Viktor Abramov
Piret Kuusk

Supersümmeetria

füüsikas ja matemaatikas

TARTU ÜLIKOOL
PUHTA MATEMAATIKA INSTITUUT

SUPERSÜMMEETRIA FÜÜSIKAS JA MATEMAATIKAS

Piret Kuusk
Viktor Abramov

Tartu 1994

ISBN 9985-9057-0-9

See raamat on kujundatud küljendusprogrammiga TEX (TEX on Ameerika Matemaatikaseltsi kaubamärk).
Kasutatud kirjad - Lucida Bright, Lucida New Math kirjakojalt Y&Y ja Handbook (vene priikiri).

Trükitud Tartu Ülikooli Kirjastuses
Tellimus nr. 200. 1995.

Sissejuhatus

Teoreetiline füüsika on füüsikalise reaalsuse kirjeldamine matemaatika keeles. Kirjeldus ja keel, sisu ja vorm, füüsika ja matemaatika on selles alati olnud ühteviisi olulised. Füüsikud on oma teooriate sõnastamiseks kasutanud puhta matemaatika kõige erinevamaid osasid, tihti ka omapoolselt mõjutades matemaatika arengut.

Supersümmeetria, superruumi ja supersümmeetrilise väljateooria mõisted ilmusid füüsikute töödesse paarkümmend aastat tagasi [1–4]. Peagi osutus, et olulises osas põhinevad need matemaatikas hästi tuntud gradueeritud algebrate mõistel. Füüsikute jätkuv huvi supersümmeetriliste väljateooriate vastu põhjustas kaasaegse matemaatika uue valdkonna – supermatemaatika – väljatöötamise. Praeguseks on ilmunud juba terve rida põhjalikke monograafiaid supermatemaatika kohta [5–7]. Meiegi raamat tutvustab supermatemaatikat ja selle mõningaid rakendusi füüsikas.

Esimeses osas on kirjeldatud lihtsamaid supersümmeetrilisi väljateooriaid ühe-, kahe-, nelja-, kümne- ja üheteistkümnemõõtmelistes ruumides, nii nagu füüsikud neid harilikult esitavad. Need teooriad on füüsikalise reaalsuse tugevasti lihtsustatud mudelid, mida võib pidada harjutusülesanneteks enne mateeria algosakesi ja nendevahelisi vastastikmõjusid kirjeldavate teooriateni jõudmist. Eelviimane paragrahv tutvustab supersümmeetrilist Becchi–Rouet'–Stora–Tjutini (BRST) teisendust, mis esineb igas kalibratsioonvabadusega kvantväljateoorias. Viimane paragrahv näitab, kuidas klassikalist Hamiltoni mehaanikat võib ümber formuleerida supersümmeetria keeles[1]. Raamatu esimene osa eeldab teoreetilise füüsika (väljateooria, kvantmehaanika, eri- ja üldrelatiivsusteooria) ning rühmateooria algkursuste tundmist.

---

[1] See paragrahv on kirjutatud Kaupo Palo poolt ja põhineb tema Uppsala Ülikoolis kaitstud doktoridissertatsioonil (juhendaja prof. Antti Niemi).

Teine osa on puhtmatemaatiline. Esimeses kuues paragrahvis on esitatud supermatemaatika põhimõisted - Grassmanni algebra, supermaatriks, superdeterminant, Lie' superalgebra, supermuutkond, integreerimine supermuutkonnal. Siin on eeldatud lineaaralgebra ja matemaatilise analüüsi algkursuste tundmist ning algteadmisi Lie' algebratest ja siledatest muutkondadest. Kaks viimast paragrahvi tutvustavad supermatemaatika ideede rakendamist diferentsiaaltopoloogias [8]. Superseostuse formalismi kasutamine kihtkondade topoloogiliste invariantide uurimisel [9] viis vektorkondade Thomi klassi sellise üldistuse leidmiseni, millel küll ei ole kompaktset kandjat, kuid mis kahaneb piki kihti eksponentsiaalselt. Nendest paragrahvidest arusaamiseks on vaja tunda kihtkondade teooriat ja diferentsiaaltopoloogiat.

Esimene osa kuulub teoreetilise füüsika valdkonda, olgugi et põhitähelepanu ei ole sealgi suunatud mitte niivõrd füüsikalise reaalsuse kirjeldamisele, kuivõrd kirjeldamiseks vajalikule matemaatilisele formalismile. Teine osa kuulub matemaatilise füüsika valdkonda. Nime poolest üsna sarnased, on nendel teadustel siiski väga erinevad mõtteviisid ja esituslaadid. Selles tõsiasjas võib kergesti veenduda igaüks, kes lehitseb läbi raamatu mõlemad osad.

Raamat on mõeldud täiendavaks õppematerjaliks teoreetilise füüsika ja matemaatika magistrandidele ja doktorantidele.

Autorid on sügavalt tänulikud prof. Madis Kõivule ja prof. Ülo Lumistele, kelle juhendamisel alustati supersümmeetriaalaseid uurimisi Eestis. Kaupo Palo oli lahkelt nõus oma tulemuste tutvustamiseks kirjutama esimese osa viimase paragrahvi. Prof. Ülo Lumiste konstruktiivne kriitika oli suureks abiks teise osa viimistlemisel. Täname Ilmar Otsa ja Paavo Heldet, kelle kriitilised märkused aitasid kõrvaldada mitmeid ebatäpsusi, keelelist korrektorit Mare Saart ning kirjastust „Tesserakt", kus meie failidest raamatuleheküljed kujundati. Raamat on trükitud Eesti Teadusfondi kulul (grant nr. 368).

1. Ю.А. Гольфанд, Е.П. Лихтман. *Расширение генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности.* Письма в ЖЭТФ, т. 13, стр. 452–455, 1971.

2. J. Wess, B. Zumino. *Supergauge transformations in four dimensions.* Nucl. Phys., v. B70, pp. 39-50, 1974.

3. A. Salam, J. Strathdee. *Super-gauge transformations.* Nucl. Phys., v. B76, pp. 477-482, 1974.

- *Superfields and Fermi-Bose symmetry.* Phys. Rev., v. D11, pp. 1521-1535, 1975.

4. Ф.А. Березин. *Метод вторичного квантования.* Наука, Москва, 1965.

5. Ф.А. Березин. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* Издательство МГУ, Москва, 1983.

6. B. Kostant. *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization.* Lecture Notes in Math., no. 570, pp. 177-306, Springer, 1977.

7. B. DeWitt. *Supermanifolds.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

8. E. Witten. *Supersymmetry and Morse theory.* J. Differential Geom., v. 17, pp. 661-692, 1992.

9. V. Mathai, D. Quillen. *Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms.* Topology, v. 25, pp. 85-110, 1986.

Sisukord

SUPERRUUM
JA SUPERVÄLJAD

Piret Kuusk

1

Poincaré superalgebra

Poincaré algebra. Poincaré superalgebra. Superruum. Poincaré superalgebra esitus diferentsiaaloperaatoritena. Kovariantne tuletis D_α. Relativistlik invariantsus.

1. Poincaré algebra. Relativistliku füüsika poolt kirjeldatavad protsessid toimuvad neljamõõtmelises aegruumis, mille punkte saab parametriseerida ühe aja- ja kolme ruumikoordinaadiga: $(x^a) = (t, x^i)$, $a = 0,1,2,3$, $i = 1,2,3$. Eeldame, et (x^a) on ristkoordinaadid. Kaugus s kahe punkti x^a ja y^a vahel on defineeritud valemiga

$$s^2 = \eta_{ab}(y^a - x^a)(y^b - x^b), \tag{1.1}$$

$$\eta_{ab} = diag(+1, -1, -1, -1) = \eta_{ba}. \tag{1.2}$$

See on Pythagorase teoreemi üldistus kahemõõtmeliselt tasapinnalt neljamõõtmelisele aegruumile. Aegruumi koos kauguste võrguga (1.1), (1.2) nimetatakse *Minkowski ruumiks* ja tensorit η_{ab} *Minkowski meetriliseks tensoriks* ehk *meetrikaks*.

Aegruumi koordinaadid ei ole määratud üheselt, vaid on lubatud nende lineaarteisendused:

$$x^{a'} = L^a{}_b x^b, \qquad y^{a'} = L^a{}_b y^b, \qquad L^a{}_b = const. \tag{1.3}$$

Nõuame, et kauguse avaldise kuju (1.1), (1.2) teisendustel (1.3) ei muutuks. See tähendab, et

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{ab}(y^{a'} - x^{a'})(y^{b'} - x^{b'}) = \\ &= \eta_{ab} L^a{}_c (y^c - x^c) L^b{}_d (y^d - x^d) = \\ &= \eta_{cd}(y^c - x^c)(y^d - x^d). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Järelikult peavad teisendusmaatriksid $L^a{}_b$ rahuldama kitsendavat tingimust

$$\eta_{ab} L^a{}_c L^b{}_d = \eta_{cd}. \tag{1.5}$$

Selliseid teisendusi (1.3), (1.5) nimetatakse *Lorentzi teisendusteks.*

Kauguste võrk (1.1) ei muutu ka koordinaatide jäigal nihutamisel:

$$x^{b'} = x^b + A^b, \qquad y^{b'} = y^b + A^b, \qquad A^b = const. \tag{1.6}$$

Lorentzi teisendusi (1.3), (1.5) koos nihketeisendustega (1.6) nimetatakse *Poincaré teisendusteks*

$$x^{b'} = L^b{}_d x^d + A^b. \tag{1.7}$$

Kuna kauguse s^2 avaldis (1.1) Poincaré teisendustel ei muutu, öeldakse, et Poincaré teisendused on Minkowski ruumi *sümmeetriateisendused.* Poincaré teisendused moodustavad *Poincaré rühma P* ja Lorentzi teisendused moodustavad *Lorentzi rühma L.* Saab näidata, et oma matemaatiliste omaduste poolest kuuluvad Lorentzi rühm ja Poincaré rühm *Lie' rühmade* hulka.

Lõpmata väikesi (infinitesimaalseid) Poincaré teisendusi võib anda kujul

$$x^{b'} = x^b + \delta x^b, \quad \delta x^b = -l^b{}_a x^a + a^b, \tag{1.8}$$

kus $L^b{}_d \approx \delta^b_d - l^b{}_d$ ja $A^b \approx 1 + a^b$. Minkowski meetrika invariantsuse tingimusest (1.5) saame tingimuse maatriksitele $l^b{}_a$:

$$\eta_{ab} l^b{}_d + \eta_{db} l^b{}_a = 0. \tag{1.9}$$

Kui tähistada $\eta_{ab} l^b{}_d \equiv l_{ad}$, siis ütleb valem (1.9) meile, et l_{ad} on antisümmeetriline maatriks, $l_{ad} = -l_{da}$.

Tuletame nüüd meelde mõningaid põhimõisteid Lie' rühmade teooriast. Maatriksid $L^b{}_a$ ja vektor A^b moodustavad *Poincaré rühma esituse*, mis teisendab Minkowski ruumi koordinaate (x^a) eeskirja (1.7) kohaselt. Öeldakse, et Minkowski ruum (1.1) on *Poincaré rühma esituse ruum.* Lie' rühma infinitesimaalteisendusi saab üldiselt anda rühma *generaatorite* (infinitesimaaloperaatorite) T_A ja infinitesimaalparameetrite Λ^A kaudu:

$$\delta X^r = i\Lambda^A (T_A)^r{}_s X^s.$$

Siin X^s tähistab esitusruumi vektorit, Λ^A on rühma infinitesimaalparameetrid ja $(T_A)^r{}_s$ on generaatorite vastava esituse maatriksid. Generaatorid T_A moodustavad Lie' rühmale vastava *Lie' algebra* baasi. Rühmateooriast on teada, et Lie' rühma lokaalsed omadused on täielikult määratud tema Lie' algebraga. Lie' algebra on täielikult määratud generaatorite kommutatsioonieeskirjadega

$$[T_A, T_B] \equiv T_A T_B - T_B T_A = C^D_{AB} T_D .$$

Suurusi C^D_{AB} nimetatakse *Lie' rühma struktuurikonstantideks*. Nad peavad rahuldama *Jacobi samasust*

$$C^G_{AE} C^E_{BD} + C^G_{BE} C^E_{DA} + C^G_{DE} C^E_{AB} = 0 .$$

Poincaré algebra baasi moodustavad lõpmata väikeste nihketeisenduste generaatorid P_a ja lõpmata väikeste Lorentzi teisenduste generaatorid $J_{ab} = -J_{ba}$. Seega antud juhul algebra indeks A koosneb kahest osast: $A = (a, ab = -ba)$, $A = 1, \ldots, 10$. Selleks et kirjutada infinitesimaalne Poincaré teisendus (1.8) maatriksite kaudu, toome sisse viiemõõtmelise esitusruumi, mille vektoriteks on

$$X^r = \begin{pmatrix} x^a \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Teisendus (1.8) sisaldub nüüd valemis[1]

$$\begin{pmatrix} \delta x^b \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i l^{cd} \eta_{a[d} \delta^b_{c]} & -i \delta^b_c a^c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^a \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Infinitesimaalparameetrite l^{cd} kordajad määravad generaatorite J_{cd} esitusmaatriksid ja infinitesimaalparameetrite a^c kordajad määravad generaatorite P_b esitusmaatriksid. Otsene arvutus esitusmaatriksitega kinnitab, et *Poincaré algebra* generaatorite kommutatsioonieeskirjad on järgmised:

$$[P_a, P_b] = 0 , \tag{1.10a}$$

$$2i[J_{ab}, P_d] = \eta_{ad} P_b - \eta_{bd} P_a , \tag{1.10b}$$

$$2i[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ac} J_{bd} + \eta_{bd} J_{ac} - \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ad} J_{bc} . \tag{1.10c}$$

2. Poincaré superalgebra. Oletame, et füüsikalisi protsesse on sobiv kirjeldada mitte neljamõõtmelises aegruumis, vaid üldistatud d-mõõtmelises Minkowski *superruumis*. See on ruum,

[1] Ümarsulud indeksite ümber tähistavad sümmetriseerimist ja nurksulud antisümmetriseerimist: $M_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(M_{ab} + M_{ba})$, $M_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(M_{ab} - M_{ba})$.

mille punktid on parametriseeritud d kommuteeruva ristkoordinaadiga x^i, $i = 0, \ldots, d-1$, $x^i x^k - x^k x^i = 0$, ja m antikommuteeruva koordinaadiga θ^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, $\theta^\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \theta^\alpha = 0$, $(\theta^\alpha)^2 = 0$. Superruumi range definitsioon on antud raamatu teises osas, siinkohal piirdume ainult tema kirjeldamisega koordinaatide (x^a, θ^α) kaudu. Olgu Minkowski superruumi sümmeetriarühmaks *Poincaré superrühm SP*, mille generaatoriteks on Lorentzi teisenduste generaatorid $J_{ab} = -J_{ba}$, koordinaatide x^a suunaliste nihketeisenduste generaatorid P_a ja koordinaatide θ^α suunaliste nihketeisenduste generaatorid Q_α. Ebaharilikele (antikommuteeruvatele) koordinaatidele θ^α vastavad ebaharilikud generaatorid Q_α - nende jaoks on antud mitte kommutatsioonieeskirjad, vaid antikommutatsioonieeskirjad $Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha \equiv \{Q_\alpha, Q_\beta\}$. *Poincaré superalgebra* (anti)kommutatsioonieeskirjad koosnevad Poincaré algebrast (1.10), millele meile huvipakkuvates ruumides $d = 2, 3, 4, 10, 11$ lisanduvad järgmised (anti)kommutaatorid:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\Gamma^a C)_{\alpha\beta} P_a \,, \tag{1.10d}$$

$$[Q_\alpha, P] = 0 \,, \tag{1.10e}$$

$$i[Q_\alpha, J_{ab}] = -\frac{1}{4}(\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta \,. \tag{1.10f}$$

Võrduste paremal poolel olevad struktuurikonstandid on antud Diraci maatriksite Γ^a ja laengulise konjugeerimise maatriksi C kaudu. *Diraci maatriksid* $(\Gamma^a)_\alpha{}^\beta$ on defineeritud kui *Cliffordi algebra* maatriksesitus d-mõõtmelises ruumis:

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab} I \,, \qquad \eta^{ab} = \eta_{ab} = diag(+1, -1, \cdots, -1) \,, \tag{1.11}$$

kus I on ühikmaatriks, $I_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Maatriks Γ_{ab} on Diraci maatriksite antisümmetriseeritud korrutis

$$\Gamma_{ab} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_a \Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a) \equiv \Gamma_{[a}\Gamma_{b]} \,, \quad (\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta = -(\Gamma_{ab})^\beta{}_\alpha \,. \tag{1.12}$$

On teada, et d-mõõtmelises ruumis on Cliffordi algebra taandumatu esitus realiseeritav komplekssete $(2^{[\frac{d}{2}]} \times 2^{[\frac{d}{2}]})$-maatriksitega[2]. Järelikult omandavad generaatorite Q_α ja koordinaatide θ^α indeksid väärtused $\alpha = 1, \ldots, 2^{[\frac{d}{2}]}$. *Laengulise konjugeerimise maatriks* $C_{\alpha\beta}$ on defineeritud võrdusega

$$C^{-1} \Gamma^a C = -(\Gamma^a)^T \,, \tag{1.13}$$

[2] Nurksulud arvu ümber tähistavad arvu täisosa.

kus Γ^T tähistab maatriksi Γ transponeerimisel saadud maatriksit. Transponeerime seda avaldist ja asendame Γ^a tagasi esialgsesse avaldisse. Näeme, et maatriks C peab olema kas sümmeetriline või antisümmeetriline, $C^T = \pm C$. Ruumides $d = 2, 4 \pmod 8$ ehk $d = 2, 4, 10, 12, 18, 20, \ldots$ on laengulise konjugeerimise maatriks antisümmeetriline, $C = -C^T$. Sama kehtib ka ühe võrra suurema mõõtmega ruumides $d = 3, 5 \pmod 8$. Nendes ruumides on $\Gamma^a C$ sümmeetriline maatriks, $(\Gamma^a C)^T = \Gamma^a C$. Edaspidi vaatleme ainult selliseid ruume[3]. Märgime, et paaritumõõtmelistes ruumides $d = 2k + 1$ on spiinori komponentide arv samasugune kui ühe võrra väiksema paarisarvulise mõõtmega ruumis. Sel juhul võib Γ-maatriksiteks võtta $2k$-mõõtmelise ruumi Γ-maatriksid ja lisada neile sobivalt normeeritud maatriks $\Gamma^{2k+1} = \eta \Gamma^0 \Gamma^1 \ldots \Gamma^{2k}$.

Superalgebra struktuurikonstandid rahuldavad *üldistatud (gradueeritud) Jacobi samasust*, mis sisaldab märgitegureid. Defineerime Poincaré superrühma generaatorite *paarsuse*: generaatoreid P_a, J_{ab} nimetatakse paarisgeneraatoriteks, $p = 0$, ja generaatoreid Q_α nimetatakse paarituteks generaatoriteks, $p = 1$. Üldistatud Jacobi samasuse Poincaré superalgebra (1.10) jaoks võib anda niisugusel kujul:

$$[[T_1 , T_2\} , T_3\} + (-1)^{p_1(p_2+p_3)}[[T_2 , T_3\},, T_1\} + \\ + (-1)^{p_3(p_1+p_2)}[[T_3 , T_1\} , T_2\} = 0 .$$

Siin $[T_1 , T_2\}$ tähistab antikommutaatorit juhul, kui $T_1 = Q_\alpha$, $T_2 = Q_\beta$, ja kommutaatorit kõigil ülejäänud juhtudel.

3. Superruum kui Poincaré superrühma *SP* faktorruum Lorentzi rühma *L* järgi. Poincaré superrühma algebrast (1.10) on näha, et Lorentzi rühma generaatorid J_{ij} defineerivad Poincaré superrühmas alamrühma L. Olgu Poincaré superrühmas antud järgmine ekvivalentsisuhe:

$$g_1 \sim g_2, \quad \text{kui} \quad g_2^{-1} g_1 \in L\,, \; g_1, g_2 \in SP\,.$$

[3] Ruumides $d = 0, 6 \pmod 8$, kus laengulise konjugeerimise maatriks on sümmeetriline, $C = C^T$, on $\Gamma^a C$ antisümmeetriline maatriks, $(\Gamma^a C)^T = -\Gamma^a C$. Sel juhul on Poincaré superalgebra antikommutatsioonieeskiri (1.10d) antud spiinori Q ja tema kaasspiinori $\overline{Q}$ jaoks:

$$\{Q , \overline{Q}\} = -2\Gamma^a P_a\,.$$

Saab näidata, et selle ekvivalentsisuhte põhjal jaguneb Poincaré superrühm ekvivalentsete elementide klassideks nii, et iga element kuulub parajasti ühte ekvivalentsiklassi. Ekvivalentsiklasside ruum (faktorruum SP/L) on d-mõõtmeline superruum $R^{d,t}$ d kommuteeruva ja $t = 2^{[\frac{d}{2}]}$ antikommuteeruva koordinaadiga. Selle väite põhjenduseks võib tuua järgmise arutluste rea.

Parametriseerime Poincaré superalgebra ruumi koordinaatidega $(a^i, l^{ij} = -l^{ji}, \epsilon^\alpha)$, $i, j = 0, \ldots, d-1$, $\alpha = 1, \ldots, 2^{[\frac{d}{2}]}$. Poincaré superrühma ruumi võib nüüd parametriseerida superalgebra eksponentsiaalkujutuse abil, avaldades suvalise elemendi $g \in SP$ samade parameetrite a^i, l^{ij} kaudu:

$$g = \exp(ia^j P_j - \epsilon^\alpha Q_\alpha + il^{ij} J_{ij}) . \qquad (1.14)$$

Antikommutatsioonieeskirju rahuldavate generaatorite Q_α ees seisavad siin antikommuteeruvad parameetrid, $\epsilon^\alpha \epsilon^\beta + \epsilon^\beta \epsilon^\alpha = 0$, $\epsilon^\alpha Q^\beta + Q^\beta \epsilon^\alpha = 0$. Seetõttu on superrühma infinitesimaalteisenduste algebra alati kommutaatori kujul. Näiteks

$$[\epsilon^\alpha Q_\alpha, \theta^\beta Q_\beta] = \theta^\beta \epsilon^\alpha \{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2\theta^\beta \epsilon^\alpha (\Gamma^a C)_{(\alpha\beta)} P_a .$$

Faktorruumi SP/L on sobiv parametriseerida analoogiliselt, võttes $l^{ij} = 0$:

$$h(x, \theta) = \exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha) . \qquad (1.15)$$

Imaginaarühiku i asetused valemites (1.14), (1.15) on põhjendatud kvantteoorias vajaliku nõudega, et lõpmata väikeste teisenduste generaatorite $T = (P, J, Q)$ hermiitilisusest[4] $T^\dagger = T$ järelduks lõpliku teisenduse unitaarsus $g^\dagger = g^{-1}$. Hermiitiline konjugeerimine muudab korrutises tegurite järjekorra vastupidiseks. Kui kõik parameetrid ja generaatorid on hermiitilised, siis saame tõesti

$$\begin{aligned}
&(\exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha))^\dagger = \\
&\quad = \exp(-iP_j^\dagger x^{j\dagger} - Q_\alpha^\dagger \theta^{\alpha\dagger}) = \\
&\quad = \exp(-(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha)) = \\
&\quad = (\exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha))^{-1} .
\end{aligned}$$

[4] Maatriksi M hermiitiliselt konjugeeritud maatriks on $M^\dagger = (M^*)^T$. Antikommuteeruvate suuruste Q_α ja θ^α hermiitiline konjugeerimine defineeritakse edaspidi.

Arvutame, mil viisil teisenevad superruumi koordinaadid $(z) = (x^j, \theta^\alpha)$ Poincaré superrühma SP toimel. Olgu superrühma SP toime faktorruumis SP/L defineeritud kui korrutamine vasakult rühma elemendiga $g \in SP$. Selle mõjul teisendatakse faktorruumi SP/L punkt $h(z)$ punktiks $h(z')$, kus

$$h(z') = g \cdot h(z) \exp(-il^{ij}J_{ij}) . \tag{1.16}$$

Viimane tegur selles valemis tagab, et teisendatud punkt $h(z')$ kuuluks taas faktorruumi SP/L. Asendame valemisse (1.16) $g, h(z), h(z')$ avaldised (1.14), (1.15). Eksponentsiaalkujutuste korrutiste teisendamiseks kasutame Hausdorffi teoreemi, mis väidab, et

$$\exp(tX)\exp(sY) = \exp(tX + sY + \frac{1}{2}[tX, sY] + o(t^2, s^2)) . \tag{1.17}$$

Esimeses lähenduses parameetrite (a, ϵ, l) järgi saame valemist (1.16) koordinaatide lõpmata väikeste muutuste $x' - x = \delta x$, $\theta' - \theta = \delta\theta$ jaoks avaldised

$$\delta x^j = a^j - l^j{}_k x^k - i\epsilon^\alpha(\Gamma^j C)_{\alpha\beta}\theta^\beta , \tag{1.18a}$$

$$\delta\theta^\beta = \epsilon^\beta + \frac{1}{4}\theta^\alpha l^{ij}(\Gamma_{ij})_\alpha{}^\beta . \tag{1.18b}$$

Juhul $\theta \equiv 0$ annavad need valemid koordinaadi x^j infinitesimaalse Poincaré teisenduse (1.8).

Superruumi koordinaatidega (x^j, θ^α), mis teisenevad Poincaré superrühma toimel eeskirja (1.18) kohaselt, nimetatakse *Minkowski superruumiks.*

4. Poincaré superalgebra esitus skalaarse supervälja diferentseerimisoperaatoritena. *Skalaarseks superväljaks Minkowski superruumis* nimetatakse Minkowski superruumis antud funktsiooni $\Phi(z)$, $(z^A) = (x^i, \theta^\alpha)$, mis Poincaré superrühma teisendustel ei muutu:

$$(g\Phi)(z) = \Phi(g^{-1}z) \quad \text{ehk} \quad \Phi'(z') = \Phi(z) . \tag{1.19}$$

Sel viisil on defineeritud Poincaré superrühma toime mitte ainult superruumi koordinaatidele, vaid ka skalaarsetele superväljadele. Rühmateooria terminoloogias öeldakse, et ka skalaarsete superväljade ruum on Poincaré superrühma esituse ruum. Olgu superrühma infinitesimaalteisendused, mis mõjuvad esitusruumi elementidele Φ, esitatud operaatoritega (T_a, T_α) ja olgu $(\Lambda^a, \Lambda^\alpha)$ vastavad teisenduste parameetrid, $\Lambda = const$. Siis võime teisenduse $\delta\Phi$ anda kujul

$$\delta\Phi = i\Lambda^a(T_a\Phi) - \Lambda^\alpha(T_\alpha\Phi)\,. \tag{1.20}$$

Arvutame selle põhjal Poincaré superrühma generaatorite $T_\alpha = (P_a, J_{ab}, Q_\alpha)$ kuju. Skalaarse supervälja teisenduseeskirja (1.19) Taylori arendusest saame[5]

$$\delta\Phi(z) \equiv \Phi'(z) - \Phi(z) = -\delta z^A \partial_A \Phi(z)\,. \tag{1.21}$$

Asendame siia koordinaatide infinitesimaalteisendused (1.18) ja võrrutame tulemuse $\delta\Phi$ avaldisega generaatorite kaudu (1.20). Kuna teisenduste parameetrid $\Lambda = (a, l, \epsilon)$ on kõik sõltumatud, peavad nende kordajad mõlemal pool võrdusmärki olema võrdsed. Sellest järeldub Poincaré superrühma generaatorite esitus osatuletisoperaatorite kaudu:

$$P_j = i\partial_j\,, \tag{1.22a}$$

$$J_{jk} = \frac{i}{2}(x_j\partial_k - x_k\partial_j) + \frac{i}{4}\theta^\alpha(\Gamma_{jk})_\alpha{}^\beta\partial_\beta\,, \tag{1.22b}$$

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i(\Gamma^j C)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_j\,. \tag{1.22c}$$

Otsene arvutus kinnitab, et generaatorid (1.22) rahuldavad Poincaré superalgebrat (1.10). Generaatoreid Q_α nimetatakse *supersümmeetria generaatoriteks.*

5. Supersümmeetria suhtes kovariantne tuletis. Supersümmeetria teisenduste suhtes invariantsete diferentsiaalvõrrandite leidmine on lihtsam, kui tuletisoperaatorid (anti)kommuteeruvad generaatoritega Q_α. Valemist (1.22c) on näha, et harilikel osatuletistel ∂_α sellist omadust ei ole, $(\partial_\alpha Q_\beta + Q_\beta\partial_\alpha) \neq 0$. Seepärast toome sisse *supersümmeetria suhtes kovariantsed tuletised D_α*, mis antikommuteeruvad supersümmeetria generaatoritega Q_α. Seda võib teha lähtudes asjaolust, et vasakud ja paremad nihked (super)rühmas (anti)kommuteeruvad. Defineerime operaatorite D_α mõju faktorruumi SP/L elemendile

[5] Osatuletis antikommuteeruva koordinaadi järgi on defineeritud valemiga $\partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Matemaatiliselt range definitsioon on antud raamatu teises osas.

$h(z)$ kui korrutamise paremalt superrühma SP elemendiga $g_\xi = \exp(-\xi^\beta Q_\beta)$:

$$\begin{aligned} \exp(-\xi^\alpha D_\alpha)\, h(z) \equiv h(z) \cdot g_\xi &= \\ = \exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha) \exp(-\xi^\beta Q_\beta)\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Teisendame selle võrduse paremat poolt Hausdorffi valemi (1.17) abil:

$$\begin{aligned} &\exp(-\xi^\alpha D_\alpha) h(z) = \\ &\quad = \exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha - \xi^\beta Q_\beta + \frac{1}{2}[\theta^\alpha Q_\alpha, \xi^\beta Q_\beta]) = \\ &\quad = \exp(-\xi^\beta Q_\beta + [\theta^\alpha Q_\alpha, \xi^\beta Q_\beta]) \exp(ix^j P_j - \theta^\alpha Q_\alpha) = \\ &\quad = \exp(-\xi^\beta Q_\beta - 2\xi^\beta \theta^\alpha (\Gamma^j C)_{\alpha\beta} P_j) h(z)\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Siit saab välja lugeda kovariantsete tuletiste D_α avaldised Poincaré superrühma generaatorite Q_α, P^j kaudu:

$$D_\alpha = Q_\alpha + 2\theta^\beta (\Gamma^j C)_{\alpha\beta} P_j \tag{1.25a}$$

ehk harilike osatuletiste kaudu:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i(\Gamma^j C)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_j\,. \tag{1.25b}$$

Otsene arvutus kinnitab, et

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0 \tag{1.26}$$

ja et kovariantsete tuletiste antikommutaator on samasuguse struktuuriga nagu supersümmeetria generaatorite Q_α antikommutaator (1.10d), kuid vastupidise märgiga:

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 2(\Gamma^a C)_{\alpha\beta} P_a\,. \tag{1.27}$$

6. Relativistlik invariantsus ja supersümmeetria. Poincaré rühm on tasase aegruumi sümmeetriarühm. Kõik tasases aegruumis antud füüsikateooriad peavad olema invariantsed Poincaré teisenduste suhtes ehk *relativistlikult invariantsed.*

Poincaré superrühm on Poincaré rühma selline selline üldistus, mis sisaldab alamrühmana Poincaré rühma. Poincaré superalgebra kirjeldab relativistlikult invariantsete füüsikateooriate sümmeetriateisendusi, mis sisaldavad endas lisaks aegruumi sümmeetriateisendustele (Poincaré teisendustele) veel täiendavaid sümmeetriateisendusi.

Seni oleme vaadelnud lihtsaimat Poincaré superalgebrat SP, kus supersümmeetria generaatoriteks on Q_α. *Poincaré laiendatud superalgebras* on supersümmeetria generaatorid mingi täiendava sisemise sümmeetriarühma G p-mõõtmelise esitusruumi elemendid Q^i_α, $i = 1, \ldots, p$. Sel juhul asendub antikommutatsioonieeskiri (1.10d) (anti)kommutaatoritega

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = -2(\Gamma^a C)_{\alpha\beta} P_a \delta^{ij},$$

$$[Q^i_\alpha, T_A] = (T_A)^i{}_j Q^j_\alpha,$$

$$[T_A, T_B] = C^D_{AB} T_D.$$

Siin T_A, $A = 1, \ldots, \dim G$ on rühma G generaatorid ja C^D_{AB} on rühma G struktuurikonstandid. Maatriksid $(T_A)^i{}_j$ moodustavad generaatorite T_A maatriksesituse p-mõõtmelises esitusruumis elementidega Q^i.

Haagi-Łopuszanski-Sohniuse teoreem väidab, et Poincaré laiendatud superalgebrad on ainukesed gradueeritud Lie' algebrad, mis võivad olla relativistlikult invariantse kvantväljateooria hajumismaatriksi sümmeetriateisenduste algebraks. Sellest järeldub Poincaré superalgebrate põhjapanev tähtsus relativistlike kvantväljateooriate formuleerimisel.

Ülesanded

1.1. Kontrollida gradueeritud Jacobi identsuse kehtivust Poincaré superalgebra (1.10) jaoks.

1.2. Tuletada Minkowski superruumi koordinaatide (x^a, θ^α) teisenemine (1.18) Poincaré superrühma lõpmata väikesel teisendusel.

1.3. Kontrollida, et Poincaré superrühma esitus (1.22) diferentsiaaloperaatorite kaudu rahuldab Poincaré superalgebra (anti)kommutatsioonieeskirju (1.10).

1.4. Kontrollida, et supersümmeetria suhtes kovariantsed tuletised D_α (1.25) rahuldavad antikommutatsioonieeskirju (1.26), (1.27).

2

Spiinorid d-mõõtmelises ruumis

Spiinori mõiste. Weyli (kiraalsed) spiinorid. Majorana spiinorid. Majorana-Weyli spiinorid. Spiinorid ja Diraci maatriksid ruumides $d = 2, 3, 4, 10, 11$

1. Spiinori mõiste. Aegruum, milles me elame, on vähemalt makroskoopiliselt vaadatuna neljamõõtmeline (üks ajamõõde ja kolm ruumimõõdet). Füüsikateooriates on aga kasutamist leidnud ka neljast väiksema või suurema arvu mõõtmetega ruumid. Osake (punktmass) kujundab aegruumis liikumisel maailmajoone - ühemõõtmelise ruumi. String (ühemõõtmeline objekt) kujundab aegruumis liikumisel maailmalehe - kahemõõtmelise ruumi (pinna). Membraani (kahemõõtmelise objekti) liikumist aegruumis kirjeldab maailmaruumala - kolmemõõtmeline ruum. Kaluza-Kleini tüüpi teooriates, kus erinevaid füüsikalisi vastastikmõjusid kirjeldatakse ühtse matemaatilise formalismi abil, lisatakse aegruumi koordinaatidele sisemise sümmeetriarühma G ruumi koordinaadid: $x^A = (x^\mu, \xi^\alpha)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\alpha = 1, \ldots, \dim G$. Stringi kvantteooriast järeldub, et kvantiseeritud stringi saab mittevastuoluliselt kirjeldada ainult 26-mõõtmelises ruumis. Superstringi kvantteooria on mittevastuoluline superruumis, millel on 10 kommuteeruvat ja vähemalt 16 antikommuteeruvat koordinaati. Antikommuteeruvaid koordinaate ja fermionvälju kirjeldavate spiinorite mitmed omadused sõltuvad suuresti (aeg) ruumi dimensiooni d konkreetsest väärtusest.

Tuletame meelde, et Lorentzi rühma L spiinoresituse võib defineerida lähtudes Diraci maatriksitest $(\Gamma^a)_\alpha{}^\beta$. Definitsiooni (1.11) põhjal moodustavad maatriksid Γ^a, $a = 0, \ldots, d-1$, vektori d-mõõtmelises Minkowski ruumis meetrikaga $\eta_{ab} = diag(+1, -1, \ldots, -1)$ ja nad teisenevad Lorentzi teisendustel valemi (1.3) kohaselt:

$$\Gamma^{a'} = L^a{}_b \Gamma^b . \tag{2.1}$$

Saab tõestada, et teisendusest (2.1) Diraci maatriksite jaoks järeldub sellise $(2^{[\frac{d}{2}]} \times 2^{[\frac{d}{2}]})$-maatriksi $S(L)$ olemasolu, et teisendus (2.1) on antav kujul

$$(\Gamma^{a'})_\alpha{}^\beta = (S(L))_\alpha{}^\sigma (\Gamma^a)_\sigma{}^\rho (S^{-1}(L))_\rho{}^\beta . \qquad (2.2)$$

Maatrikseid S(L) nimetatakse *Lorentzi rühma L spiinoresituseks* ja $2^{[\frac{d}{2}]}$-mõõtmelist komplekset ruumi, kus see esitus mõjub, nimetatakse $2^{[\frac{d}{2}]}$-komponendiliste *Diraci spiinorite* ruumiks. Diraci spiinori φ_α teisenemiseeskiri Lorentzi teisendustel on $\varphi'_\alpha = S_\alpha{}^\beta \varphi_\beta$. Diraci spiinori θ^α teisenemiseeskiri on $\theta^{\alpha'} = \theta^\beta (S^{-1})_\beta{}^\alpha$. Skalaarkorrutis $\theta^\alpha \varphi_\alpha$ on järelikult Lorentzi teisenduste suhtes invariantne.

Poincaré superalgebra (anti)kommutaatorite (1.10d), (1.10f) kuju näitab, et generaatorid Q_α on Lorentzi rühma spiinoresituse ruumi elemendid - indeks α on sama tüüpi nagu Diraci maatriksite spiinorindeksid ning viimastega summeeritav.

2. Weyli (kiraalsed) spiinorid. Moodustame kõigi Γ-maatriksite korrutise

$$\Gamma^{d+1} = \eta \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{d-1} . \qquad (2.3)$$

Normeerime ta tingimusega

$$(\Gamma^{d+1})^2 = I \qquad (2.4)$$

ja nõuame, et ta antikommuteeruks kõigi Γ-maatriksitega:

$$\{\Gamma^a, \Gamma^{d+1}\} = 0 . \qquad (2.5)$$

Viimasest nõudest järeldub, et korrutises Γ^{d+1} peab olema paarisarv tegureid, järelikult eksisteerib selline maatriks ainult paarismõõtmelises ruumis, $d = 2k$. Normeerimistingimus (2.4) annab siis kordaja η väärtuseks

$$\eta^2 = (-1)^{k-1} . \qquad (2.6)$$

Defineerime *vasaku* ja *parema Weyli spiinori* ψ_l, ψ_r järgmiste tingimustega:

$$\Gamma^{d+1} \psi_l = +\psi_l , \qquad (2.7a)$$

$$\Gamma^{d+1} \psi_r = -\psi_r . \qquad (2.7b)$$

Olgu Diraci maatriksid antud *kiraalses esituses:*

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^a)_\alpha{}^{\dot\beta} \\ (\tilde\gamma^a)_{\dot\alpha}{}^\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \dot\alpha, \dot\beta = 1, \dots, 2^{k-1} . \qquad (2.8)$$

Cliffordi algebrast (1.11) järelduvad tingimused maatriksitele $\gamma^a, \tilde{\gamma}^a$:

$$(\gamma^a)_\alpha{}^{\dot\beta}(\tilde{\gamma}^b)_{\dot\beta}{}^\epsilon + (\gamma^b)_\alpha{}^{\dot\beta}(\tilde{\gamma}^a)_{\dot\beta}{}^\epsilon = 2\eta^{ab}\delta^\epsilon_\alpha, \tag{2.9a}$$

$$(\tilde{\gamma}^a)_{\dot\alpha}{}^\beta(\gamma^b)_\beta{}^{\dot\epsilon} + (\tilde{\gamma}^b)_{\dot\alpha}{}^\beta(\gamma^b)_\beta{}^{\dot\epsilon} = 2\eta^{ab}\delta^{\dot\epsilon}_{\dot\alpha}. \tag{2.9b}$$

Saab näidata, et kiraalses esituses on maatriks Γ^{d+1} diagonaalkujul:

$$\Gamma^{d+1} = \begin{pmatrix} \delta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & -\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

ja iga Diraci spiinorit ψ võib vaadelda koosnevana kahest Weyli spiinorist:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_l \\ \psi_r \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Weyli spiinorite ψ_l, ψ_r komponentide arv on ilmselt poole väiksem kui Diraci spiinori komponentide arv, neil on 2^{k-1} kompleksset komponenti.

3. Majorana spiinorid. Füüsikas on olulised sellised Diraci spiinorid, mis rahuldavad *Diraci võrrandit* (valime ühikud nii, et Plancki konstant $\hbar = 1$)

$$(\Gamma^a(i\partial_a - eA_a) - m)\psi = 0, \qquad a = 0, \ldots, d-1. \tag{2.12}$$

Selle võrrandi lahend kirjeldab kvantosakest, millel on spinn $\frac{1}{2}$, elektrilaeng e ja mass m ning mis liigub d-mõõtmelises ruumis välises elektromagnetväljas potentsiaaliga $A_a(x)$.

Osakesele ψ vastavat *antiosakest* $\bar{\psi}$ kirjeldab Diraci võrrand, kus elektrilaengu märk on vastupidine:

$$(\Gamma^a(i\partial_a + eA_a) - m)\bar{\psi} = 0. \tag{2.13}$$

Tuletame seose osakese ψ ja antiosakese $\bar{\psi}$ vahel. Selleks paneme tähele, et Cliffordi algebra määravat tingimust (1.11) rahuldavad lisaks maatriksitele Γ^a ilmselt ka nende kaaskompleksed maatriksid $(-\Gamma^a)^*$. Kuna Cliffordi algebra maatriksesitus on taandumatu, peab eksisteerima maatriks B, mis teisendab maatriksi Γ^a kaaskomplekseks maatriksiks $(-\Gamma^a)^*$:

$$(\Gamma^a)^* = -B\Gamma^a B^{-1}. \tag{2.14}$$

Võtame Diraci võrrandi (2.12) kaaskomplekse võrrandi, arvestame, et e, m ja A_a on reaalsed, ning kasutame seost (2.14). Näeme, et võrrandi (2.13) lahendit saab kirjutada kujul

$$\bar{\psi} = B^{-1}\psi^* . \tag{2.15}$$

Füüsikas kirjeldab *Majorana spiinor* osakest, mis on identne oma antiosakesega, $\psi = \bar{\psi}$. Majorana spiinoriga kirjeldatav osake peab olema ilma laenguta, $e = 0$, ning rahuldama mõlemat Diraci võrrandit (2.12), (2.13). Valemist (2.15) järelduvad ψ jaoks seosed

$$\psi^* = B\psi , \quad \psi = B^*\psi^* . \tag{2.16}$$

Sellest järeldub tingimus Majorana spiinorite olemasoluks:

$$BB^* = 1 . \tag{2.17}$$

See tingimus on kitsendav, sest maatriksi B definitsioonivalemist (2.14) saab analoogilisel viisil tuletada üldisema tingimuse

$$BB^* = \epsilon, \quad \epsilon = \pm 1 . \tag{2.18}$$

Saab näidata, et tingimust $\epsilon = +1$ võib rahuldada ainult niisugustes ruumides, mille dimensioon on $d = 2, 3, 4 \pmod 8$, s.o. $d = 2, 3, 4, 10, 11, 12, 18, \ldots$, ja et sel juhul eksisteerib Γ-maatriksite esitus, kus $C = \Gamma^0$.

Esitustes, kus Γ^0 on hermiitilise konjugeerimise maatriks, $\Gamma^0\Gamma^a\Gamma^0 = (\Gamma^a)^\dagger$ ehk $\Gamma^{0\dagger} = \Gamma^0$, $\Gamma^{a\dagger} = -\Gamma^a$, järeldub valemitest (1.13), (2.14) $B^{-1} = \pm\Gamma^0 C$. Esituses, kus $C = \Gamma^0$, võime maatriksi B võtta võrdseks ühikmaatriksiga, $B = I$, ja Majorana spiinorid (2.16) on reaalsete komponentidega, $\psi^* = \psi$. Niisugust esitust nimetatakse *Majorana esituseks*. Diraci võrrandite (2.12), (2.13) kujust juhul $e = 0$ järeldub, et selles esituses on Γ-maatriksite komponendid puhtimaginaarsed. Kui vaadelda ainult massita ($m = 0$) Majorana spiinorvälju, võib Γ-maatriksitele leida ka reaalse Majorana esituse.

Lisaks siin esitatud Diraci võrrandist lähtuvale Majorana spiinorite definitsioonile kasutatakse matemaatikas ka üldisemat (pseudo)Majorana spiinorite definitsiooni, mida me aga lähemalt ei käsitle.

4. Majorana–Weyli spiinorid. Weyli spiinoreid, mille komponendid rahuldavad Majorana tingimust (2.16), nimetatakse

Majorana-Weyli spiinoriteks. Majorana esituses, kus Majorana spiinorid on reaalsete komponentidega, $\psi = \psi^*$, on Weyli spiinorite definitsioonivalemid (2.7) mittevastuolulised ainult siis, kui maatriks Γ^{d+1} on reaalne. Kuna Γ^{d+1} on sel juhul paarisarvu puhtimaginaarse Γ-maatriksi korrutis, siis peab η olema reaalne ehk $\eta^2 = +1$. Valemi (2.6) põhjal tähendab see, et $k = \frac{d}{2}$ peab olema paaritu arv. Kokku oleme Majorana-Weyli spiinorite eksisteerimiseks saanud niisiis kolm tingimust:

1) Weyli spiinorid eksisteerivad ainult paarismõõtmelistes ruumides, $d = 2k$;

2) Majorana spiinorid eksisteerivad ruumides $d = 2, 3, 4$ (mod 8);

3) Majorana ja Weyli tingimused on kooskõlalised ainult juhul, kui $k = \frac{d}{2}$ on paaritu arv.

Neist järeldub, et Majorana-Weyli spiinoreid saab defineerida ainult $d = 2$ (mod 8)-mõõtmelistes ruumides. Majorana-Weyli spiinoritel on 2^{k-1} reaalset komponenti.

Majorana-Weyli spiinorid võivad rahuldada Diraci võrrandit (2.12) ainult juhul $e = 0$ (järeldub Majorana tingimusest (2.16)) ja $m = 0$ (järeldub Weyli tingimusest (2.7)).

5. Näited

Vaatleme lähemalt Γ-maatrikseid ja spiinoreid füüsikas enamkasutatavates ruumides $d = 2, 4, 10, 11$.

$d = 2$. Kahemõõtmelises ruumis on Diraci spiinorid kahe kompleksse komponendiga. Γ-maatriksitele on võimalik leida puhtimaginaarne Majorana esitus:

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.19a}$$

$$C = \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C = -C^T, \tag{2.19b}$$

$$\Gamma^3 = \Gamma^0\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.19c}$$

Näeme, et Majorana esitus (2.19) on ühtlasi ka kiraalne esitus (2.8) ja reaalsete komponentidega Majorana spiinorid ψ lagunevad kaheks Majorana-Weyli spiinoriks:

$$\Gamma^3 \begin{pmatrix} \psi_l \\ \psi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_l \\ -\psi_r \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Kahemõõtmelise ruumi Majorana-Weyli spiinoritel on seega üksainuke reaalne komponent.
$\boldsymbol{d}$ = 4. Neljamõõtmelises ruumis on võimalik defineerida nii Majorana kui Weyli spiinoreid, kuid mitte Majorana-Weyli spiinoreid. Enam kasutamist on leidnud kahekomponendilised kompleksed Weyli spiinorid ja Γ-maatriksite kiraalne esitus

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a_{A\dot{B}} \\ \sigma^{aB\dot{A}} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\epsilon_{AB} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = -C = C^T, \tag{2.21}$$

kus $A, B, \dot{A}, \dot{B} = 1, 2$, $\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^a_{A\dot{B}}$ on hermiitilised *van der Waerdeni sümbolid*

$$\sigma^0_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

ja $\sigma^{aB\dot{A}}$ on defineeritud valemitega

$$\sigma^{aB\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}\sigma^a_{D\dot{C}}, \quad \sigma^a_{A\dot{B}} = \sigma^{aC\dot{D}}\epsilon_{CA}\epsilon_{\dot{D}\dot{B}} \,. \tag{2.23}$$

Cliffordi algebrast (1.11) järelduvad tingimused van der Waerdeni sümbolitele σ^a:

$$\sigma^{aA\dot{B}}\sigma^b_{C\dot{B}} + \sigma^{bA\dot{B}}\sigma^a_{C\dot{B}} = 2\eta^{ab}\delta^A_C \,. \tag{2.24}$$

Otsene arvutus kinnitab, et Γ-maatriksid (2.21) on (anti)hermiitilised, $(\Gamma^a)^\dagger = \eta^{ab}\Gamma_b$. Kuna Cliffordi algebra (1.11) põhjal kehtivad ka seosed $(\Gamma^a)^{-1} = \eta^{ab}\Gamma_b$, siis on Γ-maatriksid (2.21) unitaarsed.

Maatriks Γ^5 on defineeritud korrutisena

$$\Gamma^5 = -i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} . \tag{2.25}$$

Kui Diraci spiinori komponente tähistada[1]

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \overline{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

[1] Punkteerimata indeksiga spiinori tähiseks on ϕ ja punkteeritud indeksiga spiinori tähiseks on $\overline{\chi}$.

siis vasak ja parem Weyli spiinor on vastavalt kujul

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \phi_A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Me võime defineerida spiinorindeksite tõstmise ja langetamise mitte ainult van der Waerdeni sümbolite jaoks (2.23), vaid ka Weyli spiinorite ϕ_A ja $\overline{\chi}^{\dot{A}}$ jaoks:

$$\phi^B = \epsilon^{BA}\phi_A, \quad \overline{\chi}_{\dot{A}} = \overline{\chi}^{\dot{B}}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}. \tag{2.28}$$

Paneme tähele, et summeeritud on *ülalt vasakult alla paremale*. Nüüd on võimalik moodustada skalaarkorrutisi $\psi^A\phi_A$, $\overline{\psi}^{\dot{A}}\overline{\phi}_{\dot{A}}$. Kuna ϵ_{AB} on antisümmeetriline, siis

$$\psi^A\phi_A = \psi^A\phi^B\epsilon_{BA} = -\psi^A\epsilon_{AB}\phi^B = -\psi_B\phi^B. \tag{2.29}$$

Edasi vaatleme Majorana spiinorite defineerimist. Otsene arvutus näitab, et kiraalses esituses (2.21), (2.22) on Γ^0 hermiitilise konjugeerimise maatriks ja et me võime võtta $B^{-1} = -\Gamma^0 C = C\Gamma^0$. Majorana tingimus (2.16) on seega kujul

$$\psi = C\Gamma^0\psi^* = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_{AB} \\ \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} & 0 \end{pmatrix}\psi^*. \tag{2.30}$$

Saab näidata, et punkteeritud ja punkteerimata indeksid teisenevad Lorentzi rühma katva rühma $SL(2,C)$ kaaskompleksesituste kohaselt. Spiinori ψ^α (2.26) kaaskompleksne spiinor on järelikult

$$\psi^*_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \phi^*_A \\ (\overline{\chi}^{\dot{A}})^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_{\dot{A}} \\ \chi^A \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ja tingimus (2.30) ütleb, et Majorana spiinori komponentide vahel kehtivad seosed

$$\begin{pmatrix} \phi_A \\ \overline{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_A \\ \overline{\phi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}.$$

Majorana spiinor ψ_α on seega esitatav kahekomponendilise spiinori ψ_A ja tema kaaskomplekse spiinori $\overline{\psi}_{\dot{A}}$ kaudu:

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \overline{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Arvestades seoseid (2.28) võime defineerida Majorana spiinori ψ^α kahekomponendilise spiinori φ^A kaudu:

$$\varphi^\alpha = (\varphi^A \quad -\overline{\varphi}_{\dot{A}}) \,. \tag{2.33}$$

Skalaarkorrutis avaldub nüüd

$$\varphi^\alpha \psi_\alpha = \varphi^A \psi_A + \overline{\varphi}^{\dot{A}} \overline{\psi}_{\dot{A}} \,. \tag{2.34}$$

Edaspidi (§6) on meil tarvis kasutada antikommuteeruvate komponentidega kahekomponendilisi spiinoreid θ^A, $\overline{\theta}_{\dot{A}}$, χ_A, $\overline{\chi}^{\dot{A}}$. Sel juhul kehtib valemi (2.29) kohaselt

$$\theta^A \chi_A = \chi^A \theta_A \,. \tag{2.35}$$

Defineerime antikommuteeruvate komponentidega spiinori θ^A hermiitilise konjugeerimise seosega

$$(\theta^A)^\dagger = \overline{\theta}^{\dot{A}} \,. \tag{2.36}$$

Nõuame, et skalaarkorrutis (2.34) oleks hermiitiline, $\theta^\alpha \chi_\alpha = (\theta^\alpha \chi_\alpha)^\dagger \equiv \chi_\alpha^\dagger \theta^{\alpha\dagger}$. Lähme üle kahekomponendilistele spiinoritele ja arvestame seost (2.36). Näeme, et sümbolite $\epsilon_{AB}, \epsilon^{AB}$ hermiitiline konjugeerimine tuleb sel juhul defineerida järgmiselt:

$$(\epsilon_{AB})^\dagger = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \,, \quad (\epsilon^{AB})^\dagger = -\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \,. \tag{2.37}$$

Siit järeldub

$$(\theta_A)^\dagger = (\theta^B \epsilon_{BA})^\dagger = -\overline{\theta}_{\dot{A}} \,. \tag{2.38}$$

***d* = 10.** Kümnemõõtmelises ruumis saab leida Γ-maatriksite kiraalse esituse (2.8), mis on ühtlasi ka Majorana esitus - kõik Γ-maatriksid on puhtimaginaarsed:

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^a)_\alpha{}^{\dot{\beta}} \\ (\tilde{\gamma}^a)_{\dot{\alpha}}{}^\beta & 0 \end{pmatrix} , \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, \ldots, 16 \,, \tag{2.39}$$

$$\Gamma^{11} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & (C_8)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (-C_8)_{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.40}$$

$$C^{-1} = -C = C^T \,, \quad C^2 = -1 \,, \tag{2.41}$$

$$C_8^{-1} = C_8 = C_8^T \,, \quad C_8^2 = 1 \,. \tag{2.42}$$

Iga 32-komponendiline Majorana (reaalsete komponentidega) spiinor laguneb kaheks Majorana-Weyli spiinoriks:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{\alpha} \\ \phi^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, \ldots, 16. \tag{2.43}$$

Indeksite langetamine on defineeritud laengulise konjugeerimise maatriksi C abil:

$$\psi_{\alpha} = (C_8)_{\alpha\dot{\beta}} \psi^{\dot{\beta}}, \quad \phi_{\dot{\alpha}} = -(C_8)_{\dot{\alpha}\beta} \phi^{\beta}. \tag{2.44}$$

Me võime kasutada ka ainult 16-komponendilisi spiinoreid $\phi_{\alpha}, \psi^{\alpha}$ ja sümmeetrilisi maatrikseid $\gamma^{a\alpha\beta}, \gamma^{a}_{\alpha\beta}$, kui defineerime

$$\gamma^{a\alpha\beta} = (C_8^{-1})^{\alpha\dot{\alpha}} (\tilde{\gamma}_a)_{\dot{\alpha}}{}^{\beta}, \quad \gamma^{a}{}_{\alpha\beta} = -(\gamma^{a})_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} (C_8)_{\dot{\beta}\beta}. \tag{2.45}$$

Cliffordi algebrast (2.9a) järeldub nüüd tingimus

$$\gamma^{a}{}_{\alpha\beta} \gamma^{b\beta\epsilon} + \gamma^{b}{}_{\alpha\beta} \gamma^{a\beta\epsilon} = -2\eta^{ab} \delta^{\epsilon}_{\alpha}. \tag{2.46}$$

Kuna $C = \Gamma^0$ on puhtimaginaarne, on γ-maatriksid reaalsed. Reaalsete komponentidega spiinorid $\phi_{\alpha}, \psi^{\alpha}$ on vastupidise kiraalsusega ja indekseid ei tõsteta ega langetata.

Saab näidata, et paaritu arvu γ-maatriksite antisümmetriseeritud korrutised on kas sümmeetrilised või antisümmeetrilised maatriksid:

$$\gamma^{m_1 \ldots m_{2r+1}} \equiv \gamma^{[m_1} \gamma^{m_2} \ldots \gamma^{m_{2r+1}]} = (-1)^r (\gamma^{m_1 \ldots m_{2r+1}})^T. \tag{2.47}$$

Siit järelduvad kasulikud valemid

$$\gamma^{abcde} = (\gamma^{abcde})^T, \tag{2.48}$$

+

$$\gamma^{abc} = -(\gamma^{abc})^T, \tag{2.49}$$

$$\gamma^{a} = (\gamma^{a})^T. \tag{2.50}$$

Maatriksite $\gamma^{a\alpha\beta}, \gamma^{a}{}_{\alpha\beta}$ konkreetne kuju pole meie edaspidistes arutlustes oluline.

$d = 11$. Paaritumõõtmelise ruumi spiinoritel on komponentide arv niisamasugune nagu ühe võrra väiksema paarismõõtmelise ruumi spiinoritel. Seepärast saab 11-mõõtmelise ruumi Γ-maatriksiteks võtta 10-mõõtmelise ruumi Γ-maatriksid Γ^a ning üheteistkümnendana lisada neile maatriks $i\Gamma^{11}$:

$$\Gamma^{\bar{a}} = (\Gamma^a, i\Gamma^{11}), \quad \bar{a} = 0, \ldots, 10. \tag{2.51}$$

Otsene kontroll näitab, et Cliffordi algebra (1.11) on rahuldatud. Kui Γ^a on Majorana esituses, siis on ka $\Gamma^{\bar{a}}$ (2.51) Majorana esituses, sest kõik Γ-maatriksid on puhtimaginaarsed. Diraci spiinoritel on 32 kompleksset komponenti ja Majorana spiinoritel 32 reaalset komponenti.

Ülesanded

2.1. Tuletada avaldis (2.6) maatriksi Γ^{d+1} normeerimiskordaja η jaoks, lähtudes tingimusest (2.4) ja Γ-maatriksite Cliffordi algebrast (1.11).

2.2. Tõestada, et Diraci võrrandi (2.13) lahend antiosakese $\tilde{\psi}$ jaoks on antav valemiga (2.15).

2.3. Arvutada valemitest (2.21)-(2.23) Γ-maatriksite ilmutatud kuju neljamõõtmelises ruumis kiraalses esituses:

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3

Väljad ja superväljad

Lagrange'i formalism. Hamiltoni formalism. Superväljad. Mõjufunktsionaalid superruumis.

1. Lagrange'i formalism väljateoorias. Väljade $u^i(x^a)$, $i = 1, \ldots, m$, $a = 0, \ldots, n-1$ *lagranžiaan* $L[u^i(x^a), \partial_b u^i(x^a)]$ ja *mõjufunktsionaal* S

$$S[u^i(x^a)] = \int_A^B L[u^i(x^a), \partial_b u^i(x^a)] d^n x \tag{3.1}$$

omavad väljateoorias keskset tähendust. Varieerime ruumipunkte x^a ja väljafunktsioone $u^i(x^a)$:

$$x^a \to x^{a'} = x^a + \delta x^a , \tag{3.2}$$

$$u^i(x^a) \to u^{i'}(x^{a'}) = u^i(x^a) + \bar{\delta} u^i(x^a) . \tag{3.3}$$

Tähistagu δu^i väljafunktsiooni variatsiooni etteantud ruumipunktis:

$$\delta u^i = u^{i'}(x^a) - u^i(x^a) = \bar{\delta} u^i - \partial_a u^i \delta x^a . \tag{3.4}$$

See kommuteerub osatuletisega:

$$\delta \partial_a u^i = \partial_a \delta u^i . \tag{3.5}$$

Arvutame variatsioonarvutuse reeglite kohaselt mõjufunktsionaali esimese variatsiooni üldavaldise:

$$\begin{aligned} \delta S[u^i(x^a)] = \int_A^B \Big(& \Big(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)}\Big) \delta u^i + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^a} \Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)} \bar{\delta} u^i + \\ & + \Big(L \delta^a_b - \frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)} \partial_b u^i\Big) \delta x^b \Big) \Big) d^n x . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Seda avaldist kasutatakse kahe väga olulise lause formuleerimiseks.

1. *Vähima mõju printsiip* väidab, et liikumistrajektoorid $\underline{u}^i(x^a)$ on mõjufunktsionaali ekstremaalid, $\delta S[\underline{u}^i(x^a)] = 0$, juhul kui variatsioon arvutatakse fikseeritud algoleku A ja lõppoleku B vahel ning eeldatakse, et ruumilise määramispiirkonna äärel on väljafunktsioonid identselt nullid. Nendel eeldustel on esimese variatsiooni üldavaldises (3.6) täisdivergentsi sisaldav liige identselt null (seda võib kontrollida Stokesi teoreemi kasutades) ja võrranditeks väljafunktsioonide jaoks saadakse Euleri–Lagrange'i võrrandid

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)} = 0. \tag{3.7}$$

2. *Noetheri teoreem* väidab, et kui mõjufunktsionaal on invariantne teisenduste p-parameetrilise rühma G suhtes parameetritega $\xi^\alpha = const$, $\alpha = 1, \ldots, p = \dim G$

$$\delta_\xi x^a = I^a_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.8a}$$

$$\bar{\delta}_\xi u^i = J^i_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.8b}$$

$$\delta_\xi S = 0, \tag{3.8c}$$

siis piki liikumistrajektoore (3.7) kehtivad divergentsitüüpi jäävusseadused

$$\frac{\partial}{\partial x^a} j^a_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)} J^i_\alpha + (L\delta^a_b - \frac{\partial L}{\partial(\partial_a u^i)}\partial_b u^i) I^b_\alpha\Big) = 0. \tag{3.9}$$

Komponendid j^a_α moodustavad n-mõõtmelise ruumi vektori väärtustega algebras G, mida nimetatakse *jäävaks vooluks.*

2. Hamiltoni formalism väljateoorias. Kanoonilise (Hamiltoni) formalismi seisukohalt on mõjufunktsionaalis (3.1) olevad väljad $u^i(x^a)$ *üldistatud koordinaatide* osas ja nende tuletised aja järgi $\dot{u}^i(x^a) \equiv \partial_0 u^i(x^a)$ *üldistatud kiiruste* osas. Selleks et Legendre'i teisenduse abil üle minna Hamiltoni formalismile, defineerime *üldistatud impulsid*

$$p_i(x^a) = \frac{\partial L[u^i(x^a), \dot{u}^i(x^a), \partial_r u^i(x^a)]}{\partial \dot{u}^i(x^a)}, \quad r = 1, \ldots, n-1 \tag{3.10}$$

ja saadud avaldistest leiame üldistatud kiirused üldistatud impulsside kaudu:

$$\dot{u}^i(x^a) = \dot{u}^i[u^i, p_i, \partial_r u^i], \quad r = 1, \ldots, n-1. \tag{3.11}$$

Asendades lagranžiaanis üldistatud kiirused üldistatud impulsside kaudu, võime defineerida *hamiltoniaani*

$$H[u, p] = p_i \dot{u}^i - L \tag{3.12}$$

ja *kanoonilise integraali*

$$I = \int (p_i \dot{u}^i - H) d^n x. \tag{3.13}$$

Vaatleme kanoonilist integraali (3.13) kui uut mõjufunktsionaali $I[u^i(x^a), p_i(x^a)]$, arvutame esimese variatsiooni (3.6) ja rakendame vähima mõju printsiipi. Siis saame liikumisvõrranditeks *Hamiltoni kanoonilised võrrandid*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial u^i} + \frac{\partial}{\partial x^r} \frac{\partial H}{\partial(\partial_r u^i)}, \tag{3.14a}$$

$$\dot{u}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{3.14b}$$

Võib osutuda, et mitte kõik võrrandid (3.10) pole pööratavad. See tähendab, et mitte kõik üldistatud koordinaadid ja impulsid ei ole sõltumatud, vaid nad rahuldavad algebralisi *seoseid*

$$F_s[u, p] = 0, \quad s = 1, \ldots, q. \tag{3.15}$$

Kui teoorias esinevad seosed (3.15), võib neid lisada kanoonilisse integraali Lagrange'i määramatute kordajate λ^s, $s = 1, \ldots, q$ abil

$$I = \int (p_i \dot{u}^i - H - \lambda^s F_s) d^n x. \tag{3.16}$$

Seosed (3.15) järelduvad nüüd vähima mõju printsiibist, kui kanoonilist integraali (3.16) varieerida ka Lagrange'i kordajate λ^s järgi.

3. Superväljad. Vaatleme harilike füüsikaliste väljade $u^i(x^a)$ asemel supervälju $U^i(z^A)$, kus $(z^A) = (x^a, \theta^\alpha)$ on superruumi piirkonna koordinaadid. Kommuteeruvad koordinaadid x^a,

$a = 0, \ldots, d-1$ on d-mõõtmelise aegruumi koordinaadid Minkowski meetrikaga $\eta_{ab} = diag(+1, -1, \ldots, -1)$ ja antikommuteeruvad koordinaadid θ^α on selle d-mõõtmelise aegruumi spiinorid, $\alpha = 1, \ldots, t$, $t = 2^{[\frac{d}{2}]}$. Superväljad U^i on harilikult Lorentzi rühma mingi teise m-mõõtmelise esituse ruumi elemendid ja enamasti $d \neq m$. Kõige sagedamat kasutamist on leidnud skalaarsed superväljad $U(z^A)$ ja vektorväljad $U^i(z^A)$, $i = 1, \ldots, m$.

