

Tartu Ülikool
Sotsiaal- ja haridusteaduskond
Haridusteaduste Instituut
Klassiõpetaja õppekava

Kadi Tammiksaare
TEISE KLASSI ÕPILASTE MATEMAATIKAALASED
TEADMISED JA SAGEDAMINI ESINENUD VEAD
ÜLESANNETE LAHENDAMISEL

Magistritöö

Juhendaja: Anu Palu

Läbiv pealkiri: Matemaatikaalased teadmised

Tartu 2010

Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärk oli testida teise klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi kolmel kognitiivsel tasemel, mis on toodud uues põhikooli õppekavas ning kirjeldada halvemini lahendatud ülesannetes sagedamini esinenud vead. Töö teoreetilises osas antakse ülevaade matemaatikaalaste teadmiste omandamisest, teadmiste hindamisest, vigade analüüsist ja vigadest matemaatikaülesannete lahendamisel.

Uurimuses osales 583 teise klassi õpilast 39 klassist üle Eesti. Kasutatud testis olid ülesanded jaotatud vastavalt tunnetuslikele tasemetele kolmeks: teadmise, rakendamise ja arutlemise oskust nõudvaks.

Tulemuste analüüs näitas, et nooremate õpilaste puhul võib ülesanded jaotada tunnetuslike tegevuste järgi kaheks: teadmine ja probleemülesannete lahendamine. Viimaste lahendamine eeldas nii rakendamise- kui arutlemisoskust. Ülesannete lahenduste analüüs näitas, et halvemini olid lahendatud probleemülesanded. Vaadeldes vigu, selgus, et sagedasemad vead tulenesid mõistmisest ning testis esinenud tüüpilisi väärilahendusi esines peaaegu kõigis uuritud klassides.

Arutelu osas on toodud uurimuse olulisus õpetajale ja soovitusel järgnevateks uurimusteks.

Märksõnad: matemaatikaalased teadmised, hindamine, vead.

Abstract

Second grade pupils' mathematical knowledge and the most frequent errors.

The aim of the present research was to test 2nd grade pupils' mathematical knowledge on three cognitive levels that are given in new national curriculum for compulsory school and describe the most frequent errors in poorly solved tasks. The theoretical part gives an overview of mathematics acquisition, evaluation of knowledge, analysis of mistakes and mistakes that are made in solving mathematical tasks.

The participants of the study were 583 second grade pupils from 39 classes all over Estonia. In the test that was used the tasks were divided into three according to cognitive levels: knowing, applying and reasoning.

The results showed that in primary school the mathematical tasks could be divided into two by cognitive level: calculating task and problem solving tasks. The most poorly solved tasks were problem solving tasks. Most of the errors made occurred at the comprehension stage and the most frequent errors occurred in most of the classes.

As a conclusion, the importance of the present study for teachers and the suggestions for the future researches are given.

Keywords: math knowledge, evaluation, errors.

Sisukord

Sissejuhatus	5
<i>Matemaatikaalased teadmised ja nende omandamine</i>	<i>5</i>
<i>Meenutamine ja info säilimine</i>	<i>6</i>
<i>Algoritmide õppimine</i>	<i>6</i>
<i>Kontseptsioonide õppimine</i>	<i>6</i>
<i>Probleemide lahendamine</i>	<i>6</i>
<i>Matemaatikaalaste teadmiste hindamine</i>	<i>7</i>
<i>Hindamine ja vigade analüüs.....</i>	<i>9</i>
<i>Vead matemaatikaülesannete lahendamisel.....</i>	<i>10</i>
<i>Arvutamine</i>	<i>10</i>
<i>Mõõtmine</i>	<i>11</i>
<i>Kujundid</i>	<i>11</i>
<i>Probleemülesanded</i>	<i>12</i>
<i>Uurimuse eesmärk ja uurimisküsimused.....</i>	<i>13</i>
Meetod.....	13
<i>Valim ja protseduur</i>	<i>13</i>
<i>Test.....</i>	<i>14</i>
Tulemused.....	14
<i>Testi üldine lahendus.....</i>	<i>14</i>
<i>Faktoranalüüs ja erinevate ülesannetegruppide vahelised seosed</i>	<i>15</i>
<i>Ülesannete lahendus erinevatel kognitiivsetel tasemetel.....</i>	<i>17</i>
<i>Enamlevinud väärilahendused</i>	<i>20</i>
Arutelu	22
Kasutatud kirjandus.....	26
Lisa 1	31

Sissejuhatus

Õppimise juures on tähtis osa hindamisel ja tagasiside andmisel. Hindamise aluseks võetakse üldiselt õppe-eesmärgid, mis lähtuvad Riiklikus õppekavas sätestatud pädevustest. Uue põhikooli õppekava järgi (2010) tuleb hinnata matemaatikaalased teadmisi kolmel kognitiivsel tasemel: 1) faktide- ja protseduuride mõistmine, 2) teadmiste rakendamine ja 3) arutlemine.

Eestis on siiani vähe tähelepanu pööratud nooremate õpilaste matemaatikaalaste teadmiste hindamisele lähtuvalt tunnetuslikest tasemetest ja teadmiste kohta tagasiside andmisele (vt. Afanasjev & Palu, 2006; Kikas, Peets, Palu & Afanasjev, 2009; Palu, Vojevodova, Afanasjev, 2007; Palu & Kikas, 2007; 2010). Selleks, et anda konstruktiivset tagasisidet teadmiste ja oskuste kohta, on oluline analüüsida õpilaste poolt tehtud vigu (Bottle, 2005; Harris & Bell, 1996; Haylock & Thangata, 2007; Webb, 1992).

Antud uurimuse eesmärgiks oli testida teise klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi kolmel kognitiivsel tasemel, mis on välja toodud uues põhikooli õppekava eelnõus (2010) ning kirjeldada halvemini lahendatud ülesannete väärlahendusi.

Matemaatikaalased teadmised ja nende omandamine

Byrnes (1996) jagab matemaatikaalased teadmised mõistelisteks ja protseduurilisteks teadmisteks. Kontseptuaalsed ehk mõistelised teadmised hõlmavad 1) arusaamist sümbolitest ja arvulistest suurustest, 2) oskust rühmitada matemaatilisi olemusi ja mõista rühmade vahelisi erinevusi ja sarnasusi, 3) mitmekesiseid faktilisi teadmisi, 4) teadmist, miks matemaatilise algoritmi või protseduuri kasutamisel saadud vastus on õige või vale. Protseduurilised teadmised tähendavad, et teatakse meetmeid, mis on vajalikud konkreetse eesmärgi saavutamiseks.

Mõistelised ja protseduurilised teadmised on omavahel väga tihedalt seotud (Rittle- Johnson & Siegler, 1998). Kontseptuaalsete ja protseduuriliste teadmiste vahelise seose arenemisel on oluline osa ümbritseva keskkonna ülesehitusel. Seetõttu arvatakse, et algklassi õpilased omandavad paremini mõistelisi teadmisi. See tuleneb sellest, et varases koolieas on matemaatilised kontseptsioonid seotud väga tugevalt ümbritseva keskkonnaga. Samuti on oluline arendada mõistelisi ja protseduurilisi

teadmisi koos, sest arendades protseduurilisi teadmisi tekib parem arusaam kontseptuaalsetest teadmistest ja vastupidi (Rittle- Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Kognitiivsete tegevuste järgi võib matemaatika õppimise jaotada teadmiste säilimiseks ja meenutamiseks, algoritmide kasutamiseks, kontseptsiooni õppimiseks ja probleemi lahendamise oskuse arendamiseks (Orton, 2004).

Meenutamine ja info säilimine. Matemaatikas eeldatakse õpilastelt võimet meenutada palju erinevaid fakte ja omadusi. Meenutamine ja info säilitamine on otseselt seotud mälu ja psühholoogid on tõestanud, et erinevad inimesed suudavad mäletada erisuguseid teadmisi. Õppimise puhul on lihtsam säilitada ja meenutada õpitut, kui õppimine on olnud mõtestatud ja on loodud seosed teadmiste vahel. Kui õppides on saavutatud teadmiste säilimine, on seda raske testida ilma meenutamiseteta, kuid meenutamine võib olla problemaatiline. Vaja on sobivat vihjet, et õpilane suudaks meenutada vajalikku säilinud informatsiooni (Orton, 2004).

Algoritmide õppimine. Matemaatika õppimisel on suurelt osalt seotud algoritmide õppimise ja kasutamisega. Siinkohal on samuti oluline mälu, sest õpilane peab mäletama protseduure sammhaaval. Algoritmide kasutamise puhul puudub sageli õpilase jaoks tähendus teadmiste vahel ning vahel on algoritmid õpilase jaoks ebaolulised, sest puuduvad seosed (Orton, 2004).

Kontseptsioonide õppimine. Matemaatiliste faktide mäletamise ja tähendusliku algoritmide õppimise kõrval on mõistete ja põhjenduste õppimine rohkem tähelepanu ja oskusi vajav. Matemaatika õppimine tähendab suuresti uute kontseptsioonide ülesehitamist lähtudes eelnevatest teadmistest. Kontseptsiooni on isenesest raske defineerida, kuid arusaamine sellest tekib vaadeldes näiteid ja analüüsides neid (Orton, 2004).

Probleemide lahendamine. Matemaatikas tähendab probleemi lahendamine protsessi, mille käigus õpilane kasutab eelnevalt õpitud teadmisi, reegleid, oskusi ja kontseptsioone, et lahendada olukord, millega ei olda varem kokku puutunud. Probleemi lahendamise oskus eeldab nii sisulisi teadmisi kui ka üldisi oskusi. Üks raskus probleemide lahendamise oskuse arendamises matemaatikas on, et püstitatud probleemid on elukauged ja pole seotud teiste ainetega. Sääraste probleemülesannete puhul ei teki oskust kasutada samu teadmisi ja reegleid mujal kui matemaatikas (Orton, 2004). Seega peaks probleemide lahendamist pidevalt harjutama ning oluline on kasutada erineva raskusastme ja kontekstiga ülesandeid (Bergeson, Fitton, Bylsma, Neitzel & Stine, 2000).

