

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Kevin Sults
Murruliste tuletiste leidumisest
Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Kaido Lätt
prof. Arvet Pedas

TARTU 2026

MURRULISTE TULETISTE LEIDUMISEST

Bakalaureusetöö

Kevin Sults

Lühikokkuvõte

Käesolevas lõputöös antakse ülevaade murrulist järku tuletiste teooriast ning rakendatakse seda funktsioonide murrulist järku tuletiste leidmisel ning saadud tulemuste visualiseerimisel. Töös esitatakse Riemann-Liouville'i integraaloperaatori, Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori ning Caputo diferentsiaaloperaatori definitsioonid ning uuritakse nende mõningaid olulisi omadusi.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Riemann-Liouville'i integraaloperaator, Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaator, Caputo diferentsiaaloperaator.

ON EXISTANCE OF FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES

Bachelor's thesis

Kevin Sults

Abstract

This thesis provides an overview of the theory of fractional order derivatives and applies it to calculate and visualize fractional order derivatives of functions. We establish the definitions of the Riemann-Liouville integral operator, Riemann-Liouville differential operator and Caputo differential operator while looking at some of their fundamental properties.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Riemann-Liouville integral operator, Riemann-Liouville differential operator, Caputo differential operator.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Eelteadmised	4
1.1 Tähistused	4
1.2 Tuletis- ja integraaloperaator	5
1.3 Gammafunktsioon	7
1.4 Mittag-Leffleri funktsioon	9
2 Murrulist järku diferentsiaal- ja integraaloperaatorid	11
2.1 Riemanni-Liouville'i integraaloperaator	11
2.2 Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaator	17
2.3 Murrulist järku tuletise leidumine	20
2.4 Caputo tuletis	26
3 Funktsioonide murrulist järku tuletised	29
3.1 Astmeritta arendatavate funktsioonide murrulist järku tuletised . . .	29

Sissejuhatus

Oma 1695. aasta kirjas küsis l'Hospital Leibnizilt: „Mis saab, kui avaldises $d^n/dx^n f(x)$ võtta $n = 1/2$?“ [1, lk. 3]. Tol ajal ei osanud Leibniz seda selgitada ning antud küsimus jäi pikaks ajaks lahtiseks. Alles alates 1832. aastast Liouville'i avaldatud tööde seeriaga jõuti murrulise tuletise definitsioonini [3, lk. 23–24], mis andis lõpuks vastuse l'Hospitali küsimusele pea 150 aastat hiljem. Liouville'i teoorial baseeruvad ka käesoleva töö põhitulemused.

Viimaste aastakümnete jooksul on murruliste tuletiste teooria uurimine muutunud aktuaalsemaks. Osutub, et murrulist järku tuletisi sisaldavad diferentsiaalvõrrandid omavad rakendusi nii majanduses, keemias, inseneerias kui ka paljudes teistes valdkondades [1, lk. 3].

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda teatav ülevaade murruliste tuletiste teooriast ning saadud tulemusi rakendada funktsioonide murrulist järku tuletiste leidmisel. Seejuures käsitleme me erinevaid murrulist järku integraal- ja diferentsiaaloperaatoreid ning uurime nende põhiomadusi. Lisaks tõestame piisava tingimuse, mille korral on murrulist järku diferentsiaaloperaator rakendatav vaadeldavale funktsioonile. Lõpuks leiame murrulist järku tuletise mõningatest levinud funktsioonidest ja visualiseerime nende graafikuid.

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses toome välja murruliste tuletiste teooria jaoks olulised mõisted ning eelteadmised. Teises esitame Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori, Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori ning Caputo diferentsiaaloperaatori definitsioonid ning tõestame mõned nende põhiomadused. Kolmandas peatükis rakendame saadud tulemusi tuntud funktsioonide murrulist järku tuletiste arvutamiseks ning nende graafikute visualiseerimiseks sõltuvalt tuletise järgust.

1 Eelteadmised

1.1 Tähistused

Selles alapeatükis toome välja erinevad tähistused, elementaarsed definitsioonid ja omadused. Antud töös käsitletavate arvuhulkade seas on naturaalarvud $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ja mittenegatiivsed täisarvud $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, reaalarvud $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ning positiivsed reaalarvud $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Olgu i imaginaarühik, mis rahuldab tingimust $i^2 = -1$, ning $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ kompleksarvude hulk. Olgu $0 < T < \infty$. Antud töös uurime funktsioone peamiselt fikseeritud lõigul $[0, T] \subset \mathbb{R}$.

Funktsioonide ruumidest ja hulkadest toome esile lõigus $[0, T]$ pidevate funktsioonide hulga $C[0, T]$, mis on Banachi ruum lõpmatusnormiga

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|, \quad f \in C[0, T].$$

Kui $m \in \mathbb{N}$, siis lõigus $[0, T]$ m -korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk olgu $C^m[0, T]$. Lebesgue'i mõttes lõigus $[0, T]$ integreeruvate funktsioonide hulka tähistame $L_1[0, T]$, mis on Banachi ruum normiga

$$\|f\|_1 = \int_{[0, T]} |f(t)| dt < \infty, \quad f \in L_1[0, T].$$

Kirjapildiga $\int_{[0, T]} f(t) dt$, kus märgime integreerimispiirkonna integraali alla, viitame me asjaolule, et tegu on Lebesgue'i integraaliga.

Olgu X hulk ja $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ suvalised funktsioonid ning $a \in \mathbb{R}$ konstant. Defineerime funktsiooni konstandiga korrutamise, funktsioonide liitmise ning korrutamise punktiviisi, see tähendab, et iga $x \in X$ korral

$$(af)(x) := af(x), \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

Olgu f suvaline funktsioon. Kirjanduses ei eristata tihti funktsiooni f ning selle väärtustamise eeskirja $f(x)$. Antud töös kasutame operaatoreid, mis teisendavad funktsioone funktsioonideks, mistõttu vajame selgemat tähistust. Sümboliga „ $\cdot$ “ tähistame avaldises kohta, kuhu paigutub teisendatav argument. Vajadusel ümbritseme selle selguse mõttes sulgude või nurksulgudega. Nii defineerime funktsiooni otse selle eeskirja kaudu. Näiteks $e^{[\cdot]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on eksponentfunktsioon $x \mapsto e^x$. Keerulisema näitena kirjeldab funktsioon $(\sum_{k=0}^{20} k! \sin(7 \cdot) + \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ teisendust $x \mapsto (\sum_{k=0}^{20} k! \sin(7x) + x)$.

Tõestuse lõppu tähistame sümboliga ■.

1.2 Tuletis- ja integraaloperaator

Esitame järgnevalt klassikaliste tuletis- ja integraaloperaatorite kirjeldused ning toome välja mõned nende olulisemad omadused.

Olgu funktsioon f lõigul $[0, T]$ diferentseeruv. Defineerime (klassikalise) *diferentsiaaloperaatori* D iga $x \in [0, T]$ korral seosega

$$(Df)(x) := f'(x), \quad (1)$$

kus

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Punktide $x = 0$ ja $x = T$ korral vaatame vastavalt parem- ja vasakpoolseid piirväärtusi $h \rightarrow 0+$ või $h \rightarrow 0-$, kui need leiduvad.

Tähistame $D^0 f := Id f = f$, kus Id on ühikoperaator. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame n -kordset operaatori D rakendamist järgmiselt: $D^n f := DD^{n-1} f$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja f funktsioon, mis on n korda diferentseeruv punktis 0. Operaatorit T_n , mis on defineeritud iga $x \in \mathbb{R}$ korral eeskirjaga

$$(T_n f)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad (2)$$

nimetatakse *n-järku Taylori operaatoriks* punktis 0.

Järgmiselt defineerime (klassikalise) integraaloperaatori ning toome välja selle mõned olulised omadused.

Olgu funktsioon f lõigus $[0, T]$ (Lebesgue'i mõttes) integreeruv. Operaatorit $J: L_1[0, T] \rightarrow L_1[0, T]$, mis on määratud seosega

$$(Jf)(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, T], \quad (3)$$

nimetame (klassikaliseks) *integraaloperaatoriks*.

Olgu f lõigus $[0, T]$ (Lebesgue'i mõttes) integreeruv. Sarnaselt diferentsiaaloperaatorile, defineerime $J^0 f := Idf = f$ ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame järjestikust integreerimist võrdusega $J^n f := JJ^{n-1} f$.

Teoreem 1 (Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem). *Olgu f lõigul $[0, T]$ Riemanni mõttes integreeruv funktsioon. Seosega*

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, T]$$

määratud funktsioon F on lõigus $[0, T]$ ühtlaselt pidev ning, kui f on punktis $x \in [0, T]$ pidev, siis F on selles punktis diferentseeruv, kusjuures $F'(x) = f(x)$.

Viimane teoreem on tõestatud õpikus [2, lk. 366–367].

