Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Indrek Pertman

Topoloogiline andmeanalüüs püsivusmoodulite abil

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Ülo Reimaa
Valdis Laan

Tartu 2020

Topoloogiline andmeanalüüs püsivusmoodulite abil

Bakalaureusetöö
Indrek Pertman

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös kirjeldatakse mõningaid topoloogilises andmeanalüüsis levinud meetodeid ja põhimõisteid. Esmalt tuletatakse meelde vajalikke algebralisi aluseid. Seejärel defineeritakse simplitsiaalsed kompleksid ja nende homoloogia, eesmärgiga uurida Vietoris-Ripsi komplekside filtratsioone. Peamine tööriist selleks on püsivusmoodulite normaalkuju teoreem, mis on esitatud koos tõestusega. Lõpuks tuuakse näide põhiteoreemi rakendamisest.
CERCS teaduseriala: P150 Geomeetria, algebraline topoloogia.
Märksõnad: algebraline topoloogia, homoloogiateooria.

Topological data analysis using persistence modules

Bachelor's thesis
Indrek Pertman

Abstract. In this Bachelor's thesis we describe some common tools and concepts used in topological data analysis. First we remind the reader of necessary algebraic definitions and results. Then we define simplicial complexes and their homology, with the goal of studying filtrations of Vietoris-Rips complexes. The main tool for that is the normal form theorem for persistence modules, which is presented along with a proof. Finally we present an example how to apply the main theorem.
CERCS research specialisation: P150 Geometry, algebraic topology.
Keywords: algebraic topology, homology theory, .

Sisukord

Sissejuhatus

Homoloogia sai alguse 19.ndal sajandil, kui leiti, et topoloogilisi ruume saab eristada nende aukude poolest algebraliste meetoditega. Viimasel ajal on esile tõusnud püsivushomoloogia, millega saab analüüsida topoloogiliste ruumide struktuuri vaadates nende lõplikke alamruume. Aastal 1994 tõestas S. Barannikov antud töö peatulemuse – püsivusmoodulite normaalkuju teoreemi.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on anda lühike ülevaade mõningatest topoloogilises andmeanalüüsis levinud meetoditest ning põhimõistetest.

Antud töö on jaotatud kuueks peatükiks. Esimeses peatükis tutvume mõne algebralise mõiste ja tulemusega, mida läheb edasise töö lugemise käigus vaja.

Teises peatükis anname ülevaate simplitsiaalsest homoloogiast, tööriistast, millega saab tuvastada topoloogiliste ruumide erinevate mõõtmetega auke. Selleks tutvume abstraktse simplitsiaalse kompleksi mõistega, ning defineerime Vietoris-Ripsi kompleksi, mis on oma nime saanud austria matemaatiku Leopold Vietoris ja Lätis sündinud matemaatiku Eliyahu Rips järgi.

Kolmandas peatükis toome sisse püsivusmooduli definitsiooni, toome paar näidet ning seostame püsivusmoodulid Vietoris-Ripsi kompleksidega.

Neljandas peatükis uurime täpsemalt püsivusmoodulite spektraalpunkte ning tõestame mitut nendega seotut tulemust.

Viiendas peatükis tõestame ära püsivusmoodulite normaalkuju teoreemi, mis lubab meil esitada igat püsivusmoodulit mitme lihtsa püsivusmooduli otsesummana.

Kuuendas peatükis toome väikese näite triipkoodist ja püsivusdiagrammist ning räägime natuke rakendustest.

1 Algebralised alused

Siin töös tähistame $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, kui hulk A on B pärisalamhulk, siis kirjutame $A \subset B$ ning kui A on B alamhulk, siis kirjutame $A \subseteq B$.

Esitame mõned vajalikud algebra põhimõisted ning tulemused, mis suures osas põhinevad kursuse Algebra II loengukonspektile [1].

Definitsioon 1.1. *Ringiks* nimetatakse hulka R, kus on defineeritud kaks kahekohalist algebralist tehet: liitmine $(+)$ ja korrutamine $(\cdot)$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

R1. R on liitmise suhtes Abeli rühm;

R2. R on korrutamise suhtes monoid;

R3. $\forall a, b, c \in R\colon a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

R4. $\forall a, b, c \in R\colon (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Kommutatiivse ringi puhul kehtib lisaks tingimus

R5. $\forall a, b \in R$: $a \cdot b = b \cdot a$.

Siin töös vaatame ainult kommutatiivseid ringe.

Definitsioon 1.2. *Korpuseks* nimetakse vähemalt kahe-elemendilist kommutatiivset ringi, kus iga nullelemendist erinev element on pööratav.

Näide 1.1. Mõned näited ringidest.

1. Ratsionaalarvude korpus $\mathbb{Q}$ ja reaalarvude $\mathbb{R}$.
2. Täisarvude ring $\mathbb{Z}$.
3. Lõplikud jäärgiklassiringid $\mathbb{Z}_n$ naturaalarvu n korral on ringid, ning kui n on algarv, siis $\mathbb{Z}_n$ on korpus.

Definitsioon 1.3. *Vasakpoolseks mooduliks* üle ringi R ehk vasakpoolseks R–mooduliks nimetatakse Abeli rühma $(A; +)$, kui iga elemendi $r \in R$ jaoks on defineeritud ühekohaline tehe

$$A \to A, \quad a \mapsto ra$$

nii et mistahes $a, b \in A$ ja $r, s \in R$ korral

1. $(r + s)a = ra + sa$;
2. $r(a + b) = ra + rb$;
3. $(rs)a = r(sa)$;
4. $1a = a$.

Vaatame siin töös ainult vasakpoolseid mooduleid ja seetõttu kutsume vasakpoolseid mooduleid lihtsalt mooduliteks.

Näide 1.2. Mõned näited moodulitest.

1. Nullmoodul $\mathbf{0}$, mille ainus element on 0.
2. Iga vektorruum on moodul.
3. Iga ring on moodul üle iseenda.

Definitsioon 1.4. R-moodulit B nimetatakse R-mooduli A *alammooduliks* kui B on A alamrühm ning

$$\forall r \in R, a \in B : ra \in B.$$

Definitsioon 1.5. Olgu A ja B R-moodulid. Siis kujutus $\varphi\colon A \to B$ on moodulite *homomorfism* parajasti siis, kui

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b); \qquad \varphi(ra) = r\varphi(a)$$

iga $a, b \in A$, $r \in R$ korral.

Näide 1.3. Iga kahe R-mooduli A, B vahel eksisteerib nullkujutus

$$0\colon A \to B, \quad x \mapsto 0,$$

mis on moodulite homomorfism.

Definitsioon 1.6. R-mooduli A *baasiks* nimetatakse hulka $X \subseteq A$ nii, et kehtib

1. X on A moodustajate süsteem, s.t. iga element $a \in A$ on esitatav kujul

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \quad n \in \mathbb{N}, r_i \in R,\ x_i \in X,$$

2. elemendid $x_i \in X$ on lineaarselt sõltumatud, s.t. et kehtib implikatsioon

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0 \Rightarrow r_i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definitsioon 1.7. Kui R-moodulil A on baas, siis selle mooduli *astakuks* nimetame selle baasi võimsust.

Märkus 1. Igal baasil on sama võimsus, seega astak on üheselt määratud.

Lemma 1.1. *Olgu A ja B R-moodulid, X mooduli A moodustajate süsteem ning $\varphi\colon A \to B$ moodulite homomorfism, siis $\varphi(X)$ on alammooduli $\varphi(A)$ moodustajate süsteem.*

Tõestus. Olgu $u \in \varphi(A)$, siis leidub $v \in A$ nii, et $\varphi(v) = u$. Element v esitub kujul

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \quad r_i \in R,\ x_i \in X,$$

tänu sellele, et φ on homomorfism, kehtib

$$u = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(x_i).$$

Seega suvaline element $\varphi(A)$ element u esitub $\varphi(X)$ elementide lineaarkombinatsioonina. Seega $\varphi(X)$ on $\varphi(A)$ moodustajate süsteem. $\square$

Kui on antud hulk X, siis saame konstrueerida mooduli A nii, et hulk X on mooduli A baas.

Definitsioon 1.8. *Vabaks R-mooduliks hulgal X* nimetatakse moodulit $R^{(X)}$, mis koosneb formaalsetest summadest

$$\sum_{x\in X} r_x x, \quad r_x \in R, \ \mathsf{card}\{x \in X : r_x \neq 0\} < \infty.$$

Formaalsete summade liitmine ning skalaariga toimub komponenthaaval ehk

$$\sum_{x\in X} r_x x + \sum_{x\in X} r'_x x = \sum_{x\in X} (r_x + r'_x)x,$$
$$s\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} (s \cdot r_x)x, \ s \in R.$$

Hulga X elementi x' võime samastada formaalse summaga $\sum_{x\in X} r_x x$, kus x' kordaja $r_{x'} = 1$ ning muud kordajad on võrdsed nulliga. Seega saame hulka X vaadelda hulga $R^{(X)}$ alamhulgana ehk edaspidi kirjutame $X \subseteq R^{(X)}$.

Täpsustame, et formaalne summa üle tühja hulga on 0 ning vaba R-moodul üle tühja hulga X on nullmoodul $\mathbf{0}$.

Lause 1.1. *(Vaba mooduli universaalomadus) Olgu A suvaline R-moodul, siis suvalise funktsiooni $f \colon X \to A$ korral leidub parajasti üks võimalik R-moodulite homomorfism $\hat{f} \colon R^{(X)} \to A$, mis laiendab kujutust f, ehk $\hat{f}|_X = f$. Täpsemalt*

$$\hat{f}\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} r_x f(x).$$

Tõestus. Formaalsete summade liitmise ja skalaariga korrutamise definitsioonide tõttu on lihtne näha, et $\hat{f}$ on moodulite homomorfism ning et f on $\hat{f}$ ahend. Sellega on olemasolu näidatud, näitame nüüd, et $\hat{f}$ on ainus selline homomorfism, mis laiendab kujutust f.

Olgu $\varphi \colon R^{(X)} \to A$ moodulite homomorfism, mis laiendab kujutust f. Näitame, et siis $\varphi = \hat{f}$. Olgu $\sum_{x\in X} r_x x \in R^{(X)}$, kasutades seda, et φ on homomorfism, saame, et

$$\varphi\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} \varphi(r_x x) = \sum_{x\in X} r_x \varphi(x) = \sum_{x\in X} r_x f(x) = \hat{f}\left(\sum_{x\in X} r_x x\right).$$

□

Vaba mooduli universaalomadusest saame, et moodulite morfismi $R^{(X)} \to A$ defineerimiseks on piisav, kui kirjeldada, kuidas see käitub hulga X (ehk baasi) elementidel. Mujal saame kujutuse defineerida lineaarkombinatsioonide kaudu.

Olgu B R-mooduli A alammoodul. Defineerime iga $a, b \in A$ jaoks seose

$$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in B.$$

See seos on ekvivalentsiseos hulgal A ja annab meile klassijaotuse.

Definitsioon 1.9. R-mooduli A *faktormooduliks* alammooduli B järgi nimetatakse moodulit, mille elementideks on hulgad $\{a+B\colon a\in A\}$, kus hulk

$$a+B=\{a+b\colon\ b\in B\}=\{c\colon c-a\in B\},$$

ning kus kehtib

$$\forall a_1,a_2\in A,\forall r,s\in R\colon r(a_1+B)+s(a_2+B)=(ra_1+sa_2)+B\,.$$

Tema tähistuseks on A/B.

Näide 1.4. Täisarvude ring $\mathbb{Z}$ üle iseenda on moodul. Hulk $n\mathbb{Z}=\{n\cdot k\colon k\in\mathbb{Z}\}$, $n\in\mathbb{N}$ on $\mathbb{Z}$ alammoodul ning $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{n-1}\}$ on faktormoodul üle $\mathbb{Z}$. Hulkade mõttes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_n$, aga kirjaviisi $\mathbb{Z}_n$ kasutamisel suhtume sellesse kui ringi (jäägiklassiring).

Lause 1.2. *Olgu antud R-moodulid A ja C ning R-moodulite homomorfism*

$$f\colon A\to C\,.$$

Kui B on mooduli A alammoodul, siis f indutseerib R-moodulite homomorfismi

$$\hat{f}\colon A/B\to C\,,\quad a+B\mapsto f(a)$$

siis, kui $f(x)=0$ iga $x\in B$ korral. Tekib kommuteeruv diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A/B \arrow[r, dashed, "\hat{f}"'] & C, \end{tikzcd}$$

kus ψ on R-mooduli A loomulik projektsioon faktormoodulile A/B.

Tõestus. Tähistame $\overline{x}=\psi(x)=x+B$, siis

$$\overline{x}=\overline{y}\Leftrightarrow\psi(x)=\psi(y).$$

Defineerime $\hat{f}(\overline{x})=f(x)$. Definitsiooni korrektsuseks näitame, et kui $\overline{x}=\overline{y}$, siis $\hat{f}(\overline{x})=\hat{f}(\overline{y})$. Kui $\overline{x}=\overline{y}$, siis $(x-y)\in B$. Ning sellest nüüd saame, et

$$0=f(x-y)=f(x)-f(y)=\hat{f}(\overline{x})-\hat{f}(\overline{y})$$

ehk $0=\hat{f}(\overline{x})-\hat{f}(\overline{y})$, millest $\hat{f}(\overline{x})=\hat{f}(\overline{y})$.

