $A = (a_{mn\mu\nu})$ tarvis järgmised hinnangud:

(2.3.1) $$|A_{mnkl}(x)| \le K_1 |A_{k'l'}(x)| \quad (0 \le k', l' \le k, l \le m, n);$$

(2.3.2) $$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) |\bar{\Delta}_{mn} A_{mnkl}(x)| \le K_2 |A_{k'l'}(x)| \quad (-"-);$$

(2.3.3) $$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}| \le K_3 \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|,$$

kus $A_{mnkl}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}$, $x = \{x_{\mu\nu}\}$ on mistahes jada ja K_1, K_2, K_3 on konstandid. Hinnangute (2.3.1) ja (2.3.2) korral oletame, et leiduvad sellised arvud k' ja l', et vastav võrratus on täidetud.

Me ütleme, et menetlus A rahuldab KVT 1 (KVT 2 ja KVT 3), kui A rahuldab hinnangut (2.3.1) (vastavalt hinnangut (2.3.2) ja (2.3.3)).

L e m m a 2.3.1. Kui menetlus A rahuldab tingimusi[9]

1° $a_{kl\mu\nu} \neq 0$, $0 \le \dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \le K_1$;

2° $\Delta_\mu \dfrac{a_{mn\mu l}}{a_{kl\mu l}} \ge 0 \; (0 \le \mu < k \le m)$, $\Delta_\nu \dfrac{a_{mnk\nu}}{a_{klk\nu}} \ge 0 \; (0 \le \nu < l \le n)$;

---

[9] Siin ja edaspidi tähistame $\Delta_\mu a_\mu = a_\mu - a_{\mu+1}$, $\Delta_{\mu\nu} a_{\mu\nu} = \Delta_\mu(\Delta_\nu a_{\mu\nu}) = \Delta_\nu(\Delta_\mu a_{\mu\nu})$.

3° $\Delta_{\mu\nu} \dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \geq 0 \quad (0 \leq \mu, \nu < k, l \leq m, n),$

siis A rahuldab KVT 1 .

Selle lemma on tõestanud G, Kangro [10, teoreem 5].

L e m m a 2.3.2. Kui menetlus A rahuldab KVT 1 ja tingimust[10]

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \left|\bar{\Delta}_{mn}\left(\Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}}\right)\right| \leq M \qquad (M = \mathrm{const}),$$

siis A rahuldab KVT 2 .

Lemma tõestame Abel-Hardy teisenduse abil, võttes $a_{mn\mu\nu} = \dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} a_{kl\mu\nu}$.

L e m m a 2.3.3. Kui menetlus A rahuldab tingimusi

1° $\Delta_{mn} |a_{mn\mu\nu}| = - |\Delta_{mn} a_{mn\mu\nu}|,$

2° $\Delta_m |a_{mn\mu n}| = |\Delta_m a_{mn\mu n}|,$

3° $\Delta_n |a_{mnm\nu}| = |\Delta_n a_{mnm\nu}|,$

siis A rahuldab KVT 3 .

T õ e s t u s. Me võime kirjutada

$$\bar{\Delta}_{kl} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} |a_{kl\mu\nu} x_{\mu\nu}| = |a_{klkl} x_{kl}| + \sum_{\mu\nu=0}^{k-1,l-1} \Delta_{kl} |a_{k-1\,l-1\,\mu\nu} x_{\mu\nu}| -$$

---

10 Viimases eeldatakse, et $\dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = 0$, kui $\mu > k$ või $\nu > l$ või $\mu, \nu > k, l$.

$$-\sum_{\mu=0}^{k-1}\Delta_k|a_{k-1\,l\mu l}\,x_{\mu l}|-\sum_{\nu=0}^{l-1}\Delta_l|a_{k\,l-1\,k\nu}\,x_{k\nu}|=|a_{klkl}\,x_{kl}|-$$

$$-\sum_{\mu\nu=0}^{k-1,l-1}|-\Delta_{kl}a_{k-1\,l-1\,\mu\nu}\,x_{\mu\nu}|-\sum_{\mu=0}^{k-1}|\Delta_k a_{k-1\,l\mu l}\,x_{\mu l}|-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{l-1}|\Delta_l a_{k\,l-1\,k\nu}\,x_{k\nu}|\le|\bar\Delta_{kl}A_{kl}(x)|.$$

Seepärast

$$\sum_{kl=0}^{mn}|a_{mnkl}\,x_{kl}|=\sum_{kl=0}^{mn}\bar\Delta_{kl}\sum_{\mu\nu=0}^{kl}|a_{kl\mu\nu}\,x_{\mu\nu}|\le\sum_{kl=0}^{mn}|\bar\Delta_{kl}A_{kl}(x)|.$$

Lemmasid 2.3.1, 2.3.2 ja 2.3.3 nimetatakse ka keskväärtusteoreemideks.

Faktoriseeruvate menetluste A korral, s.o. selliste menetluste $A=(a_{mn\mu\nu})$ korral, kus $a_{mn\mu\nu}=a'_{m\mu}a''_{n\nu}$, lemmade 2.3.1,,2.3.2 ja 2.3.3 tingimused lihtsustuvad. Sel korral võime väita järgmist:

Kui faktoriseeruv menetlus A rahuldab tingimusi[11]

$$0\le\frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}}\le M',\quad \Delta_\mu\frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}}\geqslant 0\qquad (0\le\mu\le k\le m,\ M'=\text{const}),$$

$$0\le\frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}}\le M'',\quad \Delta_\nu\frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}}\geqslant 0\qquad (0\le\nu\le l\le n,\ M''=\text{const}),$$

siis A rahuldab KVT 1.

---

11 Neis tingimusis oletame, et $a'_{m\mu}\neq 0$ ja $a''_{n\nu}\neq 0$ ning $\frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}}=0$, kui $\mu>k$, ja $\frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}}=0$, kui $\nu>l$.

Kui faktoriseeruv menetlus A rahuldab KVT 1 ja tingimusi[11]

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{k}\left|\bar{\Delta}_m\left(\Delta_\mu \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}}\right)\right| \le N', \quad \sum_{n=l+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{l}\left|\bar{\Delta}_n\left(\Delta_\nu \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}}\right)\right| \le N''$$

(N' ja N'' on konstandid), siis A rahuldab KVT 2.

Kui faktoriseeruv menetlus A rahuldab tingimusi

$\Delta_m |a'_{m\mu}| = |\Delta_m a'_{m\mu}|$, $\Delta_n |a''_{n\nu}| = |\Delta_n a''_{n\nu}|$, siis A rahuldab KVT 3.

Keskväärtusteoreemide kehtimiseks võime saada ka tarvilikke tingimusi. Olgu $x = e_{\mu\nu}$, siis hinnangust (2.3.1) saame

(2.3.4) $$|a_{mn\mu\nu}| \le K_1 |a_{kl\mu\nu}| \quad (0 \le \mu,\nu \le k,l \le m,n),$$

ja hinnangust (2.3.2)

(2.3.5) $$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right)|\bar{\Delta}_{mn} a_{mn\mu\nu}| \le K_2 |a_{kl\mu\nu}| \quad (0 \le \mu,\nu \le k,l).$$

Kui $x = e$, siis hinnangust (2.3.3) saame

(2.3.6) $$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}| \le K_3 \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(e)|.$$

Kuna me nõuame hinnangute (2.3.1), (2.3.2) ja (2.3.3) kehtimist iga jada x korral, siis tingimused (2.3.4), (2.3.5) ja (2.3.6) on tarvilikud selleks, et menetlus A rahuldaks vastavalt KVT 1, KVT 2 ja KVT 3.

Olgu veel märgitud, et hinnanguis (2.3.1) ja (2.3.2) võrratuse parema poole võime asendada suurusega $K\|x\|_A$ (K = const) ja hinnangus (2.3.3) suurusega $K\|x\|_{|A|}$ (K = const).

M ä r k u s 2.3.1. Kui A rahuldab tingimusi (a) ja (b), siis hinnangu (2.3.2) kehtivusest järeldub ka hinnangu (2.3.1) kehtivus. See on näha võrdusest

$$\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{rs\mu\nu} x_{\mu\nu} = \left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{rs}\right) \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}.$$

2.4. <u>Keskväärtusteoreeme rahuldavate menetluste omadused</u>. Summeerimismenetlustel, mis rahuldavad KVT, on rida huvitavaid omadusi, millel on rakenduslik tähtsus. Allpool esitame neist omadustest tähtsaimad.

T e o r e e m 2.4.1. Menetlus A olgu normaalne ja täielikult β-regulaarne. Ruumis βA leiab aset NLK siis ja ainult siis, kui A rahuldab KVT 1.

T õ e s t u s. On vaja näidata, et tingimus (2.2.1) ja hinnang (2.3.1) on samaväärsed. Kasutades võrdusele (2.2.6) analoogilisi võrdusi, näeme, et hinnangust (2.3.1) järeldub tingimus (2.2.1). Näitame vastupidist. Muudame jadas $x = \{x_{\mu\nu}\}$ neid elemente $x_{\mu\nu}$, mis ei esine avaldises $\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}$ antud k,l korral, nii et $A_{\mu\nu}(x) = 0$, kui $\mu > k$ või $\nu > l$ või $\mu,\nu > k,l$. Siis tingimusest (2.2.1) saame

$$\sup_{m,n=0,1,\dots} \left| \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| \leq K \max_{0 \leq \mu,\nu \leq k,l} |A_{\mu\nu}(x)|,$$

millest on näha, et hinnang (2.3.1) kehtib. On selge, et elemendid $x_{\mu\nu}$ (kus $0 \leq \mu,\nu \leq k,l$) võivad olla mistahes.

L e m m a 2.4.1. Kui menetlus A on normaalne, täielikult β-regulaarne ja rahuldab KVT 1, siis A on β-perfektne, kusjuures β-perfektsuse definitsioonis võime iga $x \in \beta A$

puhul võtta $g_\beta = \overset{kl}{x}_\beta$ küllalt suure k, l korral.

T õ e s t u s. Lemma kehtivus ilmne. Teoreemist 2.4.1 järeldub, et βA-s on NLK. Teoreemi 2.2.1 järgi A on siis β-perfektne. Teoreemi 2.2.3 järgi ruumis βA on ka LK, s.t. iga $x \in \beta A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral $\|x - \overset{kl}{x}_\beta\| < \varepsilon$, kui k, l on küllalt suured, mis ütlebki, et β-perfektsuse definitsioonis võime sel korral võtta $g_\beta = \overset{kl}{x}_\beta$ küllalt suure k, l korral.

