

E. Etverk

**STEREO-
METRIA**
ÕPIK

gümnaasiumi IV klassile

Tartu Eesti Kirjastus

A-14986

~~origon~~
~~sh~~

E. ETVERK

STEREOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI IV KLASSILE



TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.

- A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
- E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
- A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
- E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.
- K. Maasik, Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
- K. Ratassepp, Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
- K. Ratassepp, Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
- E. Etverk, Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
- G. Rägo, Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
- L. Ruumet — G. Rägo, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru III ja IV klassile.
- L. Ruumet — G. Rägo, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru V klassile.
- K. Ratassepp, Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Kindlam.

AfV nr. I/0038. Trükiarv 4150 eks. Paber: 56 × 79 cm, ETK paberivabrik, Tallinn. Trükk ja brošeerimine: Trükikoda „J. Mällo & Pojad“, Tartu. Ilmunud septembris 1943. Hind Rmk. 2.—.

SISUKORD.

Peatükk I.

Punktide, sirgete ja tasapindade vastastikune asetsemine.

	Lk.
§ 1. Sissejuhatus	5
§ 2. Kahe sirge vastastikused asendid	7
§ 3. Tasapinna määramise viisid	8
§ 4. Kahe tasapinna lõikumine	10
§ 5. Sirge ja tasapind	11
§ 6. Kahe tasapinna paralleelsus	13
§ 7. Kolme tasapinna vastastikused asendid	15
§ 8. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad	18
§ 9. Ruumisnurk	19
§ 10. Tasapinna normaal	19
§ 11. Punkti ja sirge normaalprojektsioon tasapinnale	23

Peatükk II.

Geomeetriliste kehade liigitelu.

§ 12. Tahkkeha	27
§ 13. Prisma	28
§ 14. Püramiid ja tüvipüramiid	31
§ 15. Silinder	34
§ 16. Koonus ja tüvikoonus	35
§ 17. Kera	37

Peatükk III.

Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis.

§ 18. Tsentraalprojektsioon ja paralleelprojektsioon	41
§ 19. Paralleelprojektsiooni põhiseadused	42

	Lk.
§ 20. Normaalkonstruktsioon	45
§ 21. Kalkonstruktsioon	47
§ 22. Näiteid kehade joonestamisest kalkonstruktsioonis	50
§ 23. Tahkkehha lõikamine tasapinnaga	52

Peatükk IV.

Keha pindala ja ruumala.

§ 24. Ruumala mõõtmine ja ruumalaühikud	54
§ 25. Risttahuka ruumala	55
§ 26. Püstprisma ruumala	57
§ 27. Püstprisma pindala	59
§ 28. Cavalieri aksioom	61
§ 29. Prisma ruumala	63
§ 30. Prisma pindala	64
§ 31. Ruumvõrdsed püramiidid	64
§ 32. Püramiidi ruumala	67
§ 33. Korrapärase püramiidi pindala	69
§ 34. Tüvipüramiidi ruumala	70
§ 35. Silindri pindala ja ruumala	73
§ 36. Koonuse pindala	76
§ 37. Koonuse ruumala	77
§ 38. Tüvikoonuse pindala	80
§ 39. Tüvikoonuse ruumala	81
§ 40. Kera pindala	83
§ 41. Kera ruumala	86
§ 42. Kera segmenti ruumala	89
Mõned erikaalud	92

Peatükk I.

Punktide, sirgete ja tasapindade vastastikune asetsemine.

§ 1. Sissejuhatus.

Stereomeetria ehk ruumigeomeetria ülesandeks on uurida ruumilisi kujundeid, s. o. kujundeid, mis ei asetse kõigi oma punktidega ühel ja samal tasapinnal. Iga kujundi uurimisel on eeskätt vaja saada kujundist õige kujutlus ning osata teda kujutada joonise ja mudeli abil.

Majast kujutluse saamiseks peame oskama näha selle üksikosi, nagu seinu, aknaid, katust jne. Niisamuti peame iga geomeetrilise kujundi juures oskama näha neid lihtsamaid kujundeid, millest ta koosneb.

Kõige lihtsamad geomeetrilised kujundid on punkt, sirge ja tasapind. Neid kujundeid nimetatakse põhikujunditeks, sest nende abil uuritakse teisi kujundeid. Punkti ja sirge mõisted on tuttavad planimeetriast; tasapinna mõiste defineerime järgmiselt:

tasapind on niisugune pind, millel asetsevad iga sirge kõik punktid, niipea kui sirge kaks punkti asetseb sel pinnal.

Kõiki muid pindu nimetatakse kõverpindadeks. Kui sirge kõik punktid asetsevad tasapinnal, siis öeldakse, et sirge asetseb tasapinnal. Eeltoodust selgub, et

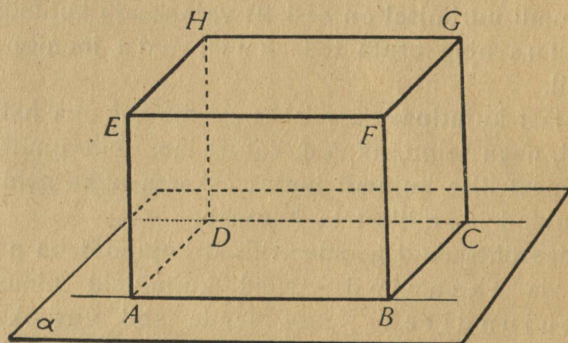
sirge asetseb tasapinnal, kui sirge kaks punkti asetseb sel tasapinnal.

Ruumiliste kujundite hulgas tähtsa rühma moodustavad kehad.

Keha on igalt poolt piiratud ruumiosa.

Väljaspool keha olevast ruumist eraldab keha tema pind. Keha pinnaks on kas üksainus kõverpind, nagu see esineb näiteks kera juures, või ta koosneb mitmest pinnatükist, nagu see esineb näiteks kuubil ja silindril. Mõne keha pind koosneb ainult tasapinna-tükkidest; viimaseid nimetatakse keha tahkudeks ja keha ennast — tahkkehaks.

Üks lihtsamaid tahkkehi on risttahukas. See on keha, mille kõik tahud on ristkülikud (joonis 1).



Joonis 1.

Vaatleme risttahuka kaht mingit tahku. Neil võib olla ühiseid punkte või neid ka mitte olla. Esimesel juhul vaadeldavaid tahke nimetatakse lähistahkudeks, teisel juhul vastastahkudeks. Kahe lähistahu ühised punktid moodustavad sirglõigu, mida nimetatakse risttahuka servaks. Mõnedel servadel on ühiseid punkte; need punktid on risttahuka tipud.

Iga tahkkeha iseloomustavad tema tippude, servade ja tahkude arv ning viimaste kuju ja suurus.

Ülesanded.

1. Mitu tahku, serva ja tippu on risttahukal? Mitu risttahuka tahku on ühe tahu suhtes lähistahud, mitu vastastahud?

2. Mitmes suuruses on risttahukal tahke ja mitmes suuruses servi? Kui palju on ühepikkusi servi ja kui palju ühesuurusi tahke?

3. Kuidas kontrollida, kas näiteks laua pind on tasane?

§ 2. Kahe sirge vastastikused asendid.

Kui piiramatult pikendada risttahuka iga serva, siis tekib 12 sirget, mis on üksteise suhtes mitmesugustes asendites. Valides nende sirgete hulgast mistahes kaks sirget, võime veenduda, et nad kas lõikuvad, nagu sirged AB ja BC , või on paralleelsed, nagu sirged AB ja DC , või ei lõiku ega ole ka paralleelsed, nagu sirged AB ja FG (joonis 1).

Sirgeid, mis ei lõiku ega ole paralleelsed, nimetatakse kiiv-sirgeteks.

Seega ruumis kaks sirget kas lõikuvad või on paralleelsed või on kiivas.

Kaks kiivsirget ei asetse ühel ja samal tasapinnal, sest kaks ühel ja samal tasapinnal asetsevat sirget teatavasti kas lõikuvad või on paralleelsed.

Ülesanded.

4. Mitu kuubi serva lõikuvad ühe servaga, on paralleelsed ühe servaga, on kiivas ühe servaga?

5. Risttahuka kahe mitte ühel tahul asetseva tipu ühendamisel sirglõiguga tekib risttahuka diagonaal. Mitu risttahuka serva lõikuvad, on paralleelsed, on kiivas selle diagonaaliga?

6. Kui palju on horisontaalseid, kui palju vertikaalseid sirgeid, mis läbivad antud punkti?

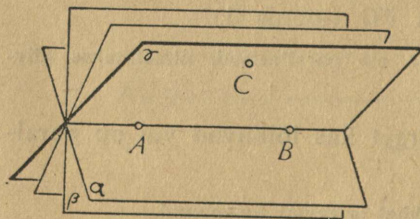
7. Mitu horisontaalset sirget saab joonestada antud vertikaalsel tasapinnal läbi antud punkti?

8. Kui palju on horisontaalseid, kui palju vertikaalseid tasapindu, millel asetseb antud punkt?

§ 3. Tasapinna määramise viisid.

Teatavasti sirge on määratud oma kahe punktiga. Nagu sirget saab määrata lihtsamate kujundite — punktide — abil, nii saab ka tasapinda määrata lihtsamate kujundite, nimelt sirgete ja punktide abil.

Võtame mingil tasapinnal α kaks punkti A ja B . Tasapindu, millel asetsevad punktid A ja B , on peale α veel loendamatu palju;



Joonis 2.

kõik need tasapinnad moodustavad ühe tasapindade kimbu (joonis 2). Olgu kaks neist tasapindadest β ja γ . Punkte A ja B läbiv sirge asetseb igaühel neist tasapindadest, sest tal on iga-

ühena neist kaks ühist punkti. Kui peale punktide A ja B on antud väljaspool sirget AB veel üks punkt C , siis meie kujutluse järgi on olemas ainult üks tasapind, millel asetsevad punktid A , B ja C . Selle asjaolu sõnastame järgmiselt:

tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

Kahe punkti asemel võime tasapinna määramisel võtta ka sirge, mis läbib neid kaht punkti. Seega

tasapind on määratud ühe sirge ja väljaspool sirget asetseva punktiga.

Sama tasapinna γ saame, kui tema määramiseks võtame punkti C asemel mingi sirge tasapinnal γ . See sirge kas lõikub sirgega AB või on sellega paralleelne. Esimesel juhul

tasapind on määratud kahe lõikuva sirgega

ja teisel juhul

tasapind on määratud kahe paralleelse sirgega.

Et kolm punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, määravad üheainsa tasapinna, siis on selge, et

kui tasapindadel on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis need tasapinnad ühtivad.

Vastavalt tasapinna määramise viisile saab tasapinda tähistada kas kolme punkti tähistega, sirge ja punkti tähistega või kahe sirge tähistega. Seega näiteks tasapind st on tasapind, mis on määratud sirgetega s ja t .

Ülesanded.

9. Paljude aparaatide jaoks, nagu fotoaparaat, pikk-silm, teodoliit, tarvitatakse kolme jalaga statiivi. Selgita, miks?

10. On antud neli punkti, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leida nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitut sirget ja mitut tasapinda määravad antud neli punkti?

11. Leia kuubi servadel 3 punkti nii, et kuubi igal tahul asetseks üks neist punktidest.

12. Leia kuubil 2 punkti nii, et oleks 5, 4, 3, 2, 1, 0 tahku, kus valitud punkte ei asetse.

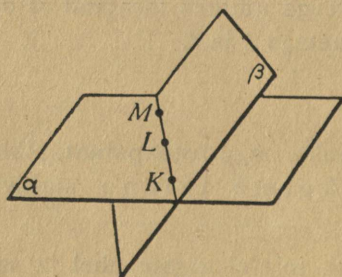
13. Kuubi iga tahk on värvitud isevärviliseks ja nimelt üks paar vastastahke mustaks ja valgeks, teine paar vastastahke siniseks ja punaseks, kolmas paar vastastahke kollaseks ja rohelineks. Missugused värvidekombinatsioonid esinevad tippude juures? Missugused värvidepaarid ei esine ühegi tippu juures?

§ 4. Kahe tasapinna lõikumine.

Kui kahe tasapinnal on ühiseid punkte, aga tasapinnad ei ühti, siis öeldakse, et nad lõikuvad. Meie kujutluse järgi kahe lõikuval tasapinnal ei saa olla ainult üks ühine punkt, vaid neil on ühine joon; viimast nimetatakse tasapindade lõikejooneks. Tõestame, et

kahe tasapinna lõikejoon on sirge.

Tõestus. Kui kahe tasapinna α ja β lõikejoon ei oleks sirge, siis ta peaks olema kõver (joonis 3). Kõverjoonel aga on alati võimalik valida kolm punkti K , L , M nii, et nad ei asetse ühel ja samal sirgel. Need kolm punkti oleksid siis tasapindade α ja β ühised punktid, järelikult need tasapinnad ühtiksid. Et aga antud tasapinnad ei ühti, siis saavad nende ühised punktid aset-



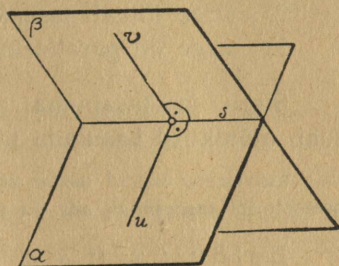
Joonis 3.

nende ühised punktid asetseada ainult ühel sirgel.

Kahe tasapinna α ja β lõikumisel tekib neli nurka (joonis 4); neid nurki nimetatakse kahetahulisteks nurkadeks. Kui kõrvaldada teisel pool tasapindade

lõikesirget asetsevad tasapindade osad, siis saame ühe kahetahulise nurga. Tasapindade lõikesirget s nimetatakse selle kahetahulise nurga servaks ja pooltasapindu α ja β — selle kahetahulise nurga tahkudeks.

Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse nn. joonnurga abil. Selle nurga saame järgmiselt: kahetahulise nurga serva s mingist punktist joonestame tahul α kiire u nii, et $u \perp s$, ja tahul β kiire v nii, et $v \perp s$; kiirte u ja v vaheline nurk ongi kahetahulise nurga joonnurk (joonis 4).



Joonis 4.

Kui kahetahulise nurga joonnurk on täisnurk, siis öeldakse, et tasapinnad ristuvad; lühidalt:

$$\text{kui } \overset{\wedge}{uv} = 90^\circ, \quad \text{siis } \alpha \perp \beta.$$

Kui kaks lõikuvat tasapinda ei ristu, siis nende lõikumisel tekkinud kahetahulistest nurkadest kaks nurka on teravnurgad ja kaks on nürinurgad. Siis loetakse kahe tasapinna vaheliseks nurgaks harilikult nende lõikumisel tekkinud teravnurk.

§ 5. Sirge ja tasapind.

Tasapinna definitsioonist selgus, et kui sirgel on tasapinnaga ka kaks ühist punkti, siis sirge asetseb tasapinnal; sel juhul öeldakse ka, et tasapind läbib sirget. Kui sirgel ja tasapinnal on üksainus ühine punkt, siis öeldakse, et nad lõikuvad. Kui sirgel ja tasapinnal

ei ole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et nad on paralleelsed. Nii on ruumis igal sirgel iga tasapinna suhtes üks järgnevast kolmest asendist:

- 1) sirge asetseb tasapinnal,
- 2) sirge lõikab tasapinda,
- 3) sirge on paralleelne tasapinnaga.

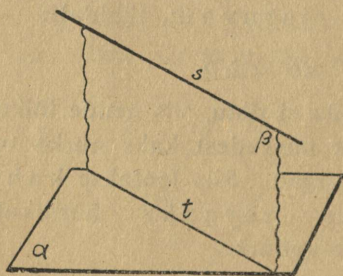
Sirge ja tasapinna paralleelsuse kindlakstegemisel saab mõnikord kasutada järgmist teoreemi:

kui sirge, mis ei asetse tasapinnal, on paralleelne sirgega, mis asetseb sel tasapinnal, siis on ta paralleelne tasapinnaga.

Eeldus: $s \parallel t$; s ei asetse tasapinnal α ; t asetseb tasapinnal α (joonis 5).

Väide: $s \parallel \alpha$.

Tõestus. Sirged s ja t määravad tasapinna β , mis lõikub tasapinnaga α mööda sirget t . Kui sirge s lõikuks tasapinnaga α , siis nende



Joonis 5.

lõikepunkt X asetseks nii tasapinnal β kui ka tasapinnal α , järelikult nende tasapindade lõikesirgel t . Seega oleks punkt X sirgete s ja t ühine punkt. Kuid eelduse järgi ei ole neil sirgetel ühist punkti; seepärast ei saa sirge s lõikuda tasapinnaga α . Et eelduse järgi

sirge s ei asetse tasapinnal α , siis jääb üle võimalus: s on paralleelne tasapinnaga α .

Ülesanne. Läbi antud punkti P , mis ei asetse antud tasapinnal α , ehitada sirge, mis on paralleelne tasapinnaga α .

Lahendus. Joonestame antud tasapinnal α mingi sirge t (joonis 5). Antud punkt P ja sirge t määravad ühe tasapinna, olgu see β . Joonestame tasapinnal β läbi antud punkti P sirge s paralleelselt sirgega t . Sirge s ongi paralleelne tasapinnaga α , sest ta on paralleelne tasapinnal α asetseva sirgega t .

Esitatud ülesanne on näide konstruktsioon-ülesandest ruumis. Selle lahendusest selgub, et konstruktsioonülesande lahendamiseks ruumis tuleb kasutada üht või mõnikord ka mitut abitasapinda, lahendades neil tasapindadel planimeetriast tuntud konstruktsioon-ülesandeid. Iga kasutatav abitasapind peab olema määratud selleks vajalikkude andmetega.

Ülesanded.

14. Mitu sirget on võimalik ehitada läbi antud punkti paralleelselt antud tasapinnaga?

15. Antud on sirge ja väljaspool seda punkt. Ehita läbi antud punkti antud sirgega paralleelne sirge ja antud sirgega ristuv sirge.

16. Ehita läbi antud punkti antud sirgega paralleelne tasapind. Mitu niisugust tasapinda on olemas?

17. Antud on kaks kiivsirget. Ehita tasapind, millel asetseb üks neist sirgeist ja mis on paralleelne teise sirgega.

§ 6. Kahe tasapinna paralleelsus.

Kaks tasapinda on paralleelsed, kui neil ei ole ühtki ühist punkti.

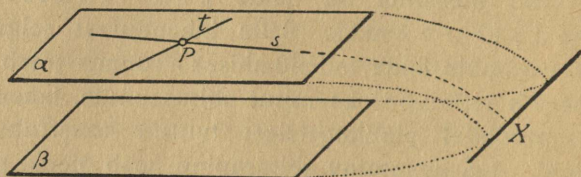
Et tasapinnad võivad asetseada teineteise suhtes nii, et neil ei ole ühtki ühist punkti, seda näitab järgmine teoreem:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui kaks lõikuvat sirget, mis asetsevad ühel neist tasapindadest, on paralleelsed teise tasapinnaga.

Eeldus: sirged s ja t lõikuvad ja asetsevad tasapinnal α ; $s \parallel \beta$; $t \parallel \beta$ (joonis 6).

Väide. $\alpha \parallel \beta$.

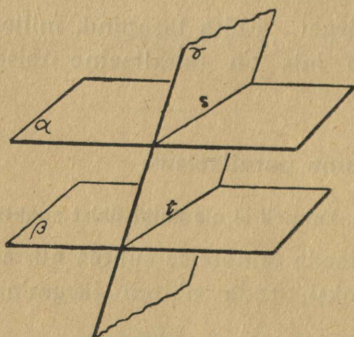
Tõestus. Tasapinnad α ja β ei ühti, sest sirged s ja t asetsevad tasapinnal α , kuid ei asetse tasapinnal β . Kui tasapinnad α ja β lõikuksid, siis nende lõikesirge, aset-



Joonis 6.

sedes tasapinnal α , lõikuks vähemalt ühega sirgetest s ja t . Lõikugu ta näiteks sirgega s punktis X . See punkt X oleks siis sirge s ja tasapinna β ühine punkt. Kuid eelduse järgi sirge s ükski punkt ei või asetseda tasapinnal β . Järelikult ei saa tasapinnad α ja β lõikuda; seega on tõestatud, et nad on paralleelsed.