Fikseerime kaks mooduli A elementi a_1 ja a_2 ning $r\in R$. Sel juhul näeme, et $\hat{f}$ on homomorfism, sest

$$\begin{aligned}\hat{f}(\overline{r(a_1+a_2)})&=f(r(a_1+a_2))=rf(a_1+a_2)=r(f(a_1)+f(a_2))\\&=rf(a_1)+rf(a_2)=r\hat{f}(\overline{a_1})+r\hat{f}(\overline{a_2}).\end{aligned}$$

$\square$

2 Simplitsiaalne homoloogia

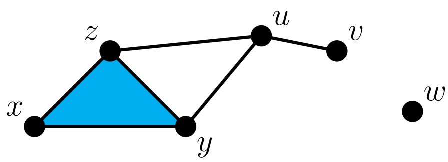
Siin peatükis tutvume simplitsiaalse homoloogia mõistega, mille abil saame tuvastada topoloogilise ruumi n-mõõtmelisi auke. Peatüki lõpus defineerime Vietoris-Ripsi kompleksi, mille hiljem homoloogiat rakendame.

Geomeetrilised simpleksid on sisuliselt üldistatud kolmnurgad. Ütleme, et 0-simpleks on punkt, 1-simpleks on lõik, 2-simpleks on kolmnurk, 3-simpleks on tetraeeder jne. Geomeetriliste simpleksitega me antud töös väga ei tegele, seega järgmine definitsioon on eelkõige illustratiivsel eesmärgil.

Definitsioon 2.1. *Geomeetriliseks simplitsiaalseks kompleksiks* X (ruumis $\mathbb{R}^n$) nimetatakse simpleksite hulka, kus

1. iga simpleksi $\sigma \in X$ iga tahk τ on kompleksi X simpleks,
2. iga kahe simpleksi $\sigma_1, \sigma_2 \in X$ korral, kui simpleksitel σ_1, σ_2 on mittetühi ühisosa, siis see ühisosa on kummagi simpleksi üks tahk.

Näide 2.1. Näide geomeetrilisest simplitsiaalsest kompleksist.



See simplitsiaalne kompleks koosneb kuuest tipust ehk 0-simpleksist, kuuest lõigust ehk 1-simpleksist ning ühest kolmnurgast ehk 2-simpleksist.

Tihti meid ei huvita geomeetriliste simplitsiaalsete komplekside täpne paigutus eukleidilises ruumis vaid hoolime neist homöomorfismi täpsuseni. Selleks piisab, kui teada millised tipud simplitsiaalses kompleksis koos moodustavad n-simpleksi, siis me teame, et iga alamhulk nendest tippudest võimsusega $k+1$ moodustavad k-simpleksi, kus $0 \leq k \leq n$. Seega saame esitada geomeetrilisi simplitsiaalseid komplekse puht kombinatoorsel kujul.

Definitsioon 2.2. Olgu S mingi lõplik hulk. *Abstraktseks simplitsiaalseks kompleksiks* nimetatakse hulga S alamhulkade hulka X, kus

1. kui $\sigma' \subseteq \sigma \in X$ ja $\sigma' \neq \emptyset$, siis $\sigma' \in X$,
2. kui $x \in S$, siis $\{x\} \in X$.

Hulka S nimetatakse selle simplitsiaalkompleksi *tippude hulgaks*. Tähistame sümboliga X^n hulka, mis koosneb hulga X elementidest, mille võimsus on $n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tihti hulgad S ja X^0 samastatakse. Hulga X^n elemente nimetatakse *n-simpleksiteks.*

On ilmne, et iga geomeetrilisele simpleksile vastab abstraktne simplitsiaalne kompleks. On teada, et igale abstraktsele simplitsiaalsele kompleksile vastab geomeetriline simplitsiaalne kompleks homöomorfismi täpsuseni [2].

Näide 2.2. Olgu hulk $S = \{x, y, z, u, v, w\}$. Mõni näide abstraktsetest simplitsiaalsetest kompleksidest sellel hulgal:

1. $X = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{u\}, \{v\}, \{w\}\}$;
2. $X' = X \cup \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{u, v\}\}$;
3. $X'' = X' \cup \{\{x, z\}, \{x, y, z\}, \{y, u\}, \{z, u\}\}$.

Abstraktse simplitsiaalse kompleksi X'' ühte võimalikku geomeetrilist esitust on näha näitest 2.1.

Definitsioon 2.3. Simplitsiaalset kompleksi Y nimetatakse simplitsiaalse kompleksi X *alamkompleksiks*, kui $Y \subseteq X$.

Näide 2.3. Eelmise näite põhjal $X \subseteq X' \subseteq X''$.

Definitsioon 2.4. Simplitsiaalset kompleksi X nimetatakse *sidusaks*, kui teda ei saa esitada kahe (või enama) mittelõikuva mittetühja alamkompleksi ühendina. Simplitsiaalset kompleksi nimetatakse *joonsidusaks* (path-connected), kui iga üksteisest erineva $\sigma, \sigma' \in X^0$ korral leidub kompleksi X 1-simpleksitest koosnev ahel, mis neid ühendab. Teisisõnu leiduvad $\sigma_i \in X^0,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ on X^1 element ning $\{\sigma, \sigma_1\}$ on X^1 element ja samuti $\{\sigma_n, \sigma'\}$ on X^1 element.

Mainime, et simplitsiaalse kompleksi sidususe ja joonsidususe mõisted on omavahel samaväärsed [3].

Definitsioon 2.5. Simplitsiaalse kompleksi X *sidususkomponentideks* nimetatakse maksimaalseid kompleksi X sidusaid alamkomplekse Y.

Meie järgnev lähenemisviis on tehtud raamatu [4] eeskujul.

Definitsioon 2.6. Olgu X simplitsiaalne kompleks ning R mingi ring. Vaba R-moodulit $C_n(X)$ hulgal X^n nimetatakse kompleksi X *n-ahelate mooduliks.* See koosneb formaalsetest summadest ehk *n-ahelatest*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \sigma_i,$$

kus $c_i \in R$ ja σ_i on kompleksi X n-simpleks. Lisaks tähistame $C_{-1}(X) = \mathbf{0}$.

Fikseerime simplitsiaalse kompleksi X tippudel mingi lineaarse järjestuse ning siit alates kirjaviisis $\{v_0, \ldots, v_n\}$ on tipud järjestatud kasvavas järjekorras, kus iga i korral v_i on X tipp. Selline järjestus annab vaikimisi simpleksitele mingi „orientatsiooni“ ning kordajat -1 simpleksi ees tõlgendame kui vastupidist orientatsiooni.

Definitsioon 2.7. *Rajaoperaatoriks* nimetatakse R-moodulite homomorfismi

$$\partial_n \colon C_n(X) \to C_{n-1}(X),$$

mis on baasi elementidel $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$ (n-simpleksitel) defineeritud kui

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n\},$$

kus $\{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n\} = \{v_0, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ ja -1 on ringi R ühikelemendi vastandelement. Täpsustame, et

$$\partial_0 \colon C_0(X) \to \mathbf{0}, \quad x \mapsto 0.$$

Vabade moodulite universaalomaduse tõttu piisab homomorfismi defineerimiseks, kui defineerida homomorfism mooduli baasi elementidel.

Niisiis iga simplitsiaalkompleks X tekitab rajaoperaatorite jada

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{0}.$$

Lemma 2.1. *Iga $n \in \mathbb{N}_0$ korral $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Tõestus. Olgu $\sigma = \{v_0, \ldots, v_{n+1}\}$. Siis

$$\begin{aligned}
\partial_n(\partial_{n+1}(\sigma)) &= \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}\} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n(\{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \{v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots v_{n+1}\} + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j-1} \{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots v_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Fikseerime naturaalarvud $0 \leq a < b \leq n+1$. Paneme tähele, et simpleks $\{v_0, \ldots, \hat{v}_a, \ldots, \hat{v}_b, \ldots v_{n+1}\}$ esineb mõlemas summas ühe korra ning nad on erineva märgiga.

1. Kui $i = a$ ja $j = b$, siis see liidetav on teises summas kordajaga $(-1)^{a+b-1}$, sest v_a kustutati enne ära.

2. Kui $i = b$ ja $j = a$, siis see liidetav on esimeses summas kordajaga $(-1)^{a+b}$.

Järelikult nende kahe liidetava summa võrdub nulliga. $\square$

Homoloogia defineerimiseks toome sisse mõisted tsüklid ja rajad. Mooduli $C_n(X)$ alammooduli $Z_n(X) = \ker \partial_n$ elemente nimetatakse *tsükliteks*. Mooduli $C_n(X)$ alammoodul $B_n(X) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ koosneb *rajadest*.

Lemma 2.1 tõttu saame, et $B_n(X)$ on $Z_n(X)$ alammoodul, sellest tuleneb järgmine definitsioon.

Definitsioon 2.8. Olgu X simplitsiaalne kompleks. Faktormoodulit

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, nimetame simplitsiaalse kompleksi X *n-indaks homoloogiamooduliks.*

Näide 2.4. Tühja simplitsiaalse kompleksi homoloogiamoodulid on nullmoodulid $\mathbf{0}$.

Märkus 2. Simplitsiaalse kompleksi homoloogiamooduli konstruktsiooni juures eeldasime, et kompleksi tipud on järjestatud. Võib näidata, et isomorfismi täpsuseni sellest järjestuse valikust homoloogiamoodulid ei sõltu.

Näide 2.5. Olgu meil ringiks $\mathbb{Z}$. Fikseerime näitest 2.2 simplitsiaalse kompleksi X'' tipud järjekorda $x < y < z < u < v < w$. Arvutades võib leida, et 1-ahelate tsüklid ehk $\ker \partial_1$ elemendid on formaalsed summad

$$a\{x, y\} + (a - b)\{y, z\} - a\{x, z\} + b\{y, u\} - b\{z, u\}, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

2-ahelate rajad ehk $\operatorname{Im} \partial_2$ elemendid on formaalsed summad

$$a\{y, z\} - a\{x, z\} + a\{x, y\}, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Võrdleme siin kompleksis kahte tsüklit. Esimene neist on $\{x, y\} + \{y, z\} - \{x, z\}$, mis piiritleb seest täis kolmnurka xyz ning teine tsükkel $\{y, z\} - \{y, u\} + \{z, u\}$ piiritleb seest tühja kolmnurka yzu. Märkame aga, et selle simplitsiaalse kompleksi tsükkel, mis piirab kolmnurka xyz on ka selle kompleksi 2-ahela $\{x, y, z\}$ rajaks. Seega faktormoodulis $Z_n(X)/B_n(X)$ samastatakse see tsükkel võrdseks nulliga ning see teine tsükkel, mis piiritleb seest tühja kolmnurka, jääb mittetriviaalseks.

Eelmise näite põhjal võime öelda, et homoloogiamoodulid tuvastavad topoloogiliste ruumide auke. Öeldakse, et 0-mõõtmeline auk on topoloogilistes ruumides sidususkomponente eraldav vahe.

Lause 2.1. *Homoloogiamoodul $H_0(X)$ tuvastab simplitsiaalse kompleksi X sidususkomponente. Täpsemalt $H_0(X)$ on vaba ning selle astak on sidususkomponentide arv.*

Tõestus. Olgu X simplitsiaalne kompleks. Faktormooduli $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$ leidmiseks peame leidma $Z_0(X) = \ker \partial_0$ ning $B_0(X) = \operatorname{Im} \partial_1$. Kuna $\partial_0(C_0(X)) = \mathbf{0}$, siis $\ker \partial_0 = C_0(X)$.

Faktormoodulis $Z_0(X)/B_0(X)$ samastame $B_0(X)$ elemendid võrdseks nulliga. Märkame, et $B_0(X)$ on moodustatud elementide poolt, mis on kujul $\{v_j\} - \{v_i\}$, kus v_i ja v_j on simplitsiaalse kompleksi X kõrvutiasetsevad tipud ehk $\{v_i, v_j\} \in X^1$. Järelikult faktormoodulis $H_0(X)$ saame, et

$$\overline{\{v_j\} - \{v_i\}} = 0 \Rightarrow \overline{\{v_j\}} = \overline{\{v_i\}}.$$

Siit on lihtne näha, et faktormoodulis $H_0(X)$ samastatakse simplitsiaalse kompleksi X kõik samas sidusas komponendis olevad 0-simpleksid omavahel ära. Kui $\{v_i\}$ ja $\{v_j\}$ ei ole samas sidususkomponendis, siis ei leidu analoogilist võrduste ahelat, mis samastaks 0-simpleksid $\{v_i\}$ ja $\{v_j\}$.

Olgu kompleksis X n sidususkomponenti. Siis saame valida igast sidususkomponendist 0-simpleksi $\{v_i\}$. Siis simpleksid $\{v_1, \dots, v_n\}$ on selle faktormooduli baas ning sellega saame, et $H_0(X)$ astak on n. $\square$

Toome ka ühe detailsema näite homoloogia arvutamisest.