T e o r e e m 2.4.2. Kui normaalne menetlus A on täielikult τ-regulaarne ja rahuldab KVT 1 , siis iga $x \in \tau A$ korral

1° $\lim\limits_{mn\to\infty} A_{mn}(\overset{kl}{x}_\tau) = A(x)$ ühtlaselt k, l suhtes,

2° $\lim\limits_{m\to\infty} A_{mn}(\overset{kl}{x}_\tau) = \begin{cases} A^n(x) & \text{ühtlaselt } k \text{ suhtes, kui } n \leq l, \\ A(x) & \text{ühtlaselt } k \text{ suhtes, kui } n > l, \end{cases}$

3° $\lim\limits_{n\to\infty} A_{mn}(\overset{kl}{x}_\tau) = \begin{cases} A_m(x) & \text{ühtlaselt } l \text{ suhtes, kui } m \leq k, \\ A(x) & \text{ühtlaselt } l \text{ suhtes, kui } m > k. \end{cases}$

T õ e s t u s. Lemma 2.4.1 järgi A on τ-perfektne, järelikult iga $x \in \tau A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige g_τ, et $\|x - g_\tau\| < \varepsilon / K$, kus K on võetud tingimusest (2.2.1). Koostame jadale $y = g_\tau$ lõike $\overset{kl}{y}_\tau$, siis, kuna tingimus (2.2.1) kehtib, saame

(2.4.1) $$\left| A_{mn}(\overset{kl}{x}_\tau) - A_{mn}(\overset{kl}{y}_\tau) \right| \leq K \|x - g_\tau\| < \varepsilon.$$

Jada $\{A_{mn}(\overset{kl}{y}_\tau)\} \in \tau$ koonduvus (seetõttu, et ta on lõige) on ühtlane $m, n \to \infty$ korral k, l suhtes, $m \to \infty$ korral

k suhtes ja $n \to \infty$ korral l suhtes. (2.4.1) põhjal sama kehtib ka jada $\{A_{mn}(\overset{kl}{x}_{r})\}$ korral. Lemma 2.4.1 põhjal võib võtta $g_r = \overset{k_0 l_0}{x}_{r}$ küllalt suure k_0, l_0 korral. Kasutades võrdust (2.2.6) on kerge näidata ka piirväärtuste võrdust tingimustes 1^0–3^0.

T e o r e e m 2.4.3. Kui normaalne menetlus A on täielikult arn-regulaarne ja rahuldab KVT 2, siis iga $x \in rcrnA$ korral

$$\lim_{kl \to \infty} \left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| = 0.$$

T õ e s t u s. Olgu $x \in rcrnA$. Arvestades märkust 2.3.1 ja lemmat 2.4.1, näeme, et A on rcrn-perfektne menetlus. Seepärast iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige g_{rcrn}, et

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} (x_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{rcrn}) \right| \le K_2 \| x - g_{rcrn} \| < \varepsilon$$

Jaotades võrratuse vasaku poole kahte ossa, näeme, et osa, kus on g_{rcrn}, $k, l \to \infty$ korral läheneb nullile, mis tõestabki teoreemi.

L e m m a 2.4.2. Kui menetlus A on normaalne, täielikult γ-regulaarne ja rahuldab KVT 2, siis A on γ-perfektne, kusjuures γ-perfektsuse definitsioonis võime iga $x \in \gamma A$ puhul võtta $g_\gamma = \overset{kl}{x}_{\gamma}$ küllalt suure k, l korral.

T õ e s t u s. Teoreemidest 2.4.3 ja 2.2.4 saame, et $arnA$-s leiab aset LK ja teoreemi 2.2.1 järgi A on arn-perfektne. LK tõttu võib võtta $g_{arn} = \overset{kl}{x}_{arn}$.

Vaatleme juhtu $\gamma = an$. Olgu $x \in anA$. Kuna $\{A_\mu(x)\}$ ja $\{A^\nu(x)\}$ on sel korral nulliks koonduvad jadad, siis võime koostada jada $x' = \sum A_\mu(x) e_\mu + \sum A^\nu(x) e^\nu$. Me võime kirjutada $y = x - x' \in arnA$. Kui A on täielikult an-regulaarne ja rahuldab KVT 2, siis A on arn-perfektne ja $\|y - \overset{k_0 l_0}{y}_{arn}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ küllalt suure k_0 ja l_0 korral. Olgu

$$\overset{k_0 l_0}{x}{}' = \sum_{\mu=0}^{k_0} A_\mu(x) e_\mu + \sum_{\nu=0}^{l_0} A^\nu(x) e^\nu,$$

siis

$$\|y - \overset{k_0 l_0}{y}_{arn}\| = \|x - (\overset{k_0 l_0}{y}_{arn} + \overset{k_0 l_0}{x}{}') - (x' - \overset{k_0 l_0}{x}{}')\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kust, arvestades, et $\overset{k_0 l_0}{y}_{arn} + \overset{k_0 l_0}{x}{}' = \overset{k_0 l_0}{x}_{an}$, saame $\|x - \overset{k_0 l_0}{x}_{an}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|x' - \overset{k_0 l_0}{x}{}'\|$. Küllalt suure k_0 ja l_0 korral $\|x' - \overset{k_0 l_0}{x}{}'\| < \frac{\varepsilon}{2}$, järelikult siis $\|x - \overset{k_0 l_0}{x}_{an}\| < \varepsilon$ ja A on an-perfektne definitsiooni järgi. Analoogiliselt tõestame juhu $\gamma = a$.

T e o r e e m 2.4.4. Kui normaalne menetlus A on arn-perfektne ja rahuldab KVT 3, siis iga $x \in arnA$ korral

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \lim\limits_{mn \to \infty} \\ 2^\circ & \lim\limits_{m \to \infty} \\ 3^\circ & \lim\limits_{n \to \infty} \end{array}\right\} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}| = 0 .$$

T õ e s t u s. Iga $x \in arnA$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige $g_{arn} \in arnA$, et $\|x - g_{arn}\| < \varepsilon$. Võime kirjutada

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}| \le \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}(x_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{arn})| + \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} g_{\mu\nu}^{arn}| .$$

Võrratuse paremal poolel esimene liige hinnangu (2.3.3) tõttu on väiksem kui $\varepsilon > 0$. Teine liige tingimuste (a), (b) tõttu läheneb nullile nii $m, n \to \infty$, $m \to \infty$ kui ka $n \to \infty$ korral, mis tõestabki teoreemi.

2.5. Summeerimismenetluste sisalduvus. Keskväärtusteoreemide abil võib saada piisavaid tingimusi menetluste sisalduvuseks. Me ütleme, et menetlus C sisaldab menetlust A viisil (α, α'), kui $\alpha C \supseteq \alpha' A$ ja märgime $C_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$. Sellist sisalduvust ~~me~~ nimetame täielikult regulaarseks, kui C α-summeerib kõik $A_{\alpha'}$-summeeruvad read samaks summaks, säilitades ka piirväärtuste võrduse ridasid ja veergusid mööda kui need eksisteerivad, ja märgime, et $C_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$ täielikult regulaarselt.

Allpool kasutame järgmisi tingimusi (kus $M_1 - M_5$ on konstandid):

$$(2.5.1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu,\nu=0}^{m-1,n-1} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} \right| \le M_1, \quad \sum_{\mu=0}^{m-1} \left| \Delta_\mu \frac{c_{mn\mu n}}{a_{mn\mu n}} \right| \le M_2, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \Delta_\nu \frac{c_{mnm\nu}}{a_{mnm\nu}} \right| \le M_3, \quad \left| \frac{c_{mnmn}}{a_{mnmn}} \right| \le M_4 \quad (a_{mn\mu\nu} \ne 0); \end{cases}$$

$$(2.5.2)\quad \left| \frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} \right| \le M_5 \quad (a_{mn\mu\nu} \ne 0,\ \mu \le m,\ \nu \le n).$$

T e o r e e m 2.5.1. Menetlus A olgu normaalne ja rahuldagu KVT 1 ning menetlus C rahuldagu tingimusi (2.5.1). Kui A ja C on täielikult β-regulaarsed, siis $C_\beta \supseteq A_\beta$ täielikult regulaarselt.

T õ e s t u s. Olgu $x \in pA$. Me võime kirjutada

$$C_{mn}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu} .$$

Rakendades võrduse paremale poolele Abel-Hardy teisendust, me saame tingimuste (2.5.1) tõttu, et $|C_{mn}(x)| \leq$

$$\leq M \max_{0 \leq \mu,\nu \leq m,n} \left| \sum_{ij=0}^{\mu\nu} a_{mnij} x_{ij} \right| \text{, kus } M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 .$$

Kuna A rahuldab KVT 1, siis

$$|C_{mn}(x)| \leq K \max_{0 \leq \mu,\nu \leq m,n} |A_{\mu\nu}(x)| ,$$

kus K mingi konstant. Seega

$$|C_{mn}(x)| \leq K \, \|x\|_A .$$

Lemma 2.4.1 järgi A on β-perfektne, siis iga $x \in \beta A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige g_β, et kehtib

$$|C_{mn}(x) - C_{mn}(g_\beta)| \leq K \, \|x - g_\beta\|_A < \varepsilon .$$

Kuna $g_\beta \in pC$, siis samuti $x \in pC$. Summade võrdus ilmneb asjaolust, et lemma 2.4.1 tõttu võime võtta $g_\beta = \overset{kolo}{x}_\beta$.

T e o r e e m 2.5.2. Menetlus A olgu normaalne ja rahuldagu KVT 2 ja KVT 3. Menetlus C rahuldagu tingimust (2.5.2).

1° Kui A on täielikult a-regulaarne ja C täielikult rc-regulaarne, siis $C_{rc} \supseteq A_a$ täielikult regulaarselt;

2° Kui A on täielikult an-regulaarne ja C täielikult rcn-regulaarne, siis $C_{rcn} \supseteq A_{an}$ täielikult regulaarselt;

3° Kui A on täielikult rcrn-regulaarne, siis $C_{rcrn} \supseteq A_{arn}$.

T õ e s t u s. Lemma 2.4.2 järgi menetlus A on juhul 1° a-perfektne. Tähendab, iga $x \in aA$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline lõige $g_a \in aA$, et kehtib

$$\left| C_{mn}(x) - C_{mn}(g_a) \right| \leq \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left| \frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} \right| \left| a_{mn\mu\nu}(x_{\mu\nu} - g^a_{\mu\nu}) \right| \leq$$

$$\leq M_5 K_3 \|x - g_a\|_{|A|} < \varepsilon .$$

Edasi tõestame analoogiliselt teoreemile 2.5.1.

3. SUMMEERUVATE RIDADE KORRUTAMINE

3. 1. Probleemiseade. Alljärgnevalt me vaatleme Cauchy' korrutist. Olgu antud read $\sum u_{kl}$ ja $\sum v_{kl}$. Nendest ridadest koostame korrutisrea $\sum w_{kl}$ Cauchy reegli järgi, s.o. rea $\sum w_{kl}$, kus

$$w_{kl} = \sum_{\mu\nu=0}^{kl} v_{k-\mu\, l-\nu}\, u_{\mu\nu}. \tag{3.1.1}$$

Ridade korrutamisel võib püstitada kaks järgmist probleemi.

Probleem I. Kui $\sum u_{kl}$ on mistahes A_α-summeeruv rida ja $\sum v_{kl}$ mistahes $B_{\alpha'}$-summeeruv rida, siis milliseid tingimusi peab rahuldama menetlus C, et korrutisrida $\sum w_{kl}$ oleks $C_{\alpha''}$-summeeruv.

Probleem II. Kui $\sum u_{kl}$ on mistahes A_α-summeeruv rida, siis milliseid tingimusi peab rahuldama rida $\sum v_{kl}$, et korrutisrida $\sum w_{kl}$ oleks α'-summeeruv etteantud menetlusega C.