Kui f on lõigus $[0, T]$ pidev funktsioon, siis seoste (1), (3) ning teoreemi 1 põhjal saame kirjutada

$$DJf = f. \quad (4)$$

Olgu f lõigus $[0, T]$ Lebesgue'i mõttes integreeruv funktsioon. Mitmekordset integreerimist saab esitada valemiga raamatust [4, lk 123]:

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (5)$$

Seda valemit tuntakse ka kui Cauchy n -kordse integreerimise valemit funktsiooni f jaoks ning sellest lähtume hiljem murrulist järku tuletiste defineerimisel.

Veendume kõigepealt, et valem tõepoolest kehtib. Siis paneme tähele, et $n = 1$ korral

$$(Jf)(x) = \frac{1}{0!} \int_0^x (x-t)^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

Olgu $n \geq 2$. Kehtigu valem $n - 1$ korral, siis

$$(J^n f)(x) = (JJ^{n-1}f)(x) = \int_0^x (J^{n-1}f)(t) dt = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x \int_0^t (t-s)^{n-2} f(s) ds dt.$$

Viimases avaldises integreerimisjärjekorda muutes saame

$$\begin{aligned} (J^n f)(x) &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x \int_0^t (t-s)^{n-2} f(s) ds dt = \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x \int_s^x (t-s)^{n-2} f(s) dt ds = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x f(s) \int_s^x (t-s)^{n-2} dt ds = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Järelikult matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal kehtib valem (5) iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

1.3 Gammafunktsioon

Järjestikusel diferentseerimisel ja integreerimisel kerkib loomulikul viisil esile faktoriaali funktsioon $f(n) = n!$, mille määramispiirkonnaks on hulk $\mathbb{N}_0$. Murruliste tuletiste teoorias tekib aga vajadus seda üldistada positiivsete reaalarvude hulgale $\mathbb{R}^+$. Osutub, et faktoriaalile loomulikke omadusi rahuldavaid jätke on mitu, nendest käesoleva töö raames on kõige olulisem Euleri gammafunktsioon Γ . Selles alapeatükis defineerime selle funktsiooni ja toome välja mõned selle olulised omadused, toetudes raamatutes [5, 7] kasutatud ideedele.

Definitsioon 1. Olgu $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$. Päratut parameetrist sõltuvat integraali

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{6}$$

nimetatakse *Euleri teist järku integraaliks*, ehk *Euleri gammafunktsiooniks* või lihtsalt *gammafunktsiooniks*.

Siinkohal märgmine, et valemiga (6) esitatud päratu integraal koondub hulgas

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\},$$

mis sisaldab antud töö raames ka meile kõige olulisemat hulka $\mathbb{R}^+$. Selleks peame näitama kompleksmuutuja funktsioonide teooriale tuginedes [7, lk. 53], et päratu integraal koondub ühtlaselt igas kinnises tõkestatud piirkonnas $D' \subset D$. Olgu selline D' fikseeritud, ühtlase koondumise näitamiseks kasutame Weierstrassi koondumistunnust. Kuna D' on kinnine ja tõkestatud, siis leiduvad arvud m ja M nii, et $0 < m \leq x \leq M$ iga $z = x + iy \in D'$ korral. Defineerime funktsiooni g järgmiselt:

$$g(t) := \begin{cases} t^{m-1}, & \text{kui } t \in [0, 1]; \\ e^{-t}t^{M-1}, & \text{kui } t > 1. \end{cases}$$

Funktsiooni g abil saame gammafunktsiooni definitsioonis (6) integraalialuse funktsiooni mooduli jaoks anda hinnangu:

$$|e^{-t}t^{x-1+iy}| = |e^{-t}t^{x-1}e^{i\ln(t)y}| \leq |e^{-t}||t^{x-1}| = e^{-t}t^{x-1} \leq g(t).$$

Nüüd piisab näidata, et

$$\int_0^\infty g(t) dt < \infty.$$

Viimase avaldise vasakul poolel oleva integraali saame funktsiooni g definitsiooni põhjal esitada kujul

$$\int_0^\infty g(t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^\infty g(t) dt = \int_0^1 t^{m-1} dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{M-1} dt.$$

Seejärel kasutades matemaatilises analüüsis tuntud tulemusi näeme, et viimases summas esimene päratu integraal koondub, sest t^{m-1} astendaja rahuldab tingimust $m-1 > -1$ ning teine integraal koondub, sest see sisaldab tegurit e^{-t} . Sellega olemegi näidanud, et gammafunktsioon on määratud ja lisaks ka analüütiline iga $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$ korral.

Gammafunktsioon rahuldab iga $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$ korral omadust

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (7)$$

Selles võime veenduda kasutades ositi integreerimist:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = (-e^{-t} t^z) \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Lisaks kehtib

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

mis võimaldab meil valemi (7) abil öelda, et $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1!$ jne. Korduv valemi rakendamine annab meile seose

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (8)$$

Kasutades kompleksmuutuja funktsioonide analüütilise jätkamise võtet, saame gammafunktsiooni määramispiirkonna $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ laiendada suuremaks piirkonnaks $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Selleks panememe esmalt tähele, et iga $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0, z \neq 0$ korral saame valemist (7) seose

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (9)$$

mis on esialgse funktsiooni jätk uude piirkonda $\{z \in \mathbb{C}, -1 < \operatorname{Re} z \leq 0, z \neq 0\}$. Seejärel on seose (9) rakendamist võimalik korrata hulgal $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1, z \neq -1$ jne. Osutub, et sellise jätkamise tulemusel on gammafunktsioon ka uues piirkonnas pidev ja analüütiline [7, lk. 161].

1.4 Mittag-Leffleri funktsioon

Mitmeid murruliste tuletiste teoorias esinevaid avaldise on lihtsam kirja panna kasutades rootsi matemaatiku Gösta Mittag-Leffleri järgi nime saanud funktsioone.

Definitsioon 2. Olgu $\mu \in \mathbb{R}^+$ ning $z \in \mathbb{C}$. Funktsiooni E_μ , mis on defineeritud eeskirjaga

$$E_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\mu + 1)}, \quad (10)$$

nimetatakse *üheparametriliseks Mittag-Leffleri funktsiooniks*.

Anname järngnevalt ka veidi üldisema definitsiooni.

Definitsioon 3. Olgu $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ ning $z \in \mathbb{C}$. Funktsiooni $E_{\mu, \nu}$, mis on defineeritud eeskirjaga

$$E_{\mu, \nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\mu + \nu)} \quad (11)$$

nimetatakse *kaheparametriliseks Mittag-Leffleri funktsiooniks*.

Nende definitsioonide põhjal on lihtne veenduda, et $E_{\mu, 1}(z) = E_{\mu}(z)$ ning $E_1(z) = e^z$. Definitsioonid on korrektsed, sest read (10) ja (11) koonduvad iga $z \in \mathbb{C}$ korral [1, lk. 68].

2 Murrulist järku diferentsiaal- ja integraaloperaatorid

2.1 Riemanni-Liouville'i integraaloperaator

Esmaseid ideid murrulist järku tuletiste teoorias võib leida Niels Henrik Abeli 1823. aastal avaldatud tööst. Selles kasutas ta algelist versiooni murrulist järku integraalist ja tuletisest, mida tänapäeval tuntakse vastavalt Riemanni-Liouville'i integraali ja Caputo tuletisena. Kahjuks ei käsitlenud Abel neid oma hilisemates töödes ning seetõttu tema panus sellesse teooriasse unustati pikkadeks aastakümneteks. Alates 1832. aastast avaldatud tööde seerias tõi Liouville sisse esimese murrulise analüüsi käsitlemise [3, lk. 23–24]. Just selle teooria edasiarendusi käsitleme põhjalikumalt ka käesolevas alapeatükis, seejuures toetume raamatule [1].

Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletiste käsitlemist alustatame murrulise integraali defineerimisest. Lähtudes Cauchy valemist (5) saame anda järgmise definitsiooni.

Definitsioon 4. Olgu $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ning $f \in L_1[0, T]$. Operaatorit $J_{R-L}^\alpha: L_1[0, T] \rightarrow L_1[0, T]$, mis on iga $x \in [0, T]$ korral defineeritud eeskirjaga

$$(J_{R-L}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (12)$$

nimetatakse α -järku Riemanni-Liouville'i integraaloperaatoriks, suurust $J_{R-L}^\alpha f$ nime-tame ka *funktsiooni f Riemanni-Liouville'i (murrulist järku) integraaliks*.

Näitame, et definitsioon on korrektne, tuginedes raamatule [8, lk. 63–65]. Olgu

$f \in L_1[0, T]$, see tähendab, et

$$\int_{[0, T]} |f(t)| dt < \infty.$$

Veendume, et $J_{R-L}^\alpha f \in L_1[0, T]$. Selleks näitame, et

$$\int_{[0, T]} |(J_{R-L}^\alpha f)(x)| dx < \infty.$$

Esmalt saame Riemanni-Liouville'i integraali seose (12) järgi lahti kirjutada ning hinnata:

$$\int_{[0, T]} |(J_{R-L}^\alpha f)(x)| dx \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_{[0, T]} \int_{[0, x]} |(x-t)^{\alpha-1} f(t)| dt dx. \quad (13)$$

Avaldises (13) on integreeritav funktsioon positiivne, mistõttu võime vahetada integreerimise järjekorra ja, arvestades tingimust $\alpha > 0$, saame kirjutada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_{[0, T]} \int_{[0, x]} |(x-t)^{\alpha-1} f(t)| dt dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{[0, T]} |f(t)| \int_{[t, T]} |x-t|^{\alpha-1} dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{[0, T]} |f(t)| \frac{|T-t|^\alpha}{\alpha} dt \leq \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{[0, T]} |f(t)| dt = \frac{T^\alpha \|f\|_1}{\Gamma(\alpha+1)} < \infty. \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et tõepoolest kehtib $J_{R-L}^\alpha f \in L_1[0, T]$.