Näide 2.6. Olgu meil ringiks $\mathbb{Z}$. Leiame simplitsiaalse homoloogia moodulid $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$ simplitsiaalse kompleksi

$$X = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$$

jaoks, kus vaatame tippude järjestust $x < y < z$. Tegemist on seest tühja kolmnurgaga ja me ootaks, et simplitsiaalne homoloogia leiaks selle 1-mõõtmelise augu üles. Kompleksi X n-ahelad on

$$\begin{aligned}
C_0(X) &= \{a\{x\} + b\{y\} + c\{z\},\ a, b, c \in \mathbb{Z}\},\\
C_1(X) &= \{a\{x, y\} + b\{y, z\} + c\{x, z\},\ a, b, c \in \mathbb{Z}\},\\
C_n(X) &= \mathbf{0},\ \text{kui } n > 1.
\end{aligned}$$

Märgime, et definitsiooni järgi $\partial_0 = 0$, s.t.

$$\partial_0(\{x\}) = \partial_0(\{y\}) = \partial_0(\{z\}) = 0.$$

Seega $Z_0(X) = \ker \partial_0 = C_0(X)$. Leiame $B_0(X) = \operatorname{Im} \partial_1$:

$$\partial_1(\{x, y\}) = \{y\} - \{x\}, \quad \partial_1(\{y, z\}) = \{z\} - \{y\}, \quad \partial_1(\{x, z\}) = \{z\} - \{x\}.$$

Saame lemma 1.1 tõttu, et $B_0(X)$ moodustajad on

$$\{y\} - \{x\},\ \{z\} - \{y\} \text{ ning } \{z\} - \{x\}.$$

Faktormoodulis $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$ sisuliselt võtame $B_0(X)$ elemendid võrdseks nulliga, seega

$$\begin{aligned}
\overline{\{y\} - \{x\}} = 0 \Rightarrow \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \text{ ning}\\
\overline{\{z\} - \{y\}} = 0 \Rightarrow \overline{\{y\}} = \overline{\{z\}}.
\end{aligned}$$

Saame, et faktormoodulis $H_0(X)$ kehtib $\{x\} = \{y\} = \{z\}$. Sel juhul esinevad kõik $H_0(X)$ liikmed kujul

$$\overline{a\{x\}} + \overline{b\{x\}} + \overline{c\{x\}} = \overline{(a + b + c)\{x\}} = \overline{d\{x\}},\ d \in \mathbb{Z}.$$

Järelikult $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, millest näeme, et meie kompleksil on üks sidususkomponent, kuna vaba mooduli $\mathbb{Z}$ astak on 1.

Kui $n > 1$, siis $B_{n-1}(X) = \operatorname{Im}\partial_n$ on triviaalselt võrdne nulliga, sellepärast, et $C_n(X) = \mathbf{0}$. Lisaks kui $n > 1$, siis $Z_n(X) = \ker\partial_n = \mathbf{0}$, millest järeldub, et $H_2(X) = Z_2(X)/B_2(X) = \mathbf{0}/\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Olgu $u = a\{x,y\} + b\{y,z\} + c\{x,z\} \in C_1(X)$. Leiame $\partial_1(u)$:

$$\begin{aligned}\partial_1(u) &= a(\{y\} - \{x\}) + b(\{z\} - \{y\}) + c(\{z\} - \{x\}) \\ &= (-a-c)\{x\} + (a-b)\{y\} + (b+c)\{z\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kuna moodulid $C_n(X)$ on vabad, siis teame, et summa (2.1) saab olla null parajasti siis, kui baasi elementide $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ kordajad on nullid. Siit saame, et $a = b$ ning $b = -c$, järelikult ∂_1 viib nulliks elemendid $a(\{x,y\} + \{y,z\} - \{x,z\}),\ a \in \mathbb{Z}$. Järelikult

$$Z_1(X) = \ker\partial_1 \cong \mathbb{Z}$$

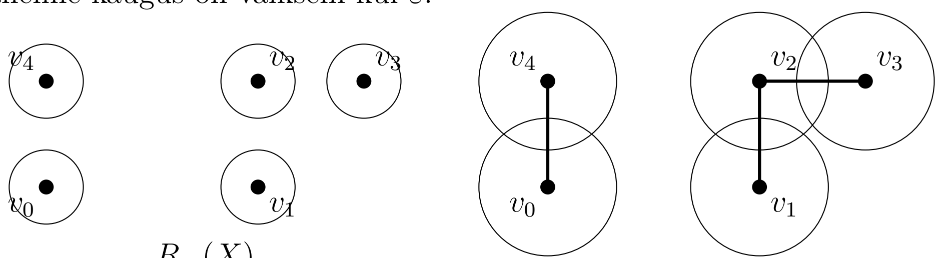
ning $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) \cong \mathbb{Z}/\mathbf{0} = \mathbb{Z}$. Näeme, et $H_1(X)$ on isomorfne vaba mooduliga $\mathbb{Z}$, mille astak on üks. Järelikult simplitsiaalses kompleksis X on üks ühe-mõõtmeline auk.

Defineerime nüüd selle peatüki põhimõiste: Vietoris-Ripsi kompleks. Vietoris-Ripsi kompleks seob omavahel abstraktseid simplitsiaalseid komplekse ja (lõplikke) meetrilisi ruume.

Definitsioon 2.9. Olgu (X,d) lõplik meetriline ruum ja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ skaala parameeter. Siis *Vietoris-Ripsi kompleksiks* $R_\varepsilon(X)$ üle X, skaalaga ε, nimetatakse simplitsiaalset kompleksi

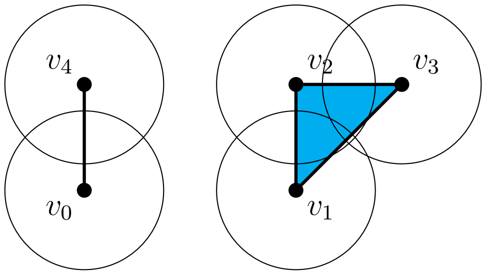
$$R_\varepsilon(X) = \{\sigma \subseteq X \mid \forall u,v \in \sigma\colon u \neq v,\ d(u,v) < \varepsilon\}.$$

Näide 2.7. Vaatleme meetrilise ruumi $\mathbb{R}^2$ (standardse meetrikaga) lõplikku alamruumi $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Toome näite Vietoris-Ripsi kompleksidest kuue erineva ε väärtusega, kus $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_6$ ning kirjutame välja nende homoloogiamoodulid H_n (üle korpuse $\mathbb{Z}_2$), mis erinevad nullmoodulist. Nende loomiseks joonistame iga punkti ümber ringjoone raadiusega $\varepsilon/2$, siis kui kaks ringjoont lõikuvad kahes punktis (ehk lõikuvad, aga ei puutu) ruumis $\mathbb{R}^2$, siis kahe punkti vaheline kaugus on väiksem kui ε.

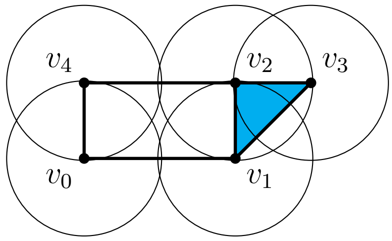


$R_{\varepsilon_1}(X)$
$H_0 = \mathbb{Z}_2^{\oplus 5}$

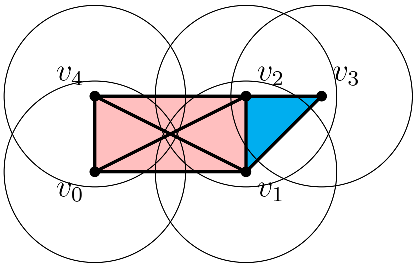
$R_{\varepsilon_2}(X)$
$H_0 \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$



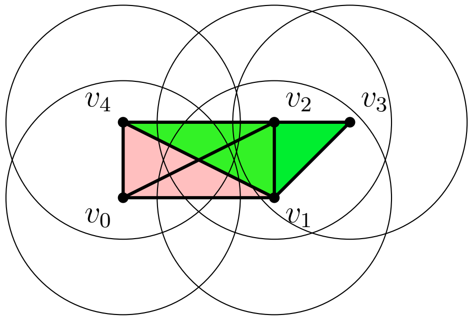
$R_{\varepsilon_3}(X)$
$H_0 \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$



$R_{\varepsilon_4}(X)$
$H_0 \cong \mathbb{Z}_2$
$H_1 \cong \mathbb{Z}_2$



$R_{\varepsilon_5}(X)$
$H_0 \cong \mathbb{Z}_2$



$R_{\varepsilon_6}(X)$
$H_0 \cong \mathbb{Z}_2$

Näeme, et $R_{\varepsilon_1}(X)$ koosneb ainult viiest 0-simpleksist. Kompleksis $R_{\varepsilon_2}(X)$ lisandub kolm 1-simpleksit. Kompleksis $R_{\varepsilon_3}(X)$ lisandub üks 1-simpleks ja üks 2-simpleks. Kompleksis $R_{\varepsilon_4}(X)$ lisandub kaks 1-simpleksit ning märkame, et siin kompleksis on tekkinud üks 1-mõõtmeline auk ristküliku $v_0v_1v_2v_4$ keskel. Kompleks $R_{\varepsilon_5}(X)$ täidab selle augu ära nelja 2-simpleksi ja ühe 3-simpleksiga. Kompleksis $R_{\varepsilon_6}(X)$ lisandub üks 3-simpleks juurde tippudel $v_1v_3v_2v_4$. Veidi suurema ε väärtuse korral on kompleks $R_\varepsilon(X)$ üks 4-simpleks koos kõigi alamsimpleksitega.

Definitsioon 2.10. *Filtratsiooniks* nimetatakse järjestatud hulga I poolt indekseeritud struktuuride peret $\{X_i\}_{i\in I}$, kus

$$\alpha < \beta \in I \Rightarrow X_\alpha \subseteq X_\beta,$$

kus $X_\alpha \subseteq X_\beta$ tähistab seda, et X_α on X_β alamstruktuur.

Näide 2.8. Märkame, et Vietoris-Ripsi kompleksid $R_\varepsilon(X)$ on indekseeritud reaalarvude poolt ning $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow R_{\varepsilon_1}(X) \subseteq R_{\varepsilon_2}(X)$. Seega Vietoris-Ripsi komplekside pere $\{R_\varepsilon(X)\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$ on filtratsioon.

Olgu simplitsiaalse kompleksi Y tipud lineaarselt järjestatud ning olgu alamkompleksi $X \subseteq Y$ tippude järjestus indutseeritud kompleksi Y tippude järjestuse poolt. Siis defineerime R-moodulite homomorfismi i_n sisestusena

$$i_n\colon C_n(X) \to C_n(Y), \quad u \mapsto u.$$

On lihtne näha, et ruut

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "i_n"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "i_{n-1}"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"'] & C_{n-1}(Y). \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

kommuteerub iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kasutame nüüd lauset 1.2, et konstrueerida homoloogiamoodulite vaheline homomorfism $\theta \colon H_n(X) \to H_n(Y)$, mis paneb kommuteeruma ruudu

$$\begin{tikzcd} Z_n(X) \arrow[r, "i_n|_{Z_n(X)}"] \arrow[d, "\psi"'] & Z_n(Y) \arrow[d, "\psi"] \\ Z_n(X)/B_n(X) \arrow[r, dashed, "\theta"'] & Z_n(Y)/B_n(Y). \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Teame, et diagrammis 2.3 on $i_n|_{Z_n(X)}$ ja parempoolne loomulik projektsioon ψ homomorfismid, seega nende kompositsioon $f = \psi \circ i_n|_{Z_n(X)}$ on homomorfism $Z_n(X) \to Z_n(Y)/B_n(Y)$. Jääb järele näidata, et iga $u \in B_n(X)$ korral $f(u) = 0$ ehk $i_n(u) \in B_n(Y)$.

Olgu $u \in B_n(X)$. Kuna $B_n(X) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$, siis leidub mingi $u' \in C_{n+1}(X)$ nii, et $u = \partial_{n+1}(u')$. Kommuteeruvast ruudust (2.2) (kus vaatame n ja $n-1$ asemel $n+1$ ja n) saame, et

$$i_n(u) = i_n(\partial_{n+1}(u')) = \partial_{n+1}(i_{n+1}(u')) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} = B_n(Y).$$

Saime homoloogiamoodulite vahelise homomorfismi $\theta \colon H_n(X) \to H_n(Y)$. Kirjeldatud homomorfismi konstruktsiooni simplitsiaalsete komplekside filtratsioonile rakendades tekib struktuur, millega tutvume järgmises peatükis.

Mainime, et Vietoris-Ripsi filtratsioon ei ole ainuke võimalik lähenemine ning on olemas teisi filtratsioone, mis on analüüsitavad sarnaste meetoditega, näiteks Čechi kompleks ja tunnistaja kompleks (*witness complex*). Paremate topoloogiliste omadustega variant on Čechi kompleksite filtratsioon, kuid selle rakendamine praktikas on ebamõistlik (arvutuskeerukuse poolest). Selle tõttu tihti kasutatakse Vietoris-Ripsi komplekse, et Čechi komplekse lähendada [5].

Erinevaid Vietoris-Ripsi komplekside filtratsioonide arvutamise algoritme saab leida artiklist [5].

3 Püsivusmoodulid

Järgmised peatükid püsivusmoodulite kohta põhinevad artiklil [6] ning järgmiste peatükkide lõppeesmärgiks on tõestada selle töö peatulemus – püsivusmoodulite normaalkuju teoreem, mida arvatavasti tõestas esmakordselt aastal 1994 matemaatik S. Barannikov.