Matemaatikaalaste teadmiste hindamine

Hindamise aluseks võetakse oodatavad ainealased teadmised ja oskused (Harris & Bell, 1996; Põhikooli riiklik õppekava, 2010). Hindamisel võrreldakse õpilase saavutusi õppele seatud eesmärkidega, mis kirjeldavad täpsemalt oodatavaid pädevusi (Harris & Bell, 1996; Põhikooli riiklik õppekava, 2010; Reynolds, Livingston & Willson, 2006).

Selleks, et seada õppele eesmärgid, mille täitmist hinnata, võib võtta aluseks õppe- ja kasvatustöö eesmärkide taksonoomiad. Reynolds, Livingston ja Willson (2006) soovivad võtta aluseks Bloomi taksonoomia. Bloomi kognitiivne õppeeesmärkide taksonoomia on üles ehitatud hierarhiliselt, eeldades, et kõrgema astme mõtlemisvõime saavutamiseks on vajalik eelnevale kategooriale vastava arutlemistaseme saavutamine (Krull, 2000). Bloomi kognitiivne taksonoomia jaguneb kuueks põhikategooriaks: teadmine, mõistmine, rakendamine, analüüs, süntees ja hindamine; mis omakorda jagunevad alakategooriateks (Anderson & Sosnik, 1994; Crawford & Brown, 2002; Krull, 2000; Marzano & Kendall, 2007; The Taxonomy of ..., s.a.; Taxonomies of Educational ..., s.a. Wilson, 2006).

Hindamise aluseks võetavad matemaatika pädevused võib jagada kahte rühma. Esiteks oskus küsida ja vastata matemaatikaalasel ja kasutades matemaatikat. Sellesse rühma kuuluvad järgmised pädevused: matemaatiline mõtlemine, matemaatiliste probleemide esitamine ja lahendamine, matemaatiline modelleerimine ja matemaatiline arutlemine. Teine rühm pädevusi näitavad võimet kasutada matemaatika keelt ja abivahendeid. Antud rühma kuuluvad: oskus esitada matemaatilisi olemusi, oskus kasutada matemaatilisi sümboleid ja valemeid, suhtlemine matemaatikas, kasutades matemaatikat ja matemaatika üle arutlemine, oskus kasutada matemaatilisi abivahendeid (Mogensen, 2008; Niss, 2002).

Praeguses kehtivas riiklikus õppekavas (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002) ei ole konkreetselt välja toodud matemaatilisi pädevusi. Matemaatika ainekavas on vaid õppetulemuste osas toodud välja kooliastmeti, mida õpilane peab teadma, tundma ja oskama. Uue Põhikooli riikliku õppekava eelnõu matemaatika ainekavas (2010) on matemaatilised pädevused juba täpsemalt kirja pandud. Selle järgi tähendab matemaatikapädevus matemaatiliste mõistete ja seoste tundmist, samuti suutlikkust kasutada matemaatikat endale omase keele, sümboleid ja meetoditega erinevate ülesannete modelleerimisel nii matemaatika sees kui teistes

õppeainetes ja eluvaldkondades. Matemaatikapädevus hõlmab ka üldist probleemide lahendamise oskust, mis sisaldab oskust probleeme püstitada, sobivaid lahendusstrateegiaid leida ja neid rakendada, lahendusideed analüüsida ja tulemuse tõesust kontrollida. Matemaatikapädevus tähendab ka loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamise oskust, erinevate esitusviiside (sümbolid, valemid, graafikud, tabelid, diagrammid) mõistmise ja kasutamise oskust. See hõlmab samuti huvi matemaatika vastu, matemaatika sotsiaalse, kultuurilise ja personaalse tähenduse mõistmist (Põhikooli riiklik õppekava, 2010).

Põhikooli riikliku õppekava matemaatika ainekava eelnõu (2010) järgi tuleb õpilase teadmisi hinnata kolmel kognitiivsel tasemel: 1) faktide, protseduuride ja mõistete teadmine, 2) teadmiste rakendamine ja 3) arutlemine. Õppekavas toodud tunnetuslikud tasemed järgivad samasugust hierarhilist ülesehitust nagu üldised õppeeesmärkide taksonoomiad. Kuigi õppekavas on toodud vaid kolm taset, sisaldavad nad kõiki üldistes taksonoomiates toodud teadmiste tasemeid. Faktide, protseduuride ja mõistete teadmine hõlmab meenutamist, äratundmist, informatsiooni leidmist, arvutamist, mõõtmist, klassifitseerimist ja järjestamist (Põhikooli riiklik õppekava; 2010). Samad tegevused on kirjeldatud ka õppeeesmärkide madalama taseme kategooriates (Anderson & Sosnik, 1994; Crawford & Brown, 2002; Krull, 2000; Marzano & Kendall, 2007; The Taxonomy of ..., s.a.; Taxonomies of Educational ..., s.a.; Wilson, 2006.). Teadmiste rakendamise tase tähendab meetodite valimist, matemaatilise info eri viisidel esitamist, modelleerimist ja rutiinsete ülesannete lahendamist (Põhikooli riiklik õppekava, 2010). Antud tase võtab kokku üldistes tunnetuslikes tasemetes esitatud mõistmise ja rakendamise. Arutlemine Põhikooli riikliku õppekava (2010) järgi tähendab oskust põhjendada, analüüsida, sünteesida, üldistada, tulemusi hinnata ja lahendada mitte-rutiinseid ülesandeid. Seega hõlmab arutlemise tase üldiste taksonoomiate kõrgemaid tasemeid.

Õpitulemuste hindamise rahvusvahelises uuringus TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) jaotatakse ülesandeid samuti kognitiivsete tasemete järgi. Matemaatikatesti 2007 ja 2011 raamkavas on tunnetuslikud tegevused jaotatud kolmeks: faktide ja protseduuride teadmine, teadmiste rakendamine ja arutlemine (Mullis, et al, 2007; Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff, 2009). Sisuliselt on uues Põhikooli riiklikus õppekavas toodud tunnetuslikud tasemed samad, mis rahvusvahelises õpetulemuste testis TIMSS.

Hindamine ja vigade analüüs

Üks hindamise eesmärke on anda tagasisidet ülesannete lahendamisoskuse ja matemaatilise mõtlemise arengu kohta (Põhikooli riiklik õppekava..., 2010). Hindamist kasutatakse ka õppe efektiivsemaks korraldamiseks ja tekkinud väärarusaamade ja vigade välja selgitamiseks (Webb, 1992; Harris & Bell, 1996; Bottle, 2005; Haylock & Thangata, 2007).

Õpilased teevad matemaatikas vigu kirjalikes töödes, praktilistes ülesannetes ja suulistest vastustes. Vead võivad tekkida hooletusest, kuid enamasti annavad nad ülevaate tekkinud väärarusaamadest. Õpetaja jaoks on oluline õpilaste tööst leida mõistelisi, protseduurilisi ja reeglite valest kasutusest tekkinud vigu. Oluline on pöörata positiivset tähelepanu säärasele vigadele ning küsida, kuidas saavutati väärilahendus, et need korrigeerida (Harris & Bell, 1996; Haylock & Thangata, 2007).

Selleks, et saada paremat ülevaadet vigadest, on oluline teada, millest need tulenevad. Bottle (2005) jagab vead neljaks nende tekke põhjuse järgi. Esiteks on juhuslikud vead, mis tulenevad igavusest, segavatest faktoritest, hooletusest või vähesest harjutamisest. Teise rühma kuuluvad vead, mis on seotud reeglite kasutamisega. Antud rühma kuuluvad vead, mis on tekkinud reegli valesti mõistmisest, kasutamisest ebasobivas kohas, osaliselt rakendatud reeglist või väljamõeldud reeglist. Kolmandaks on vead, mis tulenevad sõnade väärmõistmisest, näiteks: *ma arvasin, et lahutamine tähendab „korda“; ma ei teadnud, mida „summa“ tähendab* jne. Viimasena on vead, mis tulenevad kontseptuaalsete teadmiste puudujääkidest nagu näiteks: *korrutamine tähendab alati arvu suurenemist*.

Ryan ja Williams (2007) järgi tulenevad matemaatikas vead modelleerimisest, prototüüpidest, liigsest üldistamisest ning tegevus-objekt (ingl *process-object*) kontseptsiooni mõistmisest. Modelleerimine antud juhul tähendab, et luuakse seos matemaatika ja “reaalse” elu vahel, kasutades matemaatilisi mõisteid ja idealiseeritud olukordi. Vead antud valdkonnas tekivad peamiselt sellest, et õpilasel on olemas oma ettekujutus mingist olukorrast, kuid puuduvad oskused näha olukorda matemaatika seisukohalt.

Prototüüpidest tulenevad vead peamiselt siis, kui õpitakse matemaatilisi mõisteid ja üldistusi. Mõistete ja üldistuste õppimisel esitatakse tavaliselt hulgaliselt tüüpilisi näiteid ehk prototüüpe olukorra kirjeldamiseks. Kuna prototüüpidel põhinev mõtlemine on inimesele omane, on matemaatikas oluline kasutada tavapärastele

näidetele lisaks nn ebatavalisi näiteid, et arendada mitmekülgsemad arusaamad mõistetest ning murda ettekujutus prototüüpidest (Ryan & Williams, 2007).

Prototüüpidele sarnaselt tekivad vead kui hakatakse liigselt üldistama. Sageli kasutatakse eelnevalt õpitud reegleid ja protseduure uutes olukordades, kus eelnevad reeglid täielikult ei rakendu. Üks esimesi liigseid üldistusi tekib kahekohaliste arvude lahutamisel, mille puhul õpilased lahutavad suuremast arvust väiksema ($32-17=25$). Samuti üldistatakse naturaalarvude puhul kehtivaid reegleid tehetele murdarvude ja negatiivsete arvudega (Ryan & Williams, 2007).