Kuna iga antikommuteeruva koordinaadi korrutis iseendaga on null, $\theta^1\theta^1 = 0$, $\theta^2\theta^2 = 0$ jne., siis supervälja $U^i(x^a, \theta^\alpha)$ Taylori arendus koordinaatide θ järgi on lõpliku arvu liidetavatega:

$$
\begin{aligned}
U^i(x^a, \theta^\alpha) &= \sum_{k=0}^{t} f^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k} \equiv \\
&\equiv f^i(x) + \sum_{\alpha=1}^{t} f^i_\alpha(x)\theta^\alpha + \sum_{\substack{\alpha=1, \beta=1 \\ \alpha<\beta}}^{t} f^i_{\alpha\beta}(x)\theta^\alpha\theta^\beta + \ldots + \\
&+ f^i_{1\ldots t}\theta^1\theta^2 \ldots \theta^t .
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Harilikult nõutakse, et $U^i(z^A)$ oleks kommuteeruv suurus, $U^iU^k - U^kU^i = 0$. Sel juhul on arenduses (3.17) paarisarvu θ^α korrutiste ees olevad kordajad $f^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2p}}(x)$ kommuteeruvad ehk bosonväljad harilikus aegruumis koordinaatidega (x^a) ja paaritu arvu θ^α korrutiste ees olevad kordajad $f^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2p+1}}(x)$ antikommuteeruvad ehk fermionväljad. Kordajad $f^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)$ kokku moodustavad *väljade supermultipleti* harilikus aegruumis.

Vaatleme nüüd lähemalt skalaarset supervälja. Tema teisenemiseeskiri Poincaré superrühma teisendustel on antud valemitega (1.19)-(1.22). Neid teades on lihtne arvutada supermultipleti komponentväljade $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ teisenemiseeskirju:

$$
\begin{aligned}
\delta_Q U &= -\epsilon^\alpha Q_\alpha U(z) = \\
&= -\epsilon^\alpha(\partial_\alpha - i(\Gamma^a C)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_a) \sum_{k=0}^{t} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k} \equiv \\
&\equiv \sum_{k=0}^{t} \delta f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k} .
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Seda valemit $\delta f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ avaldiste leidmiseks kasutame edaspidi konkreetsetes supersümmeetrilistes teooriates (§§4, 6).

Paneme tähele, et rea (3.17) viimases liikmes olev komponentväli $f_{1 \ldots t}(x)$ teiseneb alati täisdivergentsi võrra:

$$\delta f_{1 \ldots t}(x) = i\epsilon^{\alpha}\partial_a\Big((\Gamma^a C)_{\alpha\beta}\theta^{\beta}\sum f_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t-1}}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_{t-1}}\Big). \quad (3.19)$$

4. Mõjufunktsionaalid superruumis. Defineerime mõjufunktsionaali superruumis superväljade $U^i(z^A)$ jaoks:

$$S[U^i(z^A)] = \int L[U^i(z^A)]d^dx d^t\theta. \quad (3.20)$$

Eeldame, et S on skalaarne reaalne kommuteeruv funktsionaal. Integraal üle antikommuteeruvate muutujate θ on defineeritud raamatu teises osas, siinkohal märgime vaid, et oma arvutuseeskirjade kohaselt

$$\int d\theta = 0, \quad (3.21a)$$

$$\int \theta d\theta = 1 \quad (3.21b)$$

on ta pigem analoogiline tuletise võtmise operatsioonile kui integreerimisele üle kommuteeruvate koordinaatide. Seetõttu erineb superruumis antud mõjufunktsionaali (3.20) tähendus harilikus aegruumis antud mõjufunktsionaali (3.1) tähendusest. Sellisel kujul (3.20) ei saa teda otseselt kasutada väljavõrrandite tuletamiseks. Küll aga saab teda kasutada sobiva harilikus aegruumis antud mõjufunktsionaali leidmiseks supermultipleti väljade jaoks.

Asendame arenduse (3.17) mõjufunktsionaali (3.20). Lagranžiaan L on nüüd ka ise supervälja kujul, kus arendusega (3.17) analoogilises arenduses on komponentväljadeks superväljade $U^i(z^A)$ komponentväljade korrutised. Integreerime üle kõigi antikommuteeruvate koordinaatide θ^{α}. Tulemuseks saame hariliku aegruumi mõjufunktsionaali (3.1), kus vastavalt reeglitele (3.21) on lagranžiaaniks jäänud korrutise $\theta^1 \ldots \theta^t$ kordaja. Supersümmeetria teisendustel (3.18) teiseneb see täisdivergentsi võrra, seega

$$\delta_Q L[u^i(x)] = \frac{\partial}{\partial x^a}\psi^a[u^i(x)]. \quad (3.22)$$

Mõjufunktsionaalis (3.1) võib Stokesi teoreemi põhjal integraali üle täisdivergentsi teisendada integraaliks üle integreerimispiirkonna ääre:

$$\int_R \frac{\partial \psi^a}{\partial x^a} d^d x = \int_{\partial R} \psi_a (d^{d-1} x)^a . \tag{3.23}$$

Väljavõrrandite leidmisel varieeritakse mõjufunktsionaali nii, et äärepinnal on variatsioonid nullid. Sel juhul ei anna $\delta_Q L$ varieerimine täiendavaid liikmeid esimese variatsiooni avaldisse (3.6). Järelikult annavad nii esialgne mõjufunktsionaal S kui ka teisendatud mõjufunktsionaal $S + \delta_Q S$ ühesugused väljavõrrandid. Öeldakse, et selline teooria on invariantne supersümmeetria teisenduste suhtes ehk *supersümmeetriline*.

Klassikalise füüsika raames kasutatakse supervälju ja superruumis antud mõjufunktsionaale põhiliselt selleks, et konstrueerida supermultiplette ja leida supersümmeetrilisi lagranžiaane komponentväljade jaoks. Kvantteoorias võimaldab superväljade formalism Feynmani reeglite kompaktset üleskirjutamist ja hõlbustab supersümmeetriliste regulariseerimismeetodite kasutamist.

Ülesanded

3.1. Tuletada kanoonilisest integraalist (3.13) kui mõjufunktsionaalist Hamiltoni kanoonilised võrrandid (3.14).

4

Pöörlev punktosake

Mitterelativistlik osake. Pseudoklassikaline spinn. Relativistlik massiga osake, Kleini-Gordoni võrrand ja Diraci võrrand.

1. Mitterelativistlik punktosake. Vaatleme ühemõõtmelist ruumi (aja)koordinaadiga t. Cliffordi algebra (1.11) näitab, et selle ruumi Γ-maatriksi osas on arv 1 ja spiinorid on ühekomponendilised. Lisame kommuteeruvale koordinaadile t antikommuteeruva spiinortüüpi koordinaadi τ. Saadud superruumi $R^{1,1}$ Poincaré superrühma generaatorid on (1.22) põhjal

$$P = i\partial_t\,, \tag{4.1a}$$

$$Q = \partial_\tau - i\tau\partial_t \tag{4.1b}$$

ja nad rahuldavad (anti)kommutatsioonieeskirju (1.10)

$$[P,P] = 0\,, \tag{4.2a}$$

$$[Q,P] = 0\,, \tag{4.2b}$$

$$\{Q,Q\} \equiv 2Q^2 = -2P\,. \tag{4.2c}$$

Kovariantne tuletis (1.25) avaldub

$$D = \partial_\tau + i\tau\partial_t\,, \tag{4.3}$$

$$\{Q,D\} = 0\,. \tag{4.4}$$

Pöörleva osakese liikumist d-mõõtmelises eukleidilises ruumis saab kirjeldada d funktsiooniga $X^a(t,\tau)$, mis superruumi $R^{1,1}$ suhtes on skalaarid ja d-mõõtmelise eukleidilise ruumi suhtes vektorid. Lihtsuse mõttes vaatame esialgu ainult ühikmassiga osakest. Mõjufunktsionaal $S[X^a]$ on sobiv võtta kujul

$$S[X^a(t,\tau)] = \int_{t_i}^{t_f}\int L[X^a(t,\tau)]d\tau dt \tag{4.5}$$

lagranžiaaniga

$$L = \frac{1}{2}(DX^a)D(DX^b)\delta_{ab}\,, \tag{4.6}$$

kus δ_{ab} on d-mõõtmelise eukleidilise ruumi meetrika. Arendame superväljad $X^a(t,\tau)$ Taylori ritta antikommuteeruva koordinaadi τ järgi:

$$X^a(t,\tau) = x^a(t) + \tau\varphi^a(t)\,. \tag{4.7}$$

Asendame selle ja kovariantse tuletise avaldise (4.3) lagranžiaani (4.6) ja arvestame, et $\tau^2 = 0$. Saame

$$L = \frac{1}{2}(i\varphi^a\dot{x}^b - \tau\dot{x}^a\dot{x}^b - i\tau\varphi^a\dot{\varphi}^b)\delta_{ab}\,.$$

Integreerime vastavat mõjufunktsionaali (4.5) üle antikommuteeruva koordinaadi τ. Reeglite (3.21) põhjal on tulemuseks mõjufunktsionaal osakese ruumikoordinaadi $x^a(t)$ ja tema superpartneri $\varphi^a(t)$ jaoks:

$$S[x^a,\varphi^b] = -\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}(\dot{x}^a\dot{x}^b + i\varphi^a\dot{\varphi}^b)\delta_{ab}dt\,. \tag{4.8}$$

Mõjufunktsionaal $S[x^a,\varphi^b]$ peab oma füüsikalise tähenduse kohaselt olema reaalne funktsionaal. See nõue on rahuldatud, kui antikommuteeruvad funktsioonid φ^a on reaalsed, $\varphi^a = (\varphi^a)^*$, sest siis

$$(i\varphi^a\dot{\varphi}^b)^* = -i(\dot{\varphi}^b)^*(\varphi^a)^* = i\varphi^a\dot{\varphi}^b\,. \tag{4.9}$$

Mõjufunktsionaalist (4.8) saame liikumisvõrrandid (3.7) algoleku $A = x^a(t_i)$ ja lõppoleku $B = x^a(t_f)$ vahel:

$$\ddot{x}^a = 0\,, \quad \dot{\varphi}^a = 0\,. \tag{4.10}$$

Supervälja $X^a(t,\tau)$ muutus supersümmeetria teisendustel (4.1b) on

$$\delta X^a = -\epsilon Q X^a = -\epsilon(\partial_\tau - i\tau\partial_t)X^a\,, \quad \epsilon = const. \tag{4.11}$$

Siit järeldub, et nendel teisendustel komponentväljad $x^a(t)$, $\varphi^a(t)$ segunevad omavahel:

$$\delta x^a = -\epsilon\varphi^a, \tag{4.12a}$$

$$\delta\varphi^a = -i\epsilon\dot{x}^a. \tag{4.12b}$$

Supersümmeetria teisenduse parameeter ϵ peab siin olema puhtimaginaarne, $\epsilon^* = -\epsilon$. Kuna operaatorid Q ja D antikommuteeruvad vastavalt valemile (4.4), teiseneb lagranžiaan (4.6) niisamuti nagu superväli:

$$\delta L = -\epsilon Q L. \tag{4.13}$$

Mõjufunktsionaal muutub vaid ääreliikme võrra:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\epsilon \int_{t_i}^{t_f} \int (\partial_\tau - i\tau\partial_t) L d\tau dt = \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \int_{t_i}^{t_f} \partial_t(\varphi^a \dot{x}^b)\delta_{ab} dt = -\frac{\epsilon}{2}(\varphi^a\dot{x}^b)\Big|_{t_i}^{t_f}\delta_{ab}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Mõjufunktsionaal (4.8) on invariantne ruumipöörete suhtes, sest eelduse kohaselt on x^a ja φ^a d-mõõtmelise eukleidilise ruumi vektorid. Nende infinitesimaalteisendused on kirjeldatavad antisümmeetrilise maatriksiga $\omega^{ab} = -\omega^{ba} = const$, $\omega^{ab} \equiv \omega^a{}_d\delta^{db}$:

$$\delta x^a = \omega^a{}_b x^b, \quad \delta\varphi^a = \omega^a{}_b\varphi^b. \tag{4.15}$$

Leiame Noetheri teoreemi abil vastava jääva voolu. Kirjutame teisenduse (4.15) kujul (3.8b)

$$\delta x^a = J^a{}_c{}^d\omega^c{}_d, \quad \delta\varphi^a = K^a{}_c{}^d\omega^c{}_d, \tag{4.16}$$

kus

$$J^a{}_c{}^d = \delta^a{}_c x^d, \quad K^a{}_c{}^d = \delta^a{}_c\varphi^d. \tag{4.17}$$

Jäävusseadus (3.9) annab

$$\frac{d}{dt}j^{ab} \equiv \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(\dot{x}^a x^b - \dot{x}^b x^a) + \frac{i}{2}\varphi^a\varphi^b\Big) = 0. \tag{4.18}$$

Esimeses liikmes tunneme ära *impulssmomendi*, järelikult ka teine liige, mis on antud antikommuteeruvate funktsioonide φ^a kaudu, peab olema impulssmomendi tähendusega.

2. Pseudoklassikaline spinn. Olgu mõjufunktsionaal (4.8) antud kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis, $d = 3$. Selleks et leida antikommuteeruvate funktsioonide $\varphi^a(t)$, $a = 1, 2, 3$, füüsikalist tähendust, teeme osalise Legendre'i teisenduse kommuteeruvate üldistatud koordinaatide $x^a(t)$ jaoks. Defineerime vastava üldistatud impulsi (3.10)

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = -\dot{x}^b \delta_{ba} \tag{4.19}$$

ja arvutame hamiltoniaani (3.12)

$$H = p_a \dot{x}^a - L = -\frac{1}{2}(p^a p^b - i\varphi^a \dot{\varphi}^b)\delta_{ab} . \tag{4.20}$$

Kanooniline integraal (3.13) on nüüd

$$I = \int (p_a \dot{x}^a - \frac{i}{2}\varphi_a \dot{\varphi}^a + \frac{1}{2} p_a p^a) dt . \tag{4.21}$$

Defineerime *Poissoni sulud* faasiruumis (x, p) antud funktsioonide $f(x, p), g(x, p)$ vahel:

$$[f, g]_P = \frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial g}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial p_a} . \tag{4.22a}$$

Sellest definitsioonist järelduvad Poissoni sulgude avaldised faasiruumi koordinaatide vahel:

$$[x^a, x^b]_P = 0 , \qquad [p_a, p_b]_P = 0 , \tag{4.23a}$$

$$[x^a, p_b]_P = \delta^a_b . \tag{4.23b}$$

Kanooniline integraal (4.21) on antud faasiruumis, mis lisaks kommuteeruvatele koordinaatidele (x^a, p_b) sisaldab ka antikommuteeruvaid koordinaate (φ^a). Poissoni sulgude definitsiooni (4.22a) üldistuse superfaasiruumile koordinaatidega (x^a, p_b, φ^c) võib anda sellisel kujul:

$$[f, g]_P = \frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - (-1)^{p_f p_g}\frac{\partial g}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial p_a} + i\frac{\partial_r f}{\partial \varphi^a}\frac{\partial_l g}{\partial \varphi_a} . \tag{4.22b}$$

Siin p_f, p_g tähistavad funktsioonide f, g paarsust[1] ning ∂_r on tuletis paremalt ja ∂_l on tuletis vasakult. Siit järeldub

$$[\varphi^a, \varphi^b]_P = i\delta^{ab} , \tag{4.23c}$$

[1] Kommuteeruva funktsiooni f korral $p_f = 0$ ja antikommuteeruva funktsiooni g korral $p_g = 1$, nii et kehtib

$$fg - (-1)^{p_f p_g} gf = 0 .$$

$$[f,g]_P = -(-1)^{p_f p_g}[g,f]_P . \tag{4.24}$$

Lähme klassikaliselt teoorialt üle kvantteooriale. Vastavalt Diraci kanoonilisele kvantiseerimisskeemile tähendab see faasiruumi koordinaatide (x^a, p_b, φ^c) asendamist hermiitiliste operaatoritega $\hat{x}^a, \hat{p}_b, \hat{\varphi}^c$. Need toimivad lainefunktsioonide Ψ Hilberti ruumis ja rahuldavad (anti)kommutatsioonieeskirju, mis on tuletatud Poissoni sulgude avaldistest (4.23) vastavusega $[\ ,\ ]_P \to -i\hbar[\ ,\ ]$:

$$[\hat{x}^a, \hat{x}^b] = 0, \quad [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0, \tag{4.25a}$$

$$[\hat{x}^a, \hat{p}_b] = -i\hbar\delta^a_b, \tag{4.25b}$$

$$\{\hat{\varphi}^a, \hat{\varphi}^b\} = \hbar\delta^{ab}, \tag{4.25c}$$

$$[\hat{x}^a, \hat{\varphi}^b] = 0, \quad [\hat{p}^a, \hat{\varphi}^b] = 0. \tag{4.25d}$$

Seost (4.25c) Cliffordi algebraga (1.11) võrreldes näeme, et operaatoreid $\hat{\varphi}^a, a = 1,2,3$ saab esitada kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi Cliffordi algebra elementidega. Nendeks võib valida näiteks *Pauli maatriksid*:

$$\hat{\varphi}^a = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sigma^a, \tag{4.26}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Mitterelativistlikus kvantmehaanikas kirjeldavad Pauli maatriksid *spinnoperaatoreid*. Nende kaudu defineeritakse spinnvektor

$$\hat{S}^a = \frac{1}{2}\hbar\sigma^a, \tag{4.28}$$

mille komponendid rahuldavad kommutatsioonieeskirju

$$[\hat{S}^a, \hat{S}^b] = i\hbar\epsilon^{abc}\hat{S}^c . \tag{4.29}$$

Jäävale voolule j^{ab} (4.18) vastavat operaatorit võib vaadelda koosnevana kahest osast - orbitaalsest impulssmomendist

$$\hat{M}^{ab} = \hat{x}^a\hat{p}^b - \hat{p}^a\hat{x}^b \tag{4.30}$$

ja sisemisest impulssmomendist

$$\hat{S}^{ab} = i\hat{\varphi}^a\hat{\varphi}^b = \frac{i\hbar}{4}(\sigma^a\sigma^b - \sigma^b\sigma^a). \tag{4.31}$$

Võrdlus kvantmehaanilise spinnvektori definitsiooniga (4.28) lubab sisemise impulssmomendi $\hat{S}^{ab}$ samastada kvantmehaanilise spinniga $\hat{S}^{a}$:

$$\hat{S}^{a} = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\hat{S}^{bc}. \tag{4.32}$$

Harilikult vaadeldakse spinni kui täielikult kvantmehaanikasse kuuluvat mõistet, millel puudub vaste klassikalises teoorias. Antikommuteeruvaid muutujaid kasutades oleme aga sellise vaste siiski leidnud - mõjufunktsionaaliga (4.8) on klassikalise teooria raames kirjeldatud pöörlevat osakest, mille sisemine impulssmoment pärast üleminekut kvantteooriale läheb üle kvantmehaaniliseks spinniks. Muutujatega $\varphi^{a}(t)$ kirjeldatud sisemist impulssmomenti on nimetatud ka *pseudoklassikaliseks spinniks* ja vastavat osakest *pöörlevaks punktosakeseks.*

3. Relativistlik pöörlev osake, Kleini-Gordoni võrrand ja Diraci võrrand. Vaatleme relativistlikku pöörlevat pseudoklassikalist osakest massiga m. Tema mõjufunktsionaali on kõige lihtsam välja kirjutada mitte superruumis, vaid kohe komponentkujul neljamõõtmelises Minkowski ruumis:

$$S = \frac{1}{2}\int\Big(e^{-1}(\dot{x}^{a} - i\lambda\varphi^{a})(\dot{x}^{b} - i\lambda\varphi^{b})\eta_{ab} + m^{2}e + \\ + i(\varphi^{a}\dot{\varphi}^{b}\eta_{ab} - \varphi^{5}\dot{\varphi}^{5}) + 2i\lambda m\varphi^{5}\Big)dt. \tag{4.33}$$

Funktsioonid $x^{a}(t), \varphi^{a}(t)$ on neljamõõtmelise ruumi Lorentzi rühma vektorid ja moodustavad supermultipleti ühemõõtmelisel maailmajoonel. Supermultipleti moodustavad ka Lagrange'i kordajad e, λ. Funktsioon $\varphi^{5}(t)$ on täiendav antikommuteeruv muutuja, mis on oluline juhul $m \neq 0$. Supersümmeetria teisendused väljafunktsioonide jaoks on järgmised:

$$\begin{aligned} \delta x^{a} &= i\epsilon\varphi^{a}, \\ \delta\varphi^{a} &= -\epsilon e^{-1}(\dot{x}^{a} - i\lambda\varphi^{a}), \\ \delta e &= 2i\lambda\epsilon, \\ \delta\lambda &= \dot{\epsilon}, \\ \delta\varphi^{5} &= -\epsilon\Big(m + \frac{i}{2me}\varphi^{5}(\dot{\varphi}^{5} + m\lambda)\Big). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Otsene arvutus kinnitab, et nende teisenduste korral teiseneb mõjuintegraal (4.33) täistuletise võrra:

$$\delta S = \frac{i}{2}\int \frac{d}{dt}(\varphi^a \delta\varphi^b \eta_{ab} + m\epsilon\varphi^5)dt\,. \qquad (4.35)$$

Paneme tähele, et erinevalt eelmistes punktides käsitletud juhtudest on siin supersümmeetria teisenduse parameeter sõltuv argumendist t; $\epsilon = \epsilon(t)$. Konstantsete parameetritega teisendusi nimetatakse *globaalseteks teisendusteks*. Teisendusi, mille parameetrid on funktsioonid ruumipunkti koordinaatidest, nimetatakse *lokaalseteks teisendusteks*.

Teeme osalise Legendre'i teisenduse ja defineerime üldistatud impulsi (3.10):

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = e^{-1}(\dot{x}^b - i\lambda\varphi^b)\eta_{ba}\,. \qquad (4.36)$$

Vastav hamiltoniaan (3.12) on kujul

$$H = -\frac{i}{2}(\varphi^a\dot{\varphi}_a - \varphi^5\dot{\varphi}^5) + \frac{e}{2}(p_a p^a - m^2) + i\lambda(p_a\varphi^a - m\varphi^5) \qquad (4.37)$$

ja kanooniliseks integraaliks (3.13) saame

$$I = \int\Big(p_a\dot{x}^a + \frac{i}{2}(\varphi^a\dot{\varphi}_a - \varphi^5\dot{\varphi}^5) - \frac{e}{2}(p_a p^a - m^2) - i\lambda(p_a\varphi^a - m\varphi^5)\Big)dt\,. \qquad (4.38)$$

Siit näeme, et e, λ on tõepoolest Lagrange'i kordajate osas, sest varieerimine nende järgi annab seosed:

$$p_a p^a - m^2 = 0\,, \qquad (4.39a)$$

$$p_a\varphi^a - m\varphi^5 = 0\,. \qquad (4.39b)$$

Üleminekul kvantteooriale asendatakse funktsioonid $x^a(t)$, $p_a(t)$, $\varphi^a(t)$, $\varphi^5(t)$ operaatoritega ja Poissoni sulud nende (anti)kommutaatoritega. Defineerime Poissoni sulud täiendava antikommuteeruva funktsiooni φ^5 jaoks:

$$[\varphi^5, \varphi^5]_P = i\,, \quad [\varphi^5, \varphi^a]_P = 0\,. \qquad (4.40)$$

Vastavad antikommutatsioonieeskirjad operaatorite $\hat{\varphi}^a(t)$, $\hat{\varphi}^5(t)$ jaoks on nüüd kujul

$$\{\hat{\varphi}^a, \hat{\varphi}^b\} = \hbar\eta^{ab}, \tag{4.41a}$$

$$\{\hat{\varphi}^5, \hat{\varphi}^5\} = \hbar, \tag{4.41b}$$

$$\{\hat{\varphi}^5, \hat{\varphi}^a\} = 0. \tag{4.41c}$$

Oleme saanud Cliffordi algebra, mida saab esitada Γ-maatriksitega

$$\hat{\varphi}^a = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Gamma^5\Gamma^a, \quad \hat{\varphi}^5 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Gamma^5. \tag{4.42}$$

Kvantmehaanika kanoonilisi kommutatsioonieeskirju

$$[\hat{x}^a, \hat{p}_b] = -i\hbar\delta^a_b$$

võib realiseerida operaatoritega

$$\hat{x}^a = x^a, \quad \hat{p}_b = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^b}. \tag{4.43}$$

Seda nimetatakse *kvantmehaanika koordinaatesituseks.* Vastavalt Diraci teooriale tuleb seoseid (4.39) kvantteoorias arvestada kui lisatingimusi lainefunktsioonile. Koordinaatesituses (4.43) omandab seos (4.39a) *Kleini-Gordoni võrrandi* kuju lainefunktsiooni Ψ jaoks:

$$(\eta^{ab}\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b} + \frac{m^2}{\hbar^2})\Psi = 0. \tag{4.44}$$

Seos (4.39b) annab teguriga Γ^5 korrutatud *Diraci võrrandi*:

$$\Gamma^5(i\hbar\Gamma^a\frac{\partial}{\partial x^a} - m)\Psi = 0. \tag{4.45}$$

Diraci võrrand kirjeldab relativistlikku kvantosakest massiga m ja spinniga $\frac{1}{2}$. Järelikult kirjeldab esialgne mõjufunktsionaal (4.33) relativistlikku pseudoklassikalist pöörlevat punktosakest massiga m.

Ülesanded

4.1. Lähtudes superruumis antud pöörleva mitterelativistliku osakese mõjufunktsionaalist (4.5), (4.6), arvutada mõjufunktsionaal (4.8) harilikus ruumis.

4.2. Kontrollida relativistliku pöörleva osakese mõjufunktsionaali (4.33) teisenemist (4.35) supersümmeetria teisenduste (4.34) korral.

5

Fermionstring

Nambu-Goto bosonstring. Pöörlev string. Ramond'i fermionstring ja Neveu-Schwarzi fermionstring.

1. Nambu-Goto bosonstring. *Bosonstring* on ühemõõtmeline objekt $x^a(\sigma)$, $\sigma \in [A, B]$, mis liikumisel d-mõõtmelises Minkowski ruumis kujundab minimaalse pindalaga pinna - stringi maailmalehe $x^a(\tau, \sigma)$. See tähendab, et tema liikumisvõrrandid on tuletatavad mõjufunktsionaalist

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \sqrt{-\det|\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b \eta_{ab}|} d^2\xi, \tag{5.1}$$

$$\xi^\alpha = \tau, \sigma, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad a, b = 0, \ldots, d-1.$$

Mõjufunktsionaali (5.1) nimetatakse *Nambu-Goto mõjufunktsionaaliks.* Konstanti α' nimetatakse stringi pingeks, edaspidi kasutame ühikuid, kus $2\alpha' = 1$. Mittepolünomiaalne lagranžiaan (5.1) on füüsikalistes arvutustes ebamugav, seepärast asendame ta polünomiaalse lagranžiaaniga. Toome uute sõltumatute abimuutujatena sisse *indutseeritud meetrika* $g_{\alpha\beta}$ stringi kahemõõtmelisel maailmalehel:

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b \eta_{ab}. \tag{5.2}$$

Olgu uus mõjufunktsionaal kujul

$$\begin{aligned} S &= \int_A^B \int_{\tau_1}^{\tau_2} L[g^{\alpha\beta}, x^a] d\tau d\sigma = \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b \eta_{ab} d^2\xi, \end{aligned} \tag{5.3}$$

kus $g^{\alpha\beta}$ on $g_{\alpha\beta}$ pöördmaatriks $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ ja $g = \det|g_{\alpha\beta}|$.

Liikumisvõrrandite tuletamiseks vähima mõju printsiibist arvutame mõjufunktsionaali (5.3) esimese variatsiooni:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_A^B \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big(&\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau x^a)} \delta(\partial_\tau x^a) + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma x^a)} \delta(\partial_\sigma x^a) \Big) d\tau d\sigma. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Integreerime kaht viimast liiget ositi:

$$\delta S = \int_A^B \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} - (\partial_\tau \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau x^a)} + \\ + \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma x^a)}) \delta x^a \Big) d\tau d\sigma + \\ + \int_A^B \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau x^a)} \delta x^a \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma x^a)} \delta x^a \Big|_{\sigma=A}^{\sigma=B} d\tau \,. \tag{5.5}$$

Vähima mõju printsiibis (§3) väidetakse, et liikumistrajektoor on mõjufunktsionaali ekstremaal, $\delta S = 0$, kui varieerimisel hoitakse alg- ja lõpp-punkt fikseerituna, $\delta x^a(\tau_1) = 0$, $\delta x^a(\tau_2) = 0$. Lisaks sellele eeldatakse, et väljade ruumiline määramispiirkond ulatub lõpmata kaugele ja seal on väljad identselt nullid. Stringiteoorias, kus stringi pikkus on lõplik, ei saa eeldada, et ruumilise määramispiirkonna äärtel (stringi otstes) väljafunktsioonid $x^a(\xi^\alpha)$ ei muutu. Sellepärast tuleb eraldi nõuda esimese variatsiooni avaldise (5.5) viimase liikme nulliga võrdumist, mis annab täiendava ääretingimuse

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma x^a)} \Big|_{\sigma=A}^{\sigma=B} = 0 \,. \tag{5.6}$$

Koordinaat σ piki stringi võetakse muutuvana vahemikus $\sigma \in [0, \pi]$ lahtise (otspunktidega) stringi jaoks ja vahemikus $\sigma \in [0, 2\pi]$ kinnise (otspunktideta) stringi jaoks. Viimasel juhul on ääretingimus kõikide väljafunktsioonide perioodilisuse tõttu identselt täidetud. Lahtise stringi otspunktid ei ole omavahel kausaalselt seotud ja tingimuse (5.6) kehtivust tuleb nõuda mõlemas otspunktis eraldi. Lagranžiaani kuju (5.3) arvestades saame ääretingimused lahtise stringi otspunktides:

$$\sqrt{-g} g^{1\beta} \partial_\beta x^a = 0 \Big|_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma=\pi}} \,. \tag{5.7}$$

Nüüd järelduvad esimese variatsiooni üldavaldisest (5.5) ja vähima mõju printsiibist liikumisvõrrandid

$$\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b \eta_{ab} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_\gamma x^a \partial_\delta x^b \eta_{ab} = 0 \,, \tag{5.8}$$

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta x^a) = 0 \,. \tag{5.9}$$

Siin oleme kasutanud determinandi variatsiooni avaldist

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}.$$

Paneme tähele, et esimese liikumisvõrrandi (5.8) lahendiks on indutseeritud meetrika (5.2) ja teist väljavõrrandit (5.9) võib käsitleda kui lainevõrrandeid kahemõõtmelise kõvera aegruumi (*kahemõõtmelise gravitatsioonivälja*) foonil d skalaarse välja $x^a(\xi^\alpha)$ jaoks. Viimaseid nimetatakse vahel ka *mateeriaväljadeks.* Otsene arvutus kinnitab, et kui võrrandi (5.8) lahend asendada võrrandisse (5.9), saame väljafunktsioonide jaoks samad võrrandid, mis järelduvad Nambu-Goto mõjufunktsionaalist (5.1) vähima mõju printsiibi põhjal. Järelikult on vähemalt klassikalise teooria raames mõjufunktsionaalid (5.1) ja (5.3) ekvivalentsed.

Geomeetriast on teada, et igas kahemõõtmelises ruumis on koordinaatteisenduste abil võimalik meetrika viia diagonaalkujju

$$g_{\alpha\beta}(\xi) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{5.10}$$

Nendes koordinaatides omandavad lainevõrrandid (5.9) lihtsaima võimaliku kuju

$$\ddot{x}^a - x^{a''} = 0, \tag{5.11}$$

kus $\dot{x} \equiv \partial_\tau x$ ja $x' \equiv \partial_\sigma x$. Võrrandid (5.8) jäävad sisaldama ainult esimesi tuletisi ja järelikult on seoste osas:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^a\dot{x}^b + x^{a'}x^{b'})\eta_{ab} = 0, \tag{5.12}$$

$$\dot{x}^a x^{b'}\eta_{ab} = 0. \tag{5.13}$$

Ääretingimus (5.7) väidab, et lahtise stringi korral peab kehtima

$$x^{a'}(\sigma) = 0\Big|_{\substack{\sigma=0\\ \sigma=\pi}}. \tag{5.14}$$

Näeme, et stringiteooria matemaatiline keerukus ei sisaldu mitte väljavõrrandites (5.11), mis on lineaarsed lainevõrrandid, vaid oluliselt mittelineaarsetes seostes (5.12), (5.13).

2. Pöörlev fermionstring. Punktmassi koordinaate $x^a(t)$ võib vaadelda kui ühemõõtmelises ruumis (t) antud skalaarvälju ja bosonstringi koordinaate $x^a(\tau,\sigma)$ kui kahemõõtmelises ruumis (τ, σ) antud skalaarvälju. Pöörlevat osakest kirjeldava pseudoklassikalise teooria saime ühemõõtmelise trajektoori supersümmetriseerimisel. Kui me analoogiliselt supersümmetriseerime bosonstringi kahemõõtmelist maailmalehte, saame teooria, mis kirjeldab *pöörlevat stringi.* Kuna teooria sisaldab nüüd lisaks kommuteeruvatele väljafunktsioonidele $x^a(\tau, \sigma)$ ka nende superpartnereid, antikommuteeruvaid fermionvälju $\varphi^a(\tau, \sigma)$, nimetatakse teda *fermionstringi* teooriaks.

Lisame maailmalehe kahele kommuteeruvale koordinaadile ξ^α, $\alpha = 1, 2$ antikommuteeruvad reaalsed $d = 2$ Majorana spiinori tüüpi koordinaadid θ^A, $A = 1, 2$. Fermionstringi $X^a(\xi^\alpha, \theta^A)$ arendus (3.17) määrab vastavate harilike väljade supermultipleti

$$X^a(\xi^\alpha, \theta^A) = x^a(\xi^\alpha) + i\theta^A \varphi^a_A(\xi^\alpha) + i\theta^A\theta^B F^a_{AB}(\xi^\alpha). \quad (5.15)$$

Kuna väli $F^a_{AB}(\xi)$ on antisümmeetriline spiinorindeksite A, B suhtes, on tal ainult üks nullist erinev spiinorkomponent $F^a_{12} = -F^a_{21}$. Et seda asjaolu kasutada arenduse (5.15) viimase liikme lihtsustamisel, valime Γ-maatriksid Majorana esituses (2.19). Defineerime spiinorindeksite tõstmise ja langetamise maatriksi C_{AB} ja tema pöördmaatriksi $(C^{-1})^{AB} \equiv C^{AB} = C_{AB}$ kaudu:

$$\theta \equiv \theta_D = \theta^A C_{AD}, \quad \overline{\theta} \equiv \theta^A = \theta_B C^{BA}. \quad (5.16)$$

Otsene arvutus kinnitab, et kehtib seos

$$\theta^A\theta^B = \frac{1}{2}\theta^D\theta_D C^{AB}. \quad (5.17)$$

Tähistame $F^a(\xi^\alpha) = C^{AB}F^a_{AB}(\xi^\alpha)$. Arendus (5.14) on nüüd kujul

$$X^a(\xi^\alpha, \theta^A) = x^a(\xi^\alpha) + i\theta^A\varphi^a_A(\xi^\alpha) + \frac{i}{2}\theta^D\theta_D F^a(\xi^\alpha) \quad (5.18)$$

ehk

$$X^a(\xi, \theta) = x^a(\xi) + i\overline{\theta}\varphi^a(\xi) + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta F^a(\xi). \quad (5.19)$$

Spiinorit

$$\overline{\theta} = \theta C^{-1} \quad (5.20)$$

nimetatakse *spiinori* θ *kaasspiinoriks Majorana mõttes.* Meie eelduste kohaselt on $\overline{\theta}$ ja φ arenduses (5.19) reaalsete komponentidega spiinorid.

Leiame supermultipleti väljade (x^a, φ^a_A, F^a) teisenemise supersümmeetria teisendustel. Seda on võimalik välja lugeda avaldisest

$$\delta X^a = -\epsilon^A Q_A X^a = \delta x^a + i\theta^A \delta\varphi^a_A + \frac{i}{2}\theta^D\theta_D \delta F^a, \quad (5.21)$$

kus Q_A on antud valemiga (1.22c), $Q_A = \partial_A - i(\Gamma^\alpha C)_{AB}\theta^B\partial_\alpha$. Tulemuseks saame

$$\delta x^a = -i\epsilon^A \varphi^a_A, \quad (5.22a)$$

$$\delta\varphi^a_A = -\epsilon^B(\Gamma^\alpha C)_{BA}\partial_\alpha x^a - \epsilon_A F^a, \quad (5.22b)$$

$$\delta F^a = i\epsilon^A (\Gamma^\alpha)_A{}^B \partial_\alpha \varphi^a_B. \quad (5.22c)$$

Mõjufunktsionaal fermionstringi koordinaatide $X^a(\xi, \theta)$ jaoks on sobiv võtta kujul

$$S = \frac{i}{4\pi}\int (\overline{D}X^a)(DX^b)\eta_{ab} d\theta^1 d\theta^2 d^2\xi. \quad (5.23)$$

Siin on tähistatud

$$D \equiv D_A = \partial_A + i(\Gamma^\alpha C)_{AB}\theta^B\partial_\alpha, \quad \overline{D} \equiv D^A = D_B C^{BA}.$$

Asendame mõjufunktsionaali (5.23) arenduse (5.19) ja integreerime üle antikommuteeruvate koordinaatide θ^1, θ^2. Saame mõjufunktsionaali väljade supermultipleti $(x^a(\xi), \varphi^a(\xi), F^a(\xi))$ jaoks:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int (\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b - i\overline{\varphi}^a\Gamma^\alpha\partial_\alpha\varphi^b - F^a F^b)\eta_{ab} d^2\xi. \quad (5.24)$$

Vähima mõju printsiibist järelduvad nüüd lainevõrrandid $x^a(\xi)$ jaoks:

$$\ddot{x}^a - x^{a''} = 0, \quad (5.25)$$

Diraci võrrandid $\varphi^a(\xi)$ jaoks:

$$i\Gamma^\alpha\partial_\alpha\varphi^b = 0 \quad (5.26)$$

ja algebralised tingimused $F^a(\xi)$ jaoks:

$$F^a(\xi) = 0. \quad (5.27)$$

Viimane võrdus näitab, et väli $F^a(\xi)$ ei ole dünaamiline leviv väli, vaid abiväli, mida on tarvis supermultipleti väljade supersümmeetria teisenduste (5.22) andmiseks.

Lainevõrrandid (5.25) bosonväljade $x^a(\xi)$ jaoks langevad ühte bosonstringi väljavõrranditega (5.11), mis saadi abimuutujaid $g^{\alpha\beta}$ sisaldavatest üldkujulistest võrranditest (5.9) erijuhul $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Kuid bosonstringi korral pidid lisaks lainevõrranditele (5.11) kehtima ka mittelineaarsed seosed (5.12), (5.13). Otsime fermionstringi mõjufunktsionaali (5.24) sellist üldistust, millest bosonväljade $x^a(\xi)$ jaoks tuleneksid nii üldkujulised väljavõrrandid (5.9) kui ka seosed (5.8). Lihtsuse mõttes oletame, et abiväli $F^a(\xi)$ on null vastavalt tingimusele (5.27).

Bosonstringi korral olid stringi kahemõõtmelise maailmalehe meetrilise tensori komponendid $g^{\alpha\beta}$ Lagrange'i kordajate osas, sest nende järgi varieerimisel saadud Euleri–Lagrange'i võrrandid (5.8) ei sisaldanud teist tuletist aja τ järgi ja järelikult olid algebralised seosed väljafunktsioonide ja nende esimeste ajaliste tuletiste vahel. Fermionstringi korral toome lisaks abimuutujatele $g^{\alpha\beta}$ sisse antikommuteeruvad fermiontüüpi Lagrange'i kordajad $\psi_{\beta A}$, mis koos meetrikaga $g^{\alpha\beta}$ moodustavad supermultipleti kahemõõtmelisel maailmalehel. Mõjufunktsionaal, mis sisaldab nii väljavõrrandid kui ka seosed, on bosonstringi mõjufunktsionaali (5.3) üldistus:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int e\Big(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b - i e_{\overline{\alpha}}{}^{\alpha}\overline{\varphi}^a \Gamma^{\overline{\alpha}}\partial_\alpha \varphi^b + \\ + 2e_{\overline{\alpha}}{}^{\alpha} e_{\overline{\beta}}{}^{\beta}\overline{\psi}_\alpha \Gamma^{\overline{\beta}}\Gamma^{\overline{\alpha}}\varphi^a(\partial_\beta x^b + \frac{1}{2}\overline{\varphi}^b\psi_\beta)\Big)\eta_{ab}d^2\xi . \tag{5.28}$$

Spiinorite kirjeldamiseks kahemõõtmelises kõveras ruumis on siin sisse toodud maailmalehe lokaalne reeper $e_{\overline{\alpha}}{}^{\alpha}(\xi)$, $e_{\overline{\alpha}}{}^{\alpha}e_{\overline{\beta}}{}^{\beta}\eta^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = g^{\alpha\beta}$, $e = \det|e_{\overline{\alpha}}{}^{\alpha}|$. Γ-maatriksid $\Gamma^{\overline{\alpha}}$ on konstantsete komponentidega (2.19).

Mõjufunktsionaalist (5.28) järelduvad väljavõrrandid omandavad kalibratsioonis

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}, \quad \psi_{\beta A} = 0 \tag{5.29}$$

soovitud kuju (5.25), (5.26). Varieerimine abimuutujate $g^{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha A}$ järgi annab seosed, mis kalibratsioonis (5.29) on kujul

$$\Big(\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\gamma x^a \partial_\delta x^b \eta^{\gamma\delta} - \\ - \frac{1}{4}\overline{\varphi}^a(\Gamma_\alpha\partial_\beta + \Gamma_\beta\partial_\alpha)\varphi^b\Big)\eta_{ab} = 0 , \tag{5.30}$$

$$\Gamma^\beta\Gamma^\alpha\varphi^a\partial_\beta x^b\eta_{ab} = 0. \qquad (5.31)$$

Üldine mõjufunktsionaal (5.28) sisaldab peale väljavõrrandite ja seoste veel ka ääretingimusi lahtise stringi otstes, mis järelduvad vähima mõju printsiibist. Lisaks bosonstringist tuttavale tingimusele (5.6) peab nüüd kehtima ka tingimus

$$(\varphi_{1A}\delta\varphi_1^A - \varphi_{2A}\delta\varphi_2^A)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \qquad (5.32)$$

Selle rahuldamiseks on kaks võimalust. Kui nõutakse, et

$$\varphi_1^A(0) = \varphi_2^A(0), \quad \varphi_1^A(\pi) = \varphi_2^A(\pi), \qquad (5.33)$$

saadakse Ramond'i fermionstring. Kui nõutakse, et

$$\varphi_1^A(0) = \varphi_2^A(0), \quad \varphi_1^A(\pi) = -\varphi_2^A(\pi), \qquad (5.34)$$

saadakse Neveu-Schwarzi fermionstring. Tingimuste (5.32) kehtivus järeldub mõlemal juhul sellest, et analoogilised seosed peavad kehtima ka variatsioonide $\delta\varphi_\alpha^A$ vahel.

Stringiteooria tähendus füüsikalise reaalsuse kirjeldamisel ilmneb vastavas kvantteoorias. Kvantmehaanikas on n vabadusastmega kvantosakese kirjeldamisel matemaatiliseks elementaarmudeliks n harmoonilist ostsillaatorit (konfiguratsiooniruumi koordinaati) $q^a(t)$, $a = 1,\dots,n$. Stringiteoorias võetakse matemaatiliseks elementaarmudeliks harmooniliste ostsillaatorite ühemõõtmeline hulk $x^a(\tau,\sigma)$. See võimaldab erinevaid kvantosakesi kirjeldada kui üheainsa fundamentaalse objekti – stringi – ergastatud seisundeid. Eriti intrigeeriv on asjaolu, et stringi ergastatud seisundite hulgas on massita spinniga 2 seisund, mida võiks identifitseerida gravitatsioonivälja kvandi gravitoniga. Kuid nii bosonstringi kui ka fermionstringide poolt kirjeldatud osakeste spektrid sisaldavad selliseid mittefüüsikalisi osakesi nagu tahhüonid, mis liiguvad valguse kiirusest suurema kiirusega, ja vaimud, millele vastav kvantmehaaniline tõenäosus on negatiivne. Seepärast ei saa selles paragrahvis käsitletud stringiteooriaid pidada füüsikalise reaalsuse tõepärasteks mudeliteks.

Ülesanded

5.1. Tuletada fermionstringi kirjeldava väljade supermultipleti (5.18) teisenemiseeskiri (5.22) supersümmeetria teisenduste korral, lähtudes valemist (5.21).

5.2. Lähtudes superruumis antud fermionstringi mõjufunktsionaalist (5.23), arvutada mõjufunktsionaal (5.24) supermultipleti väljade jaoks harilikus ruumis.

6

Kiraalne superväli ja reaalne superväli. Supersümmeetriline Maxwelli teooria

Poincaré superalgebra neljamõõtmelises aegruumis. Sümmeetrilised, kiraalsed ja antikiraalsed koordinaadid. Kiraalsed ja antikiraalsed superväljad. Kiraalse supervälja komponentväljad ja nende mõjufunktsionaal. Reaalne superväli. Supersümmeetriline Maxwelli teooria.

1. Neljamõõtmelise aegruumi Poincaré superalgebra. Kuna neljamõõtmelises aegruumis $(x^a) = (t, x, y, z)$ saab defineerida Majorana spiinoreid, siis võiks siin superruumi koordinaatideks võtta (x^a, θ^α), kus θ^α on Majorana spiinori neli reaalset antikommuteeruvat komponenti. Harilikult aga eelistatakse selle asemel kasutada kahekomponendilist komplekset Weyli spiinorit θ^A ja tema kaaskomplekset spiinorit $\overline{\theta}_{\dot{A}}$ vastavalt seosele (2.33)

$$\theta^\alpha = (\theta^A \quad -\overline{\theta}_{\dot{A}}) . \tag{6.1}$$

Olgu Γ-maatriksid kiraalses esituses (2.21)–(2.23). Van der Waerdeni sümbolid $\sigma^a_{A\dot{B}}$ (2.22) lubavad igale vektorile u^a üksüheselt vastavusse seada kahe indeksiga spiinori $u^{A\dot{B}}$:

$$u^{A\dot{B}} = \sigma_a^{A\dot{B}} u^a . \tag{6.2}$$

Kuna Cliffordi algebra (2.24) põhjal

$$\sigma^a_{A\dot{B}} \sigma_b^{A\dot{B}} = 2\delta^a_b \tag{6.3}$$

ja

$$\sigma^a_{A\dot{A}} \sigma_a^{B\dot{B}} = 2\delta^B_A \delta^{\dot{B}}_{\dot{A}} , \tag{6.4}$$

siis on seos (6.2) pööratav:

$$\sigma^a_{A\dot{B}} u^{A\dot{B}} = 2u^a . \tag{6.5}$$

Seosed (6.2), (6.5) ja ortogonaalsustingimused (6.3), (6.4) võimaldavad van der Waerdeni sümboleid käsitleda kui baasivektoreid aegruumis, mis teisendavad iga reaalse vektori hermiitiliseks spiinoriks ühe punkteerimata ja ühe punkteeritud indeksiga. Leiame Poincaré superalgebra kuju selles baasis. Lorentzi teisenduse generaatori $J_{ab} = -J_{ba}$ spiinorvaste leidmiseks arvestame, et alati kehtib seos

$$T_{AB} - T_{BA} = \epsilon_{AB} T_D{}^D . \tag{6.6}$$

Saame

$$J_{ab}\sigma^a_{A\dot{A}}\sigma^b_{B\dot{B}} = \epsilon_{AB}J_{\dot{A}\dot{B}} + \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}J_{AB} , \tag{6.7}$$

kus J_{AB}, $J_{\dot{A}\dot{B}}$ on sümmeetrilised spiinorid:

$$J_{AB} = \frac{1}{2}J_{A\dot{S}B}{}^{\dot{S}} = J_{BA} , \quad J_{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{2}J_{S\dot{A}}{}^{S}{}_{\dot{B}} = J_{\dot{B}\dot{A}} . \tag{6.8}$$

Poincaré superalgebra generaatoriteks on nüüd $P_{A\dot{A}}$, J_{AB}, $J_{\dot{A}\dot{B}}$, Q_A, $\overline{Q}_{\dot{A}}$ ning (anti)kommutatsioonieeskirjad (1.10) omandavad sellise kuju (l^{AB}, $l^{\dot{A}\dot{B}}$ on Lorentzi teisenduse infinitesimaalparameetrid; indekseid tõstetakse ja langetatakse vastavalt reeglitele (2.28)):

$$[P_{A\dot{A}} , P_{B\dot{B}}] = 0 , \tag{6.9a}$$

$$i[l^{AB}J_{AB} + l^{\dot{A}\dot{B}}J_{\dot{A}\dot{B}} , P_{D\dot{D}}] = l_{\dot{D}}{}^{\dot{A}}P_{D\dot{A}} + l_D{}^A P_{A\dot{D}} , \tag{6.9b}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i[l^{AB}J_{AB} , J_{DG}] = l_D{}^A J_{AG} + l_G{}^A J_{AD} , \\ i[l^{\dot{A}\dot{B}}J_{\dot{A}\dot{B}} , J_{\dot{D}\dot{G}}] = l_{\dot{D}}{}^{\dot{A}} J_{\dot{A}\dot{G}} + l_{\dot{G}}{}^{\dot{A}} J_{\dot{A}\dot{D}} , \\ [J_{AB}, J_{\dot{D}\dot{G}}] = 0 , \end{array}\right. \tag{6.9c}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \{Q_A , Q_B\} = 0 , \quad \{\overline{Q}_{\dot{A}} , \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 0 , \\ \{Q_A , \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 2P_{A\dot{B}} , \end{array}\right. \tag{6.9d}$$

$$[Q_A , P_{B\dot{B}}] = 0 , \quad [Q_{\dot{A}} , P_{B\dot{B}}] = 0 , \tag{6.9e}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i[Q_D , J_{AB}] = \frac{1}{2}(\epsilon_{DA}Q_B + \epsilon_{DB}Q_A) , \\ i[J_{AB} , \overline{Q}_{\dot{D}}] = 0 , \\ i[\overline{Q}_{\dot{D}} , J_{\dot{A}\dot{B}}] = \frac{1}{2}(\epsilon_{\dot{D}\dot{A}}\overline{Q}_{\dot{B}} + \epsilon_{\dot{D}\dot{B}}\overline{Q}_{\dot{A}}) , \\ i[J_{\dot{A}\dot{B}} , Q_A] = 0 . \end{array}\right. \tag{6.9f}$$

Kovariantsete tuletiste $D_A, \overline{D}_{\dot{A}}$ antikommutaatorid on

$$\{D_A , D_B\} = 0 , \quad \{\overline{D}_{\dot{A}} , \overline{D}_{\dot{B}}\} = 0 , \tag{6.10a}$$

$$\{D_A, \overline{D}_{\dot{B}}\} = -2P_{A\dot{B}}. \qquad (6.10b)$$

2. Sümmeetrilised koordinaadid ja kiraalsed koordinaadid. Poincaré superrühm spiinorkujul (6.9) võimaldab defineerida Minkowski superruumis lisaks koordinaatidele $(x^j, \theta^A, \overline{\theta}^{\dot{A}})$ veel kahte tüüpi eeliskoordinaate. Tuletame meelde, et §1.3 antud teooria põhjal tuuakse koordinaadid $(x^j, \theta^A, \overline{\theta}^{\dot{A}})$ sisse Poincaré superrühma SP ruumi faktoriseerimisel Lorentzi rühma L järgi, kus faktorruum SP/L parametriseeritakse eksponentsiaalkujutuse abil

$$h(x^j, \theta^A, \overline{\theta}^{\dot{A}}) = \exp(ix^j P_j - \theta^A Q_A - \overline{\theta}^{\dot{A}} \overline{Q}_{\dot{A}}). \qquad (6.11)$$

Koordinaate $(x, \theta, \overline{\theta})$ nimetatakse *sümmeetrilisteks* ehk *vektorkoordinaatideks*. Nende teisenemiseeskiri Poincaré superrühma toimel on valemi (1.18) põhjal järgmine:

$$\delta x^j = a^j - l^j{}_k x^k + i(\epsilon^A \overline{\theta}^{\dot{A}} + \overline{\epsilon}^{\dot{A}} \theta^A)\sigma^j_{A\dot{A}}, \qquad (6.12a)$$

$$\delta\theta^A = \epsilon^A + \frac{1}{2}\theta^B l_B{}^A, \qquad (6.12b)$$

$$\delta\overline{\theta}^{\dot{A}} = \overline{\epsilon}^{\dot{A}} + \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{B}} l_{\dot{B}}{}^{\dot{A}}. \qquad (6.12c)$$

Paneme tähele, et nendel teisendustel spiinorkoordinaadid θ^A ja $\overline{\theta}^{\dot{A}}$ omavahel ei segune. See viitab asjaolule, et vastav Poincaré superrühma esitus on taanduv.

Taandumatu esituse leidmiseks parametriseerime faktorruumi SP/L teisiti:

$$h(x^j_+, \theta^A_+, \overline{\theta}^{\dot{A}}_+) = \exp(ix^j_+ P_j - \theta^A_+ Q_A)\exp(-\overline{\theta}^{\dot{A}}_+ \overline{Q}_{\dot{A}}). \qquad (6.13)$$

Koordinaate $(x^j_+, \theta^A_+, \overline{\theta}^{\dot{A}}_+)$ nimetatakse *kiraalseteks koordinaatideks*. Nende teisenemiseeskirja supersümmeetria teisendustel võib tuletada analoogiliselt vektorkoordinaatide teisenduseeskirjale (1.18). Tulemuseks saame

$$\delta x^j_+ = 2i\overline{\epsilon}^{\dot{A}} \theta^A_+ \sigma^j_{A\dot{A}}, \qquad (6.14a)$$

$$\delta\theta^A_+ = \epsilon^A, \qquad (6.14b)$$

$$\delta\overline{\theta}_{+}^{\dot{A}} = \overline{\epsilon}^{\dot{A}}. \tag{6.14c}$$

Näeme, et Minkowski superruum laguneb kaheks alamruumiks $(x_{+}^{j}, \theta_{+}^{A})$ ja $(\overline{\theta}_{+}^{\dot{A}})$, mis supersümmeetria teisendustel omavahel ei segune.

Teistsuguse taandumatu esituse saame, kui parametriseerime faktorruumi SP/L koordinaatidega $(x_{-}^{j}, \theta_{-}^{A}, \overline{\theta}_{-}^{\dot{A}})$ eksponentsiaalkujutuse abil

$$h(x_{-}^{j}, \theta_{-}^{A}, \overline{\theta}_{-}^{\dot{A}}) = \exp(ix_{-}^{j}P_j - \overline{\theta}_{-}^{\dot{A}}\overline{Q}_{\dot{A}})\exp(-\theta_{-}^{A}Q_A). \tag{6.15}$$

Koordinaate $(x_{-}^{j}, \theta_{-}^{A}, \overline{\theta}_{-}^{\dot{A}})$ nimetatakse *antikiraalseteks koordinaatideks.* Supersümmeetria teisendustel on nende teisenemiseeskiri järgmine:

$$\delta x_{-}^{j} = 2i\epsilon^{A}\overline{\theta}_{-}^{\dot{A}}\sigma_{A\dot{A}}^{j}, \tag{6.16a}$$

$$\delta\theta_{-}^{A} = \epsilon^{A}, \tag{6.16b}$$

$$\delta\overline{\theta}_{-}^{\dot{A}} = \overline{\epsilon}^{\dot{A}}. \tag{6.16c}$$

Näeme, et siin on taandumatud alamruumid koordinaatidega $(x_{-}^{j}, \overline{\theta}_{-}^{\dot{A}})$ ja (θ_{-}^{A}).

Sümmeetrilised, kiraalsed ja antikiraalsed koordinaadid on omavahel seotud koordinaatteisendusega

$$\theta_{\pm}^{A} = \theta^{A}, \qquad \overline{\theta}_{\pm}^{\dot{A}} = \overline{\theta}^{\dot{A}}, \tag{6.17a}$$

$$x_{\pm}^{A\dot{A}} = x^{A\dot{A}} \mp i\theta^{A}\overline{\theta}^{\dot{A}}. \tag{6.17b}$$

3. Kiraalsed ja antikiraalsed superväljad. Kuna Minkowski superruumi sümmeetrilised spiinorkoordinaadid teisenevad Poincaré superrühma taanduva esituse järgi, võib arvata, et ka skalaarsed superväljad $\phi(x^{j}, \theta^{A}, \overline{\theta}^{\dot{A}})$ moodustavad Poincaré superrühma taanduva esituse. Tõesti, võrrandil

$$\overline{D}_{\dot{A}}\phi(x^{j}, \theta^{B}, \overline{\theta}^{\dot{B}}) = 0 \tag{6.18}$$

on nullist erinevad lahendid, mis supersümmeetria teisendustel teisenevad vaid omavahel: kui $\overline{D}_{\dot{A}}\phi = 0$, siis ka $\overline{D}_{\dot{A}}(\phi - \epsilon^{B}Q_{B}\phi) = 0$, sest

$$\overline{D}_{\dot{A}}Q_{B}\phi = -Q_{B}\overline{D}_{\dot{A}}\phi = 0.$$

Skalaarsete superväljade ruumi vastav taandumatu alamruum on antud supersümmeetria teisenduste suhtes invariantse võrrandi (6.18) üldlahendiga. Et seda leida, teisendame võrrandit (6.18). Kirjutame välja supersümmeetria generaatorite $Q, \overline{Q}$ ja kovariantsete tuletiste $D, \overline{D}$ avaldised eelmises punktis sissetoodud kolmes koordinaatsüsteemis:

1) sümmeetrilistes koordinaatides:

$$Q_A = \partial_A + i\overline{\theta}^{\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.19a}$$

$$\overline{Q}_{\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}} + i\theta^A\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.19b}$$

$$D_A = \partial_A - i\overline{\theta}^{\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.19c}$$

$$\overline{D}_{\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^A\partial_{A\dot{A}}; \tag{6.19d}$$

2) kiraalsetes koordinaatides:

$$Q_{+A} = \partial_A, \tag{6.20a}$$

$$\overline{Q}_{+\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}} + 2i\theta^A_+\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.20b}$$

$$D_{+A} = \partial_A - 2i\overline{\theta}^{\dot{A}}_+\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.20c}$$

$$\overline{D}_{+\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}}; \tag{6.20d}$$

3) antikiraalsetes koordinaatides:

$$Q_{-A} = \partial_A + 2i\overline{\theta}^{\dot{A}}_-\partial_{A\dot{A}}, \tag{6.21a}$$

$$\overline{Q}_{-\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}}, \tag{6.21b}$$

$$D_{-A} = \partial_A, \tag{6.21c}$$

$$\overline{D}_{-\dot{A}} = \overline{\partial}_{\dot{A}} - 2i\theta^A_-\partial_{A\dot{A}}. \tag{6.21d}$$

Näeme, et võrrand (6.18) omandab kiraalsetes koordinaatides (6.20) lihtsa kuju

$$\overline{\partial}_{\dot{A}}\phi(x^j_+, \theta^A_+, \overline{\theta}^{\dot{A}}_+) = 0. \tag{6.22}$$

Tema üldlahendiks on suvalised skalaarsed funktsioonid $\phi(x^j_+, \theta^A_+)$, mis ei sõltu spiinorkoordinaadist $\overline{\theta}^{\dot{A}}_+$. Niisuguseid välju nimetatakse *kiraalseteks superväljadeks*. Nad moodustavad Poincaré superrühma taandumatu esituse ruumi.

Lähtume nüüd teisest supersümmeetria teisenduste suhtes invariantsest võrrandist

$$D_A\phi(x,\theta,\overline{\theta}) = 0. \tag{6.23}$$

Antikiraalsetes koordinaatides (6.21) on see võrrand kujul

$$\partial_A\phi(x^j_-,\theta^A_-,\overline{\theta}^{\dot{A}}_-) = 0. \tag{6.24}$$

Tema üldlahendiks on suvalised funktsioonid $\phi(x^j_-,\overline{\theta}^{\dot{A}}_-)$. Neid nimetatakse *antikiraalseteks superväljadeks*. Ka nemad moodustavad Poincaré superrühma taandumatu esituse ruumi.

4. Kiraalse supervälja komponentväljad ja nende mõjufunktsionaal. Senises käsitluses on superväljad $\phi(x,\theta,\overline{\theta})$ puhtmatemaatilised objektid. Et anda neile füüsikalist tähendust, otsime nende seost tuntud füüsikaliste väljadega Minkowski ruumis. Lihtsaim tee selleks on vaadelda supervälja $\phi(x,\theta,\overline{\theta})$ arendust antikommuteeruvate koordinaatide $\theta,\overline{\theta}$ järgi.

Kiraalse supervälja $\phi(x^j,\theta^A)$ arendus koosneb vaid kolmest liikmest:

$$\phi(x,\theta) = A(x) - \theta^A\chi_A(x) + \theta^2F(x), \tag{6.25}$$

$$\theta^2 \equiv \theta^A\theta^B\epsilon_{BA}. \tag{6.26}$$

Siin on kasutatud kiraalseid koordinaate, kuid tähistuste lihtsustamise huvides on ära jäetud indeks +. Minkowski ruumi väljad $A(x),\chi_A(x),F(x)$ on üldjuhul kompleksed. Nad moodustavad supermultipleti, mille teisenemiseeskiri supersümmeetria teisendustel on leitav valemi (3.18) põhjal:

$$\delta A = \epsilon^A\chi_A, \tag{6.27a}$$

$$\delta\chi_A = 2(\epsilon_AF - i\overline{\epsilon}^{\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}A), \tag{6.27b}$$

$$\delta F = -i\overline{\epsilon}^{\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}\chi^A. \tag{6.27c}$$

Vaba kiraalse supervälja mõjufunktsionaal peab olema bilineaarne väljafunktsiooni ϕ suhtes, sest siis järelduvad vähima mõju printsiibist lineaarsed väljavõrrandid komponentväljade jaoks. Sobivaim hermiitiline bilineaarne avaldis on kujul

$$S = \int \phi^\dagger\phi d^4xd^2\theta d^2\overline{\theta}. \tag{6.28}$$

Integreerime üle spiinorkoordinaatide ja leiame, milline harilikus Minkowski ruumis antud mõjufunktsionaal siit järeldub. Selleks tuletame meelde, et integreerimine üle spiinorkoordinaatide $\theta, \overline{\theta}$ on vastavalt valemile (3.21) ekvivalentne tuletise võtmisega $\theta, \overline{\theta}$ järgi. Hermiitilise konjugeerimise reeglid antikommuteeruvate komponentidega spiinorite jaoks on antud valemitega (2.36)-(2.38). Kui asendame arenduse (6.25) mõjufunktsionaali (6.28), saame mõjufunktsionaali komponentväljade jaoks[1]:

$$S = \int (\overline{A}\eta^{ab}\partial_a\partial_b A + \frac{1}{2}i\overline{\chi}^A\partial_{A\dot{B}}\chi^{\dot{B}} + \overline{F}F)d^4x . \qquad (6.29)$$

Näeme, et skalaarväli $F(x)$ ei ole dünaamiline (leviv) väli, sest tema väljavõrrandiks on algebraline võrrand

$$F(x) = 0 . \qquad (6.30)$$

Skalaarväli $A(x)$ rahuldab massita Kleini-Gordoni võrrandit

$$\eta^{ab}\partial_a\partial_b A = 0 . \qquad (6.31)$$

Majorana spiinorväli χ^A rahuldab massita Diraci võrrandit

$$\partial_{A\dot{B}}\chi^A = 0 . \qquad (6.32)$$

Seega ei kirjelda kiraalse supervälja $\phi(x, \theta)$ komponentväljad otseselt füüsikalises reaalsuses esinevaid välju. Kuid see on lihtsaim matemaatiline mudel supermultipleti kirjeldamiseks, mida on kasulik hästi tundma õppida enne keerulisemate superväljade käsitlemist.