Käesolevas peatükis anname püsivusmooduli definitsiooni ja tõestame mõned tulemused alammoodulite summade kohta. Samuti toome näiteid püsivusmoodulitest, muuhulgas näitame, et iga Vietoris-Ripsi kompleks tekitab teatud loomulikul viisil püsivusmooduli.

Definitsioon 3.1. *Püsivusmooduliks* nimetatakse paari (V, π), kus $V = \{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ on pere lõplikumõõtmelistest vektorruumidest V_t üle korpuse K ning π on pere lineaarkujutustest $\pi_{s,t}\colon V_s \to V_t$, kus $s, t \in \mathbb{R}, s \leq t$ nii, et

1. $\forall s, t, r,\ s \leq t \leq r\colon \pi_{s,r} = \pi_{t,r} \circ \pi_{s,t}$ ning $\pi_{s,s}$ on samasusteisendus.
2. Ülimalt lõplikus koguses punktides $t \in \mathbb{R}$ ei saa leida punkti t ümbrust U nii, et $\pi_{s,r}$ on isomorfism iga $s, r \in U,\ s < r$ korral.
3. Iga punkti $t \in \mathbb{R}$ korral leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $s \in (t - \varepsilon, t)$ korral kujutus $\pi_{s,t}$ on isomorfism.

Kujutusi $\pi_{s,t}$ kutsume *püsivuskujutusteks.*

Siin töös nimetame punkti $x \in \mathbb{R}$ ümbrusteks vahemikke kujul (a, b) nii, et $x \in (a, b)$. Mainime, et püsivusmooduli definitsiooni teise tingimuse tõttu leidub reaalarv t_∞ nii, et iga $t \geq s \geq t_\infty$ korral $\pi_{s,t}$ on isomorfism, see järeldub lemmast 4.1. Teisisõnu, pere $\{V_t\}$ stabiliseerub piisavalt suurte indeksite t korral. Fikseerime sellise piisavalt suure reaalarvu t_∞ ning tähistame sellele vastavat vektorruumi $V_\infty := V_{t_\infty}$. Kuna V_∞ on lõplikumõõtmeline vektorruum üle K, siis võime öelda, et leidub selline $n \in \mathbb{N}_0$, et iga $t > t_\infty$ korral $V_t \cong V_\infty \cong K^n$. Sarnane omadus kehtib piisavalt väikeste indeksite t korral, kuid selle jaoks eraldi tähistust pole tarvis sisse tuua.

Näide 3.1. Defineerime püsivusmooduli üle korpuse $\mathbb{Q}$ järgmiselt.

1. $V_t = \mathbb{Q}^2$, kui $t \in \mathbb{R}$,
2. $\pi_{s,t}$ on samasusteisendus.

Näide 3.2. Defineerime püsivusmooduli üle korpuse $\mathbb{R}$ järgmiselt.

1. (a) $V_t = \mathbf{0}$, kui $t \leq -42$,
   (b) $V_t = \mathbb{R}$, kui $-42 < t \leq 17$,
   (c) $V_t = \mathbb{R}^3$, kui $17 < t$,
2. (a) $\pi_{s,t}$ on nullkujutus, kui $s < -42$,
   (b) $\pi_{s,t}$ on samasusteisendus, kui $s, t \in (-42, 17]$ või $s, t \in (17, \infty)$,
   (c) $\pi_{s,t}$ on defineeritud võrdusega
   $$\pi_{s,t}(x) := (x, 0, 0),$$
   kui $s \in (-42, 17]$ ja $t \in (17, \infty)$.

Märkus 3. Siit alates vaatame mooduleid ja püsivusmooduleid vaikimisi üle korpuse K, kui just pole teisiti mainitud.

Näide 3.3. Fikseerime lõplikus meetrilises ruumis X tippude lineaarse järjestuse ning loome Vietoris-Ripsi komplekside filtratsiooni. Selle abil saame defineerida püsivusmoodulid. Täpsemalt saame püsivusmoodulid kujul $F_n(X) = (H_n, \theta)$, kus H_n on vektorruumide $\{(H_n)_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$ pere, kus $(H_n)_\varepsilon$ on Vietoris-Ripsi kompleksi $R_\varepsilon(X)$ n-is homoloogiamoodul ning θ on eelmise peatüki lõpus konstrueeritud sisestuste poolt indutseeritud homoloogiamoodulite vaheliste homomorfismide süsteem. Püsivusmoodulit $F_n(X)$ kutsume meetrilise ruumi X, *n-indaks Vietoris-Ripsi püsivusmooduliks.*

Lause 3.1. *Vietoris-Ripsi püsivusmoodulid $F_n(X)$ on tõepoolest püsivusmoodulid.*

Tõestus. Näitame, et $F_n(X)$ rahuldab püsivusmoodulite tingimusi.

1) Fikseerime reaalarvud s, t, r nii, et $s \le t \le r$. Olukorra illustreerimiseks kleebime kaks ruutu (2.3) omavahel kokku. Loetavuse parandamiseks jätame kujutustel i ahendi märgi ära.

$$\begin{tikzcd}
Z_n(R_s(X)) \arrow[r, "(i_n)_{s,t}"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[rr, bend left, "(i_n)_{s,r}"] & Z_n(R_t(X)) \arrow[r, "(i_n)_{t,r}"] \arrow[d, "\psi"] & Z_n(R_r(X)) \arrow[d, "\psi"] \\
Z_n(R_s(X))/B_n(R_s(X)) \arrow[r, dashed, "\theta_{s,t}"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "\theta_{s,r}"'] & Z_n(R_t(X))/B_n(R_t(X)) \arrow[r, dashed, "\theta_{t,r}"'] & Z_n(R_r(X))/B_n(R_r(X)).
\end{tikzcd}$$

Peame näitama, et $\theta_{s,r} = \theta_{t,r} \circ \theta_{s,t}$. Ruudu 2.3 kommuteerumise tõttu on meil järgnevad võrdused:

$$\psi \circ (i_n)_{s,r} = \theta_{s,r} \circ \psi, \qquad \psi \circ (i_n)_{t,r} = \theta_{t,r} \circ \psi, \qquad \psi \circ (i_n)_{s,t} = \theta_{s,t} \circ \psi.$$

Sisestuse i_n definitsiooni tõttu on lihtne näha, et $(i_n)_{s,r} = (i_n)_{t,r} \circ (i_n)_{s,t}$. Seega saame, et

$$\begin{aligned}
\theta_{s,r} \circ \psi = \psi \circ (i_n)_{s,r} &= \psi \circ (i_n)_{t,r} \circ (i_n)_{s,t} \\
&= \theta_{t,r} \circ \psi \circ (i_n)_{s,t} = \theta_{t,r} \circ \theta_{s,t} \circ \psi
\end{aligned}$$

Kuna ψ on sürjektiivne, siis võime ta võrduse

$$\theta_{s,r} \circ \psi = \theta_{t,r} \circ \theta_{s,t} \circ \psi$$

mõlemalt poolelt paremalt ära taandada ning saame, et $\theta_{t,r} \circ \theta_{s,t} = \theta_{s,r}$, mis on see mida tahtsime.

Kui $s = t$, siis paneme tähele, et

$$Z_n(R_s(X))/B_n(R_s(X)) = Z_n(R_t(X))/B_n(R_t(X)),$$

seega kujutuseks $\theta_{s,s}$ sobib samasusteisendus ning loomuliku projektsiooni ψ sürjektiivsuse tõttu on $\theta_{s,s}$ üheselt määratud. Seega eelnev konstruktsioon annab $\theta_{s,s} = 1$.

2) Tingimus on rahuldatud, sest vaatame Vietoris-Ripsi komplekse lõplikel meetrilistel ruumidel.

3) Fikseerime $t \in \mathbb{R}$, siis

$$R_t(X) = \{\sigma \subseteq X \mid \forall u, v \in \sigma \colon d(u, v) < t\}.$$

Kuna X on lõplik meetriline ruum, siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $R_{t-\varepsilon}(X) = R_t(X)$. Kuna $R_{t-\varepsilon}(X) = R_t(X)$, siis ka $H_n(R_{t-\varepsilon}(X)) = H_n(R_t(X))$, mille tõttu θ tuleb ühikkujutus, ning seega on isomorfism. □

Definitsioon 3.2. *Püsivusmoodulite morfism*

$$\varphi \colon (V, \pi) \to (V', \pi')$$

on lineaarkujutuste pere

$$\varphi_t \colon V_t \to V'_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

nii, et iga $s \leq t$ korral järgmine diagramm kommuteerub:

$$\begin{tikzcd} V_s \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "\varphi_s"'] & V_t \arrow[d, "\varphi_t"] \\ V'_s \arrow[r, "\pi'_{s,t}"'] & V'_t \end{tikzcd} . \tag{3.1}$$

Morfismi φ nimetame *püsivusmoodulite isomorfismiks* kui φ_t on isomorfism iga $t \in \mathbb{R}$ korral.

Definitsioon 3.3. Olgu (V, π) ja $(\hat{V}, \hat{\pi})$ kaks püsivusmoodulit. Nende *väline otsesumma* on püsivusmoodul (W, p) vektorruumidega

$$W_t = V_t \oplus \hat{V}_t$$

ning püsivuskujutustega

$$p_{s,t} : V_s \oplus \hat{V}_s \to V_t \oplus \hat{V}_t,$$

mis on defineeritud võrdusega

$$p_{s,t}(x, y) = (\pi_{s,t}(x), \hat{\pi}_{s,t}(y)) .$$

On lihtne näha, et selliselt defineeritud (W, p) rahuldab püsivusmooduli definitsiooni tingimusi.

Definitsioon 3.4. Püsivusmooduli (V, π) *alampüsivusmooduliks* nimetatakse püsivusmoodulit (W, π^W), mis koosneb alamruumidest $W_s \subseteq V_s$, $\forall s \in \mathbb{R}$ nii, et ahend

$$\pi^W_{s,t} := \pi_{s,t}|_{W_s} \colon W_s \to W_t$$

on korrektselt defineeritud iga $s \leq t$ korral. Täpsemalt kehtib tingimus $\pi_{s,t}(W_s) \subseteq W_t$ kõikide reaalarvude $s \leq t$ korral.

Alammooduli definitsioonist saame, et järgmine diagramm kommuteerub:

$$\begin{tikzcd}
W_s \arrow[r, "\pi^W_{s,t}"] \arrow[d, "\cap" left] & W_t \arrow[d, "\cap"] \\
V_s \arrow[r, "\pi^V_{s,t}" below] & V_t
\end{tikzcd}.$$

Siit alates ütleme alampüsivusmooduli asemel lihtsalt alammoodul ja kirjutame $W \subseteq V$.

Definitsioon 3.5. Olgu W ja W' kaks püsivusmooduli (V, π) alammoodulit. Nende *summaks* nimetatakse alammoodulit M vektorruumidega

$$M_t = W_t + W'_t\,.$$

Kui $W_s \cap W'_s = \{0\}$ iga $s \in \mathbb{R}$ korral, siis vektorruumi V alamruumide W_s ja W'_s summa on nende alamruumide otsesumma ehk $W_s + W'_s = W_s \dotplus W'_s$. Sel juhul öeldakse, et alammoodul M on alammoodulite W ning W' *sisemine otsesumma.*

Lause 3.2. *Olgu W, W' püsivusmooduli (V, π) kaks alammoodulit ning M nende summa. Siis M on püsivusmooduli V alammoodul.*

Tõestus. On ilmne, et iga reaalarvu t korral vektorruum $M_t \subseteq V_t$. Näitame, et ahend $\pi^M_{s,t}$ on korrektselt defineeritud iga $s \leq t$ korral.

Olgu $x_s + x'_s \in M_s$, kus $x_s \in W_s$ ja $x'_s \in W'_s$. Siis saame, et

$$\pi^M_{s,t}(x_s + x'_s) = \pi^V_{s,t}(x_s + x'_s) = \pi^V_{s,t}(x_s) + \pi^V_{s,t}(x'_s) = \pi^W_{s,t}(x_s) + \pi^{W'}_{s,t}(x'_s).$$

Kuna W ja W' on alammoodulid, siis $\pi^W_{s,t}(x_s) \in W_t$ ja $\pi^{W'}_{s,t}(x'_s) \in W'_t$. Seega

$$\pi^M_{s,t}(x_s + x'_s) = \pi^W_{s,t}(x_s) + \pi^{W'}_{s,t}(x'_s) \in M_t,$$

mis on see mida tahtsime näidata.

