АКАДЕМИЯ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ

МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ, СПЕЦИАЛИЗАЦИИ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

ТАЛЛИН 1969

1 XI
А-17788

Академия наук Эстонской ССР
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ

И.Каганович, Э.Краав, М.Рейснер,
П.Рооба, А.Шипай

МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ, СПЕЦИАЛИЗАЦИИ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Таллин - 1969

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
238727

ARHIIVKOGU

Предисловие

Применение математических методов для определения и обоснования оптимальных размеров и состава предприятий дает возможность, вместо изолированного расчета параметров промышленных объектов, планировать совместно всю конкретную сеть действующих и проектируемых предприятий в пределах отрасли и района, либо многоотраслевой производственной системы с учетом факторов размещения, взаимосвязей между предприятиями, ограниченности различного рода ресурсов. В результате расчет оптимальных размеров и структуры предприятий становится органичной составной частью комплексной разработки оптимального плана развития и размещения отраслей промышленности и математического моделирования процессов концентрации, специализации, кооперирования и комбинирования производства.

При этом имеется в виду, что в экономико-математическом исследовании в должной мере учтены специфические особенности рассматриваемых отраслей и что ему предшествует квалифицированная техно-экономическая проработка возможных вариантов технологии и размещения производств. В равной мере, условием надежности практических рекомендаций является получение в ходе исследования не одной, а нескольких гипотез плана и их серьезная экономическая экспертиза.

Данная работа обобщает методический опыт Института экономики АН Эстонской ССР в области моделирования, программирования и решения названного класса задач. Особое внимание уделено сетевым многопродуктовым моделям. Описаны разработанные и другие используемые в институте алгоритмы и приведен ряд программ, составленных для решения на ЭВМ "Минск-22" линейных и некоторых типов дискретных задач.

Для иллюстрации практического применения моделей и методов в работу включены материалы прикладных исследований, из числа проведенных в 1968 г.

Работа выполнена в экономико-математическом секторе Института экономики АН Эстонской ССР под руководством канд. экон. наук И.Кагановича. В ней участвовал сотрудник Эстонского отделения ЦЭМИ АН СССР А. Шипай.

Параграфы написаны: 1.1, 1.3, 2 - И.Кагановичем; 4, 5, 7, 8 - М.Рейснером, 1.2 - ими совместно; 3 - И.Кагановичем, Э.Краав, М.Рейснером, А.Шипаем; 6 - П.Рооба.

I. М О Д Е Л И

I.1. Классификация моделей

Выбор математической модели для оптимизации размеров, состава и размещения совокупности предприятий зависит от характера производства и от круга факторов и связей, учитываемых в задаче. Эти модели и описываемые ими задачи могут быть классифицированы по нескольким признакам.

Существенно с экономической и вычислительной точек врения их подразделение на однопродуктовые, многопродуктовые и многоотраслевые.

Однопродуктовые модели применяются для задач определения мощностей и пунктов размещения предприятий отрасли, которая выпускает однородную продукцию, технологически мало связана с другими отраслями и отличается большим удельным весом транспортных затрат в стоимости продукции.

Многопродуктовые модели служат для оптимального планирования сети предприятий, их размеров, специализации, кооперирования и размещения, при выработке двух и более видов продукции, если отсутствует или количественно не выражена взаимозаменяемость и соизмеримость последних.

Если в многопродуктовой модели объектом опти-

низации служит промышленный комплекс с межзаводскими поставками продукции, вырабатываемой в пределах комплекса, то такую модель называют многоотраслевой.

В многоотраслевых моделях возможны обратные технологические связи в виде потребления продукции собственной выработки в данном же производстве (отрасли) - непосредственно, либо через посредство других применяемых продуктов. Например, в системе угольная шахта-электростанция для добычи каменного угля используется электроэнергия, а тем самым и уголь, который сожжен для производства электроэнергии, отпущенной шахте.

В зависимости от характера технологических связей, свойственных объекту, различают модели производственного, распределительного и производственно-транспортного типов.

Если технологические связи в оптимизируемой системе описываются производственной матрицей (матрицей коэффициентов затрат и выпуска продукции разных видов для набора технологических способов), то модель относится к производственному типу.

Наиболее распространенной моделью этого типа является модель общей задачи производственного планирования, разработанная Л.В.Канторовичем /19/. Она используется для многоотраслевых задач с обратными технологическими связями, а также других задач, не сводимых к однопродуктовым, в случаях, когда транспорт-

ный фактор не оказывает влияния на величину затрат или же оно невелико.

Если последний играет существенную роль, то однопродуктовые и сводимые к ним задачи формализуют на основе моделей распределительного типа, в частности транспортного. Многопродуктовые и многоотраслевые задачи в аналогичном случае решаются на модели производственно-транспортного типа: в производственную матрицу вводят технологические способы, характеризующие транспортные связи (соответствующие векторы обычно формируются в блоки).

Задачи распределительного типа по своему экономическому содержанию могут быть одно- и многоэтапными. При постановке одноэтапных задач учитывают связи предприятий либо только с пунктами производства сырья, либо только с пунктами потребления продукции. Они уместны, если рассматриваемые производства: а) материалоемки (затраты на транспорт сырья и материалов несущественны), б) отличаются малым выходом продукции по сравнению с количеством перерабатываемого сырья (затраты на транспорт продукции несущественны), в)имеют заранее установленные, единственно возможные связи с определенным поставщиком (потребителем) при многовариантности связей с потребителями (поставщиками).

В многоэтапных задачах размещение предприятий

определяется по отношению и к поставщикам сырья и к потребителям продукции в условиях многовариантности связей с теми и другими, причем могут одновременно рассматриваться предприятия нескольких типов, осуществляющие последовательные стадии переработки сырья. В применении к производственным и производственно-транспортным системам аналогом многоэтапных задач служат задачи многоотраслевые. Последние, если в них отсутствуют обратные связи, при определенных условиях поддаются преобразованию в многоэтапные задачи транспортного типа.

По способу задания вариантов развития производства (технологических способов) различают задачи с дискретными и с непрерывными переменными.

В задачах с дискретными переменными количества вырабатываемой (перерабатываемой) продукции для каждого варианта - величины постоянные. Вариант неделим, изменение объема или структуры производства учитывают путем построения соответствующего набора вариантов. Дискретная постановка используется прежде всего в тех случаях, когда этот набор заранее предписан, например номенклатурой типового оборудования или типовых проектов предприятий и сооружений.

Из множества возможных вариантов развития предприятия, как правило, требуется выбрать только один,

причем он должен быть реализован (войти в план) с целиком загруженной мощностью (поскольку речь идет о типовых вариантах). Следовательно, в таких задачах переменные, выражающие интенсивность использования вариантов, принимают лишь дискретные значения, включая нулевое, а промежуточные, нестандартные значения мощности недопустимы.

Дискретная задача может быть сформулирована таким образом, чтобы переменные принимали значения 1 или 0 (каждый рассматриваемый вариант входит в план полностью или совсем не входит). В этом смысле подобные задачи часто называют целочисленными.

В данной работе рассматриваются задачи, при решении которых минимизируются производственные и транспортные затраты. Известно, что с увеличением объема производства сумма затрат растет не пропорционально ему, чаще всего медленнее. Вследствие этого зависимость удельных затрат от масштаба производства, вообще говоря, нелинейна. По кривой изменяется и размер прибыли в задачах, рассчитанных на ее максимизацию.

При дискретной постановке практически не приходится иметь дела с нелинейными зависимостями, так как в расчет приняты лишь заданные варианты мощности и специализации, каждый с соответствующей величиной затрат. Следовательно, благодаря дискретности переменных це-

левая функция задачи линейна, представляя собой сумму произведений единичных затрат (коэффициенты целевой функции) на характеристики использования мощности (значения переменных), согласно принятым в задаче размерностям величин.

В задачах с непрерывными переменными мощность предприятия может быть любой величины в пределах ограничений, технологические способы обычно узко специализированы, так что состав предприятия формируется в ходе решения задачи без предварительной разработки вариантов комбинирования и концентрации производства.

Нередко лишь изменение величины мощности возможно выразить непрерывной переменной, ассортимент же продукции или покомпонентная структура сырьевой смеси зафиксированы. Это бывает, если производственные пропорции диктуются технологическими условиями, как, например, в химической промышленности и металлургии. Целевая функция задачи с непрерывными переменными должна быть нелинейной, соответственно форме зависимости затрат от масштабов производства.

Зависимость производственных затрат на единицу продукции от объема производства во многих случаях имеет вид равносторонней гиперболы.

Такая зависимость соответствует принятому в экономике делению затрат на пропорциональные объему продукции и условнопостоянные (фиксированные доплаты).

Параметры уравнения связи имеют силу при том конкретном уровне техники и организации производства и в тех границах величины мощности, применительно к которым они найдены. С изменением условий производства изменяется и уравнение связи.

В целом для данной последовательности интервалов значений мощности предприятия влияние этого фактора на удельные затраты может быть выражено несколькими отрезками гипербол.

В иных случаях для обобщенного представления величины затрат как функции объема производства, в разных его условиях, требуется выделить среди затрат, помимо пропорциональных и фиксированных, еще и такие, которые по своей природе увеличиваются медленнее, чем растет производство.

В настоящей работе зависимость затрат от масштабов производства будет приниматься в расчет посредством задания фиксированных доплат, т.е. в форме равносторонней гиперболы.

Задача с непрерывными переменными в большой мере свободна от субъективного подхода к выработке технологических вариантов и особенно предпочтительна, если при определении оптимальных размеров и состава предприятий она решается первично, на стадии, предшествующей типовому проектированию, когда еще нет но-

менклатуры типов мощности и специализации.

Задача отраслевой оптимизации носит динамический характер, который может быть принят в расчет двояким образом: а)путем решения изолированных статических задач для ряда временных интервалов при последующей увязке полученных планов, б)путем решения единой динамической задачи.

Система моделей концентрации и размещения в рассмотренной классификации, представлена в работе /14/. Ниже более подробно характеризуются модели транспортного и производственно-транспортного типов.

I.2. Модели транспортного типа

Рассмотрим задачу транспортного типа в сетевой постановке с фиксированными доплатами, применяемую для определения оптимальных пунктов размещения, мощности и специализации предприятий, продукция которых однородна или соизмерима.

Дана транспортная сеть с узлами k ,которым соответствуют некоторые пункты производства или потребления ($k = 1,2,\ldots, K$, где K - общее число узлов), и с направленными дугами kt и tk , обозначающими коммуникации между соседними пунктами k и t (на первом месте стоит номер пункта отправления, на втором - номер пункта получения). Среди узлов можно выделить начальные, из которых дуги только выходят, конечные,

в которые дуги только входят, и промежуточные, соединенные с другими узлами и входящими и выходящими дугами.

Таким образом, пунктом отправления может быть начальный или промежуточный узел, а пунктом получения – промежуточный или конечный.

Обозначим:

$x_к$ – искомый объем производства в пункте к (мощность предприятия);

$d_к$ – максимальная мощность предприятия в пункте к ;

$x_{кt}$ – искомое количество груза, перевозимого по коммуникации кt;

$s_к$ – заданный объем потребления продукции в пункте к ($s_к \geq 0$);

$\gamma_{кt}$ – транспортные расходы на коммуникации кt ;

$\alpha_к$ и $\beta_к$ – соответственно, удельные пропорциональные затраты на производство и фиксированные (условнопостоянные) доплаты в пункте к .

Задача формулируется следующим образом:[x] найти план, минимизирующий значение целевой функции

$$\sum_{к=1}^{К} \sum_{t=1}^{К} (\gamma_{кt} + \alpha_к) x_{кt} + \sum_{к=1}^{К} \beta_к (x_к) \qquad (1)$$

при условиях

$$x_{кt} \geq 0; \quad 0 \leq x_к \leq d_к, \qquad (к,t = 1,2,\ldots, К), \qquad (2)$$

---

[x] Для упрощения записи будем считать, что заданная транспортная сеть дополнена всевозможными отсутствующими в ней коммуникациями, причем их пропускные способности считаются равными нулю.

$$\sum_{t=1}^{\mathcal{K}} x_{kt} - \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} x_{tk} \leqslant x_k - s_k, \qquad (k = 1,2,\ldots, K), \quad (3)$$

$$\beta_k(x_k) = \begin{cases} \beta_k & \text{при } x_k > 0 \\ 0 & \text{при } x_k = 0, \end{cases} \qquad (k = 1,2,\ldots, K). \quad (4)$$

Условие (2) ограничивает производственную мощность в пункте k. Выражение (3) соразмеряет в каждом из узлов расход продукции (потребление и вывоз) с ее поступлением (производством и ввозом). Величина $\sum_t x_{kt}$ в этом выражении представляет собой сумму перевозок по дугам, выходящим из k-го узла, т.е. означает вывоз продукции из этого пункта; $\sum_t x_{tk}$ – суммарный объем перевозок по дугам, входящим в k-й узел.

Если в данном узле нет потребления ($s_k = 0$), то объем производства x_k будет покрывать превышение вывоза продукции из k-го пункта над ввозом в этот пункт. При отсутствии производства в k-м узле ($x_k = 0$)

$$\sum_t x_{kt} - \sum_t x_{tk} \leqslant -s_k \quad \text{или} \quad -\sum_t x_{kt} + \sum_t x_{tk} \geqslant s_k$$

– ввоз продукции в пункт k должен настолько превышать вывоз, чтобы по меньшей мере покрывать потребность этого пункта в продукции. Если k-й узел служит перевалочной базой и в нем отсутствует и производство и потребление данного продукта, то выражение (3) для такого узла будет иметь вид

$\sum_t x_{kt} - \sum_t x_{tk} \leqslant 0$, откуда $\sum_t x_{kt} \leqslant \sum_t x_{tk}$

– вывозимое количество продукта из этого пункта не может превышать ввозимого количества.

Условие (4) означает, что фиксированные доплаты β_k имеют место, если k -е предприятие входит в план, и отсутствуют, если его в плане нет (функция разрывна в точках $x_k = 0$).

В задаче (1) – (4) по мере увеличения мощности отдельных предприятий в плане и тем самым сокращения их числа, сумма фиксированных доплат снижается, растут, однако, издержки на перевозку груза из оставшихся пунктов переработки до потребителей. Эти противоположно направленные изменения взаимно компенсируются в точке минимума целевой функции (1), которой и соответствует оптимальный вариант мощности и размещения предприятий.

Если варианты мощности предприятия заранее предписаны, так что среди них нужно сделать выбор, наряду с отбором пунктов размещения, то задача становится дискретной. В таких случаях, как отмечалось, для каждого варианта должна быть известна величина производственных затрат на единицу мощности при полной ее загрузке.

Рассматривая каждый вариант мощности как отдельное предприятие, будем понимать под обозначением d_k

величину мощности к -го предприятия, если оно входит в план, и под $\alpha_к$ в данной связи - удельные производственные затраты этого предприятия.

Целевая функция такой задачи с дискретными переменными имеет вид

$$\sum_{к=1}^{\mathcal{K}} \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} (\gamma_{кt} + \alpha_к) x_{кt} \qquad (5)$$

Ее требуется минимизировать при ограничениях (3) и (6)

$$x_{кt} \geq 0, \quad x_к = \begin{cases} 0 \\ d_к \end{cases}, \qquad (к,t = 1,2,\ldots, К). \qquad (6)$$

В сетевой модели нет принципиальной разницы между начальными, промежуточными и конечными пунктами (в матрице поставщики и потребители строго разделены). Это существенно облегчает моделирования разветвленных производственных и транспортных связей и позволяет весьма разнообразные по своим особенностям многопродуктовые и межотраслевые задачи (без обратных связей) с дискретными и непрерывными переменными описывать с помощью многоэтапных сетевых моделей распределительного типа. Последнее достижимо при условии технологической соизмеримости у производителей всех участвующих в задаче продуктов и ресурсов (требование взаимозаменяемости продукции у потребителя не ставится). Коэффициенты соизмерения для каждого технологического способа, если они существуют, исчисляются из условия равенства суммарных затрат расходуемых продуктов и ресурсов суммарному выпуску про-

дуктов (в соизмеримых единицах). Иными словами, для каждого продукта и ресурса нужно найти такой положительный коэффициент λ_i, что для каждой технологии выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} (c_{ij} - a_{ij})\lambda_i = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots, g), \qquad (7)$$

где

g – число технологических способов, различающихся производственными характеристиками;[x)]

j – индекс технологического способа ($j = 1,2,\ldots,g$);

i – индекс продукта или ресурса ($i = 1,2,\ldots,m$);

c_{ij} – выпуск i-го продукта при единичной интенсивности применения j-й технологии;

a_{ij} – соответственно, расход i-го ресурса или продукта.

Коэффициенты λ_i должны быть положительными по той причине, что если бы некоторые из них оказались отрицательными, то при переходе от оптимального плана задачи (1) – (4) в соизмеримых единицах к оптимальному плану в первоначальных натуральных единицах, значения соответствующих переменных x_{kt} также стали бы отрицательными, а в случае $\lambda_i = 0$ – бесконечно большими.

В систему линейных однородных уравнений (7) с m неизвестными входит g уравнений. Она имеет ненулевое решение, если $g < m$ (предполагаем, что ранг мат-

---

x) Производства одного и того же типа, размещенные в разных пунктах, учитываются здесь как один технологический способ.

рицы $\| c_{ij} - a_{ij} \|$ равен g). Чтобы найти в этом случае строго положительное решение, нужно выразить g неизвестных λ_i через $m - g$ остальных (соответствующие члены уравнений переносятся вправо и решается система с матрицей размером $g \times g$). Затем свободным переменным придают произвольные положительные значения с тем, однако, расчетом, чтобы зависящие от них значения первых g неизвестных также оказались положительными. В результате для каждого продукта получаем значение коэффициента соизмерения λ_i .

Коэффициенты затрат и выпуска соответствующего продукта должны быть на λ_i умножены, а коэффициент целевой функции, относящийся к этому продукту, - разделен. После такого преобразования задача принимает вид однопродуктовой транспортного типа.

Ниже на рис.I - 7 изображены некоторые сетевые модели технологических вариантов. Во всех моделях направление материальных потоков в технологическом процессе принято слева направо. В кружках, обозначающих узлы сети, указан размер ресурса (A_w) или потребности ($-A_w$). То и другое относится к некоторому технологическому способу w . Над дугами отмечены пропорциональные затраты производства, которые интерпретируются как транспортные расходы на коммуникации, поставленной в соответствие данному производ-

ственному звену. Нулевые ресурсы, потребности и стоимости не обозначены. Входящие пунктирные стрелки слева каждого рисунка означают связи с поставщиками сырья, выходящие пунктирные стрелки справа - поставки продукции потребителям. Те и другие символизируют чисто транспортные части общей модели. Нумерация узлов не приведена, ее порядок зависит от программы, применяемой для решения задачи.

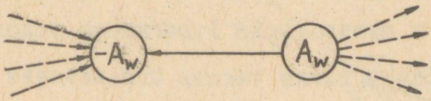


Рис. I.

Рис.I изображает модель однопродуктовой технологии. В исходном узле дуги, обозначенной сплошной линией, дана мощность объекта в единицах, общих для производства и потребления: $A_w = c_{1w}\lambda_1$. Пункт, куда дуга входит, служит как бы потребителем сырья, а также недоиспользованной производственной мощности с величиной потребности $-A_w = -a_{2w}\lambda_2$. Затраты нулевые.

Следовательно, производственный объект представлен на сети в данном случае не одним, а двумя узлами - "положительным" и "отрицательным" - с дугой между ними, встречной к направлению материальных по-

токов в технологическом процессе. В обоих узлах обеспечивается материальный баланс, причем условие (3) выполняется как равенство. Правый узел (поставщик): вывоз продукции потребителям плюс "вывоз" не использованной мощности равны производственной мощности. Левый узел (получатель): ввоз сырья для переработки плюс "ввоз" не использованной мощности равны производственной мощности. Таким путем в сетевых моделях ограничивается производственная мощность объекта (размер вывоза продукции и ввоза сырья),согласно условию (2). Подобным же образом легко учесть ограничение пропускной способности любой коммуникации на сети.

Вместе с тем рис.1 иллюстрирует способ моделирования на сети многоэтапных задач, эквивалентный методу фиктивной диагонали при матричной постановке. (В матричной многоэтапной модели каждое предприятие также фигурирует по меньшей мере дважды: как получатель сырья и как производитель и поставщик продукции).

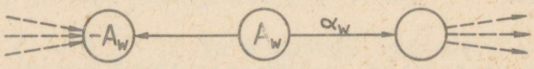


Рис.2

Модель на рис.2 отличается от предыдущей лишь

тем, что включает дополнительный узел - как бы перевалочную базу - и дугу с производственными затратами α_w на единицу фактически выработанной продукции. Материальный баланс в этом узле: вывоз продукции потребителям минус ввоз ее на перевалочную базу равен нулю.

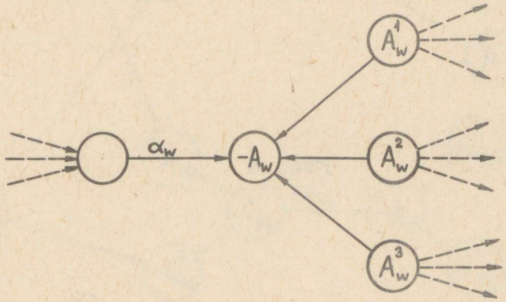


Рис. 3

Технология с одним видом сырья и несколькими вырабатываемыми из него продуктами описана сетью на рис.3. Здесь левый узел - база снабжения сырьем (получает его из многих источников); α_w - затраты на производство; $A_w^i = \alpha_{iw}\lambda_i$ - производственная мощность по i -му продукту в соизмеримых единицах

$-A_w = -\alpha_{4w}\lambda_4$ - размер потребности в сырье, соизмеренный с продукцией.

Условие баланса для среднего узла:

$$A_w = A_w^1 + A_w^2 + A_w^3 \qquad (8)$$

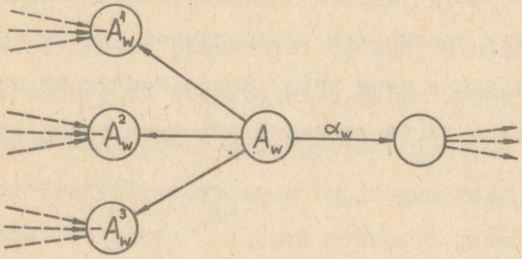


Рис. 4

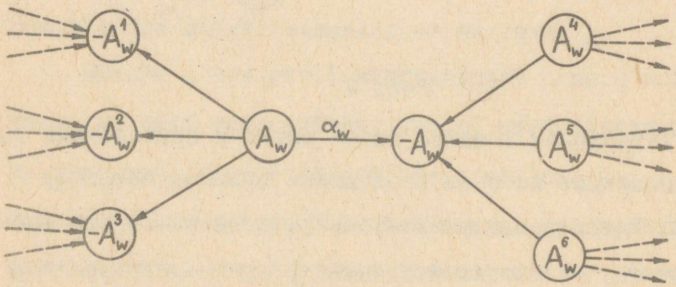


Рис. 5

Аналогична модель на рис.4, где изображен технологический вариант с несколькими видами сырья и одним продуктом.

Модель технологии с несколькими видами сырья и продукции (рис.5) естественным образом обобщает две

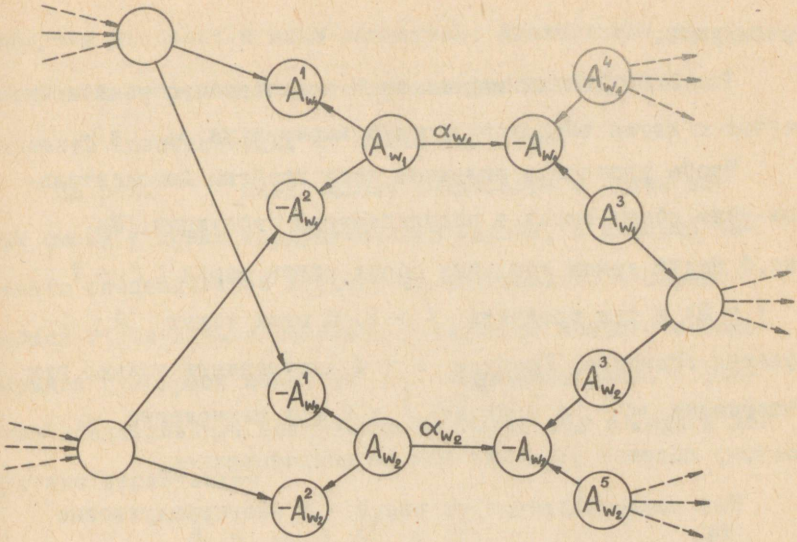

$-A^1_{w_1}$
A_{w_1}
α_{w_1}
$-A_{w_1}$
$A^4_{w_1}$
$-A^2_{w_1}$
$A^3_{w_1}$
$-A^1_{w_2}$
$A^3_{w_2}$
A_{w_2}
α_{w_2}
$-A_{w_2}$
$-A^2_{w_2}$
$A^5_{w_2}$

Рис. 6

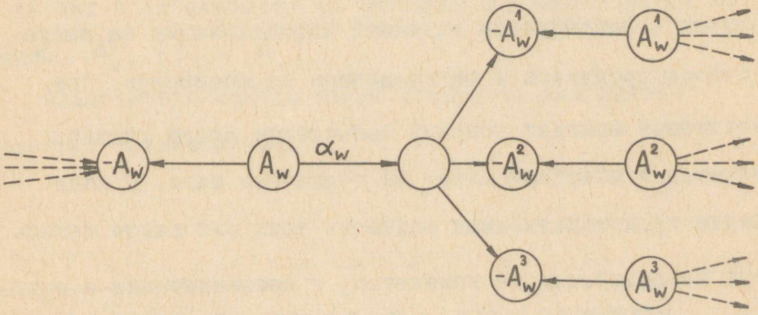

$-A^1_w$
A^1_w
$-A_w$
A_w
α_w
$-A^2_w$
A^2_w
$-A^3_w$
A^3_w

Рис. 7

предыдущие.

Рис.6 изображает модель производственного узла в случае с двумя технологическими вариантами w_1 и w_2.

Чтобы упростить описание сети введены дополнительные узлы сбора сырья и распределения продукции. На рис.6 таких узлов три: для обоих видов сырья ($i = 1$ и $i = 2$) и для продукта $i = 3$. В этих узлах A_w - нулевая величина. Продукт $i = 4$ выпускается только при технологии w_1, а продукт $i = 5$ при технологии w_2, поэтому сборные узлы для них не потребовались.

Все представленные на рис.3 - 6 многопродуктовые технологии (они описаны однопродуктовыми по своей форме моделями) рассчитаны на задачи с дискретными переменными. Пункт производства или технологический способ, который войдет в оптимальный план, должен быть полностью загружен с соблюдением заданной специализации на выпуске набора продуктов в определенном ассортименте. При итеративных методах решения выполнение этого условия требуется и обеспечивается на последнем шаге. В ходе решения производственная мощность всех или части технологий используется не полностью, и специализация в этих случаях обычно не соблюдается (все перерабатываемое сырье, к примеру, может оказаться направленным на выпуск какого-либо одного продукта). Только при полной

загрузке входящих в план мощностей, достигаемой на последней итерации, целиком реализуются какие-либо варианты специализации из числа заданных.

На рис. 7 дана модель технологии с одним видом сырья и тремя продуктами для задачи, в которой варианты специализации заранее не обусловлены и определяются в результате решения. Требование полного использования суммарной мощности A_w сохраняет силу.[x] Свобода специализации обеспечивается тем, что в модели допустимо неравенство

$$A_w < A_w^1 + A_w^2 + A_w^3 . \qquad (9)$$

Следовательно, продукция данной технологии с общей производственной мощностью A_w может включать одно, два или три изделия, с тем, однако, чтобы выпуск каждого из них в отдельности не превысил соответствующей величины A_w^i, $(A_w^i \leq A_w)$.

Аналогичную модель легко построить для многосырьевого производства.

---

[x] Таким образом, переменные x_w здесь дискретны ($x_w = A_w$), но x_w^i непрерывны ($x_w^i \leq A_w^i$).

I.3. Модели производственно-транспортного типа

Рассмотрим модель многопродуктовой задачи с непрерывными переменными и фиксированными доплатами. В задаче отыскивается оптимальный план концентрации, специализации и размещения производства в условиях свободного формирования состава предприятий; внутриотраслевое потребление выпускаемой продукции не велико; затраты на перевозки составляют существенную долю в общей сумме затрат.

Обозначения:

j - индекс пункта размещения предприятия ($j = 1,2,\ldots,n$);

i - индекс продукта ($i = 1,2,\ldots,m$);

r - индекс потребителя продукции ($r = 1,2,\ldots,l$);

x_{ij} - искомый объем производства i-го продукта на j-м предприятии;

x_{ijr} - искомый объем перевозки i-го продукта от j-го предприятия до r-го потребителя;

d_{ij} - максимальная мощность j-го предприятия по i-му продукту;

b_{ir} - спрос r-го потребителя на i-й продукт;

γ_{ijr} - затраты на перевозку единицы i-го продукта из j-го предприятия r-му потребителю;

α_{ij} - пропорциональные производственные затраты j-го предприятия на единицу i-го продукта;

β_{ij} – фиксированные доплаты на j -м предприятии при выпуске i -го продукта;

β_j – общезаводские фиксированные доплаты j -го предприятия.

Требуется определить значения переменных x_{ij} и x_{ijr}, решив задачу

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}(\gamma_{ijr}+\alpha_{ij})x_{ijr}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x_{ij})+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\Big(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\Big)\to min, \quad (10)$$

$$x_{ijr},\ x_{ij}\geqslant 0,\ (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n;\ r=1,2,\dots,l); \quad (11)$$

$$\sum_{r=1}^{l}x_{ijr}=x_{ij}\leqslant d_{ij},\quad (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n) \quad (12)$$

– объем производства i -го продукта на j -м предприятии, ограниченный его мощностью, равен вывозу этого продукта из пункта расположения предприятия;

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijr}=b_{ir},\quad (i=1,2,\dots,m;\ r=1,2,\dots,l) \quad (13)$$

– спрос r -го потребителя на i -й продукт должен покрываться поставками;

$$\beta_{ij}(x_{ij})=\begin{cases}\beta_{ij} & \text{при } x_{ij}>0\\ 0 & \text{при } x_{ij}=0\end{cases} \quad (14)$$

– предприятие j несет фиксированные затраты, если на

нем выпускается i -й продукт;

$$\beta_j\left(\sum_i x_{ij}\right)=\begin{cases}\beta_j & \text{при } \sum_i x_{ij}>0\\ 0 & \text{при } \sum_i x_{ij}=0\end{cases} \qquad (15)$$

- если j -е предприятие входит в план, то должны быть приняты в расчет заводские фиксированные доплаты.

По сравнению с результатами решения соответствующей линейной задачи, сужение номенклатуры продукции на каждом предприятии и уменьшение их числа ведет, с одной стороны, к росту суммы пропорциональных затрат, с другой - к экономии фиксированных.

Трехиндексная задача (10) - (15) сводится к двухиндексной транспортного типа /47/. При сетевой постановке число вершин соответствующего транспортного графа не превышает $2n+m+l$, при матричной же размерность такой задачи значительно больше: $mn\times ml$. Следует заметить, что она не распадается на m однопродуктовых блоков (отдельных транспортных задач). Во-первых, эти блоки объединены фиксированными доплатами, с помощью которых улавливается эффект концентрации и специализации в пределах всего многопродуктового комплекса как единого целого. Во-вторых, величины мощности d_{ij} для каждого j (предприятия) чаще всего взаимозависимы. Последний случай на конкретном примере разбирается в § 3.2.

Многоотраслевая задача с дискретными переменными возникает, если нужно определить оптимальные мощности,

состав и размещение предприятий в условиях частичного использования продукции данной производственной системы для ее собственных нужд. В задаче минимизируется сумма затрат на экзогенные ресурсы и факторы, то есть не воспроизводимые в пределах анализируемой системы и поступающие извне. Стоимость тех израсходованных продуктов, которые произведены в этой системе, в показатели затрат не входит (во избежание повторного счета). При наличии обратных связей возможность свести задачу к типу транспортной отсутствует.

Обозначения:

i - индекс продукта и не воспроизводимого в данной системе ресурса ($i = 1,2,\ldots,m$);

j - индекс предприятия ($j = 1,2,\ldots, n$);

j,r - индексы отправителя или получателя груза, в частности предприятия ($j,r = 1,2,\ldots,n; n+1,\ldots$ $\ldots, n+l$);

h - индекс варианта развития j -го предприятия ($h = 1,2,\ldots,H_j$);

x_j^h - искомая интенсивность использования h -го варианта развития j -го предприятия ($h = 1,2,\ldots, H_j$; $j = 1,2,\ldots, n$);

x_{ijr} - искомый объем перевозок i -го продукта или ресурса от j -го поставщика до r -го пункта производственного или конечного потребления ($i = 1,2,\ldots, m$; $j,r = 1,2,\ldots, n+l$);

x_{irj} - искомый объем перевозок i -го продукта или ресурса из r -го пункта поставки в j-й пункт потребления;

γ_{ijr} и γ_{irj} - пропорциональные транспортные расходы;

p_j^h - производственные затраты на экзогенные ресурсы при h -м варианте развития j -го предприятия ($j = 1,2,\ldots, n$);

c_{ij}^h - выпуск i -го продукта при h -м варианте развития j -го предприятия ($j = 1,2,\ldots,n$);

a_{ij}^h - соответственно, расход i -го ресурса или продукта;

b_{ir} - конечная потребность в i -м продукте ($b_{ir} \geq 0$) или ограничение расхода i -го ресурса ($b_{ir} < 0$) в пункте $r, (r = n+1, \ldots, n+l)$.

