Euroopa Liit
Euroopa Sotsiaalfond

Eesti tuleviku heaks

E-kursuse

"Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks IV (P1TP.TK.010)"

materjalid

Aine maht 3 EAP

Hilja Afanasjeva
TÜ teaduskool
2013

Protsendid. Arvud ja algebra

Protsent on üks sajandik osa tervikust.
Olgu tervik A, osa a ja osamäär p%, siis

1) osamäär $p\% = \dfrac{a \cdot 100\%}{A}$,

2) osa $a = \dfrac{A \cdot p\%}{100\%} = 0{,}01 p \cdot A$,

3) tervik $A = \dfrac{a \cdot 100\%}{p\%}$.

Näide 1. Saapapaarile kulub 8,4 dm^2 nahka. Mitu ruutmeetrit nahka tuleb varuda 100 paari samasuguste saabaste valmistamiseks, kui on teada, et tegemise käigus läheb 23% nahast raisku?

Lahendus. Kui 23% nahast läheb raisku, siis kogu varutavast (100%) nahast kulub saapapaari peale 77% ehk 8,4 dm^2. Kogu varutava tüki suurus peab siis olema (terviku leidmine)

$\dfrac{8{,}4 \cdot 100\%}{77\%} \approx 10{,}9\ dm^2$.

$100 \cdot 10{,}9 dm^2 = 1090 dm^2 \approx 11 m^2$

Vastus. 100 paari saabaste peale kulub umbes 11 m^2 nahka.

Paarisarv on täisarv, mis jagub kahega. Paarisarvu üldkuju on $\pm$ 2n, kus n on suvaline naturaalarv. Paarisarvud on näiteks 12, -16. Ka arvu 0 loetakse paarisarvuks.

Paaritu arv on täisarv, mis ei jagu kahega. Paaritu arvu üldkuju on $\pm(2n+1)$, kus n on suvaline naturaalarv. Paaritud arvud on näiteks -35, 225.

Algarv on ühest suurem naturaalarv, mis jagub vaid arvuga üks ja iseendaga. Algarvud on näiteks 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Arv 1 ei ole seega algarv.

Täisruut on naturaalarv, mis võrdub mingi täisarvu ruuduga. Näiteks $25 = 5^2$, $169 = 13^2$.
Täisruudu all mõeldakse ka avaldist, mille saab esitada mingi lihtsama avaldise ruuduna.
Täisruut on näiteks ruutliige $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$.

Näide 2. Leida vähim positiivne täisarv, millega arvu 600 korrutades saame mingi täisarvu ruudu.

Lahendus. Et $600 = 6 \cdot 100$ ja $100 = 10^2$, siis tuleb arvu 600 korrutada niisuguse arvuga k, et $6 \cdot k$ oleks täisruut, selleks sobib arv 6. Seega täisruudu saamiseks tuleb arvu 600 korrutada arvuga 6. ($6 \cdot 600 = 3600 = 60^2$)

Mõnikord on avaldis vaja teisendada eelnevalt kujule, kus mingi osa sellest kindlasti jagub antud arvuga.

Näide 3. Leida naturaalarv *n*, mille korral $n^2 + 6n - 104$ jagub 113 - ga. Põhjendada.

Lahendus: $n^2+6n-104=n^2+6n-104-9+9=n^2+6n+9-113=(n+3)^2-113$, milles 113 jagub 113. Peame näitama, et ka n + 3 jagub 113 ehk $n+3=113k$, millest $n=113k-3$.
Andes k väärtusi 1, 2, 3, …, saame n väärtusteks 110, 223, 336, 449, 562, 675, 788, 9011, 1014, …
Neist kolmekohalised on 110, 223, 336, 449, 562, 675, 788, 901.

Võrrandis täisruudu eraldamine

Nagu märkasite, tuleb täisruuduks teisendamisel hästi tunda valemeid $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ja $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, et läbi näha nende võimalikku kasutust.

Alustame kõige lihtsamast: eraldame täisruudu võrrandis $x^2-8x+16=0$. Saame võrrandi $(x-4)^2=0$, sest $(x-4)^2=x^2-8x+16$.

Tavaliselt on täisruudu eraldamine keerukam. Olgu tegemist võrrandiga $x^2-4x+7=0$. Eraldame täisruudu. Et saaksime valemit $(x-2)^2$ rakendada, peame liitma avaldisele x^2-4x juurde arvu 4. Aga kui liidame 4, siis peame ka lahutama 4, et võrrand ei muutuks:

$\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{täisruut}}\underbrace{-4+7}_{+3}=0$.

Eraldame täisruudu, saame võrrandi $(x-2)^2+3=0$.
Neljanda astme võrrandi korral tuleb taibata, et näiteks
$x^4-8x^3+16x^2=(x^2)^2-2x^2\cdot 4x+(4x)^2=(x^2-4x)^2$.
Kuidas siis kasutada ära täisruuduks eraldamise võtet 4-nda astme võrrandite lahendamisel?

Näide 4. Lahendame võrrandi $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$, eraldades selles täisruudu.

Et rakendada valemit $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, siis peame kaksliikmele x^4-4x^3 juurde liitma $4x^2$. Et võrrand jääks samaks, tuleb $4x^2$ ka lahutada.
$x^4-4x^3+4x^2-4x^2+x^2+6x+2=0$
Eraldame täisruudu: $(x^4-4x^3+4x^2)-4x^2+x^2+6x+2=0$
$\Rightarrow (x^2-2x)^2-3x^2+6x+2=0 \Rightarrow (x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+2=0$.
Nüüd saame võrrandit edasi lahendada, tehes asenduse $x^2-2x=y$.
Nii saame ruutvõrrandi $y^2-3y+2=0$, siit $y=1{,}5\pm 0{,}5$.
Seega $y_1=2$ ja $y_2=1$.
Et saada kätte lahenditeks sobivaid x väärtusi, tuleb teha tagasiasendused:

1) $x^2-2x=2$	2) $x^2-2x=1$
$x^2-2x-2=0$	$x^2-2x-1=0$
$x=1\pm\sqrt{3}$	$x=1\pm\sqrt{2}$

Nii oleme kätte saanud 4-nda astme võrrandi $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$ kõik 4 lahendit: $x_1=1+\sqrt{3}, x_2=1-\sqrt{3}, \quad x_3=1+\sqrt{2}, \quad x_4=1-\sqrt{2}$

Murdvõrrandi lahendamine

Ilmselt pole teile võõrad lineaarvõrrandid ja ruutvõrrandid (või nendeks taanduvad 4-nda astme võrrandid).

