

16687 6.548
A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

2. VIHK

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1947

A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

2. VIHK

Kehustuslik kontrollieksemplar

3142

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1947

V

2



25340

A-16687

Peatükk II.

Algebraalne murd.

§ 14. Murru laiendamine.

Murru põhiomadus, et lugeja ja nimetaja üheaegsel korrutamisel mingi arvuga või jagamisel ühe ja sama arvuga murru väärtus ei muutu, lubab murdu laiendada ja taandada.

Murru laiendamine on tema lugeja ja nimetaja korrutamine ühe ja sama arvuga.

Antud murru laiendamiseks nõutava nimetajani jagame nõutava nimetaja antud murru nimetajaga ja nii saadud jagatisega korrutamegi antud murru lugejat ja nimetajat.

Avaldist, millega antud murru lugejat ja nimetajat korrutame, see tähendab, millega antud murdu laiendame, nimetatakse laiendusteguriks ehk laiendajaks.

Ülesanne 1. Laiendada murd $\frac{3}{14}$ nimetajani 56.

Lahendus. $56 : 14 = 4$; $\frac{3}{14} = \frac{3 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{12}{56}$.

Ülesanded.

Laiendada järgmised murrud antud nimetajateni:

212. $\frac{8}{17}$ nimetajani 2108

212. $\frac{2}{43}$ " 817

213. $\frac{3}{35}$ " 2170

213. $\frac{2}{243}$ " 2916

Ülesanne 2. Laiendada murd $\frac{3m}{4n}$ nimetajani $12bn$.

Lahendus. $12bn : 4n = 3b$;

$$\frac{3m}{4n} = \frac{3m \cdot 3b}{4n \cdot 3b} = \frac{9bm}{12bn}.$$

Ülesanded.

Laiendada järgmised murrud antud nimetajateni:

214. $\frac{a}{n}$ nimetajani bn^2

214. $\frac{b}{x}$ " $2ax$

215. $\frac{a}{4b}$ " $12ab^2$

215. $\frac{2m}{13n}$ " $52m^2n$

Ülesanne 3. Laiendada murd $\frac{2a-b}{a+3b}$
nimetajani $2a^2 + 7ab + 3b^2$.

Lahendus.
$$\begin{array}{r|l} 2a^2 + 7ab + 3b^2 & a + 3b \\ \underline{2a^2 + 6ab} & 2a + b \\ ab + 3b^2 & \\ \underline{ab + 3b^2} & \end{array}$$

$$\frac{2a-b}{a+3b} = \frac{(2a-b) \cdot (2a+b)}{(a+3b) \cdot (2a+b)} = \frac{4a^2 - b^2}{2a^2 + 7ab + 3b^2}.$$

Ülesanded.

Laiendada järgmised murrud antud nimetajateni:

216. $\frac{1}{a+b}$ nimetajani $a^2 - b^2$

216. $\frac{a-b}{a+b}$ " $a^2 + 2ab + b^2$

217. $\frac{x+y}{x-y}$ " $x^2 - 2xy + y^2$

217. $\frac{m+n}{m-n}$ " $m^2 - n^2$

218. $\frac{a+b}{a-b}$ nimetajani $a^3 - b^3$
 218. $\frac{m-n}{m+n}$ „ $m^3 + n^3$
 219. $\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $21a^2 + 5a - 4$
 219. $\frac{2x-3}{5x+7}$ „ $15x^2 + 11x - 14$

§ 15. Murru taandamine.

Murru taandamine on murru lugeja ja nimetaja jagamine ühe ja sama arvuga.

Murru taandamise definitsioonist järeldub, et murdu saab taandada lugeja ja nimetaja ühiste teguritega. Kõige suurem arv, millega murdu saab taandada, on lugeja ja nimetaja suurim ühistegur.

Murru taandamiseks lahutame lugeja ja nimetaja algtegueriks, leiame lugeja ja nimetaja suurima ühisteguri ning siis jagame sellega murru lugejat ja nimetajat.

Avaldist, millega murdu taandame, nimetatakse *taandamisteguriks* ehk *taandajaks*.

Praktiliselt toimub murru taandamine sel teel, et pärast lugeja ja nimetaja algtegueriks lahutamist kustutatakse lugejas ja nimetajas nende ühised tegurid.

Numbrilisi murde taandatakse tavaliselt järk-järgult, esiteks lugeja ja nimetaja ühe ühisteguriga, siis teise ühisteguriga, jne.

Näide 1. $\frac{300}{420} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$.

Ülesanded.

Taandada järgmised murrud:

220.	$\frac{42}{63}$	221.	$\frac{270}{288}$	222.	$\frac{540}{780}$
220.	$\frac{45}{60}$	221.	$\frac{384}{408}$	222.	$\frac{660}{780}$

Näide 2. $\frac{12a^2x^3b}{20a^2x^4} = \frac{3b}{5x}$.

Ülesanded.

Taandada järgmised murrud:

223. $\frac{6abc}{9ac}$

224. $\frac{4mn^2}{6m^2n}$

225. $\frac{ab}{a^2 + ab}$

223. $\frac{10ax}{15bx}$

224. $\frac{56a^2b^3x^4}{72a^3b^2x}$

225. $\frac{12a}{3a + 6}$

Ülesanne 1. Taandada murd $\frac{3ab + 3b}{6b + 6ab}$.

Lahendus. $\frac{3ab + 3b}{6b + 6ab} = \frac{3b(a + 1)}{6b(1 + a)} = \frac{3b(a + 1)}{6b(a + 1)} = \frac{1}{2}$.

Ülesanded.

Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

226. $\frac{9m + 18}{9m - 27}$

228. $\frac{7h + 14}{7h - 35}$

231. $\frac{3abc - 7abu}{3ac - 7au}$

226. $\frac{ab - ac}{ad + ac}$

229. $\frac{2e - 1}{2e + 3}$

231. $\frac{ns + nt}{sv + tv}$

227. $\frac{a^2 - a}{ab + a}$

229. $\frac{n + n^2}{1 + n}$

232. $\frac{a^2 - az}{ab - bz}$

227. $\frac{2x - 2}{2x + 7}$

230. $\frac{ar + a^2r^2}{a + ar}$

232. $\frac{Q^3 + Q^2}{Q^2 + Q}$

228. $\frac{a - ax}{n - nx}$

230. $\frac{6u^3 - 6u^2}{u - 1}$

233. $\frac{5z^3 - 6z}{15z^2 - 18}$

Rakendades summa jagamise seadust taandada, kus võimalik:

234. $\frac{5n + 20}{5}$

236. $\frac{h^3 + 5h^2}{h^2}$

238. $\frac{14f^2 - 10fg}{7f^2}$

234. $\frac{28a - 35b}{21}$

236. $\frac{4l^2 - 6l}{8l}$

238. $\frac{9ax^2 - 18bz^2}{36ab}$

235. $\frac{ab - 2ac}{ab}$

237. $\frac{7mn - 14mp}{7m^2}$

239. $\frac{12x^2 - 60a^2x^2}{-48ax^2}$

235. $\frac{x^2 + mx}{2mx}$

237. $\frac{3p^2 - 2pq}{6p^2q^2}$

239. $\frac{18a^2b^2c + 72a^2bc^2}{18a^2bc}$

Ülesanne 2. Taandada murd

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamine annab:

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2)+2(x-3) &= x^2+5x+6+2x-6 = \\ &= x^2+7x = x(x+7).\end{aligned}$$

Nimetaja lahutub tegureiks järgmiselt:

$$x^2+14x+49 = (x+7)^2.$$

Seega

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49} = \frac{x(x+7)}{(x+7)^2} = \frac{x}{x+7}.$$

Ülesanded.

Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

240.	$\frac{4x^2-4x+1}{10x-5}$	240.	$\frac{ay^2-2ay+a}{y-1}$
241.	$\frac{z^4-2z^2+1}{z^3-z}$	241.	$\frac{u^3-2u^2+u}{2u-2}$
242.	$\frac{25-10v+v^2}{25a-av^2}$	242.	$\frac{4x^2-1}{4x+2}$
243.	$\frac{9p^2-16q^2}{6p+8q}$	243.	$\frac{4n^2+25}{16n^4-625}$
244.	$\frac{gh^2-gf^2}{kh+kf}$	244.	$\frac{1-Q^4}{Q^2+1}$

Ülesanne 3. Taandada murd $\frac{2ab-2b}{8b-8ab}$.

Lahendus. $\frac{2ab-2b}{8b-8ab} = \frac{2b(a-1)}{8b(1-a)} = \frac{a-1}{4(1-a)}$.

Me teame murru põhiomaduse põhjal, et murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutame arvuga -1 , see tähendab, kui muudame lugeja ja nimetaja liikmete ees olevad märgid vastupidisteks. Kui aga soovime muuta

vastupidisteks ainuüksi kas lugeja või nimetaja liikmete ees olevad märgid, siis sellest muutub ka murru märk vastupidiseks; et murru väärtus ei muutuks, siis sel korral muudame omakorda vastupidiseks ka murru ees oleva märgi. Vastavalt sellele, mis praegu öeldud, saame oma murdu teisendada veel järgmiselt:

$$\frac{a-1}{4(1-a)} = -\frac{1-a}{4(1-a)} = -\frac{1}{4}.$$

Ülesanded.

Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

$$245. \frac{x-a}{a-x}$$

$$246. \frac{5nz-15}{3-nz}$$

$$247. \frac{15a^2-20ab}{21am-28bm}$$

$$248. \frac{1-h^2}{ch^2-c}$$

$$249. \frac{ab-bc}{ad-dc}$$

$$250. \frac{a^2-1}{1+a}$$

$$251. \frac{d^2u^2-9d^2}{du-3d}$$

$$252. \frac{(nz+1)^3}{n^2z^2-1}$$

$$253. \frac{-x}{a-x}$$

$$254. -\frac{6-x}{x^2-36}$$

$$255. \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$256. \frac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$$

$$257. \frac{u^2-v^2}{u^2-2uv+v^2}$$

$$245. \frac{by-b}{1-y}$$

$$246. \frac{x^2+xy}{xy+y^2}$$

$$247. \frac{2a-5b}{15b-6a}$$

$$248. \frac{abd^2-abc}{abc-abd^2}$$

$$249. \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$250. \frac{c^2-16}{4-c}$$

$$251. \frac{w^2-1}{(w+1)^2}$$

$$252. \frac{m^3n-mn^3}{mn^2-m^2n}$$

$$253. \frac{a-b}{b^2-a^2}$$

$$254. \frac{3h-k}{k^2-9h^2}$$

$$255. \frac{9-p^2}{p+3}$$

$$256. -\frac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$$

$$257. \frac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$$

Anda järgmistele murdudele niisugune kuju, et nii lugetas kui nimetajas seisev avaldis algaks positiivse liikmega:

$$\begin{array}{lll}
 258. \frac{a-b}{-a-c} & 259. \frac{x-1}{-1-x} & 260. \frac{-a(b-c)}{-b} \\
 258. \frac{c+x}{-3c+x} & 259. \frac{4P-Q}{-5} & 260. \frac{(1-a)(b-c)}{-m-n}
 \end{array}$$

Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

$$\begin{array}{ll}
 261. \frac{x^2-2x-15}{2x^2-18} & 261. \frac{a^2-13a+42}{14-2a} \\
 262. \frac{x^2-8x+7}{2x^2-4x+2} & 262. \frac{5x^2+10x+5}{ax^2-5ax-6a} \\
 263. \frac{x^2-x-2}{ax-2a} & 263. \frac{c^2-2c-3}{c^3+3c^2+3c+1} \\
 264. \frac{x^2+7x+12}{x^2-4x} & 264. \frac{4n^2-4n-8}{7n^3-42n^2+84n-56} \\
 265. \frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{a^3-a^2b-ab^2+b^3} & 265. \frac{x^2-y^2-(x+y)z}{x^2-y^2+xz+yz}
 \end{array}$$

Leida järgmiste murdude numbriline väärtus, võimaluse korral murde enne taandades:

$$\begin{array}{l}
 266. \frac{z^2-14z+49}{z^3-7z^2-z+7}, \text{ kui } z = -5 \\
 266. \frac{t-t^3}{1+3t+3t^2+t^3}, \text{ kui } t = -7 \\
 267. \frac{2a^3+3a^2-20a-30}{4a^2-9}, \text{ kui } a = 11 \\
 267. \frac{8x^2+16x+32}{x^3-8}, \text{ kui } x = 3
 \end{array}$$

§ 16. Murdude teisendamine ühenimelisteks.

Murdude teisendamisel ühenimelisteks leiame antud murdude nimetajate väikseima ühiskordse, mille võtame antud murdude ühiseks nimetajaks. Siis laiendame antud murrud selle nimetajani.

U l e s a n n e 1. Teisendada murrud $\frac{9}{14}$, $\frac{3}{35}$ ja $\frac{11}{24}$ ühenimelisteks.

L a h e n d u s. Lahutades nimetajad algtegureiks, saame

$$14 = 2 \cdot 7 \quad 35 = 5 \cdot 7 \quad 24 = 2^3 \cdot 3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$$

ning vastavad laiendajad on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 2^3 \cdot 3 \quad 5 \cdot 7$$

ehk

$$60 \quad 24 \quad 35.$$

Järelikult

$$\frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 60}{14 \cdot 60} = \frac{540}{840} \quad \frac{3}{35} = \frac{3 \cdot 24}{35 \cdot 24} = \frac{72}{840}$$

$$\frac{11}{24} = \frac{11 \cdot 35}{24 \cdot 35} = \frac{385}{840}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude ühenimelisteks teisendamisel.

U l e s a n n e 2. Teisendada murrud

$$\frac{7c}{12abx} \quad \frac{13x}{20ab^2} \quad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

L a h e n d u s. Lahutades nimetajad algtegureiks, saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \quad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \quad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3$$

ehk

$$60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$

$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$

$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

Ülesanded.

Teisendada ühenimelisteks järgmised murrud:

268. $\frac{7}{12}$ ja $\frac{13}{18}$

268. $\frac{5}{24}$ ja $\frac{17}{32}$

269. $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{15}$ ja $\frac{13}{24}$

269. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{18}$ ja $\frac{1}{30}$

270. $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{ab}$ ja $\frac{3}{a^2}$

270. $\frac{5n}{6m}$, $\frac{2k}{15n}$ ja $\frac{4m}{9k}$

271. $\frac{2p}{3m^2}$, $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$ ja $\frac{1}{3mn}$

271. $\frac{3c^2}{4b^3d^2}$, $\frac{2a}{6b^2d^3}$ ja $\frac{5x}{b^3d}$

Ülesanne 3. Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} \text{ ja } \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Leiame nimetajate väikseima ühiskordse:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{ühine nimetaja} = (a + b)^2(a - b).$$

Esimese murru laiendaja on

$$(a + b)^2(a - b) : (a^2 + 2ab + b^2) = a - b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a + b)^2(a - b) : (a^2 - b^2) = a + b.$$

Niisiis

$$\frac{a - b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a - b) \cdot (a - b)}{(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a - b)} = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2(a - b)}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a^2 - b^2} &= \frac{2ab \cdot (a + b)}{(a^2 - b^2)(a + b)} = \frac{2ab \cdot (a + b)}{(a + b)(a - b)(a + b)} = \\ &= \frac{2ab(a + b)}{(a + b)^2(a - b)}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teisendada järgmised murrud ühenimelisteks:

272. $\frac{a}{a + b}$ ja $\frac{b}{a - b}$

272. $\frac{m}{m - n}$ ja $\frac{n}{m + n}$

273. $\frac{a + b}{a - b}$ ja $\frac{a - b}{a + b}$

273. $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ ja $\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2}$

274. $\frac{b}{a(a + b)}$, $\frac{a}{b(a - b)}$ ja $\frac{ab}{a^2 - b^2}$

274. $\frac{c + d}{c(c - d)}$, $\frac{c - d}{d(c + d)}$ ja $\frac{cd}{c^2 - d^2}$

§ 17. Murdude liitmine ja lahutamine.

Ühenimeliste murdude liitmisel ja lahutamisel, nagu teame, saame tulemusele lugejaks antud murdude lugejate summa või vahe, aga nimetajaks jääb antud murdude nimetaja. Kui liidetavad on isenimelised murrud, siis tei-

sendame nad ühenimelisteks ja edasi toimime eespool antud juhise järgi. Kui mõni liidetav on täisavaldis, siis arvutamisel kirjutame ta murru kujul nimetajaga 1.

Ulesanne 1. Liita murrud $\frac{12}{35}$, $\frac{29}{42}$, $\frac{61}{70}$.

Lahendus. Teisendame murrud ühenimelisteks. Ühisnimetajaks võtame väikseima võimalikest, see on nimetajate väikseima ühiskordse. Et

$$35 = 5 \cdot 7 \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$

siis on ühisnimetajaks arv

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \text{ ehk } 210$$

ja laiendajaiks arvud

$$2 \cdot 3, \quad 5 \text{ ja } 3 \text{ ehk } 6, \quad 5 \text{ ja } 3.$$

Seega

$$\frac{\overset{6}{12}}{\underset{35}{}} + \frac{\overset{5}{29}}{\underset{42}{}} + \frac{\overset{3}{61}}{\underset{70}{}} = \frac{72 + 145 + 183}{210} = \frac{400}{210} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}.$$

Samal viisil talitame täheliste murdude liitmisel.

Ulesanne 2. Liita murrud

$$\frac{f}{3a^2}, \quad \frac{g}{10ab}, \quad \frac{h}{15b^2}.$$

Lahendus. Ühisnimetajaks on avaldis

$$30a^2b^2$$

ja laiendajaiks vastavalt

$$10b^2, \quad 3ab, \quad 2a^2;$$

seega

$$\frac{\overset{10b^2}{f}}{3a^2} + \frac{\overset{3ab}{g}}{10ab} + \frac{\overset{2a^2}{h}}{15b^2} = \frac{10b^2f + 3abg + 2a^2h}{30a^2b^2}.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

$$275. \frac{7}{160} + \frac{3}{160} + \frac{5}{160}$$

$$275. \frac{5}{182} - \frac{13}{182} + \frac{17}{182}$$

$$276. \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}$$

$$276. \frac{m}{a} + \frac{n}{a} - \frac{r}{a}$$

$$277. \frac{5a}{6} + \frac{a}{6}$$

$$277. \frac{9a^2}{5} - \frac{3a^2}{5} - \frac{a^2}{5}$$

$$278. \frac{3a+2b}{9} + \frac{6a+7b}{9}$$

$$278. \frac{13x-9}{14} + \frac{x+2}{14}$$

$$279. \frac{am}{a+b} + \frac{bm}{a+b}$$

$$279. \frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1}$$

$$280. \frac{1}{24} + \frac{3}{42} + \frac{5}{60}$$

$$280. \frac{5}{64} + \frac{7}{80} - \frac{2}{36}$$

$$281. 1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{9}$$

$$281. \frac{3}{8} + \frac{11}{12} - 1$$

$$282. \frac{a}{10} + \frac{a}{15}$$

$$282. \frac{x}{6} - \frac{x}{9}$$

$$283. \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$$

$$283. \frac{b}{6} - \frac{b}{8} + \frac{b}{12}$$

$$284. \frac{1}{a} + \frac{1}{3a}$$

$$284. \frac{3}{b} - \frac{5}{2b}$$

Ülesanne 3. Kirjutada murru kujul avaldis

$$a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b}.$$

Lahendus.

$$a - b = \frac{a-b}{1} = \frac{b(a-b)}{b} = \frac{ab - b^2}{b};$$

seega

$$\begin{aligned} a - b - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} &= \frac{ab - b^2}{b} - \frac{a^2 - b^2 + ab}{b} = \\ &= \frac{ab - b^2 - a^2 + b^2 - ab}{b} = \frac{-a^2}{b} = -\frac{a^2}{b}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised murdudena:

285. $1 + \frac{d}{1-d}$

285. $\frac{b}{b+x} + 1$

286. $1 + n + \frac{n^2}{1-n}$

286. $x - 3 + \frac{7}{x+3}$

287. $a - b - \frac{a^2 - b^2}{a}$

287. $\frac{5x^3 - 3}{2x^2 + 3x - 8} - x^2 - 2$

Ülesanne 4. Lihtsustada avaldis

$$\frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2 + a - 2}{a^2 - 1}.$$

Lahendus. Teine nimetaja teisendub esimese nimetajaga samakujuliseks, kui teise murru ees oleva märgi ja nimetajas märgid muudame vastupidisteks; kui peale selle kolmanda murru nimetaja lahutame tegureiks ja iga laiendaja kirjutame vastava murru peale, siis saame:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} - \frac{2a}{1-a} - \frac{3a^2 + a - 2}{a^2 - 1} &= \frac{a+1}{a} + \frac{a+1}{a-1} - \frac{1}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{a^2 + a + 2a^2 + 2a - 3a^2 - a + 2}{(a+1)(a-1)} = \\ &= \frac{2a+2}{(a+1)(a-1)} = \frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{a-1}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

$$288. \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1}$$

$$288. \frac{1}{2u-v} - \frac{1}{2u+v}$$

$$289. \frac{4-3a}{a-1} - \frac{4a-5}{1-a}$$

$$289. \frac{7b-8a}{3b-2a} - \frac{b-4a}{2b-3a}$$

$$290. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$$

$$290. \frac{2}{a} + \frac{4a-b}{a^2+ab}$$

$$291. \frac{x}{2x-c} + \frac{c}{2x}$$

$$291. \frac{1}{1-c} - \frac{1}{c+1}$$

$$292. \frac{x-y}{x+3y} - \frac{x+y}{3y}$$

$$292. \frac{7n}{5m^2-m} - \frac{3n}{10m-2}$$

$$293. \frac{m+2n}{m} - \frac{m+2n}{m-2n}$$

$$293. \frac{4}{x-1} + \frac{3}{1-x}$$

$$294. \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$294. \frac{a}{b(x+1)} - \frac{b}{a(1-x)}$$

$$295. \frac{2x-19}{3x-7} - \frac{5x}{6x-8} - \frac{1}{2}$$

$$295. \frac{5z-3}{a-3} - \frac{6z+8}{3(3-a)} - \frac{z}{a} + \frac{a}{z}$$

$$296. \frac{5}{y-1} - \frac{3}{2y+1} + \frac{1}{y+1}$$

$$296. \frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7} + 1$$

$$297. \frac{2u^2}{2u-1} + \frac{3u^2-4}{3u+5} - 2u$$

$$297. \frac{2}{1-a^2} - \frac{2}{a-1}$$

$$298. \frac{2a+3x}{2a-3x} - \frac{2a-3x}{3x-2a}$$

$$298. \frac{4a+x}{4a-x} + \frac{4a-x}{x-4a}$$

$$299. \frac{2}{2a+3} + \frac{3}{3-2a} + \frac{2a+15}{4a^2-9}$$

$$299. \frac{2}{a} + \frac{3}{b-2a} - \frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$$

$$300. \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{2}{(a-1)(3-a)} + \frac{1}{(a-1)(a-2)}$$

$$300. \frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+ac}{(b+c)(b-a)} + \frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$$

$$301. \frac{2}{a+b} + \frac{3}{a-b} + \frac{4a-5b}{a^2-b^2}$$

$$301. \frac{x^2-x-6}{x^2-4} - 2 - \frac{x-1}{2-x}$$

$$302. \frac{a-2b}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \frac{1}{ab+b^2}$$

$$302. \frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$$

$$303. \frac{2}{4+a} - \frac{a-3}{16-4a+a^2} - \frac{a^2-9a}{64+a^3}$$

$$303. \frac{1}{2m-3n} - \frac{2m+3n}{4m^2+6mn+9n^2} - \frac{6mn}{8m^3-27n^3}$$

$$304. \frac{4a+1}{2a-2} - \frac{3a-5}{3a+3} + \frac{a^2+5a-1}{1-a^2}$$

$$304. \frac{a+1}{2a-2} + \frac{a^2+3}{2-2a^2} + \frac{2a-3}{a+1}$$

305. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutine läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse v liitrit vett?

305. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal rohkem ujudes k meetrit vastuvoolu, kui ujudes sama kaugust pärivoolu?

Kui palju aega kulub ujujal ujumiseks k meetrit vastuvoolu ja tagasi lähtekohani?

§ 18. Murdude korrutamine.

Kahe murru korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks antud murdude nimetajate korrutis.

Näide 1.

$$\frac{35}{78} \cdot \frac{13}{140} = \frac{35 \cdot 13}{78 \cdot 140} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude korrutamisel.

Näide 2.

$$\frac{15a^2c^2x}{84mn^2y^3} \cdot \frac{24my^2}{35c^2} = \frac{15 \cdot 24 \cdot a^2c^2mxy^2}{84 \cdot 35 \cdot mn^2c^2y^3} = \frac{3 \cdot 2a^2x}{7 \cdot 7n^2y} = \frac{6a^2x}{49n^2y}.$$

Kui tegurina esineb segaarv, teisendame selle murruks ja arvutame korrutise, nagu ülal seletatud.

Näide 3.

$$1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{15 \cdot 16}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised korrutamised:

306. $3 \cdot \frac{5}{6}$	308. $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{28}{45}$	310. $\frac{113}{355} \cdot 1\frac{2}{113}$
306. $14 \cdot \frac{2}{7}$	308. $\frac{17}{18} \cdot \frac{27}{34} \cdot \frac{9}{16}$	310. $100\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$
307. $3a \cdot \frac{b}{6a}$	309. $\left(-\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2}$	311. $1\frac{1}{3} \cdot 20\frac{1}{4}$
307. $\frac{a}{10b} \cdot 5b$	309. $\left(-\frac{2a}{3b}\right) \cdot \left(-\frac{6c}{4a}\right) \cdot 2b$	311. $1\frac{5}{7} \cdot 11\frac{9}{20}$

Ulesanne 1. Teostada järgmine korrutamine:

$$(4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2 + a}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} (4 - a^2) \cdot \frac{3a}{2 + a} &= \frac{(4 - a^2) \cdot 3a}{2 + a} = \frac{3a(2 + a)(2 - a)}{2 + a} = 3a(2 - a) = \\ &= 6a - 3a^2. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Lihtsustada avaldis

$$\frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u} &= \frac{(x^2 - 4u^2) \cdot (x^2 - u^2)}{(x + u) \cdot (x + 2u)} = \\ &= \frac{(x + 2u)(x - 2u) \cdot (x + u)(x - u)}{(x + u) \cdot (x + 2u)} = (x - 2u)(x - u). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teostada järgmised korrutamised:

$$312. \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{y}{x^2 + xy}$$

$$312. \frac{a^2 + ab}{3bc} \cdot \frac{12c}{a^2 - b^2}$$

$$313. -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a - 4b}\right)$$

$$313. -\frac{10b^2 - 10a^2}{a^2} \cdot \left(-\frac{b^2 + a^2}{5a + 5b}\right)$$

$$314. (2x - 2a) \cdot \frac{c}{x - a}$$

$$314. (x + 1) \cdot \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$315. \frac{m + n}{7m} \cdot \frac{5m}{2m - 2n}$$

$$315. \frac{a}{a - b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{4ab}$$

$$316. (2a - b) \cdot \frac{1}{b - 2a}$$

$$316. \frac{4n + 1}{6 - 10n} \cdot (5n - 3)$$

$$317. \frac{m}{n - 1} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{m + mn}$$

$$317. \frac{4ax - 4x}{a + 1} \cdot \frac{1}{4(a - 1)}$$

$$318. \frac{x + 7u}{x - 7u} \cdot (x^2 - 49u^2)$$

$$318. \frac{x + a}{x - a} \cdot \frac{3a}{x^2 - a^2}$$

$$319. \frac{x^2 - u^2}{2a + 2b} \cdot \frac{a + b}{3x + 3u}$$

$$319. \frac{9 - z^2}{3z} \cdot \frac{z}{3 + z}$$

$$320. \frac{x^2 - 1}{4} \cdot \frac{12}{x - 1}$$

$$320. \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{5x}{x^2 - 1}$$

$$321. \frac{u^2 - 4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u - 4v}$$

$$321. \frac{s^2 - 3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2 - 9}$$

$$322. \frac{2}{3(z + 2)} \cdot \frac{z^2 - 4}{8}$$

$$322. \frac{az - a^2}{2z} \cdot \frac{6z}{5a(z + 1)}$$

$$323. \frac{4r^2 + 8r}{3r + 9} \cdot \frac{15r + 45}{14r^2 + 28r}$$

$$323. \frac{5p(p - q)}{3r(p + q)} \cdot \frac{3(p^2 + q^2)}{5(p^2 - q^2)}$$

$$324. \frac{3a + 3}{a^2 + 6a + 9} \cdot \frac{6a + 18}{a^2 - 1}$$

$$324. \frac{x^2 + 4x + 4}{16b} \cdot \frac{24a}{x^2 + 5x + 6}$$

$$325. \frac{5c^2 - 10bc}{x^2 - 5x - 6} \cdot \frac{x^2 - 6x}{15c^2 - 60bc + 60b^2}$$

$$325. \frac{(a + b)(m - n)}{a^2 - 9a + 20} \cdot \frac{a^2 - 3a - 4}{m^2 - n^2}$$

$$326. \frac{3u - 15}{2u + 8} \cdot \frac{u^2 + 9u + 8}{u^2 + 3u - 40}$$

$$326. \frac{a}{a - b} \cdot \left(-\frac{b - a}{c}\right)$$

$$327. \frac{ab + ac}{cd - bd} \cdot \frac{ab - ac}{bd + cd}$$

$$327. \frac{ad - ab}{bc + cd} \cdot \frac{ab + ad}{bc - cd}$$

$$328. \frac{a^2 + 4a + 4}{3a + 6} \cdot \frac{6a - 12}{a^2 - 4}$$

$$328. \frac{9 - 6b + b^2}{3 + b} \cdot \frac{9 + 6b + b^2}{36 - 4b^2}$$

$$329. \frac{7a^2 + 28a + 28}{21a^2 - 189} \cdot \frac{3a^2 - 18a + 27}{a^2 - 4}$$

$$329. \frac{3a^2 - 3}{2a^2 + 8a + 8} \cdot \frac{a^2 - 4}{6a^2 - 12a + 6}$$

§ 19. Murdude jagamine.

Murru ja täisarvu jagatis on murd, mille lugejaks on antud murru lugeja, aga nimetajaks antud murru nimetaja ja täisarvu korrutis.

Selleks, et jagada arvu murruga, korrutame selle arvu sama murru pöördarvuga.

Näiteid.

1. $\frac{27}{56} : 9 = \frac{27}{56 \cdot 9} = \frac{3}{56}$.
2. $14 : \frac{28}{15} = \frac{14 \cdot 15}{28} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.
3. $\frac{22 \cdot 55}{39 \cdot 104} = \frac{22 \cdot 104}{39 \cdot 55} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$.
4. $\frac{a^2bx^3}{2nz} \cdot \frac{ax^2}{3bz^2} = \frac{a^2bx^3 \cdot 3bz^2}{2nz \cdot ax^2} = \frac{3ab^2xz}{2n}$.

Ülesanded.

Teostada järgmised jagamised:

- | | |
|---|---|
| 330. $\frac{39}{67} \cdot \frac{52}{134}$ | 330. $\frac{22}{35} : \frac{33}{70}$ |
| 331. $26 : \frac{13}{15}$ | 331. $7 : \frac{14}{15}$ |
| 332. $\frac{15}{16} : 5$ | 332. $-\frac{5}{8} : 15$ |
| 333. $12\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$ | 333. $13\frac{1}{3} : 4\frac{4}{9}$ |
| 334. $\frac{a^2}{b^2} : \frac{5}{a}$ | 334. $-\frac{2x}{3y} : \left(-\frac{2y}{3x}\right)$ |
| 335. $\frac{6a^2}{25b^2} \cdot \frac{3a}{5b}$ | 335. $\frac{8m^2n}{15k} : \frac{2mn^2}{3k}$ |
| 336. $a^2b : \frac{ab^2}{n}$ | 336. $-m^2 : \left(-\frac{2a^2}{m}\right)$ |
| 337. $\frac{4ax}{b} : 8ax^2$ | 337. $\frac{8c^2n}{3a} : 4ac$ |

Ülesanne 1. Teostada jagamine:

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4).$$

Lahendus. Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \frac{3a+2}{2(9a^2-4)} = \frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} = \frac{1}{2(3a-2)}.$$

Ülesanne 2. Teostada jagamine:

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördarvuga, saame:

$$\begin{aligned} (a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} &= \frac{6 \cdot (a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} = \\ &= \frac{3(a+x)}{1} = 3(a+x). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teostada järgmised jagamised:

$$338. \frac{a+b}{c} : (a+b)$$

$$338. \frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$$

$$339. \frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$$

$$339. \frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$$

$$340. \frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$$

$$340. \frac{4a^2+4a+1}{a-1} : (4a^2-1)$$

$$341. c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$$

$$341. (2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$$

$$342. (x+2y) : \left(-\frac{x+2y}{4n}\right)$$

$$342. (a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$$

$$343. (14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$$

$$343. (a^3-n^3) : \frac{a^2+an+n^2}{a-n}$$

Ülesanne 3. Teostada jagamine:

$$\frac{a^2-a-6}{x} : \frac{a+2}{x^2-x}.$$

Lahendus. Esimese murru lugeja tegureiks lahutamisel saame:

$$\begin{aligned} a^2-a-6 &= a^2-3a+2a-6 = (a^2-3a) + (2a-6) = \\ &= a(a-3) + 2(a-3) = (a-3)(a+2). \end{aligned}$$

Teise nimetaja saab tegureiks lahutada järgmiselt:

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöörd-arvuga ning taandades, saame:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - a - 6}{x} \cdot \frac{a + 2}{x^2 - x} &= \frac{(a - 3)(a + 2) \cdot x(x - 1)}{x(a + 2)} = \\ &= \frac{(a - 3)(x - 1)}{1} = (a - 3)(x - 1). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teostada järgmised jagamised:

$$344. \quad \frac{x^2 - ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$$

$$344. \quad \frac{2x - 4}{5a} : \frac{x - 2}{15a^2}$$

$$345. \quad \frac{a^2 - x^2}{ax} : \frac{a + x}{a^2 x^2}$$

$$345. \quad \frac{(m + n)^2}{4m - 4n} : \frac{6m + 6n}{m - n}$$

$$346. \quad \frac{p^2 + pq}{rx + sx} : \frac{p^3 + p^2q}{rx^3 + sx^3}$$

$$346. \quad \frac{a + b}{a - b} : \frac{b + a}{b - a}$$

$$347. \quad \frac{105f^2}{gh - 1} : \frac{84fg}{1 - gh}$$

$$347. \quad \left(\frac{Q}{2} - \frac{2}{Q}\right) : \frac{Q + 2}{4Q}$$

$$348. \quad \frac{m^2 - m - 12}{a^2} : \frac{m - 4}{a^2 - a}$$

$$348. \quad \frac{u^2 - 19u + 90}{u^2 - 1} : \frac{u - 10}{u + 1}$$

$$349. \quad \left(R^2 - 2 + \frac{1}{R^2}\right) : 3\left(R - \frac{1}{R}\right)$$

$$349. \quad -\frac{2a}{x - 2} : \frac{4}{2 - x}$$

§ 20. Murru astendamine.