Kui A ja B on pööratavad, siis nende probleemide täielik lahendus sisaldab pöördmaatriksite A^{-1} ja B^{-1} elemente. Tingimuste komplitseerituse tõttu sellisel lahendusel on peamiselt teoreetiline tähtsus. Efektiivsete ja praktiliselt rakendatavate tingimuste saamiseks tuleb seada teatavaid kitsendusi menetlustele A ja B ja siin kõige otstarbekohasemaks on KVT-de rakendamine, mis koos teatavate teiste eeldustega annab tingimusi, mis sisaldavad vaid maatriksite A, B ja C elemente.

Probleemide I ja II vaatlemisel selgitame samuti välja, millal kehtivad võrdused

(3.1.2) $$C(W) = B(V)A(U),$$

(3.1.3) $$C_m(W) = B_m(V)A_m(U), \quad C^n(W) = B^n(V)A^n(U).$$

3.2. <u>Tingimused maatriksite kohta</u>. Tingimuste rohkuse tõttu me ei kirjuta neid üksikasjaliselt välja, vaid teeme kokkuleppe, et neis liikmed, mis ei oma mõtet, on võrdsed nulliga. Näiteks, kolmnurksete menetluste A ja C korral tingimuses

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left| A_{\mu\nu} \frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} \right| < M$$

oletame, et $\dfrac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} = 0$, kui $\mu > m$ või $\nu > n$ või $\mu,\nu > m,n$, ja samuti, et $a_{mn\mu\nu} \neq 0$. Seega esitatud tingimus laguneb neljaks osaks, mis olid eespool (2.5.1) all. Neid märkusi tuleb silmas pidada alljärgnevate tingimuste (3.2.2), ... , (3.2.10) ning samuti (3.7.1) ja (3.7.2) korral.

Olgu menetlused A, B normaalsed ja C kolmnurkne vastavalt maatriksitega $A = (a_{mn\mu\nu})$, $B = (b_{mn\mu\nu})$ ja $C = (c_{mn\mu\nu})$.

Defineerime suuruse $d_{mn\mu\nu}$ järgmisel viisil:

(3.2.1) $$d_{mn\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{m-\mu\ n-\nu} b_{mn\,k+\mu\,l+\nu}\, a_{mn\,m-k\,n-l}.$$

Allpool kasutame järgmisi tingimusi ($N_1, \dots, N_{12}$ on konstandid):

(3.2.2) $$\sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\,n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \left| \Delta_{ij}\left(\Delta_{\mu\nu} \mathcal{D}_{mnkl\,ij\,\mu\nu}\right)\right| \leq N_1,$$

kus

$$\mathcal{D}_{mnkl\,ij\mu\nu} = \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\,i+\mu\,j+\nu}}{d_{mn\,i+\mu\,j+\nu}} \frac{a_{mn\,m-k+\mu\,n-l+\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \frac{b_{mn\,i+k\,j+l}}{b_{m-k\,n-l\,ij}},$$

(3.2.3) $$\sum_{kl=0}^{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\mu+k\,\nu+l}}{a_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_2,$$

(3.2.4) $$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{kl} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{mnkl}\, b_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_3,$$

(3.2.5) $$\left| \frac{\Delta_{kl} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{mnkl}\, b_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_4,$$

(3.2.6) $$\left| \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_5,$$

(3.2.7) $$\left| \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_6,$$

(3.2.8) $$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_7,$$

(3.2.9) $$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leq N_8,$$

(3.2.10) $$\sum_{mn=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \bar{\Delta}_{mn}\left(\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}}\right)\right| \leq N_9,$$

(3.2.11) $$\sum_{kl=0}^{mn} \left| \frac{c_{mnmn}}{b_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}\, a_{klkl}} \right| \leq N_{10},$$

(3.2.12) $$\left| \frac{c_{mnmn}}{c_{klkl}} \right| \leq N_{11}, \quad \text{kui } k \leq m,\ l \leq n,$$

$$\sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \frac{c_{mn\,mn}}{c_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}} \right| \leq N_{12} . \tag{3.2.13}$$

Tingimusi (3.2.7), (3.2.9) ja (3.2.12) kasutame peale menetluse C ka teiste menetluste korral. Seepärast, näiteks kui on öeldud, et A rahuldagu tingimust (3.2.7), tuleb selle all mõista, et A rahuldagu tingimusele (3.2.7) analoogilist tingimust. Allpool tuleb seda silmas pidada ka teistel juhtudel.

3.3. Summeerimismenetluste translatiivsus. Olgu

$$U_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl} , \quad V_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{kl} \quad \text{ja} \quad W_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} w_{kl} ,$$

siis

$$U = \{U_{\mu\nu}\}, \; V = \{V_{\mu\nu}\} \quad \text{ja} \quad W = \{W_{\mu\nu}\}$$

on vastavalt ridade $\sum u_{kl}$, $\sum v_{kl}$ ja $\sum w_{kl}$ osasummade jadadeks. Me võime kirjutada, arvestades võrdust (3.1.1), et

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\,\nu-l}\, U_{kl} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} U_{\mu-k\,\nu-l}\, v_{kl} = \\ &= \sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{\mu-k\,\nu-l}\, V_{kl} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} V_{\mu-k\,\nu-l}\, u_{kl} . \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Me ütleme, et menetlus A on täielikult regulaarselt α-translatiivne vasakule, kui rea $\sum u_{kl}$ A_α-summeeruvusest summaks $A(U)$ järeldub samuti rea $\sum u_{k-1\,l}$ (kus $u_{-1\,l} = 0$) ja rea $\sum u_{k\,l-1}$ (kus $u_{k,-1} = 0$) A_α-summeeruvus samaks summaks $A(U)$, kusjuures säiluvad ka piirväärtused ridasid ja veergusid mööda, juhul kui need eksisteerivad.

Kui A on kolmnurkne, siis α-translatiivsuseks vasakule on vaja, et tingimusest $\{\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} u_{\mu\nu}\} \in \alpha$ järelduks $\{\sum_{\mu\nu=0}^{m-1 n} a_{mn\mu+1\nu} u_{\mu\nu}\} \in \alpha$ ja $\{\sum_{\mu\nu=0}^{m n-1} a_{mn\mu\nu+1} u_{\mu\nu}\} \in \alpha$.

Olgu A' ja A'' summeerimismenetlused maatriksitega vastavalt $A' = (a_{m+1\, n\, \mu+1\, \nu})$ ja $A'' = (a_{m\, n+1\, \mu\, \nu+1})$. Ilmne, et täielikuks regulaarseks α-translatiivsuseks vasakule on tarvilik ja piisav täielikult regulaarne sisalduvus

(3.3.2) $\qquad A'_\alpha \supseteq A_\alpha$ ja $A''_\alpha \supseteq A_\alpha$.

M ä r k u s 3.3.1. Translatiivsuse definitsioonist vahetult järeldub, et kui A on täielikult regulaarselt α-translatiivne vasakule, siis rea $\sum u_{kl}$ A_α-summeeruvusest järeldub ka rea $\sum_{kl=0}^{\infty} u_{k-p\, l-q}$ (kus $u_{-p,-q}=0$) A_α-summeeruvus samaks summaks, kusjuures säiluvad ka piirväärtused ridasid ja veergusid mööda, juhul kui eksisteerivad.

Kuna

$$\sum_{kl=0}^{mn} b_{mnkl} v_{kl} = \sum_{kl=0}^{mn} b_{mnkl} V_{kl} - \sum_{kl=1,0}^{mn} b_{mnkl} V_{k-1\,l} -$$

$$- \sum_{kl=0,1}^{mn} b_{mnkl} V_{k\,l-1} + \sum_{kl=1}^{mn} b_{mnkl} V_{k-1\,l-1},$$

siis kehtib järgmine

L e m m a 3.3.1. Menetlus B transformeerib $B_{\tau c}$-summeeruva rea $\sum v_{kl}$ elementide jada $\{v_{kl}\}$ rcrn-koonduvaks jadaks siis ja ainult siis, kui B on täielikult regulaarselt rc-translatiivne vasakule.

L e m m a 3.3.2. Kui normaalne menetlus A on täielikult rc-regulaarne, rahuldab KVT 1 ja tingimust (3.2.9) $k=1$, $l=0$ ja $k=0$, $l=1$ korral, siis menetlus A on täielikult regulaarselt rc-translatiivne vasakule.

See lemma järeldub (3.3.2) tõttu teoreemist 2.5.1.

Ridade korrutamise probleemide uurimisel on otstarbekohane klassid bcn, rcn, rcrn, an ja arn vaatluse alt välja jätta. Seepärast vaatlemegi allpool vaid klasse bc, rc ja a. Nii et edaspidi kuni töö lõpuni β, β' ja β'' tähendagu ühte klassidest bc ja rc.

3.4. <u>Lahendus probleemi I korral</u>. Töö selles osas teoreemide tõestused on analoogilised üksteisele. Seepärast me tõestame meetodi illustreerimiseks esimese teoreemi küllaldase põhjalikkusega, kuna teiste teoreemide korral esitame vaid oluliselt erinevad tõestuste kohad. Tõestusmeetod ise üldiselt seisneb selles, et me kasutame selliseid seoseid menetluste A, B ja C elementide vahel, mis lubavad kirjutada

$|c_{mn}(W)| \leq K(U,V)$ (kus $K(U,V)$ on jadadest U ja V sõltuv suurus), millest juba järeldubki sobivail eeldusil rea $\sum w_{kl}$ C_α-summeeruvus.

T e o r e e m 3.4.1. Menetlus A olgu normaalne, täielikult rc-regulaarne ja rahuldagu KVT 1. Menetlus B olgu normaalne, täielikult β-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.9) ja KVT 1. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.2).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl} \in rcA$ ja $\sum v_{kl} \in \beta B$ korral on $C_{\beta'}$-summeeruv summaks (3.1.2) siis ja ainult siis, kui C on $(rc, \beta \to \beta')$-regulaarne, kusjuures $\beta = \beta' = rc$ korral, kui C on täielikult rc-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.1.3).