5. Reaalne superväli. *Reaalseks (hermiitiliseks) superväljaks* nimetatakse supervälja, mis on võrdne oma hermiitiliselt konjugeeritud superväljaga $V^\dagger$:

$$V(x, \theta, \overline{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \overline{\theta}) . \qquad (6.33)$$

Reaalne superväli ei saa olla kiraalne, sest siis järelduks kiraalsuse tingimusest $\overline{D}V = 0$ ka antikiraalsuse tingimus $DV = 0$

[1] Siin ja edaspidi selles paragrahvis on skalaarse funktsiooni $f(x)$ kaaskomplekset funktsiooni tähistatud $\overline{f}(x)$.

ja antikommutaatori (6.10b) põhjal oleks V aegruumis konstantne:

$$0 = \{D_A, \overline{D}_{\dot{A}}\}V = -2i\partial_{A\dot{A}}V = 0\,. \tag{6.34}$$

Kui arvestada hermiitilise konjugeerimise definitsioone (2.36)-(2.38), võime reaalse supervälja θ-arenduse sümmeetrilistes koordinaatides anda näiteks sellisel edaspidise käsitluse jaoks sobival kujul:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\overline{\theta}) = C - \theta^A\psi_A - \overline{\theta}^{\dot{A}}\overline{\psi}_{\dot{A}} + \frac{1}{2}\theta^2 H + \frac{1}{2}\overline{\theta}^2\overline{H} + \\ + \theta^A\overline{\theta}^{\dot{A}}W_{A\dot{A}} - \frac{1}{2}\theta^2\overline{\theta}^{\dot{A}}(\overline{\lambda}_{\dot{A}} + i\partial_{A\dot{A}}\psi^A) - \\ - \frac{1}{2}\overline{\theta}^2\theta^A(\lambda_A + i\partial_{A\dot{A}}\overline{\psi}^{\dot{A}}) + \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2(D + \eta^{ab}\partial_a\partial_b C)\,. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Komponentväljad moodustavad supermultipleti, sest supersümmeetria teisendustel nad segunevad omavahel:

$$\delta C = \epsilon^A\psi_A + \overline{\epsilon}^{\dot{A}}\overline{\psi}_{\dot{A}}\,, \tag{6.36a}$$

$$\delta\psi_A = \epsilon_A H - i\overline{\epsilon}^{\dot{A}}(\partial_{A\dot{A}}C + iW_{A\dot{A}})\,, \tag{6.36b}$$

$$\delta\overline{\psi}_{\dot{A}} = \overline{\epsilon}_{\dot{A}}\overline{H} - i\epsilon^A(\partial_{A\dot{A}}C - iW_{A\dot{A}})\,, \tag{6.36c}$$

$$\delta H = \overline{\epsilon}^{\dot{A}}(\overline{\lambda}_{\dot{A}} - 2i\partial_{A\dot{A}}\psi^A)\,, \tag{6.36d}$$

$$\delta W_{A\dot{A}} = \overline{\epsilon}_{\dot{A}}\lambda_A - \epsilon_A\overline{\lambda}_{\dot{A}} - \partial_{A\dot{A}}(i\epsilon^B\psi_B - i\overline{\epsilon}^{\dot{B}}\overline{\psi}_{\dot{B}})\,, \tag{6.36e}$$

$$\delta\lambda_A = \epsilon_A D + 2i\epsilon^B F_{BA}\,, \tag{6.36f}$$

$$\delta D = -i(\overline{\epsilon}^{\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}\lambda^A + \epsilon^A\partial_{A\dot{A}}\overline{\lambda}^{\dot{A}})\,. \tag{6.36g}$$

Siin väärib märkimist asjaolu, et supermultiplett sisaldab vektorvälja $W_{A\dot{A}}$. Sellele väljale kui potentsiaalile vastab väljatugevus $F_{ab} = \partial_a W_b - \partial_b W_a$ ehk spiinorkujul

$$F_{AB} = \frac{1}{2}(\partial_{A\dot{A}}W_B{}^{\dot{A}} + \partial_{B\dot{A}}W_A{}^{\dot{A}})\,. \tag{6.37}$$

Vaatleme kiraalset supervälja $\Lambda(x,\theta)$ arendusega (6.25) ja teisendame ta sümmeetrilistesse koordinaatidesse seoste (6.17), (6.2) ja (2.24) abil. Saame

$$\begin{aligned} \Lambda(x^i,\theta^A,\overline{\theta}^{\dot{A}}) = A - i\theta^A\sigma^a_{A\dot{B}}\overline{\theta}^{\dot{B}}\partial_a A + \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\eta^{ab}\partial_a\partial_b A - \\ - \theta^A\chi_A + \frac{1}{2}i\theta^2\overline{\theta}^{\dot{B}}\partial_a\chi^A\sigma^a_{A\dot{B}} + \theta^2 F\,. \end{aligned} \tag{6.38}$$

8*

Vaatleme temale vastavat hermiitilist supervälja $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$. Paneme tähele, et see sisaldab komponendina vektorvälja $\partial_a A$. Olgu reaalse supervälja $V(x, \theta, \overline{\theta})$ kalibratsioonteisendus antud valemiga

$$V \to V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger). \tag{6.39}$$

Komponentkujul sisaldab see teisendused

$$C \to C + i(A - \overline{A}), \tag{6.40a}$$

$$\psi_A \to \psi_A + i\chi_A, \tag{6.40b}$$

$$H \to H + 2iF, \tag{6.40c}$$

$$W_{A\dot{A}} \to W_{A\dot{A}} + \partial_{A\dot{A}}(A + \overline{A}), \tag{6.40d}$$

$$\lambda_A \to \lambda_A, \tag{6.40e}$$

$$D \to D. \tag{6.40f}$$

Vektorvälja $W_{A\dot{A}}$ teisenemiseeskirjaks saime Maxwelli teooriast tuttava elektromagnetvälja potentsiaali kalibratsioonteisenduse

$$W_a \to W_a + \partial_a(A + \overline{A}). \tag{6.41}$$

See annab aluse käsitleda reaalset supervälja $V(x, \theta, \overline{\theta})$ kui elektromagnetvälja (üldisemas mittelineaarses teoorias – Yangi-Millsi välja) supersümmeetrilist üldistust. Supersümmeetrilist teooriat on võimalik edasi üles ehitada nii, et komponentvälja $W_{A\dot{A}}(x)$ jaoks saame harilikus Minkowski ruumis Maxwelli (Yangi-Millsi) teooria.

6. Supersümmeetriline Maxwelli teooria. Oletame, et kiraalne superväli ϕ (6.25) kirjeldab mingit *mateeriavälja*, mille jaoks lubatud kalibratsioonteisendused on kujul

$$\phi \to e^{-i\Lambda}\phi, \quad \phi^\dagger \to \phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger}. \tag{6.42}$$

Teisenduse parameeter Λ peab olema kiraalne superväli, sest ainult sel juhul teisendatakse kiraalne superväli ϕ taas kiraalseks superväljaks. Mõjufunktsionaali (6.28) muutus nende kalibratsioonteisenduste korral on

$$\delta S = \int \phi^\dagger \exp(i(\Lambda^\dagger - \Lambda))\phi d^4x d^2\theta d^2\overline{\theta}. \tag{6.43}$$

Mõjufunktsionaal on invariantne, kui teisenduse parameeter on hermiitiline, $\Lambda = \Lambda^\dagger$. Kuna Λ peab ühteaegu olema hermiitiline ja kiraalne, siis $\Lambda = const$. Et ka muutuva kiraalse parameetriga $\Lambda(x, \theta, \overline{\theta})$ kalibratsioonteisendused oleksid võimalikud, toome sisse uue supervälja $V(x, \theta, \overline{\theta})$, mida nimetatakse *kalibratsioonväljaks*. Olgu ta hermiitiline superväli, siis võime hermiitiliseks mõjufunktsionaaliks superväljade ϕ, V jaoks võtta

$$S = \int \phi^\dagger e^V \phi d^4x d^2\theta d^2\overline{\theta}. \tag{6.44}$$

Otsene arvutus kinnitab, et see mõjufunktsionaal ei muutu supervälja ϕ teisenduste (6.42) puhul, kui supervälja V teisenemiseeskiri on kujul (6.39)

$$V \to V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger). \tag{6.45}$$

Mõjufunktsionaal (6.44) on mittepolünomiaalne kalibratsioonvälja V suhtes. Mittepolünomiaalsed väljad on füüsikalisteks arvutusteks ebamugavad. Seepärast kasutatakse kalibratsioonvabadust (6.42), (6.45) selleks, et kalibratsioonvälja $V(x, \theta, \overline{\theta})$ θ-arenduses (6.35) esimesed liikmed nulliks muuta. Tõesti, kui valida kalibratsioonteisenduse parameeter $\Lambda(x, \theta, \overline{\theta})$ nii, et

$$A - \overline{A} = iC, \tag{6.46a}$$

$$\chi_A = i\psi_A, \tag{6.46b}$$

$$F = \frac{i}{2}H, \tag{6.46c}$$

siis omandab kalibratsioonväli V kuju

$$V_{WZ}(x, \theta, \overline{\theta}) = \theta^A \overline{\theta}^{\dot{A}} W_{A\dot{A}} - \frac{1}{2}\theta^2 \overline{\theta}^{\dot{A}} \overline{\lambda}_{\dot{A}} - \frac{1}{2}\overline{\theta}^2 \theta^A \lambda_A + \frac{1}{4}\overline{\theta}^2 \theta^2 D. \tag{6.47}$$

Niisugust kalibratsioonvabaduse osalist fikseerimist nimetatakse *Wessi-Zumino kalibratsiooniks*. Kuna nüüd V_{WZ} on nilpotentne:

$$(V_{WZ})^n = 0, \qquad \text{kui} \qquad n > 2, \tag{6.48}$$

lõpeb eksponentfunktsionaali e^V Taylori arendus ruutliikmega ja mõjufunktsionaal on superväljade V, ϕ suhtes polünoomi kujul. Paneme tähele, et potentsiaali $W_{A\dot{A}}$ kalibratsioonteisenduse vabadus on Wessi-Zumino kalibratsioonis säilinud, sest tingimused (6.46) ei fikseeri teisenduse (6.40d) parameetrit $(A + \overline{A})$. Wessi-Zumino kalibratsioon (6.47) ei ole supersümmeetria teisenduste suhtes invariantne, üldjuhul ta ei säili teisendustel (6.36).

Selleks, et üles kirjutada kalibratsioonvälja $V(x, \theta, \overline{\theta})$ mõjufunktsionaali, defineerime kaks uut supervälja:

$$W_A = \overline{D}^2 D_A V, \tag{6.49a}$$

$$\overline{W}_{\dot{A}} = D^2 \overline{D}_{\dot{A}} V. \tag{6.49b}$$

Neist W_A on ilmselt kiraalne väli ja $\overline{W}_{\dot{A}}$ on antikiraalne väli, sest $\overline{D}^3 \equiv 0$, $D^3 \equiv 0$. Nad on invariantsed kalibratsioonteisenduse (6.45) suhtes, sest kovariantne tuletis $\overline{D}_{\dot{A}}$ (D_A), mõjudes (anti)kiraalsele väljale Λ $(\Lambda^\dagger)$, annab nulli. Võtame mõjufunktsionaaliks hermiitilise bilineaarse avaldise

$$S_V = \frac{1}{16} \int (W^A W_A + \overline{W}^{\dot{A}} \overline{W}_{\dot{A}}) d^4x d^2\theta d^2\overline{\theta}. \tag{6.50}$$

Täpselt samuti, nagu me leidsime kiraalse supervälja ϕ mõjufunktsionaalist (6.28) ja θ-arendusest (6.25) mõjufunktsionaali (6.29) komponentväljade jaoks harilikus ruumis, saab mõjufunktsionaalist (6.50) leida Wessi-Zumino kalibratsioonis antud kalibratsioonvälja (6.47) komponentväljade jaoks mõjufunktsionaali harilikus aegruumis:

$$S_V = \int (\frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} - \frac{i}{2} \overline{\lambda}^A \partial_{A\dot{A}} \lambda^A + D^2) d^4x, \tag{6.51}$$

kus F_{ab} on vektorväljale $W_{A\dot{A}}$ vastav väljatugevus (6.37). Mõjufunktsionaalist (6.51) järelduvad välja $F_{ab}(x)$ jaoks Maxwelli võrrandid, seega kirjeldab väli $F_{ab}(x)$ elektromagnetvälja. Kvantteoorias vaadeldakse elektromagnetvälja tema kvantide — *footonite* — koguna. Elektromagnetvälja supersümmeetrilise partneri Majorana spiinorvälja $\lambda^A(x)$ jaoks järeldub mõjufunktsionaalist (6.51) massita Diraci võrrand. Vastavat kvanti nimetatakse *fotiinoks*. Väli $D(x)$ ei ole dünaamiline väli, tema väljavõrrandiks on algebraline seos

$$D(x) = 0. \tag{6.52}$$

Mõjufunktsionaal (6.44) kirjeldab nüüd supersümmeetrilise elektromagnetvälja V interaktsiooni kiraalse mateeriaväljaga

ϕ. *Supersümmeetriline ja kalibratsiooninvariantne elektrodünaamika* on täielikult kirjeldatud mõjufunktsionaaliga

$$S+S_V=\int\Big(\phi^\dagger e^V\phi+\frac{1}{16}(W^AW_A+\overline{W}^{\dot{A}}\overline{W}_{\dot{A}})\Big)d^4xd^2\theta d^2\overline{\theta}. \quad (6.53)$$

Ülesanded

6.1. Teisendada Poincaré superalgebra (1.10) spiinorkujule (6.9).

6.2. Tuletada kiraalse supervälja (6.25) komponentväljade teisenemiseeskiri (6.27) supersümmeetria teisenduste puhul, lähtudes valemist (3.18).

6.3. Lähtudes superruumis antud mõjufunktsionaalist (6.28) kiraalse supervälja jaoks, leida harilikus ruumis antud mõjufunktsionaal (6.29) väljade supermultipleti jaoks.

6.4. Teha ülesannetes nr. 2 ja 3 kirjeldatud arvutused reaalse supervälja (6.33) korral.

7

N = 1 supergravitatsiooniteooria neljamõõtmelises aegruumis

Kõvera aegruumi geomeetria. N = 1 supergravitatsiooniteooria väljade supermultiplett. Mõjufunktsionaal ja väljavõrrandid.

1. Kõvera aegruumi geomeetria. Supersümmeetrilist gravitatsiooniteooriat ehk *supergravitatsiooniteooriat* on lihtsam hakata üles ehitama mitte superruumis antud superväljade baasil, vaid lähtudes harilikus neljamõõtmelises aegruumis antud väljade supermultipletist.

Üldrelatiivsusteooria põhjal tuleb gravitatsioonilise vastastikmõju kirjeldamiseks Minkowski aegruumi (1.1), (1.2) asemel kasutada üldisemat *kõverat aegruumi*, millele Minkowski (tasane) ruum on igas punktis puutujaruumiks. See tähendab, et kauguste definitsioon (1.1), (1.2) kehtib vaid iga punkti esimeses diferentsiaalses ümbruses. Üldjuhul on infinitesimaalne kauguste võrk kahe lõpmata lähedase punkti x^μ, $x^\mu + dx^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ vahel antud valemiga

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \,. \tag{7.1}$$

Sümmeetrilist tensorit $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$ nimetatakse *aegruumi meetriliseks tensoriks* ehk *meetrikaks*.

Kõvera aegruumi koordinaadid ei ole määratud üheselt. Kõige üldisematel regulaarsetel koordinaatteisendustel

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu)\,, \quad \det \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right| \neq 0 \tag{7.2}$$

teisenevad koordinaatide diferentsiaalid lineaarselt:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu \,. \tag{7.3}$$

Kauguste võrk (7.1) ei muutu, kui meetrilise tensori teisenemiseeskiri on selline:

$$g_{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{dx^\rho}{\partial x^{\nu'}} g_{\sigma\rho}(x) \,. \tag{7.4}$$

Diferentsiaalvõrrandite teooria põhjal saab näidata, et alati leidub teisendus (7.2), mille abil saab punktis x_0^μ antud meetrilist tensorit $g_{\mu\nu}$ viia Minkowski kujule (1.2), $g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}$. See tähendab, et iga punkti x_0^μ esimene diferentsiaalne ümbrus tõepoolest ühtib Minkowski ruumiga.

Suurusi V^μ, mis üldistel koordinaatteisendustel teisenevad nagu diferentsiaalid dx^μ maatriksi $A^{\mu'}_\nu = | \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} |$ abil, nimetatakse *vektoriteks*. Suurusi V_μ, mis teisenevad pöördmaatriksi $A^\mu_{\nu'} = | \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} |$ abil, nimetatakse *kovektoriteks*. Vektorite ja kovektorite ruumid on omavahel seotud meetrilise tensori kaudu: $V_\mu = g_{\mu\sigma} V^\sigma$, $V^\mu = g^{\mu\sigma} V_\sigma$. Suurusi $V^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\nu_1 \dots \nu_k}$, mis teisenevad polülineaarselt maatriksite $A^{\mu'}_\nu$, $A^\mu_{\nu'}$ abil, nimetatakse *i-ndat järku kontravariantseks ja k-ndat järku kovariantseks tensoriks*. Meetriline tensor on teist järku kovariantne tensor.

Meetriline tensor $g_{\mu\nu}$ defineerib mitte ainult kauguste võrgu, vaid ka kahe vektori V^μ, U^ν *skalaarkorrutise* $g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$. Toome sisse neli lineaarselt sõltumatut vektorit $e_a{}^\mu(x), a = 1, 2, 3, 4$, mille ortonormeerituse tingimused on antud Minkowski meetrikaga η_{ab}:

$$e_a{}^\mu(x) e_b{}^\nu(x) g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} . \tag{7.5}$$

Vektoreid $e_a{}^\mu$ nimetatakse aegruumi *lokaalseks baasiks* ehk *lokaalseks reeperiks*. Duaalsusseostega

$$e_a{}^\mu e^b{}_\mu = \delta^b_a , \quad e_a{}^\mu e^a{}_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{7.6}$$

määratud kovektoreid $e^a{}_\mu(x)$ nimetatakse *duaalseks baasiks* ehk *kobaasiks*.

Naaberpunktides x^μ ja $x^\mu + dx^\mu$ asuvad lokaalsed koreeperid $e^a{}_\mu$ ja $e^a{}_\mu + de^a{}_\mu$ on üksteisest sõltumatud, kuid nende vahe $de^a{}_\mu$ on lineaarne koordinaatide diferentsiaalide dx^μ suhtes:

$$de^a{}_\mu = dx^\sigma \Gamma^\nu_{\sigma\mu} e^a{}_\nu . \tag{7.7}$$

Duaalsussuhtest (7.6) järeldub nüüd

$$de_b{}^\mu = -dx^\sigma \Gamma^\mu_{\sigma\nu} e_b{}^\nu . \tag{7.8}$$

Suurusi $\Gamma^\nu_{\sigma\mu}(x)$ nimetatakse *afiinse seostuse kordajateks*. Kõige üldisemal juhul on kõik 64 kordajat sõltumatud.

Vaatleme vektorvälja $V^a = e^a{}_\mu V^\mu$ muutust üleminekul naaberpunkti:

$$
\begin{aligned}
dV^a &= d(e^a{}_\sigma V^\sigma) = (de^a{}_\sigma)V^\sigma + e^a{}_\sigma(dV^\sigma) = \\
&= dx^\rho \Gamma^\nu_{\rho\sigma} e^a{}_\nu V^\sigma + e^a{}_\sigma dx^\rho \partial_\rho V^\sigma = \qquad (7.9a) \\
&= dx^\rho(\Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma + \partial_\rho V^\nu)e^a{}_\nu \equiv dx^\rho(\nabla_\rho V^\nu)e^a{}_\nu .
\end{aligned}
$$

Suurust $\nabla_\rho V^\nu$ nimetatakse *vektorvälja* $V^\nu(x)$ *kovariantseks tuletiseks.* Skalaarkorrutise $V_\sigma V^\sigma$ skalaarsuse tingimusest

$$
\begin{aligned}
d(V_\sigma V^\sigma) &= dx^\rho((\partial_\rho V_\sigma)V^\sigma + V_\sigma(\partial_\rho V^\sigma)) = \\
&= dx^\rho((\nabla_\rho V_\sigma)V^\sigma + V_\sigma(\nabla_\rho V^\sigma))
\end{aligned}
$$

järeldub *kovektorvälja* $V_\mu(x)$ *kovariantse tuletise* avaldis:

$$\nabla_\sigma V_\mu = \partial_\sigma V_\mu - \Gamma^\rho_{\sigma\mu} V_\rho . \qquad (7.9b)$$

Avaldisest (7.9a) näeme, et vektorvälja kovariantne tuletis teiseneb üldistel koordinaatteisendustel (7.2) nagu teist järku tensor. See lubab arvutada afiinse seostuse kordajate teisenemiseeskirja:

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} \Gamma^\tau_{\sigma\rho} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} . \qquad (7.10)$$

Koordinaatteisendused eeldatakse olevat siledad funktsioonid, $\partial_{\mu'}\partial_{\nu'} x^\tau = \partial_{\nu'}\partial_{\mu'} x^\tau$, seega teiseneb afiinse seostuse kordajate antisümmeetriline osa polülineaarselt nagu tensor:

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \equiv 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} , \qquad (7.11)$$

$$T^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\tau} T^\tau_{\sigma\rho} . \qquad (7.12)$$

Tensorit $T^\lambda_{\mu\nu}(x)$ nimetatakse aegruumi *väändetensoriks.*

Me oleme aegruumis sisse toonud kaks struktuuri, meetrika $g_{\mu\nu}(x)$ ja seostuse $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$. Üldjuhul on nad teineteisest täiesti sõltumatud. Meetrilise tensori kovariantse tuletise avaldisest

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} \qquad (7.13)$$

saab algebralisel teel avaldada afiinse seostuse kordajad:

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) - \\
& - \frac{1}{2}(\nabla_\nu g_{\mu\sigma} + \nabla_\mu g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma g_{\mu\nu}) + \\
& + \frac{1}{2}(T_{\sigma\mu\nu} + T_{\sigma\nu\mu} + T_{\mu\nu\sigma}),
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

$$
T^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} \equiv T_{\mu\nu\sigma} = -T_{\nu\mu\sigma}. \tag{7.15}
$$

Avaldisi

$$
\{{}^{\rho}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = \{{}^{\rho}_{\nu\mu}\} \tag{7.16}
$$

nimetatakse *Christoffeli sümboliteks*. Avaldist

$$
S_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\nabla_\nu g_{\mu\sigma} + \nabla_\mu g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma g_{\mu\nu}) = S_{\nu\mu\sigma} \tag{7.17}
$$

nimetatakse *segmentaarse kõveruse tensoriks*. Harilikult kooskõlastatakse meetrika ja seostus omavahel nõudega, et meetrika on kovariantselt konstantne, $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$. Sel juhul on segmentaarse kõveruse tensor null ja afiinse seostuse kordajaid saab avaldada järgmisel kujul antisümmeetrilise ja sümmeetrilise osa summana:

$$
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} + \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}, \tag{7.18a}
$$

$$
\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} T^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{7.18b}
$$

$$
\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} + K^{\lambda}_{(\mu\nu)}. \tag{7.18c}
$$

Tensorit

$$
K^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(T_{\sigma\mu\nu} + T_{\sigma\nu\mu} + T_{\mu\nu\sigma}) \tag{7.18d}
$$

nimetatakse *kontorsioontensoriks*. Paneme tähele, et väändetensor $T_{\mu\nu\sigma}$ on antisümmeetriline kahe esimese indeksi suhtes (7.15) ja vastav kontorsioontensor $K_{\mu\nu\sigma}$ on antisümmeetriline kahe viimase indeksi suhtes:

$$
K^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} \equiv K_{\mu\nu\sigma} = -K_{\mu\nu\sigma}. \tag{7.18e}
$$

Lisaks (ko)vektori $V^\mu(V_\mu)$ komponentide kovariantsele tuletisele (7.9) saab defineerida ka (ko)vektori reeperkomponentide kovariantseid tuletisi:

$$\nabla_\sigma V^a = \partial_\sigma V^a + \omega_\sigma{}^a{}_b V^b , \tag{7.19a}$$

$$\nabla_\sigma V_a = \partial_\sigma V_a - V_b \omega_\sigma{}^b{}_a \tag{7.19b}$$

ning spiinorite ψ^α, ψ_α kovariantseid tuletisi:

$$\nabla_\sigma \psi^\alpha = \partial_\sigma \psi^\alpha - \psi^\beta \omega_{\sigma\beta}{}^\alpha , \tag{7.20a}$$

$$\nabla_\sigma \psi_\alpha = \partial_\sigma \psi_\alpha + \omega_{\sigma\alpha}{}^\beta \psi_\beta . \tag{7.20b}$$

Üldjuhul võivad kõik seostused $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \omega_\sigma{}^a{}_b, \omega_{\sigma\beta}{}^\alpha$ olla üksteisest täiesti sõltumatud. Harilikult aga kooskõlastatakse nad tingimustega, et reeper $e^a{}_\mu(e_a{}^\mu)$ kui kahe indeksiga tensor ja Γ-maatriks kui kolme indeksiga tensor oleksid kovariantselt konstantsed:

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu \equiv \partial_\mu e^a{}_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a{}_\rho = 0 , \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\Gamma^a)_\alpha{}^\beta \equiv \partial_\mu (\Gamma^a)_\alpha{}^\beta + \omega_\mu{}^a{}_b (\Gamma^b)_\alpha{}^\beta + \\ + \omega_{\mu\alpha}{}^\sigma (\Gamma^a)_\sigma{}^\beta - (\Gamma^a)_\alpha{}^\sigma \omega_{\mu\sigma}{}^\beta = 0 . \end{aligned} \tag{7.22}$$

Arvestades asjaolu, et tasases ruumis on Diraci maatriksite komponendid konstantsed, $(\Gamma^a)_\alpha{}^\beta = const$, järeldub viimasest tingimusest seos

$$\omega_{\mu\alpha}{}^\beta = \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} (\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta , \tag{7.23}$$

kus Γ_{ab} on antud valemiga (1.12). Lihtsaim viis tulemuse (7.23) kontrollimiseks on asendada ta valemisse (7.22) ja kasutada samasust

$$\Gamma_a \Gamma_b \Gamma_d = \eta_{ab} \Gamma_d + \eta_{bd} \Gamma_a - \eta_{ad} \Gamma_b - i \epsilon_{abde} \Gamma^5 \Gamma^e , \tag{7.24}$$

kus ϵ_{abcd} on täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol, $\epsilon_{1234} = 1$.

Kovariantsete tuletiste kommutaator defineerib aegruumi *kõverustensori.* Kuna vektorvälja kovariantseid tuletisi on meil defineeritud kahte tüüpi, (7.9) ja (7.19), siis põhimõtteliselt on võimalik kahte tüüpi kõverustensori sissetoomine:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^b = R^b{}_{d\mu\nu}(\omega)V^d - T^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho V^b ,$$

$$R^b{}_{d\mu\nu}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu{}^b{}_d - \partial_\nu \omega_\mu{}^b{}_d + \omega_\mu{}^b{}_e \omega_\nu{}^e{}_d - \omega_\nu{}^b{}_e \omega_\mu{}^e{}_d \quad (7.25)$$

ja

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}(\Gamma)V^\rho - T^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho V^\sigma ,$$

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}(\Gamma) = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} . \quad (7.26)$$

Saab näidata, et juhul kui seostused $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ja $\omega_\mu{}^a{}_b$ on kooskõlastatud tingimusega (7.21), langevad mõlemad kõverustensorid faktiliselt ühte:

$$R^b{}_{d\mu\nu}(\omega) = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}(\Gamma)e^b{}_\sigma e_d{}^\rho . \quad (7.27)$$

Kõverustensorist saab moodustada *Ricci tensori*

$$R_{d\mu} = R^b{}_{d\mu\nu}e_b{}^\nu = R^\sigma{}_{\rho\mu\sigma}e_d{}^\rho \quad (7.28)$$

ja *skalaarse kõveruse*

$$R = R_{d\mu}e^{d\mu} = R^\sigma{}_{\rho\mu\sigma}g^{\rho\mu}. \quad (7.29)$$

2. $N = 1$ supergravitatsiooniteooria väljade supermultiplett ja mõjufunktsionaal. Üldrelatiivsusteooria põhjal kirjeldab klassikalist gravitatsioonivälja teist järku sümmeetriline tensorväli $g_{\mu\nu}(x)$. Lineariseeritud kvantteoorias on vastava kvantvälja kvandiks spinniga 2 massita osake, mida nimetatakse *gravitoniks.* Lihtsaim supermultiplett sisaldab tema superpartnerina spinniga $\frac{3}{2}$ massita Majorana osakest $\psi_{\alpha\mu}(x)$, mida nimetatakse *gravitiinoks.* Laiendatud supergravitatsiooniteooriad põhinevad Poincaré laiendatud superalgebral, mis sisaldab N supersümmeetria generaatorit Q^i_α, $i = 1, \ldots, N$. Neid teooriaid me lähemalt ei käsitle. Nimetame vaid, et laiendatud supermultipletid võivad lisaks gravitonile sisaldada ka teisi täisarvulise spinniga osakesi ja nende poolearvulise spinniga superpartnereid. Laiendatud supergravitatsiooniteooriate nimetustes tuuakse harilikult ära gravitiinode (spinniga $\frac{3}{2}$ osakeste) arv N. Näiteks $N = 2$ laiendatud supergravitatsiooniteooria multiplett sisaldab gravitoni $g_{\mu\nu}(x)$, spinniga 1 gravifootoni $A_\mu(x)$ ja kaks gravitiinot $\psi^i_{\alpha\mu}(x)$, $i = 1, 2$.

$N = 1$ lihtsa supergarvitatsiooniteooria mõjufunktsionaal postuleeritakse olevat *Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali* ja tasase aegruumi kvantväljateooriast tuttava *Rarita-Schwingeri mõjufunktsionaali* summa (ühikud on valitud nii, et valguse kiirus $c = 1$ ja Newtoni gravitatsioonikonstant $G = 1$):

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu\Gamma_5\Gamma_\nu D_\rho\psi_\sigma\right)d^4x\,. \tag{7.30}$$

Väljafunktsioonideks on siin aegruumi meetrika $g_{\mu\nu}(x)$ ja antikommuteeruvate komponentidega Rarita-Schwingeri vektorspiinorväli $\psi_{\alpha\mu}(x)$, $\psi_{\alpha\mu}\psi_{\beta\nu} + \psi_{\beta\nu}\psi_{\alpha\mu} = 0$. Spiinor $\overline{\psi}_\mu$ on spiinori ψ_μ kaasspiinor Majorana mõttes

$$\overline{\psi}_\mu = \psi_\mu^T C\,. \tag{7.31}$$

Kovariantne tuletis D_ρ on defineeritud mõjuvana kovariantselt ainult spiinorindeksile α ja mitte vektorindeksile μ:

$$D_\rho\psi_{\alpha\mu} = \partial_\rho\psi_{\alpha\mu} + \frac{1}{4}\omega_\rho{}^{ab}(\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\mu}\,. \tag{7.32}$$

Levi-Civita sümboli kontravariantsed komponendid $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$, $\epsilon^{0123} = 1$ moodustavad täielikult antisümmeetrilisele tensorile $\eta^{\mu\nu\sigma\rho}$ vastava tensortiheduse

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -\sqrt{-g}\,\eta^{\mu\nu\sigma\rho}\,, \quad g = \det|\,g_{\mu\nu}\,|\,. \tag{7.33}$$

Seega on mõjufunktsionaalis (7.30) mõlemad liidetavad üldiste koordinaatteisenduste (7.2) suhtes skalaarsed tihedused ja võivad olla integrandideks. Γ-maatriksite reeperkomponendid Γ^a on konstantsed ja nende komponendid koordinaatides (x^μ) on

$$\Gamma^\mu(x) = e_a{}^\mu(x)\Gamma^a\,. \tag{7.34}$$

Mõjufunktsionaal (7.30) on invariantne järgmiste supersümmeetria teisenduste suhtes:

$$\delta e^a{}_\mu = \frac{i}{2}\overline{\epsilon}\,\Gamma^a\psi_\mu\,, \tag{7.35a}$$

$$\delta e_a{}^\mu = -\frac{i}{2}\overline{\epsilon}\,\Gamma^\mu\psi_a\,, \tag{7.35b}$$

$$\delta\psi_\mu = D_\mu\epsilon = \partial_\mu\epsilon + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\Gamma_{ab}\epsilon\,. \tag{7.35c}$$

Teisendused (7.35a), (7.35b) määravad ka meetrika $g_{\mu\nu}$ (7.5) teisenemiseeskirja.

3. Väljavõrrandid. Variatsioonprintsiibi kohaselt peaksime $N = 1$ supergravitatsiooni väljavõrrandid saama mõjufunktsionaali (7.30) varieerimisel supermultipleti väljade $(g_{\mu\nu}(x), \psi_{\alpha\mu}(x))$ järgi. Arvutuslikult lihtsam on aga esialgu vaadelda sõltumatute muutujatena reeperit $e_a{}^{\mu}$ ja seostust $\omega_{\mu}{}^{ab}$ ning varieerida mõjufunktsionaali (7.30) väljade $(e_a{}^{\mu}, \omega_{\mu}{}^{ab}, \psi_{\alpha\mu})$ järgi. Üldrelatiivsusteoorias nimetatakse analoogilist käsitlust *Palatini meetodiks*. On teada, et Einsteini–Hilberti lagranžiaani varieerimisel seostuse $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ järgi saame väljavõrrandiks meetrika ja seostuse kooskõlalisuse tingimuse

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0\,, \tag{7.36}$$

millest võime avaldada seostuse kordajad $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (7.14). Väändeta ruumis ja kooskõlalisuse tingimuse (7.36) kehtivuse korral langevad nad ühte Christoffeli sümbolitega (7.16), $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$. Sellist seostust nimetatakse *Levi-Civita seostuseks.*

Vaatleme mõjufunktsionaali (7.30) funktsionaalina reeperist $e_a{}^{\mu}(x)$, seostusest $\omega_{\mu}{}^{ab}(x)$ ja vektor-spiinorväljast $\psi_{\alpha\mu}(x)$:

$$S = \int L_2(e,\omega)d^4x + \int L_{\frac{3}{2}}(e,\omega,\psi)d^4x\,. \tag{7.37}$$

Kui kasutada valemit

$$\eta^{\mu\nu\kappa\lambda}\eta^{\sigma\rho}{}_{\kappa\lambda} = -2(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) \tag{7.38}$$

ja täielikult antisümmeetrilise tensori $\eta^{\mu\nu\rho\sigma}$ avaldist (7.33) Levi-Civita sümboli kaudu, võime Einsteini–Hilberti lagranžiaani teisendada

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}R_{\rho\sigma\mu\nu}(\Gamma) = \\ &= -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\eta_{abcd}e^{c}{}_{\kappa}e^{d}{}_{\lambda}R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)\,, \end{aligned} \tag{7.39}$$

kus $R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)$ on antud seostuse $\omega_{\mu}{}^{ab}$ kaudu valemiga (7.25). Rarita–Schwingeri lagranžiaan sisaldab samuti nii reeperit $e_a{}^{\mu}$ kui seostust $\omega_{\mu}{}^{ab}$:

$$L_{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\mu}\Gamma_5 e_{a\nu}\Gamma^{a}(\partial_{\rho}\psi_{\sigma} + \frac{1}{4}\omega_{\rho}{}^{cd}\Gamma_{cd}\psi_{\sigma})\,. \tag{7.40}$$

Kogulagranžiaani varieerimine reeperi $e^b{}_\rho$ järgi annab meile nüüd Einsteini võrrandid, kus mateeriatensor on määratud Rarita-Schwingeri väljaga $\psi_{\alpha\mu}$:

$$R^\rho{}_b - \frac{1}{2} e_b{}^\rho R = \frac{1}{2e} \epsilon^{\rho\mu\tau\sigma} \overline{\psi}_\mu \Gamma^5 \Gamma_b D_\tau \psi_\sigma . \tag{7.41}$$

Variatsioon seostuse $\omega_\mu{}^{ab}$ järgi annab tingimuse

$$D_\nu e^a{}_\mu - D_\mu e^a{}_\nu = -\frac{i}{2} \overline{\psi}_\mu \Gamma^a \psi_\nu , \tag{7.42}$$

kus D_ν mõjub ainult reeperindeksitele:

$$D_\nu e^a_\mu = \partial_\nu e^a_\mu + \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu . \tag{7.43}$$

Kui asendame siia reeperi kovariantselt konstantsuse nõude (7.21), siis näeme, et aegruumi vääne on algebraliselt määratud Rarita-Schwingeri välja poolt:

$$T^a_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \overline{\psi}_\mu \Gamma^a \psi_\nu . \tag{7.44}$$

Tingimust (7.42) on võimalik lõpuni lahendada seostuse $\omega_\mu{}^{ab}(e)$ suhtes. See küllalt pikk arvutus annab lõppkokkuvõttes tulemuse, mis on ekvivalentne avaldisega (7.16) Christoffeli sümbolite jaoks, kus meetrika $g_{\mu\nu}$ on antud reeperi $e_a{}^\mu$ kaudu valemiga (7.5). Teades Christoffeli sümboleid $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ ja väändetensorit $T^\sigma_{\mu\nu}$, saame valemite (7.18) järgi avaldada kõik seostuse kordajad $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ reeperi (gravitoni) $e_a{}^\mu$ ja Rarita-Schwingeri välja (gravitiino) $\psi_{\alpha\mu}$ kaudu.

Kui varieerida lagranžiaani $L_{\frac{3}{2}}$ (7.40) vektor-spiinorvälja $\overline{\psi}_\mu$ järgi, saame Rarita-Schwingeri võrrandi kõvera ja väändega ruumi foonil

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \Gamma_\nu D_\sigma \psi_\rho = 0 . \tag{7.45}$$

Võrrandisüsteem (7.41), (7.45) langeb formaalselt kokku hariliku Rarita-Schwingeri välja ja gravitatsioonivälja vastastikmõju kirjeldava teooriaga, kuid erinevalt viimasest on supergravitatsiooniteoorias Rarita-Schwingeri välja komponendid $\psi_{\alpha\mu}$ antikommuteeruvad, mistõttu kõik välja ψ_μ komponente sisaldavad avaldised on nilpotentsed.

Ülesanded

7.1. Tuletada valem (7.14) afiinse seostuse kordajate $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ jaoks.

8

Superosake ja superstring

Vaba relativistlik osake. Brinki-Schwarzi superosake. Greeni-Schwarzi superstring. Heterootiline superstring.

1. Vaba relativistlik osake. Vaatleme vaba relativistlikku osakest massiga m d-mõõtmelises Minkowski ruumis ristkoordinaatidega (x^a), $a = 0, \ldots, d-1$. Tema liikumistrajektoor $x^a(t)$ on minimaalse pikkusega joon (sirge), mille võrrandid on leitavad mõjufunktsionaalist

$$S_1 = -m \int ds = -m \int \sqrt{\dot{x}^a \dot{x}^b \eta_{ab}} dt \,. \tag{8.1}$$

See mõjufunktsionaal on mittepolünomiaalne väljade $x^a(t)$ suhtes. Seepärast kasutatakse sageli teist, polünomiaalset mõjufunktsionaali

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int (V^{-1} \dot{x}^a \dot{x}^b \eta_{ab} + m^2 V) dt \,. \tag{8.2}$$

Uus muutuja V on siin Lagrange'i kordaja osas, mille järgi varieerimine annab tingimuse

$$V^2 = \frac{\dot{x}^a \dot{x}^b \eta_{ab}}{m^2} \equiv \frac{ds^2}{m^2 dt^2} \,. \tag{8.3}$$

Kui asendada V avaldis mõjufunktsionaali (8.2), saame tõesti tagasi esialgse mõjufunktsionaali (8.1). Mõjufunktsionaali (8.2) eeliseks on veel asjaolu, et ta lubab kirjeldada massita ($m = 0$) osakest triviaalse piirüleminekuga $m \to 0$. Edaspidi vaatlemegi vaid massita osakest mõjufunktsionaaliga

$$S = -\frac{1}{2} \int V^{-1} \dot{x}^a \dot{x}^b \eta_{ab} dt \,. \tag{8.4}$$

Mõjufunktsionaal (8.1) on ilmselt invariantne maailmajoone suvalise reparametriseerimise $t' = t'(t)$ suhtes. Et samasugune invariantsus kehtiks ka mõjufunktsionaalis (8.4), tuleb sobivalt defineerida Lagrange'i kordaja V teisenemiseeskiri. Otsene arvutus kinnitab, et teisendusel

$$\delta t = \rho(t) \,, \tag{8.5a}$$

$$\delta(V^{-1}) = \frac{d}{dt}(\rho V^{-1}) \tag{8.5b}$$

teiseneb lagranžiaan täistuletise võrra:

$$\delta L = \frac{d}{dt}[\rho V^{-1} \dot{x}^a \dot{x}^b \eta_{ab}]. \tag{8.6}$$

Mõjufunktsionaal (8.4) on invariantne ka Poincaré teisenduste (1.7) suhtes, juhul kui Lagrange'i kordaja V ei teisene, $\delta_P V = 0$.

Läheme üle Hamiltoni kanoonilisele formalismile. Leiame üldistatud impulsid (3.10)

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = -V^{-1} \dot{x}^b \eta_{ba}, \tag{8.7}$$

hamiltoniaani (3.12)

$$H = \dot{x}^a p_a - L = -\frac{1}{2} V p^a p_a \tag{8.8}$$

ja kanoonilise integraali (3.13)

$$I = \int (\dot{x}^a p_a + \frac{1}{2} V p^a p_a) dt. \tag{8.9}$$

Näeme, et tegelikult on saadud kanooniline integraal kujul (3.16), kus Lagrange'i formalismist arvutatud hamiltoniaan (8.8) koosneb ainult seostest. Niisugune tulemus on omane kõikidele reparametriseerimisinvariantsetele teooriatele.

2. Brinki-Schwarzi superosake. Selleks et kirjeldada pöörlevat osakest (§4), oli otstarbekohane supersümmetriseerida trajektoori ühemõõtmelist ruumi (t) - asendada ta superruumiga (t, τ) ja vaadelda osakese koordinaate selles ruumis antud superväljadena (4.7). Brinki-Schwarzi superosakese defineerimisel on alusideeks koordinaatide ruumi (x^a) supersümmetriseerimine, jättes trajektoori ühemõõtmelise ruumi (t) endiseks. Teiste sõnadega, vaatleme osakese liikumist superruumis koordinaatidega $(z^M) = (x^a, \theta^\alpha)$. Kuna teooria kvantiseerimisel, mida me siinkohal lähemalt ei käsitle, osutub, et Brinki-Schwarzi superosakese mittevastuolulist kvantteooriat saab üles ehitada vaid kümnemõõtmelises superruumis, siis vaadeldakse ka klassikalist teooriat harilikult juhul, kui kümnele kommuteeruvale koordinaadile x^a, $a = 0, \ldots, 9$ on lisatud

16 reaalset antikommuteeruvat Majorana-Weyli tüüpi spiinorkoordinaati θ^α, $\alpha = 1, \ldots, 16$. Vastavad γ-maatriksid on reaalsed, spiinorindeksites sümmeetrilised ja rahuldavad Cliffordi algebrat (2.46).

Otsime mõjufunktsionaali (8.4) sellist supersümmeetrilist üldistust, mis maailmajoone reparametriseerimisel teiseneks täistuletise võrra ja oleks invariantne Poincaré superrühma teisenduste suhtes[1]. Soovitud omadustega avaldis, *Brinki-Schwarzi superosakese mõjufunktsionaal*, on kujul

$$S = -\frac{1}{2}\int V^{-1}\omega^a\omega^b\eta_{ab}dt, \tag{8.10}$$

kus ω tähistab avaldist

$$\omega^a = \dot{x}^a - i\theta\gamma^a\dot{\theta}. \tag{8.11}$$

Seda võib interpreteerida kui superosakese maailmajoone $z^M(t)$ puutujavektori $\dot{z}^M(t)$ bosonkomponente Minkowski superruumi lokaalses reeperis $E^A{}_M(z)$

$$\omega^a = \dot{z}^M E^a{}_M. \tag{8.12}$$

Tasase superruumi lokaalseks reeperiks on siin

$$E^A{}_M = \begin{cases} (\delta^a_m, & i(\gamma^a\theta)_\mu), \\ (0, & \delta^\alpha_\mu). \end{cases} \tag{8.13}$$

Otsene arvutus näitab, et lisaks ülalnimetatud kahele sümmeetriarühmale on mõju (8.10) invariantne veel üht liiki teisenduste suhtes, kus parameetriks on antikommuteeruv spiinor $\kappa_\alpha(t)$:

$$\delta\theta = \omega^a\gamma_a\kappa, \tag{8.14a}$$

$$\delta x^a = i\theta\gamma^a\delta\theta, \tag{8.14b}$$

$$\delta V = -4iV\dot{\theta}\kappa, \tag{8.14c}$$

$$\delta\omega^a = 2i\dot{\theta}\gamma^a\delta\theta. \tag{8.14d}$$

---

[1] Supersümmeetria teisendused on siin $\delta\theta = \epsilon$, $\delta x^a = i\epsilon\gamma^a\theta$.

Seda teisendust nimetatakse *lokaalseks κ-teisenduseks*. Esialgu võib tunduda, et teisenduse (8.14a) abil saab kõik spiinorkoordinaadid $\theta^\alpha(t)$ teisendada mistahes etteantud funktsioonideks. Sel juhul ei saaks nad kirjeldada füüsikalisi vabadusastmeid. Osutub aga, et mitte kõik teisendused (8.14a) ei ole sõltumatud. Tõesti, võime üles kirjutada võrduste rea

$$\omega^a \gamma_a \delta\theta = \omega^a \omega^b \gamma_a \gamma_b \kappa = -\omega^a \omega^b \eta_{ab} \kappa \approx 0 . \tag{8.15}$$

Paremal pool olev avaldis on võrdne nulliga mõjufunktsionaali varieerimisel V järgi saadud seose

$$\omega^a \omega^b \eta_{ab} = 0 \tag{8.16}$$

põhjal. Laineline võrdusmärk valemis (8.15) tähendabki võrduse kehtimist seoseid arvestades (öeldakse ka, et võrdus kehtib *seoste pinnal*). Nüüd järeldub valemist (8.15), et teisendus (8.14a) on mittetriviaalne ($\delta\theta \not\approx 0$) ainult siis, kui teisenduse determinant on null:

$$\det | \omega^a \gamma_a{}^\alpha{}_\beta | \approx 0 . \tag{8.17}$$

Saab näidata, et teisendusmaatriksi astak on kaheksa. Järelikult on sõltumatuid teisendusi vaid kaheksa. Nende abil saab kaheksale spiinorkoordinaadile $\theta^\alpha(t)$ omistada etteantud väärtus, ülejäänud kaheksa aga jäävad füüsikalisteks (dünaamilisteks) vabadusastmeteks, mis tuleb määrata liikumisvõrranditest. Teooria teeb keeruliseks asjaolu, et füüsikalisi vabadusastmeid ei ole võimalik leida kujul, mis oleks invariantne Lorentzi teisenduste suhtes. Tuletame meelde, et tänu reparametriseerimisinvariantsuse (8.5) ja seose (8.16) olemasolule on Brinki-Schwarzi superosakese kümne bosonkoordinaadi $x^a(t)$ hulgas sõltumatuid füüsikalisi vabadusastmeid samuti vaid kaheksa. Nendeks võib valida näiteks liikumise suuna suhtes transversaalsed ruumikoordinaadid. Kokkuvõttes näeme, et dünaamilised vabadusastmed on supersümmeetria teisenduste suhtes *kõdumata* — dünaamiliste boson- ja fermionkoordinaatide arv on ühesugune ja nende vahel saab korraldada üksühese vastavuse.

Läheme üle kanoonilisele formalismile. Arvutame üldistatud impulsid (3.10):

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = -V^{-1} \omega^b \eta_{ab} , \tag{8.18a}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial_r L}{\partial_r \dot{\theta}^\alpha} = iV^{-1}\omega^a(\theta\gamma^b)_\alpha \eta_{ab} \,. \tag{8.18b}$$

Paneme tähele, et spiinorkoordinaadile θ^α vastav üldistatud impulss p_α (8.18b) on määratud üldistatud impulsside p_a (8.18a) kaudu ja faktiliselt seega täiendav seos

$$p_\alpha + ip_a(\theta\gamma^a)_\alpha = 0 \,. \tag{8.19}$$

Hamiltoniaani (3.12) arvutamisel saame tulemuse, mis ühtib hariliku osakese hamiltoniaaniga (8.8)

$$H = p_a\dot{x}^a + p_\alpha\dot{\theta}^\alpha - L = -\frac{1}{2}Vp^a p_a \,. \tag{8.20}$$

Kanoonilisse integraali tuleb aga täiendavalt lisada seos (8.19) antikommuteeruva Lagrange'i kordajaga ψ^α:

$$I = \int \Big(p_a\dot{x}^a + p_\alpha\dot{\theta}^\alpha + \frac{1}{2}Vp^a p_a - \psi^\alpha(p_\alpha + ip_a(\theta\gamma^a)_\alpha) \Big) dt \,. \tag{8.21}$$

Saab näidata, et bosonseos (8.20) on seotud reparametriseerimisteisendusega ja fermionseos (8.19) on seotud lokaalse κ-teisendusega.

3. Greeni–Schwarzi superstring. Nagu relativistlikku osakest (8.4), nii võib ka bosonstringi (5.3) supersümmetriseerida kahel viisil. Fermionstringi defineerimiseks (§5) asendasime me bosonstringi kahemõõtmelise maailmalehe (τ,σ) superruumiga (τ,σ,θ^A). Superstringi defineerimiseks supersümmetriseeritakse stringi koordinaatide ruum (x^a), jättes maailmalehe kahemõõtmelise ruumi $(\xi^\alpha) = (\tau,\sigma)$ endiseks. Analoogiliselt Brinki–Schwarzi superosakese teooriaga osutub superstringi kvantteooria mittevastuoluliseks vaid kümnemõõtmelises superruumis $(z^M) = (x^a, \theta^{\tilde{\alpha}})$, $a = 0,\ldots,9$, $\tilde{\alpha} = 1,\ldots,16$, kus $\theta^{\tilde{\alpha}}$ on reaalne Majorana–Weyli spiinor.

Otsime bosonstringi mõju (5.3) ja Brinki–Schwarzi superosakese mõju (8.10) niisugust üldistust, mis võiks kirjeldada superstringi kahemõõtmelist maailmalehte kümnemõõtmelises superruumis ning millest tulenevad võrrandid oleksid invariantsed Poincaré superrühma teisenduste, maailmalehe reparametriseerimise ja lokaalsete κ-teisenduste suhtes. 1984.a. leidsid M.Green ja J.Schwarz soovitud omadustega mõjufunktsionaali. Nad lisasid bosonstringi kommuteeruvatele koordinaatidele x^a kaks reaalset Majorana–Weyli spiinorit $\theta^{\tilde{\alpha}j}$, $\tilde{\alpha} = 1,\ldots,16$, $j = 1,2$ ja postuleerisid mõjufunktsionaali

$$S = S_1 + S_2 \,, \tag{8.22a}$$

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Pi^a_\alpha\Pi^b_\beta\eta_{ab}d\tau d\sigma\,, \tag{8.22b}$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi}\int\epsilon^{\alpha\beta}\Big(-i\partial_\alpha x^a(\theta^1\gamma_a\partial_\beta\theta^1 - \theta^2\gamma_a\partial_\beta\theta^2)+ + (\theta^1\gamma^a\partial_\alpha\theta^1)(\theta^2\gamma_a\partial_\beta\theta^2)\Big)d\tau d\sigma\,, \tag{8.22c}$$

kus

$$\Pi^a_\alpha = \partial_\alpha x^a - i\sum_{j=1}^{2}\theta^j\gamma^a\partial_\alpha\theta^j \tag{8.23}$$

ja $\epsilon^{\alpha\beta}$ on täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol. Mõju (8.22) on invariantne (või teiseneb täisdivergentsi võrra) järgmistel teisendustel:

1) Poincaré superrühma teisendused (1.18), kus supersümmeetria teisendus on kujul

$$\delta\theta^A = \epsilon^A\,, \qquad \delta x^a = i\sum_{j=1}^{2}\epsilon^j\gamma^a\theta^j\,; \tag{8.24}$$

2) maailmalehe reparametriseerimine

$$\tau' = \tau'(\tau,\sigma)\,, \qquad \sigma' = \sigma'(\tau,\sigma) \tag{8.25}$$

ja meetrika konformne (Weyli) teisendus

$$(g^{\alpha\beta})' = e^{\phi(\tau,\sigma)}g^{\alpha\beta}\,, \qquad (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})' = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\,; \tag{8.26}$$

3) lokaalne κ-teisendus

$$\delta\theta^j = 2i\gamma_a\Pi^a_\beta\kappa^{j\beta}\,, \qquad \delta x^a = \sum_{j=1}^{2}i\theta^j\gamma^a\delta\theta^j\,, \tag{8.27}$$

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}) = -16\sqrt{-g}(\kappa^{1\alpha}P_-^{\beta\gamma}\partial_\gamma\theta^1 + \kappa^{2\alpha}P_+^{\beta\gamma}\partial_\gamma\theta^2)\,,$$

kus $P_\pm^{\beta\gamma}$ on projektsioonioperaatorid maailmalehel:

$$P_\pm^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} \pm \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}})\,. \tag{8.28}$$

Teisenduse parameetrid $\kappa^{j\beta\tilde\alpha}$, $j = 1,2$, on antikommuteeruvad $d = 2$ vektorid κ^β, $\beta = 1,2$ ja $d = 10$ Majorana-Weyli spiinorid

$\kappa^{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} = 1, \ldots, 16$, mis rahuldavad kaht kitsendavat tingimust: vektor $\kappa^{1\alpha}$ on *anti-omaduaalne*

$$\kappa^{1\alpha} = P_{-}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{1} \tag{8.29}$$

ja vektor $\kappa^{2\alpha}$ on *omaduaalne*

$$\kappa^{2\alpha} = P_{+}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{2}. \tag{8.30}$$

Superstringe võib jaotada kolmeks tüübiks:

1) lahtine (otspunktidega) superstring ehk *I tüüpi superstring*;

2) kinnine (otspunktideta) superstring, kus kaks Majorana-Weyli spiinorit θ^j on vastupidise kiraalsusega, nii et neist saab moodustada ühe 32 reaalse komponendiga Majorana spiinori, ehk *IIA tüüpi superstring*;

3) kinnine (otspunktideta) superstring, kus kaks Majorana-Weyli spiinorit θ^j on ühesuguse kiraalsusega, ehk *IIB tüüpi superstring.*

4. Heterootiline superstring. Füüsikaliste järelduste poolest on kõige paljutõotavam *heterootiline superstring*, mis saadakse Greeni–Schwarzi kinnisest superstringist spiinorkoordinaadi θ^1 asendamisel kalibratsioonrühma $SO(32)$ või $E(8) \times E(8)$ esituse järgi teisenevate funktsioonidega Φ^S. Heterootilise superstringi mõjufunktsionaali võib anda niisugusel kujul:

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{2\pi} \int \Big(& \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha}^{a} \Pi_{\beta}^{b} \eta_{ab} - \\ & - 2i\epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} x^{a} (\theta \gamma_{a} \partial_{\beta} \theta) + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \overline{\Phi}^{S} \Gamma_{\alpha} \partial_{\beta} \Phi^{S} \Big) d\tau d\sigma , \end{aligned} \tag{8.31}$$

kus

$$\Pi_{\alpha}^{a} = \partial_{\alpha} x^{a} - i\theta \gamma^{a} \partial_{\alpha} \theta \tag{8.32}$$

ning γ_a on kümnemõõtmelise ruumi ja Γ_α kahemõõtmelise ruumi Γ-maatriksid.

See mõjufunktsionaal on invariantne viie teisenduste rühma suhtes:

1) globaalsed (konstantsete parameetritega) Poincaré superrühma teisendused;

2) maailmalehe reparametriseerimine (8.25);

3) maailmalehe meetrika $g^{\alpha\beta}$ konformne (Weyli) teisendus (8.26);

4) lokaalne κ-teisendus

$$\delta\theta = 2i\gamma_a \Pi^a_\beta \kappa^\beta , \quad \delta x^a = i\theta\gamma^a\delta\theta , \tag{8.33}$$

mille parameeter κ on antikommuteeruvate komponentidega $d = 10$ Majorana-Weyli spiinor ja $d = 2$ omaduaalne vektor

$$\kappa^\alpha = P_+^{\alpha\beta}\kappa_\beta ; \tag{8.34}$$

5) kalibratsioonrühma $SO(32)$ või $E(8) \times E(8)$ teisendused funktsiooni Φ^S jaoks:

$$\delta\Phi^S = (T\Phi)^S . \tag{8.35}$$

Selleks et heterootilise stringi mõjufunktsionaali (8.31) ja temast järelduvaid väljavõrrandeid siduda reaalses neljamõõtmelises aegruumis olevate füüsikaliste kvantväljadega, on tarvis üles ehitada kolm vaheteooriat.

1. Läheme siin esitatud klassikaliselt teoorialt üle vastavale kvantteooriale. Osutub, et see kirjeldab lõplikku arvu massita kvantvälju (ϕ_0) ja lõpmata arvu massiga kvantvälju (ϕ_M).

2. Kirjutame üles *genereeriva funktsionaali*

$$Z \sim \int e^{iS[\phi]} D\phi \tag{8.36}$$

ja integreerime üle massiga kvantväljade. Saame genereeriva funktsionaali Z, mis sisaldab ainult massita välju. Sellele vastavat mõjufunktsionaali nimetatakse *madala energia efektiivseks mõjuks.*

3. Madala energia efektiivses mõjus esinevate väljade võrranditele otsime selliseid lahendeid, mis põhiseisundis (vaakumolekus) kirjeldaksid ruumi topoloogiaga $M^4 \times K^6$, kus M^4 on neljamõõtmeline Minkowski ruum (aegruum) ja K^6 on kuuemõõtmeline topoloogiliselt kinnine ruum Plancki pikkuse ($l_P = 10^{-33}$cm) suurusjärgus. Seda nimetatakse *lahendi spontaanseks kompaktifitseerimiseks.*

Ühtegi neist kolmest teooriast ei ole meil ruumipuudusel võimalik lähemalt käsitleda. Nimetame vaid, et heterootilisest superstringist järelduv madala energia efektiivne mõju (*Chapline'i-Mantoni mõjufunktsionaal*) sisaldab *Einsteini-Yangi-Millsi supermultipletti*, mis koosneb seitsmest komponentväljast kümnemõõtmelises kõveras aegruumis (x^m), $m = 0, \ldots, 9$:

1) $N = 1$, $d = 10$ supergravitatsiooni multiplett -
- meetrika $g_{mn}(x)$ või lokaalne reeper $e^a{}_m(x)$, $g_{mn}(x) = e^a{}_m(x)e^b{}_n(x)\eta_{ab}$ (graviton);
- Majorana-Weyli vektor-spiinor $\psi^\alpha_m(x)$ (gravitiino);
- antisümmeetriline potentsiaal $B_{mn}(x) = -B_{nm}(x)$;
- Majorana-Weyli spiinor $\lambda_\alpha(x)$;
- skalaarväli $\varphi(x)$ (dilaton).

(8.37)

2) $d = 10$ Yangi-Millsi supermultiplett -
- Yangi-Millsi välja potentsiaal $A^{\hat{a}}_m(x)$, kus $\hat{a} = 1, \ldots, \dim G$ on kalibratsioonrühma G algebra indeks;
- Majorana-Weyli spiinor $\chi_\alpha(x)$.

Einsteini-Yangi-Millsi supermultipleti bosonväljad lubavad põhimõtteliselt kirjeldada kõiki tuntud vastastikmõjusid — gravitatsiooniline vastastikmõju sisaldub $N = 1$, $d = 10$ supergravitatsiooni multipletis ning elektronõrk vastastikmõju (*Salami-Weinbergi teooria*) ja tugev vastastikmõju (*kromodünaamika*) sisalduvad Yangi-Millsi supermultipletis. Heterootilise superstringi kvantteooria on vaba mitmest puudusest, mis on omased harilikule kvantväljateooriale. Saab näidata, et ta on *anomaaliavaba* — kõik klassikalise teooria sümmeetriarühmad ja nendele vastavad jäävad voolud säilivad üleminekul kvantteooriale. On esitatud kaudseid tõendeid kinnitamaks, et teooria on *lõplik* — tema häiritusarvutuse reas ei ole hajuvaid integraale. Kuna ta kirjeldab ka gravitatsioonilist vastastikmõju, on teda nimetatud esimeseks mittevastuoluliseks kvantgravitatsiooniteooriaks. Veel enam, teda on peetud isegi *kõiksuse teooriaks*, mis kirjeldab ühekorraga kõiki füüsikalise reaalsuse algstruktuure. Tuleb aga märkida, et stringiteooria lähtub mitte niivõrd füüsikalistest printsiipidest kuivõrd matemaatilise formalismi võimalikkusest ja võimalustest. Seepärast tekitab tema valemitele füüsikalise tähenduse andmine raskusi. Probleemideta ei ole ka stringiteooria matemaatiline külg. „Stringid on XXI sajandi füüsika, mis on meile sülle kukkunud natuke liiga vara", hindab olukorda üks selle teooria loojatest Lars Brink.

Ülesanded

8.1. Kontrollida Brinki-Schwarzi superosakese mõjufunktsionaali (8.10) invariantsust
i) Poincaré superrühma teisenduste suhtes,
ii) maailmajoone reparametriseerimise (8.5) suhtes,
iii) lokaalsete κ-teisenduste (8.14) suhtes.

9

$N = 1$ supergravitatsiooniteooria üheteistkümnemõõtmelises aegruumis

Supermultiplett ja lagranžiaan.
Spontaanne kompaktifitseerimine.

1. Supermultiplett ja lagranžiaan. $N = 1$, $d = 4$ supergravitatsiooniteooria (§7) võimaldab gravitatsioonivälja kirjeldada ühes supermultipletis Rarita–Schwingeri vektor–spiinorväljaga. Laiendatud $N = 2$ supergravitatsiooniteooria kirjeldab lisaks gravitatsiooniväljale ja kahele gravitiinole veel spinniga 1 välja, mille võrranditeks on Maxwelli võrrandid. Kas võiks niiviisi jätkates jõuda supermultipletini, mis sisaldaks kõik reaalses maailmas eksperimentaalselt jälgitavad fundamentaalväljad? Kahjuks on vastus sellele küsimusele eitav. Maksimaalne laiendatud supergravitatsioonimultiplett, mis ei sisalda välju kõrgema spinniga kui 2, on $N = 8$. Selle koosseisus on 1 graviton, 8 gravitiinot, 28 välja spinniga 1, 56 välja spinniga $\frac{1}{2}$ ja 70 skalaarset välja spinniga 0. Selline väljade koosseis ei vasta reaalsetele kvark- ja leptonväljadele ning nendevahelisi vastastikmõjusid kandvatele vahebosonitele.

Siiski on $N = 8$, $d = 4$ supergravitatsiooniteoorial mõningaid huvitavaid omadusi. Paneme tähele, et neljamõõtmelises ruumis on kaheksal Majorana gravitiinol kokku 32 reaalset komponenti, täpselt niisama palju nagu ühel Majorana gravitiinol üheteistkümnemõõtmelises aegruumis. Saab näidata, et ka dünaamilisi fermionvabadusastmeid on $N = 8$, $d = 4$ ja $N = 1$, $d = 11$ supergravitatsiooniteooriates ühepalju. See viitab asjaolule, et $N = 8$, $d = 4$ ja $N = 1$, $d = 11$ supergravitatsiooniteooriad on mõneti samaväärsed. Oma matemaatiliselt struktuurilt on aga teisena nimetatud teooria oluliselt lihtsam.

$N = 1$, $d = 11$ supergravitatsiooni multiplett koosneb kolmest väljast üheteistkümnemõõtmelises kõveras aegruumis (x^M), $M = 0, \ldots, 10$:

aegruumi meetrika $g_{MN}(x)$ või lokaalne reeper $e^A{}_M(x)$, $g_{MN}(x) = e^A{}_M(x) e^B{}_N(x) \eta_{AB}$ (graviton);

Majorana vektor-spiinor $\psi_M^\alpha(x)$ (gravitiino);
antisümmeetriline potentsiaal $A_{MNP}(x) = A_{[MNP]}(x)$.
Mõjufunktsionaali[1] nende väljade jaoks võib anda sellisel kujul:

$$
\begin{aligned}
L = &-\frac{1}{2}eR - \frac{1}{48}eF_{MNPR}F^{MNPR} + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{3456}\epsilon^{M_1 \dots M_{11}} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}} - \\
&- e\Big(\frac{1}{2}\overline{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \psi_P + \frac{\sqrt{2}}{192}(\overline{\psi}_M \Gamma^{MNPQRS}\psi_N + \\
&+ 12\overline{\psi}^P \Gamma^{QR}\psi^S)F_{PQRS}\Big) + o(\overline{\psi}\overline{\psi}\psi\psi) .
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Siin $\overline{\psi}$ tähistab spiinori ψ kaasspiinorit Majorana mõttes, $\overline{\psi} = \psi^T C$, ja $\epsilon^{M_1 \dots M_{11}}$ on üheteistkümnemõõtmelise ruumi Levi-Civita sümbol. F_{MNPR} on antisümmeetrilisele potentsiaalile A_{NPR} vastav väljatugevus

$$F_{MNPR} = 24\partial_{[M} A_{NPR]} . \tag{9.2}$$

Kovariantne tuletis D_N on defineeritud mõjuvana kovariantselt ainult spiinorindeksitele:

$$D_N \psi_M = \partial_N \psi_M - \frac{1}{4}\omega_N{}^{AB}\Gamma_{AB}\psi_M . \tag{9.3}$$

Kui eeldada väljavõrrandite kehtivust, siis on mõjufunktsionaal (9.1) invariantne järgmiste supersümmeetria teisenduste suhtes antikommuteeruva spiinorparameetriga $\epsilon_\alpha(x)$:

$$\delta e^A{}_M = \frac{1}{2}\overline{\epsilon}\Gamma^A \psi_M , \tag{9.4a}$$

$$\delta A_{MNP} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\overline{\epsilon}\Gamma_{[MN}\psi_{P]} , \tag{9.4b}$$

$$\delta \psi_M = D_M \epsilon - \frac{\sqrt{2}}{288}(\Gamma^{NPQR}{}_M + 8\delta_M^N \Gamma^{PQR})F_{NPQR}\epsilon . \tag{9.4c}$$

Invariantsust, mis kehtib ainult väljavõrrandeid arvestades, nimetatakse *invariantsuseks võrrandite pinnal.*

---

[1] Selles paragrahvis oleme kasutanud vastupidise signatuuriga meetrikat $\eta_{ab} = diag(-1, +1, \dots, +1)$ ja Γ-maatrikseid reaalses Majorana esituses.

Lisaks neile supersümmeetria teisendustele jätavad mõjufunktsionaali (9.1) invariantseks ka antisümmeetrilise potentsiaali A_{MNR} kalibratsioonteisendused antisümmeetrilise parameetriga $\Lambda_{MN}(x) = -\Lambda_{NM}(x)$

$$A_{MNR} \to A_{MNR} + \partial_M \Lambda_{NR} + \partial_N \Lambda_{RM} + \partial_R \Lambda_{MN} \tag{9.5}$$

ja üldised koordinaatteisendused $x^{M'} = x^{M'}(x^N)$.