Tõestame, et paralleelsetel tasapindadel on järgmine tähtis omadus:



Joonis 7.

paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged.

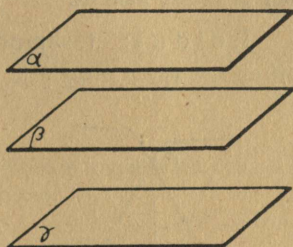
Eeldus: $\alpha \parallel \beta$; a ja γ lõikejoon on s ; β ja γ lõikejoon on t (joonis 7).

Väide: $s \parallel t$.

Tõestus. Sirged s ja t , asetsedes ühel ja samal tasapinnal γ , kas lõikuvad või on paralleelsed.

Kui s ja t lõikuksid, siis nende lõikepunkt X asetseks tasapinnal α , sest sirge s kõik punktid asetsevad tasapinnal α ; samuti asetseks punkt X tasapinnal β , sest sirge t kõik punktid asetsevad tasapinnal β . Seega oleks X tasapindade α ja β ühine punkt. Kuid ühist punkti neil tasapindadel olla ei saa, sest $\alpha \parallel \beta$. Järelikult s ja t ei lõiku, vaid on paralleelsed.

M ä r k u s. Keha pinna osi, mis on paralleelsete tasapindade tükid, nimetatakse paralleelseteks. Nii öeldakse näiteks, et keha tahud on paralleelsed, kui nende tahkude tasapinnad on paralleelsed.



Ülesanded.

18. Tõesta, et risttahuka vastastahud on paralleelsed.

Joonis 8.

19. Ehita antud tasapinnaga paralleelne tasapind läbi antud punkti.

20. Tõesta, et antud punkti läbib ainult üks tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga. Näpunäide: rakenda teoreemi paralleelsete tasapindade lõikamisest tasapinnaga.

21. Ehita kaks paralleelset tasapinda nii, et ühel neist asetseks üks ja teisel teine antud kiivsirgetest.

§ 7. Kolme tasapinna vastastikused asendid.

Kolm tasapinda võivad asetseda nii, et

1. neil ei ole ühtki lõikesirget (joonis 8); sel juhul tasapinnad on paralleelsed;

2. neil on üks lõikesirge (joonis 2); sel juhul need tasapinnad kuuluvad ühte tasapindade kimpu;

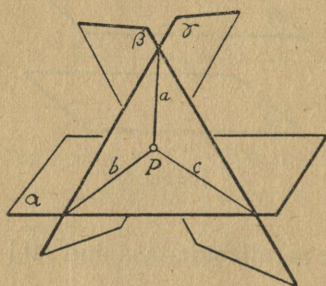
3. neil on kaks lõikesirget (joonis 7); sel juhul kaks tasapinda nende hulgast on paralleelsed;

4. neil on kolm lõikesirget (joonis 9. ja 10).

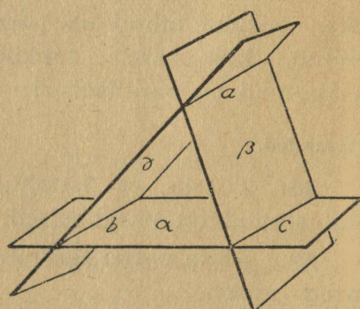
Viimasel juhul on tasapindade lõikesirgetel kaks asendi võimalust, nagu selgub järgnevast teoreemist.

Kolme tasapinna lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad ühes ja samas punktis.

Eeldus: tasapindade α ja β lõikesirge on c , β ja γ lõikesirge on a ning γ ja α lõikesirge on b (joonised 9 ja 10).



Joonis 9.



Joonis 10.

Väide: 1. kui a ja b lõikuvad, siis c läbib nende lõikepunkti P (joonis 9);

2. kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, $c \parallel b$ ja $c \parallel a$ (joonis 10).

Tõestus. Sirgetest a , b ja c saab moodustada kolm sirgete paari, nimelt paari a ja b , paari a ja c , paari b ja c . Neist esimene paar asetseb tasapinnal γ , teine tasapinnal β ja kolmas tasapinnal α . Järelikult ei ole nende sirgete hulgas kiivsirgeid.

Kui üks paar sirgeid, näiteks a ja b , lõikuvad (joonis 9), siis nende lõikepunkt P asetseb nii tasapinnal α , kus asetseb sirge b , kui ka tasapinnal β , kus asetseb

sirge a . Seega on punkt P tasapindade α ja β ühine punkt ja järelikult asetseb nende tasapindade lõikesirgel c . Sel juhul sirged a , b ja c lõikuvad ühes ja samas punktis P .

Kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, sest nad ei ole kiirsirged. Kuid siis ka $c \parallel a$ ja $c \parallel b$, sest c ja a või c ja b lõikumise puhul järelduks tõestuse eelmise osa põhjal, et ka a ja b lõikuvad.

Toetudes eelmisele teoreemile saab näidata, et ruumi-geomeetrias jääb õigeks järgmine tasapinnageomeetriast tuntud teoreem:

kui kumbki kahest sirgest on paralleelne mingi kolmanda sirgega, siis nad on ka teineteisega paralleelsed.

Eeldus: $a \parallel c$; $b \parallel c$.

Väide: $a \parallel b$.

Tõestus. Sirged a ja c määravad tasapinna β , sirged b ja c tasapinna α . Tasapinnad α ja β kas ühtivad või lõikuvad. Kui a ja β ühtivad, siis on sirged a , b ja c ühel ja samal tasapinnal. Sel juhul sirgetel a ja b ei saa olla lõikepunkti, sest läbi ühegi punkti ei lähe kaht sirget, mis on paralleelsed sirgega c ; järelikult $a \parallel b$. Juhul, kui aga tasapinnad α ja β lõikuvad (joonis 10), võtame sirgel a mingi punkti A ; sirge b ja punkt A määravad tasapinna γ . Tasapindade γ ja β lõikesirge on eelmise teoreemi põhjal paralleelne sirgega c , järelikult ühtiv sirgega a , sest läbi punkti A läheb tasapinnal β ainult üks sirge paralleelselt sirgega c . Eelmise teoreemi põhjal on tasapindade γ ja β lõikesirge ühtlasi paralleelne sirgega b , järelikult $a \parallel b$.

Ülesanded.

22. Paiguta kolm tasapinda üksteise suhtes niisugusse asendisse, et nende lõikesirgete hulgas on üks paar, kaks paari, kolm paari ristuvaid sirgeid.

23. Tõesta, et kui tasapind on risti ühega kahest paralleelsest tasapinnast, siis on ta risti ka teiseaga.

§ 8. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad.

Vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Eeldus: $s \parallel u$; $t \parallel v$; s ja t lõikuvad punktis K ; u ja v lõikuvad punktis L (joonis 11).

Väide: $\hat{st} = \hat{uv}$.

Tõestus. Võtame kiirel s vabalt punkti A ja kiirel t vabalt punkti D . Sirgetega s ja u määratud tasapinnal su joonestame läbi punkti A sirge AB paralleelselt sirgega KL ; samuti joonestame sirgega KL paralleelse sirge DC tasapinnal tv . Tekkinud nelinurgad $ABLK$ ja $DCLK$ on rööpkülikud. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis

$$AB = KL = DC.$$

Sirged AB ja DC , mis on paralleelsed sirgega KL , on ka teineteisega paralleelsed. Seega ka nelinurk $ABCD$ on rööpkülik. Rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu

$$AK = BL, \quad KD = LC \quad \text{ja} \quad AD = BC.$$

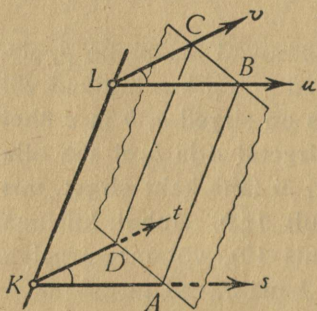
Kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk järgi seega

$$\triangle AKD = \triangle BLC,$$

millest järeldub, et

$$\hat{K} = \hat{L},$$

mida oligi tarvis tõestada.



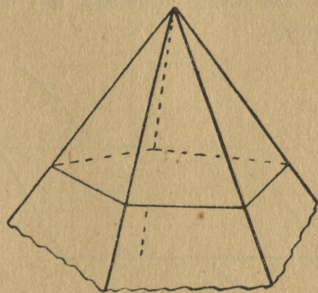
Joonis 11.

§ 9. Ruumisnurk.

Kui kolme tasapinna lõikesirged läbivad ühist punkti, siis tekib selle punkti juures kaheksa kolmetahulist nurka (joonis 9).

Ühes punktis võib lõikuda ka enam kui kolm tasapinda — üldiselt n tasapinda. Kujundeid, mis tekivad tasapindade lõikumisel ühes

punktis, nimetatakse ruumisnurkadeks. On lõikuvaid tasapindu näiteks viis, siis tekiv ruumisnurk on viietahuline (joonis 12). Ruumisnurga igal tahul asetseb kaks ruumisnurga serva, mis moodustavad ruumisnurga ühe tasanurga. On selge, et n -tahulisel ruumisnurgal on n serva ja n tasanurka.



Joonis 12.

Kui ruumisnurga lõikamisel tasapinnaga tekib kumer hulknurk, nagu joonisel 12, siis nimetatakse ruumisnurka kumeraks. Kumera ruumisnurga tasanurkade summa on väiksem kui 360° , nagu selgub nende tasanurkade asetamisel tasapinnale ühe punkti ümber.

Ülesanded.

24. Mitu kahetahulist nurka ja mitu kolmetahulist nurka esineb kuubi juures? Kui suur on kuubi kolmetahulise nurga tasanurkade summa?

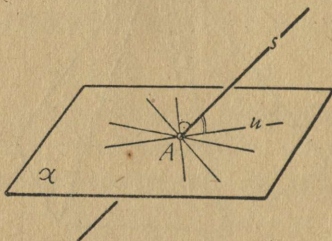
25. Mitu tahku, serva ja tippu on kehal, mis tekib neljatahulise ruumisnurga lõikamisel tasapinnaga?

§ 10. Tasapinna normaal.

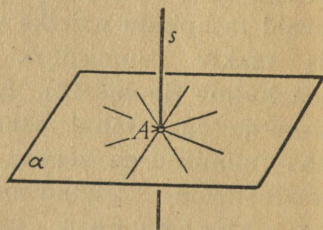
Lõigaku sirge s tasapinda α punktis A (joonis 13). Joonestame tasapinnal α läbi punkti A mingi sirge u ja

vaatleme, kas muutub nurk sirgete s ja u vahel, kui sirget u pöörata tasapinnal α ümber punkti A . Kui nurk sirgete s ja u vahel on täisnurk ja jääb täisnurgaks ka sirge u mistahes asendi puhul tasapinnal α , siis ütleme, et sirge s on risti tasapinnaga α (joonis 14). Seega:

sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti kõikide sellel tasapinnal asetsevate sirgetega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.



Joonis 13.



Joonis 14.

Tasapinnaga ristuvat sirget nimetatakse selle tasapinna normaalsirgeks. Sirget, mis tasapinda lõikab, kuid ei ole tasapinna normaal, nimetatakse selle tasapinna suhtes kaldsirgeks. Saab tõestada, et

iga punkti läbib ainult üks sirge, mis ristub antud tasapinnaga.

Tõepoolest, kui punkti P läbiks mitu sirget, mis on risti tasapinnaga α , näiteks sirged PP_1 ja PP_2 , siis nende kahe sirgega määratud tasapinnal β läheks läbi punkti P kaks sirget, mis oleks risti tasapindade α ja β lõikejoonega, nimelt sirged PP_1 ja PP_2 . See aga ei ole võimalik, järelikult punkti P läbib ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α .

Et tõestamisel ei olnud oluline, kas punkt P asetseb tasapinnal α või väljaspool seda, siis on väide õige iga punkti kohta.

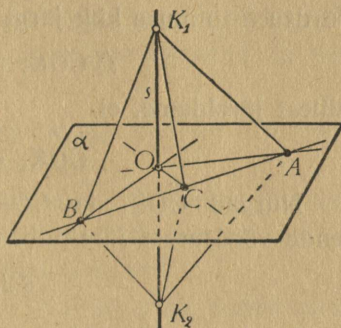
Sirge ja tasapinna ristseisu tunnuseks kasutame järgmist teoreemi:

sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti kahe sellel tasapinnal asetseva sirgega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.

Eeldus: $s \perp OA$; $s \perp OB$; OA ja OB on tasapinnal α (joonis 15).

Väide: $s \perp \alpha$.

Tõestus. Sirge s ristumiseks tasapinnaga α on eespool antud definitsiooni järgi tarvis, et sirge s ristuks iga sirgega, mis asetseb tasapinnal α ja läbib punkti O . Tõestamiseks võtame seepärast tasapinnal α mistahes kolmanda sirge OC läbi punkti O ja näitame, et $s \perp OC$. Selleks täiendame joonist järgmiselt:



Joonis 15.

1. märgime sirgel s punktid K_1 ja K_2 nii, et $OK_1 = OK_2$;

2. lõikame sirgeid OA , OB ja OC sirgega AB ;

3. ühendame punktid A , B ja C punktidega K_1 ja K_2 .

Vastavate elementide võrdlemisel võime nüüd kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk alusel öelda, et

$$\triangle AOK_1 = \triangle AOK_2 \quad \text{ja} \quad \triangle BOK_1 = \triangle BOK_2;$$

sellest järeldub, et

$$AK_1 = AK_2 \quad \text{ja} \quad BK_1 = BK_2.$$

Kuid siis kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk järgi

$$\triangle ABK_1 = \triangle ABK_2$$

ja seega

$$\hat{C}BK_1 = \hat{C}BK_2.$$

Rakendades nüüd kolmnurkade võrdsuse tunnust knk, saame, et

$$\triangle CBK_1 = \triangle CBK_2;$$

sellest järeldub, et

$$CK_1 = CK_2.$$

Võrdsuse tunnuse kkk järgi saame edasi, et

$$\triangle COK_1 = \triangle COK_2,$$

millest järeldame, et

$$\hat{COK}_1 = \hat{COK}_2.$$

Nurgad COK_1 ja COK_2 on kõrvunurgad, mistõttu nende võrdsusest järeldub, et

$$s \perp OC.$$

Et sirge s on eelduse järgi risti kahe sirgega OA ja OB ning tõestuse järgi on risti ka mistahes kolmanda sirgega OC , mis asetseb tasapinnal α ja läbib punkti O , siis on ta risti iga tasapinnal α asetseva ja punkti O läbiva sirgega; järelikult s on risti tasapinnaga α .

Eelnenud teoreemidest on võimalik järeldada, et kõik tasapinna normaaliid on üksteisega paralleelsed.

Et selles veenduda, vaatleme tasapinna α mistahes kaht normaali p ja q . Lõikugu nad tasapinnaga α vastavalt punktides P ja Q . Joonestame tasapinnal α kaks sirget läbi punkti P ja kaks, nendega vastavalt paralleelset sirget läbi punkti Q . Kujutleme nüüd sirget, mis läbib punkti Q ja on paralleelne sirgega p ; et vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, siis see sirge on risti läbi punkti Q joonestatud kahe sirgega, järelikult on risti ka tasapinnaga α . Kuid läbi punkti Q saab minna ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α , järelikult sirge p paralleel läbi punkti Q ühtib sirgega q .

Olesanded.

26. Tõesta, et risttahuka iga serv on risti kahe tahuga.
27. Antud on tasapind ja selle normaal. Tõesta, et iga tasapind, mis läbib seda normaali, on risti antud tasapinnaga.
28. Antud on kaks ristuvat tasapinda ja punkt, mis asetseb ühel neist tasapindadest. Tõesta, et sellest punktist tasapindade lõikesirgele joonestatud ristsirge on teise tasapinna normaal.
29. Tõesta, et kahetahulise nurga serv on risti kahtahulise nurga joonnurga tasapinnaga.
30. Tõesta, et kahetahulise nurga servaga ristuv tasapind lõikub nurga tahkudega nii, et lõikesirgete vaheline nurk on selle kahetahulise nurga joonnurk.
31. Tõesta, et tasapind, mis on risti kahetahulise nurga servaga, on risti ka selle nurga tahkudega.
32. Ehita antud sirgega ristuv tasapind
 - a) läbi sirgel antud punkti,
 - b) läbi väljaspool sirget antud punkti.
33. Ehita antud tasapinnaga ristuv tasapind
 - a) läbi tasapinnal antud punkti,
 - b) läbi väljaspool tasapinda antud punkti.
34. Ehita antud tasapinnaga ristuv sirge
 - a) läbi tasapinnal antud punkti,
 - b) läbi väljaspool tasapinda antud punkti.
35. Tõesta, et antud tasapinna normaal ristub iga tasapinnaga, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

§ 11. Punkti ja sirge normaalprojektsioon tasapinnale.

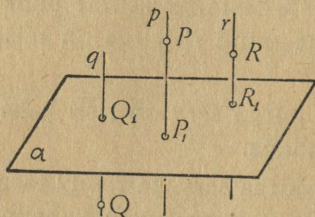
Olgu antud väljaspool tasapinda α punktid P, Q, R, \dots . Joonestame läbi antud punktide tasapinna α normaalid p, q, r, \dots (joonis 16) ja leiame punktid, kus need normaalid

lõikuvad tasapinnaga α . Saadud punkte P_1, Q_1, R_1, \dots nimetatakse antud punktide P, Q, R, \dots normaalprojektsioonideks tasapinnale α . Üldiselt

punkti normaalprojektsioon tasapinnale on seda punkti läbiva normaali lõikepunkt tasapinnaga.

Punkt, mis ise asetseb tasapinnal, ühtib oma normaalprojektsiooniga. Punkti ja tema normaalprojektsiooni vahelist kaugust nimetatakse punkti kauguseks tasapinnast.

Olgu antud tasapind α ja sirge s . Leiame sirge s punktide normaalprojektsioonid tasapinnale α .



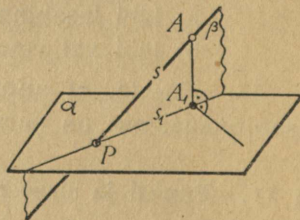
Joonis 16.

Sirge punktide projektsioonide kogu nimetatakse sirge projektsiooniks.

Kui sirge s ristub tasapinnaga α , siis selle sirge mistahes punkti läbiv tasapinna α normaal ühtib sirgega s , seega kõigi sirge s punktide normaalprojektsioonid tasapinnale α ühtivad sirge ja tasapinna lõikepunktiga. Järelikult

tasapinnaga ristuva sirge normaalprojektsioon samale tasapinnale on punkt.

Kui sirge s ei ristu tasapinnaga α , siis kõik tasapinna normaaliid, mis läbivad sirge s punkte, asetsevad ühel ja samal tasapinnal β , sest nad on kõik isekeskis paralleelsed. See tasapind β on määratud sirgega s ja üht sirge s punkti läbiva normaaliga, näiteks normaaliga AA_1 (joonis 17). Sirge s



Joonis 17.

kõigi punktide normaalprojektsioonid tasapinnale α on tasapindade β ja α lõikesirgel s_1 . Järelikult

tasapinnaga mitteristuva sirge normaalprojektsioon tasapinnale on sirge.

Kui sirge s ei ole paralleelne tasapinnaga α , siis ta lõikub oma projektsiooniga, sest nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal β .

Kaldsirge ja tema normaalprojektsiooni vahelist teravnurka nimetatakse sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks ehk sirge kalde-nurgaks.

Tähistame sirge s kaldenurga, s. o. nurga APA_1 joonisel 17, tähega φ . Kolmnurgast APA_1 saame siis, et

$$A_1P = AP \cdot \cos \varphi$$

ehk

lõigu normaalprojektsioon võrdub lõigu pikkuse ja tema kaldenurga koosinuse korrutisega.

See seos on kehtiv ka siis, kui lõigu AP mõlemad ots-punktid on väljaspool tasapinda α ; seda saab tõestada, kui läbi lõigu ühe otspunkti ehitada tasapind, mis on paral-leelne tasapinnaga α .

