П. Г. КАРД

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МНОГОСЛОЙНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПЛЕНОК

A 18029
2

Inquipatrio professor
F. Klementiec
autor

23. IX 1971. a.

А-18029

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. Г. КАРД

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МНОГОСЛОЙНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПЛЕНОК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВАЛГУС»
ТАЛЛИН 1971

53
К 21

Художественное оформление Т. Ару

УДК: 535.

Кард П. Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок.

В книге излагается теория анализа и некоторые вопросы теории синтеза многослойных интерференционных пленок. Соответственно, книга состоит из двух частей.

В первой части изложена общая теория расчета спектральных характеристик оптических интерференционных пленок заданного состава (анализ). Особое внимание уделено приведению расчетных формул к наиболее удобному и простому компактному виду. Наряду с этим, подробнее, чем обычно, излагается теория анализа поглощающих пленок. Выведено большое число соотношений между величинами, характеризующими поглощающие пленки, и установлен ряд общих свойств таких пленок. Всего в первой части пять глав: 1. Общие предпосылки. 2. Метод рекуррентных формул. 3. Матричный метод. 4. Дальнейшее развитие теории. 5. Общие свойства поглощающих пленок.

Вторая часть содержит решение некоторых задач синтеза пленок. Она состоит тоже из пяти глав: 6. Теория просветления оптических поверхностей. 7. Синтез нейтральных светоделителей. 8. Теория просветления поглощающих пленок. 9. Светофильтры с нарушенным полным отражением. 10. Некоторые другие применения интерференционных пленок.

Рис. 45. Библиогр. 96.

Tartu Riiklik Ülikool
Raamatukogu
259726

2—3—4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многослойные интерференционные пленки (покрытия) вошли в практику оптического приборостроения сравнительно недавно, не более 30 лет назад. Несколько более долгий срок существования имеют лишь полупрозрачные металлические слои. Развитие теории и практики многослойных пленок в оптике началось со скромных попыток просветления оптических поверхностей с помощью однослойных покрытий. В настоящее же время пленки самого разнообразного состава находят многочисленные применения. Технология изготовления пленок непрерывно совершенствуется и параллельно с этим идет разработка теоретических вопросов в этой области. Многое здесь уже сделано, но еще больше предстоит сделать.

Настоящая монография посвящена исключительно теории анализа и, в меньшей степени, теории синтеза пленок. Многочисленные другие вопросы, например, относящиеся к изготовлению и структуре пленок, определению их параметров и т. д., здесь не затрагиваются. Притом мы будем рассматривать пленки, как это часто делается, в несколько идеализированном виде, именно, будем характеризовать каждую пленку только толщинами и показателями преломления слоев, без учета более тонких особенностей их структуры.

Под проблемой анализа пленок мы подразумеваем «прямую» проблему расчета пленок. В этой проблеме задается состав пленки (т. е. число слоев, их толщины и показатели преломления), а также показатели преломления ограничивающих сред, и требуется определить спектральные характеристики пленки, т. е. зависимость ее коэффициентов отражения, пропускания и поглощения от длины волны и, в случае необходимости, от угла падения. Эта проблема относительно проста. Значительно более сложной и трудной является обратная проблема, где задаются спектральные характеристики пленки, и требуется определить такой ее состав, при котором она имела бы эти заданные характеристики. Эта проблема называется проблемой синтеза пленки. Главная трудность при решении этой проблемы состоит

в неизвестности, имеет ли она вообще решение в том или ином конкретном случае. Если точного решения нет, то задача должна решаться приближенно. Здесь появляется дополнительная трудность, состоящая в том, чтобы из нескольких возможных приближенных решений выбрать оптимальное.

Если проблема анализа пленок к настоящему времени разработана уже довольно хорошо, то этого нельзя сказать о проблеме синтеза. Это и понятно, ввиду относительной трудности этой проблемы. Между тем, с практической точки зрения, именно эта проблема представляет наибольший интерес. Общего метода ее решения, можно сказать, не существует, и едва ли подобный метод вообще возможен. Решение ищется обычно для каждой частной задачи (например, задачи просветления, синтеза светофильтров, отражательных, поляризационных и других пленок).

Монография состоит из введения и двух частей. Первая часть содержит общую теорию анализа многослойных пленок. Вторая часть посвящена проблеме синтеза. В основном монография опирается на результаты работ автора, опубликованные ранее (с 1956 года) в ряде статей (см. [1—25]). Используются также работы других авторов (относящиеся отчасти к более раннему периоду), ссылки на которые даны в соответствующих местах. Однако, сколько-нибудь последовательной библиографии в книге нет, так как это не входит в ее задачи. Тем, кто интересуется литературой, можно указать на книгу Г. В. Розенберга [26], где дана богатая библиография примерно до 1957 года. В настоящей монографии цитируются только те работы, которые в том или ином отношении оказываются близкими к нашему изложению. Впрочем, и эти ссылки ни в какой степени не претендуют на полноту.

Книга написана в надежде, что она окажется полезной для всех оптиков, работающих в области пленок. Это относится в равной мере как к теоретикам, так и к экспериментаторам и практическим работникам.

Автор заранее выражает благодарность за все указания, относящиеся к возможным ошибкам, неточностям и другим недочетам.

ВВЕДЕНИЕ

Многослойная оптическая интерференционная пленка (в дальнейшем просто пленка или покрытие) представляет собой систему из некоторого числа плоскопараллельных, вообще говоря, тонких (т. е. сравнимых по толщине с длиной волны) слоев различных веществ. Эта система ограничена с двух сторон средами, которые в теории обычно полагаются полубесконечными. Ограничивающие среды, а также вещества слоев будем везде предполагать оптически однородными и изотропными. В предельном случае бесконечно большого числа бесконечно тонких слоев вещество пленки становится в перпендикулярном к ней направлении неоднородным, однако, однородность сохраняется в остальных двух направлениях. Таким образом, путем предельного перехода случай неоднородной пленки может в основном рассматриваться средствами теории пленок, состоящих из конечного числа однородных дискретных слоев. В настоящей монографии мы, однако, неоднородных пленок рассматривать не будем. Мы оставим в стороне также случай неизотропных слоев, хотя условие изотропности на практике не всегда выполняется, а в некоторых случаях отказ от изотропности весьма существенен (см., например, [26], стр. 525 и далее).

Конечно, сравнивая теоретические результаты с данными эксперимента, следует помнить, что оба условия — однородности и изотропности — являются идеализацией, и поэтому на практике абсолютно точно не выполняются, даже если пленка изготовлена весьма тщательно. Это относится в особенности к однородности. Известно, например, что, в частности, тонкие металлические слои имеют довольно сложную внутреннюю структуру (см. [26], гл. V). Иногда следует учитывать наличие переходного слоя на границе между двумя слоями. Часто, однако, является достаточным предположение о полной однородности (и изотропности) слоев. Во всяком случае, целесообразно вначале развить теорию на основе этого предположения, чтобы в дальнейшем в необходимых случаях сделать соответствующие уточнения.

Практическая ценность многослойных пленок состоит в том, что с их помощью можно в широких пределах изменять коэффициенты отражения и пропускания на той границе раздела сред, куда вводится пленка. Такое действие пленок основано на интерференции света в слоях. Часто под тонкостью слоев пленки и подразумевается именно то, что проходящий через них свет сохраняет когерентность. Точнее говоря, световые пучки, отражаясь и преломляясь на всех границах раздела между слоями, остаются когерентными. Конечно, такое наглядное представление об отдельных интерферирующих пучках в слоях пленки не обязательно, да и не всегда возможно (особенно в случае сильно поглощающих веществ). Отражение и пропускание света на пленке можно рассматривать без разбиения падающего пучка света на интерферирующие пучки. Вместо этого можно решать задачу о распространении света в слоистой среде единообразно на основе системы уравнений Максвелла. Такое рассмотрение является фактически более строгим. На практике же с одинаковым успехом применяются оба метода. Возможно также применение в нашей проблеме оптического принципа обратимости (см. ниже, § 9), который, будучи основан на тех же уравнениях Максвелла, приводит, естественно, к тем же результатам.

Коэффициенты отражения и пропускания света на данной пленке зависят не только от состава пленки, но и от длины волны света, и, конечно, от угла падения. Эти обстоятельства являются весьма ценными в практическом использовании пленок, хотя в некоторых случаях они являются, наоборот, нежелательными. Таким образом, каждая пленка характеризуется коэффициентами отражения и пропускания, а также, возможно, поглощения, как функциями от длины волны и угла падения. Эти функции называются спектральными характеристиками пленки.

Наряду с длиной волны часто бывает выгодно пользоваться волновым числом как спектральным аргументом этих функций. В нижеследующем мы и будем, как правило, принимать в качестве аргумента волновое число.

Наиболее простой является прозрачная пленка, т. е. такая, во всех слоях которой поглощение полностью отсутствует. Хотя в точном смысле слова этот случай является практически недостижимым пределом, поглощение бывает часто столь незначительно, что им можно пренебречь. К таким пленкам можно применять теорию непоглощающих пленок. Показатели преломления всех слоев прозрачной пленки вещественны, а коэффициент поглощения его равен нулю.

Во многих случаях применяются также поглощающие пленки, содержащие полупроводниковые или металлические слои. Теория таких пленок значительно сложнее. Поглощающие ве-

щества характеризуются, как известно, комплексным значением показателя преломления. Магнитную проницаемость всех сред, как обычно принято в оптике, будем считать равной единице. Особым случаем, который в настоящее время приобретает все большее значение, является случай отрицательного поглощения в искусственно создаваемых средах.

Перечислим теперь главные обозначения, используемые везде в этой книге.

$E_{\parallel}$, $E_{\perp}$ — электрический вектор или его амплитуда в плоской волне, поляризованной параллельно или перпендикулярно плоскости падения. Направлением поляризации считается направление электрического вектора.

λ — длина волны света в вакууме.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число в вакууме.

c — скорость света в вакууме.

ω — круговая частота света.

ϑ — угол падения или преломления.

$n = \eta - i\varkappa$ — показатель преломления и его вещественная и мнимая части.

h — толщина слоя.

$$a = knh\cos\vartheta \tag{0.1}$$

— безразмерная величина, пропорциональная оптической толщине слоя, выраженной в длинах волн.

r — амплитудный коэффициент отражения, т. е. отношение комплексной амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей волны.

t — амплитудный коэффициент пропускания первого рода, т. е. отношение комплексной амплитуды электрического вектора прошедшей волны к амплитуде электрического вектора падающей волны.

$$d = t\sqrt{\frac{n\cos\vartheta}{n_0\cos\vartheta_0}}, \tag{0.2}$$

где индекс 0 означает исходную сферу, а величины без индекса относятся к конечной среде — амплитудный коэффициент пропускания второго рода.

R — энергетический коэффициент отражения.

D — энергетический коэффициент пропускания.

A — энергетический коэффициент поглощения.

$a = \frac{r}{d}$, $b = \frac{1}{d}$ — вспомогательные величины, связанные с коэффициентами r и d.

Остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

По поводу амплитудных коэффициентов отражения и пропускания здесь кажется уместным следующее разъяснение. Если ограничивающие среды прозрачны, и притом углы падения и преломления ϑ_0 и ϑ вещественны, то, как хорошо известно, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} R &= rr^*, \\ D &= dd^*. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Между прочим, цель введения амплитудного коэффициента пропускания второго рода (по формуле (0.2)) в том и состоит, чтобы можно было выразить D наиболее простым образом, аналогично R. Вместе с тем, как увидим ниже, употребление d вместо t значительно упрощает и многие другие формулы.

Формулы (0.3), однако, перестают быть применимыми в случае, если ограничивающие среды (или хотя бы одна из них) становятся поглощающими или углы ϑ_0 и ϑ (или хотя бы один из них) становятся комплексными (впрочем, равенство $R = rr^*$ остается верным, какова бы ни была подложка и угол преломления в ней, лишь бы исходная среда была прозрачна и угол падения вещественен). Тем не менее, оказывается весьма целесообразным сохранить за величинами r, t и d их обозначения и даже названия, несмотря на то, что они уже не имеют простой связи с энергетическими коэффициентами отражения и пропускания. Подробнее об этом см. в § 1.

Временную зависимость монохроматической волны мы будем изображать множителем $e^{i\omega t}$. Фактически этот множитель у нас нигде фигурировать не будет, поскольку он сокращается. Здесь важен лишь выбор знака мнимой единицы в экспоненте $+i\omega t$.

Сделаем, наконец, еще одно замечание о выборе знака r в случае параллельной поляризации. Одни авторы пишут коэффициент Френеля в этом случае в виде

$$\frac{\tan(\vartheta_0 - \vartheta)}{\tan(\vartheta_0 + \vartheta)},$$

другие берут его с обратным знаком. Первый выбор приводит к несоответствию со случаем нормального падения, если устремить ϑ_0 к нулю; второй выбор приводит к несоответствию со

случаем скользящего падения, если устремить ϑ_0 к $\frac{\pi}{2}$. Ясно, что эта двойственность объективна и неустранима, будучи обусловлена тем, что направление отраженного луча отличается от направления луча падающего, тогда как фазы лучей сравнимы, строго говоря, только тогда, если лучи имеют одно и то же направление, или, по крайней мере (как имеет место для падающего и преломленного лучей), если они допускают однозначную мысленную процедуру, делающую их однонаправленными. Но в случае падающего и отраженного лучей мыслимая процедура подобного рода двояка ($\vartheta_0 \to 0$ и $\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}$); поэтому и фаза отраженного луча определяется с точностью до π. Иначе говоря, ось положительного направления электрического вектора отраженной волны может быть выбрана произвольно в ту или другую сторону, независимо от выбора положительного направления электрического вектора падающей волны. Для определенности мы раз условимся писать формулу Френеля для параллельной поляризации в виде:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\vartheta_0 - \vartheta)}{\tan(\vartheta_0 + \vartheta)}. \qquad (0.4)$$

Чтобы избежать связанных с этим выбором возможных недоразумений, достаточно условиться приписывать, если нужно, падающему свету перпендикулярную поляризацию в случае нормального падения.

Заметим, что наш выбор знака $r_{\parallel}$ в формуле (0.4) является естественным, если сравнивать фазы волн не по электрическому, а по магнитному вектору. В самом деле, магнитный вектор волны, поляризованной параллельно плоскости падения, перпендикулярен плоскости падения. Естественно направить положительную ось магнитного вектора падающей и отраженной волн в одну и ту же сторону. Но тогда коэффициент Френеля и примет как раз тот знак, который мы выбрали выше. Однако, это не значит, что противоположный выбор был бы неверен. Важно только, сделав выбор, придерживаться его неизменно на всех границах раздела системы слоев.

В заключение отметим, что происходившая недавно длительная дискуссия (см. [27—35]) по вопросу о знаке $r_{\parallel}$ представляется нам лишенной большого смысла. Правильное решение этого вопроса можно найти в книге А. В. Соколова (см. [36]), на стр. 45—49. Наоборот, категорическое утверждение И. Н. Шкляревского и В. К. Милославского [34] о возможности однозначного экспериментального определения знака $r_{\parallel}$ может вызвать лишь недоумение, поскольку произвольное обращение

знака $r_{\parallel}$ означает лишь обращение положительного направления оси электрического вектора отраженной волны, без изменения реального направления самого электрического вектора. Следовательно, если экспериментальные данные совместимы с каким-либо одним из двух значений $r_{\parallel}$, то они так же хорошо совместимы и с другим значением.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АНАЛИЗА МНОГОСЛОЙНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПЛЕНОК

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

§ 1. Отражение и преломление света на границе двух сред

В этом параграфе нашей целью является краткое суммирование элементарных фактов, относящихся к отражению и пропусканию света простой границей раздела двух сред, и, кроме того, введение некоторых определений и величин, которые будут нужны нам в последующей теории.

Обозначив две среды индексами 1 и 2 (свет падает из среды 1), напишем известные формулы Френеля:

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \cdot \frac{\tan(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)},$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \cdot \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \tag{1.1}$$

$$E'_{1\perp} = -E_{1\perp} \cdot \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)},$$

$$E_{2\perp} = E_{1\perp} \cdot \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \tag{1.2}$$

В этих формулах штрих $'$ обозначает обратную (отраженную) волну.

Если обе среды имеют вещественные показатели преломления, и углы ϑ_1 и ϑ_2 тоже вещественны, то вещественны и коэффициенты Френеля, и все три волны — падающая, отраженная и преломленная — представляют собой обычные однородные плоские волны. Интенсивность каждой из этих плоских волн пропорциональна $nE^2\cos\vartheta$, откуда вытекают следующие выражения для энергетических коэффициентов отражения и пропускания:

$$R_{12}^{\parallel}=\frac{\tan^2(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\tan^2(\vartheta_1+\vartheta_2)},$$
$$D_{12}^{\parallel}=\frac{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}{\sin^2(\vartheta_1+\vartheta_2)\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)}, \tag{1.3}$$

$$R_{12}^{\perp}=\frac{\sin^2(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1+\vartheta_2)},$$
$$D_{12}^{\perp}=\frac{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}{\sin^2(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \tag{1.4}$$

причем, естественно, выполняются соотношения:

$$R_{12}^{\parallel}+D_{12}^{\parallel}=1,$$
$$R_{12}^{\perp}+D_{12}^{\perp}=1, \tag{1.5}$$

выражающие, в силу закона сохранения энергии, факт отсутствия поглощения.

Из формул (1.1) и (1.2) вытекают следующие формулы для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания:

$$r_{12}^{\parallel}=\frac{\tan(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1+\vartheta_2)},$$
$$r_{12}^{\perp}=-\frac{\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)} \tag{1.6}$$

и

$$t_{12}^{\parallel}=\frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)},$$
$$t_{12}^{\perp}=\frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}. \tag{1.7}$$

Из последней формулы и формулы (0.2) следуют выражения для амплитудных коэффициентов пропускания второго рода:

$$d_{12}^{\parallel}=\frac{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)},$$
$$d_{12}^{\perp}=\frac{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}}{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}. \tag{1.8}$$

Очевидно, формулы (0.3) в рассматриваемом случае, т. е. в случае простой границы раздела двух сред, и притом, если по-

казатели преломления и углы падения и преломления вещественны, имеют вид:

$$R_{12} = r_{12}^2, \qquad D_{12} = d_{12}^2, \tag{1.9}$$

поскольку r_{12} и d_{12} вещественны.

Переходя к общему случаю, вспомним, что мы условились сохранить выражения (1.6)—(1.8) и на тот случай, если та или другая среда или обе являются поглощающими, или если угол падения или преломления или оба комплексны. Случай, когда исходная среда является поглощающей (т. е. когда n_1 и ϑ_1 комплексны) или хотя бы непоглощающей, но при комплексном значении ϑ_1, представляется на первый взгляд лишенным смысла, так как тогда, вообще говоря, поле падающей волны настолько сильно отличается от поля обычной однородной плоской волны, что реализация такой волны представляется по меньшей мере затруднительной. Однако, формально мы имеем право рассматривать и этот случай (это существенно для дальнейшего). Поле падающей волны полагается в этом случае таким, какое получится, если напишем обычное выражение для однородной плоской волны, и в этом выражении сделаем n_1 и/или ϑ_1 комплексными. Независимо от того, каким образом такое поле могло бы быть реализовано, мы можем по крайней мере формально рассматривать отражение и преломление такой волны. В силу линейности уравнений Максвелла, лежащих в основе формул Френеля, эти формулы сохраняют в этом случае свой вид. Разница будет лишь та, что коэффициенты отражения и преломления будут иметь в этих формулах комплексные значения.

Итак, мы сохраним для общего случая формулы (1.6)—(1.8) для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания. Более того, является целесообразным сохранить за этими величинами и их названия, хотя для них, вообще говоря, уже не выполняются соотношения (0.3) или (1.9). Зато для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания на границе двух сред, в указанном обобщенном смысле, всегда выполняются соотношения:

$$r_{12}^{\parallel 2} + d_{12}^{\parallel 2} = 1, \qquad r_{12}^{\perp 2} + d_{12}^{\perp 2} = 1, \tag{1.10}$$

которые, однако, не равносильны формулам (1.5), и не выражают более сохранения энергии, поскольку соотношения (1.9) уже неверны. Правда, если n_1 и ϑ_1 вещественны, то R_{12} в виде (0.3) сохраняет свой обычный смысл (причем, поскольку r_{12} в рассматриваемом случае комплексно, то $r_{12}r_{12}^* \neq r_{12}^2$); но D_{12},

строго говоря, теряет смысл вообще, если хотя бы одна из величин n_1, n_2, ϑ_1, ϑ_2 комплексна. Только если n_1 и ϑ_1 вещественны, а мнимая часть n_2 мала (слабо поглощающая среда), то преломленную волну можно рассматривать приближенно как однородную плоскую; однако, энергетический коэффициент пропускания D_{12} не равен ни $d_{12}d_{12}^*$, ни d_{12}^2.

В теории многослойных пленок преимущественное значение имеют амплитудные коэффициенты отражения и пропускания (второго рода), так как энергетические коэффициенты имеет смысл вычислять лишь для всей пленки, а не для каждой границы раздела между соседними средами. Поэтому мы и предпочитаем обобщить понятие амплитудных коэффициентов так, чтобы оставались в силе формулы (1.6)—(1.8). Наоборот, формулы (0.3) и (1.9) не столь важны, и поэтому мы можем оставить для них ограниченную применимость. Они верны только при условии вещественности показателей преломления и углов падения и преломления, а формула $R_{12} = r_{12}r^*_{12}$ верна также и тогда, если показатель преломления подложки и/или угол преломления комплексны.

В качестве примера, иллюстрирующего сказанное, рассмотрим случай полного отражения на границе раздела двух диэлектриков (т. е. непоглощающих сред). n_1 и n_2, а также ϑ_1 вещественны, а ϑ_2 комплексно. Положив

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \beta i, \tag{1.11}$$

имеем:

$$\begin{aligned} r_{12}^{\parallel} &= e^{i\varrho_{\parallel}}, \\ r_{12}^{\perp} &= e^{i\varrho_{\perp}}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} \tan\frac{\varrho_{\parallel}}{2} &= \frac{\operatorname{sh} 2\beta}{\sin 2\vartheta_1}, \\ \tan\frac{\varrho_{\perp}}{2} &= \tan\vartheta_1 \operatorname{th}\beta. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} d_{12}^{\parallel} &= \sqrt{2\sin\varrho_{\parallel}}\exp\left[i\left(\frac{\varrho_{\parallel}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \\ d_{12}^{\perp} &= \sqrt{2\sin\varrho_{\perp}}\exp\left[i\left(\frac{\varrho_{\perp}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Очевидно, соотношения (1.10) выполняются. Кроме того, из (1.12) вытекает $R^{\parallel}_{12} = R^{\perp}_{12} = 1$ (т. е. отражение полно); но $D^{\parallel}_{12}$ и $D^{\perp}_{12}$ не имеют вообще смысла.

Следует подчеркнуть вновь, что этот последний результат не означает, что $d^{\parallel}_{12}$ и $d^{\perp}_{12}$ тоже не имеют смысла. Эти величины не имеют, правда, обычного смысла амплитудных коэффициентов пропускания (хотя мы и продолжаем их так называть), но их практический смысл обнаруживается сразу, когда мы рассматриваем вместо простой границы раздела одно- или многослойную пленку. Об этом будет еще идти речь впереди.

В конце этого параграфа введем наряду с величинами r и d следующие зависящие от них вспомогательные величины:

$$a \equiv \frac{r}{d}, \qquad b \equiv \frac{1}{d} \tag{1.15}$$

так что, наоборот:

$$r = \frac{a}{b}, \qquad d = \frac{1}{b}. \tag{1.16}$$

Как увидим ниже, теория, оперирующая с a и b вместо r и d, получает гораздо более простую и изящную форму. Знание же a и b практически равносильно знанию r и d, так как переход к последним совершается путем крайне простых формул (1.16). Определением (1.15) мы будем пользоваться также для любой многослойной пленки. В частном случае простой границы раздела из формул (1.3) и (1.6) находим:

$$a^{\parallel}_{12} = \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}}, \qquad b^{\parallel}_{12} = \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}} \tag{1.17}$$

и

$$a^{\perp}_{12} = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}}, \qquad b^{\perp}_{12} = \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sqrt{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}}, \tag{1.18}$$

причем, в силу формул (1.9),

$$\begin{aligned} b_{12}^{\parallel 2} - a_{12}^{\parallel 2} &= 1, \\ b_{12}^{\perp 2} - a_{12}^{\perp 2} &= 1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Из последних формул видно, что для простой границы раздела можно всегда ввести такую величину v, что

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{sh} v, \\ b &= \operatorname{ch} v, \end{aligned} \tag{1.20}$$

причем, согласно (1.17) и (1.18),

$$\begin{aligned} v_{12}^{\parallel} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin 2\vartheta_2}, \\ v_{12}^{\perp} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\tan \vartheta_2}{\tan \vartheta_1}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

В заключение напишем несколько формул для случая нормального падения света. Как указано во введении, этот случай следует рассматривать как частный случай перпендикулярной поляризации. Из формул (1.3), (1.7), (1.18) и (1.20) имеем для этого случая следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} r_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ d_{12} &= \frac{2\sqrt{n_1 n_2}}{n_1 + n_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}}, \\ b_{12} &= \frac{n_1 + n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

$$v_{12} = \frac{1}{2} \ln \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.24}$$

§ 2. Принцип обратимости и понятие сопряженной пленки

В теории многослойных оптических пленок оказывается очень плодотворным применение принципа обратимости. В статье Книттла [37] впервые показано применение этого прин-

ципа в теории непоглощающих пленок. В общей теории пленок, учитывающей поглощение, принцип обратимости до самого недавнего времени не применялся. Это и понятно, так как принцип обратимости в оптике (и вообще в электродинамике) формулировался до сих пор только в частном случае отсутствия проводящих (т. е. поглощающих) сред. Впервые в статьях [18, 19] автора был сформулирован обобщенный принцип обратимости и показано его применение в теории пленок. Независимо от него обобщение оптического принципа обратимости сформулировано Шантавым [38].

Известный до сих пор принцип обратимости в электродинамике состоит в том, что при инверсии времени, $t \to -t$, и одновременном преобразовании плотности заряда $\rho \to \rho$ и векторов поля, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{H} \to -\mathbf{H}$, $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$ уравнения Максвелла остаются неизменными, если член с $\sigma\mathbf{E}$ (σ — проводимость) отсутствует и диэлектрическая проницаемость вещественна. В случае же наличия проводящих сред, или, вообще, в случае наличия поглощения, инвариантность уравнений Максвелла нарушается. В силу этого принцип обратимости в электродинамике до сих пор считался справедливым только в случае отсутствия поглощения.

Однако, если мы условимся преобразовывать проводимость по правилу $\sigma \to -\sigma$ и диэлектрическую проницаемость по правилу $\varepsilon \to \varepsilon^*$, то уравнения Максвелла вновь станут инвариантными. Таким образом мы получаем обобщенный принцип обратимости, гласящий: если в данной совокупности сред возможен какой-либо электродинамический процесс, то в другой совокупности сред, отличающейся от данной только знаком проводимости и знаком мнимой части диэлектрической проницаемости каждой среды, возможен обратный во времени процесс, отличающийся от данного только заменой $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ на $-\mathbf{H}$ и $-\mathbf{B}$.

Возможность обращенного процесса и понятие среды с отрицательным поглощением не являются только чисто-формальными элементами теории, так как, хотя в природе сред с отрицательным поглощением не существует, они, как известно, могут быть созданы искусственно. Однако, в настоящей монографии вопрос о реальном осуществлении сред с отрицательным поглощением нас интересовать не будет. Это не значит, что мы будем рассматривать пленки только с положительным поглощением. Наоборот, в целях наибольшей общности, мы, как правило, не будем делать никаких ограничительных предположений о поглощении; оно может быть как положительным, так и отрицательным. Ограничения мы будем вводить лишь в тех или других конкретных вопросах, где будет нужно. Чаще всего будем предполагать, что поглощение во всех средах положительно.

Нас интересует здесь, однако, в первую очередь понятие сопряженной пленки. В оптике преобразованию $\sigma \to -\sigma$, $\varepsilon \to \varepsilon^*$ соответствует замена показателей преломления их комплексно-сопряженными значениями. Сопряженной по отношению к данной мы будем называть пленку, отличающуюся от данной только тем, что показатели преломления всех сред (т. е. слоев и ограничивающих сред) имеют комплексно-сопряженные значения. В случае наклонного падения света в сопряженной пленке следует, конечно, заменить комплексно-сопряженными значениями также значения всех углов преломления, так как закон преломления Снеллиуса остается тот же.

Как будет видно из дальнейшего, понятие сопряженной пленки является весьма плодотворным, так как позволяет придать всей теории простой и законченный вид, и оказывается незаменимым средством при выводе многих важных соотношений.

Все величины, относящиеся к сопряженной пленке, будем обозначать в дальнейшем всегда знаком $\sim$ (тильдой). Отметим соотношения, непосредственно вытекающие из определения сопряженной пленки:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n} &= n^*, \\ \tilde{\vartheta} &= \vartheta^*, \\ \tilde{\alpha} &= \alpha^* \end{aligned}\right\} \qquad (1.25)$$

(определение величины α см. во введении, формула (0.1)). Аналогичные соотношения имеют место также для коэффициентов r_{12}, t_{12}, d_{12}, a_{12}, b_{12} на простой границе раздела двух сред, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{r}_{12} &= r_{12}^*, \\ \tilde{t}_{12} &= t_{12}^*, \\ \tilde{d}_{12} &= d_{12}^*, \\ \tilde{a}_{12} &= a_{12}^*, \\ \tilde{b}_{12} &= b_{12}^*. \end{aligned}\right\} \qquad (1.26)$$

Если обе среды непоглощающие и полного отражения нет, то эти коэффициенты вещественны, так что формулы (1.26) равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{r}_{12} &= r_{12}, \\ \tilde{t}_{12} &= t_{12}, \\ \tilde{d}_{12} &= d_{12}, \\ \tilde{a}_{12} &= a_{12}, \\ \tilde{b}_{12} &= b_{12}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

как и должно быть, ибо, если поглощения нет, то сопряжение ничего не меняет. Если же среды непоглощающие, но имеет место полное отражение, то формулы (1.27) не имеют места, так как коэффициенты комплексны (см. (1.12) и (1.14)). Сопряжение означает в этом случае переход к комплексно-сопряженному значению угла преломления, тогда как показатели преломления, будучи вещественными, конечно, остаются теми же. Все коэффициенты $\tilde{r}_{12}$ и т. д. оказываются, как и в общем случае поглощающих сред, равными своим комплексно-сопряженным значениям r_{12}^* и т. д., т. е. имеют место формулы (1.26).

ГЛАВА ВТОРАЯ

МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ

§ 3. Рекуррентные формулы Власова

А. Г. Власов впервые (см. [39]) нашел весьма действенный метод расчета (анализа) многослойных пленок. Позже был развит так называемый матричный метод. Фактически оба метода очень близки друг к другу. В частности, метод рекуррентных формул можно почти с самого начала представить в матричной форме. Совпадают, конечно, и результаты, даваемые обоими методами, хотя они могут отличаться по внешнему виду. Ход рассуждений, однако, в обоих методах различен.

Метод Власова основан на учете многократных отражений и преломлений луча в слоях пленки с последующим суперпонированием этих лучей. Суперпонирование совершается просто путем суммирования амплитуд, с учетом фазы каждого луча (принцип интерференции).

Основными формулами в методе Власова являются его рекуррентные формулы, вывод которых будет дан в этом параграфе. Впоследствии мы приведем их к форме, найденной автором настоящей монографии (см. [13]).

Перенумеруем слои пленки в направлении падения света индексами 1, 2, ... N. Исходную среду обозначим индексом 0, подложку (конечную среду) — индексом $N+1$. Наряду со всей N-слойной пленкой будем рассматривать пленки, состоящие лишь из части слоев; для каждой такой «подпленки» ограничивающими средами будем считать те среды, которые в данной пленке ее фактически ограничивают. Все величины, относящиеся ко всей пленке, будем обозначать индексами $0,N+1$, а величины, относящиеся к какой-либо из подпленок, будем обозначать индексами ее ограничивающих сред. Наименьшей «подпленкой» является 0-слойная «пленка», т. е. простая граница раздела между двумя соседними средами (которые являются «ограничивающими средами» в этом случае).

Величины, относящиеся к какой-либо части пленки (или ко всей пленке) в случае падения света с обратной стороны (в обратном направлении), будем обозначать теми же индексами, написанными в обратном порядке.

Все эти обозначения будут сохранены и в дальнейшем, хотя наряду с ними, где удобно, будут употребляться и другие обозначения.

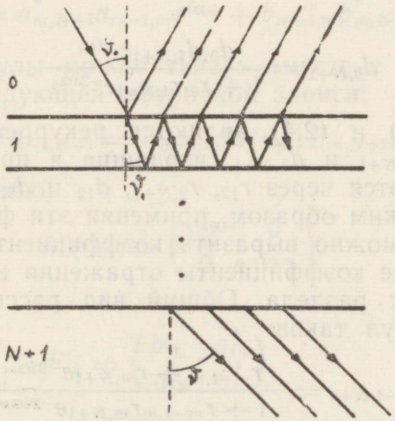

Рис. 1. К методу Власова.

Формулы Власова выводятся следующим образом. Сначала вся пленка рассматривается как совокупность двух подпленок: 0-слойной 01 и $(N-1)$-слойной $1,N+1$, разделенных 1-м слоем, являющимся одновременно конечной средой для первой и исходной средой для второй подпленки (см. рис. 1). Прослеживая ход луча в первом слое, находим амплитудный коэффициент отражения путем суммирования амплитуд всех отраженных лучей в виде:

$$r_{0,N+1} = r_{01} + r_{1,N+1}t_{01}t_{10}e^{-2i\alpha_1} + r_{10}r_{1,N+1}^2t_{01}t_{10}e^{-4i\alpha_1} + \ldots, \qquad (2.1)$$

причем амплитуда падающего луча принята за единицу. Суммируя, находим:

$$r_{0,N+1} = \frac{r_{01} + r_{1,N+1}(t_{01}t_{10} - r_{01}r_{10})\,e^{-2i\alpha_1}}{1 - r_{10}r_{1,N+1}e^{-2i\alpha_1}},$$

или, в силу равенств $t_{01}t_{10} = d_{01}d_{10}$, $r_{10} = -r_{01}$ и $d_{10} = d_{01}$ (см. (0.2), (1.6) и (1.8)), а также учитывая (1.10),

$$r_{0,N+1} = \frac{r_{01} + r_{1,N+1}e^{-2i\alpha_1}}{1 + r_{01}r_{1,N+1}e^{-2i\alpha_1}}. \qquad (2.2)$$

Аналогично, для амплитудного коэффициента пропускания находим:

$$t_{0,N+1} = t_{01}t_{1,N+1}e^{-i\alpha_1} + r_{10}r_{1,N+1}t_{01}t_{1,N+1}e^{-3i\alpha_1} + \ldots, \qquad (2.3)$$

откуда

$$t_{0,N+1} = \frac{t_{01}t_{1,N+1}e^{-i\alpha_1}}{1 + r_{01}r_{1,N+1}e^{-2i\alpha_1}},$$

и, в силу (0.2),

$$d_{0,N+1} = \frac{d_{01}d_{1,N+1}e^{-i\alpha_1}}{1 + r_{01}r_{1,N+1}e^{-2i\alpha_1}}. \qquad (2.4)$$

Формулы (2.2) и (2.4) являются рекуррентными, так как коэффициенты $r_{1,N+1}$ и $d_{1,N+1}$, входящие в правые части этих формул, выражаются через r_{12}, $r_{2,N+1}$, d_{12} и $d_{2,N+1}$ по подобным же формулам. Таким образом, применяя эти формулы последовательно N раз, можно выразить коэффициенты $r_{0,N+1}$ и $d_{0,N+1}$ через амплитудные коэффициенты отражения и пропускания на простых границах раздела. Общий вид рассматриваемых рекуррентных формул таков:

$$\begin{aligned} r_{m-1,N+1} &= \frac{r_{m-1,m} + r_{m,N+1}e^{-2i\alpha_m}}{1 + r_{m-1,m}r_{m,N+1}e^{-2i\alpha_m}}; \\ d_{m-1,N+1} &= \frac{d_{m-1,m}d_{m,N+1}e^{-i\alpha_m}}{1 + r_{m-1,m}r_{m,N+1}e^{-2i\alpha_m}}, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

где $m = 1, 2, \ldots N$ — текущий индекс.

Формулы (2.5) можно переписать на основании (1.15) в следующем более простом виде:

$$\begin{aligned} a_{m-1,N+1} &= a_{m-1,m}b_{m,N+1}e^{i\alpha_m} + a_{m,N+1}b_{m-1,m}e^{-i\alpha_m} \\ b_{m-1,N+1} &= b_{m-1,m}b_{m,N+1}e^{i\alpha_m} + a_{m,N+1}a_{m-1,m}e^{-i\alpha_m}. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Итак, мы получили формулы Власова в наиболее простом частном виде. Они выведены в предположении, что показатели преломления всех сред и углы преломления в них (а также угол падения) вещественны. Только в этом случае имеет смысл рассматривать ход прямолинейных лучей в слоях. Тем не менее эти формулы верны и в самом общем случае. В самом деле, их можно было бы вывести (как это и будет сделано ниже, в § 6) другим путем, именно, на основании граничных условий для векторов поля. Но форма граничных условий совершенно не зависит от того, являются ли показатели преломления и углы преломления вещественными или комплексными. Следовательно, любая формула, содержащая эти величины и выводимая на основе граничных условий, должна иметь одинаковый вид, независимо от вещественности или комплексности показателей преломления и углов преломления.

§ 4. Матричная запись рекуррентных формул

Формулы Власова (2.6) можно записать в матричном виде. Для этого перепишем эти формулы прежде всего для сопряженной пленки (с учетом формул (1.25) и (1.26)) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{*}_{m-1,N+1} &= \tilde{a}^{*}_{m,N+1} b_{m-1,m} e^{i\alpha_m} + a_{m-1,m} \tilde{b}^{*}_{m,N+1} e^{-i\alpha_m}, \\ \tilde{b}^{*}_{m-1,N+1} &= \tilde{a}^{*}_{m,N+1} a_{m-1,m} e^{i\alpha_m} + b_{m-1,m} \tilde{b}^{*}_{m,N+1} e^{-i\alpha_m}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Последние формулы можно теперь вместе с формулами (2.6) объединить в следующей матричной записи:

$$F_{m-1,N+1} = F_{m-1,m} M(\alpha_m) F_{m,N+1}, \tag{2.8}$$

где, по определению,

$$M(\alpha_m) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_m} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_m} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

и

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} b_{ik} & \tilde{a}^{*}_{ik} \\ a_{ik} & \tilde{b}^{*}_{ik} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Матричная запись удобна не только из-за краткости, но также и тем, что позволяет записать в виде одной компактной формулы окончательный результат. Он, очевидно, таков:

$$F_{0,N+1} = F_{01} M(\alpha_1) F_{12} M(\alpha_2) \ldots F_{N-1,N} M(\alpha_N) F_{N,N+1}. \tag{2.11}$$

Из этой формулы вытекает следующее обобщение формул Власова. Разделим данную N-слойную пленку на две части, разделенные m-ым слоем. Из формулы (2.11) тогда вытекает:

$$F_{0,N+1} = F_{0,m} M(\alpha_m) F_{m,N+1}, \tag{2.12}$$

откуда, учитывая (2.9) и (2.10), заключаем:

$$\begin{aligned} a_{0,N+1} &= a_{0,m} b_{m,N+1} e^{i\alpha_m} + a_{m,N+1} \tilde{b}^{*}_{0,m} e^{-i\alpha_m}, \\ b_{0,N+1} &= b_{0,m} b_{m,N+1} e^{i\alpha_m} + a_{m,N+1} \tilde{a}^{*}_{0,m} e^{-i\alpha_m}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Это и есть обобщение формул Власова. Впервые эти формулы были получены автором иным путем в статье [13]. Из них, конечно, мы можем получить вновь формулы (2.6), как частный случай, положив $m = 1$.

Возвращаясь к формуле (2.11), отметим, что, согласно (1.20), (1.26) и (2.10), матрицы F_{01}, F_{12}, ..., входящие в эту формулу, могут быть написаны в виде:

$$F_{m-1,m} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} v_{m-1,m} & \operatorname{sh} v_{m-1,m} \\ \operatorname{sh} v_{m-1,m} & \operatorname{ch} v_{m-1,m} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

где величины $v_{m-1,m}$ определяются (см. (1.21) и (1.24)) следующим образом:

$$v^{\parallel}_{m-1,m} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin 2\vartheta_{m-1}}{\sin 2\vartheta_m}$$
$$v^{\perp}_{m-1,m} = \frac{1}{2} \ln \frac{\tan \vartheta_m}{\tan \vartheta_{m-1}} . \tag{2.15}$$

и, для нормального падения,

$$v_{m-1,m} = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{m-1}}{n_m} . \tag{2.16}$$

Так как матрица $F_{m-1,m}$ (т. е. матрица F с индексами, отличающимися на единицу) зависит от одного лишь аргумента $v_{m-1,m}$ то полезно ввести для нее другое обозначение:

$$F_{m-1,m} \equiv G(v_{m-1,m}), \tag{2.17}$$

так что

$$G(v) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} v & \operatorname{sh} v \\ \operatorname{sh} v & \operatorname{ch} v \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

и

$$F_{0,N+1} \equiv \begin{pmatrix} b_{0,N+1} & \tilde{a}^*_{0,N+1} \\ a_{0,N+1} & \tilde{b}^*_{0,N+1} \end{pmatrix} = \tag{2.19}$$
$$= G(v_{01}) M(\alpha_1) G(v_{12}) M(\alpha_2) \ldots G(v_{N-1,N}) M(\alpha_N) G(v_{N,N+1}) .$$

Эта последняя формула, которую мы здесь получили, исходя из рекуррентных формул, и которая, наоборот, содержит в себе эти формулы, является основной. Она может быть выведена также другим путем, именно, исходя из матричной записи уравнений поля с самого начала. Ее можно преобразовать также несколькими способами к иному виду. Все эти вопросы мы рассмотрим в следующей главе.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

§ 5. Граничные условия для векторов поля

В этой главе мы изложим так называемый матричный метод и покажем, что он приводит в точности к той же основной формуле (2.19), как и метод Власова. Название «матричный метод» уже укоренилось в литературе и менять его нецелесообразно, хотя оно недостаточно четко характеризует сущность метода, поскольку матричная запись фигурирует и в методе рекуррентных формул. Впервые матричный метод начал широко применять, по-видимому, Аблес (см. [40—42]).

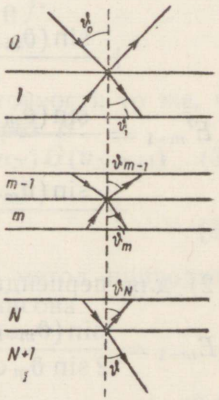

Рис. 2. К матричному методу.

Сущность матричного метода заключается в использовании граничных условий для векторов поля на всех $N+1$ границах раздела N-слойной пленки. В этом параграфе мы запишем основные уравнения, выражающие эти условия.

Рассмотрим, как и ранее, N-слойную пленку, слои которой перенумерованы от 1 до N в направлении падения света (см. рис. 2). В каждой из сред имеется по две плоских волны, одна из которых распространяется в прямом направлении (т. е. в направлении падения света), а другая — в обратном направлении. Только в последней среде обратная волна отсутствует.

Обозначим через E_m амплитуду электрического вектора прямой волны в m-й среде, и через E'_m амплитуду электрического вектора обратной волны в той же среде. Все эти амплитуды в

общем случае комплексны; амплитуды в слоях берутся в конце каждого слоя (т. е. у границы данного слоя со следующим); амплитуды в исходной среде берутся в конце ее, а амплитуды в конечной среде берутся в ее начале.