2. Spontaanne kompaktifitseerimine. Otsime mõjufunktsionaalist (9.1) järelduvatele väljavõrranditele sellist lahendit, mis võiks kvantteoorias olla vaakumolekuks. Muidugi on olemas triviaalne vaakum – üheteistkümnemõõtmeline Minkowski ruum

$$g_{MN}(x) = \eta_{MN}, \quad A_{MNP} = 0, \quad \psi_M = 0, \tag{9.6}$$

kuid see nähtavasti pole füüsikaliselt huvitav, sest tegelikult näeme me ju enda ümber neljamõõtmelist aegruumi.

Igal juhul aga peab vaakumolekus kui maksimaalse sümmeetriaga olekus gravitiinot kirjeldav vektor-spiinorväli puuduma:

$$\psi^\alpha_M(x) = 0. \tag{9.7}$$

Järelejäänud võrrandid bosonväljade jaoks on niisugusel kujul:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = -\frac{1}{6}(F_{MPQR} F_N{}^{PQR} - \frac{1}{8} g_{MN} F_{PQRS} F^{PQRS}), \tag{9.8a}$$

$$D_M F^{MNPQ} = -\frac{\sqrt{2}}{1152} \epsilon^{NPQR_1 \ldots R_8} F_{R_1 \ldots R_4} F_{R_5 \ldots R_8}. \tag{9.8b}$$

Otsime nendele võrranditele lahendit, mis sisaldaks endas neljamõõtmelise aegruumi kirjelduse. Osutub, et soovitud omadustega lahend on olemas, kui lahendi kuju on kitsendatud kahe eeldusega (*Freundi-Rubini eeldused*).

1. Meetrika on blokkdiagonaalsel kujul, kus neljamõõtmelise alamruumi meetrika sõltub ainult neljast koordinaadist ja seitsmemõõtmelise alamruumi meetrika sõltub ainult ülejäänud seitsmest koordinaadist:

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn}(x^k) & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu}(x^\sigma) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} k, m, n = 0, 1, 2, 3, \\ \mu, \nu, \sigma = 4, \ldots, 10. \end{array} \tag{9.9}$$

2. Antisümmeetrilise potentsiaaliga A_{MNR} määratud väljatugevus F^{MNRS} on nullist erinev ainult neljamõõtmelises alamruumis:

$$F^{MNRS} = \begin{cases} \frac{\epsilon^{MNRS}}{\sqrt{|g_4|}} f, & f = const, \text{ kui kõik } M,N,R,S \in 0,1,2,3, \\ 0, & \text{kui vähemalt üks } M,N,R,S \in 4,\ldots,10. \end{cases} \tag{9.10}$$

Siin ϵ^{MNRS} on neljamõõtmelise ruumi täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol ja $g_4(x^k) = \det|\, g_{mn}(x^k)\,|$. Otsene asendus kinnitab, et lahend (9.10) rahuldab võrrandit (9.8b): parem pool on identselt null ja vasak pool on null tänu võrdustele

$$D_M F^{MNPQ} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \left(\sqrt{|g|} \frac{\epsilon^{MNRS}}{\sqrt{|g_4|}} f \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{|g_4(x^k) g_7(x^\sigma)|}} \partial_M \left(\sqrt{|g_7(x^\sigma)|} \epsilon^{MNRS} f \right) = 0.$$

Viimane võrdus kehtib seetõttu, et tuletis ∂_M võetakse eelduse (9.10) põhjal ainult neljamõõtmelise alamruumi koordinaatide x^k järgi, kuid funktsioon, millest tuletis arvutatakse, sõltub eelduse (9.9) põhjal ainult seitsmemõõtmelise alamruumi koordinaatidest x^σ.

Einsteini võrrand (9.8a) jaguneb eeldusel (9.9) kaheks sõltumatuks võrrandiks. Tema paremal poolel asuv energia-impulsstensor on lahendi (9.10) korral võrdeline meetrikaga:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = g_{mn} \Lambda_4, \quad m,n = 0,1,2,3, \tag{9.11}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda_7, \quad \mu,\nu = 4,\ldots,10. \tag{9.12}$$

Esimene võrrand sisaldab ainult neliruumi (x^0, x^1, x^2, x^3) koordinaate ja teine võrrand ainult ülejäänud seitsmemõõtmelise alamruumi koordinaate. Konstandid Λ_4 ja Λ_7 avalduvad konstandi f kaudu:

$$\Lambda_4 = \frac{2}{3} f^2 sign(g_4), \tag{9.13}$$

$$\Lambda_7 = -\frac{5}{6} f^2 sign(g_4). \tag{9.14}$$

Einsteini võrrandites (9.11), (9.12) on Λ_4 ja Λ_7 *kosmoloogiliste konstantide* osas, mille märgid on teineteise suhtes vastupidised ja sõltuvad eelduses (9.9) valitud neliruumi meetrika determinandi märgist $sign(g_4)$. Kui neliruum on eeldatud olema aegruumiks, $\eta_{ab} = diag(-1, +1, +1, +1)$, siis on $\Lambda_4 < 0$ ja $\Lambda_7 > 0$. Sel juhul on Einsteini võrrandite (9.11) lihtsaim lahend topoloogiliselt lahtine *anti-de-Sitteri aegruum* ja võrrandite (9.12) lahend topoloogiliselt kinnine *de Sitteri* ruum. Viimase mõõtmed võib eeldada olevat Plancki pikkuse suurusjärgus, $l_p \sim 10^{-33}$ cm, mistõttu me igapäevaelus tajume end viibivat vaid neljamõõtmelises aegruumis. Freundi-Rubini eeldustel on aegruumi vaakumolek seega kirjeldatav mitte Minkowski meetrikaga, vaid anti-de-Sitteri meetrikaga.

Paneme tähele, et üheteistkümnemõõtmelisest ruumist just neljamõõtmelise aegruumi väljaeraldamine on seotud nelja indeksiga täielikult antisümmeetrilise väljatugevuse F^{MNRS} olemasoluga mõjufunktsionaalis (9.1). Seda määrava väljavõrrandi (9.8b) lahendit võib siis otsida võrdelisena täielikult antisümmeetrilise Levi-Civita sümboliga. Kuid neljaindeksiline Levi-Civita sümbol on olemas parajasti vaid neljamõõtmelises ruumis.

Vaatleme võrdluseks kümnemõõtmelise ruumi supergravitatsiooniteooriat. Vastav supermultiplett (8.37) sisaldab kahe indeksiga antisümmeetrilist potentsiaali, millele vastab kolme indeksiga antisümmeetriline väljatugevus. Eeldusega (9.10) analoogiline eeldus peaks sisaldama kolme indeksiga Levi-Civita sümbolit, mis viiks kümnemõõtmelise aegruumi lahutamisele kolme- ja seitsmemõõtmelisteks ruumideks. Seepärast on stringiteooria spontaanseks kompaktifitseerimiseks tarvis keerulisemaid alusideid.

10

Kvantväljade supersümmeetria

Lõpmatumõõtmelised ruumid ja funktsionaalintegraal. Genereeriv funktsionaal ja Faddejevi-Popovi determinant. BRST teisendused. Topoloogilised väljateooriad.

1. Lõpmatumõõtmelised ruumid ja funktsionaalintegraal. Eelmistes paragrahvides kirjeldatud teooriad põhinevad Poincaré superalgebra esitustel. See võimaldab ühendada klassikalisi boson- ja fermionvälju supermultiplettideks. Nende supermultiplettide jaoks saab üles ehitada ka kvantteooria. Kvantväljateoorias aga ilmneb veel üks väga oluline täiendav väljade supersümmeetria, mis ei ole seotud Poincaré superalgebraga ja millele klassikalises teoorias otsest vastet pole. Kuigi me kvantväljateooriat seni lähemalt ei ole käsitlenud, püüame selgitada ka selle supersümmeetria matemaatilist olemust, sest ta tuleb vältimatult sisse iga kalibratsioonvabadusega välja kvantiseerimisel ka siis, kui esialgne teooria ei ole supersümmeetriline.

Vaatleme klassikaliste väljade $u^i(x^a)$ mõjufunktsionaali (3.1). Seda võib käsitleda kui kujutust S, mis igale funktsioonide komplektile $u^i(x^a)$ seab vastavusse arvu. Ruumi, mille punktideks on funktsioonid $u^i(x^a)$, nimetatakse *funktsiooniruumiks*. Teda võib vaadelda hariliku n-mõõtmelise ruumi (q^m), $m = 1, \dots, n$ üldistusena piirjuhule $n \to \infty$, mil ruumikoordinaadi q indeks m läheb üle d-kordseks pidevaks indeksiks x^a, $a = 0, \dots, d-1$, mis on funktsioonide u^i argumendi rollis.

Analoogiliselt saab superruumi (z^A) üldistada lõpmatumõõtmeliseks funktsioonide superruumiks $(f^i(x^a), \eta^m(x^a))$. Siin $f^i(x^a)$ on harilikud kommuteeruvad funktsioonid ja $\eta^m(x^a)$ on antikommuteeruvad funktsioonid:

$$\{\eta^m(x^a), \eta^n(y^b)\} = 0\,. \tag{10.1}$$

Funktsioonide $f^i(x^a), \eta^n(x^a)$ argumentide (funktsioonide superruumi pidevate indeksite) ruum on siin harilik d-mõõtmeline vektorruum.

Lõpmatumõõtmelistele ruumidele on võimalik üldistada harilikus lõplikumõõtmelises ruumis defineeritud matemaatilise analüüsi põhioperatsioone - tuletise võtmist ja integreerimist. *Funktsionaaltuletise* arvutamise aluseks võetakse reegel

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(x - y), \tag{10.2}$$

kus $\delta(x - y)$ on Diraci δ-funktsioon

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y - x)dy = f(x). \tag{10.3}$$

Arvestades, et mõjufunktsionaal integreerimispiirkonna äärtel on fikseeritud ja ositi integreerimisel võib ääreliikme ära jätta, saame Euleri-Lagrange'i võrrandid (3.7) anda kui mõjufunktsionaali $S[\varphi]$ funktsionaaltuletise nulliga võrdumise tingimuse:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta S[\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)} &= \int \frac{\delta L[\varphi(y), \partial_a\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)} dy = \\ &= \frac{\partial L}{\partial\varphi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_a\varphi(x))}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Funktsionaalintegraal tuuakse sisse Diraci δ-funktsionaali kaudu. Defineerime:

$$\int F[f]\delta[f - \xi]Df = F[\xi]. \tag{10.5}$$

Mõõdu Df all tuleb siin mõista diferentsiaalide df lõpmatut korrutist üle kõigi ruumipunktide x

$$Df = \prod_x df(x) \tag{10.6}$$

ja δ-funktsionaal tähendab δ-funktsioonide lõpmatut korrutist

$$\delta[f(x) - \xi(x)] = \prod_x \delta(f(x) - \xi(x)). \tag{10.7}$$

Funktsionaalintegraali (10.5) võib vaadelda n-kordse integraali üldistusena piiril $n \to \infty$. Kahjuks aga ei ole see piirprotsess matemaatiliselt korrektselt defineeritav, mistõttu üldisi reegleid suvaliste funktsionaalide integreerimiseks pole võimalik tuletada. Siiski osatakse lisaks integraalile (10.5) välja arvutada kvantväljateoorias esinevaid *Gaussi tüüpi integraale*

$$\int \exp(-F[\varphi])D\varphi, \qquad F[\varphi] = \int \varphi^2(x)f(x)dx. \tag{10.8}$$

Arvutamise aluseks võtame hariliku Gaussi integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{10.9}$$

Kirjutame üles järgmise võrduste rea:

$$\begin{aligned} &\int \exp\Big(-\int f(x)\varphi^2(x)dx\Big)D\varphi = \\ &= \int \prod_x \exp\big(-f(x)\varphi^2(x)\big)\prod_x d\varphi(x) = \\ &= \prod_x \int \exp\big(-f(x)\varphi^2(x)\big)d\varphi(x) = \prod_x \sqrt{\frac{\pi}{f(x)}}. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Kui siin vaadelda funktsiooni $f(x)$ kui lõpmatumõõtmelise diagonaalmaatriksi $g(x,y)$ diagonaalelemente

$$g(x,y) = f(x)\delta(x-y),$$

siis võime valemi (10.10) anda kujul

$$\int \exp\Big(-\int \varphi(x)g(x,y)\varphi(y)dxdy\Big)D\varphi = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}}. \tag{10.11}$$

Lõpmatu arvuline tegur $(\sqrt{\pi})^\infty$ ei ole kvantväljateoorias oluline, sest teda saab lõpmatu normeerimisteguri valikuga kõrvaldada.

Funktsioonide superruumis saame analoogilisel viisil defineerida funktsionaalintegraali üle antikommuteeruvate väljade $\eta(x)$:

$$\int F[\eta]\delta[\eta-\sigma]D\eta = F[\sigma]. \tag{10.12}$$

Gaussi tüüpi integraali

$$\int \exp\Big(-\int \eta(x)g(x,y)\eta(y)dxdy\Big)D\eta, \quad g(x,y) = -g(y,x) \tag{10.13}$$

arvutamiseks vaatleme teda kõigepealt mitte lõpmatumõõtmelisel juhul (10.13), vaid kahemõõtmelisel juhul

$$\int \exp(-\eta_1 g_{12}\eta_2 - \eta_2 g_{21}\eta_1)d\eta_1 d\eta_2 = \\ = \int \exp(-2\eta_1 g_{12}\eta_2)d\eta_1 d\eta_2 . \tag{10.14}$$

Arendame integrandi ritta antikommuteeruvate muutujate η_1, η_2 järgi ja arvutame integraali välja reeglite (3.21) alusel:

$$\int \exp(-2\eta_1 g_{12}\eta_2)d\eta_1 d\eta_2 = \\ = \int (1 - 2\eta_1 g_{12}\eta_2)d\eta_1 d\eta_2 = \\ = 2g_{12} = 2\sqrt{\det g} . \tag{10.15}$$

Kolmemõõtmelisel juhul annab analoogiline arutluskäik tulemuseks nulli, sest integraali

$$\int \exp(-2(\eta_1 g_{12}\eta_2 + \eta_1 g_{13}\eta_3 + \eta_2 g_{23}\eta_3))d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{10.16}$$

reaksarenduses ei ole liiget, mis sisaldaks integrandina korrutist $\eta_1\eta_2\eta_3$. Neljamõõtmelisel juhul aga saame taas

$$\int \exp(-2(\eta_1 g_{12}\eta_2 + \ldots + \eta_3 g_{34}\eta_4))d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 d\eta_4 = 4\sqrt{\det g} . \tag{10.17}$$

Saab näidata, et paaritumõõtmelistel juhtudel on Gaussi tüüpi integraal alati null, paarismõõtmelisel juhul aga võime piiril $n \to \infty$ tulemuseks võtta

$$\int \exp\Big(-\int \eta(x)g(x,y)\eta(y)dxdy\Big)D\eta = (\sqrt{2})^{\infty}\sqrt{\det g} . \tag{10.18}$$

Arvuline lõpmatu kordaja $(\sqrt{2})^{\infty}$ ei ole kvantväljateoorias oluline.

Paneme tähele, et nii kommuteeruvate kui ka antikommuteeruvate funktsioonide ruumis avaldub Gaussi integraal funktsionaaldeterminandi det $| g(x,y) |$ kaudu, kuid erineva astmenäitajaga - kommuteeruvate funktsioonide korral saime tulemusesse (10.11) $(\det g)^{-\frac{1}{2}}$ ja antikommuteeruvate funktsioonide korral tulemusse (10.18) $(\det g)^{+\frac{1}{2}}$.

Komplekse kommuteeruva välja $\varphi(x)$ korral on Gaussi integraali

$$\int \exp\Big(-\int \varphi^*(x)g(x,y)\varphi(y)dxdy\Big)D\varphi^*D\varphi \qquad (10.19)$$

loomulik arvutada kui kahekordset funktsionaalintegraali üle kompleksfunktsiooni reaal- ja imaginaarosa. Tulemuseks saame reaalse kommuteeruva välja Gaussi integraali (10.11) põhjal

$$\int \exp\Big(-\int \varphi^*(x)g(x,y)\varphi(y)dxdy\Big)D\varphi^*D\varphi = \frac{(i\pi)^\infty}{\det g}. \qquad (10.20)$$

Komplekse antikommuteeruva välja $\eta(x)$ jaoks tuleb lisaks reeglitele (3.21)

$$\int \eta d\eta = 1, \qquad \int d\eta = 0$$

defineerida täiendavad integreerimisreeglid

$$\int \eta^* d\eta^* = 1, \quad \int d\eta^* = 0, \quad \int \eta d\eta^* = 0, \quad \int \eta^* d\eta = 0. \qquad (10.21)$$

Ühemõõtmelisel juhul saame nüüd

$$\int \exp(-\eta^* m\eta)d\eta^* d\eta = \int (1-\eta^* m\eta)d\eta^* d\eta = m \qquad (10.22)$$

ja kahemõõtmelisel juhul

$$\begin{aligned}&\int \exp(-\sum_{i,j=1}^{2} \eta_i^* m_{ij}\eta_j)d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 = \\ &= -\int \eta_2^*\eta_1^*\eta_2\eta_1(m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12})d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 = \\ &= \det \mid m_{ij} \mid .\end{aligned} \qquad (10.23)$$

Diferentsiaalide järjestus integraalis on valitud tingimusest, et tulemus oleks nii ühe- kui kahemõõtmelisel juhul ühesuguse märgiga. Jätkates analoogilisel viisil suuremamõõtmelistes ruumides, võime juhul $n \to \infty$ võtta funktsionaalintegraali väärtuseks

$$\int \exp\Big(-\int \eta^*(x)g(x,y)\eta(y)dxdy\Big)D\eta^*D\eta = \det g, \qquad (10.24)$$

kus ülalkirjeldatud konstruktsiooni põhjal

$$D\eta^* D\eta = \prod_x (d\eta^*(x) d\eta(x)). \qquad (10.25)$$

Füüsika-alases kirjanduses nimetatakse funktsionaalintegraali sageli ka *integraaliks üle teede* või *kontinuaalseks integraaliks.*

2. Genereeriv funktsionaal ja Faddejevi–Popovi determinant. Kvantteoorias iseloomustatakse füüsikalise välja olekuid olekufunktsionaalidega ja tõenäosuse amplituudidega ühest olekust teise üleminekuks. Üleminekutõenäosuste arvutamisel on oluline teada funktsionaalintegraali mõjufunktsionaali eksponendist

$$Z \sim \int_A^B \exp(iS[\varphi]) D\varphi . \qquad (10.26)$$

Seda nimetatakse *genereerivaks funktsionaaliks.*

Vaatleme Yangi-Millsi välja potentsiaali $A^{\bar{a}}_m(x^n)$, $m, n = 0, 1, 2, 3$, $\bar{a} = 1, \dots, \dim G$, kus G on kalibratsioonrühm, ja vastavat väljatugevust

$$F^{\bar{a}}_{mn} = \partial_m A^{\bar{a}}_n - \partial_n A^{\bar{a}}_m - f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}} A^{\bar{b}}_m A^{\bar{d}}_n , \qquad (10.27)$$

kus $f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}}$ on rühma G struktuurikonstandid. Yangi-Millsi välja mõjufunktsionaal

$$S[A^{\bar{a}}_m] = -\frac{1}{2} \int \mathrm{Tr}(F_{mn} F^{mn}) d^4x = \int F^{\bar{a}}_{mn} F^{mn}_{\bar{a}} d^4x \qquad (10.28)$$

on invariantne lõpmata väikeste kalibratsioonteisenduste suhtes

$$\delta A^{\bar{a}}_m = D_m \alpha^{\bar{a}} , \qquad (10.29)$$

kus D_m on kalibratsioonteisenduste suhtes kovariantne tuletis

$$D_m \alpha^{\bar{a}} = \partial_m \alpha^{\bar{a}} - f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}} A^{\bar{b}}_m \alpha^{\bar{d}} . \qquad (10.30)$$

Genereeriv funktsionaal (10.26) on oma konstruktsiooni põhjal integraal üle füüsikaliselt erinevate olekute. See tähendab, et kalibratsioonteisendustega (10.29) üksteiseks üleviidavad olekud tuleks integraalis samastada ja integreerida ainult üle ekvivalentsiklasside. Et seda asjaolu matemaatiliselt väljendada, fikseerime kalibratsiooni mingite sobivalt valitud täiendavate tingimustega

$$F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m] = 0, \tag{10.31}$$

mis ei ole invariantsed kalibratsioonteisenduste suhtes. Lisame need genereerivasse funktsionaali (10.26) δ-funktsionaali abil tegurina $\delta[F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m]]$. Siin on δ-funktsionaali argumendiks mitte funktsioon, vaid teine funktsionaal. Sellele avaldisele tähenduse andmiseks meenutame, et Diraci δ-funktsiooni jaoks kehtib muutujate vahetuse reegel

$$\delta(f(x))dx = (f'(x))^{-1}\delta(f)df, \tag{10.32}$$

mida mitmemõõtmelises ruumis üldistatakse reegliks

$$\delta(f^i(x^k)) = \det{}^{-1}\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right|\delta(x^n). \tag{10.33}$$

Saab näidata, et analoogiline determinant lisandub ka lõpmatumõõtmelises ruumis δ-funktsionaali integreerimisel. Kokkuvõttes võib genereerivat funktsionaali Z anda niisugusel kujul:

$$Z \sim \int_A^B \int \exp(iS[A^{\bar{a}}_m])\delta[F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m]] \det\left|\frac{\delta F^{\bar{d}}}{\delta\alpha^{\bar{e}}}\right|_{F=0} D\alpha^{\bar{c}} DA^{\bar{a}}_m. \tag{10.34}$$

Determinanti $\det\left|\frac{\delta F^{\bar{d}}}{\delta\alpha^{\bar{e}}}\right|_{F=0}$ nimetatakse *Faddejevi-Popovi determinandiks* ja ta tähistab kalibratsioontingimuste (10.31) infinitesimaalsete kalibratsioonteisenduste (10.29) funktsionaaldeterminanti kohal $F = 0$. Kui kalibratsioontingimused on valitud nii, et see determinant ise on kalibratsioonteisenduste suhtes kovariantne, ja nii see harilikult on, siis integraal (10.34) faktoriseerub ja integraal üle kalibratsioonteisenduse parameetri $\int D\alpha^{\bar{a}}$ annab genereerivasse funktsionaali lõpmatu kordaja, mis absorbeeritakse normeerimistegurisse. Genereeriva funktsionaali avaldisse jääb seega faktiliselt integraal üle potentsiaali $A^{\bar{a}}_m(x)$ ekvivalentsiklasside kalibratsioonteisenduste (10.27) järgi.

Faddejevi-Popovi determinant on väljade A suhtes oluliselt mittelineaarne ja mittelokaalne. Tema olemasolu muudaks füüsikaliste üleminekutõenäosuste väljaarvutamise häiritusarvutuse raames väga keeruliseks. Õnneks lubab valem (10.24) avaldada funktsionaaldeterminanti Gaussi integraalina üle komplekssete antikommuteeruvate väljade. Neid täiendavalt sissetoodud välju nimetatakse *vaimuväljadeks* ja tähistatakse $c^{\bar{a}}(x), \bar{c}^{\bar{a}}(x)$. Vastavalt valemile (10.24) on nad mõjufunktsionaalis ainult teises astmes.

Kalibratsioontingimusi (10.31) kirjeldavat δ-funktsionaali saab esitada Lagrange'i kordaja $\lambda^{\bar{a}}$ kaudu integraali kujul

$$\delta[F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m]] \sim \int \exp\Big(-i\int \lambda_{\bar{b}} F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m] d^4x\Big) D\lambda_{\bar{d}} \,. \qquad (10.35)$$

Lõplikult omandab genereeriv funktsionaal järgmise kuju:

$$Z \sim \int_A^B \exp(iS_{eff}[A^{\bar{a}}_m, c^{\bar{b}}, \bar{c}^{\bar{d}}, \lambda_{\bar{e}}]) DA^{\bar{a}}_m D\bar{c}^{\bar{b}} Dc^{\bar{d}} D\lambda_{\bar{e}} \,. \qquad (10.36)$$

See on samasugusel kujul nagu esialgne mõjufunktsionaal (10.26), kuid mõju S on asendatud efektiivse mõjuga S_{eff}, kus

$$S_{eff} = S_{cl} + S_{gf} + S_{gh} \,, \qquad (10.37)$$

$$S_{cl}[A^{\bar{a}}_m] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F_{mn}F^{mn}) d^4x \,, \qquad (10.38)$$

$$S_{gf}[\lambda_{\bar{b}}, A^{\bar{a}}_m] = -\int \lambda_{\bar{b}} F^{\bar{b}}[A^{\bar{a}}_m] d^4x \,, \qquad (10.39)$$

$$S_{gh}[A^{\bar{a}}_m, c^{\bar{b}}, \bar{c}^{\bar{d}}] = i\int \bar{c}^{\bar{a}}(x) M_{\bar{a}\bar{b}}(x-y) c^{\bar{b}}(y) d^4x d^4y \,. \qquad (10.40)$$

Operaator $M_{\bar{a}\bar{b}}$ on määratud kalibratsioontingimustele $F^{\bar{b}} = 0$ vastava Faddejevi-Popovi determinandiga.

3. BRST teisendused Lorentzi kalibratsiooni korral. Klassikalisele Yangi-Millsi väljale vastava kvantteooria efektiivne mõjufunktsionaal (10.37)-(10.40) sisaldab väljade supermultipleti $(A^{\bar{a}}_m, c^{\bar{b}}, \bar{c}^{\bar{d}}, \lambda_{\bar{e}})$. Neid teisendab üksteiseks globaalne supersümmeetria teisendus, mis jätab efektiivse mõjufunktsionaali invariantseks. Seda teisendust nimetatakse *Becchi-Rouet'-Stora-Tjutini (BRST) teisenduseks* ja ta on väga oluline väljade kvantteooria arendamisel.

Vaatleme näiteks Yangi-Millsi teooriat Lorentzi kalibratsioonis:

$$F^{\bar{a}}[A^{\bar{b}}_m] \equiv \partial_m A^{m\bar{a}} = 0 \,. \qquad (10.41)$$

Arvutame vastava Faddejevi-Popovi determinandi:

$$\left.\frac{\delta F^{\bar{a}}(x)}{\delta \alpha^{\bar{b}}(y)}\right|_{F=0} = \int \left.\frac{\delta F^{\bar{a}}(x)}{\delta A^{m\bar{d}}(z)}\frac{\delta A^{m\bar{d}}(z)}{\delta \alpha^{\bar{b}}(y)}\right|_{\alpha=0} d^4z =$$
$$= \int \partial_m \delta^{\bar{a}}_{\bar{d}} \delta^4(x-z)(D^m)^{\bar{d}}_{\bar{b}} \delta^4(z-y) d^4z =$$
$$= (\partial_m D^m)^{\bar{a}}_{\bar{b}} \delta^4(x-y), \tag{10.42}$$

kus

$$(D^m)^{\bar{a}}_{\bar{b}} = \eta^{mn}(\partial_n \delta^{\bar{a}}_{\bar{b}} - f^{\bar{a}}_{\bar{d}\bar{b}} A^{\bar{d}}_n). \tag{10.43}$$

Efektiivne mõju (10.37) koosneb nüüd kolmest liidetavast:

$$S_{cl} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F_{mn}F^{mn}) d^4x, \tag{10.44}$$

$$S_{gf} = -\int \lambda_{\bar{b}} \partial_m A^{m\bar{b}} d^4x, \tag{10.45}$$

$$S_{gh} = i\int \bar{c}_{\bar{a}} (\partial_m D^m c)^{\bar{a}} d^4x. \tag{10.46}$$

Selle mõjufunktsionaali jätab invariantseks järgmine BRST teisendus antikommuteeruva konstantse parameetriga ϵ:

$$\delta A^{\bar{a}}_m = (D_m c)^{\bar{a}} \epsilon, \tag{10.47a}$$
$$\delta c^{\bar{a}} = -\frac{1}{2} f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}} c^{\bar{b}} c^{\bar{d}} \epsilon, \tag{10.47b}$$
$$\delta \bar{c}_{\bar{a}} = i\lambda_{\bar{a}} \epsilon, \tag{10.47c}$$
$$\delta \lambda_{\bar{a}} = 0. \tag{10.47d}$$

Tõestuseks märgime, et kuna BRST teisendus potentsiaali $A^{\bar{a}}_m$ jaoks (10.47a) on infinitesimaalse kalibratsioonteisenduse (10.29) kujul parameetriga $\alpha^{\bar{a}} = c^{\bar{a}}\epsilon$, siis klassikaline mõju S_{cl} sellel teisendusel ei muutu oma kalibratsiooninvariantsuse tõttu. Ülejäänud kahe liidetava $S_{gf} + S_{gh}$ muutus BRST teisendustel on null (täisdivergentsi täpsusega) tänu Jacobi samasusele kalibratsioonrühma struktuurikonstantide jaoks

$$f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{d}} f^{\bar{b}}_{\bar{g}\bar{h}} + f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{g}} f^{\bar{b}}_{\bar{h}\bar{d}} + f^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{h}} f^{\bar{b}}_{\bar{d}\bar{g}} = 0. \tag{10.48}$$

Otsene arvutus kinnitab, et BRST teisendused (10.47) on nilpotentsed - nende kahekordsel rakendamisel saame alati nulli:

$$\delta^2_{BRST} = 0. \tag{10.49}$$

BRST teisenduste nilpotentsus mängib olulist osa kalibratsioonteooriate kvantiseerimisel *Batalini-Fradkini-Vilkovõsski meetodi* järgi.

4. Topoloogilised väljateooriad. Vaatleme Riemanni muutkonda M, mis on iseloomustatud meetrilise tensoriga $g_{mn}(x)$. Olgu sellel muutkonnal antud väljade supermultiplett Φ ja genereeriv funktsionaal

$$Z \sim \int e^{iS[\Phi,g]} D\Phi. \tag{10.50}$$

Väljateooriat nimetatakse *topoloogiliseks väljateooriaks*, kui genereeriv funktsionaal Z ei sõltu meetrikast:

$$\frac{\delta Z}{\delta g_{mn}} \equiv 0. \tag{10.51}$$

Öeldakse ka, et genereeriv funktsionaal Z on muutkonna M *topoloogiline invariant*. See tähendab, et Z sõltub ainult muutkonna M globaalsetest omadustest ja mitte tema lokaalsest struktuurist, mis on kirjeldatud meetrilise tensoriga.

Üks võimalik viis topoloogiliste väljateooriate konstrueerimiseks on lähtuda mingist klassikalisest mõjufunktsionaalist $S_{cl}[\Phi]$ ning sobival viisil leida vastava kvantteooria efektiivne mõjufunktsionaal (10.37). See peab olema invariantne BRST teisenduste suhtes. Kirjutame teisendused üles BRST generaatori Q kaudu:

$$\delta_{BRST}\Phi = [Q, \Phi\}. \tag{10.52}$$

Kui BRST teisendused on teada, võib seda valemit käsitleda BRST teisenduste generaatori $Q[\Phi]$ definitsioonina. Kuna BRST teisendused on supersümmeetria teisendused, siis on generaator Q fermiontüüpi suurus, $p_Q = 1$. BRST teisenduste nilpotentsuse nõudest ja Jacobi samasusest järeldub tingimus

$$\frac{1}{2}\{Q, Q\} \equiv Q^2 = 0. \tag{10.53}$$

Kõige üldisem viis BRST teisenduste suhtes invariantse efektiivse mõjufunktsionaali $S_{eff} = S_{cl} + S_{gf} + S_{gh}$ konstrueerimiseks on lisada klassikalisele mõjufunktsionaalile S_{cl} kalibratsiooni fikseeriv liige S_{gf} ja vaimuväljade mõjufunktsionaal S_{gh} antikommutaatori kujul

$$S_{gf} + S_{gh} = \int \{Q, V\} d^4x\,, \tag{10.54}$$

kus $V[\Phi, g]$ on mingi funktsionaal esialgsetest väljadest Φ ja meetrikast g_{mn}. Gradueeritud Jacobi samasusest ja BRST generaatori nilpotentsuse tingimusest (10.53) järeldub nüüd $\delta_{BRST}(S_{gf} + S_{gh}) = 0$ ja kalibratsiooninvariantsusest järeldub $\delta_{BRST} S_{cl} = 0$.

Eeldame, et kvantteooria vaakumolek $|0>$ on invariantne BRST teisenduste suhtes:

$$Q|0>= 0\,. \tag{10.55}$$

Oletame, et klassikaline mõju S_{cl} ja BRST generaator Q ei sõltu meetrilisest tensorist, nii et efektiivne mõju on kujul

$$S_{eff} = S_{cl} + \int \{Q[\Phi], V[\Phi, g]\} d^4x\,. \tag{10.56}$$

Näitame, et genereeriv funktsionaal (10.50) on meetrikast sõltumatu:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta g_{mn}} \delta g^{mn} &\sim \delta g \int e^{iS_{eff}} D\Phi = \\ &= \int e^{iS_{eff}} i \int_M \{Q, \frac{\delta V}{\delta g_{mn}}\} \delta g^{mn} d^4x D\Phi = \\ &= \int e^{iS_{eff}} \{Q, \chi\} D\Phi =< 0|\{Q, \chi\}|0>= 0\,, \\ \chi &= i \int_M \frac{\delta V}{\delta g_{mn}} \delta g^{mn} d^4x\,. \end{aligned} \tag{10.57}$$

Seega kirjeldab igasugune mõjufunktsionaal kujul (10.56) topoloogilist väljateooriat. Juhul kui klassikaline mõjufunktsionaal on võetud võrdseks nulliga, $S_{cl} \equiv 0$, nimetatakse saadud topoloogilist väljateooriat *Witteni tüüpi teooriaks.* Kui $S_{cl} = S_{cl}[\Phi]$, nimetatakse teooriat *Schwarzi tüüpi teooriaks.*

Paneme tähele, et klassikalise väljateooria baasil topoloogilise väljateooria konstrueerimise võimalus sõltub oluliselt sellest, kas on võimalik leida efektiivset mõju kujul (10.56). Osutub, et eelmises punktis käsitletud Yangi-Millsi teooria neljamõõtmelises ruumis ei ole topoloogiline väljateooria. Küll aga on seda Yangi-Millsi teooria kahe- ja kolmemõõtmelises ruumis, samuti *Cherni-Simonsi teooria* kolmemõõtmelises ruumis potentsiaali $A^{\bar{a}}_m(x)$ jaoks mõjufunktsionaaliga

$$S_{cl} = \int \mathrm{Tr}(A_m d_n A_p + \frac{2}{3} A_m A_n A_p) dx^{[m} dx^n dx^{p]}. \qquad (10.58)$$

Need on vaid üksikud näited topoloogiliste väljateooriate kohta, mis kaugeltki ei ammenda seda matemaatika ja füüsika piirimail seisvat huvitavat uurimisvaldkonda.

Ülesanded

10.1. Kontrollida mõjufunktsionaali (10.37), (10.44)-(10.46) invariantsust BRST teisenduste (10.47) suhtes.

10.2. Veenduda, et BRST teisenduste (10.47) kahekordsel rakendamisel ükskõik millisele supermultipleti väljadest $(A^{\bar{a}}_m, c^{\bar{a}}, \bar{c}_{\bar{a}}, \lambda_{\bar{a}})$ saame nulli.

11

Varjatud supersümmeetria klassikalises mehaanikas

Diferentsiaalvormid ja supersümmeetria. Hamiltoni mehaanika ja sümplektiline geomeetria. Duistermaati-Heckmani teoreem.

1. Diferentsiaalvormid. Nüüdisaja teoreetilise füüsika üheks iseäraliseks tunnusjooneks on selle geomeetriseerimine. Geomeetria annab probleemide lahendamisel tuge füüsiku intuitsioonile ja on samuti esteetiliseks kriteeriumiks leidmaks sobivat suunda teooria edasiarendustele. Näiteks klassikaline mehaanika on teinud läbi huvitava arengu. Tänapäeval etendab sümplektiline geomeetria Hamiltoni mehaanika jaoks samasugust rolli nagu Riemanni geomeetria üldrelatiivsusteooria jaoks. Sümplektiline geomeetria ongi käesoleva peatüki keskne teema. Ebaharilik on selle esitamine eelmistes peatükkides arendatud supersümmeetria meetodite abil. Ühenduslüliks geomeetria ja supersümmeetria vahel on diferentsiaalvormid. Meil tarvitseb vaid samastada diferentsiaalvormid superväljadega ning kogu supermatemaatika on meie käsutuses.

Diferentsiaalvorm ω lõplikumõõtmelisel muutkonnal M on määratud kovariantse täielikult antisümmeetrilise tensorväljaga

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\dots\mu_p}(x)dx^{\mu_1}\dots dx^{\mu_p}\,. \tag{11.1}$$

Siin tuleb korrutise all mõista *väliskorrutist*, mii et diferentsiaalid on antikommuteeruvad suurused: $dx\,dy = -dy\,dx$. Diferentsiaalvormi võib vaadata ka kui *multilineaarset ja antisümmeetrilist funktsionaali*, mille argumentideks on vektorväljad. Näiteks seab vorm $\omega_{\mu\nu}(x)$ vektorväljadele $X^\mu(x)$ ja $Y^\nu(x)$ vastavusse skalaarfunktsiooni $\omega_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu$. Vormi kontraktsiooni vektorväljaga nimetatakse *sisekorrutiseks* ja tähistatakse operaatori i_X abil:

$$i_X\omega = \omega(X,\dots) = \frac{1}{(p-1)!}\omega_{\nu\mu_1\dots\mu_{p-1}}X^\nu dx^{\mu_1}\dots dx^{\mu_{p-1}}\,. \tag{11.2}$$

On lihtne veenduda, et sisekorrutis on nilpotentne: $i_X^2 = 0$.

Diferentsiaalvorme võib integreerida ja diferentseerida. Defineerime *välistuletise d* valemiga

$$d\omega = \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)dx^\nu dx^{\mu_1}\ldots dx^{\mu_p}. \qquad (11.3)$$

Antisümmetriseerimine muudab välistuletise nilpotentseks: $d^2 = 0$. Välistuletis esineb paljudes klassikalistes integreerimisvalemites. Diferentsiaalvormide keeles formuleeritud võrdus

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P}\omega \qquad (11.4)$$

sisaldab endas Newtoni-Leibnizi, Gaussi-Ostrogradski ja muid analoogilisi valemeid. P tähistab siin p-mõõtmelist integreerimispinda, ∂P selle raja ning ω meelevaldset $(p-1)$-vormi. Edaspidi viitame valemile (11.4) kui *Gaussi teoreemile.* Näiteks kolmemõõtmelises ruumis saame temast erijuhuna Stokesi teoreemi:

$$\begin{aligned}\int_{\partial P} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ = \int_P (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\,dxdy + (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\,dydz + \\ + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\,dzdx.\end{aligned} \qquad (11.5)$$

Meil läheb vaja ka Lie' tuletise mõistet. Olgu muutkonnal antud vektorväli, mis kiirusväljana defineerib punktide liikumise $x = x(t)$ mingi etteantud aja t jooksul. Võime küsida, kui palju muutub sellisel liikumisel mingi tensor T infinitesimaalse aja Δt jooksul. Vastavat muutumiskiirust nimetataksegi tensorvälja *T Lie' tuletiseks* vektorvälja X suunas:

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{T(x(t+\Delta t)) - T(x(t))}{\Delta t}. \qquad (11.6)$$

Üldine avaldis Lie' tuletise jaoks pole meile praegu oluline. Anname siinkohal vaid Weili valemi Lie' tuletise arvutamiseks diferentsiaalvormide jaoks:

$$\mathcal{L}_X\omega = (i_X d + d i_X)\omega. \qquad (11.7)$$

Erijuhul, kui ω asemel on skalaarne funktsioon H, saame

$$\mathcal{L}_X H = i_X dH = X^\mu \partial_\mu H\,, \tag{11.8}$$

milles tunneme ära funktsiooni H tuletise vektorvälja X suunas.

Et paremini esile tuua analoogiat supersümmeetriaga ning et vältida kohmakat tähistust, võtame kasutusele antikommuteeruvad muutujad θ^μ

$$\theta^\mu \sim dx^\mu\,. \tag{11.9}$$

Uues tähistuses käsitleme diferentsiaalvormi superfunktsioonina

$$\omega = \omega(x,\theta) = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\dots\mu_p}(x)\theta^{\mu_1}\dots\theta^{\mu_p}\,. \tag{11.10}$$

Edaspidi vajame ka formaalseid summasid eri järku diferentsiaalvormidest, mis superfunktsioonide jaoks on täiesti loomulik konstruktsioon:

$$\Omega(x,\theta) = \omega^0(x) + \omega^1_\mu(x)\theta^\mu + \frac{1}{2!}\omega^2_{\mu\nu}(x)\theta^\mu\theta^\nu + \dots\,.$$

Eespool defineeritud operaatoritele d, i_X ja $\mathcal{L}_X$ võime nüüd anda arvutuslikust seisukohast mugavama kuju:

$$d = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \tag{11.11a}$$

$$i_X = X^\mu \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}\,, \tag{11.11b}$$

$$\mathcal{L}_X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \theta^\mu \partial_\mu X^\nu \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}\,. \tag{11.11c}$$

Nagu näeme, tõstab välistuletis d vormi järku ühe võrra ning sisekorrutis i_X vähendab seda ühe võrra. Kuna me lubame ka segajärku vorme, siis võime defineerida uue operaatori

$$Q_X = d + i_X\,, \tag{11.12}$$

mida me nimetame sõltuvalt vaatekohast *supersümmeetria generaatoriks* või *ekvivariantseks välistuletiseks*. Paneme tähele, et kehtivad järgmised samasused:

$$Q_X^2 = \frac{1}{2}\{Q_X, Q_X\} = \mathcal{L}_X\,, \tag{11.13a}$$

$$[\mathcal{L}_X, Q_X] = 0, \qquad (11.13b)$$

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X] = 0. \qquad (11.13a)$$

Valemite (11.13) võrdlus Poincaré superalgebraga (1.10) osutab, et tegemist on samalaadsete struktuuridega — diferentsiaalgeomeetria sisaldab endas varjatul kujul superalgebrat. Vektorvälja X rollis on valemites (1.10a), (1.10d) ja (1.10e) aegruumi nihete generaatorid[1].

Kasutades antikommuteeruvate muutujate integreerimisvalemeid (3.21), võime diferentsiaalvormide integreerimise asendada superfunktsioonide integreerimisega. Tõesti, valemite (3.21) põhjal kehtib

$$\begin{aligned} &\int \omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^{\mu^1} \ldots dx^{\mu^p} = \\ &= \int \omega_{\mu_1\ldots\mu_p} \theta^{\mu^1} \ldots \theta^{\mu^p} dx^1 \ldots dx^p d\theta^p \ldots d\theta^1 . \end{aligned} \qquad (11.14)$$

Näeme, et siinkohal lakkab antikommuteeruvate muutujate θ kasutamine olemast pelgalt teistsugune tähistus, vaid me oleme kasutusele võtnud uue formalismi.

Sellega on diferentsiaalvormide teooria põhimõisted ümber kirjutatud supersümmeetria keeles. Järgnevalt viime seda analoogiat veelgi kaugemale klassikalise mehaanika kontekstis.

2. Hamiltoni mehaanika ja sümplektiline geomeetria. Hamiltoni formalism n vabadusastmega mehaanilise süsteemi kirjeldamiseks on antud, kui on teada:

(i) $2n$-mõõtmeline faasiruum M, mille iga punkt vastab mehaanilise süsteemi võimalikule konfiguratsioonile q ja impulsile p;

(ii) hamiltoniaan $H = H(q,p)$, mille gradient dH määrab liikumisvõrrandid: $dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu$;

(iii) antisümmeetriline tensorväli $\omega_{\mu\nu}(x)$, mida nimetatakse *sümplektiliseks struktuuriks.*

Hamiltoni liikumisvõrrandid määravad mehaanilise süsteemi trajektoori $q(t), p(t)$ puutujavektori:

$$\dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H(q,p), \qquad (11.15a)$$

[1] Seda supersümmeetria geometriseerimise ideed on edasi arendanud A.Yu. Morozov, A. Niemi ja K. Palo artiklis *Supersymplectic geometry of supersymmetric quantum field theories* (Nucl. Phys., v. B377, pp. 295–338, 1992). Siin on meie eesmärk aga vastupidine — supersümmetriseerida geomeetriat.

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q}H(q,p). \qquad (11.15b)$$

Otsime teist järku tensorit, mille abil seatakse gradiendile $dH = (\partial_q H, \partial_p H)$ kui kovektorväljale vastavusse vektorväli $X = (X_q, X_p) = (\partial_p H, -\partial_q H)$, mis defineerib võrrandite (11.15) parema poole. Üldrelatiivsusteoorias täidab analoogilist funktsiooni meetrika — sümmeetriline tensor $g_{\mu\nu}$. Nagu näeme võrranditest (11.15), osutub klassikalise mehaanika vastav tensor ω antisümmeetriliseks:

$$\begin{pmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_q \\ X_p \end{pmatrix} \qquad (11.16a)$$

ehk

$$dH = \omega(\;, X). \qquad (11.16b)$$

Selleks et nendest võrranditest saaks avaldada X, peab olema täidetud tingimus $\det\omega \neq 0$. Antisümmeetrilise tensori ω võime kirjutada üles ka diferentsiaalvormina, mille komponendid $\omega_{\mu\nu}$ on konstantsed:

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{n} dp_\mu dq^\mu . \qquad (11.17)$$

Edaspidi pole meil mingit tarvidust piirduda kanooniliste koordinaatidega (q, p). Kui tähistame $(q, p) \to (x)$, siis võime diferentsiaalvormi ω käsitleda üldise teist järku mittekõdunud vormina

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu .$$

Nõuame, et jääks kehtima ka valemist (11.17) järelduv tingimus $d\omega = 0$. *Darboux' teoreemi* põhjal on iga neid kahte tingimust ($\det\omega \neq 0$, $d\omega = 0$) rahuldav diferentsiaalvorm lokaalses ruumipiirkonnas koordinaatteisenduste abil alati viidav kanoonilisele kujule (11.17). Siin ilmneb erinevus Riemanni geomeetriast, kus meetrika komponente saab lokaalses ruumipiirkonnas teisendada konstantseks ainult tasases ruumis.

Kogu Hamiltoni mehaanika saame nüüd kokku võtta järgmiste võrranditega:

$$d\omega = 0, \qquad (11.18a)$$

$$dH + i_X\omega = 0, \qquad (11.18b)$$

$$i_X H = 0. \tag{11.18c}$$

Viimane võrrand on küll tautoloogia, aga me võime seda vaadata kui tingimust, et hamiltoniaan peab olema funktsioon (0-järku vorm). Esimene võrrand tuleneb sümplektilise struktuuri definitsioonist ja teine defineerib Hamiltoni vektorvälja X. Võtame kasutusele superfunktsiooni S

$$S = H(x) + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x)\theta^\mu\theta^\nu, \tag{11.19}$$

siis saab võrrandid (11.18) anda üheainsa tingimusena

$$Q_X S \equiv (d + i_X)(H + \omega) = 0, \tag{11.20}$$

Seda tulemust võime interpreteerida funktsiooni S invariantsusena supersümmeetria teisenduste suhtes ehk *funktsiooni S supersümmeetriana* ja operaatorit Q_X supersümmeetria generaatorina. Generaator Q_X rahuldab superalgebra põhiseost

$$\frac{1}{2}\{Q_X, Q_X\} = \mathcal{L}_X = \frac{d}{dt}. \tag{11.21}$$

Võrrandeid (11.20) ja (11.21) silmas pidades räägimegi *varjatud supersümmeetriast klassikalises mehaanikas.*

Tekib küsimus, kas $S = H + \omega$ on loomulik funktsioon, kas selle abil saab ümber kirjutada mõnda klassikalise mehaanika probleemi ja kui saab, kas siis supersümmeetria aitab meil leida vastust mingile olulisele küsimusele. Teisisõnu, kas meil on Q_X näol tegemist mehaanikaprobleemides reaalselt esineva sümmeetriaga või on leitud supersümmeetria puhas fiktsioon. Näitena, mis kinnitab klassikalise mehaanika varjatud supersümmeetria olemuslikku tähtsust, vaatleme Duistermaati-Heckmani teoreemi tõestust.

3. Duistermaati-Heckmani teoreem. Füüsikaline suurus, millest alljärgnevalt juttu tuleb, on *statistiline summa*

$$Z = \int_M e^{-\beta H(q,p)} \prod_{\mu=1}^{n} dp_\mu dq^\mu. \tag{11.22}$$

Teatavasti sisaldab see endas kodeeritud kujul informatsiooni niisuguste termodünaamiliste suuruste kohta nagu näiteks ansambli keskmine energia, rõhk, vaba energia ja fluktuatsioonid. Seame endale eesmärgiks see integraal välja arvutada.

Väljaarvutamise all peame silmas integraalile lihtsamini käsitletava kuju andmist, näiteks esitust lõpliku summana determinantidest ja elementaarfunktsioonidest. Eeldame lihtsuse mõttes, et faasiruum M on ilma rajata ning lõpliku ruumalaga (kompaktne). Üldisema faasiruumi käsitlus on võimalik, aga toob kaasa mitmeid tehnilisi komplikatsioone, mis tarbetult varjutavad muidu väga elegantse konstruktsiooni põhiolemust. Integraali mõõdu $\prod dp\, dq$ kirjutame valemi (11.17) abil üldkovariantsel kujul

$$\prod dp_\mu dq^\mu = \frac{\omega^n}{n!} = \det(\omega_{\mu\nu}) dx^1 dx^2 \ldots dx^{2n} . \qquad (11.23)$$

Kui ühtlasi asendame diferentsiaalid antikommuteeruvate muutujatega θ, siis võime statistilise summa kirjutada integraalina üle superruumi koordinaatide (x, θ):

$$Z = \frac{1}{\beta^{2n}} \int e^{-\beta(H(x) + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x)\theta^\mu\theta^\nu)} dx^1 \ldots dx^{2n} d\theta^{2n} \ldots d\theta^1 . \qquad (11.24)$$

Valemis (11.24) esineb formaalne summa eri järku diferentsiaalvormidest, millest integreerimine valib välja dimensioonile vastava liikme.

Järgnevalt arendame edasi analoogiat välistuletise ja meie poolt defineeritud supersümmetria generaatori Q_X vahel. Asendust $d \to d + i_X$ võime tõlgendada, kui välistuletise deformatsiooni. Selles kontekstis nimetatakse generaatorit Q_X *ekvivariantseks välistuletiseks.* Tuletame meelde, et diferentsiaalvorme, mis rahuldavad tingimust $d\omega = 0$, nimetatakse *suletud vormideks* ning diferentsiaalvorme, mis on ise välistuletised mõnest vormist, $\omega = d\alpha$, nimetatakse *täpseteks vormideks.* Välistuletise nilpotentsusest $d^2 = 0$ järeldub, et täpsed vormid on ühtlasi suletud. Analoogiliselt võime rääkida ka *ekvivariantselt suletud* ($Q_X\Omega = 0$) ja *ekvivariantselt täpsetest* ($\Omega = Q_X\Psi$) diferentsiaalvormidest. Selleks et ka Q_X oleks nilpotentne, peame piirama vaadeldavate diferentsiaalvormide hulka. Ütleme, et Ω on *ekvivariantne diferentsiaalvorm*, kui $Q_X^2\Omega = \mathcal{L}_X\Omega = 0$. Näiteks $S = H + \omega$ on ekvivariantne vorm ning ta on ka ekvivariantselt suletud, kuid üldiselt mitte ekvivariantselt täpne vorm. Samuti on ekvivariantselt suletud integrand valemis (11.24).

Nüüd leiame Gaussi teoreemi (11.4) üldistuse ekvivariantsete vormide juhule. Tavaline Gaussi teoreem kehtib integraalide jaoks üle meelevaldsete alammuutkondade. Üldistust ekvivariantsete vormide juhule saab sõnastada ainult integraalide jaoks üle kogu rajata muutkonna M, $\partial M = 0$. Siis valemi

(11.4) põhjal $\int_M d\omega = 0$. Samasugune võrdus peab paika ka ekvivariantselt täpsete vormi kohta:

$$\int_M Q_X \Omega \equiv \int_M (d + i_X)\Omega = 0. \qquad (11.25)$$

Tõestuseks paneme tähele, et viimases võrduses on mõlemad liikmed eraldi nullid, esimene tavalise Gaussi teoreemi põhjal ja teine sellepärast, et $i_X \Omega$ ei või sisaldada ($\dim M$)-järku vormi, kuna i_X vähendab vormi järku.

Kui me arvutame mingit integraali üle kogu rajata ruumi, siis (11.25) põhjal integrandi deformatsioonil $\Omega \to \Omega + \lambda Q_X \alpha$ integraali väärtus ei muutu (λ on meelevaldne reaalne parameeter):

$$\int \Omega = \int \Omega + \lambda Q_X \alpha. \qquad (11.26)$$

Juhul kui integrand Ω on ekvivariantselt suletud, $Q_X \Omega = 0$, siis osutub kasulikumaks multiplikatiivne deformatsioon. Ka see ei muuda integraali väärtust:

$$\int \Omega = \int \Omega e^{\lambda Q_X \Psi}. \qquad (11.27)$$

Tõestuseks arendame eksponentsiaalliikme Taylori ritta:

$$\begin{aligned} \Omega e^{\lambda Q_X \Psi} &= \Omega(1 + \lambda Q_X \Psi + \frac{\lambda^2}{2}(Q_X \Psi)^2 + \ldots) = \\ &= \Omega + Q_X(\lambda \Omega \Psi + \frac{\lambda^2}{2}\Omega \Psi (Q_X \Psi) + \ldots). \end{aligned}$$

Siin kasutasime võrdusi $Q_X \Omega = 0$ ja $Q_X^2 \Psi = \mathcal{L}_X \Psi = 0$. Näeme, et eksponentsiaalne deformatsioon muudab integrandi ekvivariantselt täpse vormi võrra $\Omega \to \Omega + Q_X(\ldots)$ ja seega taandub valemi (11.27) kehtivus valemile (11.26).

Et kasutada valemit (11.27) statistilise summa (11.24) arvutamisel, peame leidma sobiva kandidaadi vormi Ψ jaoks. Arvutuse põhiidee seisneb selles, et tahame hästi valitud deformatsiooni abil integrandi lihtsustada. Me tuletame allpool Duistermaati-Heckmani valemi, kuid selleks tuleb meil üldisest klassikalisest mehaanikast siirduda enam spetsiifiliste dünaamiliste süsteemide juurde. Nimelt vajame lisaks sümplektilisele 2-vormile meetrilist struktuuri faasiruumis. Nõuame, et valitud meetrika oleks invariantne Hamiltoni vektorvoo suhtes:

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + X^\lambda{}_{,\mu} g_{\lambda\nu} + X^\lambda{}_{,\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \qquad (11.28)$$

ehk teisisõnu X peab olema meetrika $g_{\mu\nu}$ Killingi vektor. See seab süsteemile küllaltki piiravad tingimused. Sisuliselt tähendab meetrika invariantsus (11.28) seda, et hamiltoniaan genereerib Lie' rühma toime faasiruumis. Meetrika ja Hamiltoni vektorvälja X abil konstrueerime 1-vormi

$$\Psi = g_{\mu\nu} X^\mu \theta^\nu . \qquad (11.29)$$

Meetrika invariantsustingimust (11.28) kasutades võime kontrollida, et Ψ on ekvivariantne, $\mathcal{L}_X \Psi = 0$. Leiame

$$Q_X \Psi = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu + \theta^\mu D_\mu X_\nu \theta^\nu , \qquad (11.30)$$

kus $D_\mu X_\nu$ on kovektorvälja $X_\nu = g_{\nu\mu} X^\mu$ kovariantne tuletis. Seega võime statistilise summa (11.24) esitada integraalina ($\beta = 1$)

$$Z = \int_M e^{-(H + \omega)} e^{-\lambda(g(X,X) + \theta D X \theta)} . \qquad (11.31)$$

Valemi (11.27) kohaselt ei sõltu Z parameetri λ valikust:

$$Z_\lambda = Z_{\lambda + \delta\lambda} .$$

Saavutame tunduva lihtsustuse, kui arvutame integraali (11.31) piirjuhul $\lambda \to \infty$. Näeme, et $\exp(-\lambda g(X,X))$ ja seega kogu integrand läheneb sellel piirjuhul nullile, välja arvatud punktides, kus $X = 0$. Seega statistiline summa *lokaliseerub* Hamiltoni vektorvälja statsionaarsetele punktidele ehk (11.16) põhjal hamiltoniaani kriitilistele punktidele $dH = 0$. Konkreetse arvutuse jätame asjahuvilisele harjutusülesandeks. Tulemus on tuntud *Duistermaati-Heckmani teoreemina*:

$$\int e^{-(H + \omega)} = \sum_{dH=0} \sqrt{\frac{(2\pi)^{2n} \det(\omega)}{\det(\partial^2 H)}}\, e^{-H} . \qquad (11.32)$$

Antud tõestus tugines geomeetrilise olemusega Gaussi teoreemile, mille kehtivus on piiratud lõpliku ruumimõõtmega ja ilma rajata kompaktsete muutkondadega. Duistermaati-

Heckmani teoreemi saab aga üldistada ka lõpmatumõõtmelisele juhule, kus statistiline summa (11.22) on antud kontinuaalse integraaliga. Lihtsam viis seda teha on tõlgendada valemit (11.25) BRST teisendusena, kus Q_X on BRST teisenduste generaator. Seega on integrand Ω invariantne BRST teisenduste suhtes ning eksponentsiaalne deformatsioon on integraali BRST teisendus. Erinevus tavalisest BRST teisendusest on vaid selles, et me peame kasutama lisatingimust $Q_X^2 \alpha = 0$ kõikide konstruktsioonis esinevate vormide jaoks.

Igaüks, kes on pidanud lahendama mingeid ülesandeid füüsikas, teab, kui kasulik võib olla süsteemi sümmeetria. Sümmeetria võimaldab valida sobiva taustsüsteemi, milles probleem on maksimaalselt lihtne. Samal viisil osutub kasulikuks varjatud supersümmeetria klassikalises mehaanikas. Kui tavalised kanoonilised teisendused võimaldavad teisendada impulsse ja koordinaate üksteiseks, siis supersümmeetria seob koordinaate-impulsse diferentsiaalvormidega faasiruumis. Sellised teisendused on kahjuks intuitiivselt raskesti mõistetavad, aga ega harilike kanooniliste teisenduste olemuski pole päriselt meeltega tajutav. Rohkem rakendusi varjatud supersümmeetriale kui Duistermaati-Heckmani teoreem meile praeguseks teada ei ole, aga võib-olla leiab keegi selle peatüki lugejatest lisa.

Ülesanded.

11.1. Tuletada Weili valemist (11.7) avaldis (11.11c). Leida avaldis 1-vormi Lie' tuletise arvutamiseks komponentkujul.

11.2. Tuletada supersümmeetria tingimusest (11.20) Hamiltoni mehaanika põhivõrrandid (11.18).

11.3. Näidata, et integraal (11.24) esitab statistilist summat.

11.4. Näidata, et valemis (11.14) esinev superintegraali mõõt on invariantne koordinaatteisenduste $x' = x'(x)$ suhtes. Kuidas muutub sellisel teisendusel θ?

11.5. Tuletada Duistermaati-Heckmani teoreem (11.32), kasutades δ-funktsiooni esitust

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2} .$$

SUPERALGEBRA, SUPERANALÜÜS JA SUPERMUUTKOND

Viktor Abramov

1

Grassmanni algebra

Algebra. Superavektorruum. Superalgebra. Grassmanni algebra. Cliffordi algebra.

Selles paragrahvis kirjeldatakse kõikide järgnevate konstruktsioonide põhielementi Grassmanni algebrat.

Järgnevat võib käsitada formaalalgebralise konstruktsioonina, milles kasutatakse Grassmanni algebra moodustajaid ilmutatud kujul. Võtte valik on tingitud teise peatüki eesmärgist anda ettekujutus algebrast ning analüüsist, kus vaadeldakse võrdväärselt nii kommuteeruvaid kui antikommuteeruvaid muutujaid. Grassmanni algebra võib konstrueerida geomeetriliselt, kasutades vektorvälja kaldsümmeetrilisi funktsionaale ning nende väliskorrutist. Tulemusena saadud algebrat nimetatakse Grassmanni välisalgebraks ja temal põhineb diferentsiaalvormide teooria.

Tuletame meelde mõned põhidefinitsioonid.

Definitsioon 1.1. *Algebraks nimetatakse vektorruumi $\mathcal{A}$ sellel defineeritud binaarse algebralise operatsiooniga (korrutamisega), mis seab $\mathcal{A}$ elementide suvalisele paarile (a, b) vastavusse sama ruumi elemendi $a \circ b$, nii et on rahuldatud lineaarsus iga argumendi suhtes, s.t.*

$$(\alpha a + \beta b) \circ c = \alpha(a \circ c) + \beta(b \circ c),$$

$$a \circ (\beta b + \gamma c) = \beta(a \circ b) + \gamma(a \circ c),$$

kus a, b, c on $\mathcal{A}$ suvalised elemendid ja α, β, γ suvalised elemendid põhikorpusest [1] **K**, *millel on defineeritud vektorruum $\mathcal{A}$. Kui lisaks sellele on korrutamine assotsiatiivne, s.t. algebra $\mathcal{A}$ suvalise kolme elemendi korral kehtib*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

[1] Selles peatükis vaatleme ainult kahte korpust: kas **R** või **C**.

siis nimetatakse algebrat $\mathcal{A}$ assotsiatiivseks algebraks. Kui algebras leidub element e omadustega $e \circ a = a \circ e = a$, kus a on selle algebra suvaline element, siis nimetatakse algebrat $\mathcal{A}$ ühikuga algebraks ja elementi e ühikelementiks.♣

Kirjutusviisi lühendamiseks võtame suvaliste elementide tähistamiseks kasutusele sümboli $\forall$.

Definitsioon 1.2. *Algebra $\mathcal{A}$ alamalgebraks nimetatakse vektorruumi $\mathcal{A}$ alamruumi $\mathcal{B}$, kui alamruum $\mathcal{B}$ on kinnine algebra $\mathcal{A}$ korrutamise suhtes, s.o.* $\forall a \in \mathcal{B}$ ja $\forall b \in \mathcal{B}$

$$a \circ b \in \mathcal{B}.♣$$

Definitsioon 1.3. *Algebra $\mathcal{A}$ alamalgebrat $\mathcal{I}$ nimetatakse parempoolseks (vasakpoolseks) ideaaliks , kui $\forall a \in \mathcal{A}$ ja $\forall b \in \mathcal{I}$*

$$b \circ a \in \mathcal{I} \quad (a \circ b \in \mathcal{I}).$$

Alamalgebrat $\mathcal{I}$ nimetatakse ideaaliks, kui ta on nii parem- kui ka vasakpoolne ideaal.♣

Tuletame meelde, kuidas lähtudes algebrast $\mathcal{A}$ ja tema ideaalist $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ konstrueeritakse faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Esiteks moodustatakse vektorruumi $\mathcal{A}$ faktorruum $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ alamruumi $\mathcal{I}$ järgi. Siis defineeritakse faktorruumil $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ korrutamise operatsioon järgmiselt: kui (a) ja (b) on faktorruumi $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ suvalised elemendid (ekvivalentsiklassid, mis vastavad elementidele $a, b \in \mathcal{A}$), siis definitsiooni järgi

$$(a) \cdot (b) = (a \circ b). \tag{1.1}$$

Võib näidata (proovige iseseisvalt kontrollida), et nii defineeritud korrutamine ei sõltu ekvivalentsiklasside $(a), (b)$ esindajatest a, b ja rahuldab definitsiooni 1.2 kõiki aksioome.

Kahe algebra $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tensorkorrutiseks nimetatakse algebrat $\mathcal{A} \bigotimes \mathcal{B}$, mis on vektorruumide $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tensorkorrutis algebralise operatsiooniga, mis defineeritakse valemiga

$$(a \otimes b) \circ (a' \otimes b') = (a \circ a') \otimes (b \circ b'), \tag{1.2}$$

kus $a, a' \in \mathcal{A}$ ja $b, b' \in \mathcal{B}$.

Olgu $\mathcal{A}$ assotsiatiivne ühikuga algebra ja a selle algebra suvaline element. Suvalise täisarvu $p \geq 0$ korral elemendi p-aste defineeritakse valemiga $a^p = a \circ a \circ \ldots \circ a$ (p korda), eeldusel, et $a^0 = e$. Kui antud elemendi a jaoks leidub selline naturaalarv

q, et $a^q = 0$, siis nimetatakse elementi a nilpotentseks elemendiks. Vähimat q väärtust, mille korral kehtib võrdus $a^q = 0$, nimetatakse nilpotentsuse astmeks. Olgu $\Sigma = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N\}$ algebra $\mathcal{A}$ elementide pere. Vaatleme algebra $\mathcal{A}$ elemente kujul

$$a = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 \ldots i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \theta_{i_1}^{p_{i_1}} \circ \ldots \circ \theta_{i_k}^{p_{i_k}}, \tag{1.3}$$

kus $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ on põhikorpuse elemendid, $\theta_i \in \Sigma$ ja mõlemad summad valemis 1.3 on lõplikud. Kõikide selliste elementide hulka tähistame sümboliga $\mathcal{A}_\Sigma$. On lihtne veenduda, et $\mathcal{A}_\Sigma$ on algebra $\mathcal{A}$ alamalgebra. Juhul kui $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}$, öeldakse, et elementide pere Σ tekitab algebra $\mathcal{A}$. Elemente $\Sigma = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N\}$ nimetatakse sel juhul algebra $\mathcal{A}$ tekitajateks ehk moodustajateks.

