ИЗВѢСТІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ. 1903. ФЕВРАЛЬ. Т. XVIII, № 2.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. 1903. Février. T. XVIII, № 2.)

№ 2187

Einige Bemerkungen über Diffractionsgitter.

Von Fürsten B. Galitzin.

(Der Akademie vorgelegt am 8. Januar 1903).

Bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über den Einfluss von Druck und Temperatur auf das Aussehen der Spectra bin ich auf eine gewisse Eigenthümlichkeit eines Rowland'schen Reflexionsgitters gestossen, deren Mittheilung wohl von Interesse sein dürfte.

Die von mir zur Untersuchung der Spectra benutzte Anordnung stimmte vollständig mit derjenigen überein, welche Hasselberg bei seinen Untersuchungen über das Absorptionsspectrum des Jodgases[1]) verwendet hat. Die für das Collimator- und Fernrohr von Steinheil gelieferten sehr schönen Linsen hatten eine Focaldistanz von 150 cm. und einen Durchmesser von 12,2 cm. Das Collimator- und Fernrohr waren fest aufgestellt; der Winkel ψ zwischen den beiden betrug $41°57'$. In dem Schnittpunkte der Axen beider Systeme befand sich die reflectirende Fläche des Diffractionsgitters, welches auf einem besonderen drehbaren Tisch mit Kreistheilung, deren Axe mit der Fläche des Diffractionsgitters zusammenfiel, aufgestellt war. Durch eine besondere Vorrichtung konnte der Theilkreis mit dem Gitter vom Beobachtungsende des Fernrohres aus gedreht und somit der Winkel φ zwischen dem einfallenden Strahl und der Gitternormalen beliebig geändert werden.

Der benutzte Spalt bestand aus fein geschliffenen Onyxkanten und konnte symmetrisch nach Belieben erweitert oder geschmälert werden. In der Focalebene des Fernrohrs wurden die zur Aufnahme der Spectra verwendeten photographischen Platten in besonderen Cassetten aufgestellt. Die Länge der Platten betrug ungefähr 18 cm. Eine besondere Vorrichtung gestattete die Platten schräg zur Axe des Fernrohrs zu stellen, damit die Brennpunkte der einzelnen Strahlen auf der Platte zu liegen kämen. Collimator und Fernrohr waren selbstverständlich auf Unendlich eingestellt.

1) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. VII série. T. XXXVI. 1889.

Das benutzte Diffractionsgitter, welches ich Gitter I nennen werde, war ein sehr schönes, von Rowland aus Baltimore geliefertes Exemplar[1]), welches sehr scharfe und schöne Bilder gab. Die geritzte Fläche hatte eine Länge von 99 mm. und eine Höhe von 66 mm. Die Anzahl der Striche n pro Zoll war auf dem Gitter aufgeschrieben. Es war die übliche Zahl für Gitter mit grossem Dispersionsvermögen

$$n = 14438.$$

Bezeichnen wir die Entfernung zweier benachbarter Striche auf dem Diffractionsgitter durch e, wo e in Millimetern ausgedrückt werden soll, so ergiebt sich

$$e = 0{,}0017592\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{m}}.$$

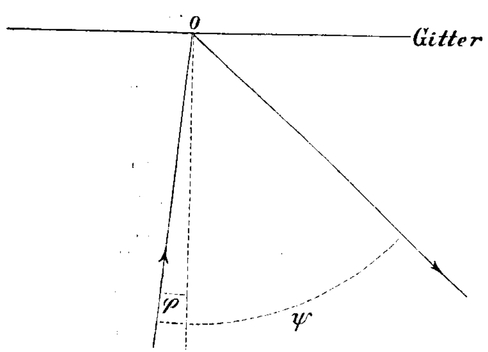
Dieselbe Zahl hat auch Hasselberg[2]) für das von ihm benutzte Gitter, das noch in der Pulkowa'schen Sternwarte aufbewahrt ist, angegeben. Ich werde dasselbe Gitter II nennen.

Dieses Gitter hatte aber etwas kleinere Dimensionen: Länge 80 mm., Höhe 55 mm.

Auf einem dritten, kleinen Gitter (Länge 47 mm., Höhe 35 mm.), welches ebenfalls dem Physikalischen Cabinet der Akademie der Wissenschaften angehört, war dieselbe Zahl $n = 14438$ aufgeschrieben. Wollen wir dieses kleine Gitter als Gitter III bezeichnen.

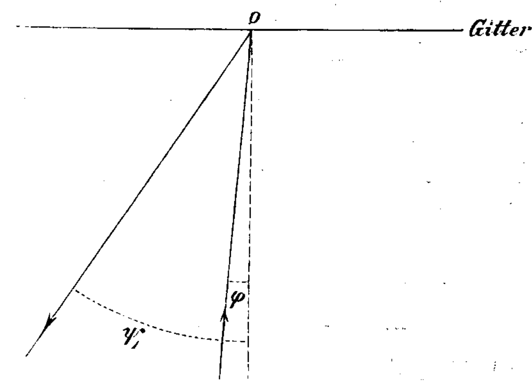
Nun hat man bekanntlich für die Ablenkung der Strahlen, welche einer bestimmten Wellenlänge λ entsprechen, zu beiden Seiten der Gitternormale folgende zwei Gleichungen (siehe die Fig. I und II):

Fig. I.