Tegevus-objekt kontseptsiooni mõistmisega seotud vead ilmnevad lastel varakult, kui hakatakse matemaatilisi mõisteid õppima. Küsides: "Mitu õuna on laual?", loendab laps õunu ja ütleb vastuseks viimasena saadud arvu. Esitades ülesande, kus laual on 2 õuna ja lisatakse 3 õuna, loendab laps samuti õunad kokku. Kuid küsides samalt lapselt, mis on vastus kui kahele lisada kolm, siis võib laps vastuse võlgu jääda, sest tal pole arenenud veel seosed objektide ja matemaatiliste üldistuste vahel. Hilisemas eas esinevad seda tüüpi vead mõõtmisel ja graafikute lugemisel (Ryan & Williams, 2007).

Vigu võib analüüsida ka lähtuvalt ülesande lahendamise etappidest. Esmalt võivad vead tekkida ülesande lugemisel, kui ei tunta ära võtmesõnu või sümboleid. Järgmisena esinevad vead ülesande mõistmisel, mille puhul ei mõisteta ülesande jaoks olulisi sõnu, sümboleid või küsimust. Kolmandaks esinevad vead ülesande tõlgendamisel matemaatilisel. Kui on valitud õige tehe, võivad tekkida vead arvutamisel. Viimasena tekivad vead vastuse andmisel. Ülesanne võib olla õigesti lahendatud, kuid vastuse tõlgendamisel tehakse viga (Newman, 1977, viidatud Clements & Ellerton, 1996). Umbes pooled vead ülesande lahendamisel tulenevad lugemisest, mõistmisest või ülesande tõlgendamisest (Clements, 1980; Watson, 1980; Clarkson, 1983, viidatud Clements & Ellerton, 1996).

Vead matemaatikaülesannete lahendamisel

Esimese kooliastme matemaatika koosneb kolmest suuremast valdkonnast: arvutamine, mõõtmine ja tekstülesanded ning geomeetrilised kujundid. Nendes valdkondades tehtavad vead on erinevad (Põhikooli riiklik õppekava; 2010).

Arvutamine. Raskused liitmisel ja lahutamisel tulenevad peamiselt kümnendsüsteemi olemusest. Vead arvutamisel tekivad, kui arvutatakse üleminekuga

ühelt järgult teisele. Näiteks $36+29=55$ või $72-58=24$. Sellised vead tekivad, kui pole veel tekkinud arusaama, et kõrgema järgu ühik sisaldab endas madalama järgu ühikuid. Sarnased vead tekivad ka arvutustes, kus ühes arvus on null. Näiteks $90-9=91$ või $70-24=56$. Nende ülesannete puhul unustatakse sageli, et üheliste lahutamisel võeti kasutusele üks kümneline. (Byrnes, 1996; Geary, 2006; Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006).

Mõõtmine. Ülesanded mõõtühikutega on osa matemaatikast, mis võimaldab matemaatilisi teadmisi rakendada igapäevases elus. Mõõtmise puhul on kõige olulisem arusaam mõõtühikute struktuurist (Owens & Outhred, 2006). Üks esimesi mõõtmisühikuid, mida õpitakse on pikkusühikud. Mõõtmise oskust arendades õpitakse tundma erinevaid skaalasiid ja omandatakse arusaamine skaalast. Oskus skaalat kasutada ja lugeda on aluseks mõõtmisele ja sellega seotud ülesannete lahendamisele.

Üldiselt on noorematel õpilastel kesine arusaam mõõtühikutest ja nad ei näe seoseid mõõtühikute vahel (Curry, Mitchelmore & Outhred, 2006). Üks keerukama struktuuriga skaalasiid, mida varases koolieas hakatakse õppima on aja skaala ehk kell. Enamasti hakatakse ajaühikuid õppima analoogkella abil. Esimesed vead aja lugemisel tekivad seetõttu, et aetakse segamini väikest ja suurt seierit. Aja lugemise ja mõõtmisega seotud raskused tulenevad peamiselt sellest, et ajaühikud pole kümnendsüsteemis (Ryan & Williams, 2007).

Ajaühikute mitte-kümnendsüsteemsest olemusest tingitult, tekitavad ülesanded ajaühikutega raskusi. Sagedasemad vead seoses ajaühikutega tulenevad väär arusaamast, et $1h=100min$. Samuti tulenevad vead sellest, et tunde ja minuteid nähakse kui sõltumatuid ühikuid (Doig, Williams, Wo & Pampaka, 2006; Ryan & Williams, 2007).

Kujundid. Matemaatika valdkond, millega puututakse kokku juba varases eas on geomeetria. Van Hiele mudeli järgi võib ruumilise mõtlemise ja geomeetria kontseptsiooni omandamise jagada viieks tasemeks: tundmine, analüüs, klassifitseerimine, formaalne defineerimine ja tõestamine, matemaatiliste süsteemide võrdlemine. Tundmise tasemel tuntakse kujundid ära ja osatakse neid õigesti nimetada. Analüüsi tasemel osatakse nimetada kujundite omadusi ja neid selle järgi rühmitada. Klassifitseerimise tasemel tähtsustatakse kujundite omadusi ning omandatakse mitteformaalsed definitsioonid. Neljandal tasandil õpitakse formaalselt kujundeid defineerima ja esitatakse geomeetrisi tõestusi. Viimasel tasemel

mõistetakse geomeetrilisi kontseptsioone ning osatakse kasutada geomeetrilisi tõestusi (Owns & Outhred, 2006; Ryan & Williams, 2007).

Antud mudeli järgi omandatakse kahe esimese taseme teadmised suuresti prototüüpide järgi. Alles kolmandal tasemel hakatakse argumenteerima omaduste üle, mis seovad erinevaid kujundeid. Seega on oluline juba varakult esitada võimalikult erinevaid eeskujusid kujundite tundma õppimisel (Ryan & Williams, 2007).

Probleemülesanded. Probleemülesanded võib jagada matemaatikas rutiinseteks ja mitte-rutiinseteks. Rutiinsetes ülesannetes peaks lahendaja koheselt teadma, mida tuleb teha, et ülesanne lahendada. Mitte-rutiinsete ülesannete puhul pole koheselt aru saada, missugust lahendusviisi tuleks kasutada, et leida vastus (Mayer, 2003). Cooper ja Dunn (2000) viitavad aga asjaolule, et koolimatemaatikas ja eriti nooremate õpilaste puhul on raske eristada lapsele tuttavaid probleemülesandeid, sest laste isiklikud kogemused on erinevad.

Probleemi lahendamise oskuse arendamiseks kasutatakse kõige sagedamini tekstülesandeid. Kuigi aritmeetika tundub lihtne, teeb tekstülesannete lahendamise raskeks nende semantiline ülesehitus. Tekstülesannete lahendamisel tekkivad vead ongi sageli seotus ülesande semantilise ülesehitusega ja selle tõlgendamisega matemaatilisel (Geary, 2006; Stern, 1993; Zevenbergen, Dole & Wright, 2004). Aritmeetika tekstülesanded jagunevad keelilise ülesehituse järgi neljaks: muutuse (change), ühendamise (combine), võrdlemise (compare) ja võrdsustamise (equalize) ülesanded (Byrens, 1996; Geary, 2006; Zevenbergen, Dole & Wright, 2004). Täpsemalt võib ühetehtelised aritmeetika tekstülesanded jagada 16ks selle järgi, millises ülesande osas on seos esitatud. Liitmis- ja lahutamises ülesannetes esinev seos *võrra vähem* või *võrra rohkem* ning korrutamises- ja jagamises ülesannetes esinev seos *korda rohkem* või *korda vähem*, võib esineda tekstülesande andmetes või küsimuses (Kana & Palu, 2006).

Eesti õpilaste tekstülesannete lahendamise oskus on kessem kui arvutamisoskus (Palu & Kikas, 2007). Selleks, et leida põhjused, miks probleemülesannete lahendamine on raske, tuleks analüüsida vigu, mida tehakse (Fleischer & Manheimer, 1997). Tekstülesande lahendamisel tulenevad vead lahendamiseks kasutatavast strateegiast. Selleks, et lahendada ülesanne, võidakse 1) leida ülesandest kõik arvud ja liita need, 2) oletada, millist tehet teha, 3) teha kõik võimalikud tehted ja leida nende seast mõistlikem lahendus, 4) otsida võtmesõna, mis näitab, millist tehet kasutada või 5) valida tehe vastavalt arvude suurusele. Need

mitte-semantilised lahendusviisid võivad viia õigele lahendusele lihtsamate tekstülesannete puhul, kuid keerukuma struktuuriga ülesande puhul antud strateegiad sageli ei tööta (Sowder, 1992).

Uurimuse eesmärk ja uurimisküsimused

Uue Põhikooli riikliku õppekava (2010) järgi tuleb õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi hinnata kolmes tunnetuslikus valdkonnas: faktide, protseduuride ja mõistete teadmine, teadmiste rakendamine ja arutlemine. Samuti hinnatakse õpilaste teadmisi rahvusvahelises uuringus TIMSS kognitiivsetest protsessidest lähtuvalt. Kuna hindamise eesmärgiks on õpilasele tagasiside andmine saavutuste kohta (Põhikooli riiklik õppekava..., 2010) ja õpilase pädevuste välja selgitamine (Harris & Bell, 1996), on oluline analüüsida vigu, mida õpilased teevad.

Antud uurimuse eesmärgiks oli testida teise klassi õpilaste matemaatikateadmisi kolmel teadmiste tasemel: faktide- ja protseduuride teadmine, rakendamisoskus ja arutlemisoskus ning kirjeldada sagedamini esinenud vigu halvasti lahendatud ülesannetes. Eesmärgi saavutamiseks püstitati järgnevad uurimusküsimused:

1. Millised on teise klassi õpilaste matemaatikaalased teadmised?
2. Missugused on seosed erinevate tunnetuslike tegevustega ülesannete lahendatuse vahel?
3. Millised on teise klassi õpilaste matemaatikaalased teadmised kognitiivse valdkonna eri liikides?
4. Milliseid ülesandeid lahendatakse paremini, milliseid halvemini?
5. Millised on enamlevinud väärilahendused kõige halvemini lahendatud ülesannetes?

Meetod

Valim ja protseduur

Käesolevas uurimuses kasutati andmeid pikemaajalisest uurimusest „Areng üleminekul lasteaiast kooli ja esimeses kolmes klassis – vastastikune interaktsioon lapsevanemate, õpetajate ja laste vahel (2008- 2011)“.