Murru astendamisel mingi positiivse täisarvuga astendame selle arvuga murru lugeja ja nimetaja ning esimese tulemuse jagame teisega, sest astme definitsioonist ja murdude korrutamise juhisest järeldub, et

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^4}{b^4}.$$

Kui astendatav murd on taandumatu, siis on ka selle murru aste taandumatu murd.

Põhjendus. Kui antud murd on taandumatu, siis tähendab see seda, et tema lugejal ja nimetajal ei ole ühiseid tegureid; sellest järeldub, et selle murru astme lugeja ja nimetaja on samuti ühistegurita arvud, sest astme lugejaks on korrutis, milles iga tegur on võrdne antud murru lugejaga, astme nimetaja iga tegur on aga võrdne antud murru nimetajaga.

Sellest, et taandumatu murru aste on taandumatu murd, järeldame omakorda, et ühegi lihtmurru ega ühegi taandumatu liigmurru aste ei saa olla täisarv.

Näiteid.

$$1. \left(\frac{2^1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}.$$

$$2. \left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^4 = \frac{(2a^2)^4}{(3b^3)^4} = \frac{16a^8}{81b^{12}}.$$

$$3. \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{ab^2} + \frac{b^4}{ab^2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^4}{ab^2}\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2b^4 + b^8}{a^2b^4}.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised astendamised:

$$350. \left(1\frac{1}{2}\right)^4$$

$$350. \left(3\frac{1}{8}\right)^3$$

$$351. \left(1\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$351. \left(\frac{3}{4}y\right)^3$$

$$352. \left(-\frac{a^3}{b^2}\right)^4$$

$$352. \left(-2\frac{3}{4}a^2\right)^3$$

$$353. \left(\frac{a^5}{b^7}\right)^6$$

$$353. \left(\frac{2a^4}{3b^3}\right)^2$$

$$354. \left(\frac{5a^3}{6b^2}\right)^4$$

$$354. \left(-\frac{a^7b}{c^2d^3}\right)^3$$

$$355. \left(\frac{mx^2}{ny^3}\right)^2$$

$$355. \left(-\frac{ab^3}{2n}\right)^2$$

356. $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^2$

356. $\left(\frac{m^3}{n^3} - \frac{n^3}{m^3}\right)^2$

357. $\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^2$

357. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

358. $\left(\frac{3a+b}{a-b}\right)^2$

358. $\left(\frac{m-2n}{3m+n}\right)^3$

§ 21. Mitmesuguseid tehteid murdavaldistega.

Ülesanne 1. Lihtsustada avaldis

$$\left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2 - 4).$$

Lahendus. Sulgudes olevate murdude ühiseks nimetajaks on $(a-2)(a+2)$. Vastavad laiendajad on $a+2$ ja $a-2$. Niisiis

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2 - 4) &= \frac{(a+2)(a+2) + (a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} \cdot (a^2 - 4) = \\ &= \frac{(a^2 + 4a + 4 + a^2 - 4a + 4)(a^2 - 4)}{a^2 - 4} = 2a^2 + 8. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

359. $\left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$

359. $\left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

360. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$

360. $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

361. $\left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}\right) \cdot (a^2 - 1)$

361. $\left(\frac{a-3}{a+3} + \frac{a+3}{a-3}\right) \cdot (a^2 - 9)$

Ülesanne 2. Lihtsustada avaldis

$$\frac{2 + \frac{2}{a-2}}{2 - \frac{2}{a+2}}$$

Lahendus.

$$\begin{aligned}
 \frac{2 + \frac{2}{a-2}}{2 - \frac{2}{a+2}} &= \left(2 + \frac{2}{a-2}\right) : \left(2 - \frac{2}{a+2}\right) = \frac{2(a-2) + 2}{a-2} : \frac{2(a+2) - 2}{a+2} = \\
 &= \frac{2a-4+2}{a-2} : \frac{2a+4-2}{a+2} = \frac{2a-2}{a-2} : \frac{2a+2}{a+2} = \frac{(2a-2)(a+2)}{(a-2)(2a+2)} = \\
 &= \frac{2(a-1)(a+2)}{(a-2) \cdot 2(a+1)} = \frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+1)} = \frac{a^2+a-2}{a^2-a-2}
 \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$362. \frac{x + \frac{x}{2}}{x - \frac{x}{2}}$$

$$362. \frac{a + \frac{1}{3}}{a - \frac{1}{2}}$$

$$363. \frac{1 - \frac{p}{q}}{\frac{q-p}{r}}$$

$$363. \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$364. \frac{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}$$

$$364. \frac{1 - \frac{b}{a}}{a + b}$$

$$365. \frac{1 + \frac{c}{1}}{1 + \frac{1}{c}}$$

$$365. \frac{a + \frac{5}{6}b}{a - \frac{4}{9}b} - 1$$

$$366. \frac{1 + \frac{1}{m-1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

$$366. \frac{\frac{5m}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$$

$$367. \frac{x + \frac{1}{2}y}{x - \frac{1}{3}y} - 1$$

$$367. \frac{\frac{t}{r}}{q - \frac{t}{r}}$$

$$368. \frac{1 - \frac{a}{z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$368. \frac{a^2 - 4b^2}{a - 2b}$$

$$369. \frac{1}{c^3 - c} + c$$

$$369. \frac{1}{v} - \frac{\frac{u}{v} + 1 - u}{u + v}$$

Ülesanne 3. Lihtsustada avaldis

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right].$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1 \right] = \\ &= \frac{(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{(a-b)^2 + ab}{ab} = \\ &= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{a^2 - 2ab + b^2 + ab}{ab} = \\ &= \frac{a^3 + b^3}{3ab} : \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} = \frac{(a^3 + b^3)ab}{3ab(a^2 - ab + b^2)} = \\ &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{3(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a+b}{3}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$370. \left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a + 1} \right) \cdot \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}a \right)^2 \right]$$

$$370. \left[\frac{a^2 + ax}{2x} : (a^2 - x^2) \right] \cdot \left[\frac{(a+x)^2}{4ax} - 1 \right]$$

$$371. \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right)$$

$$371. \left[\frac{a-x}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x} \right) \right] : \left[\frac{a^2 + x^2}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$372. \left(a - 2 + \frac{1}{a}\right) : \left(a^2 - a - 1 + \frac{1}{a}\right)$$

$$372. \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2} + \frac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}$$

$$373. \frac{a(a - b) - b(a + b)}{\frac{a}{a + b} - \frac{b}{a - b}}$$

$$373. \left[\frac{(a - x)^2}{ax} + 1\right] : \left[\frac{(a + x)^3}{3ax} - a - x\right]$$

$$374. \left(\frac{x^4 - x - 3x^3 + 3x^2}{x^3y - y^4} \cdot \frac{x^4 + x^2 - 2x^3}{x^2y^2 + xy^3 + y^4}\right) \cdot \left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^3y + xy^3 + 2x^2y^2}{x^4 - y^4}\right)$$

$$374. \left(\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{b - 1}{a} - \frac{b}{a^2}\right)$$

$$375. \left[\frac{1}{(b - a)^3} : \frac{1}{(a - b)^2} - \frac{1}{a + b}\right] : \frac{2a^2}{a^2 - b^2} + 1 : (a^2 + a)$$

$$375. \left(\frac{1}{b^2 - b} : \frac{a^2}{b - b^3} + \frac{1}{a + b}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1 + b}\right)$$

Ulesanne 4. Avaldada y ainult a ja b kaudu teades, et

$$y = \frac{2 - \frac{a}{x}}{\frac{b}{x} - 2}, \text{ kusjuures } x = \frac{a + b}{2ab}.$$

Lahendus. Antud y avaldist saab lihtsustada, korrutades murru lugeja ja nimetaja arvuga x:

$$y = \frac{2x - a}{b - 2x}.$$

Nüüd asendame x avaldisega $\frac{a + b}{2ab}$:

$$y = \frac{2x - a}{b - 2x} = \frac{2 \cdot \frac{a + b}{2ab} - a}{b - 2 \cdot \frac{a + b}{2ab}} = \frac{\frac{a + b}{ab} - a}{b - \frac{a + b}{ab}} = \frac{a + b - a \cdot ab}{b \cdot ab - (a + b)} = \frac{a + b - a^2b}{ab^2 - a - b}$$

Ülesanded.

Avaldada y ainult a ja b kaudu:

$$376. \quad y = \frac{x+a}{b} - \frac{x+b}{a}, \quad \text{kui } x = \frac{b^2}{a-b}$$

$$376. \quad y = \frac{x-a}{x-b} - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}, \quad \text{,, } x = \frac{a+b}{2}$$

$$377. \quad y = \frac{\frac{a}{x} - 1}{1 - \frac{b}{x}}, \quad \text{,, } x = \frac{2ab}{a+b}$$

$$377. \quad y = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}, \quad \text{,, } x = \frac{2ab}{a+b}$$

Ülesanne 5. Avaldada x võrdest

$$\frac{x}{a^2-1} = \frac{1}{a^2+2a+1}.$$

Lahendus. Et võrde välisliige võrdub siseliikmete korrutise ja teise välisliikme jagatisega, siis

$$x = \frac{1 \cdot (a^2-1)}{a^2+2a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Ülesanded.

Avaldada x antud võrdest:

$$378. \quad \frac{x}{a^2-b^2} = \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$$

$$378. \quad \frac{a+b}{x} = \frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$$

$$379. \quad \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{x}{a^3+b^3}$$

$$379. \quad \frac{a^2-a+1}{a+1} = \frac{a^3+1}{x}$$

Ülesanne 6. Avaldada valemist $S = \pi r m$ suurus m .

Lahendus. Vahetades valemi pooled ja jagades siis saadud võrduse kummagi poole avaldisega πr , saame

$$m = \frac{S}{\pi r}.$$

Ülesanded.

Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis on sulgudes märgitud:

$$380. S = ab \quad [b]$$

$$380. C = 2\pi r \quad [r]$$

$$381. S = 2\pi rh \quad [r]$$

$$381. V = \pi r^2 h \quad [h]$$

$$382. S = \frac{1}{2}ah \quad [h]$$

$$382. V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad [h]$$

Ülesanne 7. Avaldada valemist

$$A = 2(bh + hl + lb) \text{ suurus } l.$$

Lahendus. Vahetame võrduse pooled ja jagame kummagi poole arvuga 2, siis saame:

$$bh + hl + lb = \frac{A}{2}.$$

Viime nüüd liikme bh , mis suurust l ei sisalda, paremale poolele:

$$hl + lb = \frac{A}{2} - bh.$$

Toome l sulgude ette:

$$l(h + b) = \frac{A}{2} - bh.$$

Viimase võrduse pooled jagame avaldisega $h + b$:

$$l = \frac{\frac{A}{2} - bh}{h + b}, \text{ siit } l = \frac{A - 2bh}{2h + 2b}.$$

Ülesanded.

Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis on sügudes märgitud:

$$383. \quad H = \pi - \frac{h}{n} \quad [n] \qquad 383. \quad U = \frac{p}{q} - v \quad [q]$$

$$384. \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad [a] \qquad 384. \quad l = \frac{S}{\pi r} - r \quad [S]$$

$$385. \quad J = \frac{nE}{R + nr} \quad [n] \qquad 385. \quad M = \frac{a}{b + N} \quad [N]$$

$$386. \quad H = K(1 - z) \quad [z] \qquad 386. \quad S = 2\pi r(r + h) \quad [h]$$

$$387. \quad \frac{1}{f} + \frac{1}{a} = \frac{2}{k} \quad [f] \qquad 387. \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \quad [w]$$

§ 22. Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandid.

Ulesanne 1. Lahendada võrrand:

$$\frac{7x + 18}{3} - \frac{2}{5}(x + 3) = \frac{3(x + 2)}{2} + 2\frac{2}{3}.$$

Lahendus. Ühine nimetaja on 30.

$$\frac{10}{3} \overbrace{7x + 18} - \frac{6}{5} \overbrace{2(x + 3)} = \frac{15}{2} \overbrace{3(x + 2)} + \frac{10}{3} \overbrace{8}$$

$$10(7x + 18) - 6 \cdot 2(x + 3) = 15 \cdot 3(x + 2) + 10 \cdot 8$$

$$70x + 180 - 12x - 36 = 45x + 90 + 80$$

$$58x + 144 = 45x + 170$$

$$58x - 45x = 170 - 144$$

$$13x = 26$$

$$x = 2.$$

Leitud lahendi kontrollimiseks arvutame algvõrrandi vasaku poole väärtuse asetades otsitava asemele leitud arvu, samuti toimime võrrandi parema poolega ja võrdleme tulemusi: kui tulemused on võrdsed, siis leitud lahend on õige.

Kontroll.

$$\frac{7 \cdot 2 + 18}{3} - \frac{2}{5}(2 + 3) = \frac{14 + 18}{3} - 2 = \frac{32}{3} - 2 = 8\frac{2}{3};$$

$$\frac{3(2 + 2)}{2} + 2\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4}{2} + 2\frac{2}{3} = 6 + 2\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Kokkuvõtte:

Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel toimime järgmiselt:

1. korrutame kõik võrrandi liikmed võrrandis esinevate murdude ühise nimetajaga;

2. avame sulud, kui on sulgavaldisi, ja koondame, kui on sarnaseid liikmeid;

3. toome kõik otsitavaga liikmed võrrandi ühele poolele, kõik otsitavast vabad liikmed teisele poolele ja koondame;

4. kui otsitava kordaja nüüd ei ole 1, siis jagame võrrandi mõlemad pooled selle kordajaga.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

388. $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$

388. $2\frac{1}{2} + \frac{5x}{3} = 0$

389. $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 23$

389. $\frac{x}{6} + \frac{x}{7} = \frac{x}{8}$

390. $\frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 19$

390. $\frac{2x}{3} - \frac{4x}{9} = 31 - \frac{3}{2}x$

391. $2 = \frac{2x}{5} - \frac{x}{5}$

391. $\frac{x}{2} - 1\frac{1}{2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

392. $2x + \frac{3}{4} = 3x + \frac{7}{8}$

392. $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3} = x - 2$

393. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x - 1$
393. $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} - \frac{4x}{5} = 6\frac{1}{2}$
394. $1 - \frac{x}{2} = \frac{3}{4}(x + 3)$
394. $\frac{2}{3}\left(\frac{3x}{4} + \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{18}$
395. $5 + \frac{3}{5}(3x - 5) = -\frac{2}{3}(2x - 3)$
395. $x + \frac{x+2}{3} = 5 + \frac{x+3}{2}$
396. $\frac{1-x}{2} + \frac{1-2x}{3} = \frac{1-3x}{4}$
396. $\frac{2x+1}{4} + \frac{4x}{5} = x + 2\frac{1}{2}$
397. $\frac{x-2}{2} - \frac{x-4}{4} = \frac{x-8}{8}$
397. $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{6}\right)(x + 3)$
398. $2 + \frac{x-1}{2} = 10 - \frac{3x-1}{5}$
398. $(x+4)(x-4) = (x-2)^2$
399. $(1+x)^3 = x(3x+x^2) + 10$
399. $\frac{3x-1}{4} + \frac{4x-3}{6} + \frac{5x-7}{28} + 1 = 0$
400. $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3} - 1$
400. $1 + \frac{x}{2} = 3 - \left(1 - \frac{x}{3}\right)$
401. $\frac{x}{3} - \frac{1}{6} = \frac{x}{5} - \frac{1}{4}$
401. $4 + \frac{x-4}{5} = 5 + \frac{x-5}{4}$

402. $\frac{x-3}{6} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$
402. $\frac{3}{4}(2-3x) = \frac{2}{5}(1-7x)$
403. $\frac{5}{2}(3x-1) = 3(2x-1)$
403. $\frac{1}{6}(x-0,3) = \frac{1}{9}(2x+0,1)$
404. $4 - \frac{1}{4}(1-x) = \frac{3}{8}(5-x)$
404. $\frac{2}{3}(2x+1) = \frac{3}{4}(2x-1) + 1\frac{1}{2}$
405. $2(4x+3) - \frac{3}{4}(8x+1) = 4$
405. $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{2}{3}(x+2) = \frac{3}{4}(x+3)$
406. $\frac{3}{2}(x-1) = \frac{1}{4}(5x-3)$
406. $\frac{1}{5}(3x-4) = \frac{1}{7}(5x-6)$
407. $\frac{2x-3}{5} = \frac{x}{4}$
407. $\frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{2}$
408. $\frac{3x+2}{4} = \frac{5x-2}{6} + 1$
408. $\frac{2x+3}{2} - 3 = \frac{4x-5}{3}$
409. $\frac{x}{3} - \frac{x-7}{4} = \frac{x}{5}$
409. $\frac{3x}{4} - \frac{x-4}{5} = 1\frac{4}{5} - \frac{x+6}{6}$
410. $\frac{3x-2}{4} = \frac{5x}{21} - \frac{9(8-3x)}{35}$
410. $\frac{x}{5} + \frac{5(3x-1)}{6} = \frac{40x-11}{15}$

$$411. \quad \frac{10x-1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{8(x+4)}{9} = 0$$

$$411. \quad \frac{5x-1}{3} - \frac{x}{3} = \frac{4(x+8)}{9}$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{2x+7}{9} - \frac{11y-8}{4} = 5 \\ \frac{5x-2}{6} + \frac{5y-8}{4} = 6. \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimese võrrandi. Ühine nimetaja on siin 36; korrutame sellega kõiki liikmeid. Siinjuures peame silmas, et murrukriips asendab sulgusid, seega siis

murrukriipsu ärajätmisel, mille ees seisab märk miinus, tuleb murru lugejas esinevad märgid muuta vastupidisteks.

Saame:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{4}{2x+7}}{9} - \frac{\overset{9}{11y-8}}{4} &= \overset{36}{5} \\ 8x + 28 - 99y + 72 &= 180 \\ 8x - 99y + 100 &= 180 \\ 8x - 99y &= 80. \end{aligned}$$

Teisendame nüüd teise võrrandi. Korrutades siin iga liiget ühise nimetajaga 12, saame:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{2}{5x-2}}{6} + \frac{\overset{3}{5y-8}}{4} &= \overset{12}{6} \\ 10x - 4 + 15y - 24 &= 72 \\ 10x + 15y - 28 &= 72 \\ 10x + 15y &= 100 \\ 2x + 3y &= 20. \end{aligned}$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 8x - 99y = 80 \\ 2x + 3y = 20. \end{cases}$$

Kasutame liitmisvõtet.

$$\begin{array}{r|l|l} 8x - 99y = 80 & 1 & 8x - 99y = 80 \\ 2x + 3y = 20 & 33 & 66x + 99y = 660 \\ \hline & & 74x = 740 \\ & & x = 10 \end{array}$$

Otsitava y leiame nüüd teisest võrrandist:

$$2 \cdot 10 + 3y = 20 \quad \text{ehk} \quad 3y = 0,$$

seega $y = 0$.

Saime lahendi:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 0. \end{cases}$$

Kontroll. Esimese võrrandi vasak pool annab:

$$\frac{2 \cdot 10 + 7}{9} - \frac{11 \cdot 0 - 8}{4} = \frac{27}{9} + \frac{8}{4} = 3 + 2 = 5.$$

Teise võrrandi vasaku poole väärtus on:

$$\frac{5 \cdot 10 - 2}{6} + \frac{5 \cdot 0 - 8}{4} = \frac{48}{6} - \frac{8}{4} = 8 - 2 = 6.$$

Näeme, et lahend on õige.

Ülesanne 3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{6x-2}{3} - \frac{4y+1}{2} = -3\frac{1}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + \frac{3y+1}{5} = 2\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimese võrrandi:

$$\frac{\overset{2}{6x-2}}{3} - \frac{\overset{3}{4y+1}}{2} = -\frac{\overset{1}{19}}{6}$$

$$12x - 4 - 12y - 3 = -19$$

$$12x - 12y - 7 = -19$$

$$12x - 12y = -12$$

$$x - y = -1.$$

Lihtsustame teise võrrandi:

$$\frac{\overset{5}{2x-1}}{4} + \frac{\overset{4}{3y+1}}{5} = \frac{\overset{5}{11}}{4}$$

$$10x - 5 + 12y + 4 = 55$$

$$10x + 12y - 1 = 55$$

$$10x + 12y = 56$$

$$5x + 6y = 28.$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 5x + 6y = 28 \end{cases}$$

kasutades asendusvõtet.

Esimesest võrrandist leiame:

$$x = y - 1.$$

Teeme asenduse teises võrrandis:

$$5(y - 1) + 6y = 28$$

$$5y - 5 + 6y = 28$$

$$11y = 33$$

$$y = 3.$$

$$x = y - 1 = 3 - 1 = 2.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Kontroll.

$$\frac{6 \cdot 2 - 2}{3} - \frac{4 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{10}{3} - \frac{13}{2} = \frac{20 - 39}{6} = -\frac{19}{6} = -3\frac{1}{6}$$

$$\frac{2 \cdot 2 - 1}{4} + \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{10}{5} = \frac{3}{4} + 2 = 2\frac{3}{4}$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$412. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$412. \begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{3} = 1\frac{1}{2} \\ y - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$413. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 3\frac{3}{4} \\ \frac{x}{3} + y = 10\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$413. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$414. \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 14\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}x = 5\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$414. \begin{cases} \frac{3x - y}{2} + x = y \\ \frac{x + 3y}{3} - y = 1 \end{cases}$$

$$415. \begin{cases} \frac{x + 7}{2} + y = 9 \\ \frac{y + 15}{3} + x = 11 \end{cases}$$

$$415. \begin{cases} \frac{1 - 2x}{3} + 4y = 13 \\ x + \frac{5 + 8y}{5} = 1 \end{cases}$$

$$416. \begin{cases} \frac{h + 5}{8} - \frac{k + 4}{11} = 0 \\ 3(h - 1) + 2(k + 4) = 28 \end{cases}$$

$$416. \begin{cases} \frac{3m + 5}{7} = \frac{2m + n}{5} \\ 2(2 - m) + 3(n + 7) = 20 \end{cases}$$

$$417. \begin{cases} \frac{2p-3q}{4} = \frac{5p-8q}{4} \\ 3(p-q) - 2(2p-3q) = 1 \end{cases}$$

$$417. \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{5y}{6} = 3 \\ 3(x-1) + y + 3 = 7 \end{cases}$$

$$418. \begin{cases} \frac{3x+y-8}{4} = 4 \\ \frac{5x-3y-5}{3} = 7 \end{cases}$$

$$418. \begin{cases} \frac{7x+3y-2}{51} = 2 \\ \frac{9x-5y+6}{20} = 3 \end{cases}$$

$$419. \begin{cases} \frac{4x-1}{3} + \frac{5y+1}{4} = 5\frac{1}{6} \\ \frac{3x+7}{4} + \frac{2y+9}{3} = 7\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$419. \begin{cases} \frac{2x+5}{5} + \frac{3y+1}{7} = 5\frac{1}{7} \\ \frac{3x-2}{7} + \frac{2y-3}{5} = 3\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$420. \begin{cases} \frac{2x+3y-1}{5} + \frac{3x-y+8}{4} = 4 \\ \frac{5x-y+1}{3} + \frac{x+2y+3}{5} = 3 \end{cases}$$

$$420. \begin{cases} \frac{7x-y+2}{2} - \frac{3x+9y-1}{5} = 7 \\ \frac{9x+2y+3}{3} + \frac{5x-y+14}{8} = 10 \end{cases}$$

§ 23. Murdvõrrand.

Võrrandit, milles otsitav esineb murru nimetajas, nimetatakse **murdvõrrandiks**.

Mõned murdvõrrandid taanduvad teisendamisel lineaarseiks võrrandeiks, kuid nende lahendamisel võib mõnikord esineda iseärasusi. Üks iseärasus on see, et mõne niisuguse võrrandi teisendamisel jõuame võrrandini, millel ei ole lahendit. Niisugusel juhul ei saa ka esialgsel võrrandil olla lahendit.

Ka võib juhtuda, et võrrandi teisendamisel jõuame niisuguse võrrandini, millel küll on lahend, kuid kontrollimisel selgub, et see lahend ei rahulda esialgset võrrandit; siis jällegi esialgsel võrrandil lahendit ei ole.

Nende iseärasuste tõttu, mis murdvõrrandi lahendamisel esineda võivad, peab selliste võrrandite lahendeid tingimata kontrollima.

Ulesanne 1. Lahendada võrrand

$$\frac{x+1}{3x-7} = \frac{3x-8}{3(3x+4)}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab:

$$3(3x+4)(x+1) = (3x-7)(3x-8),$$

millest peale sulgude avamist saame

$$9x^2 + 21x + 12 = 9x^2 - 45x + 56$$

ehk koondades

$$66x = 44,$$

seega

$$x = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}.$$

Kontroll. Asetades leitud väärtuse x -i asemele lähtevõrrandisse, saame võrrandi vasakul poolel

$$\frac{\frac{2}{3} + 1}{3 \cdot \frac{2}{3} - 7} = \frac{\frac{5}{3}}{-5} = -\frac{1}{3}$$

ja võrrandi paremal poolel

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 8}{3 \left(3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \right)} = \frac{2 - 8}{3(2 + 4)} = \frac{-6}{3 \cdot 6} = -\frac{1}{3},$$

seega leitud x -i väärtus tõesti rahuldab võrrandit.

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$\frac{4x + 5}{7x - 8} = \frac{4}{7}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab

$$7(4x + 5) = 4(7x - 8);$$

sulgusid avades saame

$$28x + 35 = 28x - 32.$$

Lahutades võrduse kummastki poolest $28x$ näeme, et arv 35 peaks olema võrdne arvuga -32 , mis on võimatu. Selles võrrandis peituv nõue pole rahuldav, võrrandil pole lahendit.

Järelikult ka esialgsel võrrandil pole lahendit; niisiis ei saa olla niisugust arvu x , et murru $\frac{4x + 5}{7x - 8}$ väärtus tuleks $\frac{4}{7}$.

Ülesanne 3. Lahendada võrrand

$$\frac{4}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Lahendus. Uhine nimetaja on $x^2 - 1$, vastavad laiendajad on $x - 1$ ja $x + 1$.

Niisiis

$$\frac{\frac{x-1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{x+1}{1}}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2-1}$$

$$4x - 4 + x + 1 = 2$$

$$5x - 3 = 2$$

$$5x = 5$$

$$x = 1.$$

Kontroll. Asetades leitud x -i väärtuse algvõrrandi vasakusse poolde, saame:

$$\frac{4}{2} + \frac{1}{0}.$$

Et nulliga ei saa jagada, siis puudub saadud avaldisel arvu tähendus; järelikult ta ei saa millegagi võrduda, mistõttu on täiesti ükskõik, kui suur tuleb võrrandi parema poole väärtus, kui $x = 1$. On selge, et arv 1 ei rahulda algvõrrandit. Sel võrrandil ei ole lahendit.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

421. $\frac{x+7}{12} = \frac{3}{4}$

421. $\frac{x-5}{16} = \frac{3}{8}$

422. $\frac{2y-9}{y+1} = \frac{5}{8}$

422. $\frac{5u+3}{7u-9} = \frac{8}{9}$

423. $\frac{8x+5}{2x-1} = 5$

423. $\frac{7x+8}{2} = \frac{14x+5}{3}$

424. $\frac{4x-2}{6} = \frac{5x+8}{4}$

424. $\frac{16x-7}{15} = \frac{13x-7}{12}$

425. $\frac{10x-6}{9} = \frac{7x-27}{12}$

425. $\frac{5x+8}{4} = \frac{11x-2}{6}$

$$426. \frac{4x-7}{6x+18} = \frac{7x+2}{10x+30} - \frac{11}{45}$$

$$426. \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{5x+2}{x^2-4}$$

$$427. \frac{2}{x+2} + \frac{5}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$427. \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1} = \frac{2}{1-4x^2}$$

$$428. \frac{59}{5x-3} - \frac{23}{x+3} = 0$$

$$428. \frac{41}{x-7} - \frac{92}{3x-4} = 0$$

$$429. \frac{1}{x} + \frac{2x+5}{x+6} = 2$$

$$429. \frac{1}{x-5} + \frac{2x-3}{x+2} = 2$$

$$430. \frac{17}{x-3} - \frac{5-x}{22+x} = 1$$

$$430. \frac{3x+2}{4x-1} = \frac{3}{4}$$

$$431. \frac{4x-5}{3x+2} - \frac{5x+1}{5x-1} = \frac{1}{3}$$

$$431. \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{20}{4x-7}$$

$$432. \frac{8}{x-13} + \frac{15}{3x-16} = \frac{13}{x-8}$$

$$432. \frac{1}{2x-3} + \frac{17}{6x+4} = \frac{10}{3x-6}$$

$$433. \frac{1}{x-5} - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x} = 0$$

$$433. \frac{x-1}{2x-1} - \frac{1}{2} = 0$$

§ 24. Murdvõrrandite süsteem.

See, mis eelmises paragrahvis on öeldud ühe otsitavaga murdvõrrandi kohta, kehtib ka kahe otsitavaga murdvõrrandite kohta.

Ülesanne. Lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 1,5. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame nn. abitundmatute võtet.

Kirjutame antud võrrandid niisugusel kujul:

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 3 \\ 6 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{y} = 1,5. \end{cases}$$

Märgime murrud $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{y}$ vastavalt tähtedega u ja v , nii et

$$\frac{1}{x} = u \text{ ja } \frac{1}{y} = v.$$

Meie abitundmatuiks on u ja v .

Nüüd saame:

$$\begin{array}{r|l|l} 3u + 2v = 3 & -2 & -6u - 4v = -6 \\ 6u - 5v = 1,5 & 1 & 6u - 5v = 1,5 \\ \hline & & -9v = -4,5 \\ & & v = 0,5. \end{array}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} 3u + 2 \cdot 0,5 &= 3 \\ u &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Et $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$,

$$\text{siis } \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$434. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$434. \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 25 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 26 \end{cases}$$

$$435. \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 7 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -3 \end{cases}$$

$$435. \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{9}{y} = 8 \\ \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 5 \end{cases}$$

$$436. \begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} - 8 = 0 \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} - 27 = 0 \end{cases}$$

$$436. \begin{cases} \frac{2}{3x} + \frac{1}{2y} = 3 \\ \frac{5}{6x} - \frac{3}{4y} = 1 \end{cases}$$

$$437. \begin{cases} \frac{18}{3x-2y} + \frac{11}{2x-3y} = 13 \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}$$

$$437. \begin{cases} \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y-5} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x-4} - \frac{1}{y-5} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$438. \begin{cases} \frac{4}{x+3} + \frac{9}{y+2} = 5 \\ \frac{4}{x+3} - \frac{9}{y+2} = -1 \end{cases}$$

$$438. \begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 1 \\ \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y+1} = 5 \end{cases}$$

§ 25. Lineaarvõrrandite abil lahenduvaid ülesandeid.

Ülesanne. Vann täitub külma vee kraanist 20 minutiga. Kui aga külma ja sooja vee kraanid mõlemad on lahti, siis saab vann 12 minutiga täis. Mitme minutiga täitub vann, kui sooja vee kraan on üksi avatud?

Lahendus.