Definitsioon 4 ei luba juhtu $\alpha = 0$. Defineerime selle sarnaselt klassikalise integraaloperaatori (3) juhuga läbi seose $J_{R-L}^0 f := Idf = f$. Seejuures kehtib järgnev lemma.

Lemma 1. *Olgu $f \in C^1[0, T]$. Siis*

$$J_{R-L}^\alpha f \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} f. \quad (14)$$

TÕESTUS. Lähtume Riemanni-Liouville'i murrulist järku integraaloperaatori definitsioonist:

$$(J_{R-L}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

kus $f \in C^1[0, T]$. Kasutades ositi integreerimist ja seost (7) saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha} f(t) \Big|_0^x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} f'(t) dt \\ &= \frac{x^\alpha f(0)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(x). \end{aligned}$$

Eelnevas vajalike piirväärtuste leidmiseks kasutasime gammafunktsiooni pidevust määramispiirkonnas ja omadust $\Gamma(1) = 1$. ■

Eespool definitsiooniga 4 esitatud integraaloperaator J_{R-L}^α rahuldab mitmeid loomulikke omadusi. Esmalt paneme tähele, et kui $\alpha \in \mathbb{N}_0$, siis seos (12) kujutab endast Cauchy valemit (5), ehk operaator J_{R-L}^α käitub $\alpha \in \mathbb{N}_0$ korral nagu valemiga (3) defineeritud klassikaline integraaloperaator J . Lisaks rahuldab klassikaline integraaloperaator J iga $m, n \in \mathbb{N}_0$ ja (Lebesgue'i mõttes) integreeruva funktsiooni f korral tingimust $J^n J^m f = J^{n+m} f$. Järgnev teoreem näitab, et antud omadus kandub edasi ka operaatorile J_{R-L}^α .

Teoreem 2. *Olgu α ja β mittenegatiivsed reaalarvud ning $f \in L_1[0, T]$. Siis*

$$J_{R-L}^\alpha J_{R-L}^\beta f = J_{R-L}^{\alpha+\beta} f = J_{R-L}^\beta J_{R-L}^\alpha f. \quad (15)$$

TÕESTUS. Juhul, kus $\alpha = 0$ või $\beta = 0$ on tulemus ilmne. Vaatame juhtu, kus $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Olgu $x \in [0, T]$, definitsiooni 4 põhjal saame

$$\begin{aligned} (J_{R-L}^\alpha J_{R-L}^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (J_{R-L}^\beta f)(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt. \end{aligned}$$

Muutes viimases avaldises integreerimisjärjekorda saame

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds.$$

Seejärel laiendame murdu $1/(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))$ arvuga $\Gamma(\alpha + \beta)$ ning kirjutame lugejas oleva gammafunktsiooni $\Gamma(\alpha + \beta)$ definitsiooni 1 järgi lahti:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x \Gamma(\alpha + \beta) (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} du dt ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Leiame eelneva võrduse kaks sisemist integraali eraldi. Teeme muutujavahetuse $v = (x-t)/(t-s)$, millest järeldub, et $dt = -(t-s)^2 dv/(x-s)$ ning $(x-t)^{\alpha-1} = v^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}$. Selle põhjal

$$\begin{aligned} & \int_s^x \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} du dt \\ &= -(x-s)^{-1} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha+\beta-2} (t-s)^2 du dv \\ &= (x-s)^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha+\beta} du dv. \end{aligned}$$

Nüüd v definitsioonist järeldub, et $t = (vs + x)/(v + 1)$ ning lisaks saame

$$t-s = \frac{vs+x}{v+1} - s = \frac{vs+x-vs-s}{v+1} = \frac{x-s}{v+1}.$$

Viimast tulemust kasutades leiame

$$\begin{aligned} & (x-s)^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha+\beta} du dv \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (v+1)^{-\alpha-\beta} du dv. \end{aligned}$$

Järgmiseks olgu $w = u/(v+1)$, siis $du = (v+1)dw$ ehk

$$\begin{aligned}
& (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (v+1)^{-\alpha-\beta} du dv \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-wv} e^{-w} w^{\alpha+\beta-1} (v+1)^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (v+1)^{-\alpha-\beta+1} dw dv \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-wv} e^{-w} w^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} dw dv.
\end{aligned}$$

Lõpuks vahetame taaskord integreerimisjärjekorda ning siis kasutame asjaolu $dv = d(wv)/w$, kokku saame:

$$\begin{aligned}
& (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-wv} e^{-w} w^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} dw dv \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-wv} w^{\alpha-1} v^{\alpha-1} e^{-w} w^\beta dv dw \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty e^{-w} w^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-wv} (wv)^{\alpha-1} d(wv) dw \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha) \int_0^\infty e^{-w} w^{\beta-1} dw = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta).
\end{aligned}$$

Eelneva avaldise viimase rea võrdustes kasutasime jälle gammafunktsiooni definit-siooni 1. Asendades leitud tulemuse avaldisse (16) saame

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} du dt ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds = (J_{R-L}^{\alpha+\beta} f)(x).
\end{aligned}$$

Sellega oleme tõestanud teoreemi väite esimese võrduse, teine järeldub vahetult, sest $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Seega

$$(J_{R-L}^\alpha J_{R-L}^\beta f)(x) = (J_{R-L}^{\alpha+\beta} f)(x) = (J_{R-L}^{\beta+\alpha} f)(x) = (J_{R-L}^\beta J_{R-L}^\alpha f)(x),$$

nagu soovitud. ■

Käesoleva töö hilisemates osades on oluline järgnev tulemus, mis annab piisava tingimuse piirväärtuse ja murrulise integraaloperaatori J_{R-L}^α rakendamise järjekorra vahetamiseks. Järgnevas tõestuses tugine me raamatule [1, lk. 21].

Teoreem 3. *Olgu $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ning olgu f ja f_k ($k \in \mathbb{N}$) pidevad funktsioonid lõigul $[0, T]$. Koondugu funktsioonide jada $(f_k)_{k=1}^\infty$ lõigul $[0, T]$ ühtlaselt funktsiooniks f ehk*

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |f_k(t) - f(t)| = \max_{t \in [0, T]} |f_k(t) - f(t)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Siis on ka koondumine $J_{R-L}^\alpha f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} J_{R-L}^\alpha f$ lõigul $[0, T]$ ühtlane:

$$\|J_{R-L}^\alpha f_k - J_{R-L}^\alpha f\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

TÕESTUS. Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori definitsiooni 4 põhjal saame iga $x \in [0, T]$ korral kirjutada

$$|(J_{R-L}^\alpha f_k)(x) - (J_{R-L}^\alpha f)(x)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x [f_k(t) - f(t)](x-t)^{\alpha-1} dt \right|.$$

Selle võrduse paremal poolel oleva avaldise jaoks kehtivad järgmised hinnangud:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x [f_k(t) - f(t)](x-t)^{\alpha-1} dt \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |f_k(t) - f(t)|(x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha \leq \frac{T^\alpha \|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Viimases võrratuse saamisel kasutasime asjaolu, et $x \in [0, T]$ ning $\alpha > 0$ korral $x^\alpha \leq T^\alpha$. Paneme ka tähele, et viimane hinnang ei sõltu muutujast x , mistõttu

$$\|J_{R-L}^\alpha f_k - J_{R-L}^\alpha f\|_\infty = \sup_{x \in [0, T]} |(J_{R-L}^\alpha f_k)(x) - (J_{R-L}^\alpha f)(x)| \leq \frac{T^\alpha \|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Sellega oleme tõestanud soovitud tulemuse. ■

Järeldus 3.1. Funktsionaaljada ühtlasest koondumisest järeldub punktiviisi koondumine, mistõttu lubab teoreem 3 piirväärtuse ning Riemanni-Liouville'i integraalo-

peraatori J_{R-L}^α vahetada ehk iga $x \in [0, T]$ korral

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} J_{R-L}^\alpha f_k\right)(x) = \left(J_{R-L}^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k\right)(x) = (J_{R-L}^\alpha f)(x).$$

2.2 Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaator

Selles alapeatükis anname Riemanni-Liouville'i murrulist järku diferentsiaaloperaatori definitsiooni ning esitame mõned selle olulisemad omadused. Siin toetume raamatule [1]. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ning $m > n$ ja f pidev funktsioon, siis diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreemist 1 saame järeldada, et

$$D^n f = D^m J^{m-n} f, \quad (17)$$

sest

$$\begin{aligned} D^m J^{m-n} f &= D^{m-1} (D J) J^{m-n-1} f = D^{m-1} J^{m-n-1} f = \dots \\ &= D^{m-(m-n)} J^{m-n-(m-n)} f = D^n f. \end{aligned}$$

See tähendab, et n -järku diferentsiaaloperaatori rakendamise saab taandada vabalt valitud kõrgemat järku m , kus $m > n$, diferentsiaaloperaatori rakendamisele. See tähelepanek, koos seosega (12) motiveerib järgmise definitsiooni.