Murdvõrrand on võrrand, mis sisaldab tundmatut ka murru nimetajas.

Murdvõrrandi lahendamisel tuleb teha järgmist:

1) viia kõik liikmed võrduse vasakule poolele, nii et paremale poole jääb null;
2) viia kõik murrud ühisele nimetajale (paremale poolele jääb endiselt null);
3) kasutada murru nulliga võrdumise tingimust – murd on võrdne nulliga siis ja ainult siis, kui murru lugeja võrdub nulliga ja nimetaja on nullist erinev;
4) leida lahendid;
5) kontrollida lahendeid, asetades nad algvõrrandisse.

Näide 5. Lahendada murdvõrrand $\dfrac{12}{x^2-x}+\dfrac{3}{x-1}=2$.

$$\frac{12}{x^2-x}+\frac{3}{x-1}-2=0 \Rightarrow \frac{12^{(1}}{x(x-1)}+\frac{3^{(x}}{x-1}-2^{(x^2-x}=0 \Rightarrow \frac{12+3x-2x^2+2x}{x(x-1)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2+5x+12}{x(x-1)}=0 \Rightarrow -2x^2+5x+12=0 \quad \text{ja } x(x-1)\neq 0.$$

Lahendame nüüd lugejas oleva ruutvõrrandi $-2x^2+5x+12=0$.

$$-2x^2+5x+12=0 \,\big|\cdot(-1) \Rightarrow 2x^2-5x-12=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{5\pm 11}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=4 \text{ ja } x_2=-1{,}5.$$

Kontrollimisel selgub, et need mõlemad lahendid sobivad, ka tingimus $x\neq 0, x\neq 1$ on täidetud, seega saame lahenditeks $x_1=4$ ja $x_2=-1{,}5$.

Arvestades igal juhul tingimusega, et nimetaja ei ole null, võime murdvõrrandit

$\dfrac{12}{x^2-x}+\dfrac{3}{x-1}=2$ lahendada ka järgmiselt:

$\dfrac{12}{x^2-x}+\dfrac{3^{(x}}{x-1}=2 \Rightarrow \dfrac{12+3x}{x^2-x}=2 \,\big|\cdot x^2-x \Rightarrow 12+3x=2x^2-2x$ ja saame taas ruutvõrrandi $-2x^2+5x+12=0$.

Mõnikord on **võrrandite lahendamisel** mõttekas kasutada **mõlema poole juurimist**, kuid kui pole lisatingimusi antud, siis tuleb kindlasti teada, et $\sqrt{x^2}=\pm x$. Kui $x>0$, vaid siis $\sqrt{x^2}=x$.

Näide 6. Olgu meil lahendada võrrand $x^2+\dfrac{1}{x^2}=14$, $x>0$.

Teisendame võrrandi vasaku poole täisruuduks: $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}-2=14 \Rightarrow (x+\dfrac{1}{x})^2=16$.

Nüüd juurime võrrandi mõlemat poolt, saame $x+\dfrac{1}{x}=4$ (kui tingimust $x>0$ poleks, siis tuleks vaadelda ka juhtu $x+\dfrac{1}{x}=-4$).

Nüüd jääb lahendada märksa lihtsam murdvõrrand kui esialgne.

$$x+\frac{1}{x}=4\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=4\Rightarrow x^2+1=4x\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}.$$

Võrrandisüsteem on kaks või enam ühtesid ja samu tundmatuid sisaldavat võrrandit, mis peavad üheaegselt rahuldama tundmatute samu väärtusi.

Näide 7. Leida kõik reaalarvud a, mille korral võrranditel $(a-1)x+1=0$ ning $(a+1)x+a-1=0$ on üks ja sama lahend.

Lahendus. Teiste sõnadega tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases}(a-1)x+1=0\\(a+1)x+a-1=0\end{cases}.$$

Avaldame esimest võrrandist x ja asendame teise võrrandisse:

$$x=\frac{-1}{a-1}=\frac{1}{1-a}$$

$$\Rightarrow(a+1)\cdot\frac{1}{1-a}+a-1=0\Rightarrow\frac{a+1}{1-a}+a-1=0\Rightarrow\frac{a+1+a-a^2-1+a}{1-a}=0\Rightarrow\frac{-a^2+3a}{1-a}=0.$$

Siit nähtub, et $1-a\neq0\Rightarrow a\neq1$ ja $-a^2+3a=0\Rightarrow a^2-3a=0\Rightarrow a(a-3)=0$, mille lahendid on a = 0 või a = 3. Kontrollimisel need sobivad.

Tekstülesanded

Tekstülesannete puhul tuleb lahendajal endal esmalt võrrand või võrrandisüsteem vastavalt ülesande lähteandmetele koostada, seejärel see lahendada ja saadud vastuseid teksti põhjal kontrollida. Tekstülesanded võivad olla väga erineva sisuga ja seetõttu neid grupeerida on väga raske, näidetena peatume vaid nn liikumis- ja koostöötamise ülesannetel.

Näide 8. Linnadevaheline kaugus oli nii raudteed kui maanteed mööda 80 km. Linnast A väljus buss 0,5 tundi hiljem ja saabus linna B 10 minutit varem kui rong. Leida bussi ja rongi kiirus, kui bussi kiirus on $20\frac{km}{h}$ võrra suurem kui rongil.

Lahendus.

Siin tuleb esmalt teada füüsikast tuntud kiiruse valemit $v=\frac{s}{t}$, kus *s* on teepikkus ja *t* on aeg.

Olgu bussi kiirus $x\ \frac{km}{h}$ ja rongi kiirus $y\ \frac{km}{h}$.

Ühtlasi leiame, et 10 minutit on $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ tundi.

Buss väljus 0,5 tundi hiljem ja jõudis $\frac{1}{6}$ tundi varem kohale, seega kokku kulus bussil sõiduks aega $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ tundi vähem kui rongil, saame võrrandi: $\frac{80}{y}-\frac{80}{x}=\frac{2}{3}$. Et bussi kiirus oli 20 $\frac{km}{h}$ suurem kui rongil, siis teine võrrand on $x = y + 20$.