Oletame, et sooja vee kraani kaudu täitub vann x minutiga. Siis ühe minutiga

sooja vee kraani kaudu täitub $\frac{1}{x}$ vannist,

külma „ „ „ „ $\frac{1}{20}$ „

mõlemate kraanide „ „ $\frac{1}{x} + \frac{1}{20}$ „

Ülesande andmeist aga järeldub, et mõlema kraani kaudu koos täitub ühe minutiga $\frac{1}{12}$ vannist, seega võime kirjutada võrrandi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}.$$

Lahendame selle. Uhine nimetaja on 60x, sellega iga liiget korrutades saame

$$\begin{aligned}60 + 3x &= 5x \\2x &= 60 \\x &= 30.\end{aligned}$$

Kontroll: $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{2+3}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$.

Vastus: Kui sooja vee kraan on üksi avatud, siis täitub vann 30 minutiga.

Ülesanded.

439. Kui päriti Pythagoras'elt, mitu õpilast tal on, siis vastas ta: „Pool minu õpilastest uurib matemaikat, neljandik looduslugu, seitsmes osa õpib vaikimist ning peale nende on mul veel 3 päris väikest poissi.“ Mitu õpilast tal oli? (Schwenter, a. 1636.)

439. Demochares elas $\frac{1}{4}$ oma elueast poisikesena, $\frac{1}{5}$ noormehena, $\frac{1}{3}$ täisealise mehena ja puhkas 13 aastat oma tööst. Kui vanaks ta sai? (Metrodorus, a. 300 ümber.)

440. Veduri ratta ümbermõõt on 4 meetrit ja vaguni ratta ümbermõõt on 3 meetrit. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 5000 pööret rohkem kui veduri ratas?

440. Vankri esimese ratta ümbermõõt on 50 cm võrra lühem kui tagumise ratta ümbermõõt. Esimene ratas teeb teepikkusel 30 m sama palju pöördeid kui tagumine ratas 36-meetrisel teel. Leida vankri rataste ümbermõõdud.

441. Poiss palgati 1. maist 10. septembrini maale karjaseks järgmise tasu eest: 600 rubla ja ühe ülikonna riie.

Tervislikel põhjustel pidi poiss lahkuma kohalt 10. augustil ja sai tasuks lubatud ülikonnariide ja 300 rubla. Kui kallilt hinnati ülikond?

441. Karjapoiss pidi 3-kuulise teenistuse eest saama 500 rubla rahas ja ühe paari saapaid. Teenistus katkes aga 2 kuu pärast ja karjapoiss sai 200 rubla rahas ja paari saapaid. Kui kallilt hinnati saapad?

442. Samal ajal, kui alevikust sõitis omnibus linna kiirusega 30 km tunnis, sõitis samasse linna talust, mis asetseb sama tee ääres 10 km linna poole, jalgrattur kiirusega 12 km tunnis. Kui kaugel alevikust jõudis omnibus jalgratturile järele?

442. Tallinnast väljub Pärnu suunas mootorrattur, sõites kiirusega 45 km tunnis; samal ajal lähtub Pärnust Tallinna suunas auto kiirusega 25 km tunnis. Kui kaugel Tallinnast toimub kohtumine? Tallinna ja Pärnu vahemaa on 140 km.

443. Ehitatakse uus telefoniliin linnast alevikuni. Kui postid üles seada 50-meetrise vähega, siis tuleb valmismuretsed postidest 60 tükki puudu; kui aga postide vahemaad suurendada 10 meetri võrra, siis jääb 80 posti üle. Kui kaugel asetseb alevik linnast?

443. Meierei ja elektriijaama vahele ehitatakse kõrgepingeliin. Selleks on poste parajasti nii palju, et liini saaks ehitada postivahedega 40 m. Kui liin ehitada postivahedega 45 m, siis jääks 4 posti üle. Kui kaugel on meierei elektriijaamast?

444. Üks arv on teisest 42 võrra suurem ja nad suhtuvad nagu 7 : 4. Leida need arvud.

444. Üks arv on teisest 22 võrra väiksem ja nende suhe on $3\frac{5}{8} : 4\frac{3}{4}$. Leida need arvud.

445. Kolmnurga übermõõt on 204 m ja küljed suhtuvad nagu 3 : 4 : 5. Leida kolmnurga külgede pikkused.

445. Kolmnurga külgede pikkused suhtuvad nagu 7 : 8 : 9 ja kolmnurga übermõõt on 264 m. Arvutada kolmnurga külgede pikkused.

446. Võrdhaarse kolmnurga übermõõt on 342 m; alus ja haar suhtuvad nagu 4 : 7. Kui pikk on alus ja kui pikk on haar?

446. Võrdhaarse kolmnurga übermõõt on 510 m; aluse ja haara suhe on $\frac{8}{17}$. Leida külgede pikkused.

447. Jääkelder tuleb jääga täita. Üks tööliste paar lubas selle töö teha 6 päevaga. Tööle võeti aga veel teine tööliste paar ja nüüd valmis töö 4 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud tööks, kui oleks töötanud ainult teine tööliste paar?

447. Üks tööline lõpetaks töö 8 päevaga, teine aga 10 päevaga. Mitme päevaga lõpetavad töö need töölised koos töötades?

448. Basseini saab veega varustada kolmest kraanist. Esimese kraani kaudu täitub bassein 12 tunniga, teise kraani kaudu 4 tunniga ja kolmanda kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub bassein, kui kõik kolm kraani korraga avada?

448. Kui anuma põhjas on auk avatud, siis anum täitub veega kraanist 8 minutiga. Täis anum jookseb augu kaudu tühjaks 24 minutiga. Mitme minutiga täitub anum kraanist, kui auk anuma põhjas sulgeda?

449. Murru lugeja on nimetajast 7 võrra väiksem. Kui lugejat suurendada 10 võrra ja nimetajat suurendada 4 korda, siis murd taandub tulemuseks $\frac{1}{3}$. Leida murd.

449. Kui murru lugejat suurendada 2 korda ja nimetajat suurendada 5 võrra, siis saame murru $\frac{7}{8}$. Kui aga murru lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada 7 võrra, siis saame murru, mille väärtus on $\frac{1}{3}$. Missugune on see murd?

450. Pronks on vase ja inglistina sulam. Kui palju tuleb võtta vaske ja kui palju inglistina, et saada 17,4 g pronksi erikaaluga 8,7? Vase erikaal on 8,9 ja inglistina erikaal on 7,3.

450. Musiivkuld koosneb vasest ja tsingist. Kui palju tuleb võtta vaske erikaaluga 8,9 ja kui palju tsinki erikaaluga 7,1, et saada 124,5 g musiivkulda, mille erikaal on 8,3?

451. Leida arv, mille jagamisel 4-ga saame jäägi 1, aga ka jagamisel 5-ga saame jäägi 1, kusjuures esimene jagatis on teisest 4 võrra suurem.

451. Leida arv, mille jagamisel 5-ga saame jäägi 2, kuid jagamisel 8-ga saame jäägi 5, teades seejuures, et esimene jagatis on teisest 3 ühiku võrra suurem.

452. Missuguse ühe ja sama arvu võrra peab suurendama arvusid 2, 5, 22 ja 37, et saadud arvudest saaks moodustada võrde?

452. Missuguse ühe ja sama arvu võrra peab vähendada arvusid 6, 7, 36 ja 43, et saadud arvud oleksid proportsionaalsed?

453. Uks kilogramm kompvekke ja kolm tükki seepi maksab kokku 15 rubla 60 kopikat. Kui kompvekkide hind tõuseks 25% ja seebi hind 10%, siis selle sama ostu eest tuleks maksta 18 rubla 96 kop. Kui palju maksab kg kompvekke ja kui palju tükk seepi?

453. Tükk tualettseepi ja 4 pakki pesupulbrit maksab kokku 14 rubla. Kui alandada seebi hinda 25% ja pesupulbri hinda 20%, siis saaks 14 rubla eest 2 tükki seepi ja 4 pakki pesupulbrit. Kui palju maksab tükk seepi ja kui palju pakk pesupulbrit?

454. Isa niidab heinamaatüki $5\frac{1}{2}$ tunniga, poeg $6\frac{1}{2}$ tunniga. Mitme tunniga niidavad isa ja poeg koos selle heinamaatüki?

454. Antud töö jõuab mees lõpetada 10, naine aga 15 päevaga. Tööle asusid 2 meest ja kahe päeva pärast veel 4 naist. Mitu päeva kulub töö lõpetamiseks?

455. Kui otsitav kahekohaline arv jagada samadest, kuid vastupidi järjestatud numbritest koosneva arvuga, siis jagatis on 1 ja jääk 9; kui aga otsitav arv jagada tema ristsummaga (numbrite summaga), siis on jagatis 5 ja jääk 11. Leida see kahekohaline arv.

455. Kahekohaline arv on 21 korda suurem kui tema kümneliste ja üheliste numbrite vahe. Kui selle arvu numbrid vahetada ja uuest arvust lahutada 12, siis saame arvu, mis on 3 korda suurem oma ristsummast. Leida see kahekohaline arv.

Peatükk III.

Ruutjuur.

§ 26. Seose $y = x^2$ graafik.

Olgu antud ruut, mille külge on x sentimeetrit. Selle ruudu pindala y on siis x^2 ruutsentimeetrit:

$$y = x^2.$$

Viimane võrdus kujutab seost ruudu külje ja ruudu pindala vahel. Uurime seda seost lähemalt, arvestamata tema päritolu.

Andes x -le rea väärtusi, näiteks 0; 0,4; 0,8; ... ja arvutades nende väärtuste ruudud, saame kokkukuuluvate x -i ja y väärtuste tabeli:

x	0	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
y	0	0,16	0,64	1,0	2,25	4,0	9,0	16,0

Näeme, et igale x -i väärtusele vastab oma kindel y väärtus.

Arvude x ja y vahelist seost saab esitada näitlikumal viisil, kujutades y väärtuste muutumist graafiliselt. Selleks võtame lehe millimeeter-paberit, valime x -telje, võtame sellel alguse O , valime sobiva kujutusühiku ja kujutame x -teljel väärtused 0; 0,4; 0,8; ... 4,0. Punktist O tõmbame

risti x -teljega y -telje. Arve 0,4; 0,8; ... kujutavaist punkttest tõmbame y -teljega rööbikud sirged ja kujutame neil, alates x -teljest, kohaselt valitud kujutusühiku abil y väärtused 0,16; 0,64; ...

Pilk saadud joonisele näitab, et nende y -lõikude lõpud asetsevad ladusal kõveral. See on seose $y = x^2$ graafik. Ta kujutab arvu ruudu muutumist arvu muutudes.

§ 27. Ruutjuur.

Eelmises paragrahvis saadud joonist saab kasutada arvutusabinõuna. Tõepoolest, olgu antud mingi x -i väärtus, näiteks $x = 2,8$; küsime, kui suur on x^2 ? Otsime x -teljel punkti $x = 2,8$; liigume seda punkti läbivat rist-sirget mööda üles kõverani ja loeme saadud lõigu pikkuse 7,8. Mõödapääsematute väikeste mõõtmis- ja joonestamisvigade tõttu saadus ei ole täpne: $2,8^2 = 7,84$; saadus on aga täpsele väärtusele väga lähedal, erinedes temast kõigest 0,04 võrra.

Veelgi tulusam on joonise kasutamine pöördülesande lahendamisel. Tõepoolest, olgu antud mingi y väärtus, näiteks 3,7; kui suur on vastav x ? Teiste sõnadega: missuguse arvu ruut on 3,7? Küsimuse lahendamiseks võtame y -teljel punkti 3,7 ja tõmbame sellest punktist rööbiku x -teljega, nihkume piki seda rööbikut kõverani, sealt ristsihis alla x -teljeni ja loeme siin väärtuse

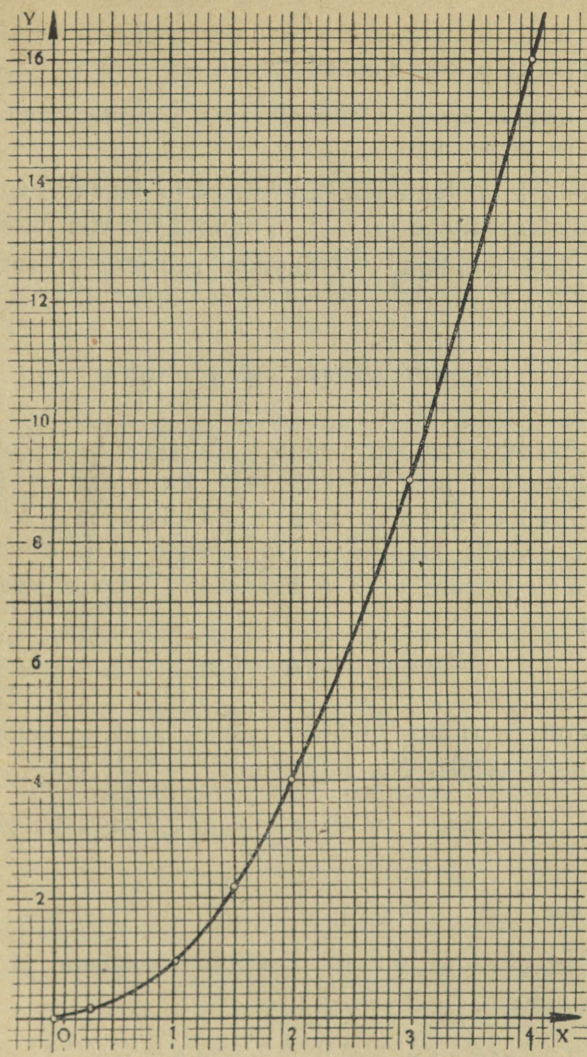
1,9.

Kontroll annab

$$1,9^2 = 3,61,$$

mis on antud väärtusest umbes 0,1 võrra väiksem.

Esimeses ülesandes oli antud x , otsiti selle ruutu y ; tehet, mille abil see y saadakse, nimetatakse x -i ruudu



Seose $y = x^2$ graafik.

leidmiseks. Teises ülesandes oli antud x -i ruut y ; otsiti arvu x ; toiming, mille abil see x saadakse, sisaldab y ruutjuure leidmist.

Leida ruutjuur arvust A tähendab leida niisugune positiivne arv, mille ruut on võrdne A -ga.

Nõudeid liita, lahutada, korrutada ja jagada me oleme märkinud sümbolitega $+$, $-$, \cdot , $:$; nõuet leida ruutjuur arvust A märgime sümboliga \sqrt{A} , lugeda: ruutjuur arvust A .

Kirjutisi

$$a + b \quad a - b \quad a \cdot b \quad a : b$$

oleme mõistnud aga mitte ainult nõuetena toimetada liitmise, lahutamise jne. tehteid, vaid ka sümbolitega nende tehete tulemuste tähistamiseks. Nii tähendab näiteks kirjutis $a + b$ arvude a ja b summat, kirjutis $a \cdot b$ arvude a ja b korrutist. Samuti näeme ka sümbolis

$$\sqrt{A}$$

mitte ainult ruutjuure leidmise nõuet, vaid ka selle tehete tulemuse tähist. Nii kirjutame:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{3,7} \approx 1,93.$$

Ülesanded.

Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määrata järgmiste arvude ruudud:

$$456. \quad 1,6 \quad 0,5 \quad 1,8 \quad 2,5 \quad 2,9$$

$$456. \quad 3,2 \quad 3,8 \quad 4,2 \quad 4,4 \quad 4,5$$

Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määrata järgmiste arvude ruutjuured:

457. 1,44 1,56 1,69 1,90 2,00

457. 5,00 6,52 7,00 7,50 8,40

458. Kui pikk peab olema ruudukujulise näitelina äär, et lina pindala oleks 10 ruutmeetrit?

458. Ristküliku mõõted on 3 ja 5 sentimeetrit. Kui pikk on selle ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg?

§ 28. Arvu ruudu leidmine.

Antud arvu ruudu arvutamist on võimalik korraldada nii, et sellest arvutusest saab kergesti tuletada ruutjuure arvutamise eeskirja ehk ruutjuure algoritmi, sest ruutjuure arvutamine ja ruutu tõstmine on teineteise pöördtehted, nagu seda on liitmine ja lahutamine ning korrutamine ja jagamine.

Seks otstarbeks arvu korrutamise asemel iseendaga rakendame kaksliikme ruutimise valemit

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

mille seekord teisendame meie ülesande jaoks sobivaks, viies arendise kahest viimasest liikmest teguri b sulgude taha, nii et saame

$$(a + b)^2 = a^2 + (2a + b)b.$$

Kaksliikme ruutimise valemi võime sõnastada nüüd nii:

kahe arvu summa ruut võrdub kaksliikmega, mille esimeseks liikmeks on esimese arvu ruut; teise liikme saamiseks tuleb esimese arvu kahekordse ja teise arvu summa korrutada teise arvuga.

Selle valemi järgi võime näiteks 47^2 arvutada nüüd järgmiselt:

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + (2 \cdot 40 + 7) \cdot 7 = 40^2 + 87 \cdot 7.$$

Arvutuse võime korraldada nii:

$$\begin{array}{r} 40 \cdot 40 = 1600 \\ 87 \cdot 7 = 609 \\ \hline 47^2 = 2209. \end{array}$$

Siin arvud 1600 ja 609 on osakorrutisteks. Nagu teame, kahe arvu korrutise arvutamisel jäetakse osakorrutistes otsmised nullid kirjutamata, seejuures silmas pidades, et need osakorrutised parajasse kohta paigutataks. Kui meie oma ruutimise näites selle eeskujul otsmised nullid kirjutamata jätame, siis näeme, et teise osakorrutise viimane number on esimese osakorrutise parempoolsest numbrist kahe koha võrra paremale nihutatud.

Kui tahame arvutada $47,5^2$, siis rakendame kaksliikme ruutimisvalemit teiskordselt:

$$\begin{aligned} 47,5^2 &= (47 + 0,5)^2 = 47^2 + (2 \cdot 47 + 0,5) \cdot 0,5 = \\ &= 47^2 + 94,5 \cdot 0,5. \end{aligned}$$

Et meil 47^2 on eespool juba arvatud, siis tuleb senisele arvutusele veel lisaks korrutamine $94,5 \cdot 0,5$ ja tulemuse liitmine; kogu arvutuse võime siis kirjutada nii:

$$\begin{array}{r} 40 \cdot 40 = 1600 \\ 87 \cdot 7 = 609 \\ 94,5 \cdot 0,5 = 47,25 \\ \hline 2256,25 \end{array}$$

Kui nullid lõpus kirjutamata jätame, siis on viimase arvutuse kirjutis järgmine:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 4 = 16 \\ 87 \cdot 7 = 609 \\ 94,5 \cdot 0,5 = 47,25 \\ \hline 2256,25 \end{array}$$

Sama valemi veelkordsel rakendamisel saame arvutada näiteks $47,52^2$, sest

$$\begin{aligned} 47,52^2 &= (47,5 + 0,02)^2 = 47,5^2 + (2 \cdot 47,5 + 0,02) \cdot 0,02 = \\ &= 47,5^2 + 95,02 \cdot 0,02. \end{aligned}$$

Korraldades arvutuse nii, nagu tegime eespool, saame:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 4 = 16 \\ 87 \cdot 7 = 609 \\ 94,5 \cdot 0,5 = 47,25 \\ 95,02 \cdot 0,02 = 1,9004 \\ \hline 2258,1504 \end{array}$$

Osakorrutistes võib ka komad kirjutamata jätta, nagu nad jäetakse harilikult kirjutamata osakorrutistes korrutamistehtel. Koma asetamine õigesse kohta lõpptulemuses ei tee mingit raskust ei ühel ega teisel juhul.

Jättes osakorrutistes komad kirjutamata, saame oma ruutimise arvutuse järgmisel kujul:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 4 = 16 \\ 87 \cdot 7 = 609 \\ 945 \cdot 5 = 4725 \\ 9502 \cdot 2 = 19004 \\ \hline 2258,1504 \end{array}$$

Vaadeldes neid tegureid, millede korrutamine annab vastava osakorrutise, näeme, et

1) esimese osakorrutise saamiseks tuleb ruuditava arvu esimene number korrutada iseendaga, ehk, teisiti öeldes, tuleb võtta esimese numbri ruut;

2) teise osakorrutise teguripaar saadakse järgmiselt: esimese osakorrutise tegurite summa (s. o. ruuditava arvu algusnumbri kahekordne) annab esimese teguri ilma lõppnumbrita, lõppnumbriks kui ka teiseks teguriks on ruuditava arvu teine number;

3) kolmas ja kõik edasised teguripaarid saadakse sel teel, et eelmise osakorrutise tegurite summa annab alati uuele osakorrutisele esimese teguri ilma lõppnumbrita, esimese teguri lõppnumbriks kui ka teiseks teguriks on ruuditava arvu järgmine number.

Et liitmisi, mida tuleb teha iga osakorrutise teguripaari ühe teguri saamisel, oleks mugavam teostada, selleks kirjutame liidetavad üksteise alla. Seda ja kõike eespool öeldut arvesse võttes saame arvu ruudu leidmise jaoks järgmise skeemi:

$47,52^2$	
4	16
4	
87	609
7	
945	4725
5	
9502	19004
2	
2258,1504	

Arvutame arvu ruudu leidmise skeemi järgi 32^2 .

$$\begin{array}{r|l}
 & 32^2 \\
 \hline
 3 & 9 \\
 3 & \\
 \hline
 62 & 124 \\
 2 & \\
 \hline
 & 1024
 \end{array}$$

Ülesanne.

Arvutada arvu ruudu leidmise skeemi järgi järgmised ruudud:

$$459. \quad 28^2; 43,1^2.$$

$$459. \quad 2754^2; 37,38^2.$$

§ 29. Ruutjuure leidmise algoritm*.

Ruutjuure leidmise algoritm on võtte ruutjuure kiireks määramiseks. Võtte käsitlemist toimetame kahes osas: esimeses selgitame, mitu numbrit on ruutjuures, teises — missugused on ruutjuure numbrid. Asume esimese küsimuse käsitlemisele.

Iga ühekohaline arv a rahuldab tingimust

$$1 \leq a < 10;$$

sellest järeldub, et

$$1 \leq a^2 < 100;$$

* Sõna *algoritm* on tuletatud matemaatik Al-Khwārizmī nimest ning tähendab arvutuseeskirja.

Keskajal nimetati *algorithmus*'eks araablastelt õpitud arvutamiskunsti nn. araabia numbritega; uue arvutusviisi tundjaid nimetati algoritmikuiks, vastandina abatsistidele, kelleks nimetati arvutuslaual (*abacus*) arvutavaid aritmeetikuid.

see tähendab, et ühekohalise arvu ruut on ühe- või kahekohaline arv. Iga kahekohaline arv b rahuldab tingimust

$$10 \leq b < 100;$$

sellest järeldeb, et

$$100 \leq b^2 < 10\,000;$$

see tähendab, et kahekohalise arvu ruut on kolme- või neljakohaline arv. Mõttekäiku üldistades näeme, et n -kohalise arvu ruudul on kas $2n - 1$ või $2n$ numbrit. Ümberpöördult: ruutjuur arvust, millel on $2n - 1$ või $2n$ numbrit, on n -kohaline arv.

Arvestades koma paigutamise juhust korrutises küm-nendmurdude korrutamisel, võime öelda, et kui arvul on 1 number koma järel, siis tema ruudul on 2 numbrit koma järel; kui aga arvul on 2 numbrit koma järel, siis arvu ruudul on 4 numbrit koma järel. Üldiselt, kui arvul on koma järel n numbrit, siis selle arvu ruudul on koma järel $2n$ numbrit. Ümberpöördult: ruutjuurel arvust, millel koma järel on $2n$ numbrit, on koma järel n numbrit.

Siit järeldeb võte numbrite arvu määramiseks arvu ruutjuures:

rühmitame juuritava arvu numbrid kahenumbrilisteks rühmadeks, alates komast, suundudes vasakule ja paremale poole, kusjuures viimane vasakpoolne rühm võib jääda ühenumbriliseks; viimane parempoolne rühm, kui ta ühenumbriline tuleb, täiendatakse kahenumbriliseks nulli abil. Nii tekkinud numbrirühmade hulk annab ruutjuure numbrite arvu.

Näiteks $\sqrt{190854225}$ on viiekohaline arv, sest juuritava arvu numbrite rühmitamisel saame

$$1'90'85'42'25,$$

s. o. viis rühma.

Kuid $\sqrt{660,5}$ on kolmenumbriline arv, sest nüüd saame rühmitamisel kolm numbrirühma ja nimelt:

$$6'60,50.$$

Asume nüüd ruutjuure numbrite otsimisele. Selgitame seda $\sqrt{1024}$ arvutamisel. Rühmitades juuritava arvu numbrid, saame $10'24$; numbrirühmi on 2, seega $\sqrt{1024}$ on kahekohaline arv, ta koosneb kümnelistest ja ühelistest. Käsitades ruutjuure arvutamist ruutimisele vastassuunalise tehtena, võib öelda, et antud on arvu ruut, tuleb leida arv ehk teisiti öeldes, tuleb leida arvu numbrid. Ruutimise arvutuskäigule tagasi vaadates näeme, et arvu ruudu esimene numbrirühm koosneb peaaesjalikult esimesest osakorrutisest, sest teistest osakorrutistest tuleb siia ainult pisut juurde. See tähendab, et arvu ruudu esimene numbrirühm on peagu võrdne arvu esimese numbriga, täpsemalt väljendades, otsitava ruutjuure esimese numbriga ruut on kas võrdne juuritava arvu esimese numbrirühmaga, või on sellest väiksem. Siit saame juhise ruutjuure esimese numbriga leidmiseks: suurim täisarv, mille ruut mahub juuritava esimesse numbrirühma, on ruutjuure esimene number ehk teisiti sõnastades, võtame juuritava arvu esimesest numbrirühmast suurima täisarvulise ruutjuure.

Antud juhul esimene numbrirühm on 10, sellest suurim täisarvuline ruutjuur on 3. Seega otsitava arvu esimene number on 3.

Leitud esimese numbriga ruut on esimeseks osakorrutiseks, mis juuritavast arvust lahutatakse. Selle osakorrutise tegurid jäetakse lühiduse otstarbel kirjutamata. Kõigi järgnevate osakorrutiste tegurid kirjutatakse ruutimise võtte eeskujul muust arvutusest vasakule ja eraldatakse temast püstkriipsuga.

Just nagu ruutimisvõtte puhulgi, saadakse igale osakorrutisele esimene tegur ilma oma lõppnumbriga eelmise teguripaari liitmise teel; kirjutamata jäetud teguripaar, mis andis esimese osakorrutise (esimese numbriga ruudu),

liidetakse peast; et need tegurid on võrdsed, siis nende liitmine on samaväärne teguri kahekordistamisega ($3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6$). Teise osakorrutise teine tegur, mis on ühtlasi esimese teguri lõppnumbriks ja ka otsitava ruutjuure vastavaks numbriks, leitakse jagamise teel, nagu allpool selgub.

$$\sqrt{\frac{10'24}{9}} = 32$$

62	124
2	124

Ruutjuure väärtuse teine number, nimelt 2, on määratud sellega, et temaga moodustatud osakorrutis $62 \cdot 2$ on võrdne esimese jäägiga 124. Järelikult teise teguri 2 saaksime jagamisel $\frac{124}{62}$, kui teaksime tervet jagajat; et aga jagaja lõppnumber on teadmata, seda alles otsime, siis piirdume ümardatud jagamisega, jättes jagajas ära viimase teadmata numbri, samuti jättes ära viimase numbri ka jäägis, mistõttu mõlemad arvud ligikaudu kümme korda vähenevad.

Niisiis jagatise $\frac{124}{62}$ asemel kasutame jagatist $\frac{12}{6}$, mis annab teise numbri 2.

Kui antud juuritaval arvul on numbrirühmi rohkem kui kaks, siis leiame ruutjuure kolmanda ja iga järgneva numbri samuti järgneva numbrirühma abil, nagu leidsime teise numbri teise numbrirühma abil: eelmise osakorrutise lahutamisel saadud vahe koos juuritava arvu järgneva numbrirühmaga moodustab alati vastava jäägi, mille kaudu uus ruutjuure number leitakse, — jäägis jätame ära viimase numbri ning nii saadud arvu jagame eelmise teguripaari summaga — nii saadud jagatist ongi järgmine ruutjuure number. Et jagamine toimub ümardatud arvudega,

siis juhtub mõnikord, et jagamine annab õigest suurema numbriga, mida näeme sellest, et osakorrutis ei mahu jääki; sel korral proovime väiksemaid numbreid, kuni saame suurima osakorrutise, mis mahub jääki.

Näide 1.

$$\sqrt{1'90'85'42'25} = 13815$$

	1	
23	90	
3	69	
268	2185	
8	2144	
2761	4142	
1	2761	
27625	138125	
5	138125	

Ruutjuure esimese numbriga leidmiseks võtame juuritava arvu esimesest numbrirühmast ruutjuure, saame 1, selle kirjutame tulemuse kohale võrdusmärgi järele.

Leitud esimese numbriga kahekordse kirjutame püst-kriipsust vasakule.

Juure teise numbriga saamiseks jagame lõppnumbriga esimese jäägi, s. o. 9 arvuga 2, saame 4; kuid et $24 \cdot 4 = 96$, seega suurem kui jääk 90, siis proovime väiksemat numbriga, kolme; see sobib. Juure teine number on siis 3.

Juure kolmanda, neljanda ja viienda numbriga leiame järgmiste jagamiste abil:

$$\frac{218}{26} \approx 8; \quad \frac{414}{276} \approx 1; \quad \frac{13812}{2762} \approx 5.$$

Juuritava arvu rühmitamine määrab ka koma asukoha ruutjuures, sest arvutatav ruutjuure number kuulub alati

niimitmendale kohale enne või pärast koma, kuimitmes, komast arvates, on see numbrirühm, mille abil vastavat numbrit arvutame.

Näide 2. Arvutada $\sqrt{32652,49}$.

Juuritava arvu numbrite rühmitamine osutab, et juurel on kolm numbrit enne koma.

$$\sqrt{3'26'52,49} = 180,7$$

	1		
28	226		
8	224		
3607	252 49		
7	252 49		

360	252
0	000
360	252 49

Kolmandaks ruutjuure numbriks tuleb 0, nagu näitab jagamine 25:36. Kui kirjutaksime kõik tehted nulliga, nagu teeme iga muu numbriga, siis võtaks vastav kirjutise osa kõrvalnäidatud kuju. Endastmõistetavalt võime kirjutist seesuguse osa võrra lühendada, nagu see on vasakul tehtudki.

Näide 3. Leida ruutjuur arvust 0,000784.

Juuritava arvu numbrite rühmitamisest nähtub, et juure number enne koma ja esimene number pärast koma on nullid.

$$\sqrt{0,00'07'84} = 0,028$$

	4
49	384
9	441
48	384
8	384

Näide 4. Leiame $\sqrt{289567}$.

Rühmitame juuritavas numbrid paarikaupa, sammudes paremalt poolt vasakule; saame

$$28'95'67;$$

siit näeme, et otsitav ruutjuur on kolmekohaline arv. Selle leidmine võib toimuda nii, nagu allpool näidatud:

$$\sqrt{28'95'67} = 538 \text{ puudusega} \\ 25 \quad \text{või} \quad 539 \text{ liiaga.}$$

103	395		
3	309		
1068	8667	1069	8667
8	8544	9	9621
	+123		-954

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Märkus. Eelmises näites ruutjuure leidmisel me ei saanud otsitavat juurt täpselt; leidsime ainult kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mille vahel asetseb otsitav ruutjuur:

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Neid kahte arvu nimetame otsitava ruutjuure lähisväärtusteks ehk lähenditeks; esimene neist on puudusega, teine liiaga.

Arvude 538 ja 539 vahe on 1. Et $\sqrt{289567}$ asetseb nende arvude vahel, siis ta erineb kummastki vähem kui ühe võrra. Seega võrduste

$$\sqrt{289567} = 538 \text{ ja } \sqrt{289567} = 539$$

viga ei küüni üheni.

Ülesanded.

Arvutada järgmiste arvude ruutjuured:

460.	361	460.	5329
	576		8464
	784		1369
	841		4225
	529		6084
461.	51955264	461.	722500
	89908324		608400
	1018081		211600
	49126081		31360000
	81108036		96040000
462.	718,24	462.	2590,81
	0,501264		5,6169
	0,0361		0,5329
	48,8601		0,000169
	70,0569		5632,5025

463. Individuaalelamu ehitaja sai ristküliku-kujulise ehituskruundi, mille pikkus on 39 m ja laius on 12 m. Ta tahab selle vahetada samasuure ruudukujulise krundiga. Millised peavad olema uue krundi mõõted?

463. Kuubi täispindala on $253,5 \text{ dm}^2$. Mitu cm on selle kuubi serv?

§ 30. Ruutjuure leidmine etteantud täpsusega.

Nõuet „arvutada ruutjuur veaga alla 0,0001“ võib asendada nõudega „arvutada see ruutjuur täpsusega 0,0001 ehk nelja kohaga pärast koma“, siinjuures silmas pidades, et tulemus tuleb võtta puudusega, kui järgnev arvutatav

ruutjuure number, antud juhul viies number, on väiksem kui 5; tulemus tuleb võtta liiaga, kui järgnev number on 5 või sellest suurem. Kui nii teeme, siis arvutatud ruutjuure viga ei ületa 0,00005, see tähendab, ei ületa poolt viimase koha ühikust, seega on ta kindlasti alla 0,0001.