T õ e s t u s. Tõestame tüüpilise juhu, kus $\beta = \beta' = rc$ Tarvilikkus ilmne. Näitame piisavust.

a) Arvestades võrdusi (3.3.1) ja (3.2.1), võime kirjutada

$$C_{mn}(W) = \sum_{ij=0}^{mn} c_{mnij} \sum_{\mu\nu=0}^{ij} v_{i-\mu\, j-\nu} u_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} u_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} v_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} u_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} u_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} V_{ij} \sum_{kl=\mu\nu}^{m-i\, n-j} b_{mn\, k+i\, l+j}\, a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} u_{\mu\nu} \sum_{kl=\mu\nu}^{mn} a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} b_{mn\, k+i\, l+j} V_{ij} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} b_{mn\, k+i\, l+j} V_{ij} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \mathcal{D}_{mnklij\mu\nu} b_{m-k\, n-l\, ij} V_{ij} a_{kl\mu\nu} U_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \Delta_{ij}(\Delta_{\mu\nu} \mathcal{D}_{mnklij\mu\nu}) B_{m-k\, n-l\, ij}(V) A_{kl\mu\nu}(U).$$

Kuna A ja B rahuldavad KVT 1 ja kehtib tingimus (3.2.2), siis

$$|C_{mn}(W)| \leq K \|V\|_B \|U\|_A \tag{3.4.1}$$

kus K on konstant.

b) Asetame seosesse (3.4.1) jada U asemele jada $U - U_{rc}^{k_0 l_0}$, kus $U_{rc}^{k_0 l_0}$ on lõige jadale U, siis

$$|C_{mn}(W')| \leq K \|V\|_B \|U - U_{rc}^{k_0 l_0}\|_A ,$$

milles $W' = \{W'_{\mu\nu}\}$ on jada, kus $W'_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\, \nu-l}(U_{kl} - U_{kl}^{k_0 l_0 rc})$. Lemma 2.4.1 tõttu viimases võrratuses võrratuse parem pool saab küllalt suurte k_0 ja l_0 korral väiksemaks mistahes ette-antud arvust $\varepsilon > 0$ ja sel korral meil on

$$|C_{mn}(W')| < \varepsilon . \tag{3.4.2}$$

c) Tõestame, et $C_{rc} \supseteq B_{rc}$ täielikult regulaarselt. Olgu jada $\mathcal{U} = e$, siis $\mathcal{W}_{\mu\nu} = \mathcal{V}_{\mu\nu}$ ja tingimusest (3.4.1) saame

$$|C_{mn}(\mathcal{V})| \leq K \, \|e\|_A \, \|\mathcal{V}\|_B .$$

Lemma 2.4.1 tõttu mistahes etteantud arvu $\varepsilon > 0$ korral on

(3.4.3) $$\left| C_{mn}(\mathcal{V}) - C_{mn}\left(\mathcal{V}^{k_0 l_0}_{rc}\right)\right| \leq K' \, \|\mathcal{V} - \mathcal{V}^{k_0 l_0}_{rc}\|_B < \varepsilon$$

(kus $K' = K\|e\|_A$), kui vaid k_0, l_0 on küllalt suured. Kuna $\mathcal{V}^{k_0 l_0}_{rc} \in rcC$ menetluse C täieliku rc-regulaarsuse tõttu, siis (3.4.3) põhjal ka $\sum v_{kl} \in rcC$. Kasutades võrdusele (2.2.6) analoogilist võrdust, on kerge näidata, et $C_{mn}(\mathcal{V}) \to B(\mathcal{V})$ kui $m,n \to \infty$, $C_{mn}(\mathcal{V}) \to B^n(\mathcal{V})$ kui $m \to \infty$, sest alati võime võtta $l_0 \geq n$, ja $C_{mn}(\mathcal{V}) \to B_m(\mathcal{V})$ kui $n \to \infty$, võttes $k_0 \geq m$. Seega $C_{rc} \supseteq B_{rc}$ täielikult regulaarselt.

d) Näitame nüüd, et võrratusest (3.4.2) järeldub rea $\sum w_{kl}$ C_{rc}-summeeruvus summaks (3.1.2) ja et kehtib ka (3.1.3). Selleks defineerime teatava kolmnurkse abisummeerimismenetluse H maatriksiga $H = (h_{mnkl})$, kus

$$h_{mnkl} = \sum_{\mu\nu=kl}^{mn} c_{mn\mu\nu} \, v_{\mu-k,\nu-l} .$$

Siis võib tingimuse (3.4.2) ümber kirjutada järgmisel kujul:

(3.4.4) $$\left| C_{mn}(\mathcal{W}) - H_{mn}\left(\mathcal{U}^{k_0 l_0}_{rc}\right)\right| < \varepsilon .$$

Näitame, et antud eeldusil menetlus H rahuldab järgmisi tingimusi:

(3.4.5) $\lim\limits_{mn\to\infty} h_{mnkl} = 0;$

(3.4.6) $\lim\limits_{m\to\infty} h_{mnkl} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} h_{mnkl} = 0;$

(3.4.7) $$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} h_{mnkl} = \begin{cases} B^n(\vartheta), & \text{kui } l=n, \\ 0, & \text{kui } l<n, \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{l=0}^{n} h_{mnkl} = \begin{cases} B_m(\vartheta), & \text{kui } k=m, \\ 0, & \text{kui } k<m; \end{cases} \end{cases}$$

(3.4.8) $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} h_{mnkl} = 0, \quad \lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{l=0}^{n} h_{mnkl} = 0;$

(3.4.9) $\lim\limits_{mn\to\infty} \sum\limits_{kl=0}^{mn} h_{mnkl} = B(\vartheta).$

Lemma 3.3.2 järgi menetlus B on täielikult regulaarselt rc-translatiivne vasakule. Märkusest 3.3.1 ja lemmast 3.3.1 järeldub, et

$$\sum_{\mu\nu=kl}^{mn} b_{mn\mu\nu} \vartheta_{\mu-k\,\nu-l} \to 0 \quad \text{kui } m,n\to\infty, \ m\to\infty \quad \text{või } n\to\infty.$$

Täielikult regulaarse sisalduvuse $C_{rc} \supseteq B_{rc}$ tõttu sama kehtib ka menetluse C korral, s.t. et kehtivad tingimused (3.4.5) ja (3.4.6).

Tingimuste (3.4.7) ja (3.4.8) kehtivuse näitamiseks kasutame võrdust

$$(3.4.10)\qquad \sum_{k=0}^{m} h_{mnkl} = \sum_{\mu\nu=0l}^{mn} c_{mn\mu\nu} \sum_{k=0}^{\mu} v_{\mu-k\,\nu-l} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\mu\nu=0l}^{mn} c_{mn\mu\nu} v_{\mu\,\nu-l} - \sum\limits_{\mu\nu=0\,l+1}^{mn} c_{mn\mu\nu} v_{\mu\,\nu-l-1}, & \text{kui } l<n, \\ \sum\limits_{\mu\nu=0l}^{mn} c_{mn\mu\nu} v_{\mu\,\nu-l}, & \text{kui } l=n. \end{cases}$$

Taolise võrduse võib kirjutada ka $\sum\limits_{l=0}^{n} h_{mnkl}$ tarvis. Arvestades menetluse B täielikku regulaarset rc-translatiivsust vasakule ja täielikult regulaarset sisalduvust $C_{rc} \supseteq B_{rc}$, on nüüd kerge näidata tingimuste (3.4.7) ja (3.4.8) kehtivust.

Ja lõpuks tingimuse (3.4.9) korral on

$$\lim_{mn\to\infty} \sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl} = \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu} v_{\mu\nu} = B(v),$$

sest $C_{rc} \supseteq B_{rc}$ on täielikult regulaarselt.

Tingimuste (3.4.5)-(3.4.9) abil on kerge näidata, et

$$\left\{ H_{mn}\left(\overset{k_0 l_0}{v_{rc}} \right) \right\} \in rc .$$

Me võime kirjutada analoogiliselt võrdusele (2.2.6), et

$$H_{mn}\left(\overset{k_0 l_0}{U_{rc}} \right) = \sum_{kl=0}^{k_0 l_0} h_{mnkl} \left[U_{kl} - A_k(U) - A^l(U) + A(U) \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0} \left[A_k(U) - A(U) \right] \sum_{l=0}^{n} h_{mnkl} +$$

$$+\sum_{l=0}^{l_0}[A^l(\mathcal{U})-A(\mathcal{U})]\sum_{k=0}^{m}h_{mnkl}+$$

$$+A(\mathcal{U})\sum_{kl=0}^{mn}h_{mnkl}=\underline{\mathrm{I}}+\underline{\mathrm{II}}+\underline{\mathrm{III}}+\underline{\mathrm{IV}}.$$

Kui $m,n\to\infty$, siis I $\to 0$ (3.4.5) tõttu,

II, III $\to 0$ (3.4.8) tõttu,

IV $\to A(\mathcal{U})B(\mathcal{V})$ (3.4.9) tõttu.

Kui $m\to\infty$ fikseeritud n korral, siis võime alati oletada, et $l_0\geq n$ ja siis

I, II $\to 0$ (3.4.6) tõttu,

$$\mathrm{III}+\mathrm{IV}=\sum_{l=0}^{l_0}A^l(\mathcal{U})\sum_{k=0}^{m}h_{mnkl}\to A^n(\mathcal{U})B^n(\mathcal{V}) \quad (3.4.7) \text{ tõttu.}$$

Analoogiliselt tõestame ka $n\to\infty$ korral, võttes $k_0\geq m$. Järelikult

$$\lim_{mn\to\infty}H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_{rc}})=A(\mathcal{U})B(\mathcal{V}),$$

$$\lim_{m\to\infty}H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_{rc}})=A^n(\mathcal{U})B^n(\mathcal{V}),\quad \text{kui } l_0\geq n,$$

$$\lim_{n\to\infty}H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_{rc}})=A_m(\mathcal{U})B_m(\mathcal{V}),\quad \text{kui } k_0\geq m.$$

Tingimuses (3.4.4) $\varepsilon\to 0$ kui $k_0,l_0\to\infty$. Seepärast viimati kirjutatud võrdused kehtivad ka $C_{mn}(\mathcal{W})$ kohta, s.t. kehtivad (3.1.2) ja (3.1.3). Sellega teoreem 3.4.1 on tõestatud.

T e o r e e m 3.4.2. Menetlus A olgu normaalne, täielikult a-regulaarne ja rahuldagu KVT 2 ning KVT 3. Menetlus B olgu normaalne, täielikult β-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.9) ja KVT 1. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.4).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl} \in aA$ ja $\sum v_{kl} \in \beta B$ korral on $C_{\beta'}$-summeeruv summaks (3.1.2) siis ja ainult siis, kui C on $(a, \beta \to \beta')$-regulaarne, kusjuures $\beta = \beta' = rc$ korral, kui C on täielikult rc-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.1.3).

T õ e s t u s. Tõestame tüüpilise juhu, kus $\beta = \beta' = rc$. Tarvilikkus ilmne. Näitame piisavust.

a) Me võime kirjutada

$$C_{mn}(W) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu}\, b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}}\, b_{m-\mu\, n-\nu\, ij} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{ij} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu}\, b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}}\, B_{m-\mu\, n-\nu\, ij}(V),$$

kust

$$|C_{mn}(W)| \le \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu}| \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \left|\Delta_{ij} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu}\, b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}}\right| |B_{m-\mu\, n-\nu\, ij}(V)|.$$

Kuna A rahuldab KVT 3, B rahuldab KVT 1 ja kehtib tingimus (3.2.4), siis

(3.4.11) $$|C_{mn}(W)| \le K \|V\|_B \|U\|_{|A|},$$

kus K on konstant.

b) Asetame võrratuse (3.4.11) jada $\mathcal{U}$ asemele jada $\mathcal{U}-\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_a}$, kus $\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_a}$ on lõige jadale $\mathcal{U}$, siis

$$|C_{mn}(\mathcal{W}')| \leq K \|\mathcal{V}\|_B \|\mathcal{U}-\overset{k_0 l_0}{\mathcal{U}_a}\|_{|A|},$$

milles $\mathcal{W}'=\{\mathcal{W}'_{\mu\nu}\}$ on jada, kus $\mathcal{W}'_{\mu\nu}=\sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\,\nu-l}(u_{kl}-\overset{k_0 l_0}{u_{kl}^{a}})$.