On selge, et M definitsioon rahuldab püsivusmooduli definitsiooni tingimusi ning on seega tõepoolest V alammoodul. $\square$

Lause 3.3. *Olgu W ja W' püsivusmooduli (V, π) alammoodulid ning*

$$M = W \dotplus W'$$

nende sisemine otsesumma. Siis

$$(M, \pi^M) \cong (W, \pi^W) \oplus (W', \pi^{W'}).$$

Tõestus. Tähistame $(L, \pi^L) := (W, \pi^W) \oplus (W', \pi^{W'})$. Kursusel Algebra II tõestati, et moodulite (seega muuhulgas ka vektorruumide) sisemine otsesumma $W_t \dotplus W'_t$ on isomorfne nende välise otsesummaga $W_t \oplus W'_t$. Defineerime sealses tõestuses esinevaga analoogilise kujutuse $\varphi_t \colon W_t \oplus W'_t \to W_t \dotplus W'_t$ iga $t \in \mathbb{R}$ jaoks võrdusega

$$\varphi_t(w_t, w'_t) = w_t + w'_t,$$

kus $w_t \in W_t$ ja $w'_t \in W'_t$. Teame Algebra II tõestusest, et φ_t on vektorruumide isomorfism. Näitame, et siis $\varphi_t \circ \pi^L_{s,t} = \pi^M_{s,t} \circ \varphi_s$. Fikseerime $W_s \oplus W'_s$ elemendi (w_s, w'_s). Ühelt poolt saame

$$\varphi_t(\pi^L_{s,t}(w_s, w'_s)) = \varphi_t(w_t, w'_t) = w_t + w'_t,$$

kus $w_t = \pi^W_{s,t}(w_s) \in W_t$ ja $w'_t = \pi^{W'}_{s,t}(w'_s) \in W'_t$. Teiselt poolt saame, et

$$\pi^M_{s,t}(\varphi_s(w_s, w'_s)) = \pi^M_{s,t}(w_s + w'_s) = \pi^W_{s,t}(w_s) + \pi^{W'}_{s,t}(w'_s) = w_t + w'_t.$$

Seega pere $\varphi = \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ on püsivusmoodulite isomorfism. □

Tähisega $(a, b]$ tähistame nii lõplikke poollõike $(a, b]$, kui $a, b \in \mathbb{R}$, lõpmatuid poollõike $(-\infty, b]$, kui $a = -\infty$, ning ka lõpmatuid vahemikke (a, ∞), kui $b = \infty$ ning $(-\infty, \infty)$, kui $a = -\infty$, $b = \infty$.

Definitsioon 3.6. Intervalli $(a, b]$ jaoks, kus $-\infty \le a < b \le \infty$, defineerime püsivusmooduli $K(a, b]$ järgnevalt

$$K(a,b]_t = \begin{cases} K, & \text{kui } t \in (a,b] \\ \mathbf{0}, & \text{mujal} \end{cases}, \quad \pi_{s,t} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{kui } s,t \in (a,b] \\ 0, & \text{mujal} \end{cases},$$

kus $\mathbf{1}$ tähistab hulga K samasusteisendust, $\mathbf{0}$ tähistab ühe-elemendilist K-vektorruumi ja 0 tähistab nullkujutust $K(a, b]_s \to K(a, b]_t$. Sellist püsivusmoodulit nimetatakse *intervallmooduliks*.

Definitsioon 3.7. *Triipkoodiks* B nimetatakse lõplikku intervallide multihulka, s.t. lõplikku paaride hulka $\{(I_1, k_1), \ldots, (I_N, k_N)\}$, kus $I_i = (a_i, b_i]$ on intervall ja $k_i \in \mathbb{N}$ on naturaalarv, mida loeme selle intervalli kordsuseks.

4 Püsivusmooduli spektraalpunktid

Selles peatükis tutvume lähemalt püsivusmooduli spektraalpunktidega. Näitame nende olulisust seoses püsivusmoodulitega ning lõpus defineerime püsivusmooduli poolsürjektiivse alammooduli.

Definitsioon 4.1. Punkti $t \in \mathbb{R}$ kutsutakse püsivusmooduli (V, π) *lõplikuks spektraalpunktiks*, kui punkti t iga ümbruse U korral leiduvad $s, r \in U$, $s < r$ nii, et $\pi_{s,r} \colon V_s \to V_r$ ei ole isomorfism. Lisaks loeme spektraalpunktiks ∞. Püsivusmooduli V spektraalpunktide hulka tähistame $\operatorname{Spec} V$.

Definitsiooni 3.1 teise tingimuse tõttu on $\operatorname{Spec} V$ lõplik hulk. Edaspidi olgu (V, π) püsivusmoodul ja

$$\operatorname{Spec} V = \{a_1, \ldots, a_N\} \cup \{\infty\}$$

tema spektraalpunktid, kus $a_1 < \ldots < a_N < a_{N+1} = \infty$.

Vormistuse lihtsustamiseks olgu $a_0 = -\infty$. Rõhutame, et a_0 ei ole spektraalpunkt.

Märkus 4. On võimalik, et püsivusmoodulil V ei leidu ühtegi lõplikku spektraalpunkti, sel juhul $\operatorname{Spec} V = \{a_1\}$, kus $a_1 = \infty$ ning $V_s \cong V_{t_\infty}$ iga reaalarvu $s \in (a_0, a_1] = (-\infty, \infty)$ korral.

Lisaks ütleme, et püsivuskujutus $\pi_{s,a_{N+1}} = \pi_{s,\infty}$ tähendab püsivuskujutust

$$\pi_{s,\infty} = \begin{cases} \pi_{s,t_\infty}, \text{ kui } s \leq t_\infty, \\ \pi^{-1}_{t_\infty,s}, \text{ kui } s > t_\infty. \end{cases}$$

Püsivuskujutuse $\pi_{t_\infty,s}$ pööratavus tuleneb järgmisest lemmast (lemma 4.1).

Ütleme, et supreemum üle tühja hulga on $-\infty$ ning ülalt tõkestamata hulga supreemum on ∞.

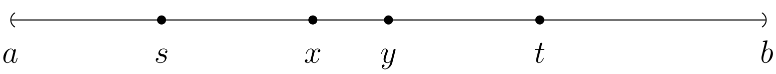
Lemma 4.1. *Kui vahemik (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ei sisalda ühtegi spektraalpunkti, siis mistahes reaalarvude $s, t \in (a, b]$, $s \leq t$ korral $\pi_{s,t}$ on isomorfism.*

Tõestus. Kui $s = t$, siis $\pi_{s,t}$ on püsivusmooduli definitsiooni esimese tingimuse tõttu isomorfism.

Olgu reaalarvud $s, t \in (a, b]$, $s < t$ sellised, et $\pi_{s,t}$ ei ole isomorfism. Olgu

$$y = \sup\{x \colon \pi_{s,z} \text{ on isomorfism iga } z \in [s, x) \text{ korral}\}.$$

See hulk on mittetühi, sest $\pi_{s,s}$ on püsivusmooduli definitsiooni esimese tingimuse tõttu isomorfism. Lisaks on see hulk ülalt tõkestatud reaalarvuga t (kuna $\pi_{s,t}$ ei ole isomorfism). Järelikult tänu reaalarvude täielikkusele on sellel hulgal ülemine raja $y \in \mathbb{R}$ olemas.



Paneme tähele, et $y \neq s$, sest muidu punkti s igas ümbruses leiduks reaalarv $u > s$ nii, et $\pi_{s,u}$ ei ole isomorfism, seega s oleks spektraalpunkt, vastuolu. Kuna $y > s$, siis püsivusmooduli definitsiooni kolmanda tingimuse ning supreemumi definitsiooni tõttu saame, et $\pi_{s,y} = \pi_{y-\varepsilon,y} \circ \pi_{s,y-\varepsilon}$ on isomorfism, kus ε on piisavalt väike positiivne reaalarv nii, et $y - \varepsilon > s$ ja $\pi_{y-\varepsilon,y}$ on isomorfism. Sarnaselt märkame, et iga $z \in (y, t)$ korral $\pi_{y,z}$ ei ole isomorfism, sest muidu oleks $\pi_{s,z} = \pi_{y,z} \circ \pi_{s,y}$ isomorfism, mis oleks vastuolus punkti y definitsiooniga.

Seega punkti y iga ümbruse korral leidub punkt $z > y$, mille korral $\pi_{y,z}$ ei ole isomorfism, millest saame, et y on spektraalpunkt. See on vastuolus eeldusega, et iga $s \in (a, b)$ korral $s \notin \operatorname{Spec} V$. Järelikult $\pi_{s,t}$ on isomorfism. $\square$

Seega spektraalpunktid jaotavad reaaltelje intervallideks

$$(a_0, a_1] \cup (a_1, a_2] \cup \ldots \cup (a_{N-1}, a_N] \cup (a_N, a_{N+1}),$$

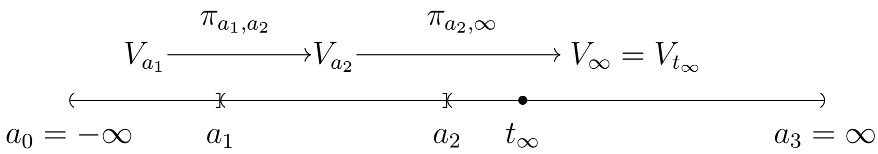
kusjuures

- iga intervalli kõigile punktidele vastavad vektorruumid on omavahel isomorfsed (sama mõõtmega),
- punkt t_∞ asub viimases intervallis,
- kõrvutiasuvate intervallide punktidele vastavad vektorruumid ei pruugi olla mitteisomorfsed (erineva mõõtmega).

Viimase punkti jaoks toome järgneva näite.

Näide 4.1. Olgu (V, π) püsivusmoodul, kus iga $s \in \mathbb{R}$ korral on $V_s = \mathbb{R}$, ning $\pi_{s,t}$ defineerime ühikkujutusena, kui s ja t on mõlemad mittepositiivsed, või mõlemad on negatiivsed, ning nullkujutusena vastupidisel juhul. Sellisel juhul on punkt 0 püsivusmooduli spektraalpunkt, kuid $V_s \cong V_t$ iga $s, t \in \mathbb{R}$ korral.

Järgmine joonis kirjeldab näite 3.2 püsivusmoodulit tema spektraalpunktide kaudu. Joonisel on $a_1 = -42$, $a_2 = 17$. Kõik vektorruumid V_s, $s \in (a_0, a_1]$ on isomorfsed vektorruumiga $V_{a_1} = \mathbf{0}$, kõik vektorruumid V_s, $s \in (a_1, a_2]$ on isomorfsed vektorruumiga $V_{a_2} = \mathbb{R}$ ning kõik vektorruumid V_s, $s \in (a_2, a_3]$ on isomorfsed vektorruumiga $V_{a_3} = V_\infty$, mis on meil defineeritud kui vektorruum $V_{t_\infty} = \mathbb{R}^3$, kus t_∞ on mingi fikseeritud reaalarv vahemikust (a_2, ∞).



See ka põhjendab, miks me võtsime kasutusele t_∞ ja miks me ei pidanud eraldi tähistama vektorruumi V_t piisavalt väikeste t jaoks. Seega selle asemel, et vaadata püsivusmooduleid üle kogu reaaltelje, saame neid vaadata lõpliku vektorruumide jadana ning nendevaheliste lineaarkujutustena.

Lause 4.1. *Olgu (V, π) ja (V', π') püsivusmoodulid nii, et $\operatorname{Spec} V' \subseteq \operatorname{Spec} V$ ja iga $a_i \in \operatorname{Spec} V$ korral leidub isomorfism φ_{a_i} nii, et ruut 3.1 kommuteerub iga $s, t \in \operatorname{Spec} V$ korral. Siis need püsivusmoodulid on isomorfsed.*

Tõestus. Defineerime iga $s \in \mathbb{R}$ korral isomorfismi

$$\varphi_s \colon V_s \to V'_s.$$

Kui reaalarv s kuulub poollõikku $(a_{i-1}, a_i]$, siis lemma 4.1 tõttu on π_{s,a_i} ja π'_{s,a_i} isomorfismid ning seega π'_{s,a_i} on pööratav ja

$$\varphi_s := (\pi'_{s,a_i})^{-1} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i}$$

on isomorfism.