Nüüd võime ülesande „leida ruutjuur arvust 2 veaga alla 0,0001“ samastada ülesandega „leida ruutjuur arvust 2,0000 0000 nelja kohaga pärast koma“. Komale järgnevad nullid võib arvutamisel esialgu jätta kirjutamata ja lisada nad ruutjuure iga numbri arvutamisel paarikaupa vastavale jäägile. Algoritmi rakendus kujuneb siis järgmiseks:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \text{ (puudusega)}$$

	1
24	100
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564

3836 < 14142

Kontroll annab:

$$1,4142^2 = 1,99996164;$$

see on väiksem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0001 võrra;

$$1,4143^2 = 2,00024449;$$

see on suurem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0003 võrra.

Kas leitud ruutjuure lähend tuleb võtta puudusega või liiaga, seda saab kontrollida otsese leitud väärtuse ruutimise või järgneva numbriga arvutamise asemel leitud ruutjuure väärtuse ja viimase jäägi võrdlemise teel.

Meie arvutusnäites on viimaseks jäägiks 0,00003836; et arvutamisel on nullid ja komad kirjutamata, siis on kirjutises näha ainult selle jäägi numbrid 3836. Arvutamisel saame ruutjuure numbrid ühed ja samad, kas arvutame ruutjuure arvust 200000000 või arvust 2,00000000; esimesel juhul saame ruutjuure lähendiks 14142 ja viimaseks jäägiks 3836; teisel juhul on lähendiks 1,4142 ja viimaseks jäägiks 0,00003836. Niisiis selle asemel, et kontrollida tulemust 1,4142 jäägi 0,00003836 abil, võime kontrollida arvu 14142 jäägi 3836 abil. Lühidalt: leitud ruutjuure lähendi võrdlemisel viimase jäägiga jätame komad mõlemas ära.

Kui ruutjuure leidmisel tekkinud viimane jääk on väiksem kui leitud ruutjuure lähend, koma asukoht mõlemas arvustamata, siis ruutjuure lähend tuleb võtta puudusega; kui viimane jääk ületab leitud ruutjuure lähendi, koma asukoht samuti mõlemas arvustamata, siis tuleb lähend võtta liiaga, see tähendab, ruutjuure leitud viimast numbrit tuleb 1 võrra suurendada.

Meie viimases arvutuses on viimane jääk $3836 < 14142$, sellepärast võtame ruutjuure väärtuse puudusega, see tähendab, tema viimane number 2 jääb kehtima.

Jäägi ja lähendi võrdlemise võtet põhjendame järgmiselt.

Oletame, et leitud ruutjuure väärtus on a (kusjuures a on väljendatud leitud ruutjuure väärtuse viimase koha ühikuis). Et nüüd teada saada, kas a on niisugune arv, mis ruutjuure täpsest väärtusest ei erine rohkem kui viimase koha poole ühiku võrra, selleks peaksime teadma, kas ruutjuure täpne väärtus on väiksem kui $a + 0,5$, või mitte. Et selgusele jõuda, kas ruutjuure täpne väärtus on väiksem kui $a + 0,5$, või on ta sellega võrdne või koguni suurem, sel-

leks võrdleme avaldise $a + 0,5$ ruutu juuritava arvuga, s. t. võrdleme juuritava arvuga avaldist $(a + 0,5)^2$ ehk avaldist $a^2 + a + 0,25$, sest $(a + 0,5)^2 = a^2 + a + 0,25$.

Et arvu a leidmisel on a^2 juba juuritavast lahutatud, siis jätame võrdlemisel nii juuritavas kui ka meie avaldises a^2 arvestamata, see tähendab, võrdleme jääki, mis tekkis arvu a leidmisel, avaldisega $a + 0,25$; et liige $0,25$ tuleks mahutada alles järgnevasse juuritava numbrirühma, siis võrdleme jääki lihtsalt arvuga a .

Etteantud täpsusega ruutjuure arvutamisel on otstarbekohane kirjutada viimane leitud number oma kohale alles siis, kui kontroll on teostatud, tarbekorral viimast numbrit ühe võrra suurendades.

Toome selgituseks veel ühe näite.

Näide. Arvutada ruutjuur arvust 51,1 täpsusega 0,01.

$$\sqrt{51,10} = 7,15 \text{ (liiaga)}$$

	49	
141		210
1		141
1424		6900
4		5696
1204 > 714		

Ülesanded.

Leida järgmiste juurte väärtused kolme kohaga pärast koma:

464.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$
464.	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{38}$	$\sqrt{45}$

Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt, kui mitte, siis täpsusega 0,001:

465.	$\sqrt{5,34}$	465.	$\sqrt{81,46}$
	$\sqrt{7,89}$		$\sqrt{95,37}$
466.	$\sqrt{19,0822}$	466.	$\sqrt{387,684}$
	$\sqrt{145,0378}$		$\sqrt{5639,05}$
467.	$\sqrt{0,9956}$	467.	$\sqrt{0,001909}$
	$\sqrt{0,524341}$		$\sqrt{0,000672}$

Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt, kui mitte, siis veega alla 0,0001:

468.	$\sqrt{46,3761}$	468.	$\sqrt{130}$
	$\sqrt{54,256}$		$\sqrt{2530}$
469.	$\sqrt{0,0961}$	469.	$\sqrt{3,72}$
	$\sqrt{35,1649}$		$\sqrt{12,5}$
470.	$\sqrt{980100}$	470.	$\sqrt{670000}$
	$\sqrt{3500}$		$\sqrt{500000}$

471. Ruudukujulise nahatüki pindala on 7,5 dm². Leida selle nahatüki serva pikkus veega alla 1 mm.

471. Peipsi järve pindala on 3584 km². Kui pika küljega ruudu kataks nii suur veepind?

§ 31. Irratsionaalarv.

Ulesanne. Kui pikk tuleb võtta ruudu külge, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus x meetrit. Siis on tema pindala x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on 3^2 , 4^2 , 5^2 jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murruga $\frac{a}{b}$. Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on taandatud kujul; sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algtegureiks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \cdots n}{p \cdot q \cdot r \cdots v},$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja tegureist. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \cdots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \cdots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega peab meie nõudes peituma viga. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

Esitatust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2 = 2$ täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Exhib. univ. Tartu

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu, ja pealegi nii hästi kui iganes soovime. Rakendades ruutuure leidmise algoritmi ja järk-järgult viga vähendades näeme, et

$$1 < x < 2$$

$$1,4 < x < 1,5$$

$$1,41 < x < 1,42$$

$$1,414 < x < 1,415$$

$$1,4142 < x < 1,4143$$

$$1,41421 < x < 1,41422$$

jne.

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasakpoolses tulbas seisavad x -i lähendid puudusega, parempoolses tulbas x -i lähendid liiaga. Vastavate lähendite viga järjest väheneb: esimeses reas ei küüni viga 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad meid x -i väärtusele:

$$x = 1,41421 \dots$$

Selles kirjutises numbrite jada ei lõpe.

Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespool tõetatul põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x lõputa kümnendmurd. Seda lõputa kümnendmuru pole võimalik kirjutada ühegi hariliku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Täisarve ja harilikke murde nimetasime koos ratsionaalseteks arvudeks.

Arve, mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetame irratsionaalseteks arvudeks.

Murru 1,41421 ... saamisluгу tagab, et tema ruut on 2:

$$(1,41421 \dots)^2 = 2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputa kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Uldiselt:

kujutagu sümbol \sqrt{A} ratsionaalset või irratsionaalset arvu, ikka on $(\sqrt{A})^2 = A$.

Nagu $\sqrt{2}$, nii kujutavad ka $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ irratsionaalseid arve.

§ 32. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega.

Omajal ajal laendasime arvude valda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalla murdarvudega ja saime nii ratsionaalsete arvude valla. Irratsionaalsete arvude loomisega ratsionaalsete arvude vahele tihendame arvuvalla veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

$$-1, \quad -5, \quad -7\frac{1}{2},$$

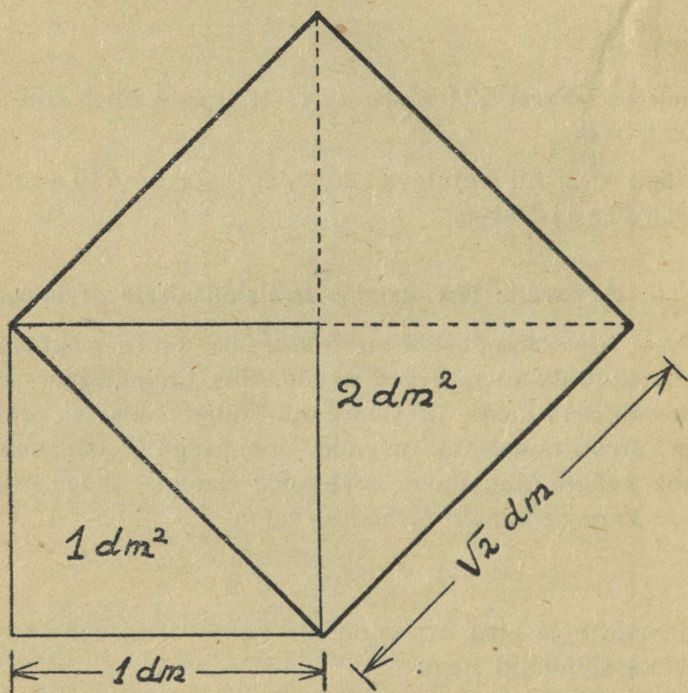
kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid nagu

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5\frac{1}{2}},$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas. On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka irratsionaalsete arvude puhul. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud moodustavad koos reaalarvude valla.

Irratsionaalarvu kuuluvust reaalarvude valda illustreerigu näitena järgmine asjaolu: vaatamata sellele, et $\sqrt{2}$

ei ole täpselt väljendatav ühegi täisarvu ega ühegi murru abil, on ometi võimalik anda täpne konstruktsioon sirkli ja joonlaua abil joonlõigu joonestamiseks, mille pikkus on täpselt $\sqrt{2}$ dm.



Irratsionaalse pikkusega joonlõik.

Kui ehitame ruudu külje pikkusega 1 dm (vt. joonis), siis selle pindala on 1 dm^2 . Kui nüüd pikendame ühe paari lähiskülgi oma pikkuse võrra ja võtame pikendatud küljed uue nelinurga diagonaalideks, siis uus nelinurk on ruut pindalaga 2 dm^2 . Seda näeme sellest, et uus ruut

koosneb neljast niisugusest tükist, nagu neid esialgses ruudus on kaks.

Uue ruudu külje pikkuse leidmiseks peame arvutama ruutjuure arvust 2, seega see pikkus on $\sqrt{2}$ dm. Joonisel näeme, et uue ruudu külg on esialgsele ruudule diagonaalsiks, seepärast võime öelda, et kui ruudu külje pikkus on 1 pikkusühik, siis ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Ülesanded.

472. Ehitada ruut külje pikkusega 2 ühikut ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut. Kui pikk on uue ruudu külg?

472. Ehitada ruut külje pikkusega 2,5 cm ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut.

473. Ehitada ruut külje pikkusega 5 cm ning selle abil 2 korda väiksema pindalaga ruut.

473. Ehitada ruut pindalaga 36 cm² ning selle abil ruut pindalaga 18 cm².

474. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{18}$ cm.

474. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{32}$ cm.

§ 33. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest.

Näitame, et

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Tõestus. Positiivsed arvud on võrdsed, kui nende ruudud on võrdsed. Näitame, et meie võrduse poolte ruudud on võrdsed:

$$(\sqrt{ab})^2 = ab$$

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b.$$

Seega

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Samal viisil saame näidata, et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestus.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Seega

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestatud võrduste sisu sõnastame järgmiselt:

korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega; kahe arvu jagatise ruutjuur võrdub nende arvude ruutjuurte jagatiselega.

Kui tõestatud võrduste pooled vahetame, siis saame:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ja

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Need võrdused ütlevad, et

antud arvude ruutjuurte korrutis on võrdne nende arvude korrutise ruutjuurega;

kahe arvu ruutjuurte jagatis on võrdne nende arvude jagatise ruutjuurega.

Nii tõestatud võrdused kui ka need, mis saame poolte vahetamisel, leiavad kasutamist avaldiste teisendamisel, eriti teguri viimisel juuremärgi alla ja teguri toomisel juuremärgi ette.

Olgu näiteks tegemist juurega $\sqrt{n^2 a}$. Tõestatud lause põhjal saame

$$\sqrt{n^2 a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = n \sqrt{a}.$$

Samu võrdusi vastupidises suunas lugedes saame

$$n \sqrt{a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{n^2 a}.$$

Kokkuvõte:

arvu, mille ruut esineb tegurina ruutjuure märgi all, võib võtta tegurina juuremärgi ette; arvu, mis seisab tegurina juuremärgi ees, võib võtta ruutu tõstetult tegurina juuremärgi alla.

Näiteid.

$$1. \sqrt{81 \cdot 169} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{169} = 9 \cdot 13.$$

$$2. \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \sqrt{2}.$$

$$3. \sqrt[5]{5 \frac{19}{25}} = \sqrt[5]{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt[5]{144}}{\sqrt[5]{25}} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}.$$

$$4. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

$$5. \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \sqrt{2}.$$

$$6. 3 \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{9 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{10}.$$

7. Ülesanne. Olgu teada, et $\frac{m}{n} = n \sqrt{\frac{a}{b}}$. Avaldada b .

Lahendus. Jagades kummagi poole arvuga n , saame

$$\frac{m}{n^2} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Tõstame nüüd võrduse kummagi poole ruutu, siis saame

$$\frac{m^2}{n^4} = \frac{a}{b}$$

ja siit, rakendades võrde omadust, leiame, et

$$b = \frac{an^4}{m^2}.$$

Ülesanded.

Tuua tegur juuremärgi ette:

$$475. \quad \sqrt{12} \quad \sqrt{72} \quad \sqrt{200} \quad \sqrt{288} \quad \sqrt{32}$$

$$475. \quad \sqrt{18} \quad \sqrt{75} \quad \sqrt{300} \quad \sqrt{125} \quad \sqrt{162}$$

Leida järgmiste avaldiste väärtused:

$$476. \quad \frac{\sqrt{9 \cdot 144}}{\sqrt{25 \cdot 100}}$$

$$476. \quad \frac{\sqrt{225 \cdot 16}}{\sqrt{49 \cdot 64}}$$

$$477. \quad \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$477. \quad \sqrt{\frac{121}{144}}$$

$$\sqrt{1\frac{11}{25}}$$

$$\sqrt{3\frac{33}{64}}$$

$$478. \quad \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}$$

$$478. \quad \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}}$$

$$479. \quad \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$$

$$479. \quad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$$

Viia tegur juuremärgi alla:

$$480. \quad 2\sqrt{5} \quad 5\sqrt{2} \quad 10\sqrt{7} \quad 6\sqrt{1,5} \quad 12\sqrt{2,5}$$

$$480. \quad 12\sqrt{0,5} \quad 3\sqrt{3} \quad 4\sqrt{3} \quad 7\sqrt{10} \quad 10\sqrt{0,2}$$

Tuua tegur juuremärgi ette:

$$481. \quad \sqrt{4a} \quad \sqrt{9a^2b} \quad \sqrt{3a^2} \quad \sqrt{a^2b}$$

$$481. \quad \sqrt{25x} \quad \sqrt{36ax^2} \quad \sqrt{5x^2} \quad \sqrt{m^2n}$$

Viia tegur juuremärgi alla:

$$482. \quad 3\sqrt{a} \quad a\sqrt{2} \quad x\sqrt{a} \quad x^2\sqrt{b}$$

$$482. \quad 2\sqrt{b} \quad b\sqrt{3} \quad b\sqrt{a} \quad a^3\sqrt{x}$$

Lihtsustada:

$$483. \quad \sqrt{4a^2} \quad \sqrt{25a^4} \quad \sqrt{a^2b^4} \quad \sqrt{100a^2x^4}$$

$$483. \quad \sqrt{9b^2} \quad \sqrt{36a^6} \quad \sqrt{a^2x^4} \quad \sqrt{81m^2n^4}$$

$$484. \quad \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} \quad \sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{a^5b^3}$$

$$484. \quad \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12x} \quad \sqrt{ax^3} \cdot \sqrt{ax}$$

$$485. \quad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \quad \sqrt{\frac{4a^2}{b^4}} \quad \sqrt{\frac{5a}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{4b^4}{5a^3}}$$

$$485. \quad \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} \quad \sqrt{\frac{9x^2}{y^4}} \quad \sqrt{\frac{8a}{3b}} \cdot \sqrt{\frac{3b}{2a^3}}$$

§ 34. Kahe arvu vahe teisendamine korrutiseks.

On arvusid, mida saab kirjutada ruudu kujul; näiteks

$$4 = 2^2$$

$$625 = 25^2 \text{ jne.}$$

Ruutjuure definitsioon lubab iga positiivset arvu kirjutada ruudu kujul, kasutades selleks juuremärki; näiteks

$$3 = (\sqrt{3})^2$$

$$7 = (\sqrt{7})^2$$

$$a = (\sqrt{a})^2.$$

Arvu, mida saab kirjutada ruudu kujul juuremärgi abita, nimetame täisruuduks.

Asjaolu, et positiivset arvu saame kirjutada ruudu kujul, lubab kahe arvu vahet esitada kahe arvu ruutude vahena. Kahe arvu ruutude vahet saab aga kirjutada summa ja vahe korrutisena. Sellest järeldub, et iga kahe positiivse arvu vahet saab teisendada summa ja vahe korrutiseks.

Näiteid.

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2).$$

$$x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}).$$

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

$$\begin{aligned} x^2 - a + b &= x^2 - (a - b) = x^2 - (\sqrt{a - b})^2 = \\ &= (x + \sqrt{a - b})(x - \sqrt{a - b}). \end{aligned}$$

Ülesanded.

Teisendada järgmised vahed korrutisteks:

486. 1. $x^2 - 9$

2. $x^2 - 7$

3. $x^2 - a^2$

4. $x^2 - a$

5. $x^2 - \frac{a}{3}$

6. $x^2 - a + 2$

7. $a - 3 - b$

8. $x - a + b$

486. 1. $x^2 - 16$

2. $x^2 - 8$

3. $x^2 - n^2$

4. $x^2 - b$

5. $x^2 - \frac{p}{2}$

6. $x^2 - b + 4ac$

7. $k - 6 - n$

8. $x - m + n$

§ 35. Ülesandeid kordamiseks.

487. Olgu teada, et $u = \frac{a}{b} \sqrt{f}$. Avaldada siit f .

487. Avaldada valemist $T = \sqrt{\frac{u}{v}}$ suurus u .

488. Olgu võrdes $\frac{px}{q} = \frac{r}{sx}$ kõik arvud positiivsed. Avaldada x .

488. Olgu $qh = \sqrt{\frac{q^3}{k}}$. Avaldada siit q .

489. Määrata valemist $t = \frac{3}{4} \sqrt{h}$ suurus h .

489. Olgu $z = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{x}{u}}$. Avaldada u .

490. Olgu teada, et $v = \left(\frac{Mu}{h}\right)^2$. Avaldada siit h .

490. Olgu teada, et $p\sqrt{q} = r\sqrt{s}$. Avaldada siit s .

491. Arvutada $\sqrt{17}$ veaga alla 0,00001.

491. Arvutada $\sqrt{10}$ veaga alla 0,01.

Peatükk IV.

Ruutvõrrand.

§ 36. Täielik ruutvõrrand.

Ülesannete lahendamine ühe otsitavaga võrrandi abil viib mõnikord niisuguse võrrandini, milles pärast kõiki võimalikke lihtsustamisi otsitava kõrgeimaks astmeks osutub otsitava teine aste ehk otsitava ruut.

Kui peale sulgude avamist ja koondamist kõrgeim aste, milles esineb otsitav, on teine aste, siis nimetame võrrandit teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile. Nii on võrrandid

$$\begin{array}{lll} x^2 = 7 & 4x^2 = 9 & \frac{1}{2}x^2 = x + 10 \\ 5x^2 - 4 = x & & 0,3x^2 + 0,7x - 10 = 0 \end{array}$$

kõik ruutvõrrandid. Seevastu võrrandid

$$\frac{4}{x^2} - x = 7 \quad \frac{2x}{x-3} = 5 \quad x^3 = 2x^2 + 10$$

pole ruutvõrrandid.

Ruutvõrrandis peab esinema liige otsitava ruuduga; peale selle võib esineda liige otsitava esimese astmega

ning otsitavast vaba liige. Kui need liikmed tähistame ax^2 , bx ja c , saame võrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

See on täielik ruutvõrrand. Selles võrrandis a ei saa olla null, sest vastasel korral, kui $a = 0$, võrrand poleks enam ruutvõrrand.

Võime ikka oletada, et $a > 0$; kui see poleks nii, saavutaksime selle, korrutades võrrandi kumbagi poolt -1 -ga.

Jagades viimase võrrandi kõiki liikmeid arvuga a , saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

valides kordajate $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ jaoks uued tähised p ja q , saame võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sel kujul kirjutatud ruutvõrrandit nimetame taandatud ruutvõrrandiks.

Võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ eristamiseks taandatud ruutvõrrandist nimetame esimest taandamata ruutvõrrandiks ehk üldiseks ruutvõrrandiks. Niisiis täielikke ruutvõrrandeid liigitame kahte liiki: üldisteks ja taandatud ruutvõrranditeks.

Kokkuvõetult:

võrrandit $ax^2 + bx + c = 0$ nimetame üldiseks ruutvõrrandiks, võrrandit $x^2 + px + q = 0$ taandatud ruutvõrrandiks.

On kasulik tähele panna, et

kui täielikus ruutvõrrandis otsitava ruudu kordaja ei ole 1, siis nimetame võrrandit üldiseks ruutvõrrandiks; kui otsitava ruudu kordaja on 1, siis võrrand on taandatud ruutvõrrand.

§ 37. Mittetäielik ruutvõrrand ja selle lahendamine.

Võib juhtuda, et ruutvõrrandis puudub teine või kolmas liige või mõlemad;

kui ruutvõrrandis puudub otsitavast vaba liige või liige otsitava esimese astmega, siis nimetame ruutvõrrandit mittetäielikuks.

1. juhtum. Kui ruutvõrrandi vabaliige on null, omab võrrand kuju

$$ax^2 + bx = 0.$$

Selle lahendamiseks võtame vasakul poolel otsitava sulgude ette; saame

$$x(ax + b) = 0.$$

Viimane võrdus nõuab, et tegurite x ja $ax + b$ korrutis oleks null. Korrutis on aga ainult siis null, kui tegurite hulgas esineb null. Et siin on kaks tegurit, siis on võrrandi rahuldamiseks kaks võimalust: 1) esimene tegur võetakse nulliks; 2) teine tegur võetakse nulliks. Kaks võrrandi rahuldamise võimalust annavadki kaks lahendit — esimesele võimalusele vastavalt saame

$$x_1 = 0$$

ja teisele võimalusele vastavalt

$$ax_2 + b = 0,$$

millest

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Kontrollimisel selgub, et nii 0 kui ka $-\frac{b}{a}$ rahuldavad antud võrrandit. Siit näeme, et selle ruutvõrrandi lahendamine viis kahele lineaarvõrrandile: $x = 0$ ja $ax + b = 0$.

Ulesanne. Lahendada võrrand $4x^2 + 3x = 0$.

Lahendus. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$x(4x + 3) = 0.$$

Siit järeldame, et

$$x_1 = 0 \text{ ja } 4x_2 + 3 = 0,$$

see tähendab, et

$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Kontroll.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 &= 0, \text{ samuti } 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \\ &= 4 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} = 0. \end{aligned}$$

2. juhtum. Kui ruutvõrrandis puudub otsitava esimese astmega liige ehk lineaarne liige, siis võib võrrandi kirjutada järgmisel kujul:

$$ax^2 = c$$

$$\text{ehk } ax^2 - c = 0.$$

Selle võrrandi saame lahendada 1. juhu eeskujul, teisendades võrrandi vasaku poole korrutiseks. Jagades esmalt iga liikme kordajaga a , saame

$$x^2 - \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0$$

ehk

$$\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0.$$

Võrrand on rahuldatud, kui

1) esimene tegur on null,
aga ka siis, kui

2) teine tegur on null.

Seega saame jälle kaks lineaarset võrrandit:

$$x - \sqrt{\frac{c}{a}} = 0 \quad \text{ja} \quad x + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0,$$

millest

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Ruutvõrrandi

$$ax^2 = c$$

lahendid võime saada ka arutades nõnda:

$$\text{kui } ax^2 = c,$$

$$\text{siis } x^2 = \frac{c}{a},$$

millest

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \text{aga ka } x = -\sqrt{\frac{c}{a}},$$

sest

$$a\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = c \quad \text{ja} \quad a\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = c.$$

Tavaliselt kirjutatakse need ruutvõrrandi kaks lahendit ühe võrduse abil:

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Niisiis

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Kui arv $\frac{c}{a}$ on positiivne, on võrrandil kaks lahendit.

Kui arv $\frac{c}{a}$ on negatiivne, siis võrrandil $ax^2 = c$ ei ole lahendit, sest siis see võrrand nõuab, et x^2 võrduks negatiivse arvuga $\frac{c}{a}$, aga niisugust nõuet ei saagi täita.

Kui $c = 0$, siis ka $\frac{c}{a} = 0$ ja ka $\sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ ning $-\sqrt{\frac{c}{a}} = 0$, seega võrrandil on kaks teineteisega võrdset lahendit:

$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = 0.$$

Näide 1. $9x^2 - 16 = 0$

$$(3x - 4)(3x + 4) = 0$$

$$3x - 4 = 0$$

$$3x + 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$3x = -4$$

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = -\frac{4}{3}$$

Või lühemalt: $9x^2 - 16 = 0$, siit $x^2 = \frac{16}{9}$, millest $x = \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3}$; siit $x_1 = \frac{4}{3}$ ja $x_2 = -\frac{4}{3}$.

Näide 2.

$$x^2 + 10 = 0$$

$$x^2 = -10.$$

Võrrandil ei ole lahendit.

Ülesanded.

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

492. $x(x + 2) = 0$

492. $(x - 3)(x - 7) = 0$

$(x - 4)(x + 5) = 0$

$3x(7x - 8) = 0$

$$493. \quad x^2 - 169 = 0 \\ x^2 - 196 = 0$$

$$494. \quad 3x^2 - 48 = 0 \\ 4x^2 - 49 = 0$$

$$495. \quad x^2 - 13x = 0 \\ 6x^2 + 8x = 0$$

$$496. \quad x^2 = 81 \\ x^2 = 121$$

$$497. \quad 2x^2 = 98 \\ 5x^2 = 80$$

$$498. \quad (2x - 5)(x + 8) = 0 \\ 13x^2 = 52x$$

$$499. \quad x^2 = 0,64 \\ x^2 = 0,841$$

$$500. \quad 6x^2 - 4,86 = 0 \\ 5x^2 = 180$$

$$501. \quad x^2 - 6 = 0 \\ 2x^2 = 10$$

$$493. \quad x^2 - 529 = 0 \\ x^2 - 576 = 0$$

$$494. \quad 2x^2 - 72 = 0 \\ 16x^2 - 81 = 0$$

$$495. \quad 5x^2 + 12x = 0 \\ 2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$$

$$496. \quad x^2 = 361 \\ x^2 = 400$$

$$497. \quad 3x^2 = 3,63 \\ 7x^2 = 175$$

$$498. \quad (3x + 9)(7x - 3) = 0 \\ \frac{3}{8}x^2 + 9x = 0$$

$$499. \quad x^2 = 1,69 \\ x^2 = 2,25$$

$$500. \quad 12x^2 = 3 \\ 8x^2 - 2 = 0$$

$$501. \quad 3x^2 = 21 \\ x^2 - 12 = 0$$

Ülesande lahendamisel ruutvõrrandi abil tuleb lahendite kontrollimisel ka seda vaadata, kas mõlemad lahendid sobivad ülesande tingimustega või mitte.

Ülesanne 1. Ruudukujulise toa põranda pindala on 25 m². Kui lai on see tuba?

Lahendus. Olgu toa laius x meetrit, siis tema pindala on x^2 ruutmeetrit.

Seega

$$x^2 = 25.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -5.$$

Et toa laius ei saa olla negatiivne, siis sobib ainult positiivne lahend.

Vastus. Toa laius on 5 meetrit.

Ulesanne 2. Kui otsitav arv esmalt liita arvuga 7 ja pärast lahutada arvust 7, siis tulemuste korrutis on 24. Leida otsitav arv.

Lahendus. Tähistame otsitava arvu tähega x . Seda arvu 7-ga liites saame $7 + x$, selle arvu 7-st lahutades saame $7 - x$. Tulemuste korrutis peab olema 24; seega

$$(7 + x)(7 - x) = 24$$

$$49 - x^2 = 24$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

Kontroll.

$$x_1 = 5.$$

$$7 + x_1 = 7 + 5 = 12$$

$$7 - x_1 = 7 - 5 = 2$$

$$12 \cdot 2 = 24$$

$$x_2 = -5.$$

$$7 + x_2 = 7 - 5 = 2$$

$$7 - x_2 = 7 - (-5) = 12$$

$$2 \cdot 12 = 24.$$

Mõlemad lahendid sobivad.

Vastus. Otsitav arv on kas 5 või -5 .

Ülesanded.

502. Ruudu pindala on 144 cm^2 . Kui suur on selle ruudu külg?

502. Ringi pindala on 400 m^2 . Kui pikk peab olema selle ringiga pindvõrdse ruudu külg?

503. Ristküliku külgede pikkused on 5 m ja 10 m . Kui pikk on niisuguse ruudu külg, mille pindala on selle ristküliku pindalast 2 korda väiksem?

503. Kolmnurga kaatedid on 4 cm ja 6 cm . Leida niisuguse ruudu külje pikkus, mille pindala on selle kolmnurga pindalast 3 korda suurem.

504. Uhe ja sama arvu liitmisel 12-ga ja lahutamisel 12-st saame tulemused, mille korrutis on 140. Mis arv see on?

504. Kahest arvust on üks sajast nii palju suurem, kui teine on sajast väiksem. Arvude korrutis on 9639. Mis arvud need on?

§ 38. Ruutvõrrandi $(x + m)^2 = n$ lahendamine.

Võrrandi $(x + m)^2 = n$ vasak pool on täisruut. Kui $n < 0$, pole võimalik seatud nõuet rahuldada, sest täisruudu väärtus ei saa iialgi olla negatiivne. Sel juhul võrrandil pole lahendit.

Kui $n = 0$, siis võrrand on $(x + m)^2 = 0$,
seega

$$(x + m)(x + m) = 0,$$

niisiis

$$x_1 = -m \text{ ja } x_2 = -m,$$

seega on võrrandil kaks teineteisega võrdset lahendit.

Kui $n > 0$, siis

$$(x + m)^2 = n.$$

Siit saame kaks lineaarset võrrandit, mida kirjutame ühe võrduse abil:

$$x + m = \pm \sqrt{n},$$

seega

$$x = -m \pm \sqrt{n},$$

millest leiame võrrandi kaks lahendit:

$$x_1 = -m + \sqrt{n} \quad \text{ja} \quad x_2 = -m - \sqrt{n}.$$

Ülesanne. Lahendada võrrand

$$(x + 3)^2 = 25.$$

Lahendus. Saame

$$x + 3 = \pm \sqrt{25}.$$

ehk

$$x + 3 = \pm 5;$$

seega

$$x_1 = -3 + 5 = 2 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 5 = -8.$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

505. $(x - 2)^2 = 16$

505. $(x - 1,4)^2 = 33,64$

506. $(x + 5)^2 = 25$

506. $(x + \frac{1}{5})^2 = \frac{36}{81}$

507. $(x - 9)^2 = 529$

507. $(x - \frac{6}{7})^2 = \frac{16}{49}$

508. $(x - 0,3)^2 = 1,69$

508. $(x + 8\frac{1}{2})^2 = 52\frac{9}{16}$

509. $(x - 1,2)^2 = 1,44$

509. $(x - \frac{3}{4})^2 = 28\frac{4}{9}$

510. $(x - 3)^2 = 8$

510. $(x - 1,2)^2 = 1,43$

511. $(x + 4)^2 = 12$

511. $(x - 0,2)^2 = 0,5$

512. $(x + 10)^2 = 10$

512. $(x + 0,5)^2 = 2,27$

513. $(x - 1)^2 = 3$

513. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 1\frac{2}{9}$

514. $(x + 7)^2 = 17$

514. $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = 3\frac{1}{4}$

§ 39. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand $x^2 + 6x + 9 = 49$.

Lahendus. Kirjutades antud võrrandi kujul

$$(x + 3)^2 = 49$$

näeme, et ta kuulub eespool käsitletud võrrandiliiki. Lahendades saame

$$x + 3 = \pm \sqrt{49},$$

seega

$$x + 3 = \pm 7,$$

niisiis

$$x = -3 \pm 7,$$

järelikult

$$x_1 = -3 + 7 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 7$$

ehk

$$x_1 = 4 \quad \text{ja} \quad x_2 = -10.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand $x^2 + 6x = 55$.