Тогда граничные условия на границе $(m-1)$-й и m-й сред можно записать в следующем виде:

1) для параллельной поляризации:

$$\begin{aligned} \sin\vartheta_m(E_{m-1}+E'_{m-1}) &= \sin\vartheta_{m-1}(E_m e^{i\alpha_m}+E'_m e^{-i\alpha_m}),\\ \cos\vartheta_{m-1}(E_{m-1}-E'_{m-1}) &= \cos\vartheta_m(E_m e^{i\alpha_m}-E'_m e^{-i\alpha_m}); \end{aligned} \tag{3.1}$$

2) для перпендикулярной поляризации:

$$\begin{aligned} E_{m-1}+E'_{m-1} &= E_m e^{i\alpha_m}+E'_m e^{-i\alpha_m},\\ \sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}(E_{m-1}-E'_{m-1}) &= \\ &= \sin\vartheta_{m-1}\cos\vartheta_m(E_m e^{i\alpha_m}-E'_m e^{-i\alpha_m}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этих формулах $m = 1, 2, \ldots N+1$, причем $\alpha_{N+1} = 0$. Решая эти формулы относительно E_{m-1} и E'_{m-1}, находим:

1) для параллельной поляризации:

$$\begin{aligned} E_{m-1} &= \frac{\sin(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)\cos(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E_m e^{i\alpha_m}+\\ &+\frac{\sin(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)\cos(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E'_m e^{-i\alpha_m};\\ E'_{m-1} &= \frac{\sin(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)\cos(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E_m e^{i\alpha_m}+\\ &+\frac{\sin(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)\cos(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E'_m e^{-i\alpha_m}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

2) для перпендикулярной поляризации:

$$\begin{aligned} E_{m-1} &= \frac{\sin(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E_m e^{i\alpha_m}-\frac{\sin(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E'_m e^{-i\alpha_m},\\ E'_{m-1} &= -\frac{\sin(\vartheta_{m-1}-\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E_m e^{i\alpha_m}+\frac{\sin(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}{2\sin\vartheta_m\cos\vartheta_{m-1}}E'_m e^{-i\alpha_m}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

§ 6. Вывод основной формулы

Записанные в предыдущем параграфе граничные условия (3.3) и (3.4) можно с помощью формул (1.17) и (1.18) представить в следующем виде:

$$\sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}E_{m-1} =$$
$$= \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}(b_{m-1,m}E_m e^{i\alpha_m} + a_{m-1,m}E'_m e^{-i\alpha_m}),$$
$$\sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}E'_{m-1} = \tag{3.5}$$
$$= \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}(a_{m-1,m}E_m e^{i\alpha_m} + b_{m-1,m}E'_m e^{-i\alpha_m}),$$

причем эта форма записи одинакова для обеих поляризаций. В матричной записи эти формулы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}E_{m-1} \\ \sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}E'_{m-1} \end{pmatrix} = G(v_{m-1,m})M(\alpha_m)\begin{pmatrix} \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}E_m \\ \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}E'_m \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

(см. (1.20), (2.9) и (2.18)).

Распространяя рекуррентную формулу (3.6) на всю пленку и учитывая, что интенсивность волны пропорциональна $|n\cos\vartheta E|^2$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})M(\alpha_2)\ldots$$
$$\ldots G(v_{N-1,N})M(\alpha_N)G(v_{N,N+1})\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где r и d относятся ко всей пленке.

Произведение матриц в формуле (3.7) в точности то же, что и в формуле (2.19). Обозначим его здесь через H:

$$H \equiv G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})M(\alpha_2)\ldots G(v_{N-1,N})M(\alpha_N)G(v_{N,N+1}) \tag{3.8}$$

и покажем, что

$$H = F_{0,N+1}. \tag{3.9}$$

Тем самым будет показано, что матричный метод приводит в точности к той же формуле, что и метод Власова.

Итак, требуется показать, что

$$H = \begin{pmatrix} b_{0,N+1} & \tilde{a}^*_{0,N+1} \\ a_{0,N+1} & \tilde{b}^*_{0,N+1} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Для этого заметим, что если в формулах (3.5) перейдем к сопряженной пленке и возьмем комплексно-сопряженные величины, то, согласно (1.25) и (1.26), α, n, ϑ, a и b не изменятся, а i заменится на $-i$. Итак, эти формулы будут иметь тогда такой вид:

$$\sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}\tilde{E}^*_{m-1} = \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}\,(b_{m-1,m}\tilde{E}^*_m e^{-i\alpha_m} +$$
$$+ a_{m-1,m}\tilde{E}'^*_m e^{i\alpha_m}),$$

$$\sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}\,\tilde{E}'^{*}_{m-1} = \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}\,(a_{m-1,m}\tilde{E}^{*}_{m}e^{-i\alpha_m} + b_{m-1,m}\tilde{E}'^{*}_{m}e^{i\alpha_m}),$$

что можно, подобно (3.6), записать как

$$\begin{pmatrix}\sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}\,\tilde{E}'^{*}_{m-1}\\ \sqrt{n_{m-1}\cos\vartheta_{m-1}}\,\tilde{E}^{*}_{m-1}\end{pmatrix} = G(v_{m-1,m})M(\alpha_m)\begin{pmatrix}\sqrt{n_m\cos\vartheta_m}\,\tilde{E}'^{*}_{m}\\ \sqrt{n_m\cos\vartheta_m}\,\tilde{E}^{*}_{m}\end{pmatrix}.$$

Отсюда, совершенно аналогично (3.7), получаем:

$$\begin{pmatrix}\tilde{r}^{*}\\ 1\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}0\\ \tilde{d}^{*}\end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Комбинируя эту формулу с (3.7), имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & \tilde{r}^{*}\\ r & 1\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & \tilde{d}^{*}\end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Отсюда сразу вытекает, что $H_{11}d = 1$, $H_{21}d = r$, $H_{12}\tilde{d}^{*} = \tilde{r}^{*}$ и $H_{22}\tilde{d}^{*} = 1$. Это и означает, что $H = F_{0,N+1}$.

Итак, мы получили вновь формулу (2.19), которую напишем здесь в виде двух раздельных формул:

$$F_{0,N+1} = \begin{pmatrix}b_{0,N+1} & \tilde{a}^{*}_{0,N+1}\\ a_{0,N+1} & \tilde{b}^{*}_{0,N+1}\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$F_{0,N+1} = G(v_{01})M(\alpha_1)G(v_{12})M(\alpha_2)\ldots \\ \ldots G(v_{N-1,N})M(\alpha_N)G(v_{N,N+1}). \tag{3.14}$$

Эти формулы являются основными формулами всей теории многослойных оптических пленок.

Сделаем еще по поводу этих формул следующее немаловажное замечание. В случае отсутствия поглощения, если к тому же все углы падения и преломления вещественны (т. е. ни в одной среде не выполнено условие полного отражения), переход к сопряженной пленке ничего в правой части формулы (3.14) не меняет; следовательно, тогда $\tilde{F}_{0,N+1} = F_{0,N+1}$, откуда $\tilde{a}_{0,N+1} = a_{0,N+1}$ и $\tilde{b}_{0,N+1} = b_{0,N+1}$. Эти равенства в случае наличия поглощения, естественно, не имеют места. Однако, они верны также в случае нарушенного полного отражения в каких-либо слоях. В самом деле, если m-й слой является полноотражающим, то сопряжение означает замену $v_{m-1,m} \to v^{*}_{m-1,m}$, $\alpha_m \to \alpha_m{}^{*} = -\alpha_m$ и $v_{m,m+1} \to v^{*}_{m,m+1}$. Следовательно, наше утверждение означает, что

$$G(v_{m-1,m})M(\alpha_m)G(v_{m,m+1}) = G(v^{\bullet}_{m-1,m})M(-\alpha_m)G(v^{\bullet}_{m,m+1}).$$

Это равенство можно иначе записать в виде:

$$M(-\alpha_m) = G(2i\,\mathrm{Im}(v_{m-1,m}))M(\alpha_m)G(2i\,\mathrm{Im}(v_{m,m+1}))$$

(см. ниже, формулы (3.23)). Но, в силу формул (1.11) и (1.21), $2i\,\mathrm{Im}(v_{m-1,m}) = \frac{i\pi}{2}$ и $2i\,\mathrm{Im}(v_{m,m+1}) = -\frac{i\pi}{2}$. Следовательно, $G(2i\,\mathrm{Im}(v_{m-1,m})) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $G(2i\,\mathrm{Im}(v_{m,m+1})) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. А так как $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$, то наше утверждение доказано.

Но в случае ненарушенного полного отражения (т. е. если угол преломления в подложке комплексный), как и в случае наличия поглощения, $\tilde{a}_{0,N+1} \neq a_{0,N+1}$ и $\tilde{b}_{0,N+1} \neq b_{0,N+1}$.

§ 7. Простейшие следствия из основной формулы

Из формул (3.13) и (3.14) вытекает прежде всего следующее соотношение:

$$b\tilde{b}^* - a\tilde{a}^* = 1 \tag{3.15}$$

(мы опускаем индексы $0, N+1$). Это соотношение вытекает из того, что, согласно (2.9) и (2.18), $\det G(v_{m-1,m}) = 1$ и $\det M(\alpha_m) = 1$. Следовательно, $\det F = 1$, откуда и получается (3.15). Доказанная формула является обобщением формулы

$$bb^* - aa^* = 1, \tag{3.16}$$

верной в случае отсутствия поглощения и ненарушенного полного отражения и равносильной равенству $R + D = 1$. В случае же простой границы раздела сред, хотя бы и поглощающих, $\tilde{a}^* = a$ и $\tilde{b}^* = b$, так что (3.15) сводится к (1.19).

Далее, выведем следующие важные формулы:

$$\begin{aligned} a' &= -\tilde{a}^*, \\ b' &= b, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где штрих означает обратное направление падения света, т. е. падение света на пленку со стороны подложки и притом под углом, равным прежнему углу преломления в подложке, так что все углы во всех средах остаются те же.

Чтобы получить формулы (3.17), заметим, что согласно (1.25) и (1.26) из (2.19) вытекает:

$$\tilde{F}^* = G(v_{01})M(-\alpha_1)G(v_{12})M(-\alpha_2)\ldots \\ \ldots G(v_{N-1,N})M(-\alpha_N)G(v_{N,N+1});$$

с другой стороны

$$F^{-1} = G(v_{N+1,N})M(-\alpha_N)G(v_{N,N-1})M(-\alpha_{N-1})\ldots \\ \ldots G(v_{21})M(-\alpha_1)G(v_{10}) = \tilde{F}'^*. \tag{3.18}$$

Но

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{b}^* & -\tilde{a}^* \\ -a & b \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{F}'^* = \begin{pmatrix} \tilde{b}'^* & a' \\ \tilde{a}'^* & b' \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $b' = b$ и $a' = -\tilde{a}^*$, что и требовалось доказать. Частным случаем формулы $a' = -\tilde{a}^*$ в случае отсутствия поглощения является формула $a' = -a^*$, которая была выведена уже ранее рядом авторов (см., например, [43]).

Наконец, выведем здесь еще одну важную формулу, которая показывает роль матрицы $F_{0,N+1}$ как матрицы преобразования амплитуд прямой и обратной волн в ограничивающих пленку средах.

В самом общем случае свет может падать на пленку с обеих сторон. Обозначим амплитуды прямой и обратной волн в 0-й среде через A_0 и A'_0 и в $(N+1)$-й среде через A_{N+1} и A'_{N+1} (см. рис. 3). Заметим, что, в соответствии с введенным выше понятием амплитудного коэффициента пропускания второго рода (см. формулу (0.2)), под амплитудой волны мы будем подразумевать здесь амплитуду электрического вектора волны, умноженную на $\sqrt{n\cos\vartheta}$. Тогда, на основании (3.8) и (3.9), можем переписать формулу (3.7) в виде:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_0 r \end{pmatrix} = F_{0,N+1}\begin{pmatrix} A_0 d \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Аналогично,

$$\begin{pmatrix} A'_{N+1} \\ A'_{N+1} r' \end{pmatrix} = F_{N+1,0}\begin{pmatrix} A'_{N+1} d' \\ 0 \end{pmatrix}$$

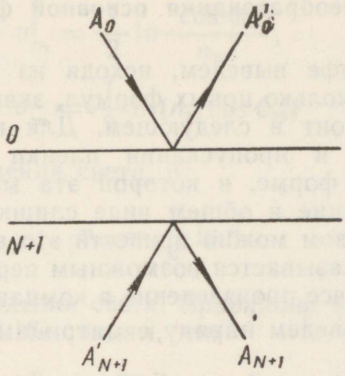

Рис. 3.

Последнюю формулу можно написать, учитывая (3.18), как

$$\begin{pmatrix} A'_{N+1}d' \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{F}^*_{0,N+1} \begin{pmatrix} A'_{N+1} \\ A'_{N+1}r' \end{pmatrix}.$$

Умножим это равенство слева на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; так как $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{F}^*_{0,N+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F_{0,N+1}$, то получим:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A'_{N+1}d' \end{pmatrix} = F_{0,N+1} \begin{pmatrix} A'_{N+1}r' \\ A'_{N+1} \end{pmatrix}$$

Наконец, сложим результат с (3.19). Так как в 0-й среде волны с амплитудами $A_0 r$ и $A'_{N+1}d'$ являются обратными, то, согласно нашим обозначениям, их сумма равна A'_0. Точно так же $A_0 d + A'_{N+1}r' = A_{N+1}$. Следовательно, имеем:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A'_0 \end{pmatrix} = F_{0,N+1} \begin{pmatrix} A_{N+1} \\ A'_{N+1} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Эта формула (в ином виде), насколько нам известно, выведена впервые в диссертации А. П. Хапалюка [44] (см. также [45, 46]). Там же подробно показано ее применение для расчета условий самовозбуждения и генерации. Нас она будет интересовать в иных аспектах (см. ниже, гл. V).

§ 8. Преобразования основной формулы

В этом параграфе выведем, исходя из основных формул (3.13) и (3.14), несколько новых формул, эквивалентных последним. Цель их состоит в следующем. Для нахождения коэфициентов отражения и пропускания пленки нужно вычислить матрицу F. В той форме, в которой эта матрица записана в (3.14), это вычисление в общем виде слишком громоздко. Покажем, каким образом можно привести это выражение для F к такому виду, где оказывается возможным перемножить матрицы на деле и записать все произведение в компактной общей форме.

Прежде всего, введем наряду с матрицами G и M еще матрицы $\overline{G}(v)$ и $\overline{M}(\alpha)$:

$$\overline{G}(v) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} v & -\operatorname{sh} v \\ \operatorname{sh} v & -\operatorname{ch} v \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\overline{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Легко непосредственной проверкой убедиться в справедливости следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} G(u)\,G(v) &= G(u+v), \\ \overline{G}(u)\,\overline{G}(v) &= G(u-v), \\ G(u)\,\overline{G}(v) &= \overline{G}(u+v), \\ \overline{G}(u)\,G(v) &= \overline{G}(u-v) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

и

$$\left.\begin{aligned} M(\alpha)\,M(\beta) &= M(\alpha+\beta), \\ \overline{M}(\alpha)\,\overline{M}(\beta) &= M(\alpha-\beta), \\ M(\alpha)\,\overline{M}(\beta) &= \overline{M}(\alpha+\beta), \\ \overline{M}(\alpha)\,M(\beta) &= \overline{M}(\alpha-\beta). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Теперь приступим к преобразованию. Для этого имеется два основных способа (см. [2, 6]).

Первый способ. Введем вместо величин v с двумя индексами (см. формулы (1.21) и (1.24), а также (2.15) и (2.16)) соответствующие одноиндексные величины, зависящие, следовательно, от параметров одного только вещества. Определение их таково:

$$v_m^{\parallel} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \vartheta_m}{n_m}, \qquad v_m^{\perp} = \frac{1}{2} \ln (n_m \cos \vartheta_m) \tag{3.25}$$

для наклонного падения света, и

$$v_m = \frac{1}{2} \ln n_m \tag{3.26}$$

для нормального падения света. Сравнивая эти формулы с формулами (2.15) и (2.16), видим, что

$$v_{m-1,m} = v_{m-1} - v_m. \tag{3.27}$$

Отсюда, согласно (3.23),

$$G(v_{m-1,m}) = G(v_{m-1})\, G(-v_m). \tag{3.28}$$

Подставив это выражение в формулу (3.14) для F и собирая члены, относящиеся к одному слою, в одну группу, находим:

$$F = G(v_0)\,[G(-v_1)\,M(\alpha_1)\,G(v_1)\,][G(-v_2)\,M(\alpha_2)\,G(v_2)\,]\ldots \\ \ldots[G(-v_N)\,M(\alpha_N)\,G(v_N)\,]\,G(-v_{N+1}). \tag{3.29}$$

Обозначим:

$$G(-v_m)\,M(\alpha_m)\,G(v_m) = L_m, \tag{3.30}$$

так что

$$L_m = \cos \alpha_m \cdot E + i \sin \alpha_m \overline{G}(-2v_m), \tag{3.31}$$

где E — единичная матрица. Подставляя в (3.29), имеем:

$$F = G(v_0)\, L_1 L_2 \ldots L_N G(-v_{N+1}). \tag{3.32}$$

В этом выражении крайние сомножители зависят только от ограничивающих сред, а матрицы L_1, L_2, ... L_N каждая только от слоя с тем же индексом.

Матрицы, сходные с матрицами L, и зависящие, подобно им, только от характеристик одного слоя, использовались уже ранее другими авторами в теории многослойных пленок под названием матриц интерференции (см., например, [26], стр. 200 и далее). Наше определение выгодно отличает матрицы L от аналогичных, использовавшихся ранее, благодаря их более простой структуре, что позволяет легко произвести дальнейшее преобразование основной формулы.

Возвращаясь к формуле (3.32), отметим прежде всего, что она отличается от исходной формулы более простым видом. Но главная ее выгода состоит в том, что она допускает перемноже-

ние всех матриц и запись окончательного результата в компактной форме. Именно, учитывая (3.23), находим:

$$F = \sum i^s \sin\alpha_{k_1} \sin\alpha_{k_2} \ldots \sin\alpha_{k_s} \cos\alpha_{l_1} \cos\alpha_{l_2} \ldots \cos\alpha_{l_{N-s}} \cdot$$

$$\cdot \overset{(-)^s}{G}(v_0 - 2v_{k_1} + 2v_{k_2} - + \ldots + (-1)^s 2v_{k_s} - (-1)^s v_{N+1}), \quad (3.33)$$

где сумма берется по всем возможным 2^N распределениям индексов $1, 2, \ldots N$ на две группы: $k_1, k_2, \ldots k_s$ и $l_1, l_2, \ldots l_{N-s}$ $(s = 0, 1, \ldots N)$, причем $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, а $\overset{(-)^s}{G}$ означает G при s четном и $\overline{G}$ при s нечетном.

Из формулы (3.33), согласно (3.13), можно написать:

$$a_{0,N+1} = \sum i^s \sin\alpha_{k_1} \sin\alpha_{k_2} \ldots \sin\alpha_{k_s} \cos\alpha_{l_1} \cos\alpha_{l_2} \ldots \cos\alpha_{l_{N-s}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sh}(v_0 - 2v_{k_1} + 2v_{k_2} - + \ldots + (-1)^s 2v_{k_s} - (-1)^s v_{N+1}). \quad (3.34)$$

и

$$b_{0,N+1} = \sum i^s \sin\alpha_{k_1} \sin\alpha_{k_2} \ldots \sin\alpha_{k_s} \cos\alpha_{l_1} \cos\alpha_{l_2} \ldots \cos\alpha_{l_{N-s}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{ch}(v_0 - 2v_{k_1} + 2v_{k_2} - + \ldots + (-1)^s 2v_{k_s} - (-1)^s v_{N+1}). \quad (3.35)$$

В работе [2] впервые были сформулированы правила написания выражений для $a_{0,N+1}$ и $b_{0,N+1}$, по существу тождественных с формулами (3.34) и (3.35).

Второй способ. Используя (3.24), перепишем выражение для F в виде:

$$F = M(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N) \cdot$$
$$\cdot [M(-\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_N) G(v_{01}) M(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)] \cdot$$
$$\cdot [M(-\alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_N) G(v_{12}) M(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_N)] \cdot$$
$$\cdot [M(-\alpha_N) G(v_{N-1,N}) M(\alpha_N)] [M(0) G(v_{N,N+1}) M(0)].$$

Но

$$M(-\alpha) G(v) M(\alpha) = \operatorname{ch} v \cdot E + \operatorname{sh} v \overline{M}(-2\alpha). \quad (3.36)$$

Следовательно,

$$F = M(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N) \cdot$$
$$[\operatorname{ch} v_{01} \cdot E + \operatorname{sh} v_{01} \overline{M}(-2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \ldots - 2\alpha_N)] \cdot$$
$$\cdot [\operatorname{ch} v_{12} \cdot E + \operatorname{sh} v_{12} \overline{M}(-2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \ldots - 2\alpha_N)] \cdot$$
$$\ldots$$
$$\cdot [\operatorname{ch} v_{N-1,N} \cdot E + \operatorname{sh} v_{N-1,N} \overline{M}(-2\alpha_N)] [\operatorname{ch} v_{N,N+1} \cdot + \operatorname{sh} v_{N,N+1} \overline{M}(0)].$$

Перемножая матрицы и имея в виду (3.24), находим:

$$F = \sum \operatorname{xh} v_{01} \operatorname{xh} v_{12} \ldots \operatorname{xh} v_{N,N+1} \overset{(-)^s}{M} (\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_N), \quad (3.37)$$

где xh означает sh или ch, причем сумма берется по всем возможным (их число равно 2^{N+1}) комбинациям гиперболических синусов и косинусов; s есть число гиперболических синусов в данном члене суммы; $\overset{(-)^s}{M}$ означает M при s четном и $\overline{M}$ при s нечетном; знаки членов аргумента $\overset{(-)^s}{M}$ определяются правилом: знак первого члена есть $+$, если $\operatorname{xh} v_{01}$ есть $\operatorname{ch} v_{01}$, и $-$, если $\operatorname{xh} v_{01}$ есть $\operatorname{sh} v_{01}$; знак члена α_{m+1} совпадает со знаком члена α_m, если $\operatorname{xh} v_{m,m+1}$ есть $\operatorname{ch} v_{m,m+1}$ и противоположен ему, если $\operatorname{xh} v_{m,m+1}$ есть $\operatorname{sh} v_{m,m+1}$.

Из формулы (3.37) вытекают следующие выражения для $a_{0,N+1}$ и $b_{0,N+1}$:

$$a_{0,N+1} = \sum \operatorname{xh} v_{01} \operatorname{xh} v_{12} \ldots \operatorname{xh} v_{N,N+1} \exp[-i(\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_N)] \quad (3.38)$$

и

$$b_{0,N+1} = \sum \operatorname{xh} v_{01} \operatorname{xh} v_{12} \ldots \operatorname{xh} v_{N,N+1} \exp[i(\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_N)], \quad (3.39)$$

где все обозначения те же, что и в формуле (3.37), только сумма берется в формуле (3.38) по всем комбинациям с нечетным числом гиперболических синусов, а в формуле (3.39) по всем комбинациям с четным числом гиперболических синусов. Эквивалентные формулам (3.38) и (3.39) правила были впервые сформулированы в статье [6].

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

§ 9. Применение принципа обратимости к выводу основных формул

В предыдущих главах мы вывели основную формулу (3.14) двумя способами: исходя из рекуррентных формул (2.13) и исходя из граничных условий. В § 7 мы получили также важные соотношения (3.15) и (3.17). В настоящем параграфе покажем, что все эти формулы можно вывести еще одним путем, именно, применяя принцип обратимости в том обобщенном виде, который мы сформулировали уже в § 2. Обобщая метод Книттла [37], мы сможем получить как соотношения (3.15) и (3.17), так и рекуррентные формулы Власова, из которых уже известным путем можно получить все остальное (см. [18, 19]). Аналогичные выводы сделаны независимо также Книттлом [47].

Рассмотрим, прежде всего, пленку, ограниченную двумя непоглощающими средами. Обозначим падающий, отраженный и прошедший лучи индексами I, II, III, соответственно (рис. 4). Приняв амплитуду падающего луча за единицу, будем иметь амплитуды лучей II и III равными r и t. Если теперь обратим ход лучей II и III (заменив, конечно, данную пленку сопряженной), то в исходной среде получим обращенный луч I, а в подложке отсутствие света (кроме, конечно, самого обращенного луча III), т. е.

$$r\tilde{r}^* + t\tilde{t}'^* = 1, \tag{4.1}$$

$$r\tilde{t}^* + t\tilde{r}'^* = 0. \tag{4.2}$$

Отсюда находим:

$$r' = -\frac{\tilde{r}^* t}{\tilde{t}^*} \tag{4.3}$$

и

$$t' = \frac{1 - r\tilde{r}^*}{\tilde{t}^*}, \tag{4.4}$$

а также

$$r\tilde{r}^* = r'\tilde{r}'^*, \tag{4.5}$$

$$t\tilde{t}'^* = t'\tilde{t}^*. \tag{4.6}$$

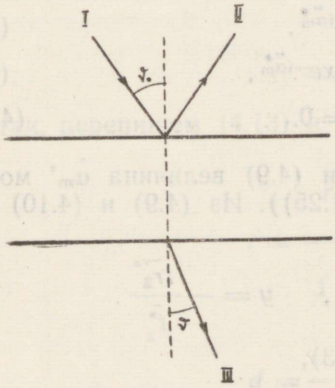

Рис. 4. К принципу обратимости.

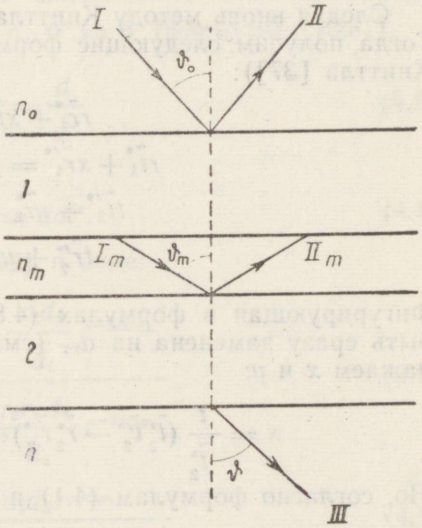

Рис. 5. К принципу обратимости.

Для дальнейшего важно обратить внимание на то обстоятельство, что формулы (4.1)—(4.6) справедливы не только в том случае, когда ограничивающие среды прозрачны, но и тогда, если они являются поглощающими. Это обусловлено тем, что условие прозрачности этих сред не использовано нами нигде, кроме предположения о существовании «лучей» I, II и III, которые должны означать в сущности плоские волны. Если, однако, запишем выражения плоских волн, подставив в них вместо вещественных значений показателей преломления и углов падения и преломления комплексные, то для таких выражений сохранят силу все предыдущие рассуждения (поскольку мы пользовались обобщенным принципом обратимости). Следовательно, формулы (4.1)—(4.6) останутся в силе. Следует только, конечно, иметь в виду, что в этом случае амплитуды r и t

не имеют простой связи с энергетическими коэффициентами отражения и пропускания (см. об этом подробнее в § 1).

Выберем теперь в пленке произвольно какой-нибудь слой (индекс m), безразлично — поглощающий или непоглощающий. Он делит пленку на две части (рис. 5), которые обозначим индексами 1 (обращенную к исходной среде) и 2 (обращенную к подложке). Падающий и отраженный лучи обозначим опять индексами I и II, прямой и обратный лучи в промежуточном слое индексами I_m и II_m, прошедший луч индексом III. Амплитуды лучей II и III пусть будут опять r и t, а амплитуды лучей I_m и II_m обозначим как x и y.

Следуя вновь методу Книттла, обратим лучи II, III, I_m и II_m. Тогда получим следующие формулы (подробности см. в статье Книттла [37]):

$$\tilde{r}\tilde{r}_1^* + x\tilde{t}_1'^* = 1, \tag{4.7}$$

$$\tilde{r}\tilde{t}_1^* + x\tilde{r}_1'^* = ye^{-i\tilde{\alpha}_m^*}, \tag{4.8}$$

$$\tilde{t}\tilde{t}_2'^* + y\tilde{r}_2^* = xe^{-i\tilde{\alpha}_m^*}, \tag{4.9}$$

$$\tilde{t}\tilde{r}_2'^* + y\tilde{t}_2^* = 0. \tag{4.10}$$

Фигурирующая в формулах (4.8) и (4.9) величина $\tilde{\alpha}_m^*$ может быть сразу заменена на α_m (см. (1.25)). Из (4.9) и (4.10) выражаем x и y:

$$x = \frac{t}{\tilde{t}_2^*}(\tilde{t}_2^*\tilde{t}_2'^* - \tilde{r}_2^*\tilde{r}_2'^*)e^{i\alpha_m}, \qquad y = -\frac{\tilde{t}\tilde{r}_2'^*}{\tilde{t}_2^*}.$$

Но, согласно формулам (4.1) и (4.3),

$$\tilde{t}_2^*\tilde{t}_2'^* - \tilde{r}_2^*\tilde{r}_2'^* = \frac{\tilde{t}_2^*(t_2\tilde{t}_2'^* + r_2\tilde{r}_2^*)}{t_2} = \frac{\tilde{t}_2^*}{t_2};$$

следовательно,

$$x = \frac{te^{i\alpha_m}}{t_2} \tag{4.11}$$

$$y = \frac{r_2 t}{t_2}. \tag{4.12}$$

Подставляя эти выражения в формулы (4.7) и (4.8) и вычисляя r и t (причем следует опять учитывать формулы (4.1) и (4.3)), находим:

$$r = \frac{r_1 + \dfrac{r_2\tilde{t}_1}{\tilde{t}_1^*}e^{-2i\alpha_m}}{1 + \dfrac{\tilde{r}_2^*\tilde{r}_1 t_1}{\tilde{t}_1^*}e^{-2i\alpha_m}} \tag{4.13}$$

и

$$t = \frac{t_1 t_2 e^{-i\alpha_m}}{1 + \frac{\tilde{r}_2^* r_1 t_1}{\tilde{t}_1^*} e^{-2i\alpha_m}}. \tag{4.14}$$

До сих пор мы пользовались здесь амплитудным коэффициентом пропускания первого рода, т. е. t. Легко, однако, заметить, что формулы (4.1)—(4.6), а также (4.13) и (4.14), сохраняют при замене $t \to d$ свой вид. В самом деле, согласно формуле (0.2) и в силу равенств $\tilde{n}^* = n$, $\tilde{\vartheta}^* = \vartheta$ (формулы (1.25)),

$$\frac{t}{\tilde{t}^*} = \frac{d}{\tilde{d}^*} \tag{4.15}$$

и

$$t\tilde{t}'^* = d\tilde{d}'^*. \tag{4.16}$$

Итак, перепишем (4.13) и (4.14) в виде:

$$r = \frac{r_1 + \frac{r_2 d_1}{\tilde{d}_1^*} e^{-2i\alpha_m}}{1 + \frac{\tilde{r}_2^* r_1 d_1}{\tilde{d}_1^*} e^{-2i\alpha_m}}, \tag{4.17}$$

$$d = \frac{d_1 d_2 e^{-i\alpha_m}}{1 + \frac{\tilde{r}_2^* r_1 d_1}{\tilde{d}_1^*} e^{-2i\alpha_m}}. \tag{4.18}$$

Отсюда сразу находим:

$$\begin{aligned} a &= a_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{b}_1^* e^{-i\alpha_m}, \\ b &= b_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{a}_1^* e^{-i\alpha_m}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

что и совпадает (не считая несущественных различий в обозначениях) с формулами (2.13). Далее, покажем, что $b = b'$ (вторая формула (3.17)). В самом деле, из (4.18) следует:

$$d' = \frac{d_1' d_2' e^{-i\alpha_m}}{1 + \frac{r_1' \tilde{r}_2'^* d_2'}{\tilde{d}_2'^*} e^{-2i\alpha_m}}.$$

Заменяя здесь r'_1 и $\tilde{r}'^*_2$ по формуле (4.3) (с d вместо t) и учитывая (4.6), находим:

$$d' = \frac{d'_1 d'_2 e^{-i\alpha_m}}{1 + \dfrac{r_2 \tilde{r}^*_1 d_1}{\tilde{d}^*_1} e^{-2i\alpha_m}}.$$

Таким образом, $d' = d$, если такое же равенство верно для двух частей пленки. Но так как для простой границы раздела двух сред оно верно, то оно верно и для любой пленки. Следовательно, $b = b'$.

Первая формула (3.17), т. е. $a' = -\tilde{a}^*$, вытекает теперь сразу из формулы (4.3), а из формулы (4.4) следует формула (3.15): $b\tilde{b}^* - a\tilde{a}^* = 1$.

Итак, мы показали, что с помощью одного только обобщенного принципа обратимости можно получить все те же основные формулы, которые выше были выведены рекуррентным методом (методом Власова) или т. наз. матричным методом.

§ 10. Приближенные формулы

Вычисление спектральных характеристик многослойной пленки отличается значительной громоздкостью, независимо от того, применяются ли для этого рекуррентные формулы, или общие окончательные формулы, выведенные в восьмом параграфе. Поэтому очень важным является вопрос, нельзя ли воспользоваться вместо точных формул приближенными, более простыми формулами.

Покажем, что в случае отсутствия поглощения и притом при условии, что угол падения не слишком велик (в частности, полное отражение, действительное или нарушенное, не должно иметь места) можно вывести для r и d довольно точные, и в то же время очень простые формулы. Эти формулы более целесообразно применять для предварительных, ориентировочных расчетов.

Чтобы получить эти формулы, обратимся к формулам (3.38) и (3.39). В силу сделанных предположений все величины v_{01}, v_{12}, ... $v_{N,N+1}$, а также α_1, α_2, ... α_N вещественны. Сущность приближения заключается в том, что формулы разлагаются в ряд по степеням v_{01}, v_{12}, ... $v_{N,N+1}$ и в разложениях учитываются только члены степени не выше первой. Это значит, что все гиперболические косинусы полагаются равными единице, а все гиперболические синусы полагаются равными своим аргументам; произведения двух или более гиперболических синусов считаются, следовательно, равными нулю. Таким образом получается:

$$a = \sum_{m=0}^{N} v_{m,m+1} \exp[i(-\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_N)] \tag{4.20}$$

и

$$b = \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)] \tag{4.21}$$

Учитывая, что $a = \frac{r}{d}$ и $b = \frac{1}{d}$, находим отсюда:

$$r = \sum_{m=0}^{N} v_{m,m+1} \exp[-2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)] \tag{4.22}$$

$$d = \exp[-i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)] \tag{4.23}$$

Эти формулы являются, однако, слишком грубыми. Правда, иногда они оказываются достаточными (особенно в проблеме просветления, см. ниже, в шестой главе). Но в других случаях они могут быть совершенно непригодны. В самом деле, из формулы (4.22) может получиться $|r|^2 = R > 1$, что не имеет смысла. Соотношение $R + D = 1$ вообще не выполняется на основании формул (4.22) и (4.23). Из формулы (4.23) следует даже, что $D = 1$. Поэтому эти формулы могут быть достаточно хорошими только тогда, если $D \approx 1$, т. е. когда коэффициент отражения мал.

Однако, из формул (4.20) и (4.21) можно получить r и d, гораздо более точные формулы, чем (4.22) и (4.23). Дело в том, что R и D можно, используя равенство $R + D = 1$, получить из одной только формулы (4.20). Полагая

$$\left|\sum_{m=0}^{N} v_{m,m+1} \exp[i(-\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_N)]\right|^2 \equiv Q \tag{4.24}$$

имеем: $\frac{R}{1-R} = Q$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{Q}{Q+1}, \\ D &= \frac{1}{Q+1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Что касается амплитудных коэффициентов отражения и пропускания r и d, то абсолютные величины их имеем равными

$$|r| = \sqrt{R} = \sqrt{\frac{Q}{Q+1}} \qquad |d| = \sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{Q+1}},$$

а фазу можно (конечно, приближенно) взять из формул (4.22) и (4.23). Таким образом находим:

$$r = \frac{\sum_{m=0}^{N} v_{m,m+1} \exp[-2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)]}{\sqrt{Q+1}} \qquad (4.26)$$

$$d = \frac{\exp[-i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)]}{\sqrt{Q+1}} \qquad (4.27)$$

Степень точности этих формул хорошо иллюстрируется нижеследующими примерами. На рис. 6 показаны графики коэффициента отражения семислойного двухкомпонентного отражательного покрытия, вычисленные по точной формуле (кривая I) и по приближенной формуле (кривая II). Параметры покрытия: оптические толщины всех слоев равны; четыре слоя имеют показатель преломления 2,3, а чередующиеся с ними остальные три слоя имеют показатель преломления 1,35; показатель преломления подложки равен 1,5. Другой пример дан на рис. 7. Кривая I вычислена по точной, а кривая II — по приближенной формуле. Состав пленки: девять слоев с чередующимися показателями преломления 2,3 (слои с нечетным индексом) и 1,35 (слои с четным индексом). Толщины слоев образуют арифметическую прогрессию, возрастая в направлении падения света от $^1/_2$ до $^3/_2$ толщины центрального слоя. Аргументом на рис. 7 служит величина $\alpha = knh$ для центрального слоя.

Как видно из рисунков, приближенная кривая в обоих примерах хорошо передает основные особенности истинной кривой, несмотря на то, что приближение (4.22) было бы в обоих случаях абсолютно непригодно.

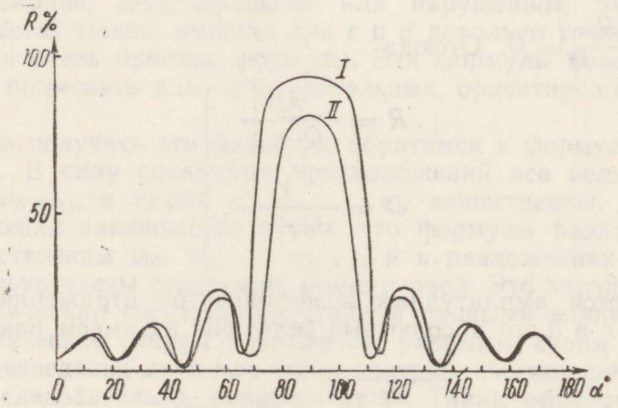

Рис. 6. К приближенной формуле.

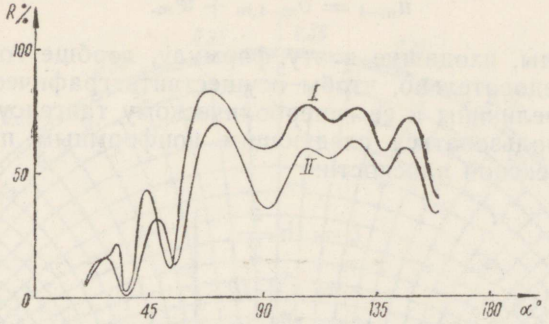

Рис. 7. К приближенной формуле.

Заметим, наконец, что числитель выражения r в (4.26) и его абсолютная величина $\sqrt{Q}$ могут быть найдены путем элементарного геометрического построения (см. [3, 48]).

§ 11. Точный графический метод

В этом параграфе изложим графический метод (см. [1]), основывающийся на рекуррентных формулах Власова и являющийся вполне точным. Наиболее прост этот метод применяется в случае отсутствия поглощения, однако, он применим также и в самом общем случае.

Этот метод служит в первую очередь для нахождения r. Согласно первой формуле (2.5)

$$r_{m-1,N+1} = \frac{r_{m-1,m} + r_{m,N+1}\, e^{-2i\alpha_m}}{1 + r_{m-1,m} r_{m,N+1}\, e^{-2i\alpha_m}}, \tag{4.28}$$

где $m = N,\ N-1,\ \ldots\ 2,\ 1$ (последовательность значений m написана здесь в том порядке, в каком следует применять эту формулу).

Положим теперь, в соответствии с (1.20),

$$r_{m-1,m} = \operatorname{th} v_{m-1,m}. \tag{4.29}$$

Кроме того, пусть

$$r_{m,N+1} = \operatorname{th} u_m \tag{4.30}$$

и

$$r_{m,N+1}\, e^{-2i\alpha_m} = \operatorname{th} w_m. \tag{4.31}$$

Тогда формула (4.28) равносильна следующей:

$$u_{m-1} = v_{m-1,m} + w_m. \tag{4.32}$$

Все величины, входящие в эту формулу, вообще говоря, комплексны. Следовательно, чтобы осуществить графически переход от данной величины к ее гиперболическому тангенсу и обратно, нужно воспользоваться следующим конформным преобразованием комплексной плоскости:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{th}\frac{z}{2}, \\ z &= x + iy, \\ \zeta &= \xi + i\eta. \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Это конформное преобразование переводит декартову сетку координат (x, y) на z-плоскости в сетку биполярных координат на ζ-плоскости:

$$\left.\begin{aligned} (\xi - \operatorname{cth} x)^2 + \eta^2 &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \\ \xi^2 + (\eta + \operatorname{ctg} y)^2 &= \frac{1}{\sin^2 y}. \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

На рис. 8 изображена эта сетка, причем по окружности единичного круга нанесены деления в длинах волн.

Все величины r в рекуррентных формулах (4.28) изображаются в ζ-плоскости по обычному способу изображения комплексных чисел. Каждая из этих точек имеет также биполярные координаты (x, y), которые суть вещественная и мнимая части чисел $v_{m-1,m}$, u_{m-1} и w_m. Таким образом, $r_{m-1,N+1}$ изображается той точкой на графике, биполярные координаты которой суть суммы биполярных координат точек, изображающих $r_{m-1,m}$ и $r_{m,N+1}e^{-2i\alpha_m}$. Когда $r_{m-1,N+1}$ найдено, следует найти $r_{m-1,N+1}e^{-2i\alpha_{m-1}}$, что совершается тоже графически. Если α_{m-1} вещественно, то умножение на $e^{-2i\alpha_{m-1}}$ выполняется очень просто — путем поворота на угол $2\alpha_{m-1}$; если же α_{m-1} комплексно, то графическое умножение на $e^{-2i\alpha_{m-1}}$ несколько сложнее, оставаясь все-таки легко выполнимой операцией.

Очевидно, что в случае отсутствия поглощения все последовательно находимые точки $r_{N-1,N+1}$, $r_{N-2,N+1}$, ... $r_{0,N+1}$ находятся внутри единичного круга. В случае же наличия в каком-либо, скажем, m-м слое поглощения может случиться (см. [49]), что $|r_{m,N+1}| > 1$. В этом случае наше графическое построение выходит за пределы единичного круга. Однако, окончательный результат, если только исходная среда прозрачна, должен дать $|r_{0,N+1}| < 1$.

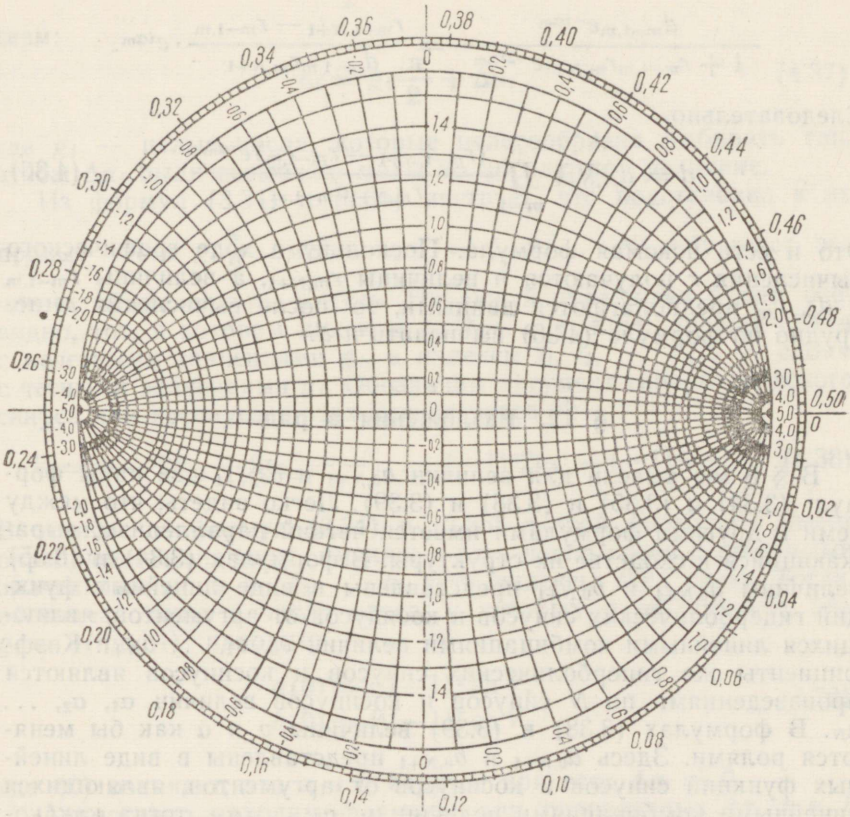

Рис. 8. Биполярная номограмма.

Изложенный метод применим непосредственно только для нахождения r, но не d. Однако, путем небольшого дополнительного вычисления можно найти также и d. Для этого напишем согласно второй формуле (2.5):

$$d = d_{N,N+1} \cdot \prod_{m=1}^{N} \frac{d_{m-1,m} e^{-i\alpha_m}}{1 + r_{m-1,m} r_{m,N+1} e^{-2i\alpha_m}}. \qquad (4.35)$$

Но из формулы (4.28) вместе с (1.9) вытекает, что

$$r_{m-1,N+1} - r_{m-1,m} = \frac{d^2_{m-1,m} r_{m,N+1} e^{-2i\alpha_m}}{1 + r_{m-1,m} r_{m,N+1} e^{-2i\alpha_m}},$$

откуда

$$\frac{d_{m-1,m}e^{-i\alpha_m}}{1+r_{m-1,m}r_{m,N+1}e^{-2i\alpha_m}}=\frac{r_{m-1,N+1}-r_{m-1,m}}{d_{m-1,m}r_{m,N+1}}\cdot e^{i\alpha_m}.$$

Следовательно,

$$d=d_{N,N+1}\cdot\prod_{m=1}^{N}\frac{(r_{m-1,N+1}-r_{m-1,m})\,e^{i\alpha_m}}{r_{m,N+1}d_{m-1,m}}. \qquad (4.36)$$

Это и есть искомая формула. Поскольку в ходе графического вычисления r получаются и величины $r_{m,N+1}$, а величины $r_{m-1,m}$ и $d_{m-1,m}$ предполагаются данными, то после вычисления r нетрудно по формуле (4.36) вычислить и d.