1) Durch Geissler in Bonn bezogen. 2) L. c. p. 3.

Fig. II.



$$\frac{m\lambda}{e} = \mathrm{Sin}\,(\psi - \varphi) - \mathrm{Sin}\,\varphi \ldots\ldots (1) \text{ auf der rechten Seite (Fig. I).}$$

$$\frac{m\lambda}{e} = \mathrm{Sin}\,(\psi_1 + \varphi) + \mathrm{Sin}\,\varphi \ldots\ldots (2) \text{ auf der linken Seite (Fig. II).}$$

wo m die Ordnung des Spectrums bedeutet.

Meine Beobachtungen geschahen im Spectrum zweiter Ordnung, folglich war $m = 2$. Der Winkel φ war gleich $0°33'$.

Daraus ergiebt sich, dass, bei Zugrundelegung der früher angegebenen Zahlen

$$\psi = 41°\ 57'$$
$$e = 0{,}0017592\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{m}},$$

der Mitte des Gesichtsfeldes oder, was dasselbe ist, der Mitte der photographischen Platte folgende Wellenlänge zukommen sollte:

$$\lambda = 5732 \text{ A. E.}$$

Aus directen Aufnahmen des Eisenspectrums (Eisendraht im Volta-Bogen) ergab sich für die Mitte des Gesichtsfeldes etwa

$$\lambda = 549.10^{-6}\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{m}}.$$

Ein solcher grosser Unterschied in den Werthen von λ entspricht auf der photographischen Platte bei der hier verwendeten Dispersion einer Entfernung von etwa 58 ${}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{m}}$.

Diesen Unterschied konnte ich mir anfangs gar nicht erklären, da ich weit von der Vermuthung entfernt war, dass die für ein Rowland'sches Gitter direct aufgeschriebene Zahl, d. h. die Anzahl Striche pro Zoll, unrichtig sein könnte, da meines Wissens die verschiedenen Gitter mit demselben Dispersionsvermögen immer auf derselben Maschine von Rowland fertiggestellt wurden.

Da ich für die bedeutende Differenz der berechneten und direct beobachteten Wellenlänge keinen Grund finden konnte, so sah ich mich gezwungen, das Diffractionsgitter einer näheren Untersuchung zu unterziehen. Diese Untersuchung habe ich mit meinem Assistenten Herrn **Wilip** auf zweierlei Art durchgeführt.

Erstens wurde die Anzahl der Striche pro Millimeter direct unter einem Microscop mit starker Vergrösserung gezählt und zwar für verschiedene Stellen des Gitters.

Zweitens wurde die Gitterconstante auf einem besonderen Spectrometer mehrmals bestimmt, und zwar bei normal auffallendem Licht ($\varphi = 0$), wobei die Lage der beiden abgelenkten Strahlen besonders gemessen wurde.

Die directe Messung der Entfernung der Striche geschah auf folgende Weise.

An einem **Reichert**'schen Mikroscop mit Oculartheilung wurde ein Objectiv angeschraubt, welches eine etwa 650fache Vergrösserung ergab. Die zweien benachbarten Strichen des Oculars entsprechende Entfernung wurde mit Hülfe einer Glasplatte (von Hartnack bezogen), auf welcher 1 Millimeter in 100 Theile getheilt war, ermittelt. Man stellte die Platte auf den Tisch des Mikroscopes und zählte die Anzahl der Striche des Ocularmikrometers, welche einer bestimmten Anzahl von Strichen der Glasplatte entsprach. Für jede Beobachtungsreihe wurden diese Bestimmungen besonders vorgenommen.

Bei der ersten Beobachtungsreihe ergab sich z. B., dass 501,1 Striche des Ocularmicrometers auf 1 Millimeter der Glasscala zu liegen kamen. Daraus ergiebt sich für die relative Entfernung Δ zweier benachbarter Striche des Ocularmicrometers folgender Werth:

$$\Delta = \frac{1}{501{,}1} = 0{,}0019956\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}.$$

Um die Richtigkeit der verwendeten Glasscala, die die Grundlage der weiter zu beschreibenden Messungen bildet, zu controlliren, habe ich dieselbe mit einem von der Société Genevoise gelieferten Normalmaassstab, und zwar bei einer anderen Vergrösserung des Microscopes verglichen und dabei eine so gute Übereinstimmung gefunden, dass man die Glasscala für den hier zu verfolgenden Zweck als richtig annehmen dürfte.

Wenn Δ einmal bestimmt war, so wurde statt der Glasscala das zu untersuchende Gitter selbst auf den Microscoptisch gelegt und auf einer Seite desselben eine matte Glasplatte parallel den Strichen in einem Stativ eingeklemmt. Alsdann wurde die Oberfläche des Gitters, welche in einem sehr kleinen Abstand vor dem Objectiv des Microscopes sich befand, von der Seite durch eine kräftige Bogenlampe durch die matte Glasplatte hin-

durch beleuchtet und die Anzahl der Striche des Gitters auf je 10 Theile des Ocularmicrometers besonders gezählt. Diese Bestimmungen wurden für die ganze Scalenlänge des Ocularmicrometers gewöhnlich dreimal wiederholt und aus den erhaltenen Werthen die Mittel genommen.