Näitame, et siis kommuteerub ruut 3.1 iga reaalarvu s, t korral. Olgu $a_{i-1} < s \leq a_i$ ning $a_{n-1} < t \leq a_n$ ja $s < t$. Siis ühelt poolt

$$\begin{aligned}\varphi_t \circ \pi_{s,t} &= (\pi'_{t,a_n})^{-1} \circ \varphi_{a_n} \circ \pi_{t,a_n} \circ \pi_{s,t} = (\pi'_{t,a_n})^{-1} \circ \varphi_{a_n} \circ \pi_{t,a_n} \circ \pi_{a_i,t} \circ \pi_{s,a_i} = \\ &= (\pi'_{t,a_n})^{-1} \circ \varphi_{a_n} \circ \pi_{a_i,a_n} \circ \pi_{s,a_i}\end{aligned}$$

Ning teiselt poolt

$$\begin{aligned}\pi'_{s,t} \circ \varphi_s &= \pi'_{s,t} \circ (\pi'_{s,a_i})^{-1} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i} = \pi'_{a_i,t} \circ \pi'_{s,a_i} \circ (\pi'_{s,a_i})^{-1} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i} = \\ &= \pi'_{a_i,t} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i} = (\pi'_{t,a_n})^{-1} \circ \pi'_{t,a_n} \circ \pi'_{a_i,t} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i} = \\ &= (\pi'_{t,a_n})^{-1} \circ \pi'_{a_i,a_n} \circ \varphi_{a_i} \circ \pi_{s,a_i}\end{aligned}$$

Kuna eeldasime, et φ on kooskõlaline spektraalpunktidel ehk $\pi'_{a_i,a_n} \circ \varphi_{a_i} = \varphi_{a_n} \circ \pi_{a_i,a_n}$, siis tõepoolest $\varphi_t \circ \pi_{s,t} = \pi'_{s,t} \circ \varphi_s$ ning $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ on püsivusmoodulite isomorfism. $\square$

Lause 4.2. *Olgu W ja W' püsivusmooduli (V, π) alammoodulid nii, et* $\operatorname{Spec} W$, $\operatorname{Spec} W' \subseteq \operatorname{Spec} V$ *ning $W_{a_i} = W'_{a_i}$ iga $a_i \in \operatorname{Spec} V$ korral. Siis alammoodulid W ja W' on omavahel võrdsed.*

Tõestus. Olgu $\operatorname{Spec} V = \{a_1, a_2, \dots a_N, a_{N+1}\}$ reaalarv $s \in (a_{i-1}, a_i]$, kus $i \in \mathbb{N}$, kus $a_{N+1} = \infty$ ning $a_0 = -\infty$, ning olgu $x \in W_s$ ja $\pi^W_{s,a_i}(x) = y$. Lemma 4.1 tõttu on π^V_{s,a_i}, π^W_{s,a_i} ning $\pi^{W'}_{s,a_i}$ isomorfismid. Seega leidub $x' \in W'_s$ nii, et $\pi^{W'}_{s,a_i}(x') = y$. Kuna π^W ja $\pi^{W'}$ on π^V ahendid, siis seega $\pi^V(x) = \pi^V(x')$. Kuna aga π^V_{s,a_i} on bijektiivne, siis leidub parajasti üks V_s element, mille korral lineaarkujutus π^V_{s,a_i} kujutab elemendiks y, seega $x = x'$ ja $W_s \subseteq W'_s$. Vastupidine sisalduvus on analoogiline, seega $W_s = W'_s$ ning saame, et alammoodulid W ja W' on võrdsed. $\square$

Lause 4.3. *Olgu V püsivusmoodul ning olgu iga $a_i \in \operatorname{Spec} V$ korral antud alamruumid $W_{a_i} \subseteq V_{a_i}$ nii et $\pi_{a_i,a_j}(W_{a_i}) \subseteq W_{a_j}$, kui $a_i < a_j \in \operatorname{Spec} V$. Siis (W, π^W), kus*

$$W_s = \pi^{-1}_{s,a_k}(W_{a_i}),\ \ s \in (a_{i-1}, a_i],\ \ i \in \{1, 2, \dots, N+1\}$$

ja π^W on püsivuskujutuse π ahend, on püsivusmooduli (V, π) alammoodul.

Tõestus. On lihtne näha, et iga reaalarvu s korral $W_s \subseteq V_s$. Näitame, et sellisel juhul on π^W korrektselt defineeritud.

Olgu $a_{i-1} < s < t \leq a_i$. Siis

$$\begin{aligned}\pi^W_{s,t}(W_s) &= \pi^W_{s,t} \circ (\pi^W_{s,a_i})^{-1}(W_{a_i}) = \pi^W_{s,t} \circ (\pi^W_{t,a_i} \circ \pi^W_{s,t})^{-1}(W_{a_i}) = \\ &= \pi^W_{s,t} \circ (\pi^W_{s,t})^{-1} \circ (\pi^W_{t,a_i})^{-1}(W_{a_i}) = (\pi^W_{t,a_i})^{-1}(W_{a_i}) = W_t.\end{aligned}$$

Olgu $a_{i-1} < s \leq a_i \leq a_{m-1} < t \leq a_m$. Siis

$$\begin{aligned}\pi^W_{s,t}(W_s) &= \pi^W_{a_i,t} \circ \pi^W_{s,a_i}(W_s) = \pi^W_{a_i,t}(W_{a_i}) = (\pi^W_{t,a_m})^{-1} \circ \pi^W_{t,a_m} \circ \pi^W_{a_i,t}(W_{a_i}) = \\ &= (\pi^W_{t,a_m})^{-1} \circ \pi^W_{a_i,a_m}(W_{a_i}) \subseteq (\pi^W_{t,a_m})^{-1}(W_{a_m}) = W_t.\end{aligned}$$

$\square$

Seega, püsivusmooduli V alammooduli üheselt spetsifitseerimiseks piisab anda see kooskõlaliselt püsivusmooduli V spektraalpunktides.

Definitsioon 4.2. Püsivusmooduli (V, π) *kogumõõtmeks* nimetame mittenegatiivset täisarvu

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{N+1} \dim V_{a_i}.$$

Definitsioon 4.3. Püsivusmooduli V alammoodul W on *poolsürjektiivne*, kui leidub $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nii, et

1. $W_t = V_t$, iga reaalarvu $t \in (-\infty, r]$ korral,
2. $\pi^W_{s,t} \colon W_s \to W_t$ on sürjektiivne, kui $r < s < t$.

Näide 4.2. Näitest 3.2 püsivusmooduli (V, π) üks poolsürjektiivne alammoodul on W, kus

1. (a) $W_t = \mathbf{0}$, kui $t \leq -42$,
   (b) $W_t = \mathbb{R}$, kui $-42 < t \leq 17$,
   (c) $W_t = \mathbb{R}^2$, kui $17 < t$,
2. (a) $\pi^W_{s,t}$ on nullkujutus, kui $s < -42$,
   (b) $\pi^W_{s,t}$ on samasusteisendus, kui $s, t \in (-42, 17]$ või $s, t \in (17, \infty)$,
   (c) $\pi^W_{s,t}$ on defineeritud võrdusega

$$\pi^W_{s,t}(x) := (x, 0),$$

   kui $s \in (-42, 17]$ ja $t \in (17, \infty)$.

Siin sobib võtta $r = 17$.

Näide 4.3. Igal püsivusmoodulil (V, π) leiduvad alati järgmised poolsürjektiivsed alammoodulid:

1. (V, π), võime võtta $r \in [a_N, \infty)$,
2. nullalammoodul $(\mathbf{0}, 0)$, mis koosneb ainult nullruumidest ja nullkujutustest, võime võtta $r = -\infty$, kui $V_{a_1} \neq \mathbf{0}$ või $r \in [-\infty, a_1]$, kui $V_{a_1} = \mathbf{0}$.

Lemma 4.2. *Olgu W püsivusmooduli (V, π) poolsürjektiivne alammoodul. Kui $\pi^V_{s,t}$ on isomorfism, siis ka $\pi^W_{s,t}$ on isomorfism.*

Tõestus. Kuna $\pi^V_{s,t}$ on isomorfism, siis ta on bijektiivne ning tema ahend $\pi^W_{s,t}$ on ilmselt injektiivne. Näitame, et $\pi^W_{s,t}$ on sürjektiivne.

Kuna W on poolsürjektiivne, siis leidub $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, mis rahuldab poolsürjektiivsuse definitsioonis toodud tingimusi.

Kui $r < s$, siis $\pi^W_{s,t}$ on sürjektiivne. Kui $s \leq r$, siis fikseerime $y \in W_t$. Kujutuse $\pi^V_{s,t}$ bijektiivsusest teame, et leidub $x \in V_s$ nii, et $\pi^V_{s,t}(x) = y$. Kuna $s \leq r$, siis $W_s = V_s$, ehk $x \in W_s$. Saame, et $\pi^W_{s,t}(x) = y$. Järelikult $\pi^W_{s,t}$ on sürjektiivne.

Kokkuvõttes $\pi^W_{s,t}$ on bijektiivne lineaarkujutus ehk vektorruumide isomorfism. □

Lemma 4.3. *Olgu $W \subseteq V$ poolsürjektiivne alammoodul. Siis*

(1) $\operatorname{Spec} W \subseteq \operatorname{Spec} V$,

(2) $\dim W \leq \dim V$,

(3) *kui iga $t \in \operatorname{Spec} V$ korral $W_t = V_t$, siis $W = V$,*

(4) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$.

Tõestus. **(1)** Teame, et $\operatorname{Spec} W \ni \infty \in \operatorname{Spec} V$. Olgu $a \in \operatorname{Spec} W \setminus \{\infty\}$. Esimese väite tõestuseks oletame vastuväiteliselt, et $a \notin \operatorname{Spec} V$. Sellisel juhul leidub punkti a ümbrus U nii, et iga $s, t \in U$, $s \leq t$ korral $\pi^V_{s,t}$ on isomorfism. Kuna $a \in \operatorname{Spec} W$, siis leiduvad reaalarvud $b, c \in U$, $b < c$ nii, et $\pi^W_{b,c}$ ei ole isomorfism, kuigi $\pi^V_{b,c}$ on isomorfism. Saime vastuolu eelmise lemmaga, seega $\operatorname{Spec} W \subseteq \operatorname{Spec} V$.

(2) Tõestame teise väite. Kuna tegemist on lõplikumõõtmeliste vektorruumidega ja spektraalpunkte on lõplik kogus, siis $W_s \subseteq V_s$ iga $s \in \mathbb{R}$ korral ning $\operatorname{Spec} W \subseteq \operatorname{Spec} V$ tõttu $\dim W \leq \dim V$.

(3) Kolmas väide järeldub käesoleva lemma esimesele punktile ning lausest 4.2, kus V alamoodulideks võtame W ja V.

(4) Tõestame nüüd viimase väite. Teame, et $W \subseteq V$ ning $\operatorname{Spec} W \subseteq \operatorname{Spec} V$. Kui mingi $j \in \{1, \dots, N+1\}$ korral $a_j \notin \operatorname{Spec} W$, siis kui $\dim V_{a_j} \geq 1$, saame, et

$$\dim V = \sum_{i=1}^{N+1} \dim V_{a_i} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N+1} \dim V_{a_i} \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N+1} \dim W_{a_i} \geq \dim W.$$

Võrratus $\dim V > \dim W$ on vastuolus eeldusega $\dim V = \dim W$. Kui $\dim V_{a_j} = 0$, siis ilmselt $W_{a_j} = V_{a_j}$. Järelikult $W_t = V_t$ iga $t \in \operatorname{Spec} V$ korral ning seega lemma eelmise väite tõttu $W = V$. Sellega oleme lemma ära tõestanud. □

5 Normaalkuju Teoreem

Selles peatükis tõestame lõpuks püsivusmoodulite normaalkuju teoreemi.

Nagu varasemast on välja paistnud, püsivusmoodulitega tegelemisel piisab enamasti spektraalpunktides töötamisest. Anname järgmise abistava tulemuse.

Lemma 5.1. *Olgu V püsivusmoodul ning olgu W, W' selle alammoodulid, mille korral* $\operatorname{Spec} W, \operatorname{Spec} W' \subseteq \operatorname{Spec} V$. *Siis*

1. *$W = W'$ parajasti siis, kui $W_s = W'_s$ iga $s \in \operatorname{Spec} V$ korral,*

2. *kui $M = W + W'$, siis $\operatorname{Spec} M \subseteq \operatorname{Spec} V$ ning $M = W \dot{+} W'$ parajasti siis, kui $M_s = W_s \dot{+} W'_s$ iga $s \in \operatorname{Spec} V$ korral,*

3. *$W \subseteq V$ on poolsürjektiivne alammoodul parajasti siis, kui leidub punkt r nii et $W_t = V_t$ igas spektraalpunktis, kus $t \leq r$ ning $\pi_{s,t}$ on sürjektiivne iga spektraalpunkti s, t korral, kus $r < s < t$.*

Tõestus. **1)** Tarvilikkus on ilmne ning piisavust tõestasime lauses 4.2.

2) Olgu $a \in \operatorname{Spec} M$ ning oletame vastuväiteliselt, et $a \notin \operatorname{Spec} V$ ning seega ka $a \notin \operatorname{Spec} W$ ja $a \notin \operatorname{Spec} W'$. Ilmselgelt $a \neq \infty$, seega leidub punkti a ümbrus U nii, et iga $s, t \in U$, $s \leq t$ korral $\pi^V_{s,t}$ on isomorfism. Kuna $\operatorname{Spec} W, \operatorname{Spec} W' \subseteq \operatorname{Spec} V$, ei saa punkt a olla ka W ega W' spektraalpunkt, mistõttu analoogilised ümbrused leiduvad ka kujutuste π^W ja $\pi^{W'}$ jaoks. Eeldame üldisust kitsendamata, et U on neist ümbrustest väikseim. Kuna $a \in \operatorname{Spec} M$, siis leiduvad $b, c \in U$ nii, et $\pi^M_{b,c}$ ei ole isomorfism. Teame, et M on püsivusmooduli V alammoodul, seega ahend $\pi^M_{b,c}$ on injektiivne. Olgu $y \in M_c$, siis saame esitada $y = w_c + w'_c$, kus $w_c \in W_c$ ja $w'_c \in W'_c$. Siis $\pi^W_{b,c}$ ja $\pi^{W'}_{b,c}$ isomorfsuse tõttu leiduvad $w_b \in W_b$ ja $w'_b \in W'_b$ nii, et $\pi^W_{b,c}(w_b) = w_c$ ja $\pi^{W'}_{b,c}(w'_b) = w'_c$. Seega

$$\begin{aligned}\pi^M_{b,c}(w_b + w'_b) &= \pi^V_{b,c}(w_b + w'_b) = \pi^V_{b,c}(w_b) + \pi^V_{b,c}(w'_b) = \pi^W_{b,c}(w_b) + \pi^{W'}_{b,c}(w'_b) = \\ &= w_c + w'_c = y.\end{aligned}$$

Saime, et $\pi^M_{b,c}$ on sürjektiivne, järelikult on ta isomorfism, vastuolu.