Definitsioon 5. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (n-1, n]$ ehk $n = \lceil \alpha \rceil$. Operaatorit D_{R-L}^α , mis on iga $x \in [0, T]$ korral defineeritud eeskirjaga

$$(D_{R-L}^\alpha f)(x) := (D^n J_{R-L}^{n-\alpha} f)(x), \quad (18)$$

nimetatakse α -järku Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatoriks, suurust $D_{R-L}^\alpha f$ nimetame ka funktsiooni f Riemanni-Liouville'i (murrulist järku) tuletiseks.

Järgneva lausega näitame, et eelneva definitsiooni põhjal kehtib omaduse (17) analoog ka Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori puhul.

Lause 4. Olgu $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ning $\alpha \in (n-1, n]$, siis

$$D_{R-L}^\alpha f = D^m J_{R-L}^{m-\alpha} f. \quad (19)$$

TÕESTUS. Kasutades klassikalise diferentsiaaloperaatori aditiivsust ning Riemanni-Liouville'i integraali aditiivsust (15), võime kirjutada:

$$\begin{aligned} D^m J_{R-L}^{m-\alpha} f &= (D^n D^{m-n})(J_{R-L}^{m-n} J_{R-L}^{n-\alpha})f \\ &= D^n(D^{m-n} J_{R-L}^{m-n})J_{R-L}^{n-\alpha} f = D^n J_{R-L}^{n-\alpha} f = D_{R-L}^\alpha f. \end{aligned}$$

Lisaks arvestasime eelnevas tingimust $m-n \in \mathbb{N}$, mis võimaldas korduvalt rakendada diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreemi 1. ■

Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaator on lineaarne. Tõestame selle omaduse järgmise lause abil.

Lause 5. Olgu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (n-1, n]$ ning $X \subseteq [0, T]$. Kui funktsioonide $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ korral leiduvad $(D_{R-L}^\alpha f)(x)$ ja $(D_{R-L}^\alpha g)(x)$ iga $x \in X$ korral, siis leidub ka $D_{R-L}^\alpha(c_1 f + c_2 g)(x)$ iga $x \in X$ korral, kusjuures

$$(D_{R-L}^\alpha(c_1 f + c_2 g))(x) = c_1(D_{R-L}^\alpha f)(x) + c_2(D_{R-L}^\alpha g)(x). \quad (20)$$

TÕESTUS. Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori, definitsiooni 5 põhjal järeldub eeldustest, et ka $(J_{R-L}^{n-\alpha} f)(x)$ ja $(J_{R-L}^{n-\alpha} g)(x)$ leiduvad iga $x \in X$ korral. Fikseerides suvalise $x \in X$, saame definitsiooni 5 ning klassikalise diferentsiaaloperaatori D lineaarsuse tõttu kirjutada:

$$\begin{aligned} c_1(D_{R-L}^\alpha f)(x) + c_2(D_{R-L}^\alpha g)(x) &= c_1(D^n J_{R-L}^{n-\alpha} f)(x) + c_2(D^n J_{R-L}^{n-\alpha} g)(x) \\ &= (D^n[c_1(J_{R-L}^{n-\alpha} f) + c_2(J_{R-L}^{n-\alpha} g)])(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Seejuures kasutades definitsiooni 4, saame suvalise $x' \in X$ korral eraldi integraaloperaatori lineaarsust näidata:

$$\begin{aligned} (c_1(J_{R-L}^{n-\alpha} f) + c_2(J_{R-L}^{n-\alpha} g))(x') &= c_1(J_{R-L}^{n-\alpha} f)(x') + c_2(J_{R-L}^{n-\alpha} g)(x') \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{x'} (x'-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{x'} (x'-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{x'} (x'-t)^{n-\alpha-1} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt = (J_{R-L}^{n-\alpha}(c_1 f + c_2 g))(x'). \end{aligned}$$

Siit näeme, et hulgal X kehtib

$$c_1(J_{R-L}^{n-\alpha}f) + c_2(J_{R-L}^{n-\alpha}g) = J_{R-L}^{n-\alpha}(c_1f + c_2g).$$

Selle abil kirjutame esialgse murrulise tuletise avaldise (21) kui

$$(D^n[c_1(J_{R-L}^{n-\alpha}f) + c_2(J_{R-L}^{n-\alpha}g)])(x) = (D^n J_{R-L}^{n-\alpha}(c_1f + c_2g))(x) = D_{R-L}^\alpha(c_1f + c_2g)(x),$$

millega oleme soovitud tulemuse tõestanud. ■

Eelneva teoreemi järelalusena saame esimese näite funktsiooni murrulist järku tuletisest.

Järeldus 5.1. Nullfunktsiooni $f_0: [0, T] \rightarrow \{0\}$ mistahes järku Riemanni-Liouville'i tuletis on nullfunktsioon. Tõepoolest, fikseerides $n \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (n-1, n]$ ning arvestades, et $f_0 = 0f_0$, kehtib lause 5 põhjal iga $x \in [0, T]$ korral

$$(D_{R-L}^\alpha f_0)(x) = (D_{R-L}^\alpha(0f_0))(x) = 0(D_{R-L}^\alpha f_0)(x) = 0. \quad (22)$$

Edasistes arvutustes on oluline järgnev tulemus murrulist järku tuletisest astme-funktsiooni korral, mille tõestuse võib näiteks leida bakalaureusetööst [6].

Lause 6. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n]$ ning $b \geq 0$ reaalarv. Siis α -järku Riemanni-Liouville'i integraal astmefunktsioonist $(\cdot)^b: x \mapsto x^b$ avaldub iga $x \in [0, T]$ korral valemiga

$$(J_{R-L}^\alpha(\cdot)^b)(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1+\alpha)} x^{b+\alpha}. \quad (23)$$

Riemanni-Liouville'i α -järku tuletis astmefunktsioonist $(\cdot)^b$ avaldub iga $x \in [0, T]$ korral valemiga

$$(D_{R-L}^\alpha(\cdot)^b)(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ kui } \alpha - b \in \mathbb{N}; \\ \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-\alpha)} x^{b-\alpha} & , \text{ kui } \alpha - b \notin \mathbb{N}. \end{cases} \quad (24)$$

Kui $b - \alpha \geq 0$, siis on avaldis (24) määratud iga $x \in [0, T]$ korral, vastasel juhul on see määratud vaid poollõigul $x \in (0, T]$.

Paneme tähele, et eelneva lause avaldises (24) võib gammafunktsiooni argument $b + 1 - \alpha$ olla negatiivne, mistõttu oli vajalik jätkata gammafunktsiooni hulgale

$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Seejuures juhul $b + 1 - \alpha \in \{0, -1, -2, \dots\}$ kehtib $\alpha - b \in \mathbb{N}$ ning valemi (24) järgi on Riemanni-Liouville'i tuletis 0. Ühesõnaga astmefunktsiooni murrulist järku tuletise valem on gammafunktsiooni definitsiooniga kooskõlas.

Järeldus 6.1. Võttes lause 6 avaldises (24) astendaja väärtuseks $b = 0$, on lihtne näha, et üldjuhul ei ole konstantse funktsiooni Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletis võrdne nulliga.

2.3 Murrulist järku tuletise leidumine

Eelnevalt jätsime täpsustamata, milliste funktsioonide korral üldse leidub Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletis. Hilisemates arvutustes on kasulik teada, millised uuritavad funktsioonid on murrulises mõttes diferentseeruvad. Antud alapeatükis anname selleks piisava tingimuse, mis katab meie jaoks olulisemad juhud. Tõestame lihtsama juhu raamatus [1, Lemma 2.12] esitatud tulemusest.

Enne piisava tingimuse andmist sõnastame ja tõestame kaks lemmat.

Lemma 2. *Olgu $\alpha \in (0, 1)$, $x \in [0, T]$ ja lisaks h selline, et $x + h \in [0, T]$. Kehtigu $t \in [0, \min\{x, x + h\}]$, siis*

$$\frac{(x + h - t)^{1-\alpha} - (x - t)^{1-\alpha}}{h} = (1 - \alpha) \int_0^1 (x + \theta h - t)^{-\alpha} d\theta. \quad (25)$$

TÕESTUS. Defineerime abifunktsiooni

$$\varphi(\theta) := (x + \theta h - t)^{1-\alpha}.$$

Selle abil saame avaldises (25) vahe esitada järgmiselt:

$$(x + h - t)^{1-\alpha} - (x - t)^{1-\alpha} = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\theta) d\theta.$$

Seejuures on lihtne veenduda, et

$$\varphi'(\theta) = (1 - \alpha)(x + \theta h - t)^{-\alpha} h.$$

Viimasest aga järeldub vahetult võrdus (25), mida oligi tarvis näidata. ■

Lemma 3. Olgu $\alpha \in (0, 1)$, $x \in [0, T]$ ja f' lõigus $[0, T]$ pidev. Defineerime

$$F(x) := \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt, \quad (26)$$

siis F on diferentseeruv iga $x \in (0, T)$ korral, seejuures $x = 0$ korral paremalt ja $x = T$ korral vasakult.