Lemma 2.4.2 tõttu viimases võrratuses võrratuse parem pool saab küllalt suurte k_0 ja l_0 korral väiksemaks mistahes etteantud arvust $\varepsilon>0$ ja sel korral on meil

$$|C_{mn}(\mathcal{W}')| < \varepsilon .$$

c) Edasine tõestus on analoogiline teoreemi 3.4.1 tõestuse osadele c) ja d).

T e o r e e m 3.4.3. Menetlus A olgu normaalne, täielikult a-regulaarne ja rahuldagu KVT 2 ning KVT 3. Menetlus B olgu normaalne, täielikult a-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.7) ja KVT 2 ning KVT 3. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.5).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl}\in aA$ ja $\sum v_{kl}\in aB$ korral on C_β-summeeruv summaks (3.1.2) siis ja ainult siis, kui C on ($a\to\beta$)-regulaarne, kusjuures $\beta=$ rc korral, kui C on täielikult ($a\to$ rc)-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.1.3).

T õ e s t u s. Me võime kirjutada

$$C_{mn}(\mathcal{W})=\sum_{\mu\nu=0}^{mn} \mathcal{U}_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} a_{\mu\nu}\, c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}\, \mathcal{V}_{ij},$$

kust

$$|c_{mn}(W)| \leq \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu}| \sum_{ij=0}^{m-\mu\,n-\nu} \left| \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\,i+\mu\,j+\nu}}{a_{mn\mu\nu} b_{m-\mu\,n-\nu\,ij}} \right| |b_{m-\mu\,n-\nu\,ij} V_{ij}|.$$

Tingimuse (3.2.5) tõttu

$$|c_{mn}(W)| \leq N_4 \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu}| \sum_{ij=0}^{m-\mu\,n-\nu} |b_{m-\mu\,n-\nu\,ij} V_{ij}|.$$

Kuna A ja B rahuldavad KVT 3, siis

$$|c_{mn}(W)| \leq K \|U\|_{|A|} \|V\|_{|B|},$$

kus K on konstant.

Edasine tõestus on analoogiline teoreemi 3.4.2 tõestusele alates kohast b).

M ä r k u s. Osutub, et teoreemides 3.4.1 ja 3.4.2 tingimuse (3.2.9) ning teoreemis 3.4.3 tingimuse (3.2.7) võib ära jätta. Kuid esitatud tõestuviisi korral on nad olulised.

3.5. <u>Lahendus probleemi I korral kui B on ühikmenetlus</u>. Võttes teoreemis 3.4.1 B ühikmenetluseks, näeme, et teoreemi tingimused märgatavalt lihtsustuvad. Nii tingimus (3.2.2) võtab kuju (3.2.3) ja seosed (3.1.2), (3.1.3) esituvad vastavalt kujul

(3.5.1) $$C(W) = V' A(U), \quad \text{kus} \quad V' = \lim_{\mu\nu\to\infty} V_{\mu\nu},$$

(3.5.2) $$C_m(W) = V_m A_m(U), \quad C^n(W) = V^n A^n(U),$$

aga teoreem ise on järgmine.

T e o r e e m 3.5.1. Menetlus A olgu normaalne, täielikult rc-regulaarne ja rahuldagu KVT 1. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.3).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl} \in \varkappa A$ ja β-koonduva rea $\sum v_{kl}$ korral on $C_{\beta'}$-summeeruv summaks (3.5.1) siis ja ainult siis, kui C on $(\varkappa, \beta \to \beta')$-regulaarne, kusjuures $\beta = \beta'$ = rc korral, kui C on täielikult rc-regulaarne, kehtivad seosed (3.5.2).

Ülejäänud paragrahvi 3.4. teoreemides 3.4.2 ja 3.4.3 ei saa võtta menetlust B ühikmenetluseks eelduse $b_{mn\mu\nu} \neq 0$ tõttu, mis on tingitud sellest, et $b_{mn\mu\nu}$ esineb nimetajas. Seepärast vaatleme neid juhte eraldi.

T e o r e e m 3.5.2. Menetlus A olgu normaalne, täielikult a-regulaarne ja rahuldagu KVT 1 ning KVT 2. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.6).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl} \in aA$ ja a-koonduva rea $\sum v_{kl}$ korral on C_β-summeeruv summaks (3.5.1) siis ja ainult siis, kui C on $(a \to \beta)$-regulaarne, kusjuures β = rc korral, kui C on täielikult $(a \to$ rc)-regulaarne, kehtivad seosed (3.5.2).

T õ e s t u s. Kehtib

$$|C_{mn}(W)| \le \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |v_{\mu\nu}| \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \left| \frac{c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{m-\mu\, n-\nu\, ij}} \right| |a_{m-\mu\, n-\nu\, ij}\, u_{ij}| .$$

Edasi analoogiliselt teoreemi 3.4.3 tõestusele.

On näha, et kui C rahuldab tingimust (3.2.9), siis teoreemis 3.5.2 võib võtta $C = A$. Olgu märgitud, et taoline oletus teoreemi 3.5.1 korral tooks sisse ebamõistliku tingimuse.

T e o r e e m 3.5.3. Menetlus A olgu normaalne, täielikult β-regulaarne ja rahuldagu KVT 1. Menetlus C rahuldagu tingimust (3.2.8).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ mistahes $\sum u_{kl} \in \beta A$ ja a-koonduva rea $\sum v_{kl}$ korral on $C_{\beta'}$-summeeruv summaks (3.5.1) siis ja ainult siis, kui C on $(a, \beta \to \beta')$-regulaarne, kusjuures $\beta = \beta' =$ rc korral, kui C on täielikult $(a, rc \to rc)$-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.5.2).

Teoreemi tõestus analoogiline teoreemi 3.4.2 tõestusele.

Jällegi on näha, et kui C rahuldab tingimust (3.2.7), siis teoreemis 3.5.3 võib võtta $C = A$.

3.6. Lahendus probleemi II korral. Probleemi II korral, mis oli püstitatud paragrahvis 3.1, võime saada tarvilikke ja piisavaid tingimusi korrutisrea $\sum w_{kl}$ summeeruvuseks. Selliste teoreemide tõestamisel me kasutame paragrahvis 3.4. defineeritud abimenetlust $H = (h_{mnkl})$, kus

(3.6.1) $$h_{mnkl} = \sum_{\mu\nu \geq kl}^{mn} c_{mn\mu\nu}\, v_{\mu-k\,\nu-l}\,.$$

Meetodi C tarvis võime kirjutada

$$C_{mn}(W) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu} \sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\,\nu-l} U_{kl} = \sum_{kl=0}^{mn} U_{kl} \sum_{\mu\nu=kl}^{mn} c_{mn\mu\nu} v_{\mu-k\,\nu-l}$$

ja, arvestades (3.6.1), saame

(3.6.2) $$C_{mn}(W) = \sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl} U_{kl} .$$

Selleks, et iga α-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral oleks $\{C_{mn}(W)\} \in \alpha'$, peab menetlus H rahuldama tingimusi, mis kindlustavad sellise teisenduse. Kuna rea $\sum v_{kl}$ liikmed sisalduvad menetluse H elementides, siis saamegi tarvilikud ja piisavad tingimused rea $\sum v_{kl}$ kohta. Kui menetlusele C mitte seada kitsendusi, siis üldiselt ei saa rea $\sum v_{kl}$ kohta hästi tõlgendatavaid tingimusi. KVT rakendamine siin võimaldab aga paljudest sellistest tingimusist rea $\sum v_{kl}$ elemendid elimineerida või kindlustada selliste tingimuste automaatne kehtivus, millega tulemused märgatavalt lihtsustuvad, kusjuures võime nõuda, et kehtiksid ka seosed

(3.6.3) $$C(W) = U' C(V), \quad \text{kus} \quad U' = \lim_{\mu\nu\to\infty} U_{\mu\nu};$$

(3.6.4) $$C_m(W) = U_m C_m(V), \quad C^n(W) = U^n C^n(V).$$

T e o r e e m 3.6.1. Menetlus C olgu normaalne, täielikult rc-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.9) ja KVT 1.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga α-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $C_{\mathcal{X}}$-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on $C_{\varkappa}$-summeeruv.

T õ e s t u s. Võrduse (3.6.2) põhjal menetlus H peab olema täielikult $C(\vartheta)$-multiplikatiivne teisenduse $a \longrightarrow rc$ suhtes ja lemmast 1.3.1 saame, et H peab rahuldama tingimusi (a), (b), (c'), (d), (e'), (i).

Näitame, et need tingimused on täidetud. Tingimuse (i) korral (3.2.9) ja KVT 1 põhjal saame

$$\left|\sum_{kl=ij}^{mn} h_{mnkl}\right| = \left|\sum_{\mu\nu=ij}^{mn} c_{mn\mu\nu} \vartheta_{\mu-i\,\nu-j}\right| =$$

$$= \left|\sum_{\mu\nu=0}^{m-i\,n-j} \frac{c_{mn\,\mu+i\,\nu+j}}{c_{m-i\,n-j\,\mu\nu}} c_{m-i\,n-j\,\mu\nu} \vartheta_{\mu\nu}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu\nu=0}^{m-i\,n-j} \left|\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+i\,\nu+j}}{c_{m-i\,n-j\,\mu\nu}}\right| \left|C_{m-i\,n-j\,\mu\nu}(\vartheta)\right| \leq M(\vartheta),$$

kus $M(\vartheta)$ on jadast ϑ sõltuv suurus. Järelikult tingimus (i) kehtib, kui $\sum v_{kl} \in \varkappa C$.

Tingimuse (e') korral on

$$\lim_{mn\to\infty} \sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl} = \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu} \vartheta_{\mu\nu} = C(\vartheta),$$

mille kehtivuseks on piisav rea $\sum \vartheta_{kl}$ $C_{\varkappa}$-summeeruvus.

Tingimuse (3.2.9) tõttu lemmast 3.3.2 järeldub, et menetlus C on täielikult regulaarselt rc-translatiivne vasakule ja selle tõttu menetlus H alati rahuldab tingimusi (a), (b), (c') ja (d), kui $\sum v_{kl} \in \varkappa C$. Tingimuste (c') ja (d) korral see on näha võrdusest (3.4.10). Tingimuste (a) ja (b) korral sama järeldub lemmast 3.3.1 ja märkusest 3.3.1.

Tingimustest (e') ja (c') järeldub ka rea $\sum v_{kl}$ $C_{\varkappa}$-summeeruvuse tarvilikkus.

Analoogiliselt teoreemile 3.6.1 võime tõestada järgmise teoreemi.

T e o r e e m 3.6.2. Menetlus C olgu normaalne, täielikult β-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.9) ja KVT 1.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis C_{β}-summeeruv summaks (3.6.2), kui rida $\sum v_{kl}$ on C_{β}-summeeruv.

T e o r e e m 3.6.3. Menetlus C olgu normaalne, täielikult a-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.10) ja KVT 2.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis C_{a}-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on C_{a}-summeeruv.