Bezeichnen wir die Anzahl der Ritzen des Gitters auf je 10 Theile des Ocularmicrometers durch k, so lässt sich der gesuchte Abstand e zweier benachbarter Striche des Diffractionsgitters nach folgender Formel berechnen:

$$e = \frac{10\,\Delta}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Gitter I zeigte unter dem Microscop sehr scharfe und klare Linien, die ziemlich leicht gezählt werden konnten. Es liess sich dabei kein besonderer Fehler im Gitter erkennen und das schöne Aussehen der Gitteroberfläche war damit gut im Einklang, dass man mit ihr ganz vorzüglich scharfe und schöne Bilder bekam.

Die eigentlichen Ausmessungen der Gittertheilung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

$\Delta = 0{,}0019956\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}$.

Mitte des Gitters I.

Theilung des Ocularmicrometers.	Anzahl der Gitterstriche (k) auf je 10 Theile des Ocularmicrometers.				Mittel.
0— 10	12,0	11,8	12,0	11,8	11,90
10— 20	11,9	11,9	11,9	11,9	11,90
20— 30	11,9	11,9	11,9	11,9	11,90
30— 40	11,9	11,8	11,8	11,9	11,85
40— 50	11,7	11,9	11,8	11,9	11,83
50— 60	11,9	11,9	11,9	11,9	11,90
60— 70	11,9	11,9	11,8	11,7	11,83
70— 80	12,0	11,9	11,9	11,9	11,93
80— 90	11,9	11,9	11,9	11,8	11,87
90—100	11,9	11,9	11,6	11,9	11,83
Mittel.	11,90	11,88	11,85	11,86	11,87

Im Mittel $k = 11{,}87$.

Daraus ergiebt sich nach der Formel (3)

$$e = 0{,}001681\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}.$$

Tabelle II.

$\Delta = 0{,}0019980\ {}^{m}/_{m}$.

Rand des Gitters I (rechts).

Theilung des Ocular-micrometers.	Anzahl der Gitterstriche (k) auf je 10 Theile des Ocularmicrometers.			Mittel.
0— 10	11,8	11,8	11,7	11,77
10— 20	11,9	11,9	11,8	11,87
20— 30	11,8	12,0	11,9	11,90
30— 40	11,8	11,9	11,9	11,87
40— 50	11,9	11,8	11,8	11,83
50— 60	11,9	11,6	11,8	11,77
60— 70	11,8	11,8	11,7	11,77
70— 80	11,9	11,9	11,9	11,90
80— 90	11,8	11,9	11,9	11,87
90—100	11,9	12,0	12,0	11,97
Mittel.	11,85	11,86	11,84	11,85

Im Mittel $k = 11{,}85$,

also $e = 0{,}001686\ {}^{m}/_{m}$.

Tabelle III.

$\Delta = 0{,}0019980\ {}^{m}/_{m}$.

Mitte des Gitters I.

Theilung des Ocular-micrometers.	Anzahl der Gitterstriche (k) auf je 10 Theile des Ocularmicrometers.			Mittel.
0— 10	11,7	11,8	11,7	11,73
10— 20	11,9	11,8	11,8	11,83
20— 30	11,9	11,9	11,9	11,90
30— 40	11,8	11,8	11,8	11,80
40— 50	11,5	11,6	11,7	11,60
50— 60	11,8	11,8	11,8	11,80
60— 70	11,9	11,9	11,8	11,87
70— 80	11,8	11,9	11,9	11,87
80— 90	11,9	12,0	11,8	11,90
90—100	12,0	11,8	12,0	11,93
Mittel.	11,82	11,83	11,82	11,82

Im Mittel $k = 11{,}82$,

also $e = 0{,}001690\ {}^{m}/_{m}$.

Tabelle IV.

$\Delta = 0{,}0019980\ {}^{m}/_{m}$.

Rand des Gitters I (links).

Theilung des Ocular-micrometers.	k
0— 10	11,9
10— 20	11,9
20— 30	11,7
30— 40	11,7
40— 50	11,9
50— 60	11,8
60— 70	11,7
70— 80	11,8
80— 90	11,9
90—100	11,9
Mittel.	11,82

Im Mittel $k = 11{,}82$,

also $e = 0{,}001690\ {}^{m}/_{m}$.

Betrachten wir nun die Zahlen der letzten Colonnen in allen diesen vier Tabellen, so sieht man leicht ein, dass für das Gitter I keine systematische Abweichung von k innerhalb der Scalenintervalle des Ocularmicrometers besteht. Für alle Theile des Ocularmicrometers kann k innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler als constant angenommen werden, folglich weist das Gitter I innerhalb des Gesichtsfeldes des Mikroscopes, welches etwa 0,2 ${}^{m}/_{m}$ entspricht, keinen systematischen Fehler auf.

Bevor wir weitere Schlüsse aus diesen Tabellen ziehen, wollen wir zunächst die Genauigkeit, mit welcher e nach dieser Methode sich überhaupt bestimmen lässt, näher untersuchen.

Erstens kann Δ etwas fehlerhaft sein.

Δ bestimmt sich als Quotient zweier Zahlen a und b, wo a die Länge eines Millimeters bedeutet und b die Anzahl der Theile des Ocularmicrometers, welche einem Millimeter entsprechen.

Wie früher erwähnt wurde, haben die Controllversuche gezeigt, dass die angewandte Glasplatte mit dem in 100 Theile getheilten Millimeter sehr sorgfältig gearbeitet war. Wollen wir aber doch annehmen, dass a etwas fehlerhaft sei. Der maximale Fehler in a, also δa, könnte, wie die Beobachtungen zeigten, höchstens gleich 0,003 m/m sein. Bei der Bestimmung von b kann einem Fehler von einem halben Theilstrich begegnet werden.