TÕESTUS. Definiitsiooni järgi

$$\begin{aligned} (DF)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^{x+h} (x+h-t)^{1-\alpha} f'(t) dt - \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right). \end{aligned}$$

Vaatame eraldi kahte juhtu, kus $h \geq 0$ ja $h < 0$. Näitame, et piirväärtuse võtmine ja integreerimise järjekorra vahetamine integraalis on lubatud.

1. Olgu $h \geq 0$. Sel juhul

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^{x+h} (x+h-t)^{1-\alpha} f'(t) dt - \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_0^x \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Avaldise (27) teise integraali puhul kehtib

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (x+h-t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right| &\leq \|f'\|_\infty \int_x^{x+h} (x+h-t)^{1-\alpha} dt \\ &= \frac{-\|f'\|_\infty}{h(2-\alpha)} (x+h-t)^{2-\alpha} \Big|_{t=x}^{t=x+h} = \frac{\|f'\|_\infty}{2-\alpha} h^{2-\alpha} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Lisaks näitame avaldise (27) esimese integraali absoluutset koondumist. Selleks kasutame lemmat 2. Paneme tähele, et

$$\int_0^x \left| \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) \right| dt$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \alpha) \int_0^x \left| \int_0^1 (x + \theta h - t)^{-\alpha} f'(t) dt \right| d\theta \\
&\leq (1 - \alpha) \|f'\|_\infty \int_0^x \int_0^1 |x + \theta h - t|^{-\alpha} d\theta dt.
\end{aligned}$$

Seejärel kasutame asjaolu, et $h \geq 0$ ja $-\alpha < 0$, mistõttu $|x + \theta h - t|^{-\alpha} \leq |x - t|^{-\alpha}$ ehk

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \|f'\|_\infty \int_0^x \int_0^1 |x + \theta h - t|^{-\alpha} d\theta dt &\leq (1 - \alpha) \|f'\|_\infty \int_0^x |x - t|^{-\alpha} \int_0^1 d\theta dt \\
&= (1 - \alpha) \|f'\|_\infty \int_0^x |x - t|^{-\alpha} dt = \|f'\|_\infty x^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Seega oleme näidanud integraali absoluutset integreeruvust ning võime avaldises (27) piirväärtusega esimese integraali alla minna:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^x \frac{(x + h - t)^{1-\alpha} - (x - t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \\
&= \int_0^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h - t)^{1-\alpha} - (x - t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \\
&= (1 - \alpha) \int_0^x \frac{f'(t)}{(x - t)^\alpha} dt.
\end{aligned}$$

2. Olgu $h < 0$. Sarnaselt eelnevale juhule kirjutame:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^{x+h} (x + h - t)^{1-\alpha} f'(t) dt - \int_0^x (x - t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_0^{x+h} \frac{(x + h - t)^{1-\alpha} - (x - t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x+h}^x (x - t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right). \tag{28}
\end{aligned}$$

Avaldise (28) parempoolse integraali hääbumist saab põhjendada analoogselt avaldise (27) parempoolse integraali juhule. Vasakpoolse puhul kasutame

absoluutse koondumise näitamiseks taas lemmat 2. Siis

$$\begin{aligned} & \int_0^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \\ &= (1-\alpha) \int_0^{x+h} \int_0^1 (x+\theta h-t)^{-\alpha} f'(t) d\theta dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Seejärel arvestame, et $h < 0$, mistõttu $|x+\theta h-t|^{-\alpha} \leq |x+h-t|^{-\alpha}$. Lisaks $x+h-t \geq 0$ iga $t \in [0, x+h]$ korral, mille põhjal võime kirjutada:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha) \int_0^{x+h} \left| \int_0^1 (x+\theta h-t)^{-\alpha} f'(t) d\theta \right| dt \\ & \leq (1-\alpha) \|f'\|_{\infty} \int_0^{x+h} \int_0^1 |x+\theta h-t|^{-\alpha} d\theta dt \\ & \leq (1-\alpha) \|f'\|_{\infty} \int_0^{x+h} \int_0^1 |x+h-t|^{-\alpha} d\theta dt \\ & = (1-\alpha) \|f'\|_{\infty} \int_0^{x+h} (x+h-t)^{-\alpha} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Olgu fikseeritud $\varepsilon > 0$ nii, et $x-\varepsilon \in [0, T]$ ja olgu $|h| < \varepsilon/2$. Saame avaldises (30) integraali kahes osas kirjutada:

$$\int_0^{x+h} (x+h-t)^{-\alpha} dt = \int_0^{x-\varepsilon} (x+h-t)^{-\alpha} dt + \int_{x-\varepsilon}^{x+h} (x+h-t)^{-\alpha} dt. \quad (31)$$

Vaatame esmalt eelneva avaldise (31) parempoolset integraali $\int_{x-\varepsilon}^{x+h}$. Arvestades, et h on piisavalt väike ehk $|h| < \varepsilon/2$, kehtib:

$$\left| \int_{x-\varepsilon}^{x+h} (x+h-t)^{-\alpha} dt \right| = \left| -\frac{(x+h-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{t=x-\varepsilon}^{t=x+h} \right| = \frac{|h+\varepsilon|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Avaldise (31) vasakpoolse integraali $\int_0^{x-\varepsilon}$ puhul on integrandi domineerivaks funktsiooniks $(x-\varepsilon-t)^{-\alpha}$, sest eelduse kohaselt piisavalt väikese h korral ($|h| < \varepsilon/2$) kehtib $x-\varepsilon < x+h$ ehk $(x-\varepsilon-t)^{-\alpha} > (x+h-t)^{-\alpha}$. Samas on kerge veenduda, et tõepoolest on $(x-\varepsilon-t)^{-\alpha}$ lõigul $[0, x-\varepsilon]$ integreeruv.

Minnes tagasi integraali (29) juurde, võime selle jagada osadeks:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \\ &= \int_0^{x-\varepsilon} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \\ & \quad + \int_{x-\varepsilon}^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Seejuures läbi eelneva arutelu oleme näidanud, et osa $\int_0^{x-\varepsilon}$ puhul on olemas domineeriv funktsioon. Seega võime piirväärtusega $h \rightarrow 0$ selle integraali alla minna:

$$\int_0^{x-\varepsilon} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt = (1-\alpha) \int_0^{x-\varepsilon} \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Lisaks osa $\int_{x-\varepsilon}^{x+h}$ puhul oleme eelneva arutelu käigus leidnud hinnangu

$$\left| \int_{x-\varepsilon}^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|f'\|_\infty.$$

Kui lõpuks kõik eelnev kokku panna, saame:

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt - (1-\alpha) \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{x-\varepsilon} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt - (1-\alpha) \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right| \\ & \quad + \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+h} \frac{(x+h-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}}{h} f'(t) dt \right| \\ &\leq \left| (1-\alpha) \int_{x-\varepsilon}^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right| + \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|f'\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Sellega oleme juhud $h \geq 0$ ning $h < 0$ läbi vaadanud. Kokkuvõttes on iga $x \in (0, T]$ korral funktsioon F vasakult ning iga $x \in [0, T)$ korral paremalt diferentseeruv. Seega antud lemma väites (26) esitatud F on tõepoolest lõigus $[0, T]$ diferentseeruv,

kusjuures

$$(DF)(x) = (1 - \alpha) \int_0^x \frac{f'(t)}{(x - t)^\alpha} dt, \quad (32)$$

mida oligi tarvis näidata. ■

Lause 7 (Piisav tingimus Riemanni-Lioville'i tuletise leidumiseks). *Olgu $f \in C^1[0, 1]$ ning $\alpha \in (0, 1)$. Siis leidub $(D_{R-L}^\alpha f)(x)$ iga $x \in (0, T]$ korral ning see avaldub kujul*

$$(D_{R-L}^\alpha f)(x) = \frac{x^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x - t)^\alpha} dt. \quad (33)$$

Kui lisaks $f(0) = 0$, siis leidub $D_{R-L}^\alpha f$ iga $x \in [0, T]$ korral.