T õ e s t u s. Võrduse (3.6.2) põhjal menetlus H peab olema täielikult $C(\vartheta)$-multiplikatiivne teisenduse $a \longrightarrow a$ suhtes ja lemmast 1.3.1 saame, et H peab rahuldama tingimusi (a), (b), (c'), (d), (e'), (j). Võtame tingimuse (j) asemele tingimuse

(3.6.5) $$\mathrm{I} = \sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{a}_{mn} \sum_{\mu\nu=kl}^{mn} h_{mn\mu\nu} \right| \leq N_3 .$$

Kui $k = l = 0$, siis võrduse $\sum_{\mu\nu=0}^{mn} h_{mn\mu\nu} = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu} \vartheta_{\mu\nu}$ tõttu tingimusest (3.6.5) saame, et rea $\sum v_{kl}$ C_a-summeeruvus on tarvilik. Tõestame piisavuse. Olgu $\sum v_{kl} \in aC$. Me võime kirjutada

$$I = \sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l} \vartheta_{\mu\nu} \right| =$$

$$= \sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta) \right| .$$

Kasutades võrdust

$$\bar{\Delta}_{mn}(a_{mn} b_{mn}) = \bar{\Delta}_{mn} a_{mn} \cdot b_{mn} + \bar{\Delta}_n a_{m-1n} \cdot \bar{\Delta}_m b_{mn} +$$

$$+ \bar{\Delta}_m a_{mn-1} \bar{\Delta}_n b_{mn} + a_{m-1n-1} \bar{\Delta}_{mn} b_{mn}, \tag{3.6.6}$$

võime kirjutada

$$\underline{I} \leq \sum_{mn=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} \left| \bar{\Delta}_{mn} \left(\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right) \right| \left| C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta) \right| +$$

$$+ \sum_{mn=k+1\,l}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l} \left| \bar{\Delta}_n \left(\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{m-1\,n\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k-1\,n-l\,\mu\nu}} \right) \right| \left| \bar{\Delta}_m C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta) \right| +$$

$$+ \sum_{mn=k\,l+1}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l-1} \left| \bar{\Delta}_m \left(\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{m\,n-1\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l-1\,\mu\nu}} \right) \right| \left| \bar{\Delta}_n C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta) \right| +$$

$$+\sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l-1}\left|\Delta_{\mu\nu}\frac{c_{m-1\,n-1\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k-1\,n-l-1\,\mu\nu}}\right|\left|\bar{\Delta}_{mn}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta)\right|=$$

$$=\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3+\underline{I}_4.$$

Kuna menetlus C rahuldab samuti KVT 1 (vt. märkus 2.3.1), siis $\underline{I}\leq N_1(\vartheta)$.[12]

Kasutades võrdust

$$\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}}=\sum_{ij=\mu+k\,\nu+l}^{mn}\Delta_{ij}\frac{c_{ij\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,j-l\,\mu\nu}},$$

saame

$$\underline{I}_4\leq\sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l-1}\sum_{ij=\mu+k\,\nu+l}^{m-1\,n-1}|a||b|,$$

kus

$$|a|=\left|\bar{\Delta}_{ij}\left(\Delta_{\mu\nu}\frac{c_{ij\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,j-l\,\mu\nu}}\right)\right|,$$

$$|b|=\left|\bar{\Delta}_{mn}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\vartheta)\right|.$$

Muutes summeerimisjärjekorda, leiame, et

$$\underline{I}_4\leq\sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty}\sum_{ij=kl}^{m-1\,n-1}\sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,j-l}|a||b|=$$

$$=\sum_{ij=kl}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,j-l}|a|\sum_{mn=i+1\,j+1}^{\infty}|b|\leq N_4(\vartheta)$$

---

12 Suurus $N_1(\vartheta)$ nagu allpool esinevadki suurused $N_2(\vartheta)$, $N_3(\vartheta)$ ja $N_4(\vartheta)$ sõltuvad ainult jadast ϑ.

tingimuse (3.2.10) ja KVT 2 tõttu.

Kasutades võrdust

$$\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = \sum_{i=\mu+k}^{m} \bar{\Delta}_i \frac{c_{in\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,n-l\,\mu\nu}},$$

analoogiliselt nagu eespool saame, et

$$I_2 \leq \sum_{in=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,n-l} \left|\bar{\Delta}_{in}\left(\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{in\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,n-l\,\mu\nu}}\right)\right| \left|\sum_{m=i+1}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_m c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(\mathcal{V})\right|\right| \leq$$

$$\leq N_2(\mathcal{V})$$

tingimuse (3.2.10) ja KVT 2 tõttu. Samal viisil saame ka

$$I_3 \leq N_3(\mathcal{V}).$$

Seega meil on $I \leq N_1(\mathcal{V}) + N_2(\mathcal{V}) + N_3(\mathcal{V}) + N_4(\mathcal{V})$, järelikult tingimus (j) on rahuldatud. Kuna tingimus (3.6.5) kehtib iga k ja l korral ja C on täielikult a-regulaarne, siis ilmselt C on täielikult regulaarselt a-translatiivne vasakule. Nüüd ei ole enam raske näha ka tingimuste (a), (b), (c'), (d), (e') kehtivust.

Teoreem 3.6.3 on tõestatud.

3.7. <u>Summeerimismenetlused, mis rahuldavad Δ-tingimust</u>. Kui vaadelda maatriksite tarvis püstitatud tingimusi (näiteks tingimusi (3.2.2), (3.2.8), (3.2.10)), siis näeme, et nad sisaldavad diferentse (mida tähistame sümboli Δ abil), mis mõnede summeerimismenetluste korral (näiteks Voronoi--Nörlundi menetluste korral) võivad olla võrdsed nulliga. Eelnevates teoreemides selliste menetluste korral mõned tingimused osutuvad liigseiks (näiteks eeldus, et menetlus rahuldaks KVT) ja seepärast on otstarbekohane vaadelda neid juhte eraldi.

Δ-tingimuste all me mõistame järgmisi tingimusi kolmnurksete menetluste A, B ja C jaoks:

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\mu\nu}}{d_{mn\mu\nu}} = 0, \tag{3.7.1}$$

kui $\mu < m$ või $\nu < n$ või $\mu,\nu < m,n$,

kus $d_{mn\mu\nu}$ on antud valemiga (3.2.1);

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = 0, \tag{3.7.2}$$

kui $\mu < m-k$ või $\nu < n-l$ või $\mu,\nu < m-k, n-l$.

Kui menetlused A ja B rahuldavad Δ-tingimust (3.7.2) ja menetlust C saab nii valida, et kehtib Δ-tingimus (3.7.1), siis tingimus (3.2.2) esitub kujul (3.2.11) ja meil on

$$C_{mn}(W) = \sum_{kl=0}^{mn} t_{mnkl} B_{m-k\,n-l}(V) A_{kl}(U), \tag{3.7.3}$$

kus

$$t_{mnkl} = \frac{c_{mnmn}}{b_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}\, a_{klkl}}.$$

Võrduse (3.7.3) me saame nagu teoreemi 3.4.1 tõestamisel saime võrratuse (3.4.1).

Teoreemi 3.4.1 asemele võime nüüd tõestada järgmise teoreemi.

T e o r e e m 3.7.1. Menetlused A ja B rahuldagu Δ-tingimust (3.7.2) Kui menetlust C saab nii valida, et kehtib Δ-tingimus (3.7.1), siis korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga $\sum u_{kl} \in \beta A$ ja $\sum v_{kl} \in \beta' B$ korral on siis ja ainult siis $C_{\beta''}$-summeeruv summaks (3.1.2), kui

1° menetlus $T = (t_{mnkl})$ on $(\beta \to \beta'')$-regulaarne,

2° menetlus $T' = (t_{mn\,m-k\,n-l})$ on $(\beta' \to \beta'')$-regulaarne,

kusjuures $\beta = \beta' = rc$ korral tuleb veel lisatingimus

3° $\lim\limits_{mn \to \infty} t_{mn\,m-k\,l} = 0, \quad \lim\limits_{mn \to \infty} t_{mn\,k\,n-l} = 0.$

T õ e s t u s. Tõestame tüüpilise juhu $\beta = \beta' = \beta'' = rc$. Tingimuste 1°, 2° ja 3° tarvilikkust on kerge näidata jadade $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$ sobiva valikuga. Näiteks, kui võtta jada $\mathcal{V}$ nii, et $B_{kl}(\mathcal{V}) = 1$, siis (3.6.3) tõttu võrdusest (3.7.3) järeldub menetluse $T = (t_{mnkl})$ rc-regulaarsuse tarvilikkus.

Piisavuse tõestamiseks (3.7.3) tõttu on küllalt näidata, et menetlus $S = (s_{mnkl})$, kus $s_{mnkl} = t_{mnkl} B_{m-k\,n-l}(\mathcal{V})$, on $B(\mathcal{V})$-multiplikatiivne teisenduse rc $\to$ rc suhtes, s.t. menetlus S peab rahuldama tingimusi (a), (b), (c'), (d), (e') ja (h) (vt. lemma 1.3.1). Need tingimused aga on rahuldatud eelduste 1°, 2° ja 3° tõttu. Näiteks, tingimuse (d) korral

$$\lim_{mn \to \infty} \sum_{\mu=0}^{m} t_{mn\mu\nu} B_{m-\mu\,n-\nu}(\mathcal{V}) = \lim_{mn \to \infty} \sum_{\mu l=0}^{mn} q_{mn\mu l} B_{\mu l}(\mathcal{V}) = 0,$$

kus

$$q_{mn\mu l} = \begin{cases} t_{mn\,m-\mu\,\nu}, & \text{kui } l = n-\nu, \\ 0, & \text{kui } l \neq n-\nu, \end{cases}$$

sest menetlus $Q=(q_{mn\mu l})$ rahuldab tingimusi, mis kindlustavad teisenduse rc $\rightarrow$ bcn (vt. lemma 1.3.3).

Kui menetlus C rahuldab Δ-tingimust (3.7.2), siis teoreemi 3.6.1 asemel võime tõestada järgmise teoreemi.

T e o r e e m 3.7.2. Menetlus C olgu normaalne, täielikult rc-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.12) ja Δ-tingimust (3.7.2).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga α-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $C_{\varkappa}$-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on $C_{\varkappa}$-summeeruv.

T õ e s t u s. Analoogiliselt nagu teoreemi 3.6.1 tõestamisel menetlus $H=(h_{mnkl})$ võrduse (3.6.2) põhjal peab rahuldama tingimusi (a), (b), (c'), (d), (e'), (i). Näitame, et need tingimused kehtivad.

Tingimuse (i) korral Δ-tingimuse (3.7.2) tõttu on

$$\left|\sum_{kl=ij}^{mn} h_{mnkl}\right| = \left|\frac{c_{mnmn}}{c_{m-i\,n-j\,m-i\,n-j}}\right| \left|c_{m-i\,n-j}(\mathcal{V})\right|.$$

Järelikult (i) kehtib, kui $\sum v_{kl} \in \varkappa C$.

Tingimuse (e') kehtimiseks on piisav rea $\sum v_{kl}$ $C_{\varkappa}$-summeeruvus. Tingimuste (a), (b), (c'), (d) kehtimist näitame analoogiliselt nagu teoreemi 3.6.1 tõestamisel. Selleks on vaja näidata, et menetlus C on täielikult regulaarselt rc-translatiivne vasakule.