Ülesanded.

36. Kuubi serva pikkus on a cm. Kui pikk on selle kuubi diagonaal?

37. Joonesta kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk loomulikus suuruses. Kui suur on see nurk?

38. Risttahuka mõõtmed on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui pikk on selle risttahuka diagonaal?

39. Risttahuka mõõtmed on a cm, b cm ja c cm. Kui pikk on selle risttahuka diagonaal?

40. Kus asetsevad ruumis need punktid, mis on kahest antud punktist võrdsetel kaugustel?

41. Kus asetsevad ruumis need punktid, mis on antud kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel?

42. Tõesta, et antud punkti normaalprojektsioon tasapinnale asetseb antud punktile lähemal kui ükski teine selle tasapinna punkt. Näpunäide: kasuta asjaolu, et kaatet on lühem kui hüpotenuus.

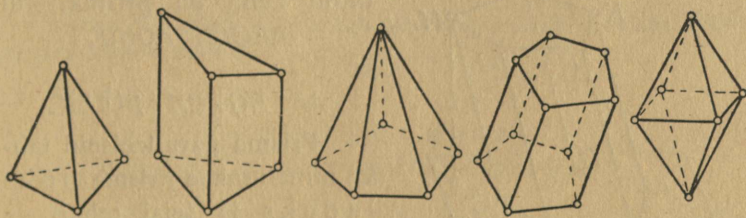
Peatükk II.

Geomeetriliste kehade liigitelu.

§ 12. Tahkkeha.

Ruumiosa, mis on igalt poolt piiratud ainult tasapinna tükkidega, nimetatakse tahkkehaks ehk hulktahukaks.

Piiravad tasapinna tükid on tahkkeha tahud; sirg-lõigud, kus lõikuvad tahkkeha tahud, on tahkkeha servad; punktid, kus lõikuvad servad, on tahkkeha tipud. Tahkkeha iga serva juures on üks kahetahuline nurk ja iga tipu juures üks ruumisnurk.



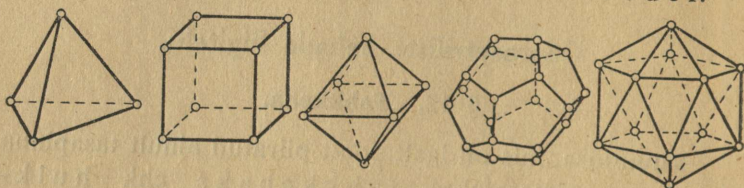
Joonis 18.

Tahkkehi liigitatakse nende tahkude arvu järgi nelitahukateks, viistahukateks, kuustahukateks jne. (joon. 18). Vähem kui neli tahku ei saa tahkkehal olla.

Tahkude kuju järgi eristatakse korrapäraseid ja korrapäratuid tahkkehi.

Korrapärane tahkkeha on tahkkeha, mille tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad ja mille kahetahulised nurgad on võrdsed.

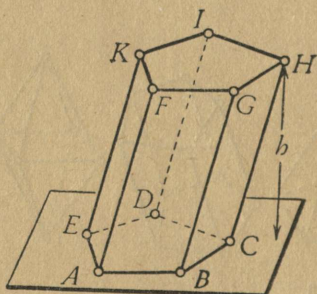
Korrapäraseid tahkkehi on ainult viis (joonis 19); korrapärased võivad olla nimelt nelitahukas ehk tetraeeder, kuustahukas ehk heksaeeder, kaheksatahukas ehk oktaeeder, kaksteisttahukas ehk dodekaeeder ja kakkümmendtahukas ehk ikosaeeder.



Joonis 19.

§ 13. Prisma.

Prisma on tahkkeha, mille kaks tahku on paralleelsed ja mille teiste tahkude lõikejooned on paralleelsed.



Joonis 20.

Seega joonisel 20 kujutatud keha on prisma, kui $ABCDE \parallel FGHK$

ja

$$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK.$$

Prisma paralleelseid tahke nimetatakse prisma põhjadeks ja teisi tahke — külgtahkudeks. Külgtahkude lõikejooned põhjadega on põhiservad ja külgtahkude vahelised lõikejooned on külgservad. Prisma põhjade tasapindade vaheline ristlõik (h joonisel 20) on prisma kõrgus.

Tõestame, et

prisma külgtahud on rööpkülilikud ja põhjad on võrdsed hulknurgad.

Tõestus. Vaatleme, näiteks, külgtahku $ABGF$. Et paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged, siis

$$AB \parallel FG;$$

prisma definitsiooni järgi

$$AF \parallel BG;$$

järelikult nelinurk $ABGF$ on rööpkülik. Samal viisil saab tõestada, et ka teised külgtahud on rööpkülikud. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis

$$AB = FG; \quad BC = GH; \quad CD = HI; \dots$$

Et vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, siis

$$\hat{ABC} = \hat{FGH}; \quad \hat{BCD} = \hat{GHI}; \dots$$

Seega hulknurk $ABCDE$ on võrdne hulknurgaga $FGHIK$.

Tõestatud teoreemist on kerge järeldada, et

prisma külgservad on võrdsed.

Samal viisil nagu tõestasime, et prisma põhjad on võrdsed, saab tõestada, et

prisma lõikamisel tasapinnaga, mis on paralleelne põhjaga, tekib põhjaga võrdne hulknurk.

Prismasid liigitame

1. nende külgtahkude arvu järgi ja
2. külgserva ja põhja vahelise nurga järgi.

Külgtahkude arvu järgi on prismad kolmetahulised, neljataahulised, viietahulised jne.

Külgserva ja põhja vahelise nurga järgi on prisma kas püstprisma või kaldprisma.

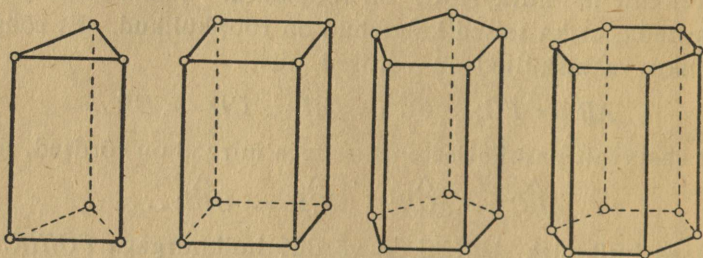
Püstprisma on prisma, mille külgservad on põhjaga risti;

vastasel korral on prisma kaldprisma. Et püstprisma külgservad moodustavad põhiservadega täisnurgad, siis kõik püstprisma külgtahud on ristkülikud.

Püstprismad liigitatakse põhja kuju järgi korrapäraseks ja korrapäratuteks prismadeks.

Korrapärane prisma on püstprisma, mille põhjaks on korrapärane hulknurk.

Joonisel 21 on kujutatud korrapärane kolme-, nelja-, viie- ja kuuetahtuline prisma. Korrapärase prisma külgtahud on võrdsed ristkülikud.



Joonis 21.

Mõnele sagedamini esinevale prismale on antud eriline nimetus. Näiteks

prismat, mille põhjaks on rööpkülik, nimetatakse rööptahukaks; püstprismat, mille põhjaks on ristkülik, nimetatakse risttahukaks.

Sellest selgub, et rööptahuka kõik tahud on rööpkülikud ja risttahuka kõik tahud — ristkülikud. Risttahuka erikuju on kuup.

Kuup on risttahukas, mille kõik tahud on võrdsed.

Ülesanded.

43. Joonista kolm viistahukat: püramiid, prisma ja keha, mis tekib prisma lõikamisel põhjaga mitteparalleelse tasapinnaga. Mitu serva ja mitu tippu on igal joonistatud kehal?

44. Mitu tahku, serva ja tippu on n -tahulisel prismal?

45. Mitu serva on prismal, millel on $2t$ tippu?

46. Mitu tahku on prisma, millel on 3s serva?

47. Tõesta, et prisma lõikamisel tasapinnaga, mis on paralleelne külgservaga, tekivad külgtahkudel lõikejooned, mis on paralleelsed külgservaga.

48. Missugusel prisma on servade arv tippude arvust 7 võrra suurem?

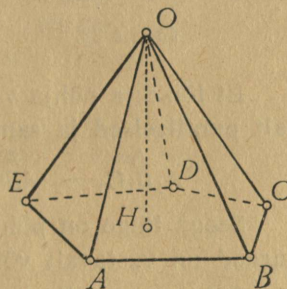
49. Missugusel prisma on servade arv tahkude arvust 16 võrra suurem?

50. Joonista kuup ja ühenda selle iga tahu keskpunkt selle tahu lähistahkude keskpunktidega. Missugusel kehal on need sirglõigud servadeks?

§ 14. Püramiid ja tüvipüramiid.

Püramiid on tahkkeha, mille üks tahk on hulknurk ja teised tahud on ühise tipuga kolmnurgad.

Joonis 22 kujutab viie-tahulist püramiidi; selle põhjaks on viisnurk $ABCDE$ ja külgtahkudeks on kolmnurgad, mille ühine tipp on punkt O . Seda tippu nimetatakse püramiidi tipuks. Tipust põhja tasapinnani minev normaali lõik OH on püramiidi kõrgus.



Joonis 22.

Püramiidi servi liigitatakse, nagu prisma, külgservadeks ja põhiservadeks.

Tõestame järgmise teoreemi:

püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekib põhjaga sarnane hulknurk.

Eeldus: $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$ (joonis 23).

Väide: $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$.

Tõestus. Et põhja tasapind ja lõike tasapind on paralleelsed, siis

$$A_1B_1 \parallel AB; \quad B_1C_1 \parallel BC; \quad C_1D_1 \parallel CD; \dots$$

Sellest järeldub, et külgtahkudel on sarnased kolm-nurgad, ja seega püramiidi lõike ja põhja küljed on võrdelised. Tõepoolest, võrdeist

$$A_1B_1 : AB = OB_1 : OB$$

ja

$$B_1C_1 : BC = OB_1 : OB$$

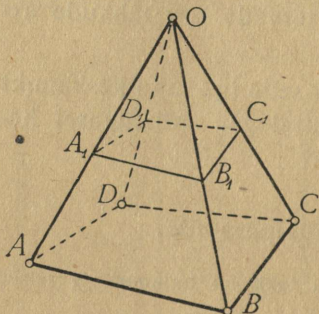
saame võrde

$$A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC;$$

samal viisil ka

$$B_1C_1 : BC = C_1D_1 : CD$$

jne.



Joonis 23.

Et lõike ja põhja vastavate nurkade haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised, siis

$$\hat{A_1B_1C_1} = \hat{ABC}; \quad \hat{B_1C_1D_1} = \hat{BCD}; \dots$$

Seega lõige on põhjaga sarnane hulknurk, sest nende nurgad on vastavalt võrdsed ja küljed võrdelised.

Põhjaga paralleelne tasapind tükeldab püramiidi kaheks kehaks; neist alumine (joonis 23) on tüvipüramiid ja ülemine on selle tüvipüramiidi täiendus-püramiid. Tüvipüramiidil on kaks põhja.

Püramiide liigitatakse külgtahkude arvu järgi kolmetahulisteks, neljatahulisteks, viietahulisteks jne. püramiidideks. Peale selle saab püramiide veel liigitada korrapärasteks ja korrapäratuteks.

Püramiid on korrapärane, kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrgus lõikab põhja selle keskpunktis.

Joonis 24 kujutab korrapärast kuuetaahulist püramiidi. Et punkt H on põhja keskpunkt, siis

$$AH = BH$$

ja seega

$$\triangle AHO = \triangle BHO,$$

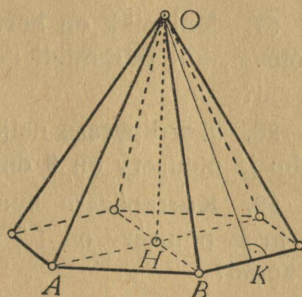
millest järeldub, et

$$AO = BO;$$

korrapärase püramiidi külgservad on võrdsed ja külgtahud on võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad.

Samuti on võrdsed ka külgtahude kõrgused ehk püramiidi apoteemid (OK joonisel 24).

Tüvipüramiidi, mis tekib korrapärase püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga, nimetatakse korrapäraseks tüvipüramiidiks.



Joonis 24.

Ülesanded.

51. Mitu tahku, serva ja tippu on n -tahulisel püramiidil?

52. Mitu serva on püramiidil, millel on 9 tahku?

53. Missugusel püramiidil on servade arv tahkude arvust 10 võrra suurem?

54. Kolmetahuline püramiid on lõigatud tasapinnaga, millel asetseb üks püramiidi serv. Missugusteks kehadeks tükeldub püramiid?

55. Kolmetahuline prisma on lõigatud tasapinnaga, mis on määratud põhiservaga ja tipuga, mis ei asetse selle põhiservaga ühel ja samal tahul. Missugusteks kehadeks tükeldub prisma?

56. Neljatahuline püramiid, mille põhiservad on 4,5 cm, 3,5 cm, 3,2 cm ja 5,4 cm, on lõigatud põhjaga paral-

leelse tasapinnaga nii, et põhja ja lõiketasapinna vahele jäänud külgservade lõigud on $\frac{1}{2}$ külgservadest. Kui pikad on lõike küljed?

57. Kui pikk on korrapärase neljatahulise püramiidi apoteem, kui püramiidi kõrgus on 15 cm ja põhiserv on 16 cm?

58. Korrapärase neljatahulise püramiidi külgserv on 9 dm ja põhiserv on 8 dm. Kui kõrge on püramiid?

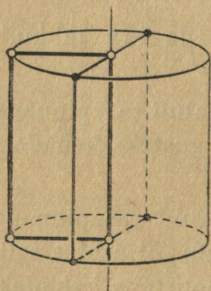
59. Korrapärase kuuetahulise püramiidi kõrgus on 1,5 m ja põhiserv on 1,2 m. Leia apoteemi ja külgserva pikkused?

60. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserv on 25 cm ja kõrgus on 20 cm. Kui suur on külgserva kaldenurk ja külgtahu kaldenurk põhja suhtes?

61. Korrapärase viietahulise püramiidi põhiserv on 10 cm ja külgtahu ning põhja vaheline nurk on 50° . Kui pikk on püramiidi apoteem?

§ 15. Silinder.

Kui laseme ristkülikul pöörelda tema ühe külje ümber, siis tekib keha, mida nimetatakse **s i l i n d r i k s** (joonis 25).



Joonis 25.

Silinder on piiratud kahe võrdse ja paralleelse ringiga ja silindrilise pinnaga.

Silindrit piiravad ringid on silindri põhjad ja silindriline pind on külgpind.

Sirglõiku, mis ühendab silindri põhjade keskpunkte, nimetatakse silindri teljeks. Et telg on risti mõlema põhjaga, siis on ta ühtlasi ka silindri kõrguseks. Mööda silindri külgpinda minev sirglõik, mis ühendab silindri põhju, on silindri moodustaja.

Kui silindrit lõigata tasapinnaga, millel asetseb silindri telg, siis tekib lõige, mida nimetatakse telglõikeks. Silindri telglõige on ristkülik, mille üheks küljeks on silindri põhja läbimõõt ja teiseks küljeks — moodustaja.

Kui silindrit lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis tekib põhjaga võrdne ring.

Ülesanded.

62. Silindri telglõige on ruut küljega a cm. Kui suur on silindri põhja pindala?

63. Kuidas peab sirge liikuma, et ta moodustaks silindrilise pinna?

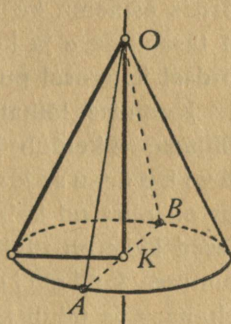
64. Kus asetsevad ruumis need punktid, mille kaugus antud sirgest on näiteks 10 cm?

§ 16. Koonus ja tüvikoonus.

Täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ühe kaateti ümber tekib keha, mida nimetatakse koonuseks (joonis 26).

Koonus on piiratud ühe ringiga ja koonilise pinnaga.

Neist esimene on koonuse põhi ja teine — koonuse külgpind. Sirglõik, mis ühendab koonuse tippu põhja keskpunktiga, on koonuse telg. Et viimane on risti põhjaga, siis on ta ka ühtlasi koonuse kõrguseks. Sirglõik, mis ühendab koonuse tippu põhja ringjoone mingi punktiga, on koonuse moodustaja. Et koonus tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel, siis on koonuse moodustajad võrdsed, sest nad võrduvad pöörleva kolmnurga hüpotenuusiga.

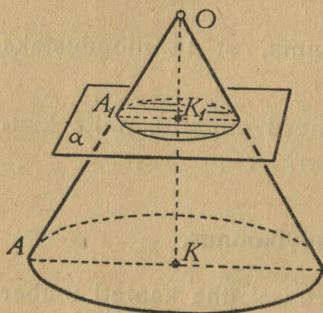


Joonis 26.

Kui koonust lõigata tasapinnaga, millel asetseb koonuse telg, siis lõikab see tasapind koonuse põhja mööda läbimõõtu ja koonuse külgpinda — mööda kaht moodustajat. Koonuse telglõige on seega võrdhaarne kolmnurk, mille aluseks on koonuse põhja läbimõõt ja haaraks — koonuse moodustaja ($\triangle AOB$ joonisel 26).

Põhjaga paralleelne koonuse lõige on ring.

Tõepoolest, kui lõikav tasapind α on paralleelne koonuse põhjaga (joonis 27), siis nende tasapindade lõikamisel telglõike tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged AK ja A_1K_1 ; järelikult



Joonis 27.

$$\triangle OA_1K_1 \sim \triangle OAK,$$

millest

$$A_1K_1 : AK = OK_1 : OK.$$

Iga muu telglõike tasapinnal saame samuti võrde, milles AK asemel esineb mingi teine põhja raadius, aga OK_1 ja OK jäävad endiseks; seega peab ses

võrdes esinema ka A_1K_1 asemel temaga võrdne lõik. Nii on tasapinna α ja koonilise pinna lõikejoone kõik punktid võrdsel kaugusel punktist K_1 , seega lõikejoon on ringjoon.

Koonuse lõikamisel tasapinnaga, mis on paralleelne põhjaga, tükeldub koonus kaheks kehaks; neist üks on tükikoonus ja teine selle täienduskoonus. Tükikoonus on piiratud kahe ringiga ja ühe koonilise pinnaga; esimesed kaks on tükikoonuse põhjad ja kolmas on tükikoonuse külgpind. Tükikoonust võib vaadelda ka kehana, mis tekib täisnurkse trapetsi pöörlemisel alustega ristuva haara ümber; seetõttu lõiku KK_1 joonisel 27 nimetatakse tükikoonuse teljeks ja lõiku AA_1 — tükikoonuse moodustajaks.

Ülesanded.

65. Missuguse pinna moodustavad need sirged, mis läbivad antud punkti ja millel on antud tasapinna suhtes võrdsed kaldenurgad, näiteks 30° ?

66. Kui kõrge on koonus, mille moodustaja on 9,7 cm ja põhja raadius on 6,5 cm?

67. Koonuse kõrgus on x cm ja põhja raadius $2x$ cm. Kui suur on telglõike ümbermõõt?

68. Tüvikoonuse põhjade läbimõõdud on 15 cm ja 10 cm, kõrgus on 6 cm. Kui pikk on moodustaja?

69. Tüvikoonuse moodustaja on 7,4 cm, kõrgus 7 cm ja suurema põhja raadius 6 cm. Kui pikk on väiksema põhja raadius?

70. Koonuse põhja läbimõõt on 15 cm ja moodustaja 9 cm. Kui suur on moodustaja kaldenurk põhja suhtes?

71. Koonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on $42^\circ 15'$ ja kõrgus on 24,2 cm. Kui pikk on moodustaja ja kui pikk põhja raadius?

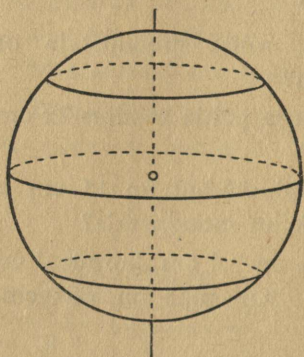
§ 17. Kera.