Seega tuleb lahendada võrrandisüsteem: $\begin{cases} x = y + 20 \\ \dfrac{80}{y} - \dfrac{80}{x} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Lahendame selle: $\dfrac{80}{y} - \dfrac{80}{y+20} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{80y + 1600 - 80y}{y^2 + 20y} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1600}{y^2 + 20y} = \dfrac{2}{3}$.

$2y^2 + 40y = 4800 \Rightarrow y^2 + 20y - 2400 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = -10 \pm 50 \Rightarrow y_1 = 40$ ja $y_2 = -60$,

kuna kiirus on positiivne, siis vastuseks sobib $y = 40 \ \dfrac{km}{h}$, sellele vastav $x = 20 + 40 = 60$.

Seega bussi kiiruseks oli 60 $\dfrac{km}{h}$ ja rongi kiiruseks 40 $\dfrac{km}{h}$. Kontrollimisel selgub, et need kiirused sobivad meie lähteülesandega.

Näide 9. Kahe toru kaudu täitub bassein 6 tunniga, kusjuures üks neist torudest täidaks basseini 5 tundi kiiremini kui teine. Kui palju aega kuluks basseini täitmiseks kummagi toru kaudu eraldi?

Lahendus.
Oletame, et esimese toru kaudu täitub bassein x tunniga ja teise kaudu y tunniga. Ühes tunnis täidab esimene toru $\dfrac{1}{x}$ osa kogu basseinist ja teine toru $\dfrac{1}{y}$ osa kogu basseinist, seega kuue tunniga vastavalt $\dfrac{6}{x}$ ja $\dfrac{6}{y}$. Et kuue tunniga saab bassein täis, saame võrrandi $\dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} = 1$. Et esimene toru täidab basseini 5 tundi kiiremini kui teine, saame veel võrrandi $y = x + 5$. Seega tuleb lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} = 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$ ehk $\dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{x+5} = 1$.

$\dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{x+5} = 1 \Rightarrow \dfrac{6x + 30 + 6x}{x(x+5)} = 1 \Rightarrow \dfrac{12x + 30}{x^2 + 5x} = 1 \Rightarrow 12x + 30 = x^2 + 5x \Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0$.

Viimase ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = -3$ (ei sobi) ja $x_2 = 10$. Vastav sobilik $y_2 = 15$. Teeme veel teksti järgi kontrolli ja võime välja kirjutada vastuse: bassein täituks ühe toru kaudu 10 tunniga ja teise toru kaudu 15 tunniga.

Ühise teguri sulgude ette toomine, näiteks $\dfrac{2^{100} + 2^{99}}{3} = \dfrac{2^{99}(2+1)}{3} = 2^{99}$.

$(2x-1)x(x-1) - (2x-1)(x-2)(x+1) = (2x-1)[x(x-1) - (x-2)(x+1)] =$

$= (2x-1)(x^2 - x - x^2 + x + 2) = (2x-1) \cdot 2 = 2(2x-1)$

Rühmitamine. Näiteks rühmitame hulkliikme $x^3 - 4x + 12 - 3x^2$ ja toome ühise teguri sulgude ette, kasutades abivalemeid.

$x^3 - 4x + 12 - 3x^2 = (x^3 - 3x^2) - (4x - 12) = x^2(x-3) - 4(x-3)$.

Näeme, et mõlemas liikmes on ühine tegur x - 3, toome selle sulgude ette.

$x^2(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x^2-4) = (x-3)(x+2)(x-2)$

Hulkliikme jagamine üksliikmega. Näiteks lihtsustame $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{b}{a}$.

Arvu üldkuju

Kahekohalise arvu üldkuju on $10a+b$ või $\overline{ab}$, kus a on kümneliste number ja b üheliste number.

Kolmekohalise arvu üldkuju on $100a+10b+c$ või $\overline{abc}$, kus a on sajaliste number, b on kümneliste number ja c on üheliste number.

Näiteks $327=100\cdot 3+10\cdot 2+7$, $\overline{47b2}=1000\cdot 4+100\cdot 7+10\cdot b+2$.

Jaguvuse tunnused

Kindlasti teate, et arv jagub **kahega** kui ta on paarisarv.
Arv jagub **kolmega (üheksaga)** kui tema ristsumma jagub kolmega (üheksaga).
Arv jagub **seitsmega (üheteistkümnega, kolmeteistkümnega)** kui selle kolmest viimasest numbrist moodustatud arvu ja ülejäänud arvu vahe jagub seitsmega (üheteistkümnega, kolmeteistkümnega).
Näiteks arv 202371 jagub kolmega, sest 2 + 0 + 2 + 3 + 7 + 1 = 15 ja see jagub kolmega.
Samuti jagub arv 202371 kolmeteistkümnega, sest 371 – 202 = 169 ja see jagub kolmeteistkümnega.

Näide 10. Leida vähim positiivne täisarv a, mille korral $2011+a$ jagub 18.

Lahendus. Et $18=2\cdot 9$, siis jagub arv 18 parajasti siis, kui ta on paarisarv ja tema numbrite summa jagub 9. Millal arvu $2011+a$ numbrite summa on 9? 2 +0 +1 + x = 9, siit x = 6, arv on 2016 (on ka paarisarv), seega 2016 saamiseks tuleb arvule 2011 liita 5. Järelikult a = 5.

Näide 11. Kui palju on selliseid positiivseid täisarve n, et $n\le 100$ ja murd $\frac{n}{22}$ on taandumatu?

Lahendus. Oskame üles otsida need 10 väiksemad arvud, mis taanduvad 22. Alustamegi siis lahendust sellest.
Et $22=2\cdot 11$ jagub 2 ja 11, siis peab ka n olema paarisarv või jaguma 11. Seega murd on taanduv, kui n on paarisarv (2 tõttu) või arvu 11 kordne, viimasest tulevad n väärtusteks 11, 33, 55, 77 ja 99. Seega murd on taanduv 50 + 5 = 55 korral ja selliseid positiivseid täisarve, mil antud murd on taandumatu, on 100 – 55 = 45.

Sageli aitab teil ülesannet paremini lahti mõtestada konkreetsete arvudega katsetamine.

Näide 12. Viiekohaline arv on selline, et lisades sellele arvule lõppu 1, on uus arv kolm korda suurem kui esialgsele arvule lisada ette 1. Leida esialgne arv.