§ 12. Разложения в ряд

В § 8 мы вывели для величин $a_{0,N+1}$ и $b_{0,N+1}$ две пары формул: (3.34) и (3.35) и (3.38) и (3.39). Легко видеть, что между теми и другими формулами имеется четкий параллелизм, выражающийся в сходстве их структуры. В формулах (3.34) и (3.35) величины $a_{0,N+1}$ и $b_{0,N+1}$ представлены в виде линейных функций гиперболических синусов и косинусов от аргументов, являющихся линейными комбинациями величин $v_0, v_1, \ldots v_{N+1}$. Коэффициенты же гиперболических синусов и косинусов являются произведениями по N синусов и косинусов величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$. В формулах (3.38) и (3.39) величины v и α как бы меняются ролями. Здесь $a_{0,N+1}$ и $b_{0,N+1}$ представлены в виде линейных функций синусов и косинусов от аргументов, являющихся линейными комбинациями величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$, тогда как коэффициентами синусов и косинусов являются произведения по $N+1$ гиперболических синусов и косинусов величин $v_{01}, v_{12}, \ldots v_{N,N+1}$. Такой тесный параллелизм можно развить и дальше. В этом параграфе мы дадим разложения величин $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$ в ряд Тейлора в двух вариантах: на основе формул (3.34) и (3.35) и на основе формул (3.38) и (3.39). Эти разложения могут оказать в некоторых задачах существенную помощь. Подчеркнем, однако, сразу, что практически пригодными эти разложения оказываются только при условии отсутствия поглощения, и притом, если все углы преломления вещественны. В дальнейшем это и будет подразумеваться.

Первый вариант (см. [22]) основан на формулах (3.34) и (3.35). Величины $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$ (индексы $0,N+1$ здесь опускаем) рассматриваются как функции от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$ и разложение производится по степеням величин $\Delta\alpha_i$, характеризующих откло-

нения α_i от целократных $\frac{\pi}{2}$ значений. Это значит, что мы полагаем:

$$\alpha_i = g_i \frac{\pi}{2} + \Delta\alpha_i \tag{4.37}$$

где g_i — целые числа, которые целесообразно выбирать так, чтобы $\Delta\alpha_i$ были возможно малы по абсолютной величине.

Из формул (3.34) и (3.35) явствует, что подстановка в их правые части $g_i \frac{\pi}{2}$ вместо α_i $(i = 1, 2, \ldots N)$ обращает все члены, кроме одного, в нуль. Неравный нулю член будет, очевидно, тот, в котором индексы $k_1, k_2, \ldots k_s$ принадлежат слоям с нечетными значениями g_i, а индексы $l_1, l_2, \ldots l_{N-s}$ — слоям с четными значениями g_i. Обозначим аргумент гиперболического синуса или косинуса в этих членах через V:

$$V = v_0 - 2v_{k_1} + 2v_{k_2} - + \ldots + (-1)^s 2v_{k_s} - (-1)^s v_{N+1}. \tag{4.38}$$

В отличие от формул (3.34) и (3.35) в этой формуле s имеет определенное значение, именно, s есть число слоев с нечетными значениями g_i, а $k_1, k_2, \ldots k_s$ суть индексы этих слоев. Тогда, обозначая через t число слоев, у которых $g_i \equiv 2 \pmod 4$ или $g_i \equiv 3 \pmod 4$, находим:

$$\begin{aligned} a(0) &= i^s (-1)^t \operatorname{sh} V, \\ b(0) &= i^s (-1)^t \operatorname{ch} V, \end{aligned} \tag{4.39}$$

где (0) означает, что a и b берутся при всех $\Delta\alpha_i = 0$.

Аналогично находим формулы для производных от a и b по всем α_i. Каждая из этих производных выражается суммой, подобной тем, что имеем в формулах (3.34) и (3.35), а при всех $\Delta\alpha_i = 0$ от каждой суммы остается только один член. Однако, аргумент гиперболического синуса или косинуса будет в этом члене, конечно, иной, чем в (4.39). Дифференцирование по α_i превращает $\sin\alpha_i$ в $\cos\alpha_i$ и $\cos\alpha_i$ в $-\sin\alpha_i$; следовательно, в названном аргументе исчезает член $\pm 2v_i$, если он в нем был, и, наоборот, появляется член $\pm 2v_i$, если его не было. При этом изменяются знаки всех членов этого аргумента, имеющих индекс $> i$, так как в измененном аргументе должно сохраниться чередование знаков всех членов. Кроме того, при дифференцировании по любому α_i добавляется мнимая единица i. Этот результат можно записать так:

$$\begin{aligned} a_i &= i^{s+1} (-1)^t \operatorname{sh}(V_{0i} - V_{i,N+1}), \\ b_i &= i^{s+1} (-1)^t \operatorname{ch}(V_{0i} - V_{i,N+1}), \end{aligned} \tag{4.40}$$

где индекс i в левой части означает дифференцирование по α_i с последующим приравниванием всех $\Delta\alpha$ нулю, а V_{0i} и $V_{i,N+1}$ определяются так: 1) V_{0i} содержит все те члены V, индексы которых меньше i, а также член v_i, независимо от того, имеется ли он в V или нет; знак этого члена противоположен знаку предшествующего ему члена; 2) $V_{i,N+1}$ содержит все те члены V, индексы которых больше i, а также член v_i, независимо от того, имеется ли он в V или нет; знак этого члена противоположен знаку следующего за ним члена. Нетрудно сообразить, что $V_{0i} - V_{i,N+1}$ и будет тогда равно измененному аргументу, как описано выше.

Повторяя дифференцирование любое число раз, находим последовательно подобным же образом:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= i^s(-1)^{t+1}\,\mathrm{sh}\,(V_{0i} - V_{ik} + V_{k,N+1}), \qquad i \leqslant k \\ a_{ikl} &= i^{s+1}(-1)^{t+1}\,\mathrm{sh}\,(V_{0i} - V_{ik} + V_{kl} - V_{l,N+1}), \\ &\qquad\qquad i \leqslant k \leqslant l \\ a_{iklm} &= i^s(-1)^t\,\mathrm{sh}\,(V_{0i} - V_{ik} + V_{kl} - V_{lm} + V_{m,N+1}), \\ &\qquad\qquad i \leqslant k \leqslant l \leqslant m \end{aligned} \tag{4.41}$$

и т. д. Формулы для b_{ik}, b_{ikl}, b_{iklm} и т. д. получаются отсюда заменой sh на ch. Величины V_{ik} определяются так: V_{ik} содержит все те члены из V, индексы которых больше i, но меньше k, а также члены v_i и v_k, независимо от того, имеются ли они в V или нет; знак v_i противоположен знаку следующего за ним члена, а знак v_k противоположен знаку предшествующего ему члена. При этом всегда

$$V_{0i} + V_{ik} + V_{k,N+1} = V.$$

Это равенство помогает правильно выбирать знаки членов v_i и v_k в V_{ik} в тех случаях, когда предыдущее правило отказывает (это может случиться, например, тогда, если V_{ik} не содержит вообще иных членов, кроме v_i и v_k).

Далее мы должны найти формулы для производных от $\dfrac{R}{D}$ и $\dfrac{1}{D}$. Убедимся прежде всего, что $\dfrac{R}{D}$ и $\dfrac{1}{D}$ являются четными функциями от $\Delta\alpha_i$ и что, следовательно, разложения этих величин содержат производные только четного порядка. В самом деле, пусть N_+ слоев имеют четные значения g_i, а N_- слоев нечетные (так что $N_+ + N_- = N$). Если теперь в каком-либо члене суммы в формулах (3.34) и (3.35) в числе индексов k_1, k_2, ... k_s имеется s_+ принадлежащих слоям с четными значениями g_i и s_- принадлежащих слоям с нечетными значениями g_i (так что $s_+ + s_- = s$), то замена всех $\Delta\alpha_i$ на $-\Delta\alpha_i$ добавляет к этому члену множитель

$$(-1)^{s_+ + N_- - s_-} = (-1)^{s+N_-}.$$

Это значит, что a и b заменяются их комплексно-сопряженными значениями и, кроме того, получают добавочный множитель $(-1)^{N_-}$. Отсюда и вытекает, что $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$ при замене всех $\Delta\alpha_i$ на $-\Delta\alpha_i$ не изменяются.

Следовательно, нам нужно вычислить производные от $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$ только четного порядка. Прежде всего, так как $\frac{R}{D} = aa^*$, имеем:

$$\left(\frac{R}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} = \sum a_{k_1 k_2 \cdots k_m} a^*_{l_1 l_2 \cdots l_{2n-m}}, \tag{4.42}$$

где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{2n}$, $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m$, $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_{2n-m}$; совокупность индексов i тождественна совокупности индексов k и l, а сумма берется по всем 2^{2n} комбинациям разбиения индексов $i_1, i_2, \ldots i_{2n}$ на две группы: $k_1, k_2, \ldots k_m$ и l_1, l_2, l_{2n-m} $(m = 0, 1, 2, \ldots 2n)$. Подставляя в формулу (4.42) найденные выше выражения (4.41) для a_{ik} и т. д., находим:

$$\left(\frac{R}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} = \sum (-1)^{m+n} \operatorname{sh}(V_{0k_1} - V_{k_1 k_2} + V_{k_2 k_3} - + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m V_{k_m, N+1}) \cdot \operatorname{sh}(V_{0l_1} - V_{l_1 l_2} + - \ldots + (-1)^m V_{l_{2n-m}, N+1}). \tag{4.43}$$

Эта громоздкая формула может быть значительно упрощена. Аргументы всех гиперболических синусов в этой формуле могут быть написаны единообразно как

$$V_{0i_1} \pm V_{i_1 i_2} \pm \ldots \pm V_{i_{2n-1} i_{2n}} + (-1)^m V_{i_{2n}, N+1},$$

поскольку из определения величин V_{kl} вытекает:

$$V_{ik} + V_{kl} = V_{il}. \tag{4.44}$$

Написанные в такой форме аргументы двух, входящих в один и тот же член суммы, гиперболических синусов отличаются друг от друга, очевидно, тем и только тем, что каждой перемене знака в последовательности членов одного из этих аргументов соответствует сохранение знака в последовательности членов другого аргумента, и наоборот. При этом число перемен знака в аргументе первого синуса равно m, а второго $2n - m$

Отсюда следует, что если преобразуем произведение обоих гиперболических синусов в половину разности гиперболических косинусов, то аргументы последних будут таковы:

$$2V_{0i_1} \pm 2V_{i_2i_3} \pm \ldots + (-1)^m 2V_{i_{2n},N+1}$$

и

$$\pm 2V_{i_1i_2} \pm 2V_{i_3i_4} \pm \ldots \pm 2V_{i_{2n-1}i_{2n}}.$$

Число возможных комбинаций знаков членов этих аргументов равно 2^n, причем, комбинируя эти комбинации попарно, получим всего 2^{2n} таких парных комбинаций, каждой из которых соответствует один член в формуле (4.43). Следовательно, суммируя после указанного преобразования отдельно члены, содержащие гиперболические косинусы от аргументов вида

$$2V_{0i_1} \pm 2V_{i_2i_3} \pm \ldots + (-1)^m 2V_{i_{2n},N+1},$$

и отдельно члены, содержащие гиперболические косинусы от аргументов вида

$$\pm 2V_{i_1i_2} \pm 2V_{i_3i_4} \pm \ldots \pm 2V_{i_{2n-1}i_{2n}},$$

будем встречать в обеих суммах каждый аргумент 2^n раз. Отсюда следует, что первая сумма будет равна

$$2^{n-1} \sum (-1)^{m+n} \operatorname{ch}(2V_{0i_1} \pm 2V_{i_2i_3} \pm \ldots + (-1)^m 2V_{i_{2n},N+1}),$$

а во второй сумме все члены попарно сократятся, так как каждому члену, имеющему определенные знаки членов гиперболического косинуса, можно сопоставить другой член, с таким же аргументом, но комбинирующийся с иным по четности значением m. В силу присутствия в сумме множителя $(-1)^m$ такие члены сократятся. Вся вторая сумма оказывается, таким образом, равной нулю. Следовательно, имеем теперь такую формулу:

$$\left(\frac{R}{D}\right)_{i_1i_2\ldots i_{2n}} = 2^{n-1}(-1)^n \sum (-1)^m \operatorname{ch}(2V_{0i_1} \pm 2V_{i_2i_3} \pm \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m 2V_{i_{2n},N+1}). \qquad (4.45)$$

Выбирая в этой сумме попарно члены, отличающиеся только знаком последнего члена в аргументе гиперболического косинуса (т. е. только четностью m), и преобразовывая разности гиперболических косинусов в произведение гиперболических синусов, находим:

$$\left(\frac{R}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} = (-1)^n 2^n \sum \operatorname{sh}(2V_{0i_1} \pm 2V_{i_1 i_2} \pm \ldots$$
$$\ldots \pm 2V_{i_{2n-2} i_{2n-1}}) \operatorname{sh} 2V_{i_{2n}, N+1}.$$

Повторяя подобную же операцию еще $n-1$ раз, приходим к окончательному результату:

$$\left(\frac{R}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} = (-1)^n 2^{2n-1} \operatorname{sh} 2V_{0i_1} \operatorname{ch} 2V_{i_2 i_3} \operatorname{ch} 2V_{i_4 i_5} \ldots$$
$$\ldots \operatorname{ch} 2V_{i_{2n-2} i_{2n-1}} \operatorname{sh} 2V_{i_{2n}, N+1}, \qquad (4.46)$$
$$i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{2n}$$

Выражение для $\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$ ничем от этого выражения не отличается, так как единственная разница для $\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$ в формуле (4.43) состоит только в замене sh на ch, т. е. в обращении знака второй суммы, получающейся после преобразования. Но эта сумма, как мы видели, равна нулю. Равенство

$$\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} = \left(\frac{R}{D}\right)_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} \qquad (4.47)$$

вытекает также из того, что $\frac{1}{D} - \frac{R}{D} = 1$.

Итак, мы можем написать теперь ряд Тейлора для $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$. Согласно (4.39) и (4.46), имеем:

$$\frac{R}{D} = \operatorname{sh}^2 V - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant N} P(ik) \operatorname{sh} 2V_{0i} \operatorname{sh} 2V_{k,N+1} \Delta\alpha_i \Delta\alpha_k +$$
$$+ \frac{1}{3} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant N} P(iklm) \operatorname{sh} 2V_{0i} \operatorname{ch} 2V_{kl} \operatorname{sh} 2V_{m,N+1} \Delta\alpha_i \Delta\alpha_k \Delta\alpha_l \Delta\alpha_m -$$
$$- \frac{2}{45} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant n \leqslant p \leqslant N} P(iklmnp) \operatorname{sh} 2V_{0i} \operatorname{ch} 2V_{kl} \operatorname{ch} 2V_{mn} \operatorname{sh} 2V_{p,N+1} \cdot \qquad (4.48)$$
$$\cdot \Delta\alpha_i \Delta\alpha_k \Delta\alpha_l \Delta\alpha_m \Delta\alpha_n \Delta\alpha_p + - \ldots,$$

где P означает число перестановок индексов, стоящих в скобках. Формула для $\frac{1}{D}$ отличается от формулы для $\frac{R}{D}$ только заменой первого члена на $\operatorname{ch}^2 V$.

TRU Raamatukogu

Значение разложения (4.48) состоит прежде всего в том, что оно приближает проблему анализа пленок к проблеме синтеза. В самом деле, полагая, как это чаще всего бывает, угол падения неизменным, примем при некотором значении k_0 волнового числа и при некоторой толщине i-го слоя $\Delta\alpha_i = 0$. При изменении волнового числа на Δk и толщины слоя на Δh_i, имеем $\Delta\alpha_i \neq 0$. Выразим $\Delta\alpha_i$ через

$$\Delta\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\frac{\Delta k}{k_0} \quad \text{и} \quad \Delta g_i = \frac{2}{\pi} k_0 n_i \cos\vartheta_i \Delta h_i.$$

Так как

$$\Delta\alpha_i = n_i h_i \Delta k \cos\vartheta_i + k_0 n_i \Delta h_i \cos\vartheta_i + n_i \cos\vartheta_i \Delta k \Delta h_i,$$

то

$$\Delta\alpha_i = g_i \Delta\alpha + \frac{\pi}{2}\Delta g_i + \Delta\alpha \Delta g_i. \tag{4.49}$$

Подстановка этого выражения в разложение (4.48) позволяет исследовать на одинаковых основаниях влияние на оптические характеристики пленки как изменения длины волны, так и изменений толщины слоев. А это и является наиболее существенным в проблеме синтеза пленок, где, как известно, варьирование толщин слоев встречает наибольшие трудности.

Обратимся ко второму варианту разложения, основанному на формулах (3.38) и (3.39). Здесь мы будем рассматривать величины $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$ как функции аргументов v_{01}, v_{12}, ... $v_{N,N+1}$, и разлагать эти величины в ряд по степеням этих аргументов.

Так как структура формул (3.38) и (3.39) аналогична структуре формул (3.34) и (3.35), то мы получим разложения, сходные с (4.48).

Прежде всего, введем вместо $v_{k,k+1}$ для простоты новое обозначение u_k, согласно формулам:

$$\left.\begin{aligned} u_k &\equiv v_{k+1,k} = \frac{1}{2}\ln\frac{n_{k+1}}{n_k}, \\ u^{\parallel}_k &\equiv v^{\parallel}_{k+1,k} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin 2\vartheta_{k+1}}{\sin 2\vartheta_k}, \\ u^{\perp}_k &\equiv v^{\perp}_{k+1,k} = \frac{1}{2}\ln\frac{\tan\vartheta_k}{\tan\vartheta_{k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

Тогда формулы (3.38) и (3.39) перепишутся в виде:

$$a = -\sum \operatorname{xh} u_0 \operatorname{xh} u_1 \ldots \operatorname{xh} u_N \exp[-i(\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_N)] \tag{4.51}$$

$$b = \sum \operatorname{xh} u_0 \operatorname{xh} u_1 \ldots \operatorname{xh} u_N \exp[i(\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_N)] \tag{4.52}$$

Положив все u равными нулю, получим:

$$a_0 = 0,$$
$$b_0 = e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)}, \tag{4.53}$$

где индекс 0 указывает, что все $u = 0$. Здесь следует помнить, что в формуле (4.51) сумма берется по всем комбинациям с нечетным числом гиперболических синусов, а в формуле (4.52) — по всем комбинациям с четным числом гиперболических синусов.

Далее, беря производные по u_i, u_k и т. д. и полагая в них опять все $u = 0$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &a_i = -\exp[-i(\alpha_{0i} - \alpha_{iN})], \quad 0 \leqslant i \leqslant N \\ &a_{ik} = 0, \\ &a_{ikl} = -\exp[-i(\alpha_{0i} - \alpha_{ik} + \alpha_{kl} - \alpha_{lN})], \\ &\qquad\qquad 0 \leqslant i \leqslant k \leqslant l \leqslant N \\ &a_{iklm} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

и т. д.
и

$$\left.\begin{aligned} &b_i = 0, \\ &b_{ik} = \exp[i(\alpha_{0i} - \alpha_{ik} + \alpha_{kN})], \quad 0 \leqslant i \leqslant k \leqslant N \\ &b_{ikl} = 0, \\ &b_{iklm} = \exp[i(\alpha_{0i} - \alpha_{ik} + \alpha_{kl} - \alpha_{lm} + \alpha_{mN})], \\ &\qquad\qquad 0 \leqslant i \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant N \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

и т. д.
В этих формулах введено обозначение:

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_k \qquad i < k$$
$$\alpha_{ii} = 0; \quad i, k = 0, 1, \ldots N \tag{4.56}$$

Очевидно, что

$$\alpha_{ik} + \alpha_{kl} = \alpha_{il}. \tag{4.57}$$

Теперь нужно найти производные от $\frac{R}{D}$ и $\frac{1}{D}$. Так как они между собой равны (см. (4.47)), будем рассматривать только $\frac{1}{D}$. Так как $\frac{1}{D} = bb^*$, а все производные нечетного порядка от b равны нулю, то и от $\frac{1}{D}$ все производные нечетного порядка равны нулю. Найдем $\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$. Подобно тому, как выше, в формуле (4.42), можем написать:

$$\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} = \sum b_{k_1 k_2 \ldots k_{2m}} b^*_{l_1 l_2 \ldots l_{2n-2m}}, \qquad (4.58)$$

где суммирование идет по всем 2^{2n-1} комбинациям разбиения индексов $i_1, i_2, \ldots i_{2n}$ на две группы: $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ и $l_1, l_2, \ldots l_{2n-2m}$ $(m = 0, 1, \ldots n)$. При этом $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{2n}$, $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_{2m}$, $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_{2n-2m}$. Подставляя в формулу (4.58) выражения производных от b и b^* из формул (4.55), находим:

$$\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} = \sum \exp[i(\alpha_{0i_1} \pm \alpha_{i_1 i_2} \pm \ldots \pm \alpha_{i_{2n-1} i_{2n}} + \alpha_{i_{2n}, N})] \cdot$$
$$\cdot \exp[-i(\alpha_{0i_1} \pm \alpha_{i_1 i_2} \pm \ldots \pm \alpha_{i_{2n-1} i_{2n}} + \alpha_{i_{2n}, N})], \qquad (4.59)$$

где суммирование идет по всем 2^{2n-1} способам выбора знаков в первом множителе, тогда как знаки во втором множителе определяются тем, что каждому сохранению знака в последовательности членов экспоненты в первом множителе соответствует перемена знака в последовательности членов экспоненты во втором множителе, и наоборот. Отсюда следует, что формулу (4.59) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} = 2^{n-1} \sum \exp[2i(\pm\alpha_{i_1 i_2} \pm \alpha_{i_3 i_4} \pm \ldots \pm \alpha_{i_{2n-1} i_{2n}})], \qquad (4.60)$$

где сумма берется по 2^n комбинациям знаков в экспоненте. Каждая такая комбинация встречается в сумме (4.59) 2^{n-1} раз (так как при любых знаках членов $\alpha_{i_2 i_3}$, $\alpha_{i_4 i_5}$, $\ldots$, $\alpha_{i_{2n-2} i_{2n-1}}$ при сохранении знаков остальных членов получается одна и та же экспонента в (4.60), чем и обусловлено появление в (4.60) множителя 2^{n-1}. Далее, переходя к тригонометрическим функциям, имеем окончательно:

$$\left(\frac{1}{D}\right)_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} = 2^{2n-1} \cos 2\alpha_{i_1 i_2} \cos 2\alpha_{i_3 i_4} \ldots \cos 2\alpha_{i_{2n-1} i_{2n}}, \qquad (4.61)$$
$$i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{2n}.$$

Отсюда вытекает следующее разложение

$$\frac{1}{D} = 1 + \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant N} P(ik)\, u_i u_k \cos 2\alpha_{ik} +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant l\leqslant m\leqslant N} P(iklm)\,u_iu_ku_lu_m\cos 2\alpha_{ik}\cos 2\alpha_{lm}+ \qquad (4.62)$$

$$+\frac{2}{45}\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant l\leqslant m\leqslant n\leqslant p\leqslant N} P(iklmnp)\,u_iu_ku_lu_mu_nu_p\times$$

$$\times\cos 2\alpha_{ik}\cos 2\alpha_{lm}\cos 2\alpha_{np}+\ldots$$

Здесь, как и в формуле (4.48), P означает число перестановок индексов, стоящих в скобках. Разложение для $\frac{R}{D}$ отличается от этого только отсутствием первого члена 1.

Полезно отметить, что второй член разложения (4.62) можно написать в виде, более удобном для практического вычисления:

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant N} P(ik)\,u_iu_k\cos 2\alpha_{ik}=\Big|\sum_{k=0}^{N}u_ke^{2i\alpha_{0k}}\Big|^2, \qquad (4.63)$$

что совпадает с формулой (4.24) для Q. А так как, согласно (4.25), $\frac{1}{D}=1+Q$, то рассмотренное в § 10 приближение оказывается частным случаем общей формулы (4.62), именно, тем случаем, когда мы ограничиваемся в этом разложении только двумя первыми членами. Понятно, что учитывая в разложении больше двух членов, мы можем получить лучшее приближение. К сожалению, вычисление членов порядка выше второго в разложении (4.62) оказывается громоздким из-за очень большого и быстро растущего числа членов. То же верно и в отношении разложения (4.48). Эти разложения имеют значение не столь для целей вычисления R и D, сколь для общего теоретического анализа. В особенности можно рассчитывать на применение этих разложений в проблеме синтеза пленок.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОГЛОЩАЮЩИХ ПЛЕНОК

§ 13. Группа пленок и ее связь с группой Лоренца. Векторное представление

Связь преобразований, осуществляемых фигурирующими в теории пленок матрицами, с преобразованиями Лоренца была замечена уже довольно давно. Сошлемся, например, на работу [50] (см. также [26], стр. 210), в которой показана роль матриц Паули в теории пленок. В этом параграфе мы исследуем связь между теорией пленок и теорией преобразований Лоренца более детально, пользуясь нашими новыми, более удобными формулами, выведенными в предыдущих главах.

Согласно формуле (3.20), матрица

$$F_{0,N+1} = \begin{pmatrix} b & \tilde{a}^* \\ a & \tilde{b}^* \end{pmatrix}$$

преобразует амплитуды прямой и обратной волны в конечной $(N+1)$-й среде $\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ A'_{N+1} \end{pmatrix}$ в амплитуды $\begin{pmatrix} A_0 \\ A'_0 \end{pmatrix}$ в исходной (нулевой) среде. С другой стороны, матрицу второго порядка с определителем, равным единице (см. (3.15)), можно рассматривать как матрицу спинорного преобразования при некотором преобразовании Лоренца (см., например, [51], стр. 240 и далее). Следовательно, каждой пленке, заключенной между определенными средами и рассматриваемой при определенной длине волны и угле падения, соответствует некоторое преобразование Лоренца. Элементы матрицы этого преобразования Лоренца квадратично зависят от a, b, $\tilde{a}^*$ и $\tilde{b}^*$ и их комплексно-сопряженных величин.

Чтобы найти соответствующую матрице $F_{0,N+1}$ матрицу Лоренца, нужно перейти от спинорного к векторному представле-

нию. Матрица $F_{0,N+1} \times F^*_{0,N+1}$, где $\times$ есть знак прямого произведения, есть матрица представления $E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ группы Лоренца, которое, как известно, эквивалентно векторному. Переход к векторному представлению совершается путем применения унитарного преобразования

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{K} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{K}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Обозначая матрицу $\mathrm{K}(F_{0,N+1} \times F^*_{0,N+1})\mathrm{K}^{-1}$ через $\Phi_{0,N+1}$, находим

$$\Phi_{0,N+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b\tilde{b}+b^*\tilde{b}^*+a\tilde{a}+a^*\tilde{a}^* & i(-b\tilde{b}+b^*\tilde{b}^*-a\tilde{a}+a^*\tilde{a}^*) \\ i(b\tilde{b}-b^*\tilde{b}^*-a\tilde{a}+a^*\tilde{a}^*) & b\tilde{b}+b^*\tilde{b}^*-a\tilde{a}-a^*\tilde{a}^* \\ \tilde{a}b-a\tilde{b}+\tilde{a}^*b^*-a^*\tilde{b}^* & i(-\tilde{a}b+a\tilde{b}+\tilde{a}^*b^*-a^*\tilde{b}^*) \\ \tilde{a}b+a\tilde{b}+\tilde{a}^*b^*+a^*\tilde{b}^* & i(-\tilde{a}b-a\tilde{b}+\tilde{a}^*b^*+a^*\tilde{b}^*) \\ a^*b-\tilde{a}^*\tilde{b}+ab^*-\tilde{a}\tilde{b}^* & a^*b+\tilde{a}^*\tilde{b}+ab^*+\tilde{a}\tilde{b}^* \\ i(a^*b-\tilde{a}^*\tilde{b}-ab^*+\tilde{a}\tilde{b}^*) & i(a^*b+\tilde{a}^*\tilde{b}-ab^*-\tilde{a}\tilde{b}^*) \\ bb^*+\tilde{b}\tilde{b}^*-aa^*-\tilde{a}\tilde{a}^* & bb^*-\tilde{b}\tilde{b}^*-aa^*+\tilde{a}\tilde{a}^* \\ bb^*-\tilde{b}\tilde{b}^*+aa^*-\tilde{a}\tilde{a}^* & bb^*+\tilde{b}\tilde{b}^*+aa^*+\tilde{a}\tilde{a}^* \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Объектами векторного представления, т. е. величинами, преобразующимися согласно матрице $\Phi_{0,N+1}$, являются следующие квадратичные выражения амплитуд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AA^* \\ AA'^* \\ A'A^* \\ A'A'^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} AA'^*+A^*A' \\ i(AA'^*-A^*A') \\ AA^*-A'A'^* \\ AA^*+A'A'^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{(1)} \\ \mathrm{A}^{(2)} \\ \mathrm{A}^{(3)} \\ \mathrm{A}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Эти величины преобразуются, следовательно, под действием пленки так, как компоненты четырехмерного вектора при соответствующем этой пленке преобразовании Лоренца. Легко за-

метить, что эти величины представляют собой т. наз. параметры Стокса (см., например, [52]) для совокупности прямой и обратной волн. Отметим еще, что между этими параметрами существует тождественное соотношение:

$$A^{(1)2} + A^{(2)2} + A^{(3)2} - A^{(0)2} = 0, \tag{5.4}$$

т. е. что вектор $A^{(i)}$ является изотропным.

Формула преобразования вектора $A^{(i)}$ имеет следующий вид, вполне аналогичный формуле (3.20):

$$\begin{pmatrix} A_0^{(1)} \\ A_0^{(2)} \\ A_0^{(3)} \\ A_0^{(0)} \end{pmatrix} = \Phi_{0,N+1} \begin{pmatrix} A_{N+1}^{(1)} \\ A_{N+1}^{(2)} \\ A_{N+1}^{(3)} \\ A_{N+1}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Так как матрицу $\Phi_{0,N+1}$ можно рассматривать как матрицу преобразования Лоренца, то между элементами этой матрицы существуют определенные квадратичные соотношения. Если обозначим, как обычно,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

то эти соотношения запишутся в виде:

$$\Phi g \Phi^{\mathrm{T}} = g, \tag{5.7}$$

где Φ^{T} означает транспонированную Φ. В § 15 мы рассмотрим эти соотношения более подробно.

Итак, мы видели, что всякой пленке соответствует некоторое преобразование Лоренца. Наоборот, всякому собственному преобразованию Лоренца соответствует некоторая матрица спинорного представления (определяемая с точностью до знака), которую можно отождествить с матрицей $F_{0,N+1}$. Следовательно, всевозможные пленки можно рассматривать как элементы группы, если под «пленкой» подразумевать всю совокупность мыслимых пленок, характеризуемых одной и той же определенной матрицей F. Именно эта совокупность и является элементом группы, изоморфной с группой матриц спинорного представления (собственной) группы Лоренца. Группа Лоренца сама является гомоморфной по отношению к группе пленок.

Напишем еще явные выражения для матриц Γ и M, соответствующих в векторном представлении матрицам G и M. Вычисляя, находим:

$$\Gamma(v) = \mathrm{K}(G \times G^*)\mathrm{K}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v) & 0 & 0 & \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v) \\ 0 & \cos 2\mathrm{Im}(v) & \sin 2\mathrm{Im}(v) & 0 \\ 0 & -\sin 2\mathrm{Im}(v) & \cos 2\mathrm{Im}(v) & 0 \\ \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v) & 0 & 0 & \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

и

$$\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{K}(M \times M^*)\mathrm{K}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} \cos 2\mathrm{Re}(\alpha) & \sin 2\mathrm{Re}(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin 2\mathrm{Re}(\alpha) & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & -\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Матрицы Γ и M удовлетворяют, конечно, тоже соотношениям вида (5.7), т. е.

$$\Gamma g \Gamma^{\mathrm{T}} = g, \qquad \mathrm{M} g \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = g. \quad (5.10)$$

Формула (3.14) для векторного представления напишется в виде:

$$\Phi_{0,N+1} = \Gamma(v_{01})\mathrm{M}(\alpha_1)\Gamma(v_{12})\mathrm{M}(\alpha_2)\ldots \\ \ldots\Gamma(v_{N-1,N})\mathrm{M}(\alpha_N)\Gamma(v_{N,N+1}). \quad (5.11)$$

Из формулы (5.8) явствует, что матрица Γ описывает вращение вокруг оси x на угол $2\mathrm{Im}(v)$ вместе со специальным преобразованием Лоренца, означающим переход к системе, движущейся в направлении отрицательной оси x со скоростью $c \cdot \operatorname{th} 2\mathrm{Re}(v)$. Из формулы (5.9) видно, что матрица M описывает вращение вокруг оси z на угол $2\mathrm{Re}(\alpha)$ вместе с специальным преобразованием Лоренца, означающим переход к системе, движущейся в направлении положительной оси z со скоростью $c \cdot \operatorname{th} 2\mathrm{Im}(\alpha)$. В частном случае отсутствия поглощения и полного отражения матрица Γ не содержит вращения, а матрица M не содержит движения вдоль оси z. Это значит, что z-координата в этом случае вообще не участвует в преобразовании. В матрице Φ (см. формулу (5.2)) тогда элементы третьего ряда и третьего столбца (кроме равного единице элемента, находящегося на их пересечении) равны нулю. То же свойство присуще матрице Φ и в случае, если какие-либо слои являются полноотражающими (по-прежнему в случае отсутствия поглощения), если только в ограничивающих средах полного отражения нет.

В самом деле, как вытекает из формул (1.11) и (1.21), на входной границе полноотражающего слоя $2\mathrm{Im}(v) = \frac{\pi}{2}$, а на выходной границе $2\mathrm{Im}(v) = -\frac{\pi}{2}$, тогда как на границе двух полноотражающих слоев $\mathrm{Im}(v) = 0$. Кроме того, у полноотражающего слоя $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Следовательно, матрица $\Gamma(v)$ при входе в полноотражающий слой описывает, кроме движения вдоль оси x, также поворот вокруг оси x на 90°, а при выходе из полноотражающего слоя — поворот на —90°. А матрица $M(\alpha)$ в полноотражающем слое означает движение вдоль оси z, но не содержит поворота вокруг оси z. Отсюда непосредственно вытекает, что при прохождении через полноотражающий слой (или несколько лежащих рядом полноотражающих слоев) z-координата остается неизменной. В этом же можно убедиться и непосредственным перемножением матриц в произведении $\Phi = \Gamma(v_1)M(\alpha)\Gamma(v_2)$, где $2\mathrm{Im}(v_1) = \frac{\pi}{2}$, $2\mathrm{Im}(v_2) = -\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Элементы третьего ряда и третьего столбца оказываются в этом произведении равными нулю (кроме, конечно, элемента $\Phi_{33} = 1$).

Таким образом, отсутствие поглощения в пленке является условием, достаточным для того, чтобы преобразование Лоренца, соответствующее пленке, оставляло z-координату неизменной. Как увидим ниже (см. § 16), это условие является также необходимым.

Случай, когда полное отражение не является нарушенным (т. е. когда условие полного отражения выполнено в подложке), является особым. В этом случае z-координата неизменной не остается. Подробнее об этом см. ниже, в § 17.

§ 14. Антисимметрично-тензорное представление

Кроме рассмотренного в предыдущем параграфе векторного представления группы пленок, образуемого матрицами Ф (формула (5.2)), представляет интерес антисимметрично-тензорное представление, элементы матриц которого, также как и элементы матриц Ф, зависят квадратично от величин a, b, $\tilde{a}^*$, $\tilde{b}^*$ и их комплексно-сопряженных.

Антисимметрично-тензорное представление эквивалентно представлению $E_{1,0} + E_{0,1}$ группы Лоренца, матрицы которого имеют вид:

$$\mathrm{T} \equiv F_1 \oplus F_1^* = \begin{vmatrix} b^2 & \sqrt{2}\,\tilde{a}^* b & \tilde{a}^{*2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\,ab & b\tilde{b}^* + a\tilde{a}^* & \sqrt{2}\,\tilde{a}^*\tilde{b}^* & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & \sqrt{2}\,a\tilde{b}^* & \tilde{b}^{*2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{*2} & \sqrt{2}\,\tilde{a}b^* & \tilde{a}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,a^*b^* & b^*\tilde{b} + a^*\tilde{a} & \sqrt{2}\,\tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & 0 & 0 & a^{*2} & \sqrt{2}\,a^*\tilde{b} & \tilde{b}^2 \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

Здесь $\oplus$ есть знак прямой суммы, а F_1 есть матрица представления $E_{1,0}$. Матрица унитарного преобразования, переводящего представление $E_{1,0} + E_{0,1}$ в антисимметрично-тензорное, такова:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & -i & i & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i & i & 0 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Обозначим матрицы антисимметрично-тензорного представления через Θ, так что

$$\Theta = \Lambda \mathrm{T} \Lambda^{-1}. \tag{5.14}$$

Вычисление элементов матрицы Θ дает следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{11} &= \Theta_{66} = a\tilde{a}^* + \tilde{a}a^* + 1, \\ \Theta_{12} &= \Theta_{65} = \frac{i}{2}(ab - \tilde{a}\tilde{b} - a^*b^* + \tilde{a}^*\tilde{b}^*), \\ \Theta_{13} &= \Theta_{64} = \frac{1}{2}(-ab + \tilde{a}\tilde{b} - a^*b^* + \tilde{a}^*\tilde{b}^*) \\ \Theta_{14} &= -\Theta_{63} = \frac{i}{2}(ab + \tilde{a}\tilde{b} - a^*b^* - \tilde{a}^*\tilde{b}^*), \\ \Theta_{15} &= -\Theta_{62} = \frac{1}{2}(ab + \tilde{a}\tilde{b} + a^*b^* + \tilde{a}^*\tilde{b}^*), \\ \Theta_{16} &= -\Theta_{61} = i(a^*\tilde{a} - a\tilde{a}^*), \\ \Theta_{21} &= \Theta_{56} = \frac{i}{2}(-\tilde{a}^*b + a^*\tilde{b} + \tilde{a}b^* - a\tilde{b}^*), \end{aligned}\right|$$

$$\Theta_{22} = \Theta_{55} = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + \tilde{b}^{*2} + \tilde{a}^{*2} + b^{*2} + a^{*2} + \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{23} = \Theta_{54} = \frac{i}{4}(b^2 + a^2 - \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} - b^{*2} - a^{*2} + \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{24} = -\Theta_{53} = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 - \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} + b^{*2} + a^{*2} - \tilde{b}^2 - \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{25} = -\Theta_{52} = \frac{i}{4}(-b^2 - a^2 - \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} + b^{*2} + a^{*2} + \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{26} = -\Theta_{51} = \frac{1}{2}(-\tilde{a}^* b - a^* \tilde{b} - \tilde{a} b^* - a \tilde{b}^*),$$

$$\Theta_{31} = \Theta_{46} = \frac{1}{2}(-\tilde{a}^* b + a^* \tilde{b} - \tilde{a} b^* + a \tilde{b}^*),$$

$$\Theta_{32} = \Theta_{45} = \frac{i}{4}(-b^2 + a^2 + \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} + b^{*2} - a^{*2} - \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{33} = \Theta_{44} = \frac{1}{4}(b^2 - a^2 + \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} + b^{*2} - a^{*2} + \tilde{b}^2 - \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{34} = -\Theta_{43} = \frac{i}{4}(-b^2 + a^2 - \tilde{b}^{*2} + \tilde{a}^{*2} + b^{*2} - a^{*2} + \tilde{b}^2 - \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{35} = -\Theta_{42} = \frac{1}{4}(-b^2 + a^2 + \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2} - b^{*2} + a^{*2} + \tilde{b}^2 - \tilde{a}^2),$$

$$\Theta_{36} = -\Theta_{41} = \frac{i}{2}(\tilde{a}^* b + a^* \tilde{b} - \tilde{a} b^* - a \tilde{b}^*).$$

(5.15)

Порядку расположения рядов и столбцов в матрице Θ соответствует следующий порядок тензорных индексов объектов представления: 12, 31, 23, 41, 42, 43, т. е., например, $\Theta_{34} \equiv \Theta_{23,41}$. Объекты тензорного представления находим, преобразуя с помощью матрицы Λ объекты представления $E_{1,0} + E_{0,1}$:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & -i & i & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i & i & 0 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^2 \\ AA'\sqrt{2} \\ A'^2 \\ A^{*2} \\ A^* A'^* \sqrt{2} \\ A'^{*2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} AA' + A^*A'^* \\ \frac{i}{2}(-A^2 + A^{*2} - A'^2 + A'^{*2}) \\ \frac{1}{2}(-A^2 - A^{*2} + A'^2 + A'^{*2}) \\ \frac{i}{2}(-A^2 + A^{*2} + A'^2 - A'^{*2}) \\ \frac{1}{2}(A^2 + A^{*2} + A'^2 + A'^{*2}) \\ i(AA' - A^*A'^*) \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

Эти величины при прохождении света через пленку преобразуются, следовательно, как компоненты антисимметричного тензора, например, как компоненты H_z, H_y, H_x магнитного и E_x, E_y, E_z электрического вектора при соответствующем пленке преобразовании Лоренца.

Как известно, антисимметричный тензор второго ранга имеет два инварианта. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в нашем случае оба инварианта равны нулю. Наличие же инвариантов означает (подобно формуле (5.7) в случае векторного представления), что между элементами матрицы Θ существует ряд квадратичных соотношений. Именно, обозначая

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \tag{5.17}$$

получим:

$$\Theta\gamma_1\Theta^{\mathrm{T}} = \gamma_1. \tag{5.18}$$

Во-вторых, если

$$\gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{5.19}$$

то

$$\Theta\gamma_2\Theta^{\mathrm{T}} = \gamma_2. \tag{5.20}$$

Фактически обе формулы (5.18) и (5.20) дают одни и те же соотношения. В следующем параграфе мы рассмотрим их более подробно.

Преобразуя к антисимметрично-тензорному представлению матрицы G и M, получим следующие выражения:

$$\Lambda(G_1 \oplus G_1^*)\Lambda^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) & -\operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) \\ \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) & \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) & -\operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) \\ -\operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) & -\operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) & \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) \\ \operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) & -\operatorname{sh} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) & \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) \\ -\operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\sin 2\mathrm{Im}(v) & \operatorname{ch} 2\mathrm{Re}(v)\cos 2\mathrm{Im}(v) \end{pmatrix}$$

и $\Lambda(M_1 \oplus M_1^*)\Lambda^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & -\sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) \\ 0 & \sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) \\ 0 & -\cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) \\ 0 & \sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ -\cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & -\sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & 0 \\ -\sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{sh} 2\mathrm{Im}(\alpha) & 0 \\ \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & 0 \\ -\sin 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & \cos 2\mathrm{Re}(\alpha)\operatorname{ch} 2\mathrm{Im}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

§ 15. Квадратичные величины, характеризующие пленку, и квадратичные соотношения между ними

В этом параграфе мы введем прежде всего особые обозначения для тех величин, квадратичных относительно a, b, $\tilde{a}^*$, $\tilde{b}^*$ и их комплексно-сопряженных, через которые удобно выражаются элементы матриц Φ и Θ. Эти обозначения выберем следующим образом:

$$
\left.\begin{aligned}
&b\tilde{b} - a\tilde{a} = Ke^{i\varkappa}, \quad K \geqslant 0,\\
&b\tilde{b} + a\tilde{a} = Le^{i\lambda}, \quad L \geqslant 0,\\
&\tilde{a}b - a\tilde{b} = Ue^{i\sigma}, \quad U \geqslant 0,\\
&\tilde{a}b + a\tilde{b} = Ve^{i\tau}, \quad V \geqslant 0,\\
&\frac{1}{2}(bb^* + \tilde{b}\tilde{b}^* + aa^* + \tilde{a}\tilde{a}^*) = \operatorname{ch}\psi,\\
&\frac{1}{2}(bb^* + \tilde{b}\tilde{b}^* - aa^* - \tilde{a}\tilde{a}^*) = \operatorname{ch}\varphi,\\
&\frac{1}{2}(bb^* - \tilde{b}\tilde{b}^* - aa^* + \tilde{a}\tilde{a}^*) = \mathrm{S}
\end{aligned}\right\} \tag{5.23}
$$

и

$$
\left.\begin{aligned}
&a\tilde{a}^* + \tilde{a}a^* + 1 = f,\\
&i(a\tilde{a}^* - a^*\tilde{a}) = h,\\
&ab - \tilde{a}\tilde{b} = Pe^{i\nu}, \quad P \geqslant 0,\\
&ab + \tilde{a}\tilde{b} = Qe^{i\delta}, \quad Q \geqslant 0,\\
&\frac{1}{2}(b^2 + a^2 + \tilde{b}^{*2} + \tilde{a}^{*2}) = Xe^{i\xi}, \quad X \geqslant 0,\\
&\frac{1}{2}(b^2 - a^2 + \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2}) = Ye^{i\eta}, \quad Y \geqslant 0,\\
&\frac{1}{2}(b^2 + a^2 - \tilde{b}^{*2} - \tilde{a}^{*2}) = Ze^{i\zeta}, \quad Z \geqslant 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.24}
$$

С помощью этих обозначений матрицы Φ и Θ напишутся так:

$$
\Phi = \begin{pmatrix}
L\cos\lambda & L\sin\lambda & -U'\cos\sigma' & -V'\cos\tau'\\
-K\sin\varkappa & K\cos\varkappa & U'\sin\sigma' & V'\sin\tau'\\
U\cos\sigma & U\sin\sigma & \operatorname{ch}\varphi & S\\
V\cos\tau & V\sin\tau & S' & \operatorname{ch}\psi
\end{pmatrix} \tag{5.25}
$$

и

$$
\Theta = \begin{pmatrix}
f & -P\sin\gamma & -P\cos\gamma & -Q\sin\delta & Q\cos\delta & -h\\
-P'\sin\gamma' & X\cos\xi & -Z\sin\zeta & Z\cos\zeta & X\sin\xi & Q'\cos\delta'\\
P'\cos\gamma' & Z'\sin\zeta' & Y\cos\eta & Y\sin\eta & -Z'\cos\zeta' & Q'\sin\delta'\\
-Q'\sin\delta' & Z'\cos\zeta' & -Y\sin\eta & Y\cos\eta & Z'\sin\zeta' & P'\cos\gamma'\\
-Q'\cos\delta' & -X\sin\xi & -Z\cos\zeta & -Z\sin\zeta & X\cos\xi & -P'\sin\gamma'\\
h & -Q\cos\delta & Q\sin\delta & -P\cos\gamma & -P\sin\gamma & f
\end{pmatrix}. \tag{5.26}
$$

Штрих означает здесь, как и ранее, падение света с обратной стороны.