Antud uurimuses kasutatud matemaatikatest viidi läbi teises klassis 2009. aasta kevadel. Testis osales 583 õpilast 39 klassist üle Eesti. Aega testi lahendamiseks oli 45 minutit. Testi viisid läbi klassiõpetajad, kes teste ei hinnanud. Kõigi õpilaste tööd kontrollis ja sisestas andmed antud töö autor.

Test

Testi koostas Anu Palu. Ülesannete sisu valikul lähtuti riiklikus õppekavas esitatud matemaatika õpitulemustest (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002). Testis oli üheksa ülesannet, mis omakorda jagunesid alaülesanneteks. Ülesanded olid koostatud nii, et need hõlmaks kognitiivsetest tasemetest teadmist (ül 1, 4), rakendamist (ül 2, 3, 5, 6, 8) ja arutelu (ül 7 ja 9).

Teadmiste ülesanne (ül 1) jagunes neljaks alaülesandeks, kus tuli liita või lahutada kahekohalisele/-st arvule/-st ühekohaline arv. Teises teadmiste ülesandes (ül 4) oli vaja kujundite hulgast ära tunda kolmnurgad, nelinurgad ja viisnurgad ning kirja panna vastavad tähed. Rakendamisülesannetest enamik (ül, 3, 5, 6,) olid tekstülesanded. Ülesandes kaks oli vaja antud arvu seast leida kirjeldusele vastav arv. Ülesanne kaheksa jagunes kolmeks alaülesandeks, kus tuli teha tehteid massi- ja ajaühikutega.

Arutelu ülesannetest üks (ül 7) nõudis arusaamist arvu koostisest ja teises (ül 9) oli vaja leida arutluse teel ning graafiku abil ühe tüdruku pikkus.

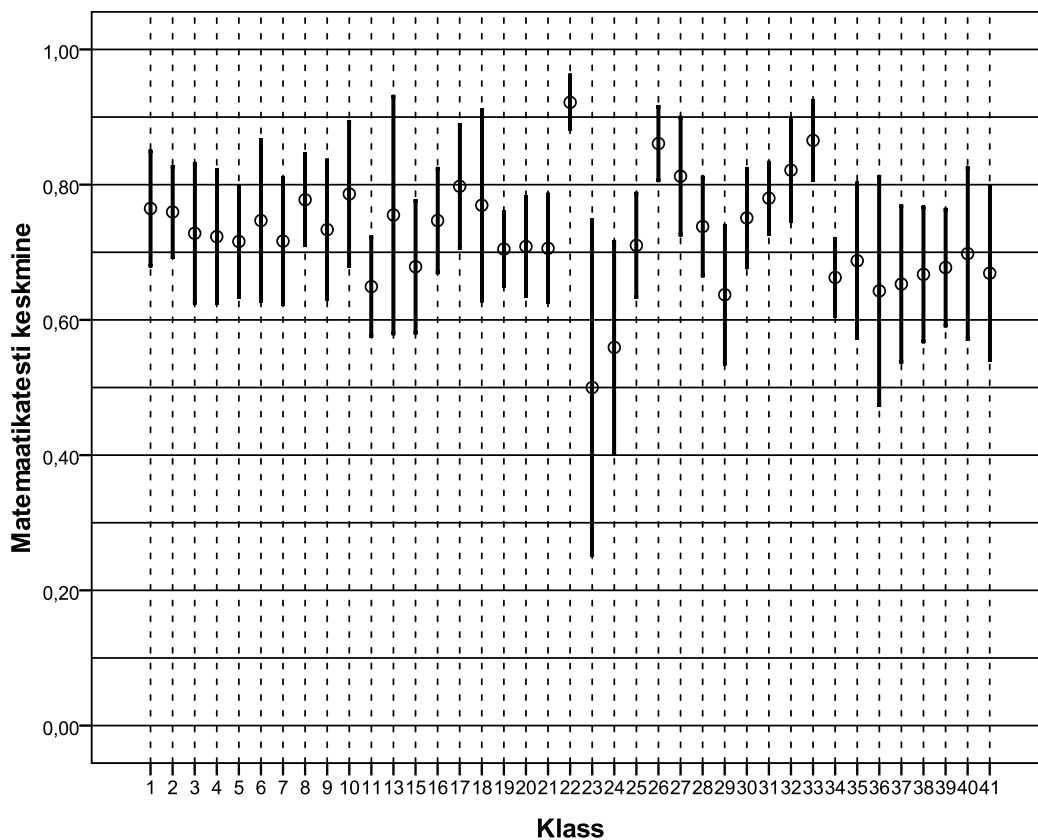
Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis näitas, et test on usaldusväärne ($\alpha = 0,77$).

Tulemused

Testi üldine lahendus

Käesoleva töö esimene uurimisküsimus oli, millised on teise klassi õpilaste matemaatikaalased teadmised. Selleks leiti testi lahendatuse üldine keskmine ja iga klassi keskmine. Testi keskmine lahendus oli 0,73 (SD = 0,17). Võrreldes testi tulemusi klasside kaupa (Joonis 1) on näha, et kolme klassi tulemused on oluliselt kõrgemad. Klassi 22 keskmine oli 0,92 (SD = 0,07), klassis 26 oli keskmine 0,86 (SD = 0,09) ja klassi 33 keskmine oli 0,87 (SD = 0,11). Klasside 23 ja 24 tulemused olid

oluliselt madalamad võrreldes üldise keskmisega. Klassi 23 keskmine tulemus oli 0,50 (SD = 0,3) ning klassi 24 keskmine tulemus oli 0,56 (SD = 0,2).



Joonis 1. Matemaatikatesti keskmised tulemused klasside kaupa

Testi lahendatuse keskmiste võrdlemiseks tehti dispersioonanalüüs ANOVA, mis näitas, et klasside keskmised on oluliselt erinevad, $F(38,543) = 2,89$, $p < 0,01$.

Faktoranalüüs ja erinevate ülesannetegruppide vahelised seosed

Selleks, et teada saada, kuidas jaotuvad ülesanded gruppidesse õpilaste tulemuste järgi, tehti faktoranalüüs. Faktoranalüüs kirjeldas 44,4% alg tunnuste koguvariatiivsusest. Faktoranalüüs jagas ülesanded kolme rühma (Tabel 1), mille nimetused võiksid olla: probleemide lahendamine, kujundite tundmine ja arvutamine.

Probleemide lahendamise rühma kuuluvad ülesanded, mis nõuavad nii rakendamis- kui arutlemisoskust (ülesanded 2, 3, 5, 6, 7, 8). Antud ülesannete rühma võib nimetada probleemülesanneteks, sest nooremas koolieas on raske eristada, millised ülesanded on õpilastele rutiinseid või mitte-rutiinseid ülesandeid (Cooper & Dunn, 2000). Teadmiste ülesannetest eraldusid kujundite tundmine ja arvutamine. Kujundite tundmise rühma kuulub ülesanne 4, kus oli vaja ära tunda kolmnurkad,

nelinurgad ja viisnurgad. Arvutamise rühma kuulub ülesanne 1, mis nõudis kahekohaliste arvude liitmise ja lahutamise oskust. Faktoranalüüsist jäeti välja ülesanne 9, sest see laadus kõigi faktorite vahel ühtlaselt. Antud ülesanne nõudis arutlemisoskust, kuid selle lahendamisel oli abiks graafik, mistõttu võis seda ülesannet pidada ka rakendusülesannete hulka kuuluvaks.

Tabel 1. Ülesannete jaotus gruppidesse

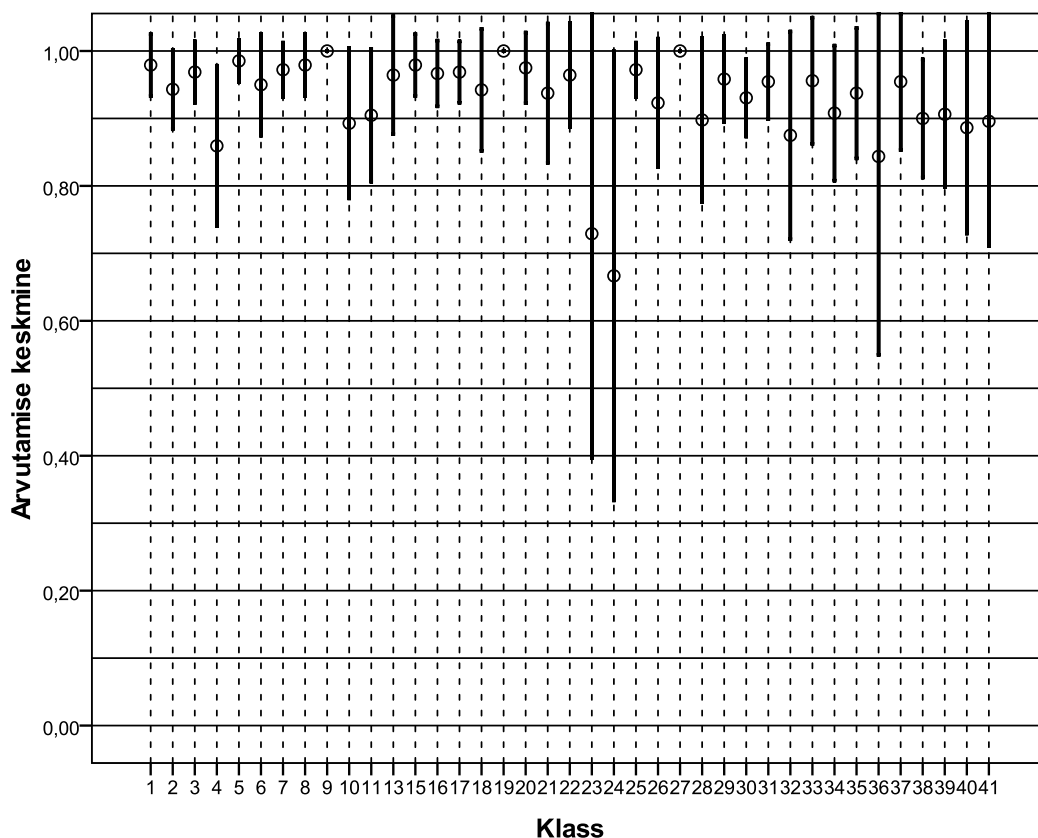
Ülesanne	Probleemide lahendamine	Kujundite tundmine	Arvutamine
2.1.	0,72	0,02	0,05
2.2.	0,70	-0,01	0,15
8.1.	0,59	0,11	0,02
8.2.	0,54	0,060	0,06
8.3.	0,53	0,07	-0,02
6.	0,60	0,15	0,19
3a.	0,40	0,06	0,05
5.	0,39	0,06	0,05
7.	0,37	0,13	0,02
4.2.	0,14	0,90	0,02
4.3.	0,10	0,89	0,04
4.1.	0,22	0,74	0,04
1.1.	0,07	0,07	0,75
1.3.	0,07	0,05	0,73
1.2.	0,09	-0,01	0,69
1.4.	0,10	0,01	0,69
<i>Cronbachi alfa</i>	0,69	0,83	0,70