Lahendus. Võtame suvalise 5-kohalise arvu, näiteks 23473 ja vaatame, mis juhtub kui lõppu lisame 1, tuleb arv 234731 ja siis taipame, et esialgsest arvust on see 10 korda suurem+1. Seega võime arvu, millele on 1 lõppu lisatud üldjuhul kirjutada 10A + 1, kus A on esialgne 5-kohaline arv.
Analoogiliselt arutledes märkame, et lisades esialgsele arvule ette 1, saame seda kirjutada kujul 100000 + A. Nüüd läheb lahendus lihtsaks:

Olgu 5-kohaline arv A, siis lisades lõppu arvu 1, saame arvuks 10A+1. Kui aga arvu 1 lisame algusesse, saame arvuks 100000 + A. Et $10A+1=3(100000+A)$, siis A = 42857.

Võrratus

Võrratus on valem, mis väidab, et kahe avaldise väärtused on seotud ühe fikseeritud võrratusmärgiga, näiteks $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Võrratuse tõestamisel kasutame võrratuse põhiomadusi.

1. Võrratuse pooli võib vahetada, muutes võrratuse märgi seejuures vastupidiseks, st kui a < b, siis b > a.
2. Võrratuse mõlema poolega võib võrratuse märki muutmata liita ühe ja sama avaldise, st kui a < b, siis a + c < b + c. Selle omaduse kohaselt saab võrratuse liikmeid võrratuse ühelt poolelt vastandmärgiga üle viia teisele poolele.
3. Võrratuse mõlemaid pooli võib kas korrutada või jagada ühe ja sama positiivse arvuga, jättes võrratuse märgi muutmata, st kui a < b ja c > 0, siis ac < bc.
4. Võrratuse mõlemaid pooli võib kas korrutada või jagada ühe ja sama negatiivse arvuga, muutes seejuures võrratusmärgi vastupidiseks, st kui a < b ja c < 0, siis ac > bc.

Võrratuste tõestamine

Tõestada muutujat sisaldav võrratus, tähendab näidata, et antud võrratus kehtib muutujate kõigi lubatavate väärtuste korral. Võrratuste tõestamiseks on mitmeid erinevaid võtteid, selles materjalis tutvustame neist kahte.

Näide 13. Tõestada, et $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, kui $a>0$, $b>0$ ja $a\neq b$.

a) Lähtume tõestatavast võrratusest.

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \quad\Rightarrow\quad a+b>2\sqrt{ab} \quad\Rightarrow (a+b)^2>4ab\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2>4ab \quad\Rightarrow\quad a^2-2ab+b^2>0 \quad\Rightarrow\quad (a-b)^2>0,$$

mis on alati tõene kui arvu ruut.

b) Lähtume tõesest võrratusest.

Võtame ette alati tõese võrratuse $(a-b)^2>0$.

$$(a-b)^2>0 \quad\Rightarrow\quad a^2-2ab+b^2>0 \quad\Rightarrow\quad a^2-2ab+b^2+4ab>4ab\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2>4ab \quad\Rightarrow (a+b)^2>4ab \quad\Rightarrow\quad a+b>2\sqrt{ab} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},$$ mida oligi tarvis tõestada.

Näide 14. Tõestada, et $ab>0$ korral $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$.

Lähtume võrratusest $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$ ja teisendame seda.

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2 \Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\geq 0 \Rightarrow \frac{b^2+a^2-2ab}{ab}\geq 0 \Rightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$$

Saime tõese võrratuse, sest eelduse kohaselt $ab>0$ ja $(a-b)^2\geq 0$ alati kui arvu ruut.

Seega on tõestatud, et $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$.

Ilma tõestamata võib võrratuste tõestamisel kasutada ka nn **Cauchy võrratust** $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ kui alati tõest.

Tõenäosus ja kombinatoorika

Klassikalise tõenäosuse leidmiseks on vaja soodsate elementaarsündmuste arv jagada kõikide elementaarsündmuste arvuga, ehk tõenäosus $p = \dfrac{\textit{soodsad võimalused}}{\textit{kõik võimalused}}$.

Seega **sündmuse tõenäosuse** alla mõistetakse sündmuste jaoks soodsate võimaluste arvu ja kõigi võimaluste arvu jagatist.

Näiteks tavatäringuviskel on silmade tulekuks 6 võimalust: tuleb kas 1, 2, 3, 4, 5 või 6 silma. Paaritu arvu silmade tulekuks on kolm (1, 3, 5), seega tavatäringu viskel paaritu arvu silmade tuleku tõenäosus on $p = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

Nii soodsate võimaluste kui ka kõigi võimaluste arvu on lihtsam leida kombinatoorika valemite abil, kuid sageli ka loogiliselt arutledes ja võimaluste kokkulugemisel.
Kombinatoorika on diskreetse matemaatika osa, mis uurib niisuguste ülesannete lahendamist, kus tuleb leida võimaluste arv mingis mõttes eristatavate objektide moodustamiseks.
Tõenäosuse leidmist nõudvate ülesannete lahendamiseks kasutatakse peamiselt **kombinatsioonide** leidmise valemit.

Kuna kombinatsioonide leidmisel kasutatakse valemis faktoriaali, tuletame meelde, mida see tähendab.

Faktoriaal on esimese n positiivse täisarvu korrutis ja on leitav valemiga $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
Näiteks $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. On kokku lepitud, et 0! = 1.

Kombinatsioonideks n elemendist m kaupa nimetatakse selliseid ühendeid, millest igaüks sisaldab m elementi, mis on võetud n erineva elemendi hulgast ja mis erinevad üksteisest vähemalt ühe elemendi poolest.
Kõigi võimalike erinevate kombinatsioonide arvu n elemendist m kaupa tähistatakse C_n^m ja nende leidmiseks kasutatakse valemit $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Näiteks elementidest a, b, c, d ja e saab kolmeelemendilisi valikuid teostada $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ erineval viisil:

abc	abe	ace	bcd	bde
abd	acd	adc	bce	cde.

Kombinatsioone kasutades oleksime võinud tavatäringu viskel paaritu arvu silmade tuleku tõenäosuse leida järgmiselt: $p = \dfrac{C_3^1}{C_6^1} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

Näide 15. Vaadeldakse kahte juhuslikku arvu arvude 1 – 10 hulgast. Need kaks arvu võivad olla ka ühesugused. Kui suur on tõenäosus, et nende kahe arvu summa on 10 väiksem algarv?

Lahendus. Algarvud 1 – 10 on 2, 3, 5, 7.