Setzen wir also dementsprechend

$$\left.\begin{array}{ll} a = 1 & \delta a = 0{,}003 \\ b = 500 & \delta b = 0{,}5 \end{array}\right\} \Delta = \frac{a}{b},$$

so wird im ungünstigsten Fall der Fehler von Δ höchstens 0,000008 erreichen.

Also

$$\delta\Delta = 0{,}000008 \,{}^{m}/_{m}.$$

Nun ist $e = \frac{10.\Delta}{k}$.

Aus den vorigen Tabellen kann man ersehen, dass k im Mittel wohl mit einer Genauigkeit bis auf 0,05 sich ermitteln lässt. Nehmen wir noch für k den kleinsten sich ergebenen Werth 11,82, so berechnet sich der Maximalfehler von e zu 0,000014.

Also

$$\delta e_{\text{max.}} = 0{,}000\,014 \,{}^{m}/_{m}.$$

Der maximale absolute Fehler bei der Bestimmung der Gitterconstante nach der Methode der directen Ausmessung der Striche unter dem Microscop beträgt also 14 Einheiten der sechsten Decimale; der relative Fehler von e muss jedoch kleiner sein.

Aus der Übereinstimmung der verschiedenen Mittelwerthe von e und in Anbetracht der möglichen Beobachtungsfehler ist man wohl berechtigt, den Schluss zu ziehen, dass e in der Mitte des Gitters und auf den Rändern desselben denselben Werth hat, folglich weist das Gitter I keinen systematischen Fehler auf und muss in dieser Beziehung als ein sehr gutes bezeichnet werden. Diese Bemerkung gestattet, aus allen vier erhaltenen Werthen von e das Gesammtmittel zu bilden.

Es ergiebt sich also für die Constante des Gitters I

$$e = \mathbf{0{,}001687} \,{}^{m}/_{m}.$$

Diese Grösse wurde noch nach einer zweiten, optischen, viel genaueren Methode ermittelt, welche gestattet, die siebente Decimale in dem Werth von e genau festzustellen.

Zu diesem Zwecke wurde das Diffractionsgitter auf dem Tischchen eines ziemlich grossen Spectrometers, welches vorher richtig justirt und auf Unendlich eingestellt war, aufgestellt und zwar senkrecht zur Axe des Collimatorrohres.

Dieses geschah auf folgende Weise. Zuerst wurde das Fernrohr in der Verlängerung der Collimatoraxe eingestellt und alsdann das Gitter in senkrechte Stellung zur Axe des Fernrohres gebracht, was leicht zu erreichen war, da das Fernrohr mit einem Gauss'schen Ocular versehen war.

Es blieb dann nichts übrig, als das Gitter um 180° zu drehen. Da aber das Tischchen keine Theilung besass, so wurde die Drehung um 180° auf folgende Weise erzielt. Auf einer Seite des Gitters und zwar ungefähr senkrecht zur Fläche desselben, wurde ein besonderer kleiner Spiegel angebracht und, nachdem das Gitter senkrecht zum Fernrohr gestellt war, wurde dasselbe so weit gedreht, bis das beleuchtete Fadenkreuz mit dem in dem kleinen Spiegel reflectirten Bild desselben zusammenfiel. Alsdann wurde das Fernrohr um 180° gedreht und das Gitter so weit nachgedreht, bis das Fadenkreuz mit seinem Bilde im kleinen Spiegel zur Deckung gebracht war. Dann musste das Gitter senkrecht zum Collimator stehen.

Ist das Gitter wirklich ganz richtig gestellt, ist also der Winkel φ zwischen dem einfallenden Strahl und der Gitternormale wirklich gleich Null, so müssen die einer und derselben Wellenlänge entsprechenden Ablenkungen auf beiden Seiten der Gitternormale gleich sein. Es müsste also $\psi = \psi_1$ sein.

Es gelang mir nie, die Winkel ψ und ψ_1 nach der beschriebenen Methode *vollständig* auszugleichen, aber der Unterschied zwischen denselben war immer sehr klein, höchstens 5 bis 6 Bogenminuten.

Eine vollständige Ausgleichung der Winkel ψ und ψ_1 ist auch gar nicht notwendig, da man aus den erhaltenen Werthen derselben entweder φ bestimmen kann oder, was viel besser ist, den Winkel ψ_0 ermitteln, welcher sich ergeben würde, wenn φ wirklich gleich Null wäre.

Es ist mit sehr grosser Genauigkeit

$$\psi_0 = \frac{\psi + \psi_1}{2}.$$

Wollen wir zunächst den Fehler bestimmen, welchem man begegnen kann, wenn $\psi_0 = \frac{\psi + \psi_1}{2}$ gesetzt wird.

Setzen wir

$$\psi_1 - \psi = \varepsilon\,[1]) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$\psi_0 = \frac{\psi + \psi_1}{2} + \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo ε und α beide sehr klein sind, und wollen wir nun den Ausdruck für α aufsuchen.

1) ε kann nach Belieben positiv oder negativ sein.