Ringi pöörlemisel tema läbimõõdu ümber tekib keha, mida nimetatakse *keraks*; kera piiravat pinda nimetatakse *kerapinnaks* ehk *sfääriks* (joonis 28). Et kerapind tekib ringjoone pöörlemisel ümber läbimõõdu, siis

kerapinna kõik punktid asetsevad võrdsel kaugusel ühest kindlast kera punktist, mida nimetatakse kera keskpunktiks.

Sirglõik, mis ühendab kaks kerapinna punkti, läbides keskpunkti, on kera läbimõõt ehk *diameeter*; keskpunkt tükeldab läbimõõdu kaheks raadiuseks. Ühe ja sama kera raadiused on võrdsed ja samuti on läbimõõdud võrdsed.

Kui kera lõigata tasapinnaga, mis läbib kera keskpunkti, siis tekib ringikujuline lõige, sest selle lõike piirjoone kõik punktid asetsevad samal tasapinnal olevast kera keskpunktist võrdsetel kaugustel. Seda lõiget nimetatakse kera suurringiks;



Joonis 28.

kera keskpunktist võrdsetel kaugustel. Seda lõiget nimetatakse kera suurringiks;

kera suurringi raadius võrdub kera raadiusega.

Tõestame, et

kera iga lõike tasapinnaga on ring.

Olgu kera lõigatud tasapinnaga α ning lõike piirjoonel olgu punktid A, B, \dots (joonis 29).

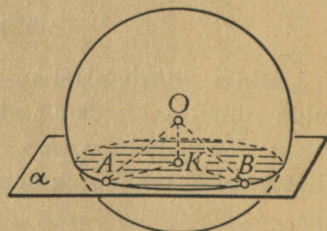
Ehitame kera keskpunktist O lõiketasapinnale α normaali OK ja ühendame punktid O ja K punktidega A, B, \dots . Et kolmnurgad AOK, BOK, \dots on täisnurksed, ühe ühise kaatetiga ja võrdsete hüpotenuusidega, siis ka nende teised kaatetid on võrdsed:

$$AK = BK = \dots$$

Seega asetsevad punktid A, B, \dots ringjoonel, mille keskpunktiks on punkt K . Selle ringjoone raadius

$$r_1 = \sqrt{r^2 - p^2},$$

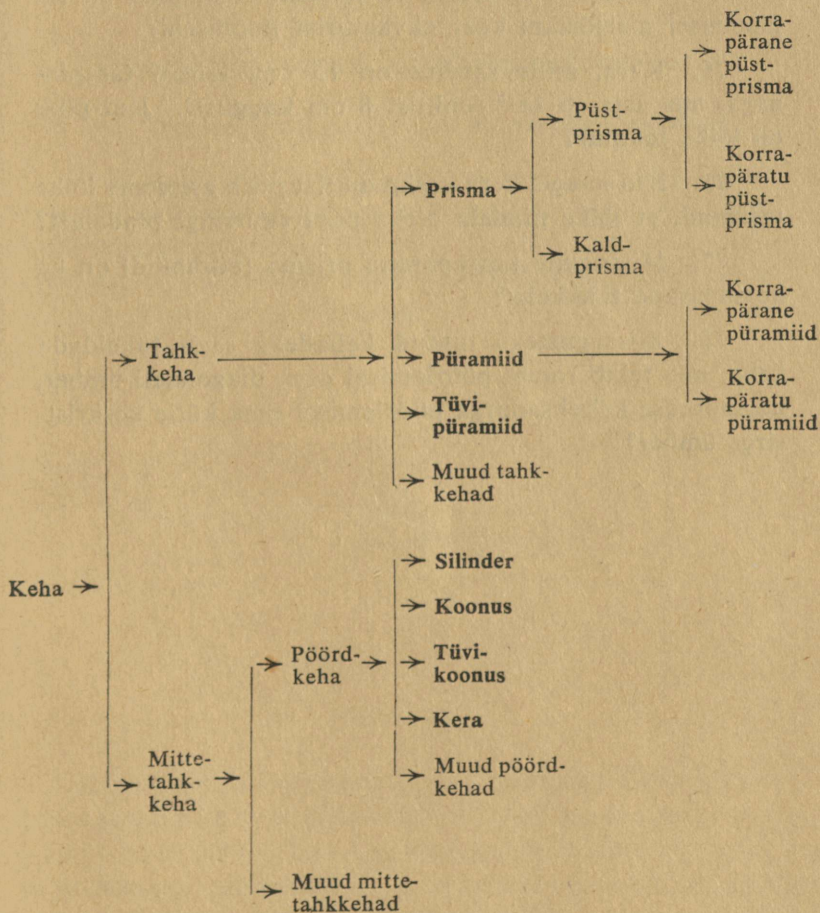
kus p ehk OK on lõike tasapinna kaugus kera keskpunktist ja r ehk AO on kera raadius.



Joonis 29.

Kolmes viimases paragraafis kirjeldatud kehad, nimelt silinder, koonus, tüvikoonus ja kera, tekivad teatavate tasapinnaliste kujundite pöörlemisel ümber samal tasa-

pinnal asetseva sirge. Kõiki niisuguseid kehi nimetatakse pöördkehadeks. Viimased moodustavad ühe tähtsama rühma mittetahkkehade hulgas. Korraldades kõik eespoolkirjeldatud kehad ühte skeemi, saame järgneva kokkuvõtte kehade liigitelust:



Ülesanded.

72. Kus asetsevad ruumis need punktid, milledest paistab antud sirglõik täisnurgas?

73. Kera läbimõõt on 12 cm. Kui suur on kera ümbermõõt?

74. Gloobuse läbimõõt on 20 cm. Kui pikk on sel gloobusel meridiaani kaar ekvaatorist pooluseni?

75. Kera, mille raadius on 15 cm, lõigati tasapinnaga, mis asetseb keskpunktist 8 cm kaugusel. Kui pikk on lõike raadius?

76. Kui kaugel kera keskpunktist peab asetsema lõike tasapind, et lõike pindala oleks pool suuringi pindalast?

77. Missugune korrapärane prisma (püramiid) on ka korrapärane tahkkeha?

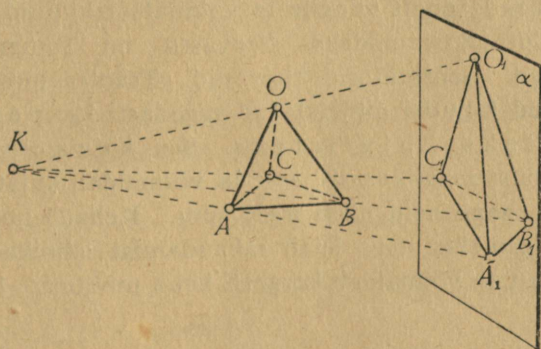
78. Missugusteks tuntud kehadeks saab tükeldada keha, mis tekib rombi pöörlemisel oma diagonaali ümber, korrapärase kaheksanurga pöörlemisel oma külje keskrist-sirge ümber?

Peatükk III.

Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis.

§ 18. Tsentraalprojektsioon ja paralleelprojektsioon.

Tasapinnalise kujutise saamiseks kehist valgustame keha näiteks päikesekiirtega ja joonistame varju, mis tekib keha taha paigutatud tasapinnal. Saadud varjujoonis näitab keha kuju ja tema abil saab otsustada teisigi keha kohta käivaid geomeetrilisi küsimusi.



Joonis 30.

Keha varjujoonist nimetatakse harilikult keha projektsiooniks ja tasapinda, millel on saadud joonis — projektsiooni tasapinnaks. Kiiri, mis tekitab projektsiooni, nimetatakse projektivateks kiirteks. Kehade kujutamisel kasutatakse kahesuguseid

projektsioone, nimelt tsentraalprojektsioone ja paralleelprojektsioone.

Tsentraalprojektsiooniks nimetatakse keha projektsiooni juhul, kui projektivad kiired lähtuvad punktitaolisest valgusallikast.

Joonis 30 kujutab kolmetahulise püramiidi tsentraalprojektsiooni tekkimist; punkt K on projektsiooni keskpunkt, α — projektsiooni tasapind, KA_1, KB_1, \dots — projektivad kiired ja $O_1A_1B_1C_1$ — püramiidi $OABC$ tsentraalprojektsioon.

Kui projektsiooni keskpunkt K viia väga kaugele projektsiooni tasapinnast, siis projektivad kiired on peaaegu paralleelsed.

Projektsiooni, mis saadakse paralleelsete projektivate kiirtega, nimetatakse paralleelprojektsiooniks.

Et päikesekiired on peaaegu paralleelsed, siis võib pidada nende poolt mingile tasapinnale tekitatud varjusid paralleelprojektsioonideks. Seevastu on fotograafilised ülevõtted tsentraalprojektsioonid. Tsentraalprojektsioonis tehtud kujutisi nimetatakse sagedasti ka perspektiivseteks kujutisteks. See kujutamiseviis leiab rakendamist maalikunstis, sest ta võimaldab kujutada esemeid nii, nagu neid näeb meie silm. Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis leiab rakendamist tehnikas ja teaduses, sest ta võimaldab kergesti keha mõõtmete kindlaks tegemist.

§ 19. Paralleelprojektsiooni põhiseadused.

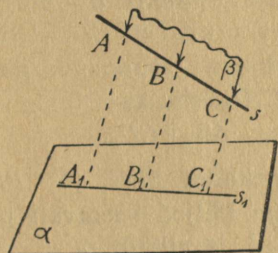
Paralleelprojektsiooni iseloomustab kolm järgnevat teoreemi.

I. Sirge projektsioon on üldiselt sirge, erijuhul aga punkt.

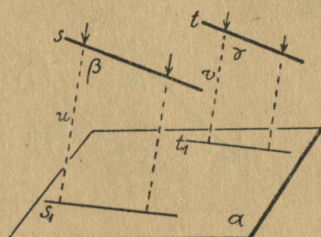
Eeldus: A_1, B_1, \dots on sirge s punktide projektsioonid tasapinnal α ja $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \dots$ (joonis 31).

Väide: A_1, B_1, C_1, \dots asetsevad ühel ja samal sirgel s_1 .

Tõestus. Kiired AA_1, BB_1, CC_1, \dots asetsevad tasapinnal β , mis on määratud sirgega s ja väljaspool sirget asetseva punktiga A_1 ; järelikult asetsevad kiirte BB_1, CC_1, \dots ja tasapinna α lõikepunktid B_1, C_1, \dots tasapindade β ja α lõikejoonel s_1 , mis teatavasti on sirgjoon.



Joonis 31.



Joonis 32.

Kui sirge s on paralleelne projektivate kiirtega, siis AA_1, BB_1, CC_1, \dots ühtivad sirgega s , mistõttu sirge s ja tasapinna α lõikepunkt on kõigi sirge s punktide projektiooniks.

II. Sirged, mis on paralleelsete sirgete projektioonideks, on isekeskis paralleelsed.

Eeldus: $s \parallel t$; s ja t paralleelprojektioonid on vastavalt s_1 ja t_1 (joonis 32).

Väide: $s_1 \parallel t_1$.

Tõestus. Sirgeid s ja t projektivad kiired asetsevad tasapindadel β ja γ , mis on paralleelsed, sest kaks lõikuvat sirget s ja u tasapinnal β on paralleelsed kahe lõikuva sirgega t ja v tasapinnal γ . Paralleelsete tasapindade β ja γ lõikamisel tasapinnaga α tekivad paralleelsed lõikesirged s_1 ja t_1 .

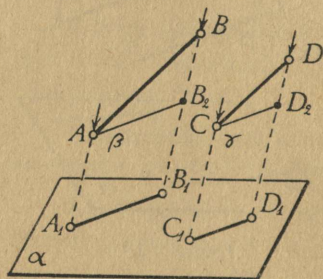
III. Paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma projektsioonidega.

Eeldus: $AB \parallel CD$; A_1B_1 ja C_1D_1 on AB ja CD paralleelprojektsioonid (joonis 33).

Väide:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Tõestus. Võtame sirgel BB_1 punkti B_2 nii, et $AB_2 \parallel A_1B_1$, ja sirgel DD_1 punkti D_2 nii, et $CD_2 \parallel C_1D_1$. Et eelmise teoreemi järgi $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, siis ka $AB_2 \parallel CD_2$.



Joonis 33.

Kolmnurkadel ABB_2 ja CDD_2 on seega küljed vastavalt paralleelsed, järelikult

$$\hat{A}BAB_2 = \hat{A}CDD_2$$

ja

$$\hat{A}ABB_2 = \hat{A}CDD_2.$$

Kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi siis $\triangle ABB_2 \sim \triangle CDD_2$, millest järeldub, et

$$AB : AB_2 = CD : CD_2.$$

Et nelinurgad $AB_2B_1A_1$ ja $CD_2D_1C_1$ on rööpkülilikud, siis

$$AB_2 = A_1B_1 \quad \text{ja} \quad CD_2 = C_1D_1.$$

Asetamisel eespool leitud võrdesse saab, et

$$AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1.$$

Erijuhul, kui $AB \parallel \alpha$, ühtib punkt B_2 punktiga B ; sel juhul ABB_1A_1 on rööpkülilik, järelikult $A_1B_1 = AB$; seega

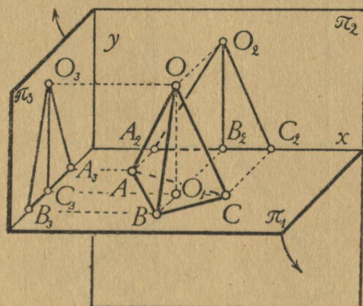
projektsioonitasapinnaga paralleelse sirglõigu pikkus ja selle paralleelprojektsiooni pikkus on võrdsed.

§ 20. Normaalkprojektsioon.

Kõige lihtsam on paralleelprojektsiooni joonestada sel puhul, kui kiired on risti projektsiooni tasapinnaga.

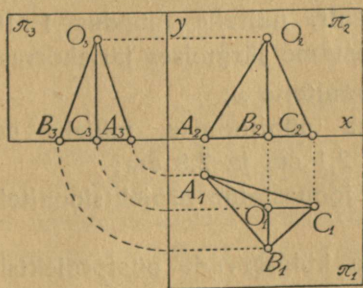
Projektsiooni, mille tekitavad projektsioonitasapinnaga ristuvad kiired, nimetatakse rist- ehk normaalprojektsiooniks.

Et keha ristprojektsioon ühele tasapinnale ei anna igakord küllalt selget kujutlust kehast, siis projektitakse keha kahele, mõnikord ka kolmele, üksteise suhtes ristiseisvale tasapinnale. Harilikult võetakse esimeseks tasapinnaks rõhttasapind (π_1 joonisel 34) ja teisteks tasapindadeks kaks ristuvat püsttasapinda (π_2 ja π_3 joonisel 34). Et kujutatav keha asetseb harilikult põhjaga tasapinnal π_1 , siis nimetatakse sellel saadud



Joonis 34.

projektsiooni põhijooniseks; ülejäänud kaks projektsiooni on püstjoonis (tasapinnal π_2) ja küljjoonis (tasapinnal π_3). Joonisel 34 kujutatud püramiidi põhijoonis on $\triangle ABC$, püstjoonis on $\triangle A_2C_2O_2$ ja küljjoonis on $\triangle B_3A_3O_3$.

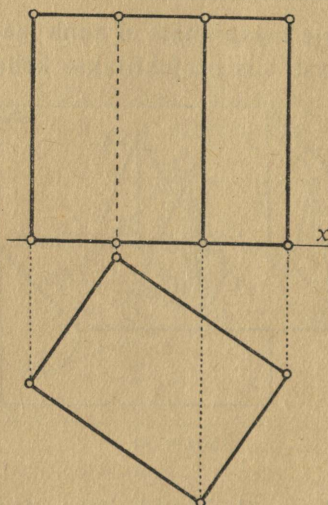


Joonis 35.

Põhijoonist nimetatakse ka plaaniks ehk ülaltvaateks, püstjoonist eestvaateks ja küljjoonist külgvaateks.

Harilikult esitatakse kõik kolm normaalprojektsiooni ühel ja samal

joonise pinnal (ühel lehel) teatavas kindlas vastastikusel paigutuses. Niisuguse paigutuse saame, kui (joonisel 34) pöörame tasapinna π_1 ümber projektsioonitelje x noolega näidatud suunas 90° võrra ja tasapinna π_3 ümber projektsioonitelje y noolega näidatud suunas samuti 90°



Joonis 36.

võrra. Nii tehes oleme kõik kolm projektsiooni saanud püsttasapinnal π_2 , nagu näha joonisel 35. Ühe ja sama punkti projektsioonid on seejuures ühendatud punktiirjoontega; viimased on risti vastava projektsiooniteljega.

Näide keha normaalprojektsioonide joonestamisest.

Olgu risttahuka mõõtmed 21 cm, 28 cm ja 31 cm ning asetsegu tema kõige väiksem tahk rõhttasapinnal. Joonestame selle risttahuka põhi- ja püstjoonise, võttes

risttahuka asendi püsttasapinna suhtes vabalt.

Kui joonis loomulikus suuruses jooniselehele ei mahu, siis joonestame ta vähendatult, näiteks mõõdus 1 : 10 (joonis 36). Joonestamist teostame järgmises järjekorras:

1. joonestame projektsioonitelje x ;
2. joonestame risttahuka põhijoonise, milleks on riskülik mõõtmetega 2,1 cm ja 2,8 cm;
3. põhijoonise tippudest joonestame projektsiooniteljele ristjooned;
4. joonestame risttahuka külgservade püstprojektsioonid pikkusega 3,1 cm ja ühendame nende otspunktid.

Nagu selgub ülaltoodud näitest, hõlbustab normaalprojektsioonide joonestamist see tuntud tõsiasi, et

projektsioonitasapinnaga ristuva sirge normaalprojektsiooniks on punkt,

ning teine, sellest järelduv asjaolu, et

projektsioonitasapinnaga ristuva tahu normaalprojektsiooniks on sirglõik.

Nii on joonisel 36 risttahuka külgserva põhijooniseks punkt ja külgtahu põhijooniseks lõik.

Et keha põhi- ja püstjoonist on võrdlemisi kerge valmistada ja neilt joonistelt on võimalik keha kergesti mõõta, siis kasutatakse tehnikas eeskätt põhi- ja püstjoonise meetodit.

Ülesanded.

79. Valmista korrapärase kuuetaahulise prisma põhi- ja püstjoonis, kui prisma põhiserv on 2,5 cm ja külgserv on 4 cm.

80. Valmista korrapärase viietaahulise püramiidi põhi- ja püstjoonis, võttes püramiidi põhja ümber joonestatud ringjoone raadiuseks 2 cm ja kõrguseks 5 cm.

81. Kujuta põhi- ja püstjoonises koonusekujuline kuhi, mille põhja läbimõõt on 4 m ja kõrgus on 2 m.

82. Kujuta põhi- ja püstjoonises tüvikoonus, mille põhjade läbimõõdud on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3,5 cm.

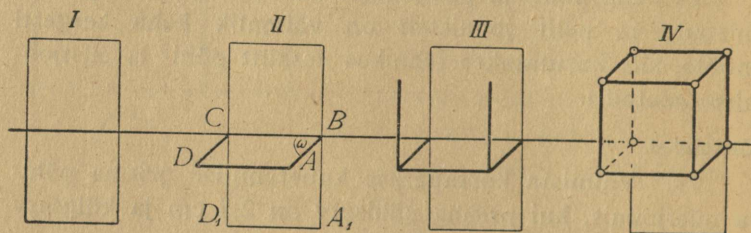
§ 21. Kaldprojektsioon.

Mitme kokkukuuluva normaalprojektsiooni (põhi-, püst- ja küljjoonise) mahutamiseks kulub rohkesti ruumi, ka nõuab niisuguste mitmeosaliste kujutiste kasutamine kujutatavast kehast selge kujutluse saamiseks vastavat vilumust. Kus aga tahetakse lihtsa ja vähe ruumi nõudva joonise abil tekitada kiiresti ja hõlpsasti kujutlust keha-

dest, näiteks geomeetrilistel joonistel õpperaamatuis, seal tarvitatakse kehade kujutamiseks kaldprojektsiooni.