Целевая функция задачи:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+l}\sum_{r=1}^{n+l}\gamma_{ijr}\,x_{ijr} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} p_j^h\,x_j^h \longrightarrow min \qquad (16)$$

Ограничения:

$$x_{ijr} \geq 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,n;\ j,r = 1,2,\ldots,n+l), \qquad (17)$$

$$x_j^h = 0 \text{ или } 1, \qquad (j = 1,2,\ldots,n;\ h = 1,2,\ldots,H_j), \qquad (18)$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} x_j^h \leq 1, \qquad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad (19)$$

$$\sum_{h=1}^{H_j}(c_{ij}^h - a_{ij}^h)x_j^h + \sum_{r=1}^{n+l} x_{irj} - \sum_{r=1}^{n+l} x_{ijr} = 0, \quad \begin{matrix}(i = 1,2,\ldots,m;\\ j = 1,2,\ldots,n),\end{matrix} \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijr} - \sum_{j=1}^{n} x_{irj} \geqslant b_{ir}, \quad \begin{matrix}(i = 1,2,\ldots,m;\\ r = n+1,\ldots,n+l).\end{matrix} \tag{21}$$

Уравнения (20) выражают материальные балансы у производителей: количество продукции каждого вида, выработанной на j -м предприятии ($j = 1,2,\ldots, n$),

$$\sum_h c_{ij}^h \, x_j^h,$$

и завезенной сюда,

$$\sum_{r=1}^{n+l} x_{irj},$$

покрывает потребление продукции собственной выработки,

$$\sum_h a_{ij}^h \, x_j^h,$$

и ее вывоз,

$$\sum_{r=1}^{n+l} x_{ijr}.$$

Условие (21) требует, чтобы ввоз продукта каждого вида в пункт конечного потребления был не меньше размера спроса в этом пункте

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ijr} \geqslant b_{ir} \right),$$

а вывоз каждого расходуемого в системе ресурса из пунктов, откуда он поставляется, - не больше установленного лимита

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} x_{irj} \geqslant -b_{ir} \; ; \; \sum_{j=1}^{n} x_{irj} \leqslant b_{ir} \right).$$

Таблица I

Матрица условий многоотраслевой задачи

Продукт или ресурс (i)	Поставщик, потребитель (j,r)		Продукт или ресурс ($i = 1,\dots, m$)																				Потребность в продукции или ресурсе сырья (b_{ir})
			1																m				
	Предприятие ($j = 1,\dots, n$)		Поставщик ($j,r = 1,\dots, n, n+1,\dots, n+l$)																				
	1	… n	…	1	…	n	…	1	…	n	…	n+1	n+1	· · · · ·		1	…	n	…	n+1	n+1	…	1	…	n
	Вариант ($h = 1,\dots, H_j$)		Получатель ($j,r = 1,\dots, n, n+1,\dots, n+l$)																				
	1	… H_j …	1	…	H_j	…	n	…	1	…	n+1	…	n+1	…	1	…	n	· · · · ·		n	…	1	…	1	…	n	…	n+1	…	n+1
	Коэффициент целевой функции (P_{oj}^h, γ_{ijr}, γ_{irj})																						
	P_{o1}^1 …	$P_{o1}^{H_j}$ …	P_{on}^1 …	$P_{on}^{H_j}$ …	$\gamma_{1,1n}$ …	$\gamma_{1,n,1}$ …	$\gamma_{1,1,n+1}$ …	$\gamma_{1,n,n+1}$ …	$\gamma_{1,n+1,1}$ …	$\gamma_{1,n+1,n}$ · · · · ·		$\gamma_{m,1n}$ …	$\gamma_{m,n,1}$ …	$\gamma_{m,n+1,1}$ …	$\gamma_{m,1,n+1}$ …	$\gamma_{m,n,n+1}$								
	Коэффициент выпуска или затрат (c_{ij}^h, a_{ij}^h, ± 1)																						
1	1	c_{11}^1	$-a_{11}^{H_j}$				-1		1		-1				1										
	· · ·																								
	n			c_{1n}^1	$-a_{1n}^{H_j}$		1		-1				-1				1								
	n+1										1		1												$b_{1,n+1}$
	· · ·																								
	n+l														-1		-1								$-b_{1,n+l}$
· · ·	· · ·																								
· · ·	· · ·																								
· · ·	· · ·																								
m	1	$-a_{m1}^1$	$c_{m1}^{H_j}$																	-1		1		1			-1			
	· · ·																								
	n			$-a_{mn}^1$	$c_{mn}^{H_j}$															1		-1				1			-1	
	n+1																						-1		-1				$-b_{m,n+1}$
	· · ·																								
	n+l																								1		1		$b_{m,n+l}$

Все рассмотренные соотношения легко прослеживаются на макете матрицы условий задачи (табл.1).

Для каждого технологического способа выделен столбец матрицы. Производственная технология описывается коэффициентами: p_j^h (целевой функции), c_{ij}^h (выпуска) и $-a_{ij}^h$ (затрат). Соответствующие параметры транспортной технологии: γ_{ijr}, $1, -1$. Коэффициенты ± 1 группируются в m автономных блоков (по числу участвующих в задаче продуктов и ресурсов), связанных между собой через производственные технологии. В изолированном виде каждый транспортный блок может быть свернут в транспортную задачу размерностью $(n+1)\times(n+1)$.

Из постановки задачи (16) - (21) следует, что для оптимизации системы с многопродуктовыми технологиями и дискретной интенсивностью их использования не требуется информация о затратах на производство каждого продукта в отдельности: коэффициент целевой функции характеризует технологический способ в целом при единичной интенсивности. Поэтому при данном подходе нет надобности распределять затраты комплексного производства между отдельными его продуктами.

Для задач, по условиям которых предприятия данной системы реализуют всю свою продукцию вне пределов сис-

темы, модель может быть несколько упрощена. Если принять, что r - индекс потребителя конечной продукции и поставщика исходного сырья ($r = 1,2,\ldots,l$), то вместо выражений (16) и (20) будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\gamma_{ijr}x_{ijr}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j}p_j^h x_j^h \longrightarrow min, \qquad (16')$$

$$\sum_{h=1}^{H_j}(c_{ij}^h-a_{ij}^h)x_j^h+\sum_{r=1}^{l}x_{irj}-\sum_{r=1}^{l}x_{ijr}=0, \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n), \qquad (20')$$

а в выражении (21) $r = 1,2,\ldots,l$.

Многопродуктовая производственно-транспортная задача (16'), (17) - (19), (20'), (21) в ряде случаев, как было показано выше, поддается преобразованию в задачу транспортного типа.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

2.1. Подход к анализу

Как следует из представленных моделей, задача определения оптимальных размеров предприятий и их размещения не укладывается в схему линейного программирования, поскольку затраты на производство меняются не пропорционально его масштабам. Результат решения линейной задачи, особенно транспортного типа, обнаруживает тенденцию к дроблению производственных мощностей и к территориальному рассредоточению производства: сумма пропорциональных транспортных затрат тем ниже, чем гуще сеть предприятий - поставщиков (или потребителей).

Вместе с тем задача с фиксированными доплатами сводится к большому числу транспортных задач линейного программирования. Если зафиксировать какой-либо набор предприятий, то для этого набора сумма фиксированных доплат будет величиной постоянной, и минимизировать понадобится лишь пропорциональную часть целевой функции.

В равной мере и дискретная задача для конкретного набора предприятий и вариантов мощности сводится к множеству задач линейного программирования. Просмотрев всевозможные сочетания пунктов размещения в задачах с непрерывными переменными и всевозможные разновидности типов

предприятий и варианты их размещения в задачах с дискретными переменными, можно было бы в каждом случае найти такой набор, при котором суммарные затраты на производство и транспорт продукции были бы минимальными.

В практических задачах общее число комбинаций, которые пришлось перебрать при таком подходе, необозримо, для задачи (I) - (4), /§I.2/ оно составляет 2^n, где n - число пунктов возможного размещения предприятий.

Существуют методы направленного поиска оптимального плана комбинаторных задач, рассматриваемых типов, значительно сокращающие число перебираемых вариантов.

К задачам с фиксированными доплатами применим весьма эффективный метод последовательных расчетов /41, 42/.

При решении этой задачи методом последовательных расчетов она сводится к ряду линейных задач для некоторых комбинаций пунктов производства.

В задаче (I) - (4), /§ I.2/ обозначим через J множество индексов (номеров) пунктов производства, $J = \{1,2,\ldots,n\}$, и через ω некоторые входящие в J подмножества этих индексов ($\omega \subset J$). Минимальное значение целевой функции (I), /§ I.2/ для каждого подмножества ω обозначим $P(\omega)$.

Решение методом последовательных расчётов проводится, отправляясь от $|\omega| = 1$ или от $\omega = J$ (через $|\omega|$ здесь обозначено число элементов в подмножестве ω). В первом случае, например, вначале рассматриваются все n подмножеств ω_1, $|\omega| = 1$, затем комбинируются варианты ω_2 с $|\omega| = 2$ и запоминаются лишь те из них, для которых $P(\omega_2) \leq P(\omega_1)$. Из оставшихся вариантов составляются комбинации ω_3 с $|\omega| = 3$ и для дальнейшего запоминаются лишь те, для которых $P(\omega_3) \leq P(\omega_2)$ и т.д. Таким образом, каждый раз рассматриваются только такие комбинации, которые не содержат иных подмножеств, кроме отобранных на предыдущем шаге. Например, подмножество $\{1,2,3,4\}$ подлежит рассмотрению лишь в том случае, если

$$P(1,2,3) \leq P(1,2), P(1,3), P(2,3);$$
$$P(1,2,4) \leq P(1,2), P(1,4), P(2,4);$$
$$P(1,3,4) \leq P(1,3), P(1,4), P(3,4);$$
$$P(2,3,4) \leq P(2,3), P(2,4), P(3,4).$$

Вариант со значением $P(\omega)$, наименьшим из всех найденных, является оптимальным. Большое достоинство метода в том, что наряду с оптимальным планом он обеспечивает расчет всех планов в заданных границах значений целевой функции, превосходящих минимальное. Это весьма важно в условиях неточности исходной информации и необходимости учета дополнительных факторов разме-

щения, не поддающихся количественной оценке.

На основании опыта решения задач размещения методом последовательных расчетов установлено, что вместо 2^n возможных вариантов приходится просчитывать примерно $n^3 \sim n^4$ вариантов. Однако при значительной размерности задачи и этот объем расчетных операций превосходит возможности ЭВМ, используемых в экономических расчетах.

Решение задач с числом возможных вариантов размещения более 20 - 30 обычно осуществляется приближенными методами. Значение хотя бы и приближенного их решения весьма велико, ибо позволяет экономить крупные суммы капитальных вложений при осуществлении фондоемких строительных программ. Кроме того, необходимо соразмерять усилия на доводку приближенного решения до строго оптимального со степенью точности исходной экономической информации.

Для приближенного решения задач концентрации и размещения транспортного типа с непрерывными и с дискретными переменными и практически любой размерности применяется метод отсева /11, 13-15/. В основном, он рассчитан на распространенные и вместе с тем наиболее трудные для решения случаи, когда число возможных вариантов развития и размещения предприятий значительно больше требуемого.

Процесс решения методом отсева разбивается на ряд итераций (шагов), каждая из которых состоит в том, что число пунктов или вариантов производства сокращается на единицу по определенному признаку (правилу отсева).

Предложено несколько правил отсева.

Одно из них рассчитано на случаи равномерного распределения потребителей продукции (или поставщиков сырья) по территории. Признаком для отсева предприятия на каждой итерации служит, согласно этому правилу, минимальная величина его загрузки (отсев по загрузке) по решению транспортной задачи (см. §§ 2.3 и 5). Общее число транспортных задач, которые требуется решить в процессе отсева по загрузке обычно не превышает n (количество возможных пунктов размещения или вариантов предприятий).

В степени точности решения этот вариант метода уступает алгоритму отсева по целевой функции /34/. На каждой итерации, поочередно проверяя на отсев все предприятия, обнаруживают по признаку минимума целевой функции то из них, которое следует исключить из плана, чтобы затраты были бы меньше, чем при любом другом варианте отсева. Отсеянный завод в последующих итерациях не участвует. В заключение из поитерационных минимумов выбирается общий (см. §§ 2.2 и 6).

Опыт применения этого правила отсева свидетельст-

вует о том, что в большинстве случаев оно приводит к решению, совпадающему с глобальным оптимумом. Число просматриваемых комбинаций (транспортных задач)

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Для отыскания худших пунктов менее трудоемким способом, то есть не прибегая на каждой итерации к перебору всех вариантов отсева, но вместе с тем основываясь на стоимостных показателях, могут быть использованы некоторые упрощающие приемы (см. § 2.3.3).

При любых правилах отсева исключаемый на данной итерации пункт может оказаться более благоприятным по расположению относительно иной совокупности предприятий, т.е. на последующих итерациях. Для преодоления необратимости отсева и сохранения возможности возврата в план ранее отсеянных пунктов соответствующие им коэффициенты целевой функции в течение всего хода решения не выводятся из задачи, мощности же этих пунктов приравниваются нулю. Это позволяет находить и фиксировать потенциалы для всех отсеянных предприятий и тем самым следить за изменением потенциалов от итерации к итерации. Если потенциал ранее отсеянного пункта снизится по сравнению с первоначальным значением и окажется меньше потенциала того предприятия, которое отсеивается на данной итерации, то этот пункт возвращается в план. Объяс-

нение состоит в том, что потенциал предприятия с нулевой мощностью, если он отрицателен, есть мера снижения пропорциональных затрат производства и транспорта, к которому повел бы возврат данного предприятия в план (рост с нуля до единицы выпуска продукции на нем). Положительный потенциал при тех же условиях характеризует приращение пропорциональных затрат.

Таким образом, уменьшение алгебраического значения потенциала является признаком возможного улучшения позиции ранее отсеянного пункта среди оставшихся. Для проверки этого он и возвращается в план.

Ход решения методом отсева как бы моделирует процесс концентрации производства - постепенное, шаг за шагом, выпадение худших вариантов и сосредоточение производства в лучших пунктах. При этом определяется кривая изменения производственных и транспортных затрат по мере концентрации.

Имея в виду вероятностный характер исходных данных, а также неизбежно упрощенное отражение в модели влияния различных технологических и экономических факторов, однократное решение задачи, независимо от того, получено оно точным или приближенным методом, должно рассматриваться как некоторая гипотеза плана. Обычно требуется рассчитать и проанализировать ряд таких гипотез, прежде чем прийти к надежным для практического использования результатам. Наибольшие возможности представляют точные

методы (они позволяют получать все допустимые планы в заданной окрестности глобального оптимума). Некоторый набор гипотез выдается и при решении задач методом отсева. Для оценки и повышения точности результатов целесообразно повторять отсев несколько раз, пользуясь разными признаками (правилами отсева).

В ряде случаев метод отсева может быть использован в сочетании с методом последовательных расчетов или иным точным, но трудоемким методом: в случае большой размерности задачи оказывается необходимым предварительно отсеять часть пунктов, сделав их число приемлемым для комбинаторных расчетов /13/.

Анализ производственно-транспортных задач с обратными связями и с дискретными переменными (задача (16) - (21), /§ 1.3/), имеющих, как правило, большую размерность, обычно проводится путем раздельного решения транспортной и производственной частей задачи /17/. На основании решения транспортной части получают оценки, характеризующие транспортную составляющую целевой функции, и суммируют их затем с производственными затратами (по каждой технологии), сводя таким образом трехиндексную задачу к двухиндексной, т.е. общей задаче производственного планирования, с одновременным понижением размерности.

Результаты решения ряда производственных задач симплексным методом показали, что построение модели с

учетом производственных связей и пропорций, сопряженности переделов, равно как выбор системы ограничений позволяет получить план, весьма близкий к целочисленному. Программа двойственного симплекс-метода описана в § 7.

Возможно применение методов целочисленного программирования /6,8,40,45/.

Методов приближенной оценки транспортного фактора предложено несколько. В их числе методы: коэффициентов экономичности /17,27/, индивидуальных затрат /14,15/, транспортных разностей /9/. Два последних метода идейно близки с принципами отсева по целевой функции и по загрузке.

Практикуется использования двух-трех методов параллельно, поскольку нет гарантии, что приближенная увязка транспортной и производственной частей задачи приведет к таким же результатам, что и решение задачи в целом.

Метод индивидуальных затрат состоит в том, что расходы на перевозку определяются для каждого предприятия при условии их относительной изоляции.

По одному из вариантов этого метода транспортные расходы определяются как средние при полной загрузке мощности предприятия и при поставках продукции ближайшим потребителям. С этой целью для каждого продукта решается открытая транспортная задача, после чего произ-

водственные мощности предприятий заполняются до заданных размеров за счет прикрепления к ним ближайших потребителей (в порядке их удаления).

Таким образом, метод допускает возможность пересечения индивидуальных сырьевых зон предприятий или зон поставок продукции (один и тот же потребитель может войти в зоны нескольких предприятий).

В целевую функцию производственной задачи включается сумма индивидуальных затрат по всем продуктам. Индивидуальные затраты могут определяться также в виде предельных величин - как потенциалы предприятий (по каждому из продуктов) при заданной их мощности. Потенциалы находят, поочередно закрепляя предприятия в плане и фиксируя их загрузку (в частности, она может быть и нулевой).

В многоотраслевых производственно-транспортных системах предприятие является обычно и поставщиком продукции и получателем сырья. Это дает возможность для предприятия, закрепленного в плане с заполненной мощностью находить потенциалы по всем видам сырья и продукции, каждому из которых поставлен в соответствие отдельный узел на сети (строка или столбец матрицы). В зависимости от способа определения потенциалов их сумма или разность для тех узлов, которые соответствуют данному предприятию, является величиной постоянной, называемой оценкой расположения (она не зависит от начального параметра,

произвольно выбираемого для исчисления потенциалов). Оценка расположения соразмерна с транспортными затратами на дугах сети и не нуждается в нормировке при использовании в качестве индивидуальных затрат для пункта размещения данного предприятия.

При методе транспортных разностей транспортные затраты непосредственно вычисляются как приращение значения целевой функции транспортной задачи при фиксации объема производства на одном из предприятий.

Процесс решения является итеративным. На первом шаге для каждого из продуктов решается открытая транспортная задача, в которой верхние пределы выпуска продукции предприятием равны его максимальной мощности по данному продукту (c_{ij}), а производственные затраты не учитываются. Далее решаются открытые задачи, в каждой из которых объем производства на предприятиях поочередно фиксируется на уровне одной из типовых мощностей, включая нулевую, а по всем остальным предприятиям оставлена свобода варьирования объема производства в пределах ограничений. На этой стадии, следовательно, выполняются те же операции, что и по методу предельных индивидуальных затрат.

Если обозначить $F(x_{ijr})$ значение целевой функции по оптимальному решению исходной транспортной задачи для i -го продукта и $F(x_{ijr}, c_{ij})$ - значение целевой функции при зафиксированном объеме производства i -го продукта на j -м предприятии, то приращение

транспортных затрат, или транспортная разность Δ_{ij}, равна

$$\Delta_{ij} = F(x_{ijr}, c_{ij}) - F(x_{ijr}). \qquad (1)$$

Эта величина, суммированная по всем продуктам, присоединяется к производственным затратам j-го предприятия.

Решение производственной задачи приводит к некоторым объемам производства каждого продукта на каждом предприятии ($c_{ij}\, x_j$), которые служат исходными ограничениями для транспортных задач следующего шага.

Процесс решения заканчивается, если на некотором шаге в план производственной задачи входят те же технологические способы (предприятия), что и на предыдущем шаге. В качестве общего решения принимается наилучший из поитерационных планов.

Транспортные разности (особенно начальные их значения), предназначенные для оценки места расположения предприятия, в большой мере зависят от степени загрузки предприятия в плане открытой транспортной задачи. Если, например, мощность предприятия полностью загружена в этом решении, то транспортная разность окажется для него равной нулю. Наоборот, транспортная составляющая затрат для предприятий, не вошедших в исходный план, будет максимальной.

2.2. Отсев по целевой функции

2.2.1. Описание алгоритма

Данный метод применим к задачам транспортного типа с непрерывными переменными и, с некоторой модификацией алгоритма, к дискретным задачам. В той мере, в какой к этому типу сводимы задачи многопродуктовые и многоотраслевые, метод отсева применим и к последним.

Во всех случаях решение транспортных задач проводится на матрице или графе пропорциональных затрат без учета в них фиксированных доплат, равно как других категорий непропорциональных расходов.

Алгоритмы решения задач в матричной и сетевой постановках идентичны. В данном случае в интересах лучшей обозримости иллюстративного материала метод отсева будем демонстрировать на примере матричной задачи:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}(\gamma_{jr}+\alpha_j)x_{jr}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_j)\longrightarrow min, \qquad (2)$$

$$x_{jr}\geq 0, \qquad (j=1,2,\dots,n;\ r=1,2,\dots,l); \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{jr}=s_r, \qquad (r=1,2,\dots,l); \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{l}x_{jr}=x_j\leq d_j, \qquad (j=1,2,\dots,n); \qquad (5)$$

$$\beta_j(x_j)=\begin{cases}\beta_j & \text{при } x_j>0\\ 0 & \text{при } x_j=0,\end{cases} \qquad (j=1,2,\dots,n) \qquad (6)$$

Здесь

j - индекс пункта размещения предприятия ($j = 1,2,\ldots,n$);

r - индекс потребителя продукции ($r = 1,2,\ldots,l$);

x_{jr} - искомый объем поставок из j-го предприятия r-му потребителю;

x_j - искомый объем производства на j-м предприятии;

d_j - максимальная мощность j-го предприятия;

s_r - потребность r-го потребителя в продукции;

γ_{jr} - затраты на перевозку единицы продукции от j-го предприятия до r-го потребителя;

β_j - фиксированные доплаты на j-м предприятии.

На первой итерации в решении участвуют все пункты, в которых возможно разместить предприятия, то есть рассматривается наиболее густая их сеть. Если число пунктов возможного размещения значительно больше требуемого, то первоначально допустимые мощности предприятий обычно не ограничивают прикрепления поставщиков сырья или потребителей продукции к ближайшим предприятиям. В таких случаях дело сводится к подсчету значения целевой функции. По мере отсева предприятий их круг сужается, и ограничения мощности вступают в силу.

Непропорциональные производственные затраты, соответствующие результатам решения линейной задачи, добавляются к значению ее целевой функции (к сумме пропорциональных затрат).

Первое решение задачи (2) - (6) приводит к плану с минимально возможными в принятых условиях затратами на транспорт сырья и продукции и максимальными затратами на производство. Далее приближение к минимуму целевой функции (2) должно состоять в выводе некоторых пунктов из сети для уменьшения величины $\sum \beta_j(x_j)$. Это сопровождается ростом дальности транспортировки, а следовательно, суммы пропорциональных затрат. Правило отсева под контролем целевой функции состоит в том, что отыскивается такой пункт j, выбытие которого из сети снижает значение целевой функции больше, чем выбытие любого другого пункта. При отсеве сумма фиксированных затрат уменьшается на величину β_j, а сумма пропорциональных-увеличивается на величину транспортной разности Δ_j, где $\Delta_j = F(x_{jr}, d_j \mid d_j = 0) - F(x_{jr})$. Значит подлежит отсеву такой пункт, для которого $\beta_j - \Delta_j = max$.

Перейдем к описанию алгоритма, предложенного в /34/, с дополнениями из /14/.

1^0. В матрицу пропорциональных затрат вводим фиктивного потребителя с номером $r = l + 1$, с показателями затрат, равными нулю ($d_{j,l+1} = 0$), и со спросом в размере

$$s^I_{l+1} = D^I - S, \qquad D^I = \sum_{j=1}^{n} d_j, \qquad S = \sum_{r=1}^{l} s_r;$$

(l - номер итерации).

2^0. Решаем транспортную задачу линейного программирования

$$L^I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{l+1} \alpha_{jr} x_{jr} \longrightarrow min, \qquad (7)$$

$$x_{jr} \geq 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,n; \; r = 1,2,\ldots,l+1); \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jr} = s_r, \qquad (r = 1,2,\ldots,l+1); \qquad (9)$$

$$\sum_{r=1}^{l+1} x_{jr} = d_j, \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (10)$$

(Здесь $\alpha_{jr} = \gamma_{jr} + \alpha_j$ - пропорциональные расходы на единицу продукции).

3^0. Находим сумму фиксированных доплат $\sum \beta_j$ (при $x_j > 0$). Складывая эту сумму с пропорциональными затратами - выражение (7) -, получаем исходное значение целевой функции (2), которое обозначим F^I, и переходим ко II итерации.

4^0. Приравниваем нулю мощность предприятия с номером $j = 1$, т.е. считаем $d_1 = 0$, вводим запретительный тариф $\alpha_{1,l+1} = M$ и выполняем при этом условии операции 1^0 и 2^0 (вместо s^I_{l+1} берется $s^{II}_{l+1} = D^{II} = \sum d_j$, $j = 2,3,\ldots,n$).

5^0. Решив транспортную задачу (7) - (10), получаем потенциалы предприятий и потребителей продукции,

соответственно μ_j^{II} и ν_r^{II}. При этом исходим из соотношения $\mu_j + \nu_r = \alpha_{jr}$ в случае $x_{jr} > 0$ и задаем в качестве начального параметра нулевое значение потенциала фиктивного потребителя ($\nu_{l+1} = 0$). Значение целевой функции F^{II} и потенциал μ_1^{II} пункта с номером $j = 1$ фиксируем для дальнейшего.

6°. Снимаем ограничение $d_1 = 0$ (возвращаем пункт $j = 1$ в план), вводим ограничение $d_2 = 0$ и, выполнив операции 1°, 2°, 5°, фиксируем значение целевой функции F_2^{II} и потенциала μ_2^{II} для предприятия $j = 2$.

Аналогичным образом, поочередно присваивая предприятиям нулевую мощность, определяем все F_j^{II} и μ_j^{II}, $(j = 1,2,\ldots,n)$.

7°. Находим $F_{j_{II}}^{II} = \min_j \{F_j^{II}\}$, и соответствующее предприятие j_{II} считаем отсеявшимся в результате II итерации (ему присваивается нулевая мощность). Его потенциал μ_j^{II} и значение целевой функции $F^{II} - F_{j_{II}}^{II}$ запоминаются.

8°. Выполняем III итерацию, которую отличает от II лишь то, что предприятие j_{II} участвует в решениях с нулевой мощностью ($d_{j_{II}} = 0$). В результате определяем пункт j_{III}, для которого $F_{j_{III}}^{III} = \min_j \{F_j^{III}\}$, и отсеиваем его, запоминая значение целевой функции $F^{III} = F_{j_{III}}^{III}$ и потенциала $\mu_{j_{III}}^{III}$

9°. Если окажется, что для пункта, отсеянного на II итерации потенциал уменьшился ($\mu^{III}_{j_{II}} < \mu^{II}_{j_{II}}$) и стал ниже потенциала того предприятия, которое отсеивается в результате третьего шага ($\mu^{III}_{j_{II}} < \mu^{III}_{j_{III}}$), то пункту j_{II} возвращается первоначальное ограничение мощности (снимается нулевое), и III итерация повторяется с участием пункта j_{II}, но при $d_{j_{III}} = 0$.

10°. Путем последовательного отсева сужаем круг предприятий до тех пор, пока в плане не останется минимально возможное при данных ограничениях их число.

11°. Определяем $min\{F^I, F^{II}, \ldots, F^n\}$ и отвечающий ему набор предприятий, лучший из рассмотренных, мощность каждого и план прикрепления потребителей к поставщикам.

При решении дискретной задачи методом отсева по целевой функции алгоритм несколько модифицируется. Рассматривается множество всех вариантов предприятий (типов мощности) и пунктов возможного их размещения. Поскольку в оптимальном плане типовые мощности должны быть заполнены, перебор на каждой итерации организуется в форме поочередного закрепления в плане каждого типа предприятия в каждом из пунктов. Вариант предприятия, закрепление которого приводит к максимальной сумме пропорциональных и фиксированных затрат, отсеивает

ся и в дальнейших итерациях не участвует. Процесс отсева завершается получением целочисленного решения.

Алгоритм может быть построен и по принципу отбора в план предприятия, минимизирующего затраты на данной итерации.

2.2.2. Пример

Условия задачи. Число пунктов возможного расположения предприятий $n = 5$, максимальная мощность каждого $d_j = 200$ т. Дана матрица пропорциональных затрат на перевозку продукции из пунктов производства в пункты потребления (табл.2).

Таблица 2

Матрица исходных данных

Варианты предприятий (j)	Потребители (r)			
	1	2	3	4
	Пропорциональные затраты, руб./т (α_{jr})			
1	0,0	0,5	0,9	0,8
2	0,5	0,0	0,5	1,0
3	0,4	0,7	0,5	0,4
4	0,9	0,5	0,0	0,5
5	0,8	0,1	0,5	0,0
Спрос, т/сут (s_r)	100	20	30	50

Зависимость затрат на переработку сырья от величины мощности носит характер равносторонней гиперболы и одинакова во всех пунктах возможного строительства предприятий. В таком случае пропорциональные затраты на единицу продукции (α) могут в расчет не приниматься, фиксированные же доплаты (β) даны в двух вариантах: 50 руб. и 10 руб.

Требуется определить, в каких пунктах нужно выстроить предприятия и какой они должны быть мощности, чтобы суммарные затраты на перевозку и переработку сырья были бы минимальны.

Решение (при β = 50). Строим открытую модель транспортной задачи (табл.3), введя фиктивного потребителя продукции с номером r = 5 и со спросом в размере

$$s_5^I = D^I - S = 1000 - 200 = 800 \text{ т.}$$

Согласно решению $L^I = 0$.

Определяем исходное значение целевой функции F^I задачи с фиксированными доплатами, имея в виду, что $x_3 = 0$;

$$F^I = L^I + \sum_j \beta_j = 0 + 4 \cdot 50 = 200 \text{ руб.}$$
$$j = 1,2,4,5$$

На II итерации приравниваем нулю α_1 и вводим запретительный тариф для соответствующей клетки фиктивного потребителя ($\alpha_{1,5}$ = M). В этом случае

$$s_5^{II} = D^{II} - S = 800 - 200 = 600.$$

Таблица 3

Решение исходной задачи[x)]

(I итерация)

j \ r		I	2	3	4	4 + I	μ_j^I	x_j^I
	d_j \ s_r	100	20	30	50	800		
I	200	0 100	0,5	0,9	0,8	0 100	0	100
2	200	0,5	0 20	0,5	I,0	0 180	0	20
3	200	0,4	0,7	0,5	0,4	0 200	0	0
4	200	0,9	0,5	0 30	0,5	0 170	0	30
5	200	0,8	0,I	0,5	0 50	0 150	0	50
v_r^I		0	0	0	0	0		

x) В клетках матрицы в левом верхнем углу - затраты,

в правом нижнем - перевозки

Таблица 4

II итерация, задача с $d_1 = 0$

j \ r		1	2	3	4	4 + 1	μ_j^{II}	x_j^{II}
	d_j \ s_r	100	20	30	50	800		
1	0	0 0	0,5	0,9	0,8	M	-0,4	0
2	200	0,5	0 20	0,5	1,0	0 180	0	20
3	200	0,4 100	0,7	0,5	0,4	0 100	0	0
4	200	0,9	0,5	0 30	0,5	0 170	0	30
5	200	0,8	0,1	0,5	0 50	0 150	0	50
	ν_r^{II}	0,4	0	0	0	0		

Решаем с этими условиями линейную транспортную задачу методом потенциалов, задав нулевое значение потенциалу фиктивного потребителя $v_1 = 0$ (табл.4). При оптимальном решении $L_1^{II} = 40$ руб., $\mu_1^{II} = -0,4$, $F_1^{II} = 40 + 4 \cdot 50 = 240$ руб.

Всего требуется решить пять таких задач, поочередно приравнивая нулю мощность одного из предприятий.

Результаты решения таковы.

Номер предприятия (j), для которого $d_j^{II} = 0$	Целевая функция (F_j^{II})	Потенциал предприятия (μ_j^{II}) при $d_j = 0$
1	240	- 0,4
2	202	- 0,1
3	200	0,4
4	215	- 0,5
5	220	- 0,4

В результате II итерации отсеивается вариант $j = 3$, т.к. $\min_j \{F_j^{II}\} = F_3^{II} = 200$.