Lahendus. Võrreldes seda võrrandit eelmises ülesandes esinenud võrrandiga, paneme tähele, et vasakud pooled erinevad vaid vabaliikme 9 võrra. Liidame selle arvu vasaku poolega ja teeme sama ka parema poolega, et võrrand jääks jõusse; saame:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

ehk

$$(x + 3)^2 = 64;$$

siit

$$x + 3 = \pm \sqrt{64}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 8$$

ehk

$$x = -3 \pm 8$$

ehk

$$x_1 = -3 + 8 = 5 \text{ ja } x_2 = -3 - 8 = -11.$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrand $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Lahendus. Teisendame antud võrrandi nii, et võrrandi vasak pool on täisruut. Selleks viime vabaliikme paremale poolele; saame

$$x^2 + 3x = 10.$$

Tähele pannes, et avaldist $3x$ võime kirjutada kujul $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x$, näeme, et vasak pool saab täisruuduks, kui temaga liidame $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, tuleb sedasama teha ka parema poolega; nii saame

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Seega on

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$$

ehk

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4};$$

siit

$$x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \pm \frac{7}{2},$$

see tähendab

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

seega

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2 \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5.$$

Ülesanded.

Täiendada järgmised avaldised täisruutudeni:

515. $x^2 + 14x$

515. $x^2 + 8x$

516. $x^2 - 100x$

516. $x^2 - 5x$

517. $x^2 + 7x$

517. $x^2 - 0,8x$

518. $x^2 + 1,4x$

518. $x^2 + \frac{1}{2}x$

519. $x^2 + \frac{2}{3}x$

519. $x^2 - \frac{3x}{4}$

520. $x^2 - 0,2x$

520. $x^2 + 7,2x$

Lahendada järgmised ruutvõrrandid, tarvitades täisruuduni täiendamise võtet:

521. $x^2 - 2x = 3$

521. $y^2 + 4y = 5$

522. $z^2 - 6z = -8$

522. $u^2 - 8u = 9$

523. $p^2 + 3p - 18 = 0$

523. $q^2 - 7q + 10 = 0$

524. $r^2 - r - 12 = 0$

524. $s^2 + 5s + 6 = 0$

§ 40. Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalem.

Kirjutame antud võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kujul

$$x^2 + px = -q$$

ja täiendame vasaku poole täisruuduni; selleks liidame vasaku poolega liikme $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, teeme seda ka parema poolega; nii saame

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Kui nüüd ilmneb, et arv $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ on negatiivne, siis võrrandil ei ole lahendeid, sest ei saa kehtida võrdus, mille üks pool on mingi arvu ruut ja teine pool on negatiivne arv.

Kui arv $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ei ole negatiivne, siis saame kaks lineaarset võrrandit

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

mis ühe võrduse abil väljenduvad järgmiselt:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

seega

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Saadud võrdust nimetame taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemiks; sõnastame selle järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on pool otsitava esimese astme kordaja vastasarvust \pm ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

Ulesanne. Lahendada võrrand $x^2 - x - 20 = 0$.

Lahendus. Siin $p = -1$, $q = -20$, seega

$$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Järelikult

$$x = -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Leitud arvude 5 ja -4 asetamine x -i asemele võrrandi vasakusse poole kinnitab, et need arvud tõesti on võrrandi lahendid.

Eespool saadud lahendusvalemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0,$$

see tähendab, kui

$$p^2 - 4q \geq 0.$$

Kui

$$p^2 - 4q > 0,$$

siis on võrrandil kaks erinevat lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kui

$$p^2 - 4q = 0,$$

siis on võrrandil kaks teineteisega võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} \text{ ja } x_2 = -\frac{p}{2}.$$

Kui

$$p^2 - 4q < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit, nagu eespool selgus.

Ülesanded.

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

525. $x^2 - 3x + 2 = 0$

525. $x^2 - 7x + 12 = 0$

526. $x^2 - 2x - 3 = 0$

526. $x^2 + 3x - 4 = 0$

527. $x^2 - x - 6 = 0$

527. $x^2 - 3x - 10 = 0$

528. $x^2 + 5x + 6 = 0$

528. $x^2 + 8x + 7 = 0$

529. $x^2 + 8x + 15 = 0$

529. $x^2 + 15x + 56 = 0$

Lahendada järgmised ruutvõrrandid, andes lahendid täpsusega 0,1:

530. $x^2 - 6x + 4 = 0$

530. $x^2 + 5x + 4 = 0$

531. $x^2 + 8x + 13 = 0$

531. $x^2 - 9x - 1 = 0$

532. $x^2 - 5x + 3 = 0$

532. $x^2 + 2x + 0,7 = 0$

533. $x^2 - x - 50 = 0$

533. $x^2 + 0,8x - 1 = 0$

534. $x^2 + 7x - 5 = 0$

534. $x^2 + 5x + 5 = 0$

Lahendada järgmised ruutvõrrandid. Kus lahend on irratsionaalne, määrata ta veaga alla 0,01.

535. $x^2 - 9x - 36 = 0$

535. $x^2 - 8x + 9 = 0$

536. $x^2 + 7x - 7 = 0$

536. $x^2 + 5x - 66 = 0$

537. $x^2 - x - 20 = 0$

537. $x^2 + 4x + 4 = 0$

538. $x^2 + 2x - 2 = 0$

538. $x^2 + 7x - 120 = 0$

539. $x^2 - 20x + 91 = 0$

539. $x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} = 0$

540. $x^2 + 3x - 19 = 0$

540. $u^2 - 6u + 4 = 0$

541. $x^2 - 11x + 10 = 0$

541. $u^2 + 13u - 14 = 0$

542. $y^2 - 4y + 6 = 0$

542. $v^2 - v + 42 = 0$

543. $y^2 + 9y + 12 = 0$

543. $v^2 - 9v + 7 = 0$

544. $z^2 - 7z - 8 = 0$

544. $w^2 + 15w - 1 = 0$

545. Jaotada lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nõnda, et suurema osa jagatis kogu lõiguga on sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

545. Kahe arvu vahe on 6; samade arvude ruutude summa on 260. Mis arvud need on?

546. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

546. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

547. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

547. Jaotada arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

548. Kahe teineteisele järgneva paarituarvu korrutis on 1295. Mis arvud need on?

548. Kahe teineteisele järgneva paarisarvu korrutis on 6888. Mis arvud need on?

§ 41. Üldise ruutvõrrandi lahendusvalem.

Nagu ülalpool nägime, üldine ruutvõrrand on

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ka selle võrrandi saame lahendada täisruuduni täiendamise võttega. Selleks korrutame võrrandi kõiki liikmeid avaldisega $4a$, siis saame

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

ehk viies vabaliikme paremale poolele

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

lisame nüüd mõlemale poolele uue liikme b^2 , siis saame

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Võrrandi vasak pool ongi nüüd täisruut, ta on võrdne nimelt avaldisega $(2ax + b)^2$, järelikult võime võrrandi nüüd kirjutada kujul

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Siit näeme, kas võrrand on lahenduv või mitte: kui kordajad a ja b ning vabaliige c on niisugused, et $b^2 - 4ac$ tuleb negatiivne, siis võrrandil lahendeid ei ole, nagu taandatud võrrandi puhulgi, sest siis võrrand nõuab, et $(2ax + b)^2$ oleks negatiivne, see on aga võimatu.

Kui $b^2 - 4ac$ ei ole negatiivne, siis saab võrrandist järeldada kaks lineaarset võrrandit

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ja} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac},$$

ehk, neid ühe võrduse abil kirjutades,

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Otsitava x avaldamiseks tuleb nüüd liige b viia paremale poolele ja siis mõlemat poolt jagada kordajaga $2a$; saame

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

See on üldise ruutvõrrandi lahendusvalem; selle võime sõnastada järgmiselt:

Üldise ruutvõrrandi lahend on murd; selle nimetaja on otsitava ruudu kordaja kahekordne; lugeja aga on otsitava esimese astme kordaja vastasarv \pm ruutjuur selle kordaja ruudu ja neljakordse otsitava ruudu kordaja ja vabaliikme korrutise vahest.

Saadud valemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null, niisiis neil juhtumel, kui lahendid on olemas.

Kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

siis on kõnesoleval ruutvõrrandil 2 erinevat lahendit:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis võrrand saab kuju

$$(2ax + b)^2 = 0$$

ehk

$$(2ax + b)(2ax + b) = 0$$

ehk

$$(2ax_1 + b)(2ax_2 + b) = 0.$$

Saame 2 lineaarset võrrandit

$$2ax_1 + b = 0 \quad \text{ja} \quad 2ax_2 + b = 0,$$

millest saame 2 võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit.

Avaldist $b^2 - 4ac$ nimetame üldise ruutvõrrandi diskriminandiks.

Ladinakeelne sõna *discriminans* tähendab eraldaja ehk vahetegija.

Seda diskriminanti tähistatakse sageli tähega D . Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendeid või mitte.

Diskriminandi D kaudu võime üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalemi kirjutada kujul:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Üldise ruutvõrrandi lahendusvalem on rakendatav ka kõigi erikujuliste ruutvõrrandite lahendamisel:

kui $a = 1$, siis võrrand osutub taandatud ruutvõrrandiks $x^2 + bx + c = 0$ ja valem annab tema lahendid:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c};$$

kui $b = 0$, siis võrrand osutub mittetäielikuks ruutvõrrandiks (§ 37, 2. juhtum) $ax^2 + c = 0$ ja valem annab tema lahendid

$$\frac{\pm \sqrt{-4ac}}{2a} \text{ ehk lihtsustatult } \pm \sqrt{-\frac{c}{a}};$$

kui $c = 0$, siis võrrand on ka mittetäielik, nimelt $ax^2 + bx = 0$ (§ 37, 1. juhtum) ja valemi järgi saame lahendid

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} \text{ ehk } \frac{-b \pm b}{2a} \text{ ehk eraldi kirjutades } 0 \text{ ja } -\frac{b}{a}.$$

M ä r k u s.

Kui üldises ruutvõrrandis kordaja b on paarisarv, siis saab lahendusvalemi lihtsamaks teisendada. Paarisarvulise kordaja b võime kirjutada kujul

$$b = 2k;$$

võrrand saab siis kuju

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Asendades valemis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

suuruse b avaldisega $2k$, saame

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

Nii et

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Nagu näeme, see valem on üldisest valemist selle poolest lihtsam, et juuremärgi all puudub kordaja 4 ja nimetas ja puudub kordaja 2.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand

$$63x^2 + 62x + 15 = 0.$$

Lahendus. Nüüd $b = 62 = 2 \cdot 31$, seega $k = 31$.

Rakendades lihtsustatud lahendusvalemit, saame

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 945}}{63} = \frac{-31 \pm \sqrt{16}}{63} = \frac{-31 \pm 4}{63};$$

$$x_1 = \frac{-31 + 4}{63} = -\frac{27}{63} = -\frac{3}{7};$$

$$x_2 = \frac{-31 - 4}{63} = -\frac{35}{63} = -\frac{5}{9}.$$

Ülesanne 2. Kas võrrandil $6x^2 + 7x - 3 = 0$ on lahendeid või mitte? Kui on, siis kas lahendid on erinevad või võrdsed, ratsionaalsed või irratsionaalsed?

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 49 + 72 = 121;$$

$D > 0$, seega võrrandil on kaks erinevat lahendit; D on täisruut, seega lahendid on ratsionaalsed.

Vastus. Võrrandil $6x^2 + 7x - 3 = 0$ on kaks erinevat ratsionaalset lahendit.

Ülesanne 3. Otsustada võrrandit lahendamata, kas võrrandil $3x^2 - x - 1 = 0$ on lahendeid või mitte, kui on, siis kas erinevad või võrdsed, kas ratsionaalsed või irratsionaalsed?

Lahendus. $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13$

$$D > 0; \quad \sqrt{D} = \sqrt{13}.$$

Vastus. Võrrandil $3x^2 - x - 1 = 0$ on kaks erinevat irratsionaalset lahendit.

Ülesanne 4. Kas võrrand $5x^2 - 4x + 7 = 0$ on lahenduv või mitte?

Lahendus. $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 16 - 140 = -124$
 $D < 0.$

Vastus. Võrrand $5x^2 - 4x + 7 = 0$ ei ole lahenduv.

Ülesanne 5. Lahendada võrrand

$$\frac{15x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} + \frac{9}{x^2-9} = 0.$$

Lahendus. Võrrandis esinevate murdude ühine nimetaja on $2(x^2 - 9)$, seega vastavad laiendajad on $x + 3$, $x - 3$ ja 2.

Niisiis

$$\frac{\frac{x+3}{15x}}{2(x-3)} - \frac{\frac{x-3}{x}}{2(x+3)} + \frac{\frac{2}{9}}{x^2-9} = 0$$

$$15x(x+3) - x(x-3) + 18 = 0$$

$$15x^2 + 45x - x^2 + 3x + 18 = 0$$

$$14x^2 + 48x + 18 = 0$$

$$7x^2 + 24x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 63}}{7} = \frac{-12 \pm \sqrt{81}}{7} = \frac{-12 \pm 9}{7};$$

$$x_1 = \frac{-12 + 9}{7} = -\frac{3}{7}; \quad x_2 = \frac{-12 - 9}{7} = -3.$$

Kontroll. Asetame esimese leitud lahendi algvõrrandi vasakusse poolde x -i asemele, siis saame

$$\begin{aligned} & \frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} - 3\right)} - \frac{-\frac{3}{7}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} + 3\right)} + \frac{9}{49 - 9} = \\ & = \frac{-\frac{45}{7}}{-\frac{48}{7}} + \frac{\frac{3}{7}}{\frac{36}{7}} + \frac{9}{\frac{9 - 441}{49}} = \frac{45}{48} + \frac{3}{36} + \frac{9 \cdot 49}{-432} = \\ & = \frac{15}{16} + \frac{1}{12} - \frac{49}{48} = \frac{45 + 4 - 49}{48} = 0. \end{aligned}$$

Näeme, et lahend $-\frac{3}{7}$ rahuldab võrrandit, seetõttu võib arvata, et arvutused on õiged ja et ka teine lahend on õigesti arvutatud; et aga antud võrrandis otsitav esineb nimetas, siis peab ka teist lahendit proovima, sest võib juhtuda, et arvutused on küll õiged, aga mõni lahendiks saadud arv ei rahulda algvõrrandit.

Kui $x = -3$, siis algvõrrandi vasak pool saab kuju

$$\frac{15(-3)}{2(-3-3)} - \frac{-3}{2(-3+3)} + \frac{9}{(-3)^2 - 9}$$

ehk

$$\frac{-45}{-12} - \frac{-3}{2 \cdot 0} + \frac{9}{9 - 9};$$

et siin esinevad jagamised nulliga, siis pole sel avaldisel arvu tähendust ega saa ta võrduda võrrandi parema poole väärtusega. Järelikult arv -3 ei ole algvõrrandi lahend, kuigi ta on algvõrrandist tuletatud võrrandi lahend.

Ülesanded

Leida järgmiste ruutvõrrandite lahendid, rakendades võrrandi lahendusvalemit, ja kontrollida saadusi:

549.	$3x^2 - 2x - 8 = 0$	549.	$13x^2 - 11x - 2 = 0$
	$2x^2 + 9x + 10 = 0$		$9x^2 + 12x - 5 = 0$
	$4x^2 + 7x - 2 = 0$		$4x^2 - 4x - 3 = 0$
	$2x^2 - 5x + 2 = 0$		$8 + 11x - 10x^2 = 0$
	$3x^2 - 8x - 3 = 0$		$2 + 3x - 2x^2 = 0$

Leida järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,1, tarvitades lahendusvalemit, ja kontrollida saadusi:

550.	$x^2 + 9x - 5 = 0$	550.	$5a^2 - 11a + 3 = 0$
	$2y^2 + y - 7 = 0$		$3b^2 + 12b - 17 = 0$
	$3z^2 - 8z + 4 = 0$		$6c^2 - 13c - 15 = 0$
	$2u^2 + 3u - 1 = 0$		$d^2 - 14d + 4 = 0$
	$3v^2 - 10v + 10 = 0$		$e^2 - 16e + 11 = 0$

Allpool järgneb 5 ruutvõrrandit. Anda nende ratsionaalsed lahendid täpselt, nende irratsionaalsed lahendid aga ligikaudu veaga alla 0,01.

551.	$3x^2 + 5x - 2 = 0$	551.	$4m^2 + 45m - 36 = 0$
	$2u^2 + 5u + 2 = 0$		$10n^2 + 21n - 10 = 0$
	$s + 6 = 2s^2$		$9q^2 + 30q - 24 = 0$
	$6a^2 - 17a - 14 = 0$		$1,4z^2 + 5z = 2,4$
	$10p - 21 = 6p^2 - 13p$		$w^2 - 1,6w + 0,3 = 0$

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

552.	$2x^2 - 7x + 5 = 0$	552.	$7x^2 - 42x + 36 = 0$
	$x^2 + 23x - 10 = 0$		$69x^2 - x - 55 = 0$
	$6x^2 + 4x - 3 = 0$		$9x^2 + 50x - 121 = 0$
	$3x^2 + 18x - 8 = 0$		$1,2x^2 + 8,3x - 23,6 = 0$
	$4x^2 - 13x - 17 = 0$		$3,4x^2 - 2,5x - 6 = 0$

$$\begin{aligned}
 553. \quad & x(x+2) = 35 \\
 & x^2 = 3(2x-3) \\
 & 2(x^2-9) = 5(x-4) \\
 & (x-1)^2 = x+1 \\
 & (1+2x)(1-2x) = 3x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 553. \quad & (x+7)^2 = 28x \\
 & 4 = (x-5)^2 \\
 & (x-5)(7-x) = 1 \\
 & x^2 = 2(x+8)(x-6) \\
 & (2x-7)(x-3) = 4x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 554. \quad & 9x(x+1) = 2(6x+1) \\
 & (1+x)^2 = (1-2x)^2 \\
 & (3x-2)(2x-1) = x \\
 & (3-x)^2 = (1+3x)(9-x) \\
 & (2x+3)^2 = (3x-2)(x+8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 554. \quad & (3x-1)(x-2) = (x+2)(x-1) \\
 & (4x-1)^2 = (4x+1)(8x-5) \\
 & (5x+7)^2 - (2x+1)^2 = 0 \\
 & 2(x-1)(2x+1) = (4x-1)(2x-3) \\
 & (8x+3)(4x+1) = 2(x+1)(4x+3)
 \end{aligned}$$

Allpool on antud 5 ruutvõrrandit. Ilma võrrandit lahendamata otsustada, kas võrrandil on lahendeid, kas nad on ratsionaalsed ja kas nad on teineteisega võrdsed või mitte.

$$\begin{aligned}
 555. \quad & 3x^2 - 8x + 5 = 0 \\
 & x^2 - 4x + 8 = 0 \\
 & a^2 + 3a - 1 = 0 \\
 & 5c^2 - 3c = 2 \\
 & 3n^2 = 7n + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 555. \quad & 9x^2 + 12x + 4 = 0 \\
 & 7z^2 + 3z = 0 \\
 & u^2 + 2u + 3 = 0 \\
 & 5v^2 + 7v + 3 = 0 \\
 & w^2 - 6w + 4 = 0
 \end{aligned}$$

Lahendada järgmised võrrandid:

$$556. \quad \frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$$

$$556. \quad \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$557. \quad \frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 - \frac{120}{(12-5x)^2}$$

$$557. \quad 3(2x-3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 5$$

558. $\frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$
558. $11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$
559. $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$
559. $\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$
560. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$
560. $\frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$
561. $\frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$
561. $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$
562. $\frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4$
562. $7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$
563. $\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)^2}$
563. $\frac{4x^2-1}{4x+2} = \frac{9(2x+1)}{22} + \frac{8x^2-2}{2x+1}$
564. $\frac{x-2}{x^2+2x+1} + \frac{4x-8}{x+2x^2+x^3} = \frac{5x-10}{2x+2x^2}$
564. $\frac{3x^2+2}{x^2-1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}$
565. $\frac{4x^2-1}{x+2} + 2 = 4x - \frac{(4x+1)(2x-1)}{x^2+4x+4}$
565. $\frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x^2+2x} = \frac{3(x^2+2x+1)}{2x^2-2x}$

$$566. \quad \frac{7x+14}{x^2-1} + \frac{8x+16}{x^2-2x+1} = \frac{74+19x-9x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$566. \quad \frac{x+1}{x^3+x^2+x+1} + \frac{2x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{15}{x^4-1}$$

§ 42. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid.

Ülesanne 1. Ristküliku-kujuline spordiväljak on 88 aari suur. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

Lahendus. Olgu ruudu külg x meetrit. Siis on ristküliku küljed meetrites $x+2$ ja $x-10$. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x+2)(x-10)$$

ehk

$$x^2 - 8x - 20.$$

Teiselt poolt see pindala on 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$$x^2 - 8x - 20 = 8800.$$

ehk

$$x^2 - 8x - 8820 = 0.$$

Võrrandi lahendusvalem annab:

$$x = 4 \pm \sqrt{8836}$$

ehk

$$x = 4 \pm 94;$$

seega

$$x_1 = 4 + 94 = 98 \quad \text{ja} \quad x_2 = 4 - 94 = -90.$$

Et ruudu külg on oma loomult positiivne suurus, siis x_2 meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks ülesande lahendiks jääb arv 98; see tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

Kontroll. Väljaku küljed on meetrites $98 + 2 = 100$ ja $98 - 10 = 88$; seega väljaku pindala on $100 \cdot 88$ ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

Ülesanne 2. Ema kingib tütrele 216 rubla taskurättide ostmiseks. Poes selgub, et rätid on vahepeal hinnas langenud 1 rubla tükilt, mille tõttu neid rätte saaks kingitud raha eest osta 3 tükki enam kui kavatseti. Mitu rätti kavatseti osta?

Lahendus. Olgu osta soovitud rättide arv x . Nende eelarvestatud tükihind oleks siis $\frac{216}{x}$ rubla. Rätti hind poes on sellest 1 rubla madalam, seega

$$\frac{216}{x} - 1$$

rubla. Selle tükihinna puhul saaks rätte osta 3 tükki enam kui kavatseti, niisiis

$$x + 3.$$

Rättide koguhinna rublades saame kujul

$$(x + 3) \left(\frac{216}{x} - 1 \right);$$

see koguhind oli 216 rubla, järelilikult

$$(x + 3) \left(\frac{216}{x} - 1 \right) = 216.$$

Kui x -iga korrutame võrrandi kumbagi poolt, saame

$$(x + 3)(216 - x) = 216x$$

ehk

$$216x + 648 - x^2 - 3x = 216x$$

ehk

$$-x^2 - 3x + 648 = 0$$

ehk jagades võrrandi kumbagi poolt -1 -ga

$$x^2 + 3x - 648 = 0.$$

Otsitava x leidmine nõuab taandatud ruutvõrrandi lahendamist. See annab

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 648} = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2}$$

ehk

$$x_1 = \frac{-3 + 51}{2} = 24 \text{ ja } x_2 = \frac{-3 - 51}{2} = -27.$$

Et rätide arv on oma loomult positiivne, siis teine lahend ei tule arvesse. Seega kavatseti osta taskurätte 24 tükki ehk 2 tosinat. Räti eelarvestatud hinna saame jagades 216 rubla 24-ga; nii leiame:

$$216 \text{ rubla} : 24 = 9 \text{ rubla.}$$

Kontroll. $9 - 1 = 8$; nii mitu rubla maksab rätt poes; $216 : 8 = 27$; nii mitu rätti saaks osta; see arv on just kolme võrra suurem 24-st, nagu peab olema.

Ülesanne 3. Kahe koha A ja B vaheline kaugus on 349 km. Kohast A lahkub sõiduk koha B suunas. Üks tund hiljem lahkub kohast B teine sõiduk koha A suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel kohast A. Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus v kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus $v - 8$ kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel 349 - 216 ehk 133 km. Selleks kulus aega

esimesel $\frac{216}{v}$ tundi,

teisel $\frac{133}{v - 8}$ tundi.

Esimese aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v - 8} = 1.$$

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v - 8) - 133v = v(v - 8);$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame -1 -ga; see annab:

$$v^2 - 91v + 1728 = 0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendusvalem annab:

$$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2} \text{ ehk } v = \frac{91 \pm 37}{2};$$

seega

$$v_1 = 64 \text{ ja } v_2 = 27.$$

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 km tunnis või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 km tunnis või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{64} \text{ ehk } 3\frac{3}{8} \text{ tundi, teine seevastu } \frac{133}{56} \text{ ehk } 2\frac{3}{8} \text{ tundi;}$$

aegade vahe on $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$ ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{27} \text{ ehk } 8 \text{ tundi, teine seevastu } \frac{133}{19} \text{ ehk } 7 \text{ tundi;}$$

aegade vahe on $8 - 7$ ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid kõlbavad.

§ 43. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid.

567. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?

567. Arvu ruudu ja arvu enda vahe on 650. Leida see arv.

568. Kahe järjestikuse täisarvu ruutude summa on 545. Mis arvud need on?

568. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?

569. Kahe arvu vahe on 7; nende arvude korrutis on 368. Leida need arvud.

569. Kahest arvust üks on teisest 8 võrra suurem. Nende arvude korrutis on 425. Leida need arvud.

570. Kas on olemas kolm niisugust järjestikust täisarvu, et kahe väiksema ruutude summa võrdub suurema ruuduga?

570. Leida kolm niisugust järjestikust paarisarvu, et kahe väiksema ruutude summa oleks võrdne kolmanda ruuduga.

571. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leida ristküliku mõõted.

571. Ristküliku ümbermõõt on 68 cm ja pindala on 204 cm². Leida ristküliku pikkus ja laius.

572. Kui ruudu üht külge suurendada 3 korda ja teist vähendada 2 m võrra, siis ruudu pindala suureneb 2 korda. Kui pikk on ruudu külg?

572. Mänguväli on ristküliku-kujuline mõõdetega 8 m ja 4 m. Mänguvälja pindala tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt pikkust ja laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi?

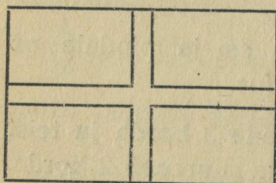
573. Kiht pingpongi-palle katab karbi ruudukujulise põhja. Pärast ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

573. Kiht kanamune asetseb ruudukujulises sõrestikus. Pärast kahe munarea väljavõtmist jääb sõrestikku veel 48 muna. Mitu muna on reas?

574. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 8 dm^3 . Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud külje pikkusega 5 cm. Missuguse külje pikkusega on papitükk?

574. Ristküliku-kujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem tema laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm^3 . Kui suured on papitüki mõõded?

575. Võõrastetoa põrandat, mille kuju on ristkülik ja mõõded 4,8 ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põrandapindalast. Kui suur peab vaip olema?



575. Aia suurus on 160 korda 240 ruutmeetrit. Pikuti ja risti minevate teede alla (vaata joonist!) tahetakse võtta osa aiast, kuid mitte rohkem kui 2% kogu aia maa-alast. Kui suure võib valida ülimalt tee laiuse?

576. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riiulile ühepalju raamatuid. Kui igale riiulile panna 8 raamatut rohkem, kui esialgu määratud, siis jääb 4 riiulit tühjaks. Mitu riiulit on raamatukapil?

576. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumilehele ühepalju pilte. Kui igale lehele mahutada 2 pilti rohkem, kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

577. Kaks bussi sõidavad kahe linna vahet, mis on võrdne 72 km. Et esimene buss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis sõidab ta nimetatud tee 15 minuti võrra lühema aja jooksul ära kui teine. Kui suure kiirusega liiguvad bussid?

577. Kahe aleviku vaheline kaugus on sillutatud maantee kaudu 26 km, halva külatee kaudu 18 km. Autobus ja hobusõiduk asuvad ühel ajal teele; esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobus tunnis 15 km võrra rohkem sõidab kui hobusõiduk, jõuab ta sihtjaama viimasest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobus?

578. Kauplus vajab kaste 378 õuna pakkimiseks. Kui igasse kasti pandaks 9 õuna rohkem kui kavatsetud, siis vajataks kaste ühe võrra vähem. Mitu kasti on vaja?

578. Turist kavatses matkata 252 km. Et ta iga päev 3 km rohkem matkas kui kavatsetud, siis kestis matk 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?

579. Isa ja poeg koos niidaksid heinamaatüki 30 tunniga. Uksinda niites kuluks isal selleks 11 tundi vähem aega kui pojalt. Mitme tunniga niidaks kumbki üksinda selle heinamaatüki?

579. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 3 tunni jooksul. Leida aeg, mis on tarvilik paagi täitumiseks peapumba kaudu.

580. Paberitükist, mille mõõted on 24 ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdlauseid ribad. Ülejäänud ristküliku-kujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?

580. Pilt, mille mõõted on 20 ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2 . Kui lai on pildi raam?

§ 44. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused.

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendamisel leidsime, et

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Moodustame lahendite summa; et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Moodustame lahendite korrutise; saame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p$$

ja

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

See ruutvõrrandi kordajate ja lahendite vaheline seos kannab Viëta (vietaa)* teoreemi nime, mille nüüd võime sõnastada järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub otsitava esimese astme kordaja vastasarvuga; lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Ülesanne.

Allpool järgneb rida võrrandeid. Otsustada diskriminandi abil, neid võrrandeid lahendamata, missugused on lahenduvad, missugused mitte, ja lahenduvail võrrandeil otsustada eelnenud lause järgi, kas lahendid on positiivsed või negatiivsed või on üks lahend positiivne ja teine negatiivne.

$$581. \quad x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$x^2 + 4x - 227 = 0$$

$$x^2 + 13x + 59 = 0$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0$$

$$581. \quad x^2 - 12x + 61 = 0$$

$$x^2 + 14x + 48 = 0$$

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

$$x^2 - 17x - 38 = 0$$

$$x^2 - 19x + 92 = 0$$

§ 45. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi.

Ülesanne. Koostada ruutvõrrand, millel on antud lahendid x_1 ja x_2 .

Lahendus. Eespool tuletatud lause põhjal

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ehk teisiti

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{ja} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

* Prantsuse matemaatik, 1540—1603.

Näide. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{6}$.

Antud lahendite summa

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$.

Järelikult $p = \frac{1}{3}$ ja $q = -\frac{1}{12}$ ning seega otsitav ruutvõrrand on

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Korrutades kumbagi poolt 12-ga, saame samade lahenditega üldise ruutvõrrandi

$$12x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Ülesanded.

Kirjutada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

582.	3 ja 4	582.	$\frac{1}{2}$ ja 0
	-5 ja 10		$\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$
	-2 ja -6		2,3 ja -1,1
	-9 ja 7		4,5 ja -0,9
	2 ja -2		3 ja $-\frac{1}{3}$

Koostada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

583. $1 + \sqrt{2}$ ja $1 - \sqrt{2}$

583. $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$

$$584. \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ja } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$584. \quad \frac{5 + \sqrt{3}}{4} \text{ ja } \frac{5 - \sqrt{3}}{4}$$

$$585. \quad 2\sqrt{7} \text{ ja } -2\sqrt{7}$$

$$585. \quad 3\sqrt{2} \text{ ja } -3\sqrt{2}$$

§ 46. Ruuttrinoomi tegureiks lahutamine.

Avaldist

$$az^2 + bz + c,$$

milles a , b ja c tähendavad mingeid arve, nimetame suure z ruutkolmliikmeks ehk ruuttrinoomiks. Selle avaldise tegureiks lahutamist saab alustada arvu a sulgude ette toomisega:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right).$$

Tähistades $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ lühemalt tähtedega h ja k , saame

$$az^2 + bz + c = a(z^2 + hz + k).$$

Nii jääb veel tegureiks lahutada juba lihtsam ruuttrinoom

$$z^2 + hz + k.$$

Sellekujulisi kolmliikmeid saame harilikult lihtsate lineaarsete kaksliikmete korrutamisel; näiteks

$$(z + 2)(z + 3) = z^2 + 3z + 2z + 6 = z^2 + 5z + 6.$$

Kui tähistame tähtedega f ja g mingit kahte arvu, siis saame üldiselt, rakendades kaksliikmete korrutamise võtet,

$$(z + f)(z + g) = z^2 + (f + g)z + fg.$$

Lugedes saadud võrdust vastassuunas, näeme, et kolmeliige

$$z^2 + (f + g)z + fg$$

on esitatav korrutisena

$$(z + f)(z + g).$$

Järelikult ruuttrinoomi $z^2 + hz + k$ oskame otsekohe teisendada kahe lineaarse teguri korrutiseks $(z + f)(z + g)$, kui aga on teada niisugused arvud f ja g , millede summa on h ja korrutis on k . Mõnikord saab niisuguseid arve hõlpsasti leida proovimise teel; näiteks trinoomi $z^2 + 8z + 15$ puhul on kerge näha, et need arvud on 3 ja 5, mistõttu

$$z^2 + 8z + 15 = (z + 3)(z + 5).$$

Märksa raskem, näiteks, on proovimisel otsusele jõuda, et

$$z^2 - 5z - 36 = (z + 4)(z - 9).$$

Kui proovimine ruttu eesmärgile viib, võime teda edukalt tarvitada. Ometi peame varuks nõutama ka algebralise võtte, mida saaksime rakendada kõigil juhtudel, eriti kui arvud h ja k on suured ja proovimine läheks pikaks, ning mis võimaldaks ka otsustada, kunas üldse on ruuttrinoom esitatav lineaarsete tegurite korrutisena.