Kui $M = W \dot{+} W'$, siis ilmselt $M_s = W_s \dot{+} W'_s$ iga $s \in \operatorname{Spec} V$ korral. Kui $M_s = W_s \dot{+} W'_s$ iga $s \in \operatorname{Spec} V$ korral, siis $M = W \dot{+} W'$ tõestamine toimub analoogiliselt lemma 4.2 kolmanda punkti tõestusega.

3) Tarvilikkus on ilmne. Tõestame nüüd piisavust.

Näitame, et kui leidub punkt r nii et $W_t = V_t$ igas spektraalpunktis t, kus $t \leq r$ ning $\pi_{s,t}$ on sürjektiivne iga spektraalpunkti s, t korral, kus $r < s < t$, siis W on poolsürjektiivne alammoodul.

Sürjektiivsus: Olgu reaalarv $s \in (a_{i-1}, a_i]$, kus $a_{i-1} \geq r$ ja $t \in (a_{n-1}, a_n]$ ning $t > s$. Siis

$$\pi_{s,t} = \pi_{a_i,t} \circ \pi_{s,a_i} = \pi^{-1}_{t,a_n} \circ \pi_{t,a_n} \circ \pi_{a_i,t} \circ \pi_{s,a_i} = \pi^{-1}_{t,a_n} \circ \pi_{a_i,a_n} \circ \pi_{s,a_i}$$

on sürjektiivne, kuna π_{s,a_i} ning π^{-1}_{t,a_n} on bijektiivsed ja π_{a_i,a_n} on sürjektiivne.

Poolsürjektiivse alammooduli esimese tingimuse täidetuse tõestus on analoogiline lause 4.2 tõestusega. □

Lemma 5.2. *Olgu V püsivusmoodul ning $W \subset V$ poolsürjektiivne alammoodul, siis leidub poolsürjektiivne alammoodul $W_* \subseteq V$ nii, et $W_* \cong W \oplus K(I)$, kus $I = (a, b]$, $a \in \operatorname{Spec} V \cup \{-\infty\}$, $b \in \operatorname{Spec} V$ ja $a < b$.*

Tõestus. Olgu $\operatorname{Spec} V = \{a_1, \ldots, a_N\} \cup \{\infty\}$, kus $a_{N+1} = \infty$ ning tähistuse mugavdamiseks olgu $a_0 = -\infty$.

Eeldusest $W \subset V$ saame, et leidub mingi $k \in \{1, \ldots, N+1\}$ nii, et $W_{a_k} \neq V_{a_k}$. Muidu lemma 4.3 kolmanda punkti tõttu oleks $W = V$. Valime minimaalse spektraalpunkti $a_i \in \operatorname{Spec} V$, kus $W_{a_i} \subset V_{a_i}$ ning olgu $z_{a_i} \in V_{a_i} \setminus W_{a_i}$.

Tähistame $z_{a_k} := \pi_{a_i,a_k}(z_{a_i}) \in V_{a_k}$, kui $k \in \{i+1, \ldots, N+1\}$. Vaatame kahte võimalikku juhtu.

1. $\exists k \in \{i+1, \ldots, N+1\}$ nii, et $z_{a_k} \in W_{a_k}$.
2. $\forall k \in \{i+1, \ldots, N+1\}$, $z_{a_k} \notin W_{a_k}$.

1. Esimesel juhul valime väikseima naturaalarvu $j \in \{i+1, \ldots, N+1\}$, mille korral $z_{a_j} \in W_{a_j}$. Kuna $\pi^W_{a_i,a_j}$ on poolsürjektiivsuse definitsiooni tõttu sürjektiivne, sest $W_{a_i} \neq V_{a_i}$, leidub $x_{a_i} \in W_{a_i}$ nii, et $\pi_{a_i,a_j}(x_{a_i}) = z_{a_j}$. Olgu $y_{a_i} = z_{a_i} - x_{a_i}$, siis $y_{a_i} \in V_{a_i}$. Defineerime $y_{a_k} := \pi_{a_i,a_k}(y_{a_i})$, kus $k \in \{i+1, \ldots, N+1\}$. Järgnev diagramm illustreerib elementide kuuluvust.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
V_{a_1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & V_{a_i} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & V_{a_j} \longrightarrow \ldots \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & & & z_{a_i} & & \ldots & & z_{a_j} \\
 & & & & \rotatebox{-90}{$\notin$} & & & & \rotatebox{-90}{$\in$} \\
W_{a_1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & W_{a_i} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & W_{a_j} \longrightarrow \ldots \\
 & & & & 0 \neq y_{a_i} = z_{a_i} - x_{a_i} & & \ldots & & y_{a_j} = 0
\end{array}
$$

Mainime, et $y_{a_i} \notin W_{a_i}$ ning seega ka $y_{a_i} \neq 0 \in W_{a_i}$. Kui y_{a_i} oleks W_{a_i} element, siis

$$y_{a_i} = z_{a_i} - x_{a_i} \Rightarrow W_{a_i} \ni (y_{a_i} + x_{a_i}) = z_{a_i} \notin W_{a_i},$$

vastuolu.

Sarnaselt, kui naturaalarv k on vahemikus $i < k < j$, siis π_{a_i,a_k} lineaarsuse tõttu saame, et $\pi_{a_i,a_k}(y_{a_i}) \notin W_{a_k}$, sest

$$\pi_{a_i,a_k}(y_{a_i}) = \pi_{a_i,a_k}(z_{a_i}) - \pi_{a_i,a_k}(x_{a_i}) = z_{a_k} - \pi_{a_i,a_k}(x_{a_i}),$$

ning $z_{a_k} \notin W_{a_k}$. Samuti märkame, et

$$\pi_{a_i,a_j}(y_{a_i}) = \pi_{a_i,a_j}(z_{a_i}) - \pi_{a_i,a_j}(x_{a_i}) = z_{a_j} - z_{a_j} = 0.$$

Järelikult püsivusmooduli definitsiooni esimese tingimuse tõttu

$$\pi_{a_i,t}(y_{a_i}) = \pi_{a_j,t} \circ \pi_{a_i,a_j}(y_{a_i}) = \pi_{a_j,t}(0) = 0, \quad \text{iga } t \geq a_j \text{ korral.}$$

Defineerime $y_{a_k} = 0$, kui $0 < k < i$, siis saame püsivusmoooduli (V, π) alammooduli (P, π^P), kus iga spektraalpunkti a_k korral on vektorruum P_{a_k} defineeritud võrdusega

$$P_{a_k} = \operatorname{span}(y_{a_k}),$$

täpsemalt

$$P_{a_k} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{kui } 0 < k < i \text{ või } k \geq j, \\ \operatorname{span}(y_{a_k}), & \text{kui } i \leq k < j. \end{cases}$$

Näitame, et lause 4.3 eeldused on täidetud. On ilmne, et P_{a_k} on vektorruumi V_{a_k} alamruum. Näitame, et π^P on kooskõlaline iga spektraalpunkti jaoks. Olgu $0 < k < n \leq N+1$ ning näitame, et $\pi_{a_k,a_n}(P_{a_k}) \subseteq P_{a_n}$. Lemma 1.1 abil piisab näidata, et $\pi_{a_k,a_n}(y_{a_k}) \in P_{a_n}$. Kui $0 < k < i$, siis ilmselt $\pi_{a_k,a_n}(0) = 0 \in P_{a_n}$. Kui $i \leq k$, siis y_{a_k} definitsioonist saame, et

$$\pi_{a_k,a_n}(y_{a_k}) = \pi_{a_k,a_n} \circ \pi_{a_i,a_k}(y_{a_i}) = \pi_{a_i,a_n}(y_{a_i}) = y_{a_n} \in P_{a_n}.$$

Nüüd defineerime $W_* = W + P$ ja näitame, et W_* on poolsürjektiivne alammoodul, ning on isomorfne selle välise otsesummaga, mis on lemma sõnastuses ehk

$$W_* \cong W \oplus K(a_{i-1}, a_i].$$

Lause 3.3 tõttu teame, et sisemine otsesumma on isomorfne välise otsesummaga, seega piisab, kui tõestame, et

(a) $W_* = W \dot{+} P$,

(b) W_* on V poolsürjektiivne alammoodul,

(c) (P, π^V) on isomorfne intervallmooduliga $K(a_{i-1}, a_i]$.

(a) Näitame, et iga spektraalpunkti $s \in \operatorname{Spec} V$ korral $W_s \cap P_s = \{0\}$. Kui $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, siis $P_s = \{0\}$, millest ilmselt $W_s \cap P_s = \{0\}$.

Olgu $s \in (a_{i-1}, a_{j-1}]$. Piisab näidata, et $V_s \ni y_{a_k} \notin W_s$, kuna ilmselt $y_{a_k} \in P_s$ ning P_s on võrdne y_{a_k} lineaarse kattega. See on meil aga eelnevalt juba näidatud, seega lemma 5.1 teise punkti tõttu $W_* = W \dot{+} P$.

(b) Kuna (P, π) ja (W, π) on (V, π) alammoodulid, siis nende lemma 3.2 tõttu nende otsesumma on ka (V, π) alammoodul.

Lemma tõestuse algusest teame, et $W_{a_k} = V_{a_k}$, kui $k \leq i-1$. Samuti P konstruktsioonist teame, et $P_{a_k} = \{0\}$, kui $k \leq i-1$. Järelikult

$$(W_*)_{a_k} = W_{a_k} \dot{+} P_{a_k} = W_{a_k} = V_{a_k}$$

kui $k \leq i-1$, mis rahuldab esimest poolsürjektiivsuse tingimust. Jääb järele näidata, et $\hat{\pi}_{a_k,a_n} = \pi^W_{a_k,a_n} \dot{+} \pi^P_{a_k,a_n}$ on sürjektiivne kui $a_{i-1} < a_k < a_n$. Kuna $\pi^W_{a_k,a_n}$ ja $\pi^P_{a_k,a_n}$ juba on sürjektiivsed, siis nende otsesumma on ka sürjektiivne. Seega lemma 5.1 kolmanda punkti tõttu on (b) osa tõestatud.

(c) Näitame, et P on isomorfne intervallmooduliga $K(a_{i-1}, a_{j-i}]$. Kasutame selleks lauset 4.1 ning kontrollime selle eeldusi. Intervallmoodulil $K(a_{i-1}, a_{j-i}]$ leiduvad kaks spektraalpunkti: a_{i-1} ning a_{j-1}. On lihtne näha, et need on ka P spektraalpunktid ning $\operatorname{Spec} P \subseteq \operatorname{Spec} V$. Loome morfismide pere $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in \operatorname{Spec} V}$, kus

$$\varphi_t \colon K_t(a_{i-1}, a_{j-1}] \to P_t$$

on defineeritud võrdustega

$$\varphi_t(a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } t \notin (a_{i-1}, a_{j-1}], \\ a \cdot y_t, & \text{kui } t \in (a_{i-1}, a_{j-1}], \end{cases}$$

kus $a \in K$.

Kui $t \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, siis vektorruumides P_t ning $K_t(a_{i-1}, a_{j-1}]$ on ainult üks element, milleks on nullvektor, seega φ_t on bijektiivne. Kui $t \in (a_{i-1}, a_{j-1}]$, siis kõik P_t elemendid esituvad kujul $a \cdot (y_{a_k})$, $a \in K$ ning kõik $K_t(a_{i-1}, a_{j-1}]$ elemendid esituvad kujul $a \cdot 1$, kus $a \in K$ ning 1 on vektorruumi $K(a_{i-1}, a_{j-1}]$ ühikvektor. On lihtne näha, et siis on ka φ_t bijektiivne. Samuti on lihtne näha, et ruut 3.1 kommuteerub iga $s, t \in \operatorname{Spec} V$ korral. Kuna φ_t on bijektiivne iga $t \in \operatorname{Spec} V$ korral, siis φ on isomorfism iga P spektraalpunkti korral, mis on see mida tahtsime näidata ja lause 4.1 tõttu on $P \cong K(a_{i-1}, a_{j-i}]$.

2. Lemma teise juhtumi (kus $z_{a_j} \notin W_{a_j}, \forall j > i$) tõestus käib analoogiliselt. Loome alammooduli $P = \{P_s\}$, mis on isomorfne intervallmooduliga $K(a_{i-1}, \infty)$. Iga spektraalpunkti a_k korral on vektorruum P_{a_k} defineeritud võrdusega

$$P_{a_k} = \operatorname{span}(z_{a_k}),$$

täpsemalt

$$P_{a_k} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{kui } k < i, \\ \operatorname{span}(z_{a_k}), & \text{kui } i \leq k. \end{cases}$$

Moodul $W_* = W + P$, on analoogiliselt esimese juhuga otsitav poolsürjektiivne alammoodul. Sellega oleme lemma tõestanud. □

Oleme nüüd valmis tõestama Normaalkuju teoreemi, mis lühidalt väidab seda, et püsivusmoodulid on isomorfismi täpsuseni intervallmoodulite lõplikud otsesummad.