(Это непосредственно следует уже из решения исходной задачи - табл. 3, поскольку в ее плане $x_3^I = 0$, а дополнительные ограничения на d_j могли только повысить значение целевой функции).

Запоминаем $F^{II} = 200$ руб. и $\mu_3^I = 0,4$.

<u>III итерация</u> состоит в поочередном решении задач при условии, что в них $d_3 = 0$ и, кроме того, $d_1 = 0$ (1-я задача), $d_2 = 0$ (2-я задача), $d_4 = 0$ (3-я задача), $d_5 = 0$ (4-я задача).

Приведем, например, решение задачи $d_2 = 0$ (табл.5).

Таблица 5

III итерация, задача с $d_2, d_3 = 0$

j \ r		I	2	3	4	4 + I	μ_j^{III}	x_j^{III}
	d_j \ s_r	100	20	30	50	400		
I	200	0 100	0,5	0,9	0,8	0 100	0	100
2	0	0,5	0 0	0,5	I,0	M	-0,I	0
3	0	0,4 0	0,7	0,5	0,4	M	0,4	0
4	200	0,9	0,5	0 30	0,5	0 I70	0	30
5	200	0,8	0,I 20	0,5	0 50	0 I30	0	70
ν_r^{III}		0	0,I	0	0	0		

Согласно решению $L_2^{III} = 2$, $\mu_2^{III} = -0,1$,
$\mu_3^{III} = 0,4$, $F_2^{III} = 2 + 3 \cdot 50 = 152$.

Для остальных задач значения целевой функции таковы:
$F_1^{III} = 206$, $F_4^{III} = 165$, $F_5^{III} = 175$.
Поскольку $min\{F_j^{III}\} = F_2^{III} = 152$, в результате III итерации отсеивается пункт $j = 2$. Подтверждается также отсев ранее исключенного пункта $j = 3$, т.к. $\mu_3^{III} = \mu_3^{II} = 0,4$.

IУ итерация состоит в поочередном исключении пунктов $j = 1$, $j = 4$ и $j = 5$ путем присвоения им нулевой мощности; заводы 2 и 3 также имеют нулевую мощность (результат предыдущих итераций).

Согласно решению этих трех задач $F_1^{IV} = 182$, $F_4^{IV} = 117$, $F_5^{IV} = 135$, $min\{F_j^{IV}\} = F_4^{IV} = 117$, т.е. отсеивается завод $j = 4$.

Приведем соответствующий оптимальный план (табл.6).
($L_4^{IV} = 17$, $\mu_4^{IV} = 0,5$, $\mu_2^{IV} = -0,1$, $\mu_3^{IV} = 0,4$, $F_4^{IV} = 17 + 2 \cdot 50 = 117$).

У итерация сводится к подсчету затрат для вариантов с одним предприятием: $j = 1$ или $j = 5$. Первый вариант дает лучшие результаты, при этом $L^{V} = 77$, $F^{V} = 127$.

Таблица 6

IУ итерация, задача с $d_4, d_2, d_3 = 0$

j \ r		1	2	3	4	4 + 1	μ_j^{IV}	x_j^{IV}
	d_j \ s_r	100	20	30	50	200		
1	200	0 100	0,5	0,9	0,8	0 100	0	100
2	0	0,5	0 0	0,5	1,0	M	-0,1	0
3	0	0,4 0	0,7	0,5	0,4	M	0,4	0
4	0	0,9	0,5	0 0	0,5	M	-0,5	0
5	200	0,8	0,1 20	0,5 30	0 50	0 100	0	100
ν_r^{IV}		0	0,1	0,5	0	0		

Из поитерационных минимумов находим общий:

$$\min\{F^{I}, F^{II}, \ldots, F^{V}\} = \min\{200,200,152,117,127\} = F^{IV} = 117.$$

Таким образом, лучший план получен на IУ итерации, в него вошли 1-е и 5-е предприятия с мощностями $x_1 = 100$, $x_5 = 100$.

По условиям второго варианта данной задачи $\beta = 10$. Пользуясь найденными выше значениями линейной части целевой функции (L), получаем при этом условии:

$F^{I} = F^{II} = 0 + 4 \cdot 10 = 40$; $F^{III} = 2 + 3 \cdot 10 = 32$;

$F^{IV} = 17 + 2 \cdot 10 = 37$; $F^{V} = 77 + 10 = 87$.

Следовательно, оптимальным является план III итерации. В него входят три предприятия с мощностями

$x_1 = 100$, $x_4 = 30$, $x_5 = 70$.

2.3. Отсев по загрузке

2.3.1. Решение задачи с непрерывными переменными

Рассмотрим алгоритм отсева по признаку загрузки предприятий для решения задачи с разрывной целевой функцией при условии равенства фиксированных доплат β во всех пунктах производства /11/.

В этом случае речь идет о задаче минимизации целевой функции

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} \alpha_{jr} x_{jr} + \beta Y \qquad (10)$$

с ограничениями (3) - (5), причем

$$Y = \sum_j sign(x_j).$$

Итерационная процедура отсева по загрузке осуществляется на матрице пропорциональных затрат или на сети, одинаковой на всех итерациях.

Первый шаг - решение открытой транспортной задачи (7) - (10). Согласно ее оптимальному плану средняя мощность предприятия всегда наименьшая, затраты на производство - самые высокие, а на доставку сырья и продукции - минимальные, по сравнению с результатами всех последующих итераций.

Цель второго шага состоит в том, чтобы среди нескольких пунктов с самыми низкими значениями x_j сделать выбор для отсева. Имеется в виду, что исключение из плана заводов с малыми мощностями влечет за собой перевозки на более дальние расстояния минимального груза, тогда как выбытие крупных заводов потребовало бы увеличить расстояние транспортировки больших его количеств. Обыкновенно из сети исключается минимально загруженный пункт, однако при равенстве или слабой дифференцированности нескольких значений x_j приходится делать соответствующее число проб, ориентируясь на значение целевой функции.

Далее, решив задачу для $n-1$ пунктов, находим значения $x_j > 0$ и затем аналогичным образом определяем состав подмножества $n-2$, $n-3$ и т.д.пунктов. Для каждой итерации подсчитывается значение целе-

вой функции (10), минимальному из них отвечает искомое решение. Таким образом, решая задачу размещения методом отсева по загрузке, на каждом шаге, вместо перебора всевозможных сочетаний пунктов размещения, как это требуется в алгоритме отсева целевой функции, рассматривают вариант, в который не входит завод, получивший на предыдущем шаге наименьшую загрузку. На протяжении всего хода решения осуществляется контроль за ранее отсеянными пунктами с помощью их потенциалов в том же порядке, как и при отсеве по минимуму целевой функции.

Дадим формальное описание алгоритма отсева по загрузке. Номер итерации будем обозначать римской цифрой или, в общем случае, через N.

1^0. Строим матрицу пропорциональных затрат $\|\alpha_{jr}\|$, включая все n предприятий и вводя фиктивного потребителя продукции с номером $r = l+1$, со спросом $s^I_{l+1} = D^I - S$, ($D^I = \sum d_j$ по всем $j \in J^I = \{1,2,\dots,n\}$; $S = \sum s_r$) и с показателями затрат, равными нулю ($\alpha_{j,l+1} = 0$).

2^0. Решаем транспортную задачу линейного программирования, в которой исходное число поставщиков равно n (максимально возможному числу предприятий) и число потребителей $l+1$, т.е. находим оптимальный план $\{x^I_{jr}\}$ и соответствующее ему минимальное значение целевой функции

$$F(J^I) = \sum_{j,r} \alpha_{jr} x^I_{jr} + \beta Y^I \qquad (11)$$

(здесь J^I - множество элементов j, таких, что $x_j^I > 0$, $J^I \subset J$, Y^I - число элементов в множестве J^I) при условиях

$$\sum_j x_{jr}^I = s_r, \quad \sum_r x_{jr}^I = x_j^I \leq d_j, \quad x_{jr}^I \geq 0. \qquad (12)$$

3°. Образуем множество U^I, состоящее из всех элементов множества J, для которых $x_j^I = 0$, и одного элемента j^*, для которого $x_{j^*}^I = \min x_j^I$ по всем $x_j^I > 0$. Затем присваиваем нулевую мощность пунктам производства, соответствующим множеству U^I. Таким образом, остальные пункты производства образуют множество $J^{II} = J - U^I$.

4°. Проверяем, выполняется ли неравенство $D^{II} \leq S$, ($D^{II} = \sum d_j$ по всем $j \in J^{II}$). Если да, то процесс заканчивается, в случае же $D^{II} \geq S$ приступаем к определению $F(J^{II})$ и решаем задачу (11) - (12), где везде вместо J^I берется J^{II}, Y^{II} вместо Y^I и т.д.

5°. Полученные результаты $\{x_{jr}^N\}$, $F(J^N)$ запоминаются, из них выбирается лучший, т.е. при $\min_N F(J^N)$. Число предприятий в этом наборе обозначим Y^*.

6°. Для проверки результатов и получения нескольких гипотез плана целесообразно просмотреть дополнительно некоторые другие комбинации с числом пунктов Y^*, Y^*-1 и Y^*+1, пользуясь в этих границах правилом отсева по целевой функции (см.выше).

Проиллюстрируем алгоритм отсева по загрузке с

помощью задачи, которая ранее была решена под контролем целевой функции (см.§ 2.2.2).

I итерация. Строим и решаем открытую транспортную задачу (см.табл.3). $F(J^I) = 200$.

Образуем множество U^I. В него входят пункты $j = 3$ ($x_3^I = 0$) и $j = 2$, $(min\{x_j^I\} = x_2^I = 20)$.

Эти предприятия отсеиваем (приравниваем их мощность нулю) и переходим ко II итерации (табл.5). $F(J^{II}) = 152$, $min\{x_j^{II}\} = min\{100, 30, 70\} = x_3^{II}$. Следовательно, пункт $j = 3$ подлежит отсеву, и в дальнейшем решении участвуют два предприятия. Результат III итерации (см. табл.6): $x_1^{III} = x_5^{III} = 100$, $F(J^{III}) = 117$. Этот план является оптимальным для всей задачи, поскольку решения с одним предприятием (IУ итерация) приводят к повышению значения целевой функции до $F(J^{IV}) = 127$.

2.3.2. Решение задачи с дискретными переменными

Метод отсева по загрузке применим и для приближенного решения задач с разрывной целевой функцией вида (2), то есть при неодинаковых величинах фиксированных доплат в разных пунктах. В этом случае модель может быть преобразована в целочисленную, что возможно при стандартной величине мощности путем присоединения к пропорциональным затратам удельных значений фиксированных платежей β_j / d_j.

Для решения дискретной задачи, например (5), (3),

(6), /§ I.2/, строится линейная целевая функция, коэффициенты которой представляют собой производственные и транспортные затраты (в сумме), соответственно их удельному значению при данном типе мощности предприятия. Видоизменяется признак отсеиваемого варианта: вместо минимального уровня загрузки ($min\, x_j$) используют минимум относительной степени загрузки ($min\, x_j/d_j$) /26/. При этом на каждой итерации исключается не пункт, а тип мощности.

Пункт размещения, если будет представлен в оптимальном нецелочисленном плане (I итерация), то всегда тем вариантом мощности, который характеризуется самыми низкими удельными производственными затратами, независимо от степени загрузки. Наиболее экономичный тип мощности для каждого пункта размещения, как правило, возможно установить заранее (прямым сравнением показателей затрат). Поэтому, если операция отсева выполняется вручную, в задачу вначале включают лучший вариант мощности в каждом из пунктов. Вариант, который на данной итерации должен быть отсеян, заменяют другим вариантом, из ранее не рассмотренных (такой перебор вариантов предприятия обычно производится в порядке уменьшения мощности).

При запрограммированном отсеве (см. §5) на сети или в матрице задачи должны быть одновременно представлены все типовые варианты.

Процесс отсева сходится к решению с одним заполненным вариантом типовой мощности в каждом из пунктов, ведущих в план.

Пример. Дано два типа предприятия: мощностью 50 и 100 т продукции в сутки. Они могут быть сооружены в пяти пунктах (не более чем по одному предприятию в каждом пункте). Дана также матрица затрат $\| \gamma_{jr} + \alpha_j^h \|$, где γ_{jr} - расходы на транспорт единицы продукции из j-го пункта производства в r-й пункт потребления, α_j^h - удельные производственные затраты на предприятии h-го типа при полном использовании мощности (табл.7).

Таблица 7

Матрица исходных данных

Варианты предприятий		Потребители (r)			
Пункты (j)	Типовая мощность, т/сут (d_j^h)	1	2	3	4
		Затраты, руб./т ($\gamma_{jr} + \alpha_j^h$)			
1	100	0,3	0,8	1,2	1,1
	50	0,4	0,9	1,3	1,2
2	100	0,8	0,3	0,8	1,3
	50	0,9	0,4	0,9	1,4
3	100	0,65	0,95	0,75	0,65
	50	0,75	1,05	0,85	0,75
4	100	1,2	0,8	0,3	0,8
	50	1,3	0,9	0,4	0,9
5	100	1,1	1,3	0,8	0,3
	50	1,2	1,4	0,9	0,4
Спрос, т/сут (s_r)		100	20	30	50

Требуется найти такие пункты размещения предприятий и тип мощности для каждого из них, чтобы сумма производственных и транспортных затрат оказалась минимальной.

В исходной открытой транспортной задаче (табл.8) каждый пункт представлен лишь одним, 100-тонным вариантом типовой мощности как повсеместно более экономичным.

Таблица 8

I итерация[x)]

j \ r		1	2	3	4	4+1	x_j^I	x_j^I/d_j^h
	d_j^h \ s_r	100	20	30	50	300		
1	100	0,3 100	0,8	1,2	1,1	0	100	1,0
2	100	0,8	0,3 20	0,8	1,3	0 80	20	0,2
3	100	0,65 0	0,95	0,75	0,65	0 100	0	0
4	100	1,2	0,8	0,3 30	0,8	0 70	30	0,3
5	100	1,1	1,3	0,8	0,3 50	0 50	50	0,5

x) В клетках матрицы: в левом верхнем углу – затраты, в правом нижнем – перевозки.

I итерация приводит к отсеву пункта $j = 3$ (поскольку 100-тонный вариант, с самыми низкими удельными расходами, получил в этом пункте нулевую загрузку, то замена его 50-тонным, более дорогим, в данном случае не имеет смысла). В пункте $j = 2$ на II итерации (табл.9) 100-тонный вариант мощности заменяется на 50-тонный ($min\{x_j^I/d_j^h\} = x_2^I/d_2^{100} = 0,2$).

Таблица 9

II итерация

j \ r		1	2	3	4	4+1	x_j^{II}	x_j^{II}/d_j^h
	d_j^h \ s_r	100	20	30	50	150		
1	100	0,3 100	0,8	1,2	1,1	0	100	1,0
2	50	0,9	0,4 20	0,9	1,4	0 30	20	0,4
4	100	1,2	0,8	0,3 30	0,8	0 70	30	0,3
5	100	1,1	1,3	0,8	0,3 50	0 50	50	0,5

После II итерации минимальную относительную загрузку получил пункт $j = 4$, ($x_4^{II}/d_4^{100} = 0,3$), поэтому в матрице III шага он должен быть представлен 50-тонным вариантом и соответствующим вектором затрат (табл.10).

Таблица 10

III итерация

j \ r		I	2	3	4	4+I	x_j^{III}	x_j^{III}/d_j^h
	d_j^h \ s_r	100	20	30	50	100		
I	100	0,3 100	0,8	I,2	I,I	0	100	I,0
2	50	0,9	0,4 20	0,9	I,4	0 30	20	0,4
4	50	I,3	0,9	0,4 30	0,9	0 20	30	0,6
5	100	I,I	I,3	0,8	0,3 50	0 50	50	0,5

В результате минимальный коэффициент загрузки получает пункт $j = 2$ с мощностью 50 т. Этот вариант отсеиваем.

IУ итерация приведена в табл. II, а У – заключительная – в табл. I2. Получен оптимальный план с типовыми мощностями: $x_1 = 100$, $x_4 = 50$, $x_5 = 50$. Соответствующий ему минимум целевой функции $F(J^V) = 80$ руб.

Таблица 11

IУ итерация

j \ r		1	2	3	4	4+1	x_j^{IV}	x_j^{IV}/d_j^h
	d_j^h \ s_r	100	20	30	50	50		
1	100	0,3 100	0,8	1,2	1,1	0	100	1,0
4	50	1,3	0,9 20	0,4 30	0,9	0 50	50	1,0
5	100	1,1	1,3	0,8	0,3 50	0 50	50	0,5

Таблица 12

У итерация

j \ r		1	2	3	4	x_j^{V}	x_j^{V}/d_j^h
	d_j^h \ s_r	100	20	30	50		
1	100	0,3 100	0,8	1,2	1,1	100	1,0
4	50	1,3	0,9 20	0,4 30	0,9	50	1,0
5	50	1,2	1,4	0,9	0,4 50	50	1,0

2.3.3. Отсев при устойчивой загрузке

При решении задачи транспортного типа методом отсева результаты двух смежных итераций в большинстве случаев близки между собой в том смысле, что мощность отсеянного предприятия распределяется между небольшим числом ближайших пунктов, основной же массив плана остается без изменения. Это характерно в первую очередь для начальных этапов расчета, когда отсеву подвергаются обычно маломощные объекты, а сеть остающихся еще густа.

По материалам решенных задач, в среднем после одной итерации менялась загрузка от 8 до 26% общего числа рассматриваемых предприятий (в зависимости от характера задачи).

Параллельно прослежена динамика показателей, которые представляют собой разность между значениями целевой функции для планов, различающихся только тем, что в одном из них j -е предприятие имеет загрузку, отличную от нуля ($x_j > 0$), а в другом - нулевую. Эту характеристику будем именовать разностью затрат и обозначать Δ_j^N , $(\Delta_j^N = F^{N-1} - F_j^N)$, где N - номер итерации.

Оказалось, что в случаях, когда предприятия сохраняют свою загрузку после очередной итерации, наблю-

дается также значительная стабильность разностей затрат. Последние сохраняют свое значение не менее чем в 75% случаев постоянства загрузки предприятий.

Вместе с тем при изменении загрузки всегда меняется и разность затрат на единицу загрузки.

Связь между динамикой загрузки и динамикой разностей использована для повышения надежности отсева по загрузке и сокращения перебора в процессе отсева по целевой функции. Рассмотрим эти возможности в применении к задаче транспортного типа с фиксированными доплатами.

На I итерации решаем исходную транспортную задачу, определяем план загрузки $\{x_j^I\}$ и значение целевой функции F^I.

II итерация осуществляется так же, как при отсеве целевой функции (см.§ 2.2). Поочередно исключая из плана предприятия, находим для них разности $\Delta_j^{II}=F^I-F_j^{II}$. То предприятие, для которого Δ_j^{II} оказалась наибольшей, считаем отсеявшимся, в дальнейшем решении оно участвует с нулевой мощностью (при исключении его из плана значение целевой функции задачи будет меньше, чем при исключении любого другого предприятия). Величины загрузки предприятий, оставшихся в плане после II итерации, запоминаем.

III итерация также начинается с определения разностей затрат. При этом для предприятий, сохранивших

свою загрузку после П итерации на уровне исходного плана, равности не исчисляются заново, а условно принимаются такими, какими они были на П итерации. Для тех предприятий, загрузка которых изменилась по сравнению с исходным планом, находят новые равности $\Delta_j^{III} = F^{I} - F_j^{III}$, предварительно решив соответствующие транспортные задачи. Таким образом, для одних предприятий равность затрат на Ш итерации будет фактической, для других условно принятой на прежнем уровне. Пункт, для которого равность (фактическая или условная) будет максимальной, отсеиваем, решаем транспортную задачу для оставшихся (если она уже не была решена) и фиксируем план загрузки.

Аналогичным образом осуществляем дальнейшие итерации, ориентируясь всякий раз на результаты предыдущей итерации (на план загрузки, значение целевой функции и равности затрат).

На последней итерации (или ранее в случае резкого изменения загрузки большинства предприятий) все равности следует исчислять заново для повышения надежности решения.

В ходе решения запоминаются потенциалы предприятий с нулевой мощностью. Они используются для наблюдения за ранее отсеянными пунктами и сигнализации о случаях необходимости их возврата в план, подобно тому как это было описано выше для других правил отсева.

Практика решения задач свидетельствует о том, что указанное сокращение перебора не ведет к потере точности в сравнении с результатами отсева по целевой функции, объем же вычислительных операций резко сокращается. Число решаемых транспортных задач уменьшается вдвое, а иногда даже в 4-5 раз.

Однако, правило отсева по целевой функции, которое отличает более простая логика, имеет преимущества с точки зрения машинной реализации.

Решение задачи при устойчивой загрузке проиллюстрируем практическим расчетом размещения мясокомбинатов в Эстонской ССР (двухэтапная задача). Ограничение мощности для них $d_j \leq 260$ т/сут, условнопостоянные расходы $\beta = 1222{,}8$ руб. Последние одинаковы для всех предприятий, поэтому вместо разностей между полными значениями целевой функции можно пользоваться приращениями пропорциональных затрат.[x)] Решение этой задачи приведено в табл.18. При использовании алгоритма отсева по целевой функции потребовалось просчитать 85 транспортных задач, в данном же случае достаточно было решить 42 задачи. Результаты совпадают.

[x)] Имеется в виду разность между пропорциональными затратами для двух планов, в одном из которых данного предприятия нет, а в другом оно загружено.

Таблица 16

Решение задачи размещения мясокомбинатов

№ итерации	I	II		III		IУ	
Пункт размещения(j)	I	2	I	2	I	2	I
I.Таллин	148,9	407,0	190,5	588,7	190,5	588,7	231,7
2.Тарту	105,1	386,5	105,1	386,5	105,1	386,5	105,1
3.Раквере	75,6	193,3	75,6	193,3	75,6	193,3	74,2
4.Пярну	39,5	147,7	39,5	147,7	39,5	147,7	48,7
5.Выхма	26,4	44,3	26,4	44,3	26,4	44,3	26,4
6.Пайде	63,4	107,4	71,5	111,3	71,5	111,3	81,8
7.Валга	51,7	96,8	51,7	96,8	51,7	96,8	51,7
8.Выру	103,6	384,8	103,6	384,8	103,6	384,8	103,6
9.Кохтла-Ярве	70,5	231,2	70,5	231,2	70,5	231,2	70,5
10.Рапла	24,2	11,2	-	-	-	-	-
11.Мярьяма	84,8	30,6	59,3	31,3	59,3	31,3	-
12.Йыгева	43,0	54,9	43,0	54,9	43,0	54,9	43,0
13.Абья	23,5	21,2	23,5	21,2	-	-	-
14.Вильянди	46,2	77,5	46,2	77,5	69,7	136,1	69,7
Пропорциональные затраты, руб.	5861,8	5873,0		5894,1		5925,3	
Целевая функция, руб.	22981,0	21769,4		20567,7		19376,1	

Заголовки столбцов: I – загрузка предприятия, т/сут

Таблица 13 (продолжение)

№	V		VI		VII		VIII		IX	
	2	I	2	I	2	I	2	I	2	I
1.	1144,0	232,5	1133,5	232,5	1133,5	232,7	1133,5	260,0	1583,4	260,0
2.	386,5	105,1	386,5	129,0	503,9	129,0	503,9	129,0	503,9	129,0
3.	192,7	74,2	192,7	93,3	223,2	93,3	223,2	116,4	295,8	186,9
4.	258,9	47,9	261,8	47,9	261,8	47,9	261,8	79,1	335,6	79,1
5.	44,3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.	115,5	86,3	134,6	86,3	134,6	86,3	134,6	-	-	-
7.	96,8	51,7	96,8	51,7	96,8	-	-	-	-	-
8.	384,8	103,6	384,8	103,6	384,8	155,3	493,2	155,3	493,2	155,3
9.	231,2	70,5	231,2	70,5	231,2	70,5	231,2	70,5	231,2	-
10.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12.	54,9	43,0	54,9	-	-	-	-	-	-	-
13.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14.	136,1	91,6	234,0	91,6	234,0	91,6	234,0	96,1	390,9	96,1
	5969,7		6025,9		6132,2		6292,3		6523,6	
	18197,7		17031,1		15914,6		14851,9		13860,4	

Таблица 13 (окончание)

	X		XI	
j	2	1	2	1
1.	1588,4	260,0	1802,4	260,0
2.	503,9	129,0	2143,1	260,0
3.	1185,8	286,1	1701,9	243,7
4.	335,6	-	-	-
5.	-	-	-	-
6.	-	-	-	-
7.	-	-	-	-
8.	493,2	147,3	505,9	-
9.	-	-	-	-
10.	-	-	-	-
11.	-	-	-	-
12.	-	-	-	-
13.	-	-	-	-
14.	390,9	184,0	696,1	139,1
	6859,1		7365,0	
	12973,1		12256,2	

Примечание. В столбцах 1 подчеркнута величина загрузки, изменившаяся в ходе решения.

Если загрузка предприятия изменилась по сравнению с предыдущей итерацией, то для него в столбец 2 заносится фактическое приращение затрат, если загрузка осталась прежней - условная (т.е. исчисленная ранее). На последней итерации все приращения определены заново.

3. ПРАКТИЧЕСКИЙ ОПЫТ

В данном разделе рассмотрены постановки и решения трех конкретных задач отраслевого планирования концентрации, специализации, размещения производства. Первая из них - задача определения оптимальной мощности и размещения предприятий лесной и деревообрабатывающей промышленности при условии комплексного использования древесины. Оптимальная специализация производства в промышленности железобетонных изделий - содержание второй задачи, а третья - динамическая задача газоснабжения.

Все эти задачи оказалось возможным описать сетевыми моделями транспортного типа с фиксированными доплатами.

3.1. Оптимизация многоотраслевого комплекса

В современных условиях лесная и деревообрабатывающая промышленность должна развиваться в направлении комплексного использования древесного сырья. В большинстве производств выработка основной продукции сопровождается образованием отходов древесины, которые могут быть направлены на дальнейшую переработку или использованы как топливо. Осуществлению комплексной переработки древесины в Эстонской ССР и техническому прогрессу

в этой области препятствует раздробленность производственной базы лесной и деревообрабатывающей промышленности. Для разработки перспективного плана ее концентрации, размещения и технического развития сформулирована и решена задача оптимального планирования, в которой проанализированы в единстве все отрасли деревообработки, связанные между собой поставками продукции.

По условиям задачи ресурсы древесины и спрос на конечную продукцию территориально дифференцированы (в пределах республики). Задано 79 пунктов, в которых возможно разместить предприятия восьми отраслей лесной и деревообрабатывающей промышленности. Число вырабатываемых изделий - 15, конечных потребителей - 152.

Задачи такого рода формализуются как многоотраслевые производственно-транспортные с дискретными переменными (последнее - ввиду неделимости объектов и их мощностей). Соответствующая модель описана в § 1.3. Она имеет на входе не воспроизводимые в системе (экзогенные) факторы и ресурсы, на выходе - конечную продукцию. Критерием оптимальности плана принимается минимум годовых приведенных затрат на оплату экзогенных ресурсов, их доставку и переработку внутри системы и на перевозку готовой продукции.

Упрощающие предположения позволили преобразовать

эту многоотраслевую задачу в многоэтапную транспортного типа на однопродуктовой сети.

Во-первых, в системе отсутствуют существенные, влияющие на решение обратные связи, которые поэтому оказалось возможным не принимать в расчет. Во-вторых, при использовании коэффициентов соизмерения (см.§ 1.2) весь набор продуктов и материалов может быть приведен к одному изделию. Это облегчается тем, что в принципе рассматривается один вид сырья -древесина.

Для отыскания коэффициентов соизмерения построена однородная система (выражение (7), /§ 1.2/) из 9-ти уравнений с 15-ю неизвестными, представленная в табл.14.

Неизвестными λ_i являются коэффициенты соизмерения сырья и продукции всех видов:

λ_1 - круглые лесоматериалы,
λ_2 - пиловочник,
λ_3 - балансы,
λ_4 - технологическая щепа,
λ_5 - опилки,
λ_6 - дрова,
λ_7 - прочая древесина,
λ_8 - пиломатериалы,
λ_9 - кусковые отходы,
λ_{10} - оконные блоки,
λ_{11} - дверные блоки,
λ_{12} - древесно-стружечные плиты,
λ_{13} - древесно-волокнистые плиты,
λ_{14} - кормовые дрожжи,
λ_{15} - тарные комплекты.

В графе λ_0 табл.14 - свободные члены уравнений, в данном случае равные нулю, в остальных графах -

Таблица 14

Матрица коэффициентов системы уравнений, тыс.т

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_0
-88,0	28,1	21,3	2,1	0,39	15,1	6,8									0
	-16,2		11,64	7,05			75,0								0
				0,65			-4,95	0,3	4,0						0
				1,0			-7,32	0,4		12,75	-7,2				0
			-1,29		-1,8		-2,31				3,9				0
			-6,54		-8,45		-1,52					9,0			0
				-39,0									14,0		0
					-2,1									0,6	0
					-2,1									0,6	0

коэффициенты выпуска продукции (положительные величины) и затрат сырья и материалов (отрицательные), в тыс.т за год.

Шести неизвестным, λ_3, λ_5, λ_7, λ_9, λ_{10}, λ_{13}, приданы произвольные значения, после чего решена система из 9-ти уравнений с 9-ю неизвестными. В результате получены следующие коэффициенты соизмерения, действительные в условиях данной задачи (произвольные подчеркнуты)

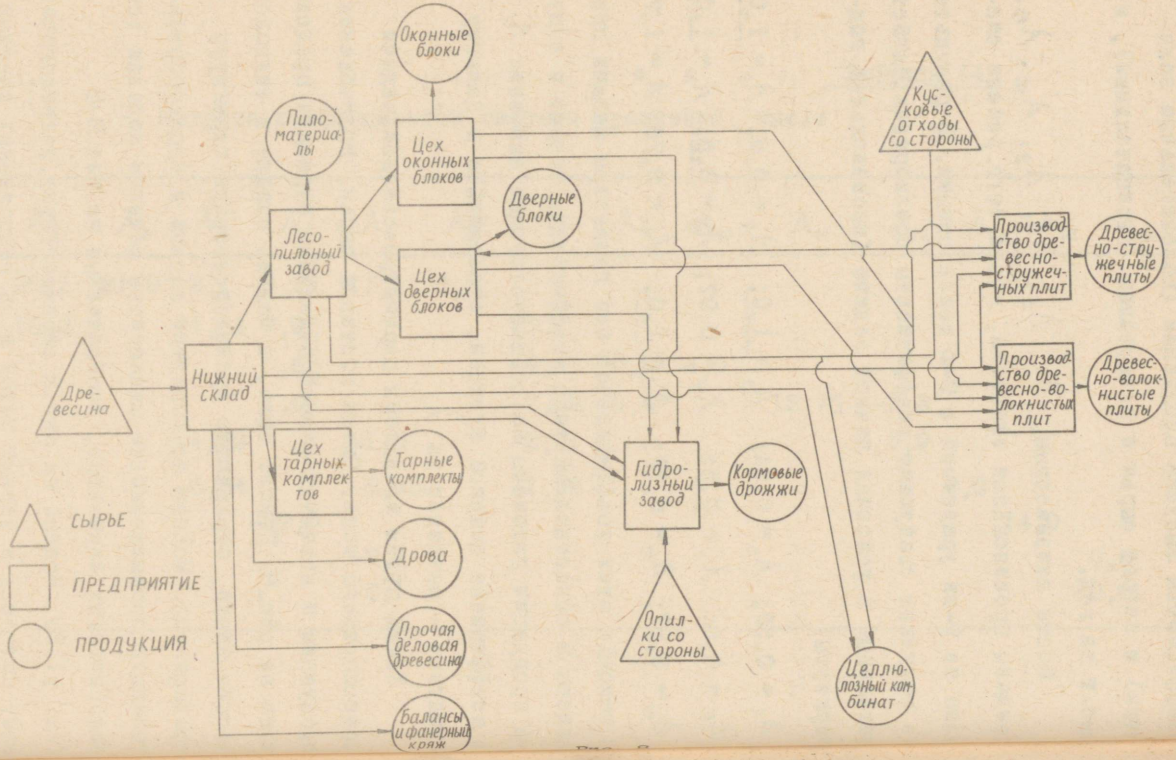
$\lambda_1 = 0{,}56$; $\lambda_2 = 0{,}54$; $\lambda_3 = \underline{1{,}0}$; $\lambda_4 = 0{,}6$; $\lambda_5 = \underline{1{,}0}$;

$\lambda_6 = 0{,}5$; $\lambda_7 = \underline{0{,}5}$; $\lambda_8 = 0{,}97$; $\lambda_9 = \underline{0{,}5}$; $\lambda_{10} = \underline{1{,}0}$;

$\lambda_{11} = 0{,}87$; $\lambda_{12} = 0{,}77$; $\lambda_{13} = \underline{1{,}0}$; $\lambda_{14} = 2{,}78$; $\lambda_{15} = 1{,}75$.