Zu diesem Zwecke haben wir nur die Formeln (1) und (2) in Anwendung zu bringen.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}(\psi-\varphi)-\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin}\psi_0 \ldots\ldots \\ \operatorname{Sin}(\psi_1+\varphi)+\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin}\psi_0 \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist nun φ zu eliminiren.

Wollen wir nun die entsprechenden Entwickelungen bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung φ^3 und ε^3 durchführen [1]).

Es ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi-\operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\varphi-\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin}\psi_0 \\ \operatorname{Sin}\psi_1 \operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Cos}\psi_1 \operatorname{Sin}\varphi+\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin}\psi_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

oder

$$\operatorname{Sin}\psi-2\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{Sin}\psi_0}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

$$\operatorname{Sin}\psi_1+2\operatorname{Cos}^2\frac{\psi_1}{2}\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{Sin}\psi_0}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\operatorname{Sin}\psi_1-\operatorname{Sin}\psi}{2\left[\operatorname{Cos}^2\frac{\psi_1}{2}+\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}\right]}.$$

Setzt man für ψ_1 seinen Werth aus der Formel (4) ein, so erhält man bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\operatorname{Sin}\psi_1=\operatorname{Sin}(\psi+\varepsilon)=\operatorname{Sin}\psi-\frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{Sin}\psi+\varepsilon\operatorname{Cos}\psi$$

$$\operatorname{Cos}\frac{\psi_1}{2}=\operatorname{Cos}\frac{\psi}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}\operatorname{Cos}\frac{\psi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{Sin}\frac{\psi}{2},$$

also

$$\varphi=-\frac{\varepsilon\operatorname{Cos}\psi\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\psi\right\}}{4\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right\}},$$

oder

$$\varphi=-\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left\{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right\}\right] \ldots\ldots\ldots (8)$$

Diese Formel gestattet den Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Gitternormale zu berechnen.

1) Es ist nicht schwer einzusehen, dass $\varphi < \varepsilon$ sein muss.

Aus der ersten der Formeln (7) erhält man mit derselben Genauigkeit

$$\operatorname{Sin}\psi-\frac{\varphi^2}{2}\operatorname{Sin}\psi-\varphi.2\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}=\operatorname{Sin}\psi_0.$$

Führt man nun hierin den Werth von φ aus der Formel (8) ein, so bekommt man, wiederum bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\operatorname{Sin}\psi-\operatorname{Sin}\psi_0=-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{Cos}\psi+\frac{\varepsilon^2}{4}\operatorname{Cos}\psi\left\{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{32}\operatorname{Sin}\psi\,\frac{\operatorname{Cos}^2\psi}{\operatorname{Cos}^4\frac{\psi}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Nun haben wir wegen (4) und (5)

$$\operatorname{Sin}\psi_0=\operatorname{Sin}\left(\frac{2\psi+\varepsilon}{2}+\alpha\right)=\operatorname{Sin}\psi\left\{1-\frac{\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{2}\right\}+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{Cos}\psi,$$

folglich wird

$$\operatorname{Sin}\psi-\operatorname{Sin}\psi_0=-\alpha\operatorname{Cos}\psi-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{Cos}\psi+\frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Sin}\psi+\frac{\alpha\varepsilon}{2}\operatorname{Sin}\psi+\frac{\varepsilon^2}{8}\operatorname{Sin}\psi.$$

Bringt man diesen Werth in der Formel (9) ein, so ergiebt sich

$$-\alpha\operatorname{Cos}\psi\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\psi-\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\psi\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{4}\operatorname{Cos}\psi\left[\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\frac{\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi}{8\operatorname{Cos}^4\frac{\psi}{2}}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi\right],$$

oder, bei Beibehaltung nur von Gliedern zweiter Ordnung,

$$\alpha=-\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\frac{\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi}{8\operatorname{Cos}^4\frac{\psi}{2}}\right].$$

Der in den Klammern stehende Ausdruck lässt sich leicht umformen. Setzen wir der Einfachheit wegen $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=x$, so haben wir bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\psi &= \frac{2x}{1+x^2} \\ \operatorname{Cos}\psi &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{2x}{1-x^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Dann wird

$$\alpha = -\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{x}{1-x^2} - x + \frac{\frac{2\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{8\,\frac{1}{(1+x^2)^2}}\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{4}x\left[\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{4}\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{4}x\left[\frac{4\,x^2 + (1-x^2)^2}{4\,(1-x^2)}.\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{16}\cdot x\,\frac{\frac{1+x^2}{1-x^2}}{1+x^2},$$

oder, unter Berücksichtigung der Gleichungen (10),

$$\alpha = -\frac{\varepsilon^2}{16}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{Cos}\psi.\operatorname{Cos}^2\frac{\psi}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Diese Formel zeigt nun erstens, dass α von derselben Ordnung wie ε^2, also eine sehr kleine Grösse ist, wenn ψ nicht allzu gross ist. Zweitens, da bei den von uns gewählten Bezeichnungen ψ immer positiv ist, so wird α immer negativ, unabhängig von dem Vorzeichen von ε. Also der wahre Winkel ψ_0 für den senkrecht einfallenden Strahl immer etwas kleiner ausfällt, als das arithmetische Mittel der beiden gemessenen Ablenkungen. Der Unterschied ist jedoch so klein, dass man

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi}{2}$$

setzen darf.