Kaldprojektsioon on niisugune paralleelprojektsioon, mille puhul projektivad kiired ei ole risti projektsioonitasapinnaga.

Joonis 37 selgitab ühe tahuga vastu püsttasapinda asetseva kuubi kaldprojektsiooni joonestamise käiku. Joonise I osa on kuubi põhi- ja püstjoonis ning IV osa sama kuubi kaldprojektsioon püsttasapinnal; II ja III osa näitavad joonestamise üksikuid samme.



Joonis 37.

Keha joonestamiseks kaldprojektsioonis on vaja anda projektivate kiirte siht. Harilikult valitakse kiirte siht niisugune, et nad tulevad paremalt poolt ülevalt. Seda sihti saab lähemalt määrata kahe andmega, milleks on projektsiooni kaldenurk ω ja projektsiooni lühendustegur q .

Projektsiooni kaldenurgaks nimetatakse projektsioonitasapinnaga ristuva sirge projektsiooni ja projektsioonitasapinnal asetseva rõhtsirge vahelist nurka.

Joonisel 37, näiteks, $\omega = 45^\circ$, sest püsttasapinnaga ristuva serva projektsioon AB moodustab projektsiooniteljega nurga 45° .

Projektsiooni lühendustegur on arv, millega tuleb korrutada projektsioonitasapinnaga ristuva sirglõigu pikkust sama lõigu projektsiooni pikkuse saamiseks.

Joonisel 37, näiteks, $q = \frac{1}{2}$, sest $AB = \frac{1}{2} \cdot A_1B$, ja A_1B esitab serva tõelist pikkust.

Projektsiooni kaldenurk ω ja lühendustegur q valitakse nii, et joonestamine oleks võimalikult lihtne; harilikult ω on kas 30° , 45° , 60° või 90° , ja q on kas 1 , $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ või $\frac{1}{4}$.

Kokkuvõttes toimub joonisel 37 kuubi kaldprojektsiooni valmistamine järgmiselt:

- (I) joonestatakse kuubi põhi- ja püstjoonis;
- (II) vastavalt antud ω ja q suurustele joonestatakse kuubi põhja kaldprojektsioon $ABCD$;
- (III) joonestatakse kuubi külgservade projektsioonid, mis on üksteisega paralleelsed ja esinevad loomulikus pikkuses;
- (IV) joonestatakse ülejäänud servad, kusjuures nähtamatud servad joonestatakse katkeva joonega.

Selgitame lähemalt, kuidas andmed ω ja q määravad kindlaks projektivate kiirte asendi projektsioonitasapinna suhtes. Selleks kujutleme projektsioonitasapinna normaali lõiku, mille üks otspunkt on projektsioonitasapinnal, ja mille teist otspunkti läbib projektiv kiir. See lõik ja kiir koos lõigu projektsiooniga moodustavad täisnurkse kolmnurga, milles projektiva kiire ja projektsioonitasapinna vahelise nurga vastaskaatetiks on normaali lõik ja lähiskaatetiks selle lõigu projektsioon. Et viimase kaateti suhe eelmisega ongi projektsiooni lühendustegur, siis

projektsiooni lühendustegur q on projektiva kiire ja projektsioonitasapinna vahelise nurga kootangens.

Seega arv q näitab, kui palju kaldu on projektivad kiired; nurk ω näitab, kuhu poole on kiired kaldu.

Ülesanded.

83. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev ruut küljega 4 cm, võttes $\omega = 45^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

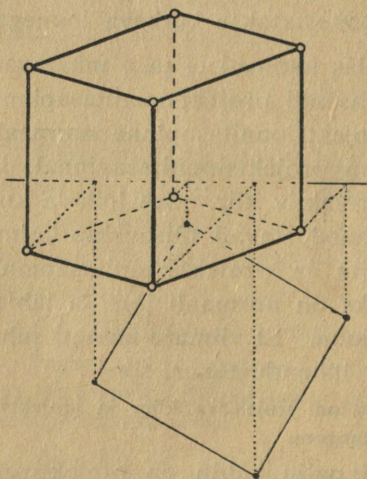
84. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev korrapärase kuusnurk küljega 3 cm, võttes $\omega = 45^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

85. Kujuta kaldprojektsioonis kuup servaga 3,5 cm, kui kuup asetseb nii, et põhja diagonaal on risti püsttasapinnaga, võttes $\omega = 45^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

86. Kui suure nurga moodustab projektiv kiir projektsioonitasapinnaga, kui projektsiooni lühendustegur on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 1, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$?

§ 22. Näiteid kehade joonestamisest kaldprojektsioonis.

I. Joonestada kuup servaga 25 mm, võttes põhijoonise asend projektsioonitelje suhtes vabalt; $\omega = 45^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

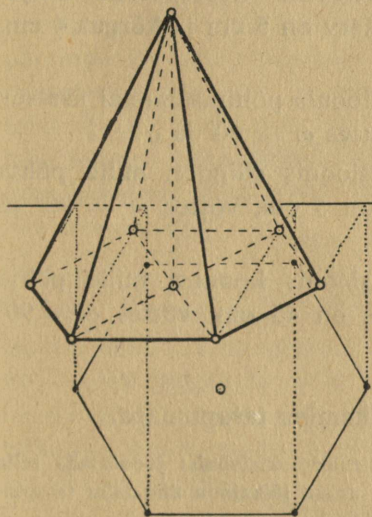


Joonis 38.

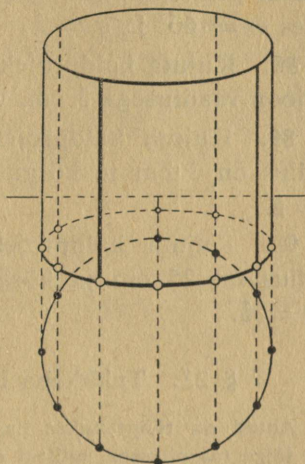
Joonestame abijoonteks kuubi põhja igast tipust ristlõigud püsttasapinnani (joonis 38). Et põhijoonises need ristlõigud esinevad loomulikus pikkuses, siis antud ω ja q järgi saab joonestada nende ristlõikude kaldprojektsioone. Viimaste otspunktide ühendamisel saame kuubi põhja kaldprojektsiooni. Selle tipudest joonestame külgservad risti projektsiooniteljega.

II. Joonestada korrapärase kuuetahuline püramiid põhiservaga 8 cm ja kõrgusega 15 cm, kui $\omega = 60^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

Eelmise ülesande eeskujul joonestame esiteks püst-tasapinnal püramiidi põhja (mõõdus 1:4) ja selle järgi põhja kaldprojektsiooni. Viimase keskpunktist püstitame kõrguse ja ühendame püramiidi tipu põhja tippudega (joonis 39).



Joonis 39.



Joonis 40.

III. Joonestada silinder, mille põhja raadius on 1,5 m ja kõrgus on 2,7 m, kui $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{3}$.

Silindri põhijoonis on ring. Selle kaldprojektsiooni joonestamiseks võtame ringjoonel küllalt tihedalt punkte, leiame nende punktide kaldprojektsioonid ja joonestame kõverjoone, mis võimalikult hästi läbib kõiki leitud punkte. Nii saadud kõverjoont nimetatakse ellipsiks. Seega

ellips on ringjoone kaldprojektsioon.

Ellipsi joonestamiseks tema üksikute punktide järgi on kasulik tarvitada kõverjoonlauda ehk lekaali.

Silindri ülemise põhja projektsiooni joonestamiseks joonestame küllaldase arvu moodustajaid ja ühendame nende otspunktid endisel viisil (joonis 40, mõõt 1:100).

Ülesanded.

87. Kujuta kaldprojektsioonis korrapärane neljastahuline püramiid, mille põhiserv on 5 cm ja kõrgus 4 cm, võttes $\omega = 60^\circ$ ja $q = \frac{1}{3}$.

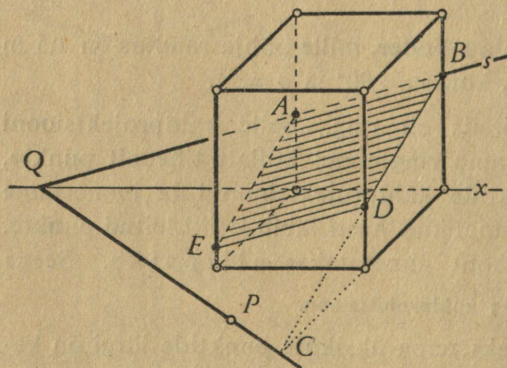
88. Kujuta kaldprojektsioonis põhitasapinnal asetsev ringjoon raadiusega 3 cm, võttes $\omega = 60^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

89. Kujuta kaldprojektsioonis silinder, mille põhja raadius on 3 cm ja kõrgus on 5 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

90. Kujuta kaldprojektsioonis koonus, mille põhja raadius on 25 cm ja kõrgus on 45 cm, võttes $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

§ 23. Tahkkeha lõikamine tasapinnaga.

Antud on rööptahukas paralleelprojektsioonis; joonestada selle keha lõige tasapinnaga, millest on antud lõikejoon ühe tahu tasapinnaga ja üks punkt teise tahu tasapinnal.



Joonis 41.

Olgu s lõiketasapinna ja tagumise tahu tasapinna lõikejoon ja P lõiketasapinna üks punkt alumise tahu tasapinnal (joonis 41).

Siis sirglõik AB on lõiketasapinna ja rööptahuka tagumise tahu lõikejoon,

punkt Q aga on lõiketasapinna, tagumise tahu tasapinna ja alumise tahu tasapinna ühine punkt. Järelikult PQ on lõike-
tasapinna ja alumise tahu tasapinna lõikesirge. Ta lõikub
rööptahuka parempoolse alumise servaga punktis C , mis on
lõiketasapinna, parempoolse tahu tasapinna ja alumise tahu
tasapinna ühine punkt. Järelikult BC on lõiketasapinna ja
parempoolse tahu tasapinna lõikesirge. Joonestades AE pa-
ralleelselt sirgega BC , saame lõiketasapinna ja vasakpoolse
tahu lõikejoone. Et punktid D ja E on lõiketasapinna ja esi-
tahu servade lõikepunktid, siis on DE lõiketasapinna ja esi-
tahu lõikejoon. Rööpkülik $ABDE$ ongi antud keha lõige an-
tud tasapinnaga.

Ülesanded.

91. Risttahukal, mille põhiservad on 3,4 dm ja 5 dm, on pealmine osa tasapinnaga nii ära lõigatud, et ülejäänud keha kolm külgserva on 2 dm, 2,5 dm ja 3 dm. Kujuta ülejäänud keha põhi- ja püstjoonisel, asetades keha seisma põhitasapinnale nõnda, et ükski põhiserv ei ole paralleelne projektsiooniteljega.

92. Joonesta kaldprojektsioonis vabalt kuup ja lõika see tasapinnaga, millest on antud lõikejooned püst- ja põhi-
tasapinnaga.

93. Korrapärane neljatahuline püramiid, põhiservaga 15 cm ja kõrgusega 18 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Joonesta saadud tüvi-
püramiidi kaldprojektsioon, võttes $\omega = 45^\circ$ ja $q = \frac{1}{2}$.

94. Joonesta kaldprojektsioonis korrapärane kuue-
tahuline tüvipüramiid, mille põhiservade pikkused on 4 cm ja 2,5 cm ning kõrgus on 3,5 cm, võttes kõik muud and-
med vabalt.

95. Joonesta kaldprojektsioonis tüvikoonus, mille põhjade raadiused on 5 cm ja 3 cm ning moodustaja on 4,5 cm, kui $\omega = 90^\circ$ ja $q = \frac{1}{4}$.

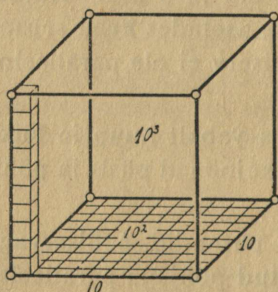
Peatükk IV.

Keha pindala ja ruumala.

§ 24. Ruumala mõõtmine ja ruumalaühikud.

Suuruse mõõtmine teatavasti tähendab suuruse võrdlemist vastava suurusühikuga; võrdlemise arvuline tulemus on suuruse mõõtarv.

Keha ruumala mõõtarv näitab, mitu korda keha ruumala on suurem ruumalaühikust või missuguse osa ruumalaühikust ta moodustab.



Joonis 42.

Ruumalaühikuna tarvita-
takse ruumala, mis on ühiku-
pikkuse servaga kuubil. Nii on
kuupmeeter ehk m^3 ühemeetri-
lise servaga kuubi ruumala, lii-
ter ehk dm^3 on detsimeetrilise
servaga kuubi ruumala ning cm^3
on kuubi ruumala, kui kuubi
serva pikkus on 1 cm.

Kui üks pikkusühik on tei-
sest 10 korda suurem, siis vas-
tav ruumalaühik on teisest ruumalaühikust 10^3 ehk 1000
korda suurem, nagu selgub suurema kuubi tükeldamisel
väiksemateks (joonis 42). Seetõttu ruumalaühikud on
järgmiselt teineteisest olenevad:

$$\begin{aligned} 1 m^3 &= 1000 dm^3 = 1\,000\,000 cm^3 = 1\,000\,000\,000 mm^3 \\ 1 dm^3 &= 1\,000 cm^3 = 1\,000\,000 mm^3 \\ 1 cm^3 &= 1\,000 mm^3. \end{aligned}$$

Ülesanded.

96. Mitu kuupsentimeetrit on 12 dm^3 ; $0,38 \text{ dm}^3$; 4 m^3 ; $0,067 \text{ m}^3$; $x \text{ m}^3$; $x \text{ m}^3 y \text{ dm}^3$?

97. Mitu kuupdetsimeetrit on 80 cm^3 ; 5400 mm^3 ; 4300 cm^3 ; 5000 mm^3 ; $x \text{ cm}^3$; $x \text{ cm}^3 y \text{ mm}^3$?

98. Mitu kuupmeetrit on 1 km^3 ; 10^{-6} km^3 ; $3,8 \cdot 10^{-3} \text{ km}^3$?

99. Kasutades arvu 10 astmeid, avalda kuupmillimeetrites 1 cm^3 , 1 dm^3 , 1 m^3 ja 1 km^3 .

§ 25. Risttahuka ruumala.

Eeskirja risttahuka ruumala arvutamiseks risttahuka mõõtmete kaudu väljendab järgmine teoreem.

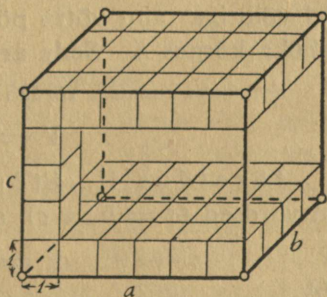
Risttahuka ruumala võrdub risttahuka kolme lähisserva korrutisega.

Eeldus: risttahuka kolm serva, mis lähtuvad ühest tipust, on vastavalt pikkusega $a \text{ cm}$, $b \text{ cm}$ ja $c \text{ cm}$.

Väide: risttahuka ruumala on $abc \text{ cm}^3$.

Tõestus. Risttahuka servade mõõtarmude a , b ja c kohta saab esineda kolm juhtu: 1) kõik mõõtarmud on täisarvud, 2) vähemalt üks mõõtarm on murdarv, teised aga kas täis- või murdarvud, 3) vähemalt üks mõõtarmudest on irratsionaalarv.

1) Kui a , b ja c on täisarvud (näiteks $a = 6$, $b = 4$ ja $c = 5$, nagu joonisel 43), siis on võimalik risttahukat tükeldada kuupideks servaga 1 cm . Et tükeldamisel tekivas rõhtkihis on niisuguseid kuupe $a \cdot b$ ja neid kihte



Joonis 43.

on üldse c , siis antud risttahukas tükeldub abc kuubiks servaga 1 cm. Seega on risttahuka ruumala abc cm³.

2) Kui mõni mõõtarv on murdarv, näiteks $a = 6,5$, $b = 4$ ja $c = 5,3$, siis on võimalik leida niisugune uus pikkusühik, et kõik servade pikkused väljenduvad täisarvudes. Näitena toodud pikkuste puhul on niisuguseks ühikuks mm, sest servade pikkused millimeetrites on 65, 40 ja 53; üldiselt a cm = $10a$ mm, b cm = $10b$ mm ja c cm = $10c$ mm. Siis, vastavalt eelmisele juhule, risttahuka ruumala on $10a \cdot 10b \cdot 10c$ mm³ ehk $abc \cdot 1000$ mm³, ja seega, nagu väidetud, abc cm³.

Kui a , b ja c on harilikud murrud, siis teisendame nad ühenimelisteks; ühine nimetaja näitabki, mitmendik senisest pikkusühikust tuleb võtta uueks pikkusühikuks.

3) Olgu mõni mõõtarv irratsionaalne. Et teoreem osutub õigeks iga niisuguse risttahuka kohta, millel on irratsionaalsete servapikkuste asemel nende täis- või murdarvulised lähisväärtused, ning jääb õigeks ükskõik kui täpsete lähisväärtuste korral, siis tuleb ta lugeda õigeks ka siis, kui servade mõõtarvud on irratsionaalsed. Seega ka sel juhul risttahuka ruumala mõõtarvuks on korrutis abc .

Järeldus I. Risttahuka kahe lähiserva korrutist võib nimetada risttahuka põhja pindalaks S , sest risttahukal võib iga tahu võtta põhjaks; kolmas serv on siis risttahuka kõrgus h . Seda arvestades võib öelda, et

risttahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$V = S \cdot h.$$

Järeldus II. Et kuup on risttahukas, mille servad on võrdsed ($a = b = c$), siis sel juhul ruumala

$$V = a \cdot a \cdot a$$

ehk

$$V = a^3,$$

seega

kuubi ruumala võrdub tema serva kuubiga.

Ülesanded.

100. Mitu hl rukkeid on risttahukakujulises salves, mille mõõtmed on 3,2 m, 1,8 m ja 1,5 m?

101. Mitu kg petrooleumi mahutab risttahukakujuline nõu, mille mõõtmed on 26 cm, 24 cm ja 14 cm?

102. Risttahukakujulisse klaasvanni valati 9 l vett. Kui kõrgelt täidab see vesi vanni, kui vanni põhja mõõtmed on 35 cm ja 18 cm?

103. Üks jooksev meeter ruudukujulise ristlõikega lattrauda, mille tahu laius on 16 mm, kaalub 2,01 kg. Leia selle raua erikaal.

104. Mitu kg kaalub ruudukujulise ristlõikega raudlatt, mille pikkus on 2,5 m ja tahu laius on 68 mm, kui selle raua erikaal on 7,85?

105. Tammepuust kuup servaga 8,5 cm kaalub 424 g. Leia tamme erikaal.

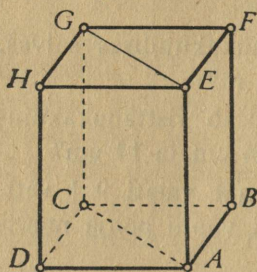
106. Kuldlehekesi toodetakse paksusega $\frac{1}{800}$ mm. Kui pika servaga on ruudukujuline leheke, mis kaalub 1 g?

107. Kuubi serva pikkus on 15 cm. Kui pikk serv on kuubil, mille ruumala on antud kuubi ruumalast 2 korda suurem?

§ 26. Püstprisma ruumala.