Величины K, L, U, V, P, Q, X, Y, Z, $\varkappa$, λ, σ, τ, γ, δ, ξ, η, ζ, S, f, и h и соответствующие штрихованные величины вещественны, как видно непосредственно из формул (5.23) и (5.24). Вещественны также, как будет показано ниже, ψ и φ. Между всеми этими квадратичными величинами существует большое число квадратичных соотношений. Часть из них вытекает из формул (5.7), (5.18) и (5.20). Не выписывая их все, ограничимся несколькими примерами.

Из формулы (5.7) вытекают, например, следующие соотношения:

$$U^2 + \operatorname{sh}^2 \varphi = S^2, \tag{5.27}$$

$$V^2 + S'^2 = \operatorname{sh}^2 \psi, \tag{5.28}$$

$$UV \cos(\sigma - \tau) + S' \operatorname{ch} \varphi - S \operatorname{ch} \psi = 0, \tag{5.29}$$

$$L^2 \sin 2\lambda - K^2 \sin 2\varkappa + U^2 \sin 2\sigma - V^2 \sin 2\tau = 0 \tag{5.30}$$

и др.

Далее, из формулы (5.18), например, имеем:

$$f^2 + P^2 - Q^2 - h^2 = 1, \tag{5.31}$$

$$P'^2 \sin^2 \gamma' - Q'^2 \cos^2 \delta' + X^2 \cos 2\xi - Z^2 \cos 2\zeta = 1, \tag{5.32}$$

$$fh + PQ \sin(\gamma - \delta) = 0, \tag{5.33}$$

$$2PQ \cos \gamma \sin \delta - Z^2 \sin 2\zeta + Y^2 \sin 2\eta = 0 \tag{5.34}$$

и др.

Формула (5.20) дает в точности те же соотношения, что и формула (5.18), благодаря симметрии матрицы Θ, как видно из формул (5.15) и (5.26).

Другая часть квадратичных соотношений между рассматриваемыми величинами связывает элементы матрицы Θ с элементами матрицы Φ. Эти соотношения вытекают из того, что элементы матрицы Θ являются двурядными минорами матрицы Φ, согласно формуле:

$$\Theta_{ik,lm} = \Phi_{il}\Phi_{km} - \Phi_{im}\Phi_{kl}. \tag{5.35}$$

Эта формула следует из того, что Θ есть матрица преобразования компонент антисимметричного тензора. Двойные индексы ik и lm могут принимать здесь значения 12, 31, 23, 41, 42, 43; однако, формулу (5.35) можно использовать и при любых других значениях, полагая $\Theta_{ik,lm} = -\Theta_{ki,lm} = -\Theta_{ik,ml}$.

Конкретизируя значения индексов, получим из (5.35), например, следующие соотношения:

$$f = KL \cos(\varkappa - \lambda) = \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \psi - SS', \tag{5.36}$$

$$h = UV \sin(\sigma - \tau) = U'V' \sin(\sigma' - \tau'), \tag{5.37}$$

$$Q' \sin \delta' = VL \sin(\tau - \lambda) = V' \operatorname{ch} \varphi \sin \tau' - SU' \sin \sigma', \tag{5.38}$$

$$P' \cos \gamma' = -UK \cos(\sigma - \varkappa) = S'V' \cos \tau' - U' \operatorname{ch} \psi \cos \sigma' \tag{5.39}$$

и т. д. Кроме того, из формулы (5.35) можно получить еще другие квадратичные соотношения.

Во-первых, имеют место формулы:

$$\Phi_{ik}g_{il}\Theta_{lm,np} = g_{kn}\Phi_{mp} - g_{kp}\Phi_{mn} \tag{5.40}$$

и

$$\Phi_{ik}g_{kl}\Theta_{np,lm} = g_{in}\Phi_{pm} - g_{ip}\Phi_{nm}. \tag{5.41}$$

Во-вторых,

$$\Theta_{ik,lm}g_{kn}\Theta_{np,qr} = g_{mq}\Phi_{il}\Phi_{pr} + g_{lr}\Phi_{im}\Phi_{pq} - g_{mr}\Phi_{il}\Phi_{pq} - g_{lq}\Phi_{im}\Phi_{pr} \tag{5.42}$$

и

$$\Theta_{ik,lm}g_{mn}\Theta_{pq,nr} = g_{kp}\Phi_{il}\Phi_{qr} + g_{iq}\Phi_{kl}\Phi_{pr} - g_{kq}\Phi_{il}\Phi_{pr} - g_{ip}\Phi_{kl}\Phi_{qr}. \tag{5.43}$$

Все эти формулы легко доказываются подстановкой в левые части выражения Θ через Φ по формуле (5.35) с последующим упрощением по формуле (5.7). В левых частях подразумевается суммирование по индексам, написанным дважды. Давая индексам конкретные значения, получим большое число конкретных соотношений.

Примеры: 1) Если в формуле (5.40) положим $n = 1$, $p = 2$, $m = 3$, $k = 4$, то получим:

$$P'V' \sin(\tau' - \gamma') = h \operatorname{ch} \psi. \tag{5.44}$$

2) Из формулы (5.41) при $i = m = p = 3$, $n = 4$ следует:

$$UQ \cos(\sigma - \delta) = Sf - S'. \tag{5.45}$$

3) Формула (5.42) при $i = l = q = 1$, $m = r = 2$, $p = 3$, в комбинации с (5.7) дает:

$$hQ' \sin\delta' - fP' \cos\gamma' = UL \cos(\sigma - \lambda). \tag{5.46}$$

4) Из формулы (5.43), если $i = p = 1$, $k = q = 2$, $l = r = 3$, имеем:

$$P^2 - h^2 = U'^2, \tag{5.47}$$

а если $i = p = 1$, $k = q = 2$, $l = r = 4$, то

$$Q^2 + h^2 = V'^2. \tag{5.48}$$

Рассмотренные соотношения, конечно, не все являются независимыми. Кроме того, комбинируя их друг с другом, можно получить еще другие, эквивалентные, но по форме отличные соотношения. Например, из формулы

$$f^2 + P'^2 - Q'^2 - h^2 = 1$$

(см. (5.18)) и формулы (5.47), переписанной в виде

$$P'^2 - h^2 = U^2$$

(так как $h' = h$), вытекает:

$$f^2 + U^2 - Q'^2 = 1. \tag{5.49}$$

Другой пример: формула (5.7) содержит следующие равенства:

$$L^2 + U'^2 \cos^2 \sigma' - V'^2 \cos^2 \tau' = 1,$$
$$K^2 + U'^2 \sin^2 \sigma' - V'^2 \sin^2 \tau' = 1.$$

Складывая эти формулы и учитывая, что, согласно (5.47), (5.48) и (5.31)

$$U'^2 - V'^2 = P^2 - Q^2 - 2h^2 = 1 - f^2 - h^2,$$

находим:

$$L^2 + K^2 - f^2 - h^2 = 1. \tag{5.50}$$

Подобные выкладки можно было бы еще продолжить. Однако, выписывать все возможные соотношения не имеет большого смысла. Ограничимся замечанием, что в каждом конкретном вопросе те или другие из них могут найти полезные применения.

§ 16. Несколько теорем о поглощающих пленках

В этом параграфе сформулируем и докажем несколько важных теорем. Хотя в этих теоремах мы имеем в виду в первую очередь поглощающие пленки, они имеют место, вообще говоря, и в предельном случае отсутствия поглощения. Соответствующие указания будут сделаны ниже в случае нужды каждый раз особо.

Здесь мы будем рассматривать только такие пленки, у которых ограничивающие среды прозрачны и углы падения и преломления в них вещественны (т. е. условие полного отражения в них не выполняется). Случай поглощающей или полноотражающей подложки рассмотрим в следующем параграфе особо.

Мы начнем с некоторых простых замечаний и определений.

В случае отсутствия поглощения матрица Ф, как уже указано в § 13, имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} L\cos\lambda & L\sin\lambda & 0 & -V'\cos\tau' \\ -K\sin\varkappa & K\cos\varkappa & 0 & V'\sin\tau' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ V\cos\tau & V\sin\tau & 0 & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

т. е. элементы третьего ряда и третьего столбца, кроме $\Phi_{33} = 1$, равны нулю. Это же вытекает и из формул (5.23) элементов матрицы, так как (см. § 6), в случае отсутствия поглощения и

ненарушенного полного отражения $\tilde{a} = a$ и $\tilde{b} = b$. Таким образом, отсутствие поглощения * означает, что $S = U = S' = U' = \varphi = 0$. В главе VIII будет показано, что U или U' или обе эти величины могут быть равны нулю и у поглощающих пленок. Поглощающую пленку с $U = 0$ или $U' = 0$ будем называть просветленной (соответственно, спереди или сзади), а пленку с $U = U' = 0$ будем называть двусторонне просветленной. Основания для такой терминологии будут разъяснены в главе VIII.

Далее, отметим, что, как вытекает из формул (5.23),

$$\operatorname{ch}\varphi + S - 1 = \frac{A}{D} \tag{5.52}$$

и

$$\operatorname{ch}\varphi - S - 1 = \frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}, \tag{5.53}$$

где A — коэффициент поглощения.

Перейдем к теоремам.

Теорема 1. Величины $Ue^{i\sigma}$, S, φ, и, следовательно, $\frac{A}{D}$ и $\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}$ данной пленки не зависят ни от исходной среды, ни от слоев, находящихся между исходной средой и первым поглощающим слоем, а зависят только от подложки и от тех слоев, которые находятся между первым поглощающим слоем (включительно) и подложкой.

Доказательство. Разделим пленку на две части: первая содержит все слои, находящиеся между исходной средой и первым поглощающим слоем, а вторая — все остальные слои. Между этими частями поместим непоглощающий слой нулевой толщины. Тогда

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2,$$

где Φ_1 имеет вид (5.51). Отсюда сразу следует, что Φ имеет в третьем ряду те же элементы, что и Φ_2. Но в матрице Φ элементы третьего ряда не зависят от показателя преломления промежуточного слоя (ибо этого слоя нет!); следовательно, от него не зависят и элементы третьего ряда матрицы Φ_2. Но тогда они могут зависеть только от слоев второй части пленки и от подложки. То же свойство имеют и равные им элементы третьего ряда матрицы Φ. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 2. Величина φ данной пленки зависит только от той ее части, которая заключена между крайними поглощающими

* Здесь и ниже в этом параграфе для краткости будем писать «поглощение» вместо «поглощение или ненарушенное полное отражение».

слоями (включая эти последние), и не зависит ни от слоев, находящихся вне этой части, ни от ограничивающих сред.

Доказательство вытекает непосредственно из предыдущей теоремы, с учетом того, что $\varphi' = \varphi$, как вытекает из формулы (5.23) для φ и формул (3.17).

Сделаем по поводу теорем 1 и 2 следующее замечание. Величины $Ue^{i\sigma}$, S, φ, $\frac{A}{D}$ и $\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}$, независимость которых от тех или других частей пленки доказывается в этих теоремах, зависят все-таки от величины $n_0 \sin \vartheta_0$, определяющей углы преломления во всех слоях и подложке. Дело в том, что мы считаем углы преломления параметрами пленки или какой-либо ее части наряду с показателями преломления сред и толщинами слоев. Иными словами, зависимость от показателя преломления исходной среды, входящая через выражение $n_0 \sin \vartheta_0$, является несущественной в том смысле, что замена исходной среды другой средой, имеющей иной показатель преломления, вместе с одновременным изменением угла падения (так что $n_0 \sin \vartheta_0$ не изменяется) не отражается на значениях величин $Ue^{i\sigma}$, S, φ, $\frac{A}{D}$ и $\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}$.

Теорема 3. Если $A \geqslant 0$, то $\tilde{A} \leqslant 0$, и наоборот, если $A \leqslant 0$, то $\tilde{A} \geqslant 0$.

Доказательство. Исходим из формулы (5.27): $U^2 + \operatorname{sh}^2 \varphi = S^2$. Из формул (5.52) и (5.53) вытекает:

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{D} + \frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}\right) + 1, \tag{5.54}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{D} - \frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}\right). \tag{5.55}$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.27), находим:

$$U^2 = -\frac{A}{D} - \frac{\tilde{A}}{\tilde{D}} - \frac{A}{D} \cdot \frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}. \tag{5.56}$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы, так как всегда

$$D = \frac{1}{bb^*} > 0, \quad \tilde{D} = \frac{1}{\tilde{b}\tilde{b}^*} > 0.$$

Заметим, что неравенство $A \geqslant 0$ свойственно пленкам с положительным поглощением. Сопряженные им пленки имеют отрицательное поглощение. Наоборот, если в качестве первичной пленки имеем пленку с отрицательным поглощением, то $A \leqslant 0$, а у сопряженной пленки тогда поглощение положительно.

Теорема 4. Если $A \geqslant 0$, то и $S \geqslant 0$, и наоборот, если $A \leqslant 0$, то и $S \leqslant 0$.

Доказательство вытекает непосредственно из предыдущей теоремы и формулы (5.55).

Заметим, что, как вытекает из формулы (5.23) для S, в согласии с теоремами 3 и 4,

$$\tilde{\tilde{S}} = -S. \tag{5.57}$$

Теорема 5. Если поглощение во всех слоях пленки одного знака, то φ вещественно.

Доказательство этой теоремы довольно длинно и состоит из двух частей. Прежде всего нужно доказать ее для отдельного поглощающего слоя. Во второй части она обобщается на любую пленку.

Итак, рассмотрим отдельный поглощающий слой, находящийся между двумя прозрачными средами. Эти последние мы можем положить одинаковыми, так как, по теореме 2, φ от них все равно не зависит. Согласно основной формуле (3.14),

$$F = G(-v)\,M(\alpha)\,G(v) = \begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,2v & i\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,2v \\ -i\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,2v & \cos\alpha - i\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,2v \end{pmatrix}$$

(здесь мы положили $v_{12} \equiv v$ и опустили прочие индексы). Следовательно,

$$\begin{aligned} a &= -\tilde{a}^* = -i\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,2v, \\ b &= \cos\alpha + i\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,2v, \\ \tilde{b}^* &= \cos\alpha - i\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,2v, \end{aligned} \tag{5.58}$$

причем

$$\alpha = kh(\eta - i\varkappa)\cos\vartheta \tag{5.59}$$

и

$$\begin{aligned} v^{\parallel} &= \frac{1}{2}\ln\frac{n\cos\vartheta}{(\eta - i\varkappa)\cos\vartheta_0}, \\ v^{\perp} &= \frac{1}{2}\ln\frac{(\eta - i\varkappa)\cos\vartheta}{n\cos\vartheta_0}, \end{aligned} \tag{5.60}$$

где n — показатель преломления ограничивающих сред, ϑ_0 — угол падения, $\eta - i\varkappa$ — показатель преломления слоя, h — его

толщина и ϑ — угол преломления в нем. $\varkappa$ может быть как положительным (положительное поглощение), так и отрицательным (отрицательное поглощение).

Подставляя формулы (5.58) в формулу (5.23), находим:

$$\operatorname{ch}\varphi = \cos\alpha\cos\alpha^* + \sin\alpha\sin\alpha^*\operatorname{ch}(2v - 2v^*) \tag{5.61}$$

или, после некоторых преобразований,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\varphi = 2[&\operatorname{sh}^2\operatorname{Im}(\alpha)\cos^2 2\operatorname{Im}(v) - \\ &- \sin^2\operatorname{Re}(\alpha)\sin^2 2\operatorname{Im}(v)] + 1.\end{aligned} \tag{5.62}$$

В предельном случае, $\varkappa = 0$, $\operatorname{Im}(\alpha) = 0$ и $\operatorname{Im}(v) = 0$; следовательно, $\operatorname{ch}\varphi = 1$ и $\varphi = 0$. В случае нарушенного полного отражения $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$ и $\operatorname{Im}(v) = -\frac{\pi}{4}$, следовательно тоже $\varphi = 0$. В дальнейшем будем считать, что $\varkappa \neq 0$. Тогда $\operatorname{Re}(\alpha) \neq 0$ и $\operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$. Кроме того, $\cos 2\operatorname{Im}(v) \neq 0$. В самом деле, как вытекает из формул (5.60) и из того, что

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0 - 2i\eta\varkappa}}{\eta - i\varkappa},$$

$$v^{\parallel} - v^{\parallel *} = \ln\frac{\eta + i\varkappa}{\eta - i\varkappa} - \frac{1}{4}\ln\frac{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0 + 2i\eta\varkappa}{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0 - 2i\eta\varkappa}$$

и

$$v^{\perp} - v^{\perp *} = -\frac{1}{4}\ln\frac{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0 + 2i\eta\varkappa}{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0 - 2i\eta\varkappa}.$$

Если положим

$$\left.\begin{aligned}\sin\gamma &= \frac{\varkappa}{\sqrt{\eta^2 + \varkappa^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \varkappa^2}}\end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\sin\delta &= \frac{2\eta\varkappa}{\sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2}}, \\ \cos\delta &= \frac{\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0}{\sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2}},\end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

то

$$2\mathrm{Im}(v^{\parallel}) = 2\gamma - \frac{\delta}{2},$$
$$2\mathrm{Im}(v^{\perp}) = -\frac{\delta}{2}. \tag{5.65}$$

Отметим, что при $\varkappa > 0$ $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \delta < \pi$, а при $\varkappa < 0$ $-\frac{\pi}{2} < \gamma < 0$ и $-\pi < \delta < 0$.

Для перпендикулярной поляризации сразу видно, что $\cos 2\mathrm{Im}(v) \neq 0$. В случае же параллельной поляризации

$$\cos 2\mathrm{Im}(v) = \cos\left(2\gamma - \frac{\delta}{2}\right).$$

Если бы здесь было $\cos 2\mathrm{Im}(v) = 0$, то получилось бы $1 + \tan\frac{\delta}{2}\tan 2\gamma = 0$, или, согласно (5.63) и (5.64),

$$n^2 \sin^2\vartheta_0 + \sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2} = 0,$$

что невозможно. Итак, всегда $\cos 2\mathrm{Im}(v) \neq 0$.

Возвращаясь к формуле (5.62), видим, что ее можно теперь переписать в виде неравенства:

$$\mathrm{ch}\,\varphi > 2[\mathrm{Im}^2(\alpha)\cos^2 2\mathrm{Im}(v) - \mathrm{Re}^2(\alpha)\sin^2 2\mathrm{Im}(v)] + 1. \tag{5.66}$$

Здесь, согласно (5.59) и (5.64),

$$\mathrm{Im}^2(\alpha) = k^2h^2\sin^2\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2},$$
$$\mathrm{Re}^2(\alpha) = k^2h^2\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2}. \tag{5.67}$$

Дальше рассмотрим опять в отдельности случаи перпендикулярной и параллельной поляризации.

В случае перпендикулярной поляризации, согласно (5.65) и (5.67),

$$\mathrm{Im}^2(\alpha)\cos^2 2\mathrm{Im}(v) - \mathrm{Re}^2(\alpha)\sin^2 2\mathrm{Im}(v) = 0;$$

следовательно, $\mathrm{ch}\,\varphi > 1$. В случае параллельной поляризации

$$\mathrm{Im}^2(\alpha)\cos^2 2\mathrm{Im}(v) - \mathrm{Re}^2(\alpha)\sin^2 2\mathrm{Im}(v) =$$
$$= k^2h^2\sqrt{(\eta^2 - \varkappa^2 - n^2\sin^2\vartheta_0)^2 + 4\eta^2\varkappa^2}\sin 2\gamma\sin(\delta - 2\gamma) > 0,$$

так как $\sin 2\gamma \gtrless 0$ и $\sin(\delta - 2\gamma) \gtrless 0$, где верхний знак соответствует $\varkappa > 0$, а нижний $\varkappa < 0$. Последнее неравенство вытекает

из того, что $\frac{\delta}{2} \gtrless \gamma$; в самом деле, при $\varkappa > 0$ $\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $\gamma < \frac{\pi}{2}$, так что неравенство $\frac{\delta}{2} > \gamma$ равносильно неравенству $\operatorname{tan}\frac{\delta}{2} > \operatorname{tan}\gamma$; последнее же вытекает непосредственно из формул (5.63) и (5.64). Если же $\varkappa < 0$, то $\frac{\delta}{2} > -\frac{\pi}{2}$ и $\gamma > -\frac{\pi}{2}$; тогда неравенство $\frac{\delta}{2} < \gamma$ равносильно неравенству $\operatorname{tan}\frac{\delta}{2} < \operatorname{tan}\gamma$, что также вытекает из формул (5.63) и (5.64).

Итак, в случае параллельной поляризации тоже всегда $\operatorname{ch}\varphi > 1$. Это значит, что для отдельного поглощающего слоя наша теорема доказана. Подчеркнем, что этот результат не зависит от того, обладает ли слой положительным или отрицательным поглощением.

Переходим ко второй части доказательства. Пусть произвольная пленка разделена на две части, между которыми можно вообразить непоглощающий слой нулевой толщины. Тогда

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2,$$

откуда сразу находим:

$$\operatorname{ch}\varphi = \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 + S_1 S'_2 - U_1 U'_2 \cos(\sigma_1 + \sigma'_2). \qquad (5.68)$$

Так как $U_1 \geqslant 0$ и $U'_2 \geqslant 0$, то отсюда

$$\operatorname{ch}\varphi \geqslant \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 + S_1 S'_2 - U_1 U'_2. \qquad (5.69)$$

Пусть наша теорема справедлива для обеих частей, т. е. пусть $\operatorname{ch}\varphi_1 \geqslant 1$ и $\operatorname{ch}\varphi_2 \geqslant 1$. Тогда, согласно (5.27), $|S_1| \geqslant U_1$ и $|S'_2| \geqslant U'_2$. Кроме того, в силу теоремы 4, если обе части пленки имеют поглощение одинакового знака, то $S_1 S'_2 = |S_1 S'_2|$. Следовательно, $S_1 S'_2 - U_1 U'_2 > 0$ и из (5.69) следует: $\operatorname{ch}\varphi > \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 > 1$. Следовательно, теорема верна для всей пленки.

Но так как теорема для отдельного слоя уже доказана, то, методом полной индукции, она доказана и для любой пленки. При этом, как видно из хода доказательства, $\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда пленка не содержит ни одного поглощающего слоя.

Так как φ определяется через $\operatorname{ch}\varphi$ с точностью до знака, то можно условиться считать φ положительным при $A > 0$ и отрицательным при $A < 0$.

Теорема 6. Если поглощение во всех слоях пленки одного знака, то ψ вещественно.

Доказательство вытекает из формул (5.23) для $\operatorname{ch}\varphi$ и $\operatorname{ch}\psi$. Из них видно, что $\operatorname{ch}\psi \geqslant \operatorname{ch}\varphi$. А так как в предыдущей теореме доказано, что $\operatorname{ch}\varphi \geqslant 1$, то и $\operatorname{ch}\psi \geqslant 1$. Следовательно, ψ вещественно.

Теорема 7. Если поглощающая пленка просветлена ($U = 0$), то $\tilde{a} = ae^{-\varphi}$ и $\tilde{b} = be^{-\varphi}$.

Доказательство. Из формул (5.23) следует:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\varphi + S &= bb^* - aa^*, \\ \operatorname{ch}\varphi - S &= \tilde{b}\tilde{b}^* - \tilde{a}\tilde{a}^*. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Умножая первую из этих формул на $\tilde{a}\tilde{a}^*$, а вторую на aa^*, и складывая, находим:

$$\tilde{a}\tilde{a}^*(\operatorname{ch}\varphi + S) + aa^*(\operatorname{ch}\varphi - S) = \tilde{a}\tilde{a}^*bb^* + aa^*\tilde{b}\tilde{b}^*.$$

Вычитая из обеих частей $a\tilde{a}^* + a^*\tilde{a}$, имеем:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}\tilde{a}^*(\operatorname{ch}\varphi + S) + aa^*(\operatorname{ch}\varphi - S) - a\tilde{a}^* - a^*\tilde{a} = \\ &= \tilde{a}\tilde{a}^*bb^* + aa^*\tilde{b}\tilde{b}^* - a\tilde{a}^*(\tilde{b}\tilde{b}^* - \tilde{a}a^*) - a^*\tilde{a}(b\tilde{b}^* - a\tilde{a}^*), \end{aligned}$$

причем в правой части вычитаемые члены умножены на равные единице выражения (см. формулу (3.15)). Раскрывая скобки в правой части и сокращая, находим:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}\tilde{a}^*(\operatorname{ch}\varphi + S) + aa^*(\operatorname{ch}\varphi - S) - a\tilde{a}^* - a^*\tilde{a} = \\ &= \tilde{a}\tilde{a}^*bb^* + aa^*\tilde{b}\tilde{b}^* - a\tilde{a}^*\tilde{b}b^* - a^*\tilde{a}b\tilde{b}^* = \\ &= (\tilde{a}b - a\tilde{b})(\tilde{a}^*b^* - a^*\tilde{b}^*), \end{aligned}$$

т. е.

$$\tilde{a}\tilde{a}^*(\operatorname{ch}\varphi + S) + aa^*(\operatorname{ch}\varphi - S) - a\tilde{a}^* - a^*\tilde{a} = U^2. \tag{5.71}$$

Пусть теперь $U = 0$. Тогда, в силу формулы (5.27), теоремы 4 и нашего условия о выборе знака φ, $S = \operatorname{sh}\varphi$. Следовательно, (5.71) дает:

$$(\tilde{a}e^{\varphi} - a)(\tilde{a}^* - a^*e^{-\varphi}) = 0. \tag{5.72}$$

Отсюда вытекает:

$$\tilde{a} = ae^{-\varphi}. \tag{5.73}$$

Далее, условие $U = 0$ означает, что $\tilde{a}b - a\tilde{b} = 0$, откуда, согласно доказанному только что соотношению, следует:

$$a(be^{-\varphi} - \tilde{b}) = 0.$$

Если $a \neq 0$, то имеем: $\tilde{b} = be^{-\varphi}$, что и требовалось доказать. С другой стороны, формулы (5.70) можно написать в виде:

$$e^{\varphi} = bb^* - aa^*,$$

$$e^{-\varphi} = \tilde{b}\tilde{b}^* - \tilde{a}\tilde{a}^*,$$

так что, в случае $a = 0$, когда, по (5.73), также $\tilde{a} = 0$, получается:

$$bb^*e^{-\varphi} = 1,$$

$$\tilde{b}\tilde{b}^*e^{\varphi} = 1.$$

Но формула (3.15) при $a = 0$ имеет вид: $b\tilde{b}^* = 1$. Кроме того, $b^*\tilde{b} = 1$. Складывая предыдущие две формулы и вычитая последние две, находим:

$$(\tilde{b} - be^{-\varphi})(\tilde{b}^*e^{\varphi} - b^*) = 0,$$

откуда

$$\tilde{b} = be^{-\varphi}, \tag{5.74}$$

что и требовалось доказать. Итак, теорема полностью доказана.

Теорема 8. Если поглощающая пленка двусторонне просветлена ($U = U' = 0$), то $a = \tilde{a} = 0$.

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы. При $U = 0$ $\tilde{a} = ae^{-\varphi}$, а при $U' = 0$ $\tilde{a}' = a'e^{-\varphi}$ (напомним, что $\varphi' = \varphi$). Но так как, согласно (3.17), $a' = -\tilde{a}^*$, то $a^* = \tilde{a}^*e^{-\varphi}$, т. е. $\tilde{a} = ae^{\varphi}$. Следовательно $ae^{-\varphi} = ae^{\varphi}$, и если $\varphi \neq 0$, то $a = \tilde{a} = 0$, что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что в этой теореме существенно, чтобы $\varphi \neq 0$, т. е. чтобы пленка была поглощающей. Если пленка прозрачна, то, хотя у ней $U = U' = 0$, теорема к ней не относится; такая пленка может иметь $a \neq 0$.

Заканчивая этот параграф, отметим, что доказанные здесь теоремы найдут, в частности, успешное применение в теории просветления поглощающих пленок (гл. VIII), а также в некоторых других вопросах (гл. X).

§ 17. Случай непропускающей подложки

Случай непропускающей (т. е. сильно поглощающей или полноотражающей) подложки является особым в том смысле, что большинство результатов предыдущего параграфа в этом случае или теряют смысл или оказываются неверными. В частности, характеристическая величина φ не является более, вообще говоря, вещественной. Поскольку эта величина, как будет видно

из дальнейшего (см. в особенности гл. VIII) играет особо важную роль в теории поглощающих пленок, вопрос непропускающей подложки заслуживает отдельного рассмотрения.

В простейшем случае этого рода пленка вырождается в простую границу раздела между двумя средами. Начнем наше рассмотрение с этого простейшего случая. Обозначая границу индексом 2, имеем, как известно, $\Phi_2 = \Gamma_2$, т. е., согласно (5.8),

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2\operatorname{Re}(v) & 0 & 0 & \operatorname{sh} 2\operatorname{Re}(v) \\ 0 & \cos 2\operatorname{Im}(v) & \sin 2\operatorname{Im}(v) & 0 \\ 0 & -\sin 2\operatorname{Im}(v) & \cos 2\operatorname{Im}(v) & 0 \\ \operatorname{sh} 2\operatorname{Re}(v) & 0 & 0 & \operatorname{ch} 2\operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

Сравнивая это выражение с формулой (5.25), видим, что

$$\varphi_2 = 2i \operatorname{Im}(v) = v - v^*. \tag{5.76}$$

Отсюда следует, что φ_2, как правило, чисто-мнимо, так как, в случае непропускания, v обычно невещественно. Имеется только одно исключение, когда $\operatorname{Im}(v) = 0$, и, следовательно, $\varphi_2 = 0$. Это — случай поглощающей среды с показателем преломления $\eta - i\varkappa$, в котором $\eta > \varkappa$, если падающий свет поляризован в плоскости падения и падает под углом ϑ таким, что

$$\sin\vartheta = \frac{\eta^2 + \varkappa^2}{n\sqrt{2}\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}} \tag{5.77}$$

из среды с показателем преломления n. В самом деле, подставляя это значение $\sin\vartheta$ в формулы (5.63) и (5.64), находим, что $2\gamma = \frac{\delta}{2}$; следовательно, в силу (5.65), $2\operatorname{Im}(v') = 0$. Легко также убедиться в том, что это единственный случай.

Рассмотрим еще частный случай полного отражения. В этом случае имеет место формула

$$v = -\frac{1}{2} \ln \tan \frac{\varrho}{2} + \frac{i\pi}{4}, \tag{5.78}$$

получаемая легко из формул (1.11), (1.13) и (1.21). ϱ означает в ней сдвиг фазы при полном отражении. Следовательно, в этом случае

$$\varphi_2 = \frac{i\pi}{2}. \tag{5.79}$$

Обратимся к общему случаю, когда непропускающая подложка покрыта произвольной пленкой. Обозначим эту пленку

индексом 1. Тогда, помещая между пленкой и подложкой произвольный непоглощающий слой нулевой толщины, будем иметь:

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2;$$

отсюда, основании формулы (5.68), находим:

$$\operatorname{ch}\varphi = \operatorname{ch}\varphi_1 \cos 2\operatorname{Im}(v) + U_1 \sin\sigma_1 \sin 2\operatorname{Im}(v), \qquad (5.80)$$

так как, согласно (5.75), $S'_2 = 0$, $U'_2 = \pm \sin 2\operatorname{Im}(v)$ и $\sigma'_2 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Из формулы (5.80) видно, что φ может быть как вещественно, так и мнимо, в зависимости от пленки и подложки. В некоторых случаях может быть также $\varphi = 0$. Отметим следующие частные случаи:

1) Если пленка непоглощающая, то $\operatorname{ch}\varphi = \cos 2\operatorname{Im}(v)$, т. е., в согласии с общей теоремой 1 из предыдущего параграфа, φ зависит только от подложки.

2) Если подложка полноотражающая, а пленка произвольна, то

$$\operatorname{ch}\varphi = U_1 \sin\sigma_1. \qquad (5.81)$$

3) В указанном ранее случае с $\varphi_2 = 0$, т. е. когда $\eta > \varkappa$, свет поляризован в плоскости падения и имеет место формула (5.77), находим:

$$\varphi = \varphi_1.$$

На этом мы закончим рассмотрение свойств непропускающей подложки. Конечно, исчерпывающим это изложение не является. Возможно, что более подробное изучение этого вопроса даст новые практически ценные результаты.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА ПЛЕНОК

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТЕОРИЯ ПРОСВЕТЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 18. Вводные замечания

В настоящей монографии термин «просветление» будет употребляться в двух различных смыслах: во-первых, как просветление оптических поверхностей в непоглощающих системах, и, во-вторых, как просветление поглощающих оптических пленок. Первое значение является общеупотребительным, тогда как второе было введено в употребление сравнительно недавно (см. [14—16, 53]). В этой главе мы будем понимать термин «просветление» только в первом из указанных значений.

Просветление оптических поверхностей является одним из наиболее известных и распространенных применений тонкослойных покрытий. Цель просветления состоит в уменьшении отражения света на оптических поверхностях. Современные оптические приборы имеют обычно большое число (доходящее иногда до нескольких десятков) таких поверхностей. Поэтому потери света на отражение велики, даже если отражательная способность одной поверхности мала. Снижение коэффициента отражения на поверхностях значительно повышает светосилу прибора, притом в тем большей степени, чем больше в нем просветляемых поверхностей. Другая выгода просветления состоит в уменьшении количества паразитного света в приборе.

Уже довольно давно известно (см., например, [54], стр. 294—298), что старые, потускневшие с поверхности линзы пропускают больше света. Потускнение поверхности обусловлено именно уменьшением коэффициента отражения. Соответственно увеличивается коэффициент пропускания. Таким образом, линза оказывается частично просветленной. Этот природный процесс просветления зависит от образования на поверхности стекла тонкого выветрившегося слоя, показатель преломления которого меньше показателя преломления стекла. Элементарная теория показывает, что если показатель преломления слоя равен квад-

ратному корню из показателя преломления стекла, а толщина слоя равна четверти длины волны, то отраженный свет гасится полностью, т. е. коэффициент отражения становится равным нулю. Однако, для других длин волн коэффициент отражения не равен нулю, так как толщина слоя для других длин волн не равна четверти длины волны.

Показатель преломления образовавшегося естественным путем просветляющего слоя на поверхности старого стекла никогда в точности не бывает равен квадратному корню из показателя преломления стекла; равным образом, толщина слоя не удовлетворяет оптимальному требованию; наконец, этот слой неоднороден по толщине. Поэтому естественное просветление несовершенно.

При первых попытках искусственного воспроизведения естественного процесса просветления путем травления поверхности стекла или путем нанесения слоя другого вещества одной из наибольших трудностей оказался подбор вещества с достаточно низким значением показателя преломления. Только для стекол с высоким значением показателя преломления можно подобрать подходящее вещество без особых затруднений. Для стекол же с низким значением показателя преломления вещество слоя должно было бы иметь очень малый показатель преломления. Другим существенным недостатком просветления с помощью одного слоя является спектральная избирательность просветления. В самом благоприятном случае отражение может быть полностью устранено только для одной длины волны, тогда как для других длин волн в данном участке спектра коэффициент отражения сохраняет довольно высокие значения.

Более совершенны просветляющие покрытия, состоящие из двух, трех или даже более слоев. Они могут быть сделаны в значительной степени ахроматическими. Из большого числа теоретических и экспериментальных работ, посвященных ахроматическому просветлению, укажем [48, 55—57]; обстоятельный обзор этого вопроса находим у Розенберга [26].

Теория оптического просветления, излагаемая в этой главе, опирается главным образом на работы автора [3, 10, 11] и имеет целью показать различные способы подбора параметров слоев, ведущие в том или другом смысле к наилучшим результатам. Практической стороной осуществления таких покрытий мы здесь (как и вообще в настоящей монографии) заниматься не будем. В частности, нас не будет интересовать вопрос о том, какие конкретные вещества были бы пригодны в том или другом случае. Однако, мы будем требовать, чтобы показатели преломления были принципиально реализуемы. Это значит, что они не должны иметь ни слишком близких к единице, ни слишком высоких значений.

§ 19. «Идеальное» просветляющее покрытие

В теории просветляющих покрытий оказывается хорошо применимой приближенная формула, полученная в § 10, именно формула (4.22). Это обусловлено тем, что в точной формуле (3.38), где $a = \frac{r}{d}$ должно быть близко к нулю, все гиперболические синусы тоже должны быть близки к нулю. Правда, можно представить себе, что в некоторых членах этой формулы гиперболические синусы имеют большие значения, но что такие члены взаимно сокращаются. Однако, это было бы возможно лишь при немногих длинах волн, так как коэффициенты гиперболических синусов зависят существенно от длины волны. При других длинах волн эти большие члены только усиливали бы друг друга, и мы не только не имели бы никакого просветления, но, наоборот, коэффициент отражения стал бы очень большим. Поэтому в проблеме ахроматического просветления все гиперболические синусы должны быть малы. Но тогда мы можем поставить вместо них их аргументы, что и соответствует приближению (4.22). Что же касается приближения (4.26), то, вследствие малости Q, оно практически не отличается от (4.22). Поэтому во всей этой главе мы будем пользоваться только этой формулой. Итак,

$$r = v_{01} + v_{12}e^{-2i\alpha_1} + \ldots + v_{N,N+1}e^{-2i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)}. \qquad (6.1)$$

Перепишем эту формулу для удобства практических численных расчетов в виде:

$$r = -v_{10} - v_{21}e^{-2i\alpha_1} - \ldots - v_{N+1,N}e^{-2i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)}. \qquad (6.2)$$

Изложим теперь вариант, который можно назвать «идеальным». Это название имеет двоякий смысл. Во-первых, согласно этому варианту получается очень хорошее просветление, описываемое к тому же очень простой формулой; во-вторых, практически этот вариант неосуществим, так как некоторые слои получают слишком близкие к единице значения показателя преломления. Однако, как мы увидим в дальнейшем, этот вариант в несколько ином смысле может быть использован в теории для подбора состава просветляющих покрытий, могущих быть в принципе реализованными на практике.

Везде в теории просветления будем считать падение света нормальным.

«Идеальное» покрытие имеет следующие параметры. Во-первых,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N \equiv \alpha. \qquad (6.3)$$

Во-вторых,

$$v_{m+1,m} = \frac{N!u}{m!(N-m)!2^N}, \quad m = 0, 1, \ldots N, \qquad (6.4)$$

где

$$u = v_{10} + v_{21} + \ldots + v_{N+1,N} = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{N+1}}{n_0}. \qquad (6.5)$$

Подставляя (6.3) и (6.4) в формулу (6.2), находим:

$$r = -\frac{u(1 + e^{-2i\alpha})^N}{2^N},$$

откуда

$$r = -\cos^N \alpha \cdot e^{-iN\alpha} \cdot u. \qquad (6.6)$$

Следовательно,

$$R = u^2 \cos^{2N} \alpha. \qquad (6.7)$$

Согласно (6.5),

$$u \approx \frac{n_{N+1} - n_0}{n_{N+1} + n_0},$$

т. е. u^2 равно энергетическому коэффициенту отражения без просветления. Формула (6.7) дает для просветленной поверхности во много раз меньший коэффициент отражения. Очевидно, полное просветление достигается при той длине волны, для которой все слои являются четвертьволновыми. Тогда $\alpha = 90°$ и $R = 0$. Но R оказывается очень малым и при других длинах волн в широком спектральном интервале. Например, в интервале $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$, равном примерно всему видимому спектру, крайние значения R равны $\frac{u^2}{2^{2N}}$, т. е. отражение уменьшается в 2^{2N} раз по сравнению с непросветленной поверхностью. Это значит, что уже двухслойное покрытие дает очень хорошее просветление (коэффициент отражения уменьшается не менее, чем в 16 раз), и притом в широкой области спектра.

Однако, практическое осуществление этого заманчивого результата оказывается невозможным, так как требуемые для этого показатели преломления внешних слоев оказываются слишком близкими к единице. Из формулы (6.4) следует:

$$n_1 = n_0 \left(\frac{n_{N+1}}{n_0} \right)^{2-N}.$$

Если $n_0 = 1$, то $n_1 = n_{N+1}^{2-N}$. Даже если $N = 2$, то $n_1 = n_{N+1}^{1/4}$. Но веществ с таким показателем преломления не существует (если принять n_{N+1} равным показателю преломления стекла, даже сильнопреломляющего).

Несмотря на практическую неосуществимость, вариант «идеального» просветляющего покрытия, как будет показано ниже, может найти применение в проектировании ахроматических просветляющих покрытий на несколько иной основе.

§ 20. Минимизация усредненного по спектру коэффициента отражения

В нижеследующем мы положим интервал спектра, в котором покрытие должно быть просветляющим, равным одной октаве. Величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$, зависящие от длины волны и от толщин слоев, целесообразно выразить как

$$\alpha_m = g_m \alpha, \tag{6.8}$$

где g_m суть не зависящие от длины волны числа, пропорциональные толщинам слоев, а α — спектральная переменная, пропорциональная волновому числу и не зависящая от толщин слоев. Выберем интервал значений α как

$$60° \leqslant \alpha \leqslant 120°; \tag{6.9}$$

это значит, что при $g = 1$ соответствующий слой в середине шкалы частот рассматриваемого спектрального интервала является четвертьволновым. Иначе говоря, числа g_m выражают толщины слоев в четвертях длины волны в середине шкалы частот.

Перепишем формулу (6.2), согласно (6.8), в виде:

$$r = -\sum_{m=0}^{N} v_{m+1,m} \exp[-2i\alpha(g_1 + g_2 + \ldots + g_m)] \tag{6.10}$$

Отсюда находим:

$$R = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} u_k u_l \cos(2g_{kl}\alpha), \tag{6.11}$$

где

$$g_{kl} = g_{lk} = |(g_0 + g_1 + \ldots + g_k) - (g_0 + g_1 + \ldots + g_l)|, \quad g_0 = 0 \tag{6.12}$$

и для упрощения — как и в § 12 — положено $v_{m+1,m} \equiv u_m$.

Если мы хотим получить возможно более ахроматическое просветление, то значение R должно быть сделано малым во всем спектральном интервале (6.9). Поэтому усредним R по этому интервалу и будем искать минимум этого усредненного значения.

Так как

$$\overline{\cos(2g_{kl}\alpha)} = \frac{3}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos(2g_{kl}\alpha)\,d\alpha = \frac{\sin\frac{\pi g_{kl}}{3}\cos\pi g_{kl}}{\frac{\pi g_{kl}}{3}},$$

то

$$\overline{R} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} u_k u_l \cdot \frac{\sin\frac{\pi g_{kl}}{3}\cos\pi g_{kl}}{\frac{\pi g_{kl}}{3}}. \qquad (6.13)$$

Эта формула верна в предположении, что показатели преломления, а следовательно и величины u_k не зависят от длины волны. Это значит, что мы не учитываем дисперсии, влияние которой можно считать незначительным.

Теперь наша проблема состоит в нахождении минимума $\overline{R}$. Эта проблема распадается на две, одна из которых решается очень просто, а другая, наоборот, представляет значительные трудности.

Первая из упомянутых проблем возникает тогда, когда толщины всех слоев, т. е. числа g_k заданы и требуется определить показатели преломления слоев, минимизирующие $\overline{R}$. Во второй же проблеме главный вопрос состоит в том, какой выбор толщин слоев является наиболее выгодным, т. е. способен привести к наименьшему значению $\overline{R}_{\min}$. Первую проблему можно назвать проблемой варьирования показателей преломления слоев просветляющего покрытия, а вторую — проблемой варьирования толщин слоев просветляющего покрытия.

В нижеследующем рассмотрим подробно обе эти проблемы в отдельности.

§ 21. Варьирование показателей преломления слоев просветляющего покрытия

В этой проблеме следует прежде всего задать толщины слоев. Наиболее простой выбор состоит в том, что все они полагаются равными четверти длины волны (в середине спектра), т. е.

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_N = 1|. \qquad (6.14)$$

Рассмотрим прежде всего этот случай, ограничиваясь двух-, трех- и четырехслойными покрытиями.