С помощью этих коэффициентов все параметры задачи приведены в сопоставимый вид: коэффициенты затрат и выпуска продукции умножены на соответствующее значение λ_i, а коэффициент целевой функции, относящийся к данному продукту - разделен на λ_i.

Таким путем исчислены параметры сетевой задачи транспортного типа. Схема поставок сырья, потребления продукции и взаимных связей отдельных отраслей представлена на рис.8. Помимо того, в модель входят и технологические блоки, отражающие производственную структуру предприятий. Модели предприятий лесной и деревообрабатывающей промышленности аналогичны сетевым моделям технологических вариантов, изображенным на рис.2-5 (см. §1.2). Модель на рис.2 соответствует технологическому процессу в тарных цехах и на гидролизных заводах,


Оконные блоки
Пило-материалы
Цех оконных блоков
Дверные блоки
Лесо-пильный завод
Цех дверных блоков
Кусковые отходы со стороны
Производство древесно-стружечных плит
Древесно-стружечные плиты
Производство древесно-волокнистых плит
Древесно-волокнистые плиты
Древесина
Нижний склад
Цех тарных комплектов
Тарные комплекты
Гидролизный завод
Кормовые дрожжи
СЫРЬЕ
ПРЕДПРИЯТИЕ
ПРОДУКЦИЯ
Дрова
Прочая деловая древесина
Опилки со стороны
Целлюлозный комбинат
Балансы и фанерный кряж

модель на рис.3 описывает ограничения и связи для нижних складов, лесопильных заводов и цехов, выпускающих оконные блоки, модель на рис.4 относится к производству древесностружечных и древесноволокнистых плит, на рис.5 – к производству дверных блоков.

Несмотря на то что все количественные характеристики, относящиеся к разным продуктам, приведены в сопоставимый вид, ассортиментный состав плана как и задаваемые материальные пропорции у производителей и потребителей в оптимальном решении сохраняются (продукты не взаимозаменяемы у конечных потребителей).

В модели задачи принята в расчет дискретность мощностей и состава предприятий. Использовано два варианта целевой функции: с фиксированными доплатам и линейный (см.выражения, соответственно, (1) и (5),/ §1.2/).

Оба варианта задачи решены методом отсева. Первоначальный отсев (сокращение числа предприятий с 79-ти до 35-ти) осуществлен по признаку минимальной загрузки отсеиваемого предприятия, а дальнейший – по целевой функции. На протяжении всего хода решения (был доведен до окончания и отсев по загрузке) потенциалы предприятий с нулевой мощностью использовались для оценки качества ранее отсеянных пунктов, что позволило возвращать их в план на определенной стадии решения.

Для сопоставления и анализа рассматриваемая задача была исследована также как многоотраслевая производственно-транспортная, путем раздельного решения

транспортной и производственной частей.

Для оценки затрат на перевозки использованы, во-первых, индивидуальные затраты, во-вторых, потенциалы предприятий, полученные для каждого при поочередном закреплении в плане транспортной задачи. Сопоставив значения целевой функции по результатам решения задач в разных постановках и разными методами, получили (в %):

1. Сетевая дискретная задача с фиксированными доплатами	
а) решение методом отсева под контролем целевой функции	100,0
б) методом отсева по загрузке	101,6
2. Сетевая дискретная задача с линейной целевой функцией	
а) решение методом отсева по загрузке	100,7
3. Производственно-транспортная задача	
а) с индивидуальными транспортными затратами	102,1
б) с транспортными затратами на основе потенциалов	102,3

Эти данные иллюстрируют преимущество единого решения задачи по сравнению с поэтапным.

Картина изменения суммы затрат (значения целевой функции) в процесс решения методом отсева (табл. 15)

Таблица 15

Изменение приведенных затрат при концентрации производства

Номер итерации	Число предприятий	Транспортные затраты, тыс. руб.	Производственные затраты, тыс.руб.		Сумма транспортных и производственных затрат	
			всего	фиксированные доплаты	тыс.руб.	%
1	79	1810	15293	7825	17103	139,2
3	65	1920	13821	6673	15741	128,1
5	58	1920	13055	5955	14975	121,9
7	54	2002	12604	5501	14606	118,9
9	48	2100	11885	5146	13985	113,8
10	46	2116	11609	4869	13725	111,7
12	43	2144	11265	4529	13409	109,1
14	38	2335	10706	4152	13041	106,1
15	35	2386	10325	3748	12711	103,5
17	31	2558	9959	3278	12517	101,9
18	30	2618	9895	3214	12513	101,8
19	29	2724	9730	3150	12454	101,4
20	28	2740	9644	3035	12384	100,7
21	26	2786	9554	2845	12340	100,4
22	25	3060	9290	2122	12350	100,5
23	24	3080	9244	1976	12324	100,3
24	23	3110	9184	1916	12294	100,1
25	22	3163	9124	1856	12287	100,0
26	21	3355	8964	1796	12319	100,2
27	20	3550	8764	1696	12314	100,2

выявляет оптимальный уровень концентрации производства (в процессе отсева число предприятий, входящих в план, последовательно уменьшается, средняя мощность предприятия растет).

Как следует из таблицы, сокращение числа предприятий с 79-ти в начале решения до 28-ми после 20-й итерации дает экономию производственных затрат в размере 5649 тыс.руб. Транспортные расходы при этом увеличиваются на 930 тыс.руб. Эффект концентрации производства выражается, таким образом, в снижении общей суммы приведенных затрат на 4719 тыс.руб. Последующий отсев, имитирующий концентрацию производства, не дает заметного эффекта: прирост транспортных и экономия производственных затрат почти покрывают друг друга.

К концу решения (26-я и 27-я итерации) общая сумма затрат даже несколько увеличивается, так что точка минимума целевой функции достигается на 25-й итерации (число предприятий 22). Если считать, что планы со значением целевой функции, отстоящим от точки минимума на ±1%, экономически равноценны, то для выбора среди этих планов лучшего решения нужен дополнительный анализ, чтобы принять в расчет факторы, которые не получили отражения в модели. Такой анализ ряда гипотез плана привел к варианту решения, рекомендуемому как оптимальный. Дадим сводную характеристику этого варианта (табл.16).

Таблица 16

Рекомендуемая концентрация производства

Тип предприятия	Число предприятий	
	фактическое	рекомендуемое
Нижние склады	24	7
Лесопильные предприятия[x)]	120	4
Цехи оконных блоков	70	8
Цехи дверных блоков		3
Завод древесностружечных плит	-	1
Завод древесноволокнистых плит	-	1
Гидролизный завод	-	1

x)Не считая лесопильных производств, принадлежащих колхозам и совхозам.

Сравнение экономических показателей существующей производственной базы лесной и деревообрабатывающей промышленности республики с рекомендуемым вариантом выявило, что концентрация производства и целесообразное размещение предприятий дает возможность снизить текущие затраты производства и транспорта на 2 млн.руб. в год (на 18%). Кроме того будет получена экономия за счет лучшего использования производственных мощностей, дальнейшего повышения технического уровня предприятий и, прежде всего, комплексного использования древесины. Рекомендуемый вариант концентрации и размещения позво-

лит снабжать заводы мощностью 70 тыс.м^3 древесностру-
жечных и до 10 тыс.м^2 древесноволокнистых плит в год.

3.2. Задача специализации с фиксированными доплатами

На примере промышленности железобетонных изделий описывается решение многопродуктовой отраслевой задачи с учетом эффекта от специализации производства.

Задача решалась в методических целях по фактическим данным промышленности железобетонных изделий Эстонской ССР (4 завода, 4 вида изделий, агрегированных по типоразмерам, и 12 укрупненных пунктов потребления).

Задача специализации, первоначально сформулированная как производственно-транспортная /44/, преобразована затем в задачу распределительного типа с фиксированными доплатами. Условие невзаимозаменяемости продукции у потребителей было при этом сохранено.

Сведение многопродуктовой задачи к однопродуктовой было осуществлено в точках производства. Оборудование универсальных заводов железобетонных изделий (пропарочные камеры) позволяет изготовлять комбинации различных видов изделий. Это делает возможным выражение продукции в условных единицах соизмерения производственных мощностей. Баланс загрузки суммарной мощности как-

дого завода в условных единицах соизмерения мощностей задается следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\delta_{ij} u_j} x_{ij} \leq 1, \quad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где j - индекс завода или пункта производства ($j = 1,2,\ldots, n$);

i - индекс вида продукции ($i = 1,2,\ldots,m$);

x_{ij} - искомое количество продукции i-го вида, изготовляемое на j-м заводе;

u_j - объем пропарочных камер на j-м заводе;

δ_{ij} - съем i-го вида продукции с 1 м^8 пропарочных камер на j-м заводе.

Процесс решения задачи специализации делится на этапы.

Первый этап решения заключается в подборе загрузки производственных мощностей заводов (определении величин x_{ij}), удовлетворяющих условию (1). Первый этап, в свою очередь, разбивается на ряд итераций - решений открытых транспортных задач линейного программирования на минимум суммы эксплуатационных затрат (производственных и транспортных).

Формулировка задачи:

Найти план, минимизирующий значение целевой функции

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}(\gamma_{ijr}+\alpha_{ij})x_{ijr}\to min \qquad (2)$$

при ограничениях

$$x_{ijr}\geq 0, \qquad \begin{matrix}(i=1,2,\dots,m;\\ j=1,2,\dots,n;\\ r=1,2,\dots,l);\end{matrix} \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijr}=b_{ir}, \qquad (i=1,2,\dots,m;\ r=1,2,\dots,l); \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}x_{ijr}\leq\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^{(N)}, \qquad (j=1,2,\dots,n). \qquad (5)$$

Обозначения:

r – индекс потребителя продукции ($r=1,2,\dots,l$);

x_{ijr} – искомый объем поставок продукции i-го вида из j-го пункта производства r-му потребителю;

$d_{ij}^{(N)}$ – принимаемая на N-й итерации верхняя граница мощности j-го предприятия при изготовлении i-го вида продукции;

b_{ir} – потребность r-го потребителя в продукции i-го вида;

α_{ij} – пропорциональные производственные затраты на j-м заводе при изготовлении единицы i-го продукта;

γ_{ijr} – затраты на перевозку единицы i-го продукта от j-го пункта производства до r-го потребителя.

На первой итерации в качестве верхней границы мощности завода в выражении (5) принимается

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij} u_j , \qquad (j = 1,2,\ldots, n). \quad (6)$$

Ограничение в виде суммы $d_{ij}^{(1)}$ допускает многократную перегрузку завода по отношению к его реальной мощности, поскольку составляется из мощностей, максимальных для каждого изделия в отдельности. Поэтому следует привести решение задачи (2) - (5) в соответствие с условием (1). На основании значений x_{ijr} для каждого завода определяются величины

$$x_{ij} = \sum_{r=1}^{l} x_{ijr} , (i = 1,2,\ldots, m; j = 1,2,\ldots, n), \qquad (7)$$

которые подставляются в выражение (1).

Если оптимальный план задачи (2) - (5) неравенства (1) не нарушает, то первый этап решения завершен. В противном случае, пропорционально уменьшаем величины

$$\frac{x_{ij}}{\delta_{ij} u_j} ,$$

то есть показатели загрузки мощностей, выраженные в условных единицах соизмерения (в долях производственной мощности пропарочных камер).

Обозначим через $z_{ij}^{(1)}$ сбалансированные после первой итерации (пропорционально уменьшенные) значения $x_{ij}/\delta_{ij} u_j$:

$$z_{ij}^{(1)} = \frac{x_{ij}}{\delta_{ij} u_j} : \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{\delta_{ij} u_j}, \qquad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n) \quad (8)$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij}^{(1)} = 1, \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \quad (9)$$

На основании $z_{ij}^{(1)}$ рассчитываем соответствующие им абсолютные показатели сбалансированной загрузки пропарочных камер

$$d_{ij}^{(2)} = z_{ij}^{(1)} \delta_{ij} u_j = z_{ij}^{(1)} d_{ij}^{(1)} \quad (10)$$

Сумму величин $d_{ij}^{(2)}$ используем как ограничение в выражениях (5) для второй итерации и вновь решаем задачу (2) - (5).

Аналогичные итерации продолжаются до тех пор, пока не будет получен план, удовлетворяющий условию (1).

Для результатов первого этапа решения характерна тенденция к загрузке каждого завода широкой номенклатурой изделий, так как линейная задача не учитывает экономии от специализации производства.

Решение первого этапа, удовлетворяющее условию (1), является исходным планом для второго этапа, на котором проводится специализация заводов - концентрация выработки однородной продукции на отдельных предприятиях.

Исходим из предположения, что специализация влечет за собой уменьшение суммы затрат, постоянной относительно общего объема производства (фиксированных доплат), но зависящей от степени специализации.

В данной работе принята следующая зависимость фиксированных доплат от числа изделий, выпускаемых предприятием:

$$\beta_j(|i|) = \begin{cases} \beta_j, & \text{если } |i| = 4 \\ 0{,}9\ \beta_j, & \text{если } |i| = 3 \\ 0{,}8\ \beta_j, & \text{если } |i| = 2 \\ 0{,}7\ \beta_j, & \text{если } |i| = 1 \end{cases} \qquad (11)$$

(здесь β_j ($|i|$) - затраты на j -м заводе, зависящие от числа выпускаемых изделий $|i|$; β_j - фиксированные доплаты на j -м предприятии).

Для моделирования процесса специализации применен метод отсева по загрузке. Единица отсева - вид изделия на каком-либо заводе.

По заводам рассчитывается доля загрузки суммарной мощности каждым видом изделия в условных единицах соизмерения мощностей и определяется изделие, которым один из заводов загружен наименьшим образом, то есть

$$\min_{i,j}\left(\frac{x_{ij}}{\delta_{ij}\,u_j} : \sum_{i=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\delta_{ij}\,u_j}\right), \qquad \begin{matrix}(i = 1,2,\ldots,m;\\ j = 1,2,\ldots,n)\end{matrix} \qquad (12)$$

Введем обозначения:

i_s - индекс исключаемого на данной итерации изделия $(i_s = i_1, i_2, \ldots, i_m)$;

j_p - индекс завода, на котором исключается i_s -е изделие $(j_p = j_1, j_2, \ldots, j_n)$;

$w_{i_s j_p}$ - объем i_s -го изделия, исключаемого на данной итерации из плана j_p -го завода в условных единицах соизмерения мощностей.

Из плана загрузки j_p -го завода исключаем изделие, дающее наименьшую загрузку мощности. На величину освободившейся мощности ($w_{i_s j_p}$) увеличиваем мощности по оставшимся видам продукции:

$$\frac{x_{ij_p}}{\delta_{ij_p} u_{j_p}} + w_{i_s j_p} = v_{ij_p} \qquad (13)$$

(v_{ij_p} - мощность j_p -го предприятия при изготовлении i -го изделия после исключения из плана i_s -го изделия - в единицах соизмерения мощностей).

На основании v_{ij_p} рассчитываем соответствующие абсолютные показатели f_{ij_p} :

$$f_{ij_p} = v_{ij_p} \delta_{ij_p} u_{j_p}. \qquad (14)$$

Объем производства продукта, в результате отсева исключенного из плана j_p -го завода, перераспределяется между другими заводами, то есть

$$f_{i_s j} = x_{i_s j} + x_{i_s j_p}, \qquad (15)$$

и поочередно уменьшается выпуск изделий, не подвергшихся отсеву на данном шаге:

$$v_{ij} = \frac{x_{ij}}{\delta_{ij} u_j} - w_{i_s j} \qquad (16)$$

(здесь $w_{i_s j}$ - объем i_s -го вида продукции на j -м заводе в условных единицах соизмерения).

Аналогично выражению (14) определяем соответствующие абсолютные показатели загрузки пропарочных камер f_{ij}.

На основании исчисленных величин загрузки мощностей составляются наборы мощностей по вариантам специализации для первой итерации второго этапа решения:

$$d_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (f_{i j_p} + f_{i_s j} + f_{ij}). \qquad (17)$$

Чтобы не допустить нарушение баланса производства и потребления, варианты специализации проверяются по следующему критерию, вытекающему из ограничений (4) - (5)

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq \sum_{r=1}^{l} b_{ir}, \qquad (i = 1,2,\ldots,m). \qquad (18)$$

Возможное число комбинаций вариантов специализации для первой итерации $(m - 1)(n - 1)$. Однако проверка по критериям (1) и (18) значительно его сокращает. Для последующих итераций возможное число вариантов дополнительно сокращается на число ранее исключенных изделий.

При составлении новых вариантов специализации мощность исключенных на предыдущих итерациях изделий не восстанавливается.

На каждой итерации решается задача на минимум целевой функции

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\left(\gamma_{ijr}+\alpha_{ij}+\frac{\beta_j(1i1)}{\sum_i d_{ij}}\right)x_{ijr} \qquad (19)$$

при условиях (3) - (5), (11).

Фиксированные доплаты входят в целевую функцию из расчета на единицу загрузки при данном варианте специализации (для каждого такого варианта мощность, т.е. $\sum_i d_{ij}$, - определенная дискретная величина).

В качестве исходного плана для каждой очередной итерации принимается результат предыдущей. Решение продолжается до получения плана, в котором дальнейшее исключение изделий невозможно.

Далее сопоставляются поитерационные решения, лучшее из них выбирается по критерию минимума общей суммы затрат (19).

Блок-схема решения задачи специализации изображена на рис.9.

Соответственно этой блок-схеме можно алгоритмизировать процесс планирования специализации для проведения расчетов на ЭВМ.

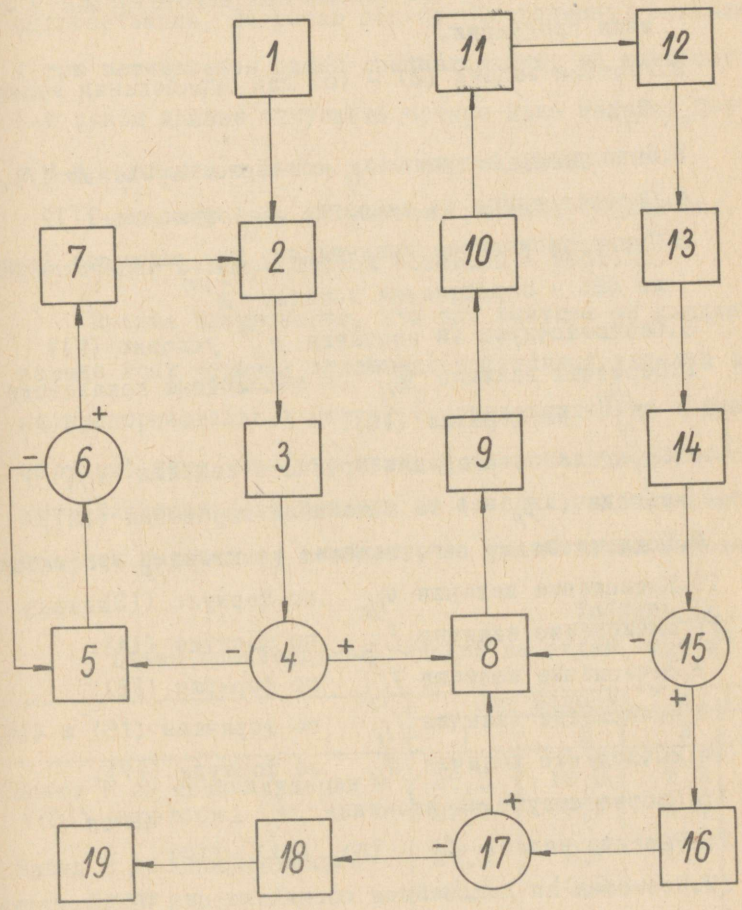


Рис. 9

Содержание блоков:

1. Вычисление по формуле (6) верхней границы загрузки мощности j -го завода при изготовлении i -го вида продукции.
2. Решение задачи (2) - (5) для определения величин x_{ijr}.
3. Вычисление величин x_{ij} согласно выражению (7).
4. Соответствуют ли значения x_{ij} условию (1)?
5. Пропорциональное уменьшение x_{ij} согласно формуле (8) - определение величин $z_{ij}^{(N)}$.
6. Соответствуют ли значения $z_{ij}^{(N)}$ условию (9)?
7. Пересчет величин $z_{ij}^{(N)}$ в абсолютные показатели $d_{ij}^{(N)}$ по формуле (10).
8. Определение специализируемого изделия (i_s) и завода (j_p) на основании выражения (12).
9. Исключение i_s -го изделия из плана j_p -го завода.
10. Вычисление величин v_{ij_p} по формуле (13).
11. Вычисление величин f_{ij_p} по формуле (14).
12. Вычисление величин $f_{i_s j}$ по формуле (15).
13. Вычисление величин f_{ij} по формулам (16) и (14).
14. Вычисление величин d_{ij} по формуле (17).
15. Соответствуют ли значения d_{ij} критерию (18)?
16. Решение задачи (3) - (5), (11), (19).
17. Возможна ли дальнейшая специализация предприятий?
18. Нахождение оптимального варианта специализации по критерию минимума общей суммы затрат, то есть целевой функции (19).
19. Вывод решения на печать.

В табл. 17 дано распределение производственной программы между заводами железобетонных изделий до специализации, согласно первому (исходному) решению, и при оптимальном плане специализации, по которому 1-й завод должен выпускать четыре вида изделий, 2-й и 4-й - по два и 3-й - один вид изделий.

Поитерационные результаты решения задачи специализации методом отсева показаны в табл. 18.

Вполне закономерно, что при выпуске на каждом заводе всех четырех видов железобетонных изделий сумма пропорциональных затрат (производственных и транспортных) ниже, чем эта сумма в условиях специализации. Фиксированные доплаты на заводах универсального профиля находятся, наоборот, на максимально высоком уровне.

Таблица 17

Объем производства изделий по видам, тыс.м^3

	Вид изделия ( )			
	1	2	3	4
1. Завод 1 до специализации	35,5	10,0	2,0	8,7
после - " -	27,2	7,7	4,5	12,0
2. Завод 2 до специализации	23,8	8,7	1,5	0,4
после - " -	24,6	10,9	-	-
3. Завод 3 до специализации	20,7	0,2	0,3	1,2
после - " -	25,5	-	-	-
4. Завод 4 до специализации	16,9	5,3	0,8	1,7
после - " -	20,9	6,3	-	-

Таблица 18

Изменение затрат при специализации производства

№ решения	Число видов изделий (l_j)				Затраты, тыс.руб.		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	пропорциональные	фиксированные	всего
1	4	4	4	4	2935,5	2233,0	5168,5
2	4	3	4	4	2940,2	2185,2	5125,4
3	4	3	3	4	2935,9	2165,9	5101,8
4	4	3	2	4	2953,5	2146,6	5100,1
5	4	3	2	3	2947,6	2121,5	5069,1
6	4	2	2	3	2982,3	2073,7	5056,0
7	4	2	2	2	2968,6	2048,6	5017,2
8	4	2	1	2	2948,8	2029,3	4978,1
9	4	1	1	2	3043,4	1981,5	5024,9
10	3	1	1	2	3269,6	1850,4	5120,0

Примечание. Решение № 1 - результат первого этапа, последующие решения относятся ко второму этапу анализа; j - номер завода. Оптимальное решение подчеркнуто.

При оптимальном плане специализации, достигаемом после 8-го решения, фиксированные платежи снижаются по сравнению с их исходной суммой в большей мере, чем растут затраты, пропорциональные объему производства.

В итоге чистая экономия в размере 2,7% к сумме затрат до специализации. Дальнейшая, более глубокая специализация (см.решения 9 и 10 в табл.18) экономически не оправдана, поскольку прирост пропорциональных расходов в этом случае перекрывает уменьшение фиксированных доплат.

3.3. Динамическая задача на сети

В процессе проектирования магистральных газопроводов возникает ряд проблем, эффективное решение которых требует построения и анализа экономико-математических моделей. К числе этих проблем относятся:

1)оптимизация топливных балансов в зоне газопровода; 2) отбор пунктов и энергоустановок в них (потребителей топлив), спрос которых рационально покрывать природным газом при задаваемых ресурсах последнего; 3)выбор направления трассы газопровода; 4) построение динамического плана отработки месторождения.

Круг рассматриваемых потребителей зависит от размера ресурсов, параметров газопровода, динамики газоснабжения и других условий.

Эти вопросы исследуются путем варьирования исходных данных в широких пределах и решения серии задач математического программирования с минимизацией приведенных затрат на добычу, магистральный и распределительный транспорт топлива и на топливоиспользование в энергоустановках.

Задача имеет нелинейную целевую функцию и линейные ограничения типа условий транспортной задачи[1].

Представим систему газоснабжения в виде направленного графа с узлами κ ,($\kappa = 1,2,\ldots,K$). Как начальные узлы на нем рассматриваются источники и производители топлив (например, газовое месторождение, нефтеперерабатывающий завод), как конечные - потребители топлив (энергоустановки), как промежуточные узлы - транзитные пункты на транспортных коммуникациях. Пусть на рассматриваемом графе двойным индексом κt обозначена дуга, соединяющая два соседних узла κ и t , причем на первом месте стоит номер узла, из которого дуга выходит (не различая начального и промежуточного), на втором - номер входного узла (не различая промежуточного и конечного).

---

[1] По своей природе задача газоснабжения принадлежит к типу распределительной (λ - задачи). Обоснование возможности и способа сведения ее к транспортной см. в /12/.

Для каждого узла заданы числа $A_к$, причем если узлы являются начальными, то $A_к > 0$ (ресурсы), если они конечные, то $A_к < 0$ (потребности в топливе в пересчете на газ), для промежуточных узлов $A_к \leq 0$ или $A_к \geq 0$ (могут быть заданы топливные потребности или ресурсы в промежуточных пунктах).

На дугах $кt$ заданы: а)пересчитанные на газ удельные пропорциональные затраты $\gamma_{кt}$, в которые обходится транспортировка топлива по данному участку сети или его производство данным технологическим способом; б)фиксированные доплаты $\beta_{кt}$ за период, не зависящие от количества топлива; в)ограничения пропускной способности $q_{кt}$. Искомыми являются величины $x_{кt}$ - количества топлива (в пересчете на газ), на участках $кt$ производственно-транспортной сети.

Задача состоит в отыскании таких значений $x_{кt}$, при которых достигает минимума значение целевой функции (сумма затрат)

$$\sum_{к=1}^{\mathcal{K}} \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} \gamma_{кt} x_{кt} + \sum_{к=1}^{\mathcal{K}} \beta_{кt}(x_{кt}) \longrightarrow min \qquad (20)$$

и соблюдаются условия

$$0 \leq x_{кt} \leq q_{кt}, \qquad (к,t = 1,2,\ldots,\mathcal{K}); \qquad (21)$$

$$\sum_{t=1}^{\mathcal{K}} x_{кt} - \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} x_{tк} \leq A_к, \quad (к = 1,2,\ldots,\mathcal{K}); \qquad (22)$$

$$\beta_{кt}(x_{кt}) = \begin{cases} \beta_{кt}, & \text{если } x_{кt} > 0 \\ 0, & \text{если } x_{кt} = 0 \end{cases}, \quad (к = 1,2,\ldots,\mathcal{K}). \qquad (23)$$

Сетевая модель топливоснабжения допускает совместное рассмотрение нескольких видов топлива и нескольких плановых периодов, которые отличаются друг от друга объемами добычи и потребления топлива, а также развитием системы газоснабжения. Для этого модель формируется из непересекающихся подмоделей (подграфов не имеющих общих дуг), каждая из которых относится к определенному виду топлива и периоду времени. Следовательно, все величины x_{kt} могут быть разделены строки по видам топлива и периодам его использования, что позволяет, несмотря на обезличенность поставок в сетевых моделях, получать в результате решения оптимальные динамические балансы топлива для каждого потребителя и системы в целом /16, 38/.

На рис.10 представлена модель месторождения - связующее звено двух независимых транспортных сетей, одна из которых относится к первому, другая - ко второму периоду эксплуатации месторождения. Имеется в виду, что запасы газа по месторождениям известны и что для каждого периода и промысла задана верхняя и нижняя границы объема добычи.

Обозначения на рисунке следующие. В кружках помещены ресурсы узлов (отрицательный ресурс есть потребность), в квадратах рядом с узлами - их номера. Рядом со стрелками (дугами) показаны расходы: α - на добычу, γ - на транспорт 1 м^3 газа. В узле $\overline{1}$ общий ресурс га-

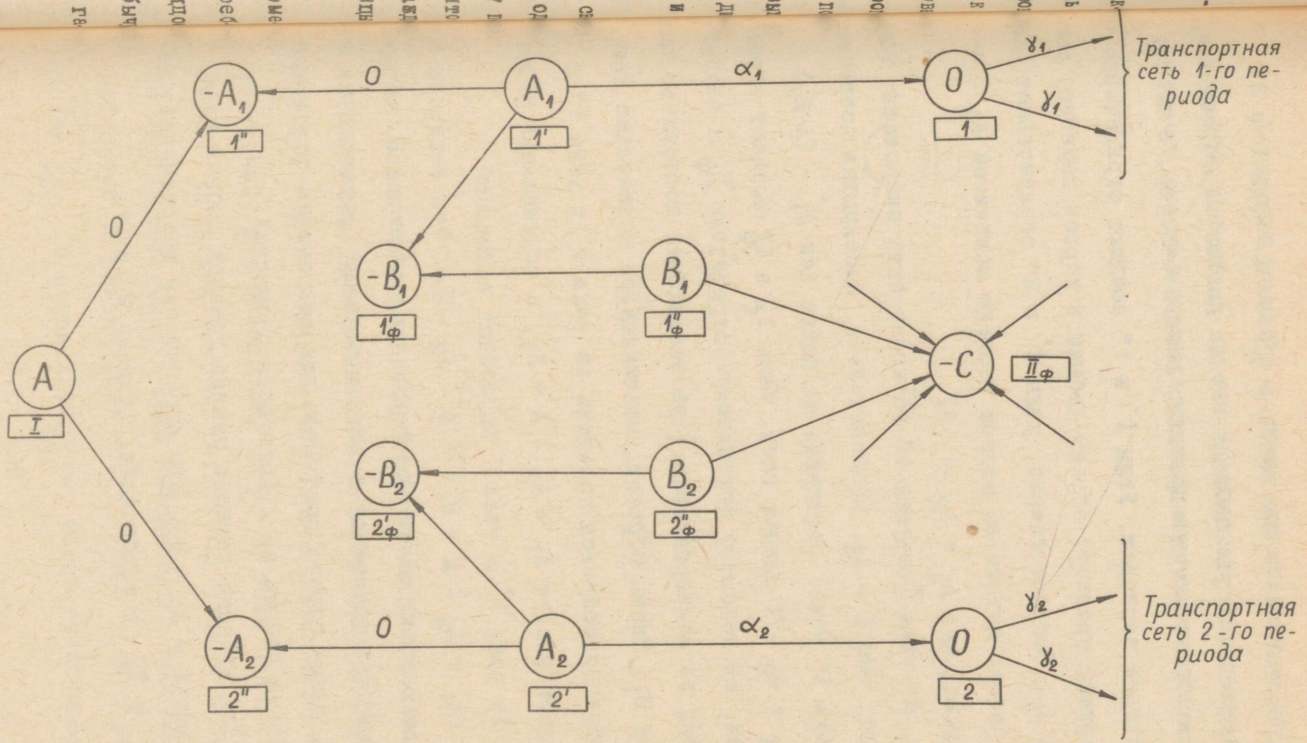

A
I
0
0
-A1
1''
A1
1'
α1
0
1
γ1
γ1
Транспортная сеть 1-го периода
-B1
1'ф
B1
1''ф
-C
IIф
-B2
2'ф
B2
2''ф
-A2
2''
A2
2'
α2
0
2
γ2
γ2
Транспортная сеть 2-го периода

Рис. 10

ва на месторождении задан в объеме А. Узлы 1 и 2 представляют уже добытый газ на данном месторождении, то есть начало газопровода, соответственно, в первом и втором периодах. Узлы $1'$ и $1''$ создают ограничение (верхнюю границу) объему добычи в первом периоде, равное A_1. Соответственно, узлы $2'$ и $2''$ ограничивают сверху размер добычи во втором периоде величиной A_2 (допустимо, что $A_1 + A_2 > A$).

Из узла $\overline{I}$ в узел $1''$ не может быть направлено газа меньше, чем $A - A_2$. Следовательно, непокрытая потребность в узле $1''$ может составить не более чем $A_1 - (A-A_2) = A_1 + A_2 - A$ единиц газа. Узлы $1'_\Phi$ и $1''_\Phi$ создают ограничение, по которому фиктивному потребителю $\overline{II}_\Phi$ в первый период из месторождения $\overline{I}$ не может быть доставлено газа более B_1. Таким образом, максимальное количество газа, которое потребуется передать из узла $1'$ в узлы $1''$ и $1'_\Phi$ составит вместе $A_1 + A_2 - A + B_1$, а минимальный поток газа из узла $1'$ в узел 1 выразится величиной $A_1 - (A_1 + A_2 - A + B_1) = A - A_2 - B_1$. Эта величина представляет собой минимальный уровень добычи газа, который должен быть обеспечен в первом периоде (ограничение мощности снизу обычно требуется для сохранения достигнутого уровня добычи на действующем промысле).