In der That, bei meinen Untersuchungen mit den Gittern geschahen alle Messungen im zweiten Spectrum. Als Lichtquelle verwendete ich Natriumlicht (Kochsalz in einem Bunsen-Brenner). In diesem Fall war ψ für das Gitter I ungefähr gleich 44°.

Setzen wir also

$$\psi = 44^\circ$$

und

$$\varepsilon = 0^\circ\,6',$$

so findet man nach der Formel (11)

$$\alpha = -0'',026.$$

Die ausgesprochene Behauptung ist also völlig berechtigt.

Zur Berechnung der Gitterconstante hat man sich also folgender Gleichung zu bedienen.

$$e = \frac{2\,\lambda}{\operatorname{Sin}\psi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Bei Bestimmung der Gitterconstante wurden immer die Ablenkungen beider Natrium-Linien D_2 und D_1 gemessen.

Nach Rowland[1]) ist

für D_2 $\lambda = 5890,182$ A. E.

für D_1 $\lambda = 5896,154$ A. E.

In der folgenden Tabelle sind nun die Resultate der Beobachtungen mit dem Gitter I zusammengestellt.

Die erste Colonne enthält die beobachtete Linie, die zweite den entsprechenden Winkel ψ_0, als Mittel von ψ_1 und ψ, und die letzte die nach der Formel (12) berechnete Gitterconstante e.

Tabelle V.

Gitter I.

Spectrallinie.	ψ_0	e
D_2	44° 11′ 49″	0,0016898 $^m/_m$
	44 11 55	0,0016898
D_2	44 15 16	0,0016898
	44 15 12	0,0016998
Im Mittel		0,0016898 $^m/_m$

Die Übereinstimmung der einzelnen Werthe von e ist bis auf die siebente Decimale eine absolute.

Die Constante des Gitters I ist also gleich

$$e = \mathbf{0{,}0016898}\ {}^m/_m.$$

Bis auf die sechste Decimale abgerundet erhalten wir

$$e = 0{,}001690\ {}^m/_m.$$

1) Tabellen von Landolt und Börnstein.

Die directen Ausmessungen hatten, wie wir früher gesehen haben, ergeben

$$e = 0,001687\ ^m/_m.$$

Die Übereinstimmung kann als eine sehr befriedigende bezeichnet werden.

Mit dem genauen Werth von $e = 0,0016898$ berechnet sich die Anzahl der Striche n pro Zoll zu

$$n = \mathbf{15031},$$

statt

$$n = 14438,$$

welche direct auf dem Gitter aufgeschrieben ist und

$$e = 0,0017592\ ^m/_m$$

ergeben würde. Der Unterschied beträgt etwa 4 %.

Es ergiebt sich also das ganz unerwartete Resultat, dass ein sehr schönes Rowland'sches Gitter eine ganz falsche Zahl trägt. Die Gitterconstante ist bedeutend kleiner, als die von Rowland angegebene.

Die früher erwähnte Nichtübereinstimmung in der Lage der Linien im grossen Spectrographen zwischen Theorie und Beobachtung, welche Anlass zu dieser speciellen Untersuchung gab, findet also ihre volle Erklärung in der Unrichtigkeit des angenommenen Werthes der Gitterconstante.

Diese sonderbare Erfahrung hat mich zu der Vermuthung geführt, dass vielleicht auch der von Hasselberg bei seinen Untersuchungen angenommene Werth der Constante seines Gitters (Gitter II) $e = 0,0017592\ ^m/_m$, welche direct aus der Zahl $n = 14438$ folgt, ebenfalls unrichtig sei.

Um dieses zu controlliren, habe ich das Hasselberg'sche Gitter II aus Pulkowa erhalten und ganz ähnlich wie das Gitter I untersucht, und zwar ebenfalls nach zwei verschiedenen Methoden: 1) mit dem Microscop, 2) mit dem Spectrometer.

Die Resultate dieser Ausmessungen sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle VI.

$\Delta = 0,0019956\ ^m/_m.$

Mitte des Gitters II.

Theilung des Ocularmicrometers.	Anzahl der Gitterstriche (k) auf je 10 Theile des Ocularmicrometers.				Mittel.
0— 10	12,0	11,6	12,0	11,8	11,85
10— 20	11,7	11,5	11,8	11,8	11,70
20— 30	11,4	11,8	11,7	11,4	11,58
30— 40	11,9	11,4	11,5	11,7	11,62
40— 50	11,5	11,3	11,8	11,6	11,55
50— 60	11,5	11,5	11,4	11,5	11,48
60— 70	11,5	11,4	11,6	11,5	11,50
70— 80	11,5	11,4	11,4	11,5	11,45
80— 90	11,0	11,3	11,5	11,2	11,25
90—100	10,5	11,2	11,3	11,5	11,12
Mittel.	11,45	11,44	11,60	11,55	11,51

Im Mittel $k = 11,51$,

also $e = \mathbf{0,001734}\ ^m/_m.$

Tabelle VII.

$\Delta = 0,0019947\ ^m/_m.$

Mitte des Gitters II.

Theilung des Ocularmicrometers.	k			Mittel.
0— 10	11,4	12,0	11,8	11,73
10— 20	11,9	11,9	11,7	11,83
20— 30	11,6	11,5	11,8	11,63
30— 40	11,4	11,5	11,4	11,43
40— 50	11,5	11,7	11,8	11,67
50— 60	11,7	11,7	11,8	11,73
60— 70	11,6	11,3	11,3	11,40
70— 80	11,2	11,2	11,6	11,33
80— 90	11,1	11,3	11,3	11,23
90—100	11,4	11,3	11,3	11,33
Mittel.	11,48	11,54	11,58	11,53

Im Mittel $k = 11,53$,

also $e = \mathbf{0,001730}\ ^m/_m.$

Tabelle VIII.