Обозначая число слоев индексом у $\overline{R}$, находим по формуле (6.13) следующие выражения:

$$\overline{R}_2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - q\left(u_0u_1 + u_1u_2 - \frac{u_0u_2}{2}\right), \tag{6.15}$$

$$\overline{R}_3 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - q\left(u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 - \frac{u_0u_2 + u_1u_3}{2}\right), \tag{6.16}$$

$$\overline{R}_4 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - q\left(u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 - \frac{u_0u_2 + u_1u_3 + u_2u_4}{2} + \frac{u_0u_4}{4}\right), \tag{6.17}$$

где

$$q = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 1{,}6540. \tag{6.18}$$

Таким образом (что видно, впрочем, и из общей формулы (6.13)), $\overline{R}_N$ является квадратичной формой от аргументов u_0, u_1, ... u_N. При нахождении минимума следует учитывать также дополнительное условие (6.5). Опуская ход вычислений, приведем для каждого значения N минимизирующие $\overline{R}_N$ значения u_0, u_1, ... u_N, а также само минимальное значение $\overline{R}_N$.

1) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned} u_0 = u_2 &= \frac{2(q+2)}{3(3q+4)}u = 0{,}2718u, \\ u_1 &= \frac{5q+4}{3(3q+4)}u = 0{,}4564u, \\ \overline{R}_{2,\min} &= \frac{-2q^2+q+4}{3(3q+4)}u^2 = (u_1 - qu_0)u = \\ &= 0{,}0068u^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

2) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned} u_0 = u_3 &= -\frac{q-4}{16}u = 0{,}1466u, \\ u_1 = u_2 &= \frac{q+4}{16}u = 0{,}3534u, \\ \overline{R}_{3,\min} &= \frac{-q^2-8q+16}{64}u^2 = \left(u_0 - \frac{qu_1}{4}\right)u = \\ &= 0{,}00051u^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

3) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned} u_0 = u_4 &= \frac{2(9q^2 - 8q - 16)}{(9q - 20)(9q + 8)} u = 0{,}0788u, \\ u_1 = u_3 &= \frac{2(9q^2 - 14q - 16)}{(9q - 20)(9q + 8)} u = 0{,}2484u, \\ u_2 &= \frac{9q^2 - 20q - 32}{(9q - 20)(9q + 8)} u = 0{,}3457u, \\ \overline{R}_{4,\min} &= \frac{-9q^3 + 29q^2 - 4q - 32}{(9q - 20)(9q + 8)} u^2 = \\ &= \left[\frac{4}{3}(u_1 - u_0) - (q - 1)u_2\right] u = 0{,}000037u^2. \end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

В этих формулах, как и в (6.5), $u = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{N+1}}{n_0}$.

Интересно сравнить приведенные здесь значения $\bar{R}_{N,\min}$ с теми значениями $\overline{R}_N$, которые получаются в «идеальном» варианте (см. § 19). Вычисляя, находим:

$$\overline{R}_2 = \frac{3u^2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^4 \alpha \, d\alpha = \frac{12 - 7q}{32} u^2 = 0{,}0132u^2, \quad (6.22)$$

$$\overline{R}_3 = \frac{3u^2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^6 \alpha \, d\alpha = \frac{5 - 3q}{16} u^2 = 0{,}00238u^2, \quad (6.23)$$

$$\overline{R}_4 = \frac{3u^2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^8 \alpha \, d\alpha = \frac{280 - 169q}{1024} u^2 = 0{,}000465u^2. \quad (6.24)$$

Из этих формул, сравнивая их с предыдущими, видим, что минимизация $\overline{R}_N$ приводит, как это и естественно, к еще меньшим, чем в «идеальном» случае, значениям $\overline{R}_N$. Несколько неожиданным кажется то обстоятельство, что уменьшение $\overline{R}_N$ по сравнению с «идеальным» вариантом относительно очень велико, доходя при $N = 4$ до 13 раз! К тому же, интересно также, что хотя и здесь для первых слоев получаются нереально низкие значения показателей преломления, они все же несколько выше, чем в «идеальном» случае. Так, если примем показатель преломления подложки равным 1,55, то при $N = 4$ показатель преломления первого слоя получается в «идеальном» варианте равным $n_1 = 1{,}028$, а в рассматриваемом здесь экстремальном варианте $n_1 = 1{,}035$ (при $n_0 = 1$).

Однако, так как и в этом варианте показатель преломления

по крайней мере первого слоя оказывается (при $n_0 = 1$) слишком малым, то эти результаты применимы на практике лишь в случае, когда просветляется граница между двумя средами, которые имеют обе отличный от единицы показатель преломления. Но этот случай имеет вообще сравнительно малое практическое значение, так как коэффициент отражения в этом случае довольно мал и без просветления. В дальнейшем будем рассматривать только случай $n_0 = 1$.

Чтобы получить практически приемлемый результат, следует производить минимизацию $\bar{R}$ при фиксированном значении n_1. Это значит, что u_0 не варьируется. Вычисления дают тогда следующие результаты:

1) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{u}{2} + \frac{q-4}{4(q+2)}u_0 = 0{,}5000u - 0{,}1605u_0,\\
u_2 &= \frac{u}{2} - \frac{5q+4}{4(q+2)}u_0 = 0{,}5000u - 0{,}8395u_0,\\
\bar{R}_{2,\min} &= -\frac{q-2}{4}u^2 + \frac{q-4}{4}uu_0 - \\
&\quad - \frac{3(q-4)(3q+4)}{16(q+2)}u_0^2 = \\
&= 0{,}0865u^2 - 0{,}5865uu_0 + 1{,}0789u_0^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

2) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{2(q+2)}{3(3q+4)}u - \frac{9q^2+16q-16}{3(q-4)(3q+4)}u_0 = \\
&= 0{,}2718u + 0{,}5562u_0,\\
u_2 &= \frac{5q+4}{3(3q+4)}u - \frac{9q^2-32q-16}{3(q-4)(3q+4)}u_0 = \\
&= 0{,}4564u - 0{,}7024u_0,\\
u_3 &= \frac{2(q+2)}{3(3q+4)}u + \frac{9q^2+8q+16}{3(q-4)(3q+4)}u_0 = \\
&= 0{,}2718u - 0{,}8538u_0,\\
\bar{R}_{3,\min} &= -\frac{2q^2-q-4}{3(3q+4)}u^2 + \frac{9q^2-8q-16}{6(3q+4)}uu_0 + \\
&\quad + \frac{4(9q^2-8q-16)}{3(q-4)(3q+4)}u_0^2 = \\
&= 0{,}00679u^2 - 0{,}08575uu_0 + 0{,}29241u_0^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

3) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{q-4}{16}u + \frac{81q^3-144q^2-176q+128}{32(9q^2-8q-16)}u_0 = \\
&= 0{,}1466u + 1{,}2913u_0, \\
u_2 &= \frac{q+4}{16}u - \frac{81q^3+72q^2-272q-128}{32(9q^2-8q-16)}u_0 = \\
&= 0{,}3534u - 0{,}0977u_0, \\
u_3 &= \frac{q+4}{16}u - \frac{81q^3-72q^2-144q-128}{32(9q^2-8q-16)}u_0 = \\
&= 0{,}3534u - 1{,}3327u_0, \\
u_4 &= -\frac{q-4}{16}u + \frac{81q^3-144q^2+16q+128}{32(9q^2-8q-16)}u_0 = \\
&= 0{,}1466u - 0{,}8610u_0, \\
\overline{R}_{4,\min} &= -\frac{q^2+8q-16}{64}u^2 + \frac{9q^2+4q-32}{64}uu_0 - \\
&\quad - \frac{(9q-20)(9q+8)(9q^2+4q-32)}{256(9q^2-8q-16)}u_0^2 = \\
&= 0{,}000506u^2 - 0{,}01192uu_0 + 0{,}07565u_0^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

Приведем теперь один конкретный пример. Пусть $n_0 = 1$, $n_{N+1} = 1{,}55$ и $n_1 = 1{,}32$ (те же значения будут использованы нами в примерах и ниже). Тогда $u = \frac{1}{2}\ln 1{,}55 = 0{,}2191$ и $u_0 = \frac{1}{2}\ln 1{,}32 = 0{,}1388$. Вычисления по формулам (6.25)—(6.27) дают:

1) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= 0{,}0873, \\
u_2 &= -0{,}0070, \\
\overline{R}_{2,\min} &= 0{,}00759.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.28)$$

2) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= 0{,}1268, \\
u_2 &= 0{,}0025, \\
u_3 &= -0{,}0590, \\
\overline{R}_{3,\min} &= 0{,}00335.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.29)$$

3) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= 0{,}2114, \\
u_2 &= 0{,}0639, \\
u_3 &= -0{,}1076 \\
u_4 &= -0{,}0874, \\
\overline{R}_{4,\min} &= 0{,}00112.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

Находим также показатели преломления слоев:

1) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 1{,}572. \end{aligned}\right\}$$

2) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 1{,}735 \\ n_3 &= 1{,}744. \end{aligned}\right\} \qquad (6.31)$$

3) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 2{,}015, \\ n_3 &= 2{,}289, \\ n_4 &= 1{,}846. \end{aligned}\right\}$$

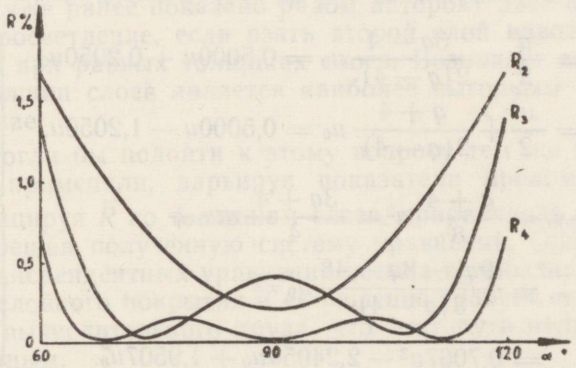

Рис. 9. Коэффициент отражения просветляющих покрытий.

На рис. 9 приведены графики коэффициента отражения для этих покрытий в интервале 60°—120°. Расчет выполнен по приближенной формуле (6.1). Как показывает соответствующая проверка, точная формула дает результаты, отличающиеся от приближенных, как правило, лишь на 2—3%; лишь в немногих точках (на краях интервала) отклонение составляет 5—10%. Так как расхождение того же порядка может быть обусловлено неучетом дисперсии, то применение точной формулы в этих вычислениях является совершенно излишним.

До сих пор мы принимали оптические толщины слоев равными. Конечно, можно отказаться от этого условия и исходить из какого-нибудь иного соотношения толщин слоев. В ряде работ (см., например, [48, 55, 57]) содержатся соответствующие рекомендации. Мы рассмотрим вопрос о теоретическом варьировании толщин слоев особо, в следующем параграфе, а здесь

обратим внимание лишь на следующее обстоятельство. В формулах (6.31) для $N = 3$ бросается в глаза близость значений n_2 и n_3. Следует заметить, что такой результат получился в известном смысле случайно, благодаря выбранным нами значениям n_{N+1} и n_1. Эти значения привели к значению u_2 (из формулы (6.26)), близкому к нулю (см. (6.29)). Однако, этот результат подсказывает, что трехслойное покрытие с равными толщинами слоев лишь немногим превосходит по качеству такое двухслойное покрытие, у которого отношение толщин слоев равно 1 : 2. В нижеследующем произведем расчет такого покрытия. Подобно (6.15) имеем:

$$\overline{R}_2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - q\left(u_0 u_1 - \frac{u_1 u_2}{2}\right). \tag{6.32}$$

Из условия минимума $\overline{R}_2$ при фиксированном u_0 находим:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{u}{2} - \frac{3q-4}{2(q-4)}u_0 = 0{,}5000u + 0{,}2050u_0, \\ u_2 &= \frac{u}{2} + \frac{q+4}{2(q-4)}u_0 = 0{,}5000u - 1{,}2050u, \\ \overline{R}_{2,\min} &= \frac{q+4}{8}u^2 - \frac{3q+4}{4}uu_0 + \\ &\quad + \frac{9q^2-8q-48}{8(q-4)}u_0^2 = \\ &= 0{,}7067u^2 - 2{,}2405uu_0 + 1{,}9507u_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

Отсюда, положив, как и ранее, $u_0 = 0{,}1388$ и $u = 0{,}2191$, находим:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0{,}1380, \\ u_2 &= -0{,}0577, \\ \overline{R}_{2,\min} &= 0{,}00337, \end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 1{,}740. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Как и следовало ожидать, показатель преломления второго слоя получился близким к показателям преломления второго и третьего слоев трехслойного равнотолщинного покрытия (см. формулу (6.31)). Минимальное усредненное значение R тоже совпадает (см. формулы (6.29) и (6.34)). Однако, обращает на себя внимание то обстоятельство, что в формуле (6.34) общее выражение для $\overline{R}_{2,\min}$ в зависимости от u_0 и u содержит гораздо бо́льшие (в 7—100 раз) коэффициенты, чем аналогичное выра-

жение для $\overline{R}_{3,\min}$ в формуле (6.29). Это значит, что двухслойное покрытие с отношением толщин 1 : 2 должно быть значительно более чувствительным к незначительным отклонениям от заданных значений показателей преломления слоев, чем трехслойное покрытие с равными толщинами слоев.

§ 22. Варьирование толщин слоев просветляющего покрытия

Вернемся теперь к формуле (6.13). В предыдущем параграфе мы искали минимум $\overline{R}$, варьируя только величины $u_0, u_1, \ldots u_N$, т. е. подбирая наилучшие значения показателей преломления, от которых эти величины зависят. Толщины же слоев и зависящие от них величины g_{kl} считались заданными. Но мы видели в предыдущем параграфе, что, например, двухслойное покрытие (как это уже ранее показано рядом авторов) дает более эффективное просветление, если взять второй слой вдвое толще первого, чем при равных толщинах слоев. Возникает вопрос, какой выбор толщин слоев является наиболее выгодным в самом общем случае.

Мы могли бы подойти к этому вопросу тем же методом, какой мы применяли, варьируя показатели преломления, т. е. дифференцируя $\overline{R}$ по толщинам слоев, приравнивая производные нулю и решая полученную систему уравнений. Однако, эта система трансцендентных уравнений весьма громоздка даже в случае двухслойного покрытия и ее решение требует столь большой затраты вычислительного труда, что этот путь нельзя признать оправданным.

Поэтому следует пойти по иному пути. Здесь мы изложим косвенный способ, представляющий собой очень простой графический прием. Он позволяет со значительной степенью уверенности выбирать толщины слоев наиболее выгодным образом. С увеличением числа слоев сложность (практическая, но не принципиальная) метода, правда, возрастает, однако, его польза несомненна при любом разумном числе слоев.

Прежде всего введем вместо $\overline{R}$ величину

$$s = \frac{u^2 - \overline{R}}{u^2}, \tag{6.36}$$

которую назовем количеством просветления. Для оправдания этого названия заметим, что без покрытия $R = u^2$ с той же точностью, с какой верна наша приближенная формула (6.10); следовательно, наличие какого бы то ни было просветления (в среднем по спектру) характеризуется неравенством $0 < s < 1$,

причем, чем ближе s к единице, тем лучше просветление. Если же количество просветления отрицательно, $s<0$, то не только нет никакого просветления, но имеет место увеличение отражения. Нас интересуют, естественно, значения s, возможно более близкие к единице.

Подставляя (6.13) в (6.36), находим:

$$s=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\left(1-\frac{\sin\frac{\pi g_{kl}}{3}\cos\pi g_{kl}}{\frac{\pi g_{kl}}{3}}\right)\frac{u_k u_l}{u^2},$$

(здесь следует принять во внимание, что $\sum_{k=0}^{N} u_k = u$). Обозначим

$$\frac{u_k}{u}=\eta_k \tag{6.37}$$

и

$$b(g)=\left(1-\frac{\sin\frac{\pi g}{3}\cos\pi g}{\frac{\pi g}{3}}\right)^{1/2}. \tag{6.38}$$

Тогда

$$s=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} b_{kl}^2\eta_k\eta_l, \tag{6.39}$$

где

$$b_{kl}\equiv b(g_{kl}). \tag{6.40}$$

График функции $b(g)$ изображен на рис. 10. Он нам вскоре понадобится. Напомним, что согласно (6.12)

$$g_{kl}=g_{lk}=|(g_0+g_1+\ldots+g_k)-(g_0+g_1+\ldots+g_l)|.$$

Дадим теперь следующую геометрическую интерпретацию наших формул. Пусть задано число слоев N и их толщины, т. е. числа $g_1, g_2, \ldots g_N$ и, следовательно, g_{kl}. Найдем соответствующие значения функции b_{kl}. Количество просветления s является квадратичной формой величин η_k, которые, согласно (6.37), удовлетворяют добавочному условию

$$\sum_{k=0}^{N}\eta_k=1. \tag{6.41}$$

Введем в рассмотрение N-мерное эвклидово пространство и возьмем в нем $N+1$ точек $B_0, B_1, \ldots B_N$ таким образом, чтобы $\overline{B_kB_l}=b_{kl}$ $(k,l=0,1,\ldots N)$ (заметим, что $b_{kl}=0$ тогда и

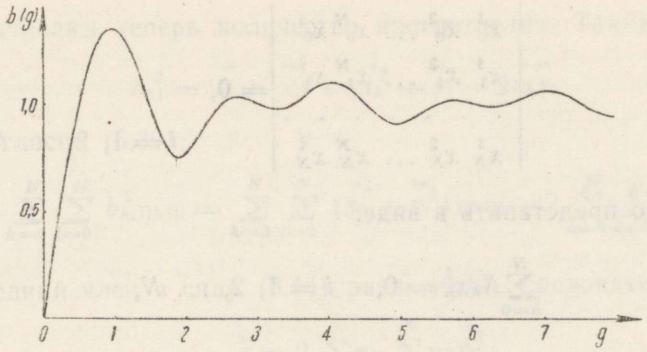

Рис. 10. График функции $b(g)$.

только тогда, если $k = l$). Эти точки можно считать вершинами N-мерного симплекса, т. е. фигуры, аналогичной плоскому треугольнику и трехмерному тетраэдру. Гиперграни (т. е. $(N-1)$-мерную ячейку) симплекса, противолежащую вершине B_k, обозначим через β_k. Опишем вокруг симплекса гиперсферу, центр которой обозначим через O и радиус через r.

Докажем теперь следующую чисто геометрическую теорему. Пусть V есть произвольная точка в нашем N-мерном пространстве. Обозначим векторы $\overrightarrow{VB_k}$ через $\vec{x}_k$. Далее, высоты симплекса обозначим через h_k, а расстояния точки V от гиперграней β_k через p_k, причем p_k следует считать положительным, если перпендикуляры h_k и p_k из точек B_k и V идут на гиперграни β_k в одну сторону, и отрицательным, если в противоположные стороны. Тогда, если обозначим еще

$$\frac{p_k}{h_k} = \eta_k, \tag{6.42}$$

то:

$$\sum_{k=0}^{N} \eta_k = 1 \tag{6.43}$$

и

$$\sum_{k=0}^{N} \eta_k \vec{x}_k = 0. \tag{6.44}$$

Доказательство таково*. Обозначая верхними индексами 1, 2, ... N составляющие векторов $\vec{x}_k$ в какой-либо декартовой системе координат, напишем соотношения:

* Оно сообщено автору профессором Тартуского гос. университета Ю. Лумисте, которому автор выражает свою глубокую благодарность.

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^N & x_0^i \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^N & x_1^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N^1 & x_N^2 & \dots & x_N^N & x_N^i \end{vmatrix} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots N.$$

Их можно представить в виде:

$$\sum_{k=0}^{N} X_k x_k^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots N,$$

где X_k означает адъюнкту определителя, соответствующую элементу $x_k{}^i$ последнего столбца. То же можно написать в векторной форме

$$\sum_{k=0}^{N} X_k \vec{x_k} = 0.$$

Пусть

$$\sum_{k=0}^{N} X_k = X;$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{X_k}{X} = 1$$

и

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{X_k}{X} \vec{x_k} = 0.$$

Остается, следовательно, доказать, что $\frac{X_k}{X} = \frac{p_k}{h_k}$. Справедливость этого равенства вытекает, в самом деле, из того, что X_k равно $N!$-кратному объему симплекса, вершины которого суть $B_0, B_1, \dots B_{k-1}, V, B_{k+1}, \dots B_N$, а X равно $N!$-кратному объему симплекса, вершины которого суть $B_0, B_1, \dots B_N$. Так как оба симплекса имеют общее основание — гиперграни β_k, высоты же их равны p_k и h_k, то $\frac{X_k}{X} = \frac{p_k}{h_k}$, что и требовалось доказать.

Мы намеренно ввели в (6.42) обозначение η_k, вследствие чего соотношение (6.43) совпадает с (6.41). Это позволяет считать точку V геометрическим образом совокупности чисел $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_N$. Наш симплекс вместе с точкой V изображает, таким образом, все покрытие: ребра симплекса определяются толщинами слоев, а точка V их показателями преломления.

Вычислим теперь количество просветления. Так как

$$b_{kl}^2 = |\vec{x}_k - \vec{x}_l|^2 = \vec{x}_k^2 + \vec{x}_l^2 - 2\vec{x}_k\vec{x}_l,$$

то, согласно (6.39),

$$s = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} b_{kl}^2\eta_k\eta_l = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}(\vec{x}_k^2 + \vec{x}_l^2)\eta_k\eta_l - 2\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\eta_k\eta_l\vec{x}_k\vec{x}_l.$$

Последний член в силу (6.44) равен нулю; следовательно,

$$s = 2\sum_{k=0}^{N}\eta_k\sum_{k=0}^{N}\eta_k\vec{x}_k^2,$$

или, на основании (6.43),

$$s = 2\sum_{k=0}^{N}\eta_k\vec{x}_k^2. \tag{6.45}$$

Далее, пусть $\vec{OB}_k = \vec{x}_k^0$ и $\vec{OV} = \vec{d}$; тогда

$$\vec{x}_k = \vec{x}_k^0 - \vec{d}$$

и

$$s = 2\sum_{k=0}^{N}(\eta_k\vec{x}_k^{02} - 2\eta_k\vec{x}_k^0\vec{d} + \eta_k\vec{d}^2).$$

В первом члене $\vec{x}_k^{02} = r^2$; во втором члене можно заменить $\vec{x}_k^0 = \vec{x}_k + \vec{d}$. Тогда, учитывая опять (6.43) и (6.44), находим:

$$s = 2r^2 - 4\vec{d}\sum_{k=0}^{N}\eta_k\vec{x}_k - 4d^2\sum_{k=0}^{N}\eta_k + 2d^2$$

или

$$s = 2(r^2 - d^2). \tag{6.46}$$

Следовательно, чтобы получить наибольшее количество просветления, равное

$$s_{max} = 2r^2 \tag{6.47}$$

при заданных толщинах слоев, нужно выбрать точку V, определяющую показатели преломления слоев, совпадающей с центром описанной вокруг симплекса гиперсферы.

Однако, как мы показали в предыдущем параграфе, такой выбор ведет к слишком малому значению u_0 (т. е. η_0), вследствие чего показатель преломления первого слоя оказывается слишком малым. Следовательно, значение $s = 2r^2$ практически

недостижимо. Точку V следует выбирать в другом месте, именно так, чтобы η_0 получило заданное значение. Проведем из O перпендикуляр на гипергрань β_0 и на этом перпендикуляре возьмем точку O_0 на таком расстоянии p_0 от β_0, что $\frac{h_0}{p_0} = \eta_0$, где η_0 задано. Через точку O_0 проведем перпендикулярно к OO_0 $(N-1)$-мерную гиперплоскость. Тогда, выбирая произвольно точку V в этой гиперплоскости, мы будем иметь заданное значение η_0. Количество просветления, согласно (6.46), выразится тогда так:

$$s = 2(r^2 - l^2 - d_0^2), \tag{6.48}$$

где $\overrightarrow{OO_0} = \vec{l}$ и $\overrightarrow{O_0V} = \vec{d}_0$, так что $\overrightarrow{OV} = \vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{l}$ и, по теореме Пифагора, $d^2 = l^2 + d_0^2$. Из этой формулы видно, что относительный (при фиксированном η_0) максимум s будет тогда, если

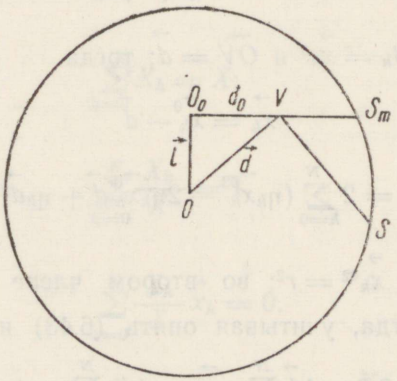

Рис. 11.

$d_0 = 0$, т. е. если V совпадает с O_0. На рис. 11 показано сечение гиперсферы двумерной плоскостью, проходящей через V, O и O_0. Если проведем VS перпендикулярно к OV до пересечения с гиперсферой, то $s = 2\overline{VS}^2$. Относительный максимум s, равный

$$s_{max} = 2(r^2 - l^2), \tag{6.49}$$

графически получается как удвоенный квадрат длины перпендикуляра $\overline{O_0S_m}$, проведенного из O_0 к OO_0 до пересечения с гиперсферой в точке S_m, т. е.

$$s_{max} = 2\overline{O_0S_m}^2.$$

Обобщая предыдущее рассуждение, легко прийти к следующему общему правилу нахождения относительного максимума

s, если некоторые из величин $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_N$ фиксированы, а остальные варьируются. Пусть, например, $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots \eta_{k_m}$ фиксированы, а остальные $N+1-m$ аргументов варьируются (конечно, число независимо варьируемых аргументов равно только $N-m$, так как условие (6.41) должно выполняться в любом случае). Тогда нужно провести через центр O гиперсферы m-мерную гиперплоскость, перпендикулярную к гиперграням $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots \beta_{k_m}$ симплекса. Любая точка O_m на этой гиперплоскости фиксирует определенным образом значения $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots \eta_{k_m}$, причем, наоборот, всегда можно найти на этой гиперплоскости точку, соответствующую заданным значениям $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots \eta_{k_m}$. Те же значения $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots \eta_{k_m}$ имеют место и в любой точке V, взятой на $(N-m)$-мерной гиперплоскости, проведенной из точки O_m перпендикулярно предыдущей гиперплоскости (точка O_m является единственной общей точкой обеих гиперплоскостей). Таким образом, фиксировав значения $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots \eta_{k_m}$, мы имеем $N-m$ степеней свободы для выбора точки V в $(N-m)$-мерной гиперплоскости, что соответствует варьированию оставшихся $N-m$ независимых аргументов. Формула (6.48) сохраняет свой вид:

$$s = 2(r^2 - l_m^2 - d_m^2), \tag{6.50}$$

где $l_m = \overline{OO_m}$ и $d_m = \overline{O_mV}$. Очевидно, относительный максимум, равный $s_{\max} = 2(r^2 - l_m{}^2)$, получается при совпадении V с O_m.

Все вышесказанное относительно выбора точки V с целью получить максимальное количество просветления означает варьирование показателей преломления слоев. Следовательно, выбор точки V эквивалентен развитой в предыдущем параграфе вычислительной процедуре. Однако, вышеизложенная графическая процедура представляется более простой, чем вычисление, по крайней мере тогда, если число слоев не превышает трех. Варьирование толщин слоев означает тогда варьирование самого симплекса. Точной однозначной процедуры указать для этого нельзя, однако, сама наглядность геометрического построения может подсказать наиболее выгодный выбор толщин слоев. Во всяком случае, для нахождения наилучшего варианта достаточно лишь небольшого числа проб. Поэтому этот метод может рассматриваться как метод (непрямого) варьирования толщин слоев.

Теперь рассмотрим в свете сказанного несколько конкретных примеров.

Пусть $N = 2$. Симплексом является треугольник со сторонами $b_{12} = b(g_2)$ (основание) и $b_{01} = b(g_1)$ и $b_{02} = b(g_1 + g_2)$

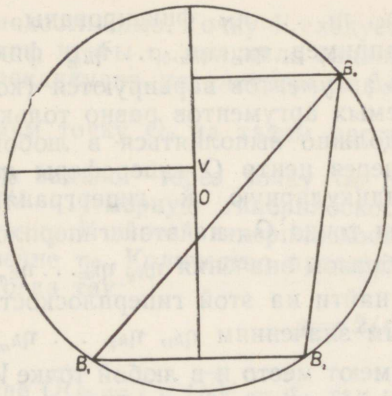

Рис. 12.

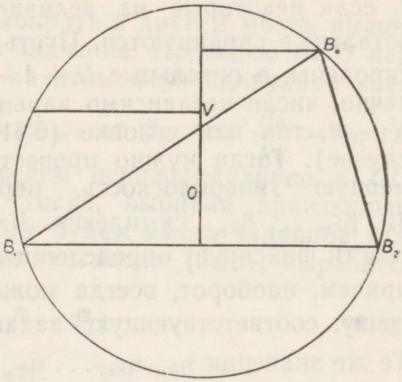

Рис. 13.

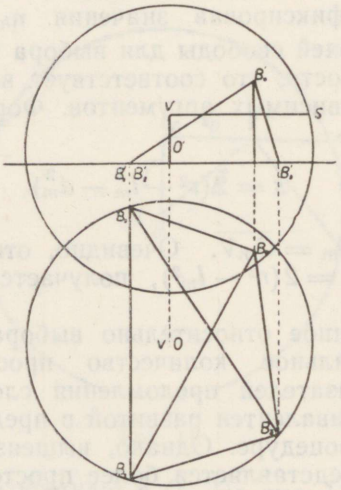

Рис. 14.

(боковые стороны). Так как (при $n_0 = 1$) η_0 должно быть положительно (иначе было бы $n_1 < 1$) и достаточно велико (чтобы n_1 не получилось слишком мало), то угол при вершине B_0 треугольника должен быть острым и притом возможно меньшим. Кроме того, наивозможное увеличение радиуса r описанного круга требует, чтобы треугольник был тупоугольным. Эти требования ведут к тому, чтобы b_{12} и b_{02} были возможно малы, а b_{01} возможно велико. Этим условиям лучше всего удовлетворяет выбор (см. график функции $b(g)$, рис. 10) $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ (для удобства здесь произведено округление до целых чисел). Этот

выбор совпадает с тем, который мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе. График показан на рис. 12. Не фиксируя η_0, имеем из этого графика $\eta_0 = 0{,}57$ и $s_{max} = 0{,}92$. Если же выберем $\eta_0 = 0{,}63$ (что соответствует использованным выше значениям $u_0 = 0{,}1388$ и $u = 0{,}2191$), то $s_{max} = 0{,}91$. По формуле (6.34) мы имели бы для этого случая $s_{max} = 0{,}93$. Имеющееся небольшое расхождение объясняется неточностью чертежа.

Сравним с этим вариантом случай $g_1 = 1$, $g_2 = 1$. Построение дано на рис. 13. Здесь получается $s_{max} = 0{,}99$ и $\eta_0 = 0{,}27$, если η_0 не фиксировать. А если принять и здесь $\eta_0 = 0{,}63$, то $s_{max} = 0{,}85$. По формуле (6.28) $s_{max} = 0{,}84$. Это опять удовлетворительное совпадение. Очевидно, вариант $g_1 = 1$, $g_2 = 1$ хуже, чем вариант $g_1 = 1$, $g_2 = 2$. Вообще, почти несомненно, что этот последний вариант является наилучшим для двухслойного покрытия.

Переходим к трехслойным покрытиям. Здесь тоже применимы аналогичные соображения. На рис. 14—16 приведены три построения (в ортогональной проекции):

1) $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, $g_3 = 1$. Это дает $\eta_0 = 0{,}16$ и $s_{max} = 1{,}00$. Если же принять $\eta_0 = 0{,}63$, то $s_{max} = 0{,}93$, что согласуется с расчетным значением (6.29).

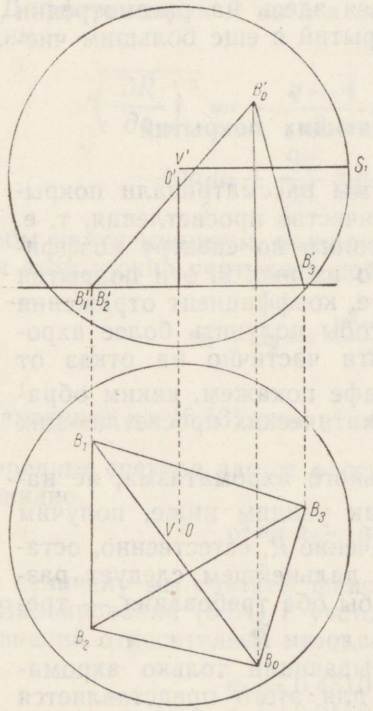

Рис. 15.

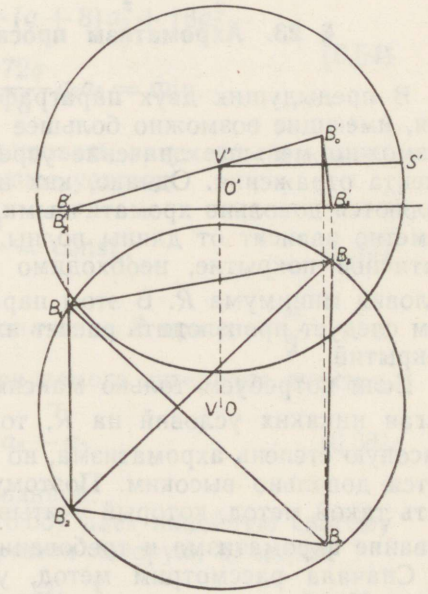

Рис. 16.

2) $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$. Это дает $\eta_0 = 0{,}60$ и $s_{max} = 0{,}96$. Если же принять $\eta_0 = 0{,}63$, то $s_{max} = 0{,}95$.

3) $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$. Здесь $\eta_0 = 0{,}27$ и $s_{max} = 0{,}94$, а если $\eta_0 = 0{,}63$, то $s_{max} = 0{,}92$.

Из этих результатов видно, что наилучшее просветление с помощью трехслойных покрытий получается при $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$ (отметим, что в работе [48] предложен именно этот вариант). Однако, остальные два варианта мало уступают этому выбору. Особого внимания заслуживает третий вариант ($g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$); для него характерно то, что (см. рис. 16) вследствие малой высоты тетраэдра изменение η_0 мало влияет на значение s_{max}. Эта особенность может быть иногда полезна. Кроме того, этот вариант может оказаться предпочтительнее других в тех случаях, когда показатели преломления слоев будут легче реализоваться именно в этом варианте. Такая возможность существует благодаря тому, что при одинаковых значениях η_0, т. е. при одном и том же значении показателя преломления первого слоя, показатели преломления остальных слоев в различных вариантах различны.

Случай четырехслойного покрытия значительно сложнее, хотя и здесь соответствующее построение не слишком громоздко. Однако, мы не будем останавливаться здесь на рассмотрении четырехслойных покрытий, как и покрытий с еще большим числом слоев.

§ 23. Ахроматизм просветляющих покрытий

В предыдущих двух параграфах мы рассматривали покрытия, имеющие возможно большее количество просветления, т. е. возможно меньшее значение усредненного по спектру коэффициента отражения. Однако, как видно из рис. 9, эти покрытия являются довольно хроматичными, т. е. коэффициент отражения заметно зависит от длины волны. Чтобы получить более ахроматичное покрытие, необходимо пойти частично на отказ от условия минимума $\overline{R}$. В этом параграфе покажем, каким образом следует производить расчет ахроматических просветляющих покрытий.

Если потребуем только максимального ахроматизма, не налагая никаких условий на $\overline{R}$, то, как увидим ниже, получим высокую степень ахроматизма, но значение $\overline{R}$, естественно, останется довольно высоким. Поэтому в дальнейшем следует развить такой метод, который учитывал бы оба требования — требование ахроматизма и требование малости $\overline{R}$.

Сначала рассмотрим метод, учитывающий только ахроматизм. Наиболее простым критерием для этого представляется следующий:

$$\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2} = \frac{3}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha = \min. \qquad (6.51)$$

Для четырехслойного покрытия с равными оптическими толщинами слоев

$$R = a_0 + a_1\cos 2\alpha + a_2\cos 4\alpha + a_3\cos 6\alpha + a_4\cos 8\alpha, \qquad (6.52)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,\\ a_1 &= 2(u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4),\\ a_2 &= 2(u_0u_2 + u_1u_3 + u_2u_4),\\ a_3 &= 2(u_0u_3 + u_1u_4),\\ a_4 &= 2u_0u_4. \end{aligned}\right\} \qquad (6.53)$$

Те же формулы применимы и к трехслойному и к двухслойному покрытиям (с равными оптическими толщинами слоев), если положить в первом случае $u_4 = 0$, а во втором $u_3 = u_4 = 0$.

Весь дальнейший расчет проведем подробно лишь для трехслойного покрытия.

Дифференцируя R по α и подставляя результат в (6.51), находим:

$$\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2} = -\frac{q-4}{2}a_1^2 + (q+8)a_2^2 + 18a_3^2 - \\ - 4qa_1a_2 + \frac{9q}{2}a_1a_3 - \frac{72q}{5}a_2a_3 = \min. \qquad (6.54)$$

Чтобы найти минимум, нужно варьировать аргументы a_1, a_2, a_3. При этом нужно учитывать добавочное условие

$$a_1 + a_3 = \frac{u^2 - \varrho^2}{2} = \text{const.}, \qquad (6.55)$$

вытекающее из (6.53), где ϱ^2 есть значение R при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. в середине спектра частот рассматриваемого интервала спектра. Очевидно,

$$\varrho^2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3. \qquad (6.56)$$

Эту величину мы считаем фиксированной.

Варьирование (6.54) с учетом (6.55) дает линейную систему уравнений относительно a_1, a_2, a_3, решая которую, находим:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0{,}4510(u^2 - \varrho^2),\\ a_2 &= 0{,}2150(u^2 - \varrho^2),\\ a_3 &= 0{,}0490(u^2 - \varrho^2), \end{aligned}\right\} \qquad (6.57)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 &= 0{,}2255\,(u^2 - \varrho^2), \\ u_0u_2 + u_1u_3 &= 0{,}1075\,(u^2 - \varrho^2), \\ u_0u_3 &= 0{,}0245\,(u^2 - \varrho^2). \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = u$$

и определяют u_0, u_1, u_2, u_3 через u и ϱ. Целесообразно, однако, фиксировать, как и раньше, u_0, и определять из этих уравнений ϱ вместе с u_1, u_2, u_3. Исключая u_1, u_2, u_3 и полагая $u = 0{,}2191$ и $u_0 = 0{,}1388$, находим для ϱ следующее уравнение:

$$3{,}116\varrho^4 - 8{,}825\varrho^3 - 9{,}114\varrho^2 - 6{,}52\varrho + 0{,}8363 = 0. \tag{6.59}$$

Его решением является $\varrho = 0{,}1097$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0{,}0484, \\ u_2 &= 0{,}0256, \\ u_3 &= 0{,}0063, \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

и далее:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 1{,}454, \\ n_3 &= 1{,}530. \end{aligned}\right\} \tag{6.61}$$

Аналогичный расчет для двухслойного покрытия дает:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}0588, \\ u_2 &= 0{,}0215, \end{aligned} \tag{6.62}$$

и

$$\begin{aligned} n_1 &= 1{,}32, \\ n_2 &= 1{,}484, \end{aligned} \tag{6.63}$$

тогда как ϱ получается равным 0,1015.

На рис. 17 показаны графики R для этих двух случаев.

Наши результаты показывают, что с увеличением числа слоев ахроматизм улучшается, но в то же время среднее значение R увеличивается. Это и понятно, так как мы не налагаем на $\overline{R}$ здесь вообще никакого условия. Зато степень ахроматизма не оставляет желать лучшего, даже при $N = 2$. Но так как коэффициент отражения получается все-таки довольно высоким, следует найти комбинированный метод, который учитывал бы наряду с требованием ахроматизма также требование возможной малости $\overline{R}$.

Ближайшая мысль в этом направлении такова. Потребуем, чтобы

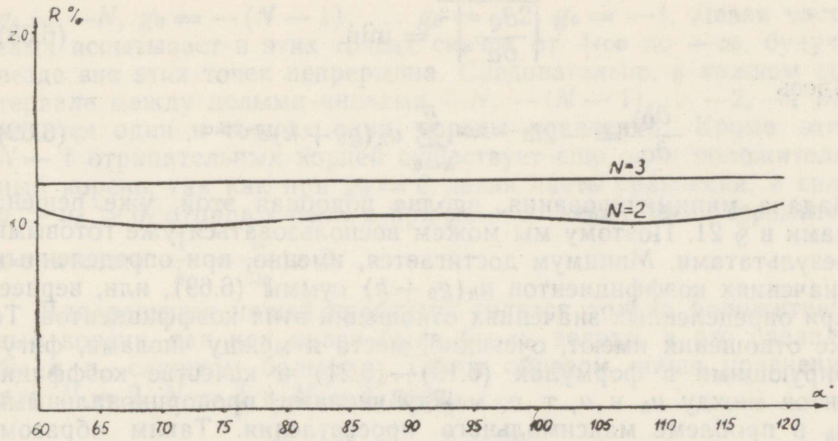

Рис. 17. Коэффициент отражения ахроматических просветляющих покрытий.

$$A\overline{R^2} + B\overline{\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2} = \min, \tag{6.64}$$

где A и B — две произвольно выбираемые постоянные. Однако, ближайшее рассмотрение показывает, что применение этого критерия довольно затруднительно, так как он приводит к системе уравнений высших степеней, решение которой весьма громоздко. Предпочтительным был бы такой метод, применение которого требовало бы в основном решения лишь линейных уравнений. Такой метод можно сформулировать следующим образом.

Перепишем формулу (6.10) в виде (полагая, как и выше, $g_1 = g_2 = \ldots = g_N$):

$$R = |u_0 e^{-2i\gamma} + u_1 e^{-2i(\gamma+\alpha)} + \ldots + u_N e^{-2i(\gamma+N\alpha)}|^2, \tag{6.65}$$

где γ — произвольная вещественная величина, зависящая от α. Примем ее в виде:

$$\gamma = g_0 \alpha, \tag{6.66}$$

где g_0 — постоянная.

Если мы теперь хотим, чтобы R зависело от α слабо, то для этого достаточно (хотя и не необходимо), чтобы величина

$$Q \equiv \sum_{k=0}^{N} u_k e^{-2i(g_0+k)\alpha} \tag{6.67}$$

тоже слабо зависела от α. Но для этого нужно, чтобы производная этой величины по α была по абсолютной величине мала, т. е. чтобы

$$\overline{\left|\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}\right|^2} = \min. \tag{6.68}$$

Здесь

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = -2ie^{-2ig_0\alpha} \sum_{k=0}^{N} u_k (g_0 + k) e^{-2ik\alpha}. \tag{6.69}$$

Задача минимизирования, вполне подобная этой, уже решена нами в § 21. Поэтому мы можем воспользоваться уже готовыми результатами. Минимум достигается, именно, при определенных значениях коэффициентов $u_k(g_0 + k)$ суммы (6.69), или, вернее, при определенных значениях отношений этих коэффициентов. Те же отношения имеют, очевидно, место и между числами, фигурирующими в формулах (6.19)—(6.21) в качестве коэффициентов между u_k и u, т. е. между числами, пропорциональными u_k в проблеме максимального просветления. Таким образом, обозначая эти числа временно через b_k, мы можем отождествить их с коэффициентами $u_k(g_0 + k)$ (вернее, отождествить отношения между теми и другими) и написать:

$$\frac{g_0 u_0}{b_0} = \frac{(g_0 + 1) u_1}{b_1} = \ldots = \frac{(g_0 + N) u_N}{b_N}. \tag{6.70}$$

В нижеследующей таблице выписаны наглядности ради значения b_k для интервала $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$ при $N = 2, 3, 4$:

b_k \ N	2	3	4
b_0	0,2718	0,1466	0,0788
b_1	0,4564	0,3534	0,2484
b_2	0,2718	0,3534	0,3457
b_3		0,1466	0,2484
b_4			0,0788

Выражая теперь $u_1, u_2, \ldots u_N$ из равенств (6.70) через u_0 и подставляя в равенство

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = u,$$

находим:

$$\frac{g_0}{b_0} \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{g_0 + k} - \frac{u}{u_0} = 0. \tag{6.71}$$

Это — уравнение N-й степени для определения g_0. Докажем, что все N корней этого уравнения вещественны. В самом деле, производная по g_0 от левой части везде положительна (так как все числа $b_0, b_1, \ldots$ положительны), но имеет N точек разрыва:

$g_0 = -N$, $g_0 = -(N-1)$, ... $g_0 = -2$, $g_0 = -1$. Левая часть сама испытывает в этих точках скачок от $+\infty$ до $-\infty$, будучи везде вне этих точек непрерывна. Следовательно, в каждом интервале между целыми числами $-N$, $-(N-1), \ldots -2, -1$ находится один и только один корень уравнения. Кроме этих $N-1$ отрицательных корней существует еще один положительный корень, так как при $g_0 = 0$ левая часть уравнения, в силу $u > u_0 > 0$, отрицательна, а при $g_0 \to \infty$ левая часть стремится к значению $\dfrac{1}{b_0} - \dfrac{u}{u_0} > 0$.