Niisuguse algebralise võtte saamiseks tuletame meelde taandatud ruutvõrrandi omadusi: kaks arvu, millede summa on $-h$ ja korrutis on k , osutuvad ruutvõrrandi

$$x^2 + hx + k = 0$$

lahenditeks. Kui tähistame neid lahendeid, nagu harilikult, x_1 ja x_2 , siis võrdustest

$$x_1 + x_2 = -h$$

$$x_1 \cdot x_2 = k$$

saame järeldada, et

$$(-x_1) + (-x_2) = h$$

$$(-x_1) \cdot (-x_2) = k.$$

Järelikult ruuttrinoomi $z^2 + hz + k$ tegureiks lahutamisel tarvisminevad arvud ongi $-x_1$ ja $-x_2$.

Saadud võtte võime sõnastada nõnda:

et lahutada ruuttrinoom $z^2 + hz + k$ tegureiks, lahendame võrrandi $x^2 + hx + k = 0$; leitud lahendite x_1 ja x_2 abil ruuttrinoom lahutub tegureiks järgmiselt:

$$z^2 + hz + k = (z - x_1)(z - x_2).$$

Kui võrrandil $x^2 + hx + k = 0$ ei ole lahendeid, siis tähendab see seda, et ei leidu niisugust arvupaari $-x_1$ ja $-x_2$, millede summa oleks h ja korrutis k ; järelikult sel juhtumil ruuttrinoom ei ole esitatav lineaarsete tegurite korrutisena.

Et üldkujulise ruuttrinoomi $az^2 + bz + c$ tegureiks lahutamist jätkata kujult $a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$, milleni ta viisime paragrahvi alguses, tuleks lahendada võrrand $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Sel võrrandil on aga samad lahendid, mis võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$. Seepärast saame üldkujulise ruuttrinoomi kohta niisuguse juhise:

et lahutada ruuttrinoom $az^2 + bz + c$ tegureiks, lahendame võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$; leitud lahendite x_1 ja x_2 abil ruuttrinoom lahutub siis tegureiks järgmiselt:

$$az^2 + bz + c = a(z - x_1)(z - x_2).$$

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole lahendeid, siis ruuttrinoom $az^2 + bz + c$ tegureiks ei lahutu.

Ülesanne 1. Lahutada tegureiks trinoom

$$z^2 - 7z + 6.$$

Lahendus. Võrrandi $x^2 - 7x + 6 = 0$ lahendamisel saame:

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

ehk

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

seega

$$z^2 - 7z + 6 = (z - 6)(z - 1).$$

Ülesanne 2. Lahutada tegureiks trinoom

$$3u^2 - 7u + 4.$$

Lahendus.

Võrrandi

$$3x^2 - 7x + 4 = 0$$

lahendamine annab:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6};$$

seega

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Järelikult

$$3u^2 - 7u + 4 = 3(u - 1) \left(u - \frac{4}{3}\right)$$

ehk

$$3u^2 - 7u + 4 = (u - 1)(3u - 4).$$

Ülesanded.

Lahutada järgmised trinoomid tegureiks:

$$\begin{aligned} 586. \quad & v^2 - v - 30 \\ & v^2 - 3v - 40 \\ & w^2 - 10w - 24 \\ & w^2 - 5w - 24 \\ & p^2 - 17p + 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 586. \quad & p^2 + 5p - 66 \\ & q^2 - 8q - 20 \\ & q^2 + 8q - 9 \\ & n^2 - n - 72 \\ & m^2 - m - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 587. \quad & a^2 - 20a + 36 \\ & c^2 + 14c + 48 \\ & 2f^2 - 7f - 4 \\ & 3h^2 + 5h - 2 \\ & 5l^2 - 14l + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 587. \quad & k^2 + k - 132 \\ & m^2 + 11m - 42 \\ & 12n^2 + 5n - 3 \\ & 4p^2 - 16p + 15 \\ & 6r^2 + 5r - 1 \end{aligned}$$

§ 47. Teise astme ruutvõrrandi lahendamine.

Ruutvõrrandi kaudu lahenevad ka mõned võrrandid, mille aste on kõrgem kui 2, näiteks teise astme ruutvõrrand ehk bikvadraatvõrrand

$$az^4 + bz^2 + c = 0.$$

Tõepoolest, tähistades z^2 tähega x näeme, et

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Olgu selle ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2 . Nõutavad z -i väärtused saame siis lahendades võrrandid

$$z^2 = x_1 \quad \text{ja} \quad z^2 = x_2.$$

Ülesanne. Lahendada võrrand:

$$z^4 - 14z^2 - 32 = 0.$$

Lahendus. Võttes $z^2 = x$ saame:

$$x^2 - 14x - 32 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 16 ja -2 .

Tähendab:

$$\text{kas } z^2 = 16 \text{ või } z^2 = -2.$$

Teist nõuet rahuldada ei saa, sest z^2 ei saa olla negatiivne. Esimesest aga saame

$$z_1 = 4 \text{ ja } z_2 = -4.$$

Kontroll: $4^4 - 14 \cdot 4^2 - 32 = 256 - 224 - 32 = 0$
ja samuti $(-4)^4 - 14 \cdot (-4)^2 - 32 = 0$, nagu peab olema.

Ülesanne.

Lahendada võrrandid:

$$\begin{aligned} 588. \quad & x^4 - 625 = 0 \\ & x^4 - 74x^2 + 1225 = 0 \\ & 16x^4 - 17x^2 + 1 = 0 \\ & 3x^4 - 28x^2 - 20 = 0 \\ & 2x^4 - 7x^2 - 99 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 588. \quad & x^4 - 125x^2 + 2500 = 0 \\ & x^4 - 641x^2 + 5000 = 0 \\ & 100x^4 - 161x^2 - 144 = 0 \\ & 16x^4 - 73x^2 + 36 = 0 \\ & 36x^4 - 109x^2 + 3 = 0 \end{aligned}$$

§ 48. Ruutvõrrandite süsteem.

Olgu tegemist süsteemiga, mis koosneb kahest võrrandist kahe tundmatuga.

Kui üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nimetame süsteemi ruutvõrrandisüsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrandisüsteemiks, kui tema võrrandis ei esine ei liiget x^2 -ga ega ka liiget y^2 -ga, küll aga liige tundmatute korrutisega xy . Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteem.

Käsitleme allpool ainult mõnda ruutvõrrandisüsteemi eritüüpi.

1. tüüp. Üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine lineaarvõrrand.

Niisugust süsteemi näeme esimeses ülal toodud näites. Kõnesolevat tüüpi võrrandisüsteem lahendub järgmiselt: avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu ja asetame leitud avaldise selle tundmatu asemele ruutvõrrandisse; saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi; seda lahendades ja lineaarset võrrandit arvestades leiame süsteemi lahendid.

Näide 1. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame

$$y = 10 - 2x,$$

seega järeldub teisest, et

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 65$$

ehk

$$x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 65$$

ehk

$$5x^2 - 40x + 35 = 0$$

ehk

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

millest

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 7$$

ja järelikult võrrandi $y = 10 - 2x$ põhjal

$$y_1 = 10 - 2 \cdot 1 = 8 \quad \text{ja} \quad y_2 = 10 - 2 \cdot 7 = -4.$$

Meie süsteemil on kaks lahendit

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

Näide 2. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases}$$

Näeme, et kui võrrandite pooled liidame, siis kaob otsitav y ; saame

$$\begin{array}{r} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18 \\ \hline x^2 + 6x = 55 \end{array}$$

siit

$$x^2 + 6x - 55 = 0,$$

millest

$$x_1 = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = -11.$$

Asendades x teises võrrandis esiteks väärtusega 5 ja pärast väärtusega -11 , saame:

$$\begin{array}{rcl}
 6 \cdot 5 - 2y_1 = 18; & & 6 \cdot (-11) - 2y_2 = 18 \\
 30 - 2y_1 = 18 & & -66 - 2y_2 = 18 \\
 -2y_1 = 18 - 30 & & -2y_2 = 18 + 66 \\
 -2y_1 = -12 & & -2y_2 = 84 \\
 2y_1 = 12 & & 2y_2 = -84 \\
 y_1 = 6 & & y_2 = -42
 \end{array}$$

Meie süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = -11 \\ y_2 = -42. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$589. \begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$589. \begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$590. \begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$$

$$590. \begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$591. \begin{cases} x^2 = y + 26 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$$

$$591. \begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$$

$$592. \begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$$

$$592. \begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$$

$$593. \begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$$

$$593. \begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$$

$$594. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$594. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$595. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$595. \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

2. tüüp. Võrrandis esinevad tundmatud ainult teises astmes. Kui võtame tundmatute ruudud abitundmatuiks, saame juba nende leidmiseks lineaarvõrrandisüsteemi.

Näide. Süsteemis

$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 5 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

võtame x^2 ja y^2 abitundmatuiks u ja v ; et süsteemi

$$\begin{cases} 5u - 3v = 5 \\ 2u - v = 7 \end{cases}$$

lahendiks on

$$\begin{cases} u = 16 \\ v = 25, \end{cases}$$

siis $x^2 = 16$ ja $y^2 = 25$. Järelikult saame antud süsteemile neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -5. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$596. \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ 8x^2 - 3y^2 = 116 \end{cases}$$

$$596. \begin{cases} x^2 + 5y^2 = 21 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$597. \begin{cases} 7x^2 - 2y^2 = 55 \\ 5x^2 - 3y^2 = 33 \end{cases}$$

$$597. \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 17 \\ x^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

$$598. \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ 3x^2 - 2y^2 = 9 \end{cases}$$

$$598. \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 8 \\ 4x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Muid ruutvõrrandisüsteemi tüüpe ja nende lahendamisevõtteid õpime tundma järgnevaist näidisülesandeist.

Ulesanne 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Lahendus. Esimese võrrandi poolte jagamisel teise võrrandi vastavate pooltega saame:

$$x - y = 3;$$

et

$$x + y = 7,$$

siis

$$2x = 10,$$

seega

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ulesanne 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 56. \end{cases}$$

Lahendus. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omaduste põhjal osutuvad x ja y lihtsalt võrrandi

$$z^2 - 18z + 56 = 0$$

lahenditeks. Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame:

$$z = 9 \pm \sqrt{81 - 56} = 9 \pm \sqrt{25} = 9 \pm 5$$

ehk

$$z_1 = 14 \quad \text{ja} \quad z_2 = 4.$$

Et antud süsteemis esinevad x ja y sümmeetriliselt — kumagi võrrandi tähendus ei muutu tundmatute x ja y vahe-

tamisel, siis võib ka lahendis nende väärtused vahetada.
Järelikult

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 14. \end{cases}$$

Märkus. Et ülesanded 1 ja 2 on ühtlasi erijuhtumid esimesest tüübist (üks süsteemi võrrandeist on nimelt lineaarne), oleksime neid saanud lahendada ka esimese tüübi üldvõtte abil. Toodud lahenduste eesmärgiks on aga hõlbustavate erivõtete tutvustamine.

Ülesanne 3. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 15. \end{cases}$$

Lahendus. Korrutame teise võrrandi liikmeid 2-ga:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 2xy = 30. \end{cases}$$

Üks kord võrrandite vastavaid pooli liites, teine kord lahutades saame:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 64 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 64 \\ (x - y)^2 = 4; \end{cases}$$

järelikult

$$\begin{cases} x + y = \pm 8 \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$$

Seega on saadud neli süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 8 \\ x_1 - y_1 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_2 + y_2 = 8 \\ x_2 - y_2 = -2 \end{cases} \begin{cases} x_3 + y_3 = -8 \\ x_3 - y_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_4 + y_4 = -8 \\ x_4 - y_4 = -2. \end{cases}$$

millede lahendid on vastavalt

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$599. \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$599. \begin{cases} x^2 - y^2 = 63 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$600. \begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$600. \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$601. \begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$601. \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$602. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$602. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$603. \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ 3xy = 60 \end{cases}$$

$$603. \begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ 5xy = 70 \end{cases}$$

$$604. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$604. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0,4. \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimese võrrandi. Korrutame esmalt kummagi poole 2-ga, et vabaneda murrust, saame

$$\frac{2y+6}{(3x-y)(3y-x)} = 1.$$

Siit

$$2y + 6 = (3x - y)(3y - x)$$

ehk

$$2y + 6 = 9xy - 3x^2 - 3y^2 + xy$$

ehk

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6.$$

Lihtsustame nüüd teise võrrandi.

Korrutame 5-ga:

$$\frac{5x - 5y}{x + y} = 2.$$

Siit

$$5x - 5y = 2x + 2y$$

ehk

$$3x - 7y = 0.$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6 \\ 3x - 7y = 0. \end{cases}$$

Rakendame asendusvõtet:

teisest võrrandist

$$3x = 7y, \quad \text{siit } x = \frac{7y}{3}.$$

Asendame esimeses võrrandis x -i avaldisega $\frac{7y}{3}$, saame

$$3 \cdot \left(\frac{7y}{3}\right)^2 + 3y^2 - 10 \cdot \frac{7y}{3} \cdot y + 2y = -6;$$

$$3 \cdot \frac{49y^2}{9} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$\frac{49y^2}{3} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$49y^2 + 9y^2 - 70y^2 + 6y = -18;$$

$$-12y^2 + 6y = -18;$$

$$2y^2 - y - 3 = 0.$$

Siit

$$y_1 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad y_2 = -1.$$

Seega

$$x_1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7}{3} \cdot (-1) = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{2} \\ y_1 = 1\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2\frac{1}{3} \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$605. \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \quad 605. \begin{cases} \frac{1}{xy} = 5 \\ \frac{x}{y} = 20 \end{cases}$$

$$606. \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x+y}{x-y} = 3 \end{cases} \quad 606. \begin{cases} xy = 30 \\ \frac{x+y}{x} = \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$607. \begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ \frac{11x - 3y}{x - 1} = -2 \end{cases} \quad 607. \begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ \frac{x - 2y}{y + 1} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$608. \begin{cases} (x-2)(y-3) = 1 \\ \frac{x-2}{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$608. \begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57} = 3 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = -\frac{1}{xy} \end{cases}$$

609. Kahe järjestikuse paarituarvu korrutis on 195.
Leida need arvud.

609. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 340. Leida need arvud.

Jaotada lõik, mille pikkus on 15 cm, kahte ossa nõnda, et neile osadele ehitatud ristküliku pindala oleks

610. 26 cm^2

610. 14 cm^2

611. 44 cm^2

611. 56 cm^2

612. Ristküliku ümbermõõt on 88 dm, tema pindala 459 dm^2 . Kui pikad on ristküliku küljed?

612. Ristküliku ümbermõõt on 78 cm ja pindala on 374 cm^2 . Leida ristküliku pikkus ja laius.

613. Kahe arvu summa on 34; nende arvude korrutis on 285. Mis arvud need on?

613. Kahe arvu vahe on 26; nende arvude korrutis on 407. Mis arvud need on?

Täheliste kordajatega võrrandid.

§ 49. Täheliste kordajatega esimese astme võrrand ühe otsitavaga.

Olgu esitatud lahendamiseks järgmine ülesanne:

Avaldada trapetsi kõrgus h tema aluste a ja b ning pindala S kaudu.

Lahendamisel lähtume valemist

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Nüüd tuleb seda valemit vaadelda kui võrrandit, milles a , b ja S on vastavates ühikutes antud suurused ja otsitavaks on suurus h , teisiti öeldes, see on täheliste kordajatega võrrand, mida antud juhul peame lahendama tähe h suhtes. Jagades võrrandi liikmed otsitava kordajaga, see tähendab avaldisega $\frac{a+b}{2}$, saame

$$h = S : \frac{a+b}{2} = \frac{2S}{a+b}.$$

Seega

$$h = \frac{2S}{a+b}.$$

Kui nõutakse eespool antud valemi järgi avaldada alus b , siis lahendame võrrandi

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

tähe b suhtes. Sel korral toimime järgmiselt.

Nimetaja kaotamiseks korrutame iga liikme 2-ga:

$$2S = (a+b)h;$$

avame sulud:

$$2S = ah + bh.$$

Siit

$$bh = 2S - ah$$

ja

$$b = \frac{2S - ah}{h}.$$

Sedamööda, kas võrrandi kordajad on tähelised või numbrilised, nimetame võrrandit vastavalt täheliseks või numbriliseks võrrandiks.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand

$$ax + b = 2x + 3$$

tähe x suhtes.

Lahendus. Kogume otsitavaga liikmed võrrandi vasakule poolele ja otsitavast vabad liikmed paremale poolele, siis saame, et

$$ax - 2x = 3 - b.$$

Kirjutame otsitava x sulgude taha:

$$(a-2)x = 3 - b.$$

Nüüd jagame võrrandi pooled otsitava kordajaga $a-2$, siis saamegi, et otsitav

$$x = \frac{3-b}{a-2}.$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid x -i suhtes, teades, et a, b, c, m ja n on tuntud arvud.

$$614. \quad \begin{aligned} x + a &= b \\ a + x &= 2a \\ x - b &= a \end{aligned}$$

$$614. \quad \begin{aligned} x - a &= 12 \\ m - x &= n \\ m - n + x &= 0 \end{aligned}$$

$$615. \quad \begin{aligned} x + 3b &= 5b \\ x + 3a &= 3a \\ x - 5c &= 5c \end{aligned}$$

$$615. \quad \begin{aligned} x + a - b &= a \\ a - x &= a - 9 \\ a + x &= b - x \end{aligned}$$

$$616. \quad \begin{aligned} a - x &= a + b \\ 4b - x &= 3b \\ 5a - x &= c - 5a \end{aligned}$$

$$616. \quad \begin{aligned} n + x &= 3n - x \\ 3x - a &= 2a \\ 2x + m &= 4m - x \end{aligned}$$

$$617. \quad ax + bx = a - cx$$

$$617. \quad (m - x)^2 = (m + x)^2$$

$$618. \quad (x - 4a)^2 = x(x + b) + b(7x + 16b)$$

$$618. \quad (x - b)(a + b) = (x + b)(a - b)$$

$$619. \quad a(a - x) = b(b + x)$$

$$619. \quad a(x - a) - b(x - 2a) = b^2$$

$$620. \quad x(a - x) - a^2 = x(b - x) - b^2$$

$$620. \quad a(a - x) = 2ab - b(x + b)$$

$$621. \quad 2m(mx - n) - 2(mx - n) = mn(m + n)$$

$$621. \quad (mx - n)(m + n) = (mx - nx + n)(m - n)$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$\frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2,$$

milles x on otsitav ning m ja n on antud arvud.

Lahendus. Vasakul poolel nõutud liitmist teostades saame

$$\frac{n(n+x) + m(m-x)}{mn} = 2$$

ehk korrutamisaksiooni põhjal

$$n(n+x) + m(m-x) = 2mn.$$

Sulgusid avades saame

$$n^2 + nx + m^2 - mx = 2mn$$

ehk

$$nx - mx = -n^2 + 2mn - m^2$$

ehk korrutades kumbagi poolt -1 -ga

$$mx - nx = n^2 - 2mn + m^2$$

ehk kumbagi poolt tegureiks lahutades

$$(m-n)x = (n-m)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, leiame:

$$x = \frac{(n-m)^2}{m-n} = \frac{(m-n)^2}{m-n}$$

ehk

$$x = m - n.$$

Kontroll. Asetades leitud väärtuse x -i asemele antud võrrandi vasakusse poole, leiame:

$$\begin{aligned} \frac{n + (m-n)}{m} + \frac{m - (m-n)}{n} &= \frac{n + m - n}{m} + \frac{m - m + n}{n} = \\ &= \frac{m}{m} + \frac{n}{n} = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

nagu peab olema.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$622. \quad \frac{x}{a} = \frac{m}{n}$$

$$622. \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{x} = c$$

$$623. \quad \frac{x}{c} + 1 = \frac{m}{n}$$

$$623. \quad \frac{1}{x-a} = \frac{2}{a}$$

$$624. \quad \frac{x}{a} + \frac{c}{b} = 1$$

$$624. \quad \frac{x-a}{a} = \frac{c-b}{b}$$

$$625. \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

$$625. \quad \frac{x-a}{b} = \frac{b-x}{a}$$

$$626. \quad \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{x}{c}$$

$$626. \quad \frac{a-x}{b} + \frac{b-x}{a} = 2$$

$$627. \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{b}$$

$$627. \quad ac \frac{x}{2} + c = bc \frac{x}{2}$$

$$628. \quad \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 0$$

$$628. \quad np - \frac{nx}{3} = nq \cdot \frac{x}{3}$$

$$629. \quad \frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} = 1$$

$$629. \quad \frac{x}{p} + \frac{x}{q} + \frac{x}{r} = 1$$

$$630. \quad \frac{x}{m} - \frac{2x}{n} = n^2 - 4m^2$$

$$630. \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = abc$$

$$631. \quad a \cdot \frac{x}{b} - c \cdot \frac{x}{d} = 1$$

$$631. \quad x - \frac{x}{r} + \frac{x}{p} + \frac{x}{rp} = 0$$

$$632. \quad \frac{x-p}{q} = \frac{x-q}{p}$$

$$632. \quad a(x+b) + b(x-a) = a+b$$

$$633. \quad m(x+m) = n(n-x)$$

$$633. \quad \frac{x}{p} + \frac{x}{q} = p+q$$

$$634. \quad h(x-k) = h^2 - kx$$

$$634. \quad m(m-x) + n(n+x) = 2mn$$

$$635. \quad \frac{3x+2a}{2} = a + \frac{2x+5a}{3}$$

$$635. \quad (p+1)(x+4) = (p+3)(x+2)$$

$$636. \quad ax - \frac{b}{a} = 1 - bx$$

$$636. \quad \frac{2}{3}(x-a) + \frac{3}{4}(x-2a) = \frac{5}{6}(x-4a)$$

Ulesanne 3. Lahendada võrrand

$$\frac{b}{4ax-a} - \frac{a(8x-1)}{4bx-b} = 2,$$

lugedes arvud a ja b andmeiks ja arvu x otsitavaks.

Lahendus. Vasakul poolel seisvate murdude nimetajaid tegureiks lahutades saame

$$4ax - a = a(4x - 1) \quad \text{jä} \quad 4bx - b = b(4x - 1),$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$ab(4x - 1)$$

ja murdude laiendajad on vastavalt b ja a .

Saame

$$\frac{\frac{b}{b}}{a(4x-1)} - \frac{\frac{a}{b(4x-1)}}{b(4x-1)} = 2 \quad \frac{ab(4x-1)}{ab(4x-1)}$$

ehk korrutades avaldisega $ab(4x-1)$:

$$b^2 - a^2(8x-1) = 2ab(4x-1)$$

ehk sulgusid avades

$$b^2 - 8a^2x + a^2 = 8abx - 2ab.$$

Siit

$$-8a^2x - 8abx = -a^2 - 2ab - b^2$$

ehk korrutades kumbagi poolt -1 -ga

$$8a^2x + 8abx = a^2 + 2ab + b^2$$

ehk teisiti

$$8a(a+b)x = (a+b)^2;$$

ja gades kumbagi poolt otsitava kordajaga, saame

$$x = \frac{a+b}{8a}.$$

Kontroll. Asetades leitud väärtuse x -i asemele algvõrrandisse, leiame, et võrrandi esimene liige on

$$4a \cdot \frac{b}{8a} - a = \frac{b}{a+b} - a = \frac{2b}{a+b-2a} = \frac{2b}{b-a}.$$

Samuti leiame, et lahutatav liige on

$$\begin{aligned} \frac{a \left(8 \cdot \frac{a+b}{8a} - 1 \right)}{4b \cdot \frac{a+b}{8a} - b} &= \frac{a \left(\frac{a+b}{a} - 1 \right)}{b \cdot \frac{a+b}{2a} - b} = \frac{a+b-a}{\frac{b(a+b)-2ab}{2a}} = \\ &= \frac{2ab}{ab+b^2-2ab} = \frac{2ab}{b^2-ab} = \frac{2ab}{b(b-a)} = \frac{2a}{b-a}. \end{aligned}$$

Järelikult võrrandi vasak pool on

$$\frac{2b}{b-a} - \frac{2a}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2,$$

see tähendab, et lahend on õige.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$637. \frac{m^2 - x}{n} = \frac{n^2 - x}{m} \qquad 637. \frac{x}{m-n} + \frac{x}{m+n} = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

$$638. \frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2 \qquad 638. \frac{x-p}{q} + \frac{p-q}{p+q} = 1$$

$$639. \frac{x-h}{h+k} + \frac{x-k}{h-k} = 1 \qquad 639. \frac{x+g}{f^2} + \frac{x}{fg} + \frac{x-f}{g^2} = 0$$

$$640. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2 \qquad 640. \frac{ax-b}{a-b} = \frac{ax}{a+b}$$

$$641. \frac{b+x}{a} = \frac{a-x}{b} \qquad 641. \frac{x+a}{a+b} = \frac{x-a}{a-b}$$

$$642. \frac{ax+b}{c} - \frac{bx+c}{d} = 1 \qquad 642. \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{m}{n}$$

$$643. \frac{a(a-x)}{b} + \frac{b(b-x)}{a} = 2x$$

$$643. \frac{x+a}{x} = \frac{x}{x-b}$$

$$644. x - \frac{ax}{a+b} = \frac{ab}{a-b} - \frac{b^2x}{a^2-b^2}$$

$$644. \frac{a-x}{b-x} = \frac{x}{b+x}$$

$$645. \frac{ax-1}{bx} + \frac{bx-1}{ax} = 2$$

$$645. \frac{a+x}{a-2x} = \frac{a-x}{a+2x}$$

$$646. \frac{x}{b^2} + \frac{x}{a^2} + \frac{x}{ab} = a^3 - b^3$$

$$646. \frac{x}{ab^4} + \frac{3x}{a^2b^3} + \frac{3x}{a^3b^2} + \frac{x}{a^4b} = \frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4}$$

$$647. \frac{x}{c-d} - \frac{5c}{c+d} = \frac{2dx}{c^2-d^2}$$

$$647. \frac{a-x}{b-a} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$$

$$648. \frac{6a + 5b}{6a} - \frac{4bx}{3a^2} = 1 - \frac{bx}{a^2 + ab}$$

$$648. \frac{x}{ab} + \frac{x}{ac} + \frac{x}{bc} - 1 = abc - (a + b + c)x$$

$$649. \frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}$$

$$649. \frac{b}{a+x} - \frac{c}{a-x} = \frac{a(b-3c)}{2(a^2-x^2)}$$

$$650. \frac{x+b}{a+b} - \frac{x-b}{a-b} = \frac{b+x}{a^2+2ab+b^2} - \frac{x-b}{a^2-b^2}$$

$$650. \frac{m\left(x + \frac{nr}{m} - r\right)}{nx} + \frac{n\left(x + \frac{mr}{n} - r\right)}{mx} = 2$$

Ulesanne 4. Missugusel x -i väärtusel on kehtiv järgmine võrre:

$$\frac{a-bx}{a+2b} = \frac{c-dx}{c+2d}?$$

Lahendus. Rakendades võrre põhiomadust, saame

$$(a-bx)(c+2d) = (a+2b)(c-dx).$$

Avame nüüd sulud:

$$ac + 2ad - bcx - 2bdx = ac - adx + 2bc - 2bdx.$$

Pärast võrrandi kummaski pooles esinevate samaste liikmete ac ja $-2bdx$ kaotamist saame

$$2ad - bcx = -adx + 2bc.$$

Toome otsitavaga liikmed ühele, muud liikmed teisele poolele:

$$adx - bcx = 2bc - 2ad.$$

Võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga:

$$(ad - bc)x = 2bc - 2ad;$$

$$x = \frac{2bc - 2ad}{ad - bc}.$$

Vaatame nüüd, kas saame leitud avaldist taandada. Lahutades lugeja tegureiks näeme, et lugejas ja nimetajas saame võrdsed tegurid, kui nimetajas muudame märke vastupidisteks; et murru väärtus seejuures ei muutuks, siis muudame ka murru märgi.

Nii saame:

$$x = \frac{2(bc - ad)}{ad - bc} = -\frac{2(bc - ad)}{bc - ad} = -2.$$

Kontroll. Asetame antud võrdes x -i asemele arvu -2 ; siis saame vasakul poolel

$$\frac{a - b \cdot (-2)}{a + 2b} = \frac{a + 2b}{a + 2b} = 1$$

ja paremal poolel

$$\frac{c - d \cdot (-2)}{c + 2d} = \frac{c + 2d}{c + 2d} = 1,$$

järelikult lahend on õige.

Vastus. Antud võrre on kehtiv, kui $x = -2$.

Kokkuvõte:

tähealiste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel

1. kui on murdusid, siis vabaneme murdudest, korrutades võrrandi kummagi poole liikmete ühisnimetajaga;

2. avame sulud ja, kui võimalik, koondame;

3. toome kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik teised liikmed teisele poolele ja koondame, kui on sarnaseid liikmeid;

4. võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga;

5. kui võimalik, siis taandame leitud avaldise;

6. kontrollime vastust, asetades leitud avaldise otsitava asemele antud võrrandisse.

Ülesanded.

Missuguse x -i väärtuse puhul on kehtivad järgmised võrded?

$$651. \frac{x}{n} = \frac{c}{a}$$

$$652. \frac{a+x}{m} = \frac{a}{m}$$

$$653. \frac{x+1}{a} = \frac{1}{a+b}$$

$$654. \frac{x-p}{p+q} = \frac{x+p}{p-q}$$

$$655. \frac{a}{1-x} = \frac{b}{1+x}$$

$$656. \frac{m}{x-m} = \frac{n}{x+m}$$

$$657. \frac{p-q}{p-qx} = \frac{r-s}{r+sx}$$

$$651. \frac{2a}{x} = \frac{4}{5a}$$

$$652. \frac{5x-c}{f} = \frac{5-c}{f}$$

$$653. \frac{m+x}{x-nx} = \frac{n}{m}$$

$$654. \frac{2x-1}{g-h} = \frac{x}{2g+h}$$

$$655. \frac{x+p}{x-1} = \frac{x-p}{x+1}$$

$$656. \frac{mx+2m}{mx+2n} = \frac{mx-2m}{mx-2n}$$

$$657. \frac{ax-5b}{cx-5d} = \frac{ax+3d}{cx+3d}$$

Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$658. \frac{x}{x+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$659. \frac{1}{\frac{x}{a}-\frac{x}{b}} = \frac{1}{1}$$

$$660. \frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}} = \frac{2-\frac{1}{a}}{2+\frac{1}{a}}$$

$$658. \frac{1}{\frac{ax-n}{ax+n}} = \frac{1}{\frac{cx+n}{cx-n}}$$

$$659. \frac{a+x}{\frac{b+x}{a+b}} = \frac{a-x}{\frac{b+x}{a+b}}$$

$$660. \frac{1-\frac{x+a}{x-b}}{1-\frac{x-a}{x+b}} = \frac{1}{1}$$

Ülesanne 5. Kaks maalrit said maja värvimise eest tasu kokku a rubla. Esimene töötas p , teine q päeva. Mitu rubla peaks saama esimene ja mitu rubla teine maaler, eeldades, et mõlemad töötasid võrdvõimeliselt?

Lahendus. Oletame, et päevane teenistus on x rubla, siis sai esimene maaler px rubla, teine qx rubla. Kokku said nad a rubla, sellepärast kehtib võrrand

$$px + qx = a.$$

Siit

$$x(p + q) = a$$

$$x = \frac{a}{p + q}.$$

Esimese maalri tasu rublades on $px = p \cdot \frac{a}{p + q} = \frac{ap}{p + q}$

teise maalri tasu on $qx = q \cdot \frac{a}{p + q} = \frac{aq}{p + q}$.

Kontroll. Kokku said maalrid a rubla, seepärast saadud avaldiste summa peab olema a :

$$\frac{ap}{p + q} + \frac{aq}{p + q} = \frac{ap + aq}{p + q} = \frac{a(p + q)}{p + q} = a.$$

Õige.

Vastus. Esimene maaler peab saama $\frac{ap}{p + q}$ rubla, teine $\frac{aq}{p + q}$ rubla.

Ülesanded.

661. Lapse sünniajal saab isa v aastat vanaks. Mitme aasta pärast on isa oma lapsest kaks korda vanem?

661. Kahe arvu summa on s . Mis arvud need on, kui üks on a võrra teisest suurem?

662. Lehekandja teenib kuus a rubla, varustades m tellijat. Mitu tellijat ta peab juurde saama, et teenida kuus b rubla?

662. Kooli lõppeksamil $p\%$ õpilastest sooritas eksami hästi ja $q\%$ rahuldavalt. Eksami sooritamine ebaõnnestus N õpilasel. Mitu õpilast oli eksamil?

663. Toa tapeetamiseks ostetud a rulli tapeti ja b rulli poordi eest maksti kokku k rubla. Kui kallid on rull tapeetit, kui poordirulli hind moodustab $\frac{3}{5}$ tapetirulli hinnast?