Teoreem 5.1 (Normaalkuju Teoreem)**.** *Iga püsivusmooduli* (V, π) *jaoks leidub lõplik kogum intervalle* I_i *kordustega* k_i *ehk* $\{(I_i, k_i)\}_{i=1}^N$*, kus* $I_i = (a_i, b_i]$*, kus* $a_i < b_i$*,* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*,* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*,* $k_i \in \mathbb{N}$*,* $I_i \neq I_j$*, kui* $i \neq j$*, nii, et* V *esitub otsesummana*

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{N} K(I_i)^{k_i}.$$

Lisaks on selline otsesumma üheselt määratud liidetavate järjekorra permuteerimise täpsuseni, seega igal püsivusmoodulil leidub parajasti üks triipkood $B(V)$. Siinses töös me unikaalsust ei näita, küll aga näidatakse seda tekstis [6].

Tõestus. Kui $V_s = \mathbf{0}$ iga $s \in \mathbb{R}$ korral, siis V esitub tühja intervallmoodulite otsesummana. Olgu $V_s \neq \mathbf{0}$ mingi $s \in \mathbb{R}$ korral. Kasutame Lemmat 5.2, et luua sellist otsesummat. Olgu $W(0) = \mathbf{0}$. Näitest 4.3 teame, et $\mathbf{0}$ on V poolsürjektiivne alammoodul. Loome induktiivselt $W(i+1) = W(i)_*$, kus

$$W(i)_* \cong W(i) \oplus K(I),$$

kus I on mingi intervall kujul $(a, b]$ ja $K(I)$ tuleb lemma 5.2 konstruktsioonist. Teame, et $W(i+1)$ on mooduli V poolsürjektiivne alammoodul selle sama lemma tõttu. Märkame, et iga sammuga mõõde suureneb, $\dim W(i+1) = \dim W(i) + 1$, sest $\dim K(I) = 1$. Järelikult kuna V koosneb lõplikumõõtmelistest vektorruumidest ja lõplikust kogusest spektraalpunktidest, siis see protsess lõppeb mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, kus $\dim W(n) = \dim V$. Lemma 4.3 kolmanda punkti tõttu $W(n) = V$. Sellega oleme konstrueerinud sõnastuses toodud esituse. $\square$

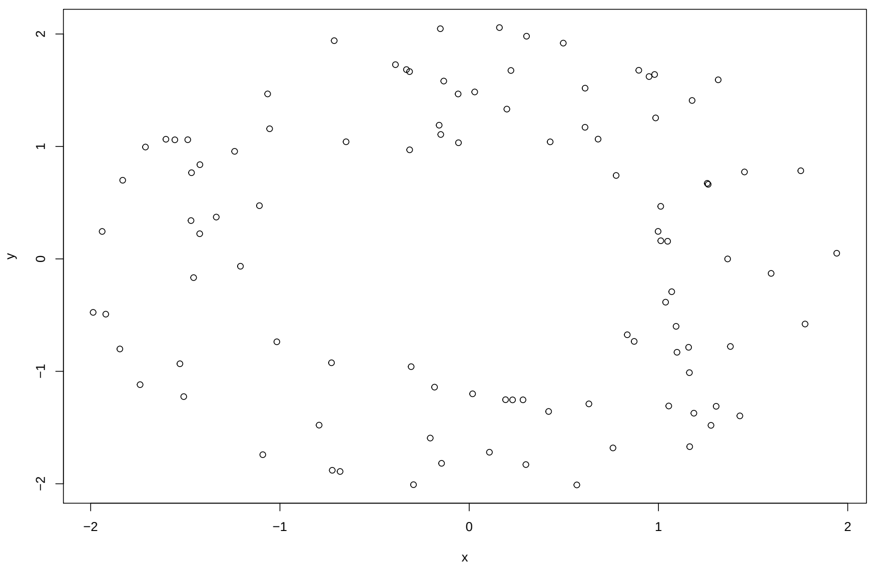
6 Rakendused

Lõpetuseks mainine, et püsivushomoloogiat saab rakendada väga mitmes valdkonnas. Nimekirja igasugustest rakendusvaldkondadest, kus mõnda neist on ka detailsemalt käsitletud, saab leida raamatust [7].

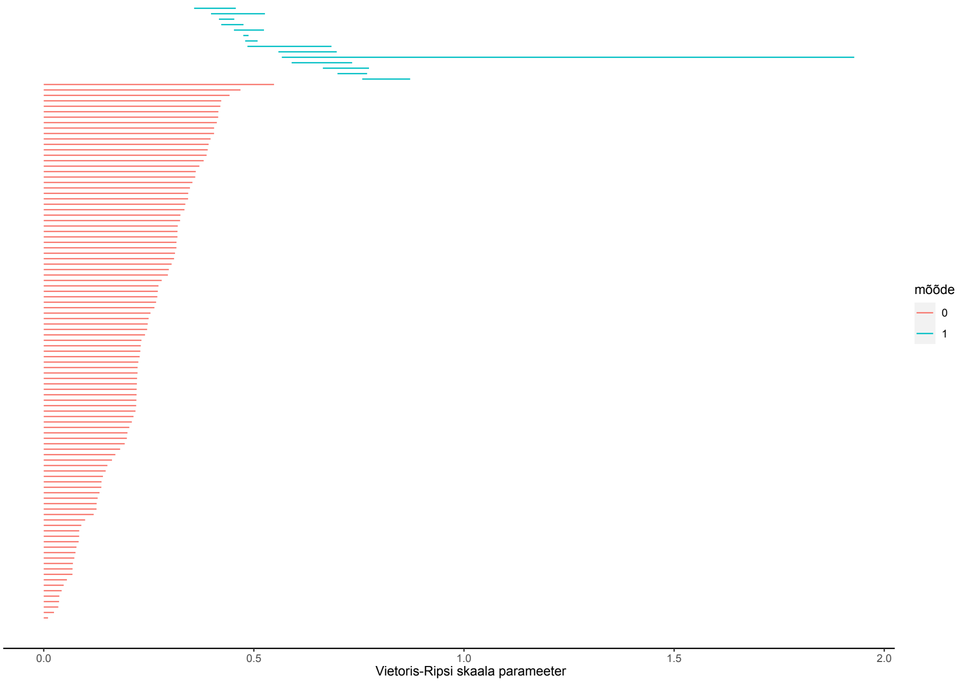
Matemaatikas on püsivushomoloogia oluline Morse teoorias, mis on diferentsiaaltopoloogia valdkond, kus uuritakse muutkonna topoloogiat kasutades sellel muutkonnal diferentseeruvaid funktsioone.

Levinud kasutusvaldkond püsivushomoloogia jaoks on kõrge-mõõtmeliste andmete visualiseerimine, mida on tavaliste statistiliste vahenditega raske teha. Toome ühe lihtsa illustratiivse näite andmete visualiseerimisest, kus rakendatakse teoreemi 5.1.

Toome näite triipkoodist ja ühest teisest levinud viisist triipkoodi esitada, mida nimetatakse *püsivusdiagrammiks*. Lõplikuks meetriliseks ruumiks on sada tasandil $\mathbb{R}^2$ asetsevat punkti, mis on paigutatud rõnga kuju järgi. Homoloogia arvutamiseks ning triipkoodi ja püsivusdiagrammi joonistamiseks on kasutatud programmeerimiskeele R teeki TDAstats [8]. Punktihulka genereeriv ning homoloogiat arvutav kood on leitav töö lisades.

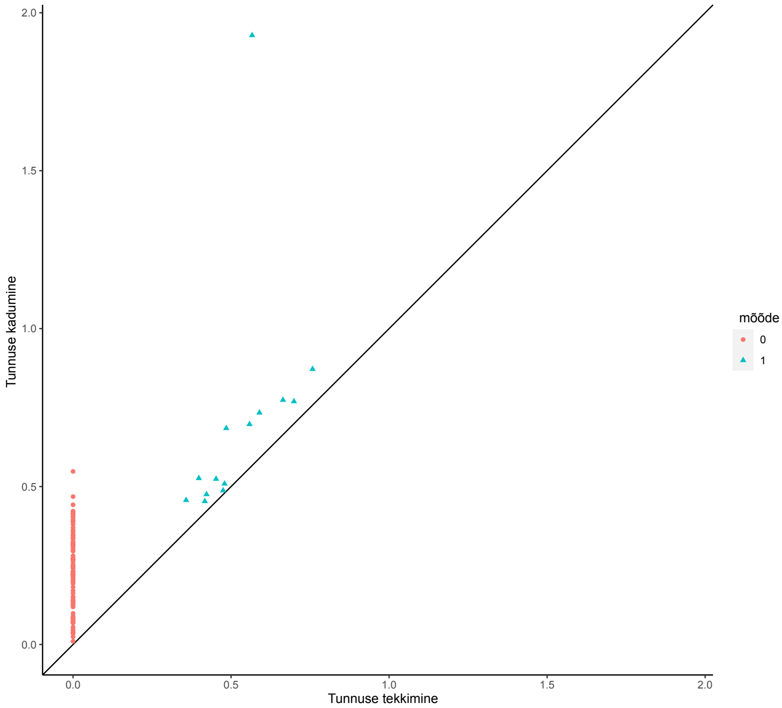


Teek TDAstats kasutab homoloogia arvutamisel korpusena $\mathbb{Z}_2$, kuid C++ teegis Ripser, mis arvutab TDastats paketis triipkoode, saab valida korpusteks $\mathbb{Z}_n$, kus n on algarv. Pakett TDAstats kasutab nii-öelda vähendatud homoloogiat (*reduced homology*), kus sisuliselt vähendatakse homoloogiamooduli H_0 astakut ühe võrra, et see ei loeks enam sidusukomponente vaid 0-mõõtmelisi auke. Seega siit triipkoodist on näha, et kui Vietoris-Ripsi kompleksi diameeter on umbes 0.6 või suurem, siis ta on sidus. Samuti näeme, et triipkood tuvastas ühe kaua püsiva 1-mõõtmelise augu. Ning mitut vähem püsivat auku.



Märkus 5. Öeldakse, et pikalt püsivad triipkoodi elemendid on olulisemad andmete tunnused ning vähe püsivaid elemente loetakse müraks või väiksema skaala tunnusteks.

Teine levinud viis triipkoodi vaadata on püsivusdiagrammide abil, kus iga triipkoodis esineva intervalli alguspunkt on püsivusdiagrammi x-koordinaat ning lõpppunkt on y koordinaat. Seega punktid, mille vertikaalne kaugus sirgest $y = x$ on suur, on kaua püsivad tunnused ning punktid, mis on sirge $y = x$ lähedal on vähem olulised tunnused või müra. Siit joonisel on näha ühte olulist 1–mõõtmelist tunnust, mis vastab triipkoodis olevale pikale intervallile.


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Tunnuse kadumine
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Tunnuse tekkimine
mõõde
0
1

Viited

[1] Valdis Laan. „Algebra II“ (loengukonspekt). Tartu Ülikool, 2019. https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.040/2019_spring/uploads/Main/kon.pdf (18.05.2020)

[2] Greg Friedman. „An elementary illustrated introduction to simplicial sets“. Rocky Mountain J. Math. 42 (2012), no. 2, 353-423 https://arxiv.org/abs/0809.4221 (18.05.2020)

[3] Prerna Nadathur. „An Introduction to Homology", 2007. https://pdfs.semanticscholar.org/ccf5/83c2bf9c7c5b2c71707acdf8f1920cc6bc23.pdf (18.05.2020)

[4] Charles A. Weibel. „An Introduction to Homological Algebra". Cambridge University Press, 1994. pp 1-29.

[5] Afra Zomorodian. „Fast construction of the Vietoris-Rips complex". Computers & Graphics, vol 34, no 3, 2010, pp 263-271. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097849310000464 (18.05.2020)

[6] Leonid Polterovich, Daniel Rosen, Karina Samvelyan, Jun Zhang. „Topological Persistence in Geometry and Analysis“. 2019. https://arxiv.org/abs/1904.04044 (05.05.2020)

[7] Steve Oudot. „Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis". 2015. https://geometrica.saclay.inria.fr/team/Steve.Oudot/books/o-pt-fqrtda-15/surv-209.pdf (18.05.2020)

[8] Bauer U. Ripser. „Efficient computation of Vietoris-Rips persistence barcodes". 2019; arXiv: 1908.02518. https://cran.r-project.org/web/packages/TDAstats/index.html (18.05.2020) https://github.com/rrrlw/TDAstats (18.05.2020)

Loob viimases peatükis oleva

Lisa 1.

```
install.packages("TDAstats") #Paigaldab TDAstats paketi
library("TDAstats")
punktide_arv <- 100
#Genereerime ühtlase jaotusega juhuslikke nurki ja kaugusi
nurk <- runif(punktide_arv, 0, 2*pi)
kaugus <- runif(punktide_arv, 1,2.1)
punktid <- cbind(kaugus*cos(nurk), kaugus*sin(nurk))
colnames(punktid) <- c("x","y")

plot(punktid)
punktid.hom <- calculate_homology(punktid) #homoloogia arvutamine
plot_barcode(punktid.hom) #triipkoodi joonistamine
plot_persist(punktid.hom) #persistence diagrammi joonistamine
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Indrek Pertman,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Topoloogiline andmeanalüüs püsivusmoodulite abil“,

   mille juhendajateks on Ülo Reimaa ja Valdis Laan,

   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Indrek Pertman
10.06.2020