Для решения нашей проблемы годится только положительный корень, так как иначе было бы u_1 велико, а это сделало бы и n_2 слишком большим. Таким образом, наше уравнение для $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$ дает:

$$\begin{array}{l} N = 2,\ g_0 = 0{,}3455; \\ N = 3,\ g_0 = 0{,}1654; \\ N = 4,\ g_0 = 0{,}0926. \end{array} \tag{6.72}$$

Подставляя эти значения в равенства (6.70), находим соответствующие значения u_1, u_2, u_3, u_4, а отсюда — значения показателей преломления слоев. Именно:

1) $N = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0{,}1388, \\ u_1 = 0{,}0599, \\ u_2 = 0{,}0204; \\ n_1 = 1{,}32, \\ n_2 = 1{,}488. \end{array}\right\} \tag{6.73}$$

2) $N = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0{,}1388, \\ u_1 = 0{,}0475, \\ u_2 = 0{,}0256, \\ u_3 = 0{,}0072; \\ n_1 = 1{,}32, \\ n_2 = 1{,}452, \\ n_3 = 1{,}528. \end{array}\right\} \tag{6.74}$$

3) $N = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0{,}1388, \\ u_1 = 0{,}0371, \\ u_2 = 0{,}0270, \\ u_3 = 0{,}0131, \\ u_4 = 0{,}0031; \\ n_1 = 1{,}32, \\ n_2 = 1{,}422, \\ n_3 = 1{,}501, \\ n_4 = 1{,}540. \end{array}\right\} \tag{6.75}$$

Сравнивая формулы (6.73) и (6.74) с формулами (6.60)—(6.63), видим, что новый метод дает почти одинаковые результаты с предыдущим. Поэтому он не дает ничего существенно нового, если ограничиться требованием максимального ахроматизма. Однако, новый метод выгоднее старого в том отношении, что его легко обобщить и применить в комбинации с требованием малости $\overline{R}$. Именно, мы можем воспользоваться следующим комбинированным критерием:

$$A\overline{R} + B\left|\sum_{k=0}^{N} u_k (g_0 + k) e^{-2ik\alpha}\right|^2 = \min., \qquad (6.76)$$

где g_0 определено согласно предыдущему (см. (6.72)). Первый член заключает в себе требование, чтобы усредненный коэффициент отражения был возможно мал, а второй — чтобы просветление было возможно ахроматично (см. (6.69)). A и B, как и в формуле (6.64), являются произвольно выбираемыми числами, причем существенное значение имеет лишь отношение A/B. Чем больше A/B, тем больше количество просветления за счет его качества (т. е. ахроматичности), и, наоборот, чем меньше A/B, тем больше качество просветления за счет его количества. Формула (6.76) сходна с (6.64), но, в отличие от последней, она приводит к решению только линейной системы уравнений.

Так как

$$R = \left|\sum_{k=0}^{N} u_k e^{-2i\alpha k}\right|^2,$$

то из (6.76) получаем:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} [A + B(g_0 + k)(g_0 + m)] C_{km} u_k u_m = \min., \qquad (6.77)$$

где

$$C_{km} = \frac{\sin\dfrac{\pi(k-m)}{3}\cos[\pi(k-m)]}{\dfrac{\pi(k-m)}{3}}. \qquad (6.78)$$

В нижеследующем приведены результаты расчетов, проведенных согласно этому критерию для двух-, трех- и четырехслойных пленок, причем A/B положено равным 0,5, 1, 2 и 3. Результаты представлены на рис. 18—20 и в нижеследующих таблицах.

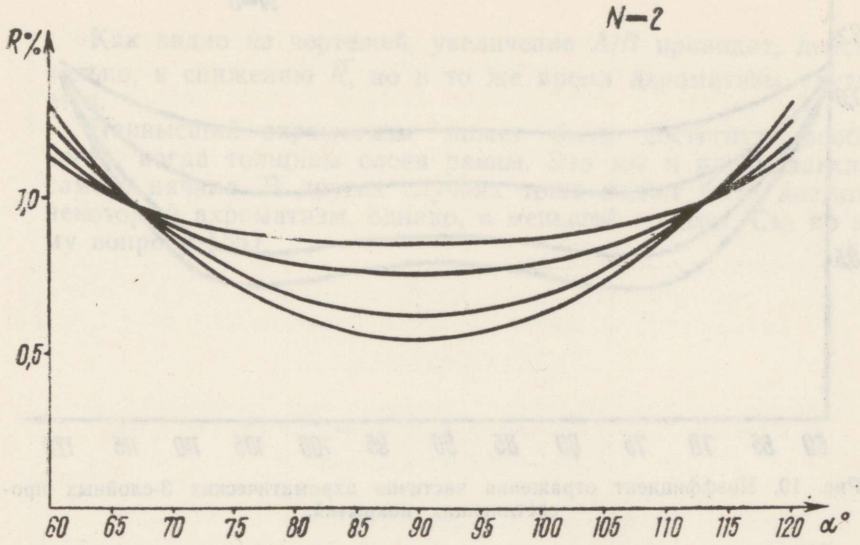

Рис. 18. Коэффициент отражения частично ахроматических 2-слойных просветляющих покрытий.

$N = 2.$

A/B	u_0	u_1	u_2	n_1	n_2
0,5	0,1388	0,0634	0,0169	1,32	1,498
1	0,1388	0,0661	0,0142	1,32	1,507
2	0,1388	0,0700	0,0103	1,32	1,519
3	0,1388	0,0727	0,0076	1,32	1,527

$N = 3.$

A/B	u_0	u_1 n_1	u_2 n_2	u_3 n_3
0,5	0,1388	0,0629	0,0181	—0,0007
		1,32	1,497	1,552
1	0,1388	0,0731	0,0136	—0,0064
		1,32	1,528	1,570
2	0,1388	0,0859	0,0084	—0,0140
		1,32	1,567	1,594
3	0,1388	0,0939	0,0056	—0,0192
		1,32	1,593	1,611

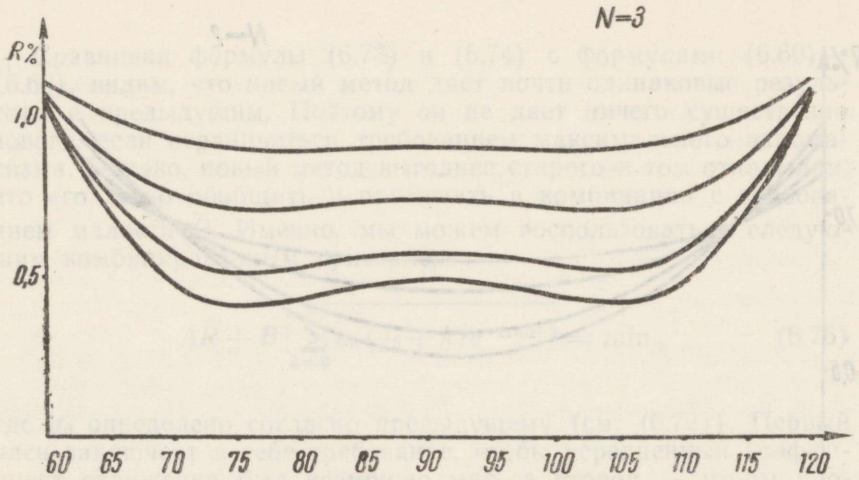

Рис. 19. Коэффициент отражения частично ахроматических 3-слойных просветляющих покрытий.

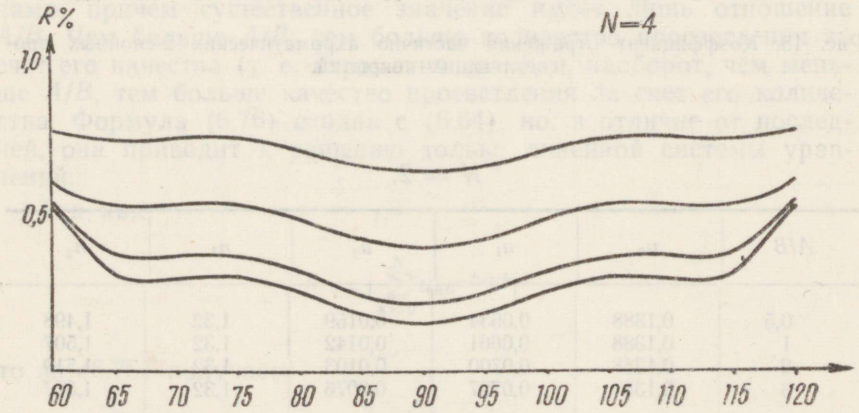

Рис. 20. Коэффициент отражения частично ахроматических 4-слойных просветляющих покрытий.

$N = 4$.

A/B	u_0	u_1 n_1	u_2 n_2	u_3 n_3	u_4 n_4
0,5	0,1388	0,0836 1,32	0,0235 1.560	—0,0140 1,635	—0,0128 1,590
1	0,1388	0,1058 1,32	0,0229 1,631	—0,0276 1,707	—0,0208 1,616
2	0,1388	0,1285 1,32	0,0239 1,707	—0,0423 1,790	—0,0298 1,645
3	0,1388	0,1407 1,32	0,0255 1,749	—0,0508 1,840	—0,0351 1,663

Как видно из чертежей, увеличение A/B приводит, действительно, к снижению $\bar{R}$, но в то же время ахроматизм ухудшается.

Наивысший ахроматизм может быть достигнут, вообще, тогда, когда толщины слоев равны. Это мы и предполагали с самого начала. В других случаях тоже может быть достигнут некоторый ахроматизм, однако, в меньшей степени. См. по этому вопросу [55].

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СИНТЕЗ НЕЙТРАЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВЕТОДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 24. Постановка задачи

Нейтральным (ахроматическим) светоделителем называется такой оптический прибор, который делит падающий на него пучок света на два пучка — отраженный и пропущенный — с заданным отношением интенсивностей. Нейтральность означает, что это отношение в заданном участке спектра постоянно. До недавнего времени в качестве нейтральных светоделителей применялись почти исключительно тонкие (полупрозрачные) металлические слои. Их основной недостаток состоит, конечно, в том, что часть света теряется вследствие поглощения. Кроме того, ахроматичность получается не всегда достаточно полной. Оказывается трудным найти такой металл, который одинаково хорошо удовлетворял требованиям ахроматичности и малости поглощения. Так, по данным Полака [58] слои хрома и родия дают ахроматичные слои, но поглощение в них очень велико. Наоборот, поглощение в слоях серебра значительно меньше, но нейтральность их неудовлетворительна. Слои алюминия имеют посредственную нейтральность (лучше серебра, но хуже хрома и родия) и сильное поглощение (хотя и несколько меньшее, чем у хрома и родия). К требованиям малости поглощения и нейтральности добавляется ряд других требований технологического характера (прочность и др.), которым тоже нелегко удовлетворить всем одновременно.

По этим причинам представляет интерес проблема синтеза светоделителей в виде диэлектрических интерференционных многослойных пленок. Такие светоделители имеют почти пренебрежимое поглощение (в теории оно вообще не будет учитываться), и могут быть сделаны в достаточной мере нейтральными. Правда, синтез нейтральных диэлектрических светодели-

телей представляет собой довольно серьезную проблему. В этой главе мы и рассмотрим методы решения этой проблемы.

За основу теории синтеза нейтральных светоделителей мы примем приближенные формулы (4.26) и (4.27), которые мы уже использовали выше с целью синтеза просветляющих покрытий. Разница будет только в том, что теперь нельзя пользоваться формулой (4.22), т. е. нельзя считать D равным единице. Как будет видно из дальнейшего, применение приближенных формул в теории нейтральных светоделителей оказывается, несмотря на это, вполне успешным. В некоторых расчетах мы будем в этой теории пользоваться и точными формулами.

§ 25. Синтез нейтральных светоделителей на основе приближенной формулы

В этом параграфе изложим метод синтеза, впервые развитый автором в работе [23]. Он сходен с методом синтеза ахроматических просветляющих покрытий (см. § 23) и является по существу его обобщением.

Итак, будем исходить из формулы:

$$\frac{R}{D} = \left| \sum_{m=0}^{N} u_m \exp[-2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)] \right|^2, \qquad (7.1)$$

где, как и в шестой главе,

$$u_m = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{m+1}}{n_m}. \qquad (7.2)$$

Оптические толщины всех слоев примем равными четверти длины волны в середине рассматриваемого интервала частот. Это условие подсказывается результатами по ахроматизации просветляющих покрытий, где оно, как мы видели, имеет существенное значение. Тогда формула (7.1) перепишется в виде:

$$\frac{R}{D} = \left| \sum_{m=0}^{N} u_m e^{-2im\alpha} \right|^2. \qquad (7.3)$$

Чтобы получить нейтральный светоделитель, нужно, чтобы величина $\frac{R}{D}$ была приближенно постоянна в заданном спектральном интервале и имела значение, близкое к некоторому заданному числу Q. Показатели преломления слоев следует выбрать таким образом, чтобы наилучшим образом осуществить это свойство. Так как показатели преломления слоев определяются величинами u_m, то наша задача состоит в определении этих величин, причем число слоев N и показатели преломления ограничивающих сред n_0 и n_{N+1} считаются заданными.

Прежде всего, заметим, что величины u_m должны удовлетворять следующим двум условиям:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{N+1}}{n_0} \equiv u \tag{7.4}$$

и

$$u_0 - u_1 + - \ldots + (-1)^N u_N = \operatorname{Arsh} \sqrt{Q} \equiv \delta. \tag{7.5}$$

Второе условие вытекает из того, что, согласно точной формуле, при $\alpha = 90°$

$$\frac{R}{D} = \operatorname{sh}^2 (u_0 - u_1 + - \ldots + (-1)^N u_N). \tag{7.6}$$

Естественно потребовать, чтобы в середине данного спектрального интервала $\frac{R}{D}$ было равно Q точно, откуда и вытекает (7.5).

Заметим, что под $\sqrt{Q}$ в (7.5) подразумевается $\pm\sqrt{Q}$, так как (7.6) имеет место независимо от знака $\sqrt{Q}$. Это значит, что δ можно задавать как положительным, так и отрицательным.

Далее поступаем аналогично тому, как в § 23. Добавляем к комплексной величине

$$\sum_{m=0}^{N} u_m e^{-2im\alpha}$$

множитель $e^{-2ig\alpha}$, где g — некоторая вещественная константа, и потребуем, чтобы производная

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{m=0}^{N} u_m e^{-2i(m+g)\alpha}$$

была по абсолютной величине возможно мала во всем спектральном интервале. Это значит, что в качестве критерия, гарантирующего приближенное постоянство $\frac{R}{D}$, берем равенство

$$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{m=0}^{N} u_m e^{-2i(m+g)\alpha} \right|^2 d\alpha = \min., \tag{7.7}$$

где через α_1, α_2 обозначены границы спектрального интервала.

Перепишем формулу (7.7) в виде:

$$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| \sum_{m=0}^{N} b_m e^{-2i\alpha m} \right|^2 d\alpha = \min., \tag{7.8}$$

где

$$b_m = (g + m) u_m, \qquad m = 0, 1, \ldots N. \tag{7.9}$$

Строго говоря, для решения экстремальной задачи (7.8) мы должны варьировать не только u_0, u_1, ... u_N (с учетом условий (7.4) и (7.5)), но и g. Однако, легко убедиться, что этот путь приводит к очень громоздким выкладкам, но дает фактически почти такой же результат, как и более простой способ, именно, тот, который мы применили уже в § 23. Будем варьировать в (7.8) величины b_m. Очевидно, искать минимум интеграла в формуле (7.8), варьируя b_m, имеет смысл только при наличии некоторого дополнительного условия (иначе мы имели бы равный нулю минимум при $b_0 = b_1 = \ldots = b_N = 0$). Это условие вводим в следующем простейшем виде:

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_N = \text{const}. \tag{7.10}$$

Тогда мы получаем как раз ту же экстремальную задачу, которая была решена уже в § 21. Величины b_0, b_1, ... b_N получают те же значения (если взять константу в правой части (7.10) равной единице), которые фигурируют (для интервала $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$) в формулах (6.19)—(6.21) в качестве коэффициентов между u_h и u и которые приведены также в таблице в § 23. Здесь мы предпочтем нормировать эти коэффициенты иначе, именно, полагая

$$c_m = \frac{b_m}{b_0}, \qquad m = 0, 1, \ldots N. \tag{7.11}$$

Числа c_m, как и b_m, зависят только от числа слоев N и от спектрального интервала $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, но не зависят ни от показателей преломления ограничивающих сред, ни от выбранного значения Q. Поэтому эти числа легко табулировать. Мы приведем здесь сначала формулы для этих чисел, а затем дадим таблицы их значений для $N = 2$, 3, 4, 5 и для трех интервалов: $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$, $45° \leqslant \alpha \leqslant 135°$ и $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$.

Формулы таковы:

1) Интервал $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$.

а) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_2 = 1, \\ c_1 &= \frac{5q+4}{2(q+2)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

б) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_3 = 1, \\ c_1 &= c_2 = -\frac{q-4}{q+4}. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

в) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_4 = 1, \\ c_1 &= c_3 = \frac{9q^2 - 14q - 16}{9q^2 - 8q - 16}, \\ c_2 &= \frac{9q^2 - 20q - 32}{2(9q^2 - 8q - 16)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

г) $N = 5$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_5 = 1, \\ c_1 &= c_4 = \frac{99q^2 - 76q - 160}{5(9q^2 + 4q - 32)} \\ c_2 &= c_3 = \frac{117q^2 - 32q - 320}{10(9q^2 + 4q - 32)} \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

2) Интервал $45° \leqslant \alpha \leqslant 135°$.

а) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_2 = 1, \\ c_1 &= \frac{2(p+1)}{p+2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

б) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_3 = 1, \\ c_1 &= c_2 = \frac{2p+3}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

в) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_4 = 1, \\ c_1 &= c_3 = \frac{5p+6}{2(-p^2+p+3)} \\ c_2 &= \frac{(p+3)(2p+3)}{3(-p^2+p+3)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

г) $N = 5$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_5 = 1, \\ c_1 &= c_4 = \frac{20p^2 - 18p - 45}{5(2p+3)(2p-3)} \\ c_2 &= c_3 = \frac{4p - 15}{5(2p-3)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

3) Интервал $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$.

а) $N = 2$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_2 = 1, \\ c_1 &= \frac{3q+8}{2(q+4)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

б) $N = 3$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_3 = 1, \\ c_1 &= c_2 = \frac{3q+8}{q+8}. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

в) $N = 4$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_4 = 1, \\ c_1 &= c_3 = -\frac{(5q+16)(q+4)}{q^2-16q-64}, \\ c_2 &= -\frac{(3q+8)(5q+16)}{2(q^2-16q-64)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

г) $N = 5$.

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_5 = 1, \\ c_1 &= c_4 = -\frac{9q^2+232q+640}{5(9q^2-8q-128)}, \\ c_2 &= c_3 = -\frac{99q^2+704q+1280}{10(9q^2-8q-128)} \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

В формулах (7.12)—(7.15) и (7.20)—(7.23), как и раньше, $q = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, а в формулах (7.16)—(7.19)

$$p = \frac{4}{\pi}. \tag{7.24}$$

Вычисленные по формулам (7.12)—(7.23) значения чисел c_m приводятся в следующих таблицах:

1) Интервал $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$.

c \ N	2	3	4	5
c_0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
c_1	1,6790	2,4100	3,1523	3,8981
c_2	1,0000	2,4100	4,3873	6,9271
c_3		1,0000	3,1523	6,9271
c_4			1,0000	3,8981
c_5				1,0000

2) Интервал $45° \leqslant \alpha \leqslant 135°$.

c \ N	2	3	4	5
c_0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
c_1	1,3890	1,8488	2,3314	2,8222
c_2	1,0000	1,8488	2,9790	4,3689
c_3		1,0000	2,3314	4,3689
c_4			1,0000	2,8222
c_5				1,0000

3) Интервал $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$.

c \ N	2	3	4	5
c_0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
c_1	1,1463	1,3427	1,5642	1,7980
c_2	1,0000	1,3427	1,7930	2,3285
c_3		1,0000	1,5642	2,3285
c_4			1,0000	1,7980
c_5				1,0000

Вернемся теперь к определению величин $u_0, u_1, \ldots u_N$. Прежде всего нужно найти g. Для этого следует исключить $u_0, u_1, \ldots u_N$ из системы $N+2$ уравнений, куда входят равенства (7.4) и (7.5) и N отношений равенств (7.9). Из (7.4) и (7.5) имеем:

$$u_0 + \xi u_1 + u_2 + \xi u_3 + \ldots = 0, \tag{7.25}$$

где

$$\xi \equiv \frac{\delta + u}{\delta - u}. \tag{7.26}$$

Далее подставляем в (7.25) из (7.9) $u_m = \dfrac{b_m}{g+m}$ и делим на b_0. Тогда получаем уравнение:

$$\frac{c_0}{g} + \frac{\xi c_1}{g+1} + \frac{c_2}{g+2} + \frac{\xi c_3}{g+3} + \ldots = 0, \qquad (7.27)$$

определяющее g. Когда g найдено из этого уравнения, вычисляем $u_0, u_1, \ldots u_N$ по формуле:

$$u_m = \frac{c_m}{g+m} \cdot \frac{\delta}{\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k c_k}{g+k}} \qquad m = 0, 1, \ldots N, \qquad (7.28)$$

или по формуле:

$$u_m = \frac{c_m}{g+m} \cdot \frac{u}{\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{c_k}{g+k}}, \qquad m = 0, 1, \ldots N. \qquad (7.29)$$

Эти формулы вытекают из (7.4), (7.5), (7.9) и (7.11). Следует заметить, что формулой (7.29) можно пользоваться только если $u \neq 0$. После того как все u_m вычислены, можно для проверки воспользоваться формулой (7.4), если u_m вычислялись по формуле (7.28), или формулой (7.5), если u_m вычислялись по формуле (7.29). Наконец, по значениям u_m находим, согласно (7.2), показатели преломления слоев.

Уравнение (7.27) является уравнением N-й степени относительно g, все N корней которого вещественны, если $\xi > 0$ (а это условие у светоделителей всегда выполнено, потому что при $Q < \operatorname{sh}^2 u$ это был бы не светоделитель, а просветляющая пленка). Это можно заключить аналогично тому, как для уравнения (6.71) в предыдущей главе. Так как числа $c_0, c_1, \ldots c_N$ все положительны, то производная по g от левой части уравнения (7.27) везде отрицательна, кроме $N+1$ точек разрыва $g = -N$, $g = -(N-1)$, $\ldots$ $g = -2$, $g = -1$, $g = 0$, в которых левая часть уравнения испытывает скачок от $-\infty$ до $+\infty$, будучи везде вне этих точек непрерывна. Отсюда следует, что в каждом промежутке между целыми числа 0, -1, -2, $\ldots$ $-N$ лежит один и только один корень уравнения.

В зависимости от того, какой корень мы выберем, получим, имея заданные значения отношения $\dfrac{R}{D}$ и отношения показателей преломления ограничивающих сред, а также заданное число слоев и спектральный интервал, N различных вариантов решения нашей проблемы синтеза. Это число вариантов еще удваивается, так как, взяв δ с обратным знаком, получим, согласно

(7.26) вместо прежнего значения ξ его обратную величину. Иначе говоря, если сохраним обозначение ξ для первоначального значения, то, кроме уравнения (7.27), будем иметь еще уравнение

$$\frac{\xi c_0}{g} + \frac{c_1}{g+1} + \frac{\xi c_2}{g+2} + \frac{c_3}{g+3} + \ldots = 0. \qquad (7.30)$$

Это уравнение и даст новые N вариантов. Даже если $u = 0$ и, следовательно, $\xi = 1$, так что уравнение (7.30) совпадает с (7.27), эти добавочные N вариантов отличны от первых N вариантов, так как они отличаются от тех обратными знаками $u_0, u_1, \ldots u_N$ (это вытекает из формулы (7.28), где δ имеет в новых вариантах обратный знак).

Итак, в общем случае имеем всего $2N$ различных вариантов решения проблемы. Впрочем, в некоторых случаях те или другие из этих вариантов могут по существу совпадать (см. ниже, случай $N = 2$). Кроме того, далеко не во всех вариантах значения показателей преломления получаются технологически разумными.

В смысле ахроматизма наиболее выгодным следует считать, конечно, тот вариант, который даст наименьшее значение минимума в формуле (7.8). Рассмотрим этот вопрос более подробно. Минимизируемый интеграл в (7.8) является квадратичной формой от $b_0, b_1, \ldots b_N$, а эти величины зависят от g. Найдем эту зависимость. Из формулы (7.9), подставляя в нее выражение (7.28) для u_m, находим:

$$b_m = \frac{c_m \delta}{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k c_k}{g+k}}. \qquad (7.31)$$

Так как числитель этого выражения не зависит от g, а знаменатель не зависит от индекса m, то значение квадратичной формы обратно пропорционально квадрату знаменателя. Отсюда следует, что наименьший минимум достигается при том значении g, при котором величина

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k c_k}{g+k} \right|$$

имеет наибольшее значение. Заметим, что, пользуясь уравнением (7.27), можно выразить эту величину еще в двух видах:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k c_k}{g+k} = \frac{\xi+1}{\xi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{c_{2k}}{g+2k} =$$

$$= -(\xi+1)\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{c_{2k+1}}{g+2k+1}, \tag{7.32}$$

так что можно пользоваться любым из этих трех выражений как критерием малости интеграла в (7.8).

Закончим этот параграф несколькими численными примерами. Целесообразно, однако, прежде чем перейти к примерам, рассмотреть случай двухслойного светоделителя в общем виде.

Итак, пусть $N = 2$. Тогда уравнение (7.27) имеет вид:

$$\frac{1}{g} + \frac{\xi c_1}{g+1} + \frac{1}{g+2} = 0. \tag{7.33}$$

Решая его, находим:

$$g = -1 \pm \sqrt{\frac{\xi c_1}{\xi c_1 + 2}}. \tag{7.34}$$

Отсюда, согласно (7.28), имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{\delta+u}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\xi c_1+2}{\xi c_1}}\right), \\ u_1 &= -\frac{\delta-u}{2}, \\ u_2 &= \frac{\delta+u}{4}\left(1 \mp \sqrt{\frac{\xi c_1+2}{\xi c_1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

Кроме того, другие два варианта получаем, изменив на обратный знак δ и заменив $\xi \to \xi^{-1}$. Формулы (7.34) и (7.35) останутся, очевидно, по виду неизменными, если под δ и ξ подразумевать измененные значения. Напишем, однако, для наглядности эти формулы в том виде, который они будут иметь, если за δ и ξ сохраним их первоначальные значения. Тогда

$$g = -1 \pm \sqrt{\frac{c_1}{c_1 + 2\xi}} \tag{7.36}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\delta-u}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{c_1+2\xi}{c_1}}\right), \\ u_1 &= \frac{\delta+u}{2}, \\ u_2 &= -\frac{\delta-u}{4}\left(1 \mp \sqrt{\frac{c_1+2\xi}{c_1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

Убедимся теперь, что варианты (7.35) равноценны с точки зрения ахроматизма. В самом деле (см. (7.31)),

$$\frac{\xi+1}{\xi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{c_{2k}}{g+2k}=\frac{\xi+1}{\xi}\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{g+2}\right)=$$

$$=\mp\frac{\xi+1}{\sqrt{\xi}}\sqrt{c_1(\xi c_1+2)}. \qquad (7.38)$$

Так как абсолютная величина этого выражения одна и та же для обоих вариантов, то, действительно, в обоих вариантах интеграл в (7.8) имеет одно и то же значение.

Точно так же оба варианта (7.37) равноценны между собой с точки зрения ахроматизма, но, по сравнению с первыми двумя вариантами, хуже, если $\xi>1$. В самом деле, в этих вариантах аналогичное (7.38) выражение равно

$$\mp\frac{\xi+1}{\sqrt{\xi}}\cdot\sqrt{\frac{c_1(c_1+2\xi)}{\xi}};$$

эта величина при $\xi>1$ меньше, чем в (7.38).

Наконец, убедимся, что оба варианта (7.35) (равно как и оба варианта (7.37)) по существу тождественны (чем и обусловлена их равноценность с точки зрения ахроматизма). В самом деле, как видно из (7.35) и из (7.37), если обозначим два варианта в том и другом случаях через $'$ и $''$, то

$$u_0''=u_2',$$

$$u_1''=u_1',$$

$$u_2''=u_0'.$$

Отсюда видно, что во втором варианте числа u_0, u_1, u_2 имеют те же значения, что и в первом, только в обратном порядке. Изменив нумерацию на обратную, приведем их к полному совпадению. Конечно, при заданных показателях преломления ограничивающих сред будем иметь показатели преломления слоев в обоих вариантах различными; однако, это различие несущественно в том смысле, что величинами, определяющими специфику пленки, являются не показатели преломления слоев, а именно величины u_0, u_1, ... u_N. Показатели преломления слоев являются, напротив, вторичными, так как они зависят не только от этих величин, но и от выбора показателей преломления огра-

ничивающих сред. При практическом изготовлении пленки реализуемый вариант конкретизируется и дополняется целесообразным выбором ограничивающих сред; но в принципиальной теории этот выбор остается открытым, т. е. определяющими пленку величинами считаются только $u_0, u_1, \ldots u_N$.

Сказанное верно и в случае произвольного числа слоев, если только $u = 0$. Тогда тоже варианты, основанные на уравнении (7.27), принципиально тождественны с вариантами, основанными на уравнении (7.30). В самом деле, мы видели, что в случае $u = 0$ различие состоит лишь в знаках величин $u_0, u_1, \ldots u_N$. Но это различие, согласно вышесказанному, следует считать несущественным, хотя показатели преломления слоев, при фиксированных значениях показателей преломления ограничивающих сред, зависят от знаков.

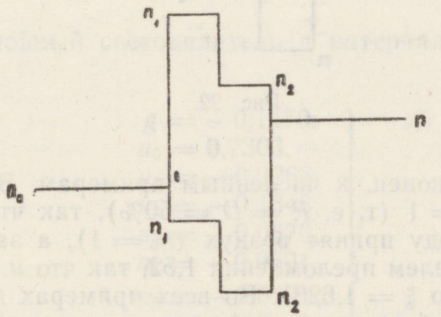

Рис. 21.

Поясним эти соображения еще графически. На рис. 21 изображен график показателей преломления двухслойной светоделительной пленки в двух вариантах, соответствующих двойным знакам в формулах (7.35) или (7.37). Ход ломаной линии, изображающей показатели преломления слоев и ограничивающих сред, одинаков в обоих вариантах, хотя расположение линии различное. Показатели преломления слоев, естественно, тогда тоже различны, но они зависят также и от показателей преломления ограничивающих сред. А эти последние могут быть различны (задано только их отношение $\frac{n}{n_0} = e^{2u}$; на рисунке этому соответствует отсутствие начала отсчета ординат. Если бы мы пожелали оба варианта рассматривать как существенно различные, то пришлось бы говорить о бесчисленном множестве вариантов, различающихся только показателями преломления ограничивающих сред. На практике и приходится выбирать из этого бесчисленного множества; но для теории представляют интерес только принципиальные решения.

Подобным же образом, на рис. 22 показан график трехслойного светоделителя с $u = 0$ в двух существенно тождественных вариантах, различающихся только знаками всех u_m.

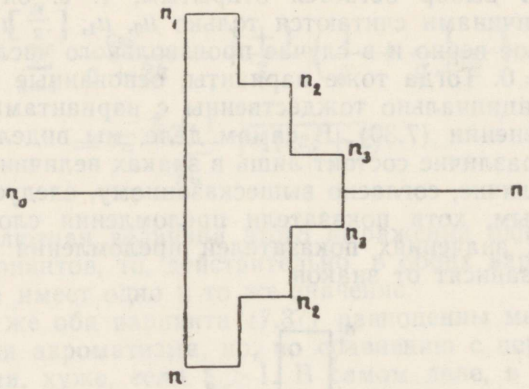

Рис. 22.

Перейдем, наконец, к численным примерам. Во всех примерах принято $Q = 1$ (т. е. $R = D = 50\%$), так что $\delta = 0{,}88137$. За исходную среду принят воздух ($n_0 = 1$), а за подложку — стекло с показателем преломления 1,52, так что $u = 0{,}20936$. Отсюда следует, что $\xi = 1{,}6231$. Во всех примерах для g выбрано наименьшее по абсолютной величине значение, т. е., лежащее между 0 и —1.

1. Двухслойный светоделитель в интервале $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$. Результат вычислений таков:

$$\left.\begin{aligned} g &= -0{,}2406; \\ u_0 &= 0{,}6318, \\ u_1 &= -0{,}3360, \\ u_2 &= -0{,}0864; \\ n_1 &= 3{,}538, \\ n_2 &= 1{,}807. \end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

Вычисляя $\dfrac{R}{D}$ по точной формуле (3.34), находим в этом случае:

$$\frac{R}{D} = 1 + 0{,}3076 \cos^2 \alpha - 1{,}2631 \cos^4 \alpha. \tag{7.40}$$

2. Трехслойный светоделитель в интервале $45° \leqslant \alpha \leqslant 135°$. Результат:

$$\left.\begin{aligned} g &= -0{,}1888; \\ u_0 &= 0{,}6756, \\ u_1 &= -0{,}2906, \\ u_2 &= -0{,}1302, \\ u_3 &= -0{,}0454; \\ n_1 &= 3{,}862, \\ n_2 &= 2{,}160, \\ n_3 &= 1{,}665. \end{aligned}\right\} \qquad (7.41)$$

Для $\frac{R}{D}$ получается:

$$\frac{R}{D} = 1 - 0{,}7477\cos^2\alpha + 2{,}688\cos^4\alpha - 2{,}896\cos^6\alpha. \qquad (7.42)$$

3. Пятислойный светоделитель в интервале $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$. Результат:

$$\left.\begin{aligned} g &= -0{,}1470; \\ u_0 &= 0{,}7303, \\ u_1 &= -0{,}2263, \\ u_2 &= -0{,}1348; \\ u_3 &= -0{,}0876, \\ u_4 &= -0{,}0501, \\ u_5 &= -0{,}0221; \\ n_1 &= 4{,}309, \\ n_2 &= 2{,}740, \\ n_3 &= 2{,}093, \\ n_4 &= 1{,}756, \\ n_5 &= 1{,}589. \end{aligned}\right\} \qquad (7.43)$$

Для $\frac{R}{D}$ получается следующее выражение:

$$\frac{R}{D} = 1 - 1{,}118\cos^2\alpha + 10{,}10\cos^4\alpha - 35{,}81\cos^6\alpha + \\ + 50{,}87\cos^8\alpha - 25{,}00\cos^{10}\alpha. \qquad (7.44)$$

На рис. 23 показаны графики R для этих трех примеров (I, II, III), причем для всех в наибольшем интервале, т. е. $30° \leqslant \leqslant \alpha \leqslant 150°$. Как видно из графиков, наш метод, действительно, дает хорошую ахроматичность. Однако, характерной чертой светоделителей во всех этих примерах является то, что первый слой имеет очень высокий показатель преломления. В видимой области спектра вещества, имеющие столь высокий показатель преломления, до сих пор неизвестны. В других вариантах (при других значениях g) показатель преломления первого слоя не

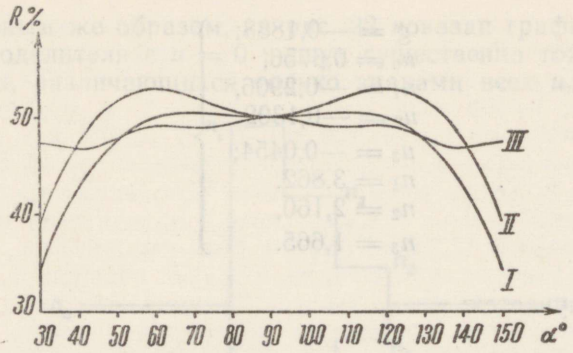

Рис. 23. Коэффициент отражения ахроматических светоделителей.

получается таким большим, но зато, как правило, показатели преломления у некоторых слоев получаются или меньше единицы, или, хотя и больше единицы, но слишком близкими к единице. Не приводя других примеров, подчеркнем еще раз, что задача нашей теории состоит только в указании принципиальных возможностей синтезирования светоделителей, тогда как конкретная разработка образцов выходит за рамки настоящей монографии.

§ 26. Синтез нейтральных светоделителей на основе точной формулы

Развитый в предыдущем параграфе метод синтеза ахроматических светоделителей основан на приближенной формуле (7.1). Может показаться странным, что, несмотря на грубость приближения, этот метод дает вполне хорошие результаты. Это объясняется тем, что в дополнение к формуле (7.1), мы пользовались также точным условием (7.5). Как мы видели на примерах в § 10 (рис. 6 и 7), приближенная формула дает, как правило, заниженные против истинных значения R, но ход приближенной спектральной кривой в общем «параллелен» ходу точной спектральной кривой. Поэтому вычисленная по точной формуле спектральная кривая синтезированного светоделителя должна быть приближенно параллельна оси α, так как такой вид имеет спектральная кривая, вычисленная по приближенной формуле. Но в силу условия (7.5), спектральная кривая, вычисленная по точной формуле, проходит выше, именно там, где она устанавливается заданным отношением $\frac{R}{D}$.

В дополнение к изложенному в предыдущем параграфе методу мы применим тот же метод вновь уже на основе точной

формулы (3.38). Результаты будут, как увидим ниже на двух примерах, очень близки к соответствующим результатам предыдущего параграфа. Тем самым будет вновь продемонстрирована высокая точность приближенного метода, хотя и основанного на довольно грубой приближенной формуле. Поэтому предпочтительным следует считать в любом случае приближенный метод, так как он гораздо проще с вычислительной точки зрения.

Итак, примем теперь за основу формулу (3.38), которую, при условии равенства оптических толщин всех слоев, можно написать в виде:

$$\frac{R}{D} = \left| \sum_{m=0}^{N} U_m e^{-2im\alpha} \right|^2, \tag{7.45}$$

где $U_0, U_1, \ldots U_N$ выражаются через гиперболические синусы и косинусы величин $v_{01}, v_{12}, \ldots v_{N,N+1}$. Вместо последних, как и ранее, мы будем пользоваться величинами $u_0, u_1, \ldots u_N$ (напомним, что $u_m = -v_{m,m+1}$). Формулы, связывающие $U_0, U_1, \ldots U_N$ с $u_0, u_1, \ldots u_N$, можно заключить легко на основании общей формулы (3.38). Ограничимся только случаями $N = 2$ и $N = 3$. Именно, если $N = 2$, то

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2, \\ U_1 &= \operatorname{sh} u_1 \operatorname{ch} (u_0 + u_2), \\ U_2 &= \operatorname{ch} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{sh} u_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.46}$$

Если же $N = 3$, то

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 \operatorname{ch} u_3, \\ U_1 &= \operatorname{sh} u_0 \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \operatorname{ch} u_3 + \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{sh} u_2 \operatorname{sh} u_3 + \\ &\quad + \operatorname{ch} u_0 \operatorname{sh} u_1 \operatorname{ch} u_2 \operatorname{ch} u_3, \\ U_2 &= \operatorname{ch} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{sh} u_2 \operatorname{ch} u_3 + \operatorname{ch} u_0 \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \operatorname{sh} u_3 + \\ &\quad + \operatorname{sh} u_0 \operatorname{sh} u_1 \operatorname{ch} u_2 \operatorname{sh} u_3, \\ U_3 &= \operatorname{ch} u_0 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 \operatorname{sh} u_3. \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

Теперь обратим внимание на то, что формула (7.45) вполне сходна по своей структуре с формулой (7.3). Разница состоит только в том, что вместо $u_0, u_1, \ldots u_N$ формула (7.45) содержит $U_0, U_1, \ldots U_N$. Соответственно, условия (7.4) и (7.5) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} &U_0 + U_1 + \ldots + U_N = \operatorname{sh} u, \\ &U_0 - U_1 + - \ldots + (-1)^N U_N = \sqrt{Q} = \operatorname{sh} \delta, \end{aligned} \tag{7.48}$$

формула (7.26) следующей:

$$\xi = \frac{\operatorname{sh} \delta + \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} \delta - \operatorname{sh} u}, \tag{7.49}$$

а формула (7.28) такой:

$$U_m = \frac{c_m}{g+m} \cdot \frac{\operatorname{sh}\delta}{\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k c_k}{g+k}}. \qquad (7.50)$$

Следовательно, развитый в предыдущем параграфе метод переносится полностью в неизменном виде на новую формулировку, с той лишь разницей, что в качестве первого результата мы получим не $u_0, u_1, \ldots u_N$, а $U_0, U_1, \ldots U_N$. По этим величинам должны уже во вторую очередь быть определены величины $u_0, u_1, \ldots u_N$ с помощью формул (7.46) или (7.47). Далее, зная $u_0, u_1, \ldots u_N$, можно определить и показатели преломления слоев.

Таким образом, уточненный метод требует проведения всех тех же вычислений, как и в приближенном методе, и, сверх того, решения системы уравнений типа (7.46) или (7.47). Но именно это оказывается довольно громоздким уже при $N = 3$ и тем более громоздким, чем больше N. Мы ограничимся поэтому рассмотрением случаев $N = 2$ и $N = 3$, вместе с численными примерами.

1. Случай $N = 2$. Система уравнений (7.46) решается довольно просто. Прежде всего, в соответствии с (7.48), она дает следующие соотношения:

$$u_1 = \frac{\operatorname{Arsh}(U_0 + U_1 + U_2) - \operatorname{Arsh}(U_0 - U_1 + U_2)}{2} \qquad (7.51)$$

и

$$u_0 + u_2 = \frac{\operatorname{Arsh}(U_0 + U_1 + U_2) + \operatorname{Arsh}(U_0 - U_1 + U_2)}{2}. \qquad (7.52)$$

Кроме того, из первого и третьего уравнения (7.46) следует:

$$U_0 - U_2 = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{sh}(u_0 - u_2),$$

откуда

$$u_0 - u_2 = \operatorname{Arsh} \frac{U_0 - U_2}{\operatorname{ch} u_1}. \qquad (7.53)$$

Подставляя сюда из (7.51) уже известное значение u_1, найдем $u_0 - u_2$, а отсюда вместе с (7.52) найдем u_0 и u_2.

Рассмотрим численный пример — тот же, что и в предыдущем параграфе, т. е. $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$, $n_0 = 1$, $n = 1{,}52$, $Q = 1$. Теперь $\operatorname{sh} u = 0{,}21089$, $\operatorname{sh}\delta = 1$ и $\xi = 1{,}5345$. Решая уравнение (7.27) с этими данными, находим:

$$g = -0{,}2497;$$

отсюда, по формуле (7.50) вычисляем:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 0{,}7062, \\ U_1 &= -0{,}3946, \\ U_2 &= -0{,}1008. \end{aligned}\right\} \qquad (7.54)$$

Наконец, отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0{,}6247, \\ u_1 &= -0{,}3360, \\ u_2 &= -0{,}0793; \\ n_1 &= 3{,}488, \\ n_2 &= 1{,}781. \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

Для $\frac{R}{D}$ получаем прямо из (7.45) и (7.54) следующую формулу:

$$\frac{R}{D} = 1 + 0{,}1828\cos^2\alpha - 1{,}1384\cos^4\alpha. \tag{7.56}$$

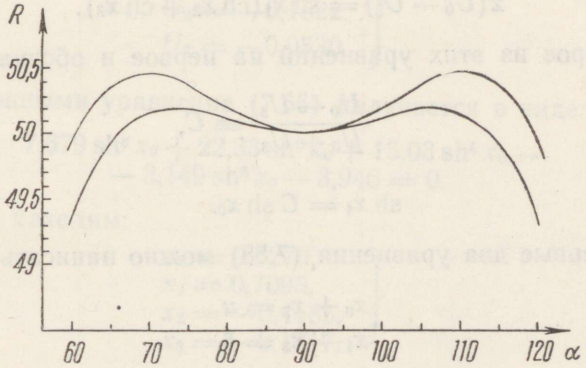

Рис. 24. Коэффициент отражения ахроматического 2-слойного светоделителя: верхняя кривая — по формуле (7.40), нижняя — по формуле (7.56).

Сравнивая эти результаты с результатами (7.39) и (7.40), полученными по приближенной формуле, находим близкое сходство. Еще яснее это сходство обнаруживается на рис. 24, где вместе показаны оба графика $R(\alpha)$, вычисленные по формулам (7.40) и (7.56).