Для второго периода нижняя граница добычи газа составит $A - A_1 - B_2$. Это ограничение обеспечивают узлы $2'_\Phi$ и $2''_\Phi$ в комбинации с узлами $2'$ и $2''$.

Фиктивный узел $\overline{II}_{\Phi}$ – общий для всех месторождений, потребность C в нем равняется разнице суммы ресурсов на всех месторождениях и суммы всех потребностей.

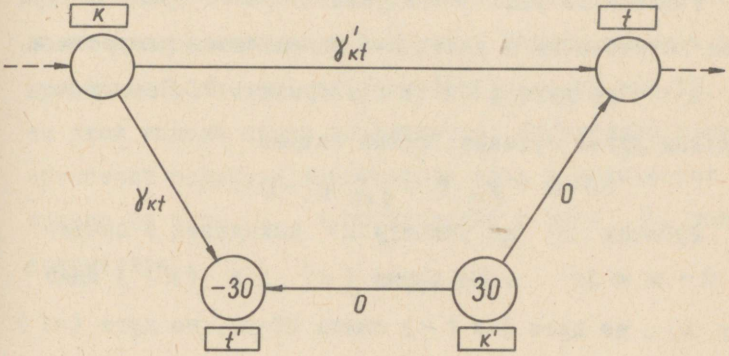


Рис. 11

В модели наряду с проектными вариантами новых газопроводов представлена сеть действующих. Ограничения пропускной способности, строго определенные для последних, для новостроек могут не быть заданы. На рис.11 приведен участок сети между узлами $к$ и t. Он изображает существующий газопровод с пропускной способностью 30 единиц газа при удельных транспортных расходах $\gamma_{кt}$ и параллельный ему новый газопровод без

ограничения пропускной способности и с расходами $\gamma'_{\kappa t}$ (удельные транспортные расходы плюс приведенные капиталовложения с коэффициентом эффективности).

Уясним, как будет работать модель участка газопровода, если $\gamma'_{\kappa t} > \gamma_{\kappa t}$. Для этого рассмотрим три случая.

1)Поток из узла κ в узел t равен нулю. В этом случае потребность в узле t' покрывается ресурсом в узле κ' по дуге $(\kappa' t')$ с затратами 0. Потоки по остальным дугам нулевые, сумма затрат

$$30 \cdot 0 + \gamma_{\kappa t} \cdot 0 + \gamma'_{\kappa t} \cdot 0 = 0$$

2)Поток x по участку κt находится в пределах $0 < x \leq 30$. По дугам $(\kappa t')$ и $(\kappa' t)$ идет поток x , по дуге $(\kappa' t')$ поток $30-x$, по дуге (κt) поток 0. Общие затраты равны

$$x \cdot \gamma_{\kappa t} + x \cdot 0 + (30 - x) \cdot 0 + \gamma'_{\kappa t} \cdot 0 = x \gamma_{\kappa t}$$

3)Поток на участке $x > 30$. Потоки по дугам $(\kappa t')$ и $(\kappa' t)$ будут равны 30, поток по дуге (κt) равен $x - 30$, а по дуге $(\kappa' t')$ поток отсутствует. Общие расходы будут $30\,\gamma_{\kappa t} + (x - 30)\,\gamma'_{\kappa t}$.

Аналогично работают ограничения на рис.10, но так как там нет прямых дуг из узла $\overline{I}$ в узлы $1'$ и $2'$ и из узлов $1'$ и $2'$ в узел $\overline{II}_\Phi$, то возможность 8 отсутствует.

В случае, если $\gamma'_{\kappa t} < \gamma_{\kappa t}$, приведенная схема работать не будет, так как при минимизации транспортных

расходов весь поток будет идти по более дешевому новому газопроводу.

Если заранее определена невозможность потока в направлении из узла t на узел κ (в описании сети отсутствует соответствующая дуга) и имеется полная уверенность, что поток превышает пропускную способность существующего газопровода, должно быть поставлено условие его обязательной загрузки. Модель участка газопровода с обязательной загрузкой дана на рис.12. Работа этой модели легко объясняется: отсутствие дуги $(\kappa' t')$ обеспечит подачу в трубопровод газа в количестве a единиц из узла κ и поступление в узел t того же количества.

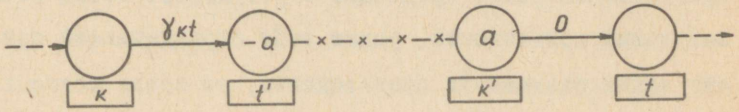


Рис.12

Рассматриваемая задача решается методом последовательных приближений или методом отсева. Первый из них состоит в следующем. Вначале задаемся некоторой гипотезой газоснабжения и, соответственно, некоторыми объемами подачи газа. На этом основании получаем удельную величину фиксированных доплат (на единицу газа), склады-

ваем ее с удельными пропорциональными затратами γ_{kt} и решаем задачу линейного программирования на минимум общей суммы затрат. Если ее оптимальный план не совпадает с первоначальной гипотезой, то коэффициенты целевой функции пересчитываются применительно к плану, и задача решается вновь.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет получено два одинаковых решения подряд.

Основные газовые потоки в большой мере предопределены данной территориальной концентрацией потребителей газа, а в составе минимизируемых затрат преобладают пропорциональные. Это позволяет установить приведенные затраты на газ с хорошим начальным приближением, так что при пересчетах они меняются от итерации к итерации в сравнительно узких пределах. В результате метод последовательных приближений, редко себя оправдывающий при решении задач размещения производства, на почве которых возник, в применении к задаче оптимального газоснабжения дает достаточно хорошую и притом быструю сходимость /7, 12/.

При решении той же задачи методом отсева используется разрывность целевой функции (20). Значительно уступая методу последовательных приближений в быстроте сходимости, метод отсева обладает тем преимуществом, что легко реализуется на ЭВМ.

Задачи газоснабжения в рассмотренной постановке систематически решаются Институтом экономики АН Эстонской ССР совместно с институтом "Гипроспецгаз" Министерства газовой промышленности СССР для проектирования магистральных газопроводов и оптимизации в их зоне перспективных планов газификации народного хозяйства.

В частности, решены задачи динамического планирования газовых потоков в Европейской части Союза, выбора направления трассы газопровода Тюменская область - Центр, оптимизации газоснабжения Прибалтики.

4. ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Программа предназначена для решения на ЭВМ "Минск-22" транспортных задач линейного планирования в сетевой постановке.

Применяются обозначения:

$x_к$ – объем перевозки груза по к -й дуге ($к = 1,2,\ldots, m$);

$c_к$ – затраты на перевозку единицы груза по к -й дуге;

$i(к)$ – номер исходного узла дуги к, $i(к) \in \{1,2,\ldots,n\}$;

$j(к)$ – номер конечного узла дуги к, $j(к) \in \{1,2,\ldots,n\}$;

a_i – количество груза в узле i (наличное: $a_i > 0$; потребность: $a_i < 0$), $i = 1,2,\ldots,n$.

В этих обозначениях задача состоит в минимизации

$$\sum_{к=1}^{m} c_к x_к$$

при условиях

$$x_к \geq 0; \quad a_i + \sum_{j(к)=i} x_к - \sum_{i(к)=i} x_к \geq 0$$

При решении задачи программой вводятся фиктивный узел с номером 0 и фиктивные дуги, связывающие каждый узел с фиктивным. Стоимость транспорта на этих дугах

берется

0, если увел 0 конечный для дуги и

1000000, если увел 0 начальный для дуги.

Условия (2) с учетом фиктивного узла должны выполняться как равенства, эти условия для фиктивного узла не ставятся.

Чтобы в конечный план не вошли перевозки по фиктивным дугам с ценой 1000000, требуется выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 0.$$

4.1. Исходные данные

Подготовка исходных данных должна начинаться с определения направления возможных перевозок по дугам сети, т.е. с определения для каждой дуги начального и конечного узлов. Узлам присваиваются номера, начиная с узлов, являющихся начальными не менее, чем для одной дуги. Узлы, имеющие только входящие дуги, должны получить последние по порядку номера.

После этой подготовительной работы составляется описание сети, состоящее из строк с информацией о дугах. Информация о дуге охватывает признак начального узла, стоимость транспорта по дуге и номер конечного узла. Дуги описываются в порядке возрастания номеров начальных узлов. Признак начального узла $\Delta i(\kappa)$ записывается в знаковый разряд:

"–", если описывается первая дуга с данным номером начального узла, т.е. если

$$i(k) = i(k-1) + 1,$$

"+", если предыдущая строка имела тот же номер начального узла, $i(k) = i(k-1)$.

Стоимость транспорта c_k по дуге k должна быть целым числом от 0 до 999 999, номер конечного узла $j(k)$ пишется трехзначным (001, 002, 003 и т.д.).

Описание сети является первым массивом исходных данных и перфорируется в виде десятичных чисел, информация об одной дуге составляет одно машинное слово (см.рис. 13).

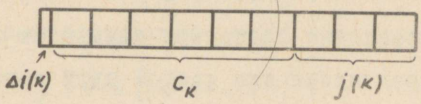


Рис. 13

Второй массив исходных данных содержит информацию о ресурсах и о спросе. В порядке нумерации узлов (индексов i) перфорируются целые десятичные числа a_i каждое в отдельную ячейку.

Программа допускает решение задачи при

$$m \leqslant 4050$$

$$n \leqslant 750.$$

4.2. Структурная схема программы

Для решения задачи применяется метод потенциалов /20, 23, 47/.

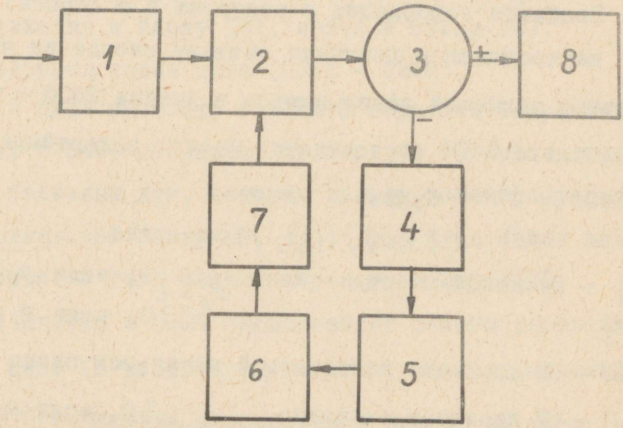


Рис. 14

В структурной схеме программы (рис.14) содержатся блоки:

1) Ввод исходных данных (команды 0100 - 0174).

Вводится информация о сети. Выделяется признак начального узла, отдельно переводятся в двоичную систему $c_к$ и $j(к)$. По признаку начального узла формируется номер начального узла (первоначально номер 0, каждый раз, когда признак "-", к номеру прибавляется единица). В массив описания сети в ячейку

10040 + к записываются $c_к$, $i(к)$ и $j(к)$ - соответственно, 16, 10 и 10 двоичных разрядов. В ячейки 10035, 10036 и 10037 записывается код задачи, т.е. заглавие для таблицы решения в коде АЦПУ (до 18 знаков).

Вводится информация о ресурсах и о спросе. Числа a_i переводятся в двоичную систему счисления и их абсолютные значения записываются в ячейки $2000 + i$. В ячейках с 3400 составляется базис: содержимое ячейки $3400 + i$ будет

$$\pi_i,\ к(i),\ i(i),\ j(i),$$ где

π_i - знаковый разряд $\quad \pi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i < 0, \\ 0, & \text{если } a_i \geqslant 0; \end{cases}$

$к(i)$ - 12 двоичных разрядов. В начальном плане $к(i) \equiv 0$;

$i(i)$ - 12 двоичных разрядов $\quad i(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i < 0, \\ i, & \text{если } a_i \geqslant 0; \end{cases}$

$j(i)$ - 12 двоичных разрядов $\quad j(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \geqslant 0, \\ i, & \text{если } a_i < 0. \end{cases}$

2)Вычисление потенциалов (0175 - 0265).

За один просмотр базиса (n ячеек с 3400) составляется массив потенциалов (с ячейки 5000).

В ячейку 5000 записывается 0. Если $\pi_t = 0$, то в ячейку $5000 + i(t)$ записывается

$$P_{i(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j(t) = 0, \\ P_{j(t)} - c_{к(t)} & \text{, если } j(t) \neq 0. \end{cases}$$

Если $\pi_t = 1$, то

$$P_{j(t)} = \begin{cases} 35230000\ 0000, & \text{если } i(t) = 0, \\ P_{i(t)} + c_{к(t)} & \text{, если } i(t) \neq 0. \end{cases}$$

3)Проверка оптимальности решения (0266 - 0314).

Просматривается таблица $c_к$. Для каждого $к = 0,1,2,\ldots,m$ вычисляется разница

$$\delta_к = P_{j(к)} - P_{i(к)} - c_к ,$$

и из них отыскивают максимальную. Если $max\ \delta_к \leq 0$, то переходят к блоку (8), иначе к блоку (4).

4)Определение цепи (0315 - 0377).

За один просмотр базиса в обратном направлении в ячейках с 6401 составляется цепь, т.е. последовательность базисных дуг, которая свяжет конечные узлы дуги с максимальной невязкой $\delta_к$. Эта дуга будет включена в базис и пока записывается в ячейку 6400.

В ячейки с 5000 записываются объемы перевозки по дугам цепи (в соответствующей последовательности).

5)Определение минимального потока на цепи (0400 - 0446).

За один просмотр цепи определяется дуга, по которой в направлении цепи идет минимальный поток. Эта дуга в дальнейшем будет исключена из базиса.

6)Изменение плана (0447 - 0473).

Потоки на всех дугах цепи изменяются на минимальный поток, определенный в блоке 5). Потоки в направлении цепи уменьшаются, в обратном направлении - увеличиваются.

7)Упорядочение базиса (0474 - 0677).

В базисе (и в плане) сдвигаются дуги, которые не участвовали в цепи. В разрыв в определенной последова-

тельности (так, чтобы на всех дугах, кроме первой, один из индексов i или j встречался бы не впервые) выписываются дуги, участвовавшие в цепи (кроме выведенной из базиса).

8)Печать результатов (0700 - 1076).

Результаты (номера узлов, перевозки по дуге, потенциалы узлов и тариф дуги для каждой базисной дуги, значение целевой функции и количество проведенных итераций) печатаются на широкую ленту алфавитно - цифровым печатающим устройством.

4.3. Инструкция к программе

Программа имеет длину 1043 ячейки (772 команды и 51 константа), написана в действительных адресах и занимает ячейки с 0100 по 1143. Используются стандартные программы /48/:

СП - 0015 - перевод целого числа из десятичной системы счисления в двоичную - ячейки с 1144 по 1157,

СП - 0016 - перевод целого числа из двоичной системы счисления в десятичную - ячейки с 1160 по 1200,

СП - 0021 - перевод числа из двоичной системы счисления в десятичную - ячейки с 1201 по 1247, - всего 104 ячейки.

Инструкция оператору:

1)Ввести стандартные программы.

2)Ввести программу.

3)Включить печать (БПМ и АЦПУ).

4)Ключи: № 1, если требуется решить ряд задач с одной ленты исходных данных на одной и той же сети и сеть описана один раз,

№ 2, если требуется решить ряд задач с одной ленты исходных данных и для каждой задачи имеется описание сети.

5)Исходные данные. Пуск с ячейки 0100.

6)Остановы

Команда	Причина
0112 0152	Не сходятся контрольные суммы при вводе исходных данных. Для повторного ввода - "пуск"
0377	Сбой. Повторить решение или Ошибка в описании сети (узел с номером больше n)
1053	Задача решена (при невключенных ключах)
0102	Задачи решены (при включенном ключе 2)
0142	" " (при включенном ключе 1)

Примечания:

1.Программа после решения задачи готова для решения следующей; после замены исходных данных следующую задачу можно решать пуском с команды 0100.

2.Вывод решения на печать можно повторить, для чего после останова 1053 передать управление команде 0712.

3.Для размещения дополнений к программе свободны ячейки с 1250 по 1777.

```
+       0I00
-I0 00 0000 0060
-30 00 0I02 0000
-50 20 0000 0035
-I5 00 0000 0050
-30 00 0I05 0040
-07 00 0000 0030
-5I 00 0000 00I2
+07 00 0040 0II4
+       0II0
-34 00 0II2 0III
-32 00 0II5 0II2
-00 00 0000 0000
-07 00 0000 0024
-30 00 0I02 0000
+2I 00 II04 0050
+66 00 0I05 0050
-30 00 0I20 0003
+       0I20
-30 00 0I2I 0004
-I0 00 0000 005I
-I0 43 0040 0052
-32 00 0I25 0I24
+I0 00 II0I 005I
+7I 00 II05 0052
+66 00 0I07 0040
-3I 00 II44 00I7
+       0I30
+65 00 0II3 004I
-30 00 0I32 0053
+7I 00 II06 0052
-30 00 0I34 0040
-3I 00 II44 00I7
+65 00 0I06 005I
+77 00 004I 00I4
+76 24 0053 0040
```

```
+       0I40
-20 03 0I4I II00
-20 04 0I22 II0I
-50 00 0000 2000
-I5 00 0000 005I
-30 00 0I45 0040
-07 00 0000 0I30
-5I 00 0000 0000
+07 00 0040 0000
+       0I50
-34 00 0I52 0I5I
-32 00 0I55 0I52
-00 00 0000 0000
-07 00 0000 0000
-30 00 0I42 0000
+2I 00 II07 005I
+66 00 0I05 005I
-30 00 0I60 0003
+       0160
-I0 00 II0I 0052
-I0 00 005I 0004
-I0 03 2000 0040
-3I 00 II44 00I7
-I0 04 004I 2000
-32 00 0I66 0I70
+65 00 0I36 0052
-30 04 0I72 3400
+       0I70
-I4 04 0I56 2000
-II 04 0052 3400
+I0 00 II0I 0052
-20 03 0I74 II00
-20 04 0I62 II0I
-I0 00 005I 0003
-I0 03 3400 0000
-32 00 0200 0202
```

```
+       0200
+7I 03 3400 II06
-30 00 0204 0004
+7I 03 3400 III0
+66 00 0I07 0004
-I0 04 0000 5000
-I0 03 3400 0000
-32 00 02I3 0207
+7I 03 3400 III0
+       02I0
-34 00 02II 02I7
+7I 03 3400 II06
-34 00 0224 0235
+7I 03 3400 II06
-34 00 02I5 0242
+7I 03 3400 III0
-34 00 0247 0260
-30 00 0220 0005
+       0220
+7I 03 3400 II06
-30 00 0222 0006
+II 05 5000 IIII
-30 06 0265 5000
-30 00 0225 0005
+7I 03 3400 III2
+66 00 0I45 0006
+7I 03 3400 III0
+       0230
+76 00 0005 0005
+7I 26 III3 0040
+67 00 0232 0I24
+I2 05 5000 5000
-30 00 0265 0000
-30 00 0236 0005
+7I 03 3400 III0
+76 00 0005 0005
```

```
+       0240
-I0 05 5000 5000
-30 00 0265 0000
-30 00 0243 0005
+7I 03 3400 III0
+66 00 0I07 0006
+I0 05 0000 5000
-30 06 0265 5000
+66 00 0I07 0005
+       0250
+7I 03 3400 III2
+66 00 0I45 0006
+7I 26 III3 0040
+66 00 0232 0052
+7I 03 3400 II06
-30 00 0256 0006
+2I 06 0052 5000
-30 05 0265 5000
+       0260
+66 00 0I07 0005
+7I 03 3400 II06
-30 00 0263 0006
+2I 06 IIII 5000
-30 05 0265 5000
-20 03 0205 II00
-I0 00 0000 0052
-30 00 0270 0053
+       0270
-I0 00 0050 0003
+7I 23 III5 0040
-30 00 0273 0004
+7I 23 III4 0040
+67 00 0274 0002
+76 00 0004 0004
+7I 23 III3 0040
+66 00 0232 0054
```

```
+       0300
+21 04 5000 5000
+22 00 0054 0054
+23 00 0052 0000
-34 00 0304 03II
-32 00 0305 03II
-I0 00 0054 0052
+7I 00 II06 0003
+67 00 0I05 0000
+       03I0
+76 00 0004 0053
-20 03 027I II0I
-I0 00 0052 0000
-34 00 03I4 07I2
-32 00 03I5 07I2
-I0 00 0053 6400
+7I 00 II06 0053
-30 00 0320 0052
+       0320
+70 00 III0 0053
-I0 00 II0I 0003
+65 00 0I45 005I
+I2 00 II0I 0004
+77 00 005I 0000
+22 00 II0I 0005
-I0 00 0000 5000
+II 05 0000 3400
+       0330
-32 00 0340 033I
+7I 05 II06 3400
-30 00 0333 0054
+66 00 0I36 0055
+07 00 0053 0000
-34 00 0336 0347
+05 00 0054 0052
-34 00 0376 035I
```

```
+       0340
+7I 05 III0 3400
-30 00 0342 0055
+66 00 0I07 0054
+05 00 0053 0055
-34 00 0345 0363
+05 00 0052 0054
-34 00 0376 036I
+7I 05 III0 3400
+       0350
-30 00 0365 0053
+7I 05 III0 3400
+66 00 0I07 0052
+II 05 0000 3400
-30 03 0355 6400
+I0 00 II0I 0003
-I0 05 0000 3400
+II 05 0000 2000
+       0360
-30 03 0373 4777
+7I 05 II06 3400
-30 00 0353 0052
+7I 05 II06 3400
+66 00 0I36 0053
+II 05 0000 3400
-30 04 0367 6400
-I0 05 0000 3400
+       0370
+20 00 II0I 0004
+II 05 0000 2000
-30 04 0373 500I
+65 00 0I07 0053
+07 00 0052 0000
-34 00 0376 0400
-20 05 0327 II06
-00 00 0000 0053
```

```
+       0400
+65 00 0I45 005I
+I2 00 II0I 0053
+II 04 0000 640I
-30 03 0404 6400
+II 04 0000 500I
-30 03 0406 5000
+I0 00 II0I 0003
+I0 00 II0I 0004
+       04I0
+23 00 0053 0000
-34 00 04I2 04I3
-32 00 04I3 0402
+2I 00 II0I 0003
+23 00 II0I 0000
+66 00 0I05 0003
-30 00 04I7 0004
-I0 00 II30 5000
+       0420
-I0 00 0000 0054
-I0 00 0054 0000
-34 00 043I 0423
+7I 03 III0 640I
-30 00 0425 0040
+7I 03 II06 6400
+67 00 0426 00I4
+07 00 0040 0000
+       0430
-34 00 0436 0445
+7I 03 III0 640I
-30 00 0433 0040
+7I 03 III0 6400
+07 00 0040 0000
-34 00 0436 0445
+2I 03 5000 500I
-32 00 0443 0440
```

```
+       0440
-I0 00 0003 0053
+II 03 0000 500I
-30 00 0443 5000
-I0 00 II3I 0054
-30 00 0446 0000
-I0 00 0000 0054
-20 03 042I II0I
-I0 00 0004 0003
+       0450
-I0 00 0000 0054
-I0 00 0054 0000
-34 00 0464 0453
+7I 03 III0 640I
-30 00 0455 0040
+7I 03 II06 6400
+67 00 0426 0000
+07 00 0040 0000
+       0460
-34 00 046I 047I
-I0 00 II3I 0054
+2I 03 5000 500I
-30 03 0473 500I
+7I 03 III0 640I
-30 00 0466 0040
+7I 03 III0 6400
+07 00 0040 0000
+       0470
-34 00 046I 047I
-I0 00 0000 0054
+I0 03 5000 500I
-20 03 045I II0I
-I0 00 005I 0003
-I0 03 3400 0000
-34 00 0477 0500
-20 03 0475 II00
```

```
+       0500
-I0 00 0003 0054
+7I 00 III0 0003
-34 00 0504 0503
-30 00 05I0 0052
-I0 03 3377 0000
-32 00 05I3 0506
+7I 03 3377 III0
+62 00 0I07 0052
+       05I0
-I0 00 0004 0005
-I0 05 640I 0000
-32 00 052I 05I5
+7I 03 3377 II06
-30 00 05I0 0052
+7I 05 640I III0
+63 00 0I07 0000
+07 00 0052 0000
+       0520
-34 00 0524 0527
+7I 05 640I II06
+07 00 0052 0000
-34 00 0524 0527
-20 05 05II II00
+2I 00 II00 0003
-30 00 050I 0003
-I0 00 0005 0053
+       0530
+65 00 0I07 005I
+77 00 005I 0000
+66 00 0I07 0005
-I0 05 2000 2000
-I0 05 3400 3400
-34 00 0536 0537
+20 00 II0I 0005
+20 00 II00 0005
+       0540
+7I 00 III0 0054
+23 00 0005 0005
-32 00 0543 0533
+7I 00 II06 0055
+I2 00 II0I 0055
+7I 00 III0 0054
+I3 00 II00 0II4
+66 00 0546 0054
+       0550
+7I 00 III0 0053
+I3 00 II00 0030
+66 00 0546 0053
+23 00 0055 0I30
-34 00 0555 06I3
-32 00 0556 0634
+23 00 II0I 00I4
+66 00 055I 0005
+       0560
+65 00 0556 0053
+77 00 0054 0II4
+76 00 0005 0005
-3I 00 0674 0677
+65 00 0553 0004
+23 00 0053 0000
-32 00 0567 0577
+66 00 055I 0005
+       0570
+65 00 0556 0053
+I3 00 II00 0000
+77 00 0053 0000
+I3 00 0054 0000
+23 00 0055 0000
+76 00 0005 0005
-3I 00 0670 0673
+2I 00 II0I 0055
```

```
+       0600
+66 00 055I 0005
+65 00 0553 0004
+I3 00 II0I 0000
+I3 00 0054 0000
+23 00 0055 0000
+76 00 0005 0005
-II 05 6400 3377
-I0 05 5000 I777
+       06I0
-20 05 0606 II03
+I0 00 II0I 0060
-30 00 0I75 0000
+65 00 0553 0004
+23 00 0055 0000
-32 00 06I6 0643
+66 00 055I 0005
+II 00 II0I 0053
+       0620
+67 00 0556 0000
+77 00 0054 0000
+76 00 0005 0005
-3I 00 0670 0673
+2I 00 II0I 0055
+66 00 055I 0005
+65 00 0553 0004
+I3 00 0054 0000
+       0630
+I3 00 II0I 0000
+23 00 0055 0000
+76 00 0005 0005
-30 00 0606 0000
+2I 00 0053 0055
+23 00 II0I 0000
+67 00 0556 0000
+77 00 0053 0000
```

```
+       0640
+67 00 0556 0000
+76 00 0054 0005
-3I 00 0670 0673
+2I 00 II0I 0053
+66 00 055I 0005
+67 00 056I 0000
+77 00 0055 0032
+I3 00 0054 0I32
+       0650
+23 00 0053 0000
+76 00 0005 0005
-3I 00 0674 0677
+65 00 0553 0004
+23 00 0055 0000
-32 00 0656 06II
+66 00 055I 0005
+65 00 056I 0004
+       0660
+I3 00 II00 0000
+77 00 0054 0000
+I3 00 0055 0000
+76 00 0005 0005
-II 05 6400 3377
-I0 05 5000 I777
-20 05 0664 II32
-30 00 06II 0000
+       0670
-I0 05 6400 3377
-I0 05 5000 I777
-20 05 0670 II03
-00 00 0000 0000
-I0 05 6400 3377
-I0 05 5000 I777
-20 05 0674 II32
-00 00 0000 0000
```

```
+      0700
-I0 00 II36 0004
-62 04 700I II30
-20 04 070I II37
-62 00 7400 0000
+00 00 0000 0000
-I0 00 II36 0004
-62 04 700I II3I
-20 04 0706 II37
+      07I0
-62 00 7400 0000
+00 00 0000 0000
-I0 00 0000 0072
-62 20 70I0 0035
-62 20 70I6 0036
-62 20 7024 0037
-62 00 7400 0000
-3I 00 0700 0704
+      0720
-I0 00 I077 0003
-I0 03 I072 0004
-62 04 700I III6
-62 04 70I2 III7
-62 04 7025 II2I
-20 03 072I II00
-3I 00 I054 I064
-3I 00 0700 0704
+      0730
-I0 00 0000 0057
+II 00 I077 005I
+66 00 0647 0003
+66 00 0I36 0073
+I2 00 0073 0074
+I2 00 0073 0075
+65 00 0646 0003
+22 00 II02 0003
```

```
+      0740
+65 00 0I45 005I
+I2 00 I077 0004
-I0 04 0000 500I
-I0 04 0000 340I
-I0 04 0000 200I
-20 04 0742 II0I
-I0 03 500I 0040
-3I 00 II60 00I7
+      0750
-60 00 2400 004I
+7I 00 II20 0003
-30 00 0753 0005
-I0 05 0072 0006
-I0 06 3400 0056
+7I 00 III0 0056
+66 00 0I07 0040
-3I 00 II60 00I7
+      0760
+64 00 0I05 004I
-I0 05 I072 0007
-62 07 2777 004I
+7I 00 II06 0056
-30 00 0765 0040
-3I 00 II60 00I7
+64 00 0I05 004I
-62 07 3003 004I
+      0770
+65 00 0I07 0056
+72 00 III0 0004
-I0 44 0040 0055
+66 00 0I23 0040
+7I 00 III0 0056
-34 00 0777 0776
-I0 00 IIII 0040
+7I 00 II06 0056
```

```
+    I000
-34 00 I002 I00I
-I0 00 0000 0040
-I0 00 0040 0055
-3I 00 II60 00I7
-62 07 3023 004I
-I0 06 2000 0040
-3I 00 II60 00I7
-62 07 30I0 004I
+       I0I0
-3I 00 I065 I07I
-I0 00 0042 0056
-I0 00 0055 0040
-3I 00 I065 I07I
+35 00 0056 0042
+I6 00 0057 0057
+05 00 0005 II20
-34 00 I02I I020
+       I020
-3I 00 I054 I064
+64 00 0I07 0005
+I0 05 II00 0072
+7I 00 I053 0003
+07 00 I053 0000
-34 00 I027 I026
-3I 00 0705 07II
-20 03 0746 II00
+       I030
-3I 00 I054 I064
-3I 00 0705 07II
-62 00 7002 II23
-62 00 70I0 III7
-62 00 60I6 II27
-62 00 70I7 II2I
-62 00 6025 II30
-I0 00 0057 0040
+       I040
-3I 00 I20I 00I7
-62 00 0027 004I
-62 00 7II3 II24
-62 00 7I2I II25
-I0 00 0060 0040
-3I 00 II60 00I7
-62 00 3I27 004I
-62 00 7400 0000
+       I050
-3I 00 0700 0704
-35 00 0002 0I00
-35 00 000I 0I42
-00 00 0I77 0000
-I0 00 I077 0007
-I0 07 I072 0004
-62 04 6003 II26
-62 04 6007 II26
+       I060
-62 04 6022 II26
-62 04 6035 0I04
-20 07 I055 II00
-62 00 7400 0000
+00 00 0000 0000
-75 00 0040 004I
+2I 00 004I II4I
-30 00 I070 0043
+       I070
-I6 00 0043 0042
+00 00 000I 0000
+00 00 0000 0000
+00 00 0037 0000
+00 00 0I03 0000
+00 00 0I4I 0000
+00 00 0000 0003
+00 03 0000 0000
```

```
+       II00
+00 00 000I 0000
+00 00 0000 000I
+00 0I 0000 0000
+00 00 000I 000I
+00 00 0000 004I
+77 77 7777 0000
+00 00 0000 7777
+00 00 0000 200I
+       III0
+00 00 7777 0000
+00 00 0364 II00
+77 77 0000 0000
+77 77 7400 0000
+00 00 0377 6000
+00 00 0000 I777
+50 I7 37I7 5II7
+73 22 50I5 5I23
+       II20
+00 00 0003 0000
+66 22 50I5 5I23
+00 00 0000 0044
+6I 63 5454 40I7
+I7 50 6245 60I6
+I7 40 6046 37I7
+37 00 0000 0000
+24 00 0II2 0000
+       II30
+25 25 2525 2525
+77 77 7777 7777
+00 00 7777 000I
+00 00 0002 0000
+00 00 0000 0002
+00 04 00I3 0000
+00 24 0000 0000
+00 00 0006 0000
```

```
+       II40
+00 00 7777 7777
+00 00 0000 0I44
-3I 00 I250 I757
-00 00 0000 0000
-I0 00 0040 0042
-I0 00 II57 000I
-I0 00 0000 004I
+65 00 II5I 0042
+       II50
+I2 00 004I 004I
-20 0I II53 0I40
-30 00 00I7 0000
+64 00 II57 0042
-70 00 II56 004I
-30 00 II47 004I
+00 00 0000 00I2
+00 I0 0000 0004
+       II60
-I2 00 0040 0043
+I3 00 I200 0I04
-II 00 0000 0042
-30 00 II64 004I
-I4 00 0040 004I
+60 00 II6I 0042
-70 00 II76 0043
-34 00 II70 00I7
+       II70
-30 00 II7I 0043
+5I 00 II77 0043
-32 00 II73 II65
-30 00 II74 0043
-74 00 0042 004I
-30 00 II7I 0000
+00 00 0000 00I2
+00 73 4654 5000
```

```
+       I200
+77 04 3I23 3000
-I0 00 0040 0045
-75 00 0000 004I
+6I 00 I2II 0045
-34 00 I205 I223
-32 00 I206 I2II
+I0 00 I240 0042
+45 00 I24I 0045
+       I2I0
-30 00 I203 0045
+53 00 I242 0036
-32 00 I2I3 I2I6
+34 00 I24I 0045
+20 00 I240 0042
-33 00 I203 I237
+64 00 0045 0045
+53 00 I243 0000
+       I220
-32 00 I223 I22I
+40 00 I243 0045
+20 00 I240 0042
-I0 00 I244 0043
+30 00 I245 0045
+72 00 0043 0044
+76 00 004I 004I
+64 00 I240 0043
+       I230
+50 00 0044 0045
-34 00 I224 I232
+5I 00 I246 0042
-32 00 I234 I235
-74 00 I247 0042
+60 00 I242 0042
-I6 00 0042 004I
-30 00 0017 0000
```

```
+       I240
+0I 00 0000 0I04
+50 00 0000 0004
+03 00 0000 0I36
+06 3I 463I 4632
-74 00 0000 0000
+50 00 0000 0000
+I2 00 0000 0000
+06 00 0000 0000
```

Контрольная сумма программы

+34 I0 7506 2356

(без СП, т.е. только ячейки 0100 - 1143)

4.5. Пример

На рис.15 приведена схема сети для доставки ресурса из узла 3 к потребителям №№ 11 - 22. Так как ресурса недостаточно, предусмотрена его замена у части потребителей двумя разными заменителями, рассматриваемыми как ресурсы в узлах 1 и 2.