Olgu $\mathbf{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ jäägiklassid mooduli 2 järgi, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/mod2$. Nende klasside liitmis- ja korrutustabel on järgmine:

$$\begin{array}{cc} \bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0} & \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} & \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1} \\ \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} & \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \end{array}$$

Peale selle, definitsiooni järgi

$$(-1)^{\bar{0}} = 1, \quad (-1)^{\bar{1}} = -1.$$

Definitsioon 1.4. *Vektorruumi V nimetatakse supervektorruumiks (ehk $\mathbf{Z}_2$-gradueeritud vektorruumiks), kui on antud tema lahutus otsesummaks*

$$V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}},$$

kus $V_{\bar{0}}$ ja $V_{\bar{1}}$ on vektorruumi V alamruumid. Vektoreid, mis kuuluvad alamruumi $V_{\bar{0}}$, nimetatakse paarisvektoriteks ja vektoreid, mis kuuluvad alamruumi $V_{\bar{1}}$, nimetatakse paarituvektoriteks. Vektoreid, mis kuuluvad kas alamruumi $V_{\bar{0}}$ või alamruumi $V_{\bar{1}}$, nimetatakse homogeenseteks. Homogeense vektori $\vec{x}$ jaoks defineeritakse paarsus $p(\vec{x})$ nii, et $p(\vec{x}) = \bar{0}$, kui $\vec{x}$ on paarisvektor ja $p(\vec{x}) = \bar{1}$, kui $\vec{x}$ on paarituvektor.♣

Supermatemaatikas on kasutusele võetud järgmine kokkulepe: kui valemis või definitsioonis räägitakse superruumi elemendi paarsusest, siis vaikimisi eeldatakse, et antud element on homogeenne. Meie hakkame edaspidi sageli järgima seda kokkulepet.

Definitsioonist 1.4 järeldub, et järgmised teisendused ei muuda vektori paarsust:

1) kui vektor korrutada elemendiga põhikorpusest **K**, s.t. $p(\alpha\vec{x}) = p(\vec{x})$,
2) kui vektorile liita juurde sama paarsusega vektor, s.t. $p(\vec{x}+\vec{y}) = p(\vec{x}) = p(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Kui $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ on supervektorruum, kusjuures $dimV_{\bar{0}} = p$ ja $dimV_{\bar{1}} = q$, siis tähistame teda $V^{p,q}$. Selles ruumis defineerime paarsuse automorfismi $P : V^{p,q} \to V^{p,q}$ valemiga

$$P(\vec{x}) = (-1)^{p(\vec{x})}\vec{x}, \tag{1.4}$$

kus $\vec{x}$ on homogeenne vektor, ja lineaarsuse tõttu laiendame nii defineeritud kujutuse kogu ruumile $V^{p,q}$. On lihtne veenduda, et $P^2 = id$, kus id tähistab samasusautomorfismi ruumis $V^{p,q}$. Ruumi $V^{p,q}$ baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, ..., \vec{e}_{p+q}\}$ nimetatakse kanooniliselt järjestatuks, kui vektorid $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p$ on paarisvektorid ja $\vec{e}_{p+1}, ..., \vec{e}_{p+q}$ on paarituvektorid. Kanooniliselt järjestatud baasil antakse paarsuse automorfism maatriksiga

$$E_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

kus I_p ja I_q on ühikmaatriksid dimensioonidega $p \times p$ ja $q \times q$.

Näide. Vaatleme paari $(\mathbf{C}^2, \varepsilon)$, kus $\mathbf{C}^2$ on standardne komplekstasand ja ε on maatriks

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Defineerime paaris- ja paarituvektorid vastavalt järgmistele valemitele:

$$\varepsilon\vec{z} = \vec{z}, \ \varepsilon\vec{z} = -\vec{z}, \ \vec{z} \in \mathbf{C}^2.$$

Kui tähistada paaris- ja paarituvektorite alamruumid vastavalt sümbolitega $\mathbf{C}^2_{\bar{0}}$ ja $\mathbf{C}^2_{\bar{1}}$, siis kogu komplekstasand on nende alamruumide otsesumma, s.t. $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^2_{\bar{0}} \oplus \mathbf{C}^2_{\bar{1}}$. Seega paar $(\mathbf{C}^2, \varepsilon)$ on supervektorruum.

Definitsioon 1.5. *Supervektorruumi $\mathcal{A}_s$ nimetatakse superalgebraks (ehk $\mathbf{Z}_2$-gradueeritud algebraks), kui supervektorruumil $\mathcal{A}_s$ on antud algebraline operatsioon $\circ$, mis rahuldab omadust*

$$p(a \circ b) = p(a) + p(b),$$

kus a, b on supervektorruumi $\mathcal{A}_s$ homogeensed elemendid.♣

Superalgebras defineeritakse kahe suvalise homogeense elemendi $a, b \in \mathcal{A}_s$ jaoks kommutaator $[a, b] \in \mathcal{A}_s$ valemiga

$$[a, b] = a \circ b - (-1)^{p(a)p(b)} b \circ a. \tag{1.5}$$

Superalgebrat $\mathcal{A}_s$ nimetatakse kommutatiivseks, kui selle algebra iga kahe suvalise elemendi a, b korral $[a, b] = 0$.

Olgu $\mathcal{A}_s$ ja $\mathcal{B}_s$ superalgebrad. Veidi modifitseerides valemit (1.2), mis kirjeldab kahe tavalise algebra tensorkorrutist, on võimalik defineerida superalgebrate $\mathcal{A}_s$ ja $\mathcal{B}_s$ tensorkorrutis, mis on omakorda superalgebra. Vaatleme vektorruumide $\mathcal{A}_s$ ja $\mathcal{B}_s$ tensorkorrutist $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$. Kui $a \otimes b \in \mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$, siis defineerime selle elemendi paarsuse valemiga

$$p(a \otimes b) = p(a) + p(b) \tag{1.6}$$

ja lineaarsuse tõttu laiendame selle valemi kogu vektorruumile $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$. Ilmne on, et vektorruum $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$ on supervektorruum sel viisil defineeritud paarsuse suhtes, kusjuures paariselementide alamruum on $\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}} + \mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}$ ja paaritute elementide alamruum on $\mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}} + \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}$. Nüüd defineerime vektorruumil $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$ algebralise operatsiooni valemiga

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{p(b)p(a')} (a \cdot a') \otimes (b \cdot b'). \tag{1.7}$$

Näitame, et supervektorruum $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$ on superalgebra selle operatsiooni suhtes ehk teiste sõnadega, operatsiooni (1.7) jaoks kehtib omadus

$$p((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) = p(a \otimes b) + p(a' \otimes b').$$

Tõepoolest, valemite (1.7) ja (1.6) põhjal

$$\begin{aligned}
p((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) &= p((-1)^{p(b)p(a')} (a \cdot a') \otimes (b \cdot b') \\
&= p((a \cdot a') \otimes (b \cdot b')) \\
&= p(a \cdot a') + p(b \cdot b') \\
&= p(a) + p(a') + p(b) + p(b') \\
&= p(a \otimes b) + p(a' \otimes b').
\end{aligned}$$

Kommutatiivsete superalgebrate klassi üheks tähtsamaks esindajaks on Grassmanni algebra, mille kirjeldamisele nüüd ka asume. Grassmanni algebral on täita võtmeosa kõikides hilisemates konstruktsioonides.

Definitsioon 1.6. *Ühikelemendiga assotsiatiivset algebrat, kus eksisteerib moodustajate süsteem, mille elemendid $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ rahuldavad järgmisi tingimusi*[2] *:*

$$1)\theta^i\theta^j = -\theta^j\theta^i, \qquad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{1.8}$$

$$2)\theta^1\theta^2\ldots\theta^m \neq 0, \tag{1.9}$$

nimetatakse Grassmanni algebraks.♣

Tähistame Grassmanni algebrat sümboliga $\mathcal{G}^m$. Grassmanni algebra moodustajate omadust (1.8) nimetatakse antikommutatiivsuseks ning öeldakse, et moodustajad antikommuteeruvad. Kui võtta seoses (1.8) $i = j$, siis saame

$$(\theta^i)^2 = 0, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}. \tag{1.10}$$

Seega osutuvad Grassmanni algebra moodustajad teise astme nilpotentseteks elementideks. Nilpotentsusel (1.10) on eriti tähtis osa Grassmanni algebra struktuuris. Tõepoolest, lähtudes sellest, et $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ on algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajad, võib selle suvalise elemendi kirja panna $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ polünoomina kujul (1.3). Samas kitsendab nilpotentsus (1.10) selle polünoomi kuju järgmiselt: moodustaja θ^i võib kas üldse puududa polünoomi (1.3) liikmete hulgast või siis esineda seal vaid esimeses astmes. Seega võib suvalist elementi $\xi \in \mathcal{G}^m$ üles kirjutada kujul

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{k\geq 0}^{m} \sum_{i_1\ldots i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\theta^{i_1}\ldots\theta^{i_k} = \\ &= \alpha_0 e + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\theta^i + \ldots + \sum_{i_1\ldots i_m} \alpha_{i_1\ldots i_m}\theta^{i_1}\ldots\theta^{i_m}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Edaspidise lihtsustamiseks samastame Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ ühikelemendi korpuse **K** ühikelemendiga ja elemendi ξ üleskirjutuse (1.11) esimeses liikmes jätame ta kirjutamata.

---

2 Selles üleskirjutuses θ^i tähendab i ülemist indeksit.

Siiski tuleb märkida, et üldiselt pole üleskirjutus (1.11) ühene. Selgitame seda ruutliikmete varal. Olgu

$$\xi = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}\theta^i\theta^j. \tag{1.12}$$

Asendame valemis (1.12) α_{ij} summaga $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$, kus $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Seoses moodustajate antikommutatiivsusega ei muuda teostatud asendus polünoomi ξ ennast, vaid muudab tema kordajad. Et vältida sellist mitteühesust, on kaks võimalust. Esimene nendest seisneb selles, et summa (1.11) kõikides liikmetes järjestada moodustajad θ^i indeksite järgi, s.t.

$$\xi = \sum_{k\geq 0}^{m} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \alpha_{i_1\ldots i_k}\theta^{i_1}\ldots\theta^{i_k}. \tag{1.13}$$

Siis on kordajad $\alpha_{i_1\ldots i_k}$ üheselt määratud ja neil ei lasu mingeid tingimusi. See üleskirjutus annab selge ettekujutuse vektorruumi $\mathcal{G}^m$ struktuurist. Definitsioonist 1.6 järeldub, et kõik elemendid $1, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m, \theta^1\theta^2, \ldots, \theta^{m-1}\theta^m, \ldots, \theta^1\theta^2\ldots\theta^m$ on nullist erinevad ja seega valem (1.13) viitab sellele, et nad moodustavad ruumi $\mathcal{G}^m$ baasi ning $dim\mathcal{G}^m = 2^m$. Valemi (1.13) võib viia ka kompaktsemale kujule. Kasutades Kostant'i käsitlust, tähistagu M_m kõikide naturaalarvude jadade I hulka, kus

$$I = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m, \qquad 1 \leq k \leq m.$$

Tähistagu $\varnothing$ tühja jada hulgas M_m. Defineerime järgmised tähistused:

$$\theta^{\varnothing} = 1,$$

$$\theta^I = \theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_k}, \qquad I \in M_m. \tag{1.14}$$

Nüüd võib algebra $\mathcal{G}^m$ suvalise elemendi ξ kirjutada järgmiselt:

$$\xi = \sum_{I\in M_m} \alpha_I\,\theta^I. \tag{1.15}$$

Teine tee mitteühesusest hoidumiseks on lugeda valemis (1.11) kordajad $\alpha_{i_1\ldots i_k}$ kaldsümmeetrilisteks indeksite $i_1, \ldots, i_k$ järgi, s.t. asetada neile kitsendus

$$\alpha_{i_1\ldots i_k} = (-1)^{p(\sigma)}\alpha_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(k)}},$$

kus σ on arvude $1, 2, \ldots, k$ mingi permutatsioon ja $p(\sigma)$ selle paarsus.

Lause 1.1. *Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ on kommutatiivne superalgebra.*♣

Tõestus. Algebras $\mathcal{G}^m$ on olemas väga loomulik supervektorruumi struktuur. Tõepoolest leidub algebras $\mathcal{G}^m$ kahte tüüpi elemente, mida nimetatakse homogeenseteks. Ühed neist on paarisarvulise muutujate arvuga elementaarmonoomide lineaarkombinatsioonid kujul

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{2r})} \alpha_{i_1\ldots i_{2r}}\, \theta^{i_1}\ldots\theta^{i_{2r}}, \tag{1.16}$$

kus r saab väärtusi lõigul 1 kuni $[\frac{m}{2}]$ ($\frac{m}{2}$ täisosa). Lihtne on veenduda, et suvalised kaks algebra $\mathcal{G}^m$ elementi kujul (1.16) ξ_1 ja ξ_2 kommuteeruvad:

$$\xi_1\, \xi_2 = \xi_2\, \xi_1. \tag{1.17}$$

Selliseid algebra $\mathcal{G}^m$ elemente nimetatakse paariselementideks. Analoogiliselt defineerime algebra $\mathcal{G}^m$ paaritud elemendid:

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{2r+1})} \alpha_{i_1\ldots i_{2r+1}}\, \theta^{i_1}\ldots\theta^{i_{2r+1}}, \tag{1.18}$$

kus r omandab väärtusi 1 kuni $[\frac{m}{2}]$, s.t. paaritud elemendid on paarituarvulise muutujate arvuga elementaarmonoomide lineaarkombinatsioonid. Lihtne on jälle veenduda, et algebra $\mathcal{G}^m$ paaritud elemendid antikommuteeruvad:

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = -\xi_2 \cdot \xi_1. \tag{1.19}$$

Olgu $p(\xi)$ algebra $\mathcal{G}^m$ homogeense elemendi paarsus: $p(\xi) = \bar{0}$, kui θ on paariselement, ja $p(\xi) = \bar{1}$, kui θ on paaritu element. Paarsuse kohta kehtib valem

$$p(\xi \cdot \eta) = p(\xi) + p(\eta), \tag{1.20}$$

kus ξ ja η on homogeensed elemendid. Valemid (1.17) ja (1.19) võib nüüd ühendada:

$$\xi \cdot \eta = (-1)^{p(\xi)\, p(\eta)}\, \eta \cdot \xi, \tag{1.21}$$

kusjuures $(-1)^{\bar{0}} = 1$ ja $(-1)^{\bar{1}} = -1$. Sellest valemist järeldub Grassmanni algebra kommutatiivsus.

Nii paaris- kui paaritud elemendid moodustavad alamruumid algebras $\mathcal{G}^m$, mida tähistame vastavalt $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ ja $\mathcal{G}^m_{\bar{1}}$. Valemist (1.20) järeldub, et paariselementide alamruum $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ on algebra $\mathcal{G}^m$ alamalgebra, alamruum $\mathcal{G}^m_{\bar{1}}$ aga mitte. Suvalist algebra $\mathcal{G}^m$ elementi võib üheselt lahutada paaris- ja paaritu elemendi summaks, sest $\mathcal{G}^m_{\bar{0}} \cap \mathcal{G}^m_{\bar{1}} = \{0\}$. Kõike kokku võttes võib teha järelduse, et algebra $\mathcal{G}^m$ on alamruumide $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ ja $\mathcal{G}^m_{\bar{1}}$ otsesumma, s.t.

$$\mathcal{G}^m = \mathcal{G}^m_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}^m_{\bar{0}}, \tag{1.22}$$

kusjuures korrutamisoperatsioon rahuldab tingimust (1.21). Seega on lause tõestatud.

Vaatleme Grassmanni algebra struktuuri täpsemalt. Suvalist Grassmanni algebra elementi võib üles kirjutada ilmutatud kujul arendusena elementaarmonoomide järgi:

$$\begin{aligned}\xi = \sum_{I \in M_m} \alpha_I \theta^I = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta^i + \sum_{i,j=1 (i<j)}^{m} \alpha_{ij} \theta^i \theta^j + \ldots + \alpha_{12\ldots m} \theta^1 \theta^2 \ldots \theta^m.\end{aligned} \tag{1.23}$$

See valem näitab, et tegelikult avaldub algebra $\mathcal{G}^m$ otsesummana

$$\mathcal{G}^m = K \oplus \mathcal{G}^m_1 \oplus \mathcal{G}^m_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}^m_m,$$

kus $\mathcal{G}^m_r$ on homogeensetel muutujatel $\theta^1, \ldots, \theta^m$ r-astme elementide alamruum.

Olgu $\mathcal{G}^m$ Grassmanni algebra moodustajatega $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$. Definitsioonist (1.6) järeldub, et elemendid $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ on ruumi $\mathcal{G}^m$ lineaarselt sõltumatud elemendid. Eeldame, et eksisteerib elementide $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon $\alpha_1 \theta^1 + \alpha_2 \theta^2 + \ldots + \alpha_m \theta^m = 0$, kus näiteks $\alpha_1 \neq 0$. Avaldame selles valemis θ^1 teiste elementide kaudu ja asendame korrutises $\theta^1 \theta^2 \ldots \theta^m$ moodustaja θ^1 saadud avaldisega. Siis elementide $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ nilpotentsuse tõttu

$$\theta^1 \theta^2 \ldots \theta^m = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \theta^2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \theta^m) \theta^2 \ldots \theta^m = 0, \tag{1.24}$$

mis on vastuolus definitsiooni 1.6 nõudega 2. Vektorruumi genereerivate elementidega $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ tähistame L^m.

Teoreem 1.1. *Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ paaritud elemendid ξ^1, $\xi^2, \dots, \xi^k \in L^m$ on lineaarselt sõltuvad siis ja ainult siis, kui on rahuldatud tingimus*

$$\xi^1 \xi^2 \dots \xi^k = 0. \clubsuit$$

Tõestus. Kui elemendid $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ on lineaarselt sõltuvad, siis on võimalik ühte nendest avaldada teiste kaudu ning asendada ta nende korrutises saadud avaldisega. Nilpotentsuse tõttu saame $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^k = 0$.

Olgu nüüd $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^k = 0$. Eeldame, et $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ on lineaarselt sõltumatud elemendid. Siis leiduvad vektorruumi L^m sellised elemendid $\xi^{k+1}, \xi^{k+2}, \dots, \xi^m$, et elemendid $\xi^1, \xi^2, \dots$, $\xi^k, \xi^{k+1}, \xi^{k+2}, \dots, \xi^m$ moodustavad baasi vektorruumis L^m. Olgu üleminekumaatriks baasist $\theta^1, \theta^2, \dots$, θ^m baasile ξ^1, $\xi^2, \dots, \xi^m$ tähistatud $A = (\alpha^i_j)$, s.t. $\xi^i = \alpha^i_j \theta^j$, kus $det(A) \neq 0$. Elementide $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$ antikommutatiivsuse tõttu

$$\xi^1 \xi^2 \dots \xi^m = det(A)\, \theta^1 \theta^2 \dots \theta^m \tag{1.25}$$

ja seega $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^m \neq 0$. Seda enam kehtib $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^k \neq 0$. Sellega on teoreem tõestatud.

Järeldus. *Olgu $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m$ Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ paaritud elemendid kujul*

$$\begin{aligned} \eta^i &= \xi^i + \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1 \dots i_{2k+1}} \alpha_{i_1 \dots i_{2k+1}} \theta^{i_1} \dots \theta^{i_{2k+1}} \\ &= \alpha^i_j \theta^j + \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1 \dots i_{2k+1}} \alpha_{i_1 \dots i_{2k+1}} \theta^{i_1} \dots \theta^{i_{2k+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Elemendid $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m$ on Grassmanni algebra moodustajad siis ja ainult siis, kui elemendid $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m$ on lineaarselt sõltumatud ehk $det(\alpha^i_j) \neq 0$. $\clubsuit$

Kui

$$\xi = \sum_{I \in M_m} \alpha_I \xi^I$$

on suvaline Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ element, siis selle elemendi norm defineeritakse järgmise valemiga:

$$\|\xi\| = \sum_{I \in M_m} |\alpha_I|. \tag{1.26}$$

Lause 1.2. *Olgu ξ ja η Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ suvalised elemendid. Siis kehtib omadus*

$$\|\xi \cdot \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|. \clubsuit$$

Tõestus. Olgu

$$\xi = \sum_{I \in M_m} \alpha_I \theta^I, \qquad \eta = \sum_{J \in M_m} \beta_J \theta^J$$

algebra $\mathcal{G}^m$ suvalised elemendid. Siis

$$\|\xi \cdot \eta\| = \sum_{I \cap J = \varnothing} |\alpha_I \beta_J| \leq \sum_{I \cap J = \varnothing} |\alpha_I| \, |\beta_J| \leq \sum_I |\alpha_I| \sum_J |\beta_J| =$$
$$= \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Seega on lause tõestatud.

Elementi ξ^{-1} nimetatakse Grassmanni algebra elemendi ξ *pöördelemendiks*, kui

$$\xi \cdot \xi^{-1} = \xi^{-1} \cdot \xi = 1.$$

Defineerime kujutuse $s : \mathcal{G}^m \to \mathbf{K}$ järgmise valemiga:

$$s(\xi) = \alpha_0, \tag{1.27}$$

kus ξ on suvaline Grassmanni algebra element kujul (1.23). Kujutus s on algebrate $\mathcal{G}^m$ ja $\mathbf{K}$ homomorfism ehk

$$s(\xi\eta) = s(\xi)\, s(\eta), \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^m.$$

Ilmselt $s(\xi) = 0$, kui ξ on Grassmanni algebra paaritu element.

Lause 1.3. *Kui ξ on suvaline Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ element, siis tema pöördelement ξ^{-1} eksisteerib parajasti siis, kui*

$$s(\xi) \neq 0. \clubsuit$$

Eeldame, et elemendi ξ pöördelement ξ^{-1} eksisteerib ja avaldub kujul

$$\xi^{-1} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \theta^i + \ldots + \beta_{12\ldots m} \theta^1 \theta^2 \ldots \theta^m. \tag{1.28}$$

Siis tingimusest $\xi \cdot \xi^{-1} = \xi^{-1} \cdot \xi = 1$ järeldub, et

$$s(\xi) \cdot s(\xi^{-1}) = \alpha_0 \cdot \beta_0 = 1.$$

Järelikult $s(\xi) \neq 0$.

Nüüd oletame, et $s(\xi) \neq 0$. Hakkame otsima pöördelementi ξ^{-1} kujul (1.28), vaadeldes koefitsiente $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{12\ldots m}$ tundmatutena. Tingimusest $\xi \cdot \xi^{-1} = \xi^{-1} \cdot \xi = 1$ saame järgmised võrrandid:

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot \beta_0 = 1, \\ \alpha_1 \cdot \beta_0 + \alpha_0 \cdot \beta_1 = 0, \\ \ldots \\ \alpha_{12\ldots m} \cdot \beta_0 + \ldots + \alpha_0 \cdot \beta_{12\ldots m} = 0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Süsteemis (1.29) on 2^m võrrandit ja 2^m tundmatut. Oletame, et tundmatud igas võrrandis on järjestatud kindlasse järjekorda $\beta_1, \ldots, \beta_m, \beta_{12}, \ldots, \beta_{m-1,m}, \ldots, \beta_{12\ldots m}$. Olgu võrrandid süsteemis (1.29) kirjutatud samas järjekorras nagu kordajad valemis (1.28). Siis selle süsteemi determinant on järgmine:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{12\ldots m} & \pm\alpha_{23\ldots m} & \pm\alpha_{13\ldots m} & \ldots & \alpha_0 \end{vmatrix}, \tag{1.30}$$

kus märk viimases reas sõltub naturaalarvu m paarsusest. Ilmne on, et $D = \alpha^{2m} \neq 0$. Seega eksisteerib süsteemi (1.29) üheselt määratud lahend, kust järeldub pöördelemendi olemasolu. Tõestusest järeldub ka see, et pöördelement on üheselt määratud. Sellega on lause 1.3 tõestatud.

Definitsioon 1.7. *Rühmaks nimetatakse hulka G sellel defineeritud binaarse algebralise operatsiooniga (korrutamisega), mis seab G suvaliste elementide paarile (g, h) vastavusse sama hul-*

ga elemendi $g \circ h$, nii et on rahuldatud järgnevad aksioomid:

1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$ *(assotsiatiivsus),*
2) *eksisteerib ühikelement $e \in G$ selline, et*

$$e \circ g = g \circ e = g$$

suvalise $g \in G$ korral,

3) *iga $g \in G$ jaoks eksisteerib pöördelement $g^{-1} \in G$ selline. et*

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e. \clubsuit$$

Kui rühma G suvaliste elementide g ja h korral on veel lisaks täidetud kommutatiivsuse aksioom $g \circ h = h \circ g$, siis nimetatakse rühma G Abeli rühmaks. Abeli rühma korral nimetatakse operatsiooni tavaliselt liitmiseks ja tähistatakse sümboliga $+$.

Nüüd asume kirjeldama superalgebrate veel üht esindajat, Cliffordi algebrat. Olgu (V^n, g) paar, kus V^n on n-dimensionaalne vektorruum ja g mittekidunud bilineaarvorm ruumil V^n. Edaspidi hakkame vormi g nimetama meetrikaks ja vektorruumi V^n meetrikaga g ortogonaalseks ruumiks. Suurust $g(x, x)$, kus $x \in V^n$, nimetatakse vektori x normi ruuduks ja tähistatakse $|x|^2$. Kui meetrika g on positiivselt määratud, siis osutub ruum V^n eukleidiliseks ruumiks ning $|x|^2$ on sel juhul vektori x pikkuse ruut. Osutub, et üle ruumi V^n võib konstrueerida assotsiatiivse algebra ühikelemendiga e_0, kusjuures suvalise vektori $x \in V^n$ korral kehtib võrdus

$$x^2 = g(x, x)\, e_0 = |x|^2\, e_0, \tag{1.31}$$

mille vasakus pooles peetakse silmas vektori x kui algebra elemendi korrutamist iseendaga $x^2 = x \cdot x$. Sellist algebrat nimetataksegi Cliffordi algebraks ja tähistatakse sümboliga C_n. Lineaaralgebra kursuses tõestatakse, et ortogonaalses ruumis V^n leidub baas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, nii et kehtivad seosed

$$g(e_i, e_j) = 0, \tag{1.32}$$

kui $i \neq j$, ja

$$|e_i|^2 = g(e_i, e_i) = a_i, \tag{1.33}$$

kus $a_i = \pm 1$. Olgu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ just selline baas ruumis V^n, kusjuures järjestatud olgu ta nii, et $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$ ning $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_n = -1$, kus $1 \le k \le n$. Olgu x ruumi V^n mingi vektor ja

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

tema avaldis baasivektorite kaudu. Siis võib valemi (1.31) teisendada kujule

$$\sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j e_i \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 a_i \cdot e_0.$$

Siit järeldub seega, et kui C_n on algebra, milles kehtib võrdus (1.31), siis tema moodustajad $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ peavad rahuldama seoseid

$$\begin{cases} e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, \qquad i \neq j, \\ e_i^2 = a_i e_0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Kui võtta kasutusele maatriks $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, siis võib eelnevad seosed kirja panna kujul

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \qquad e_i e_j + e_j e_i = 2g_{ij}. \tag{1.35}$$

Kirjeldame nüüd, kuidas konstrueerida Cliffordi algebrat C_n üle ortogonaalse ruumi V^n meetrikaga g. Meenutagem, et sümboliga M_n tähistasime hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõikide alamhulkade hulka. Olgu $I \in M_n$ hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ mingi alamhulk, s.t. $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Seame alamhulgale I vastavusse sümboli e_I, kusjuures $I = \emptyset$ korral tähistame $e_\emptyset$ sümboliga e_0. Olgu C_n vektorruum üle korpuse $\mathbf{K}$ baasiga $\{e_I\}_{I \in M_n}$. Seega võib suvalist vektorit $x \in C_n$ avaldada kujul

$$x = \sum_{I \in M_n} x^I e_I. \tag{1.36}$$

Ruum C_n on 2^n-dimensionaalne. Cliffordi algebra konstruktsiooni lõpetamiseks jääb veel defineerida korrutamistehe algebras C_n, kusjuures lineaarsuse tõttu piisab teha seda vaid baasivektorite e_I jaoks. Kuid kõigepealt võtame kasutusele mõningad tähistused. Kui I ja J on hulga M_n kaks elementi, siis tähistame tehtega $I+J$ hulka $(I \cup J)\setminus(I \cap J)$, s.t. selliste elementide hulka, mis kuuluvad kas hulka I või hulka J, kuid mitte mõlemasse üheaegselt. Olgu $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Siis tähistame sümboliga $p(I,j)$ hulga I selliste elementide hulka, mille puhul $i > j$. Tähistame

$$p(I,J) = \sum_{j \in J} p(I,J), \qquad \zeta(I,J) = (-1)^{p(I,J)} \prod_{i \in I \cap J} a_i. \tag{1.37}$$

Nüüd defineerime algebras C_n korrutamistehte valemiga

$$e_I\, e_J = \zeta(I,J)\, e_{I+J}. \tag{1.38}$$

Vahetu kontroll näitab, et selliselt määratud korrutamine on assotsiatiivne. Pealekauba pole raske näha, et eeldusel $e_{\{i\}} = e_i$ kehtivad seosed (1.34) või (1.35). Tõepoolest, kui $i < j$, siis

$$\zeta(i,j) = 1, \qquad \zeta(j,i) = -1$$

ja

$$e_i\, e_j = e_{\{i,j\}} = -e_j\, e_i.$$

Siit järeldub ka, et $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ korral avaldub

$$e_I = e_{i_1}\, e_{i_2} \dots e_{i_k}. \tag{1.39}$$

Sellega lõpeb Cliffordi algebra C_n konstruktsioon. Sageli tähistatakse Cliffordi algebra moodustajaid sümbolitega $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Järgmistes paragrahvides hakkame ka meie kasutama neid sümboleid.

Lause 1.4. *Cliffordi algebra C_n on mittekommutatiivne superalgebra.*♣

Tõestus. Algebra C_n eelnenud konstruktsioonist järeldub, et suvaline element $x \in C_n$ avaldub kujul

$$x = x^0\, e_0 + \sum_{i=1}^{n} x^i\, e_i + \sum_{i<j} x^{ij}\, e_i e_j + \dots + x^{12\dots n} e_1 e_2 \dots e_n. \tag{1.40}$$

Valemite (1.40) ja (1.13) võrdlemine veenab, et Cliffordi algebra elemendi üldkuju ei erine Grassmanni algebra elemendi üldkujust. Seepärast võib vektorruumi Z_2-gradueeringu defineerida täiesti sama moodi nagu lause 1.1 tõestuses. Tähistame Cliffordi algebra C_n elemendi paarsuse sümboliga $p(x)$. Pole raske näha, et omadus

$$p(xy) = p(x) + p(y)$$

kehtib suvaliste algebra C_n homogeensete elementide x ja y jaoks. Erinevalt Grassmanni algebrast ei kehti aga algebras C_n superalgebra kommutatiivsuse omadus $[x, y] = 0$. Tõepoolest,

$$[e_i, e_i] = e_i^2 + e_i^2 = 2a_i e_i \neq 0.$$

Sellega lause on tõestatud.

Nüüd vaatleme üht Cliffordi algebra konkreetset näidet.

1. Olgu V^n komplekstasand $\mathbf{C}^2$ eukleidilise meetrikaga $g(z, w) = z^2 + w^2$. Tähistagu $\mathbf{C}^2$ ortonormeeritud baasi $\{e_1, e_2\}$. Siis koosneb algebra C_2 üle $\mathbf{C}^2$ elementidest

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^{12} e_1 e_2,$$

kus $x^0, x^1, x^2, x^{12} \in \mathbf{C}$, ja korrutamistehe on defineeritud seostega

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Cliffordi algebrat C_2 võib realiseerida teist järku kompleksmaatriksite abil, s.t. leidub lineaarne kujutus $\rho : C_2 \to Mat_2(\mathbf{C})$, kus $Mat_2(\mathbf{C})$ on teist järku ruutmaatriksite algebra, nii et

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y).$$

Ilmne on, et piisab, kui defineerida kujutus ρ algebra C_2 moodustajatel. Olgu

$$\rho(e_0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(e_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_1 e_2) = i\sigma_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nimetatakse Pauli maatriksiteks. Neil on järgmised omadused:

1) $\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I$,

2) Pauli maatriksid moodustavad baasi algebras $Mat_2(\mathbf{C})$.

Nendest omadustest järeldub, et Cliffordi algebrat üle eukleidilise tasandi $\mathbf{C}^2$ võib samastada kõikide teist järku ruutmaatriksite algebraga $Mat_2(\mathbf{C})$, samastades Cliffordi algebra moodustajad Pauli maatriksitega.

Ülesanded

1. Korrutada Grassmanni algebra $\mathcal{G}^2$ elemendid

$$\xi = 1 + 3\theta^1 - 2\theta^2 + \theta^1\theta^2, \qquad \eta = \theta^1 - \theta^2.$$

2. Leida Grassmanni algebra $\mathcal{G}^3$ elemendi $\xi = 1 - \theta^1 + \theta^2\theta^3$ pöördelement.

3. Näidata, et $s : \mathcal{G}^m \to \mathbf{K}$ on algebrate homomorfism.

4. Tõestada, et suvaliste Grassmanni algebra elementide korral kehtib võrratus

$$\|\xi + \eta\| \le \|\xi\| + \|\eta\|.$$

5. Olgu $\mathcal{A}_s$ ühikuga e superalgebra. Tõestada, et ühikelement on alati paariselement ehk $e \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$.

6. Olgu $\mathcal{A}_s$ ja $\mathcal{B}_s$ kommutatiivsed superalgebrad. Tõestada, et $\mathcal{A}_s \otimes \mathcal{B}_s$ on samuti kommutatiivne superalgebra.

7. Olgu $\mathcal{G}^2$ Grassmanni algebra moodustajatega θ^1, θ^2 ja

$$\eta^1 = \alpha^1_1\theta^1 + \alpha^1_2\theta^2 + \beta^1\theta^1\theta^2,$$

$$\eta^2 = \alpha^2_1\theta^1 + \alpha^2_2\theta^2 + \beta^2\theta^1\theta^2$$

on selle algebra uued moodustajad. Avaldada θ^1 ja θ^2 uute moodustajate kaudu.

2

Tehted supermaatriksitega

Maatriksi mõiste. Supermaatriks. Normaalkuju. T_μ-transponeerimine. Superjälg. Supermaatriksi pöördmaatriks.

Maatriksiks (arvmaatriksiks) nimetatakse r reast ja p veerust koosnevat täisnurkset tabelit, millesse kirjutatakse kas reaal- või kompleksarvud. Maatriksi elemendid nummerdatakse tavaliselt kahe indeksiga α_{ab}, kus $1 \le a \le r$ näitab rea numbrit ja $1 \le b \le p$ veeru numbrit. Maatriksi üldkuju on järgmine:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rp} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Kui $r = p$, nimetatakse maatriksit ruutmaatriksiks. Olgu kõikide $r \times p$-dimensionaalsete maatriksite hulk tähistatud $Mat_{r,p}(\mathbf{K})$, kus $\mathbf{K}$ näitab, millisesse korpusesse kuuluvad maatriksi elemendid. Kõikide $r \times r$ ruutmaatriksite hulk olgu tähistatud $Mat_r(\mathbf{K})$. Hulgas $Mat_{r,p}(\mathbf{K})$ võib defineerida maatriksite liitmise ning maatriksi ja korpuse $\mathbf{K}$ elemendi korrutamise tehte. Nende tehete suhtes osutub $Mat_{r,p}(\mathbf{K})$ (rp)-dimensionaalseks vektorruumiks. Olgu A ja B maatriksid, $A \in Mat_{r,p}(\mathbf{K}), B \in Mat_{p,s}(\mathbf{K})$, mille elemente tähistatakse vastavalt $\alpha_{ab}, a = 1, \dots, r; b = 1, \dots, p$ ja $\beta_{cd}, c = 1, \dots, p; d = 1, \dots, s$. Maatriksite korrutiseks $A \cdot B \in Mat_{r,s}(\mathbf{K})$ nimetatakse maatriksit, mille elementideks on $\lambda_{ad}, a = 1, \dots, r; d = 1, \dots, s$, kus

$$\lambda_{ad} = \sum_{b=1}^{p} \alpha_{ab} \cdot \beta_{bd}. \tag{2.2}$$

Korrutamistehe muudab vektorruumi $Mat_r(\mathbf{K})$ assotsiatiivseks algebraks, mille ühikelemendiks on ühikmaatriks

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi transponeerimine on operatsioon, mille puhul maatriksi read muudetakse veergudeks ja veerud ridadeks järjekorda muutmata. Maatriksi A transponeerimisel saadud maatriksit tähistatakse A^t. Kui $A \in Mat_{r,p}(\mathbf{K})$, siis $A^t \in Mat_{p,r}(\mathbf{K})$. Kui tähistada $A = (\alpha_{ab})$ ja $A^t = (\beta_{cd})$, kus $a = 1, ..., r; b = 1, ..., p; c = 1, ..., p; d = 1, ..., r$, siis võib nende maatriksite elementide vahelise seose anda valemiga

$$\beta_{cd} = \alpha_{dc}. \tag{2.3}$$

Transponeerimisoperatsioonil on järgmised omadused:

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \tag{2.4a}$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t. \tag{2.4b}$$

Tähtsaimad r-dimensionaalsete ruutmaatriksite algebral $Mat_r(\mathbf{K})$ defineeritud funktsioonide $f : Mat_r(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ seas on jälg Tr ja determinant det.

Definitsiooni põhjal nimetatakse maatriksi jäljeks tema diagonaalelementide summat

$$Tr(A) = \sum_{a=1}^{r} \alpha_{aa}, \qquad A \in Mat_r(\mathbf{K}). \tag{2.5}$$

Jäljel on järgmised omadused:

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B), \tag{2.6a}$$

$$Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A), \tag{2.6b}$$

$$Tr(A^t) = Tr(A), \tag{2.6c}$$

kus $A, B \in Mat_r(\mathbf{K})$.

Determinant defineeritakse järgmise valemi abil:

$$det(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{p(\sigma)} \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} ... \alpha_{rj_r}, \tag{2.7}$$

kus σ on arvude $1, ..., r$ mingi permutatsioon

$$(j_1 \;\; j_2 \;\; \ldots \;\; j_r)$$

ja $p(\sigma)$ on selle permutatsiooni paarsus.

Determinandi tähtsamad omadused:

1) $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$,
2) $det(A^t) = det(A)$,
3) determinant ei muutu, kui maatriksi mingile reale (veerule) liita mingite teiste ridade (veergude) lineaarkombinatsioon,
4) determinandi märk muutub vastupidiseks kahe mistahes rea (veeru) vahetamisel.

Maatriksi $A \in Mat_r(\mathbf{K})$ pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit A^{-1}, mis rahuldab tingimust

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I. \tag{2.8}$$

Maatriksit nimetatakse mittekidunuks (ehk regulaarseks), kui tal leidub pöördmaatriks. Vaatleme kõikide r-dimensionaalsete mittekidunud ruutmaatriksite hulka. Maatriksite korrutamise tehte suhtes on see rühm $GL(r, \mathbf{K})$. Maatriksi eksponendiks $exp(A)$ nimetatakse rida

$$expA = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k. \tag{2.9}$$

See rida koondub ühtlaselt ruumi $Mat_r(\mathbf{K})$ suvalises tõkestatud piirkonnas. Maatriksi eksponendi tähtsamad omadused on:

1) $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$,
2) kui A ja B on kommuteeruvad maatriksid, siis $exp(A + B) = exp(A)\, exp(B)$,
3) kui A on mittekidunud maatriks, siis $exp(-A) = (exp(A))^{-1}$.

Punkti 0 läbivaks diferentseeruvaks kõveraks $A(t)$ ruumis $Mat_r(\mathbf{K})$ nimetatakse maatriksit, mille elementideks $\alpha_{ab}(t)$ on sellised diferentseeruvad funktsioonid argumendist t, $t \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, et $\alpha_{ab}(0) = 0, \forall a, b = 1, ..., r$. Kui $A(t)$ on diferentseeruv kõver ruumis $Mat_r(\mathbf{K})$, siis tema tuletis t järgi punktis t_0 defineeritakse valemiga

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left(\left.\frac{d\alpha_{ab}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \right).$$

Liouville'i teoreem. *Olgu $A(t)$ punkti 0 läbiv diferentseeruv kõver ruumis $Mat_r(\mathbf{K})$. Kui $X(t)$ on maatriksdiferentsiaalvõrrandi*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)\, X(t)$$

selline lahend, et $X(0) = I$, *siis*

$$X(t) \in GL(r, \mathbf{K}), \qquad \forall \mid t \mid \leq \alpha_0, \tag{2.10a}$$

$$det\, X(t) = exp(\int_0^t Tr(A(s))\, ds). \clubsuit \tag{2.10b}$$

Lihtne on veenduda, et kui $A \in Mat_r(\mathbf{K})$ on mingi konstantne maatriks, siis $X(t) = exp\,(tA)$, $\mid t \mid \leq \alpha_0$ rahuldab Liouville'i teoreemi. Sel juhul omandab valem (2.10b) $t = 1$ korral kuju

$$det\,(exp\,(A)) = exp\,(Tr(A)). \tag{2.11}$$

Supermaatriksiks nimetatakse maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1p} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rp} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

mille elemendid ξ_{ab} kuuluvad Grassmanni algebrasse $\mathcal{G}^m$ ja mille struktuur rahuldab teatud tingimusi. Esiteks, ta võib koosneda ainult algebra $\mathcal{G}^m$ homogeensetest (kindla paarsusega) elementidest. Edasi, lisaks elementide paarsusele tuuakse sisse ka maatriksi indeksite paarsuse mõiste. Kui supermaatriksi elemendi indeksid on ab, siis nende paarsuse tähistame $p(a), p(b)$, kusjuures viimaste väärtus on kas $\bar{0}$ või $\bar{1}$. Olgu kõikide $r \times p$-dimensionaalsete supermaatriksite hulk $Mat_{r,p}(\mathcal{G}^m)$. Supermaatriksi A struktuurile esitatavad põhinõuded on järgmised:

$$p(\xi_{ab}) = p(a) + p(b) \tag{2.13}$$

ja

$$p(a) = p(b), \quad \text{kui } a = b. \tag{2.14}$$

Need seovad indeksite paarsuse vastava elemendi paarsusega ja näitavad, kuidas on omavahel seotud ridade ja veergude paarsused. Seega, et saada teatud tüüpi supermaatriksit, peab indeksitele omistama paarsuse väärtused. Edaspidi käsitleme ainult ruutmaatrikseid kui kõige olulisemaid rakenduste jaoks. Võtame valemis (2.12) $r = p$. Omistame suvalisele k reale indeksitega $a_1, a_2, ..., a_k$ paarisindeksi $\bar{0}$, ülejäänud

$l = r - k$ reale paaritu indeksi $\bar{1}$. Sellega on määratud ka supermaatriksi veergude paarsused. Tõesti, tingimusest (2.14) järeldub, et supermaatriksi veerud indeksitega $a_1, a_2, ..., a_k$ on paarisveerud ja ülejäänud l veergu on paaritud veerud. Olgu kõigi selliste supermaatriksite hulk $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$. Tuleb rõhutada, et arv m pole mingil moel seotud arvudega k, l, r. Tingimusest (2.13) järeldub, et supermaatriksi paaris-(paaritu) veeru ja paaris-(paaritu) rea ristumiskohal seisab Grassmanni algebra paariselement ning paaris-(paaritu) veeru ja paaritu (paaris-) rea ristumiskohal seisab Grassmanni algebra paaritu element.

Töö hõlbustamiseks selliste maatriksitega oleks hea, kui paaris- ja paaritud read (veerud) ei paikneks segamini, vaid oleksid paarsusele vastavalt mingil moel järjestatud ehk teisisõnu, maatriks oleks viidud normaalkujule $A^{(N)}$.

Järjestamine toimub järgmiselt: kõik paarisveerud (read) tõstetakse maatriksi vasakusse (üla-) ossa nii, et nende esialgne omavaheline järjestus ei muutuks. Edaspidi tähistame kõiki paarisveerge (ridu) indeksitega $i, j, k, ...$ (need omandavad väärtusi 1 kuni k) ja kõiki paarituid vastavalt indeksitega α, $\beta, \gamma, ...$ (omandavad väärtusi $k+1$ kuni $k+l$). Indeks a muutub 1 kuni r ja $a = i$, kui $1 \le a \le k$, ning $a = \alpha$, kui $k+1 \le a \le r$. Seega on supermaatriksi $A \in Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ normaalkujuks blokkmaatriks

$$A^{(N)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

kus $k \times k$-dimensionaalne A_1 ja $l \times l$-dimensionaalne A_4 koosnevad paariselementidest, $k \times l$-dimensionaalne A_2 ning $l \times k$-dimensionaalne A_3 aga paaritutest elementidest. Edaspidi nimetame normaalkujul (2.15) olevat supermaatriksit (k,l)-supermaatriksiks. Ilmne on, et suvalist supermaatriksit $A \in Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ saab viia normaalkujule. Maatriksi A_1 suvaline element avaldub kujul ξ_{ij}, maatriksi A_2 element kujul $\xi_{i\alpha}$, maatriksi A_3 element kujul $\xi_{\alpha i}$ ja maatriksi A_4 element kujul $\xi_{\alpha\beta}$. Blokid A_1, A_4 on väga sarnased tavaliste maatriksitega, sest nad on Grassmanni algebra paariselementideks ja seega nende elemendid kommuteeruvad. Seetõttu on meil võimalik arvmaatriksi jälje ja determinandi mõiste ülekandmine ka sellistele maatriksitele.

Olgu $A \in Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ elementidega ξ_{ab}. Defineerime transponeerimisoperatsiooni $T_0 : Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m) \to Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ valemiga $(\xi^{T_0})_{ab} = \xi_{ba}$, kus $(\xi^{T_0})_{ab}$ tähistab transponeeritud maatriksi elementi indeksitega a ja b. Normaalkujul oleva maatriksi A jaoks saame

$$A^{T_0} = \begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

kus $A_1^T, A_2^T, A_3^T, A_4^T$ on tavalisel viisil transponeeritud blokid. Maatriksi elementide korrutise omaduse (1.21) tõttu ei rahulda niiviisi defineeritud transponeerimisoperatsioon seoste (2.4b) tingimust, s.t.

$$(A \cdot B)^{T_0} \neq B^{T_0} \cdot A^{T_0}. \tag{2.17}$$

Selleks et omadus (2.4b) kehtiks, tuleb definitsiooni modifitseerida. Seda on võimalik teha koguni kahel viisil. Olgu $(\xi^{T_3})_{ab} = (-1)^{p(b)+p(a)p(b)}\xi_{ba}$ ja $(\xi^{T_2})_{ab} = (-1)^{p(a)+p(a)p(b)}\xi_{ba}$. Siis saame

$$A^{T_3} = \begin{pmatrix} A_1^T & -A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

ja

$$A^{T_2} = \begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ -A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Sellist tüüpi transponeerimisoperatsioonide korral kehtib seos

$$(A \cdot B)^{T_\mu} = B^{T_\mu} \cdot A^{T_\mu}, \qquad \mu = 2, 3. \tag{2.20}$$

Võib defineerida veel kolmandagi transponeerimisoperatsiooni T_1, nii et

$$A^{T_1} = \begin{pmatrix} A_1^T & -A_3^T \\ -A_2^T & -A_4^T \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

kusjuures elementide jaoks kehtib valem

$$(\xi^{T_1})_{ab} = (-1)^{p(a)+p(b)+p(a)p(b)}\xi_{ba}. \tag{2.22}$$

Transponeerimise T_1 korral omadus (2.4b) modifitseerub:

$$(A \cdot B)^{T_1} = B^{T_1} \cdot E_{k,l} \cdot A^{T_1}, \tag{2.23}$$

kus

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

ja I_k, I_l on vastavalt k-ning l-dimensionaalsed ühikmaatriksid.

Definitsioon 2.1. *Supermaatriksit* $A \in Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ *nimetatakse* T_μ*-sümmeetriliseks (kaldsümmeetriliseks),* $\mu = 0, 1, 2, 3$, *kui*

$$A^{T_\mu} = A \qquad (A^{T_\mu} = -A).\clubsuit \tag{2.25}$$

Definitsioon 2.2. *Supermaatriksi A superjäljeks nimetatakse funktsiooni* $Str : Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m) \to \mathcal{G}^m$ *supermaatriksite hulgal* $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$, *mis on antud valemiga*

$$Str(A) = \sum_{a=1}^{r} (-1)^{p(a)}\, \xi_{aa}.\clubsuit \tag{2.26}$$

Normaalkujul oleva maatriksi A jaoks kehtib

$$Str(A) = \sum_{i=1}^{k} \xi_{ii} - \sum_{\alpha=k+1}^{r} \xi_{\alpha\alpha} = Tr(A_1) - Tr(A_4). \tag{2.27}$$

Superjälje põhiomadused on:

$$Str(A + B) = Str(A) + Str(B), \tag{2.28a}$$

$$Str(A \cdot B) = Str(B \cdot A), \tag{2.28b}$$

$$Str(A^{T_\mu}) = Str(A), \qquad \mu = 0, 2, 3, \tag{2.28c}$$

$$Str(A^{T_1}) = Tr(A). \tag{2.28d}$$

Omadused (2.28a)-(2.28d) on analoogilised tavalise jälje omadustega (2.6a)-(2.6c). Omaduse (2.28a) tõestus on elementaarne. Omaduse (2.28b) tõestuseks eeldame, et maatriksi A elemente tähistatakse ξ_{ab} ja maatriksi B elemente η_{ab}, kus $a, b = 1, \ldots, r$. Definitsiooni 2.2 järgi avalduvad valemi (2.28b) vasak ning parem pool järgmiste summadena:

$$Str(A \cdot B) = \sum_{a,b=1}^{r} (-1)^{p(a)}\, \xi_{ab} \cdot \eta_{ba}, \tag{2.29}$$

$$Str(B \cdot A) = \sum_{a,b=1}^{r} (-1)^{p(a)}\, \eta_{ab} \cdot \xi_{ba}. \tag{2.30}$$

Nüüd tuleb näidata, et summa (2.29) võrdub summaga (2.30). Tähistame valemis (2.30) indeksid ümber: $a \to b, b \to a$. Siis

$$\begin{aligned} Str(B \cdot A) &= \sum_{a,b=1}^{r} (-1)^{p(b)} \eta_{ba} \cdot \xi_{ab} = \\ &= \sum_{a,b=1}^{r} (-1)^{p(b)+(p(a)+p(b))^2} \xi_{ab} \cdot \eta_{ab}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Vahetades elementide η_{ba} ja ξ_{ab} kohad, tõime valemite (1.21) ja (2.13) põhjal sisse märgiteguri. Et $(p(a))^2 = p(a), (p(b))^2 = p(b), 2p(a) \cdot p(b) = \bar{0}, 2p(b) = \bar{0}$, siis

$$p(b) + (p(a) + p(b))^2 = p(a). \tag{2.32}$$

Valemitest (2.31) ja (2.32) saamegi summade (2.29) ja (2.30) võrduse. Omaduste (2.28c) ja (2.28d) tõestus järeldub valemitest (2.16), (2.18), (2.19), (2.21).

Vaatleme hulga $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ ehitust detailsemalt. Kui A ja B on sinna hulka kuuluvad normalkujul olevad supermaatriksid, siis defineeritakse liitmise operatsioon tavalise valemiga

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1r} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1r} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{r1} & \eta_{r2} & \dots & \eta_{rr} \end{pmatrix}$$
$$\stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \xi_{11}+\eta_{11} & \xi_{12}+\eta_{12} & \dots & \xi_{1r}+\eta_{1r} \\ \xi_{21}+\eta_{21} & \xi_{22}+\eta_{22} & \dots & \xi_{2r}+\eta_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r1}+\eta_{r1} & \xi_{r2}+\eta_{r2} & \dots & \xi_{rp}+\eta_{rr} \end{pmatrix}.$$

Supermaatrikseid võib tavalisel viisil korrutada algebra $\mathcal{G}^m$ homogeensete elementidega, kasutades valemit

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1r} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rr} \end{pmatrix} \cdot \xi \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \xi_{11}\cdot\xi & \xi_{12}\cdot\xi & \dots & \xi_{1r}\cdot\xi \\ \xi_{21}\cdot\xi & \xi_{22}\cdot\xi & \dots & \xi_{2r}\cdot\xi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r1}\cdot\xi & \xi_{r2}\cdot\xi & \dots & \xi_{rr}\cdot\xi \end{pmatrix},$$

kus ξ on algebra $\mathcal{G}^m$ homogeenne element. Ülalpool defineeritud operatsioonid näitavad, et normaalkujul olevad supermaatriksid $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ moodustavad vektorruumi üle korpuse **K**. Nüüd on võimalik esitada suvalist normaalkujul olevat supermaatriksit summana

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.33)$$

Maatrikseid, millel on esimese liidetava kuju, nimetatakse paarismaatriksiteks, ja maatrikseid, millel teise liidetava kuju, nimetatakse paaritumaatriksiteks. Maatriksit nimetatakse homogeenseks, kui ta on kas paaris- või paaritumaatriks. Edaspidi tähistame supermaatriksi A paarsust $p(A)$, kus $p(A) = \bar{0}$, kui A on paarismaatriks, ja $p(A) = \bar{1}$, kui A on paaritumaatriks. Ilmselt moodustavad nii paarismaatriksid kui ka paaritumaatriksid alamruumid $Mat_{\bar{0}}^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ ja $Mat_{\bar{1}}^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ ruumis $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$, kusjuures kogu ruum on nende alamruumide otsesumma. Seega on supermaatriksite ruumis olemas $\mathbf{Z}_2$-gradueering. Lihtne on veenduda, et kahe homogeense (k,l)-supermaatriksi A ja B korral kehtib järgmine omadus:

$$p(A \cdot B) = p(A) + p(B).$$

Sellega on tõestatud

Lause 2.1. *(k,l)-supermaatriksite hulk $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ on superalgebra ehk $\mathbf{Z}_2$-gradueeritud algebra.*♣

Maatriksi A elemendi ξ_{ab} võib algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajate $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ järgi ritta arendada:

$$\xi_{ab} = \sum_{p=0}^{m} \xi_{ab;i_1\ldots i_p}\, \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_p} = \sum_{I \in M_m} \xi_{ab;I}\, \theta^I, \qquad \xi_{ab;I} \in \mathbf{K}. \qquad (2.34)$$

Kasutades maatriksi ja algebra elemendi korrutamist, võib analoogiliselt kogu maatriksi kirjutada üles summana

$$\begin{aligned} A &= \sum_{I \in M_m} A_I\, \theta^I = \sum_{p=0}^{m} A_{i_1\ldots i_p}\, \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_p} = \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i\, \theta^i + \ldots + A_{12\ldots m}\, \theta^1 \theta^2 \ldots \theta^m, \end{aligned} \qquad (2.35)$$

kus $A_{i_1\ldots i_p}$ on tavalised maatriksid elementidega korpusest $\mathbf{K}$. Supermaatriksite jaoks võib defineerida operaatori s :

$Mat_r^{k,l}\mathcal{G}^m \to Mat_r(\mathbf{K})$ analoogiliselt definitsiooniga (1.27):

$$s(A) = A_0 = \begin{pmatrix} s(\xi_{11}) & s(\xi_{12}) & \dots & s(\xi_{1r}) \\ s(\xi_{21}) & s(\xi_{22}) & \dots & s(\xi_{2r}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(\xi_{r1}) & s(\xi_{r2}) & \dots & s(\xi_{rr}) \end{pmatrix}.$$

Ilmselt $s : Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m) \to Mat_r(\mathbf{K})$ on vektorruumide homomorfism ja $s(A) = 0$, kui A on paaritumaatriks.

Vaatleme supermaatriksi pööratavuse probleemi.

Teoreem 2.1. *(k,l)-supermaatriksil A leidub pöördmaatriks siis ja ainult siis, kui on täidetud üks järgmisest kahest teineteisega ekvivalentsest tingimusest:*

i) leidub maatriksi

$$A_0 = \begin{pmatrix} (A_1)_0 & 0 \\ 0 & (A_4)_0 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks,

ii) leiduvad maatriksite A_1 ja A_4 pöördmaatriksid.♣

Tõestus. Olgu supermaatriksil A pöördmaatriks A^{-1}, nii et $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Kirjutame mõlemad maatriksid üles summadena (2.35):

$$A = \sum_I A_I\, \theta^I = A_0 + \sum_{i_1 \dots i_p}^{m} A_{i_1 \dots i_p}\, \theta^{i_1} \dots \theta^{i_p},$$

$$A^{-1} = \sum_I \tilde{A}_I\, \theta^I = \tilde{A}_0 + \sum_{i_1 \dots i_p}^{m} \tilde{A}_{i_1 \dots i_p}\, \theta^{i_1} \dots \theta^{i_p}.$$

Siis

$$A^{-1} \cdot A = \tilde{A}_0 \cdot A_0 + \mathcal{O}(\theta) = I, \tag{2.36}$$

kus sümboliga $\mathcal{O}(\theta)$ tähistatakse liidetavaid, mis sisaldavad moodustajaid $\theta^1 \dots \theta^m$. Valemist (2.36) järeldub, et

$$\tilde{A}_0 \cdot A_0 = I,$$

s.t. maatriksil A_0 leidub pöördmaatriks.

Nüüd oletame, et $det(A_0) \neq 0$ ehk teisisõnu leidub maatriksil A_0 pöördmaatriks A_0^{-1}. Hakkame otsima pöördmaatriksit A^{-1} kujul

$$A^{-1} = \sum_I \tilde{A}_I \, \theta^I = \tilde{A}_0 + \sum_{i_1 \dots i_p}^{m} \tilde{A}_{i_1 \dots i_p} \, \theta^{i_1} \dots \theta^{i_p},$$

vaadeldes kordajaid $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{12\dots m}$ tundmatutena. Tingimusest $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ saame järgmised võrrandid:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \cdot A_0 = I, \\ \tilde{A}_0 \cdot A_1 + \tilde{A}_1 \cdot A_0 = 0, \\ \dots \\ \tilde{A}_0 \cdot A_{12\dots m} + \dots + \tilde{A}_{12\dots m} \cdot A_0 = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Süsteemis (2.37) on 2^m võrrandit ja 2^m tundmatut. Selle süsteemi esimene võrrand omab lahendit, sest et maatriks A_0^{-1} on pööratav ja $\tilde{A}_0 = A_0^{-1}$. Teisest võrrandist saame leida maatriksi $\tilde{A}_1$ ning

$$\tilde{A}_1 = -A_0^{-1} \cdot A_1 \cdot A_0^{-1}.$$

On ilmne, et lahendades järjestikku kõik järgnevad võrrandid, saame leida kõik ülejäänud maatrikskordajad ja nad on üheselt määratud.

On lihtne veenduda, et teoreemi 2.1 teine tingimus *ii)* on ekvivalentne esimese tingimusega *i)*. Sellega on teoreem 2.1 tõestatud. Pööratavate k,l-supermaatriksite hulka tähistame $GL_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$.

Vastavalt valemile (2.33) koosnevad paarismaatriksid kahest nullist erinevast blokist. Need on blokid A_1 ja A_4, mis omakorda koosnevad algebra $\mathcal{G}^m$ paariselementidest. Algebra $\mathcal{G}^m$ paariselemendid kommuteeruvad, s.t. käituvad korrutamise suhtes nagu tavalised põhikorpuse **K** elemendid. Seepärast võib paarismaatriksite jaoks defineerida tavalise determinandi mõiste, asendades valemis (2.7) arvmaatriksi elemendid α_{ij} algebra $\mathcal{G}^m$ paariselementidega. On ilmne, et kõik tavalise determinandi omadused seejuures säilivad. Siit järeldub, et paarismaatriksi (2.33) korral kehtib

$$det(A) = det(A_1)\, det(A_4). \tag{2.38}$$

Tuleb tähelepanu pöörata sellele, et üldjuhul on paarismaatriksi determinandiks mitte arv, vaid algebra $\mathcal{G}^m$ ilmselt paariselement. Lihtne on veenduda, et seejuures kehtib valem

$$s(det(A)) = det(s(A)), \tag{2.39}$$

kus $A \in Mat_{\bar{0}}^{k,l}(\mathcal{G}^m)$. Siis järeldub teoreemist 2.1, et juhul, kui A on pööratav supermaatriks, on $det(A_{\bar{0}})$ algebra $\mathcal{G}^m$ pööratav element, kus

$$A_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

on supermaatriksi A paariskomponent. Samuti on $det(A_1)$ ja $det(A_4)$ algebra $\mathcal{G}^m$ pööratavad paariselemendid, kui A on pööratav supermaatriks.

Klassikalise determinandi abil on võimalik leida ka paarismaatriksite pöördmaatriksit. Pöördmaatriksi leidmise meetod ei erine sel juhul millegi poolest tavaliste arvmaatriksite puhul kasutatavast.

Ülesanded

1. Olgu θ^1, θ^2 Grassmanni algebra $\mathcal{G}^2$ moodustajad. On antud supermaatriks $A \in Mat_2^{(1,1)}(\mathcal{G}^2)$, kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \theta^1\theta^2 & \theta^1 + \theta^2 \\ \theta^1 - \theta^2 & 2 - \theta^1\theta^2 \end{pmatrix}.$$

   Leida A_0.

2. Olgu $A \in Mat_3^{(2,1)}(\mathcal{G}^3)$, kus

$$A_0 = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}.$$

   Selle supermaatriksi elemendid on järgmised:

$$\xi_{11} = 2 + \theta^1\theta^2,\ \xi_{12} = -\theta^1\theta^3,\ \xi_{13} = \theta^1 - \theta^2,$$

$$\xi_{21} = \theta^2\theta^3,\ \xi_{22} = 1,\ \xi_{23} = \theta^1 - \theta^2,$$

$$\xi_{31} = \theta^2 + \theta^3,\ \xi_{32} = \theta^2 - \theta^3,\ \xi_{33} = e^{\theta^1 + \theta^2} - \theta^1 - \theta^2.$$

   Näidata, et supermaatriksi A jaoks eksisteerib pöördmaatriks.

3. Leida supermaatriksi A (ül. 1) pöördmaatriks.

4. Leida supermaatriksi A (ül. 2) superjälg.

3

Superdeterminant

Superdeterminandi definitsioon. Tema omadused. Liouville'i teoreemi superanaloog. Teoreem superdeterminandi multiplikatiivsusest. Supermaatriksi pööratavuse tarvilikud ja piisavad tingimused.

Üks olulisemaid funktsioone maatriksite hulgal on determinant. Tema definitsioon tavalise arvmaatriksi jaoks on antud eespool valemiga (2.7). Seda definitsiooni otse supermaatriksitele rakendada on väga keeruline. Raskus on tingitud supermaatriksi paaritute elementide antikommuteeruvusest - summas (2.7) hakkab liidetava märk sõltuma veeru asukohast substitutsioonis

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix},$$

mis tuleks kompenseerida täiendava märgiteguriga.

Selleks et leida lihtsamat supermaatriksi determinandi definitsiooni, vaatleme veel kord tavalise arvmaatriksi determinanti. Olgu $A \in Mat_r(\mathbf{K})$ kujul

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

kus$A_1 \in Mat_k(\mathbf{K})$ ja $A_4 \in Mat_l(\mathbf{K})$.

Teoreem 3.1. *Kui maatriks A_4 valemis (3.1) on pööratav, siis*

$$det(A) = det(A_1 - A_2 \cdot A_4^{-1} \cdot A_3) \cdot det(A_4).\clubsuit \tag{3.2}$$

Olgu

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_4^{-1}A_3 & I \end{pmatrix}.$$

On ilmne, et $det(M) = 1$. Seepärast

$$det(A) = det(A \cdot M) = det \begin{pmatrix} A_1 - A_2A_4^{-1}A_3 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}.$$

Viimasest valemist järeldubki valem (3.2), sest blokkmaatriksite kohta kehtib

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det(A) \cdot det(C).$$

Definitsioon 3.1. *Funktsiooni* $Sdet : GL_r^{k,l}(\mathcal{G}^m) \to \mathcal{G}^m$ *pööratavate supermaatriksite hulgal* $Gl_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ *väärtustega Grassmanni algebras* $\mathcal{G}^m$

$$Sdet(A) = Sdet(A^{(N)}) = det(A_1 - A_2 \cdot A_4^{-1} \cdot A_3) \cdot det(A_4{}^{-1}) \tag{3.3}$$

nimetatakse superdeterminandiks. Eeldatakse, et $A^{(N)}$ *on supermaatriks normaalkujul (2.15).*♣

Seega erineb superdeterminandi arvutamise valem tavalise determinandi valemist (3.2) ainult selle poolest, et teises teguris seisab determinandi märgi all maatriksi A_4 pöördmaatriks. Et esimeses teguris seisev maatriks koosneb algebra $\mathcal{G}$ paariselementidest, sobib tema determinandi arvutamiseks ka tavalise determinandi valem. Kuna maatriksi A pööratavus on ekvivalentne maatriksite A_1 ja A_4 pööratavusega, siis on valem (3.3) igati korrektne. Tema põhjendus on antud allpool Liouville'i teoreemi superanaloogi tõestuse juures.

Definitsioonist (3.1) järeldub:

i) *kui vahetada supermaatriksi kahe rea (veeru) kohad omavahel, muutub superdeterminandi märk. See omadus langeb kokku tavalise determinandi 4. omadusega.*

Selle omaduse tõestamiseks lähtume järgmistest faktidest.

1. Kui supermaatriksite korrutise esimeses teguris vahetada omavahel kahe rea kohad, siis korrutamistehte tulemusena saame maatriksi, milles on, võrreldes lähtemaatriksite korrutamisel saadud maatriksiga, samuti need kaks rida omavahel kohad vahetanud. Samasugune omadus kehtib ka supermaatriksi B veergude kohta.
2. Kui supermaatriksis A vahetada kahe rea (veeru) kohad, siis ka pöördmaatriksis A^{-1} vahetuvad samade numbritega veergude (ridade) kohad.
3. Kui supermaatriksite korrutises $A \cdot B$ vahetada esimeses maatriksis omavahel kahe veeru kohad ja teises maatriksis samade numbritega ridade kohad, siis korrutis ei muutu.