2. Случай $N = 3$. В этом случае решение системы уравнений, определяющей $u_0, u_1, \ldots u_N$, гораздо сложнее. Она приводит к уравнению 4-й степени. Прежде всего целесообразно ввести следующие промежуточные обозначения:

$$\left.\begin{aligned} u_0 + u_3 &= x_0, \\ u_0 - u_3 &= x_1, \\ u_1 + u_2 &= x_2, \\ u_1 - u_2 &= x_3. \end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

Тогда, складывая и вычитая уравнения (7.47) надлежащим образом и учитывая (7.48), можем написать следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_2 \operatorname{ch} x_0 = \operatorname{sh} u, \\ &\operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_3 - \operatorname{sh} x_3 \operatorname{ch} x_1 = \operatorname{sh} \delta, \\ &\operatorname{ch} x_2 \operatorname{sh} x_1 + \operatorname{sh} x_3 \operatorname{ch} x_1 = U_0 + U_1 - U_2 - U_3, \\ &\operatorname{ch} x_3 \operatorname{sh} x_0 - \operatorname{sh} x_2 \operatorname{ch} x_0 = U_0 - U_1 - U_2 + U_3. \end{aligned}\right\} \tag{7.58}$$

Из первого и четвертого уравнения этой системы находим:

$$2(U_0 + U_3) = \operatorname{sh} x_0 (\operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_3), \tag{7.59}$$

а из второго и третьего:

$$2(U_0 - U_3) = \operatorname{sh} x_1 (\operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_3). \tag{7.60}$$

Деля второе из этих уравнений на первое и обозначая

$$\frac{U_0 - U_3}{U_0 + U_3} \equiv C, \tag{7.61}$$

находим:

$$\operatorname{sh} x_1 = C \operatorname{sh} x_0. \tag{7.62}$$

Далее, первые два уравнения (7.58) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} x_0 + x_2 &= u \\ x_1 - x_3 &= \delta, \end{aligned} \tag{7.63}$$

откуда

$$\operatorname{ch} x_2 = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} x_0 - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} x_0$$

и

$$\operatorname{ch} x_3 = \operatorname{ch} \delta \operatorname{ch} x_1 - \operatorname{sh} \delta \operatorname{sh} x_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.59) и учитывая (7.62), находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x_0 (\operatorname{ch} u \operatorname{ch} x_0 - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} x_0 + \operatorname{ch} \delta \sqrt{1 + C^2 \operatorname{sh}^2 x_0} - \\ - C \operatorname{sh} \delta \operatorname{sh} x_0) = 2(U_0 + U_3). \end{aligned} \tag{7.64}$$

Полученное уравнение содержит в качестве единственной неизвестной x_0. После довольно громоздких выкладок оно приводится к виду:

$$\begin{aligned} &[C^2 + 2C \operatorname{ch}(u - \delta) + 1][C^2 - 2C \operatorname{ch}(u + \delta) + 1] \operatorname{sh}^8 x_0 + \\ &+ [8(U_0 + U_3)(\operatorname{sh} u + C \operatorname{sh} \delta)(2C \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \delta - C^2 - 1) - \\ &- (C^2 + 1)(\operatorname{ch} 2u \operatorname{ch} 2\delta - 1) - 4C \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \delta (\operatorname{ch}(u + \\ &+ \delta) \operatorname{ch}(u - \delta) + 1)] \operatorname{sh}^6 x_0 + [8(U_0 + U_3)^2 (2C^2 \operatorname{sh}^2 \delta + \\ &+ 6C \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \delta + 2\operatorname{sh}^2 u - C^2 - 1) - \end{aligned}$$

$$-8(U_0+U_3)(\operatorname{sh}u+C\operatorname{sh}\delta)(\operatorname{ch}(u+\delta)\operatorname{ch}(u-\delta)+1)+$$
$$+\operatorname{sh}^2(u+\delta)\operatorname{sh}^2(u-\delta)]\operatorname{sh}^4 x_0+ \tag{7.65}$$
$$+8(U_0+U_3)^2[4(U_0+U_3)(\operatorname{sh}u+C\operatorname{sh}\delta)-$$
$$-\operatorname{ch}(u+\delta)\operatorname{ch}(u-\delta)-1]\operatorname{sh}^2 x_0+16(U_0+U_3)^4=0.$$

Когда x_0 из этого уравнения найдено, то из (7.62) и (7.63) легко находятся x_1, x_2, x_3, а из них по (7.57) u_0, u_1, u_2, u_3.

Перейдем к численному примеру. Пусть, как и в предыдущем параграфе, $45° \leqslant \alpha \leqslant 135°$, $n_0 = 1$, $n = 1{,}52$, $Q = 1$, так что $\delta = 0{,}8814$, $u = 0{,}2094$ и $\xi = 1{,}5345$. Решая уравнение (7.27) для этого случая, находим: $g = -0{,}1960$; отсюда по формуле (7.50) находим:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 0{,}7577,\\ U_1 &= -0{,}3416,\\ U_2 &= -0{,}1522,\\ U_3 &= -0{,}0530. \end{aligned}\right\} \tag{7.66}$$

С этими данными уравнение (7.65) получается в виде:

$$7{,}679\operatorname{sh}^8 x_0+22{,}33\operatorname{sh}^6 x_0+15{,}03\operatorname{sh}^4 x_0-$$
$$-3{,}149\operatorname{sh}^2 x_0-3{,}946=0. \tag{7.67}$$

Решая его, находим:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0{,}6279,\\ x_1 &= 0{,}7096,\\ x_2 &= -0{,}4185,\\ x_3 &= -0{,}1717. \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

Далее, отсюда имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0{,}6688,\\ u_1 &= -0{,}2951,\\ u_2 &= -0{,}1234,\\ u_3 &= -0{,}0409. \end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

Отсюда показатели преломления слоев равны:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 3{,}810,\\ n_2 &= 2{,}111,\\ n_3 &= 1{,}650, \end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

а для $\dfrac{R}{D}$ получаем формулу:

$$\frac{R}{D}=1-0{,}6839\cos^2\alpha+2{,}297\cos^4\alpha-2{,}569\cos^6\alpha. \tag{7.71}$$

Опять мы видим, что эти результаты близки к результатам, полученным для этого же примера на основе приближенной формулы. На рис. 25 показаны для сравнения графики трех-

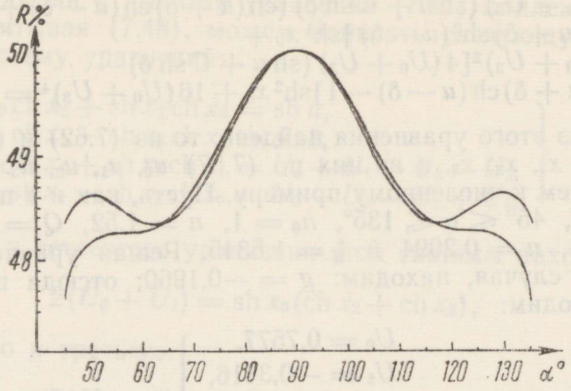

Рис. 25. Коэффициент отражения ахроматического 3-слойного светоделителя: верхняя кривая — по формуле (7.42), нижняя — по формуле (7.71).

слойных ахроматических светоделителей, вычисленные по формулам (7.42) и (7.71). Как видно из графиков, приближенная формула дала даже лучшее приближение к цели, чем точная.

Из рассмотренных примеров достаточно явствует, что в задаче синтеза ахроматических светоделителей совершенно достаточна приближенная формула (7.1), тогда как точная формула оказывается излишней.

§ 27. Метод Полака—Пегиса в синтезе ахроматических светоделителей

В этом параграфе мы изложим другой метод синтеза ахроматических светоделителей, идея которого принадлежит Полаку (см. [59, 60]). Мы внесем в этот метод лишь то изменение, что вместо точной формулы, которой пользовался Полак, возьмем приближенную формулу (7.1), поскольку уже выяснилось, что она годится для синтеза светоделителей не хуже точной формулы. Кроме того, мы расширим метод Полака, воспользовавшись для решения фигурирующих в этом методе уравнений изящным методом, предложенным Пегисом [61]. Поэтому мы называем этот расширенный метод методом Полака—Пегиса. Результаты, доставляемые этим методом, близки к результатам, получаемым с помощью метода, изложенного в § 25; однако, в некоторых отношениях они могут оказаться даже более предпочтительными. Поэтому, несмотря на то, что объем вычислений в методе Полака—Пегиса значительно больше, чем в другом методе, он является полезным дополнением к последнему.

Метод Полака заключается в следующем. В предположении равенства оптических толщин всех слоев обратная величина D^{-1} коэффициента пропускания представляется в виде полинома от $\cos\alpha$ (в наших обозначениях):

$$\frac{1}{D} = 1 + b_0 + b_1\cos^2\alpha + \ldots + b_N\cos^{2N}\alpha, \qquad (7.72)$$

где b_0, b_1, ... b_N — зависящие от показателей преломления слоев и ограничивающих сред коэффициенты. Частичная ахроматизация достигается при $b_1 = 0$, еще лучшая ахроматизация при $b_1 = b_2 = 0$ и т. д. Полак ограничивается условием $b_1 = 0$. Мы расширим это условие до возможного предела, т. е. положим равными нулю коэффициенты всех членов, кроме последнего. Кроме того, как сказано выше, в отличие от Полака, мы будем пользоваться приближенной формулой (7.1) для $\frac{R}{D}$, а не точной для $\frac{1}{D}$.

Итак, перепишем формулу (7.1) в виде четного полинома от $\cos\alpha$. Прежде всего, очевидно,

$$\frac{R}{D} = a_0 + a_1\cos 2\alpha + a_2\cos 4\alpha + \ldots + a_N\cos 2N\alpha, \qquad (7.73)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_N^2, \\ a_1 &= 2(u_0u_1 + u_1u_2 + \ldots + u_{N-1}u_N), \\ a_2 &= 2(u_0u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{N-2}u_N), \\ &\vdots \\ a_{N-1} &= 2(u_0u_{N-1} + u_1u_N), \\ a_N &= 2u_0u_N. \end{aligned}\right\} \qquad (7.74)$$

Далее нужно косинусы кратных α выразить через $\cos\alpha$. Для этого служит формула:

$$\cos n\alpha = \sum_{k=n,\,n-2,\,\ldots\,n-2\left[\frac{n}{2}\right]} c_k^{(n)}\cos^k\alpha, \qquad (7.75)$$

где

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\,n!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\left(l+\frac{n-k}{2}\right)!}{l!\,(k-2l)!\,(2l+n-k)!}, \qquad (7.76)$$

$$(-1)^{n+k} = 1,$$

а $\left[\frac{k}{2}\right]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{k}{2}$. Формула (7.75) выводится элементарным путем из представления косинуса через экспоненциальную функцию:

$$\cos n\alpha = \frac{1}{2}(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n].$$

Подставляя разложение (7.75) в формулу (7.73), находим:

$$\frac{R}{D} = b_0 + b_1\cos^2\alpha + b_2\cos^4\alpha + \ldots + b_N\cos^{2N}\alpha, \qquad (7.77)$$

где

$$b_k = \sum_{n=k}^{N} c_{2k}^{(2n)} a_n, \qquad k = 0, 1, \ldots N. \qquad (7.78)$$

В частности, отсюда следует:

$$b_0 = a_0 - a_1 + - \ldots + (-1)^N a_N = \\ = (u_0 - u_1 + - \ldots + (-1)^N u_N)^2, \qquad (7.79)$$

так как, согласно формуле (7.76),

$$c_0^{(2n)} = (-1)^n. \qquad (7.80)$$

Кроме того, отметим, что

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_N = (u_0 + u_1 + \ldots + u_N)^2 = u^2. \qquad (7.81)$$

Чтобы получить ахроматический светоделитель, мы должны теперь положить

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{N-1} = 0, \qquad (7.82)$$

т. е., согласно (7.78),

$$\sum_{n=k}^{N} c_{2k}^{(2n)} a_n = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots N-1. \qquad (7.83)$$

К этим $N-1$ уравнениям для $N+1$ величин $a_0, a_1, \ldots a_N$ добавляются еще уравнение (7.79), где следует положить

$$b_0 = (\mathrm{Arsh}\sqrt{Q})^2 = \delta^2,$$

и уравнение (7.81). Таким образом, величины $a_0, a_1, \ldots a_N$ однозначно определяются, после чего из уравнений (7.74) можно определить и $u_0, u_1, \ldots u_N$.

Для решения системы уравнений (7.74) Пегис предложил [61] весьма изящный метод, который мы здесь несколько моди-

фицируем. Оказывается, что для нахождения величин u_0, u_1, ... u_N нет нужды вычислять предварительно a_0, a_1, ... a_N, т. е. решать систему уравнений (7.83). В особенности удобным модифицированный метод Пегиса оказывается в нашей проблеме синтеза ахроматического светоделителя.

Обозначим через x_1, x_2, ... x_N корни уравнения

$$u_N x^N + u_{N-1} x^{N-1} + \ldots + u_1 x + u_0 = 0. \tag{7.84}$$

Тогда корнями уравнения

$$u_N x^{-N} + u_{N-1} x^{-(N-1)} + \ldots + u_1 x^{-1} + u_0 = 0 \tag{7.85}$$

будут x_1^{-1}, x_2^{-1}, ... x_N^{-1}. Перемножив оба уравнения, находим, с учетом (7.74), следующее уравнение:

$$a_N (x^N + x^{-N}) + a_{N-1} (x^{N-1} + x^{-(N-1)}) + \ldots$$
$$\ldots + a_1 (x + x^{-1}) + 2a_0 = 0. \tag{7.86}$$

Корнями этого уравнения являются, конечно, x_1, x_2, ... x_N, x_1^{-1}, x_2^{-1}, ... x_N^{-1}. Положив

$$x + x^{-1} = 4z^2 - 2, \tag{7.87}$$

получим уравнение N-й степени относительно z^2. Найдем его. Если положим временно

$$x^{1/2} = e^{i\Theta},$$

так что

$$x + x^{-1} = 2 \cos 2\Theta,$$

то

$$z^2 = \cos^2 \Theta.$$

Далее,

$$x^n = e^{2in\Theta} \quad \text{и} \quad x^n + x^{-n} = 2 \cos 2n\Theta.$$

Это значит, согласно формуле (7.75), что

$$x^n + x^{-n} = 2 \sum_{k=0}^{n} c_{2k}^{(2n)} \cos^{2k} \Theta,$$

т. е.

$$x^n + x^{-n} = 2 \sum_{k=0}^{n} c_{2k}^{(2n)} z^{2k}. \tag{7.88}$$

Следовательно, уравнение (7.86) принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_n c_{2k}^{(2n)} z^{2k} = 0. \tag{7.89}$$

Учитывая (7.78), его можно упростить:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k z^{2k} = 0. \tag{7.90}$$

Последнее уравнение, которое мы назовем уравнением Пегиса, имеет N пар корней: $\pm z_1$, $\pm z_2$, ... $\pm z_N$. Следует обратить внимание на то, что левая часть этого уравнения, если отождествить z с $\cos\alpha$, совпадает с правой частью формулы (7.77); а так как $\frac{R}{D}$ не может быть отрицательно, то уравнение Пегиса не должно иметь в интервале от -1 до $+1$ вещественных корней нечетной кратности. Если же при произвольно выбранных коэффициентах $b_0, b_1, \ldots b_N$ в числе корней окажется вещественный с нечетной кратностью, не превышающий по абсолютной величине единицы, то это служит указанием на нереализуемость пленки с такими значениями указанных коэффициентов.

Согласно равенству (7.87), N пар корней уравнения Пегиса дадут N пар значений x:

$$x_k = e^{\pm 2i \arccos z_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots N, \tag{7.91}$$

где под z_k подразумевается безразлично z_k или $-z_k$. В каждой паре оба значения x_k являются, конечно, обратными друг другу величинами. Любое из двух можно поэтому обозначить как x_k, другое как x_k^{-1}. Очевидно, существует всего, вообще говоря, 2^N способов выбора значений $x_1, x_2, \ldots x_N$. Подставляя какой-либо из этих наборов значений x_k в уравнение (7.84), получим систему из N однородных линейных уравнений с неизвестными $u_0, u_1, \ldots u_N$. Так как эти величины должны быть вещественны, то на выбор набора значений $x_1, x_2, \ldots x_N$ налагается условие, состоящее в том, что если какое-либо значение x_k в этом наборе комплексно, то в том же наборе должно присутствовать и его комплексно-сопряженное значение. Такой выбор всегда возможен, если корни уравнения Пегиса удовлетворяют вышеуказанному ограничению. Система N однородных уравнений для $u_0, u_1, \ldots u_N$ позволяет вычислить отношения этих величин. Окончательно они определяются с помощью одного из равенств

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1 + \ldots + u_N = u, \\ &u_0 - u_1 + - \ldots + (-1)^N u_N = \delta. \end{aligned} \tag{7.92}$$

Другое из них остается для проверки. Можно также оставить для проверки одно из уравнений (7.84) и вычислять $u_0, u_1, \ldots u_N$ из остальных уравнений (7.84) с добавлением уравнений (7.92).

Итак, первым шагом в осуществлении метода Пегиса является решение уравнения (7.90). В нашей проблеме синтеза

нейтрального светоделителя оно оказывается чрезвычайно простым. Именно, в силу условий ахроматичности (7.82), имеем:

$$b_N z^{2N} + b_0 = 0. \tag{7.93}$$

Приведем это уравнение к еще более удобному виду. Согласно (7.79) заменим b_0 на δ^2. Покажем, кроме того, что

$$b_N = u^2 - \delta^2. \tag{7.94}$$

В самом деле, положив в (7.73) и (7.77) $\alpha = 0$, находим:

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_N = a_0 + a_1 + \ldots + a_N = u^2.$$

Но так как

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{N-1} = 0$$

и $b_0 = \delta^2$, то $\delta^2 + b_N = u^2$, откуда и вытекает (7.94). Итак, уравнение (7.93) получает вид:

$$z^{2N} = \left(1 - \frac{u^2}{\delta^2}\right)^{-1}. \tag{7.95}$$

Отсюда

$$z_k = \left(1 - \frac{u^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2N}} e^{\frac{\pi i k}{N}}. \tag{7.96}$$

Это равенство вместе с (7.91) решает задачу.

Приведем два примера. В обоих, как и раньше, положим $n_0 = 1$, $n = 1{,}52$, $Q = 1$, так что

$$\left(1 - \frac{u^2}{\delta^2}\right)^{-1} = 1{,}05980.$$

1) Двухслойный светоделитель. В этом случае

$z_1 = 1{,}01463i$ и $z_2 = 1{,}01463$. Далее,

$$\arccos z_1 = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{Arsh} 1{,}01463$$

и

$$\arccos z_2 = i \operatorname{Arch} 1{,}01463.$$

Следовательно,

$$x_1 = -e^{\pm 2 \operatorname{Arsh} 1{,}01463}$$

и

$$x_2 = e^{\pm 2 \operatorname{Arch} 1{,}01463}.$$

Вычисляя, находим:

$$x_1 = \begin{cases} -5{,}9498 \\ -0{,}1681 \end{cases}$$

и

$$x_2 = \begin{cases} 1{,}4073 \\ 0{,}7106. \end{cases}$$

Наконец, для определения u_0, u_1, u_2 имеем систему уравнений (7.84) и уравнений (7.92). Из последних можем сразу написать:

$$u_1 = -0{,}3360.$$

Тогда остается система

$$u_0 + u_2 = 0{,}5454,$$
$$u_0 + 1{,}9804u_2 = 0{,}4728.$$

Здесь использовано значение $x = 1{,}4073$. Решая эту систему, находим:

$$u_0 = 0{,}6193,$$
$$u_2 = -0{,}0740.$$

Оставшееся для проверки второе уравнение (7.84) удовлетворяется при $x = -5{,}9498$. Показатели преломления слоев получаются равными

$$n_1 = 3{,}450, \qquad n_2 = 1{,}762. \tag{7.97}$$

Наконец, вычисляя (по точной формуле) $\frac{R}{D}$, находим:

$$\frac{R}{D} = 1 + 0{,}093\cos^2\alpha - 1{,}0485\cos^4\alpha. \tag{7.98}$$

Отличие от нуля коэффициента при $\cos^2\alpha$ получилось оттого, что он полагался равным нулю по приближенной формуле, а вычислен по точной формуле. Малость его вновь подчеркивает

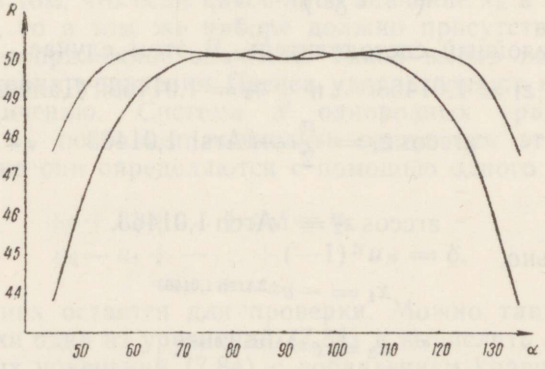

Рис. 26. Коэффициенты отражения ахроматических светоделителей — 2-слойного (нижняя кривая) и 3-слойного (верхняя кривая).

хорошую применимость приближенной формулы. График R, вычисленный по формуле (7.98), можно видеть на рис. 26.

2) Трехслойный светоделитель. Не останавливаясь подробно на ходе вычислений, приведем готовый результат:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0{,}6582, \\ u_1 &= -0{,}3186, \\ u_2 &= -0{,}1128, \\ u_3 &= -0{,}0174; \\ n_1 &= 3{,}730, \\ n_2 &= 1{,}972, \\ n_3 &= 1{,}574 \end{aligned}\right\} \qquad (7.99)$$

и

$$\frac{R}{D} = 1 + 0{,}075\cos^2\alpha + 0{,}051\cos^4\alpha - 1{,}081\cos^6\alpha. \qquad (7.100)$$

График см. на рис. 26.

Сравнение результатов, полученных в этом параграфе методом Полака—Пегиса, с результатами двух предыдущих параграфов показывает их близкое сходство. Хотя объем вычислений в методе Полака—Пегиса значительно больше, чем в методе § 25, он имеет свои преимущества. Главное из них состоит в том, что он легко обобщается на случай синтеза светоделителей иных типов. Однако, в этих случаях приближенная формула (7.1) становится хуже применимой, и часто оказывается целесообразным заменять ее точной формулой. Объем вычислений возрастает тогда еще более. Однако, мы не будем рассматривать всех этих вопросов.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ТЕОРИЯ ПРОСВЕТЛЕНИЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ ПЛЕНОК

§ 28. Понятие просветления поглощающей пленки

В этой главе термин «просветление» будет употребляться в ином значении, чем в шестой главе. Там мы имели дело с отсутствием поглощения и под просветлением подразумевалось подавление отражения света на поверхностях раздела оптических сред. Здесь же под просветлением понимается уменьшение поглощения в пленке. Эта проблема возникает в связи с довольно широким применением в оптике полупрозрачных металлических пленок. Наряду со многими достоинствами эти пленки имеют также существенный недостаток, состоящий в том, что значительная доля падающего света теряется на поглощение. Поэтому возникает, естественно, вопрос: нельзя ли путем комбинирования данной поглощающей пленки с другими тонкими слоями достигнуть уменьшения коэффициента поглощения пленки?

Как мы видели в § 16, добавление поверх поглощающей пленки какого бы то ни было прозрачного покрытия не изменяет величины $\frac{A}{D}$ (см. теорему 1 в § 16). Отсюда вытекает, что таким способом уменьшение A возможно лишь одновременно с уменьшением D. Соответственно возрастает R. Следовательно, этот способ имеет ограниченную применимость, именно, он годится только в тех случаях, где важно иметь возможно больший коэффициент отражения. Фактически (см., например, [62]) этот способ с успехом применяется для улучшения отражательных свойств пластин интерферометра Фабри—Перо и в других аналогичных случаях.

Мы не будем останавливаться в нашей теории на этом частном случае, поскольку нас интересует общая постановка вопроса. Если мы имеем целью уменьшить коэффициент поглощения

независимо от значений коэффициентов отражения и пропускания, то следует добиваться всемерного уменьшения отношения $\frac{A}{D}$. Но это возможно, согласно вышесказанному, только путем помещения дополнительной непоглощающей прослойки позади данной поглощающей (просветляемой) пленки, т. е. между этой пленкой и подложкой. Впервые, насколько нам известно, эту проблему исследовали теоретически Бернинг и Турнер [63], получившие ряд интересных результатов. Автор настоящей монографии в ряде статей [14—16, 24] независимо пришел к тем же результатам и развил их дальше с возможной полнотой. Следует отметить также экспериментальные работы И. Н. Шкляревского и А. А. Авдеенко [53] по просветлению металлических пленок, а также исследования Полака [58, 64—67] и Коха [68]. В этих работах содержится ряд важных частных результатов по проблеме просветления.

Кроме просветления в собственном смысле, т. е. уменьшения отношения $\frac{A}{D}$, представляет интерес также и обратная проблема: возможное увеличение отношения $\frac{A}{D}$. Мы будем называть это антипросветлением. Вначале в настоящей главе мы будем рассматривать только просветление и лишь в §§ 33 и 34 рассмотрим также вопрос об антипросветлении. Такое разделение кажется уместным хотя бы потому, что антипросветление достигается гораздо легче и лучше поддается ахроматизации, чем просветление в собственном смысле.

Мы начнем построение общей теории с простейшего частного случая.

§ 29. Просветление однослойной поглощающей пленки

В этом параграфе рассмотрим просветление одиночного поглощающего слоя. Просветление осуществляется, как уже известно, путем помещения между просветляемым слоем и подложкой некоторой, вообще говоря, многослойной непоглощающей прослойки (см. рис. 27). Выделим в этой прослойке слой, прилегающий к просветляемому слою, и будем считать его промежуточным, имея в виду применение обобщенных формул Власова (см. (2.13)). Обозначая поглощающий слой индексом 1, промежуточный слой индексом m, а остальную часть просветляющей прослойки индексом 2, можем написать:

$$\begin{aligned} a &= a_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{b}_1^* e^{-i\alpha_m}, \\ b &= b_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{a}_1^* e^{-i\alpha_m}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

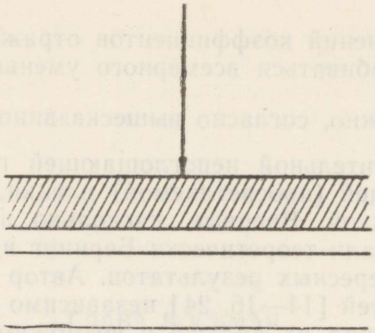

Рис. 27.

где a и b относятся ко всей просветленной пленке. Обозначим также фазы величин a, a_1, $\tilde{a}_1$ и a_2 через μ, μ_1, $\tilde{\mu}_1$ и μ_2, а фазы величин b, b_1, $\tilde{b}_1$ и b_2 через ν, ν_1, $\tilde{\nu}_1$ и ν_2. Тогда из (8.1) находим:

$$\frac{A}{D} = bb^* - aa^* - 1 =$$

$$= \frac{(1-R_2)(\operatorname{ch}\varphi_1 - 1) + (1+R_2)S_1 + 2\sqrt{R_2}\,U_1 \cos(2\alpha_m - \mu_2 + \nu_2 + \sigma_1)}{1-R_2}, \tag{8.2}$$

где φ_1, S_1, U_1 и σ_1 определены согласно формулам (5.23).

Чтобы получить возможно малое значение $\frac{A}{D}$, мы должны прежде всего выбрать толщину промежуточного слоя так, чтобы удовлетворялось условие:

$$\cos(2\alpha_m - \mu_2 + \nu_2 + \sigma_1) = -1. \tag{8.3}$$

Тогда

$$\frac{A}{D} = \frac{(1-R_2)(\operatorname{ch}\varphi_1 - 1) + (1+R_2)S_1 - 2U_1\sqrt{R_2}}{1-R_2}. \tag{8.4}$$

Потребуем, чтобы $\frac{A}{D}$ имело минимум относительно R_2. Несложное вычисление показывает, что минимум, равный

$$\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}} = e^{\varphi_1} - 1, \tag{8.5}$$

имеет место при

$$R_2 = \frac{S_1 - \operatorname{sh}\varphi_1}{S_1 + \operatorname{sh}\varphi_1}. \tag{8.6}$$

В вычислениях следует также учитывать формулу (5.27).

Таким образом, поскольку величина φ_1 зависит только от параметров поглощающего слоя (и от угла падения, если он отличен от нуля), наименьшее значение, которое может иметь $\frac{A}{D}$, зависит только от самого просветляемого слоя. Чтобы реализовать это значение, необходимо лишь удовлетворить условиям (8.3) и (8.6), первое из которых фиксирует толщину промежуточного слоя, а второе — коэффициент отражения остальной части просветляющей прослойки. Оба условия могут быть в принципе, конечно, легко выполнены, но, к сожалению, они существенно зависят от длины волны. Поэтому просветление достигается в точности только для одной определенной длины волны, а для других длин волн лишь частично (подробнее об этом см. в § 33). Это положение аналогично тому, что мы имели (в шестой главе) для обычного просветления. Однако, в отличие от обычного просветления, просветление поглощающих слоев, как увидим в дальнейшем, поддается ахроматизации гораздо труднее и хуже.

Выразим теперь величину φ_1 через параметры поглощающего слоя, ограничиваясь здесь случаем нормального падения. Воспользовавшись для этого формулой (5.23) для $\operatorname{ch}\varphi_1$, находим:

$$\operatorname{ch}\varphi_1 = \frac{\eta_1^2 \operatorname{ch} 2\beta_1 + \varkappa_1^2 \cos 2\alpha_1}{\eta_1^2 + \varkappa_1^2}, \tag{8.7}$$

где $\eta_1 - i\varkappa_1$ — показатель преломления слоя, h_1 — его толщина и

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k\eta_1 h_1, \\ \beta_1 &= k\varkappa_1 h_1. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Если слой настолько тонок, что φ_1 мало по сравнению с единицей, то

$$\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}} = \varphi_1; \tag{8.9}$$

с другой стороны, разлагая $\operatorname{ch}\varphi_1$, а также $\operatorname{ch} 2\beta_1$ и $\cos 2\alpha_1$ в ряд, находим:

$$\varphi_1 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{h_1}{\lambda}\right)^2 \eta_1 \varkappa_1, \tag{8.10}$$

где λ — вакуумная длина волны. По этой формуле легко судить, сколь мала должна быть толщина слоя по сравнению с длиной волны, чтобы данное приближение было достаточно точно.

Можно также продолжить разложение φ_1 по степеням $\frac{h_1}{\lambda}$. Для примера выпишем здесь (опуская индекс 1) несколько чле-

нов этого разложения (до членов восьмого порядка по h/λ). Если обозначим

$$\varphi_0 \equiv \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \eta\varkappa, \tag{8.11}$$

то

$$\varphi = \varphi_0\left[1 + \frac{\sqrt{3}(\varkappa^2-\eta^2)}{30\eta\varkappa}\varphi_0 + \frac{\varkappa^4 - 22\varkappa^2\eta^2 + \eta^4}{525\eta^2\varkappa^2}\varphi_0^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}(\varkappa^6 - 263\varkappa^4\eta^2 + 263\varkappa^2\eta^4 - \eta^6)}{63\,000\eta^3\varkappa^3}\varphi_0^3 + \dots\right]. \tag{8.12}$$

Легко видеть, что просветленный слой имеет

$$U = 0. \tag{8.13}$$

В самом деле, из (8.5) и (5.52) следует, что $S = \operatorname{sh}\varphi$; следовательно, согласно (5.27), $U = 0$. Наоборот, если между поглощающим слоем и подложкой находится непоглощающая прослойка и $U = 0$, то $S = \operatorname{sh}\varphi$, откуда $\dfrac{A}{D} = e^{\Phi} - 1$. Это значит, что непоглощающая прослойка удовлетворяет тогда условиям просветления (8.3) и (8.6) и слой просветлен. Следовательно, равенство (8.13) является критерием просветленности.

Вернемся теперь к формулам (8.1) и вычислим $\dfrac{R}{D}$ из первой из них, предполагая условия просветления выполненными. Таким образом находим:

$$\frac{R}{D} = \frac{R_1}{D_1D_2} + \frac{R_2}{D_1D_2} + a_1\tilde{b}_1a_2^*b_2e^{2i\alpha_m} + a_1^*\tilde{b}_1^*a_2b_2^*e^{-2i\alpha_m}.$$

Так как, согласно (8.3),

$$e^{2i\alpha_m} = -e^{i(\mu_1-\nu_2-\sigma_1)},$$

а, с другой стороны,

$$a_2e^{-i\mu_1} = \sqrt{\frac{R_2}{D_2}}$$

и

$$b_2e^{-i\nu_2} = \frac{1}{\sqrt{D_2}},$$

то

$$\frac{R}{D}=\frac{R_1}{D_1D_2}+\frac{R_2}{\tilde{D}_1D_2}-\frac{\sqrt{R_2}}{D_2}\,(a_1\tilde{b}_1e^{-i\sigma_1}+a_1^*\tilde{b}_1^*e^{i\sigma_1}).$$

Подставляя сюда по формуле (8.6) вместо $R_2\dfrac{S_1-\operatorname{sh}\varphi_1}{S_1+\operatorname{sh}\varphi_1}$ и вместо $D_2\dfrac{2\operatorname{sh}\varphi_1}{S_1+\operatorname{sh}\varphi_1}$ (так как просветляющая прослойка прозрачна), находим:

$$\frac{R}{D}=(2\operatorname{sh}\varphi_1)^{-1}\left[\frac{R_1}{D_1}\,(S_1+\operatorname{sh}\varphi_1)+\frac{1}{D_1}\,(S_1-\operatorname{sh}\varphi_1)-\right.$$
$$\left.-U_1(a_1\tilde{b}_1e^{-i\sigma_1}+a_1^*\tilde{b}_1^*e^{i\sigma_1})\right].$$

Далее, преобразуем здесь часть членов:

$$S_1\left(\frac{R_1}{D_1}+\frac{1}{\tilde{D}_1}\right)-U_1(a_1\tilde{b}_1e^{-i\sigma_1}+a_1^*\tilde{b}_1^*e^{i\sigma_1})=$$
$$=\frac{1}{2}\,(b_1b_1^*-\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*-a_1a_1^*+\tilde{a}_1\tilde{a}_1^*)\,(a_1a_1^*+\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*)-$$
$$-a_1\tilde{b}_1(\tilde{a}_1^*b_1^*-a_1^*\tilde{b}_1^*)-a_1^*\tilde{b}_1^*(\tilde{a}_1b_1-a_1\tilde{b}_1)=$$
$$=\frac{1}{2}\,(b_1b_1^*-\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*-a_1a_1^*+\tilde{a}_1\tilde{a}_1^*)\,(a_1a_1^*+\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*)+$$
$$+2a_1a_1^*\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*-a_1\tilde{a}_1^*b_1^*\tilde{b}_1-a_1^*\tilde{a}_1b_1\tilde{b}_1^*.$$

Заменяя в предпоследнем члене $a_1\tilde{a}_1^*$ на $b_1\tilde{b}_1^*-1$, а в последнем $\tilde{b}_1\tilde{b}_1$ на $\tilde{a}_1^*a_1+1$, находим:

$$S_1\left(\frac{R_1}{D_1}+\frac{1}{\tilde{D}_1}\right)-U_1(a_1\tilde{b}_1e^{-i\sigma_1}+a_1^*\tilde{b}_1^*e^{i\sigma_1})=$$
$$=1+\frac{1}{2}\,(b_1b_1^*+\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*-a_1a_1^*-\tilde{a}_1\tilde{a}_1^*)\,(a_1a_1^*-\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*)=$$
$$=1+\operatorname{ch}\varphi_1\left(\frac{R_1}{D_1}-\frac{1}{\tilde{D}_1}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{R}{D}=(2\operatorname{sh}\varphi_1)^{-1}\left[1+\left(\frac{R_1}{D_1}-\frac{1}{\tilde{D}_1}\right)e^{\varphi_1}\right].$$

Наконец, заменяем

$$\frac{R_1}{D_1}-\frac{1}{\tilde{D}_1}=a_1a_1^*-\tilde{b}_1\tilde{b}_1^*=\tilde{a}_1'\tilde{a}_1'^*-\tilde{b}_1'\tilde{b}_1'^*=S_1'-\operatorname{ch}\varphi_1.$$

Следовательно, окончательно

$$\frac{R}{D}=\frac{S_1'-\operatorname{sh}\varphi_1}{1-e^{-2\varphi_1}}. \tag{8.14}$$

Напомним, что S_1' означает величину S_1 в случае падения света с обратной стороны, т. е. в данном случае из промежуточного слоя через поглощающий слой в исходную среду.

Из (8.14) и (8.5) находим также:

$$\left.\begin{aligned} R&=\frac{S_1'-\operatorname{sh}\varphi_1}{S_1'+\operatorname{sh}\varphi_1},\\ D&=\frac{1-e^{-2\varphi_1}}{S_1'+\operatorname{sh}\varphi_1},\\ A&=\frac{2\operatorname{sh}\varphi_1(1-e^{-\varphi_1})}{S_1'+\operatorname{sh}\varphi_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

Таким образом, значения R и D просветленного поглощающего слоя зависят только от φ_1, т. е. от параметров самого слоя, и от S_1', т. е. также от исходной среды. На этом основании может показаться, что мы лишены свободы выбирать произвольно желаемое отношение величин R и D. Однако, такой результат получился в первую очередь оттого, что мы не предполагали никакого добавочного покрытия поверх просветляемого слоя (т. е. между этим слоем и исходной средой). С точки зрения просветления как такового, т. е. получения минимума $\frac{A}{D}$, подобное добавочное покрытие ненужно. Однако, так как S_1' зависит от этого переднего добавочного покрытия, то надлежащий выбор его позволил бы осуществить любой желаемый вариант в части отношения $\frac{R}{D}$ у просветленного слоя. В частности, если пленка просветлена в обоих направлениях, т. е. если $U_1'=0$, то $S_1'=\operatorname{sh}\varphi_1$ и $R=0$, что согласуется с теоремой 8 из § 16.

Во-вторых, если даже переднее добавочное покрытие отсутствует, так что S_1' имеет фиксированное значение, то мы можем допустить еще некоторую свободу в выборе значения R_2, без значительного ухудшения просветления. Поясним сказанное не-

сколько ближе. Во всех предыдущих вычислениях предполагалось, что R_2 имеет значение, фиксированное формулой (8.6). Это значение обеспечивает минимум $\frac{A}{D}$. Однако, если просветляемый слой достаточно тонок (обычно это так и бывает), то указанный минимум оказывается неглубоким, т. е. $\frac{A}{D}$ слабо зависит от R_2. В этом можно убедиться, взяв вторую производную от $\frac{A}{D}$ по $\sqrt{R_2}$ (по формуле (8.4)). Значение этой производной в точке минимума равно $\frac{4 \operatorname{sh} \varphi_1}{D_2^2}$, а приближенно (при малой толщине слоя) $\frac{2\eta_1 \varkappa_1 \sqrt{3}}{n_m^2}$. Если выбрать промежуточный слой сильно преломляющим, то вторая производная будет достаточно мала, так что $\frac{A}{D}$ будет мало отличаться от $e^{\varphi_1} - 1$ даже при значениях R_2, довольно сильно отличающихся от значения $\frac{S_1 - \operatorname{sh} \varphi_1}{S_1 + \operatorname{sh} \varphi_1}$. Это обстоятельство позволяет фактически выбирать R_2 в широких пределах. Но коэффициенты отражения и пропускания всего просветленного покрытия зависят от R_2 достаточно сильно. В этом случае формулы (8.14) и (8.15) уже неверны, поскольку при их выводе использовалось равенство (8.6). Мы не будем, однако, рассматривать этот вопрос здесь более подробно, ограничившись ссылкой на работу [14], где приведен наглядный численный пример.

В дополнение к формулам (8.15) выведем также формулы для $\tilde{R}$, $\tilde{D}$, $\tilde{A}$ просветленного слоя. Для этого удобно исходить из формул (5.73) и (5.74) (см. теорему 7 из § 16), верных в случае $U = 0$. Согласно (5.73), $\frac{\tilde{R}}{\tilde{D}} = \frac{R}{D} e^{-2\varphi_1}$, а согласно (5.74),

$$\frac{1}{\tilde{D}} = \frac{1}{D} e^{-2\varphi_1}.$$

Следовательно, с помощью формул (8.15), и так как $\tilde{A} = 1 - \tilde{R} - \tilde{D}$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{R} &= R = \frac{S'_1 - \operatorname{sh}\varphi_1}{S'_1 + \operatorname{sh}\varphi_1},\\ \tilde{D} &= De^{2\varphi_1} = \frac{e^{2\varphi_1} - 1}{S'_1 + \operatorname{sh}\varphi_1},\\ \tilde{A} &= -Ae^{\varphi_1} = -\frac{2\operatorname{sh}\varphi_1(e^{\varphi_1} - 1)}{S'_1 + \operatorname{sh}\varphi_1}.\end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

Из формул для $\tilde{A}$ и $\tilde{D}$ вытекает, что

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}} = e^{-\varphi_1} - 1, \tag{8.17}$$

как и должно быть; ту же формулу получим, подставив в (8.4) $-S_1$ и $-U_1$ вместо S_1 и U_1 и выражение (8.6) вместо R_2. Тогда будем иметь в левой части $\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}$ вместо $\frac{A}{D}$, а в правой части получим $e^{-\varphi_1} - 1$.

Наконец, сделаем еще следующее замечание. Выше было указано, что значение U у просветленного слоя равно нулю. Как увидим в дальнейшем, равенство U нулю является совершенно общим критерием просветленности любой поглощающей пленки. Что же касается значения U_1 непросветленного поглощающего слоя, то оно всегда отлично от нуля, в чем можно убедиться непосредственным вычислением этой величины. Выше мы это уже молчаливо предполагали, когда записали условие (8.3). Если бы U_1 равнялось нулю, то это условие было бы излишне. С другой стороны, тогда было бы в минимуме $\frac{A}{D}$ $R_2 = 0$ и $\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}} = \operatorname{ch}\varphi_1 + S_1 - 1$, т. е. добавочная пленка не изменила бы значения $\frac{A}{D}$. Но, как сказано, одиночный поглощающий слой имеет всегда отличное от нуля значение U_1. Приведем соответствующую формулу:

$$U_1 \sin\sigma_1 = \operatorname{Im}(\tilde{a}_1 b_1 - a_1\tilde{b}_1) = \frac{\eta_1\varkappa_1(\operatorname{ch} 2\beta_1 - \cos 2\alpha_1)}{\eta_1^2 + \varkappa_1^2} > 0. \tag{8.18}$$

§ 30. Просветление произвольной поглощающей пленки

Изложенная в предыдущем параграфе теория просветления одиночного поглощающего слоя переносится почти дословно на случай произвольной поглощающей пленки. Просветление до-

стигается и здесь путем помещения между просветляемой пленкой и подложкой надлежащим образом подобранной непоглощающей прослойки. Первый слой этой прослойки, прилегающий к просветляемой пленке, примем за промежуточный (индекс m), а просветляемую пленку и остальную часть просветляющей обозначим индексами 1 и 2. Тогда формулы (8.1)—(8.6) предыдущего параграфа переносятся без изменения и на данный случай. Формулы (8.14)—(8.16) остаются тоже в силе. Величина же φ_1, характеризующая поглощающую пленку, не выражается более по формуле (8.7); ее значение зависит от состава поглощающей пленки и не может быть конкретизировано в настоящем общем рассмотрении.

В частности, однако, здесь уместно следующее замечание. В отличие от одиночного поглощающего слоя, просветляемая поглощающая пленка, будучи произвольной, может оказаться уже просветленной. Признаком этого является равенство $U_1 = 0$. В этом случае условие (8.3) отпадает, а значение $\frac{A}{D}$, в силу равенства $S_1 = \operatorname{sh}\varphi_1$, оказывается равным минимальному значению $e^{\varphi_1} - 1$ без нового просветления. Просветляющая прослойка является в таком случае излишней (вернее, она уже имеется в составе данной поглощающей пленки). Если же данная первоначально поглощающая пленка имеет $U_1 \neq 0$, то добавление просветляющей прослойки дает пленку с $U = 0$ и с минимальным значением $\frac{A}{D}$, равным $e^{\varphi_1} - 1$.

Как указано выше, формулы (8.14)—(8.16) остаются тоже в силе, причем величина S_1', как и φ_1, тоже определяется всем составом поглощающей пленки (за исключением непоглощающих слоев ее, следующих, возможно, за последним поглощающим слоем — см. теорему 1 из § 16). Таким образом, коэффициенты отражения и пропускания просветленной пленки однозначно определены ее составом, если, кроме задней просветляющей пленки, к ней ничего не добавляется. Однако, всегда имеется возможность (см. конец предыдущего параграфа) изменить S_1' и вместе с тем R и D без изменения φ_1 путем добавления непоглощающей пленки поверх просветленной.

§ 31. Внешнее и внутреннее просветление

Просветление произвольно заданной поглощающей пленки, как показано в предыдущем параграфе, дает пленку с минимальным значением $\frac{A}{D}$, равным $e^{\varphi} - 1$, где φ (индекс 1 опускаем) определяется всем составом просветляемой пленки, вер-

нее, той ее частью, которая заключена между крайними поглощающими слоями (включая их самих). Так как такое просветление осуществляется путем добавления к просветляемой пленке другой пленки, внешней по отношению к данной, то его можно назвать внешним просветлением. Наряду с внешним просветлением целесообразно ввести в рассмотрение внутреннее просветление.

К понятию внутреннего просветления приходим следующим образом. Пусть задана пленка, состоящая из некоторого числа поглощающих слоев со включенными между ними непоглощающими слоями. Она характеризуется некоторым значением параметра φ. Крайние слои этой пленки будем считать поглощающими, так как нас интересует сейчас как раз значение φ, а оно от внешних непоглощающих слоев не зависит. Так как в случае отсутствия поглощения $\varphi = 0$, то факт отличия φ от нуля обусловлен только поглощающими слоями пленки. Но само конкретное значение φ зависит еще и от внутренних непоглощающих слоев. Естественно возникает вопрос, каковы должны быть эти непоглощающие слои, чтобы φ было возможно мало? Этот вопрос представляет интерес потому, что результат внешнего просветления зависит от значения φ; чем оно меньше, тем меньше получается отношение $\frac{A}{D}$.