Olgu esialgu $\sum v_{kl} \in \varkappa c \varkappa_n C$. Kehtib võrdus

$$\sum_{kl=0}^{m-1\,n} c_{mn\,k+1\,l}\,v_{kl} = \frac{c_{mnmn}}{c_{m-1\,n\,m-1\,n}}\,C_{m-1\,n}(v).$$

Tingimuse (3.2.12) tõttu ilmne, et ka rida $\sum v_{k-1\,l}$ (kus $v_{-1\,l}=0$) on $C_{rc\,rn}$-summeeruv. Analoogiliselt võib näidata, et ka rida $\sum v_{k\,l-1}$ (kus $v_{k,-1}=0$) on $C_{rc\,rn}$-summeeruv. Kui $\sum v_{kl}\in rcnC$, siis jada $v'=(v-\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}C_{\mu}(v)e_{\mu}-\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}C^{\nu}(v)e^{\nu})\in rcrnC$ ja analoogiliselt saame, et

$$\sum_{kl=0}^{m-1\,n} c_{mn\,k+1\,l}\,(v_{kl}-C_k(v)-C^l(v))\to 0,$$

kui $m,n\to\infty$, $m\to\infty$ või $n\to\infty$, kust menetluse C täieliku rc-regulaarsuse tõttu saame, et $\sum v_{k-1\,l}\in rcnC$ (kus $v_{-1\,l}=0$). Analoogiliselt saame, et $\sum v_{k\,l-1}\in rcnC$ (kus $v_{k,-1}=0$), kui $\sum v_{kl}\in rcnC$. Mõlemal juhul säiluvad piirväärtused $m\to\infty$ ja $n\to\infty$ korral. Seega menetlus C on täielikult rcn-translatiivne vasakule. Edasi saame analoogiliselt, et C on koguni täielikult rc-translatiivne vasakule. Teoreem 3.7.2 on tõestatud.

Analoogiliselt teoreemile 3.7.2 võib tõestada ka järgmise teoreemi (vastab teoreemile 3.6.2).

T e o r e e m 3.7.3. Menetlus C olgu normaalne, β-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.12) ja δ-tingimust (3.7.2).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga α-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis C_{β}-summeeruv summaks (3.6.3), kui rida $\sum v_{kl}$ on C_{β}-summeeruv.

T e o r e e m 3.7.4. Menetlus C olgu normaalne, täielikult a-regulaarne, rahuldagu tingimust (3.2.13) ja Δ-tingimust (3.7.2).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis C_a-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on C_a-summeeruv.

T õ e s t u s. See teoreem vastab teoreemile 3.6.3 ja ja tõestub analoogiliselt. Jällegi menetlus H peab rahuldama tingimusi (a), (b), (c'), (d), (e'), (j). Tingimuse (j) kehtimiseks tuleb näidata, et (3.6.5) kehtib. Viimase kohta saame

$$\sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}\, v_{\mu\nu} \right| = \sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \left(\frac{c_{mnmn}}{c_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}}\, C_{m-k\,n-l}(v) \right) \right|.$$

Kasutades võrdust (3.6.6), võime viimase summa tõkestatust näidata täiesti analoogilisel viisil, nagu teoreemi 3.6.3. tõestuses hindasime suurust I.

Ülejäänud tõestuse osa samuti järeldub analoogiliselt teoreemi 3.6.3 tõestusele.

4. KORRUTAMISTEOREEMID RIESZ'I JA VORONOI-NÖRLUND'I MENETLUSTE TARVIS

4.1. Korrutamisteoreemid Riesz'i menetluse korral.

Riesz'i menetlus $(R, a_{\mu\nu})$ on maatriksmenetlus $A=(a_{mn\mu\nu})$, mille elemendid $a_{mn\mu\nu}$ on defineeritud järgmiselt:

$$a_{mn\mu\nu}=\begin{cases}\dfrac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}, & \text{kui } \mu,\nu \le m,n,\\ 0, & \text{kui } \mu>m \text{ või } \nu>n \text{ või } \mu,\nu>m,n,\end{cases}$$

kus $\{a_{\mu\nu}\}$ on antud jada ja selline, et $a_{\mu\nu}\neq 0$ ja $A_{mn}=\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu}\neq 0$. Eelduse $a_{\mu\nu}\neq 0$ tõttu $(R, a_{\mu\nu})$ on normaalne menetlus.

Olgu antud veel Riesz'i menetlused $(R, b_{\mu\nu})$ ja $(R, c_{\mu\nu})$ ning mingi kolmnurkne menetlus $C=(c_{mn\mu\nu})$. Allpool kasutame järgmisi tingimusi (kus $L_1, L_2, \ldots, L_{10}$ on konstandid):

a) Tingimused KVT kehtimiseks:

(4.1.1) $$|A_{kl}| \le L_1 |A_{mn}| \qquad (k,l \le m,n),$$

(4.1.2) $$\left(\sum_{mn=0}^{\infty}-\sum_{mn=0}^{kl}\right)\left|\bar{\Delta}_{mn}\frac{A_{kl}}{A_{mn}}\right| \le L_2,$$

(4.1.3) $$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}|a_{\mu\nu}| \le L_3 |A_{mn}|;$$

b) Tingimused probleemi I tarvis:

$$\left|\frac{B_{m-k\,n-l}}{B_{mn}}\,\frac{b_{\mu+k\,\nu+l}}{b_{\mu\nu}}\right| \le L_4\,, \tag{4.1.4}$$

$$\left|\Delta_{kl}\, C_{mn\,\mu+k\,\nu+l}\right| \le L_5 \left|\frac{a_{kl}}{A_{mn}}\,\frac{b_{\mu\nu}}{B_{m-k\,n-l}}\right|, \tag{4.1.5}$$

$$\left|C_{mn\,\mu+k\,\nu+l}\right| \le L_6 \left|\frac{a_{\mu\nu}}{A_{m-k\,n-l}}\right|; \tag{4.1.6}$$

c) Tingimused probleemi II tarvis:

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\;n-l-1} \left|\Delta_{\mu\nu}\,\frac{c_{\mu+k\,\nu+l}}{c_{\mu\nu}}\right| \le L_7 \left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right|, \\
\displaystyle\sum_{\mu=0}^{m-k-1} \left|\Delta_{\mu}\,\frac{c_{\mu+k\,n}}{c_{\mu\,n-l}}\right| \le L_8 \left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right| \\
\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-l-1} \left|\Delta_{\nu}\,\frac{c_{m\,\nu+l}}{c_{m-k\,\nu}}\right| \le L_9 \left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right|, \quad \left|\frac{C_{m-k\,n-l}}{c_{m-k\,n-l}}\,\frac{c_{mn}}{C_{mn}}\right| \le L_{10}.
\end{array}\right. \tag{4.1.7}$$

Vaatleme nüüd, millistel tingimustel Riesz'i menetlus rahuldab KVT.

L e m m a 4.1.1. Riesz'i menetlus $(R, a_{\mu\nu})$ rahuldab KVT 1 (KVT 2 või KVT 3) siis ja ainult siis, kui kehtib tingimus (4.1.1),((4.1.2), vastavalt (4.1.3)).

T õ e s t u s. Tingimuste (4.1.1), (4.1.2) ja (4.1.3) tarvilikkus järeldub vahetult vastavatest üldistest tingimustest (2.3.4), (2.3.5) ja (2.3.6). Näitame piisavust.

Kehtib võrdus ($x = \{x_{\mu\nu}\}$ mistahes jada)

$$\left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl}\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}x_{\mu\nu}\right|=\left|\frac{A_{kl}}{A_{mn}}\right|\left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl}\frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}}x_{\mu\nu}\right|.$$

Seega, kui $(R, a_{\mu\nu})$ rahuldab tingimust (4.1.1), siis ta rahuldab ka KVT 1.

Kui (4.1.2) kehtib, siis võime kirjutada

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty}-\sum_{mn=0}^{kl}\right)\left|\bar{\Delta}_{mn}\sum_{\mu\nu=0}^{kl}\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}x_{\mu\nu}\right|=\left(\sum_{mn=0}^{\infty}-\sum_{mn=0}^{kl}\right)\left|\bar{\Delta}_{mn}\frac{A_{kl}}{A_{mn}}\right|\left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl}\frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}}x_{\mu\nu}\right|\le$$

$$\le L_2\left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl}\frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}}x_{\mu\nu}\right|.$$

Seega $(R, a_{\mu\nu})$ rahuldab KVT 2.

Ja, lõpuks, kehtib võrdus

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\left|\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}x_{\mu\nu}\right|=\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\left|\bar{\Delta}_{\mu\nu}\left(\frac{A_{\mu\nu}}{A_{mn}}A_{\mu\nu}(x)\right)\right|,$$

kus käesoleval korral $A_{\mu\nu}(x)=\sum_{ij=0}^{\mu\nu}\frac{a_{ij}}{A_{\mu\nu}}x_{ij}$. Kasutades valemit (3.6.6) võime kirjutada

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\left|\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}x_{\mu\nu}\right|\le\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\left|\bar{\Delta}_{\mu\nu}\frac{A_{\mu\nu}}{A_{mn}}\right|\left|A_{\mu\nu}(x)\right|+\sum_{\mu\nu=01}^{mn}\left|\bar{\Delta}_{\mu}\frac{A_{\mu\,\nu-1}}{A_{mn}}\right|\left|\bar{\Delta}_{\nu}A_{\mu\nu}(x)\right|+$$

$$+\sum_{\mu\nu=1,0}^{mn}\left|\bar{\Delta}_{\nu}\frac{A_{\mu-1\,\nu}}{A_{mn}}\right|\left|\bar{\Delta}_{\mu}A_{\mu\nu}(x)\right|+\sum_{\mu\nu=1}^{mn}\left|\frac{A_{\mu-1\,\nu-1}}{A_{mn}}\right|\left|\bar{\Delta}_{\mu\nu}A_{\mu\nu}(x)\right|.$$

Kui kehtib tingimus (4.1.3), siis kehtib ka (4.1.1). Arvestades veel võrdust $A_{\mu\nu}(x)=\sum_{ij=0}^{\mu\nu}\bar{\Delta}_{ij}A_{ij}(x)=\sum_{i=0}^{\mu}\bar{\Delta}_{i}A_{i\nu}(x)\;=$

$= \sum_{j=0}^{\nu} \bar{\Delta}_j A_{\mu j}(x)$, ei ole raske näidata, et viimases võrratuses parem pool on $\leq L' \sum_{\mu\nu=0}^{m_n} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|$, kus L' on konstant. Seega $(R, q_{\mu\nu})$ rahuldab KVT 3. Lemma 4.1.1 on tõestatud.