663. Kullasepp sulatas kokku a -proovilisi ja b -proovilisi vanu kuldajäki ja sai c -proovilise sulami, kaaluga k grammi. Teades, et proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 grammi sulami kohta, leida, mitu grammi oli a -proovilist kulda.

§ 50. Tähealiste kordajatega lineaarvõrrandisüsteem.

Ülesanne 1. Lahendada tähtede x ja y suhtes võrrandisüsteem

$$\begin{cases} ax + by = c \\ y = mx. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame asendusvõtet. Asetame esimesse võrrandisse y asemele tema väärtuse, mis teise võrrandiga määratud:

$$\begin{aligned} ax + bmx &= c \\ x(a + bm) &= c \\ x &= \frac{c}{a + bm}. \end{aligned}$$

Tähe y väärtuse leiame nüüd teisest võrrandist:

$$y = m \cdot \frac{c}{a + bm} = \frac{cm}{a + bm}.$$

Kontroll. Arvutame algsüsteemi esimese võrrandi vasaku poole väärtuse, asendades seal x ja y leitud avaldistega:

$$a \cdot \frac{c}{a+bm} + b \cdot \frac{cm}{a+bm} = \frac{ac}{a+bm} + \frac{bcm}{a+bm} = \frac{ac+bcm}{a+bm} = \frac{c(a+bm)}{a+bm} = c.$$

Õige.

Vastus.

$$\begin{cases} x = \frac{c}{a+bm} \\ y = \frac{cm}{a+bm} \end{cases}$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx - dy = n. \end{cases}$$

Lahendus. Kui ülesandes ei ole teisiti nõutud, siis loeme otsitavateks tähestiku lõpu tähed, seega antud juhul x ja y .

Kasutame liitmisvõtet.

$$\begin{array}{l|l|l} ax + by = m & d & adx + bdy = dm \\ cx - dy = n & b & bcx - bdy = bn \\ \hline & & adx + bcx = dm + bn \\ & & x(ad + bc) = dm + bn \\ & & x = \frac{dm + bn}{ad + bc}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} ax + by = m & c & acx + bcy = cm \\ cx - dy = n & -a & -acx + ady = -an \\ \hline & & bcy + ady = cm - an \\ & & y(bc + ad) = cm - an \\ & & y = \frac{cm - an}{ad + bc}. \end{array}$$

Kontroll. Arvutame algsüsteemi esimese võrrandi vasaku poole väärtuse:

$$a \cdot \frac{dm + bn}{ad + bc} + b \cdot \frac{cm - an}{ad + bc} = \frac{adm + abn}{ad + bc} + \frac{bcm - abn}{ad + bc} = \\ = \frac{adm + abn + bcm - abn}{ad + bc} = \frac{adm + bcm}{ad + bc} = \frac{m(ad + bc)}{ad + bc} = m. \quad \text{Õige.}$$

Kui leitud avaldised asetada x ja y asemele algsüsteemi teise võrrandi vasakusse poole, siis õigete avaldiste puhul saame selle vasaku poole väärtuseks n .

Vastus.

$$\begin{cases} x = \frac{dm + bn}{ad + bc} \\ y = \frac{cm - an}{ad + bc} \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$664. \begin{cases} x + y = a \\ y = x \end{cases}$$

$$664. \begin{cases} x + y = b \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$665. \begin{cases} ax + y = b \\ y = cx \end{cases}$$

$$665. \begin{cases} ax + by = 1 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$666. \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

$$666. \begin{cases} x = py + q \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$667. \begin{cases} ax + by = c \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$667. \begin{cases} y = x - q \\ qx + py = p^2 \end{cases}$$

$$668. \begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

$$668. \begin{cases} ax + y = a^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$669. \begin{cases} px + qy = (p + q)^2 \\ px - qy = p^2 - q^2 \end{cases}$$

$$669. \begin{cases} ax - by = a^2 \\ (b - a)x + ay = b^2 \end{cases}$$

$$670. \begin{cases} a^2x + y = a^3 \\ (a + 1)x + 1 = y \end{cases}$$

$$670. \begin{cases} nx + my = 0 \\ x + y = m - n \end{cases}$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{a}{x+y} + \frac{b}{x-y} = c \\ \frac{m}{x+y} + \frac{n}{x-y} = p. \end{cases}$$

Lahendus. Lahendame abitundmatute võttega.

Tähistame murrud $\frac{1}{x+y}$ ja $\frac{1}{x-y}$ vastavalt tähtedega u ja v , nii et

$$\frac{1}{x+y} = u \text{ ja } \frac{1}{x-y} = v.$$

Murdu $\frac{a}{x+y}$ võib kujutada nüüd järgmiselt:

$$\frac{a}{x+y} = a \cdot \frac{1}{x+y} = au.$$

Toimides samal viisil teiste murdudega, saame alg-süsteemi asemele uue:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ mu + nv = p. \end{cases}$$

Nüüd lahendame selle süsteemi u ja v suhtes.

Lahendina u ja v jaoks saadud avaldised kirjutame vastavalt võrdseks murdudega

$$\frac{1}{x+y} \text{ ja } \frac{1}{x-y}.$$

Nii saame lõpuks x ja y suhtes lineaarse võrrandisüsteemi, millest saame need otsitavad avaldada. Kontrolli teostame nii, nagu eespool juhatatud.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$671. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b \end{cases}$$

$$671. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3a \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = a \end{cases}$$

$$672. \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = a^2 + b^2 \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$672. \begin{cases} \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = a + b \\ \frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y} = a - b \end{cases}$$

$$673. \begin{cases} \frac{m}{x} - \frac{n}{y} = m - n \\ \frac{n}{x} + \frac{m}{y} = m + n \end{cases}$$

$$673. \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = a + 1 \\ \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = \frac{a}{b} + b \end{cases}$$

$$674. \begin{cases} \frac{m^2}{x-m} + \frac{n^2}{y-n} = m+n \\ \frac{m^2}{x-m} - \frac{n^2}{y-n} = m-n \end{cases}$$

$$674. \begin{cases} \frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} = 1 \\ \frac{b}{x+a} + \frac{a}{y+b} = \frac{a^2+b^2}{2ab} \end{cases}$$

Ülesanne 4. Messing (ehk valgevask) on vase ja tsingi sulam. Kui võtta a grammi vaske ja b grammi tsinki, siis saame messingi hinnaga m rubla gramm; kui aga sulatada kokku b grammi vaske ja a grammi tsinki, siis saame sulami, mille hind on n rubla gramm. Kui palju maksab gramm vaske ja kui palju gramm tsinki?

Lahendus. Tähistame vase grammi hinna tähega x ja tsingi grammi hinna tähega y .

Esimesel juhul saame siis $a + b$ grammi sulamit koguhinnaga $ax + by$ rubla; ülesande andmete järgi maksab see sulam $m(a + b)$ rubla. Selle põhjal võime kirjutada võrrandi

$$ax + by = m(a + b).$$

Samasuguse arutlusega saame teise sulami jaoks võrrandi

$$bx + ay = n(a + b).$$

Selleks, et saada avaldised x ja y jaoks, lahendame nende tähtede suhtes võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ax + by = m(a + b) \\ bx + ay = n(a + b) \end{cases}$$

Lahendame liitmisvõttega.

$$\begin{array}{l} ax + by = m(a + b) \\ bx + ay = n(a + b) \end{array} \quad \begin{array}{l} a \\ -b \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2x + aby = am(a + b) \\ -b^2x - aby = -bn(a + b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2x - b^2x = am(a + b) - bn(a + b) \\ x(a^2 - b^2) = (a + b)(am - bn) \\ x = \frac{(a + b)(am - bn)}{a^2 - b^2} = \frac{am - bn}{a - b} \end{array}$$

Samal viisil arvutame y .

$$\begin{array}{l} ax + by = m(a + b) \\ bx + ay = n(a + b) \end{array} \quad \begin{array}{l} b \\ -a \end{array} \quad \begin{array}{l} abx + b^2y = bm(a + b) \\ -abx - a^2y = -an(a + b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b^2y - a^2y = bm(a + b) - an(a + b) \\ y(b^2 - a^2) = (a + b)(bm - an) \\ y = \frac{(a + b)(bm - an)}{b^2 - a^2} = \frac{bm - an}{b - a} \end{array}$$

Kontroll. Kontrolliks arvutame saadud hindade põhjal esimese sulami, mida pidi saama $a + b$ grammi, ühe grammi hinna. Ulesande andmete järgi on see m rubla; kui saadud hinnaavaldised on õiged, siis kontroll peab andma sama tulemuse.

a grammi vaske maksab $a \cdot \frac{am - bn}{a - b}$ rubla;

b grammi tsinki maksab $b \cdot \frac{bm - an}{b - a}$ rubla.

Kogu sulami väärtus rublades on siis

$$\begin{aligned}
 a \cdot \frac{am - bn}{a - b} + b \cdot \frac{bm - an}{b - a} &= \frac{a^2m - abn}{a - b} + \frac{b^2m - abn}{b - a} = \\
 &= \frac{a^2m - abn}{a - b} + \frac{abn - b^2m}{a - b} = \frac{a^2m - abn + abn - b^2m}{a - b} = \\
 &= \frac{a^2m - b^2m}{a - b} = \frac{m(a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{m(a + b)(a - b)}{a - b} = m(a + b).
 \end{aligned}$$

Uhe grammi hinna saamiseks jagame saadud avaldise grammide arvuga, s. o. avaldisega $a + b$, siis saame

$$\frac{m(a + b)}{a + b} = m.$$

See näitab, et meie lahendus on õige.

Vastus. Gramm vaske maksab $\frac{am - bn}{a - b}$ rubla ja gramm tsinki $\frac{bm - an}{b - a}$ rubla.

Ülesanded.

675. Kahe arvu jagatis on m ; nende arvude summa on s . Leida need arvud.

675. Vaiba pikkus ületab laiuse a cm võrra; vaiba ümbermõõt on $2p$ cm. Kui pikk ja kui lai on vaip?

676. Artell ostis tinavalget ja tsinkvalget kokku m kilogrammi ja maksis k rubla. Kilogramm tinavalget maksis a rubla ja kilogramm tsinkvalget b rubla. Kui palju maksti kummagi värvi eest?

676. Kahenumbrilise arvu ristsumma on s . Kui selle arvu numbrid vahetada ja sel teel saadud uus arv lahutada endisest, siis saame d . Leida see kahenumbriline arv.

677. Kaks jalgratturit on teineteisest d kilomeetri kaugusel. Kui nad sõidavad teineteisele vastu, siis nad kohtuvad m tunni pärast; kui üks sõidab teisele järele, siis toimub kohtumine n tunni pärast. Kui suure kiirusega sõidab kumbki jalgrattur?

677. Elumaja taastamistööl töötab mehi ja naisi, kokku m inimest; mehi on a võrra rohkem kui naisi. Mitu meest ja mitu naist töötab elumaja taastamisel?

678. Kooperatiivis müüdi n kilogrammi kaht sorti kaupa, esimene sort hinnaga a rbl. kilogramm, teine sort hinnaga b rbl. kilogramm, seejuures saadi kogu esimese sordi kauba eest c rubla rohkem kui teise sordi eest. Mitu kilogrammi müüdi esimest ja mitu kilogrammi teist sorti kaupa?

678. Kauplus sai koguse suhkrut, millest oli vaja teha ettenähtud arv pakke. Kui igasse pakki oleks pandud a kilogrammi suhkrut, siis oleks jäänud m kilogrammi üle; kui igasse pakki oleks pandud aga b kilogrammi, siis oleks tulnud n kilogrammi suhkrut puudu.

Mitu pakki oli vaja teha ja mitu kilogrammi sai kauplus suhkrut?

Peatükk VI.

Ülesandeid kordamiseks.

679. Raudteerongil sõites tunneme järjest üksikuid tõukeid; need on tingitud rööpmete jätkukohtadest. Reisija loendab minutis N tõuget. Mitu kilomeetrit sõidab rong tunnis, kui rööpme pikkus on p meetrit?

679. n rida sportlasi reavahega d meetrit marsib kiirusega v meetrit sekundis auvõoraste tribüüni eest mööda, mille pikkus on l meetrit. Kui palju aega nõuab möödamarssimine? Näide. $n = 200$; $d = 1,8$; $v = 2,6$; $l = 20$.

Olgu antud murdude jada:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \text{ jne.}$$

680. Missugune murd seisab antud jadas n -ndal kohal? ($n - 1$)-sel kohal?

680. Missugune murd seisab antud jadas $(n + 2)$ -sel kohal? ($n - 3$)-ndal kohal?

681. Liita avaldised

$$\frac{5}{6}(u + 2) \quad \frac{4}{9}(u - 4) \quad \frac{7}{18}(u + 8).$$

681. Lahutada avaldisest $\frac{5}{6}(D - 4)$ avaldis $\frac{4}{3}(D + 2)$.

Lihtsustada avaldised:

$$682. \quad \frac{1}{2}(t+2) + \frac{2}{3}(2t+3) + \frac{5}{6}(5t+6)$$

$$\frac{6p}{7} + \frac{4q}{3} - \frac{5}{21}(7q-2p)$$

$$682. \quad \frac{7}{10}(1+9R) + \frac{4}{5}(1-6R)$$

$$x - \frac{1-x}{2} - \frac{5}{6}(1+x)$$

Arendada järgmised korrutised ja astmed:

$$683. \quad (7m-2n)(3m+n)$$

$$(1+5p)(1-5p)$$

$$\left(\frac{1}{4}-q\right)^2$$

$$\left(1-\frac{v}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)$$

$$684. \quad (kx+1)^2$$

$$(3m-0,1n)^3$$

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}ab-u\right)^2$$

$$\left(1+\frac{nz}{5}\right)^2$$

$$683. \quad \left(\frac{2}{3}t+9\right)^2$$

$$(1-st)^2$$

$$(0,3+2u)(0,3-2u)$$

$$(1-0,2z)(1+0,2z)$$

$$\left(\frac{2}{3}h-\frac{3}{4}k\right)^2$$

$$684. \quad \left(x-\frac{1}{2}x\right)^3$$

$$(1-ax)(1+ax)$$

$$\left(\frac{1}{3}+n\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(a-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{x}{3}\right)$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$$

685. Anda üldine avaldis kahekohalise arvu ruudu jaoks, tähistades kümneliste numbrit tähega u ja üheliste numbrit tähega v .

685. Kuubi serv pikkusega 1 dm paisus soojenedes s dm võrra. Kui suur on paisunud kuubi ruumala?

686. Leida $p\%$ rahasummast a rubla b kopikat.

686. Kulumise tõttu kaotab mootorratas aasta jooksul $p\%$ väärtusest, mis tal on aasta alguses. Kui suur on mootorratta väärtus praegu, kui tema eest 2 aastat tagasi maksti M rubla?

Olgu $a = -5$, $b = +8$. Arvutada neil andmeil järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

687. $(a + b) \cdot (2a + 3)$

687. $a + b \cdot (2a + 3)$.

688. Olgu teada, et $x + \frac{1}{x} = 3$. Arvutada $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

688. Olgu teada, et $u + \frac{1}{u} = 10$. Arvutada $u^3 + \frac{1}{u^3}$.

Arendada järgmised korrutised:

689. $\left(\frac{2u^3}{3} - \frac{2v^2}{4}\right)\left(\frac{2u^3}{3} + \frac{3v^2}{4}\right)$

689. $(a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$

690. $(x^2 - ax + 1)(x^2 + 4ax + 1)$

690. $(N - u)^2 (N + u)^2$

691. $(z - 4)(z^2 + 4z + 16)$

691. $(n - 1)^3 (n^2 + 2n + 1)$

Lahendada järgmised võrrandid:

692. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 9$

692. $\frac{16}{27}x = 10 + \frac{x}{9}$

693. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$

693. $\frac{2x}{3} - \frac{4x}{9} = 31 - \frac{3x}{2}$

694. $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} = 18$

694. $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{x}{3} - 13$

695. $2 = \frac{2x}{3} - \frac{x}{3}$

695. $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3} = x - 2$

696. $\frac{6}{7}x - \frac{8}{9}x = 2x$

696. $\frac{3x}{4} - \frac{11x}{8} = -x + \frac{1}{2}$

697. $\frac{x+2}{5} = \frac{2x-10}{3}$

697. $\frac{19x}{25} - \frac{13x+2}{15} = 2$

698. $\frac{x+3}{4} + \frac{1-3x}{7} = 0$

698. $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x+2}{2} + 46$

699. $\frac{3x-2}{7} + \frac{x-2}{2} = 1\frac{1}{2}$

699. $\frac{x-15}{18} - \frac{6x+5}{14} = \frac{x}{7}$

700. $\frac{x+5}{4} - \frac{1-x}{6} = 4$

700. $\frac{1}{2} + \frac{5x}{11} = \frac{4-x}{23}$

701. $\frac{x+3}{4} - \frac{x-3}{3} = 5 + x$

701. $\frac{2x+5}{3} - \frac{3x+7}{4} = \frac{1}{4}$

Leida järgmiste avaldiste pöördarvud:

702. $\frac{5}{11} \quad 2\frac{3}{4}$

702. $1 + \frac{1}{a} \quad p - \frac{1}{p}$

Lahutada tegureiks avaldised:

703. $6ac + 15bd + 9bc + 10ad$
 $h^2k^2 - 4h^2 - k^2 + 4$
 $6l^2 - 13lm + 6m^2$

703. $3N^2 - 4Nx + x^2$
 $2c^2 + cu - u^2$
 $x^2 - 7x - 18$

Lahutada tegureiks avaldised:

704. $p^2 + 2ap + a^2 - b^2$

704. $(2x + a)^2 - (3x + 2a)^2$

705. Leida avaldiste

$m^2n - mn^2, \quad m^3 - mn^2 \quad \text{ja} \quad m^3 - 2m^2n + mn^2$

suurim ühistegur ja avaldiste

$2R^2 - 7R - 15, \quad 2R^2 - 24R + 70 \quad \text{ja} \quad 2R^2 - 11R - 21$
väiksem ühiskordne.

705. Leida avaldiste

$4a^2u - 9u^3$, $4a^2u - 6au^2$ ja $4a^2u - 12au^2 + 9u^3$
suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

Taandada murrud:

706. $\frac{10u^2 + u - 21}{15u^2 - u - 28}$

706. $\frac{4ax}{(1+a)^2 - (1-a)^2}$

Teostada järgmised jagamised, enne jagatavat ja jagajat tegureiks lahutades:

707. $(nx + ny + 5x + 5y) : (x + y)$
 $(mz - nz + 3m - 3n) : (m - n)$

707. $(ax^2 - ax - x^2 + x) : (x^2 - x)$
 $(a^4 - a^3 - a^2 + a) : (a^2 - 1)$

Lahutada järgmised avaldised tegureiks:

708. $\frac{1}{3}\pi R^2h - \frac{1}{3}\pi r^2h$
 $T^2 + 20T - 525$
 $A^2 + 2A - 899$

708. $x^2 + 3nx + 2n^2$
 $1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$
 $x^2 - 1 - ax - a$

Kaks raudteerongi, mille pikkused on l meetrit, sõidavad rööbikul teedel. Nõutakse valemit aja arvutamiseks, mis kulub

709. teise rongi möödasõiduks esimesest, kui esimene seisab paigal ja teine liigub kiirusega v meetrit sekundis;

709. rongide teineteisest möödasõiduks, kui mõlemad liiguvad vastassuunas, üks kiirusega u ja teine kiirusega v meetrit sekundis.

710. Arvutada avaldise

$$\frac{x^2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{(p+3)x}{p(p+1)(p+2)} + \frac{1}{p}$$

väärtus, kui $x = p + 1$.

710. Antud on võrdus

$$y = x^n.$$

Arvutada y väärtus asendades x avaldisega $\frac{n-1}{n}$ ja võttes $n-1 = 2$.

Lihtsustada avaldised:

$$711. \quad \frac{2}{r-5} - \frac{3}{r+5} + \frac{5(r-1)}{r^2-25}$$

$$711. \quad 1 + \frac{2}{w+3} - \frac{6}{w+4}$$

Kas on kehtivad võrded:

$$712. \quad \frac{a^2 - ax}{a^2 - x^2} = \frac{an}{an + xn}$$

$$712. \quad (a^2 - b^2) : (a - b) = (a^3 + b^3) : (a^2 + b^2)$$

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$713. \quad \frac{c+3}{c^2+3c+2} - \frac{c+1}{c^2+5c+6}$$

$$713. \quad \frac{2}{(k-1)^2} - \frac{2}{(k+1)^2} + \frac{3}{k^2-1}$$

714. Näidata, et $p : q = r : s$, kui

$$(pq + rs)^2 = (p^2 + r^2)(q^2 + s^2).$$

714. Näidata, et $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{x}{ab}$, kui $x = a + b$.

Sooritada nõutavad tehted ja anda tulemused võimalikult lihtsal kujul:

$$715. \frac{4x^2 - 9y^2}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(2x + 3y)^2}$$

$$715. \frac{9x^5y^3}{35a^8b^9} \cdot \frac{12xy^7}{49a^{13}b^{10}}$$

$$716. \frac{7}{3}(3a - 2b) \cdot \frac{3}{12a^2 - 8ab}$$

$$716. \left(\frac{9x^2}{a^2} - 1\right) : \left(\frac{3x}{a} + 1\right)$$

Lihtsustada avaldised:

$$717. \left(\frac{x+y}{y} - 2\right)^4 \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} - 1\right)^2$$

$$717. 2 \cdot \frac{5p - 6q}{4p - 3q} - 3 \cdot \frac{3q - 2p}{3q - 4p}$$

$$718. \frac{p}{pq - q^2} + \frac{q}{pq - p^2}$$

$$718. \left(N - \frac{1}{N}\right) \left(N + \frac{1}{N} + 2\right) : \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) \left(\frac{1}{N} + 1\right)$$

$$719. \left(1 + \frac{a-x}{a+x}\right) \left(2 - \frac{a^2 - ax}{a-x}\right) : \frac{a-2x}{a+x}$$

$$719. \frac{x-5}{2x} \left(\frac{1}{x^2 - 8x + 15} - \frac{1}{x^2 - 2x - 15}\right)$$

720. Liita murrud:

$$\frac{2a-b}{ab-a^2}, -\frac{3a+b}{ab+a^2} \text{ ja } \frac{a-2b}{a^2-b^2}.$$

720. Teisendada võrre

$$\frac{a^2 - b^2}{2ab} : (3a^2 + ab - 2b^2) = \frac{a-b}{3a-2b} : 2ab$$

nii, et tema liikmed oleksid võimalikult lihtsad täisaval-
dised.

Olgu $\frac{a}{x} = p$. Avaldada p kaudu murrud

$$721. \quad \frac{3a}{x} \quad \frac{a}{2x}$$

$$721. \quad \frac{a^2}{x^2} \quad \frac{a + nx}{x}$$

722. Otsustada jagamist sooritamata, missuguse jäägi saame, kui arvu 421 574 607 jagame arvuga 2, arvuga 3, arvuga 4, arvuga 5, arvuga 9, arvuga 10, arvuga 25.

722. Kolmekohalisel arvul on üks ja sama arv sajalisi, kümnelisi ja ühelisi. Kas see arv jagub kolmega?

723. A. 1934 toimetatud rahvaloenduse andmeil oli Eestis elanikke 1 126 413, neist linnaelanikke 323 007. Anda nende arvude suhte jaoks rida ligikaudseid väärtusi ümmargustes arvudes ja määrata igal juhul, kas lähend annab kujutatava suuruse liiga või puudusega.

723. Sama ülesanne järgmistel andmetel: rahvaloenduse andmeil oli 1939. a. Nõukogude Liidus 170 467 252 elanikku, neist linnades 55 909 924.

Rakendades võrde põhiomadust, avaldada:

	seosest	suurus		seosest	suurus
724.	$\frac{I}{E} = \frac{1}{R+r}$	r	724.	$\frac{I}{R} = \frac{c}{R+1}$	R

725.	$\frac{P}{2Q} = \frac{R}{R-r}$	R	725.	$\frac{F-1}{G+2} = \frac{R+r}{R-r}$	r
------	--------------------------------	-----	------	-------------------------------------	-----

Lahendada võrrandid:

$$726. \quad \frac{1}{x} = 1 - \frac{x}{x+4}$$

$$726. \quad \frac{x}{x-1} - \frac{5}{6} = \frac{x+1}{6x-12}$$

$$727. \quad x+5 = \frac{x^2+11}{x+7}$$

$$727. \quad \frac{3}{x-5} - \frac{x-2}{3x-15} = \frac{x+2}{4x-20}$$

$$728. \quad \frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$$

$$728. \quad \frac{7}{x-5} + \frac{2}{x+5} = \frac{40-x}{x^2-25}$$

$$729. \quad \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2}{x+4}$$

$$729. \quad \frac{2x^2+3}{x^2-8x+16} - 1 = \frac{x-3}{x-4}$$

$$730. \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{5-x} = \frac{5}{x-2}$$

$$730. \quad \frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{x+5}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$$

Olgu $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$. Arvutada siit järgmiste murdude väärtused:

$$731. \quad \frac{a+b}{a} \quad \frac{3a+b}{a+b}$$

$$731. \quad \frac{3a-b}{2a-b} \quad \frac{a+3b}{5a-2b}$$

732. Jaanil on 90 rubla, Reinul 70. Uks on teisele võlgu. Võla tasumise järel oleks Jaanil $\frac{5}{8}$ Reinu rahast. Kui suur on võlg? Kes on võlgnik?

732. Kaks teineteisele järgnevat täisarvu rahuldavad tingimust, et $\frac{5}{9}$ suuremast on ühe võrra väiksem kui $\frac{3}{5}$ väiksemast. Mis arvud need on?

Lahendada järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

$$733. \quad x + a = b$$

$$733. \quad 4x - b = 2b$$

$$x - c = n$$

$$7x + n = 3n + n$$

$$p = q - x$$

$$\frac{1}{2}x + b = 2a$$

$$h + 2x = k + x$$

$$4a = \frac{2}{3}x - 3b$$

$$x + a = 2x + a$$

$$0,6x + 0,5a = x - 0,7a$$

Lahendada järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x :

$$734. \quad ax + b = 6b$$

$$px + q = q$$

$$mx = m^2 - m$$

$$\frac{x}{c} = 1$$

$$\frac{x}{a} = b + a$$

$$\frac{x}{3n} = 0$$

$$734. \quad g = \frac{hx}{g}$$

$$\frac{ax}{n} = an + a$$

$$3x - \frac{1}{2a} = 2x + \frac{1}{3a}$$

$$7x = \frac{4}{a} - \frac{2}{b} + 5x$$

$$a(x - b) = 0$$

$$3(c - 1)x = 3c^2 - 3$$

735. Valemis $F = \frac{Mm}{r^2}$ kõik tähed tähendavad positiivseid suurusi. Avaldada r .

735. Olgu teada, et $P = (3aL)^2$, kus kõik tähed tähendavad positiivseid arve. Avaldada L .

736. Olgu $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Avaldada y .

736. Määrata l , teades, et $S = \frac{n}{2} (a + l)$.

737. On antud valem $F = \frac{Wv^2}{rg}$. Määrata siit suurus v .

737. Olgu teada, et $w = (m - \frac{1}{2}q)^2$. Avaldada siit m .

738. Olgu teada, et $q = c \sqrt{cn}$. Avaldada siit n .

738. Olgu teada, et $u = s \sqrt{a - l^2}$. Avaldada a .

739. Määrata H , teades, et

$$n = \sqrt{\frac{3H}{7k}}.$$

739. Valemis $p = \frac{5k}{7h^2}$ tähed k , h ja p tähendavad positiivseid arve. Avaldada h .

740. Arvutada $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ja $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, leides ruutjuured veaga alla 0,001.

740. Määrata võrrandi

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

lahend ligikaudu, veaga alla 0,01.

741. Missugused kaks x -i väärtust rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2 + 8x + 7}{4} = 2(x + 2)?$$

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

741. $x^2 = 3(2x - 3)$
 $x(x + 8) = 8(x + 2)$
 $3(x + 4) = x(x - 4)$
 $5(4x + 5) - 4x(x + 5) = 0$
 $x^2 = 2(x + 8)(x - 6)$

742. $9x(x + 1) = 2(6x + 1)$
 $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$
 $(3x - 2)(2x - 1) = x$
 $(2x - 1)(x + 3) = (x + 1)^2$
 $(3 - x)^2 = (1 + 3x)(9 - x)$

$$\begin{aligned}
742. \quad & (2x - 1)^2 = (2x + 1)(4x - 3) + 2 \\
& (2x - 2)^2 = (x + 1)(x - 1) \\
& (2x - 1)(1 - 2x) = (2x + 5)(1 - x) \\
& 2(x - 1)(2x + 1) = (4x - 1)(2x - 3) \\
& (8x + 3)(4x + 1) = 2(x + 1)(4x + 3)
\end{aligned}$$

Moodustada ruutvõrrandid, mille lahendeiks on:

$$\begin{array}{ll}
743. \quad -3 \text{ ja } -7 & 743. \quad \frac{2}{3} \text{ ja } -\frac{1}{5} \\
-\frac{3}{4} \text{ ja } 5 & \frac{1}{2} + \sqrt{3} \text{ ja } \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\
\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ ja } -\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \text{ ja } \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \\
-0,5 \text{ ja } 0,8 & 1,4 + \sqrt{0,96} \text{ ja } 1,4 - \sqrt{0,96} \\
-1,4 \text{ ja } -1,5 & \frac{6 + \sqrt{6}}{5} \text{ ja } \frac{6 - \sqrt{6}}{5}
\end{array}$$

Lahendada võrrandid:

$$\begin{array}{ll}
744. \quad \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-3} & 744. \quad \frac{x-3}{x-4} = \frac{x+5}{2x-5}
\end{array}$$

Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis on sulgudes märgitud:

$$\begin{array}{ll}
745. \quad v = p\sqrt{q-n} \quad [n] & 745. \quad s = kt^2 - h \quad [t] \\
746. \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \quad [V] & 746. \quad t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad [g] \\
747. \quad k = (z-h)^2 \quad [h] & 747. \quad A = r^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad [r] \\
748. \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad [x] & 748. \quad X = a(h-1)^2 \quad [h] \\
749. \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad [r] & 749. \quad v = 1 + \sqrt{u+1} \quad [u]
\end{array}$$

750. Leida võrdest

$$\frac{a^2 - a - 6}{a + 4} : x = x : \frac{a^2 + a - 12}{a + 2}$$

arv x.

750. Leida võrdest

$$x : \frac{2a^2 - 5a - 3}{a + 2} = \frac{2a^2 + 5a + 2}{a - 3}$$

arv x.

Määrata järgmistest võrretest arv x:

751. $5 : \frac{1}{36} = x^2 : 1\frac{1}{4}$

751. $7,5 : x = x : 13,872$

752. $1,44 : x = x : 0,36$

752. $x : 3\frac{1}{16} = 1 : 169x$

Lahendada võrrandid:

753. $\frac{x^2 - 30x + 2}{6x^2 - 6} + \frac{3x + 2}{2x - 2} - \frac{5x - 1}{3x + 3} = 0$

753. $\frac{3x}{x + 5} + \frac{2x}{2x - 10} = \frac{9(x^2 - 15)}{x^2 - 25} - 5$

754. Ristkülikulisel muruplatsil, mille mõõted on 36 m ja 20 m, on tarvis ääred kaevata peenraks, mis ümbritseks muruplatsi. Kui lai tuleks kaevata peenar, et peenra pindala moodustaks 15% muruplatsi endisest pindalast?

754. Heinamaa sees on ristkülikuline põld, mõõdetega 190 ja 120 m. Kui laial ribal peab põllu äärt mööda heina maha niitma, et niidetud riba moodustaks 10 aari?

755. Kui risttahukalise paku servi suurendada vastavalt 3, 4 ja 5 cm võrra, saab ta kuubiks ja tema ruumala kasvab 2380 cm³ võrra. Leida risttahuka mõõted.

755. Veepaaki suubub 4 toru; esimese töötamisel täituku paak ühe tunniga, teise töötamisel 2, kolmanda töötamisel 3 ja neljanda töötamisel 4 tunniga. Kui kiiresti täitub ta, kui töö on kõik neli toru korraga?

756. Traaditükist, mille pikkus on 20 cm, painutati ristkülik pindalaga 22 cm². Kui pikad on selle ristküliku küljed?

756. Kahe järjestikuse arvu ruutude summa on 113. Mis arvud need on?

757. Kahe arvu summa on 75 ja korrutis 1376. Leida need arvud.

757. Ristküliku pindala on 84 cm²; selle ristküliku ümbermõõt on 40 cm. Leida ristküliku pikkus ja laius.

758. Mesilasteparvest asus $\frac{1}{2}$ kadamba õitele, $\frac{1}{3}$ silindha õitele. Kolmekordne nende osade vahe lendas kutaja õitele; ainult üks mesilane jäi järele, hõljudes õhus üles ja alla, meelitatuna jasmiiini ja pandaani magusast lõhnast. Kui palju mesilasi oli parves? (B h a s k a r a, a. 1150 ümber.)