$\Delta = 0{,}0019947\ ^{m}/_{m}$.

Rand des Gitters II (rechts).

Theilung des Ocular-micrometers.	k			Mittel.
0— 10	11,6	11,7	11,9	11,73
10— 20	11,9	11,7	11,7	11,77
20— 30	11,7	11,6	11,5	11,60
30— 40	11,5	11,8	11,7	11,67
40— 50	11,2	11,6	11,5	11,43
50— 60	11,6	11,6	11,6	11,60
60— 70	11,3	11,2	11,4	11,30
70— 80	11,6	11,3	11,6	11,50
80— 90	11,3	11,2	11,0	11,17
90—100	11,2	11,2	11,1	11,17
Mittel.	11,49	11,49	11,50	11,49

Im Mittel $k = 11{,}49$,

also $$e = \mathbf{0{,}001736}\ ^{m}/_{m}.$$

Tabelle IX.

$\Delta = 0{,}0019947\ ^{m}/_{m}$.

Rand des Gitters II (links).

Theilung des Ocular-micrometers.	k			Mittel.
0— 10	11,9	11,8	11,7	11,80
10— 20	11,9	11,9	11,9	11,90
20— 30	11,8	11,8	12,0	11,87
30— 40	11,5	11,6	11,4	11,50
40— 50	11,8	11,8	11,8	11,80
50— 60	11,2	11,5	11,4	11,37
60— 70	11,8	11,3	11,5	11,53
70— 80	11,6	11,8	11,7	11,70
80— 90	11,4	11,3	11,4	11,37
90—100	11,3	11,6	11,5	11,47
Mittel.	11,62	11,64	11,63	11,63

Im Mittel $k = 11{,}63$,

also $$e = \mathbf{0{,}001715}\ ^{m}/_{m}.$$

Tabelle X.

Gitter II.

Spectrallinie.	ψ_0 [1]	e
D_2	42° 1′ 43″	0,0017596 $^{m}/_{m}$
	42 1 45	0,0017596
D_1	42 4 47	0,0017596
	42 4 46	0,0017596
Im Mittel.		0,0017596 $^{m}/_{m}$

Die Übereinstimmung der einzelnen Werthe von e ist bis auf die siebente Decimale eine vollkommene.

Die Constante des Gitters II ergiebt sich also gleich

$$e = \mathbf{0{,}0017596}\ ^{m}/_{m}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem aus der auf dem Gitter aufgeschriebenen Zahl $n = 14438$ gefolgerten Werth

$$e = 0017592\ ^{m}/_{m}.$$

Meine Vermuthung bezüglich des Hasselberg'schen Gitters hat sich also nicht bestätigt. Die aufgeschriebene Zahl von Strichen n pro Zoll ist richtig angegeben. Desto sonderbarer erscheint es, dass auf einem viel besseren Gitter diese Zahl ganz falsch ist.

Was nun die Bestimmungen der Gitterconstante des Gitters II mit dem Mikroscop anbelangt, so sehen wir, dass die Werthe von e am rechten Rande des Gitters und der Mitte desselben gut mit einander übereinstimmen, der Mittelwerth dieser Zahlen ist 0,001733; was nun aber den linken Rand anbetrifft, so ist für denselben die Gitterconstante bedeutend kleiner, und zwar ist

$$e = 0{,}001715\ ^{m}/_{m}.$$

Der Unterschied zwischen beiden Werthen ist grösser, als der maximale Beobachtungsfehler 0,000014 $^{m}/_{m}$.

1) Jede Zahl ist das arithmetische Mittel zweier besonderer Bestimmungen von ψ_0. Der grösste Unterschied zwischen diesen Werthen beträgt 6″.

Es scheint also, als ob die Gitterconstante auf der linken Seite des Gitters etwas kleiner wäre.

Ausserdem ist noch zu betonen, dass beide Werthe 0,001733 und 0,001715 bedeutend kleiner sind, als der wahre Werth der Gitterconstante

$$e = 0{,}001760\ ^{m}/_{m}.$$

Der Unterschied ist bedeutend grösser als der maximal zulässige Beobachtungsfehler.

Diese sonderbare Thatsache lässt sich wohl dadurch erklären, dass das Gitter II systematische Fehler besitzt (man sehe z. B. die Zahlen der letzten Colonnen der Tabellen VI, VII, VIII und IX).

Beim Gitter I waren systematische Fehler nicht zu erkennen.

Es erscheint also ganz zweifelhaft, ob man so ohne Weiteres mittlere Werthe der Gitterconstante bilden darf.

Würde man den kleinsten in den letzten Colonnen sich befindenden Werth von k nehmen, nämlich $k = 11{,}12$, so würde sich mit demselben die Gitterconstante zu

$$e = 0{,}001794\ ^{m}/_{m}$$

berechnen.

Der wahre Werth der Gitterconstante liegt also zwischen den Werthen, welche sich aus der Ausmessung des Gitters ergeben würden.