Üldse võimalusi selliseks arvude valikuks on $10\times 10=100$ (esimese arvu valikuks 10 võimalust ja teise valikuks 10 võimalust).
Et valiku tulemuseks oleks 10 väiksem algarv, on järgmised võimalused:
$2=1+1$, kokku 1 võimalus
$3=1+2$ või $3=2+1$, kokku 2 võimalust
$5=1+4$, $5=4+1$, $5=2+3$, $5=3+2$, kokku 4 võimalust
$7=1+6$, $7=6+1$, $7=2+5$, $7=5+2$, $7=3+4$, $7=4+3$, kokku 6 võimalust.
Seega soodsaid võimalusi , et tulemus oleks 10 väiksem algarv, on kokku
$1+2+4+6=13$, järelikult tõenäosus $\frac{13}{100}=0{,}13$.
Vastus. Tõenäosus, et juhuslikult võetud kahe arvu summa on 10 väiksem algarv, on 0,13.

Näide 16. Vang peab paigutama 10 valget palli ja 10 musta palli kahte kasti. Kui juhuslikust kastist juhuslikult võetud pall on valge, siis vang pääseb vabadusse, kui aga must, siis peab istuma veel ühe aasta. Kuidas peaks vang pallid kastidesse paigutama, et vabaks saamise tõenäosus oleks suurim?

Lahendus. Arutleme erinevate variantide üle.
Olgu I kastis 5 valget palli ja 10 musta, II kastis 5 valget,
siis $p_{valge}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ (sõnades võime öelda, et valge palli võtmise tõenäosust leiame järgmiselt: I kast 2-st võimalikust **ja** (korrutamine) 5 valget palli 15-st võimalikust **või** (liitmine) II kast 2-st võimalikust **ja** (korrutamine) 5 valget palli 5-st võimalikust).
Olgu I kastis 6 valget palli ja 4 musta, II kastis 4 valget ja 6 musta,
siis $p_{valge}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{5}{10}=0{,}5$. Tõenäosus vähenes, suund pole õige.
Olgu I kastis 6 valget palli ja 10 musta, II kastis 4 valget,
siis $p_{valge}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}=\frac{11}{16}\approx 0{,}69$. Suund õige, II kasti tuleb valgeid panna võimalikult vähe ja musti mitte üldse.
Proovime panna I kasti 9 valget palli ja 10 musta, II kasti 1 valget,
siis $p_{valge}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{19}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{28}{38}\approx 0{,}74$.
Vastus. Tõenäosus on suurim siis, kui vang paneb I kasti üheksa valget ja 10 musta palli ning II kasti ühe valge palli.

Lahendame sama ülesande, kasutades kombinatsioonide leidmise valemeid.
Olgu I kastis 5 valget palli ja 10 musta, II kastis 5 valget,
siis valge palli võtmise tõenäosus on $p=\frac{C_1^1\cdot C_5^1}{C_2^1\cdot C_{15}^1}+\frac{C_1^1\cdot C_5^1}{C_2^1\cdot C_5^1}\approx 0{,}67$.
Arutledes analoogiliselt eelmise lahendusega proovime panna I kasti 9 valget palli ja 10 musta, II kasti 1 valge, siis valge palli võtmise tõenäosus on
$p=\frac{C_1^1\cdot C_9^1}{C_2^1\cdot C_{19}^1}+\frac{C_1^1\cdot C_1^1}{C_2^1\cdot C_1^1}\approx 0{,}74$, mis on ka suurim tõenäosus, et vang vabaneks.

Loogika

Järgnevas püüame näidete varal anda mõned näpunäited nn „kes-on-kes“ tüüpi loogika ülesannete lahendamiseks. Nende ülesannete juures aitavad lahendust lihtsustada kas kahevälja või kolmevälja tabeli tegemine, kuid sageli on abi ka joonise abil seoste märkimiseks. Alustada on soovitav lausest, milles on seoste kohta kõige rohkem öeldud. Niipea kui jõuate vastuoluni, tuleb tehtud oletus valeks tunnistada ja alustada uuesti.

Näide 17. Rongi teenindab neljaliikmeline meeskond: rongijuht, masinist, kütja ja vagunisaatja. Nende meeste nimed on (mingis järjekorras) Ants, Jaan, Peep ja Tiit. Leida iga mehe amet ja nendevahelised sugulussidemed, kui on teada, et
1) Peep on vanem kui Jaan;
2) rongijuhil ei ole meeskonna hulgas sugulasi;
3) vagunisaatja ja masinist on vennad;
4) Tiit on Peebu onu;
5) masinist ei ole kütja onu ja kütja ei ole vagunisaatja onu.

Lahenduskäigu süstematiseerimiseks koostame joonisel 1 näidatud vastavuste tabeli, kus iga lahter vastab ühe nime ja elukutse paarile. Niipea, kui lahenduse käigus selgub, et mingi paar pole võimalik, st vastava nimega isikul ei saa vastavat elukutset olla, siis kriipsutame selle lahtri läbi. Kui aga mingi paar on kindlaks tehtud, st ühe isiku elukutse on selgitatud, siis märgime vastava lahtri ringikesega, kriipsutades ühtlasi läbi selle rea ja veeru kõik ülejäänud lahtrid. Muidugi, kui mõnes reas või veerus on alles jäänud veel vaid üks läbikriipsutamata lahter, siis tuleb see varustada ringikesega. Kui aga jõuame olukorrani, kus teatud hulgas ridades ja veergudes on veel kaks või enam vaba lahtrit ning mingit vahetut võimalust ühegi lahtri täitmiseks enam ei õnnestu leida, siis tuleb hakata hüpoteese püstitama ja selgitama, kas nendest tuleneb mingi vastuolu.