Olgu antud püstprisma $ABCEFG$ (joonis 44), mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk ABC , hüpotenuusiga AC . Ehitame antud prisma külge teise samasuguse prisma $CDAGHE$. Et selle põhi CDA on võrdne antud prisma põhjaga ABC ja täiendab ta ristkülikuks $ABCD$, siis on keha $ABCDEFGH$ risttahukas. Selle risttahuka ruumala on kaks korda suurem antud prisma ruumalast,

sest juurdeehitatud prisma on võrdne antud prismaga, kuna neid saab nii teineteise sisse paigutada, et vastavad tipud,



Joonis 44.

servad ja tahud ühtivad. Kui antud prisma kõrguse tähistame tähega h ja põhja pindala tähega S , siis risttahuka ruumala avaldub risttahuka põhja pindala $2S$ ja kõrguse h kaudu teatavasti korrutisena $2Sh$. Antud prisma ruumala V on pool sellest, järelikult $V = Sh$. Tulemuse saame sõnastada järgmiselt: püstprismal, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk, on ruumala võrdne põhja

pindala ja kõrguse korrutisega. Seda tulemust rakendades tõestame igasuguse püstprisma kohta teoreemi:

püstprisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Kõigepealt näitame, et teoreem on õige iga kolmetahulise püstprisma kohta. Kolmetahulist püstprismat saab lõigata kaheks niisuguseks kolmetahuliseks püstprismaks, mille põhjadeks on täisnurksed kolmnurgad (joonis 45). Et kumagi saadud prisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis on esialgse prisma ruumala

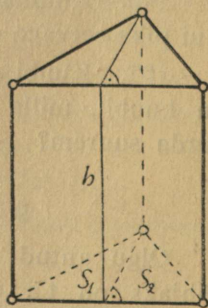
$$V = S_1h + S_2h$$

ehk

$$V = (S_1 + S_2) \cdot h,$$

seega

$$V = Sh,$$



Joonis 45.

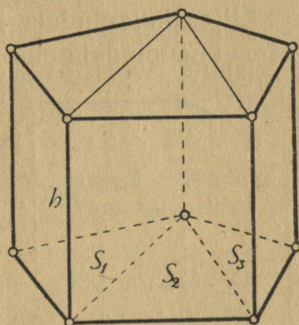
kus S_1 ja S_2 on lõikamisel saadud prismade põhjade pindalad, S — esialgse prisma põhja pindala ja h — nende prismade ühine kõrgus.

Et teoreem on õige iga püstprisma kohta, selgub järjmiselt. Iga n -tahulist püstprismat ($n > 3$) on võimalik tükeldada (näiteks joonisel 46 esitatud viisil) kolmetahulisteks püstprismadeks, mille põhjade pindalade S_1, S_2, \dots summa võrdub esialgse prisma põhja pindalaga S ja mille kõrgus võrdub esialgse prisma kõrgusega h . Siis avaldub esialgse prisma ruumala V nende kolmetahuliste prismade ruumalade summana, seega

$$\begin{aligned} V &= S_1 h + S_2 h + \dots = \\ &= (S_1 + S_2 + \dots) h \end{aligned}$$

ehk

$$V = Sh.$$



Joonis 46.

Ülesanded.

108. Kui palju kaalub trapetsikujuline tükk 2-millimeetrise paksusega raudplekki, kui selle trapetsi alused on 0,9 m ja 1,6 m ning kõrgus on 1,2 m?

109. Mitu m^3 mulda tuleb kraavi kaevamisel selle pikkuse iga meetri kohta välja võtta, kui kraavi sügavus on 1,20 m, põhjalaius — 0,30 m ja pealtlaius — 2,50 m?

110. Arvuta korrapärase kuetahulise prisma ruumala, kui prisma kõrgus on 15 cm ja põhiserv on 8 cm.

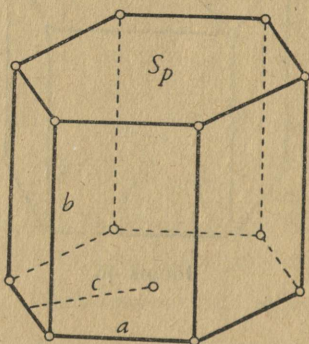
§ 27. Püstprisma pindala.

Kui püstprisma külgpinna pappmudel üht külgserva mööda lahti lõigata, siis saab prisma kõik külgtahud laotada ühele tasapinnale; nii saadav püstprisma külgpinna laotus on kujult ristkülik, mille alus võrdub prisma põhja ümbermõõduga, kõrgus — prisma külgserva

servaga ja pindala — prisma külgpindalaga. Sellest selgub, et

püstprisma külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja külgserva korrutisega.

Liites külgpindala ja põhjade pindalad, saame püstprisma kogupindala ehk täispindala, lühidalt: tema pindala.



Joonis 47.

Avaldame korrapärase n -tahulise prisma pindala S prisma põhiserva a , külgserva b ja põhja apoteemi c kaudu (joonis 47). Et põhja übermõõt on na , siis on külgpindala $na \cdot b$ ja ühe põhja pindala $\frac{1}{2}na \cdot c$, järelikult

$$S = nab + \frac{1}{2}nac \cdot 2 = nab + nac$$

ehk

$$S = na(b + c).$$

Ülesanded.

111. Kui suur pindala on risttahukal, mille mõõtmed on 15 cm, 12 cm ja 22 cm?

112. Avalda risttahuka pindala S mõõtmete a , b ja c kaudu.

113. Risttahuka pindala on 936 cm^2 ja tema mõõtmed on võrdelised arvudega 2, 5, 6. Leia risttahuka mõõtmed.

114. Kuidas muutuvad risttahuka pindala ja ruumala, kui risttahuka kõik mõõtmed suurenevad või vähenevad n korda?

115. Näita, et avaldis $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ esitab risttahuka pindala, kui a , b ja c on risttahuka mõõtmed.

116. Kuubi diagonaali pikkus on 10 cm. Kui suur on kuubi pindala?

117. Kuubi pindala ruutsentimeetrites ja ruumala kuupsentimeetrites väljenduvad ühe ja sama arvuga. Kui pikk on kuubi serv?

118. Kuubi pindala on $0,492 \text{ m}^2$. Arvuta ruumala.

119. Arvuta kolmetahulise püstprisma pindala ja ruumala, kui prisma kõrgus on 14,5 cm ja prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk kaatetitega 8 cm ja 3,9 cm.

120. Arvuta korrapärase kolmetahulise prisma pindala ja ruumala, kui prisma põhiserv on 12 cm ja külgserv on 17 cm.

121. Korrapärase viietahulise prisma põhiserv on 3,8 cm ja külgserv on 8,4 cm. Arvuta prisma külgpindala.

122. Korrapärase kuuetaahulise prisma ruumala on 480 cm^3 ja kõrgus on 20 cm. Kui suur on selle prisma pindala?

123. Kahe korrapärase neljataahulise prisma külpinna laotused on võrdsed ristkülikud, mille üks kül on teisest 2 korda pikem. Ühe prisma külgservaks on ristküliku pikem kül ja teise prisma külgservaks on ristküliku lühem kül. Kuidas suhtuvad nende prismade ruumalad?

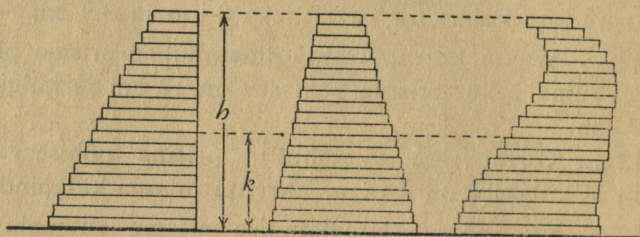
§ 28. Cavalieri aksioom.

Paljude kehade ruumalade võrdlemist ja ruumala valemite tuletamist on kerge teostada Cavalieri *) aksioomi abil, mida võib sõnastada järgmiselt:

kui ühel kehal on kõrgus võrdne teise keha kõrgusega, põhi pindvõrdne teise keha põhjaga ja iga tasapinnaline lõige, mis on põhjaga paralleelne, on pindvõrdne teisel kehal põhjast niisama kaugel asetseva paralleellõikega, siis need kehad on ruumvõrdsed.

*) F. B. Cavalieri, itaalia matemaatik, elas a. 1598—1647.

Aksioomina väljendatud asjaolu selgitamiseks lõikame virna papitükikesi, mis järk-järgult väiksemaks muutuvad, ja moodustame neist papitükikestest mitmesuguseid kehi (joonis 48). On selge, et kuidas me neid papitükikesi üksteise suhtes ka nihutame, nende poolt moodustatud keha ruumala ei muutu. Samuti muutumatuks jääb nende kehade põhja pindala, kõrgus h ja mistahes kõrgusel k tehtud lõike pindala.



Joonis 48.

Kui muudame papitükikeste järjekorda ühesuguselt kõigis virnades, saame kehad, millel jällegi on kõrgused võrdsed, põhjad pindvõrdsed ja põhjadest samakauged lõiked pindvõrdsed; ilmselt on aga nende ruumalad jäänud endisteks, järelikult isekeskis võrdseteks.

Muudame papitükikeste virnu veel selles mõttes, et esimese virna moodustame näiteks kolmnurgakujulistest, teise — nelinurgakujulistest ja kolmanda — ringikujulistest papitükikestest, kuid ikkagi nii, et ühel ja samal kõrgusel k asetsevad papitükikesed on võrdsete pindaladega. Meie kujutluse järgi on ka sel juhul nende kehade ruumalad võrdsed.

Olgu üldiselt kaks keha ükskõik missuguse erineva kujuga, ainult olgu täidetud kolm tingimust, et 1) kehade kõrgused on võrdsed, 2) ühe keha põhi on pindvõrdne teise keha põhjaga ja 3) ühe keha iga lõige, mis on põh-

jaga paralleelne, on vastavalt pindvõrdne teise keha lõikega, mis on samuti põhjaga paralleelne ja asetseb põhjast samal kaugusel. Kujutleme nüüd kumbagi keha koosnevana ükskõik kui õhukestest kihtidest, põhjaga paralleelsete tasapindade vahel, ja võrdleme ühel ja samal kõrgusel asetsevaid kihte kummalgi kehal: need õhukesed kihid on nagu võrdsete pindaladega papitükikesed eespool kirjeldatud virnades. Seega võib öelda nende kehade kohta sama, mis ütlesime papitükikeste virnade kohta: kehad on ruumvõrdsed. Seda mõtet väljendabki Cavalieri aksiom.

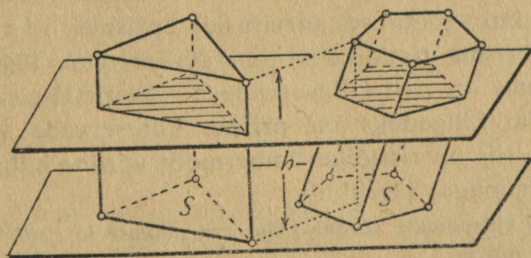
§ 29. Prisma ruumala.

Cavalieri aksioomi abil saab tõestada järgmise teoreemi:

iga prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Eeldus: prisma põhja pindala on $S \text{ cm}^2$ ja kõrgus on $h \text{ cm}$.

Väide: prisma ruumala on $Sh \text{ cm}^3$.



Joonis 49.

Tõestus. Antud prisma põhja tasapinnale paigutame püstprisma, millel on niisama suur põhja pindala ja sama kõrgus (joonis 49).

Et prisma lõikamisel tasapinnaga, mis on paralleelne põhjaga, tekib põhjaga võrdne hulknurk, siis võib Cavalieri

aksioomi põhjal öelda, et need prismad on ruumvõrdsed. Sellest järeldub, et ka kaldprisma ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

§ 30. Prisma pindala.

Prisma pindala on põhjade pindalade ja külgpindala summa. Leiame prisma külgpindala arvutamiseks eeskirja, mis sobiks niihästi püstprisma kui ka kaldprisma puhul.

Prisma külgpindala on külgtahkude pindalade summa. Prisma külgtahkudeks on teatavasti rööpkülükud. Kui külgtahu pindala arvutamisel loeme aluseks prisma külgserva, siis on kõrguseks külgtahu laius (külgservade vahe-line ristlõik), seega külgtahu pindala võrdub külgserva pikkuse ja külgtahu laiuse korrutisega. Et kõigi külgtahkude pindalade puhul esineb prisma külgserva pikkus ühise tegurina, siis saadakse prisma külgpindala avaldiseks külgserva pikkuse korrutis külgtahkude laiuste summaga.

Saadud arvutamiseeeskirja on võimalik lühemini sõnastada, kui võetakse tarvitusele prisma ristlõike mõiste. Prisma ristlõikeks nimetatakse tema lõiget tasapinnaga, mis on risti külgservadega. Et ristlõige on hulknurk, mille külgedeks on prisma külgservade vahelised ristlõigud, siis on ristlõike ümbermõõt võrdne külgtahkude laiuste summaga; järelikult

prisma külgpindala võrdub külgserva pikkuse ja ristlõike ümbermõõdu korrutisega.

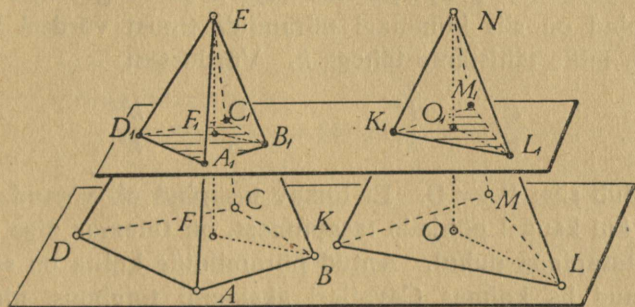
§ 31. Ruumvõrdsed püramiidid.

Kui lõikame püramiidi tasapinnaga, mis on paralleelne põhjaga, siis on lõige teatavasti põhjaga sarnane hulknurk. Lõike pindala arvutamiseks saame kasutada tuntud teoreemi, et sarnaste hulknurkade pindalade jagatis võrdub

vastavate külgede jagatise ruuduga. Kui püramiidi põhja $ABCD$ pindala on S , lõige $A_1B_1C_1D_1$ on põhjaga paralleelne (joonis 50, vasakpoolne püramiid) ja selle lõike pindala on P , siis saame

$$\frac{P}{S} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2.$$

Saadud võrduses võime külgede pikkuste A_1B_1 ja AB asemele võtta ka mingi muu paari nendega võrdelisi pikkusi,



Joonis 50.

näiteks B_1E ja BE (sest $\triangle A_1B_1E \sim \triangle ABE$) või viimas-
tega võrdelise paari EF_1 ja EF (sest $\triangle B_1EF_1 \sim \triangle BEF$);
seega saame võrduse

$$\frac{P}{S} = \left(\frac{EF_1}{EF}\right)^2 \quad \text{ehk} \quad \frac{P}{S} = \frac{EF_1^2}{EF^2}.$$

Et EF on püramiidi kõrgus ja EF_1 on lõiketasapinna
kaugus tipust, siis võime tulemuse sõnastada järgmiselt:
püramiidi põhjal ja põhjaga paralleelsel lõikel on pindalad võr-
delised nende tasapindade ja püramiidi tipu vaheliste kauguste
ruutudega.

Seda asjaolu kasutades saame Cavalieri aksioomi abil
tõestada, et

püramiidid on ruumvõrdsed, kui nende põhjad on pindvõrdsed
ja kõrgused on võrdsed.

Tõestus. Cavalieri aksioom seab kolm tingimust, mis peavad olema täidetud, et kehad oleksid ruumvõrdsed. Neist tingimusest on eelduse järgi kaks täidetud. Näitame, et on täidetud ka kolmas tingimus. Selleks paigutame püramiidid põhjadega ühele ja samale tasapinnale ja lõikame neid mingi tasapinnaga, mis on paralleelne põhjade tasapinnaga (joonis 50). Tähistame lõike pindala esimesel püramiidil tähega P ja teisel püramiidil tähega Q ; kummagi püramiidi põhja pindala olgu S ja kõrgus h ; lõike-tasapind on siis kummagi püramiidi tipust võrdsel kaugusel, mille tähistame tähega k . Võrdustest

$$\frac{P}{S} = \frac{k^2}{h^2} \quad \text{ja} \quad \frac{Q}{S} = \frac{k^2}{h^2}$$

järeldub siis: $P = Q$. Et lõikav tasapind oli võetud ükskõik kui kaugel põhjade tasapinnast, on tulemus õige igal lõiketasapinna puhul. Antud püramiidide kohta on seega täidetud ka kolmas Cavalieri aksioomi tingimus, nimelt on põhjadest ühel ja samal kõrgusel asetsevad paralleel-lõiked vastavalt pindvõrdsed. Järelikult need püramiidid on ruumvõrdsed.

Ülesanded.

124. Püramiidist, mille põhja pindala on $67,5 \text{ cm}^2$ ja kõrgus on 12 cm , eraldati põhjaga paralleelse lõike abil uus püramiid, mille kõrgus on 4 cm . Arvuta viimase püramiidi põhja pindala.

125. Püramiid, mille kõrgus on 10 cm , on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et saadud lõike pindala on pool põhja pindalast. Kui kaugel püramiidi tipust asetseb lõike tasapind?

126. Püramiidi põhjaga paralleelne lõige poolitab kõrguse. Leia põhja pindala ja lõike pindala suhe.

§ 32. Püramiidi ruumala.

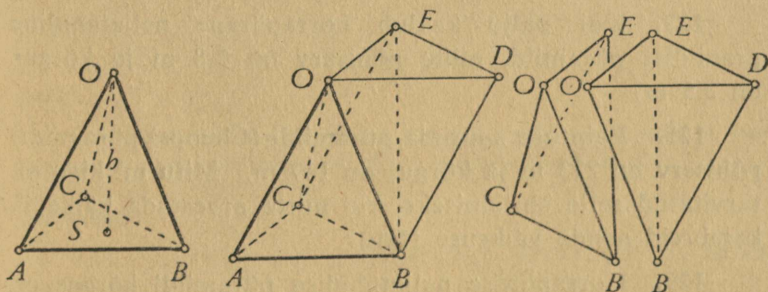
Püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

Tõestame selle teoreemi esiteks kolmetahulise püramiidi kohta ja siis mistahes püramiidi kohta.

Olgu püramiidi $OABC$ põhja ABC pindala S ja püramiidi kõrgus h (joonis 51). Teoreem väidab, et selle püramiidi ruumala

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Tõestuseks ehitame kolmetahulise prisma $ABCODE$, millel on püramiidiga ühine põhi ABC ja üks ühine külgserv AO , järelikult ka ühine kõrgus h . Kui sellest prismast eraldada püramiid $OABC$, siis jääb järele neljatahuline püramiid, mille tipp on O ja põhi on $BDEC$. Lõikame



Joonis 51.

selle neljatahulise püramiidi tasapinnaga OBE kaheks kolmetahuliseks püramiidiks $OBDE$ ja $OBEC$. Viimased on ruumvõrdsed, sest põhjadeks on neil võrdsed kolmnurgad BDE ja BEC ning kõrgus on neil ühine. Kuid need püramiidid on ruumvõrdsed ka antud püramiidiga $OABC$, sest püramiididel $OABC$ ja $BODE$ on võrdsed põhjad ABC ja ODE (prisma põhjad) ning võrdsed kõrgused (prisma kõrgus). Järelikult on prisma $ABCODE$ tükeldatud kol-

meks ruumvõrdseks püramiidiks, mistõttu iga saadud püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga prisma ruumalast. Et prisma ruumala on Sh , siis püramiidi $OABC$ ruumala on $\frac{1}{3}Sh$.

Olgu nüüd mistahes püramiidi põhja pindala S ja kõrgus h . Näitame, et ka sel juhul ruumala on $\frac{1}{3}Sh$. Selleks kujutleme antud püramiidi kõrval teist püramiidi, nimelt kolmetahulist, mille põhja pindala on samuti S ja kõrgus h (joonis 50) ning mis seetõttu on eelmise teoreemi järgi ruumvõrdne antud püramiidiga. Tema ruumala on aga, nagu tõestuse eelmisest osast nähtub, $\frac{1}{3}Sh$. Järelikult on ka antud püramiidil

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Ülesanded.

127. Kui palju kaalub korrapärane neljatahuline graniidist püramiid, mille põhiserv on 2,8 m ja kõrgus on 3,5 m?

128. Egiptuse suurima püramiidi (Cheopsi püramiidi) põhiserv on 233 m ja kõrgus on 147 m. Mitu m^3 kive on tarvitatud selle ehitamiseks, kui mitte arvestada käike ja kambreid nende väiksuse tõttu?