Oletame, et vahetame supermaatriksis A kahe paaritu veeru kohad, mis on ekvivalentne sellega, nagu oleksime normaalkujul supermaatriksi $A^{(N)}$ paaritus sektoris kaks veergu omavahel vahetanud. Siis muudab $det(A_4^{-1})$ märki, sest ta on tavaline determinant. Maatriks A_1 ei muutu. Ka maatriks $A_2 \cdot A_4^{-1} \cdot A_3$ ei muutu, sest antud teisendus vahetab kahe veeru kohad maatriksis A_2, kahe samade numbritega rea kohad maatriksis A_4^{-1} ja jätab samaks maatriksi A_3. Kahe paarisveeru korral on arutluskäik analoogiline. Vahetus, kus üks veergudest on paaris- ja teine paaritu, taandub ühele neist esimestest variantidest.

On võimalik tõestada ka teine omadus:

ii) *superdeterminant ei muutu, kui supermaatriksi mingile reale (veerule) liita teiste ridade (veergude) lineaarkombinatsioon koefitsientidega Grassmanni algebrast $\mathcal{G}^m$ (eeldatakse, et rea (veeru) paarsus seejuures ei muutu).*

Kui supermaatriksi A i-ndale reale lisada ridade $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (elementidega algebrast $\mathcal{G}^m$) lineaarkombinatsioon ja korrutada see maatriksiga B, saame sama tulemuse nagu siis, kui oleksime korrutismaatriksi $A \cdot B$ i-ndale reale lisanud ridade $k_1, k_2, \ldots k_p$ lineaarkombinatsiooni (samade elementidega algebrast $\mathcal{G}^m$). Järelikult, kui maatriksi $A^{(N)}$ paarisreale lisada ridade lineaarkombinatsioon, siis maatriksi $A_1 - A_2 \cdot A_4^{-1} \cdot A_3$ sama numbriga reale lisandub samuti samade ridade lineaarkombinatsioon. Ilmne on, et tema determinant sellest ei muutu. Ülejäänud juhtusid käsitletakse analoogiliselt.

Tavalise determinandi tähtsamaid omadusi on tema multiplikatiivsus:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Selgub, et ka superdeterminandil (3.3) on sama omadus. Selle tõestuseks on vajalik Liouville'i teoreemi superanaloog. Enne selle formuleerimist toome sisse veel mõned mõisted.

Öeldakse, et reaalarvuliste argumentidega ja Grassmanni algebrasse $\mathcal{G}^m$ kuuluvate väärtustega funktsioon $\xi(t)$ on diferentseeruv (sile) lõigul $|t| \le \alpha_0$, kui reaksarenduses $\mathcal{G}^m$ moodustajate $\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^m$ järgi

$$\begin{aligned} \xi(t) = \sum_{I \in M_m} \xi_I(t)\theta^I = \xi_0(t) + \sum_{i=1}^{m} \xi_i(t)\theta^i + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} \xi_{ij}(t)\theta^i\theta^j + \ldots + \xi_{12\ldots m}(t)\theta^1\theta^2\ldots\theta^m \end{aligned} \tag{3.4}$$

rea kordajad on parameetri t suhtes diferentseeruvad (siledad) funktsioonid. Just sellised reaalmuutuja funktsioonid, mille väärtused kuuluvad Grassmanni algebrasse $\mathcal{G}^m$, on väga tähtsal kohal nii supergeomeetrias kui ka supersümmeetrilistes väljateooriates. Nagu nähtub järgnevatest paragrahvidest, võib reaalmuutujat t ja moodustajaid $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ käsitleda täiesti võrdväärsetena ning vaadelda funktsiooni $\xi(t)$ ühe paarismuutuja t ja m paaritumuutuja $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ funktsioonina. Analoogiat jätkates võib öelda, et funktsioon (3.4) on antud piirkonnas koordinaatidega $(t, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m)$. Lähemalt käsitletakse seda probleemi viiendas paragrahvis. Kasutades lõigul $|t| \leq \alpha_0$ diferentseeruva (sileda) ja Grassmanni algebrasse $\mathcal{G}^m$ kuuluvate väärtustega funktsiooni mõistet, võib defineerida diferentseeruva (sileda) kõvera ruumis $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$.

Definitsioon 3.2. *Diferentseeruvaks (siledaks) punkti 0 läbivaks kõveraks $A(t)$, $|t| \leq \alpha_0$ ruumis $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ nimetatakse supermaatriksit, mille elementideks $\xi_{ab}(t)$ on diferentseeruvad (siledad) funktsioonid parameetriga $|t| \leq \alpha_0$, nii et $\xi_{ab}(0) = 0$.*♣

Liouville'i teoreemi superanaloog. *Olgu $A(t)$ punkti 0 läbiv diferentseeruv kõver ruumis $Mat_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$. Kui $X(t)$ on maatriksvõrrandi*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t) \cdot X(t) \tag{3.5}$$

selline lahend, et $X(0) = I$, siis

a) $X(t) \in GL_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$,

b) *suvalise $|t| \leq \alpha_0$ puhul kehtib*

$$Sdet\, X(t) = exp(\int_0^t Str\, A(s)ds).♣$$

Olgu $\bar{X}(t)$ maatriksdiferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = -\bar{X}(t) \cdot A(t)$$

lahend, mis rahuldab tingimust $\bar{X}(0) = I$. Siis kehtib

$$\frac{d}{dt}(\bar{X}(t) \cdot X(t)) = -\bar{X}(t) \cdot A(t) \cdot X(t) + \bar{X}(t) \cdot A(t) \cdot X(t) = 0.$$

Arvestades algtingimust, saame

$$\bar{X}(t) \cdot X(t) = I.$$

See tähendab, et $X(t) \in GL_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ iga $|t| \le \alpha_0$ korral. Lahendite $X(t)$ ja $\bar{X}(t)$ olemasolu järeldub diferentsiaalvõrrandite teooriast.

Tähistame

$$Y(t) = X_1(t) - X_2(t) \cdot X_4^{-1}(t) \cdot X_3(t),$$

$$Z(t) = X_4^{-1}(t),$$

kus sümbolitega $X_i(t), A_i(t), i = 1,2,3,4$ on tähistatud vastavad blokid maatriksite $X(t)$ ja $A(t)$ normaalkujudes. Siis

$$SdetX(t) = detY(t) \cdot detZ(t). \tag{3.6}$$

Diferentseerides samasust $X_4^{-1}(t) \cdot X_4(t) = I$, saame seose

$$\frac{dX_4^{-1}(t)}{dt} \cdot X_4(t) + X_4^{-1}(t) \cdot \frac{dX_4}{dt} = 0.$$

Siit saame

$$\frac{dX_4^{-1}(t)}{dt} = -X_4^{-1}(t) \cdot \frac{dX_4(t)}{dt} \cdot X_4^{-1}(t).$$

Asendades seose (3.5) põhjal

$$\frac{dX_4(t)}{dt} = A_3(t) \cdot X_2(t) + A_4(t) \cdot X_4(t),$$

saame

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -Z(t) \cdot (A_3 X_2 X_4^{-1} + A_4). \tag{3.7}$$

Analoogiliselt saab tuletada võrrandi

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A_1 - X_2 X_4^{-1} A_3) \cdot Y(t), \tag{3.8}$$

kusjuures tuleb kasutada võrrandi (3.5) erikujusid

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + A_2 X_3,$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A_1 X_2 + A_2 X_4,$$

$$\frac{dX_3}{dt} = A_3 X_1 + A_4 X_3$$

ja võrrandit (3.7). Supermaatriksid $Y(t)$ ja $Z(t)$ koosnevad paariselementidest ja rahuldavad võrrandeid (3.7) ja (3.8). Seepärast võib neile rakendada klassikalist Liouville'i teoreemi

$$det\, Y(t) = exp\{\int_0^t Tr(A_1(s) - X_2(s) X_4^{-1}(s) A_3(s))\, ds\},$$

$$det\, Z(t) = exp\{-\int_0^t Tr(A_3(s) X_2(s) X_4^{-1}(s) + A_4(s))\, ds\}.$$

Kirjutame need võrrandid diferentsiaalkujul:

$$\frac{d}{dt}(det\, Y) = Tr(A_1 - X_2 X_4^{-1} A_3) \cdot det\, Y,$$

$$\frac{d}{dt}(det\, Z) = -Tr(A_3 X_2 X_4^{-1} + A_4) \cdot det\, Z.$$

Arvesse võttes tavalise jälje omadusi (2.6a), (2.6b) ja seda, et maatriksite $X_2 X_4^{-1}$ ning A_3 elemendid on paaritud, saame

$$Tr(A_1 - X_2 X_4^{-1} A_3) = Tr(A_1 + A_3 X_2 X_4^{-1}).$$

Seega

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Sdet\, X) &= \frac{d}{dt}(det\, Y \cdot det\, Z)\\ &= \frac{d}{dt}(det\, Y) \cdot det\, Z + det\, Y \cdot \frac{d}{dt}(det\, Z)\\ &= Tr(A_1 + A_3 X_2 X_4^{-1}) \cdot det\, Y \cdot det\, Z -\\ &\qquad - Tr(A_3 X_2 X_4^{-1} + A_4) \cdot det\, Y \cdot det\, Z\\ &= Tr(A_1 - A_4) \cdot det\, Y \cdot det\, Z.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Silmas pidades valemit (2.27), saab selle seose üles kirjutada kujul

$$\frac{d}{dt}(Sdet\, X) = Str(A) \cdot Sdet(X), \qquad X(0) = I,$$

mis on tegelikult valemi

$$Sdet(X) = exp(\int_0^t Str(A(s))\, ds)$$

diferentsiaalkuju.

Sellest tõestusest on hästi näha, miks definitsioonivalemis (3.3) on vaja võtta $det(A_4^{-1})$ erinevalt hariliku determinandi valemist (3.2), kus on $det(A_4)$. Kui (3.3) teiseks teguriks oleks olnud $det\, A_4$, poleks valemis (3.9) "+"märgiga liige $A_3 X_2 X_4^{-1}$ ära koondunud, sest maatriksite $X_2 X_4^{-1}$ ja A_3 elemendid on paaritud, ja Liouville'i teoreemi ei oleks saanud üldistada superdeterminantide jaoks.

Järeldus. *Kui A on supermaatriks, siis kehtib valemi (2.11) analoog*

$$Sdet(exp(A)) = exp(Str(A)).\clubsuit \tag{3.10}$$

Teoreem 3.2. *Kui $A, B \in GL_r^{k,l}(\mathcal{G}^m)$ on kaks supermaatriksit, siis kehtib superdeterminandi multiplikatiivsuse omadus*

$$Sdet(A \cdot B) = Sdet(A) \cdot Sdet(B).\clubsuit$$

Ühendame supermaatriksid A ja B diferentseeruvate kõverate $A(t)$ ja $B(t)$ abil ühikmaatriksiga I, s.t. $A(0) = B(0) = 0$ ja $A(1) = A$, $B(1) = B$. Võtame kasutusele järgmised maatriksid:

$$X(t) = \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t), \qquad \frac{dA(t)}{dt} = X(t)\, A(t),$$

$$Y(t) = \frac{dB(t)}{dt} B^{-1}(t), \qquad \frac{dB(t)}{dt} = Y(t)\, B(t).$$

Maatriksite $X(t)$ ja $Y(t)$ jaoks kehtib

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A(t) \cdot B(t)) &= \frac{d\,A(t)}{dt} B(t) + A(t) \cdot \frac{dB(t)}{dt} \\ &= (X(t)\, A(t)\, B(t) + A(t)\, Y(t)\, B(t)) \\ &= (X(t) + A(t)\, Y(t)\, A^{-1}(t))\, A(t)\, B(t).\end{aligned}$$

Liouville'i teoreemi superanaloogi järgi

$$Sdet\,(A(t) \cdot B(t)) = exp\{\int_0^t Str\,(X(s) + A(s)\, Y(s)\, A^{-1}(s))\, ds\}. \tag{3.11}$$

Superjälje (2.26) omadusest (2.28a) ja (2.28b) järeldub, et

$$Str\,(A(s)\, Y(s)\, A^{-1}(s)) = Str\,(Y(s)).$$

Valem (3.11) omandab $t = 1$ korral seega kuju

$$Sdet\,(A \cdot B) = exp\,(\int_0^1 Str\,X(t)\,dt)\,exp\,(\int_0^1 Str\,Y(t)\,dt)$$

ehk

$$Sdet\,(A \cdot B) = Sdet\,(A) \cdot Sdet\,(B).$$

Tähelepanelikum analüüs näitab, et leidub veel üks valemiga (3.3) ekvivalentne superdeterminandi arvutamise eeskiri.

Lause 3.1. *Kui A on pööratav (k, l)-supermaatriks, siis tema superdeterminant avaldub järgmisel kujul:*

$$Sdet(A) = det(A_1) \cdot \{det(A_4 - A_3\,A_1^{-1}\,A_2)\}^{-1}. \clubsuit \qquad (3.12)$$

Tõestus. Olgu A pööratav (k, l)-supermaatriks normaalkujuga

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

Siis maatriksi

$$M = \begin{pmatrix} E & -A_1^{-1}\,A_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

jaoks kehtib superdeterminandi valemi (3.3) järgi

$$Sdet(M) = 1.$$

Teoreemist 3.2 järeldub, et

$$Sdet(A) = Sdet(A \cdot M) = Sdet\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 - A_3\,A_1^{-1}\,A_2 \end{pmatrix}.$$

Rakendades veel kord definitsiooni 3.1 valemit (3.3), saame valemi (3.12).

Ülesanded

1. Arvutada supermaatriksi A (vt. ül. 2.1) superdeterminant.

2. Tõestada superdeterminandi järgmised omadused:

$$Sdet(A^{T_\mu}) = Sdet(A), \qquad \mu = 2, 3,$$

$$Sdet(A^{-1}) = (Sdet(A))^{-1}.$$

4

Lie' superalgebrad

Moodul, diferentseerimine, Lie' algebra. Supermoodul, superdiferentseerimine, Lie' superalgebra. Lie' maatrikssuperalgebrad. Vasakpoolsed ja parempoolsed tuletised. Diferentseerimiste Lie' superalgebra. Supermoodul üle Cliffordi algebra.

Selle paragrahvi alguses tuletame meelde mõningate algebraliste struktuuride definitsioonid.

Definitsioon 4.1. *Abeli rühma L nimetatakse vasakpoolseks mooduliks üle algebra $\mathcal{A}$, kui on defineeritud kujutus $\circ : \mathcal{A} \times L \to L$, mis rahuldab järgmisi omadusi:*

$$(\alpha a + \beta b) \circ l = \alpha(a \circ l) + \beta(b \circ l),$$

$$(ab) \circ l = a \circ (b \circ l),$$

$$a \circ (l_1 + l_2) = a \circ l_1 + a \circ l_2,$$

kus α, β on põhikorpuse suvalised elemendid, a, b on algebra $\mathcal{A}$ suvalised elemendid ja l_1, l_2 on Abeli rühma L suvalised elemendid.♣

Definitsioon 4.2. *Algebra $\mathcal{A}$ diferentseerimiseks nimetatakse lineaarset operaatorit $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, mille puhul kehtib*

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b) \tag{4.1}$$

suvaliste algebra $\mathcal{A}$ elementide a, b korral.♣

Omadust (4.1) nimetatakse sageli Leibnizi reegliks.

Definitsioon 4.3. *Lie' algebraks nimetatakse vektorruumi $\mathcal{L}$ sellel defineeritud binaarse operatsiooniga (kommutaatoriga $[\ ,\ ]$), mis seab igale $\mathcal{L}$ suvaliste elementide paarile (h_1, h_2) vastavusse sama ruumi elemendi $[h_1, h_2]$, nii et on rahuldatud järgnevad aksioomid:*

1) antikommutatiivsus

$$[h_1, h_2] = -[h_2, h_1],$$

2) lineaarsus

$$[\alpha h_1 + \beta h_2, h_3] = \alpha[h_1, h_3] + \beta[h_2, h_3],$$

3) Jacobi samasus

$$[h_1, [h_2, h_3]] + [h_3, [h_1, h_2]] + [h_2, [h_3, h_1]] = 0,$$

kus h_1, h_2, h_3 on $\mathcal{L}$ suvalised elemendid ja α, β, γ on põhikorpuse suvalised elemendid.♣

Näide 1. Kui h_0 on Lie' algebra $\mathcal{L}$ fikseeritud element, siis defineerime operaatori δ_{h_0} järgmise valemi abil:

$$\delta_{h_0}(h) = [h_0, h], \qquad h \in \mathcal{L}.$$

Veenduge, et operaator δ_{h_0} on lineaarne operaator ja omadus (4.1) järeldub sel juhul Jacobi samasusest. Seega, operaator δ_{h_0} on Lie' algebra $\mathcal{L}$ diferentseerimine.

Näide 2. Kui $\mathcal{A}$ on mingi assotsiatiivne algebra, siis Lie' algebra struktuur defineeritakse järgmise valemi abil:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a, \tag{4.2}$$

kus a ja b on algebra $\mathcal{A}$ suvalised elemendid. Seega osutub kõikide n-järku ruutmaatriksite algebra $Mat_n(\mathbf{K})$ Lie' algebraks kommutaatori (4.2) suhtes. Seda Lie' algebrat hakkame edaspidi tähistama $gl_n(\mathbf{K})$.

Näide 3. Olgu $\mathcal{A}$ mingi algebra ja δ_1, δ_2 olgu selle algebra diferentseerimised. Kõik algebra $\mathcal{A}$ diferentseerimised moodustavad ilmselt vektorruumi, mida me hakkame tähistama $D(\mathcal{A})$. Olgu selle ruumi elementide kommutaator defineeritud valemiga

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \, \delta_2 - \delta_2 \, \delta_1,$$

kus $\delta_1 \, \delta_2$ on diferentseerimiste kompositsioon. On lihtne veenduda, et $[\delta_1, \delta_2] \in D(\mathcal{A})$. Seega osutub ka ruum $D(\mathcal{A})$ Lie' algebraks.

Olgu $sl_n(\mathbf{K})$ algebra $gl_n(\mathbf{K})$ selliste maatriksite alamhulk, mille jaoks kehtib omadus $Tr(A) = 0$. Maatriksi jälje omaduse (2.6b) tõttu

$$Tr([A,B]) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0, \tag{4.3}$$

millest järeldub, et $sl_n(\mathbf{K})$ on Lie algebra $gl_n(\mathbf{K})$ alamalgebra. Omadusest (4.3) tuleneb ka, et $sl_n(\mathbf{K})$ osutub algebra $gl_n(\mathbf{K})$ ideaaliks.

Maatriksit $A \in Mat_n(\mathbf{K})$ nimetatakse kaldsümmeetriliseks, kui $A + A^t = 0$. Tähistame kaldsümmeetriliste maatriksite hulka $o_n(\mathbf{K})$. Omadustest (2.6b) järeldub jälle, et $o_n(\mathbf{K})$ on Lie' algebra $gl_n(\mathbf{K})$ alamalgebra. Tõepoolest, kehtib

$$\begin{aligned}[A,B] + [A,B]^t &= AB - BA + B^t A^t - A^t B^t \\ &= AB - BA + BA - AB = 0,\end{aligned}$$

kus $A,B \in o_n(\mathbf{K})$. Et iga kaldsümmeetrilise maatriksi korral $Tr(A + A^t) = 2\,Tr(A) = 0$, siis $o_n(\mathbf{K}) \subset sl_n(\mathbf{K})$.

Juhul $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ nimetatakse maatriksit A Hermite'i kaldsümmeetriliseks maatriksiks, kui on rahuldatud tingimus $A + \bar{A}^t = 0$. Kui tähistada kaaskompleksarvu võtmise ja transponeerimise operatsioon sümboliga "$\dagger$", s.t. $\bar{A}^t = A^\dagger$, siis Hermite'i kaldsümmeetrilisuse tingimus omandab kuju

$$A + A^\dagger = 0.$$

Tähistame kõigi n-järku Hermite'i kaldsümmeetriliste maatriksite hulka u_n. Nagu reaalarvuliste kaldsümmeetriliste maatriksite puhul, kehtib ka nüüd väide, et u_n on Lie' algebra $gl_n(\mathbf{C})$ alamalgebra.

Hermite'i kaldsümmeetrilised maatriksid, mis rahuldavad tingimust $Tr(A) = 0$, moodustavad alamalgebra Lie' algebras u_n, sest nad kuuluvad Lie' alamalgebra $sl_n(\mathbf{C})$ ja u_n ühisossa. Seda Lie' algebrat tähistatakse su_n. Lie' algebratel su_n on täita tähtis osa kalibratsioonväljateooriates. Juhul $n = 2$ osutub Lie' algebra su_2 Yangi-Millsi väljateooria kalibratsioonrühma Lie' algebraks. Lie' algebra su_3 on kromodünaamika (väljateooria, mis kirjeldab tugevaid vastasmõjusid) kalibratsioonrühma Lie' algebra.

Olgu J blokkmaatriks kujul

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

kus I_n on n-järku ühikmaatriks. Tähistame $sp_{2n}(\mathbf{K})$ $2n$-dimensionaalsete maatriksite hulka, mis rahuldavad tingimust

$$JA + A^t J = 0. \tag{4.5}$$

Kui maatriksit $A \in sp_{2n}(\mathbf{K})$ kujutada blokkmaatriksina

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

kus A_i on n-järku maatriksid, siis tingimus (4.5) on võrdväärne võrdustega

$$-A_1^t = A_4, \ A_2^t = A_2, \ A_3^t = A_3. \tag{4.7}$$

Otsene kontroll näitab, et $[A, B] \in sp_{2n}(\mathbf{K})$, kui $A, B \in sp_{2n}(\mathbf{K})$. Seega osutub $sp_{2n}(\mathbf{K})$ Lie' algebraks (sümplektiliste maatriksite rühma Lie' algebraks).

Vaatleme nüüd paragrahvi algul kirjeldatud struktuuride superüldistusi. Eelkõige täpsustagem teatud supervektorruumi V lineaarsete operaatorite ruumi $End(V)$ struktuuri. Lineaarset operaatorit $L : V \to V$ nimetatakse paarisoperaatoriks (paarituks), kui $L : V_i \to V_i, (V_i \to V_j, i \neq j)$, kus $i, j = \bar{0}, \bar{1}$. Seega ei muuda paarisoperaator ruumi V homogeense vektori paarsust, aga paaritu operaator muudab selle vastupidiseks. Suvalist operaatorit ruumist $End(V)$ võib üheselt kujutada paaris- ning paaritu operaatori summana, millest järeldub, et $End(V) = End_{\bar{0}}(V) \oplus End_{\bar{1}}(V)$, s.t. ruum $End(V)$ on supervektorruum. Operaatori paarsust hakkame tähistama sümboliga p.

Definitsioon 4.4. *Superalgebra $\mathcal{A}$ diferentseerimiseks nimetatakse sellist lineaarset operaatorit $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, mille puhul kehtib Leibnizi reegli superanaloog*

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + (-1)^{p(a)p(\delta)} a \cdot \delta(b) \tag{4.8}$$

iga homogeense $a \in \mathcal{A}$ ning δ jaoks. Superalgebra $\mathcal{A}$ kõikide diferentseerimiste ruumi tähistame $D(\mathcal{A})$.♣

Toome konkreetse näite diferentseerimisoperaatorite kohta. Alustame superalgebra lihtsaimast esindajast Grassmanni algebrast $\mathcal{G}^m$ moodustajatega $\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^m$. Tema suvalist elementi on võimalik avaldada kanoonilisel kujul

$$\xi = \sum_{I \in M_m} \alpha_I \theta^I = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}, \tag{4.9}$$

kus $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ on indeksite $i_1, \ldots, i_k$ järgi kaldsümmeetrilised korpuse **K** elemendid. Selles paragrahvis vaatleme algebra $\mathcal{G}^m$ elemente kui funktsioone, niisiis eeldame, et $\xi(\theta^1, \ldots, \theta^m)$ on paaritute muutujate skalaarne funktsioon ja (4.9) tema arendus Taylori reaks nende muutujate järgi. Defineerime kõigepealt monoomide $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}$ tuletise muutujate $\theta^1, \ldots, \theta^m$ järgi:

$$\partial_i(\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}) = \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \delta_{i_p i} \theta^{i_1} \ldots \hat{\theta}^{i_p} \ldots \theta^{i_k}, \tag{4.10}$$

kus $\delta_{i_p i}$ on Kroneckeri sümbol ja märk $\hat{\theta}^{i_p}$ muutuja θ^{i_p} kohal tähendab tema puudumist. Valemit (4.10) võib sõnastada järgmiselt: selleks et võtta monoomist $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}$ tuletist muutuja θ^i järgi, tuleb viimane monoomist üles otsida, viia vasakult esimesele kohale (kasutades muutujate antikommuteeruvust) ja taandada; kui sellist muutujat monoomis ei esine, on tuletis 0. Selles reeglis võib vasakult esimesele kohale viimise nõude ilmselt asendada ka muutuja paremale poole viimise nõudega. Seepärast nimetatakse reegli (4.10) järgi arvutatud tuletist mõnikord ka vasakpoolseks tuletiseks ja tähistatakse $\vec{\partial}_i$. Tuletise (4.10) mõju laieneb lineaarselt suvalisele Grassmanni algebra elemendile ξ. Selles raamatus eeldatakse vaikimisi, et kasutusel on vasakpoolsed tuletised (ilma nooleta). Tuletised ∂_i on ilmselt algebra $\mathcal{G}^m$ paaritud diferentseerimised. Selleks et tõestada Leibnizi reegli superanaloogi suvaliste algebra $\mathcal{G}^m$ elementide jaoks, on piisav veenduda, et ta kehtib elementaarmonoomide puhul. Olgu $\xi = \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}$ monoom paarsusega $p(\xi)$ ja $\eta = \theta^{j_1} \ldots \theta^{j_l}$. Nende korrutise kirjutame järgmiselt:

$$\xi \eta = \theta^{a_1} \ldots \theta^{a_k} \theta^{a_{k+1}} \ldots \theta^{a_{k+l}}, \tag{4.11}$$

kus $a_p = i_p$, $1 \leq p \leq k$ ja $a_p = j_{p-k}$, $k \leq p \leq l + k$. Nüüd taandub tõestus valemi (4.10) rakendamisele:

$$\begin{aligned}
\partial_i(\xi \eta) &= \sum_{p=1}^{k+l} (-1)^{p+1} \delta_{i a_p} \theta^{a_1} \ldots \hat{\theta}^{a_p} \ldots \theta^{a_{k+l}} \\
&= \Big(\sum_{p=1}^{k+l} (-1)^{p+1} \delta_{i i_p} \theta^{i_1} \ldots \hat{\theta}^{i_p} \ldots \theta^{i_k}\Big) \theta^{j_1} \ldots \theta^{j_l} + \\
&\qquad + \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k} \Big(\sum_{p=1}^{l} (-1)^{k+p+1} \delta_{i j_p} \theta^{j_1} \ldots \hat{\theta}^{j_p} \ldots \theta^{j_l}\Big) \\
&= \partial_i(\xi)\, \eta + (-1)^{p(k)}\, \xi\, \partial_i(\eta).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

On ilmne, et tuletised ∂_i ei anna veel piisavalt üldist Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ diferentseerimisoperaatori kuju. Olgu $\xi \in \mathcal{G}^m$ mingi homogeenne element algebrast $\mathcal{G}^m$. Olgu operaator $\xi\,\partial_i$ selline, mis teisendab algebra $\mathcal{G}^m$ suvalist elementi $\eta \in \mathcal{G}^m$ järgmiselt:

$$(\xi\,\partial_i)(\eta) = \xi\,(\partial_i(\eta)). \tag{4.14}$$

Pole keeruline veenduda, et valemi (4.14) abil defineeritud operaator osutub diferentseerimisoperaatoriks. Tema paarsus määratakse reegli

$$p(\xi\,\partial_i) = p(\xi) + p(\partial_i) = p(\xi) + 1 \tag{4.15}$$

järgi. Seega koosneb hulk $D(\mathcal{G}^m)$ kõikvõimalikest avaldistest kujul

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \xi^i\,\partial_i, \tag{4.16}$$

kus $\xi^i \in \mathcal{G}^m$. Vastavalt valemile (4.15) on δ diferentseerimise paarisoperaator, kui kõik ξ^i on paaritud elemendid, ning paaritu operaator, kui kõik ξ^i on paariselemendid. Valem (4.15) määrab hulgas $D(\mathcal{G}^m)$ gradueeritud struktuuri. Seega $D(\mathcal{G}^m)$ on supervektorruum. Peale selle sobib supervektorruum $D(\mathcal{G}^m)$ veel teistegi huvitavate superstruktuuride illustratsiooniks.

Definitsioon 4.5. *Abeli rühma G nimetatakse Z_2-gradueeritud Abeli rühmaks, kui on fikseeritud tema lahutus alamrühmade $G_{\bar 0} \subset G$ ja $G_{\bar 1} \subset G$ otsesummaks*

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1},$$

kusjuures liitmisoperatsioon peab rahuldama tingimust

$$p(a+b) = p(a) + p(b), \tag{4.17}$$

kus p on homogeensete elementide paarsus.♣

Lause 4.1. *Ruum $D(\mathcal{G}^m)$ on Z_2-gradueeritud Abeli rühm avaldiste (4.16) liitmise suhtes, mis on määratud valemiga*

$$\delta_1 + \delta_2 = \sum_{i=1}^{m} (\xi^i + \eta^i)\,\partial_i, \tag{4.18}$$

kus $\delta_1 = \sum_{i=1}^m \xi^i \partial_i, \qquad \delta_2 = \sum_{i=1}^m \eta^i \partial_i.$♣

Definitsioon 4.6. *Olgu $\mathcal{A}$ mingi superalgebra ja L mingi Z_2-gradueeritud Abeli rühm. Abeli rühma L nimetatakse Z_2-gradueeritud vasakpoolseks mooduliks üle superalgebra $\mathcal{A}$, kui on täidetud kõik tavalise mooduli aksioomid definitsioonist (4.1) ja*

$$p(a \cdot l) = p(a) + p(l), \tag{4.19}$$

kus p tähistab vastavate homogeensete elementide $a \in \mathcal{A}$ ning $l \in L$ paarsust.♣

Parempoolne moodul üle algebra $\mathcal{A}$ defineeritakse analoogiliselt. Kui superalgebra $\mathcal{A}$ on kommutatiivne, saab iga ühepoolne moodul kanooniliselt bimooduliks. Kui superalgebra $\mathcal{A}$ ei ole kommutatiivne, nimetatakse Z_2-gradueeritud Abeli rühma vasakpoolse Z_2-gradueeritud mooduli struktuure ja parempoolse Z_2-gradueeritud mooduli struktuure kooskõlastatuks, kui kehtib

$$a \circ l = (-1)^{p(a)p(l)} l \circ a. \tag{4.20}$$

Lause 4.2. *Z_2-gradueeritud Abeli rühm $D(\mathcal{G}^m)$ on Z_2-gradueeritud vasakpoolne moodul üle algebra $\mathcal{G}^m$ järgmise operatsiooni suhtes:*

$$(\xi \cdot \delta)(\eta) = \xi \cdot (\delta(\eta)),$$

kus $\xi, \eta \in \mathcal{G}^m$ ja $\delta \in D(\mathcal{G}^m)$. Operaatori $\xi \cdot \delta$ paarsus defineeritakse valemiga

$$p(\xi\delta) = p(\xi) + p(\delta).♣$$

Selle paragrahvi alguses (näide 3) märgiti, et algebra $\mathcal{A}$ kõikide diferentseerimiste ruum $D(\mathcal{A})$ on Lie' algebra selles näites defineeritud kommutaatori suhtes. Analoogilist struktuuri on võimalik defineerida ka supervektorruumis $D(\mathcal{A})$, kus $\mathcal{A}$ on superalgebra.

Definitsioon 4.7. *Z_2-gradueeritud vektorruumi $\mathcal{L}_s$ temal määratud lineaarse operatsiooniga $[\,,\,] : \mathcal{L}_s \to \mathcal{L}_s$ nimetatakse Lie' superalgebraks, kui on täidetud tingimused:*

i) $[a,b] = -(-1)^{p(a)p(b)}[b,a],$

ii) $(-1)^{p(a)p(c)}[a,[b,c]] + (-1)^{p(c)p(b)}[c,[a,b]]$
$\quad + (-1)^{p(b)p(a)}[b,[c,a]] = 0,$

kus a, b, c on vektorruumi $\mathcal{L}_s$ elemendid ja $p(a), p(b), p(c)$ nende paarsused.♣

Olgu $\mathcal{A}$ superalgebra ja $D(\mathcal{A})$ selle algebra diferentseerimiste vasakpoolne moodul. Defineerime järgmise valemi abil kommutaatori:

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - (-1)^{p(\delta_1)p(\delta_2)}\delta_2\delta_1, \tag{4.21}$$

kus δ_1, δ_2 on homogeensed diferentseerimised. Lineaarsuse tõttu laieneb valem (4.21) hulga $D(\mathcal{A})$ suvalistele elementidele.

Lause 4.3. *Vasakpoolne moodul $D(\mathcal{A})$ on operatsiooni (4.21) suhtes Lie' superalgebra.♣*

Järeldus. *$D(\mathcal{G}^m)$ on Lie' superalgebra operatsiooni (4.21) suhtes.♣*

Suure hulga näiteid Lie' superalgebrate kohta saame Lie' algebrate gl_n, sl_n, o_n, su_n ja sp_{2n} üldistustest.

Kui $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ on supervektorruum, kusjuures $dimV_{\bar{0}} = k$ ning $dimV_{\bar{1}} = l$, siis ruumil $End(V)$ on supervektorruumi struktuur. Ilmneb, et $End(V)$ on operaatorite kompositsiooni suhtes assotsiatiivne superalgebra. Vastavalt eespool kirjeldatud assotsiatiivsete algebrate kohta käivale üldprotseduurile defineerime Lie' superalgebra struktuuri ruumil $End(V)$ valemiga

$$[A, B] = AB - (-1)^{p(A)p(B)}BA, \tag{4.22}$$

kus A ja B on ruumi $End(V)$ homogeensed elemendid. Tähistame saadud Lie' superalgebra $gl_{k,l}$. Olgu $\{e_i, e_\alpha\}, i = 1, \ldots k$; $\alpha = k+1, \ldots k+l$ superstruktuuriga kooskõlastatud ruumi V baas. Siis võib iga operaatorit kirjeldada üheselt blokkmaatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

kus A_1 on $k \times k$-dimensionaalne, A_4 on $l \times l$-dimensionaalne, A_3 on $l \times k$-dimensionaalne ning A_2 on $k \times l$-dimensionaalne maatriks. Maatriksi A elementideks on korpuse $\mathbf{K}$ elemendid (skalaarid), mitte aga mingi Grassmanni algebra elemendid (s.t. see pole supermaatriks!). Konstruktsiooni, kus elementideks on supermaatriksid, võib leida järgmises paragrahvis. Seega osutub $gl_{k,l}$ Lie' algebra gl_n superüldistuseks.

Defineerime maatriksi (4.23) jaoks superjälje nagu supermaatriksitegi jaoks valemiga

$$Str(A) = Tr(A_1) - Tr(A_4). \tag{4.24}$$

Lihtne on näha, et paarismaatriksite A ja B korral, millel on kuju

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix},$$

võrdub kommutaator vastavalt valemile (4.22) järgnevaga:

$$[A,B] = \begin{pmatrix} [A_1,B_1] & 0 \\ 0 & [A_4,B_4] \end{pmatrix}.$$

Maatriksi tavalise jälje omadustest saame, et $Str([A,B]) = 0$. Paaritumaatriksite A ja B puhul, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix},$$

saame kommutaatori

$$[A,B] = \begin{pmatrix} A_2B_3 + B_2A_3 & 0 \\ 0 & A_3B_2 + B_3A_2 \end{pmatrix}.$$

Vastavalt valemile (4.24) ja tavalise jälje omadustele saame

$$\begin{aligned} Str([A,B]) &= Tr(A_2B_3) + Tr(B_2A_3) - \\ &- Tr(A_3B_2) - Tr(B_3A_2) = 0. \end{aligned}$$

Olukord, kus siin üks on paarismaatriks ja teine paaritumaatriks, jäägu uurimiseks lugejale.

Et iga maatriksit võib üheselt esitada paaris- ja paaritumaatriksi summana, saame

$$Str([A,B]) = 0 \tag{4.25}$$

suvaliste $A, B \in gl_{k,l}$ jaoks. Pöörakem tähelepanu asjaolule, et (4.25) tõestuseks ei saa kasutada supermaatriksite superjälje omadusi (2.28b). Seosest (4.25) järeldub, et maatriksid, mille superjälg on võrdne nulliga, moodustavad Lie' superalgebra $gl_{k,l}$ alamalgebra, mida hakkame tähistama $sl_{k,l}$. Seega

$$sl_{k,l} = \{A \in gl_{k,l} \mid Str(A) = 0\}.$$

Lie' superalgebra $sl_{k,l}$ on Lie' algebra sl_n superüldistus. Seda superalgebrat nimetatakse unimodulaarseks lineaarseks Lie' superalgebraks.

Olgu $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ja $U \in gl_{k,l}(\mathbf{C})$ kujul

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + e^{-\frac{\pi i}{4}} \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

kusjuures $A + A^\dagger = 0$, $D + D^\dagger = 0$ ($\dagger$ tähistab Hermite'i kaaskompleksoperatsiooni). Valemi (4.22) rakendamine näitab, et kahe maatriksi (4.26) kommutaator on samuti maatriks kujul (4.26), s.t. maatriksid kujul (4.26) moodustavad Lie' superalgebra, mida tähistatakse $u_{k,l}$. Näeme, et $u_{k,l}$ on Hermite'i kaldsümmeetriliste maatriksite Lie' algebra superanaloog.

Lie' superalgebra $su_{k,l}$ saame, kui esitame maatriksitele (4.26) täiendavad tingimused $Str(U) = 0$, s.t.

$$su_{k,l} = \{U \in u_{k,l} \mid Str(U) = 0\}.$$

Maatriksid kujul

$$U = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & -A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \nu \\ \nu^t & -\mu^t & 0 \end{pmatrix},$$

kus $B = B^t$, $C = C^t$, $F = -F^t$, moodustavad Lie' superalgebra $osp_{2p,q}(\mathbf{K})$, mida nimetatakse ortogonaal-sümplektiliseks superalgebraks. Nad rahuldavad tingimust

$$UJ + JU^t = 0,$$

kus

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Antud paragrahvi lõpetab veel ühe supermooduli, spiinorite supermooduli kirjeldus. Seitsmendas paragrahvis konstrueeritakse selle supermooduli abil superseostus spiinorkihtkonnas. Konstruktsioon põhineb Cliffordi algebral C^m, mille kirjelduse võib leida esimese paragrahvi lõpus.

Enne spiinorite supermooduli juurde asumist tutvustame mõningaid üldisi konstruktsioone. Z_2-gradueeritud moodul (supermoodul) algebral $\mathcal{A}$ definitsioonist 4.6 on Z_2-gradueeritud rühm, mis rahuldab vastavaid aksioome. Ilmselt pole keeruline asendada selles definitsioonis Z_2-gradueeritud Abeli rühm mingi supervektorruumiga V. Olgu V ja W kaks supermoodulit vastavalt superalgebratel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Superruumiks

$V \otimes W$ loeme ruumide V ja W tensorkorrutist, mille gradueering on määratud valemiga

$$p(v \otimes w) = p(v) + p(w).$$

Defineerime nüüd kujutuse $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\times(V\otimes W) \to V\otimes W$ järgmisel viisil:

$$(a \otimes b, v \otimes w) \to (-1)^{p(b)p(v)} a(v) \otimes b(w), \tag{4.27}$$

kus $(a, v) \to a(v)$ ja $(b, w) \to b(w)$ vastavad supermoodulite V, W struktuuridele, ja lineaarsuse tõttu laiendame seda suvalisele elemendile.

Lause 4.4. *Kujutus (4.27) määrab vasakpoolse supermooduli $V \otimes W$ struktuuri üle superalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*♣

Selle väite tõestuseks on vaja vaid kontrollida aksioomi

$$((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b'))(v \otimes w) = (a \otimes b)((a' \otimes b')(v \otimes w)).$$

Võrduse vasakut poolt teisendades saame

$$(-1)^{p(a')p(b)+p(v)p(b)+p(b')p(v)} a\,(a'(v)) \otimes b\,(b'(w)).$$

Rakendades võrduse paremale poolele kaks korda valemit (4.27), jõuame samale tulemusele.

Supermooduli V struktuur üle algebra $\mathcal{A}$ tähendab, et leidub paarsust säilitav homomorfism $\mathcal{A} \to End(V)$; teisisõnu, igale elemendile $a \in \mathcal{A}$ vastab ruumi V teatud endomorfism, mida hakkame tähistama sama tähega a. Olgu $V \otimes W$ supermoodul üle superalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Lause 4.5.

$$Str(a \otimes b) = Str(a)\,Str(b),$$

kus $a \in \mathcal{A}$ ja $b \in \mathcal{B}$.♣

Olgu C_n paarisarvu moodustajatega $(n = 2m)$ Cliffordi algebra üle korpuse **C**. Siis $C_n = C_2 \otimes \ldots C_2(m$ korda), kus C_2 on kahe moodustajaga γ_1 ja γ_2 Cliffordi algebra. Tõepoolest, kui $m = 2$, kehtib $C_4 = C_2 \otimes C_2$, ja kui tähistada elemendid $1 \otimes \gamma_1'$ ja $1 \otimes \gamma_2'$ vastavalt sümbolitega γ_3 ja γ_4 ning $\gamma_1 \otimes 1$ ja $\gamma_2 \otimes 1$ sümbolitega γ_1 ja γ_2, kus γ_1', γ_2' on teise teguri moodustajad, siis saame näiteks:

$$[\gamma_1, \gamma_3] = [\gamma_1 \otimes 1, 1 \otimes \gamma_1'] = \gamma_1 \otimes \gamma_1' - \gamma_1 \otimes \gamma_1' = 0,$$

aga

$$[\gamma_3, \gamma_3] = [1 \otimes \gamma_1', 1 \otimes \gamma_1'] = 2\,(1 \otimes (\gamma_1')^2) = 2.$$

Analoogiliselt kontrollitakse ka teisi Cliffordi algebra seoseid.

Kahemõõtmelise Cliffordi algebra jaoks eksisteerib realisatsioon 2×2-mõõtmeliste kompleksarvuliste kordajatega maatriksite abil. Olgu

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Pole raske näha, et seesugusel samastamisel säilivad kõik Cliffordi algebra seosed. Seega, kui vaadelda eespool toodud maatrikseid ruumi $\mathbf{C}^2$ endomorfismina, siis samastamine (4.28) määrab ära superalgebra C_2 homomorfismi ruumi $End(\mathbf{C}^2)$. Ruumi $\mathbf{C}^2$ loeme superruumiks, kusjuures Z_2-struktuur põhineb kokkuleppel, et esimene baasivektor on paarisvektor ja teine paarituvektor (vt. näidet esimeses paragrahvis). Siis järeldub valemitest (4.28), et homomorfism $C_2 \to End(\mathbf{C}^2)$ säilitab paarsuse. See tähendab, et $\mathbf{C}^2$ osutub supermooduliks üle Cliffordi algebra C_2. Märgime tõika, et ruumi $\mathbf{C}^2$ superstruktuur määratakse tema automorfismiga ϵ, mille maatriksiks on

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lihtne on veenduda, et $i^{-1}\gamma_1\gamma_2 = \epsilon$. Vastavalt eespool kirjeldatud konstruktsioonile osutub ruum $S^n = \mathbf{C}^2 \otimes \ldots \mathbf{C}^2$ vasakpoolseks supermooduliks üle Cliffordi algebra C_n (sest $C_n = C_2 \otimes \ldots \otimes C_2$ (m korda)). Ruumi S^n dimensioon on 2^m. Tema superstruktuur on määratud maatriksiga $\epsilon = i^{-m}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$.

Sama konstruktsiooni võib kirjeldada ka teisiti. Olgu $\mathcal{G}^m$ Grassmanni algebra, mille moodustajateks on $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Toome sisse algebra $\mathcal{G}^m$ lineaarsed operaatorid:

$$\gamma_{2k-1} = \partial_k + \hat{\theta}_k, \ \gamma_{2k} = i(\hat{\theta}_k - \partial_k), \tag{4.29}$$

kus $k = 1, 2, \ldots, m$ ja $\hat{\theta}_k$ tähendab moodustajaga θ_k korrutamise operaatorit. Siis

$$[\gamma_i, \gamma_j] = 2\delta_{ij},$$

kus $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Kui $m = 1$, saame operaatorite (4.29) abil maatriksid (4.28). Seega võib ruumi S^n vaadelda kui Grassmanni algebrat. Sel juhul esitavad supermooduli struktuuri operaatorid (4.29).

Vastavalt eespool toodud supermooduli struktuurile võib Cliffordi algebra C_n suvalise elemendi x jaoks defineerida tema superjälje $Str(x)$. Et iga elemendi x jaoks leidub tema arendus Cliffordi algebra moodustajate järgi kujul

$$x = \sum_I \alpha_I \gamma_I,$$

siis ilmselt piisab, kui arvutada elementaarmonoomide γ_I superjälg, sest definitsiooni järgi

$$Str(x) = \sum_I \alpha_I Str(\gamma_I).$$

Lause 4.6.

$$Str(\gamma_I) = \begin{cases} 0, & \text{kui } I \neq \{1,2,\ldots n\}; \\ (2i)^m, & \text{kui } I = \{1,2,\ldots,n\}. \clubsuit \end{cases}$$

Tõestame selle lause induktsioonimeetodil. Kui $m = 1$, siis järeldub valemist (4.28), et

$$Str(1) = Str(\gamma_1) = Str(\gamma_2) = 0,$$

$$Str(\gamma_1 \gamma_2) = Str(i\epsilon) = 2i.$$

Oletame, et väide on õige mingi $m > 1$ korral, ja näitame, et täpselt samad valemid jäävad kehtima ka $m+1$ korral. Olgu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ Cliffordi algebra C_n $(n = 2m)$ moodustajad ja γ'_1, γ'_2 algebra C_2 moodustajad. Siis on algebra $C_{n+1} = C_n \otimes C_2$ elementaarmonoomideks elemendid

$$\gamma_I \otimes 1, \gamma_I \otimes \gamma'_i, \gamma_I \otimes (\gamma'_1 \gamma'_2),$$

kus $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ ja $i = 1,2$. Vastavalt lausele 4.5 kehtib

$$Str(\gamma_I \otimes 1) = Str(\gamma_I) Str(1) = 0,$$

$$Str(\gamma_I \otimes \gamma'_i) = Str(\gamma_I) Str(\gamma'_i) = 0$$

ja

$$\begin{aligned} Str(\gamma_I \otimes (\gamma'_1 \gamma'_2) &= Str(\gamma_I) Str(i\epsilon) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kui } I \neq \{1,2,\ldots n\}; \\ (2i)^{m+1}, & \text{kui } I = \{1,2,\ldots,n\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Et element $\gamma_I \otimes (\gamma'_1 \gamma'_2)$ samastatakse elemendiga $\gamma_I \gamma_{2m+1} \gamma_{2m+2}$, ongi lause tõestatud. Seega kehtib valem

$$Str(x) = (2i)^m \alpha_{12\ldots n}, \tag{4.30}$$

kus x on Cliffordi algebra C_n suvaline element.

5

Supermuutkond

S-muutkond. Superpiirkond. Superpiirkondade morfism. Funktsiooni Grassmanni jätk. Supermuutkond. Lagunduv supermuutkond.

Selles paragrahvis kirjeldatakse superpiirkonna ja supermuutkonna mõistet. Tähistagu **K** korpust **R** või **C**. Muutkonna struktuuri kirjeldamiseks on olemas kaks täiesti ekvivalentset lähenemisviisi. Lihtsustades mõnevõrra olukorda, võib öelda, et üks neist lähenemisviisidest seisneb mudelruumi lahtiste piirkondade kokkukleepimises teatud klassi funktsioonide (diferentseeruvate, reaalanalüütiliste jne.) abil. Teine seisneb teatud funktsioonideklassi valikus muutkonnal. Viimane võte on supermuutkondade puhul eelistatum, sest, nagu märgitud eespool, paaritud koordinaadid $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$ ilmuvad tänu sellele, et vaadeldakse funktsioone väärtustega Grassmanni algebras $\mathcal{G}^m$. Teist lähenemisviisi saab formuleerida kimpude teooria mõistete abil, nagu tegi seda Berezin oma töödes. Et mitte koormata teksti lisadefinitsioonidega, tuletame supermuutkonna konstruktsiooni kimbu ja ringistusruumi mõistet sisse toomata.

Käsitluse suletuse huvides tuletame meelde edaspidiseks vajaminevad põhilised funktsioonide klassid:

a) $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;

1) siledate reaalarvuliste väärtustega funktsioonide ruum $\mathcal{E}(U)$ lahtisel alamhulgal $U \subset \mathbf{R}^n$; $f \in \mathcal{E}(U)$ parajasti siis, kui tal on U igas punktis pidevad igat järku osatuletised;
2) reaalsete analüütiliste funktsioonide ruum $\mathcal{A}(U)$; $f \in \mathcal{A}(U)$ parajasti siis, kui funktsiooni f Taylori rida koondub funktsiooniks f U suvalise punkti ümbruses;

b) $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;

1) kompleksssete analüütiliste funktsioonide ruum $\mathcal{O}(U)$ alamhulgal $U \subset \mathbf{C}^n$; $f \in \mathcal{O}(U)$ parajasti siis, kui funktsiooni f võib iga punkti $z_0 \in U$ ümbruses esitada

koonduva astmereana kujul

$$f(z) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (z^1 - z_0^1)^{\alpha_1} \dots (z^n - z_0^n)^{\alpha_n}.$$

Edaspidi tähistab $S(U)$ ühte ülalpool loetletud **K**-funktsioonide ruumi alamhulgal $U \subset \mathbf{K}^n$. Ruumi $S(U)$ elemente nimetame S-funktsioonideks.

Definitsioon 5.1. *Loenduvat baasi* $\mathbf{R}^n$ *omava alamhulgaga lokaalselt homeomorfset Haudsdorffi topoloogilist ruumi nimetatakse* n*-dimensionaalseks topoloogiliseks muutkonnaks.*♣

Definitsioon 5.2. *S-muutkonnaks nimetatakse topoloogilist muutkonda M, mille korral kehtivad järgmised tingimused:*

1) *muutkonnal M on antud funktsioonide pere S_M, mis on määratud M lahtistel alamhulkadel ja mille väärtused on korpusest* **K**;
2) *$\forall x \in M$ leidub lahtine ümbrus U ($x \in U$) ja homeomorfism $h : U \to U' \subset \mathbf{K}^n$, nii et iga lahtise alamhulga $V \subset U$ korral funktsioon $f \in S_M$ parajasti siis, kui $f \circ h^{-1} \in S(h(V))$;*
3) *kui $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lahtise hulga U lahtine kate, s.t. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = U$, ja $f : U \to \mathbf{K}$, siis $f \in S_M$ parajasti siis, kui $f|_{U_\alpha} \in S_M, \quad \forall \alpha \in A$.*♣

Arvu n definitsioonis 5.2 nimetatakse muutkonna M **K**-dimensiooniks (kompleksdimensiooniks, kui $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, ja reaaldimensiooniks, kui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Seega saab eristada kolme tüüpi muutkondi:

a) sile reaalne muutkond M, kui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ja $S(U) = \mathcal{E}(U)$;
b) reaalne analüütiline muutkond M, kui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ja $S(U) = \mathcal{A}(U)$;
c) kompleksne analüütiline muutkond M, kui $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ja $S(U) = \mathcal{O}(U)$.

Toodud definitsioonist nähtub, et muutkond konstrueeritakse ruumi $\mathbf{K}^n$ lahtiste piirkondade ja neil määratud teatud funktsioonide klassi abil. Selles mõttes võib paari $\{U, S(U)\}$, kus $U \subset \mathbf{K}^n$ on ruumi $\mathbf{K}^n$ lahtine alamhulk ja $S(U)$ selles defineeritud funktsioonide ring, nimetada muutkonna mudelpiirkonnaks. Seega võib supermuutkonda konstrueerida analoogiliselt, defineerides eelnevalt mudelsuperpiirkonnad.

Olgu U lahtine hulk ruumis $\mathbf{K}^n$ koordinaatidega $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ja $\mathcal{G}^m$ Grassmanni algebra üle korpuse $\mathbf{K}$ moodustajatega $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$. Olgu $C(U, \mathcal{G}^m)$ hulgal U väärtustega algebras $\mathcal{G}^m$ pidevate funktsioonide ring. Kui f on ringi $C(U, \mathcal{G}^m)$ mingi element, siis võib teda esitada kujul

$$f(x,\theta) = \sum_{k=0}^{m} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k}, \tag{5.1}$$

kus $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)$ on indeksite $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ suhtes kaldsümmeetrilised hulgal U pidevad $\mathbf{K}$-väärtustega funktsioonid.

Definitsioon 5.3. *Pidevat funktsiooni $f(x,\theta)$ kujul (5.1) nimetatakse S-funktsiooniks hulgal U väärtustega algebras $\mathcal{G}^m$, kui $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) \in S(U)$ kõikide indeksite komplektide $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ korral.*♣

Koefitsientfunktsioonid $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)$ on tavalised argumendi x funktsioonid, füüsikas nimetatakse neid komponentideks. Supersümmeetrilistes teooriates loetakse paarismonoomide $\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_{2k}}$ kordajaid bosonvälju kirjeldavateks ja paaritumonoomide $\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_{2k+1}}$ kordajaid fermionvälju kirjeldavateks. Seega võimaldab avaldis (5.1) ühendada mitu erinevat tüüpi välja üheks matemaatiliseks objektiks, mida nimetatakse antud teooria väljade multipletiks. Konkreetsete teooriate komponentanalüüsi üksikasjalisema kirjelduse leiate esimesest peatükist. Kõikide $\mathcal{G}^m$-väärtustega S-funktsioonide hulka hakkame edaspidi tähistama $S(U, \mathcal{G}^m)$.

Lause 5.1. *Algebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ on kommutatiivne superring (superalgebra).*♣

Seega analoogiliselt $\mathbf{K}$-väärtustega funktsioonidega saame

1) $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ korral siledate $\mathcal{G}^m$-väärtustega funktsioonide ringi $\mathcal{E}(U, \mathcal{G}^m)$ ja analüütiliste $\mathcal{G}^m$-väärtustega funktsioonide ringi $\mathcal{A}(U, \mathcal{G}^m)$;
2) $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ korral komplekssete analüütiliste $\mathcal{G}^m$-väärtustega funktsioonide ringi $\mathcal{O}(U, \mathcal{G}^m)$.

Vahel nimetatakse $S(U, \mathcal{G}^m)$-tüüpi algebraid ka B-algebrateks (F.A. Berezini nime järgi, kes konstrueeris ühena esimestest antikommuteeruvate muutujatega objektide matemaatilise teooria).

Definitsioon 5.4. *Paari $\{U, S(U, \mathcal{G}^m)\}$ nimetatakse superpiirkonnaks dimensiooniga (n, m) ja teda tähistatakse $U_S^{n,m}$. Kui*

$U = \mathbf{R}^n$, siis paari $\{\mathbf{R}^n, S(\mathbf{R}^n, \mathcal{G}^m)\}$ nimetatakse standardseks (n, m)-dimensionaalseks superruumiks ja tähistatakse $\mathbf{R}^{n,m}$.♣

Sageli nimetatakse lahtist hulka $U \subset \mathbf{K}^n$ superpiirkonna $U_S^{n,m}$ *taanduvaks piirkonnaks (reduced domain).* Taanduva piirkonna koordinaatide ja Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajate kogumit (x^i, θ^α) nimetatakse superpiirkonna $U_S^{n,m}$ koordinaatideks. Seega võib valemit (5.1) vaadelda funktsiooni $f(x, \theta)$ arendusena Taylori reaks paaritute koordinaatide θ^1, $\theta^2, \ldots, \theta^m$ järgi. Paaritute koordinaatide antikommutatiivsusest järeldub selle arenduse lõplikkus.

Eelmises paragrahvis toodud diferentseerimisoperaatori mõiste lubab defineerida vektorväljad superpiirkonnas $U_S^{n,m}$.

Definitsioon 5.5. *Vektorväljaks $\mathcal{X}$ superpiirkonnas $U_S^{n,m}$ nimetatakse superalgebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ diferentseerimist.*♣

Analoogiliselt neljanda paragrahviga võib vektorvälja $\mathcal{X}$ avaldada lokaalsete koordinaatide (x^i, θ^α) abil:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n} f^i(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \xi^\alpha(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}. \tag{5.2}$$

Kõikide vektorväljade vektorruumi tähistame sümboliga $Vect(U_S^{n,m})$. Vektorruumi $Vect(U_S^{n,m})$ jaoks kehtib peaaegu kõik see, mis hulga $D(\mathcal{G}^m)$ korralgi. Sulu

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} - (-1)^{p(\mathcal{X})p(\mathcal{Y})} \mathcal{Y} \cdot \mathcal{X} \tag{5.3}$$

suhtes osutub vektorruum $Vect(U_S^{n,m})$ Lie' superalgebraks.

Lause 5.2. *Vektorruum $Vect(U_S^{n,m})$ on Lie' superalgebra kahe vektorvälja kommutaatori (5.3) suhtes.*♣

Tihti tähistatakse superpiirkonna $U_S^{n,m}$ lokaalkoordinaate mugavuse mõttes ühe tähega: $(z^a) = (x^i, \theta^\alpha)$, kus $a = i$, kui $1 \leq a \leq n$ ja $a = \alpha + n$, kui $n + 1 \leq a \leq n + m$. Vektorväli avaldub siis kujul

$$\mathcal{X} = \sum_{a=1}^{n+m} f(z)^a \frac{\partial}{\partial z^a}. \tag{5.4}$$

Kujutus $s : \mathcal{G}^m \to \mathbf{K}$ (vt. (1.27)) kandub funktsioonidele (5.1) üle järgmisel viisil:

$$s(f(x, \theta)) = f(x, \theta)\Big|_{\theta^\alpha \to 0}. \tag{5.5}$$

Järelikult $s : S(U, \mathcal{G}^m) \to S(U)$, kusjuures s on algebrate homomorfism.

Olgu $f \in S(U)$ tavaline arvfunktsioon piirkonnal U. Lähtudes funktsioonist f võib konstrueerida funktsiooni $\tilde{f} \in S(U, \mathcal{G}^m)$. Olgu $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ algebra $\mathcal{G}^m$ paariselemendid, mille jaoks $s(y) = (s(y^1), s(y^2), \ldots, s(y^n)) \in U$. Defineerime funktsiooni $\tilde{f}$ väärtuse punktis $s(y)$ valemiga

$$\tilde{f}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots \alpha_n} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \right|_{s(y)} \times \\ \times (y^1 - s(y^1))^{\alpha_1} \ldots (y^n - s(y^n))^{\alpha_n}. \tag{5.6}$$

On näha, et funktsiooni $\tilde{f}$ väärtus punktis $s(y)$ on Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ element ja rida (5.6) koosneb lõplikust arvust liidetavatest. Kirjeldatud konstruktsiooni nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Grassmanni jätkuks punktis $s(y)$ superpiirkonda $U^{n,m}$.

Ilmselt on superpiirkonna $U_S^{n,m}$ koordinaatidel (x^i, θ^α) see iseloomulik omadus, et iga superalgebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ elementi võib esitada kujul (5.1). Seepärast võib esitada järgmise definitsiooni.

Definitsioon 5.6. *Superalgebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ paariselemendid $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ ja paaritud elemendid $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m)$ moodustavad superpiirkonnas $U_S^{n,m}$ koordinaatsüsteemi, kui suvalist elementi $f \in S(U, \mathcal{G}^m)$ võib üheselt esitada kujul*

$$f = \sum_{k=0}^{m} \tilde{f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(y) \eta^{\alpha_1} \ldots \eta^{\alpha_k}, \tag{5.7}$$

kus $\tilde{f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(y)$ on funktsiooni $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(s(y^1), s(y^2), \ldots, s(y^n)) \in S(U)$ analüütiline Grassmanni jätk.♣

Et $y^1, y^2, \ldots, y^n$ on algebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ paariselemendid ja $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m$ paaritud elemendid, kehtib

$$\begin{cases} y^i = y_0^i(x) + y_{\alpha\beta}^i(x) \theta^\alpha \theta^\beta + \ldots, \\ \eta^\alpha = \rho_\beta^\alpha(x) \theta^\alpha + \ldots, \end{cases} \tag{5.8}$$

kus (x, θ) on superpiirkonna $U_S^{n,m}$ koordinaatsüsteem. Järgmises teoreemis (tõestuseta) tuuakse ära tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et elemendid (y^i, η^α) oleksid superpiirkonna $U_S^{n,m}$ koordinaadid.

Teoreem 5.1. *Avaldugu superalgebra $S(U, \mathcal{G}^m)$ elemendid (y^i, η^α) kujul*

$$\begin{cases} y^i(x,\theta) = y_0^i(x) + y^i_{\alpha\beta}(x)\theta^\alpha\theta^\beta + \ldots, \\ \eta^\alpha(x,\theta) = \rho^\alpha_\beta(x)\,\theta^\beta + \rho^\alpha_{\beta\gamma\lambda}(x)\theta^\beta\theta^\gamma\theta^\lambda + \ldots. \end{cases} \tag{5.9}$$

Elemendid (y^i, η^α) moodustavad superpiirkonna $U_S^{n,m}$ koordinaatsüsteemi siis ja ainult siis, kui funktsioonide $y_0^1(x)$, $y_0^2(x), \ldots, y_0^n(x)$ abil antud piirkonna U kujutus $\varphi : U \to U'$, kus $\varphi(x) = (y_0^1(x), y_0^2(x), \ldots, y_0^n(x)) \in U'$, on difeomorfism ja maatriks $\rho^\alpha_\beta(x)$ on igas piirkonna punktis x mittekidunud.♣

Kehtib $y_0^i(x) = s(y^i(x,\theta))$. Analoogiliselt klassikaliste muutkondadega võib defineerida maatriksi

$$\bar{D}(x,\theta) = \|\bar{D}^a_b(x,\theta)\| = \|\frac{\partial \acute{z}^a}{\partial z^b}\|, \tag{5.10}$$

kus $(\acute{z}^a) = (y^i; \eta^\alpha)$, $(z^a) = (x^i; \theta^\alpha)$. Ilmselt on maatriks (5.10) supermaatriks normaalkujuga

$$\bar{D}(x,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} & \frac{\partial y^i}{\partial \theta^\beta} \\ \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} & \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \theta^\beta} \end{pmatrix}.$$

Võttes arvesse teoreemi 2.1, võib teha järelduse, et teoreemi 5.1 tingimused on ekvivalentsed supermaatriksi $\bar{D}(x,\theta)$ mittekiduvuse nõudega.

Järeldus. *Elemendid (5.9) moodustavad superpiirkonnas $U_S^{n,m}$ koordinaatsüsteemi siis ja ainult siis, kui*

$$Sdet(\bar{D}(x,\theta)) \neq 0. \clubsuit$$

Olgu $U_S^{n,m}$ ja $(U')_S^{n,m}$ kaks superpiirkonda koordinaatidega vastavalt (x^i, θ^α) ning (y^i, η^α).

Definitsioon 5.7. *Kujutust $\varphi : S(U', \mathcal{G}^m) \to S(U, \mathcal{G}^m)$, mis on määratud valemitega (5.8), nimetatakse S-morfismiks superpiirkonnast $U_S^{n,m}$ superpiirkonda $(U')_S^{n,m}$, kui on täidetud järgmised tingimused:*
kui

$$f \in S(U', \mathcal{G}^m)$$

ja

$$f = \sum_{k=0}^{m} f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(y)\eta^{\alpha_1} \dots \eta^{\alpha_k},$$

siis

$$\varphi(f) = \sum_{k=0}^{m} \bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x)\eta(\theta)^{\alpha_1} \dots \eta(\theta)^{\alpha_k} \in S(U, \mathcal{G}^m),$$

kus

$$\bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) = f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(y_0^i(x) + y_{\alpha\beta}^i(x)\theta^\alpha\theta^\beta + \dots)$$

on **K**-*väärtustega funktsiooni* $f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(y)$ *Grassmanni jätk. Seejuures loetakse, et* $y^i, \eta^\alpha \in S(U, \mathcal{G}^m)$.♣

Iga superpiirkondade S-morfism määrab vastavate taanduvate piirkondade S-kujutuse. Valemist (5.8) nähtub, et see kujutus määratakse funktsioonidega $y_0^i(x)$.

Definitsioon 5.8. *S-morfismi superpiirkonnast $U_S^{n,m}$ superpiirkonda $(U')_S^{n,m}$ nimetatakse difeomorfismiks, kui eksisteerib pöördmorfism, mis on samuti S-morfism.*♣

Teoreem 5.1 annab tarvilikud ja piisavad tingimused S-morfismi osutumiseks difeomorfismiks.