	Rongijuht	Masinist	Kütja	Vagunisaatja
Ants				
Jaan				
Peep	X			
Tiit	X		X	

Joonis 1

Antud juhul järeldub tingimustest 2 ja 4, et rongijuht pole ei Tiit ega Peep, märgistame ristiga vastavad lahtrid joonisel 1.
Tingimuse 5 teise osa kohaselt ei ole kütja vagunisaatja onu, tingimust 3 arvestades ei ole ta siis ka masinisti onu. See aga tähendab, et Tiit ei saa olla kütja, sest vastasel juhul peaks Peep olema kas masinist või vagunisaatja ja Tiit (tingimuse 4 kohaselt) tema onu. Märgistame joonisel 1 ristikesega lahtri Kütja-Tiit.
Et rohkem lahtreid vahetult täita ei õnnestu, siis tuleb asuda hüpoteeside püstitamisele. Selleks otsime tabelis niisuguse rea või veeru, kus on kõige vähem vabu lahtreid ja proovime nende täitmise kõiki võimalusi. Antud juhul on kõige vähem vabu lahtreid esimese veerus (mis vastab elukutsele rongijuht) ja viimases reas (vastab nimele Tiit). Kumba nendest võimalustest esimesena vaatluse alla võtta, pole sugugi iseenesest mõistetav, kui eelistada võib siiski viimast rida ja nimelt järgmistel kaalutlustel. Kui vaatlusele võtta esimene veerg, siis tuleb arvestada võimalusi, et kas Ants või Jaan on rongijuht. Antsu, Jaani ja rongijuhi kohta on aga tingimustes väga vähe öeldud. Viimase rea vaatlemisel tuleb proovida

võimalusi, et Tiit on kas masinist või vagunisaatja. Tiidu, masinisti ja vagunisaatja kohta on tingimustes märksa rohkem öeldud.
Kui oletada, et Tiit on masinist, siis tingimuse 4 kohaselt peaks ta olema Peebu onu, kuid tingimuse 5 põhjal ei saa masinist olla kütja onu. Järelikult Peep pole kütja vaid vagunisaatja. Seega masinist (Tiit) osutuks vagunisaatja (Peebu) onuks, kuid tingimuse 3 kohaselt peavad nad vennad olema. See vastuolu näitab, et tehtud oletus polnud õige ja järelikult peab Tiit olema vagunisaatja. Täidame joonisel 2 lahtri Tiit-vagunisaatja ringiga ja Tiit-masinist ristiga.
Ühtlasi täidame ristiga ühejäänud viimase veeru lahtrid, sest kui Tiit on vagunisaatja, ei saa keegi teine enam seda olla.

	Rongijuht	Masinist	Kütja	Vagunisaatja
Ants				X
Jaan				X
Peep	X			X
Tiit	X	X	X	O

Joonis 2

Kas Peep on masinist või kütja? Peep ei saa olla masinist, sest Tiit on Peebu onu, aga masinist vagunisaatja vend. Seega Peep on kütja, kanname saadud tulemused joonisele 3.

	Rongijuht	Masinist	Kütja	Vagunisaatja
Ants			X	X
Jaan			X	X
Peep	X	X	O	X
Tiit	X	X	X	O

Joonis 3.

Võrdleme saadud tulemusi veelkord ülesandes toodud tingimustega. Me leidsime, et vagunisaatja on kütja onu; teiselt poolt peab aga masinist olema vagunisaatja vend, kuid ei tohi olla kütja onu. See on võimalik vaid siis, kui masinist on kütja isa. Selle uue sugulusvahekorra avastamine võimaldab anda tähenduse ka ülesande tingimusele 1. Nimelt ei saa Peep (kütja) olla oma isast (masinist) vanem, see aga tähendab, et Jaan ei ole masinist. Jääb üle ainus võimalus – Ants on masinist ja Jaan rongijuht. Nüüd saame ka tabeli lõplikult täita (joonis 4).

	Rongijuht	Masinist	Kütja	Vagunisaatja
Ants	X	O	X	X
Jaan	O	X	X	X
Peep	X	X	O	X
Tiit	X	X	X	O

Joonis 4

Vastus. Ants on masinist, Jaan rongijuht, Peep kütja ja Tiit vagunisaatja. Ants ja Tiit on vennad ning Peep on Antsu poeg.

Näide 18. Ema tuli koju ja nägi, et võõras mees istub tugitoolis ja sööb õuna. Ema küsis lastelt, kes avas võõrale ukse ja kes andis õuna. Laste vastused olid sellised.
Toomas: „Ukse avas Kersti, õuna andis Mari.“

Kersti: „Ukse avas Andi, õuna andsin mina.“
Andi: „Mina ust ei avanud, õuna andis Mari.“
Mari: „Ukse avas Toomas ja õuna andis ka Toomas.“
On teada, et ühe lapse vastuses on mõlemad väited tõesed, teisel mõlemad väärad ning ülejäänud kahe lapse vastustes on üks väide tõene ja teine väär.
Kes avas tegelikult võõrale ukse ja kes andis talle õuna?

Lahendus. Teeme arutelu lihtsustamiseks tabeli.

Vastaja	Ukse avas	Õuna andis
Toomas	Kersti	Mari
Kersti	Andi	Kersti
Andi	Mitte Andi	Mari
Mari	Toomas	Toomas

Oletame, et Tooma mõlemad väited on tõesed, st ukse avas Kersti ja õuna andis Mari. Siis oleksid nii Kersti kui Mari mõlemad väited väärad, mis on vastuolus ülesande tingimustega.
Oletame, et Kersti mõlemad väited on tõesed, siis oleksid nii Tooma kui ka Mari mõlemad vastused väärad, vastuolu.
Oletame, et Mari mõlemad vastused tõesed, siis oleksid Tooma ja Kersti mõlemad vastused väärad, vastuolu.
Oletame, et Andi mõlemad väited on tõesed, st Mari andis õuna ja Andi ust ei avanud, siis Toomal ja Maril üks väide tõene, teine väär ja Kerstil mõlemad väärad. Kuna Mari teine väide on väär, siis peab tõene olema, et ukse avas Toomas. Seega võõrale avas ukse Toomas ja õuna andis Mari.
Tabelisse võite selguse mõttes ka veergudesse nimede taha märkida „tõene“, „väär“ lühenditega t ja v, see aitab selgemini tulemuseni jõuda

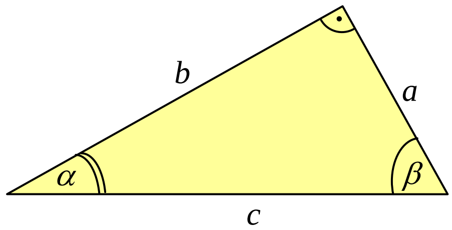
Vastaja	Ukse avas	I	II	III	IV	Õuna andis	I	II	III	IV
Toomas	Kersti	t	v	v	v	Mari	t	v	v	t
Kersti	Andi	v	t	v	v	Kersti	v	t	v	v
Andi	Mitte Andi	t	v	t	t	Mari	t	v	v	t
Mari	Toomas	v	v	t	t	Toomas	v	v	t	v

Loogika abil ülesannete lahendamise kohta on valminud TÜ Teaduskooli peaspetsialisti Maksim Ivanovi poolt tore õppematerjal „Hai on kala, aga iga kala pole hai“ ja tema lahkel loal võite vaadata sel teemal videoid näiteülesannetest „Pinginaabrid“ ja „Kõige täpsem“.