Для перфорирования выписываются:

1 массив - описание сети

```
57 60 5054 4560          заглавие задачи (PRIMER ZADA
17 47 4044 4067
50 17 1717 1717          (три восьмеричных числа)

 - 2200 012  из узла 1 с ценой 2200 в узел 12
 + 2300 013    -"-     -"-   2300  -"-  13
 + 2300 015
 +      16   ( = + 0 016) с ценой 0 в узел 16
 + 1660 018
 + 1780 019     и т.д.
 + 1396 020
 + 1780 022
 - 1353 012   из узла 2
 + 1353 013
 + 1358 015
 +      16
 + 1110 018
 + 1110 019
 + 1110 020
 + 1113 022
 - 1347 004   из узла 3
 -   57 005   из узла 4
 +      8
```

```
        -  54 006   из узла 5
        +      9
        -  49 007   и т.д.
        +     10
        -     21
        +     22
        -     11
        +     12
        +     13
        -     14
        +     15
        +     16
        -     17
        +     18
        +     19
        +     20
```

П массив - система ресурсов

```
        + 7000  в узле 1 ресурс 7000 ед.
        + 4060         2    "   4060 ед.
        +  700         3    "    700 ед.
          0            4    "      0
          0              и т.д.
          0  знак нулевого ресурса (или потребления)
          0  значения не имеет
          0
          0
          0
        -  32  в узле 11 потребность 32 ед.
                    (потребность - знак "-")
        -  39
        - 212
        -  27
        - 200
          0
```

- 101
- 79
- 540
- 7000
- 46
- 652

Решение задачи (вывод на АЦПУ) представлено в табл.19, его интерпретация на сети - на рис.16.

Обозначения в решении:

I номер исходного узла перевозки,

J номер конечного узла,

X(I,J) объем перевозки из узла I в узел J ,

C(I,J) удельные транспортные расходы на дуге из узла I в узел J .

После каждых 33-х строк в решении печатается горизонтальная линия.

Сумма расходов

$$SUMMA\ c(I,J)\cdot x(I,J) = +1130360+08$$

расшифровывается как $0{,}1130360 \cdot 10^{8} = 11303600$.

Выводится количество проведенных итераций:

ITER.ARV: 19 (целое десятичное число)

На БПМ печатаются в порядке номерации узлов их потенциалы (P_i).

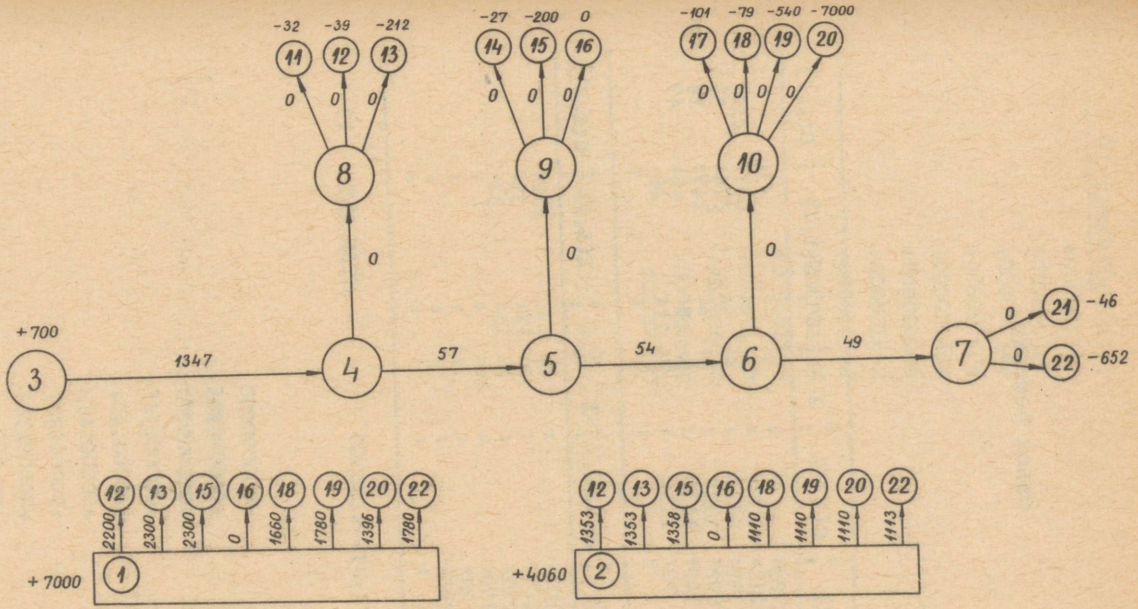

-32
-39
-212
-27
-200
0
-101
-79
-540
-7000
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
0
8
9
10
+700
3
1347
4
57
5
54
6
49
7
21
-46
22
-652
12
13
15
16
18
19
20
22
2200
2300
2300
0
1660
1780
1396
1780
+7000
1
1353
1353
1358
0
1110
1110
1110
1113
+4060
2

Рис. 15

Таблица 19

Вывод решения

а) на АЦПУ

PRIMER ZADA ЧI

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
1		2789		3		43	
1	20	4211	1396	3	4	657	1347
2	20	2789	1110	4	5	374	57
2	22	652	1113	5	6	147	54
2	19	540	1110	6	7	46	49
2	18	79	1110	7	21	46	

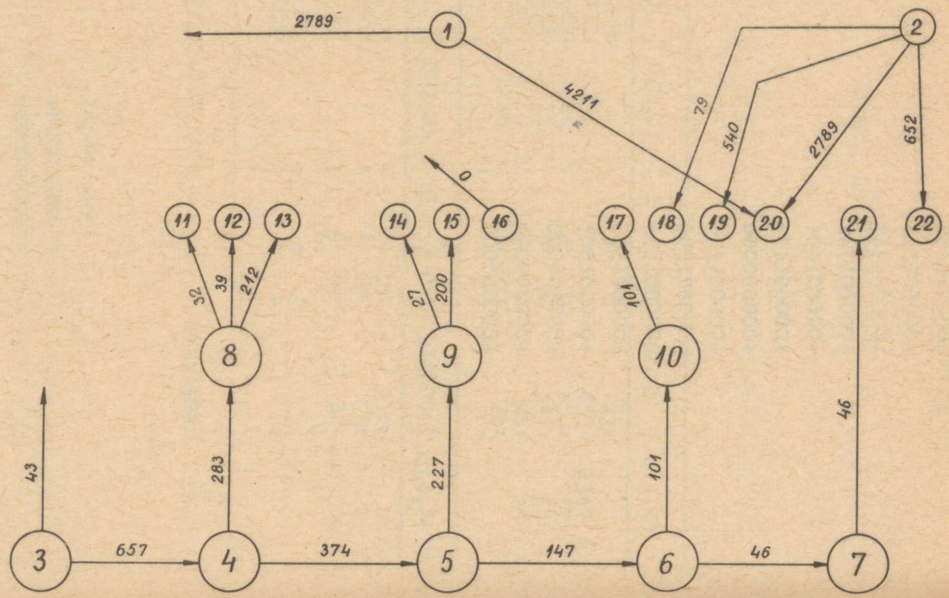
I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
6	10	101		8	13	212	
10	17	101		8	12	39	
5	9	227		8	11	32	
9	15	200		16			
9	14	27					
4	8	283					

SUMMA X(I,J) C(I,J)=+1130360 ITER.ARV: 19

б) на БПМ (P_i)

+000000000
+000000286
+000000000
+000001347
+000001404
+000001458
+000001507
+000001347
+000001404

+000001458
+000001347
+000001347
+000001347
+000001404
+000001404
+000000000
+000001458
+000001396
+000001396
+000001396
+000001507
+000000000
+000000000
+000000000


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
2789
4211
79
540
2789
652
0
32
39
212
27
200
101
43
283
227
101
46
657
374
147
46

5. ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ МЕТОДОМ ОТСЕВА ПО ЗАГРУЗКЕ

Программа предназначена для решения задач концентрации и размещения производства в сетевой постановке и является дополнением к программе транспортной задачи (§ 4). Обозначения используются те же. Предполагается, что рассматриваемые производства заданы моделями, которые изображены на рис.2 - 7 (§1.2).

Метод отсева по загрузке /11, 15/ описан в § 2.3. Непосредственно программа рассчитана на дискретные задачи, но с равным эффектом решает и задачи с непрерывными переменными (с фиксированными доплатами).

В программе используются названия:

дуга отсева - дуга с затратами α_w на модели производства;

производственная мощность - число A_w ;

узлы отсева - все узлы сети, относящиеся к модели производства (внутрипроизводственному участку сети), т.е. узлы, в которые на рис.2 - 7 вписаны A_w, $-A_w$, A^i_w и $-A^i_w$.

5.1. Исходные данные

Исходные данные для задачи подготавливаются в виде пяти массивов. Составление первого и второго масси-

зов ничем не отличается от подготовки данных для ре-
шения транспортной задачи, отметим лишь, что при вк-
чении в транспортную задачу моделей производства сле-
дует быть внимательным при нумерации узлов и при вы-
писывании информации о ресурсах и о спросе.

Третий массив дает список дуг для отсева. Кажда
дуга отсева перфорируется в виде одного шестизначног
десятичного числа - в виде $1000\ i_k + j_k$. Дуги отс
закрепленных (обязательных) производств в список не
чаются.

Четвертый массив включает производственные мощ-
ности. В том же порядке, как были выписаны дуги отсе
перфорируются соответствующие мощности (целые десяти-
ные числа).

Пятый массив включает списки узлов отсева. Кажд
список может состоять из нескольких ячеек. Учитывая,
номер узла представляется всегда трехзначным числом,
каждую ячейку можно вместить максимум три номера узл
Первая ячейка каждого списка перфорируется со знаком
нус. Списки узлов отсева выписывают в порядке, соотве
ствующем списку дуг для отсева. В конце массива перфо
руется ячейка с числом 0.

Максимальные размеры задачи:

Сеть 750 узлов, 4040 дуг.

Дуг для отсева - не более 125.

Длина массива списков узлов отсева - не более 750 ячеек.

5.2. Структурная схема программы

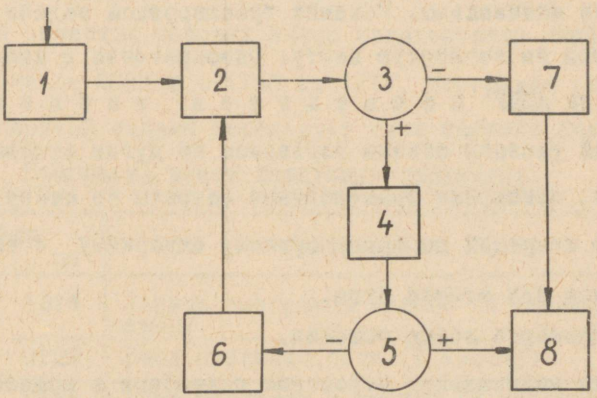


Рис.17

В структурной схеме (рис.17) блоками обозначены:

1)Ввод исходных данных, перевод их в двоичную систему счисления и составление базисного плана для решения транспортной задачи. Сюда не включен ряд проверок правильности подготовки исходных данных.

2)Решение транспортной задачи. С магнитной ленты вызывается программа и решается транспортная задача.

3)Проверка допустимости решения. Если план допустимый, т.е. не содержит непокрытых потребностей, следует блок 4), иначе блок 7).

4)Анализ решения. Для каждой дуги по списку дуг для отсева определяется отношение перевозки по этой дуге в оптимальном плане транспортной задачи к соответствующей мощности. Фиксируется дуга, на которой это отношение минимально. Решение транспортной задачи записывается на магнитную ленту. Одновременно с анализом решения на АЦПУ п е ч а т а е т с я т а б л и ц а, в которой указаны объемы перевозок по дугам отсева и мощности, суммарные транспортные затраты по плану, количество итераций по транспортному алгоритму и зафиксированная для отсева дуга.

5)Проверка конца решения.

Если минимальное отношение перевозки к мощности больше 0,999 999, конец отсева достигнут и следует блок 8), иначе блок 6).

6)Отсев. По зафиксированной дуге определяется соответствующий список узлов отсева, и исходный план транспортной задачи изменяется так, как будто во всех узлах этого списка были ресурсы 0. В списке мощностей на ноль изменяется соответствующая мощность. Следует пункт 2).

7)Недопустимость. С магнитной ленты вызывается решение предыдущей транспортной задачи - последнее допустимое решение.

8)П е ч а т а е т с я р е ш е н и е транспортной задачи - транспортные маршруты по плану в конце отсева. Счет закончен.

5.3. Инструкция к программе

Программа написана в действительных адресах и занимает ячейки с 0100 по 0673 и с 1300 по 1477, стандартные программы - с 1144 по 1250.

В качестве рабочих ячеек используются ячейки с номерами до 0077 и с 1766 по 1777. Программа решения транспортной задачи использует свои рабочие ячейки.

Программа имеет следующую структуру:

Ячейки с	по	Содержание
0100	1314	Запись программы отсева на магнитную ленту
0105	0122	Ввод описания сети (I массив)
0123	0135	Ввод ресурсов и спроса (II массив)
0136	0202	Составление базиса для транспортной задачи
0222	0236	Ввод списка дуг для отсева (III массив)
0246	0264	Перевод в двоичную систему списка дуг отсева
0265	0313	Ввод мощностей и списков узлов отсева (IУ и У массивы)
0314	1315	Перевод в двоичную систему IУ и У массивов
1371	1375	Проверка допустимости решения транспортной задачи
0475	0542	Анализ решения транспортной задачи
0613	0615	Изменение базиса для новой транспортной
0626	1315	задачи
0101	0104	Печать на АЦПУ
0203	0221	
0237	0245	
0412	0474	
0543	0612	

1364	1370	
0662	0667	
1420	1423	
1430	1431	Переход в программу транспортной задачи для печати плана
1315	1330	Запись на магнитные ленты, массивы Ш, IУ и У
1331	1344	" " " " , базис транспортной задачи
0367	0402	" " " " , решение транспортной задачи
1345	1360	Считывание с магнитных лент, программа транспортной задачи
1376	0357	" " " " , программа отсева
1410	1417	" " " " , решение транспортной задачи
0357	0366	" " " " , массивы Ш, IУ и У
0616	0625	" " " " , базис транспортной задачи
0403	0411	
0356		Константы
1407		
1440	1477	

Размещение информации в МОЗУ:

Ячейки с №	Массив	
	До решения транспортной задачи	После решения транспортной задачи
2000	Ресурсы и потребности	Перевозки
3400	Исходный базис	Оптимальный базис
5000		Потенциалы узлов
6400	Ш массив исходных данных	Рабочие ячейки
6600	IУ массив исходных данных	программы транспортной задачи
7000	У массив исходных данных	
10035	Заглавие задачи	
10040	Описание сети	

Инструкция оператору:

1)Ввести стандартные программы

СП-0015, начиная с ячейки 1144,

СП-0016, начиная с ячейки 1160,

СП-0021, начиная с ячейки 1201.

2)Ввести транспортную программу.

3)Записать на магнитную ленту введенные программы по командам: 0001) - 46 00 1302 0100

2) - 44 00 1150 0100

3) - 30 00 0001 0000

4) - 00 00 0000 0000.

4)Ввести программу отсева.

5)Магнитные ленты 03, 13.

6)Включить АЦПУ, БПМ-20.

7)Исходные данные (перфолента).

8)Управление команде 0100.

Остановы:

Ч. АК	Причина	Действия
1054	Решение получено	Конец счета
0117 0134 0233 0266 0304	Несовпадение контрольных сумм при вводе исходных данных	"ПУСК" - повторный ввод. При повторении останова привести в порядок перфоленту. Проверить ввод. Конец счета

0366 0402 0625 1313 1330 1344 1360 1405 1417	Несовпадение контрольных сумм при обмене с магнитными лентами	"ПУСК" - повторное об щение к магнитной лен При повторении остано выявить причину сбоя. Конец счета
0141	$n > 750$	Конец счета
0144	$m > 4040$	Исправить исходные
0155	Обнаружен индекс $j > n$	данные
0265	Число дуг отсева больше 125	
0303	Длины III и IУ массивов не равны	
0353	Списков узлов отсева меньше, чем дуг отсева	
0530	Перевозка по дуге отсева, мощность которого нуль	Конец счета. Найти ошибку в составлении сети или в описаниях

5.4. Программа

```
0 0100  -31 00 1300 1314
      1 -62 00 3400 0000
      2 -62 00 5006 1454
      3 -62 00 5015 1455
      4 -62 00 4023 1456
      5 -10 00 0000 0053
      6 -50 20 0000 0035
      7 -15 00 0000 0054

0 0110  -30 00 0111 0040
      1 -07 00 0000 0001
      2 -51 00 0000 0024
      3 +07 00 0040 0030
      4 -34 00 0116 0115
      5 -32 00 0121 0116
      6 -00 00 0001 0041
      7 -07 00 0000 0014

0 0120  -30 00 0106 0000
      1 +10 00 0116 0054
      2 +62 00 0113 0050
      3 -50 00 0000 2000
      4 -30 00 0125 0040
      5 -07 00 0001 0000
      6 -51 00 0000 0000
      7 -15 00 0000 0052

0 0130  +07 00 0040 0114
      1 -34 00 0133 0132
      2 -32 00 0136 0133
      3 -00 00 0000 0003
      4 -07 00 0000 0130
      5 -30 00 0123 0000
      6 +11 00 0140 0052
      7 -32 00 0140 0141

0 0140  -00 00 0000 1356
      1 +11 00 0143 0054
      2 -32 00 0143 0144
      3 -00 00 0000 7710
      4 +21 00 1440 0052
      5 +66 00 0113 0051
      6 -10 00 0050 0003
      7 +71 23 1442 0040

0 0150  -30 00 0151 0040
      1 -31 00 1144 0017
      2 +21 00 0041 0052
      3 -32 00 0155 0154
      4 -00 23 0003 0040
      5 -10 00 0041 0054
      6 +65 23 0130 0040
      7 -30 00 0160 0040
```

0 0160	-32 00 0163 0161		0 0210	-31 00 1160 0017	
1	-12 00 0040 0040		1	-62 00 3050 0041	
2	+10 00 1446 0053		2	-62 00 5050 1457	
3	-31 00 1144 0017		3	+65 00 0134 0050	
4	+65 00 0112 0041		4	-30 00 0215 0040	
5	+77 00 0053 0000		5	-31 00 1160 0017	
6	+76 23 0054 0040		6	-62 00 3062 0041	
7	-20 03 0147 0111		7	-62 00 5062 1460	
0 0170	-10 00 1440 0004		0 0220	-62 00 5074 1461	
1	-10 00 0051 0003		1	-62 00 4100 1462	
2	-10 03 2000 0040		2	-50 00 0000 6400	
3	-32 00 0174 0176		3	-30 00 0224 0040	
4	+65 00 0117 0004		4	-07 00 0000 0000	
5	-30 04 0177 3377		5	-51 00 0000 0000	
6	-11 04 0004 3377		6	-15 00 0000 1776	
7	-31 00 1144 0017		7	+07 00 0040 0000	
0 0200	-12 04 0041 1777		0 0230	-32 00 0231 0232	
1	+10 00 1440 0004		1	-34 00 0232 0235	
2	-20 03 0172 0125		2	-00 00 0000 0000	
3	-62 20 5024 0035		3	-07 00 0000 0000	
4	-62 20 5032 0036		4	-30 00 0222 0000	
5	-62 20 5040 0037		5	-10 00 1776 0040	
6	+65 00 0134 0051		6	+66 00 0113 1776	
7	-30 00 0210 0040		7	-31 00 1160 0017	

```
0 0240  -62 00 3I04 004I
      I -62 00 5I02 I455
      2 -62 00 5I05 I463
      3 -62 00 5II6 I46I
      4 -62 00 4I0I I457
      5 -62 00 7400 0000
      6 -I0 00 I776 0004
      7 +7I 04 I443 6400

0 0250  +66 00 0I30 0040
      I -3I 00 II44 00I7
      2 +6I 00 0II7 004I
      3 -30 00 0254 I775
      4 +7I 04 I442 6400
      5 -30 00 0256 0040
      6 -3I 00 II44 00I7
      7 +75 00 I775 004I

0 0260  -30 04 026I 6400
      I -20 04 0247 0III
      2 +2I 00 I776 I452
      3 -32 00 0267 0264
      4 -00 00 0000 0000
      5 -00 00 0000 0000
      6 -07 00 0000 0000
      7 -50 00 0000 6600

0 0270  -30 00 027I 0040
      I -07 00 0000 0000
      2 -5I 00 0000 0000
      3 -I5 00 0000 004I
      4 +07 00 0040 0000
      5 -32 00 0276 0265
      6 -34 00 0265 0277
      7 +65 00 0II3 004I

0 0300  +07 00 I776 0000
      I -34 00 0302 0305
      2 -00 00 I776 004I
      3 -00 00 0000 0000
      4 -07 00 0000 0000
      5 -50 00 0000 7000
      6 -30 00 0307 0040
      7 -07 00 0000 0000

0 03I0  -5I 00 0000 0000
      I +07 00 0040 0000
      2 -32 00 03I3 0303
      3 -34 00 0303 03I4
      4 -I0 00 I776 0003
      5 +II 03 0000 6600
      6 -30 00 03I7 0040
      7 -3I 00 II44 00I7
```

```
0 0320  -I0 03 004I 6600
     I  -20 03 03I5 0III
     2  -I0 00 0000 0003
     3  -30 00 0326 I775
     4  +I0 00 I440 I775
     5  +I0 00 I440 0003
     6  +7I 03 I442 7000
     7  -30 00 0330 0040

0 0330  -3I 00 II44 00I7
     I  -I0 00 004I I774
     2  +7I 03 I443 7000
     3  +66 00 0I30 0040
     4  -3I 00 II44 00I7
     5  +65 00 0II7 004I
     6  +76 00 I774 I774
     7  +65 03 0I34 7000

0 0340  -30 00 034I 0040
     I  -3I 00 II44 00I7
     2  -I4 00 0040 004I
     3  +65 00 0II3 004I
     4  +76 03 I774 7000
     5  -34 00 0346 0347
     6  -32 00 0325 0324
     7  +65 00 0II3 I775

0 0350  +07 00 I776 0000
     I  -34 00 0352 0353
     2  -00 00 I776 I775
     3  -I0 00 I440 I775
     4  +20 00 0356 I776
     5  -30 00 I3I5 0000
     6  +00 0I 0000 0000
     7  -46 00 0300 I300

0 0360  -45 00 I400 6400
     I  -30 00 0357 0000
     2  +07 00 I773 0000
     3  -34 00 0365 0364
     4  -32 00 0367 0365
     5  -00 00 0000 0000
     6  -30 00 0357 0000
     7  -46 00 0300 7000

0 0370  -43 00 3000 2000
     I  -30 00 0367 0000
     2  -30 00 0373 I772
     3  -47 00 0300 7000
     4  -44 00 3000 2000
     5  -30 00 0373 0000
     6  +07 00 I772 0000
     7  -34 00 040I 0400
```

```
0 0400  -32 00 0443 0401
     1  -00 00 0000 0000
     2  -30 00 0367 0000
     3  +00 00 0000 0003
     4  +00 03 0000 0000
     5  +00 00 0000 0000
     6  +00 00 0040 0000
     7  +00 00 0100 0000

0 0410  +00 00 0140 0000
     1  +00 00 0003 0000
     2  -10 00 0404 0007
     3  -10 07 0405 0004
     4  -62 04 6004 1456
     5  -62 04 6010 1456
     6  -62 04 6023 1456
     7  -62 04 6036 1456

0 0420  -20 07 0413 0125
     1  -62 00 7400 0000
     2  +00 00 0000 0000
     3  -75 00 0040 0042
     4  +21 00 0042 1447
     5  -30 00 0426 0041
     6  +71 00 1444 0043
     7  +76 00 0041 0041

0 0430  +00 00 0000 0000
     1  -10 00 1451 0004
     2  -62 04 7000 1465
     3  -20 04 0432 1450
     4  -62 00 7400 0000
     5  +00 00 0000 0000
     6  -10 00 1451 0004
     7  -62 04 7000 1477

0 0440  -20 04 0437 1450
     1  -62 00 7400 0000
     2  +00 00 0000 0000
     3  -31 00 0431 0435
     4  -10 00 0404 0007
     5  -10 07 0405 0004
     6  -62 04 7002 1466
     7  -62 04 7013 1467

0 0450  -62 04 7026 1470
     1  -20 07 0445 1441
     2  -31 00 0412 0422
     3  -31 00 0431 0435
     4  -10 00 0000 0057
     5  -10 00 1453 1771
     6  -10 00 0000 1770
     7  -10 00 1776 0010
```

```
0 0460  -10 00 0404 0005
     1  -10 05 0405 0006
     2  -10 10 6400 1767
     3  +73 00 1443 0000
     4  +66 00 0130 0040
     5  -31 00 1160 0017
     6  +64 00 0113 0041
     7  -62 06 3000 0041

0 0470  +71 00 1442 1767
     1  -30 00 0472 0040
     2  -31 00 1160 0017
     3  +64 00 0113 0041
     4  -62 06 3004 0041
     5  -10 00 0051 0011
     6  +05 11 1767 3400
     7  +73 00 1445 0000

0 0500  -34 00 0501 0517
     1  -20 11 0476 1440
     2  -10 10 6600 0040
     3  -34 00 0513 0504
     4  -31 00 1160 0017
     5  -62 06 3024 0041
     6  -20 05 0511 1441
     7  -10 00 0404 0005

0 0510  -31 00 0412 0422
     1  -20 10 0461 1441
     2  -30 00 0541 0000
     3  -10 00 0000 1771
     4  -10 00 0010 1770
     5  -10 10 6600 0040
     6  -30 00 0504 0000
     7  +05 11 0000 2000

0 0520  -30 00 0521 0040
     1  -31 00 1160 0017
     2  -62 06 3011 0041
     3  +05 11 0000 2000
     4  -34 00 0525 0502
     5  -10 10 6600 0000
     6  -34 00 0530 0527
     7  -00 00 0000 0000

0 0530  -31 00 0423 0430
     1  -10 00 0041 1766
     2  -10 10 6600 0040
     3  -31 00 0423 0430
     4  +44 00 0041 1766
     5  +27 00 1771 0124
     6  -32 00 0515 0537
     7  -10 00 1766 1771
```

```
0 0540  -30 00 05I4 0000
      I -3I 00 04I2 0422
      2 -3I 00 0436 0442
      3 -62 00 5005 I47I
      4 -62 00 50I3 I472
      5 -I0 00 005I 0005
      6 +65 05 0I34 3400
      7 -30 00 0550 0006

0 0550  +65 26 0535 0040
      I -30 00 0552 0040
      2 -3I 00 0423 0430
      3 -I0 00 004I I766
      4 +05 05 0000 2000
      5 -30 00 0556 0040
      6 -3I 00 0423 0430
      7 +35 00 I766 004I

0 0560  +I6 00 0057 0057
      I -20 05 0546 I440
      2 -I0 00 0057 0040
      3 -3I 00 I20I 00I7
      4 -62 00 0022 004I
      5 -62 00 5044 I473
      6 -62 00 5053 I474
      7 -I0 00 0060 0040

0 0570  -3I 00 II60 00I7
      I -62 00 306I 004I
      2 +25 00 I77I I453
      3 -30 00 0670 0000
      4 -62 00 5I07 I455
      5 -62 00 4II4 I460
      6 -I0 00 I770 00I0
      7 -I0 I0 6400 I766

0 0600  +66 00 0I30 0040
      I -3I 00 II60 00I7
      2 +65 00 0II3 004I
      3 -30 00 0604 I767
      4 +7I 00 I442 I766
      5 -30 00 0606 0040
      6 -3I 00 II60 00I7
      7 +74 00 I767 004I

0 06I0  -62 00 3II5 004I
      I -62 00 7400 0000
      2 -3I 00 043I 0435
      3 +65 00 0I30 I770
      4 +72 00 I442 00I0
      5 -I0 I0 0000 6600
      6 -47 00 0300 3000
      7 -45 00 3000 2000
```

0 0620	-30 00 06I6 0000	0 0650	+65 00 0I30 I771
I	+07 00 I774 0000	I	-34 00 0652 0650
2	-34 00 0624 0623	2	-30 00 0653 00II
3	-32 00 0626 0624	3	-I0 II 0000 I777
4	-00 00 0000 0000	4	+I0 00 I44I 00I0
5	-30 00 06I6 0000	5	-I0 I0 7000 I771
6	-I0 00 0000 I767	6	-32 00 0657 0660
7	-I0 00 0000 00I0	7	-34 00 0640 0660
0 0630	-I0 I0 7000 I77I	0 0660	+I0 00 I440 I775
I	-32 00 0636 0632	I	-30 00 I3I5 0000
2	+05 00 I770 I767	2	-62 00 7400 0000
3	+73 00 I443 0000	3	-3I 00 043I 0435
4	-34 00 0635 0640	4	-62 00 3400 0000
5	+I0 00 I44I I767	5	-62 00 5005 I476
6	+I0 00 I44I 00I0	6	-62 00 7400 0000
7	-30 00 0630 0000	7	-30 00 I424 0000
0 0640	+7I 00 I442 I77I	0 0670	+27 00 0672 0000
I	-34 00 0642 0644	I	-32 00 0574 0662
2	-30 00 0643 00II	2	+65 53 7624 653I
3	-I0 II 0000 I777	3	+00 00 0000 0000
4	+64 00 0I30 I77I	4	+00 00 0000 0000
5	+72 00 I442 00II	5	+00 00 0000 0000
6	-34 00 0647 0650	6	+00 00 0000 0000
7	-I0 II 0000 I777	7	+00 00 0000 0000

```
0 1300   -46 00 0300 0100
     1   -43 00 1200 0100
     2   -30 00 1300 0000
     3   -30 00 1304 1777
     4   -47 00 0300 0100
     5   -44 00 1200 0100
     6   -30 00 1304 0000
     7   +07 00 1777 0000

0 1310   -32 00 1311 1312
     1   -34 00 1312 1314
     2   -00 00 0000 0000
     3   -30 00 1300 0000
     4   +00 00 0000 0000
     5   -46 00 0300 1300
     6   -43 00 1400 6400
     7   -30 00 1315 0000

0 1320   -30 00 1321 1773
     1   -47 00 0300 1300
     2   -44 00 1400 6400
     3   -30 00 1321 0000
     4   +07 00 1773 0000
     5   -34 00 1327 1326
     6   -32 00 1331 1327
     7   -00 00 0000 0000

0 1330   -30 00 1315 0000
     1   -46 00 0300 3000
     2   -43 00 3000 2000
     3   -30 00 1331 0000
     4   -30 00 1335 1774
     5   -47 00 0300 3000
     6   -44 00 3000 2000
     7   -30 00 1335 0000

0 1340   +07 00 1774 0000
     1   -34 00 1343 1342
     2   -32 00 1345 1343
     3   -00 00 0000 0000
     4   -30 00 1331 0000
     5   -47 00 1302 0100
     6   -45 00 1150 0100
     7   -30 00 1345 0000

0 1350   -30 00 1351 0040
     1   -47 00 1302 0100
     2   -44 00 1150 0100
     3   -30 00 1351 0000
     4   +07 00 0040 0000
     5   -34 00 1357 1356
     6   -32 00 1361 1357
     7   -00 00 0000 0000
```

0 1360	-30 00 1345 0000	0 1410	-47 00 0300 7000
1	-10 00 1407 0377	1	-45 00 3000 2000
2	-10 00 0000 0060	2	-30 00 1410 0000
3	-31 00 0175 0712	3	+07 00 1772 0000
4	-10 00 1775 0040	4	-32 00 1415 1416
5	-31 00 1160 0017	5	-34 00 1416 1420
6	-62 00 3000 0041	6	-00 00 0000 0000
7	-62 00 5000 1464	7	-30 00 1410 0000
0 1370	-62 00 7400 0000	0 1420	-62 00 5010 1475
1	-10 00 0051 0003	1	-62 00 5016 1476
2	-10 03 3400 0000	2	-62 00 7400 0000
3	+73 00 1443 0000	3	-30 00 1430 0000
4	-34 00 1375 1410	4	-31 00 1345 1361
5	-20 03 1372 1441	5	-10 00 1427 1361
6	-47 00 0300 0100	6	-30 00 1430 0000
7	-45 00 1200 0100	7	-10 00 1407 0377
0 1400	-30 00 1376 0000	0 1430	-10 00 0000 0072
1	+07 00 1777 0000	1	-30 00 0716 0000
2	-34 00 1404 1403	2	+00 00 0000 0000
3	-32 00 1406 1404	3	+00 00 0000 0000
4	-00 00 0000 0000	4	+00 00 0000 0000
5	-30 00 1376 0000	5	+00 00 0000 0000
6	-30 00 0357 0000	6	+00 00 0000 0000
7	-30 00 1410 0000	7	+00 00 0000 0000

```
0 I440  +00 00 0000 000I
    I   +00 00 000I 0000
    2   +00 00 0000 7777
    3   +00 00 7777 0000
    4   -77 77 7777 7600
    5   +00 00 7777 7777
    6   +00 00 0000 2000
    7   +00 00 0000 0I44

0 I450  +00 00 0006 0000
    I   +00 24 0000 0000
    2   +0I 75 0000 0000
    3   +40 00 0000 000I
    4   +47 40 4440 6740
    5   +56 62 6I45 4240
    6   +37 00 0000 0000
    7   +I7 6I 4562 73I7

0 I460  +I7 63 4753 5642
    I   +I7 44 6343 4054
    2   +I6 00 0000 0000
    3   +45 42 I757 56I7
    4   +I7 I7 7040 43I7
    5   +25 25 2525 2525
    6   +50 I7 37I7 5II7
    7   +73 22 50I5 5I23

0 I470  +76 22 50I5 5I23
    I   +6I 63 5454 40I7
    2   +47 40 6260 4062
    3   +52 56 53I3 4256
    4   +50 62 4560 I637
    5   +57 56 5355 725I
    6   +57 53 4055 I7I7
    7   +I3 I3 I3I3 I3I3
```

Контрольная сумма программы:

52 6I 3741 5445

5.5. Пример

На рис.18 приведена сеть задачи, включающая три склада сырья с суммарными запасами 600 единиц, два промежуточных узла, четыре предприятия с мощностями по 300 ед. и три конечных потребителя с суммарной потребностью в 600 ед. Производственные затраты приняты на всех предприятиях равными нулю.