S-morfismi superpiirkonnast $U_S^{n,m}$ superpiirkonda $(U')_S^{n,m}$ nimetatakse lagunduvaks (splittable), kui leiduvad vastavad koordinaatsüsteemid (x^i, θ^α) ja (y^j, η^β), nii et elementidel, mis määravad selle morfismi, on kuju

$$\begin{cases} y^j = y_0^j(x), \\ \eta^\beta = \rho_\alpha^\beta(x)\theta^\alpha. \end{cases} \tag{5.11}$$

Definitsioon 5.9. *S-supermuutkonnaks nimetatakse topoloogilist muutkonda M ja M lahtistel hulkadel määratud $\mathcal{G}^m$-väärtustega pidevate funktsioonide peret S_M, nii et on täidetud tingimused:*

1) *$\forall x \in M$ korral leidub lahtine ümbrus U ($x \in U$) ja S-difeomorfism $\varphi : S(U', \mathcal{G}^m) \to S(U, \mathcal{G}^m)$, kus $U' \subset \mathbf{K}^n$, nii et φ poolt indutseeritud taanduvate hulkade kujutus $U \to U'$ on homeomorfism ja iga lahtise $V \subset U$ puhul $f \in S_M$ siis ja ainult siis, kui $\varphi^{-1}(f) \in S(U', \mathcal{G}^m)$;*
2) *kui $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lahtise hulga U lahtine kate, s.t. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = U$, ja $f : U \to \mathcal{G}^m$, siis $f \in S_M$ siis ja ainult siis, kui $f|_{U_\alpha} \in S_M, \forall \alpha \in A$.*♣

Seega on S-supermuutkonnaks paar (M, S_M). Tihti nimetatakse muutkonda M taanduvaks muutkonnaks (reduced manifold) ja kui supermuutkonda tähistada $\mathcal{M}$, siis $M = \mathcal{M}_{red}$. Supermuutkonda nimetatakse lagunduvaks (splittable), kui kõik S-difeomorfismid, millest oli juttu definitsioonis 5.9 esimeses alapunktis, osutuvad lagunduvaks.

6

Integreerimine

Berezini integraal. Muutujate vahetus. Bereziniaan. Gaussi tüüpi integraalid. Integreerimine üle Cliffordi algebra. Pfaffian.

Selles paragrahvis jätkatakse superruumi ja klassikalise ruumi vahelise analoogia otsimist. Vastavalt eelmisele paragrahvile tähistatakse n paaris- ning m paaritu koordinaadiga reaalset superruumi tähisega $R^{n,m}$. Eelnevalt nägime, et paljusid konstruktsioone, mis on defineeritud superruumi paarissektoris, võib üle kanda tema paaritusse sektorisse. Selgub, et see käib ka integreerimise kohta. Väljateoorias kasutatakse väga laialdaselt Berezini integraali, s.t. integraali antikommuteeruvate muutujate järgi, nii supersümmeetrilistes väljateooriates, kus kasutatakse lõplikudimensionaalset integraali, kui ka kvantväljateoorias, kus kasutatakse integraali üle lõpmatudimensionaalse superruumi (kontinuaalne integraal).

Alustame integraali kirjeldust tema lihtsaimast erijuhust, integraalist ühe muutujaga θ, $\theta^2 = 0$. Seega alustame superruumist $R^{0,1}$ ehk Grassmanni algebrast $\mathcal{G}^1$. Olgu $d\theta$ formaalne sümbol, mida käsitletakse kui muutuja θ diferentsiaali. Olgu $d\theta$ kommuteeruv muutujaga θ. Olgu $f(\theta)$ funktsioon superruumil $R^{0,1}$, mille integraali üle superruumi tähistame

$$\mathcal{I}(f) = \int f(\theta)\, d\theta. \tag{6.1}$$

Integraali oleks loomulik konstrueerida nii, et säiliksid tavalise kommuteeruvate muutujatega integraali omadused, s.t. et integraal (6.1) oleks

i) *lineaarne*

$$\mathcal{I}(f_1 + f_2) = \mathcal{I}(f_1) + \mathcal{I}(f_2), \qquad \mathcal{I}(\alpha f) = \alpha \mathcal{I}(f),$$

ii) *invariantne ülemineku suhtes superruumi ühelt koordinaatsüsteemilt teisele.*

Vaatleme järeldusi, mis tulenevad nõuetest *i)* ja *ii)*. Funktsiooni $f(\theta)$ superruumil $R^{0,1}$ võib avaldada kujul $f(\theta) = \alpha + \beta\theta$, kus α ja β on reaalarvud. Siis järeldub tingimusest *i)*, et integraali (6.1) võib kirja panna

$$\mathcal{I}(f) = \alpha \int d\theta + \beta \int \theta\, d\theta. \tag{6.2}$$

Et tavaline integraal reaalarvuliste muutujate järgi on reaalarvuliste väärtustega, siis võib kõige üldisemalt oletada, et integraal (6.2) peab omandama väärtusi algebras $\mathcal{G}^1$, s.t. kehtivad seosed

$$\int d\theta = A + B\theta, \qquad \int \theta\, d\theta = C + D\theta, \tag{6.3}$$

kus $A, B, C, D \in \mathbf{R}$, ja *ii)* põhjal nad ei sõltu koordinaadi θ valikust. Koordinaatteisenduste hulgas on kaks tähtsamat erijuhtu. Esimene neist on nihe $\theta \to \theta + \varepsilon$, kus ε on antikommuteeruv Grassmanni konstant. Olgu $\theta' = \theta + \varepsilon$. Siis võib tingimusest *ii)* lähtudes väita, et

$$\int d\theta' = \int d\theta, \qquad \int \theta'\, d\theta' = \int \theta\, d\theta \tag{6.4a}$$

ehk

$$A + B\theta' = A + B\theta, \qquad C + D\theta' = C + D\theta. \tag{6.4b}$$

Võrdustest (6.4b) järeldub, et $B = D = 0$. Teine tähtis koordinaatteisendus on dilatatsioon $\theta \to \lambda\theta$, kus $\lambda \in \mathbf{R}$. Olgu $\theta' = \lambda\theta$. Valemitest (6.4a) järeldub, et

$$\int d(\lambda\theta) = \int d\theta = A, \quad \lambda \int \theta\, d(\lambda\theta) = \int \theta\, d\theta = C.$$

Edasi on tarvis selgitada, mida tähendab sümbol $d(\lambda\theta)$. Asi on selles, et säärast tüüpi tavaliste integraalide korral on teisendused seotud teisenduste jakobiaaniga, s.t. determinandiga, aga eelnevast me teame, et antikommuteeruvate suuruste puhul erineb superdeterminant tunduvalt tavalisest (vt. §3). Seepärast oletame lihtsalt, et

$$d(\lambda\theta) = \mathcal{J}(\lambda)\, d\theta, \tag{6.5}$$

kus $\mathcal{J}(\lambda)$ on muutuja λ mingi funktsioon. Siis

$$\mathcal{J}(\lambda)\,A = A, \qquad \lambda\,\mathcal{J}(\lambda)\,C = C.$$

Et viimased võrdused peavad kehtima suvalise λ jaoks, järeldub neist, et $A = 0$ ja $\mathcal{J}(\lambda) = \lambda^{-1}$. Nõuded *i)* ja *ii)* ei sea piiranguid C suhtes. Tavaliselt normeeritakse integraal tingimusega $C = 1$.

Kokkuvõttes jõuame integreerimise põhireegliteni paaritu koordinaadi θ järgi:

$$\int d\theta = 0, \qquad \int \theta\, d\theta = 1. \tag{6.6}$$

Peale nende reeglite järeldub seosest (6.5) diferentsiaali $d\theta$ teisendus

$$d(\lambda\theta) = \lambda^{-1}\, d\theta, \tag{6.7}$$

mis erineb tavaliste kommuteeruvate muutujate diferentsiaali teisendusest. Võib märkida, et teisenduse $\theta \to \lambda\theta$ jakobiaani supermaatriks koosneb vaid blokist A_4 (vt. §2), mis võrdub

$$A_4 = \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial\theta} = \lambda.$$

Seepärast on selle maatriksi superdeterminant valemi (3.3) järgi võrdne λ^{-1}.

Et tuletada Berezini integraali muutujate $\theta^1, \ldots, \theta^m$ järgi üle algebra $\mathcal{G}^m$, tuleb kasutusele võtta sümbolid $d\theta^1, \ldots, d\theta^m$, lugedes nad antikommuteeruvateks omavahel ja kommuteeruvateks moodustajatega $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m$, s.t.

$$d\theta^\alpha d\theta^\beta = -d\theta^\beta d\theta^\alpha, \qquad \theta^\alpha d\theta^\beta = d\theta^\beta \theta^\alpha \tag{6.8}$$

suvaliste $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$ korral. Integreerimisreeglid m antikommuteeruva muutuja korral põhinevad integraalidel, mis on analoogilised integraalidega (6.6):

$$\int d\theta^\alpha = 0, \qquad \int \theta^\alpha\, d\theta^\alpha = 1. \tag{6.9}$$

Valemites (6.9) puudub summeerimine α järgi. Korduvat integraali tõlgendatakse integraali järjest rakendamisena

$$\int \xi(\theta^1, \ldots, \theta^m)\, d\theta^{\alpha_p} \ldots d\theta^{\alpha_1} = \int \ldots \Bigl(\int \xi(\theta^1, \ldots, \theta^m)\, d\theta^{\alpha_p}\Bigr) \ldots d\theta^{\alpha_1}, \tag{6.10}$$

kus $\xi(\theta^1, \dots, \theta^m)$ on algebra $\mathcal{G}^m$ mingi element. Integreerimisreeglitest (6.9) järeldub valem

$$\int \xi(\theta^1, \dots, \theta^m)\, d\theta^m \dots d\theta^1 = \xi_{1\dots m}, \tag{6.11}$$

kus $\xi_{1\dots m}$ on monoomi $\theta^1 \dots \theta^m$ kordaja elemendi ξ üleskirjutuses (1.23).

Valemit (6.11) võib teisendada kujule

$$\int \xi(\theta^1, \dots, \theta^m)\, d\theta^m \dots d\theta^1 = \frac{\partial^m}{\partial\theta^1 \dots \partial\theta^m} (\xi(\theta^1, \dots \theta^m)) \tag{6.12}$$

ehk üldistatuna

$$\int \xi(\theta^1, \dots, \theta^m)\, d\theta^{\alpha_p} \dots d\theta^{\alpha_1} = \frac{\partial^p}{\partial\theta^{\alpha_1} \dots \partial\theta^{\alpha_p}} (\xi(\theta^1, \dots \theta^m)), \tag{6.13}$$

kus indeksid on järjestatud $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$.

Seega järeldub valemist (6.13), et integraal antikommuteeruvate muutujate järgi on arvutuseeskirja mõttes ekvivalentne tuletise mõistega (vt. §4). Olgu $U^{n,m}$ superruumi $R^{n,m}$ superpiirkond ja olgu (x^i, θ^α) koordinaadid superpiirkonnas $U^{n,m}$. Defineerime integraali funktsioonist $f(x, \theta) \in \mathcal{E}(U, \mathcal{G}^m)$ valemiga

$$\int_{U^{n,m}} f(x, \theta)\, d^n x\, d^m \theta = \int \Big(\int_{s(U^{n,m})} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)\, dx^1 \dots dx^n \Big) \times \\ \times \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_p} d\theta^m \dots d\theta^1, \tag{6.14}$$

kus $s(U^{n,m}) = U \subset \mathbf{R}^n$. Valemist (6.12) tuleneb, et

$$\int_{U^{n,m}} f(x, \theta)\, d^n x d^m \theta = \int_U f_{1\dots m}(x)\, dx^1 \dots dx^n. \tag{6.15}$$

Valemid (6.14) ja (6.15) on ekvivalentsed, kuid valem (6.14) näitab selgemini, et integraal antikommuteeruvate muutujate järgi on paljuski sarnane tavalise integraaliga.

Olgu $U^{n,m}$ superpiirkond koordinaatidega (x^i, θ^α) ja olgu (y^j, η^β) superpiirkonna uued koordinaadid

$$\begin{cases} x^i = x^i_0(y) + x^i_{\alpha\beta}(y)\, \eta^\alpha \eta^\beta + \dots, \\ \theta^\alpha = \rho^\alpha_\beta(y)\, \eta^\beta + \rho^\alpha_{\beta\gamma\lambda}(y)\, \eta^\beta \eta^\gamma \eta^\lambda + \dots, \end{cases} \tag{6.16}$$

kusjuures eeldatakse, et täidetud on kõik teoreemi 5.1 tingimused (funktsioonid $x_0^i(y)$, $y \in s(U^{n,m})$ määravad piirkonna $s(U^{n,m})$ difeomorfismi iseendaga ja $det(\rho_\beta^\alpha(y) \neq 0$, $\forall y \in s(U^{n,m})$).

Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} & \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} \\ \frac{\partial \theta^\beta}{\partial y^j} & \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \eta^\alpha} \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

koordinaatidelt (x^i, θ^α) koordinaatidele (y^j, η^β) ülemineku supermaatriks.

Definitsioon 6.1. *Bereziniaaniks* $Ber(\frac{x,\theta}{y,\eta})$ *nimetatakse supermaatriksi* A *superdeterminanti*

$$Ber(\frac{x,\theta}{y,\eta}) = Sdet\,(A).\clubsuit \tag{6.18}$$

Teoreem 6.1. *Superpiirkonna* $U^{n,m}$ *koordinaatteisendusel (6.16)*

$$(x,\theta) \to (y,\eta)$$

teiseneb integraal (6.14) järgmise valemi kohaselt:

$$\int_{U^{n,m}} f(x,\theta)\, d^n x\, d^m\theta = \int_{U^{n,m}} Ber(\frac{x,\theta}{y,\eta})\, \tilde{f}(y,\eta)\, d^n y\, d^m \eta, \tag{6.19}$$

kus $\tilde{f}(y,\eta) = f(x(y,\eta), \theta(y,\eta))$ *ja* $f \in \mathcal{E}_c(U, \mathcal{G}^m)$ *(kompaktse kandjaga siledate funktsioonide ruum).*$\clubsuit$

Tõestus. Tõestame selle teoreemi erijuhul, kui koordinaatteisendusel on kuju (lagunduv morfism)

$$\begin{cases} x^i = \varphi^i(y), \\ \theta^\alpha = \rho_\beta^\alpha \eta^\beta, \end{cases} \tag{6.20}$$

kus maatriksi $D = (\rho_\beta^\alpha)$ elemendid on kas reaal- või kompleksarvud. Sel juhul omandab supermaatriks A kuju

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(y) & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} & 0 \\ 0 & \rho_\beta^\alpha \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

ja üleminekuubereziniaan on võrdne

$$Ber(\frac{x,\theta}{y,\eta}) = det(\mathcal{J}(y))\,(det\,D)^{-1}. \tag{6.22}$$

Arvutame valemi (6.19) vasaku integraali:

$$\int_{U^{n,m}} f(x,\theta)d^n x d^m\theta = \int\Big(\int_U f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)d^n x\Big)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_p}d^m\theta$$
$$= \int_U f_{12\ldots m}(x)\,d^n x$$
$$= \int_U \bar{f}_{1\ldots m}(y)\,det(\mathcal{J}(y))\,d^n y$$
$$= \int(detD)^{-1}(detD)\Big(\int_U \bar{f}_{1\ldots m}(y)det(\mathcal{J}(y))d^n y\Big)\eta^1\ldots\eta^m d^m\eta$$
$$= \int\Big(\int_U \bar{f}_{1\ldots m}(y)det(\mathcal{J}(y))(detD)^{-1}d^n y\Big)\theta^1(\eta)\ldots\theta^m(\eta)d^m\eta$$
$$= \int_{U^{n,m}} Ber(\frac{x,\theta}{y,\eta})\,\bar{f}(y,\eta)\,d^n y\,d^m\eta.$$

Esitatud võrduste ahelas on kasutatud muutujate vahetuse valemit tavalises integraalis ($det(\mathcal{J}(y))$ ilmumine) ja valemit

$$\theta^1\ldots\theta^m = (det\,D)\,\eta^1\ldots\eta^m,$$

mis järeldub otse valemist (6.20). Sellega tõestus lõpeb.

Kui f on sile kompaktse kandjaga funktsioon (s.t. punktihulk $\{x\in U : f(x)\neq 0\}$ on selline, et tema sulund on kompaktne ja sisaldub piirkonnas U), siis

$$\int_U \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,d^n x = 0. \tag{6.23}$$

Samasugune omadus on ka integraalil üle superpiirkonna $U^{n,m}$. Teisisõnu, olgu $f\in\mathcal{E}_c(U,\mathcal{G}^m)$. Siis

$$\int_{U^{n,m}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta^\alpha}\Big)d^n x\,d^m\theta = 0. \tag{6.24}$$

Valemi (6.24) paaritu osa järeldub seosest

$$\Big(\frac{\partial^m}{\partial\theta^1\ldots\partial\theta^m}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Big)(f) = 0$$

suvalise α korral.

Arvutame välja mõned kasulikud integraalid, mis etendavad tähtsat osa kvantväljateoorias. Alustame lihtsaimatest.

Vaatleme kahekordset integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2} dx\, dy.$$

Selleks et teda välja arvutada, läheme üle polaarkoordinaatidele. Saame:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2} dx\, dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi.$$

Teiselt poolt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\right)^2.$$

Siit järeldub, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}. \tag{6.25}$$

Tehes siin muutujate vahetuse $x = \sqrt{\lambda}x'$, kus $\lambda > 0$, võib integraali (6.25) teisendada kujule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}\, dx = \lambda. \tag{6.26}$$

Olgu $A = \| \alpha_{ij} \|$ n-dimensionaalne sümmeetriline regulaarne ruutmaatriks. Igale sellisele maatriksile võib vastavusse seada ruutvormi

$$A(x) = \frac{1}{2}\alpha_{ij}x^i\, x^j \tag{6.27}$$

muutujatest $x^1,\ldots,x^n$. Integraal (6.26) võimaldab välja arvutada Gaussi integraali

$$\mathcal{I}_b = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(x)}\, dx^1 \ldots dx^n. \tag{6.28}$$

Nagu teada, võib iga ruutvormi ortogonaalteisenduse abil viia kanoonilisse kujju. Olgu selline teisendus

$$x^i = \beta^i_k\, y^k.$$

Maatriksi $B = (\beta^i_k)$ ortogonaalsuse tõttu on selle teisenduse jakobiaan mooduli järgi võrdne ühega. Peale teisendust saab integraal (6.28) kuju

$$\mathcal{I}_b = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1(y^1)^2-\ldots-\frac{1}{2}\lambda_n(y^n)^2}\, dy^1 \ldots dy^n,$$

kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on maatriksi A omaväärtused. Seose (6.26) tõttu omandab saadud integraal kuju

$$\mathcal{I}_b = (\sqrt{2}\pi)^n \, (\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Võttes arvesse, et $\lambda_1 \ldots \lambda_n = det(A)$, saame tulemuseks

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha_{ij} x^i x^j} dx^1 \ldots dx^n = \frac{1}{\sqrt{det(A)}}. \qquad (6.29)$$

Analoogiliselt võib välja arvutada antikommuteeruvate muutujatega Gaussi integraali. Olgu $A = (a_{\alpha\beta})$ $2m$-dimensionaalne reaalne kaldsümmeetriline ($a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$) ruutmaatriks ja θ^1, $\theta^2, \ldots, \theta^m$ Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajad. Seame maatriksile A vastavusse vormi $A(\theta) = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha \theta^\beta$. Maatriksi A võib positiivse determinandiga ortogonaalteisenduse abil viia kujule

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Kui $\theta^\alpha = b^\alpha_\beta \xi^\beta$ on moodustajate θ^α vastav teisendus, siis muutujates ξ omandab vorm $A(\theta)$ paarisarvulise $m = 2k$ korral kuju

$$A(\xi) = \lambda_1 \xi^1 \xi^2 + \lambda_2 \xi^3 \xi^4 + \ldots + \lambda_k \xi^{m-1} \xi^m \qquad (6.30a)$$

ja paarituarvulise $m = 2k - 1$ korral kuju

$$A(\xi) = \lambda_1 \xi^1 \xi^2 + \lambda_2 \xi^3 \xi^4 + \ldots + \lambda_{k-1} \xi^{m-2} \xi^{m-1}. \qquad (6.30b)$$

Arvutame välja integraali

$$\mathcal{I}_f = \int e^{\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta} d\theta^m \ldots d\theta^1. \qquad (6.31)$$

Minnes üle muutujatele $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m$, saame

$$\mathcal{I}_f = \int e^{A(\xi)} d\xi^m \, d\xi^{m-1} \ldots d\xi^1,$$

kus $A(\xi)$ on antud kujul (6.30a) või (6.30b). Antud juhul on bereziniaan võrdne ühega, sest teisendus on ortogonaalne ja tema determinant on positiivne. Valemist (6.12) järeldub, et paarisarvulise $m = 2k$ korral

$$\mathcal{I}_f = \frac{\partial^m}{\partial\xi^1 \ldots \partial\xi^m} (e^{A(\xi)}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k$$

ja paaritu $m = 2k-1$ korral $\mathcal{I}_f = 0$. Et paarisjuhul $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k = \sqrt{det(A)}$ ja paaritul $det(A) = 0$, võib nad mõlemad ühendada lõppavaldisse

$$\mathcal{I}_f = \int e^{\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \theta^\beta} d\xi^m \, d\xi^{m-1} \ldots d\xi^1 = \sqrt{det(A)}. \tag{6.32}$$

Olgu nüüd $\mathcal{G}^n$ Grassmanni algebra moodustajatega $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$, kus n on paarisarv, s.t. $n = 2m$. Kui A on $n \times n$-dimensionaalne kaldsümmeetriline maatriks, siis võib talle vastavusse seada algebra $\mathcal{G}^n$ elemendi $r(A)$ järgmisel moel:

$$r(A) = \frac{1}{2}\, \theta^t A \,\theta = \frac{1}{2}\, a_{ij}\, \theta^i \theta^j,$$

kus sümboliga θ tähistatakse moodustajate $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$ veergu ning valemi keskmises osas peetakse silmas maatriksite korrutamist. Defineerime nüüd maatriksi A pfaffiani $Pf(A)$ järgmise valemiga:

$$\frac{1}{m!}\,(r(A))^m = \frac{1}{m!}(\frac{1}{2}\,\theta^t A\,\theta)^m = Pf(A)\theta^1\theta^2 \ldots \theta^n. \tag{6.33}$$

Sellest definitsioonist järeldub, et $Pf(A)$ osutub maatriksi A elementide homogeenseks m-astmeliseks polünoomiks. Juhul, kui $m = 1$, järeldub valemist (6.33), et

$$Pf\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a.$$

Pfaffiani defineerivat valemit (6.33) võib ümber kirjutada, kasutades Berezini integraali üle Grassmanni algebra. Tõepoolest, valem (6.33) on ekvivalentne järgmise valemiga:

$$\int e^{\frac{1}{2}\theta^t A \theta} \, d\theta^n \ldots d\theta^1 = Pf(A). \tag{6.34}$$

Vahetult definitsioonist (6.33) järeldub üks pfaffiani omadusest. Vaatleme n-mõõtmelist vektorruumi V, kus $n = 2m$, ja selles baasivektoreid $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Vektorruumi V Grassmanni välisalgebra tähistame $\bigwedge V$. See on Grassmanni algebra moodustajatega $e_1, e_2, \ldots, e_n$, kusjuures selle algebra suvaline element α avaldub järgmise summana:

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \wedge e_j + \ldots + \alpha_{12\ldots} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n. \quad (6.35)$$

Kui L on ruumi V mingi lineaarne operaator, siis määrab see algebra $\bigwedge V$ homomorfismi järgmisel viisil. Olgu (L_{ij}) operaatori L maatriks baasis $e_1, e_2, \ldots, e_n$, s.t. $L(e_j) = L_{ij} e_i$. Siis

$$\alpha' = L(\alpha) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (L_{ij}\alpha_j) e_i$$

$$+ \sum_{r,s=1}^{n} (L_{ri}\alpha_{ij}L_{sj}) e_k \wedge e_m + \ldots + det(L)\alpha_{12\ldots} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n,$$

kus α on element kujul (6.35). Tekib homomorfism $L : \bigwedge V \to \bigwedge V$, mille oleme tähistanud samuti L. Sellest valemist järeldub, et

$$L\left(\frac{1}{2} e^t \wedge (Ae)\right) = \frac{1}{2} e^t \wedge ((LAL^t)\, e),$$

kus sümboliga e on tähistatud vektorite $e_1, e_2, \ldots, e_n$ veerg ning lihtsuse mõttes on sümboliga L tähistatud operaatori L maatriksit. Et L on algebra $\bigwedge V$ homomorfism, siis rakendades teda valemi (6.33) mõlemale poolele, saame

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2} e^t \wedge (LAL^t)\, e\right)^m = Pf(A)\, det(L)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Siit järeldub, et

$$Pf(LAL^t) = Pf(A)\, det(L).$$

Erijuhul, kui L on ruumi V orientatsiooni säilitav ortogonaalne operaator, s.t. tema maatriks on rühma $SO(n)$ element, siis

$$Pf(LAL^{-1}) = Pf(A).$$

Seega on pfaffian invariantne spetsiaalsete ortogonaalsete teisenduste suhtes.

Teine pfaffiani omadus järeldub valemite (6.34) ja (6.32) võrdusest ja tal on järgmine kuju:

$$(Pf(A))^2 = det(A),$$

kus A on paarisarvulise dimensiooniga ($n = 2m$) kaldsümmeetriline maatriks. Sel juhul võib maatriksi determinandist võtta ruutjuure ja seega saada maatriksi elementide m-astme homogeenne avaldis, mille ruut võrdub maatriksi determinandiga.

Kvantväljateoorias tuleb tihti arvutada allikaid sisaldavaid integraale kujul (6.32). Selles paragrahvis vaadeldakse sellise integraali lõplikumõõtmelist juhtu. Vaatleme lisaks Grassmanni algebrale $\mathcal{G}^n$, kus $n = 2m$ ja mille moodustajateks on $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$, veel teist Grassmanni algebrat $\mathcal{G}'^n$ moodustajatega $J^1, J^2, \ldots, J^n$. Olgu tegemist integraaliga

$$\mathcal{I} = \int e^{\frac{1}{2}\theta^t A\theta + J^t\theta}\, d\theta^n \ldots d\theta^1.$$

Matemaatika vaatevinklist toimub integreerimine üle algebra $\mathcal{G}'^n \otimes \mathcal{G}^n$ (integraal omandab väärtused algebras $\mathcal{G}'^n$), kusjuures vastavalt definitsioonile

$$\int \alpha \otimes \beta d\theta^n \ldots d\theta^1 = \alpha \int \beta\, d\theta^n \ldots d\theta^1$$

suvaliste $\alpha \in \mathcal{G}'^n$ ja $\beta \in \mathcal{G}^n$ korral. Sel juhul muutub Berezini integraal lineaarseks funktsionaaliks algebral $\mathcal{G}'^n \otimes \mathcal{G}^n$ väärtustega esimeses komponendis. Vastavalt valemile (1.6) osutub $J^t\theta$ algebra $\mathcal{G}'^n \otimes \mathcal{G}^n$ paariselemendiks. Kuna integraali $\mathcal{I}$ eksponendi astendajas on mõlemad liidetavad paariselemendid, siis nad kommuteeruvad ning võib kasutada valemit

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

Kehtib seos

$$e^{J^t\theta} = \prod_{i=1}^{n} e^{J^i\theta^i} = \prod_{i=1}^{n}(1 + J^i\theta^i) = \sum_I (J\theta)^I = \sum_I (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)}\theta^I J^I,$$

kus $I = (i_1, i_2, \ldots, i_q)$ on hulga $1, 2, \ldots, n$ alamhulk ja

$$(J\theta)^I = (J\theta)^{i_1} \ldots (J\theta)^{i_q} = (J^{i_1}\theta^{i_1}) \ldots (J^{i_q}\theta^{i_q})$$

ning $q = |I|$ on hulga I võimsus. Elementi $exp(\frac{1}{2}\theta^t A\theta)$ võib ilmutatud kujul üles kirjutada järgmiselt:

$$e^{\frac{1}{2}\theta^t A\theta} = \sum_I Pf(A_I)\,\theta^I,$$

kus A_I on maatriksi A alammaatriks, mis koosneb ridadest ja veergudest numbritega $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$, ning $I = (i_1, i_2, \ldots, i_q)$ on hulga $1, 2, \ldots, n$ alamhulk, mis koosneb paarisarvust elementidest. Lõpptulemuseks saame:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int e^{\frac{1}{2}\theta^t A\,\theta + J^t\theta}\, d\theta^n \ldots d\theta^1 \\ &= \int \{\sum_I Pf(A_I)\,\theta^I \sum_{I'} (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)}\theta^{I'} J^{I'}\} d\theta^n \ldots d\theta^1 \qquad (6.36) \\ &= \sum_I \epsilon(I, I')(-1)^{\frac{1}{2}|I'|} Pf(A_I)\, J^{I'}, \end{aligned}$$

kus I' on hulga I täiend, s.t. $I \bigcup I' = \{1, 2, \ldots, n\}$, ja

$$\theta^I\,\theta^{I'} = \epsilon(I, I')\,\theta^1\theta^2 \ldots \theta^n.$$

Et paarisarvulise q korral langeb arvu $\frac{1}{2}q(q+1)$ paarsus kokku arvu $\frac{1}{2}q$ paarsusega, on eelnevas valemis tegur $(-1)^{\frac{1}{2}|I'|(|I'|+1)}$ asendatud teguriga $(-1)^{\frac{1}{2}|I'|}$. Seega saame esimese avaldise allikatega $J^1, J^2, \ldots, J^n$ integraali jaoks:

$$\mathcal{I} = \int e^{\frac{1}{2}\theta^t A\,\theta + J^t\theta}\, d\theta^n \ldots d\theta^1 = \sum_I \epsilon(I, I')(-1)^{\frac{1}{2}|I'|} Pf(A_I)\, J^{I'}.$$

Seda integraali võib arvutada ka teisiti, kui oletada, et A on regulaarmaatriks. Sel juhul võib eksponendi astendajas oleva avaldise kirjutada kujul

$$\frac{1}{2}\,\theta^t A\,\theta + J^t\theta = \frac{1}{2}(\theta - A^{-1}J)^t A(\theta - A^{-1}J) + \frac{1}{2}J^t A^{-1} J$$

(selle võrduse parema poole väljaarvutamisel tuleb arvestada sellega, et $A^t = -A$). Kui nüüd kasutada tähistust $\theta' = \theta - A^{-1}J$, omandab integraal kuju

$$\int e^{\frac{1}{2}(\theta')^t A(\theta') + \frac{1}{2}J^t A^{-1} J} d^n\theta = \left(\int e^{\frac{1}{2}(\theta')^t A(\theta')} d^n\theta\right) e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J}.$$

Arvestades, et

$$e^{\frac{1}{2}(\theta')^t A(\theta')} = \sum_I Pf(A_I)\,(\theta')^I,$$

ning asendades θ' avaldisega $\theta - A^{-1}J$, saame, et n-da astme θ korral langeb kordaja kokku pfaffianiga $Pf(A)$. Seega, eeldades, et maatriks A on regulaarne, omandab teine avaldis kuju

$$\mathcal{I} = \int e^{\frac{1}{2}\theta^t A\theta + J^t\theta} d\theta^1 \dots d\theta^n = Pf(A)\, e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J}. \qquad (6.37)$$

Neid tulemusi läheb vaja edaspidi superkihtkondade karakteristlike klasside arvutamisel. Tegelikult on valemitel (6.36) ja (6.37) veel üldisem iseloom ning nad kehtivad mõnede kommutatiivsete superalgebrate suvaliste paaritute elementide $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$ ja $J^1, J^2, \dots, J^n$ korral, kusjuures tavalise maatriksi A võib asendada vaid paariselementidest koosneva supermaatriksiga.

Selle paragrahvi lõpetuseks käsitleme integreerimist üle Cliffordi algebra. Neljanda paragrahvi lõpus oli juttu supermoodulist $S^n_\cdot$ ($n = 2m$) üle Cliffordi algebra C_n, mis andis võimaluse arvutada suvalise elemendi $x \in C_n$ superjälge $Str(x)$ valemi (4.30) järgi. Mainitud paragrahvi lõpus tõestatud lause osutab ilmsele analoogiale mõistete *superjälg Cliffordi algebral* C_n ja *integraal üle Grassmanni algebra* vahel. Sellest on tulenenud mõte kirjeldada superjälge integraaliga üle paarisarvulise dimensiooniga Cliffordi algebra, kasutades analoogilisi reegleid:

$$\int \gamma_i\, d\gamma_i = 1, \quad \int d\gamma_i = 0,$$

kus $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ on algebra C_n moodustajad, kordset integraali arvutada kui korduvat (lugedes γ_i ja $d\gamma_i$ kommuteeruvateks suurusteks) ja lineaarsuse tõttu laiendada kogu algebrale C_n. Siis

$$Str(x) = (2i)^m \int x\, d\gamma_n d\gamma_{n-1} \dots d\gamma_1.$$

Erilist huvi pakub Gaussi integraal, s.t. integraal kujul

$$\mathcal{I} = \int e^{\frac{1}{2}\gamma^t A \gamma}\, d\gamma_n \dots d\gamma_1,$$

kus A on $n \times n$-mõõtmeline kompleksarvuliste elementidega kaldsümmeetriline maatriks.

Algul vaatleme selle integraali lihtsaimat juhtu, nimelt integraali üle algebra C_2 moodustajatega γ_1, γ_2. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.38}$$

kus $w \in \mathbb{C}$. Siis $\frac{1}{2}\gamma^t A \gamma = w\gamma_1\gamma_2$. Eksponendi arvutamisel saame rea

$$e^{w\gamma_1\gamma_2} = 1 + w\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{2!}w^2 - \frac{1}{3!}w^3\,\gamma_1\gamma_2 + \dots.$$

Vastavalt üle Cliffordi algebra integreerimise reeglile saame

$$\begin{aligned}\int e^{w\gamma_1\gamma_2} d\gamma_2 d\gamma_1 &= w - \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{5!}w^5 - \frac{1}{7!}w^7 + \dots \\ &= w(1 - \frac{1}{3!}w^2 + \frac{1}{5!}w^4 - \frac{1}{7!}w^6 + \dots) \\ &= w \cdot \frac{sinh(iw)}{iw},\end{aligned}$$

kus

$$sinh(iw) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}.$$

Seega

$$\int e^{w\gamma_1\gamma_2} d\gamma_2 d\gamma_1 = w \cdot \frac{sinh(iw)}{iw}$$

ja

$$Str(e^{w\gamma_1\gamma_2}) = 2iw \cdot \frac{sinh(iw)}{iw}.$$

Sama valemit võib esitada teisel kujul, kasutades maatriksit A. Toome sisse funktsiooni $sinh(A)$ maatriksargumendiga A järgmisel viisil:

$$\frac{sinh(A)}{A} = \frac{e^A - e^{-A}}{2A} = 1 + \frac{A^2}{3!} + \frac{A^4}{5!} + \dots.$$

Kui maatriks on kujul (6.38), siis

$$\frac{sinh(A)}{A} = \begin{pmatrix} \frac{sinh(iw)}{iw} & 0 \\ 0 & \frac{sinh(iw)}{iw} \end{pmatrix},$$

millest järeldub, et

$$\frac{sinh(iw)}{iw} = \sqrt{det(\frac{sinh(A)}{A})}.$$

Võttes $m = 1$, saame lõpuks

$$Str(e^{\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma}) = (2i)^m \sqrt{det(\frac{sinh(A)}{A})} Pf(A). \qquad (6.39)$$

Osutub, et see valem kehtib ka suvalise $n \times n$-mõõtmelise $(n = 2m)$ kaldsümmeetrilise A korral. Tõestuskäik on sarnane valemi (6.32) tõestusele integraali arvutamiseks üle Grassmanni algebra. Tõepoolest võib suvalist kaldsümmeetrilist maatriksit ortogonaalse päristeisenduse B abil viia kujule

$$A = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -w_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -w_m & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.40)$$

Sel juhul omandab ruutvorm $\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma$ kuju

$$w_1\gamma_1\gamma_2 + w_2\gamma_3\gamma_4 + \ldots w_m\gamma_{2m-1}\gamma_{2m}.$$

Integraal üle Cliffordi algebra on eespool defineeritud täpselt samuti nagu integraal üle Grassmanni algebra. Kui teha lineaarne muutujate vahetus, mille maatriks on B, saab integraali viia kujju

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int e^{\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma} d\gamma_n \ldots d\gamma_1 \\ &= \int e^{w_1\gamma_1\gamma_2} d\gamma_2 d\gamma_1 \ldots \int e^{w_m\gamma_{2m-1}\gamma_{2m}} d\gamma_{2m} d\gamma_{2m-1}. \end{aligned}$$

Seega on valemi vasak pool võrdne avaldisega

$$(2i)^m \prod_{k=1}^{m} \frac{sinh(iw_k)}{iw_k} w_k.$$

Et funktsioonid $det(\frac{sinhA}{A})$ ja $Pf(A)$ on invariantsed muutujate vahetuse $A \to B^{-1}AB$ suhtes, kus B on ortogonaalne maatriks positiivse determinandiga, võib lugeda, et maatriksil A on valemi (6.39) paremal pool kuju (6.40). Siis $Pf(A) = w_1 w_2 \dots w_m = \prod_{k=1}^m w_k$ ja

$$\sqrt{det(\frac{sinh(A)}{A})} = \prod_{k=1}^{m} \frac{sinh(iw_k)}{iw_k}.$$

Seega on valem (6.39) ka sel üldisel juhul tõestatud. Nagu integraali puhul üle Grassmanni algebra, arvutame ka allikaid sisaldava integraali üle Cliffordi algebra. Olgu $J_1, J_2, \dots, J_n$ mingi Grassmanni algebra moodustajad. Arvutame

$$Str(e^{\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma + J^t\gamma}) = (2i)^m \int e^{\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma + J^t\gamma} d\gamma_n \dots \gamma_1.$$

Nagu Grassmanni algebra korral, eeldades A pööratavust, teisendame avaldise $\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma + J^t\gamma$ kujule

$$\frac{1}{2}(\gamma - A^{-1}J)^t A(\gamma - A^{-1}J) + \frac{1}{2}J^t A^{-1} J.$$

Tuues sisse uued muutujad $\gamma' = \gamma - A^{-1}J$, võib lähteintegraali üles kirjutada järgmiselt:

$$\left(\int e^{\frac{1}{2}(\gamma')^t A(\gamma')} d\gamma_n \dots d\gamma_1\right) e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J}.$$

Pole raske veenduda, et üleminek muutujatelt γ muutujatele γ' ei muuda sulgudes oleva integraali väärtust. Kokkuvõttes saame järgmise teoreemi:

Teoreem 6.2.

$$\begin{aligned} Str(e^{\frac{1}{2}\gamma^t A\gamma + J^t\gamma}) &= (2i)^m \sqrt{det(\frac{sinh(A)}{A})}\, Pf(A)\, e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \\ &= (2i)^m \sqrt{det(\frac{sinh(A)}{A})} \int e^{\frac{1}{2}\theta^t A\theta + J^t\theta} d^n\theta, \end{aligned}$$

kus $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ja $J^1, J^2, \dots, J^n$ on Grassmanni algebrate moodustajad.♣

7

Supervektorkonnad ja superseostused

Peakihtkond. Vektorkond. Diferentsiaalvormid koefitsientidega vektorkonnas. Seostus peakihtkonnas ja vektorkonnas. Supervektorkond ja superseostus. Superseostuse kõverus. Bianchi identsus.

Käesolev paragrahv on pühendatud eelnevates osades kirjeldatud supermatemaatika formalismi rakendustele diferentsiaalgeomeetrias ja topoloogias. Selle paragrahvi materjalist arusaamiseks on vaja teadmisi siledate muutkondade diferentsiaalgeomeetriast ja Lie' rühmade teooriast.

Sileda muutkonna definitsioon on antud viiendas paragrahvis. Olgu M sile reaalne n-mõõtmeline muutkond. Tähistagu $T_x M$ muutkonna M puutujaruumi punktis $x \in M$ ja $T_x^* M$ duaalset ruumi. Ruumi $T_x^* M$ poolt tekitatud välisalgebrat tähistame $\wedge T_x^* M$. Seega

$$\wedge T_x^* M = \oplus_{p=0}^{n} \wedge^p T_x^* M. \tag{7.1}$$

Algebra $\wedge T_x^* M$ osutub väliskorrutise suhtes kommutatiivseks superalgebraks. Puutujaruumi $T_x M$ elementi $X(x)$, mis on määratud igas punktis $x \in M$ ning millel on sile sõltuvus punktist x, nimetatakse siledaks vektorväljaks muutkonnal M. Kõikide vektorväljade ruumi muutkonnal M tähistame $D(M)$. Vektorväljade ekvivalentne kirjeldus seisneb selles, et igale puutuvale vektorväljale võib vastavusse seada siledate funktsioonide algebra $\mathcal{E}(M)$ diferentseerimise, kusjuures see vastavus osutub isomorfismiks kõikide diferentseerimiste ruumi ja siledate vektorväljade ruumi $D(M)$ vahel.

Kui $U \subset M$ on M lahtine piirkond lokaalsete koordinaatidega $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, siis valitakse ruumi $T_x M$ baasiks tavaliselt $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, (\frac{\partial}{\partial x^2})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x, \}$. Seda baasi nimetatakse holonoomseks baasiks. Seega võib siledat vektorvälja $X \in D(M)$ lokaalselt kirja panna kujul

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{7.2}$$

kus $X^i(x) \in \mathcal{E}(U)$ suvalise i korral. Baasi $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, (\frac{\partial}{\partial x^2})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x, \}$ duaalseks baasiks loetakse ruumi $T_x^*M, x \in U$ baasi $\{(dx^1)_x, (dx^2)_x, \ldots, (dx^n)_x\}$. Siit järeldub, et

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j. \tag{7.3}$$

Ruumi $\wedge^p T_x^* M$ baasi moodustavad monoomid $(dx^{i_1})_x \wedge (dx^{i_2})_x \wedge \ldots \wedge (dx^{i_p})_x$, kus $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$. Kui tähistada tähega I hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ p elemendist koosnevat alamhulka, siis

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \tag{7.4}$$

Vastavalt väliskorrutise definitsioonile diferentsiaalid dx^i antikommuteeruvad, s.t.

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \ \forall i, j. \tag{7.5}$$

Seega on välisalgebra $\wedge T_x^* M$ Grassmanni algebra moodustajatega $(dx^1)_x, (dx^2)_x, \ldots, (dx^n)_x$. Ruumi $\wedge^p T_x^* M$ $(\wedge T_x^* M)$ elementi ω, mis on määratud igas punktis $x \in M$ ja mis sõltub sellest siledalt, nimetatakse muutkonna M p-järku siledaks diferentsiaalvormiks. Edaspidi hakkame nimetama p-järku siledat diferentsiaalvormi lihtsalt p-vormiks (vormiks või diferentsiaalvormiks). Kõikide p-vormide ruumi tähistatakse $\Omega^p(M)$ ja vormide ruumi $\Omega(M)$. On ilmne, et $\Omega(M)$ on kommutatiivne superalgebra gradueeringuga

$$\Omega(M) = \Omega_{\bar{0}}(M) \oplus \Omega_{\bar{1}}(M),$$

kus ruumi $\Omega_{\bar{0}}(M)$ kuuluvad paarisjärku diferentsiaalvormid ning ruumi $\Omega_{\bar{1}}(M)$ paaritut järku diferentsiaalvormid.

Kui U on M koordinaatpiirkond ja $\omega \in \Omega(M)$, siis võib diferentsiaalvormi ω lokaalselt esitada kujul

$$\omega = \sum \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \omega_I(x) dx^I,$$

kus $\omega_I(x) \in \mathcal{E}(M), \forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Välisdiferentsiaal d on lineaarne operaator

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M),$$

mis on lokaalselt defineeritud valemiga

$$d\omega = \sum_I d\omega_I(x) \wedge dx^I, \tag{7.6}$$

kus $d\omega_I(x)$ on sileda funktsiooni $\omega_I(x)$ diferentsiaal, s.t.

$$d\omega_I(x) = \frac{\partial \omega_I(x)}{\partial x^i} dx^i. \tag{7.7}$$

Välisdiferentsiaalil on järgmised omadused:

$$i) \quad d^2 = 0;$$

$$ii)\, d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{deg(\omega)} \omega \wedge d\theta,$$

kus $deg(\omega)$ on vormi ω järk. Omadusest *ii)* järeldub, et välisdiferentsiaal on superalgebra $\Omega(M)$ paaritu operaator.

Diferentsiaalvormi ω nimetatakse kinniseks vormiks, kui $d\omega = 0$. Kõik muutkonna M kinnised p-vormid moodustavad ruumi $\Omega^p(M)$ alamruumi $B^p(M)$. Diferentsiaalvormi ω nimetatakse täpseks vormiks, kui eksisteerib selline vorm θ, et $\omega = d\theta$. On ilmne, et kui ω on täpne p-vorm, siis θ on $(p-1)$-vorm. Kõik muutkonna M täpsed p-vormid moodustavad ruumi $\Omega^p(M)$ alamruumi $K^p(M)$. Välisdiferentsiaali omadusest *i)* järeldub, et $K^p(M) \subset B^p(M)$. Faktorruumi $H^p(M) = B^p(M)/K^p(M)$ nimetatakse de Rhami reaalsete p-kohomoloogiate ruumiks (või rühmaks, kui vaadelda ainult liitmisoperatsiooni). Kinnisele p-vormile ω vastavat ekvivalentsiklassi tähistame $[\omega]$. Seega $[\omega] \in H^p(M)$. Näiteks kui M on n-mõõtmeline sfäär S^n, siis

$$\begin{cases} H^o(S^n) \simeq H^n(S^n) \simeq \mathbf{R}, \\ H^p(S^n) = 0, \quad 1 \leq p \leq n-1. \end{cases}$$

Olgu ω on ruumi $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ järgmine n-vorm:

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

kus $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$ on ruumi $\mathbf{R}^{n+1}$ koordinaadid ja $\widehat{dx^i}$ tähendab, et vastav diferentsiaal puudub. Kasutades valemit (7.6) võib näidata, et vorm ω on kinnine vorm. Selle vormi integraal üle sfääri on nullist erinev, seega Stokesi teoreemist järeldub, et vorm ω ei ole täpne vorm ja talle vastav de Rhami kohomoloogiaklass $[\omega]$ ei ole triviaalne. Võib ka näidata, et klass $[\omega]$ genereerib sfääri S^n de Rhami n-kohomoloogiad. Vektorruumi $H^*(M) = \oplus_{p=0}^n H^p(M)$ nimetatakse de Rhami kohomoloogiate ruumiks. De Rhami kohomoloogiad on muutkonna topoloogilised invariandid, s.t. kui muutkond M on difeomorfne muutkonnaga N (s.t. leidub bijektiivne sile kujutus $f : M \to N$, selline, et pöördkujutus $f^{-1} : n \to M$ on samuti sile), siis vastavad de Rhami kohomoloogiate ruumid on isomorfsed ehk $H^p(M) \simeq H^p(N)$.

Sileda muutkonna M sile kujutus muutkonda N $f : M \to N$ tekitab kujutuse $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$, millel on järgmised omadused:

i) $f^*(\theta \wedge \omega) = f^*(\theta) \wedge f^*(\omega)$;

ii) $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$;

iii) $f^*(\alpha\theta + \beta\omega) = \alpha f^*(\theta) + \beta f^*(\omega)$,

kus $\theta, \omega \in \Omega(N)$ on suvalised vormid.

Olgu M sile n-mõõtmeline muutkond ja G Lie' rühm. Rühma G Lie' algebra tähistame sümboliga $\mathcal{L}$. Öeldakse, et rühm G toimib siledalt paremalt muutkonnal M, kui on antud sile kujutus $M \times G \to M$ [tavaliselt tähistatakse $M \times G \ni (x, g) \to R_g(x) \in M$], nii et

i) iga fikseeritud $g \in G$ korral on kujutus $M \to M$ muutkonna M difeomorfismiks,

ii) $R_h(R_g(x)) = R_{gh}(x), \forall x \in M, \forall g, h \in G$.

Sel puhul öeldakse, et on antud Lie' rühma G sile parempoolne toime muutkonnal M, ka lihtsalt, et G toimib muutkonnal M. Lie' rühm G toimib muutkonnal M vabalt, kui sellest, et $R_g(x) = x$, järeldub $g = e$ (kus e on rühma G ühikelement). Rühm G toimib transitiivselt, kui suvalise kahe punkti $x, x' \in M$ jaoks leidub element $g \in G$, nii et $R_g(x) = x'$. Punkti x läbivaks orbiidiks rühma G toime puhul nimetatakse hulka

$$G_{x_0} = \{R_g(x_0) : \quad g \in G\}.$$

Seega on rühma G toime transitiivne parajasti siis, kui leidub vaid üks orbiit, mis langeb kokku kogu muutkonnaga M. Rühma toime näiteks võib tuua ortogonaalsete reaalarvuliste maatriksite rühma $O(n)$ loomuliku toime ruumil $\mathbf{R}^n$. Rühma $O(n)$ orbiitideks on kõikvõimalikud sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguspunktis ($n = 2$ korral on see toime vaba, kuid mitte transitiivne). Rühma $GL(n)$ toime ruumil $\mathbf{R}^n$ on aga ilmselt transitiivne.

Definitsioon 7.1. *Siledat muutkonda P nimetatakse peakihtkonnaks, kui on antud muutkonna P sile kujutus $\pi : P \to M$ (projektsioon) siledale muutkonnale M ja muutkonnal P toimib paremalt Lie' rühm G, kusjuures*

i) $\pi(R_g(p)) = \pi(p), \forall p \in P, \forall g \in G,$

ii) *rühm G toimib hulgal $\pi^{-1}(x) \subset P$ vabalt ja transitiivselt,*

iii) *suvalise punkti $x \in M$ jaoks leidub tema lahtine ümbrus $U \subset M$ ja selline difeomorfism $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, et $\phi_U(p) = (\pi(p), f_U(p))$, kus $f_U(R_g(p)) = f_U(p)\, g \forall p \in \pi^{-1}(U)$ ja $\forall g \in G$.*♣

Muutkonda M nimetatakse peakihtkonna P baasiruumiks, hulka $\pi^{-1}(x)$, mis osutub rühma G toime orbiidiks, nimetatakse kihiks punkti $x \in M$ kohal. Sellest, et rühm G toimib igal kihil vabalt ja transitiivselt, järeldub, et iga kiht on difeomorfne rühmaga G. Peakihtkonna triviaalseks näiteks on $U \times G$ projektsiooniga $U \times G \to U$, $(x, g) \to x$. Definitsiooni 7.1 tingimust *iii)* nimetatakse tavaliselt peakihtkonna P lokaalse trivialiseeritavuse tingimuseks. Viimane on seotud sellega, et muutkond $M \times G$, kus M on sile muutkond ja G Lie' rühm, mille parempoolne toime on määratud valemiga $R_h((x, g)) = (x, g \cdot h)$, osutub peakihtkonnaks. Selliseid kihtkondi nimetatakse triviaalseteks. Mittetriviaalse peakihtkonna näiteks on muutkonna reeperite kihtkond. Olgu M n-mõõtmeline sile muutkond ja T_xM tema puutujaruum punktis x. Tähistame ruumi T_xM kõigi reeperite hulga sümboliga L_x. Hulga L_x elemente tähistame $\vec{e}_x$ ja loeme, et $\vec{e}_x$ on reeperi baasivektorite rida. Toome sisse järgmise tähistuse:

$$L(M) = \cup_{x \in M} L_x. \tag{7.8}$$

Hulgal $L(M)$ toimib rühm $GL(n)$ loomulikul viisil: kui $\vec{e}_x \in L(M)$ ja $A \in GL(n)$, siis A toime viib rea $\vec{e}_x$ reaks $\vec{e}_x \cdot A$. Projektsioon baasile M defineeritakse valemiga $\pi(\vec{e}_x) = x$. Juhul, kui M on sfäär S^2, osutub peakihtkond $L(S^2)$ mittetriviaalseks, s.t. teda pole võimalik esitada kujul $L(S^2) = S^2 \times GL(2)$. Tõepoolest, viimane esitus oleks võimalik ainult siis, kui leiduks kaks siledat puutujavektorvälja sfääril S^2, mis oleksid sfääri igas punktis lineaarselt sõltumatud. Kuid topoloogia meetoditega võib näidata, et iga sileda puutujavektorvälja jaoks leidub sfääril punkt, milles ta muutub nulliks („pealae" teoreem). Siit järeldub $L(S^2)$ mittetriviaalsus.

Üheks tähtsamaks peakihtkonnaga seotud mõisteks on seostuse mõiste. On olemas kaks ekvivalentset lähenemisviisi seostuse defineerimisel: horisontaalsete jaotuste keel ning diferentsiaalvormide keel. Meil on mugavam kasutada viimast.

Olgu $A \in \mathcal{L}$ rühma G Lie' algebra element. Samastame $\mathcal{L}$ rühma G puutujaruumiga T_eG ühikelemendile vastavas punktis. Siis indutseerib A rühmas G ühikelemendi e mingis ümbruses üheparameetrilise alamrühma $g(t) = exp(tA)$. Vektorvälja X peakihtkonnal, mis on määratud valemiga

$$X_p = \frac{d}{dt}(R_{g(t)}(p))|_{t=0}, \tag{7.9}$$

kus $g(t)$ on elemendi A poolt indutseeritud üheparameetriline rühm, nimetatakse fundamentaalseks vektorväljaks.

Definitsioon 7.2. *1-vormi ω peakihtkonnal P väärtustega struktuurirühma G Lie' algebras $\mathcal{L}$ nimetatakse seostusvormiks, kui*

i) iga suvalise elemendi $A \in \mathcal{L}$ poolt indutseeritud fundamentaalvektorvälja X korral $\omega(X) = A$,

ii) $R_g^*(\omega) = ad(g^{-1})\,\omega$, kus $ad : G \to GL(\mathcal{L})$ on rühma G adjungeeritud esitus.♣

Sageli nimetatakse seostusvormi ω ka lihtsalt seostuseks ω. Seostuse ω kõveruseks nimetatakse 2-vormi Θ^ω väärtustega algebras $\mathcal{L}$, nii et kehtib

$$\Theta^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \tag{7.10}$$

kus $[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]$, milles sulud $[,]$ tähendavad kommutaatorit Lie' algebras $\mathcal{L}$. Kui algebra $\mathcal{L}$ baas on antud struktuurikonstantidega C^a_{bd}, T_a, $a = 1, 2, \ldots, dim(\mathcal{L}) = r$, siis saab valem (7.10) ilmutatud kuju:

$$(\Theta^\omega)^a = d\omega^a + \frac{1}{2}C^a_{bd}\omega^b \wedge \omega^d. \tag{7.11}$$

Teine kihtkondade tüüp, mida meil hiljem vaja läheb, on vektorkonnad. Tähistagu $\mathbf{K}^m$ nagu ennegi standardset m-mõõtmelist vektorruumi üle korpuse $\mathbf{K}$ ning V mingit m-mõõtmelist vektorruumi üle sama korpuse.

Definitsioon 7.3. *Siledat muutkonda E nimetatakse siledaks vektorkonnaks kihimõõtmega m üle sileda muutkonna M, kui*

i) *on antud sile kujutus $\pi : E \to M$, mida nimetatakse projektsiooniks,*

ii) *$E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$ osutub m-mõõtmeliseks vektorruumiks üle $\mathbf{K}$ suvalise $x \in M$ korral,*

iii) *suvalise punkti $x \in M$ jaoks leidub tema ümbrus $U \subset M$ ja difeomorfism $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{K}^m$, nii et iga E'_x, $x' \in U$, kujutatakse ϕ_U poolt isomorfselt vektorruumiks $\{x'\} \times \mathbf{K}^m$*

$$\phi(E_x) = \{x\} \times \mathbf{K}^m, \ \forall x \in U$$

ja kujutus

$$\phi : E_x \to \{x\} \times \mathbf{K}^m \to_{pr} \mathbf{K}^m$$

on vektorruumide isomorfism.♣

Siin $\{x'\} \times \mathbf{K}^m$ on muidugi isomorfne vektorruumiga $\mathbf{K}^m$, nimelt $(x, k) \to k \in \mathbf{K}^m$. Muutkonda M nimetatakse kihtkonna E baasiruumiks, ruumi E_x aga kihiks punkti $x \in M$ kohal. Vektorruumi $\mathbf{K}^m$ (ehk mõnda tema isomorfset vektorruumi V) nimetatakse tüüpkihiks. Vektorkonna lihtsaimaks näiteks on otsekorrutis $M \times V$. Selliseid vektorkondi nimetatakse triviaalseteks. Mittetriviaalse vektorkonna näiteks on puutujavektorkond $TM = \cup_{x \in M} T_x M$, mille kihiks igas punktis $x \in M$ on puutujaruum $T_x M$. On ilmne, et sel juhul võib (def. 7.3 punktis *iii)*) ümbruseks U võtta koordinaatümbruse $U \subset M$ ning difeomorfism ϕ_U konstrueerida holonoomse baasi $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, (\frac{\partial}{\partial x^2})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x, \}$ abil, kus $x^1, x^2, \ldots, x^n$ on U lokaalsed koordinaadid. Puutujavektorkonna kihimõõt langeb kokku baasiruumi dimensiooniga. Märgime aga, et üldise vektorkonna puhul see ei tarvitse nii olla.

Definitsioon 7.4. *Vektorkonda E üle baasiruumi M nimetatakse supervektorkonnaks, kui tema kiht E_x iga punkti $x \in M$ kohal on supervektorruum, s.t.*

$$E_x = (E_{\bar{0}})_x \oplus (E_{\bar{1}})_x,$$

kusjuures alamruumide $(E_{\bar{0}})_x$ ja $(E_{\bar{1}})_x$ dimensioonid ei sõltu punktist x.♣

Supervektorkonna lihtsaimaks näiteks on vektorkond $\wedge T^* M = \cup_{x \in M} \wedge T^*_x M$. Keerukama, aga ka tähtsama näite toome edaspidi.

Siledat kujutust $s : M \to E$, mille korral $\pi \circ s(x) = x, \quad \forall x \in M$, nimetatakse vektorkonna E lõikeks. Näiteks vektorkonna $\wedge T^* M$ lõikeks on muutkonnal M sile diferentsiaalvorm. Tähistame sümboliga $\mathcal{E}(M, E)$ vektorkonna E kõikide siledate lõigete ruumi.

Kihtkondadele laienevad peaaegu kõik operatsioonid vektorruumidega. Seega, kui E ja F on kaks vektorkonda baasiruumiga M, siis nende abil võib muutkonnal M konstrueerida järgmised vektorkonnad:

1) $E \oplus F$,

2) $E \otimes F$,

3) E^*,

4) $Hom(E, F)$, erijuhul $End(E, E)$.

Vektorkonna definitsiooni tingimus *iii)* võimaldab kirjeldada tema lokaalset struktuuri. Olgu U punkti $x \in M$ selline lahtine ümbrus, millest oli juttu punktis *iii)*. Difeomorfismi ϕ_U olemasolu on ekvivalentne nõudega, et leidub m niisugust ümbruses U määratud siledat lõiget, et iga fikseeritud x korral moodustavad nad kihis $\pi^{-1}(x)$ lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi. Tähistame need lõiked $f = (e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x))$ ja nimetame nad selle vektorkonna E lokaalseks baasiks ümbruses U. Ilmselt, kui $s \in \mathcal{E}(M, E)$ on mingi lõige, siis

$$s|_U = s^\alpha(x)\, e_\alpha(x) = f \cdot s(f), \qquad s(f) = \begin{pmatrix} s^1(x) \\ s^2(x) \\ \vdots \\ s^m(x) \end{pmatrix}, x \in U.$$

Olgu x ja y baasiruumi M kaks sellist punkti, et vastavate ümbruste U ja V ühisosa ei ole tühi. Konstrueerime difeomorfismid ϕ_U ja ϕ_V vastavalt baaside f_U ja f_V abil. Ühisosa $U \cap V$ punktides toimub üleminek ühelt baasilt teisele, mida kirjeldab valem

$$f_U = f_V \cdot A,$$

kus A on regulaarmaatriks, mis sõltub siledalt $U \cap V$ punktidest. Seega tekitab maatriks A kujutuse $g_{UV} : U \cap V \to GL(\mathbf{K}^m)$, mida nimetatakse vektorkonna E üleminekufunktsiooniks. Vektorkondade teoorias tõestatakse, et kui katta baasiruum M lahtiste ümbrustega koos vastavate üleminekufunktsioonidega ja nõuda viimaste kooskõla, siis see määrab üheselt vektorkonna.

Kui E on supervektorkond kihimõõduga (r,p), s.t. $dimE_{\bar{0}} = r$, $dimE_{\bar{1}} = p$, siis tema lahtisele kattele $\{U_i\}_{i\in I}$ vastavaid baase

$$f_{(i)} = (e_1^{(i)}(x), e_2^{(i)}(x), \ldots, e_r^{(i)}(x), e_{r+1}^{(i)}(x), e_{r+2}^{(i)}(x), \ldots,$$
$$e_{r+p}^{(i)}(x)), \quad r + p = m,$$

nimetame vektorkonna Z_2-struktuuriga kooskõlastatuks, kui

a) vektorid $e_1^{(i)}(x), e_2^{(i)}(x), \ldots, e_r^{(i)}(x)$ on paarislõiked ja $e_{r+1}^{(i)}(x), e_{r+2}^{(i)}(x), \ldots, e_{r+p}^{(i)}(x)$ on paaritud lõiked,

b) üleminekufunktsioonid $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_{\bar{0}}(\mathbf{K}^m)$ on $\mathbf{K}^m$ paariskujutused, s.t. vastavatel maatriksitel on kuju

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij}^1(x) & 0 \\ 0 & A_{ij}^2(x) \end{pmatrix},$$

kus $A_{ij}^1(x)$ on $r\times r$-maatriks ja $A_{ij}^2(x)$ on $p\times p$-maatriks.

Olgu E vektorkond baasiruumiga M. Vektorkondadega teostatavate operatsioonide abil konstrueerime baasiruumil M vektorkonna kujul $\wedge^k E = \wedge^k T^*(M) \otimes E$, kus $\wedge^k T^*(M)$ on k-vormide vektorkond baasil M. Vektorkonna $\wedge^k E$ kiht on vektorkonna E vastavas kihis väärtusi omandavate k–vormide ruum, s.t. kui $x \in M$ ja $X_1, X_2, \ldots, X_k \in T_x M$ ning $\varphi \in \wedge^k E$, siis $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in E_x$. Kui U on M koordinaatümbrus, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ on $T_x M$ baas ja $f = (e_1(x), e_2(x), \ldots, e_r(x))$ lokaalne baas ümbruses U, siis võib suvalist elementi $\varphi \in (\wedge^k E)_x$, $x \in U$ üles kirjutada kujul

$$\varphi = \sum \varphi^{\alpha}_{i_1 \ldots i_k} (t^{i_1} \wedge \ldots \wedge t^{i_k}) \otimes e_\alpha, \tag{7.12}$$

kus $t^1, t^2, \ldots, t^n$ on baasiga $t_1, t_2, \ldots, t_n$ duaalne $T_x^* M$ baas. Vektorkonna $\wedge^k E$ siledaid lõikeid nimetatakse diferentsiaalseteks k-vormideks (või lihtsalt k-vormideks) väärtustega vektorkonnas E. Valemist (7.12) järeldub, et selline k-vorm omab lokaalselt kuju

$$\theta = \theta^{\alpha}_{i_1 \ldots i_k}(x)(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \otimes e_\alpha. \tag{7.13}$$

Kõikide selliste k-vormide ruumi tähistame $\Omega^k(M,E), k = 1, 2, \ldots$; seega $\Omega^k(M,E) \simeq \mathcal{E}(M, \wedge^k E)$. Kõikide vormide ruumi hakkame tähistama $\Omega(M,E)$. Tuleb ära märkida, et üldiselt pole ruumi $\Omega(M,E)$ vormide väliskorrutis määratud. Vektorkondade teoorias tõestatakse järgmiste ruumide isomorfism:

$$\mathcal{E}(M,\wedge^k E) \simeq (M,\wedge^k T^*M)\otimes_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M,E)$$

või

$$\Omega^k(M,E) \simeq \Omega^k(M)\otimes_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M,E). \qquad (7.14)$$

Sageli on piisav määrata valem vektorkonnas E väärtusi omandavate vormide jaoks kujul $\theta\otimes s$, $\theta\in\Omega^k(M,E)$, $s\in\mathcal{E}(M,E)$, sest valemist (7.14) järeldub, et suvalist vormi võib esitada selliste vormide lõpliku lineaarkombinatsioonina koefitsientidega ruumist $\mathcal{E}(M)$.

Kui E on supervektorkond kihimõõduga (r,p), siis osutub ka $\wedge^k E$ supervektorkonnaks, supervektorkondade $\wedge^k T^*M$ ja E tensorkorrutiseks. Siit järeldub, et kui $\theta\in\Omega(M,E)$ on homogeenne vorm ja tema väärtused suvaliste puutujavektorväljade puhul osutuvad supervektorkonna E homogeenseks lõikeks, siis koosneb tema paarsus kahest komponendist, vormi paarsusest ning lõike E paarsusest. Näiteks on 1-vorm $\theta\in\Omega^1(M,E), \theta(X)\in\mathcal{E}(M,E_{\bar 1})$ suvalise $X\in D(M)$ korral paarisvorm. Seega võib ruumi $\Omega^k(M,E)$ Z_2-gradueering olla kirjeldatud valemiga

$$p(\theta) = deg(\theta) + p_E(\theta), \qquad (7.14)'$$

kus $deg(\theta)$ on homogeense vormi järk ja $p_E(\theta)$ on tema paarsus E mõttes. Sellele gradueeringule vastava ruumi $\Omega^k(M,E)$ kirjutame üles otsesumma kujul

$$\Omega^k(M,E) = \Omega^k_{\bar 0}(M,E)\oplus\Omega^k_{\bar 1}(M,E).$$

Definitsioon 7.5. *Seostuseks D vektorkonnal $\pi : E\to M$ nimetatakse* **K***-lineaarset kujutust*

$$D:\mathcal{E}(M,E)\to\Omega^1(M,E),$$

nii et

$$D(\varphi s) = d\varphi\otimes s + \varphi\cdot Ds,$$

kus $\varphi\in\mathcal{E}(M)$ ($\mathcal{E}(M)$ on muutkonna M kõikide siledate funktsioonide ruum) ja $s\in\mathcal{E}(M,E)$. Superseostuseks D_s supervektorkonnal E nimetatakse esimest järku operaatorit $D_s = D + L$, *kus D on tavaline seostus superv̄ektorkonnal E, mis rahuldab lisatingimusi*

$$
\begin{aligned}
D &: \mathcal{E}_{\bar{0}}(M,E) \to \Omega^1_{\bar{1}}(M,E),\\
D &: \mathcal{E}_{\bar{1}}(M,E) \to \Omega^1_{\bar{0}}(M,E),
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

ja L on supervektorkonna E paaritu lineaaroperaator (endomorfism), s.t. $L \in End_{\bar{1}}(E,E)$ ehk

$$
\begin{aligned}
L &: \mathcal{E}_{\bar{0}}(M,E) \to \mathcal{E}_{\bar{1}}(M,E),\\
D &: \mathcal{E}_{\bar{1}}(M,E) \to \mathcal{E}_{\bar{0}}(M,E).\clubsuit
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

Kirjeldame nüüd seostuse ja superseostuse lokaalset struktuuri. Edaspidi eeldatakse igal pool, et supervektorkonna kõik lokaalsed baasid on kooskõlastatud tema Z_2-struktuuriga.