Geomeetria

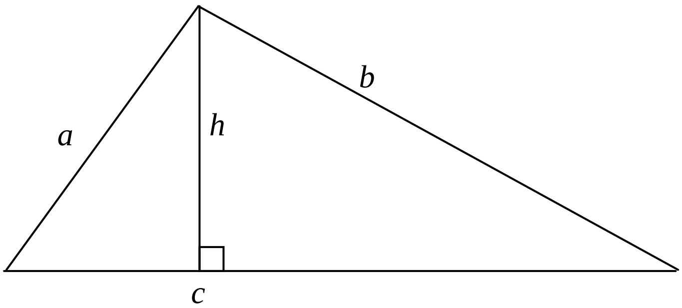
Täisnurkne kolmnurk

Pythagorase teoreem. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi ruut on võrdne kaatetite ruutude summaga ehk $a^2 + b^2 = c^2$.



Täisnurkse kolmnurga pindala $S = \frac{ab}{2}$.

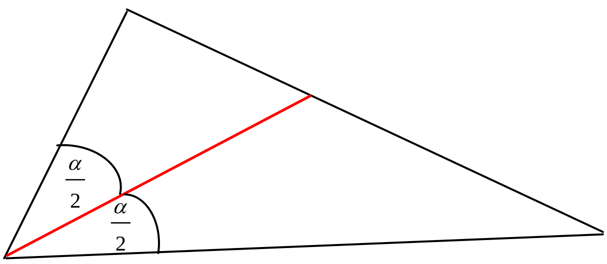
Kolmnurk



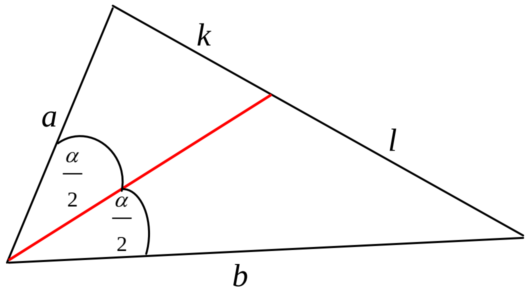
Kolmnurga pindala $S = \frac{ch}{2}$.

Heroni valemi järgi kolmnurga pindala $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p = \frac{a+b+c}{2}$.

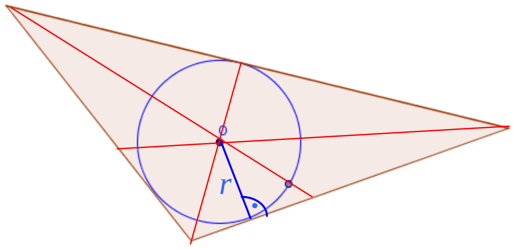
Kolmnurga nurgapoolitaja on kolmnurga sisenurka poolitav lõik vaadeldava nurga tipust vastasküljeni. Igal kolmnurgal on kolm nurgapoolitajat.



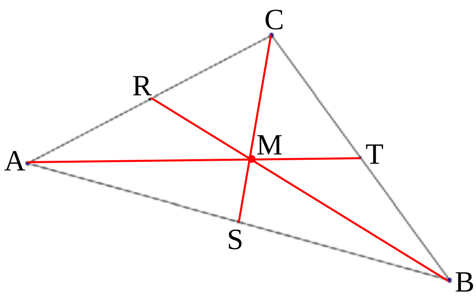
Kolmnurga **nurgapoolitaja jaotab vaadeldava sisenurga vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised kahe ülejäänud küljega,** $\frac{a}{k} = \frac{b}{l}$. Kui järgneval joonisel olevas kolmnurgas on küljed $a = 4$ ja $b = 5$ ja lõik $k = 3$, siis $\frac{4}{3} = \frac{5}{l}$. Siit $4 \cdot l = 3 \cdot 5$ ja seega lõik $l = \frac{15}{4} = 3{,}75$.



Kolmnurga **sisenurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, mis on kolmnurga siseringjoone keskpunkt.**

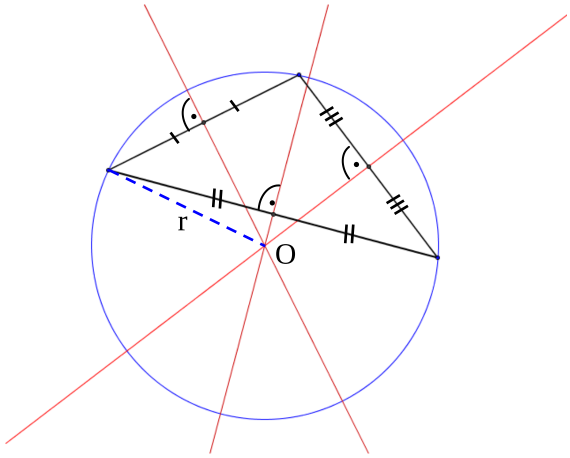


Kolmnurga mediaan on lõik, mis ühendab kolmnurga tippu tema vastaskülje keskpunktiga. Kolmnurgal on kolm mediaani.
Kolmnurga mediaanide omadus.
Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1. Seejuures mediaani tipupoolne osa on kaks korda pikem küljepoolsest osast.
Mediaanide lõikepunk on kolmnurga **raskuskese**.

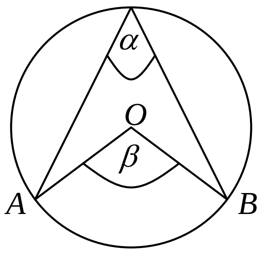


Kolmnurga külje keskristsirgeks nimetatakse sirget, mis läbib külje keskpunkti ja on küljega risti.

Kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, mis on võrdsel kaugusel kolmnurga tippudest.
Kolmnurga keskristsirgete lõikepunkt on **kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks**.