Для покрытия потребностей достаточно двух предприятий, которые выбираются по методу отсева. Исходные данные для этой задачи имеют вид:

I Описание сети:			П Ресурсы и спрос
56 62 53 40 44 52		ОТЛАДК	+ 300
40 17 56 62 61 45		А..ОТСЕ	+ 200
42 40 17 17 17 17		ВА.....	0
- 1 005			+ 100
1 003			0
- 3 003			0
2 004	- 7 018		0
- 2 005	5 019		0
1 004	014		0
3 007	- 3 018		+ 300
4 008	4 019		+ 300
- 3 003	8 020		+ 300
4 008	015		+ 300
5 009	- 9 018		- 300
- 1 006	3 019		- 300
2 007	8 020		- 300
- 014	016		- 300
- 015	- 5 019		- 200
- 016	2 020		- 200
- 017	017		- 200

Ш Дуги отсева	IУ Мощности	У Списки узлов отсева
+ 006 014	+ 300	- 010 014
+ 007 015	+ 300	- 011
+ 008 016	+ 300	+ 015
+ 009 017	+ 300	- 016 012
		- 013 017
		+ 0

Результаты счета показаны в табл. 20.

Шаг I - в плане все предприятия. Минимальное отношение перевозки к мощности на дуге 006-014.

Шаг 2. Предприятие I отсеяно.

Шаг 3. Отсеяно предприятие Ш. Минимальное отношение = I, печатается ПЛАН.

По плану (его интерпретация приведена на рис.18) оставлены производства П и IУ, общие затраты 4700.

Замечание

При решении задачи с непрерывными переменными и фиксированными доплатами последние учитываются отдельно, вне программы. Для этого рассматриваются все отпечатанные в ходе отсева таблицы решений транспортных задач. К сумме пропорциональных затрат, согласно каждому из этих решений, добавляется сумма фиксированных доплат по предприятиям, вошедшим в данных план. Тот план, при котором затраты, в общей сложности, окажутся минимальными, является решением.

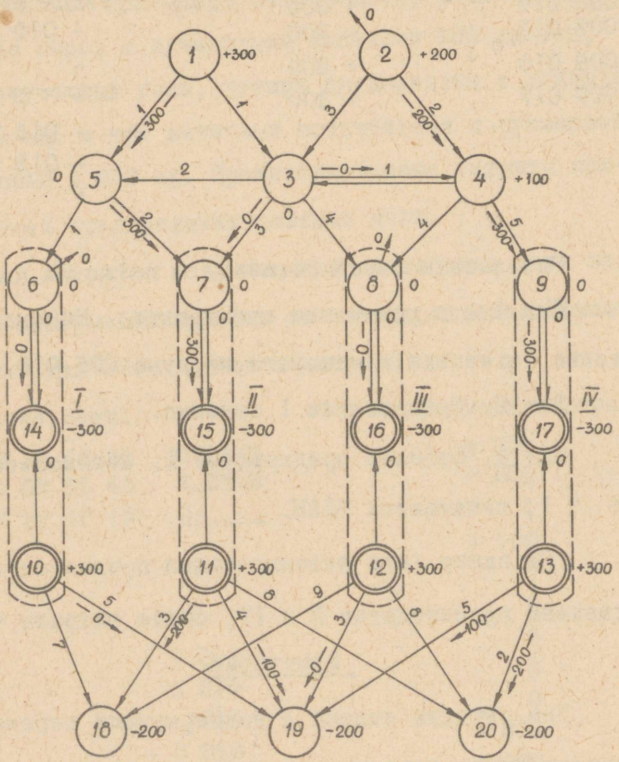


Рис. 18

5 Узлы и их номера

2 Дуги и затраты на них

I II III IV Участки сети, моделирующие предприятия

10 Узлы отсева

Дуги отсева

100 План: направления и объемы перевозок

Таблица 20

Отсев по загрузке. Пример

(сеть 19 узлов, 30 дуг; отсев по 4-м дугам)

ОТЛАДКА ОТСЕВА

ШАГ 1

I	J	X(I,J)	Q(I,J)	I	J	X(I,J)	Q(I,J)
6	14	100	300	7	15	200	300
8	16	100	300	9	17	200	300

Сумма затрат +4400000+04 Кол-во итер.: 19 Отсев 6000014

ШАГ 2

I	J	X(I,J)	Q(I,J)	I	J	X(I,J)	Q(I,J)
6	14			7	15	300	300
8	16	100	300	9	17	200	300

Сумма затрат +4400000+04 Кол-во итер: 18 Отсев 8000016

ШАГ 3

I	J	X(I,J)	Q(I,J)	I	J	X(I,J)	Q(I,J)
6	14			7	15	300	300
8	16			9	17	300	300

Сумма затрат +4699999+04 Кол-во итер.:18

Таблица 20 (продолжение)

ПЛАН

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
2				13	19	100	5
2	4	200	2	11	19	100	4
4	9	300	5	13	20	200	2
9	17	300		3	4		1
13	17			3	7		3

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
7	15	300		6	14		
5	7	300	2	8			
1	5	300	1	8	16		
11	18	200	3	10	19		5
6				12	19		3

SUMMA X(I,J)·C(I,J)=+4699999+04 ITER.ARV: 18

6. ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ С ФИКСИРОВАННЫМИ ДОПЛАТАМИ МЕТОДОМ ОТСЕВА ПО ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Данная программа - дополнение к программе транспортной задачи в сетевой постановке, представленной в § 4. Алгоритм предложен в работе /34/. Подробное описание метода дано выше в § 2.2.1.

Исходные данные подготавливаются в виде трех массивов. Первый и второй массивы составляются таким же образом, как в случае решения транспортной задачи. При составлении третьего массива имеется в виду, что в сети транспортной задачи первыми пронумерованы поставщики сырья, а затем предприятия. Третий массив следующий: число предприятий минус единица в восьмеричной системе, то есть $\hat{n}$ - 1 0000 0000, где $\hat{n}$ - число предприятий в восьмеричной системе, число поставщиков сырья; число, указывающее место во втором массиве, начиная с которого идут потребности предприятий в сырье; фиксированные доплаты. Максимальные размеры задачи:

сеть 750 узлов, 4040 дуг.

6.1. Структурная схема программы

Блоки структурной схемы (рис.19):

1)Команды 1250 - 1350.

Ввод исходных данных, перевод их в двоичную систе-

му и запись на магнитную ленту. Расчет необходимых в программе величин, решение транспортной задачи для случая, когда ни один завод не исключен.

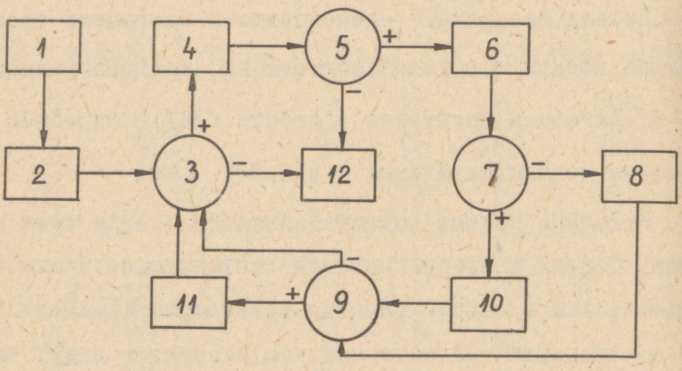


Рис.19

2)Команды 1351 - 1371.

Вызов с магнитной ленты массива ресурсов, мощностей (по выпуску продукции) и потребностей. Если какое-либо предприятие исключить невозможно, то соответствующей мощности присваивается знак "-". Если же завод исключен, то на магнитной ленте соответствующая мощность равна нулю. Вычисляется суммарный спрос конечных потребителей.

3)Команды 1372 - 1376.

Есть ли предприятия, которые не исключены и которых нельзя исключить?

4)Команды 1377 - 1403.

Преобразование в нуль продукции исключаемого предприятия.

5)Команды 1630 - 1640.

Соответствует ли мощность не отсеявшихся предприятий спросу потребителей?

6)Команды 1404 - 1433.

Преобразование в нуль потребности в сырье исключаемого предприятия. Продукция остальных предприятий переводится в положительные величины. Решение транспортной задачи и вычисление значения целевой функции, включая фиксированные доплаты.

7)Команды 1413 - 1414.

Можно ли данное предприятие исключить?

8)Команды 1437 - 1444.

Соответствующей мощности на магнитной ленте присваиваем знак минус.

9)Команда 1447.

Все ли предприятия приняты во внимание?

10)Команды 1435 - 1436; 1445 - 1446.

Сравнение значений целевых функций при поочередном исключении предприятий. Сохранение признака предприятия, исключение которого привело к уменьшению значения целевой функции в пределах данной итерации.

11)Команды 1450 - 1616.

На магнитной ленте на месте мощности и потребности предприятия, отсев которого приводит к уменьшению значения целевой функции, ставятся нули. Соответствующие фиксированные доплаты также приравнивают ну-

лю, на БПМ печатается номер исключаемого предприятия и значение целевой функции. Переход к следующей итерации.

12)Команды 1467 - 1052.

Решение транспортной задачи с минимально допустимым числом предприятий и печать плана перевозок.

Стоп.

6.2. Инструкция к программе

Программа вместе с константами размещается в ячейках 1250 - 1644; программа использует стандартные рабочие ячейки 40, 41 и нестандартные 20-27, 1500-1505 и 1507. Программа решения транспортной задачи находится в ячейках (100-1143). В качестве рабочей ленты для хранения информации о ресурсах, мощностях, потребностях и фиксированных доплатах программа использует магнитную ленту 01. На магнитной ленте, начиная со слова с номером 10000, записаны ресурсы, мощности предприятий и потребности, а со слова 13000 - фиксированные доплаты, соответствующие предприятиям.

Инструкция оператору:

1)Включить магнитную ленту 01.

2)Ввести стандартные программы

СП - 0015, начиная с ячейки 1144,
СП - 0016, " " 1160,
СП - 0021, " " 1201.

3)Ввести программу транспортной задачи и программу отсева.

4)Исходные данные для ввода.

5)Управление команде 1250.

Остановы

Номер ячейки, где произошел останов	Причина
0112	При вводе исходных данных контрольные суммы не совпадают.
0152	Пуск
0377	Повторить решение. Ошибка в исходных данных (имеется увел, номер которого больше n)
1053	Задача решена

На АЦПУ выдается решение исходной задачи и оптимальное решение задачи (печатается в виде таблицы).

На БПМ печатается номер предприятия, отсев которого дал минимальную целевую функцию, и соответствующее значение целевой функции.

```
0 I250  -3I 00 0I00 0I57
   I    -50 00 0000 6375
   2    -I5 00 0000 0020
   3    -30 00 I254 00I4
   4    -07 00 0000 0II4
   5    -5I 00 0000 0I30
   6    +07 00 00I4 0000
   7    -34 00 I26I I260

0 I260  -32 00 I263 I26I
   I    -07 00 0000 0I24
   2    -30 00 I25I 0000
   3    +2I 00 I605 0020
   4    +62 00 I253 0020
   5    +63 00 I253 0022
   6    +22 00 II02 0022
   7    -I0 00 6376 0040

0 I270  -3I 00 II44 00I7
   I    -I0 00 004I 002I
   2    -I0 00 6377 0040
   3    -3I 00 II44 00I7
   4    -I0 00 004I 0023
   5    +2I 00 002I 0023
   6    -30 00 I277 0024
   7    -I0 00 I523 I044

0 I300  +II 00 002I 0023
   I    +66 00 I253 0026
   2    -I0 00 005I 0003
   3    -I0 00 005I 0004
   4    -I0 03 2000 0040
   5    -3I 00 II44 00I7
   6    -I0 04 004I 2000
   7    -20 03 I3I0 II00

0 I3I0  -20 04 I304 II0I
   I    -I0 00 0026 000I
   2    -47 00 0I0I 0000
   3    -43 0I 0000 2000
   4    -30 00 I3I2 0000
   5    -30 00 I3I6 0040
   6    -47 00 0I0I 0000
   7    -44 0I 0000 0000

0 I320  -30 00 I3I6 0000
   I    +07 00 0040 0000
   2    -34 00 I3I2 I323
   3    -32 00 I324 I3I2
   4    -I0 00 0022 0003
   5    -I0 00 0000 0004
   6    -I0 03 6400 0040
   7    -3I 00 II44 00I7
```

```
0 I330  -I0 00 004I 0040
    I   -3I 00 I065 I07I
    2   -I0 04 0042 6400
    3   +I0 00 II0I 0004
    4   -20 03 I326 II00
    5   -I0 00 0020 000I
    6   -46 00 0I0I 3000
    7   -43 0I 0000 6400

0 I340  -30 00 I336 0000
    I   +65 00 I253 002I
    2   -30 00 I343 0025
    3   +II 00 002I 0025
    4   -30 00 I622 0027
    5   -3I 00 I560 I604
    6   -3I 00 I537 I557
    7   -3I 00 0I75 I052

0 I350  -30 00 I35I 0000
    I   -I0 00 6375 I500
    2   -I0 00 0777 I503
    3   +75 00 0022 0025
    4   -30 00 I355 00I2
    5   -I0 00 I500 00II
    6   -I0 00 0000 I50I
    7   -I0 00 0026 000I

0 I360  -47 00 0I0I 0000
    I   -45 0I 0000 2000
    2   -30 00 I360 0000
    3   -30 00 I364 0040
    4   -47 00 0I0I 0000
    5   -44 0I 0000 0000
    6   -30 00 I364 0000
    7   +07 00 0040 0000

0 I370  -34 00 I360 I37I
    I   -32 00 I372 I360
    2   -I0 I2 2000 I504
    3   -34 00 I374 I375
    4   -32 00 I377 I375
    5   -20 I2 I372 II00
    6   -30 00 I467 0000
    7   +7I 00 III0 00I2

0 I400  +62 00 I254 00I6
    I   -I0 I6 0000 2000
    2   +II 00 0024 00I6
    3   -30 00 I632 00I4
    4   -I0 I4 0000 2000
    5   -3I 00 I537 I557
    6   -20 I2 I407 II00
    7   -3I 00 I560 I604
```

```
0 I4I0  -3I 00 0I75 07I2
   I    -I0 00 005I 000I
   2    -I0 00 0000 I507
   3    +7I 0I III0 3400
   4    -34 00 I4I5 I437
   5    +7I 0I II06 3400
   6    -34 00 I4I7 I433
   7    +7I 0I III2 3400

0 I420  +66 00 I255 0003
   I    +7I 23 III3 0040
   2    +66 00 I26I 0040
   3    -3I 00 I065 I07I
   4    -I0 00 0042 0044
   5    +7I 00 II06 000I
   6    +66 00 I253 0004
   7    -I0 04 2000 0040

0 I430  -3I 00 I065 I07I
   I    +35 00 0042 0044
   2    +I6 00 I507 I507
   3    -20 0I I4I3 II0I
   4    +I4 00 I505 I507
   5    +25 00 I507 I503
   6    -32 00 I445 I447
   7    -II 00 I504 I504

0 I440  -47 I6 0I0I 0000
   I    -43 00 000I I504
   2    -30 00 I440 0000
   3    +20 00 II02 I500
   4    -30 00 I447 0000
   5    -I0 00 I507 I503
   6    -I0 00 00I6 00I5
   7    -20 II I357 0000

0 I450  -47 I5 0I0I 0000
   I    -43 00 000I 0000
   2    -30 00 I450 0000
   3    +II 00 0024 00I5
   4    -30 00 I455 00I4
   5    -47 I4 0I0I 0000
   6    -43 00 000I 0000
   7    -30 00 I455 0000

0 I460  +2I 00 002I 00I5
   I    -30 00 I462 00I4
   2    -47 I4 0I0I 3000
   3    -43 00 000I 0000
   4    -30 00 I462 0000
   5    +20 00 II02 I500
   6    -30 00 I606 0000
   7    -I0 00 0026 000I
```

```
0 I470  -47 00 0I0I 0000
     I  -45 0I 0000 2000
     2  -30 00 I470 0000
     3  -30 00 I474 0040
     4  -47 00 0I0I 0000
     5  -44 0I 0000 0000
     6  -30 00 I474 0000
     7  -30 00 I5I0 0000

0 I500  +00 00 0000 0000
     I  +00 00 0000 0000
     2  +00 00 0000 0000
     3  +00 00 0000 0000
     4  +00 00 0000 0000
     5  +00 00 0000 0000
     6  -56 73 5673 5673
     7  +00 00 0000 0000

0 I5I0  +07 00 0040 0000
     I  -34 00 I470 I5I2
     2  -32 00 I5I3 I470
     3  +II 00 0024 00I5
     4  -30 00 I5I5 00I4
     5  -I0 I4 0000 2000
     6  -I0 I5 0000 2000
     7  -3I 00 I537 I557

0 I520  -I0 00 I522 07I2
     I  -30 00 I6I7 0000
     2  -I0 00 0000 0072
     3  -3I 00 I524 I535
     4  -I0 00 I505 0040
     5  -3I 00 I20I 00I7
     6  -62 00 0047 004I
     7  -62 00 7063 I536

0 I530  +I5 00 0057 I505
     I  -30 00 I532 0040
     2  -3I 00 I20I 00I7
     3  -62 00 0064 004I
     4  -I0 00 0060 0040
     5  +00 00 0000 0000
     6  +25 I7 I7I7 I7I7
     7  +75 00 0022 0027

0 I540  -30 00 I54I 000I
     I  -I2 0I 2000 2000
     2  -20 0I I54I II03
     3  -I0 00 005I 0003
     4  -30 00 I545 0004
     5  -I0 00 II0I 0052
     6  -I0 03 2000 0000
     7  -32 00 I550 I552
```

0	I550	+65 00 0I36 0052	0	I600	-34 00 I60I I602
	I	-30 04 I554 3400		I	+I4 02 6400 I505
	2	-I4 04 I266 2000		2	+I0 00 II00 0002
	3	-II 04 0052 3400		3	-20 0I I577 II00
	4	+I0 00 II0I 0052		4	+00 00 0000 0000
	5	-20 03 I556 II00		5	+00 00 0000 6400
	6	-20 04 I546 II0I		6	-60 00 2400 I506
	7	+00 00 0000 0000		7	II 00 00I5 II0I
0	I560	-I0 00 0020 000I	0	I6I0	-30 00 I6II 0040
	I	-47 00 0I0I 3000		I	-3I 00 II60 00I7
	2	-45 0I 0000 6400		2	-60 00 2400 004I
	3	-30 00 I56I 0000		3	-I0 00 I503 0040
	4	-30 00 I565 0040		4	-3I 00 I20I 00I7
	5	-47 00 0I0I 3000		5	-60 00 0400 004I
	6	-44 0I 0000 0000		6	-30 00 I352 0000
	7	-30 00 I565 0000		7	-3I 00 I560 I604
0	I570	+07 00 0040 0000	0	I620	-II 00 0000 I052
	I	-34 00 I56I I572		I	-30 00 0I75 0000
	2	-32 00 I573 I56I		2	+65 00 I253 0025
	3	-I0 00 0000 I505		3	+22 00 II02 000I
	4	+75 00 0022 0025		4	-I0 00 0000 0030
	5	-30 00 I576 000I		5	-I0 0I 2000 0040
	6	-I0 00 0000 0002		6	-3I 00 I065 I07I
	7	-I0 0I 2000 0000		7	+I4 00 0042 0030

```
0 I630  -20 0I I625 II00
     I  -30 00 I345 0000
     2  +75 00 0022 0025
     3  -30 00 I634 000I
     4  -I0 00 0000 0047
     5  -I0 0I 2000 0040
     6  -3I 00 I065 I07I
     7  +I4 00 0042 0047

0 I640  -20 0I I635 II00
     I  +25 00 0030 0047
     2  -34 00 I643 I644
     3  -32 00 I644 I467
     4  -30 00 I404 0000
```

Контрольная сумма программы:

+4I 24 407I 6722

6.4. Пример

В качестве примера решена задача из § 5 (рис.18). Первый и второй массивы начальных данных подготовлены так же, как в § 5. Третий массив следующий (на основе второго массива):

3 0000 0000 - число предприятий минус единица в восьмеричной системе.

9 - число поставщиков сырья, т.е. место, начиная с которого идут мощности предприятий,

I3 - место, с которого идут потребности заводов в сырье,

I00
I00 фиксированные доплаты.
I00
I00

Обозначения в решении задачи, выводимом на АЦПУ, такие же, как в программе решения сетевой транспортной задачи (см. § 4). Однако целевая функция, печатаемая в последней строке, включает сумму фиксированных доплат. В виде итога дается общее значение целевой функции - сумма пропорциональных расходов и фиксированных доплат. На узкую печать выводятся номера отсеянных предприятий (в порядке последовательности итераций) и соответствующие значения целевой функции. В табл.2I приведено решение примера. I - исходный план. В него входят все рассматриваемые предприятия. II - оптимальный план; в ходе решения отсеяны первое и третье пред-

приятия. Нулевые значения не печатаются. Таблицы читаются так (вторая строка в решении I): из узла 2 в узел 4 перевозится 200 единиц, удельные транспортные затраты 2. Результаты решения примера по обеим программам отсева (табл.20 и 21) совпадают.

Таблица 21

Отсев по целевой функции (пример)

I PRIMER

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
2				13	20	200	2
2	4	200	2	4	8	100	4
4	9	200	5	8	16	100	
9	17	200		12	16	200	
13	17	100		12	19	100	3

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
10	19	100	5	5	7	200	2
10	14	200		7	15	200	
6	14	100		11	15	100	
5	6	100	1	11	18	200	3
1	5	300	1	3	8		4

SUMMA X(I,J)*C(I,J) =+4400000+04+4000000+03+4800000+04

ITER.ARV: 19

II

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
2				13	19	100	5
2	4	200	2	11	19	100	4
4	9	300	5	13	20	200	2
9	17	300		3	4		1
13	17			3	7		3

Таблица 21 (продолжение)

I	J	X(I,J)	C(I,J)	I	J	X(I,J)	C(I,J)
7	15	300			8		
5	7	300		2	10	19	5
1	5	300		1	12	19	3
11	18	200		3	14		
6					16		

SUMMA X(I,J)·C(I,J)=/+4699999+04/+/2000000+03/=
=+4900000+04 ITER.ARV:157

+000000010
+4699999+04

+000000012
+4900000+04

7. ПРОГРАММА ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

7.1. Назначение программы

Программа предназначена для решения на ЭВМ "Минск-2 (22)" задач линейного программирования:

максимизировать $\sum_{j=1}^{n} a_{oj} x_j + a_{oo}$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_{io}, \quad (i = 1,2,\ldots,m), \qquad (1)$$

или $x_j \geq 0$

минимизировать $\sum_{i=1}^{m} a_{io} y_i + a_{oo}$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq a_{oj}, \quad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$
$$y_i \geq 0.$$

Максимальная допустимая размерность задач определяется неравенством

$$(m+3)\cdot(n+3) \leq 3600.$$

По программе возможно решать также задачи смешанного типа. Для этого следует их представить в виде одной из двух приведенных задач, умножив необходимое число неравенств на - 1. Группа из k равенств в ограничениях может быть заменена $k+1$-м неравенством. Например, ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, x_j = a_s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j = a_t,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{uj}\, x_j = a_u$$

заменяются ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, x_j \le a_s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j \le a_t,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{uj}\, x_j \le a_u,$$

$$-\sum_{j=1}^{n} (a_{sj} + a_{tj} + a_{uj})\, x_j \le -(a_s + a_t + a_u).$$

Отметим, что в программе не ставится никаких ограничений на значения a_{io} и a_{oj}, чем объясняется и допустимость приведения задачи к требуемому виду с помощью указанных операций.

7.2. Описание метода решения /6/

Независимо от того, решается задача (1) или (2), исходные данные оформляются в виде матрицы

0	0	1	2	...	n	ε	
0	a_{00}	$-a_{01}$	$-a_{02}$	...	$-a_{0n}$	0	
$n+1$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	0	(3)
$n+2$	a_{20}	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	
...	...	...	...	...	...	...	
$n+m$	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	

Обе задачи интерпретируются как задача максимизации при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{oj} x_j + a_{oo} \qquad (4)$$

$$x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{io} .$$

Исходный план $x_j \equiv 0$, $x_{n+i} = a_{io}$ следует непосредственно из этой интерпретации.

Если среди a_{io} имеются отрицательные, исходный план недопустим. Для получения допустимого плана следует перейти к новому плану, выбирая в качестве направляющего элемента для симплексного преобразования элемент из строки k, содержащей $a_{ko} = \min a_{io} < 0$. и из столбца l, который определяется равенством

$$\left| \frac{a_{ol}}{a_{kl}} \right| = \min_{a_{kj}<0} \left| \frac{a_{oj}}{a_{kj}} \right| , \quad (j = 1,2,\ldots, n).$$

Если все a_{io} оказываются неотрицательными и среди a_{oj} имеются положительные, то существует допустимое, но еще не оптимальное решение. Переход к новому плану осуществляется симплексным преобразованием с направляющим элементом a_{kl}, выбранным из условия:

$$a_{ol} = \max_j a_{oj} > 0 \qquad \text{и}$$

$$\frac{a_{ko}}{a_{kl}} = \min_{a_{il}>0} \frac{a_{io}}{a_{il}} , \qquad (i = 1,2,\ldots, m).$$

Симплексное преобразование включает замену базисной переменной, соответствующей k-й строке на небазис-

ную, соответствующую l -й строке, и пересчет симплексной таблицы. Коэффициент таблицы a_{ij}, ($i = 0,1,\ldots, m$, $j = 0,1,\ldots, n$) заменяется на a'_{ij} по формулам:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - a_{kj}\dfrac{a_{il}}{a_{kl}}, & \text{если } i \neq k,\ j \neq l; \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{kl}}, & \text{если } i \neq k,\ j \neq l; \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{kl}}, & \text{если } i \neq k,\ j = l; \\ \dfrac{1}{a_{kl}}, & \text{если } i \neq k,\ j = l. \end{cases}$$

В результате многократного применения симплексного преобразования (с выбором направляющего элемента сперва по a_{io} , а потом по a_{oj}) достигается оптимальное решение (все a_{io} неотрицательные, а все a_{oj} неположительные) или окажется невозможным выбрать направляющий элемент (среди a_{kj} нет отрицательных или среди a_{il} нет положительных). Из последнего следует, что задача не имеет решения.

Проверка точности вычислений проводится по относительной погрешности. Для этого вместо нулей в последнем столбце матрицы вычисляются суммы строк

$$s_i = 1 + \sum_{j=0}^{n} a_{ij} .$$

Одновременно с каждым симплексным преобразованием пересчитываются и суммы

$$s_l = s_i - s_k \frac{a_{il}}{a_{kl}}$$

После преобразования проверяется, выполнено ли условие

$$\left| \frac{(1+\sum_{i=0}^{n} a_{ij}) - s_i}{s_i} \right| < \eta , \qquad (5)$$

где η - заданный предел относительной ошибки.

Чтобы воспрепятствовать чрезмерному росту и накоплению ошибок округления в ходе решения задачи, введена константа абсолютной ошибки ε. При решении, на всех его этапах, число, которое по абсолютной величине меньше ε, считается равным нулю (следовательно, не может быть использован при выборе направляющей строки или столбца, а также быть направляющим элементом симплексного преобразования).

7.3. Исходные данные

В программе предусмотрены две методики для подготовки и ввода исходных данных.

По первой методике (ввод с использованием СП-0102) подготавливаются два массива информации на ПЛ. В первом массиве перфорируется матрица (3) в сокращенной записи как это описано ниже. Второй массив содержит лишь два восьмеричных числа: m и n.

По второй методике перфорируется в одном массиве (по строкам) матрица (3). Вместо первых двух нулей в первой строке матрицы перфорируются восьмеричные чис-

на m и n , остальные числа матрицы перфорируются в виде десятичных чисел "с запятой". Пуск программы в этом случае - с ячейки 0102.

Первую методику ввода исходных данных целесообразно применять, когда в большинстве элементы матрицы a_{ij} нулевые (см.§ 4.5 - программу расстановки элементов матрицы). Для сокращенной записи матрицы ее столбцы нумеруются от нуля до $n+2$. Перфорируют только ненулевые элементы и элементы нулевого столбца матрицы. При этом к каждому элементу матрицы, которые перфорируются в виде десятичных чисел "с запятой" и должны занимать не более семи десятичных разрядов каждый (запятую считают как один разряд), приписывается справа номер столбца, в котором его следует разместить. Номер столбца 00 является признаком перехода к новой строке.

В конце записи матрицы перфорируются +0 и, с передачей в ячейку 0050, восьмеричное число

$$+\,m+1 \qquad 0000 \qquad n+3.$$

Программа допускает без изменений ввод по первой методике матрицы размерностью

$$(m+2)\cdot(n+3) \leq 2900$$

при условии, что сокращенная запись матрицы включает до 750 чисел. При более длинной записи матрицы или

если $(m+2)\cdot(n+3) > 2900$, необходимо перераспределение МОЗУ. Для этого в ячейку 0101 во второй адрес следует записать вместо числа 6400 число

$$7777 - A,$$

где A - длина записи матрицы в восьмеричной системе счисления.

Первый адрес остается без изменений.

Второй адрес в ячейке 0101 указывает, с какой ячейки ввести сокращенную запись матрицы. При составлении матрицы по сокращенной записи массив исходных данных может быть частично перекрыт составляемой матрицей, надо лишь следить, чтобы ни на одном этапе не перекрывалась информация о еще не введенных строках.