Olgu $f = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ supervektorkonna E lokaalne baas ja $s \in \mathcal{E}(M,E)$ tema mingi lõige. Siis on lokaalselt $s = f \cdot s(f)$ ja kehtib

$$
\begin{aligned}
D(s) = D(s^\alpha(x)e_\alpha) &= ds^\alpha \otimes e_\alpha + (\theta^\alpha_\beta s^\beta) \otimes e_\alpha\\
&= (ds^\alpha + \theta^\alpha_\beta s^\beta) \otimes e_\alpha,
\end{aligned}
$$

kus

$$de_\beta = \theta^\alpha_\beta \otimes e_\alpha$$

ja $(\theta^\alpha_\beta) = \theta$ on muutkonna M 1-vormide $m \times m$-maatriks. Seda maatriksit nimetatakse seostusvormide maatriksiks. Seega on seostuse operaatoril lokaalselt kuju $D = d + \theta$. Definitsiooni 7.5 omadustest (7.15) ja (7.16) järeldub, et superseostuse D_s maatriks supervektorkonnal E kihimõõduga (r,p) on kujul

$$\theta_s = \begin{pmatrix} \theta' & L' \\ L'' & \theta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ 0 & \theta'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L' \\ L'' & 0 \end{pmatrix} = \theta + L,$$

kus θ' on $r \times r$-mõõtmeline 1-vormide maatriks, θ'' on $p \times p$-mõõtmeline 1-vormide maatriks, L' on on $r \times p$-mõõtmeline funktsioonide maatriks ning L' on $p \times r$-mõõtmeline funktsioonide maatriks.

Lause 7.1. *Kui üleminekut lokaalselt baasilt f lokaalsele baasile f' kirjeldab maatriks A, s.t. $f' = f \cdot A$, siis seostuse (superseostuse) maatriks teiseneb järgmise seaduse järgi:*

$$\theta'_{(s)} = A^{-1}\theta_{(s)}A + A^{-1}dA, \tag{7.17}$$

kus θ' on seostuse (superseostuse) maatriks baasis f'.♣

Algul tõestame lause seostuse θ jaoks. Kehtib

$$De'_\beta = \theta'^\alpha_\beta e'_\alpha = \theta'^\alpha_\beta \cdot A^\gamma_\alpha e_\gamma$$

ehk

$$Df' = f \cdot A \cdot \theta'.$$

Teisest küljest

$$D(f') = D(f \cdot A) = f \cdot \theta \cdot A + f \cdot dA.$$

Võrreldes võrduste paremaid pooli, saame:

$$\theta' = A^{-1}\,\theta\, A + A^{-1}\, dA.$$

Valemi tõestuseks superseostuse jaoks olgu operaatori L teisendamise seadus järgmine:

$$L_{f'} = A^{-1} \cdot L_f \cdot A,$$

kus $L_{f'}$ on operaatori L maatriks baasis f' ja L_f baasis f.

Seostuse D operaatorit võib jätkata suvalisele ruumile $\Omega^k(M,E)$ (lineaarsuse tõttu ka ruumile $\Omega(M,E)$). Olgu f supervektorkonna E lokaalne baas ja $\sigma(f)$ vormi $\sigma \in \Omega^k(M,E)$ selline lokaalne üleskirjutus, et

$$\sigma(f) = \begin{pmatrix} \sigma^1(f) \\ \sigma^2(f) \\ \vdots \\ \sigma^m(f) \end{pmatrix},$$

kus $\sigma^i(f)$ on tavalised vormid. Definitsiooni järgi

$$D\sigma(f) = d\sigma(f) + \theta \wedge \sigma(f), \tag{7.18}$$

kus θ on seostuse maatriks baasis f. Veendumaks, et toodud valem defineerib $(k+1)$-vormi vektorkonnal E korrektselt, peab kontrollima võrdust

$$D\sigma(f') = A^{-1} D\sigma(f),$$

kus $f' = f \cdot A$. Ta järeldub nimelt järgmisest võrduste jadast:

$$
\begin{aligned}
D\sigma(f') &= d\sigma(f') + \theta' \wedge \sigma(f') \\
&= d(A^{-1}\sigma(f)) + (A^{-1}\theta A) \wedge (A^{-1}\sigma(f)) \\
&\quad + (A^{-1}dA) \wedge (A^{-1}\sigma(f)) \\
&= d(A^{-1}) \wedge \sigma(f)) + (A^{-1}\, d\sigma(f) + A^{-1}(\theta \wedge \sigma(f)) \\
&\quad + dA^{-1} \wedge \sigma(f) \\
&= A^{-1}D\sigma(f).
\end{aligned}
$$

Selles võrduste jadas tuleb kasutada identsust

$$A^{-1}dA\,A^{-1} = -dA^{-1},$$

mis järeldub identsusest $A^{-1}A = I$ diferentseerimisel. Seega $D : \Omega^k(M,E) \to \Omega^{k+1}(M,E)$. Superseostust D_s võib jätkata suvalistele vormidele täiendava valemi abil

$$L(\sigma \otimes s) = (-1)^{deg(\sigma)}\sigma\, L(s), \sigma \in \Omega(M), s \in \mathcal{E}(M,E).$$

Selle definitsiooni korrektsus järeldub võrdusest

$$L\sigma(f') = (A^{-1} \cdot L_{f'} \cdot A)\,(A^{-1}\,\sigma(f)) = A^{-1}\,L\sigma(f).$$

Seega D_s osutub paarituks operaatoriks ruumil $\mathcal{E}(M,E)$, kus E on supervektorkond.

Seostuse D kõveruseks vektorkonnal E nimetatakse 2-vormi Θ_D koefitsientidega vektorkonnas $End(E,E)$. Lokaalselt mingis baasis f defineeritakse see valemiga

$$\Theta_D(f) = d\theta + \theta \wedge \theta, \tag{7.19}$$

kus θ on seostuse D maatriks baasis f. Pole raske näha, et valemi (7.19) parem pool on lokaalse seostuse operaatori $d+\theta$ ruut, s.t.

$$\Theta_D(f) = (d + \theta)^2. \tag{7.20}$$

Kasutades viimast valemit, saame avaldise superseostuse D_s kõveruse määramiseks:

$$\Theta_D^s(f) = \Theta_D(f) + dL_f + [\theta, L_f] + (L_f)^2, \tag{7.21}$$

kus sulud $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ tähendavad maatriksite kommutaatorit.

Kommutaatorit võib defineerida ka maatrikskoefitsientidega vormide jaoks. Olgu θ_1 ja θ_2 kaks sellist vormi. Siis kehtib

$$[\theta_1, \theta_2] = [(\theta_1)_I, (\theta_2)_J] dx^I \wedge dx^J. \tag{7.22}$$

Kui $\theta_1 \in \Omega^p(M, End(E))$ ja $\theta_2 \in \Omega^q(M, End(E))$, siis $[\theta_1, \theta_2] \in \Omega^{p+q}(M, End(E, E))$ ja

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1 \wedge \theta_2 - (-1)^{pq} \theta_2 \wedge \theta_1. \tag{7.23}$$

Lause 7.2. *Seostuse D (superseostuse D_s) kõverus Θ_D ($\Theta_D{}^s$) rahuldab Bianchi samasust*

$$d\Theta_D{}^{(s)}(f) + [\theta_{(s)}, \Theta_D{}^{(s)}(f)] = 0,$$

kus f on lokaalne baas.♣

Selle lause tõestus on järgmine. Seostuse D jaoks kehtib

$$d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta + [\theta, d\theta] + [\theta, \theta \wedge \theta] = 0.$$

Siis superseostuse korral

$$\begin{aligned}
&[d\theta, L_f] - [\theta, dL_f] + dL_f^2 + [\theta, dL_f] \\
&\qquad + [\theta, [\theta, L_f]] + [\theta, L_f^2] - [d\theta, L_f][L_f, \theta \wedge \theta] \\
&\qquad + [L_f, dL_f] + [L_f, [\theta, L_f]] + [L_f, L_f^2] = 0,
\end{aligned}$$

kusjuures selle valemi tuletamisel tuleb arvesse võtta vektorkonna $End(E, E)$ superstruktuuri (7.14), näiteks

$$dL_f^2 = dL_f \cdot L_f - L_f \cdot dL_f,$$

sest L_f on supervektorkonna E paaritu operaator (definitsioon 7.5), s.t. $p_E(L_f) = \bar{1}$, $p_{\wedge T^*M}(L_f) = \bar{0}$, ja d on vormide peal paaritu operaator, s.t. $p_E(d) = \bar{0}$, $p_{\wedge T^*M}(d) = \bar{1}$, või

$$\begin{aligned}
[L_f, [\theta, L_f]] &= [L_f, \theta L_f + L_f \theta] \\
&= L_f \theta L_f + L_f^2 \theta - \theta L_f^2 - L_f \theta L_f = -[\theta, L_f^2].
\end{aligned}$$

Sellega on lause 7.2 tõestatud.

Peakihtkondade ja vektorkondade vahel saab korraldada teatava seose. Olgu $P(M,G)$ peakihtkond baasiruumiga M ja struktuurirühmaga G.

Definitsioon 7.6. *Kui V on lõplikumõõtmeline vektorruum, siis rühma G esituseks ruumil V nimetatakse homomorfismi $\rho : G \to End(V)$. Kui vektorruumis V pole kõikide $\rho(g), g \in G$ suhtes invariantseid mittetriviaalseid alamruume, siis nimetatakse esitust taandamatuks.*♣

Osutub, et kui on antud peakihtkonna $P(M,G)$ rühma G esitus, siis võib konstrueerida vektorkonna kihiga V, mida nimetatakse *assotsieeritud vektorkonnaks.* Et konstrueerida assotsieeritud vektorkonda, kasutame otsekorrutist $P \times V$, mis on triviaalne vektorkond üle peakihtkonna P. Defineerime vektorkonnal $P \times V$ ekvivalentsusseose järgmisel viisil: kahte punkti (p, v) ja (p', v') loetakse ekvivalentseteks, kui leidub $g \in G$, nii et

$$(p', v') = (R_g(p), \rho(g^{-1})(v)).$$

Vektorkonna $P \times V$ faktormuutkonda selle ekvivalentsussuhte järgi nimetatakse peakihtkonnaga $P(M,G)$ assotsieeritud vektorkonnaks (ka lihtsalt assotsieeritud vektorkonnaks). Tähistame viimast sümboliga E. Osutub, et seostus ω peakihtkonnal $P(M,G)$ indutseerib seostuse assotsieeritud vektorkonnas E. Enne kui asuda selle asjaolu kirjeldamisele, defineerime ekvivariantse vormi mõiste.

Definitsioon 7.7. *V-väärtustega funktsiooni $\bar{s} : P \to V$ peakihtkonnal P, kus V on vektorruum, nimetatakse G-ekvivariantseks (või lihtsalt ekvivariantseks), kui suvalise $g \in G$ korral*

$$\bar{s}(R_g(p)) = \rho(g^{-1})\,\bar{s}(p).♣$$

Näitame, et iga ekvivariantne funktsioon indutseerib assotsieeritud vektorkonna E lõike. Olgu $p \in P$ selline punkt, et $\pi(p) = x$. Siis defineerime lõike punktis x valemi $s(x) = [p, \bar{s}(p)]$ abil, kus nurksulud tähistavad paari (p, v) ekvivalentsiklassi. Selle definitsiooni korrektsus järeldub definitsioonist 7.7 ja ekvivalentsusseose definitsioonist. Täiesti analoogiliselt määrab vektorkihtkonna E lõige üheselt ekvivariantse funktsiooni peakihtkonnal P. Kui tähistada peakihtkonnal P ekvivariantsete funktsioonide ruumi sümboliga $\mathcal{E}_e(P,V)$, siis

$$\mathcal{E}_e(P,V) \simeq \mathcal{E}(M,E). \qquad (7.24)$$

Analoogiliselt defineeritakse V-väärtustega ekvivariantsed vormid peakihtkonnal P.

Definitsioon 7.7. *V-väärtustega k-vormi σ peakihtkonnal P nimetatakse G-ekvivariantseks (või lihtsalt ekvivariantseks), kui*

a) $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k) = 0$, *kui vähemalt üks vektorväljadest* $X_1, X_2, \ldots, X_k \in D(P)$ *on fundamentaalne vektorväli,*

b) $R_g^*(\sigma) = \rho(g^{-1})\sigma, \ \forall g \in G.$♣

Nagu lõigetegi puhul, võib näidata, et vektorkonnal E väärtusi omandavate k-vormide ruumi võib samastada peakihtkonnal P määratud V-väärtustega ekvivariantsete k-vormide ruumiga $\Omega_e^k(P,V)$, s.t.

$$\Omega_e^k(P,V) \simeq \Omega^k(M,E). \tag{7.25}$$

Edasi selgitame, mismoodi seostuse 1-vormi ω poolt määratud seostus peakihtkonnal P indutseerib seostuse D assotsieeritud vektorkonnal E. Samastamiste (7.24) ja (7.25) põhjal defineerime operaatori D järgmise valemi abil:

$$D\sigma = d\sigma + \rho'(\omega) \wedge \sigma, \tag{7.26}$$

kus $\sigma \in \Omega_e^k(P,V)$. Näitame, et operaator (7.26) teisendab ekvivariantsed vormid ekvivariantseteks. Tõestame, et väide kehtib juhul, kui σ on ekvivariantne funktsioon $\bar{s}$. Üldjuhul on tõestus analoogiline. Ekvivariantse vormi omaduse *a)* tõestamiseks oletame, et X on rühma G Lie' algebra element ja $g_t = exp(tX)$ on vastav üheparameetriline alamrühm $|t| < \epsilon$ korral. Olgu X_v elemendi X poolt indutseeritud fundamentaalvektorväli peakihtkonnal P. Siis

$$\begin{aligned} d\bar{s}(X)_p = X(\bar{s})_p &= lim_{t\to 0}\frac{\bar{s}(R_{g_t}) - \bar{s}(p)}{t} \\ &= lim_{t\to 0}\frac{\rho(g_t^{-1})\bar{s}(p) - \bar{s}(p)}{t} \\ &= lim_{t\to 0}\frac{\rho(g_t^{-1}) - t_0}{t}\bar{s}(p) \\ &= -\rho'(X)\,\bar{s}(p), \end{aligned}$$

kus $\rho' : \mathcal{G} \to End(V)$. Valemi (7.26) teine liidetav annab

$$(\rho'(\omega)\bar{s})(X)_p = \rho'(X)\,\bar{s}(p),$$

millest järeldub, et

$$D\bar{s}(X) = 0.$$

Ekvivariantse vormi omadus *b)* järeldub võrduste ahelast:

$$\begin{aligned} R_g^*(D\bar{s})_p &= d\bar{s}(R_g(p)) + \rho'(R_g^*(\omega))\,\bar{s}(R_g(p)) \\ &= \rho(g^{-1})d\bar{s}(p) + \rho'(g^{-1})\rho'(\omega)\rho(g)\rho(g^{-1})\bar{s}(p) \\ &= \rho(g^{-1})D\bar{s}_p. \end{aligned}$$

Sellisel viisil indutseeritud seostuse D kõverus osutub peakihtkonnal P ekvivariantseks 2-vormiks väärtustega ruumis $End(V)$, s.t. $\Theta_D \in \Omega_e^2(P, End(V))$. Kõveruse valem ilmutatud kujul on järgmine:

$$\Theta_D = \rho'(\Theta^\omega),$$

kus Θ^ω (7.10) on seostuse ω kõveruse 2-vorm. Olgu V supervektorruum ja $\rho : G \to GL_{\bar{0}}(V)$ rühma G esitus ruumi V paarisoperaatoritega. Sel juhul $\rho' : \mathcal{G} \to End_{\bar{0}}(V)$. Assotsieeritud vektorkond $E = P \times_G V$ osutub supervektorkonnaks. Olgu ω seostuse 1-vorm peakihtkonnal P. Kuid superseostuse indutseerimiseks vektorkonnal E on üksnes vormist ω vähe. Olgu $\bar{L}$ ruumis $End(V)$ väärtusi omandav ekvivariantne funktsioon peakihtkonnal P, s.t. igas punktis p on $\bar{L}_p$ ruumi V paaritu operaator. Ekvivariantsus tähendab, et

$$\bar{L}_{R_g(p)} = \rho(g^{-1})\,\bar{L}_p\,\rho(g).$$

Siis indutseerib paar $(\omega, \bar{L})$ supervektorkonnal E superseostuse D_s kujul

$$D_s\sigma = d\sigma + \rho'(\omega) \wedge \sigma + \bar{L}(\sigma), \qquad (7.27)$$

kus $\sigma \in \Omega_e^k(P, V)$. Ilmselt on vorm $D_s\sigma$ ekvivariantne, kui on ekvivariantne vorm σ. Superseostuse D_s kõverus avaldub kujul

$$\Theta_D^s = \rho'(\Theta^\omega) + d\bar{L} + [\rho'(\omega), \bar{L}] + \bar{L}^2 \qquad (7.28)$$

ja $\Theta_D^s \in \Omega_e(P, End(V))$.

8

Üldistatud Thomi klass

Superseostuse karakteristlik vorm ja selle vormi kohomoloogiaklass. Superseostus spiinorstruktuuriga vektorkonnas. Mathai-Quilleni vorm ja selle vormi supersümmeetriad.

Keskseks teemaks vektorkondade teoorias on nende topoloogilise struktuuri uurimine. Eelmises paragrahvis on käsitletud de Rhami kohomoloogiaid kui muutkonna teatavaid topoloogilisi invariante. Nende järgi võib otsustada muutkonna globaalstruktuuri üle. Osutub, et ka vektorkondade jaoks on võimalik selle vektorkonna baasil konstrueerida kinniseid diferentsiaalvorme iseloomustamaks vektorkonna topoloogiat. Neile vormidele vastavaid kohomoloogiaklasse nimetatakse karakteristlikeks klassideks. Tähtsaimateks viimaste hulgast on Cherni, Euleri, Whitney ja Thomi klassid. Nende klasside diferentsiaalgeomeetrilises konstruktsioonis kasutatakse seostuse ja selle kõveruse mõistet. Üldjoontes näeb konstruktsioon välja järgmiselt. Mingi seostuse kõverusvormist konstrueeritakse invariantsete polünoomide abil maatriksalgebral kinnised diferentsiaalvormid selle kihtkonna baasiruumil. Seejärel tõestatakse teoreem sellest, et kahe homotoopse seostuse (sellise, mida võib siduda teatud parameetrist pidevalt sõltuvate seostuste perega) korral erinevad vastavad vormid üksteisest baasi täpse vormi võrra. Teisisõnu tähendab see, et vastavad kohomoloogiaklassid lõppkokkuvõttes seostusest ei sõltu. Karakteristlikel klassidel on olnud tähtis osa etendada kalibratsioonteooriate arengus. Õigupoolest puudub tänini supermuutkondade kohomoloogiate põhjalik teooria. Siiski on supervektorkondade teoorias õnnestunud konstrueerida klassikalisi klasse üldistavad karakteristlikud klassid.

Thomi klassi üldistava protseduuri kirjeldusele ongi pühendatud käesolev paragrahv.

Olgu E supervektorkond baasiruumil M ($\pi : E \to M$) tüüpkihiga V ja kihimõõtmetega (p, q). Olgu muutkonna M dimensioon n ja $p + q = m$. Olgu D_s superseostus superkihtkonnal E ja Θ_D^s selle kõverus. Tuletagem meelde, et kõverus Θ_D^s

omandab väärtusi vektorkonnas $End(E)$, mis omakorda on samuti supervektorkond. Seetõttu on mõtet arvutada superjälg $Str(\Theta_D^s)$. Tulemuseks saame tavalise teist järku diferentsiaalvormi baasiruumil M, s.t. $Str(\Theta_D^s) \in \Omega^2(M)$. See järeldub superjälje omadusest $Str(B^{-1}AB) = Str(A)$ (vt. (2.28b)). Teatud vormi eksponentfunktsioon defineeritakse reana

$$e^{\sigma} = I + \sigma + \frac{1}{2!}\sigma^2 + \ldots, \quad \sigma^k = \sigma \wedge \ldots \wedge \sigma \ (k \text{ korda}), \quad (8.1)$$

kus $\sigma \in \Omega^k(M, End(E))$ ja I on ühikmaatriks. Real (8.1) on ilmselt vormi σ diferentsiaalide korrutise nilpotentsuse tõttu lõplik arv liidetavaid.

Definitsioon 8.1. *Diferentsiaalvormi*

$$c(D_s) = Str(e^{\Theta_D^s})$$

nimetatakse supervektorkonna E superseostuse D_s karakteristlikuks vormiks.♣

Kõigepealt tõestame definitsiooni (8.1) korrektsuse selles mõttes, et see on globaalne vorm baasil M. Olgu U ja U' muutkonna M kaks lahtist piirkonda, nii et $U \cap U' \neq 0$, ja f ning f' vektorkonna E vastavad baasid, mis määravad ära lokaalsed trivialisatsioonid $\pi^{-1}(U)$ ja $\pi^{-1}(U')$. Olgu $g_{UU'}$ üleminekufunktsioon U ja U' ühisosas. Siis

$$f' = f \cdot g_{UU'}.$$

Kui $\Theta_D^s(f)$ ja $\Theta_D^s(f')$ on kõverusvormi maatriksid baasides f ja f', siis

$$\Theta_D^s(f') = g_{UU'}^{-1}\, \Theta_D^s(f)\, g_{UU'}.$$

Superjälje omaduse (2.28b) põhjal saame

$$Str(\Theta_D^s(f')) = Str(\Theta_D^s(f)).$$

Siit järeldub, et

$$Str(e^{\Theta_D^s(f')}) = Str(e^{\Theta_D^s(f)}).$$

Seega on superseostuse karakteristlik vorm defineeritud korrektselt.

Lause 8.1. *Superseostuse karakteristlik vorm on kinnine vorm, s.t.*

$$d(c(D_s)) = d(Str(e^{\Theta_D^s(f)})) = 0.\clubsuit$$

Meenutagem, et superseostuse kõverus on superruumi $\Omega^2(M, End(E,E))$ paariselement. Arvutame summa (8.1) iga liidetava välisdiferentsiaali eraldi. Kehtib

$$\begin{aligned} d(Str(\Theta_D^s)^l) &= Str(d((\Theta_D^s)^l)) \\ &= Str(\sum_{i=1}^{l} \Theta_D^s \wedge \ldots \wedge \overset{i}{d\Theta_D^s} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s) \\ &= Str(\sum_{i=1}^{l} \Theta_D^s \wedge \ldots \wedge \overset{i}{[\Theta_D^s, \theta_s]} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s) \\ &= l \cdot Str([(\Theta_D^s)^l, \theta_s]) = 0. \end{aligned}$$

Arvutuste käigus on kasutatud Bianchi samasust superseostuse jaoks kujul

$$d(\Theta_D^s) = [\Theta_D^s, \theta_s]$$

ja superjälje omadust (4.25)

$$Str([A,B]) = 0.$$

Superjälje lineaarsuse tõttu saame tulemuseks

$$d(Str(e^{\Theta_D^s})) = \sum_{l=0} \frac{1}{l!} d(Str(\Theta_D^s)^l) = 0.$$

Järelikult on mõtet rääkida vormiga $c(D_s)$ määratud kohomoloogiaklassist, mida tähistame sümboliga $[c(D_s)]$. Seega $[c(D_s)] \in H^*(M)$, kus $H^*(M)$ on muutkonna M de Rhami kohomoloogiate rühm. Vastavalt paragrahvi algul kirjeldatud konstruktsioonile on järgmiseks sammuks tõestada kohomoloogiaklassi $[c(D_s)]$ sõltumatus superseostusest D_s. Seda võib tõestada seostuste pere mõiste abil. Siledalt parameetrist $a \leq t \leq b$ sõltuvaks superseostuste $(D_s)_t$ pereks nimetatakse peret, milles seostuste maatriks koosneb parameetrist t siledalt sõltuvatest 1-vormidest $\theta_s(t)$ ning operaatori L poolt määratud funktsioonidest supervektorkonna E mistahes lokaalse reeperi f jaoks. Superseostuste peret $(D_s)_t$ võib vaadelda kõverana antud supervektorkonna E kõikide siledate seostuste ruumis. Selle kõvera puutujavektorit $(\dot{D_s})_{t_0}$ punktis t_0 lokaalses baasis f saab defineerida valemiga

$$((\dot{D}_s))_{t_0} s = (\frac{\partial}{\partial t} D_s(s))|_{t=t_0} = (\frac{\partial \theta_s(t)}{\partial t} \wedge s)|_{t=t_0},$$

kus $s \in \mathcal{E}(M,E)$. Seega määrab $(\dot{D}_s)_t$ ruumi $\Omega(M, End(E))$ elemendi, mida tähistame lokaalselt $\dot{\theta}_s(t_0)$. Tõepoolest, eelmise paragrahvi valemist (7.17) järeldub, et kui $f' = f \cdot g$, siis

$$\frac{\partial \theta_s'}{\partial t} = g^{-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} g,$$

kus θ_s' on superseostuse maatriks baasis f' ja θ_s baasis f. Tähistame sümboliga $\Theta_D^s(t)$ superseostuste pere $(D_s)_t$ poolt indutseeritud kõverusvormide peret.

Lemma. *Kui $(D_s)_t$, $a \le t \le b$, on baasiruumiga M supervektorkonna E superseostuste sile pere ja $1 \le l \le dim(M)$, siis*

$$Str(\Theta_D^s(b))^l - Str(\Theta_D^s(a))^l = d \int_a^b \Phi(\Theta_D^s(t), (\dot{D}_s)_t) dt, \quad (8.2)$$

kus

$$\Phi(\Theta_D^s(t), (\dot{D}_s)_t) = \sum_{i=1}^{l} Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{(\dot{D}_s)_t} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)).♣$$

Superjälje omadustest $Str([A,B]) = 0$ ja $Str(A \cdot B) = Str(B \cdot A)$ järeldub, et suvaliste maatriksite $A_1, A_2, \ldots, A_l, B$ korral

$$\sum_{i=1}^{l} Str(A_1 \ldots [A_i, B] \ldots A_l) = 0.$$

Siit järeldub, et vormide $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l, \tau \in \Omega(M, End(E))$ jaoks kehtib valem

$$\sum_{i=1}^{l} (-1)^{p(i)} Str(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge [\sigma_i, \tau] \wedge \ldots \wedge \sigma_l) = 0, \quad (8.3)$$

kus $p(i) = (\sum_{\alpha\leq i} deg(\sigma_\alpha)) \cdot deg(\tau)$. Et välisdiferentseerimine d ja integreerimine t järgi omavahel kommuteeruvad, siis on valem (8.2) ekvivalentne valemiga

$$\frac{\partial}{\partial t} Str((\Theta_D^s(t))^l) = d(\Phi(\Theta_D^s(t), (\dot{D}_s)_t)). \tag{8.4}$$

Arvutame valemi (8.4) vasaku poole, eeldades, et superseostuse $(D_s)_t$ maatriks supervektorkonna E teatud lokaalses baasis on $\theta_s(t)$. Kehtib

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} Str((\Theta_D^s(t))^l) = \\
&= \sum_{i=1}^{l} Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{\frac{\partial}{\partial t}(\Theta_D^s(t))} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \Big(Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{d\dot{\theta}_s(t)} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) + \\
&\qquad + Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{[\dot{\theta}_s(t), \theta_s(t)]} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) \Big) \\
&= \Phi(\Theta_D^s(t), (\dot{D}_s)_t) - \\
&- \sum_{i=1}^{l} \Big(\sum_{\alpha<i} Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{\alpha}{d\Theta_D^s(t)} \wedge \ldots \wedge \overset{i}{\dot{\theta}_s(t)} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) - \\
&\qquad - \sum_{\alpha>i} Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{\dot{\theta}_s(t)} \wedge \ldots \wedge \overset{\alpha}{d\Theta_D^s(t)} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) - \\
&\qquad - Str(\Theta_D^s(t) \wedge \ldots \wedge \overset{i}{[\dot{\theta}(t), \theta_s(t)]} \wedge \ldots \wedge \Theta_D^s(t)) \Big).
\end{aligned}$$

Asendades avaldise $d\Theta_D^s(t)$ avaldisega $[\Theta_D^s(t), \theta_s(t)]$ (vastavalt Bianchi samasusele superseostuse jaoks), saame, et viimase valemi teine liidetav on valemi (8.3) põhjal 0. Seega on lemma tõestatud. Lemmast järeldub

Teoreem. *Superseostuse D_s karakteristliku vormi $c(D_s)$ kohomoloogiaklass $[c(D_s)]$ ei sõltu superseostusest D_s.*♣

Olgu $c_k(D_s)$ vormi $c(D_s)$ k-astme liidetav, s.t.

$$c_k(D_s) = \frac{1}{k!} Str((\Theta_D^s)^k).$$

Vastavalt lausele 8.1 on $c_k(D_s)$ muutkonnal M kinnine $2k$-vorm. Olgu $[c_k(D_s)]$ vastav de Rhami kohomoloogiaklass, s.t. $[c_k(D_s)] \in H^{2k}(M)$. Oletame nüüd, et baasimuutkonna M struktuur sõltub siledalt mingist parameetrite hulgast $T = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$, s.t. iga parameetrite väärtuste komplekti puhul saame mingi sileda muutkonna M_t. Et superseostus sõltub baasimuutkonna punktist, kandub sõltuvus parameetritest T vältimatult ka superseostusele, s.t. tulemuseks on mingi sile superseostuste pere. Olgu antud ka kujutus $j : N \to M_t$, kus N on sile muutkond ja j sõltub parameetritest T. Siis garanteerib teoreem 8.1, et muutkonna N kohomoloogiaklass $[j^*(c_k(D_s))] \in H^{2k}(N)$ ei sõltu parameetritest T.

Teiste sõnadega, kui γ on muutkonna N $2k$-mõõtmeline tsükkel, siis integraal

$$\int_\gamma j^*(c_k(D_s)) \tag{8.5}$$

ei sõltu parameetritest T. Näitame lõpuks, kuidas kirjeldatud skeem realiseerub Witteni topoloogilise kvantväljateooria konstrueerimisel neljamõõtmelisel muutkonnal.

Arvutame konkreetse vektorkondade klassi karakteristliku vormi, võttes vaatluse alla spiinorrühmaga $Spin(n)$ vektorkonnad. Kuid enne selgitame lühidalt, kuidas võib spiinorrühma $Spin(n)$ kirjeldada Cliffordi algebrate keeles. See on eelseisva konstruktsiooni olulisim osa.

Olgu C_n Cliffordi algebra moodustajatega $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ üle korpuse $\mathbf{C}$. Algebra C_n kõikide paariselementide hulka tähistame $C_{\bar{0}}^n$. See hulk osutub Lie' algebraks sulgude

$$[x, y] = xy - yx$$

suhtes, kus x ja y on hulga $C_{\bar{0}}^n$ suvalised elemendid. Lie' algebrale $C_{\bar{0}}^n$ vastavaks Lie' rühmaks on hulgas $C_{\bar{0}}^n$ pööratavate elementide rühm, mida tähistame $(C_{\bar{0}}^n)^x$. Saab näidata, et kujutus $exp : C_{\bar{0}}^n \to (C_{\bar{0}}^n)^x$, mis defineeritakse valemiga

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots, \quad x \in C_{\bar{0}}^n, \tag{8.6}$$

on üksühene ning katab kogu rühma $(C_{\bar{0}}^n)^x$. Tuletagem meelde, et $SO(n, \mathbf{C})$ tähistab ortogonaalsete kompleksmaatriksite rühma determinandiga 1. Tema Lie' algebra $so(n, \mathbf{C})$ koosneb kaldsümmeetrilistest maatriksitest. Lihtne on veenduda, et kujutus $\rho' : so(n, \mathbf{C}) \to C_0^n$, mis määratakse valemiga

$$\rho'(w) = \frac{1}{4}\gamma^t w \gamma, \quad w \in so(n, \mathbf{C}), \tag{8.7}$$

osutub Lie' algebra homomorfismiks, s.t.

$$\rho'([w, w']) = [\rho'(w), \rho'(w')]. \tag{8.8}$$

Kompleksne spiinorrühm $Spin(n, \mathbf{C})$ defineeritakse nüüd kui vähim rühm, mis katab rühma $SO(n, \mathbf{C})$ selliselt, et leidub homomorfism $\rho : Spin(n, \mathbf{C}) \to (C_0^n)^\times$, mille diferentsiaal langeb kokku homomorfismiga $\rho' : so(n, \mathbf{C}) \to C_0^n$. Kuna $Spin(n, \mathbf{C})$ on rühma $SO(n, \mathbf{C})$ vähim kate, peab leiduma selline kogu rühma $SO(n, \mathbf{C})$ kattev homomorfism $\sigma : Spin(n, \mathbf{C}) \to SO(n, \mathbf{C})$, et diferentsiaal σ' on samasuskujutus. Seepärast võib rühma $Spin(n, \mathbf{C})$ Lie' algebra samastada algebraga $so(n, \mathbf{C})$. Tegelikult osutub ρ injektiivseks kujutuseks, nii et rühma $Spin(n, \mathbf{C})$ võib samastada rühma $(C_0^n)^\times$ alamrühmaga, mille elemendid on kujul

$$e^{\rho(w)} = e^{\frac{1}{4}\gamma^t w \gamma}. \tag{8.9}$$

Olgu kujutus $m : \mathbf{C}^n \to C_1^n$ antud valemiga

$$m(z) = iz^t \gamma, \tag{8.10}$$

kus $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$. Siis kehtib seos

$$\rho(g) m(z) \rho(g^{-1}) = m(\sigma(g) z), \tag{8.11}$$

kus $g \in Spin(n, \mathbf{C})$.

Kui piirduda homomorfismi ρ' reaalarvuliste maatriksitega $so(n) \subset so(n, \mathbf{C})$ ja $m : \mathbf{R}^n \to C_1^n$, siis vastavalt eespool toodud konstruktsioonile saame reaalarvulise spiinorrühma $Spin(n)$ elemendid kujul

$$e^{\frac{1}{4}\gamma^t w \gamma}, \tag{8.12}$$

kus $w \in so(n)$. Rühma $Spin(n)$ Lie' algebra võib samastada Lie' algebraga $so(n)$.

Olgu P peakihtkond üle muutkonna M, $dimM = n$, mille struktuurirühmaks on $G = Spin(m)$. Olgu edaspidi $m = 2r$, s.t. m on paarisarv. Olgu ω seostuse 1-vorm peakihtkonnal P. Kuna rühma $Spin(m)$ Lie' algebra võib samastada Lie' algebraga $so(m)$, siis on seostusvorm ω 1-vormide kaldsümmeetriline maatriks, s.t. $\omega = (\omega_{ij})$, kus $i, j = 1, 2, \dots, m$. Selle seostuse kõverusvorm Θ^ω on määratud valemiga

$$\Theta^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \tag{8.13}$$

ning osutub 2-vormide kaldsümmeetriliseks maatriksiks.

Samastame nüüd spiinorrühma $Spin(m)$ elemendid Cliffordi algebra C_m (8.12) elementidega, kus $w \in so(m)$. Sellega saame rühma $Spin(m)$ esituse superruumil S_m (vt. §4 lõppu). Tähistame selle esituse $r : Spin(m) \to GL_{\bar{0}}(S_m)$. Viimase diferentsiaal langeb kokku valemi (8.7) reaalarvulise osaga.

Katva homomorfismi $\sigma : Spin(m, \mathbf{C}) \to SO(m, \mathbf{C})$ ahend reaalrühmale $Spin(m)$ võimaldab konstrueerida peakihtkonnaga P assotsieeritud vektorkonna E kihiga $V = \mathbf{R}^m$. Vormi ω poolt indutseeritav seostus D_E^ω ekvivariantsete vormide ruumil $\Omega_e(P, \mathbf{R}^m)$ omandab kuju

$$D_E^\omega \tau^i = d\tau^i + \omega_{ij} \wedge \tau^j, \qquad \tau = (\tau^i) \in \Omega_e(P, \mathbf{R}^m),$$

sest Lie' algebras $so(m)$ kehtib $\sigma' = id$. Seesama seostusvorm ω indutseerib seostuse vektorkonnal $End(E)$ (tähistame samuti D_E^ω), mille operaatorit kirjeldab valem

$$D_E^\omega \tau = d\tau + [\omega, \tau], \qquad \tau \in \Omega_e(P, so(m)).$$

Teiselt poolt võib vektorkonda E vaadelda peakihtkonna $P \times V$ baasimuutkonnana. Sellel peakihtkonnal on struktuurirühm $Spin(m)$. Tähistame peakihtkonda $P \times V$ sümboliga Q. Esitus $r : Spin(m) \to GL_{\bar{0}}(S_m)$ võimaldab konstrueerida peakihtkonnaga Q assotsieeritud vektorkonna kihiga S_m. Et S_m on endomorfismi $J = i^m \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_m$ suhtes supervektorruum, osutub saadav assotsieeritud vektorkond supervektorkonnaks, mida tähistame sümboliga $\mathcal{W}$.

Vaatleme seostusi supervektorkonnal $\mathcal{W}$. Ilmselt võib peakihtkonna P seostust triviaalselt laiendada kogu peakihtkonnale $Q = P \times V$. Peakihtkonna Q puutujaruum $T_{(p,v)}Q$ punktis (p, v) avaldub otsesummana

$$T_{(p,v)}Q = T_p P \oplus V.$$

Defineerime peakihtkonnal Q vormi ω valemiga

$$\omega_{(p,\nu)}(X,u) = \omega_p(X),$$

kus $X \in T_pP$ ja $u \in V$. Sellisel juhul muutub ω seostuse 1-vormiks kogu peakihtkonnal Q. Seostuse 1-vorm ω indutseerib omakorda seostuse supervektorkonnal $\mathcal{W}$. Olgu $\Omega_e^p(Q,S_m)$ peakihtkonnal Q ekvivariantsete ruumis S_m väärtusi omandavate p-vormide ruum. Siis avaldub indutseeritud seostus kujul

$$D_{\mathcal{W}}^{\omega}(\tau) = d\tau + r'(\omega) \wedge \tau = d\tau + \frac{1}{4}(\omega_{ij}\gamma_i\gamma_j) \wedge \tau.$$

Vastavat kõverusvormi $\Theta^{\omega}{}_{\mathcal{W}} \in \Omega_e(Q, End(S_m,S_m))$ kirjeldab valem

$$\Theta_{\mathcal{W}}^{\omega} = \frac{1}{4}\Theta^{\omega}{}_{ij}\gamma_i\gamma_j,$$

kus Θ^{ω} defineeritakse valemiga (8.13). Selleks et defineerida superseostus supervektorkonnal $\mathcal{W}$, on tarvilik operaator $L \in \mathcal{E}(Q, End(S_m))$ (vt. §7).

Lause 8.2. *Supervektorruumi S_m kuuluv punktist $q = (p,\nu) \in P \times V = Q$ sõltuv paaritu operaator L_q, mis avaldub valemiga*

$$L_q = m(\nu) = i\nu^t\gamma = i\,x^k\gamma_k,$$

kus $\nu \in \mathbf{R}^m$ on koordinaatidega $(x^1,x^2,\ldots,x^m)$, osutub ekvivariantseks operaatoriks, s.t.

$$L_{R_g(q)} = r(g^{-1})\,L_q\,r(g), \qquad g \in Spin(m).\clubsuit$$

Tõepoolest, kehtib seos $R_g(q) = (R_g(p), \sigma(g^{-1})\nu)$. Seepärast

$$L_{R_g(q)} = m(\sigma(g^{-1})\nu).$$

Võttes arvesse valemit (8.11), saame

$$L_{R_g(q)} = r(g^{-1})\,L_q\,r(g).$$

Järeldus. *Operaator ekvivariantsetel vormidel $\Omega_e(Q,S_m)$*

$$D_s^{\omega} = d + \frac{1}{4}\omega_{ij}\gamma_i\gamma_j + L_q \tag{8.14}$$

indutseerib superseostuse supervektorkonnal $\mathcal{W}$.♣

Eelmise paragrahvi valemi (7.21) järgi arvutatud superseostuse D_s^ω kõverus vektorkonnal $\mathcal{W}$ avaldub kujul

$$\Theta_{\mathcal{W}}^\omega = \frac{1}{4}\Theta_{ij}^\omega \gamma_i \gamma_j + iD_E^\omega x^k \gamma_k - |\nu|^2, \tag{8.15}$$

kus $\nu = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$ ja $|\nu|^2 = \sum_{k=1}^m (x^k)^2$.

Teoreem 8.2. *Supervektorkonna $\mathcal{W}$ superseostuse (8.14) karakteristlik vorm $c(D_s^\omega)$ avaldub valemiga*

$$c(D_s^\omega) = Str(e^{\Theta_{\mathcal{W}}^\omega}) = (-1)^m\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{-m} det\left(\frac{sinh(\frac{\Theta^\omega}{2})}{\frac{\Theta^\omega}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} U,$$

kus

$$\begin{aligned} U &= \pi^{-m} e^{-|\nu|^2} \int e^{\frac{1}{4}\Theta_{ij}^\omega \theta_i \theta_j + iD_E^\omega x^k \theta_k} d^m\theta \\ &= \pi^{-m} e^{-|\nu|^2} \sum_{I\, paaris} \epsilon(I, I')\, Pf\left(\frac{1}{2}\Theta_I^\omega\right)(D_E^\omega x)^{I'} \end{aligned}$$

ja $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ on mingi Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajad.♣

Selle teoreemi tõestus järeldub vahetult teoreemist 6.2 ja valemist (8.15). Vorm U on vektorkonna E Thomi klassi üldistus. Erilist huvi pakub Grassmanni algebra element

$$R = \frac{1}{4}\Theta^\omega{}_{ij}\theta_i\theta_j + i\, D_E^\omega x^k\, \theta_k - |\nu|^2, \tag{8.16}$$

mis seisab vormi U eksponendi astendajas.

Definitsioon 8.2. *Vormi R (8.16) nimetatakse Mathai-Quilleni vormiks.*♣

Selle paragrahvi lõpus kirjeldame vormi R omadusi selgitamaks põhjusi, mispärast on võetud Mathai-Quilleni vorm E. Witteni poolt konstrueeritud topoloogilise väljateooria lagranžiaani aluseks.

Lause 8.3. *Olgu operaatoril δ_ω kuju*

$$\delta_\omega = D_E^\omega + 2ix^k \frac{\partial}{\partial\theta_k},$$

kus D_E^ω on vektorkonna E seostuse operaator. Siis

$$\delta_\omega(R) = 0.\clubsuit$$

Kehtib seos

$$\delta_\omega(R) = \frac{1}{4}(D_E^\omega\Theta^\omega)_{ij}\theta_i\theta_j + i\Theta^\omega{}_{kj}x^j\theta_k - 2x^k D_E^\omega x^k + \\ + i\Theta^\omega{}_{jk}x^j\theta_k + 2x^k D_E^\omega x^k.$$

Bianchi samasuse tõttu (lause 7.2)

$$D_E^\omega\Theta^\omega = d\Theta^\omega + [\omega, \Theta^\omega] = 0.$$

Juhime tähelepanu sellele, et operaator δ_ω on paaritu operaator. Ta muudab nii diferentsiaalvormi kui ka Grassmanni elemendi järku ühe võrra.

Järeldus.

$$\delta_\omega(e^R) = 0.\clubsuit$$

Nüüd täpsustame vormi R struktuuri. Ilmselt on ta ekvivariantne vorm peakihtkonnal $Q = P \times \mathbf{R}^m$ (struktuurirühmaga $SO(m)$), mis omandab väärtusi Grassmanni algebras $\mathcal{G}^m$. Rühma $SO(m)$ esitus algebral $\mathcal{G}^m$ (vt. §6, valem (6.35)) on algebra automorfism kujul

$$\theta_i \to a_{ki}\theta_k, \qquad a \in SO(m).$$

Tähistame sellist esitust $p : SO(m) \to GL_{\bar{0}}(\mathcal{G}^m)$. Järelikult $R \in \Omega_e(Q, \mathcal{G}^m)$. Ruumi $R \in \Omega_e(Q, \mathcal{G}^m)$ suvalise elemendi integreerimisel üle Grassmanni algebra moodustajate saame toime $G = SO(m)$ suhtes invariantse tavalise diferentsiaalvormi peakihtkonnal Q. Seega on lõpptulemuseks diferentsiaalvorm vektorkonnal $E = P \times \mathbf{R}^m / SO(m)$.

Lause 8.4. *Olgu $\tau \in \Omega_e(Q, \mathcal{G}^m)$. Siis*

$$\int(\delta_\omega\tau)d^m\theta = d(\int \tau\, d^m\theta).\clubsuit$$

Teisendades võrduse vasakut poolt, saame

$$\int (\delta_\omega \tau) d^m\theta = \int (D_E^\omega \tau + 2ix^k \frac{\partial \tau}{\partial \theta_k}) d^m\theta.$$

Integraali üle Grassmanni algebra omadustest järeldub:

$$\int \frac{\partial \tau}{\partial \theta_k} d^m\theta = 0, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Seega

$$\int (\delta_\omega \tau)\, d^m\theta = \int D_E^\omega \tau\, d^m\theta = \int (d\tau + p'(\omega) \wedge \tau)\, d^m\theta.$$

Viimases valemis pakuvad huvi suurimate astmetega liikmed moodustajate $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ järgi. Esituse p definitsioonist tuleneb, et

$$p(A)(\theta_1\theta_2 \ldots, \theta_m) = det(A)\, \theta_1\theta_2 \ldots \theta_m = \theta_1\theta_2 \ldots \theta_m,$$

sest $A \in SO(m)$. Siit juba järeldub, et

$$p'(a)(\theta_1\theta_2 \ldots \theta_m) = 0,$$

kus $a \in so(m)$. Et välisdiferentsiaali ja integraali kohad võib vahetada, jõuame tulemusele

$$\int (\delta_\omega \tau)\, d^m\theta = d(\int \tau\, d^m\theta).$$

Lausetest 8.3 ja 8.4 järeldub veel kord Thomi vormi U kinnisus. Tõepoolest, kehtib seos

$$dU = \pi^{-m} d(\int e^R d^m\theta) = \pi^{-m} \int \delta_\omega(e^R)\, d^m\theta = 0.$$

Lausest 8.4 võib teha mitmeid huvitavaid järeldusi. Integreerimine üle Grassmanni algebra teisendab operaatori δ_ω suhtes kinnise „vormi” (sellise „vormi” τ, et $\delta_\omega(\tau) = 0$) ruumist $\Omega_e(Q, \mathcal{G}^m)$ kinniseks vormiks peakihtkonnal Q ja täpse vormi täpseks. Seepärast oleks kasulik uurida operaatori δ_ω kohomoloogiaid. See operaator pole siiski nilpotentne, sest

$$\delta_\omega^2 = \Theta^\omega + 2i(D_E^\omega x)^k \frac{\partial}{\partial \theta_k}. \tag{8.17}$$

Mathai-Quilleni vormi R võib võtta kvantväljateooria aluseks. Vaatleme vormi R teatud väljateooria lagranžiaanina, peakihtkonna Q punkti (p, ν) koordinaate bosonväljadena ning nende diferentsiaale ja algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajaid fermionväljadena. Siis on operaatorit δ_ω loomulik interpreteerida lagranžiaani R supersümmeetria operaatorina. Oletame, et lagranžiaani struktuur sõltub veel mingitest parameetritest. Antud väljade kvantteooriat võib kirjeldada genereeriva funktsionaali abil (vt. esimest peatükki), millel on järgmine integraalkuju:

$$\int \Big(\int e^R \, d^m\theta \Big) \, dp d\nu. \tag{8.18}$$

Vastavalt teoreemile 8.2 annab sulgudes olev integraal karakteristliku vormi ja seepärast on muutkonna Q mingit tsüklit mööda integreerimise tulemuseks invariant, mis ei sõltu eespool nimetatud parameetritest. Just kirjeldatud skeemi kasutaski E. Witten kvantväljateooriat neljamõõtmelisel muutkonnal konstrueerides. Seejuures kasutas ta peakihtkonnana P lõplikumõõtmelise peakihtkonna kõikide seostuste ruumi S (väljateoorias nimetatakse seda ruumi kõikide kalibratsioonväljade ruumiks). Selles ruumis toimib kalibratsioonteisenduse rühm $\mathcal{Q}$ (mis on samuti lõpmatudimensionaalne). Osutub, et ruum S on lõpmatudimensionaalne peakihtkond rühma $\mathcal{Q}$ toime suhtes. Seega $\mathcal{Q}$ on peakihtkonna S struktuurirühm. Ruumiks V võttis ta lõpmatumõõtmeline neljamõõtmelise Riemanni muutkonna antiduaalsete vormide ruumi $\mathcal{B}$. On näha, et ruumi $\mathcal{B}$ struktuur sõltub sel juhul muutkonna M meetrikast (parameetritest, millest oli enne juttu). Vaatamata sellele ei sõltu kvantväljateooria objektid, genereerivad funktsionaalid (8.18), meetrikast, sest konstruktsiooni järgi on nad topoloogilised invariandid. Siin tuleb rõhutada seda, et antud väljateooria puhul tuleb valemis (8.18) integreerida üle lõpmatudimensionaalse Grassmanni algebra ja üle lõpmatudimensionaalse ruumi S. Selliseid integraale nimetatakse kontinuaalseteks integraalideks või funktsionaalintegraalideks. Siiamaani puudub selliste integraalide range matemaatiline teooria.

Kui oletada, et eespool kirjeldatud konstruktsioon kehtib ka lõpmatudimensionaalsete vektorkondade puhul, siis rahuldab saadud kvantväljateooria üht teooriale esitatavat põhinõuet, kovariantsuse ehk meetrikast sõltumatuse nõuet. Sellise printsiibi järgi konstrueeritud kvantväljateooriaid nimetatakse topoloogilisteks kvantväljateooriateks. E. Witten näitas, et neljamõõtmelise muutkonna topoloogilise kvantväljateooria puhul langevad genereerivad funktsionaalid kokku Donaldsoni invariantidega.

Täiendav kirjandus

I. Superruum ja superväljad.

1. Poincaré superalgebra defineerimisega algavad füüsikutele mõeldud supersümmeetriat käsitlevad raamatud [1-3]. Neist kahes esimeses võib leida Haagi-Łopuszanski-Sohniuse teoreemi tõestuse. Kolme- ja neljamõõtmelist superruumi on oma raamatus väga põhjalikult käsitlenud S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Roček ja W. Siegel [4]. Lühikese, kuid ammendava kokkuvõtte sellest on teinud M. Roček [5]. Lühemaks tutvumiseks sobivad ka J. Strathdee ja J. Taylori artiklid kogumikust [6].
2. Lorentzi rühma spiinoresituse definitsioon lähtudes Diraci maatriksitest on antud B. Dubrovini, S. Novikovi ja A. Fomenko õpikus [7]. Weyli, Majorana ja Majorana-Weyli spiinorite defineerimise võimalustest d-mõõtmelises ruumis on ülevaate andnud J. Scherk [8]. Kahekomponendiliste spiinorite formalismi neljamõõtmelises aegruumis on põhjalikult välja arendanud R. Penrose [9,10].
3. Lagrange'i ja Hamiltoni formalismi detailse kirjelduse kaasaegse matemaatika keeles on andnud V.I. Arnold [11]. Nende rakendusi väljateoorias võib leida kvantväljateooria õpikutes [12,13]. Seostega süsteemide tähtsust füüsikas on selgitanud P.A.M. Dirac [14]. Supervälju ja supersümmeetrilisi mõjufunktsionaale on käsitletud raamatutes [1-3].
4. Pöörlevat osakest ja pseudoklassikalist spinni on antikommuteeruvate muutujate kaudu kirjeldatud P.G.O. Freundi raamatus [3].
5. Nii bosonstringide kui fermionstringide detailne teooria on antud stringiteooria õpikutes [15,16].
6. Neljamõõtmelise ruumi supersümmeetrilistele väljateooriatele on pühendatud S.J. Gatesi, M.T. Grisaru, M. Roček ja W. Siegeli raamat [4]. Lühemaid käsitlusi võib leida M. Roček artiklist [5] ja supersümmeetria õpikutest [1-3].
7. Eelteadmiste saamiseks üldrelatiivsusteooriast võib soovitada A. Koppeli loenguid [17] ja mahukat õpikut [18], millele autoriteks Ch. Misner, K.S. Thorn ja J.A. Wheeler. Esi-

mese monograafia supergravitatsiooniteooria kohta kirjutas P. Van Nieuwenhuizen [19]. Lühemaid käsitlusi võib leida supersümmeetria õpikutest [1-3]; neist kahes esimeses on antud ka $N = 1$, $d = 4$ supergravitatsiooniteooria formuleering geomeetrilise tähendusega superväljade kaudu neljamõõtmelises superruumis.

8. Superstringide ja superosakeste detailne teooria on antud stringiteooria õpikutes [15,16].
9. $N = 1$, $d = 11$ supergravitatsiooniteooria kirjelduse võib leida J. Scherki artiklist [8], P.G.O. Freundi õpikust [3] ja mitmest kogumiku [6] artiklist.
10. Kvantväljateooriate matemaatilist struktuuri on väga detailselt kirjeldanud B. Hatfield [20]. Samast võib leida funktsionaalintegraali definitsiooni ja arvutuseeskirjade tuletamise. Yangi-Millsi välja kvantteooria füüsikalised alused on esitatud L. Ryderi õpikus [13]. Ülevaate kalibratsioonteooriate kvantiseerimisest Batalini-Fradkini-Vilkovõsski meetodi järgi võib leida M. Henneaux' artiklist [21]. Topoloogilisi väljateooriaid on tutvustanud D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski ja G. Thompson [22].
11. Diferentsiaalvormide teooria põhjaliku käsitluse on andnud R. Bott ja L.W. Tu [23]. Hamiltoni mehaanikaga tutvumiseks võib soovitada V.I. Arnoldi raamatut [11]. J.J. Duistermaat ja G.J. Heckman esitasid oma teoreemi tõestuse artiklis [24].

II. Superalgebra, superanalüüs ja supermuutkond.

1. Grassmanni algebra kirjelduse võib leida paljudes õpikutes. Supermatemaatikast lähtudes on Grassmanni algebrat põhjalikult käsitletud F.A. Berezini raamatus [25] ja J.I. Manini raamatus [35]. F.A. Berezini raamatus [25] on materjal antud väga kõrgetasemelises esituses ja eeldab lugejalt head ettevalmistust. Grassmanni algebra konstruktsioon vektorruumi välisalgebrana on antud diferentsiaalgeomeetria õpikutes [38], [34], [7]. Cliffordi algebrat on põhjalikult kirjeldatud C. Chevalley raamatus [28]. Seal on ka näidatud, kuidas saab Cliffordi algebra abil konstrueerida ortogonaalse rühma spiinoresitust. Lõpmatumõõtmelise Grassmanni algebra kirjelduse, mida käesolevas paragrahvis pole vaadeldud, võib leida F.A. Berezini raamatust [26]. Superruumi, superalgebra ning nendega seotud struktuuride kohta on palju materjali raamatus [27], mille autoriteks on N. Berline, E. Getzler ja M. Vergne.

2. Standardse materjali maatriksite ja determinantide kohta võib leida G. Kangro õpikust [32]. Supermaatriksid ja lineaarne algebra superruumis on hästi esitatud F.A. Berezini raamatu [25], D.M. Gitmani ja I.V. Tjutini raamatu [30] ning J.I. Manini raamatu [35] kolmandates peatükkides.
3. Superdeterminanti ja selle omadusi on põhjalikult kirjeldatud F.A. Berezini raamatus [25].
4. Lie' superalgebrate kohta käiv ulatuslik materjal sisaldub V. Kaci artiklis [31]. Peale füüsikas tähtsat osa etendavate käesolevas paragrahvis kirjeldatud konkreetsete superalgebrate leidub seal ka poollihtsate Lie' superalgebrate klassifikatsioon.
5. Antud paragrahvis esitatud supermuutkonna kontseptsioon on kõige lähedasem F.A. Berezini omale raamatust [25]. Erinevalt käesoleva paragrahvi materjalist formuleerib Berezin supermuutkonna mõiste kimpude ringistatud ruumide teooria terminites. Teistsuguseid lähenemisviise supermuutkondade teooria konstrueerimisel võib leida B. DeWitti raamatust [29] ja B. Kostant'i raamatust [33]. A. Rogersi artiklis [37] antud konstruktsioon on klassikalistele muutkondadele kõige lähemal. Seal on antud ka supermuutkondade teooria erinevate konstruktsioonide võrdlev analüüs.
6. Reeglid integreerimiseks üle Grassmanni muutujate defineeris esmakordselt F.A. Berezin. Seepärast nimetatakse integraali üle Grassmanni algebra sageli Berezini integraaliks. Vastavat teooriat on kirjeldatud F.A. Berezini raamatutes [25] ja [26] ning J.I. Manini raamatus [35]. Berezini integraali analoog üle Cliffordi algebra on esitatud V. Mathai ja D. Quilleni artiklis [36].
7. Selle paragrahvi sissejuhatav osa, mis valgustab lühidalt diferentsiaalvormide, siledate muutkondade kohomoloogiate ning kihtkondade teooriat, on üksikasjalikku käsitlust leidnud paljudes õpikutes. Lähenemisviisi poolest võib soovitada F.W. Warneri õpikut [40], R.O. Wellsi õpikut [39] ning R. Botti ja L.W. Tu raamatut [23]. Superseostuste formalism, mis moodustab antud paragrahvi teise osa, on võetud V. Mathai ja D. Quilleni originaalartiklist [36]. Selle põhjalikum kirjeldus on antud N. Berline'i, E. Getzleri ja M. Vergne'i raamatus [27].
8. Kihtkondade topoloogilised invariandid, mis üldistavad klassikalisi invariante, olid avastatud ja kirjeldatud D. Quilleni ja V. Mathai poolt superseostuste formalismi abil. Selle paragrahvi esitus toetubki nende originaalartiklile [36].

Üksikasjalikuma ja edasiarendatuma käsitluse võib leida N. Berline'i, E. Getzleri ja M. Vergne'i raamatust [27]. Lugejale, kes on huvitatud selle teooria rakendustest topoloogilistes kvantväljateooriates, soovitame D. Birminghami, M. Blau, M. Rakowski ja G. Thompsoni ülevaadet [22].

1. J. Wess, J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983. Venekeelne tõlge: Ю. Весс, Дж. Беггер. *Суперсимметрия и супергравитация.* Мир, Москва, 1983.
2. P. West. *Introduction to Supersymmetry and Supergravity.* World Scientific, Singapore, 1986. Venekeelne tõlge: П. Уэст. *Введение в суперсимметрию и супергравитацию.* Мир, Москва, 1989.
3. P.G.O. Freund. *Introduction to Supersymmetry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
4. S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Roĉek, W. Siegel. *Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry.* Benjamin/Cummings, 1983.
5. M. Roĉek. An Introduction to Superspace and Supergravity. In: *Superspace and Supergravity.* Edited by S.W. Hawking and M. Roĉek. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
6. *Supergravity '81.* Edited by S. Ferrara and J.G. Taylor. Cambridge University Press, Cambridge, 1982. Venekeelne osaline tõlge: *Введение в супергравитацию.* Мир, Москва, 1985.
7. Б.Д. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия.* Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, Москва, 1979.
8. J. Scherk. Extended supersymmetry and extended supergravity theories. In: *Recent Developments in Gravitation.* Edited by M. Levy and S. Deser. Plenum, New York and London, 1979. Venekeelne tõlge raamatus *Геометрические идеи в физике.* Мир, Москва, 1983.
9. R. Penrose. Structure of Space-Time. In: *Battelle Rencontres 1967.* Edited by C. DeWitt and J.A. Wheeler. Benjamin, New York and Amsterdam, 1968. Venekeelne tõlge: Р. Пенроуз. *Структура пространства-времени.* Мир, Москва, 1972.
10. R. Penrose, W. Rindler. *Spinors and Space-Time.* Cambridge University Press, Cambridge. Vol. 1, 1984, Vol. 2,

1986. Venekeelne tõlge: Р. Пенроуз, В. Риндлер. *Спиноры и пространство-время.* Мир, Москва, т. 1, 1986, т. 2, 1987.

11. В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, Москва, 1989.
12. J.D. Bjorken, S.D. Drell. *Relativistic Quantum Fields.* McGraw Hill, 1964. Venekeelne tõlge: Дж.Д. Бьеркен, С.Д. Дрелл. *Релятивистская квантовая теория*, т. 1–2, Мир, Москва, 1978.
13. L.H. Ryder. *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Venekeelne tõlge: Л. Райдер. *Квантовая теория поля.* Мир, Москва, 1987.
14. P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics.* Academic Press, New York, 1967. Venekeelne tõlge: П.А.М.Дирак. *Лекции по квантовой механике.* Мир, Москва, 1968.
15. L. Brink, M. Henneaux. *Principles of String Theory.* Plenum Press, New York-London, 1988. Venekeelne tõlge: Л. Бринк, М. Энно. *Принципы теории струн.* Мир, Москва, 1991.
16. M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory.* Vol. 1-2. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Venekeelne tõlge: М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. *Теория суперструн*, т. 1–2. Мир, Москва, 1990.
17. A. Koppel. *Üldrelatiivsusteooria alused.* Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1975.
18. Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation.* Freeman, San Francisco, 1973. Venekeelne tõlge: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. *Гравитация*, т. 1–3. Мир, Москва, 1977.
19. P. van Nieuvenhuizen. *Supergravity.* Physics Reports, v. 68, no. 4, pp. 189-578, 1981.
20. B. Hatfield. *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings.* Addison-Wesley, 1992.
21. M. Henneaux. *Hamiltonian Form of the Path Integral for Theories with a Gauge Freedom.* Physics Reports, v. 126, no. 1, pp. 1-66, 1985.
22. D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson. *Topological Field Theory.* Physics Reports, v. 209, no. 4&5, pp. 129-340, 1991.
23. R. Bott, L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1982. Venekeelne tõlge: Р. Ботт, Л.В. Ту. *Дифференциальные формы в*

алгебраической топологии. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1989.

24. J.J. Duistermaat, G.J. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Inv. Math., v. 69, pp. 259–268, 1982. Addendum: Inv. Math., v. 72, p. 153, 1983.
25. Ф.А. Березин. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* Издательство Московского университета, Москва, 1983.
26. Ф.А. Березин. *Метод вторичного квантования.* Наука, Москва, 1986.
27. N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, v. 298, Springer, Berlin.
28. C. Chevalley. *Theory of Lie Groups.* Princeton University Press, Princeton, 1946. Venekeelne tõlge: К. Шевалле. *Теория групп Ли.* Иностранная литература, Москва, 1948.
29. B. DeWitt. *Supermanifolds.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
30. Д.М. Гитман, И.В. Тютин. *Каноническое квантование полей со связями.* Наука, Москва, 1986.
31. V. Kac. *Lie superalgebras.* Advances in Math., v. 26, no. 1, pp. 8–96, 1977.
32. G. Kangro. *Kõrgem algebra.* Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1962.
33. B. Kostant. *Graded Manifolds, Graded Lie Theory and Prequantization.* Lecture Notes in Math., v. 570, pp. 177–306, Springer, 1977.
34. Ü. Lumiste. *Diferentsiaalgeomeetria.* Valgus, Tallinn, 1987.
35. Ю. Манин. *Калибровочные поля и комплексная геометрия.* Наука, Москва, 1984.
36. V. Mathai, D. Quillen. *Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms.* Topology, v. 25, no. 1, pp. 85–110, 1986.
37. A. Rogers. *A global theory of supermanifolds.* J. Math. Phys., v. 21, pp. 1352–1365, 1980.
38. S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1964. Venekeelne tõlge: С. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии.* Мир, Москва, 1970.
39. R.O. Wells. *Differential Analysis in Complex Manifolds.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1973. Venekeelne tõlge: Р. Уэллс. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* Мир, Москва, 1976.

40. F.W. Warner. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman & Co, Glenview (Illinois), 1971. Venekeelne tõlge: Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* Мир, Москва, 1987.

Supersümmeetria toob sisse uut tüüpi sümmeetria ja vaatleb võrdväärsetena nii kommuteeruvaid kui antikommuteeruvaid muutujaid.

Supersümmeetria füüsikas võimaldab ühendada boson- ja fermionväljad üheks superväljaks.

Superstringiteooria on seni ainuke mittevastuoluline kvantteooria, mis kirjeldab kõiki tuntud vastastikmõjusid - tugevat, elektronnõrka ja gravitatsioonilist.

Käesolev raamat, mis põhineb autorite poolt Tartu Ülikooli füüsika- ja matemaatikaüliõpilastele peetud loengutel, on sissejuhatuseks nendesse tänapäeva matemaatika ja teoreetilise füüsika aktuaalsetesse valdkondadesse.