758. Lootoslillede hulgast ohverdati jumal Šiva'le $\frac{1}{3}$, Višnu'le $\frac{1}{4}$, Päikesele $\frac{1}{5}$, Bhavan'ile $\frac{1}{6}$. Ulejäänud 6 lille sai austamisväärne õpetaja. Kui palju oli lilli? (B h a s k a r a, a. 1150 ümber.)

759. Kell on 12.00. Kui kaua aja pärast moodustavad osutid teineteisega 90°-se nurga?

759. Kell on kolme ja nelja vahel ja minutinäitaja katab tunninäitajat. Kui palju on kell?

760. Poiss käis jalgrattaga raudteejaamas. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiiru-

sega 12 km tunnis ja tagasisõit kiirusega 18 km tunnis. Jaamas kulub tal aega $\frac{1}{2}$ tundi. Kogu reis aga kestis 3 tundi. Kui kaugel raudteejaamast elas poiss?

760. Lasnamäe lennuväljalt lendas lennuk Narva suunas kiirusega 100 km tunnis. 20 minutit hiljem lendas sellele järele teine lennuk kiirusega 120 km tunnis. Tallinn—Narva lennuliini pikkus on 200 km. Kui kaugel Narva linnast jõudis teine lennuk esimesele järele?

761. Leida kolme arvu aritmeetiline keskmine, teades, et see keskmine ületab üht arvu 3 võrra ja et kahe teise arvu summa on 29.

761. Kui tasuda tehtud laen 6 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 184,05 rubla; kui aga tasuda laen 1 aasta 4 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 190,80 rubla. Kui suur on laen ja kui suur on intressimäär?

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$762. \begin{cases} \frac{x+2}{3-y} = \frac{5}{7} \\ \frac{4-x}{y+5} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$762. \begin{cases} \frac{15}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{20}{x} + \frac{18}{y} = 1 \end{cases}$$

$$763. \begin{cases} x-5=3y \\ 7-2x=4y \end{cases}$$

$$763. \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} = \frac{y+4}{y-2} \\ 3x+2=2y+1 \end{cases}$$

$$764. \begin{cases} 5x+4y+10=0 \\ 7x+6y+13=0 \end{cases}$$

$$764. \begin{cases} \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = 3 \end{cases}$$

$$765. \begin{cases} x^2 = 9y \\ y = 2(x - 4) \end{cases}$$

$$765. \begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{63}{y} = 18 \\ \frac{21}{x} + \frac{45}{y} = 16 \end{cases}$$

$$766. \begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ 11x - 9y = 24 \end{cases}$$

$$766. \begin{cases} 5,6x + 1,8y = 30,3 \\ 4,3x + 1,2y = 21,9 \end{cases}$$

767. Jõel ühendust pidav aurik liigub pärivoolu kiirusega 15 km tunnis, vastuvoolu kiirusega 9 km tunnis. Määrata auriku kiirus seisvas vees ja jõe veevoolu kiirus.

767. Kaks vaatlejat asetsevad vastavalt pealetuult ja allatuult kaugustel a ja b kilomeetrit kahurist. Esimene kuuleb pauku n sekundit, teine m sekundit pärast lasku. Arvutada neist andmeist tuule ja heli kiirus.

768. Mootorratturi ajaarvestus näitab, et sõites kiirusega 60 km tunnis ta jõuaks sihtkohta 1 tund hiljem kui tarvis; sõites aga kiirusega 72 km tunnis ta jõuaks kohale $\frac{1}{2}$ tundi varem kui tarvis. Kui kaugel on sihtkoht lähtekohast ja mitme tunni pärast mootorrattur peab olema kohal?

768. Tallinnast Tartusse ja tagasi sõiduks kulub autol kokku 10 tundi 20 minutit. Mitu km on maanteed mööda Tallinnast Tartusse, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 kilomeetrit tunnis ja tagasisõidul 40 kilomeetrit tunnis ja kui Tartus peatuti 2 tundi?

769. Kahekohalise arvu ristsumma on 13; kui jagame kümneliste arvu üheliste arvuga, siis saame jagatise 2 ja jäägi 1. Leida see kahekohaline arv.

769. Kahekohalise arvu kümnelisi on 3 võrra vähem kui ühelisi. Kui liita selle arvuga 27, siis saame arvu, mille saaksime vahetades antud arvu kümnelised ja ühelised. Mis arv see on?

770. Mitu liitrit 5%-list ja mitu liitrit 2%-list soolalahust tuleks segada, et saada 12 liitrit 3%-list soolalahust?

770. Kui palju tuleks võtta 540-proovilist ja kui palju 960-proovilist kulda, et saada 24 g sulamit, mille proov oleks 750?

(Proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 g sulami kohta.)

771. Kaks tigu asetsevad kõrgel puul kohtadel, millete vaheline kaugus on 18 jalga. Kui nad teineteisele vastu liiguksid, siis kohtuksid nad 1,5 tunni pärast; kui nad teineteist hakkaksid taga ajama, jõuaks kiirem neist aeglasemale 9 tunni pärast järele. Kui suure kiirusega liigub kumbki tigu?

771. Muul ja eesel sammusid raskesti koormatult turule. Muul kurtis oma seltsilisele õiglusetut koormamist: „Kui sina annaksid minule 1 mõõdu oma koormast, saaks minu koorem sinu omast kaks korda suuremaks; kui mina annaksin omast koormast ühe mõõdu sinule, oleks meil võrdpalju kanda.” Arvutaja, ütle, kui rasked koormad olid neil kanda? (Olevat antud ülesandena Aleksandria ülikoolis, u. a. 300 e. m. a.)

772. Kahe arvu suhe on $\frac{a}{b}$, nende arvude vahe on c . Leida need arvud.

722. Kahe arvu suhe on $m:n$; nende arvude summa on r . Leida need arvud.

773. Kahekohalise arvu jagamisel tema numbrite summaga saame jagatise 7 ja jäägi 3; jagamisel numbrite vahega saame jagatise 18 ja jäägi 1. Missugune kahekohaline arv see on?

773. Kui murru lugejaga liidame 5, taandub murd 1-ks; kui aga murru nimetajast lahutame 11, taandub ta 3-ks. Leida see murd.

774. Kaks töölist suudaksid lõpetada ettevõetud töö, kui esimene töötaks 10 päeva ja teine 5 päeva. Tegelikult töötas esimene 2 päeva ja teine 6 päeva, kusjuures teostati 60% kogu tööst. Mitme päevaga oleks kumbki tööline selle töö üksinda ära teinud?

774. Teatav töö peab olema lõpetatud 24 päevaga. Tööline T lõpetaks töö üksinda töötades 18 päevaga; tööline U lõpetaks töö üksinda töötades 30 päevaga. Töö on niisugune, et korraga saab rakendada tööle ainult ühe töölise. Kui kaua peab töötama tööline T , et selle järel tööline U võiks lõpetada töö täpselt tähtpäevaks?

VASTUSEID.

- | | |
|--|--|
| <p>212. $\frac{992}{2108}$</p> <p>214. $\frac{abn}{bn^2}$</p> <p>216. $\frac{a-b}{a^2-b^2}$</p> <p>219. $\frac{14a^2+43a+20}{21a^2+5a-4}$</p> <p>220. $\frac{2}{3}$</p> <p>222. $\frac{9}{13}$</p> <p>223. $\frac{2b}{3}$</p> <p>225. $\frac{b}{a+b}$</p> <p>226. $\frac{m+2}{m-3}$</p> <p>228. $\frac{a}{n}$</p> <p>234. $n+4$</p> <p>239. $\frac{a}{8} - \frac{1}{4a}$</p> <p>240. $\frac{2x-1}{5}$</p> <p>242. $\frac{5-v}{a(5+v)}$</p> | <p>245. -1</p> <p>249. $\frac{b}{d}$</p> <p>252. $\frac{(nz+1)^2}{nz-1}$</p> <p>253. Taandumatu.</p> <p>254. $\frac{1}{x+6}$</p> <p>258. $\frac{b-a}{a+c}$</p> <p>260. $\frac{a(b-c)}{b}$</p> <p>261. $\frac{x-5}{2(x-3)}$</p> <p>263. $\frac{x+1}{a}$</p> <p>265. $\frac{a+b}{a-b}$</p> <p>266. $\frac{z-7}{(z+1)(z-1)}$; $-\frac{1}{2}$</p> <p>267. $\frac{a^2-10}{2a-3}$; $\frac{111}{19}$</p> <p>268. $\frac{21}{36}$ ja $\frac{26}{36}$</p> <p>270. $\frac{ab}{a^2b}$, $\frac{2a}{a^2b}$ ja $\frac{3b}{a^2b}$</p> |
|--|--|

272. $\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2}$ ja $\frac{ab + b^2}{a^2 - b^2}$
274. $\frac{b^2(a - b)}{ab(a^2 - b^2)}$, $\frac{a^2(a + b)}{ab(a^2 - b^2)}$ ja $\frac{a^2b^2}{ab(a^2 - b^2)}$
276. $\frac{a + b + c}{n}$
279. m
282. $\frac{a}{6}$
285. $\frac{1}{1 - d}$
287. $\frac{b^2 - ab}{a}$
288. $\frac{2}{y^2 - 4y + 3}$
289. 1
293. $\frac{2n(2n + m)}{m(2n - m)}$
295. $-\frac{6x^2 + 31x - 62}{(3x - 7)(3x - 4)}$
298. $\frac{4a}{2a - 3x}$
299. 0
301. $\frac{9a - 4b}{a^2 - b^2}$
302. $-\frac{2}{b(a + b)}$
303. $\frac{44}{a^3 + 64}$
304. $\frac{1}{6(a + 1)}$
305. $\frac{vd}{q(q - d)}$
309. $-\frac{c}{b}$
312. $\frac{x - y}{x^2}$
314. $2c$
316. -1
318. $(x + 7u)^2$
320. $3(x + 1)$
322. $\frac{z - 2}{12}$
324. $\frac{18}{(a + 3)(a - 1)}$
326. $\frac{3(u + 1)}{2(u + 4)}$
328. 2
329. $\frac{a^2 - a - 6}{a^2 + a - 6}$
330. $1\frac{1}{2}$
334. $\frac{a^3}{5b^2}$
336. $\frac{na}{b}$
338. $\frac{1}{c}$
340. $\frac{1}{3(5a - 1)}$
344. $2a(x - a)$
345. $ax(a - x)$
348. $\frac{(m + 3)(a - 1)}{a}$
356. $\frac{a^4}{b^4} + 2 + \frac{b^4}{a^4}$
358. $\frac{9a^2 + 6ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$
360. $\frac{6a^2 + 13ab + 6b^2}{36}$

362. 3
364. $\frac{qm - pn}{q - n}$
365. c
367. $\frac{5y}{6x - 2y}$
369. $1 + c^2 - c^3$
370. $\frac{2a - 1 - a^2}{2}$
371. $\frac{a - 1}{a + 1}$
372. $a^3 - 3a^2 + 2a + 2 -$
 $-\frac{3}{a} + \frac{1}{a^2}$
373. $a^2 - b^2$
374. $\frac{x - 1}{x}$
375. $-\frac{1}{a + 1}$
376. $\frac{2b^2 + a^2}{ab}$
377. $\frac{a}{b}$
378. $x = \frac{a - b}{a + b}$
379. $x = (a + b)^2$
380. $b = \frac{S}{a}$
381. $r = \frac{S}{2\pi h}$
382. $h = \frac{2S}{a}$
383. $n = \frac{h}{\pi - H}$
384. $a = \frac{2S}{h} - b$
385. $n = \frac{JR}{E - Jr}$
386. $z = 1 - \frac{H}{K}$
387. $f = \frac{ak}{2a - k}$
388. 20
392. $-\frac{1}{8}$
394. -1
396. $1\frac{2}{5}$
398. $7\frac{10}{11}$
400. -12
402. 2
404. -3
406. 3
408. -2
413. $x = 11; y = 7$
416. $k = 7; h = 3$
420. $x = 1; y = 5$
426. 3
433. $-\frac{5}{21}$
434. $x = 3; y = 4$
436. $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{2}$
438. $x = -1; y = 1$
439. 28
441. 700 rbl.
442. $16\frac{2}{3}$ km

443. 42 km
 444. 98; 56
 447. 12 p.
 449. $\frac{2}{9}$
 450. 13,35 g ja 3,65 g
 451. 81
 452. 3 võrra.
 453. 12 rbl. ja 1,20 rbl.
 455. 76
 458. 3,16 m
 460. 19; 24; 28; 29; 23
 461. 7208
 462. 26,8
 464. 1,732; 2,449; 2,828
 465. 2,311; 2,809
 471. 2,74 dm
 475. $2\sqrt{3}$; $6\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$
 476. 36; 50
 477. $\frac{3}{2}$
 480. $\sqrt{20}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{700}$
 481. $2\sqrt{a}$; $3a\sqrt{b}$
 482. $\sqrt{9a}$; $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{ax^2}$
 483. $2a$; $5a^2$
 484. $4a$; a^4b^2
 485. $\frac{a}{b}$; $\frac{2a}{b^2}$
 487. $f = \frac{b^2u^2}{a^2}$
 491. 4,12311
 492. 0; —2
 493. 13; —13
 494. 4; —4
 495. 0; 13
 498. 2,5; —8
 502. 12 cm
 503. 5 m
 504. 2; —2
 505. 6; —2
 506. 0; —10
 507. 32; —14
 508. 1,6; —1
 509. 2,4; 0
 510. 5,83; 0,17
 511. —0,54; —7,46
 512. —6,84; —13,16
 513. 2,73; —0,73
 514. —2,88; —11,12
 515. $x^2 + 14x + 49$
 517. $x^2 + 7x + 12,25$
 519. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
 520. $x^2 - 0,2x + 0,01$
 521. 3; —1
 524. 4; —3
 525. 2; 1
 526. 3; —1
 527. 3; —2
 528. —2; —3
 529. —3; —5
 530. 5,2; 0,8
 531. —2,3; —5,7
 532. 4,3; 0,7
 533. 7,6; —6,6
 534. 0,7; —7,7
 535. 12; —3

536. 0,89; —7,89

538. 0,73; —2,73

540. 3,11; —6,11

542. 5,16; —1,16

544. 8; —1

545. 18,54 cm ja 11,46 cm

546. 12 ja 13 vöi —13 ja —12

547. 16 ja 18 vöi —18 ja —16

548. 35 ja 37 vöi —37 ja —35

549. 2; $-1\frac{1}{3}$

-2 ; $-2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$; -2

2; $\frac{1}{2}$

3; $-\frac{1}{3}$

550. 0,5; —9,5

1,6; —2,1

2; 0,7

0,3; —1,8

2,4; 0,9

551. $\frac{1}{3}$; -2

-2 ; $-\frac{1}{2}$

2; $-1\frac{1}{2}$

$3\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$

$2\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$

552. $2\frac{1}{2}$; 1

0,43; —23,43

0,45; —1,12

0,42; —6,42

$4\frac{1}{4}$; -1

553. 5; —7

3; 3

2; $\frac{1}{2}$

0; 3

$\frac{1}{4}$; -1

554. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$

0; 2

1; $\frac{1}{3}$

0; 8

5; 5

555. 2 erinevat rats. lah.;

ei ole lahendeid;

2 erinevat irrats. lah.;

2 erinevat rats. lah.;

2 erinevat rats. lah.

556. $\frac{3}{5}$; $-\frac{1}{3}$

557. 0,2091; 4,5909

558. 4; 1

559. 6; $-\frac{1}{2}$

560. 2,5774; 1,4226

561. 7; $1\frac{106}{169}$; 1,63
562. 5; 4
563. 1; -2
564. 1; 2
565. 5; $\frac{1}{2}$
566. $\frac{3}{2}$; -2
567. 5 või -6
568. 16 ja 17 või -17 ja -16
569. 16 ja 23 või -23 ja -16
570. 3,4 ja 5 või -1,0 ja 1
571. 8 m ja 7 m
572. 2,4 m
573. 5 palli.
574. 50 cm
575. 4 m ja 3,3 m
576. 20 riulit.
577. 32 km ja 36 km
578. 7 kasti.
579. 5 tundi.
580. 3 m
582. $x^2 - 7x + 12 = 0$
 $x^2 - 5x - 50 = 0$
 $x^2 + 8x + 12 = 0$
 $x^2 + 2x - 63 = 0$
 $x^2 - 4 = 0$
583. $x^2 - 2x - 1 = 0$
584. $x^2 - 3x + 1 = 0$
585. $x^2 - 28 = 0$
586. $(v + 5)(v - 6)$
 $(v + 5)(v - 8)$
 $(w + 2)(w - 12)$
 $(w + 3)(w - 8)$
 $(p - 10)(p - 7)$
587. $(a - 2)(a - 18)$
 $(c + 6)(c + 8)$
 $(2f + 1)(f - 4)$
 $(3h - 1)(h + 2)$
 $(5l - 4)(l - 2)$
588. 5; -5
7; -7; 5; -5
1; -1; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$
3,162; -3,162
3; -3
589. $\begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -3 \\ 9 \end{cases}$
590. $\begin{cases} 9 \\ 7 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -5 \\ -5 \end{cases}$
591. $\begin{cases} 6 \\ 10 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -4 \\ -10 \end{cases}$
592. $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{4}{5}$
593. $\begin{cases} 13,5 \\ 4,5 \end{cases}$ ja $\begin{cases} 1,5 \\ -1,5 \end{cases}$
594. $\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$
595. $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$
596. $\begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$

597. $\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$
598. $\begin{cases} 1 \\ 1,41 \end{cases}$ ja $\begin{cases} -1 \\ -1,41 \end{cases}$
599. 7; 5
600. 10; 2
601. 12; 3
602. 2; 5
603. 7; 5
604. 3 ja 1; -3 ja -1
605. $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = -4 \end{cases}$
606. $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = -4 \end{cases}$
607. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -1\frac{63}{89} \\ y_2 = -8\frac{6}{89} \end{cases}$
608. $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$
610. 13 cm ja 2 cm
612. 27 dm ja 17 dm
614. $x = b - a$
 $x = a$
 $x = a + b$
616. $x = -b$
 $x = b$
 $x = 10a - c$
617. $x = \frac{a}{a+b+c}$
618. $x = 2a - 2b$
619. $x = a - b$
620. $x = a + b$
621. $x = \frac{n(m+n)}{2m-2} + \frac{n}{m}$
622. $x = \frac{am}{n}$
623. $x = \frac{cm - cn}{n}$
624. $x = \frac{ab - ac}{b}$
625. $x = \frac{ab}{a+b}$
626. $x = \frac{ab}{b-a}$
627. $x = \frac{a}{a+b}$
628. $x = 0$
629. $x = \frac{ab+1}{b-a}$
630. $x = mn(n+2m)$
631. $x = \frac{bd}{ad-bc}$
632. $x = p + q$
633. $x = n - m$
634. $x = h$
635. $x = 2a$
636. $x = \frac{1}{a}$
637. $x = m^2 + mn + n^2$
638. $x = m - n$
639. $x = h$
640. $x = a + b$

641. $x = a - b$
 642. $x = \frac{c^2 + cd + bd}{ad - bc}$
 643. $x = \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}$
 644. $x = a + b$
 645. $x = \frac{a + b}{(a - b)^2}$
 646. $x = a^2 b^2 (a - b)$
 647. $x = 5c$
 648. $x = \frac{5a^2 + 5ab}{8 - 6a}$
 649. $x = 3b$
 650. $x = a$
 651. $x = \frac{nc}{a}$
 652. $x = 0$
 653. $x = -\frac{b}{a + b}$
 654. $x = -\frac{p^2}{q}$
 655. $x = \frac{b - a}{b + a}$
 656. $x = \frac{m(m + n)}{n - m}$
 657. $x = \frac{rq - ps}{ps - 2sq + rq}$
 658. $x = \frac{1}{n^2 - n}$
 659. $x = \frac{ab}{b - a}$
 660. $x = 2$
 661. v aasta pärast.
 662. $\frac{bm - am}{a}$ tellijat.

663. $\frac{5k}{5a + 3b}$ rbl.
 664. $x = y = \frac{a}{2}$
 665. $x = \frac{b}{a + c}; y = \frac{bc}{a + c}$
 666. $x = \frac{m + n}{2}; y = \frac{m - n}{2}$
 667. $x = \frac{c - b}{a - b}; y = \frac{a - c}{a - b}$
 668. $\begin{cases} x = \frac{dm - bn}{ad - bc} \\ y = \frac{an - cm}{ad - bc} \end{cases}$
 669. $x = y = p + q$
 670. $\begin{cases} x = a - 1 \\ y = a^2 \end{cases}$
 671. $\begin{cases} x = \frac{2}{a + b} \\ y = \frac{2}{a - b} \end{cases}$
 672. $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \frac{1}{b} \end{cases}$
 673. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
 674. $\begin{cases} x = 2m \\ y = 2n \end{cases}$
 675. $\frac{ms}{1 + m}$ ja $\frac{s}{1 + m}$
 676. $\frac{k - bm}{a - b}$ $\cdot a$ rbl. ja $\frac{am - k}{a - b}$ $\cdot b$ rbl.

677. $\frac{(n+m)d}{2mn}$ km tunnis ja
 $\frac{(n-m)d}{2mn}$ km tunnis.
678. $\frac{bn+b}{a+b}$ kg ja $\frac{an-c}{a+b}$ kg
679. 0,06Np km tunnis.
680. $\frac{n}{n+1}$; $\frac{n-1}{n}$
681. $\frac{5u+9}{3}$
682. $6t+8$; $\frac{4p-q}{3}$
683. $21m^2 + mn - 2n^2$
 $1 - 25p^2$
 $\frac{1}{16} - \frac{q}{2} + q^2$
 $1 - v + \frac{v^2}{4}$
 $\frac{1}{a^2} - 1$
684. $k^2x^2 + 2kx + 1$
 $27m^3 - 2,7m^2n +$
 $+ 0,09mn^2 - 0,001n^3$
 $1 + \frac{3x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3}$
 $\frac{1}{4}a^2b^2 - abu + u^2$
 $1 + \frac{2nz}{5} + \frac{n^2z^2}{25}$
685. $100u^2 + 20uv + v^2$
686. $ap + \frac{bp}{100}$ kop.
687. -21
688. 7
689. $\frac{4u^6}{9} - \frac{9v^4}{16}$
690. $x^4 + 3ax^3 +$
 $+ (2 - 4a^2)x^2 +$
 $+ 3ax + 1$
691. $z^3 - 64$
692. 20
693. 6
694. 12
695. 6
696. 0
697. 8
698. 5
699. 3
700. 7
701. -3
702. $\frac{11}{5}$; $\frac{4}{11}$
703. $(2a+3b)(3c+5d)$
 $(h+1)(h-1)(k+2)(k-2)$
 $(3l-2m)(2l-3m)$
704. $(p+a+b)(p+a-b)$
705. $m-n$;
 $2(R-5)(R-7)(2R+3)$
706. $\frac{2u+3}{3u+4}$
707. $n+5$
708. $\frac{1}{3} \pi h(R+r)(R-r)$
709. $t = \frac{2l}{v}$
710. $\frac{1}{p+2}$
711. $\frac{4}{r-5}$

712. On.

713. $\frac{4}{(c+1)(c+3)}$

715. $\frac{2x-3y}{ab(2x+3y)}$

716. $\frac{7}{4a}$

717. $\frac{(x-y)^3}{y^2(x+y)}$

718. $\frac{p+q}{pq}$

719. $\frac{4a-2a^2}{a-2x}$

720. $\frac{4a^2+ab-2b^2}{ab^2-a^3}$

721. $3p; \frac{1}{2}p$

722. 1; 0; 3; 2; 0; 7; 7

723. $\frac{11}{3}$ liiaga; $\frac{7}{2}$ puudusega.

724. $r = \frac{E}{J} - R$

725. $R = \frac{Pr}{P-2Q}$

726. $1\frac{1}{3}$

727. -2

728. 4

729. 5

730. -4

731. $\frac{12}{5}; \frac{11}{6}$

732. Rein on 10 rbl. võlgu.

733. $x = b - a$

$x = c + n$

$x = q - p$

$x = k - h$

$x = 0$

734. $x = \frac{5b}{a}$

$x = 0$

$x = m - 1$

$x = c$

$x = ab + a^2$

$x = 0$

735. $r = \sqrt{\frac{Mm}{F}}$

736. $y = b - \frac{bx}{a}$

737. $v = \sqrt{\frac{Frg}{W}}$

738. $n = \frac{q^2}{c^3}$

739. $H = \frac{7}{3} kn^2$

740. 3,650; 0,822

741. 3; -3

742. $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = -\frac{1}{3}$

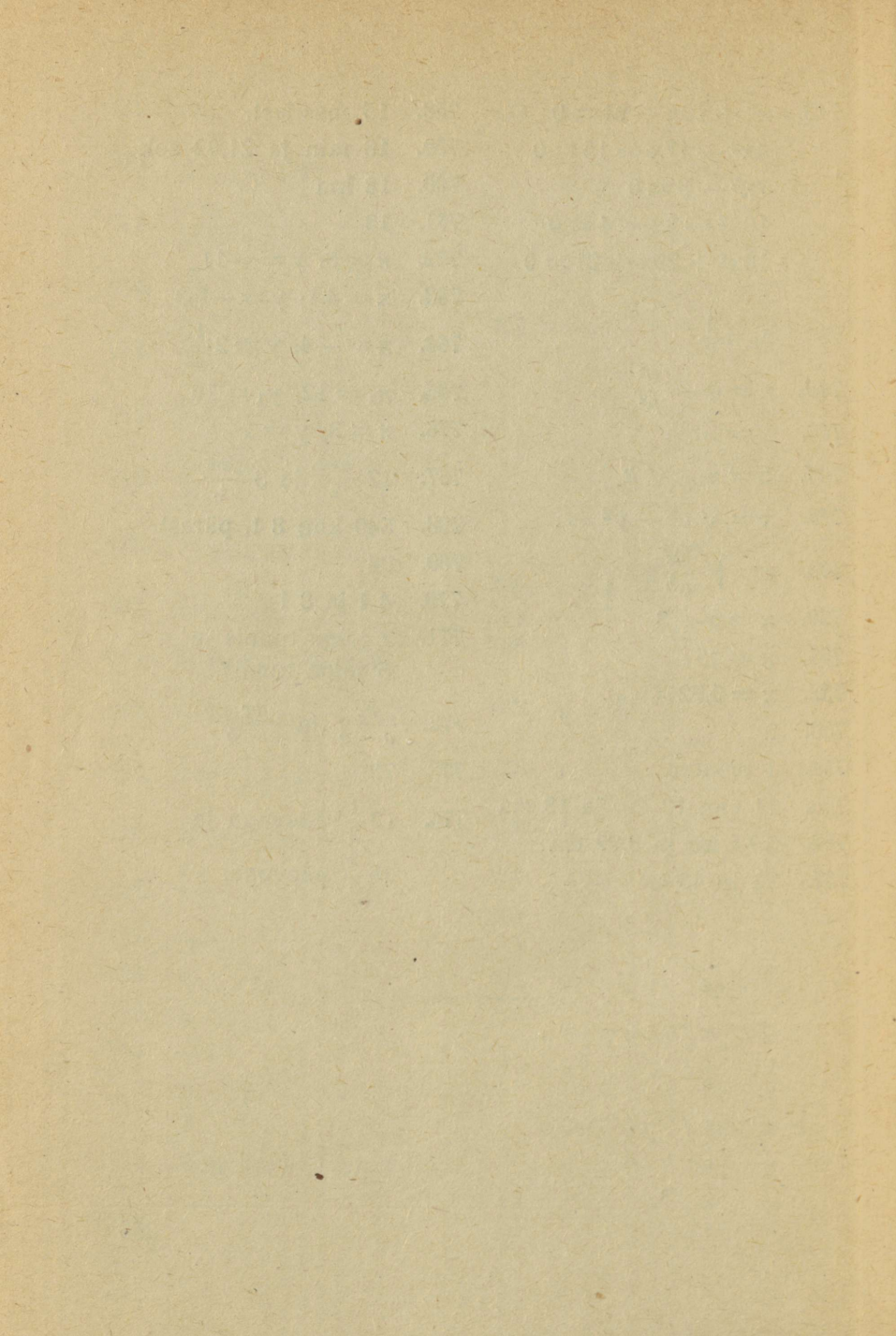
$x_1 = 0; x_2 = 2$

$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 = 1; x_2 = -4$

$x_1 = 0; x_2 = 8$

743. $x^2 + 10x + 21 = 0$
 $4x^2 - 17x - 15 = 0$
 $7x^2 - 3 = 0$
 $10x^2 - 3x - 4 = 0$
 $10x^2 + 29x + 21 = 0$
744. 5; $1\frac{1}{2}$
745. $n = q - \frac{v^2}{p^2}$
746. $V = \pi r^2 h$
747. $h = z - \sqrt{k}$
748. $x = \sqrt{a^2 - y^2}$
749. $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$
750. $x = a - 3$
751. $x = 15$
752. $x = 0,72$
753. 2
754. 1 meeter.
755. 11 cm; 12 cm ja 13 cm
756. 6,73 cm ja 3,27 cm
757. 32 ja 43
758. 15 mesilast.
759. 16 min ja 21,82 sek
760. 18 km
761. 13
762. $x = 8$; $y = -11$
763. $x = 4,1$; $y = -0,3$
764. $x = -4$; $y = 2\frac{1}{2}$
765. $x_1 = 12$; $y_1 = 16$
766. $x = 3$; $y = 1$
767. $12 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ ja $3 \frac{\text{km}}{\text{t}}$
768. 540 km; 8 t. pärast.
769. 94
770. 4 l ja 8 l
771. 7 jalga tunnis ja 5 jalga tunnis.
772. $\frac{ac}{a-b}$ ja $\frac{bc}{a-b}$
773. 73
774. $12\frac{1}{2}$ päevaga ja $16\frac{2}{3}$ päevaga.



Sisukord.

II. Algebraalne murd.

	Lk.
§ 14. Murru laiendamine	83
§ 15. Murru taandamine	85
§ 16. Murdude teisendamine ühenimelisteks	89
§ 17. Murdude liitmine ja lahutamine	92
§ 18. Murdude korrutamine	98
§ 19. Murdude jagamine	100
§ 20. Murru astendamine	103
§ 21. Mitmesuguseid tehteid murdavaldistega	105
§ 22. Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandid	111
§ 23. Murdvõrrand	120
§ 24. Murdvõrrandite süsteem	123
§ 25. Lineaarvõrrandite abil lahenduvaid ülesandeid	125

III. Ruutjuur.

§ 26. Seose $y = x^2$ graafik	131
§ 27. Ruutjuur	132
§ 28. Arvu ruudu leidmine	135
§ 29. Ruutjuure leidmise algoritm	139
§ 30. Ruutjuure leidmine etteantud täpsusega	146
§ 31. Irratsionaalarv	150
§ 32. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega	153
§ 33. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest	155
§ 34. Kahe arvu vahe teisendamine korrutiseks	159
§ 35. Ülesandeid kordamiseks	161

IV. Ruutvõrrand.

	Lk.
§ 36. Täielik ruutvõrrand	162
§ 37. Mittetäielik ruutvõrrand ja selle lahendamine	164
§ 38. Ruutvõrrandi $(x + m)^2 = n$ lahendamine	170
§ 39. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine	172
§ 40. Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalem	174
§ 41. Üldise ruutvõrrandi lahendusvalem	179
§ 42. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid	189
§ 43. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid	193
§ 44. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused	196
§ 45. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi	197
§ 46. Ruuttrinoomi tegureiks lahutamine	199
§ 47. Teise astme ruutvõrrandi lahendamine	203
§ 48. Ruutvõrrandite süsteem	204

V. Tähealiste kordajatega võrrandid.

§ 49. Tähealiste kordajatega esimese astme võrrand ühe otsitavaga	215
§ 50. Tähealiste kordajatega lineaarvõrrandisüsteem	227

VI. Ülesandeid kordamiseks

Vastuseid	235
---------------------	-----

TÄHELEPANDUD TRÜKIVIGADE ÕIENDUS.

	On trükitud:	Peab olema:
Lk. 41, rida 1 ülalt	2 : 5	2 : 3
„ 76, „ 12 alt	79. 4 m; 5 m; 10 m	79. 4 m; 6 m; 9 m
„ 178, „ 10 ülalt	542. $y^2 - 4y + 6 = 0$	542. $y^2 - 4y - 6 = 0$
„ „ „ „ „	542. $v^2 - v + 42 = 0$	542. $v^2 - v - 42 = 0$

II parandatud trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.
Keeleline toimetaja M. Tamm.

Ladumisele antud 16. VIII 1947, Trükkimisele antud 6. XI 1947. Trüki-
arv 10.200. Paber 56:79, $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 11,75. Trükitähti trüki-
poognas 34.560. Arvutuspoognaid 10,2. MB-05933.
Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 2155.

На эстонском языке.

А. Вихман. Учебник алгебры для VIII класса. II.

Rbl. 7.—

A-16687

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00506811 1

15

Rbl. 7.—

A-16687

A-16687

6.548

A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

2. VIHK

A. VIHMAN — ALGEBRA ÕPIK VIII KL.



RK

„PEDAGOOGILINE KIRIANDUS“

TALLINN 1947

15