129. Korrapärase neljatahulise püramiidi kõrgus on 1,8 dm ja ruumala on $1,944 \text{ dm}^3$. Kui pikk on põhiserv?

130. Korrapärase kolmetahulise püramiidi iga serv on 10 cm. Arvuta selle püramiidi ruumala.

131. Püramiidi põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 15 cm. Arvuta püramiidi ruumala, kui kõrgus on 21 cm.

132. Missuguse osa kuubi ruumalast moodustab püramiidi ruumala, kui püramiidi põhjaks on kuubi üks tahk ja püramiidi tipuks on kuubi keskpunkt?

§ 33. Korrapärase püramiidi pindala.

Olgu korrapärase n -tahulise püramiidi põhiserva pikkus a cm, püramiidi apoteemi pikkus m cm ja põhja apoteemi pikkus l cm. Siis on ühe külgtahu pindala $\frac{1}{2}am$ cm² ja kõikide külgtahkude pindalade summa $n \cdot \frac{1}{2}am$ cm², mis ongi püramiidi külgpindala. Et

$$n \cdot \frac{1}{2}am = m \cdot \frac{1}{2}na,$$

siis võib tulemust sõnastada järgmiselt:

korrapärase püramiidi külgpindala võrdub püramiidi apoteemi ja põhja übermõõdu poole korrutisega.

Lisades külgpindalale põhja pindala $\frac{1}{2}na \cdot l$, saame korrapärase püramiidi pindala S , nimelt

$$S = \frac{1}{2}na \cdot m + \frac{1}{2}na \cdot l$$

ehk

$$S = \frac{1}{2}na(m + l);$$

seega

korrapärase püramiidi pindala on pool põhja übermõõdu korrutisest püramiidi apoteemi ja põhja apoteemi summaga.

Ülesanded.

133. Korrapärase neljatahulise püramiidi iga serva pikkus on a cm. Avalda püramiidi pindala S serva pikkuse a abil.

134. Kolmetahulise püramiidi iga serva pikkus on a cm. Avalda püramiidi pindala S serva pikkuse a abil.

135. Korrapärase neljatahulise püramiidi kõrgus on 35 cm ja põhiserv on 46 cm. Arvuta püramiidi pindala ja ruumala.

136. Paviljoni katus on korrapärase kaheksatahulise püramiidi kujuline põhiservaga 4,6 m ja külgservaga 7 m. Mitu lehte katuseplekki kulub selle katuse katmiseks, kui igale ruutmeetrile kulub 1,2 lehte?

137. Korrapärase tetraeedri apoteem on m . Avalda tetraeedri pindala m abil.

138. Korrapärase kuuetaahulise püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 6 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala.

139. Korrapärase kuuetaahulise püramiidi külgserv on 10,6 cm ja apoteem on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala.

140. Korrapärase kuuetaahulise püramiidi põhiserv on 2,4 dm ja külgserv on 7,6 dm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala.

141. Korrapärase oktaeedri serv on 5 cm. Arvuta selle oktaeedri pindala ja ruumala.

142. Korrapärase kolmetahulise püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala ja pindala.

143. Avalda korrapärase neljataahulise püramiidi ruumala ja pindala ta põhiserva a kaudu, kui külgserv moodustab põhjaga nurga 45° .

144. Korrapärase neljataahulise püramiidi pindala on $229,5 \text{ cm}^2$ ja külgpindala on $157,25 \text{ cm}^2$. Arvuta püramiidi ruumala.

145. Püramiidi põhjaks on ristkülik külgedega 22 cm ja 16 cm. Arvuta püramiidi pindala ja ruumala, kui iga külgserva pikkus on 25 cm.

§ 34. Tüvipüramiidi ruumala.

Olgu tüvipüramiidi alumise põhja pindala $S \text{ cm}^2$, ülemise põhja pindala $Q \text{ cm}^2$ ($S > Q$) ja kõrgus h cm. Tüvipüramiidi ruumala V arvutamiseks ehitame tüvipüramiidile peale täienduspüramiidi; tähistame täienduspüramiidi kõrguse tähega t .

Tüvipüramiidi ja tema täienduspüramiidi ühendamis-
 sel saame püramiidi, millel on põhja pindala S ja kõrgus
 $h + t$, järelikult ruumala

$$\frac{1}{3}S(h + t).$$

Kui sellest ruumalast lahutada täienduspüramiidi ruumala,
 jääb üle antud tüvipüramiidi ruumala V . Et täiendus-
 püramiidi ruumala on

$$\frac{1}{3}Qt,$$

siis saame, et tüvipüramiidi ruumala

$$V = \frac{1}{3}S(h + t) - \frac{1}{3}Qt$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}St - \frac{1}{3}Qt$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(S - Q)t.$$

Viimases avaldises esineb peale andmete S , Q ja h
 täienduspüramiidi kõrgus t , mis ei kuulu tüvipüramiidi
 andmete hulka ja tuleb seepärast andmete kaudu avaldada.

Teatavasti § 31 järgi

$$\frac{Q}{S} = \frac{t^2}{(h + t)^2},$$

millest saame, et

$$St^2 = Q(h^2 + 2ht + t^2)$$

ja edasi

$$(S - Q)t^2 - 2Qht - Qh^2 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame, et

$$t = \frac{2Qh \pm \sqrt{4Q^2h^2 + 4(S - Q)Qh^2}}{2(S - Q)}$$

ehk

$$t = \frac{2Qh \pm \sqrt{4SQh^2}}{2(S - Q)}$$

ehk

$$t = \frac{h(Q \pm \sqrt{SQ})}{S - Q}.$$

Et $S > Q$, siis on üks lahendeist positiivne, teine negatiivne. Täienduspüramiidi kõrgusena on kasutatav ainult positiivne lahend

$$\frac{h(Q + \sqrt{SQ})}{S - Q}.$$

Selle kirjutamegi tüvipüramiidi ruumala avaldisse suuruse t asemele ja saame

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(S - Q) \cdot \frac{h(Q + \sqrt{SQ})}{S - Q}$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}Qh + \frac{1}{3}h\sqrt{SQ}.$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

tüvipüramiidi ruumala võrdub kolme niisuguse püramiidi ruumalade summaga, mis on tüvipüramiidiga ühekõrgused ja mille põhjade pindaladeks on ühel tüvipüramiidi alumise põhja pindala, teisel ülemise põhja pindala ja kolmandal nende geometriline keskmine.

Tüvipüramiidi ruumala valemile võime anda ka lühema, arvutusteks sobivama kuju

$$V = \frac{h}{3}(S + Q + \sqrt{SQ}).$$

Ülesanded.

146. Püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mille kaugus tipust on $\frac{2}{3}$ püramiidi kõrgusest. Missuguse osa püramiidi ruumalast moodustab tekkinud tüvipüramiidi ruumala?

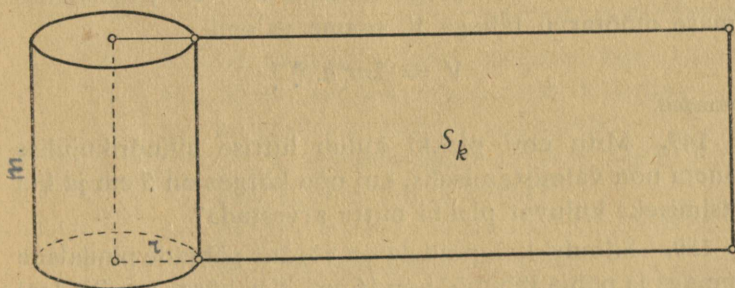
147. Mitu liitrit mahutab tüvipüramiidikujuline anum, millel on ruudukujulised põhjad, alumise põhiserva pikkus 20 cm, ülemise põhiserva pikkus 45 cm ja iga külgserva pikkus 32,5 cm?

148. Tüvipüramiidi ruumala on 245 cm³, alumise põhja pindala 50 cm² ja kõrgus 7,5 cm. Arvuta ülemise põhja pindala.

§ 35. Silindri pindala ja ruumala.

Valmistame paberist silindri külgpinna mudeli, lõikame selle üht moodustajat mööda lahti ja laotame silindri külgpinna tasapinnale (joonis 52). Saadud ristkülik on silindri külgpinna laotus ja selle pindala võrdub silindri külgpindalaga. Et selle ristküliku alus võrdub silindri põhja übermõõduga ja kõrgus võrdub moodustajaga, siis

silindri külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja moodustaja korrutisega.



Joonis 52.

Tarvitades silindri külgpindala, põhja raadiuse ja moodustaja tähistamiseks sümboleid S_k , r ja m , saame külgpindala arvutamiseks valemi

$$S_k = 2\pi r m.$$

Liites külgpindalaga põhjade pindalad, saame silindri pindala

$$S = S_k + 2S_p$$

ehk

$$S = 2\pi r m + 2\pi r^2$$

ehk

$$S = 2\pi r(m + r).$$

Silindri ruumala valemi saamiseks kujutleme silindri kõrval prismat, millel on niisama suur põhja pindala ja kõrgus kui silindril. Et prismal on kõik põhjaga paralleelsed lõiked põhjaga võrdsed ja ka silindril on põhjaga paralleelsed lõiked põhjaga võrdsed, siis on Cavalieri aksioomi järgi silinder ruumvõrdne prismaga, niipea kui neil on kõrgused võrdsed ja põhjad pindvõrdsed. Järelikult nagu prismal nii ka

silindril on ruumala võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

On silindri kõrgus h cm ja põhja raadius r cm, siis on põhja pindala πr^2 cm², seega ruumala $\pi r^2 h$ cm³; tähistades viimase mõõtarvu tähega V , saame valemi

$$V = 2\pi r^2 h. \quad \text{!}$$

Ülesanded.

149. Mitu cm² plekki kulub liitriise silindrikujulise kaaneta nõu valmistamiseks, kui nõu kõrgus on 5 cm ja kui valtsimiseks kuluvat plekki mitte arvestada?

150. Silindri külgpindala on võrdne põhjade pindalade summaga ja põhja läbimõõt on 16 cm. Kui kõrge on silinder?

151. Silindri telglõige on ruut küljega a cm. Avalda silindri pindala ja ruumala a abil.

152. Silindri külpinna laotus on ruut küljega a cm. Avalda silindri pindala ja ruumala a abil.

153. Üks jooksev meeter ümmarrauda läbimõõduga 38 mm kaalub 8,903 kg. Leia selle raua erikaal.

154. 10 000 m vasktraati läbimõõduga 5 mm kaalub 1767 kg. Leia selle traadi erikaal.

155. Mitu m terastraati läbimõõduga 2 mm kaalub 1,25 kg?

156. Silindrikujuline purk, mille sisemine läbimõõt on 16 cm ja kõrgus on 15 cm, on täidetud meega, mis kaalub 4,5 kg. Leia mee erikaal.

157. Tabeli andmete põhjal arvuta puuduvad suurused.

Silindri \ Näide nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
põhja raadius (cm)	5	16	7	12,5				
põhja pindala (cm ²)					43	5280	1490	5,5
kõrgus (cm)	12				6,1			
külgpindala (cm ²)		3017				12880		
täispindala (cm ²)			967				4500	
ruumala (cm ³)				2450				27,5

158. Kuidas muutub silindri ruumala, kui

- põhja raadiust suurendada 3 korda?
- kõrgust suurendada 5 korda?
- põhja raadiust suurendada 4 korda ja kõrgust suurendada 2 korda?
- põhja raadiust vähendada 1,5 korda ja kõrgust suurendada 4,5 korda?

159. Kui suurendada silindri kõrgust 3 korda ja põhja läbimõõtu 2 korda, siis ruumala saab 0,96 m³ suurusks. Kui suur on esialgne ruumala?

160. Ristküliku üks külj on teisest kaks korda pikem. Kuidas suhtuvad nende silindrite ruumalad (pindalad), mis tekivad selle ristküliku pöörlemisel üks kord pikema ja teine kord lühema külje ümber?

161. Ajalehe teatel torm tõi 1934. a. kevadel New Yorgi kohale tolmutilve, milles arvati olevat 300 milj. tonni tolmu. Kui paksu kihina oleks katnud see tolmu linna maa-ala, kui New Yorki mõelda ringina, läbimõõduga 30 km, ja kui tolmu erikaal on 1,5?

162. Silindrikujulisest palgist, mille pikkus oli 5,4 m, tahuti võimalikult suur ruudukujulise ristlõikega palk.

Kui suur on äratahutud puidu (laastude) ruumala, kui ümmarguse palgi läbimõõt oli 28 cm?

163. Kui raske on 3 m pikkune raudtoru, mille välimine läbimõõt on 60 mm ja sisemine läbimõõt on 50 mm?

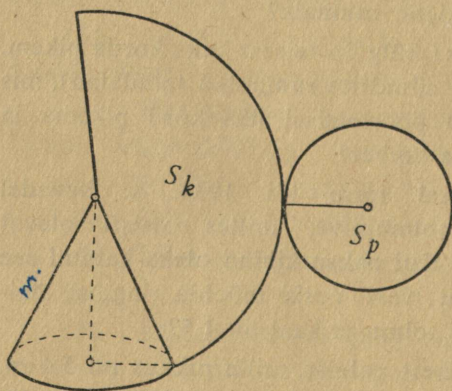
164. Kui raske on 25 cm pikkune alumiiniumtoru, mille välimine läbimõõt on 24 mm ja seinapaksus on 3 mm?

165. Mitu l vett voolab 45 min. vältel läbi toru, mille läbimõõt on 4 cm, kui vee voolu kiirus on 6 cm/sek.?

166. Ajalehe teatel katkes 1. III 1929 Helsingi veevärgi üks peajuhtmetest, läbimõõduga 61 cm, millest kahe tunni kestel voolas välja üle 10 000 m³ vett. Katkemiskoha ümbruses tõusis vesi 0,5 m kõrgusele maapinnast. Arvuta, kui suur oli vee voolu kiirus katkenud juhtmes ja kui suure maa-ala täitis väljavoolanud vesi keskmise sügavusega 0,5 m?

§ 36. Koonuse pindala.

Kui näiteks paberist valmistatud koonuse külgpinna mudel üht moodustajat mööda lahti lõigata ja tasapinnale



Joonis 53.

laotada (joonis 53), siis tekib koonuse külgpinna laotus. Koonuse külgpinna laotus on ringi sektor, mille kaare pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõduga ja raadius võrdub koonuse moodustajaga. Kui koonuse põhja raadius on r cm ja

moodustaja on m cm, siis külgpinna laotamisel saadud sektori kaare pikkus on $2\pi r$ cm ja raadius on m cm. Tähistame koonuse külgpindala sümboliga S_k . Et sektori pindala võrdub kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega, siis

$$S_k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot m$$

ehk

$$S_k = \pi r m.$$

Koonuse külgpindala on pool põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisest.

Liites koonuse külgpindala ja põhja pindala, saame koonuse pindala

$$S = \pi r m + \pi r^2$$

ehk

$$S = \pi r(m + r).$$

Ülesanded.

167. Paberist väljalõigatud sektorist raadiusega 13 cm ja nurgaga 125° valmistati koonuse külgpinna mudel. Leia selle põhja läbimõõt.

168. Mitu katusekivi kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 3,8 m, torni läbimõõt on 8,4 m ja ühele ruutmeetrile kulub 15 kivi?

169. Plekist on vaja valmistada lehter, mille koonusekujulise osa kõrgus on 9 cm ja põhja läbimõõt on 11,2 cm. Kui suur peab olema selleks võetava sektori raadius ja kesknurk?

170. Koonuse telglõige ja põhi on pindvõrdsed. Arvuta põhja pindala, kui koonuse kõrgus on 11 cm.

§ 37. Koonuse ruumala.

Koonusel on põhjaga paralleelsed lõiked teatavasti ringid, millede raadiused on võrdelised nende tasapindade ja tipu vaheliste kaugustega. Et ringide pindalad on võrdelised raadiuste ruutudega, siis järeldub, et

koonuse põhjal ja põhjaga paralleelsel lõikel on pindalad võrreldised nende tasapindade ja tipu vaheliste kauguste ruutudega.

Seda asjaolu kasutame koonuse ruumala valemi saamiseks. Kujutleme koonuse kõrval püramiidi, millel on niisama suur põhja pindala ja kõrgus kui koonusel. Kui võtame kummalgi kehal põhjaga paralleelse lõike põhjast ühel ja samal kaugusel, siis on mõlemal lõikel ka kaugus tipust üks ja sama. Seetõttu on aga neil lõigetel ka pindalad võrdsed, sest kummagi pindala jagatist põhja pindalaga väljendab üks ja sama arv, nimelt lõiketasapinna ja tipu vahelise kauguse ruudu jagatis keha kõrguse ruuduga. Järelikult on Cavalieri aksioomi järgi koonus ruumvõrdne püramiidiga, millel on põhja pindala ja kõrgus niisama suur kui koonusel. Seega

koonuse ruumala on üks kolmandik põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

Tähistades koonuse kõrgust tähega h , põhja raadiust tähega r ja ruumala tähega V , saame tulemuse valemi kujul

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Ülesanded.

171. Tabeli andmete põhjal arvuta puuduvad suurused.

Koonuse \ Näide nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
põhja raadius (cm)	4	9						12
kõrgus (cm)	7		8,4					
moodustaja (cm)		15	11,5	5,1		24		
põhja pindala (cm ²)				36,3	128,7			
külgpindala (cm ²)					321	1356	307	
täispindala (cm ²)							534	
ruumala (cm ³)								400

172. Koonusekujulise kartulikuha ümbermõõt on 11,9 m ja kõrgus on 1,6 m. Mitu kvintaali kartuleid on kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?

173. Kui palju kaalub koonusekujuline liivahunnik, mille kõrgus on 1,3 m ja põhja ümbermõõt on 15 m, kui 1 m³ liiva kaalub 1,8 t?

174. Koonuse kõrgus on 8 cm, nurk telje ja moodustaja vahel on 41°20'. Arvuta koonuse pindala ja ruumala.

175. Koonuse ruumala on 250 cm³ ja põhja raadius on 6 cm. Kui suur on moodustaja ja põhja vaheline nurk?

176. Kuidas muutub koonuse ruumala, kui

a) põhja läbimõõtu suurendada 5 korda?

b) kõrgust vähendada 2,5 korda?

c) põhja läbimõõtu vähendada 4 korda ja kõrgust suurendada 8 korda?

177. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk ümbermõõduga 42 cm. Arvuta koonuse ruumala.

178. Koonuse telglõike pindala on P cm² ja põhja ümbermõõt on $ü$ cm. Avalda koonuse ruumala.

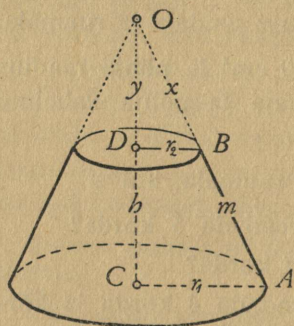
179. Ruut, mille diagonaal on d cm, pöörleb ümber diagonaali. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala.

180. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatet on a cm, pöörleb ümber sirge, mis läbib hüpotenuusi üht otsupunkti ja on paralleelne ühe kaatetiga. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala.

181. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 50 cm², pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta selle pöördkeha pindala ja ruumala.

§ 38. Tüvikoonuse pindala.

Tähistame tüvikoonuse põhjade raadiusi tähtedega r_1 ja r_2 ning moodustajat tähega m ; vastava täienduskoonuse moodustaja olgu x (joonis 54). Tüvikoonuse külgpindala saab vaadelda kahe koonuse külgpindalade vahena, milledest esimese raadius on r_1 ja moodustaja on



Joonis 54.