Teine uurimisküsimus oli, missugused on seosed erinevate tunnetuslike tegevustega ülesannete lahenduste vahel. Selleks arvutati Pearsoni korrelatsioon ning selgus, et arvutamisoskuse ja kujundite tundmise vahel seos praktiliselt puudub ($r = 0,08$, $p < 0,05$). Arvutamise ja probleemide lahendamise vahel ilmnes nõrk seos ($r = 0,27$, $p < 0,01$). Samuti leiti nõrk seos rakendamisoskuse ja kujundite tundmise vahel ($r = 0,31$, $p < 0,01$).

Ülesannete lahendatus erinevatel kognitiivsetel tasemetel

Kolmas uurimisküsimus oli, missugused on õpilaste matemaatikaalased teadmised kognitiivse valdkonna eri liikides ja neljas uurimusküsimus oli, milliseid ülesandeid lahendati paremini, milliseid halvemini. Antud küsimustele vastamiseks arvutati faktoranalüüsi tulemusena saadud ülesannete rühmade lahendamise keskmised tulemused klasside kaupa ja igasse rühma kuuluvate ülesannete lahendamise keskmised tulemused.

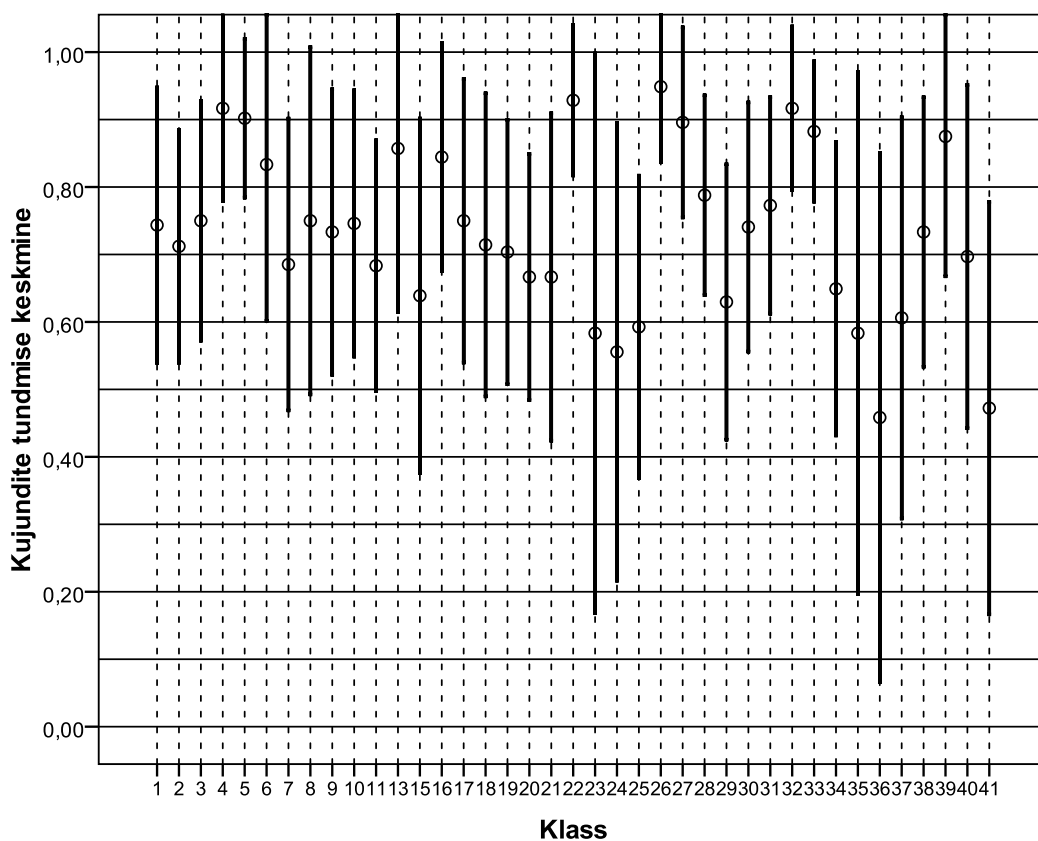
Arvutamisoskuse keskmine tulemus oli 0,94 (SD = 0,18). Arvutamisoskuse tase oli antud uurimuses oluliselt ühtlasem kui probleemide lahendamise ja kujundite tundmise puhul. Kõige paremad arvutamisoskuse tulemused (Joonis 2) olid klassides 9, 19, 27. Neis klassides andsid kõik õpilased õiged vastused. Oluliselt madalamad keskmised tulemused olid klassis 23 (M = 0,73; SD = 0,4) ja klassis 24 (M = 0,67; SD = 0,43).



Joonis 2. Arvutamisülesannete keskmised tulemused klasside kaupa

Arvutusülesannetest oli paremini lahendatud liitmisülesanded. Ülesande 1.3 ($23 + 7$) lahendus oli 96% ja ülesande 1.1 ($64 + 7$) lahendus oli 94%. Lahutamisyülesande 1.4 ($90 - 9$) lahendus oli 93% ja ülesande 1.2 ($73 - 8$) lahendus oli 91% .

Kujundite tundmise keskmine tulemus oli 0,74 (SD = 0,38). Vaadeldes kujundite tundmise tulemusi klasside kaupa (Joonis 3) on näha, et klasside tulemused varieeruvad väga palju. Kõige kõrgemad keskmised olid klassides 26 (M = 0,95; SD = 0,18), 22 (M = 0,93; SD = 0,19), 32 (M = 0,92; SD = 0,23) ja 4 (M = 0,9; SD = 0,26). Kõige madalamad tulemused kujundite tundmisel olid klassis 36 (M = 0,46; SD = 0,47) ja klassis 41 (M = 0,47; SD = 0,48).

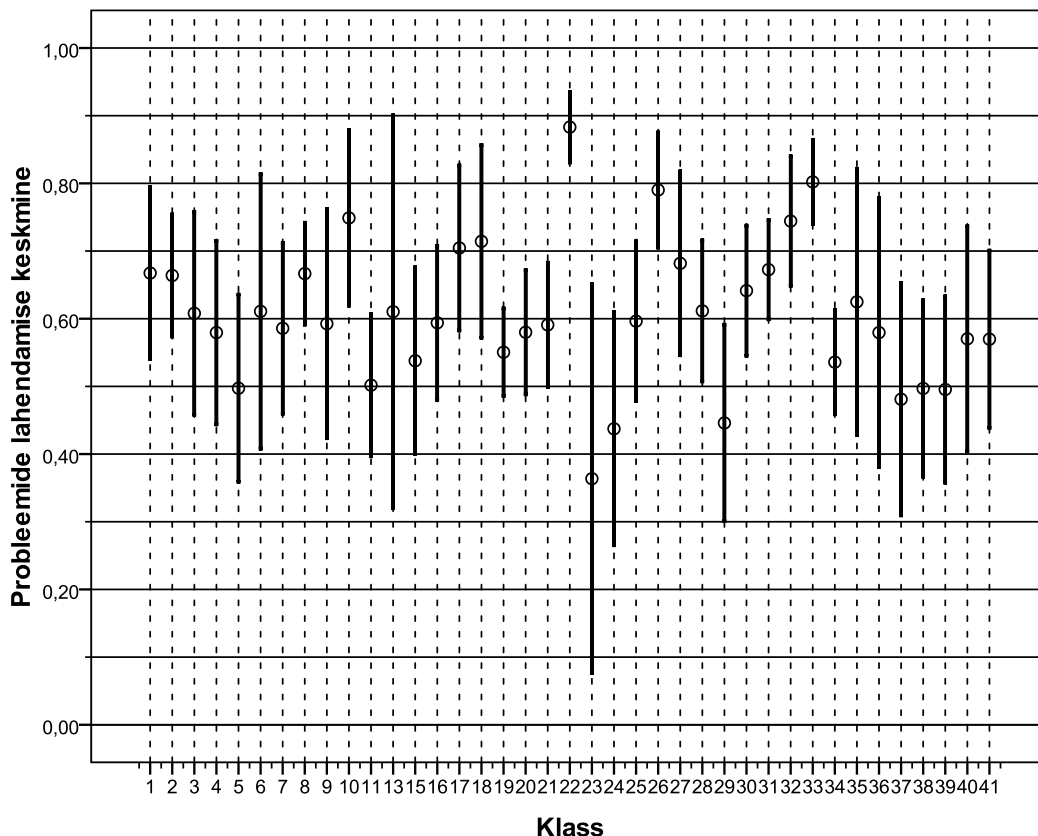


Joonis 3. Kujundite tundmise keskmised tulemused klasside kaupa

Kujundite tundmise ülesande korral 82% vastanutest märkis õigesti kõik kolmnurgad (ül. 4.1). Oluliselt halvemini tunti nelinurki (ül.4.2) ja viisnurki (ül.4.3). Kõik nelinurgad tundis ära 66% ja viisnurgad tundis ära 73% vastanutest.