TÕESTUS. Definitsiooni järgi

$$D_{R-L}^\alpha f = D J_{R-L}^{1-\alpha} f = D \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\cdot (\cdot - t)^{-\alpha} f(t) dt \right),$$

kuna f on lõigul $[0, T]$ differentseeruv siis saame kasutada ositi integreerimise valemit:

$$\begin{aligned} & D \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\cdot (\cdot - t)^{-\alpha} f(t) dt \right) \\ &= D \left(\frac{-(\cdot - t)^{1-\alpha} f(t)}{\Gamma(2 - \alpha)} \Big|_0^\cdot + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^\cdot (\cdot - t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right) \\ &= D \frac{(\cdot)^{1-\alpha} f(0)}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} D \int_0^\cdot (\cdot - t)^{1-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Kasutame parempoolses avaldises lemmat 3 ning juhul $f(0) \neq 0$ saame vasakpoolses avaldises diferentsiaaloperaatorit rakendada. Ühesõnaga kehtib

$$\begin{aligned} D_{R-L}^\alpha f &= D \frac{(\cdot)^{1-\alpha} f(0)}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} D \int_0^\cdot (\cdot - t)^{1-\alpha} f'(t) dt \\ &= \frac{(1 - \alpha)(\cdot)^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^\cdot \frac{f'(t)}{(\cdot - t)^\alpha} dt \\ &= \frac{(\cdot)^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\cdot \frac{f'(t)}{(\cdot - t)^\alpha} dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Paneme tähele, et kui $f(0) = 0$, siis avaldises (34) kaob esimene liidetav, mis seoses (35) ei oleks $x = 0$ korral määratud. Seega juhul $f(0) = 0$ leidub murrulist järku tuletis iga $x \in [0, T]$ korral. Oleme soovitud tulemuse tõestanud. ■

Järeldus 7.1. Eelnevalt vaadeldud astmefunktsioon $(\cdot)^c$, eksponentfunktsioon $e^{[\cdot]}$, siinusfunktsioon ja koosinusfunktsioon kuuluvad kõik hulka $C^1[0, T]$, mistõttu on need lause 7 põhjal ka Riemanni-Liouville'i mõttes diferentseeruvad iga $\alpha \in (0, 1)$ korral.

Järeldus 7.2. Eeldusel $f \in C^1[0, T]$ ning juhul $f(0) = 0$ saame lause 7 ja Riemanni-Liouville'i integraali definitsiooni (12) põhjal

$$D_{R-L}^\alpha f = DJ_{R-L}^{1-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\cdot \frac{f'(t)}{(\cdot - t)^\alpha} dt = J_{R-L}^{1-\alpha} f' = J_{R-L}^{1-\alpha} Df.$$

Seega antud eeldustel võime vahetada Riemanni-Liouville'i tuletise definitsioonis (18) diferentsiaal- ja integraaloperaatori järjekorra.

Järeldus 7.3. Kui $f \in C^2[0, T]$ ning $f(0) = 0$, siis leidub Riemanni-Liouville'i tuletis sellest funktsioonist ka iga $\alpha \in (1, 2)$ korral, sest järelduse 7.2 põhjal võime kirjutada:

$$D_{R-L}^\alpha f = D^2 J_{R-L}^{2-\alpha} f = DD J_{R-L}^{2-\alpha} f = DJ_{R-L}^{2-\alpha} Df = D_{R-L}^{\alpha-1} Df,$$

kus $D_{R-L}^{\alpha-1} = DJ_{R-L}^{1-(\alpha-1)} = DJ_{R-L}^{2-\alpha}$. Lisaks kuna $f \in C^2[0, T]$, siis $Df \in C^1[0, T]$, mis tähendab, et tõepoolest saab rakendada lauset 7. Antud mõttekäiku on võimalik korrata järjest kõrgemat järku tuletiste puhul.

2.4 Caputo tuletis

Teoreetiliselt täidab Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletis palju klassikalisele tuletisele omaseid tingimusi, samas on sellel mitmed puudused. Eelnevalt veendusime, et üldjuhul ole murrulist järku Riemanni-Liouville'i tuletis konstantsest funktsioonist võrdne nulliga. Lisaks on praktikas keeruline Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletistega algtingimustega ülesandes vastavaid algtingimusi ette anda [5]. Järgnevas defineerime Caputo murrulist järku diferentsiaaloperaatori. Osutub, et eelnevalt välja toodud puuduseid sellel operaatoril ei esine. Seetõttu võib Caputo murrulist

järku tuletist pidada loomulikumaks tavalise tuletise jätkuks. Järgnevas tuginame raamatule [1].

Definitsioon 6. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (n-1, n]$ ning tähistagu T_{n-1} valemiga (2) defineeritud $(n-1)$ -järku Tayloriga operaatorit. Lisaks olgu funktsioon f selline, et iga $x \in [0, T]$ korral leidub $D_{R-L}^\alpha(f - T_{n-1}f)(x)$. Operaatorit D_{Cap}^α , mis on defineeritud iga $x \in [0, T]$ korral eeskirjaga

$$(D_{Cap}^\alpha f)(x) := (D_{R-L}^\alpha(f - T_{n-1}f))(x),$$

nimetatakse α -järku Caputo murrulist järku diferentsiaaloperaatoriks, suurust $D_{Cap}^\alpha f$ nimetame funktsiooni f Caputo (murrulist järku) tuletiseks.

Nagu näha, defineeritakse Caputo tuletis Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise kaudu. Viimase omadustest tulenevalt esitame järgmise lause raamatust [1, lk. 53], mis osutub tuletiste arvutamisel kasulikuks.

Lause 8. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (n-1, n]$. Kui f on selline funktsioon, et leiduvad nii $D_{R-L}^\alpha f$ kui ka $D_{Cap}^\alpha f$, siis

$$(D_{Cap}^\alpha f)(x) = (D_{R-L}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha}. \quad (36)$$

TÕESTUS. Esmalt paneme tähele, et $(D_{R-L}^\alpha T_{n-1}f)(x)$ leidub iga $x \in (0, T]$ korral. Kasutades Tayloriga operaatori valemit (2), seost (24) ning lauset 5, võime kirjutada:

$$\begin{aligned} (D_{R-L}^\alpha T_{n-1}f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D_{R-L}^\alpha (\cdot)^k \right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Seega toetudes definitsioonile 6 ning lausele 5, saame kirjutada

$$\begin{aligned} (D_{Cap}^\alpha f)(x) &= (D_{R-L}^\alpha(f - T_{n-1}f))(x) = (D_{R-L}^\alpha f)(x) - (D_{R-L}^\alpha T_{n-1}f)(x) \\ &= (D_{R-L}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-\alpha}, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis näidata. ■

Osutub, et Caputo tuletis konstantsest funktsioonist on võrdne nulliga. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (n-1, n]$ ning konstantne funktsioon $f_c: [0, T] \rightarrow \{c\}; x \mapsto c$. Sel

juhul

$$(f_c - T_{n-1}f_c)(x) = f_c(x) - (T_{n-1}f_c)(x) = f_c(x) - \frac{f_c^{(0)}(0)}{0!} = c - c = 0.$$

Varasemast teame, et nullfunktsioonile f_0 Riemanni-Liouville'i murrulist järku diferentsiaaloperaatorit rakendades on tulemuseks nullfunktsioon (22). Seetõttu

$$(D_{Cap}^\alpha f_c)(x) = (D_{R-L}^\alpha (f_c - T_{n-1}f_c))(x) = (D_{R-L}^\alpha f_0)(x) = 0. \quad (37)$$

Olgu $\alpha \in (0, 1)$ ja $n = 1$. Paneme tähele, et α -järku Caputo tuletises kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(f - T_{n-1}f)(0) = 0$. Sellest tulenevalt juhul $f \in C^1[0, T]$ saame Caputo murrulist järku tuletisele anda uue kuju. Kuna $T_{n-1}f \in C^\infty[0, T]$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis ka $f - T_0f \in C^1[0, T]$. Antud tingimustel lubab lause 7 kirjutada:

$$\begin{aligned} D_{Cap}^\alpha f &= D_{R-L}^\alpha (f - T_0f) = DJ_{R-L}^{1-\alpha} (f - T_0f) = J_{R-L}^{1-\alpha} D(f - T_0f) \\ &= J_{R-L}^{1-\alpha} (Df - DT_0f) = J_{R-L}^{1-\alpha} (Df - 0) = J_{R-L}^{1-\alpha} Df; \end{aligned}$$

kui nüüd lisaks $f(0) = 0$, siis

$$D_{Cap}^\alpha f = J_{R-L}^{1-\alpha} Df = DJ_{R-L}^{1-\alpha} f = D_{R-L}^\alpha f,$$

ehk Riemanni-Liouville'i ja Caputo murrulist järku diferentsiaaloperaatorid langevad eelnevalt mainitud tingimustel kokku.

3 Funktsioonide murrulist järku tuletised

3.1 Astmeritta arendatavate funktsioonide murrulist järku tuletised

Antud peatükis arvutame tuntud funktsioonide murrulist järku tuletisi ning visualiseerime nende graafikuid. Definitsiooni 5 põhjal on selleks esimese sammuna vaja leida vaadeldava funktsiooni Riemanni-Liouville'i murrulist järku integraal. Kui funktsioon on arendatav Tayloriga, mis koondub lõigul $[0, T]$ ühtlaselt, siis teoreem 3 lubab meil seda astmerida liikmeti integreerida. Kuna antud tingimustel on lubatud ka astmerea liikmeti diferentseerimine, saame murrulist järku diferentsiaaloperaatorit rakendada funktsiooni astmerea liikmeti. Seejuures on oluline, et lause 6 põhjal oskame me astmefunktsiooni murrulist järku tuletist arvutada.