7.4. Структурная схема программы

Программа длиной в 373 ячейки (364 команды и 7 констант) написана в действительных адресах, начиная с ячейки 0100. Используются индексные ячейки 0001-0005, возвратная ячейка 0017, рабочие ячейки 0040-0045 и 0060-0073. В программе содержатся обращения к стандартным программам

СП-0021 - перевод чисел с плавающей запятой из двоичной в десятичную систему счисления,

СП-0060 - перевод десятичных чисел "с запятой" в двоичную систему,

СП-0102 - программа расстановки элементов матрицы.

Программа двойственного симплекс-метода построена по следующей блок-схеме:

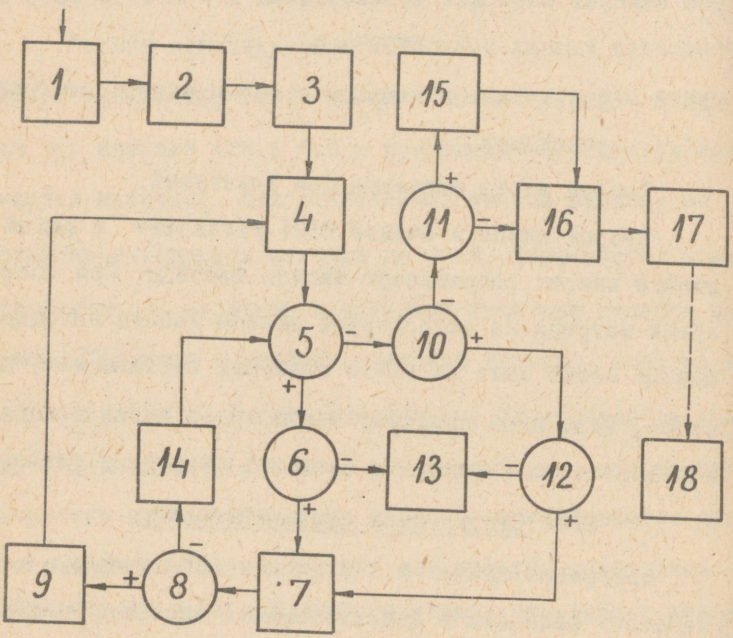


Рис. 20

Блок	Начальный адрес	Содержание
1	0100	Ввод исходных данных
1	0102	
2	0114	Вычисление констант, зависящих от параметров задачи

3	0152	Перевод исходных данных в двоичную систему
4	0161	Вычисление строчных сумм
5	0175	Существует ли k такое, чтобы $a_{k0} = \min\limits_{i} a_{i0} < 0$?
6	0207	Существует ли l такое, чтобы $\left\lvert \frac{a_{0l}}{a_{kl}} \right\rvert = \min\limits_{a_{kj}<0} \left\lvert \frac{a_{0j}}{a_{kj}} \right\rvert$?
7	0232	Симплексное преобразование с направляющим элементом a_{kl}
8	0320	Выполнено ли условие (5)?
9	0346	Счет количества симплексных преобразований
10	0350	Существует ли l такое, чтобы $a_{0l} = \max\limits_{j} a_{0j} > 0$
11	0364	Включен ли ключь № I
12	0413	Существует ли такое, чтобы $\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min\limits_{a_{il}>0} \frac{a_{i0}}{a_{il}}$?
13	0445	Останов. Задача не имеет решения
14	0343	Останов. Относительная ошибка выше допустимой
15	0450	Вывод на печать решения задачи (2)
16	0365	Вывод на печать решения задачи (1)
17	0377	Останов. Задача решена
18	0400	Вывод на печать симплексной таблицы
		Останов в ячейке 0412

7.5. Вывод результатов

Решение задачи при включенном ключе № I выводится на печать в виде:

+ xxx xxxx +xx	Значение целевой функции	
	Пропуск строки	
+ xxx xxxx +xx	Номер неизвестного (i)	
+ xxx xxxx +xx	Значение " y_{n+i}	решение двойственной задачи (2)
	Пропуск строки	
+ xxx xxxx +xx	Номер неизвестного (i)	
+ xxx xxxx +xx	Значение " y_{n+i}	
. . .	.....	
+ xxxxxxxx +xx	Номер неизвестного (i)	
+ xxxxxxx +xx	Значение неизвестного y_{n+i}	
+ xxxxxxx +xx	ε	

⟶

+ xxxxxxx +xx	Количество проведенных симплексных шагов	решение задачи (I)
+ xxxxxxx +xx	Значение целевой функции	
	Пропуск строки	
+ xxxxxxx +xx	Номер неизвестного (j)	
+ xxxxxxx +xx	Значение неизвестного (x_j)	
. . .	.....	
+ xxxxxxx + xx	Номер неизвестного (j)	
+ xxxxxxx + xx	Значение неизвестного (x_j)	

Если ключ № I выключен, печать решения начинается с места, отмеченного стрелкой.

Симплексная таблица печатается по столбцам, начиная с третьего столбца матрицы (3). Элементы первых

двух столбцов (номера неизвестных в плане и их значения) содержатся в решении задачи.

При решении задачи (I) сначала печатается решение двойственной задачи, а затем прямой (начиная с места, отмеченного стрелкой).

В случае задачи (2) на первом месте находится прямое решение, за которым следует двойственное решение.

Если в решении отсутствует какое-либо неизвестное, то значение этого неизвестного в оптимальном решении равняется нулю.

Если в решении отпечатан номер какого-нибудь ограничения, то число под этим номером равняется остатку соответствующего ресурса. Если в решении нет номера ограничения, соответствующего какому-нибудь ресурсу, то это значит, что лимит соответствующего ресурса израсходован полностью.

Возможен случай, когда поставленная задача противоречива, т.е. лимиты одного или нескольких ресурсов являются недостаточными для удовлетворения потребностей. В таком случае значения некоторых остатков в отпечатанном решении являются отрицательными. Для устранения противоречивости есть два выхода: увеличить лимиты тех ресурсов, которых не хватает (т.е.остатки которых отрицательны), или уменьшить производство в тех отраслях, которые используют эти ресурсы.

7.6. Инструкция оператору

1) Ввести стандартные программы:

СП-0021, начиная с ячейки 0474,
СП-0060, " " 0548,
СП-0102, " " 0570.

2) Ввести программу.

3) Если требуется вывод решения задачи (2), включить ключ № 1.

4) Включить печать и ввод исходных данных.

5) Управление 0100 (если исходные данные в одном массиве, т.е. СП-0102 не используется, то управление 0102). "Пуск". Останов 0377.

6) Если требуется вывод симплексной таблицы, то управление 0400. "Пуск". Останов 0412.

Возможные остановы

№ команды	Причина	Действие оператора
0111	Ошибка при вводе второго массива	"Пуск" для повторного ввода
0343	Ошибка в вычислениях превышает допустимую	Новое значение для η засылается с пульта в ячейку 0470. Управление 0175. "Пуск"
0377	Решение отпечатано	
0412	Симплексная таблица отпечатана	
0445	Задача не имеет решения	Новое значение ε набрать на пульте. "Пуск"

Примечания:

1. Останов 0445 может быть обусловлен выбором слишком большого значения константы ε. Поэтому следует попытаться решить задачу с меньшим значением ε. Некоторые возможные его значения:

Десятичное	Восьмеричное (набирается на ПУ)	Примечание
0,05	6314 6314 6304	
0,005	5075 3412 1707	
0,0005	4061 1156 4712	Применялось при отладке программы
0,00005	6433 3427 2716	

2. В программе предусмотрено решение задачи с относительной погрешностью меньше 0,01% (η = 0,0001). Соответствующая константа хранится в ячейке 0470. При желании можно решать задачу и с отличным от этого значением η (например, если имеет место останов 0343 и от решения требуется меньшая точность). Некоторые значения для η :

Предельная точность в %%	Значения константы	
	Десятичное	Восьмеричное (представление в ячейке 0470)
0,01	0,0001	6433 3427 2715
0,1	0,001	4061 1156 4711
1	0,01	5075 3412 1706
10	0,1	6314 6314 6303

3. Для печати на БПМ симплексной таблицы после останова в ячейке 0377 нажать "Пуск". Для печати симплексной таблицы неоконченного решения (после любого останова) - передать управление команде 0450 "Пуск" и после останова в ячейке 0377 - снова "Пуск". Конечный останов на команде 0412.

7.7. Программа

```
0100    -31 00 0570 0017
   1          0700 6500
   2    -50 00 0000 0700
   3    -30 00 0104 0040
   4    -07 00 0000 0014
   5    -51 00 0000 0700
   6     07 00 0040 0030
   7    -34 00 0111 0110

0110    -32 00 0114 0111
   1    -00 00 0001 0001
   2    -07 00 0001 0000
   3    -30 00 0102 0000
   4    -10 00 0701 0002
   5     12 00 0467 0062
   6     12 00 0467 0063
   7     12 00 0467 0072

0120     60 00 0106 0062
   1     60 00 0106 0063
   2    -10 00 0700 0066
   3     13 00 0467 0015
   4     12 00 0467 0073
   5    -70 00 0072 0073
   6    -30 00 0127 0073
   7     13 00 0377 0114
```

```
0130   62 00 0106 0071
  1    74 00 0073 0063
  2    66 00 0104 0073
  3    21 00 0467 0700
  4    62 00 0106 0064
  5    76 00 0072 0065
  6    61 00 0123 0072
  7    76 00 0064 0064

0140   61 00 0106 0700
  1   -30 00 0142 0066
  2    76 00 0072 0067
  3    12 00 0072 0070
  4   -10 00 0701 0061
  5    23 00 0467 0000
  6    62 00 0106 0060
  7    60 00 0104 0072

0150   76 00 0060 0060
  1    60 00 0106 0061
  2   -10 00 0071 0004
  3   -10 00 0000 0003
  4   -10 04 0702 0040
  5   -31 00 0543 0017
  6   -10 03 0041 0702
  7    10 00 0467 0003
```

```
0160    -20 04 0154 0112
   1     11 00 0072 0066
   2    -30 00 0163 0001
   3     11 00 0067 0002
   4    -30 00 0165 0003
   5     71 00 0471 0001
   6     76 00 0061 0004
   7    -10 00 0466 0040

0170     14 04 0701 0040
   1    -20 04 0170 0112
   2    -10 03 0040 0702
   3    -20 03 0174 0065
   4    -20 01 0165 0072
   5    -10 00 0465 0040
   6    -10 00 0064 0001
   7     25 01 0701 0040

0200    -32 00 0201 0203
   1    -10 00 0001 0041
   2    -10 01 0701 0040
   3    -20 01 0177 0072
   4     15 02 0040 0702
   5    -32 00 0350 0207
   6    -                0
   7     70 00 0471 0041
```

```
02I0    76 00 006I 000I
  I    -I0 00 0060 0003
  2    -I0 00 0I3I 0040
  3    -I0 00 0467 0004
  4    -I0 0I 0702 0043
  5     I5 02 0043 0702
  6    -32 00 0225 02I7
  7    -I2 03 0702 0044

0220    44 00 0043 0044
  I     I7 00 0040 0000
  2    -32 00 0223 0225
  3    -I2 00 0044 0040
  4    -I0 00 0004 0042
  5    -20 0I 0226 0II2
  6     I0 00 0467 0004
  7    -20 03 02I4 0II2

0230    25 00 0040 0I3I
  I    -34 00 0232 0445
  2    -I0 00 004I 000I
  3     62 00 0I27 0043
  4     6I 00 0I04 0042
  5    -30 00 0236 0044
  6     76 00 0043 0003
  7    -I0 00 0042 0004
```

```
0240    -I0 0I 0700 0040
   I    -I0 03 070I 0700
   2    -I0 04 0040 070I
   3     75 00 004I 0063
   4    -30 00 0245 000I
   5    -I0 0I 0700 0700
   6    -20 0I 0245 0III
   7     II 00 0042 0043

0250    -30 00 025I 0045
   I     II 00 0042 0067
   2    -30 00 0253 000I
   3     77 00 0073 0000
   4     I2 00 0044 0003
   5     7I 00 0472 000I
   6     07 00 0045 0000
   7    -34 00 026I 0260

0260    -I0 0I 0464 070I
   I     35 0I 0464 070I
   2     46 03 070I 070I
   3    -20 0I 0264 0065
   4    -20 03 0255 0065
   5    -I0 00 0067 000I
   6     7I 00 0472 000I
   7     76 00 0062 0004
```

```
0270    II 00 0044 0073
   I    76 00 0004 0003
   2    75 00 0004 0073
   3    I2 00 0042 0005
   4    7I 00 0472 000I
   5    07 00 0043 0000
   6   -34 00 0277 0304
   7   -I0 00 0000 0040

0300    05 00 0042 0040
   I   -34 00 0302 03I4
   2    35 05 070I 070I
   3   -30 00 03I3 0045
   4   -I0 00 0000 0040
   5    05 00 0042 0040
   6   -34 00 0307 03I0
   7    44 03 070I 070I

03I0    I0 00 0467 0040
   I   -20 03 0305 0467
   2   -30 00 03I7 0000
   3    I4 04 0045 070I
   4    I0 00 0467 0040
   5   -20 04 03I6 0467
   6   -20 05 0300 0II2
   7   -20 0I 0266 0067
```

```
0320    -I0 00 0070 0004
   I     75 00 0066 0072
   2    -30 00 0323 000I
   3     7I 00 047I 000I
   4     76 00 006I 0003
   5    -I0 00 0466 0040
   6     I4 03 070I 0040
   7    -20 03 0326 0II2

0330     55 04 0040 0677
   I    -30 00 0332 0040
   2     55 02 0040 0702
   3    -32 00 0344 0334
   4     I5 04 0465 0677
   5    -30 00 0336 004I
   6     55 02 004I 0702
   7    -32 00 0343 0340

0340     45 00 004I 0040
   I     57 00 0470 0000
   2    -32 00 0343 0344
   3    -00 00 0040 004I
   4    -20 0I 0345 0072
   5    -20 04 0323 0065
   6     I4 02 0466 0703
   7    -30 00 0I75 0000
```

```
0350    -I0 00 0060 000I
   I    -I0 00 0465 0040
   2    -I0 00 0467 0045
   3     25 0I 0702 0040
   4    -32 00 0355 0357
   5    -I0 00 0045 0042
   6    -I0 0I 0702 0040
   7     I0 00 0467 0045

0360    -20 0I 0353 0II2
   I     I5 00 0465 0040
   2    -34 00 0363 0364
   3    -32 00 0364 04I3
   4    -35 00 000I 0450
   5     75 00 0066 0072
   6    -30 00 0367 000I
   7    -I0 0I 0700 0040

0370    -3I 00 0474 00I7
   I    -60 00 0400 004I
   2    -I0 0I 070I 0040
   3    -3I 00 0474 00I7
   4    -60 00 0400 004I
   5    -60 00 3400 0000
   6    -20 0I 0367 0072
   7    -20 00 0000 0003
```

```
0400    -I0 00 006I 0003
  I      7I 00 047I 0003
  2      77 00 0066 0000
  3      22 00 04I2 0004
  4     -I0 04 0702 0040
  5     -3I 00 0474 00I7
  6     -60 00 0400 004I
  7     -20 04 0404 0072

04I0    -60 00 3400 0000
  I     -20 03 040I 0II2
  2     -00 0I 0000 0000
  3      I5 02 0040 0702
  4     -32 00 0364 04I5
  5     -I0 00 0I3I 0040
  6      6I 00 0I04 0042
  7      I2 00 0064 000I

0420    -I0 00 0070 0003
  I      I5 0I 070I 0465
  2     -34 00 0423 0436
  3     -32 00 0424 0436
  4     -30 00 0425 0044
  5      25 02 0044 0702
  6     -32 00 0436 0427
  7      45 03 0044 070I
```

```
0430    -32 00 043I 0436
   I    -30 00 0432 0044
   2     25 00 0044 0040
   3    -32 00 0434 0436
   4    -I0 00 0044 0040
   5    -I0 00 000I 004I
   6    -20 03 0437 0065
   7    -20 0I 042I 0072

0440     6I 00 0I04 0042
   I    -30 00 0442 0045
   2     7I 00 047I 004I
   3     22 00 0045 004I
   4    -30 00 0230 0000
   5    -00 00 0042 004I
   6    -I3 02 0000 0702
   7    -30 00 0I75 0000
0450    -I0 00 006I 0004
   I     I2 00 0072 0003
   2    -I0 03 070I 0040
   3    -3I 00 0474 00I7
   4    -60 00 0400 004I
   5    -60 00 3400 0000
   6    -I0 04 0702 0040
   7    -3I 00 0474 00I7
```

```
0460    -60 00 0400 004I
   I    -20 04 0462 0II2
   2    -20 03 0452 0II2
   3    -30 00 0365 0000
   4    -40 00 0000 000I
   5                I77
   6     40 00 0000 000I
   7                  I

0470     63 47 0072 57I6
   I           7777 0000
   2                7777

         E
```

Контрольная сумма программы:

-44 I7 6544 266I

8. ПРОГРАММЫ РАССТАНОВКИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ СП – 0102 и СП – 0103

Программа предназначена для уменьшения объема необходимых подготовительных работ при решении на ЭВМ матричных задач в случаях, когда исходная матрица с m строками, n столбцами содержит большое количество нулевых (одинаковых) элементов.

В таблице информации (ТИ), состоящей из чисел вида

$$\pm x \cdot j ,$$

программа составляет матрицу, имеющую на пересечении в рассматриваемой строки и столбца с номером j, ($j = 0,1,\ldots, n-1$) элемент x , а в строках, неописанных в ТИ – нули. (Составление матрицы производится по строкам, признаком новой строки является $j = 0$). Одновременно с составлением матрицы, x переводится в двоичную систему.

Для x отведены знаковый и 7 десятичных разрядов, для номера столбца – два десятичных разряда. Элементы составляемой матрицы должны быть в пределах

$$0{,}000001 \leqslant |x| \leqslant 9999999$$

и записаны в ТИ в виде "чисел с запятой" (СП-0060 БСП "Минск-2")/48/. В конце ТИ записывается число ± 0.

Пример:

ТИ для матрицы

+ 1,372048	0	+0,0003	0	0
0	-1,127	0	0	-1,123569
- 12,02	0	0	+3,17	0

имеет вид

+ 1,3720500	начало строки,	число в столбец № 0
+ 0,000302		число в столбец № 2
+ 00	начало строки	
- 1,12701		число в столбец № 1
- 1,1235704		число в столбец № 4
- 12,0200	начало строки,	число в столбец № 0
+ 3,1703		число в столбец № 3
0	конец ТИ.	

8.1. Инструкции к программе

Размерность вводимой программы ограничивается незанятым объемом МОЗУ и требованием $n \leq 100$. Допускается такое распределение памяти ЭВМ, чтобы конец составляемой матрицы перекрывал начало ТИ (при этом ни одна из строк матрицы не должна накрывать информацию о ней в ТИ).

Программа составлена и используется как стандартная.

Информация о размерах составляемой матрицы задается восьмеричным числом.

$$+ \; m \quad 0000 \quad n$$

в ячейке 0050 (это число может быть отперфорировано с засылкой по адресу в конце ТИ после числа $\pm$ 0). Ввод ТИ включен в программу.

Обращение к программе происходит по командам

к	- 31 00 $a_н$	0017
к + 1	+ 00 00 В	С,

где $a_н$ - начальный адрес программы (7000),

B - начальный адрес составляемой матрицы

C - начальный адрес ТИ.

После составления матрицы управление передается команде к +2.

Длина программы 101 команда, переадресации подлежат 70 команд.

Программа использует стандартные рабочие ячейки 0040 - 0045 и индексные ячейки 0001 - 0003.

8.2. Структурная схема программы

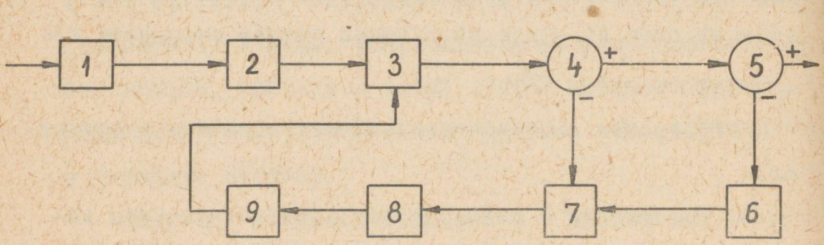


Рис. 21

Блок	Начальный адрес	Содержание
1	7000	Ввод ТИ
2	7012	Образование параметров
3	7022	Выделение номера строки
4	7024	$j = 0$?
5	7025	Образованы ли все столбцы матрицы ($i > m$)?

6	7027	Переход к новому столбцу и засылка нулей во все ячейки этого столбца
7	7033	Определение адреса записи очередного числа в составляемую матрицу
8	7042	Выделение, перевод в двойчную систему и запись по адресу очередного элемента матрицы
9	7046	Переход к следующей строке ТИ

Примечание: Для засылки одного и того же числа (например М при составлении матрицы транспортной задачи) во все неописанные в ТИ ячейки матрицы нужно поместить это число в двоичном виде в ячейку 0051 и заменить команду 7031 на - 10 03 0051 0000.

8.3. Программа СП-0102

```
7000    7I I7 0000 7076
   I    -30 00 7003 0002
   2    -07 00 0000 00I7
   3    -50 02 0000 0000
   4    -30 00 7005 0040
   5    -07 00 0000 0000
   6    -5I 02 0000 0000
   7    07 00 0040 0II0

70I0    -34 00 7002 70II
   I    -32 00 70I2 7002
   2    7I 00 0050 7076
   3    -30 00 70I4 0046
   4    06 00 0050 000I
   5    7I I7 0000 7075
   6    67 00 70I6 0II4
   7    23 00 0046 0030

7020    76 00 000I 000I
   I    64 00 70I7 0046
   2    7I 02 7074 0000
   3    -30 00 7024 0040
   4    -34 00 7033 7025
   5    -20 0I 7027 0050
   6    -30 I7 000I 0000
   7    7I 00 000I 7076
```

```
7030   76 00 0046 0003
   1  -10 03 0000 0000
   2  -20 03 7031 7077
   3   71 00 7002 0040
   4  -30 00 7035 0041
   5   65 00 7061 0040
   6  -30 00 7037 0042
   7  -70 00 7100 0042

7040   13 00 0041 0000
   1   12 00 0001 0003
   2   65 02 7007 0000
   3  -30 00 7044 0040
   4  -31 00 7050 7067
   5  -10 03 0041 0000
   6   10 00 7077 0002
   7  -30 00 7022 0000

7050  -10 00 7070 0045
   1  -75 00 7070 0041
   2  -10 00 0040 0043
   3   66 00 7054 0044
   4   07 00 7071 0040
   5  -34 00 7060 7056
   6  -10 00 0042 0045
   7  -30 00 7064 0000
```

```
7060    35 00 7072 0044
   I    37 00 0042 0I04
   2    I6 00 004I 004I
   3    34 00 7073 0042
   4    64 00 706I 0043
   5   -34 00 7053 7066
   6    44 00 0045 004I
   7

7070    40 00 0000 000I
   I    70 00 0000 0000
   2    40 00 0000 0005
   3    50 00 0000 0004
   4    00 00 0000 0377
   5    00 00 7777 0000
   6    00 00 0000 7777
   7    00 00 0000 000I

7I00    00 00 0000 00I2
```

Контрольная сумма программы:

-57 34 2753 0441

8.4. Программа без перевода (СП-0103)

Иногда полезно при составлении матрицы оставлять ее элементы без перевода в двоичную систему. Этого можно достичь заменой команды 7043 на -30 00 7045 0041. В смысле экономии памяти ЭВМ удобнее использовать специальную программу:

```
7000    71 17 0000 7047
   1   -30 00 7003 0002
   2   -07 00 0000 0017
   3   -50 02 0000 0000
   4   -30 00 7005 0040
   5   -70 00 0000 0000
   6   -51 02 0000 0000
   7    07 00 0040 0110

7010   -34 00 7002 7011
   1   -32 00 7012 7002
   2    71 00 0050 7047
   3   -30 00 7014 0046
   4    06 00 0050 0001
   5    71 17 0000 7050
   6    67 00 7016 0114
   7    23 00 0046 0030

7020    76 00 0001 0001
   1    64 00 7017 0046
   2    71 02 7052 0000
   3   -30 00 7024 0040
   4   -34 00 7033 7025
   5   -20 01 7027 0050
   6   -30 17 0001 0000
   7    71 00 0001 7047
```

7030	76	00	0046	0003
1	-10	03	0000	0000
2	-20	03	7031	7051
3	71	00	7002	0040
4	-30	00	7035	0041
5	65	00	7046	0040
6	-30	00	7037	0042
7	-70	00	7053	0042
7040	13	00	0041	0000
1	12	00	0001	0003
2	65	02	7007	0000
3	-30	03	7044	0000
4	10	00	7051	0002
5	-30	00	7022	0000
6	00	00	0000	0104
7	00	00	0000	7777
7050	00	00	7777	0000
1	00	00	0000	0001
2	00	00	0000	0377
3	00	00	0000	0012

Подготовка исходных данных и обращение к программе не отличаются от описанного ранее. В блок-схеме имеются следующие изменения:

1)Блок № 8, содержание: выделение и запись по адресу очередного элемента матрицы.

2)Блок № 9, начальный адрес 7044.

Длина программы 54 команды, переадресации подлежат 46 команд. Контрольная сумма программы:

77 22 4241 2147

Литература

1. Аганбегян А.Г. К методологии оптимального планирования размещения производства в отдельных отраслях. В кн.:Оптимальное планирование размещения и специализации производства в отдельных отраслях. Экон.-матем. серия, вып.3. Нсб., Изд-во СО АН СССР, 1962.

2. Бирман И.Я. Транспортная задача линейного программирования. М., Экономиздат, 1962.

3. -- Оптимальное программирование. М., "Экономика", 1968.

4. Вопросы оптимального размера предприятий в промышленности СССР. М., "Наука", 1968.

5. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. М., "Советское радио", 1966.

6. Гомори Р.Е., Бомоль У.Дж. Целочисленное программирование и оценки. В сб.: Численные методы оптимального планирования. Нсб., 1962.

7. Дружинин Е.П., Кузнецов Ю.А. Оптимизация системы газоснабжения районов страны на основе методов математического моделирования и использования ЭВМ. В сб.:Математические методы в экономике газо- и нефтеснабжения. Л., "Недра", 1966.

8. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., "Прогресс", 1966.

9. Довгаль Б.Г., Ким К.В., Маш В.А. Метод транспортных разностей. В сб.:Материалы к Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники в планировании развития и размещения производства. Секция № 3, Таллин, 1967.

10. Завельский М.Г. Оптимизация отраслевого планирования. М., "Экономика", 1967.

11. Каганович И.З. Применение математического программирования для оптимального выбора мощности и пунктов размещения маслодельных заводов (на примере о-ва Сааремаа) Изв. АН Эстонской ССР, т.XI, серия общ. наук, 1962, № 3.

12. -- Математическая модель газоснабжения в форме транспортной задачи с разрывной целевой функцией. - В кн.:Математические методы в экономике газо- и нефтеснабжения. Л., "Недра", 1966.

13. -- Опыт решения задач концентрации и размещения производства методом отсева. В кн.:Экономико-математические модели и методы отраслевого планирования. Нсб., "Наука", 1967.

14. -- Типы задач экономической концентрации и один из подходов к их решению. Изв. АН Эстонской ССР, т. XVII, обществ. науки, 1968, № 2.

15. Каганович И., Мерессоо А. Концентрация и размещения молочной промышленности Эстонской ССР. Таллин, 1964.

16. Каганович И.З., Рейснер М.Я. Моделирование и программирование для расчета на ЭВМ газовых потоков и планов газоснабжения. В сб.: Экономика, организация и управление в газовой промышленности. Экономический реферативный сборник № 4. М., 1968.

17. Казакевич Д.М. Приближенный метод решения многопродуктовых производственно-транспортных задач отраслевого планирования. Экономика и математические методы, 1967, т.Ш, 6.

18. Калика В.И., Маш В.А. Задачи оптимального размещения производства. Экономика и математические методы, 1967, т.П, 3.

19. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.

20. Канторович Л.В., Макаров В.Л. Оптимальные модели перспективного планирования. В кн.:Применение математики в экономических исследованиях, т.3. М., "Мысль", 1965.

21. Клебанов И.Ф. Комбинаторный метод решения одного класса задач размещения предприятий. Минск, 1965.

22. Ковлов Л.А. О типовых экономико-математических моделях размещения и специализации производства отдельных отраслей промышленности. Изв. Сиб. отд. АН СССР, серия общ. наук, 1964, вып.3.

23. Лурье А.Л. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., "Наука", 1964.

24. Макаров В.П. Производственно-транспортная задача линейного программирования. В кн.:"Моделирование и программирование планово-экономических задач". Научные труды НГУ, серия экономич., вып. 5. Нсб., 1965.

25. Математические методы и проблемы размещения производства. М., "Экономиздат", 1963.

26. Методика оптимального перспективного отраслевого планирования. М., НИИЭС Госстроя СССР, 1966.

27. Методические положения по отраслевому оптимальному планированию в промышленности. Новосибирск, "Наука", 1967.

28. Михалевич В.С., Шор Н.З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. В сб.: О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач. Научно-методические материалы экономико-математического семинара, вып. I, М., 1962.

29. Модели и методы оптимального развития и размещения производства. Новосибирский гос. университет. Научные труды НГУ, серия экономич., вып.3. Новосибирск, 1965.

30. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования. М., Трансжелдориздат, 1962.

31. Оптимальное планирование размещения производства. Часть I. Научные труды НГУ, серия экономич., вып.7. Новосибирск, 1965.

32. Оптимальное размещение и специализация в отраслях промышленности. Минск, 1966.

33. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства. М.-Новосибирск, "Наука", 1968.

34. Паршиков В.А. Определение оптимального размещения и расчетной мощности элементов комплекса устройств. В сб.: Кибернетика и транспортные процессы. М.,Трансжелдориздат, 1963.

35. Применение математики при размещении производительных сил. М., "Наука", 1964.

36. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. М., Изд-во МГУ, 1963.

37. Рейснер М. Программа симплексного метода для ЭВМ "Минск-2". В кн.: Методика планирования производственно-технологической структуры строительства. Таллин, 1968.

38. Романовский И.В., Шушков В.И. О разработке математической модели системы газоснабжения. В сб.: Экономика, организация и управление в газовой промышленности. Экономический реферативный сборник № 4. М., 1968.

39. Tootmise kontsentreerimine ja paigutamine mõnedes Eesti NSV tööstusharudes. Tallinn, "Eesti Raamat", 1967.

40. Финкельштейн Ю.Ю. Об одном приближенном методе целочисленного линейного программирования. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 1.

41. Черенин В.П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Материалы конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, 1962.

42. Черенин В.П., Хачатуров В.Р. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. В кн.: Экономико-математические методы, вып. 2, М., 1965.

43. Экономико-математические исследования народного хозяйства Эстонской ССР. Таллин, "Валгус", 1968.

44. Шипай А. Задача специализации производства железобетонных изделий. Таллин, "Валгус", 1968.

45. Экономико-математические методы. Вып. П. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М., "Наука", 1965.

46. Экономико-математические модели и методы отраслевого планирования. Новосибирск, "Наука", 1967.

47. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. М., "Советское радио", 1964.

48. Библиотека стандартных программ для ЦВМ "Минск-2". Таллин, 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие..... 3

1. Модели..... 5

1.1. Классификация моделей..... -

1.2. Модели транспортного типа..... 12

1.3. Модели производственно-транспортного типа..... 26

2. Методы решения..... 35

2.1. Подход к анализу..... -

2.2. Отсев по целевой функции..... 47

2.3. Отсев по загрузке..... 61

3. Практический опыт..... 79

3.1. Оптимизация многоотраслевого комплекса..... -

3.2. Задача специализации с фиксированными доплатами..... 90

3.3. Динамическая задача на сети..... 103

4. Программа решения транспортных задач в сетевой постановке..... 114

5. Программа решения сетевых задач с дискретными переменными методом отсева по загрузке..... 139

6. Программа решения сетевых задач с фиксированными доплатами методом отсева по целевой функции..... 163

7. Программа двойственного симплекс - метода 177

8. Программа расстановки элементов матрицы 202

Литература..... 211

Каганович И., Краав Э., Рейснер М., Рооба П., Шипай А.

МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ, СПЕЦИАЛИЗАЦИИ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Работа обобщает методический опыт Института экономики в области отраслевого оптимального планирования. Особое внимание уделено сетевым многопродуктовым моделям. Практическое применение моделей и методов иллюстрируется материалами конкретных исследований. Приведен ряд составленных в институте программ для ЭВМ "Минск-22"

На русском языке

Редакционно-издательский совет Академии наук Эстонской ССР

Таллин, ул. Сакала, 3

Редактор В. Аасмяэ

Подписано к печати 30 VI 1969. МВ - 01790. Печатных листов 13,5. Учетно-издательских листов 8,17. Тираж 560. Заказ 830. Ротапринт Комитета цен.

Цена 82 коп.

Цена 82 коп.

XI
1A-17788
238727

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00647356 7