Vaadeldes probleemülesannete lahendamist klasside kaupa (Joonis 4) on näha, et klasside tasemed on väga erinevad. Probleemide lahendamise keskmine oli 0,61

(SD = 0,24). Keskmisest oluliselt kõrgemad tulemused olid klassis 22 (M = 0,88; SD = 0,09), klassis 33 (M = 0,80; SD = 0,12) ja klassis 26 (M = 0,79; SD = 0,14). Probleemide lahendamise poolest keskmisest oluliselt madalamal tasemel olid klass 23 (M = 0,36; SD = 0,34), klass 24 (M = 0,43; SD = 0,22) ja klass 29 (M = 0,44; SD = 0,29).



Joonis 4. Probleemide lahendamise keskmised tulemused klasside kaupa

Probleemide lahendamise ülesannetest oli kõige paremini lahendatud ülesanne 2, kus oli vaja leida arvud, mille kirjeldus oli antud. Ülesande 2.2 keskmine oli 0,84 (SD = 0,37) ja ülesande 2.1 keskmine oli 0,79 (SD = 0,41). Ülesande 3, mis oli elulise sisuga tekstülesanne, keskmine lahendatus oli 0,73 (SD = 0,44).

Kõige halvemini oli probleemülesannetest lahendatud ülesanne 5, mis oli tekstülesanne. Antud ülesande lahendas õigesti 28% vastanuist. Tekstülesannetest oli paremini lahendatud ülesanne 6, mille keskmine lahendatus oli 68%. Halvasti oli lahendatud ka ülesanne 8, kus tuli teha tehteid mõõtühikutega. Selle ülesande puhul oli paremini lahendatud ül 8.1 (1 kg – 400 g), mille keskmine lahendatus oli 74% . Oluliselt halvemini lahendati ül.8.2 (70 min – 60 s), mille lahendatus oli 42% ja

ül.8.3 (1 h 50 min + 50 min), mille lahendus oli 32% . Alla poolte (37%) vastanuist lahendas õigesti ülesande 7, kus oli vaja moodustada ette antud numbritest võimalikult väike arv.

Kontrollimaks, kas ülesande gruppide keskmised tulemused klassiti on statistiliselt oluliselt erinevad, tehti dispersioonanalüüs ANOVA. Probleemide lahendamise keskmised tulemused klassiti olid statistiliselt oluliselt erinevad: $F(38,542) = 3,09$; $p < 0,01$. Erinevused klasside tulemustes oli ka kujundite tundmise ja arvutamisoskuse puhul (vastavad näitajad $F(38,542) = 1,43$; $p < 0,05$ ja $F(38,541) = 1,62$; $p < 0,05$).

Enamlevinud väärilahendused

Viies uurimisküsimus oli, millised olid sagedasemad väärilahendused kõige halvemini lahendatud ülesannetes. Kuus kõige halvemini lahendatud ülesannet olid: ülesanne 5 ($M = 0,28$; $SD = 0,45$), ülesanne 8.3 ($M = 0,32$; $SD = 0,47$), ülesanne 7 ($M = 0,37$; $SD = 0,48$), ülesanne 8.3 ($M = 0,42$; $SD = 0,49$), ülesanne 4.2 ($M = 0,66$; $SD = 0,47$) ja ülesanne 6 ($M = 0,68$; $SD = 0,47$).

Ülesanne 5 oli tekstülesanne: *Kaustik maksab 8 krooni. Kaustik on 2 korda kallim kui vihik. Kui palju maksab vihik?* Kõige sagedamini (27,1 %) esinenud vale lahendus oli $8 \cdot 2$, mida anti 37 klassis (94%). Sagedamini antud väärilahendused oli veel $8 - 2$ (16,8%), mida esines 32 klassis (82%), ja $8 + 2$ (13,4%), mida esines 30 klassis (77%). Ülejäänud väärilahendusi esines vähemal kui 2% juhtudest. Eripärasematest lahenduskäikudest võiks välja tuua $8 - 4$ (1,4%) ja $2 \cdot 4$ (0,5%), mis andsid ülesandele õige vastus. Antud ülesande puhul oli vaid üks klass, kus ei esinenud ühtki väärilahendust.

Ülesanne 8.3 oli tehe ajaühikutega: *1h 50min + 50min*. Kokku anti antud ülesandele 49 erinevat vale vastust. Kõige sagedamini esinenud väärilahendustest vähemalt üht esines kõikides uuritavates klassides. 20,1% õpilastest andis vastuseks 2 tundi. Seda vastust oli 34 (87%) klassis. 10,9% vastanutest andis vastuseks 100 minutit, mida andsid 29 (74%) klassi õpilased. Vastuse üks tund andis 3,1% ja vastuse 101 andis 2,4% õpilastest.

Ülesanne 7 oli mitte-rutiinne ülesanne: *kasutades nelja numbrit 0, 1, 6 ja 7 kõiki üks kord, kirjuta võimalikult väike arv*. Antud ülesandele anti 65 erinevat vale vastust. Kõige sagedasem (8,1%) vale vastus oli 0167, mille puhul on lihtsalt antud

numbrid järjestatud alates väikseimast. Antud vastust andsid 19 (48%) klassi õpilased. Vastuse 0 andis 7,6% vastanutest ja seda vastust esines 23 (59%) klassis. Vastuse 1670 andis 6,4% vastanutest ning seda andsid 20 (51%) klassi õpilased. Huvitavamad vastused olid veel 10,67 (0,2%) ja 16,7 (0,2%). Selle ülesande puhul ei esinenud tüüpilisi vigu kolmes klassis.

Ülesanne 8.2 oli samuti tehe ajaühikutega: *70min – 60s*. Sagedasemad valed lahendused olid 10min (20,7%), mida esines 34 (87%) klassis, ja 60min (11,9%), mida esines 23 (59%) klassis. Kokku esines antud ülesande lahendustes 43 erinevat väärvastust. Selle ülesande puhul ei esinenud kõige sagedasemaid vigu vaid ühes klassis.

Ülesanne 4 oli kujundite ära tundmine. Ülesande 4.2 puhul tuli leida nelinurgad ja kirja panna vastavad tähed. 5,6% vastanutest andis vastuseks F ehk tunti ära ruut. Seda vastust andsid 20 (51%) klassi õpilased. Vastuse ADFGH andis 5,2% vastanutest, mille puhul on viisnurk, mis meenutab nelinurka, arvatud nelinurkade hulka. Antud vastust esines 21 (54%) klassis. Vastuse ADF andis 4,4% ehk nelinurkadest tunti ära ristkülik, romb ja ruut, kuid mitte trapetsit. Sellist vastust andsid 23 (59%) klassi õpilased. Vastuse 4 andis 4,1% vastanutest, mis oleks õige vastus, kui loendada kokku vastavad. Seda vastust andsid 15 (38%) klassi õpilased. Ülejäänud vastuse variante esines vähemal kui 2% õpilastest. Kolmes klassis ei esinenud ühtki kõige sagedasemat väärilahendust.

Ülesanne 6 oli tekstülesanne: *Ühes pakis on 20 kaarti ja teises 34 kaarti. Mitu kaarti on teises pakis rohkem?* Antud ülesande puhul kolme klassi kõik õpilased lahendasid ülesande õigesti. Kõige sagedamini esinenud (18,2%) väärilahendus oli $20+34$. Antud väärilahendust esines 35 (90%) klassis. 3,8% vastanutest andis lahenduseks $20-34$, mille puhul on valitud õige tehe ja arvutatud õigesti, kuid arvude järjekord on võetud ülesandes esinemise järgi. Seda väärilahendust kasutasid 17 (43%) klassi õpilased. Ülejäänud valesid lahendusi esines vähemal kui 2% vastanutest. Huvitavamad lahendused antud ülesandele olid $20+14=34$, mida andis kuus õpilast; $34-a=20$, mida andis kolm õpilast; $34-14=20$, mida andis kaks õpilast ja $20+a=34$, mida andis üks õpilane.

Arutelu

Käesoleva magistritöö eesmärgiks oli testida teise klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi kolmel kognitiivsel tasemel: faktide- ja protseduuride teadmine, rakendamisoskus ja arutlemisoskus. Samuti oli antud töö eesmärgiks kirjeldada enamlevinud vigu ülesannetes, mis olid halvasti lahendatud.

Kuigi test oli üldiselt hästi lahendatud, eristusid mõned klassid väga kõrge või madala tulemusega. Võib oletada, et selline tulemus tuleneb õpetamise viisist (Kikas, Peets, Palu & Afanasjev, 2009). Selleks, et väitele rohkem kinnitust saada, peaks edaspidi uurima seoseid õpetamisviiside ja õpilaste õpitulemuste vahel.

Testi tulemuste põhjal tehtud faktoranalüüs jagas ülesanded kolme gruppi, mida võis nimetada: probleemide lahendamiseks, kujundite tundmiseks ja arvutamisoskuseks. Testi koostades olid ülesanded jaotatud kognitiivsete tasemete järgi teadmist, rakendamise- ja aruteluoskust nõudvateks (vt Põhikooli riiklik õppekava, 2010; Mullis, et al, 2009). Antud uurimuse tulemus näitas, et nooremas koolieas on raske eristada rakendamise ja arutelu oskust nõudvaid ülesandeid. Eristamiseks rakendamise ja arutelu ülesandeid, tuleks vahet teha rutiinsetel ja mitte-rutiinsetel ülesannetel (Põhikooli riiklik õppekava, 2010; Mullis, et al, 2009). Kuid algklassides on raske eristada õpilase jaoks rutiinseid ja mitte-rutiinseid ülesandeid (Cooper & Dunn, 2000). Seega võiks nooremas koolieas käsitleda rakendamise ja arutelu ülesandeid ühise nimetusega - probleemülesanded.