Nüüd on olemas kõik vajalik, et arvutada mõningate keerulisemate funktsioonide murrulisi tuletisi. On hästi teada, et eksponentfunktsiooni e^x suvaline naturaalarvulist järku tuletis avaldub lihtsa eeskirja $(e^x)^{(n)} = e^x$ kaudu. Osutub aga, et see tulemus ei pea kehtima murrulist järku tuletiste puhul. Esimese näitena leiamegi eksponentfunktsiooni murrulist järku tuletise, keskendudes seejuures juhtudele, kus tuletise järk ei ole naturaalarv.

Lause 9. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (n-1, n)$. Riemanni-Liouville'i α -järku tuletis funktsioonist $e^{[\cdot]}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto e^x$ avaldub iga $x \in (0, T]$ korral valemiga

$$(D_{R-L}^\alpha e^{[\cdot]})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (38)$$

Kasutades mitmeparametrilise Mittag-Leffleri funktsiooni definitsiooni 3, saame avaldise (38) iga $x \in (0, T]$ korral esitada eeskirjaga

$$(D_{R-L}^\alpha e^{[\cdot]})(x) = \frac{1}{x^\alpha} E_{1,1-\alpha}(x). \quad (39)$$

TÕESTUS. Esmalt tuletame meelde, et eksponentfunktsiooni astmerida avaldub iga $x \in \mathbb{R}$ korral eeskirjaga

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

kusjuures fikseeritud lõigus $[0, T]$ koondub vaadeldav astmerida ühtlaselt.

Kuna $e^0 = 1 \neq 0$, siis lause 7 põhjal teame, et eksponentfunktsiooni murrulist järku Riemanni-Liouville'i tuletis leidub vaid poollõigul $(0, T]$. Olgu $x \in (0, T]$ suvaline. Kasutades definitsiooni 5 ning eksponentfunktsiooni astmereaks arendust saame

$$(D_{R-L}^{\alpha} e^{[\cdot]})(x) = \left(D_{R-L}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cdot)^k}{k!} \right)(x) = \left(D^n J_{R-L}^{n-\alpha} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{(\cdot)^k}{k!} \right)(x).$$

Kuna rida koondub lõigul $[0, T]$ ühtlaselt, siis lubab teoreem 3 piirväärtuse ja Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori võtmise järjekorra vahetada. Kasutades lisaks lauses 5 näidatud murrulise integraali lineaarust, saame kirjutada:

$$\begin{aligned} \left(D^n J_{R-L}^{n-\alpha} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{(\cdot)^k}{k!} \right)(x) &= \left(D^n \lim_{m \rightarrow \infty} J_{R-L}^{n-\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{(\cdot)^k}{k!} \right)(x) \\ &= \left(D^n \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{J_{R-L}^{n-\alpha} (\cdot)^k}{k!} \right)(x). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et saadud funktsionaalrida koondub kõikjal, mistõttu on lubatud klassikalist diferentsiaaloperaatorit D^n reale rakendada liikmeti ehk

$$\left(D^n \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{J_{R-L}^{n-\alpha} (\cdot)^k}{k!} \right)(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^n J_{R-L}^{n-\alpha} (\cdot)^k}{k!} \right)(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{R-L}^{\alpha} (\cdot)^k}{k!} \right)(x).$$

Viimaseks arvutame lause 6 abil astmefunktsiooni murrulist järku tuletise. Siinkohal peame arvestama, et indeksi $k = 0$ korral on $(\cdot)^k$ astendaja 0, mistõttu parameetri $\alpha > 0$ korral pole murruline tuletis punktis $x = 0$ määratud. See ühtib meie eelneva aruteluga, kus põhjendasime eksponentfunktsiooni murrulist järku tuletise leidumist vaid poollõigul $x \in (0, T]$. Seega saame:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{R-L}^{\alpha} (\cdot)^k}{k!} \right)(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)k!} (\cdot)^{k-\alpha} \right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}.$$

Kokkuvõttes oleme leidnud, et iga $x \in (0, T]$ korral

$$(D_{R-L}^\alpha e^{[\cdot]})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)},$$

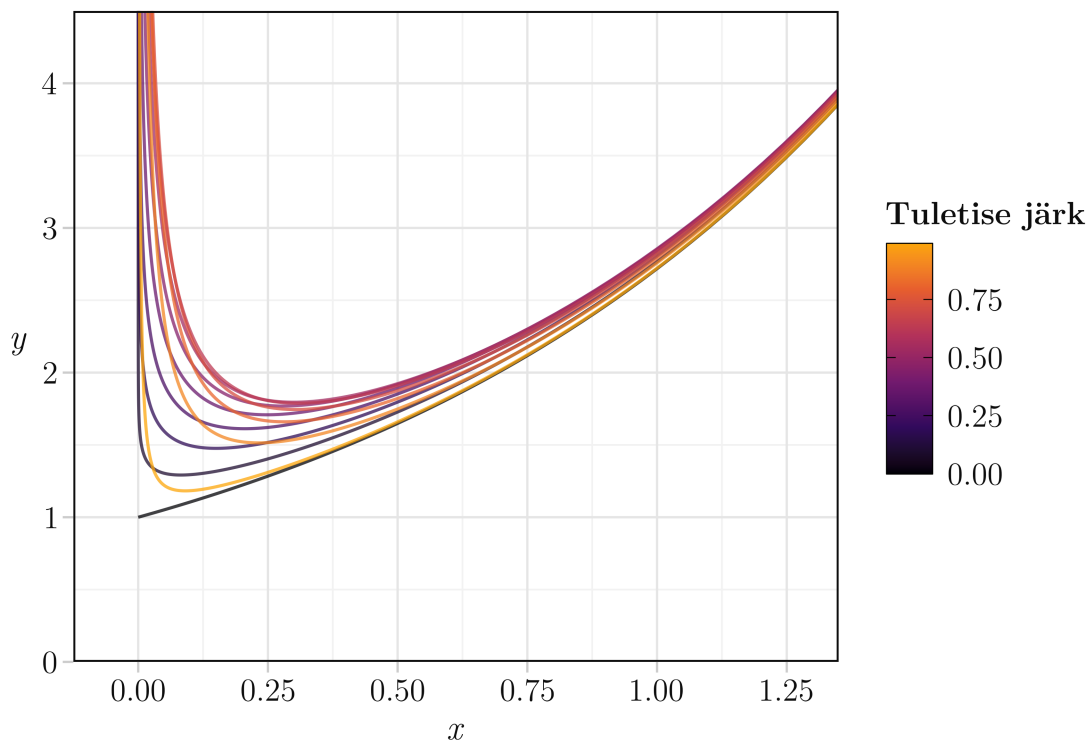
mis tõestab esimese osa lausest. Viimase avaldise saame kirjutada kujul:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1-\alpha)}.$$

Võttes Mittag-Leffleri funktsiooni $E_{\mu,\nu}$ parameetriteks $\mu = 1$ ning $\nu = 1 - \alpha$ (vt definitsiooni 3), näeme, et valem (38) esitub valemina (39):

$$(D_{R-L}^\alpha e^{[\cdot]})(x) = \frac{1}{x^\alpha} E_{1,1-\alpha}(x).$$

Sellega oleme lause mõlemad väited tõestanud. Eksponentfunktsiooni Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletise graafik on kujutatud joonisel 1. ■



Joonis 1: Riemann-Liouville'i tuletis eksponentfunktsioonist e^x

Eelnevas näites kasutatud võtete abil on võimalik leida Riemanni-Liouville'i murrulisi tuletisi funktsioonidest, mida saab arendada punktis 0 ühtlaselt koonduvaks astmeraks. Leiame järgnevalt murrulist järku tuletise funktsioonist $\sin(\omega \cdot)$.