Riesz'i menetluse $(R, q_{\mu\nu})$ α-regulaarsuseks ja täielikuks α-regulaarsuseks on tarvilikud ja piisavad Lemma 1.3.2 tingimused selle erinevusega, et tingimus (e) on nüüd alati rahuldatud ja osa tingimusi võtab teise kuju. Nii tingimus (h) esitub kujul (4.1.3), (i) kujul (4.1.1) ja (j) kujul (4.1.2). Arvestades Lemmat 4.1.1, näeme, et kui $(R, q_{\mu\nu})$ on β-regulaarne (või täielikult β-regulaarne), siis ta rahuldab KVT 3 ja siit ka KVT 1; kui $(R, q_{\mu\nu})$ on a-regulaarne (või täielikult a-regulaarne), siis ta rahuldab KVT 2 ja KVT 1; ja kui $(R, q_{\mu\nu})$ on $(a\to rc)$- või $(a\to bc)$-regulaarne, siis ta rahuldab KVT 1.

Allpool kasutame seoseid (3.1.2), (3.1.3), (3.5.1) ja (3.5.2), kus menetluste A ja B all tuleb mõista Riesz'i menetlust. Samuti kasutame seoseid (3.6.3) ja (3.6.4), kus C all tuleb mõista Riesz'i menetlust $(R, c_{\mu\nu})$.

T e o r e e m 4.1.1. Menetlus $(R, q_{\mu\nu})$ olgu täielikult a-regulaarne ja rahuldagu tingimust (4.1.3). Menetlus $(R, b_{\mu\nu})$ olgu täielikult a-regulaarne, rahuldagu tingimust (4.1.4) ja (4.1.3). Menetlus C rahuldagu tingimust (4.1.5).

Korrutisrida $\sum w_{k\ell}$ mistahes $\sum u_{k\ell} \in a(R, a_{\mu\nu})$ ja $\sum v_{k\ell} \in a(R, b_{\mu\nu})$ korral on C_β-summeeruv summaks (3.1.2) siis ja ainult siis, kui C on $(a \to \beta)$-regulaarne, kusjuures $\beta = rc$ korral, kui C on täielikult $(a \to rc)$-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.1.3).

See teoreem järeldub teoreemist 3.4.3, kus tingimus (3.2.7) vastab tingimusele (4.1.4), (3.2.5) tingimusele (4.1.5). Ülejäänud tingimuste kehtivus järeldub lemmast 4.1.1.

T e o r e e m 4.1.2. Menetlus $(R, a_{\mu\nu})$ olgu täielikult a-regulaarne. Menetlus C rahuldagu tingimust (4.1.6).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga $\sum u_{kl} \in a(R, a_{\mu\nu})$ ja a-koonduva rea $\sum v_{kl}$ korral on C_β-summeeruv summaks (3.5.1) siis ja ainult siis, kui C on $(a \to \beta)$-regulaarne, kusjuures $\beta = rc$ korral, kui C on täielikult $(a \to rc)$-regulaarne, kehtivad ka seosed (3.5.2).

See teoreem järeldub teoreemist 3.5.2, kusjuures tingimus (3.2.6) vastab tingimusele (4.1.6).

T e o r e e m 4.1.3. Menetlus $(R, c_{\mu\nu})$ olgu täielikult rc-regulaarne ja rahuldagu tingimust (4.1.7).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $(R, c_{\mu\nu})_{rc}$-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on $(R, c_{\mu\nu})_{rc}$-summeeruv.

See teoreem järeldub teoreemist 3.6.1.

T e o r e e m 4.1.4. Menetlus $(R, c_{\mu\nu})$ olgu täielikult β-regulaarne ja rahuldagu tingimust (4.1.7).

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $(R, c_{\mu\nu})_\beta$-summeeruv summaks (3.6.3), kui rida $\sum v_{kl}$ on $(R, c_{\mu\nu})_\beta$-summeeruv.

See teoreem järeldub teoreemist 3.6.2.

Olgu lõpuks märgitud, et Riesz'i menetlus $(R, a_{\mu\nu})$, kus $a_{\mu\nu} \neq$ const, ei rahulda paragrahvi 3.7 Δ-tingimusi. Seepärast sealsed teoreemid Riesz'i menetluse korral ei tarvitse kehtida.

4.2. Korrutamisteoreemid Voronoi-Nörlund'i menetluse korral. Voronoi-Nörlund'i menetlus $(WN, a_{\mu\nu})$ on maatriksmenetlus $A = (a_{mn\mu\nu})$, mille elemendid $a_{mn\mu\nu}$ on defineeritud järgmiselt:

$$a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} \dfrac{a_{m-\mu\, n-\nu}}{A_{mn}}, & \text{kui } \mu, \nu \leq m, n, \\ 0, & \text{kui } \mu > m \text{ või } \nu > n \text{ või } \mu, \nu > m, n, \end{cases}$$

kus jada $\{a_{\mu\nu}\}$ on antud jada ja selline, et $A_{mn} = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu} \neq 0$. Viimasest järeldub, et $(WN, a_{\mu\nu})$ on normaalne menetlus.

Lemma 1.3.2 abil ei ole raske leida tingimused selleks, et $(WN, a_{\mu\nu})$ oleks α-regulaarne või täielikult α-regulaarne. Tingimus (e) on alati täidetud.

Keskväärtusteoreeme rahuldab $(WN, a_{\mu\nu})$ väga kitsastel tingimustel ja need võib saada lemmade 2.3.1, 2.3.2 ja 2.3.3 abil. Järelikult ka paragrahvides 3.4, 3.5 ja 3.6 antud korrutamisteoreemid kehtivad sel korral väga kitsastel tingimustel. Osutub aga, et $(WN, a_{\mu\nu})$ rahuldab Δ-tingimust (3.7.2). Kui meil on veel teine Voronoi-Nörlund'i menetlus $(WN, b_{\mu\nu})$, siis Voronoi-Nörlund'i menetlus $(WN, c_{\mu\nu})$, kus $c_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} b_{\mu-k\,\nu-l} A_{kl}$ rahuldab ka Δ-tingimust (3.7.1). Seepärast paragrahvi 3.7 teoreemid kehtivad Voronoi-Nörlund'i menetluste korral.

Käesolevas paragrahvis kasutame eespool olnud seoseid (3.1.2), (3.6.3) ja (3.6.4), kus menetlused A, B ja C tähendagu nüüd Voronoi-Nörlund'i menetlusi.

T e o r e e m 4.2.1. Korrutisrida $\sum w_{kl}$ on iga $\sum u_{kl} \in \beta(WN, a_{\mu\nu})$ ja $\sum v_{kl} \in \beta'(WN, b_{\mu\nu})$ korral siis ja ainult siis $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta''}$-summeeruv summaks (3.1.2), kui

1° $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta''} \supseteq (WN, a_{\mu\nu})_{\beta}$ regulaarselt,

2° $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta''} \supseteq (WN, b_{\mu\nu})_{\beta'}$ regulaarselt,

kusjuures $\beta = \beta' = \gamma c$ korral tuleb veel lisatingimus

$$3° \quad \lim_{mn\to\infty} \frac{A_{m-k\,l}\, B_{k\,n-l}}{C_{mn}} = \lim_{mn\to\infty} \frac{A_{k\,n-l}\, B_{m-k\,l}}{C_{mn}} = 0.$$

See teoreem järeldub vahetult teoreemist 3.7.1. On kergesti näha, et teoreemi 4.2.1 tingimused 1° ja 2° on samaväärsed vastavalt teoreemi 3.7.1 tingimustega 1° ja 2°. Teoreemist 4.2.1 veidi üldisema teoreemi on tõestanud I. Kull [12], kasutades teist meetodit.

Tähendagu edaspidi (nimelt teoreemides 4.2.2 ja 4.2.3) $(WN, c_{\mu\nu})$ mistahes Voronoi-Nörlund'i menetlust.

T e o r e e m 4.2.2. Menetlus $(WN, c_{\mu\nu})$ olgu täielikult rc-regulaarne.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $(WN, c_{\mu\nu})_{rc}$-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on $(WN, c_{\mu\nu})_{rc}$-summeeruv.

See teoreem järeldub teoreemist 3.7.2, kus tingimus (3.2.12), mis nüüd võtab kuju $|c_{kl}| \leq N_{11} |c_{mn}|$ $(k, l \leq m, n)$, on täidetud $(WN, c_{\mu\nu})$ täieliku rc-regulaarsuse tõttu (nimelt tingimuse (h) tõttu).

T e o r e e m 4.2.3. Menetlus $(WN, c_{\mu\nu})$ olgu β-regulaarne.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta}$-summeeruv summaks (3.6.3), kui rida $\sum v_{kl}$ on $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta}$-summeeruv.

See teoreem järeldub vahetult teoreemist 3.7.3.

T e o r e e m 4.2.4. Menetlus $(WN, c_{\mu\nu})$ olgu täielikult a-regulaarne.

Korrutisrida $\sum w_{kl}$ iga a-koonduva rea $\sum u_{kl}$ korral on siis ja ainult siis $(WN, c_{\mu\nu})_{a}$-summeeruv summaks (3.6.3) koos (3.6.4) kehtimisega, kui rida $\sum v_{kl}$ on $(WN, c_{\mu\nu})_{a}$-summeeruv.

See teoreem järeldub teoreemist 3.7.4, kus tingimus (3.2.13), mis nüüd võtab kuju

$$\sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \frac{c_{m-k\,n-l}}{c_{mn}} \right| \leq N_{12},$$

on täidetud $(WN, c_{\mu\nu})$ täieliku a-regulaarsuse tõttu.

Tsiteeritud kirjandus

[1] Banach, S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa (1932).

[2] Bosanquet, L.S. A mean value theorem. J. London Math. Soc., 16 (1941), 146-148.

[3] Hamilton, H.J. Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 2 (1936), 29-60.

[4] Hill, J.D. On perfect summability of double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 327-331.

[5] Hill, J.D.-Hamilton, H.J. Operation theory and multiple sequence transformations. Duke Math. J., 8 (1941), 154-162.

[6] Jurkat, W. Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter. Math. Z., 55 (1951), 8-12.

[7] Jurkat, W. Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Math. Z., 57 (1953), 353-394.

[8] Jurkat, W. - Peyerimhoff, A. Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 55 (1951), 92-108.

[9] Jurkat, W. - Peyerimhoff, A. Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z., 56 (1952), 152-178.

[10] Кангро, Г. - О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуского Гос. Университета, 46 (1957), 3-42.

[11] Knopp, K. - Über Folgenräume und Limitierungsverfahren. Ein Bericht über Tübinger Ergebnisse. Rendiconti mat. e applic., Serie V, 11 (1952), 269-298.

[12] Кулль, И. - Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуского Гос. Университета, 62 (1958).

[13] MacPhail, M.S.- On some recent developments in the theory of series. Canadian J. Math., 6 (1954), 405-409.

[14] Mears, F.M. - Transformations of double sequences. American J. Math., 70 (1948), 804-832.

[15] Peyerimhoff, A. - Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 55 (1951), 23-54.

[16] Peyerimhoff, A. - Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 57 (1953), 265-290.

[17] Реймерс, Э. - Теоремы о среднем значении для двойных рядов. Уч. зап. Тартуского Гос. Университета, 62 (1958).

[18] Riesz, M. - Sur un théorème de la moyenne, et ses applications. Acta Szeged, 3 (1923), 114-126.

[19] Wilansky, A. -Summability: the inset, replaceable matrices, the basis in summability space. Duke Math. J., 19 (1952), 647-660.