Teadmiste tasemel olevad ülesanded jaotusid kaheks eraldi rühmaks: kujundite tundmine ja arvutamine. Nii uues õppekavas (Põhikooli riiklik õppekava, 2010) kui rahvusvahelises uuringus TIMSS (Mullis, et al, 2007; Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff, 2009) kasutatud ülesannete liigituse järgi võiks arvata, et mõlemad ülesanded nõuavad samal tasemel tunnetuslikke oskusi. Samas Van Hiele ruumilise mõtlemise ja geomeetria kontseptsiooni omandamise mudeli järgi (Owns & Outhred, 2006; Ryan & Williams, 2007) oli antud testis tegemist klassifitseerimist nõudva ülesandega. Üldiste tunnetuslike taksonoomiate järgi nõuab klassifitseerimine aga analüüsi oskust (vt Anderson & Sosnik, 1994; Crawford & Brown, 2002; Krull, 2000; Marzano & Kendall, 2007; The Taxonomy of ..., s.a.; Taxonomies of Educational ..., s.a.; Wilson, 2006.). Seega on põhjendatud käesolevas uurimuses leitud seos probleemide lahendamise ja kujundite tundmise vahel, sest kõik antud rühmadesse kuulunud ülesanded nõudsid kõrgemaid tunnetuslikke oskusi. Edaspidi

võiks täpsemalt uurida seost probleemülesannete lahendamise ja kujunditega seotud ülesannete vahel. Kuna käesolevas uurimuses kasutatud testis oli vaid üks kujunditega seotud ülesanne, siis vajab vastav valdkond edaspidi põhjalikumat uurimist.

Arvutamisoskuse puhul on oluline teada vastavat algoritmi ja mäletada protseduuri sammhaaval (Orton, 2004). Seega on tegu madalamaid kognitiivseid oskusi nõudvate ülesannetega (vt Anderson & Sosnik, 1994, jt). Kuna arvutamisoskus ja probleemide lahendamine nõuavad erinevaid tunnetuslikke tegevusi, leiti ka käesolevas uurimuses nõrk seos arvutamise ja probleemide lahendamise oskuse vahel.

Oodatavalt olid õpilaste tulemused parimad arvutamisoskuse puhul ja nõrgemad probleemide lahendamise osas. See tulemus ühtib Palu ja Kikase (2007) uurimuse tulemustega. Arvutamise ülesannetest lahendati paremini liitmisülesanded ning veidi halvemini olid lahendatud lahutamisülesanded. Kujundite hulgast tunti ära kõige paremini kolmnurgad ning halvemini tunti nelinurki ja viisnurki. Probleemülesannetest lahendati paremini valikvastustega ja elulise sisuga tekstülesanded. Oluliselt halvemini lahendati võrdlemise tekstülesanded; ülesanded, milles tuli teha tehteid mõõtühikutega ja ülesanne, mis nõudis arusaamist arvu koostisest. Seega on probleemide lahendamise oskuse arendamise puhul oluline harjutada erineva konteksti ja raskusastmega ülesannete lahendamist (vt Bergeson et al, 2000).

Kõige halvemini lahendatud ülesanded kuulusid probleemülesannete hulka. Võrdlust sisaldavates tekstülesannetes tulenesid kõige sagedamini esinenud vead mõlemal puhul teksti mõistmisest. Need tulemused langevad kokku mitmete uurimustega (vt Clements, 1980; Watson, 1980; Clarkson, 1983, viidatud Clements & Ellerton, 1996). Kõige sagedamini lähtusid õpilased antud ülesannete puhul võtmesõna strateegiast, mis viis neid valele lahendusele (vt Sowder, 1992). Samas võib antud ülesannete kehva lahendatuse põhjuseid otsida ka õppekirjandusest. Ülesandeid, milles on seos *korda rohkem* andmetes ja mille lahenduseks tuleb jagada, Eestis sagedamini kasutatud matemaatika õppekirjanduses I ja II klassile, ei esine. Samuti esineb I ja II klassi õppekirjanduses vaid üksikuid ülesandeid, milles seos *võrra rohkem* on küsimuses ja lahendamiseks tuleb lahutada (Liebert, 2007). Seega enamasti ei harjutata seda tüüpi ülesannete lahendamist õppeprotsessi käigus. Samas lahendasid antud ülesanded palju paremini nende klasside õpilased, kus probleemide

lahendamise oskuse keskmine tulemus oli kõrgem. Seega peaks edaspidi uurima seost kasutatava õppekirjanduse ja õpilaste tekstülesannete lahendamise oskuse vahel.

Ülesannetes, milles tuli liita või lahutada ajaühikuid, tulenesid enamik vigu sellest, et ajaühikuid käsitleti kui kümnendsüsteemis olevaid ühikuid. Seda tulemust kinnitavad ka eelnevad uurimused (vt Doig, Williams, Wo & Pampaka, 2006; Ryan & Williams, 2007) ehk taas olid ülekaalus mõistmisest tulenevad vead. Samuti esinesid kõige sagedamini ülesande ja kontseptsiooni mõistmise vead ülesandes, mis nõudis arusaamist arvu koostisest. Kuna arvu koostise mõistmine on oluline kõigi matemaatiliste tehete mõistmisel, peaks juba varases eas tähelepanu pöörama sellele, et lapsel tekiks õige ettekujutus arvude maailmast. Antud valdkonnas võiks edaspidi uurida, kuidas mõistavad esimese kooliastme õpilased arvude koostist ja seoseid järguühikute vahel.

Kujundite tundmise ülesandes anti enim väärvastuseid nelinurkade tundmisel. Tunti ära kõige tüüpilisemad nelinurgad (ristkülik ja ruut), kuid teisi mitte. Seda tüüpi vead võivad tuleneda prototüüpidest ja kontseptsiooni mõistmisest, ehk antud juhul ei mõistetud, mida tähendab „nelinurk“. Võib oletada, et paljud õpetajad ei arenda mõistelisi ja protseduurilisi teadmisi koos ning kujundite õpetamisel ei kasutata eripäraseid näiteid (vt Ryan & Williams, 2007). Varases koolieas on oluline arendada koos kontseptuaalseid ja protseduurilisi teadmisi ning ümbritsev keskkond mõjutab mõistete omandamist (vt Rittle- Johnson & Siegler, 1998; Rittle- Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Seega võiks edaspidi uurida, kuidas õpetatakse kujundeid esimeses kooliastmes ja kuidas on seotud erinevate vahendite ja meetodite kasutamine vastava valdkonna õpitulemustega.

Antud uurimuses vaadeldud halvemini lahendatud ülesannetes esinenud sagedasemad vead tulenesid peamiselt ülesande mõistmisest. See tulemus langeb kokku eelnevate uurimustega (vt Clements, 1980; Watson, 1980; Clarkson, 1983, viidatud Clements & Ellerton, 1996). Samas pole kõigi väärilahenduste puhul väga selge, millest täpsemalt viga on tekkinud. Kuna tegu oli kirjaliku testiga, polnud võimalik käesolevas uurimuses väga täpselt tüüpiliste vigade põhjuseid uurida. Selleks peaks järgnevalt viima läbi täiendavaid uurimusi, milles intervjueritaks õpilasi, kellel esineb väärilahendusi.

Samuti peaksid sagedastele väärilahendustele tähelepanu pöörama iga klassi õpetajad, sest käesolev uurimus näitas, et peaaegu kõikides klassides esines tüüpilisi valelahendusi. Seega on oluline analüüsida klassis esinevaid vigu, et tõhustada

õppimist ning anda paremat ja konstruktiivsemat tagasisidet (vt Bottle, 2005; Harris & Bell, 1996; Haylock & Thangata, 2007; Webb, 1992).

Kokkuvõtteks. Antud uurimus näitas, et algklassides võiks rakendamise ja arutelu ülesandeid vaadelda koos kui probleemülesandeid. Samuti peaks rohkem tähelepanu pöörama kujundite ja mõõtühikute kontseptsioonide õppimisele ning probleemide lahendamise oskuse arendamisele. Samas peaksid õpetajad analüüsima õpilaste tehtud vigu, sest peaaegu kõikides klassides leidis tüüpilisi vigu, mille põhjuseid uurides saaks tõhustada õppeprotsessi ja arusaamist vastavast valdkonnast. Samuti peaksid õpetajad igas matemaatika valdkonnas kasutama erineva konteksti ja raskusastmega ülesandeid, et õpilastel tekiks võimalikult mitmekülgset teadmised.

Lähtuvalt käesoleva uurimuse tulemustest võiks edaspidi uurida õpetamisviiside ja kasutatavate õppematerjali seost ning mõju õpitulemustele matemaatikas. Järgnevalt peaks uurima ka esimeses kooliastmes enamlevinud vigu ja nende põhjuseid, et õpetajad saaksid juba varakult ennetada tüüpilisi vigu.

Kasutatud kirjandus

- Afanasjev, J. & Palu, A. (2006). Esimese ja teise klassi õpilaste edenemine matemaatikas. E. Abel, L. Lepmann (Toim). *Koolimatemaatika XXXIII* (lk 35-42): XXXIII Eesti matemaatikaõpetajate päevade ettekannete kogumik. Tartu: Tartu Ülikooli kirjastus.
- Anderson, L. W. & Sosniak, L. A. (1994). Experts from the “Taxonomy of Education Objectives, The Classification of Educational Goals, Handbook I: Cognitive Domain”. (pp. 9- 27), Anderson, L. W. & Sosniak, L. A. (Eds.) *Bloom’s Taxonomy a Forty-year Retrospective*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Bergeson, T., Fitton, R., Bylsma, P., Neitzel, B. & Stine, M. A. (2000). *Teaching and Learning Mathematics*. Retrieved January 25, 2010, from <http://www.k12.wa.us/research/pubdocs/pdf/mathbook.pdf>
- Bottle, G. (2005). *Teaching Mathematics in the Primary School*. London: Continuum.
- Byrnes, J. P. (1996). Mathematics Learning. In L. Finn (Ed.) *Cognitive Development and Learning in Instructional Contexts*, (pp. 155- 180). USA: Allyn and Bacon.
- Clements (Ken), M. A. & Ellerton, N. F. (1996). *The Newman Procedure for Analysing Errors on Written Mathematical Tasks*. Retrived April 20, 2010, from <http://www.compasstech.com.au/ARNOLD/PAGES/newman.htm>
- Cooper, B. & Dunne, M. (2000). *Assessing Childrens’s Mathematical Knowledge*. Buckingham: Open University Press.
- Crawford, C. M. & Brown, E. (2002). *Focusing Upon Higher Order Thinking Skills: WebQuests and the Learning- Centered Mathematical Learning Environment*. Retrieved December 12, 2008, from http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/da/14.pdf
- Curry, M., Mitchelmore, M. & Outhred, L. (2006). Development of Children’s Understanding of Length, Area, and Volume Measurement Principles. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings on the 30th Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 441- 447). Czech Republic: Atelier Guimaec.
- Doig, B., Williams, J., Wo, L. & Pampaka, M. (2006). Integrating Errors into Developmental Assessment: “Time” for ages 8- 13. In J. Novotna, H. Moraova,