Lause 10. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{R}$ ning $\alpha \in (n-1, n)$. Riemanni-Liouville'i α -järku murruline tuletis funktsioonist $\sin(\omega \cdot)$ on kujul

$$(D_{R-L}^\alpha \sin(\omega \cdot))(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} x^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)} = \omega x^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-(\omega x)^2).$$

TÕESTUS. Siinusfunktsiooni astmerida avaldub valemiga:

$$\sin \omega x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Analoogselt eksponentfunktsiooni murrulise tuletise leidmisel esitatud põhjendustele saab operaatorit rakendada astmereale liikmeti:

$$\begin{aligned} (D_{R-L}^\alpha \sin(\omega \cdot))(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} D_{R-L}^\alpha (\cdot)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} \Gamma(2k+2) (\cdot)^{2k+1-\alpha}}{(2k+1)! \Gamma(2k+2-\alpha)} \right)(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} (\cdot)^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)} \right)(x). \end{aligned}$$

Seega

$$(D_{R-L}^\alpha \sin(\omega \cdot))(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} x^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)}. \quad (40)$$

Esitame avaldise (40) ka Mittag-Leffleri funktsiooni kaudu. Selleks paneme tähele, et

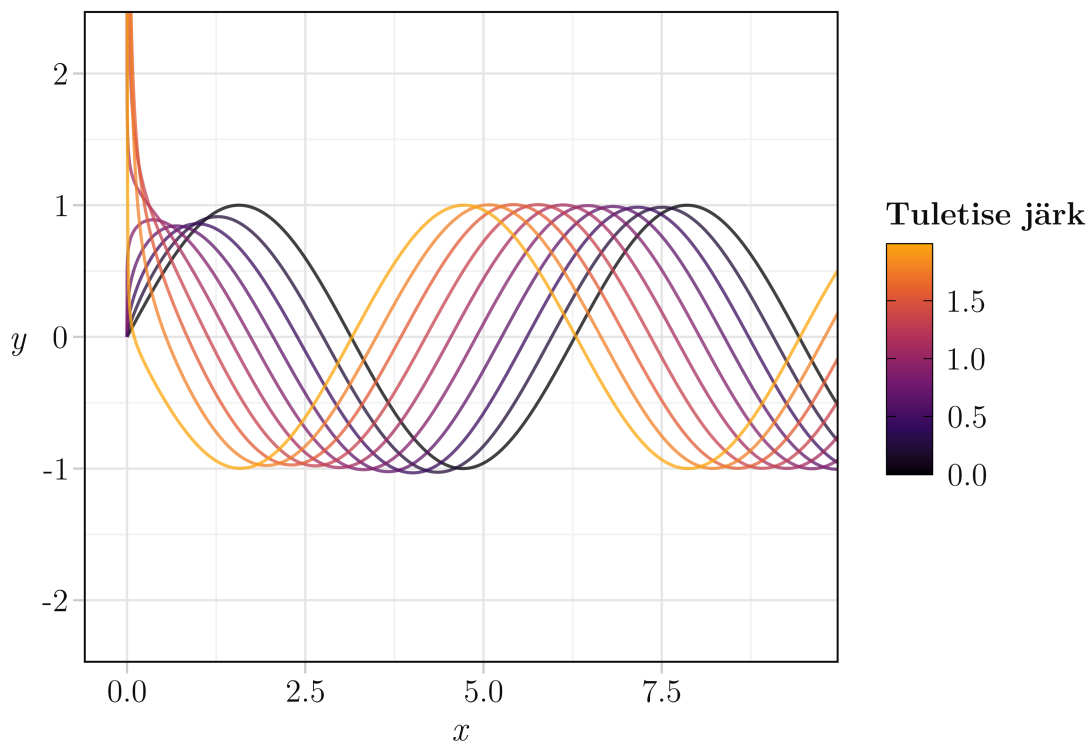
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} x^{2k+1-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)} = \omega x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega x)^{2k}}{\Gamma(2k+2-\alpha)} = \omega x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-(\omega x)^2)^k}{\Gamma(2k+2-\alpha)}.$$

Võttes viimases avaldises Mittag-Leffleri funktsiooni parameetriteks $\mu = 2$ ning $\nu = 2 - \alpha$, saame valemile (40) anda kuju:

$$(D_{R-L}^\alpha \sin(\omega \cdot))(x) = \omega x^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-(\omega x)^2). \quad (41)$$

Seejuures paneme tähele, et juhul $\alpha \in (0, 1]$ on murrulist järku tuletis (40) määratud iga $x \in [0, T]$ korral, kui $\alpha > 1$, siis vaid iga $x \in (0, T]$ korral. See langeb ka kokku lauses 7 antud tingimusega, kus $\sin(\omega \cdot) \in C^1[0, T]$ ning lisaks $\sin(0) = 0$. Siinusfunktsiooni Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletise graafik on kujutatud joonisel 2. ■

Analoogselt eelnevatele näidetele saame leida murrulised tuletised ka teistest



Joonis 2: Riemann-Liouville'i tuletis funktsioonist $\sin x$

tuntud astmeridadega funktsioonidest. Olgu edaspidi $n \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (n-1, n)$.

Koosinuse astmerida avaldub kujul

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Selle põhjal saame, et funktsiooni $\cos(\omega \cdot)$ Riemanni-Liouville'i α -järku tuletis esitub järgmiselt:

$$(D_{R-L}^{\alpha} \cos(\omega \cdot))(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} x^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k+1-\alpha)} = \frac{1}{x^{\alpha}} E_{2,1-\alpha}(-(\omega x)^2). \quad (42)$$

Vaatleme veel astmerida

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Viimase avaldise puhul tuleb arvestada, et selle rea koonduvusraadius on $R = 1$, millest tulenevalt nõuame, et $[0, T] \subset [0, 1)$. Seega

$$\left(D_{R-L}^{\alpha} \frac{1}{1-\cdot} \right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}. \quad (43)$$

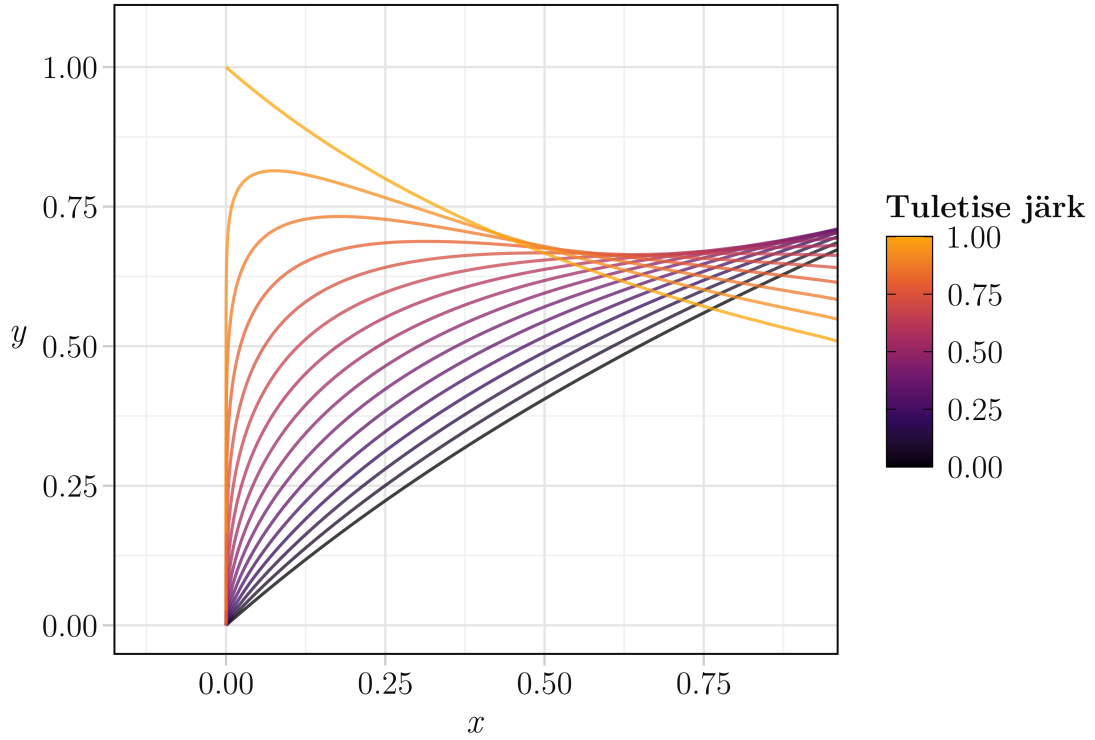
Viimaseks vaatame astmerida

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

kusjuures ka selle koonduvusraadius on $R = 1$. Sellest tulenevalt vaatame Riemanni-Liouville'i murrulist tuletist vaid lõigul $[0, T] \subset [0, 1)$. Siis kehtib:

$$(D_{R-L}^{\alpha} \ln(\cdot + 1))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k) x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} = -\frac{1}{x^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k) (-x)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (44)$$

Funktsioonist $\ln(\cdot + 1)$ Riemanni-Liouville'i murrulist järku tuletise graafik on kujutatud joonisel 3.



Joonis 3: Riemann-Liouville'i tuletis funktsioonist $\ln(x+1)$

Viited

- [1] Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations*. Berlin: Springer.
- [2] Kangro, G. (1982). *Matemaatiline analüüs I*. Tallinn: Valgus.
- [3] Kochubei, A., Luchko, Y., Tarasov, V. E. ja Petráš, I. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications*. Berlin: de Gruyter.
- [4] Pedas, A. ja Vainikko, G. (2025). *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*. Tartu: TÜ Kirjastus.
- [5] Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations*. San Diego: Elsevier.
- [6] Soots, H. B. (2019). *Murruliste diferentsiaaloperaatorite omavahelised seosed*. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, Matemaatika õppekava.
- [7] Stein, E. M. ja Shakarchi, R. (2003). *Complex analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [8] Williamson, J. H. (1962). *Lebesgue integration*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kevin Sults,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose, Murruliste tuletiste leidumisest, mille juhendajad on Kaido Lätt ja Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kevin Sults

27.05.2026