Piirdenurgaks nimetatakse nurka, mille tipp asetseb ringjoonel ja mille on moodustanud ringjoone kaks kõõlu (joonisel nurk α).
Piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast (joonisel nurk β), seega kuna antud joonisel nii kesknurk kui ka piirdenurk toetuvad samale kaarele *AB*, siis $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

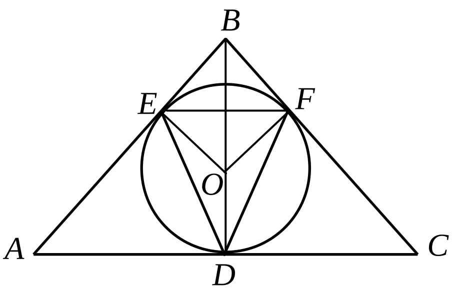


Thalese teoreem. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Ringjoon. Ringjoone pikkus $c = 2\pi r$ ja ringi pindala $S = \pi r^2$, kus r on ringjoone raadius.

Näide 19. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoon puutub kolmnurga külgi punktides D, E ja F.
Tõestada, et ka kolmnurk DEF on võrdhaarne ja leida kolmnurga DEF nurkade suurused.

Lahendus.

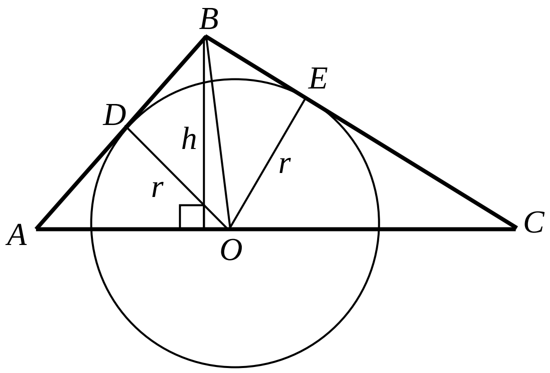


Siseringjoone raadiused on risti kolmnurga ABC külgedega, seega nelinurk EDFO on ruut (lähiküljed võrdsed kolm nurka 90^0), siis peab ka neljas nurk $\angle EOF = 90^0$. Kui aga $\angle EOF = 90^0$, siis $\angle EDF = 45^0$ (kesknurgale EOF toetuva piirdenurga EDF vahel ju seos $\angle EOF = \frac{1}{2}\angle EDF$). Kuna eelduse kohaselt on ΔABC võrdhaarne ja täisnurkne, siis $\angle BAC = \angle BCA = 45^0$ ja nelinurgast AEOD saame, et $\angle EOD = 360^0 - 90^0 - 90^0 - 45^0 = 135^0$ Piirdenurga ja kesknurga vahelisest seose põhjal aga $\angle EOD = \frac{1}{2}\angle EFD$, seega $\angle EFD = 67{,}5^0$. Analoogiliselt $\angle DEF = 67{,}5^0$. Seega tekkinud kolmnurga EFD nurgad on 45^0, $67{,}5^0$ ja $67{,}5^0$, kui aga kolmnurga alusnurgad on võrdsed, siis on kolmnurk EFD võrdhaarne.

Oleme näidanud, et tekkinud kolmnurk on samuti võrdhaarne ja tema nurgad on 45^0, $67{,}5^0$ ja $67{,}5^0$.

Näide 20. Kolmnurka ABC on joonestatud poolring nii, et vastava ringjoone keskpunkt asub kolmnurga küljel AB ja see poolring puutub ülejäänud külgi AC ja BC. Tõestada, et kolmnurga ABC pindala on võrdne külgede AB ja BC pikkuste aritmeetilise keskmise ja selle ringjoone raadiuse korrutisega.

Lahendus. Esmalt teeme taas tekstile vastava joonise.



Olgu ringjoone raadius r ja keskpunkt O ning puutepunktid külgedega AB ja BC vastavalt D ja E. Vaatleme kolmnurki ABO ja OBC. Kuna raadiused on risti vastavate külgedega, siis raadius DO on ühtlasi kolmnurga ABO küljele AB joonestatud kõrgus ja kolmnurga ABO pindala $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r$.

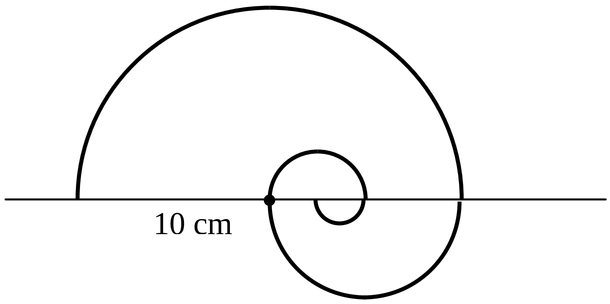
Analoogiliselt kolmnurga OBC pindala $S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r$.

Kokkuvõttes kolmnurga ABC pindala

$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r = r \cdot \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}\right) = \frac{AB + BC}{2} \cdot r$, mott

Näites 20 märkasime, et geomeetriaülesande tõestamisel läks vaja ka algebra teadmisi (sulgude ette toomine), enamasti ongi keerulisemates ülesannetes vaja mitmekülgseid teadmisi ja oskust neid rakendada.

Näide 21. Poisil oli tunnis igav ja ta hakkas joonistama poolringjooni järgmiselt: võttis sirkli haarade vahele 10 cm ja joonistas poolringjoone, seejärel joonistas nii nagu näidatud joonisel järgmise poolringjoone raadiusega, mis oli pool eelmisest. Nõnda oma tegevust jätkates, hakkas teda huvitama küsimus: kui pikk oleks selliselt lõpuni joonistatud spiraal, kuid vastust oma küsimusele ei osanud leida. Leiame talle vastuse.



Lahendus. Ringjoone pikkus on leitav valemiga $c = 2\pi r$, seega pool sellest avaldub kujul πr.
I etapil saame seega joone osa pikkuseks 10π, II etapil 5π, III etapil $2{,}5\pi$, IV etapil $1{,}25\pi$ jne.
Joone osade pikkustest tekib jada 10π; 5π; $2{,}5\pi$; $1{,}25\pi$; ...

See on geomeetriline jada, mille tegur $q = \frac{5\pi}{10\pi} = \frac{1}{2} < 1$. Järelikult on see hääbuv jada ja joone osade pikkuste summa on leitav valemiga $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10\pi}{0{,}5} = 20\pi \approx 62{,}8$ (cm).

Vastus. Spiraali pikkuseks on ligikaudu 62,8 cm.

NB! Olümpiaadil ei lubata kasutada taskuarvutit ja anda tuleks täpne vastus, antud juhul siis 20π (cm).