- M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings on the 30th Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 441- 447). Czech Republic: Atelier Guimaec.
- Fleischner, J. E. & Manheimer, M. A. (1997). Math Interventions for Students with Learning Disabilities: Myths and Realities. *School Psychology Review* 26, 397-413.
- Geary, D. C. (2006). *Development of Mathematical Understanding*. Retrieved January 10, 2010, from <http://web.missouri.edu/~gearyd/files/Geary%20ChildHandBk%20%5Bproof,%202006%20c18%5D.pdf>
- Harris, D. & Bell, C. (1996). Section 3. Assessing for Learning. In *Evaluating and Assessing for Learning*, (pp. 83- 120). London: Nichols Publishing Company.
- Haylock, D. & Thangata, F. (2007). *Key Concept in Teaching Primary Mathematics*. Great Britain: The Cromwell Press.
- Kana, A. & Palu, A. (2006). Aritmeetika tekstülesannete lahendamisoskusest. *Avatud kool ja tõhus õppimine*. (lk 63- 77). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Kikas, E., Peets, K., Palu, A. & Afanasjev, J. (2009). Theoretical of individual and contextual factors in the development of math skills. *Educational Psychology*, 29. 541- 560.
- Krull, E.(2000). *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat*.(lk 51- 55) Tartu: TÜ Kirjastus.
- Liebert, T. (2007). *Esimene kooliastme aritmeetika tekstülesannete liigid matemaatika õpikutes ja töövihikutes*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Marzano, R. J., Kendalle, J. S. (2007). *The New Taxonomy of Educational Objectives*. (2nd ed). USA: Crowin Press.
- Mayer, R. E. (2003). Mathematical Problem Solving. In J. M. Royer (Eds.), *Mathematical Cognition*, (pp. 69- 92). USA: Information Age Publishing Inc.
- Mogensen, A. (2008). Mathematical competences. In E. Sendova (Eds.), *Meeting in Mathematics* (pp. 21- 35). Sofia: Demetra Publishing House.
- Mullis, V. S. I., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A. & Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 Assessment Framework*. Retrieved December 20, 2008, from http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/T07_AF.pdf

- Mullis, V. S. I., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y. & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Framework*. Retrieved February 20, 2010, from http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf
- Niss, M. (2002). *Mathematical Competencies and the Learning of mathematics: the Danish KOM project*. Retrieved January 29, 2010, from http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf
- Orton, A. (2004). What Cognitive Demands Are Made in Meaning Mathematics? In *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice*, (pp. 13- 26). London: Continuum.
- Owens, K. & Outhred, L. (2006). The Learning of Geometry and Measurement. In A. Gutierrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83- 105). UK: Sense Publisher.
- Palu, A. & Kikas, E. (2007). Mathematical tasks causing difficulties for primary school students. In A. Andžans, D. Boka, G. Lace (Eds). *The Mathematics: retrospective and perspectives*: (pp. 204- 209). Proceeding of the 8th International Conference May 10- 11, 2007. Riga: University of Latvia/ macibu gramata.
- Palu, A. & Kikas, E. (2010). The types of the most widespread errors in solving arithmetic word problems and their persistence in time. In: Toomela, A. (Ed.) *Systemic Person-Oriented Study of Child Development in Early Primary School* (pp.155-172). Frankfurt am Main: Peter Lang.
- Palu, A., Vojevodova, K. & Afanasjev, J. (2007). Kolmanda klassi õpilaste matemaatikateadmistest rahvusvahelise uuringu IPMA testide põhjal. E. Abel (Toim). *Koolimatemaatika XXXIV* (lk 35. 42): XXXIV Eesti matemaatikaõpetajate päevade ettekannete kogumik. Tartu: Tartu Ülikooli kirjastus.
- Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava (2002). *Riigi Teataja*, I osa, nr 20.
- Põhikooli riiklik õppekava (2010). Külastatud 29. jaanuaril 2010, aadressil https://www.oppekava.ee/vv_maarus_pk/pohikooli_riiklik_oppekava_vabariigi_valitsuse_maeerus_nr._14_28.01.2010

- Reynolds, C. R., Livingston, R. B. & Willson, V. (2006). The Initial Steps in Developing a Classroom Test. In A. E. Burvikovs (Eds.), *Measurement and Assessment in Education* (pp. 163- 187). USA: Pearson Education.
- Rittle- Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Eds.), *The development of Mathematical Skills*, (pp. 75- 110). Psychology Press.
- Rittle- Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346- 362.
- Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15: Learning from Errors and Misconceptions*. McGraw Hill: Open University Press.
- Sowder, J. T. (1992). Estimation and related topics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of set so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, 85, 7- 23.
- Zevenbergen, R., Dole, S. & Wright, R. J. (2004). *Teaching Mathematics in Primary School*. Crows Nest, NSW, Australia: Allen & Unwin
- Taxonomy of Educational Objectives – The First taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain, The affective Domain, Revision of the Taxonomy* (s.a.). Retrieved December 12, 2008, from <http://education.stateuniversity.com/pages/2475/Taxonomies-Educational-Objectives.html>
- The Taxonomy of Educational Objectives* (s.a.). Retrieved December 12, 2008, from <http://www.humboldt.edu/~th1/bloomtax.html>
- Verschaffel, L., Greer, B. & Torbeyns, J. (2006). Numerical Thinking. In A. Gutierrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 51- 73). UK: Sense Publisher.
- Webb, N. L. (1992). Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 661- 680). New York: Macmillan.

Wilson, L. O. (2006) *Beyond Bloom – A new Version of the Cognitive Taxonomy*.

Retrieved December 13, 2008, from

<http://www.uwsp.edu/education/lwilson/curric/newtaxonomy.htm>

Lisa 1

Matemaatika test 2. klassile

1. Arvuta

1) $64 + 7 = \dots\dots$ 2) $73 - 8 = \dots\dots$ 3) $23 + 7 = \dots\dots$ 4) $90 - 9 = \dots\dots$

2. Leia arvude 355, 945, 353, 735 seast

1) arv, milles on kolm kümnelist ja viis ühelist:

2) arv, milles on kolm sajalist ja viis ühelist:

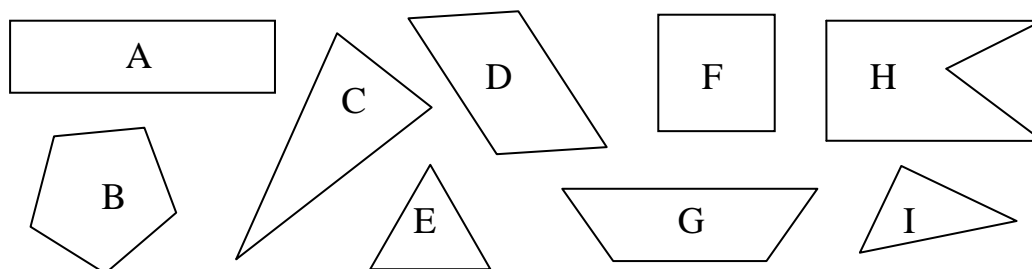
3. Peeter sai sünnipäevakingituseks 500 krooni. Ta otsustas osta kaks mänguasja.

Üks neist maksis 270 krooni ja teine 130 krooni.

Kui palju maksavad mängusjad?

Kas tal jäi raha üle? Kui jäi, siis mitu krooni?

4. Leia nimetatud kujundid. Kirjuta vastavad tähed.



Kolmnurgad: Nelinurgad: Viisnurgad:

5. Kaustik maksab 8 krooni. Kaustik on 2 korda kallim kui vihik. Kui palju maksab vihik?

.....

Vastus:

6. Ühes pakis on 20 kaarti ja teises 34 kaarti. Mitu kaarti on teises pakis rohkem?

.....

Vastus:

7. Kasutades nelja numbrit 0, 1, 6 ja 7 kõiki ainult üks kord, kirjuta võimalikult väike arv.

Vastus:

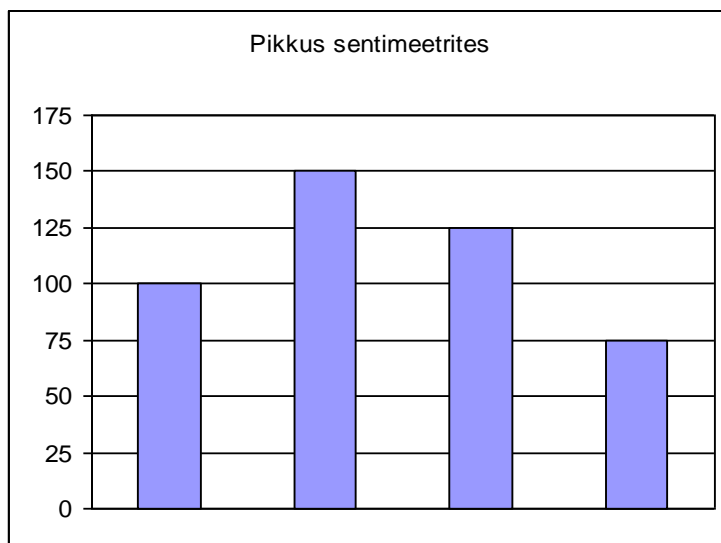
8. Liida või lahuta

1) $1 \text{ kg} - 400 \text{ g} = \dots\dots\dots \text{ g}$

2) $70 \text{ min} - 60 \text{ s} = \dots\dots\dots \text{ min}$

3) $1 \text{ h } 50 \text{ min} + 50 \text{ min} = \dots\dots\dots$

9. Joonisel näed nelja tüdruku pikkusi.



Tüdrukute nimed on jooniselt kaduma läinud. On teada, et Liis on kõige pikem. Ann on kõige lühem. Kai on pikem kui Sandra. Kui pikk on Sandra?

Vastus: cm