$m + x$ ning teise raadius on r_2 ja moodustaja on x . Seega väljendub tüvikoonuse külgpindala järgmiselt:

$$S_k = \pi r_1(m + x) - \pi r_2 x$$

ehk

$$S_k = \pi r_1 m + \pi r_1 x - \pi r_2 x$$

ehk

$$S_k = \pi r_1 m + \pi x(r_1 - r_2).$$

Et täienduskoonuse moodustaja x ei kuulu tüvikoonuse andmete hulka, siis tuleb ta andmete kaudu avaldada. Sarnastest kolmnurkadest BDO ja ACO leiame, et

$$\frac{x}{x + m} = \frac{r_2}{r_1},$$

millest

$$xr_1 = xr_2 + mr_2,$$

seega

$$xr_1 - xr_2 = r_2 m$$

ja

$$x(r_1 - r_2) = r_2 m.$$

Asendades varem leitud S_k avaldises $x(r_1 - r_2)$ sellega võrdse suurusega $r_2 m$, saame

$$S_k = \pi r_1 m + \pi r_2 m$$

ehk

$$S_k = \pi m(r_1 + r_2).$$

Saadud valemi sõnastamiseks paneme tähele, et

$$\pi m(r_1 + r_2) = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot m$$

ja et tüvikoonuse kesklõige, s. o. põhjaga paralleelne lõige, mis poolitab kõrguse, on ring raadiusega $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Seega võib öelda, et

tüvikoonuse külgpindala võrdub kesklõike ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

Liites külgpindalaga põhjade pindalad, saadakse tüvikoonuse pindala

$$S = \pi m(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

Ülesanded.

182. Täisnurkne trapets alustega 35 cm ja 25 cm ning kõrgusega 16 cm pöörleb ümber külje, mis on alustega risti. Kui suur pindala on tekkival pöördkehal?

183. Tüvikoonuse kesklõike raadius on 5 cm, kõrgus on 6 cm ja nurk moodustaja ja põhja vahel on 54° . Arvuta tüvikoonuse pindala.

§ 39. Tüvikoonuse ruumala.

Tüvikoonuse ruumala saab arvutada kahe koonuse ruumalade vahena. Kui tüvikoonuse põhjade raadiused on r_1 ja r_2 , kõrgus on h ja täienduskoonuse kõrgus on y (joonis 54), siis tüvikoonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2(h + y) - \frac{1}{3}\pi r_2^2 y$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_1^2 y - \frac{1}{3}\pi r_2^2 y$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi y(r_1^2 - r_2^2).$$

Sarnastest kolmnurkadest *BDO* ja *ACO* saame, et

$$\frac{y}{y+h} = \frac{r_2}{r_1},$$

millest $yr_1 = yr_2 + hr_2$, seega $yr_1 - yr_2 = hr_2$ ja

$$y = \frac{hr_2}{r_1 - r_2}.$$

Tüvikoonuse ruumala *V* avaldises saame viimase liikme järelikult kujul

$$\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{hr_2}{r_1 - r_2} \cdot (r_1^2 - r_2^2)$$

ehk

$$\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{hr_2}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

ehk

$$\frac{1}{3}\pi hr_2(r_1 + r_2).$$

Seega tüvikoonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi hr_2(r_1 + r_2)$$

ehk

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_2^2 h + \frac{1}{3}\pi r_1 r_2 h.$$

Tulemus on sõnastatav järgmiselt:

tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumalade summaga, mis on tüvikoonusega ühekõrgused ja mille põhja raadiuseks on ühel tüvikoonuse ühe põhja raadius, teisel — tüvikoonuse teise põhja raadius ja kolmandal — nende raadiuste geomeetriline keskmine.

Arvutusteks on kohane kasutada tüvikoonuse ruumala valemit kujul

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Ülesanded.

184. Tabeli andmete põhjal arvuta puuduvad suurused.

Näide nr.	1	2	3	4
Tüvikoonuse				
ühe põhja raadius (cm)	8	10	7	15
teise põhja raadius (cm)	5	4	3	10
kõrgus (cm)	6			
moodustaja (cm)		9		
pindala (cm ²)				2433
ruumala (cm ³)			316	

185. Koonus on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Missuguse osa koonuse ruumalast moodustab tekkinud tüvikoonuse ruumala?

186. Leia palgi ruumala, kui palgi pikkus on 4,5 m ja ostte läbimõõdud on 26 cm ja 14 cm.

187. Mitu l mahutab tüvikoonuse-kujuline pang, mille sügavus on 30 cm, pealtlaius 28 cm ja põhjalaius 18 cm?

188. Tüvikoonuse ühe põhja raadius on võrdne moodustajaga m ja teise põhja raadius on pool moodustajast. Avalda tüvikoonuse pindala ja ruumala.

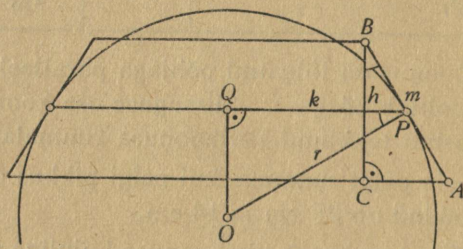
189. Tüvikoonuse telglõige on võrdhaarne trapets alustega 18 cm ja 14 cm; telglõike pindala on 208 cm². Leia tüvikoonuse ruumala.

§ 40. Kera pindala.

Lõikame kera kahe paralleelse tasapinnaga. Nende tasapindade vahelist kera osa nimetatakse kera kihiks, tema sfäärilist külgpinda — kera vööks ja tasapindade kaugust teineteisest — kihi kõrguseks ja ühtlasi vöö kõrguseks. Ehitame samade tasapindade vahele tüvikoonuse külgpinna, mis ümbritseb kera kihti ja puudutab teda

mööda ringjoont, mille tasapind poolitab kihi kõrguse. Näitame, et selle tüvikoonuse külgpindala võrdub kera vöö pindalaga.

Tähistame kera raadiuse tähega r , kihi kõrguse tähega h , tüvikoonuse moodustaja tähega m ja puuteringjoone raadiuse, mis on ühtlasi tüvikoonuse kesklõike raadius, tähega k (joonis 55). Tüvikoonuse külgpindala on siis teatavasti $2\pi km$. Teda saab aga ka avaldada kera raadiuse r ja kihi kõrguse h abil. Selleks kasutame telglõike tasa-



Joonis 55.

pinnal täisnurkseid kolmnurki ABC ja OPQ , mis on teineteisega sarnased, sest nurgad ABC ja OPQ on võrdsed kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Ülalnimetatud kolmnurkade sarnasuse tõttu

$$\frac{m}{r} = \frac{h}{k},$$

millest

$$mk = rh.$$

Järelikult tüvikoonuse külgpindala $2\pi km$ väljendub ka avaldisena

$$2\pi rh.$$

Kujutleme nüüd, et kera kiht tükeldatakse mitmeks uueks kihiks, millede kõrguste h_1, h_2, \dots, h_n summa on esialgse kihi kõrgus h , ja iga kihi ümber ehitatakse vastav

tüvikoonuse külgpind, mis puutub kihti oma kesklõike ringjoont mööda. Nende tüvikoonuste külgpindalade summa peaks olema esialgse vöö pindala lähisväärtuseks, ja nimelt seda täpsemaks lähisväärtuseks, mida väiksem on iga üksiku tüvikoonuse kõrgus. Arvutades nende tüvikoonuste külgpindalade summa, saame

$$2\pi r h_1 + 2\pi r h_2 + \dots + 2\pi r h_n$$

ehk

$$2\pi r (h_1 + h_2 + \dots + h_n),$$

seega lihtsalt

$$2\pi r h.$$

Järelikult see väärtus ongi vöö pindala täpne väärtus:

keravöö pindala võrdub keravöö suurringi ümbermõõdu ja vöö kõrguse korrutisega.

Et tulemus on õige ka siis, kui üks kihti piiravaist tasapindadest nihutatakse kuni keraga puutumiseni, mis juhul keravöö asemel saadakse kerapinna segment, siis võime öelda, et

kerapinna segmenti pindala võrdub keravöö suurringi ümbermõõdu ja segmenti kõrguse korrutisega.

Kui mõlemad kihti piiravad tasapinnad nihutatakse üks ühele ja teine teisele poole, kuni keraga puutumiseni, siis kihi kõrguseks tuleb keravöö läbimõõt $2r$ ja vöö pindala avaldis annab sel juhul keravöö pindala S ; järelikult

$$S = 2\pi r \cdot 2r$$

ehk

$$S = 4\pi r^2.$$

Et keravöö suurringi pindala on πr^2 , siis

keravöö pindala on neljakordne suurringi pindala.

Ülesanded.

190. Maakera pindalast on 29,4% maismaad. Mitu ruutkilomeetrit on maismaad, kui Maa raadius on 6371 km?

191. Poolkera piiravate pindade pindala on 600 cm^2 . Kui pikk on kera raadius?

192. Kera on lõigatud osadeks kolme üksteisega ristuva ja kera keskpunkti läbiva tasapinnaga. Kui suur on kera iga niisuguse osa pindala, kui kera raadius on r ?

193. Kui suur osa Maakera pindalast kuulub troopikavöötmesse, mis ulatub geograafilise laiuseni $23^\circ 28'$ kummalegi poole ekvaatorit?

194. Arvuta Maakera parasvöötmete ja polaarvöötmete pindalad, teades, et parasvööde asetseb geograafilistel laiustel $23^\circ 28'$ kuni $66^\circ 32'$.

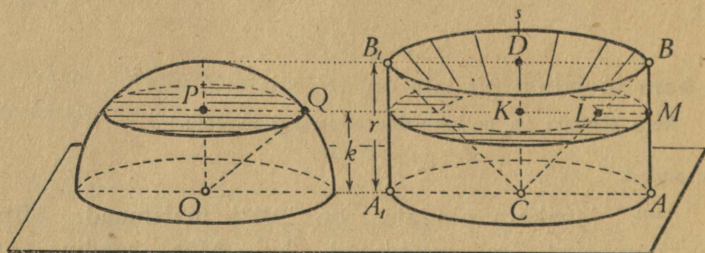
195. Avalda kera raadius r segmenti äärjoone raadiuse q ja kõrguse h kaudu ning näita, et segmenti pindala on $\pi(q^2 + h^2)$.

§ 41. Kera ruumala.

Kera ruumala valemi tuletamiseks tõestame Cavalieri aksioomi abil järgmise teoreemi:

poolkera ruumala võrdub niisuguse silindri ja koonuse ruumalade vahega, millel põhjade raadiused ja kõrgused võrduvad kera raadiusega.

Asetsegu ühel ja samal tasapinnal poolkera raadiusega r ning silinder põhja raadiusega r ja kõrgusega r (joonis 56). Kui sellest silindrist lõigata välja koonus, mille



Joonis 56.

põhja raadius $DB = r$ ja kõrgus $DC = r$, siis silindrist jääb järele pöördkeha, mis tekib kolmnurga ABC pöördlemisel sirge s ümber. Sel pöördkehal ja poolkeral on võrdsed põhjade pindalad ja võrdsed kõrgused; tõestame, et nende lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga tekiavad võrdsete pindaladega lõiked. Kui seda saab tõestada, siis on Cavalieri aksioomi järgi need kehad ruumvõrdsed.

Kui poolkera lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, mille kaugus põhja tasapinnast on k , siis tekib ringikujuline lõige raadiusega PQ . Selle lõike pindala

$$S_1 = \pi \cdot PQ^2 = \pi(OQ^2 - OP^2) = \pi(r^2 - k^2).$$

Teise keha lõikamisel sama tasapinnaga tekib rõngakujuline lõige, mille sisemine raadius $KL = KC = k$ ja välimine raadius $KM = r$. Selle lõike pindala

$$S_2 = \pi \cdot KM^2 - \pi \cdot KL^2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot k^2 = \pi(r^2 - k^2).$$

Seega $S_1 = S_2$, millest järeldub, et need kehad on ruumvõrdsed. Et teise keha ruumalaks on nimelt silindri ja koonuse ruumalade vahe ning nii sel silindril kui ka koonusel on kõrgus ja põhja raadius võrdne kera raadiusega, siis ongi teoreem tõestatud.

Avaldame nüüd poolkera ruumala silindri ja koonuse ruumalade kaudu. Silindri ruumala on

$$\pi r^2 \cdot r \quad \text{ehk} \quad \pi r^3$$

ja koonuse ruumala on

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{3}\pi r^3;$$

poolkera ruumala võrdub nende vahega

$$\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

ja on järelikult

$$\frac{2}{3}\pi r^3.$$

Kera ruumala V on kahekordne poolkera ruumala, seega

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Et kera pindala S on teatavasti $4\pi r^2$, siis

$$V = \frac{1}{3}Sr.$$

Selle tulemuse sõnastame järgmiselt:

kera ruumala võrdub ühe kolmandikuga kera pindala ja raadiuse korrutisest.

Ülesanded.

196. Tabeli andmete põhjal arvuta puuduvad suurused.

Kera \ Näide nr.	1	2	3	4	5
läbimõõt (cm)	18				
ümbermõõt (cm)		42,1			
suurringi pindala (cm ²)			6305		
pindala (cm ²)				7088	
ruumala (cm ³)					12770

197. Olgu kahe kera raadiuste jagatis k . Tõesta, et nende kerade pindalade jagatis on k^2 ja ruumalade jagatis on k^3 .

198. Kuu raadius on 1740 km. Arvuta Kuu ruumala.

199. Marsi raadius on 0,54 Maa raadiusest. Missugune osa Maa pindalast (ruumalast) on Marsi pindala (ruumala)?

200. Päikese raadius on 109 korda suurem Maa raadiusest. Mitu korda on Päikese ruumala suurem Maa ruumalast?

201. Kui pikk on tinast kera raadius, kui kera kaalub 1 kg?

202. Mitu korda suureneb kera ruumala, kui kera pindala suureneb 2,25 korda?

203. Kera pindala ruutsentimeetrites ja ruumala kuupsentimeetrites väljenduvad ühe ja sama arvuga. Leia kera raadius.

204. Raudkera ümbermõõduga 50,2 cm on paigutatud vette. Mitu kg kaotab seejuures kera oma kaalust?

205. Mitu tinakuuli raadiusega 1 cm saab valada 1 kg tinast?

206. Silindri sisse, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, on üks kord joonestatud võimalikult suur kera ja teine kord võimalikult suur koonus. Leia nimetatud kolme keha ruumalade suhted.

207. Silindrikujuline metallitükk, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, valatakse keraks. Mitu korda suureneb või väheneb ta pindala?

208. Elavhõbedas ujub metallkera läbimõõduga 4,6 cm, olles parajasti pooleni vedelikus. Kui palju kaalub see kera?

§ 42. Kera segmenti ruumala.

Tasapinnaga lõikamisel tükeldub kera kaheks osaks, mida nimetatakse kera segmentiteks. Kera läbimõõt, mis on risti lõikava tasapinnaga, jaguneb kaheks lõiguks, mida nimetatakse vastavate segmentite kõrgusteks. Segment, mille kõrgus võrdub kera raadiusega, on poolkera.

Tuletame segmenti ruumala esmalt juhul, kui segmenti kõrgus h ei ole suurem kera raadiusest r . Selleks vaatleme poolkeraga ruumvõrdseks osutunud pöördkeha, mis on tekkinud silindrist koonuse väljalõikamisel, kui silindril ja koonusel on kõrgus ja põhja raadius võrdne kera raadiusega r . Lõigates seda pöördkeha tasapinnaga, mis on paralleelne põhjaga ning jaotab kõrguse r lõiku-

deks k ja h , saame temast niisuguse osa (joonisel 56 parempoolse keha ülemise osa), mis on Cavalieri aksioomi järgi ruumvõrdne kera segmentiga, sest sel kehal 1) põhi on pindvõrdne segmenti põhjaga (mõlemad on joonisel 56 viirutatud), 2) kõrgus on võrdne segmenti kõrgusega ja 3) iga lõige, mille tasapind on põhjaga paralleelne, on pindvõrdne segmenti lõikega, mille tasapind on ka põhjaga paralleelne, ja põhjast samal kaugusel. Järelikult kera segmenti ruumala V võrdub silindri ja tüvikoonuse ruumalade vahega, kui silindril ja tüvikoonusel kõrguseks on segmenti kõrgus h , silindri põhja raadiuseks on kera raadius r ja tüvikoonuse ühe põhja raadius on samuti r , teise põhja raadius aga $r - h$ (sest joonisel 56 $KL = k = r - h$). Seega

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi h [r^2 + r(r - h) + (r - h)^2].$$

Nurgelistes sulgudes olev avaldis lihtsustub järgmiselt:

$$\begin{aligned} r^2 + r(r - h) + (r - h)^2 &= r^2 + r^2 - rh + r^2 - 2rh + h^2 = \\ &= 3r^2 - 3rh + h^2; \end{aligned}$$

seetõttu

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi h (3r^2 - 3rh + h^2)$$

ehk

$$V = \pi r^2 h - \pi h r^2 + \pi h^2 r - \frac{1}{3} \pi h^3.$$

Pärast koondamist saame, et

$$V = \pi h^2 r - \frac{1}{3} \pi h^3.$$

Kui antud segmenti kõrgus h on suurem kui kera raadius r , siis võime segmenti ruumala saada nüüd sel teel, et kera ruumalast lahutame täiendussegmenti ruumala. Täiendussegmenti kõrgus on $2r - h$, ruumala seega

$$\pi (2r - h)^2 r - \frac{1}{3} \pi (2r - h)^3$$

ehk, pärast arendamist ja koondamist,

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \pi h^2 r + \frac{1}{3} \pi h^3,$$

mille lahutamisel kera ruumalast saame antud segmenti ruumalaks avaldise

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h^2 r + \frac{1}{3}\pi h^3\right)$$

ehk

$$\pi h^2 r - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Sellest nähtub, et ka juhul, kui segmenti kõrgus on suurem kera raadiusest, avaldub segmenti ruumala sama valemiga.

Arvutusteks on mõnikord kohasem kasutada seda valemit kujul

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3}h\right).$$

Ülesanded.

209. Vees ujuv puukera ulatub $\frac{1}{3}$ läbimõõdu kõrguseni üle veepinna. Arvuta puu erikaal.

210. Tahetakse valmistada kerapinna segmenti kujudist tiiglit, mille sügavus oleks 6 cm, maht 0,6 liitrit ja seinapaksus 5 mm. Kui palju kaaluks see tiigel, kui ta valmistatakse ainest, mille erikaal on 2,6?

211. Kui kera segmentiga, mille kõrgus h on väiksem kera raadiusest r , ühendatakse koonus, millel on segmentiga ühine põhi ja mille tipuks on kera keskpunkt, siis saadakse keha, mida nimetatakse kera sektoriks. Näita, et kera sektori ruumala väljendub andmeis r ja h avaldisena $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

212. Avalda kera raadius r kera segmenti põhja raadiuse q ja segmenti kõrguse h kaudu ning näita, et segmenti ruumala on $\frac{1}{2}\pi q^2 h + \frac{1}{3}\pi h^3$.

213. Tõesta, et kera kihi ruumala V avaldub kihi põhjade raadiuste p ja q ning kihi kõrguse h kaudu järgmiselt:

$$V = \frac{1}{2}\pi(p^2 + q^2)h + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Näpunäide: Joonisel 56 esitatud kehade lõikamisel kahe tasapinnaga, mis on põhjaga paralleelsed, nähtub, et

keraga kihi ruumala avaldub silindri ja tüvikoonuse ruumalade vahena. Sel tüvikoonusel, nagu silindrilgi, on kõrguseks kihi kõrgus h ja silindri põhja raadius võrdub kera raadiusega r . Olgu selle tüvikoonuse põhjade raadiused x ja y . Näita, et

$$x^2 = r^2 - p^2, \quad y^2 = r^2 - q^2, \quad x - y = h$$

ja järelda siit, et

$$xy = r^2 - \frac{p^2 + q^2 + h^2}{2}.$$

Mõned erikaalud.

Alumiinium	2,7	Kuld	19,3
Bensiin	0,7	Liiv, kuiv	1,4
Elavhõbe	13,6	Petrooleum	0,8
Graniit	2,6	Raud, taotav	7,7
Hõbe	10,5	Teras	7,8
Jää	0,9	Tina	11,4
Klaas, akna	2,6	Vask	8,9

TÜ RAAMATUKOGU



10300014439014

A-14986

2.58
Hind Rmk-2-

A-14986

E. ETVERK — STEREO-MEETRIA ÕPIK GÜMNAASIUMI IV KLASSILE

E. Etverk

**STEREO-
MEETRIA**
ÕPIK

gümnaasiumi IV klassile

Tattu Eesti Kirjastus

^{2.58}
Hind Rmk. 2.—