Wir müssen aus diesen Erfahrungen den Schluss ziehen, dass das Gitter II kein besonders gutes ist. In der That sind auch die Bilder, welche man mit demselben bekommt, viel schlechter als mit dem Gitter I; ausserdem, unter dem Mikroscop gesehen, scheinen die Linien viel weniger scharf zu sein. Es treten noch neben den Hauptstrichen secundäre Linien auf, welche einen störenden Einfluss auf die mit diesem Gitter erzeugten Bilder haben müssen.

Zur Controlle habe ich noch das kleine Gitter III des physikalischen Cabinets der Akademie der Wissenschaften in ähnlicher Weise wie die beiden vorigen untersucht.

Die Resultate der directen Ausmessungen unter dem Mikroscop und auf dem Spectrometer sind in den folgenden zwei Tabellen angegeben.

Tabelle XI.

$\Delta = 0{,}0019956\ ^{m}/_{m}.$

Mitte des Gitters III.

Theilung des Ocular-micrometers.	Anzahl der Gitterstriche (k) auf je 10 Theile des Ocularmicrometers.			Mittel.
0— 10	11,2	11,3	11,6	11,37
10— 20	11,5	11,2	11,2	11,30
20— 30	11,4	11,6	11,2	11,40
30— 40	11,1	11,2	11,6	11,30
40— 50	11,5	11,2	11,2	11,30
50— 60	11,5	11,3	11,0	11,27
60— 70	11,2	11,3	11,5	11,33
70— 80	11,3	11,4	11,2	11,30
80— 90	11,5	11,3	11,3	11,37
90—100	11,2	11,4	11,6	11,40
Mittel.	11,34	11,32	11,34	11,33

Im Mittel $k = 11{,}33$,

also $e = \mathbf{0{,}001761}\ ^{m}/_{m}.$

Tabelle XII.

Gitter III.

Spectral-linien.	ψ_0	e
D_2	42° 1′ 30″	0,0017597 $^{m}/_{m}$
	42 1 36	0,0017596
	42 1 59	0,0017594
D_1	42 4 39	0,0017597
	42 4 46	0,0017596
	42 5 18	0,0017593
Im Mittel		0,0017596 $^{m}/_{m}$

Die Constante des Gitters III ist also gleich

$$e = \mathbf{0{,}0017596}\ ^{m}/_{m},$$

also in sehr gutem Einklang mit der auf dem Gitter aufgeschriebenen Zahl $n = 14438$.

Der auf die sechste Decimale abgerundete Werth von $e = 0{,}001760\ ^{m}/_{m}$ stimmt sehr gut mit der aus den Messungen mit dem Mikroscop sich ergebenden Zahl $e = 0{,}001761\ ^{m}/_{m}$ überein.

Die letzte Colonne der Tabelle XI zeigt in der That, dass k auf den verschiedenen Theilen des Ocularmicrometers, innerhalb der Beobachtungsfehler, seinen Werth behält, wie beim Gitter I.

Das Gitter III ist also in dieser Hinsicht ebenfalls als ein sehr gutes Gitter zu bezeichnen, obgleich, unter dem Mikroscop gesehen, neben den Hauptstrichen noch secundäre Striche auftreten.

Fassen wir nun die Resultate dieser ganzen Untersuchung zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

Das Gitter I des physikalischen Cabinets der Akademie der Wissenschaften ist ein sehr schönes Gitter, welches sehr gute und scharfe Bilder liefert. Die Gitterconstante behält auf verschiedenen Theilen der Gitterfläche denselben Werth. Die Übereinstimmung der nach zwei verschiedenen Methoden bestimmten Werthe von e ist eine sehr gute, aber die auf dem Gitter selbst aufgeschriebene Zahl n, welche die Anzahl der Striche pro Zoll angiebt, ist ganz falsch. Statt $n = 14438$ müsste $n = 15031$ sein, was einen Unterschied von 4% ausmacht.

Das Gitter II aus der Pulkowa'schen Sternwarte, mit welchem Hasselberg gearbeitet hat, giebt viel schlechtere Bilder, als das Gitter I. Die Anzahl der Striche n pro Zoll ist richtig angegeben, aber der mit dem Spectrometer bestimmte Werth der Gitterconstante stimmt nicht mit dem aus den Messungen mit dem Mikroscop sich ergebenden überein. Der Unterschied zwischen beiden ist grösser als der noch zulässige Beobachtungsfehler. Die Gitterconstante ist nicht in allen Theilen des Gitters dieselbe, aber der wahre Werth derselben liegt zwischen dem aus den Ausmessungen des Gitters sich ergebenden maximalen und minimalen Werth der Gitterconstante. Das Gitter II, unter dem Mikroscop gesehen, zeigt neben den Hauptstrichen noch secundäre Striche, die im Gitter I vollständig fehlen.

Das Gitter III des Physikalischen Cabinets giebt schlechtere Bilder als das Gitter I. Die Anzahl der Striche n pro Zoll ist wiederum richtig angegeben. Die Übereinstimmung der nach zwei verschiedenen Methoden bestimmten Werthe der Gitterconstante ist eine sehr gute. So weit die Beobachtungen reichen, kann auf eine Veränderlichkeit der Gitterconstante für verschiedene Theile des Gitters nicht geschlossen werden, obgleich, unter dem Mikroscop gesehen, die Gitteroberfläche neben den Hauptstrichen noch secundäre Striche aufweist.