Внутренним просветлением мы и будем называть такой подбор непоглощающих слоев внутри поглощающей пленки, при котором φ минимально. Очевидно, при таком подборе внешнее просветление оказывается наиболее эффективным.

Таким образом, в задаче о внутреннем просветлении задается не вся поглощающая пленка как целое, а только ее поглощающие слои. Последовательность поглощающих слоев, заданных их толщинами и показателями преломления, мы будем называть остовом поглощающей пленки. Задача внутреннего просветления состоит, таким образом, в нахождении необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять непоглощающие прослойки между слоями остова для того, чтобы вся система слоев имела возможно меньшее значение φ.

Рассмотрим в качестве простейшего примера случай пленки с двухслойным остовом. Между двумя слоями остова находится некоторая непоглощающая прослойка. Выберем произвольно в этой прослойке какой-либо слой в качестве промежуточного (см. рис. 28). Обозначая две части пленки, разделенные этим слоем, индексами 1 и 2, а всю пленку индексом 12, вычислим $\operatorname{ch}\varphi_{12}$. Это удобнее всего сделать по формуле

$$\Phi_{12} = \Phi_1 M(\alpha_{12}) \Phi_2, \tag{8.19}$$

где M и Φ определены в формулах (5.9) и (5.25), а α_{12} относится к промежуточному слою. Вычислив $(\Phi_{12})_{33}$, получим:

$$\operatorname{ch}\varphi_{12} = \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 + S_1 S'_2 - U_1 U'_2 \cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2). \quad (8.20)$$

Чтобы φ было возможно мало, следует, очевидно, выбрать прежде всего толщину промежуточного слоя так, чтобы

$$\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1. \quad (8.21)$$

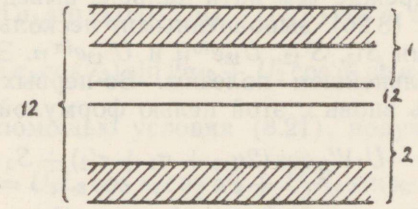

Рис. 28.

Тогда будет

$$\operatorname{ch}\varphi_{12} = \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 + S_1 S'_2 - U_1 U'_2. \quad (8.22)$$

Заметим, что условие (8.21) в случае, если $U_1 = 0$ и/или $U'_2 = 0$, излишне. Однако, так как тогда σ_1 и/или σ'_2 неопределенно, то равенство (8.21) можно формально считать выполненным и в этом случае. Следует только иметь в виду, что это равенство имеет смысл реального условия, налагаемого на толщину промежуточного слоя, только тогда, если $U_1 \neq 0$ и $U'_2 \neq 0$.

Вернемся к формуле (8.22). Величины S_1, U_1 и S'_2, U'_2 зависят не только от слоев остова, но и от непоглощающих слоев прослойки между ними; именно, S_1 и U_1 зависят от слоев, находящихся между первым слоем остова и промежуточным слоем (включительно), а S'_2 и U'_2 зависят от слоев, находящихся между вторым слоем остова и промежуточным слоем (включительно). Следовательно, подбирая эти слои надлежащим образом, можем сделать φ_{12} минимальным. Вспомним, что $S^2 - U^2 = \operatorname{sh}^2\varphi$. Введем величину Θ, согласно равенству:

$$\operatorname{th}\Theta = \frac{U}{S}. \quad (8.23)$$

Тогда формула (8.22) перепишется в виде:

$$\operatorname{ch}\varphi_{12} = \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 + \operatorname{sh}\varphi_1 \operatorname{sh}\varphi_2 \operatorname{ch}(\Theta_1 - \Theta'_2). \quad (8.24)$$

Отсюда видно, что φ_{12} будет минимально при условии:

$$\Theta_1 = \Theta'_2, \quad (8.25)$$

которое иначе можно написать в виде:

$$\frac{S_1}{S'_2} = \frac{U_1}{U'_2} = \frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{\operatorname{sh}\varphi_2}. \quad (8.26)$$

Если это условие выполнено, то

$$\varphi_{12} = \varphi_{12,\min} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{8.27}$$

Этим наша задача внутреннего просветления для двухслойного остова решена. Прежде чем идти дальше, выведем, предполагая условия (8.21) и (8.26) выполненными, несколько соотношений между величинами S_{12}, S'_{12}, $U_{12}e^{i\sigma_{12}}$ и $U'_{12}e^{i\sigma'_{12}}$. Эти соотношения будут нам в дальнейшем полезны. Во-первых, вычислим S_{12}, воспользовавшись вновь с этой целью формулой (8.19):

$$(\Phi_{12})_{34} = S_{12} = -U_1V'_2\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \tau'_2) + S_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1\operatorname{ch}\psi_2. \tag{8.28}$$

В силу (8.21) отсюда имеем:

$$S_{12} = -U_1V'_2\cos(\sigma'_2 - \tau'_2) + S_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1\operatorname{ch}\psi_2. \tag{8.29}$$

Применим далее равенство:

$$U'_2V'_2\cos(\sigma'_2 - \tau'_2) + S_2\operatorname{ch}\varphi_2 - S'_2\operatorname{ch}\psi_2 = 0, \tag{8.30}$$

содержащееся в формуле (5.7). Исключая V'_2 из этого равенства и формулы (8.29), находим:

$$S_{12} = \frac{U_1}{U'_2}(S_2\operatorname{ch}\varphi_2 - S'_2\operatorname{ch}\psi_2) + S_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1\operatorname{ch}\psi_2. \tag{8.31}$$

Это равенство верно и в том случае, если $U'_2 = 0$, потому что тогда, согласно условию (8.26), $U_1 = 0$, но отношение $\frac{U_1}{U'_2}$ конечно и отлично от нуля. Раскрывая скобки, заменяя в первом члене $\frac{U_1}{U'_2}$ на $\operatorname{sh}\varphi_1/\operatorname{sh}\varphi_2$, а во втором на $\frac{S_1}{S'_2}$ и учитывая (8.27), находим:

$$\frac{S_{12}}{S_2} = \frac{\operatorname{sh}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\operatorname{sh}\varphi_2} = \frac{\operatorname{sh}\varphi_{12}}{\operatorname{sh}\varphi_2} = \frac{U_{12}}{U_2}. \tag{8.32}$$

Совершенно аналогичное вычисление дает еще:

$$\frac{S'_{12}}{S'_1} = \frac{\operatorname{sh}\varphi_{12}}{\operatorname{sh}\varphi_1} = \frac{U'_{12}}{U'_1}, \tag{8.33}$$

как и должно быть, потому что условия внутреннего просветления (8.21) и (8.26) симметричны относительно обоих поглощающих слоев. Пользуясь обозначением (8.23), эти результаты можно кратко записать в виде:

$$\Theta_{12} = \Theta_2,$$
$$\Theta'_{12} = \Theta'_1. \tag{8.34}$$

Во-вторых, вычислим σ_{12}. Формула (8.19) дает:

$$(\Phi_{12})_{31} = U_{12}\cos\sigma_{12} = (U_1L_2\cos\sigma_1\cos\lambda_2 - \\ - U_1K_2\sin\sigma_1\sin\varkappa_2)\cos 2\alpha_{12} - (U_1K_2\cos\sigma_1\sin\varkappa_2 + \\ + U_1L_2\sin\sigma_1\cos\lambda_2)\sin 2\alpha_{12} + U_2\cos\sigma_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1V_2\cos\tau_2. \tag{8.35}$$

Исключая α_{12} с помощью условия (8.21), получаем:

$$U_{12}\cos\sigma_{12} = U_1L_2\cos\lambda_2\cos\sigma'_2 + U_1K_2\sin\varkappa_2\sin\sigma' + \\ + U_2\cos\sigma_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1V_2\cos\tau_2. \tag{8.36}$$

Далее, формула (5.7) дает равенство:

$$-L_2U'_2\cos\lambda_2\cos\sigma'_2 - K_2U'_2\sin\varkappa_2\sin\sigma'_2 + \\ + U_2\operatorname{ch}\varphi_2\cos\sigma_2 - S'^2V_2\cos\tau_2 = 0, \tag{8.37}$$

позволяющее переписать (8.36) в виде:

$$U_{12}\cos\sigma_{12} = \frac{U_1}{U'_2}(U_2\operatorname{ch}\varphi_2\cos\sigma_2 - S'_2V_2\cos\tau_2) + \\ + U_2\cos\sigma_2\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1V_2\cos\tau_2. \tag{8.38}$$

Раскрывая скобки, заменяя в первом члене U_1/U'_2 на $\operatorname{sh}\varphi_1/\operatorname{sh}\varphi_2$, а во втором на S_1/S'_2 и учитывая (8.27), находим:

$$U_{12}\cos\sigma_{12} = \frac{U_2\operatorname{sh}(\varphi_1+\varphi_2)\cos\sigma_2}{\operatorname{sh}\varphi_2} \tag{8.39}$$

Отсюда, в силу (8.32), следует:

$$\cos\sigma_{12} = \cos\sigma_2.$$

Совершенно аналогичным путем, вычисляя $(\Phi_{12})_{32}$, можно найти, что

$$\sin\sigma_{12} = \sin\sigma_2.$$

Следовательно,

$$\sigma_{12} = \sigma_2. \tag{8.40}$$

Кроме того, в силу симметрии условий (8.21) и (8.26) относительно поглощающих слоев,

$$\sigma'_{12} = \sigma'_1. \tag{8.41}$$

Резюмируем результаты. Если между двумя поглощающими слоями находится непоглощающая прослойка, и в ней произвольно выбран промежуточный слой, делящий всю пленку на две части, то минимальное значение φ_{12} равно

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{8.42}$$

Это значение достигается тогда и только тогда, если

$$\begin{aligned} &\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1, \\ &\Theta_1 = \Theta'_2, \end{aligned} \tag{8.43}$$

где Θ определяется формулой (8.23). Если эти условия выполнены, то всегда

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= \Theta_2, \\ \Theta'_{12} &= \Theta'_1 \end{aligned} \tag{8.44}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_2, \\ \sigma'_{12} &= \sigma'_1. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Очевидно, эти результаты останутся в силе и в том случае, если два поглощающие слоя будут заменены какими угодно поглощающими пленками. Разница будет только в том, что φ_1 и φ_2 в формуле (8.42) будут относиться не к единичным поглощающим слоям, а к этим произвольным пленкам, входящим в состав данной пленки. Поэтому возникает вопрос о внутреннем просветлении самих этих двух частей пленки. Мы рассмотрим этот вопрос со всей полнотой в следующем параграфе.

§ 32. Синтез просветленных поглощающих пленок

В этом параграфе мы рассмотрим общую задачу синтеза просветленной (как внешне, так и внутренне) пленки, имеющей заданный поглощающий остов. Обозначим число слоев остова через N, и перенумеруем их, как обычно, в направлении падения света.

В каждом промежутке между двумя соседними слоями остова, а также между крайними слоями остова и ограничивающими средами, находятся непоглощающие прослойки. В каждой из этих прослоек выберем произвольно один слой в качестве промежуточного. Каждый внутренний промежуточный слой обозначим индексами тех двух слоев остова, между которым он находится, тогда как внешние по отношению к остову промежуточные слои обозначим индексами 01 и N, $N+1$ (индексы 0 и $N+1$, как и везде, обозначают исходную среду и подложку).

Таким образом, вся синтезируемая пленка оказывается разделенной промежуточными слоями (число их равно $N+1$) на $N+2$ частей, из которых крайние являются непоглощающими, а остальные содержат каждая по одному слою остова. Обозначим крайние части индексами 0 и $N+1$, а остальные части — индексами $1, 2, \ldots N$, совпадающими с индексами содержащихся в них слоев остова.

Объединяя несколько лежащих подряд частей с индексами $i, i+1, \ldots k-1$ k в одну, будем обозначать ее индексами ik. Эта часть ограничена, следовательно, промежуточными слоями с индексами $i-1$, i и k, $k+1$. В соответствии с этим общим способом обозначения будем иногда и тем частям, которые находятся между соседними промежуточными слоями (или между крайними промежуточными слоями и ограничивающими средами), применять двухиндексное обозначение (kk вместо k). Вся пленка обозначится индексами $0, N+1$, которые мы будем опускать.

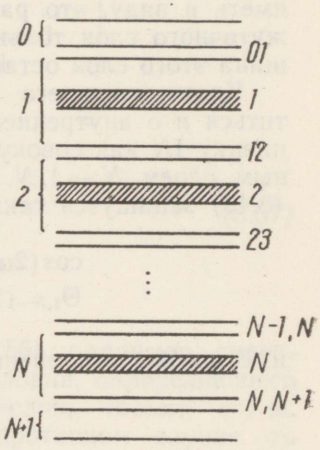

Рис. 29.

Схема подобной пленки показана на рис. 29.

Непоглощающие прослойки, находящиеся между слоями остова, ответственны за внутреннее просветление, тогда как прослойка, находящаяся между последним слоем остова и подложкой, ответственна за внешнее просветление. Прослойка же, находящаяся между исходной средой и первым слоем остова, вообще не существенна для просветления. Ее присутствие важно только для регулирования значений $R_{0,N+1}$ и $D_{0,N+1}$ всей просветленной пленки.

Так как задача внешнего просветления уже решена в § 30, то мы этот вопрос вновь здесь рассматривать не будем, а просто будем считать условия внешнего просветления выполненными. Эти условия запишем здесь в следующем виде:

$$\cos(2\alpha_{N,N+1} - \mu_{N+1} + \nu_{N+1} + \sigma_{1N}) = -1 \qquad (8.46)$$

и

$$R_{N+1} = \operatorname{th}^2 \frac{\Theta_{1N}}{2}. \qquad (8.47)$$

Если эти условия выполнены, то

$$\frac{A}{D} = e^{\varphi_{1N}} - 1. \qquad (8.48)$$

При этом первоначально предполагается, что $U_{1N} \neq 0$. Если же $U_{1N} = 0$, то формула (8.48) и условие (8.47) остаются в силе, причем последнее в виде $R_{N+1} = 0$; но условие (8.46) отпадает. Однако, мы можем считать равенство (8.46) верным и в этом случае, так как при $U_{1N} = 0$ σ_{1N} неопределенно. Следует только иметь в виду, что равенство (8.46) фиксирует толщину промежуточного слоя только при $U_{1N} \neq 0$; если же $U_{1N} = 0$, то толщина этого слоя остается произвольной.

Кроме внешнего просветления, мы должны далее позаботиться и о внутреннем просветлении. Для этого рассматриваем пленку $1N$ как совокупность пленок $1, N-1$ и N, с промежуточным слоем $N-1, N$. Тогда условия внутреннего просветления (8.43) запишутся так:

$$\begin{aligned} &\cos(2\alpha_{N-1,N} + \sigma_{1,N-1} + \sigma'_N) = 1, \\ &\Theta_{1,N-1} = \Theta'_N, \end{aligned} \tag{8.49}$$

и, если они выполнены, то

$$\varphi_{1N} = \varphi_{1,N-1} + \varphi_N. \tag{8.50}$$

Далее рассматриваем пленку $1, N-1$ как совокупность пленок $1, N-2$ и $N-1$. Аналогично, условия внутреннего просветления этой совокупности будут таковы:

$$\begin{aligned} &\cos(2\alpha_{N-2,N-1} + \sigma_{1,N-2} + \sigma'_{N-1}) = 1, \\ &\Theta_{1,N-2} = \Theta'_{N-1}, \end{aligned} \tag{8.51}$$

причем, если они выполнены, то

$$\varphi_{1,N-1} = \varphi_{1,N-2} + \varphi_{N-1}. \tag{8.52}$$

Продолжая эту рекуррентную процедуру последовательного просветления и дальше, доходим до совокупности пленок 12, условия внутреннего просветления которой имеют вид:

$$\begin{aligned} &\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1 \\ &\Theta_1 = \Theta'_2, \end{aligned} \tag{8.53}$$

причем

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{8.54}$$

Таким образом, собирая все условия внутреннего просветления вместе, можем утверждать следующее. Величина φ_{1N} всей пленки имеет минимальное значение, равное

$$\varphi_{1N} = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N, \tag{8.55}$$

тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1,\\
&\cos(2\alpha_{23} + \sigma_{12} + \sigma'_3) = 1,\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\cos(2\alpha_{N-2,N-1} + \sigma_{1,N-2} + \sigma'_{N-1}) = 1,\\
&\cos(2\alpha_{N-1,N} + \sigma_{1,N-1} + \sigma'_N) = 1
\end{aligned}\right\} \qquad (8.56)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_1 = \Theta'_2,\\
&\Theta_{12} = \Theta'_3,\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\Theta_{1,N-2} = \Theta'_{N-1},\\
&\Theta_{1,N-1} = \Theta'_N.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.57)$$

При этом, конечно, любое из условий (8.56), например, содержащее $2\alpha_{m,m+1}$, имеет смысл реального условия, определяющего толщину $(m, m+1)$-го промежуточного слоя, только тогда, если Θ_{1m} и Θ'_{m+1} отличны от нуля; в противном случае это условие оставляет толщину $(m, m+1)$-го слоя произвольной, хотя его можно формально считать выполняющимся.

Условия внутреннего просветления (8.56) и (8.57) вместе с условиями внешнего просветления (8.46) и (8.47) можно преобразовать к эквивалентному, но более простому виду. Для этого воспользуемся формулами (8.44) и (8.45). Первые равенства этих формул запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_{12} = \Theta_2,\\
&\Theta_{13} = \Theta_3,\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\Theta_{1,N-2} = \Theta_{N-2},\\
&\Theta_{1,N-1} = \Theta_{N-1},\\
&\Theta_{1N} = \Theta_N
\end{aligned}\right\} \qquad (8.58)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{12} = \sigma_2,\\
&\sigma_{13} = \sigma_3,\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\sigma_{1,N-2} = \sigma_{N-2},\\
&\sigma_{1,N-1} = \sigma_{N-1},\\
&\sigma_{1N} = \sigma_N.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.59)$$

Следовательно, если условия (8.46), (8.47), (8.56) и (8.57) выполнены, так что равенства (8.58) и (8.59) тоже имеют место, то выполняются также следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1,\\
&\cos(2\alpha_{23} + \sigma_2 + \sigma'_3) = 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cos(2\alpha_{N-2,N-1} + \sigma_{N-2} + \sigma'_{N-1}) = 1,\\
&\cos(2\alpha_{N-1,N} + \sigma_{N-1} + \sigma'_N) = 1,\\
&\cos(2\alpha_{N,N+1} - \mu_{N+1} + \nu_{N+1} + \sigma_N) = -1
\end{aligned}\right\} \qquad (8.60)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_1 = \Theta'_2,\\
&\Theta_2 = \Theta'_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\Theta_{N-2} = \Theta'_{N-1},\\
&\Theta_{N-1} = \Theta'_N,\\
&\Theta_N = 2\,\mathrm{Arth}\,\sqrt{R_{N+1}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.61)$$

Наоборот, если выполняются условия (8.60) и (8.61), то будут верны и равенства (8.46), (8.47), (8.56) и (8.57). В самом деле, первые условия (8.60) и (8.61) совпадают с первыми условиями (8.56) и (8.57). Из них же вытекают первые равенства (8.58) и (8.59), а сопоставление этих последних со вторыми условиями (8.60) и (8.61) дает вторые условия (8.56) и (8.57). Из них вытекают вторые равенства (8.58) и (8.59), а сравнивая последние с третьими условиями (8.60) и (8.61), находим третьи условия (8.56) и (8.57). Идя так шаг за шагом дальше до конца, убеждаемся, что все условия (8.46), (8.47), (8.56) и (8.57) действительно вытекают из условий (8.60) и (8.61). Следовательно, эквивалентность тех и других доказана.

Таким образом, полное и окончательное решение проблемы внутреннего просветления заключается в формулах (8.55), (8.60) и (8.61). Правда, это решение неполно еще в том смысле, что условия (8.60) и (8.61) могут выполняться только для одной определенной длины волны. Вопрос об ахроматизации просветления мы рассмотрим особо в следующем параграфе. Равным образом, так как величины α, σ и Θ зависят от угла падения, то условия (8.60) и (8.61) могут выполняться, вообще говоря, только для одного определенного угла падения.

Нетрудно заметить, что каждое из условий (8.60) и соответствующее ему условие (8.61) требуют надлежащего подбора

только одной прослойки, находящейся между двумя соседними поглощающими слоями (или между последним слоем остова и подложкой). В самом деле, условия $\cos(2\alpha_{m,m+1} + \sigma_m + \sigma'_{m+1}) = 1$ и $\Theta_m = \Theta'_{m+1}$ зависят, согласно теореме 1 из § 16, только от поглощающих слоев с индексами m и $m+1$ и от находящихся между ними непоглощающих слоев. Первое из этой пары условий удовлетворяется надлежащим подбором толщины промежуточного слоя, а второе — надлежащим подбором остальных слоев прослойки, потому что от них зависят значения величин S_m и S'_{m+1} (напомним, что $S = \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\Theta$).

Заметим, наконец, что условия внешнего просветления, записанные на последних местах в формулах (8.60) и (8.61), имеют вид условий просветления лишь последнего слоя остова. Как показано выше, наличие внешнего просветления для всей пленки вытекает, действительно, из внешнего просветления последнего слоя остова, если только выполнены все условия внутреннего просветления.

§ 33. Ахроматизм просветления или антипросветления одиночного поглощающего слоя

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об ахроматизации просветления (или антипросветления) в простейшем случае, когда просветляется одиночный поглощающий слой. Здесь нам понадобятся несколько формул для основных величин, характеризующих поглощающие слои .Приведем эти формулы без вывода, так как для их получения нужно выполнить лишь элементарный расчет, исходя из известных общих выражений (см. также [14]).

Обозначим, как и в § 29, поглощающий слой, если к нему добавлена просветляющая (или антипросветляющая) пленка, индексом 1, а (анти)просветляющую пленку будем рассматривать состоящей из промежуточного слоя (индекс m), прилегающего к поглощающему слою, и остальной части, обозначаемой индексом 2. Величины, относящиеся к совокупности пленок 1 и 2, будем писать без индекса, а индексом 0 обозначим величины, относящиеся к поглощающему слою без просветляющей пленки. На рис. 30 показана схема поглощающего слоя, нане-

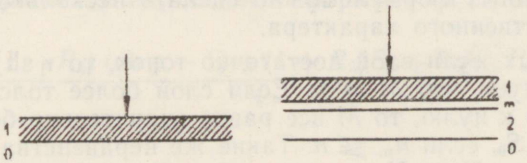

Рис. 30.

сенного прямо на подложку (индекс 0) и того же слоя, нанесенного на просветляющую прослойку.

Величина φ, как известно, зависит только от самого слоя, так что $\varphi_1 = \varphi_0 \equiv \varphi$. Величины же U_1, S_1 и σ_1 совпадают с U_0, S_0, σ_0 только тогда, если показатель преломления n_m промежуточного слоя равен показателю преломления n подложки. Прежде всего имеем (см. § 29, (8.7)):

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{\eta^2 \operatorname{ch} 2\beta + \varkappa^2 \cos 2\alpha}{\eta^2 + \varkappa^2}, \tag{8.62}$$

где $\eta - i\varkappa$ — показатель преломления поглощающего слоя, h его толщина и

$$\begin{aligned} \alpha &= k\eta h, \\ \beta &= k\varkappa h \end{aligned} \tag{8.63}$$

(индекс 1 здесь для простоты опущен).

Далее, имеют место формулы:

$$\begin{aligned} S_0 &= Mn^{-1} + Nn, \\ S_1 &= Mn_m^{-1} + Nn_m, \end{aligned} \tag{8.64}$$

где

$$M = \frac{\eta \operatorname{sh} 2\beta + \varkappa \sin 2\alpha}{2} \tag{8.65}$$

и

$$N = \frac{\eta \operatorname{sh} 2\beta - \varkappa \sin 2\alpha}{2(\eta^2 + \varkappa^2)} \tag{8.66}$$

суть величины, зависящие, как и φ, только от самого поглощающего слоя. Затем,

$$U_0 \sin\sigma_0 = U_1 \sin\sigma_1 = \frac{\eta\varkappa(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\alpha)}{\eta^2 + \varkappa^2} \tag{8.67}$$

и

$$\begin{aligned} U_0 \cos\sigma_0 &= Mn^{-1} - Nn, \\ U_1 \cos\sigma_1 &= Mn_m^{-1} - Nn_m. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Из приведенных формул можно сделать несколько важных выводов качественного характера.

Во-первых, если слой достаточно тонок, то $\eta \operatorname{sh} 2\beta \approx \varkappa \sin 2\alpha$, откуда следует, что $M \gg N$. Если слой более толст, то, хотя N и не близко к нулю, то M все равно значительно больше N. Поэтому $S_1 \gtrless S_0$, если $n_m \lessgtr n$. Такие же неравенства имеют место и для U, т. е. $U_1 \gtrless U_0$, если $n_m \lessgtr n$. Далее, из формулы (8.67)

видно, что если $n_m \lessgtr n$, то $\sigma_1 \lessgtr \sigma_0$. В любом случае σ_0 и σ_1 находятся в первой четверти. Наконец, из наших формул ясно, что чем толще слой, тем больше φ, S_0, U_0, S_1 и U_1. Что касается σ_0 и σ_1, то у сильнопоглощающих слоев эти величины тоже растут с толщиной. Более общий результат получается из формулы:

$$\operatorname{tan}\sigma_0 = \frac{\eta\varkappa(\operatorname{ch}2\beta - \cos 2\alpha)}{(\eta^2+\varkappa^2)(Mn^{-1} - Nn)} \tag{8.69}$$

(и аналогично, с заменой $n \to n_m$, для $\operatorname{tan}\sigma_1$). Отсюда имеем:

$$\frac{d\operatorname{tan}\sigma_0}{dh} = \frac{k\eta\varkappa}{(Mn^{-1} - Nn)^2}\left\{\frac{\sin 2\alpha \operatorname{sh}2\beta}{n} + \right.$$
$$+ \frac{n}{(\eta^2+\varkappa^2)^2}[(\varkappa^2-\eta^2)\sin 2\alpha \operatorname{sh}2\beta - \tag{8.70}$$
$$\left. -2\eta\varkappa(\cos 2\alpha \operatorname{ch}2\beta - 1)]\right\}.$$

Отсюда видно, что если $\varkappa$ достаточно велико, то можно пренебречь вторым членом в скобках и тогда $\frac{d\operatorname{tan}\sigma_0}{dh} < 0$ только при $\alpha > \frac{\pi}{2}$, т. е. если $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{4\eta_i}$. Но если слой сильно поглощает, то при таких толщинах он уже практически непрозрачен.

Если пренебречь дисперсией, то увеличение длины волны равносильно уменьшению толщины слоя. Следовательно, φ, S_0, U_0, S_1, U_1, и, в основном, σ_0 и σ_1 с ростом длины волны уменьшаются. Учет дисперсии может, однако, существенно изменить эту картину.

Обратимся теперь к вопросу об ахроматизации просветления одиночного поглощающего слоя. Без просветления отношение $\frac{A}{D}$, согласно формулам (5.54) и (5.55), равно:

$$\frac{A_0}{D_0} = \operatorname{ch}\varphi + S_0 - 1, \tag{8.71}$$

а в случае просветления, согласно формуле (8.2),

$$\frac{A}{D} = \frac{(1-R_2)(\operatorname{ch}\varphi - 1) + (1+R_2)S_1 + 2\sqrt{R_2}U_1\cos\xi}{1-R_2}, \tag{8.72}$$

где

$$\xi = 2\alpha_m - \mu_2 + \nu_2 + \sigma_1. \tag{8.73}$$

К этим формулам добавим еще следующую:

$$\frac{A_1}{D_1} = \operatorname{ch}\varphi + S_1 - 1. \tag{8.74}$$

Эффективность просветления можно охарактеризовать числом

$$s_0 = 1 - \frac{A/D}{A_0/D_0}, \tag{8.75}$$

так как в случае собственно просветления $0 < s_0 < 1$ (и притом, чем больше s_0, тем значительнее просветление), а в случае антипросветления (т. е. отрицательного просветления) $s_0 < 0$ (и притом, чем больше $|s_0|$, тем значительнее антипросветление). Однако, за меру просветления мы примем вместо s_0 величину

$$s = 1 - \frac{A/D}{A_1/D_1}, \tag{8.76}$$

так как использование S вместо S_0 сильно упрощает многие выкладки. Во всяком случае, в случае надобности легко перейти от s к s_0, потому что эти величины связаны линейным соотношением:

$$s_0 = \frac{S_0 - S_1}{\operatorname{ch}\varphi + S_0 - 1} + \frac{\operatorname{ch}\varphi + S_1 - 1}{\operatorname{ch}\varphi + S_0 - 1} \cdot s \approx$$
$$\approx \frac{n_m - n}{n_m} + \frac{n}{n_m} \cdot s, \tag{8.77}$$

вытекающим из (8.75) и (8.76), если учесть, что, согласно (8.64),

$$\frac{\operatorname{ch}\varphi + S_1 - 1}{\operatorname{ch}\varphi + S_0 - 1} \approx \frac{n}{n_m}$$

(при малых φ). В частном случае, когда $n_m = n$, обе величины, s и s_0, совпадают; если же $n_m \gtrless n$, то $s_0 \gtrless s$.

Подставляя в формулу (8.76) выражения $\frac{A}{D}$ и $\frac{A_1}{D_1}$ из формул (8.72) и (8.74), находим:

$$s = -\frac{2(S_1 R_2 + U_1 \sqrt{R_2} \cos\xi)}{(S_1 + \operatorname{ch}\varphi - 1)(1 - R_2)}. \tag{8.78}$$

Ахроматизм просветления означает, что s должно слабо зависеть от длины волны. Между тем, входящие в формулу (8.78) величины S_1, U_1, φ, R_2 и ξ все зависят от длины волны, и притом каждая из них по-своему. Поэтому целесообразно рассмотреть эту зависимость по частям.

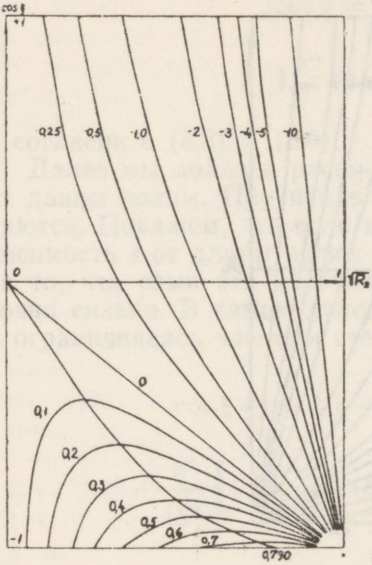

Рис. 31. К ахроматическому просветлению слоя Ag при $\lambda = 630$ nm.

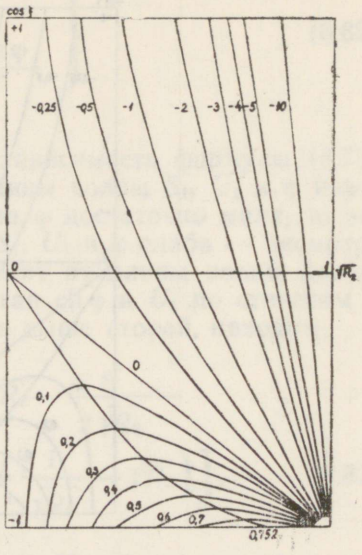

Рис. 32. К ахроматическому просветлению слоя Ag при $\lambda = 540$ nm

Сначала рассмотрим зависимость s от R_2 и ξ. Пусть, итак, в формуле (8.78) величины S_1, U_1, φ имеют определенные значения, т. е. пусть длина волны фиксирована. Тогда эта формула определяет для каждого значения s некоторую зависимость между $\sqrt{R_2}$ и $\cos\xi$:

$$\cos\xi = -\frac{S_1}{U_1}\sqrt{R_2} - \frac{(S_1 + \operatorname{ch}\varphi - 1)s}{2U_1}\left(\frac{1}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{R_2}\right). \qquad (8.79)$$

Изображая эту зависимость графически, получим семейство кривых с параметром s. На рис. 31—33 показано это семейство для пленки некоторого конкретного состава (см. ниже, стр. 164) при трех длинах волн.

Из графиков, а также из формулы (8.79) вытекают следующие характерные особенности рассматриваемой зависимости. Прямая линия

$$\cos\xi = -\frac{S_1}{U_1}\sqrt{R_2}$$

соответствует значению $s = 0$. Она делит плоскость $(\sqrt{R_2}, \cos\xi)$

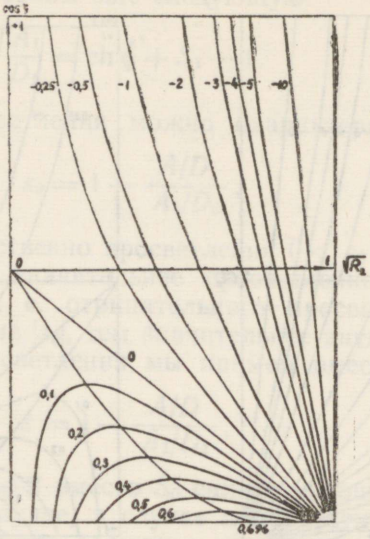

Рис 33. К ахроматическому просветлению слоя Ag при $\lambda = 450$ nm

в границах $0 \leqslant \sqrt{R_2} \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos\xi \leqslant 1$ на две неравные части. В меньшей части (внизу) $s > 0$; кривые $s = \text{const.}$ имеют здесь каждая по одному максимуму, причем все максимумы лежат на кривой

$$\cos\xi = -\frac{2S_1}{U_1\left(\sqrt{R_2} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)}. \qquad (8.80)$$

В большей (верхней) части $s < 0$, причем кривые $s = \text{const.}$ экстремумов не имеют. Далее, все кривые $s = \text{const}$, $(s \gtrless 0)$ сходятся в точку $\sqrt{R_2} = 1$, $\cos\xi = -\frac{S_1}{U_1}$, лежащую, однако, вне чертежа, так как всегда $\frac{S_1}{U_1} > 1$. Возможные значения s снизу не ограничены, а сверху ограничены, причем

$$s_{\max} = \frac{S_1 - \operatorname{sh}\varphi}{S_1 + \operatorname{ch}\varphi - 1}. \qquad (8.81)$$

Соответствующие этому максимуму значения $\cos\xi$ и $\sqrt{R_2}$ суть:

$$\left.\begin{aligned} \cos\xi &= -1, \\ \sqrt{R_2} &= \frac{S_1 - \operatorname{sh}\varphi}{U_1}, \end{aligned}\right\} \tag{8.82}$$

в согласии с (8.3) и (8.6).

Далее мы должны рассмотреть зависимость формулы (8.79) от длины волны. При изменении длины волны S_1, U_1 и φ изменяются. Покажем, что если величина φ достаточно мала, то зависимость s от длины волны через S_1, U_1 и φ слаба — несмотря на то, что сами эти величины зависят от длины волны достаточно сильно. В самом деле, разлагая $\operatorname{ch}\varphi$ и U_1 по степеням φ и ограничиваясь членами степени не выше второй, находим:

$$\cos\xi = -\left(1 - \frac{s}{2}\right)\sqrt{R_2} - \frac{s}{2\sqrt{R_2}} - \\ - \frac{\varphi^2}{4S_1^2}\left[2\sqrt{R_2} + s(S_1+1)\left(\frac{1}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{R_2}\right)\right]. \tag{8.83}$$

Чтобы оценить применимость этого приближения, заметим, что всегда имеет место неравенство

$$\frac{\operatorname{ch}\varphi - 1}{S_1} < 1 \tag{8.84}$$

(оно вытекает из того, что $\operatorname{ch}\varphi + S_1 - 1 = \dfrac{A_1}{D_1} > 0$ и из формулы $S_1^2 - \operatorname{sh}^2\varphi = U_1^2 > 0$), откуда

$$\frac{\varphi^2}{2S_1} < 1. \tag{8.85}$$

Кроме того,

$$\frac{\varphi^2}{S_1^2} < 1. \tag{8.86}$$

Легко видеть, что неучтенные в (8.83) члены разложения, содержащие φ^4, φ^6 и т. д., убывают в силу неравенств (8.85) и (8.86) достаточно быстро, особенно если $\varphi^2 \ll 1$, и даже если $\varphi^2 \lesssim 1$. Мал также, вообще говоря, и последний член в разложении (8.83) (по сравнению с первыми двумя членами правой части). Этот член тем меньше, чем лучше выполняются неравенства (8.85) и (8.86) и чем меньше φ^2.

Но так как первые два члена в правой части формулы (8.83) не зависят от S_1, U_1 и φ, то зависимость от длины волны осуществляется главным образом только через R_2 и ξ.

Неравенства (8.85) и (8.86) фактически всегда хорошо выполняются для металлического (или, вообще, поглощающего) слоя, если только он не настолько толст, что практически непрозрачен. Кроме того, для такого, не слишком толстого поглощающего слоя всегда $\varphi^2 \ll 1$ (см. формулу (8.10)). Следовательно, приближенная формула (8.83) практически всегда применима с хорошей точностью. В качестве примера на рис. 31—33 изображены семейства кривых $s = \text{const}$. при трех длинах волн (630 nm, 540 nm и 450 nm) для слоя серебра толщиной 20 nm. Показатель преломления $\eta - i\varkappa$ серебра принят равным при этих длинах волн, соответственно, 0,24—4,34i, 0,19—3,60i, 0,17—2,71i. Эти значения выведены из экспериментальных данных статьи [69] и могут считаться, по крайней мере приближенно, верными. Показатель преломления промежуточного слоя принят равным $n_m = 2{,}35$ (ZnS), так как, согласно формуле (8.77), чем больше n_m, тем больше и s_0 при данном значении s. Это значит, что в целях наиболее эффективного просветления (но не антипросветления) целесообразно выбирать n_m возможно большим. В нижеследующей таблице приведены значения S_1, U_1, σ_1 и φ такого слоя (без учета дисперсии n_m).

λ	S_1	U_1	σ_1	φ
630 nm	0,248	0,243	26°	0,051
540 nm	0,190	0,184	31°	0,046
450 nm	0,149	0,142	37°	0,044

Хотя все графики на рис. 31—33 вычислены по точной формуле (8.70), общая картина сходна при всех длинах волн. Это значит, что приближенная формула (8.83) привела бы почти к такой же картине. Близкие значения имеет и $s_{\max}$ (см. формулу (8.81)), именно, 0,790, 0,752 и 0,696. Следовательно, в первом приближении, изучая зависимость s от длины волны, можно пренебречь зависимостью S_1, U_1 и φ от длины волны. Это не значит, что в формуле (8.83) можно отбросить последний член; но для φ и S_1 можно в этом члене принять некоторые средние значения.

Таким образом, задача об ахроматичном просветлении поглощающего слоя сводится к подбору такой просветляющей пленки, которая удовлетворяла бы соотношению (8.79) при заданном значении s и при некоторых усредненных по спектру значениях S_1, U_1 и φ. Иначе говоря, просветляющая пленка должна быть такой, чтобы $\cos\xi$ и $\sqrt{R_2}$ изменялись приблизительно вдоль одной из кривых $s = \text{const}$. на графике, подобном приведенным на рис. 31—33.

Отсюда можно сделать следующие существенные выводы. Величина ξ, согласно (8.73), зависит от $2\alpha_m$, σ_1 и $\mu_2 - \nu_2$. Первая из этих величин обратно пропорциональна длине волны (если не учитывать дисперсии n_m, которая, однако, не может существенно повлиять на характер этой зависимости); вторая тоже растет с уменьшением длины волны (см. вышеприведенную таблицу, а также общие соображения по поводу формулы (8.69)). Что же касается фазы $\mu_2 - \nu_2$ амплитудного коэффициента отражения $r_2 = \sqrt{R_2} e^{i(\mu_2 - \nu_2)}$, то эта величина, как правило, уменьшается вместе с длиной волны. Это можно заключить из приближенной формулы (4.26). Во всяком случае, те участки спектра, где $\frac{d(\mu_2 - \nu_2)}{d\lambda} < 0$, малы по сравнению с теми областями, где имеет место обратная зависимость. Отсюда следует, что можно практически во всех случаях считать, что $\frac{d\xi}{d\lambda} < 0$. Приближенно можно считать ξ обратно пропорциональным длине волны. Указанное обстоятельство заметно суживает возможности положительного ахроматического просветления. В самом деле, как видно из графиков на рис. 31—33, с отклонением $\cos\xi$ от наивыгоднейшего значения — 1 s быстро убывает. Например, на рис. 31 $s_{\max} = 0{,}790$, а уже при $\cos\xi = -0{,}74$ s равно в лучшем случае 0,3. Таким образом, в интервале $138° \leqslant \xi \leqslant 222°$ мера просветления только в середине достигает максимального значения, убывая монотонно к краям вплоть до $\sim 0{,}38$ от максимального значения. Что же касается необходимой для наибольшего просветления зависимости R_2 от ξ (по формуле (8.80)), то она, вообще говоря, может быть сравнительно легко осуществлена надлежащим подбором просветляющей пленки. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе, так как он представляет собой самостоятельную задачу, решаемую своими особыми методами.

С отрицательным просветлением дело обстоит иначе. Благодаря тому, что область с $s < 0$ на графиках более чем три раза больше области с $s > 0$ и охватывает все значения $\cos\xi$ от -1 до $+1$, реализация антипросветления в широком спектральном интервале является гораздо более легким делом. Для этого следует лишь позаботиться о надлежащей зависимости между R_2 и ξ. Принципиально к этому не имеется препятствий, хотя, конечно, чем шире спектральный интервал, тем труднее выдержать требуемую зависимость. Кроме того, при очень больших значениях $|s|$, как видно из графиков, $\sqrt{R_2}$ близко к единице при всех значениях $\cos\xi$; а известно, что реализация диэлектрического зеркала в широком спектральном интервале является, вообще говоря, нелегкой задачей.

§ 34. Ахроматическое просветление или антипросветление многослойного поглощающего остова

В этом параграфе мы рассмотрим ахроматическое просветление пленки, содержащей несколько поглощающих слоев, причем под просветлением будет пониматься как внешнее, так и внутреннее просветление. Будем употреблять те же обозначения, что и в § 32.

Очевидно, что для ахроматичности просветления необходимо, чтобы ахроматичным было как внешнее, так и внутреннее просветление. Условия внутреннего просветления записаны в формулах (8.60) и (8.61), причем, как известно, если эти условия выполнены, то из них вытекают равенства (8.59), и, в частности, последнее из них:

$$\sigma_{1N} = \sigma_N. \tag{8.87}$$

Рассмотрим вопрос об ахроматизации условий (8.60) и (8.61). Так как все они имеют одинаковую форму, то достаточно взять только одну пару этих условий, например, первую:

$$\begin{aligned} &\cos(2\alpha_{12} + \sigma_1 + \sigma'_2) = 1, \\ &\Theta_1 = \Theta'_2, \end{aligned} \tag{8.88}$$

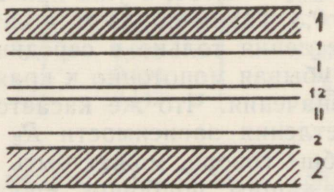

Рис. 34.

относящуюся к первым двум слоям остова и к непоглощающей прослойке между ними. На рис. 34 показана схема этой части пленки. Слои прослойки, прилегающие к слоям остова, обозначены индексами 1 и 2 (теми же, что и слои остова), а части пленки, находящиеся между слоями 1 и 12 и 12 и 2, обозначены индексами I и II.

Легко убедиться в том, что второе условие (8.88) гораздо легче поддается ахроматизации, чем первое. В частном случае, когда рассматриваемая часть пленки симметрична относительно слоя 12, это условие выполняется тождественно для всех длин волн. Но и в случае отсутствия симметрии, выполнение его достигается сравнительно легко. В этом можно убедиться, переписав это условие в виде

$$\frac{S_1}{\operatorname{sh}\varphi_1} = \frac{S'_2}{\operatorname{sh}\varphi_2}$$

и вычислив S_1 и S'_2 с помощью основных рекуррентных формул (2.13) или с помощью векторного представления. Результат таков:

$$S_1 = \frac{(1+R_{\text{I}})S_{10} + 2U_{10}\sqrt{R_{\text{I}}}\cos(2\alpha_1 + \sigma_{10} - \mu_{\text{I}} + \nu_{\text{I}})}{1-R_{\text{I}}},$$

$$S'_2 = \frac{(1+R_{\text{II}})S'_{20} + 2U'_{20}\sqrt{R_{\text{II}}}\cos(2\alpha_2 + \sigma'_{20} - \mu'_{\text{II}} + \nu'_{\text{II}})}{1-R_{\text{II}}}, \tag{8.89}$$

где индексами 10 и 20 обозначены величины, относящиеся к слоям остова. Таким образом, второе условие (8.88) получает вид:

$$\frac{(1+R_{\text{I}})S_{10} + 2U_{10}\sqrt{R_{\text{I}}}\cos(2\alpha_1 + \sigma_{10} - \mu_{\text{I}} + \nu_{\text{I}})}{(1-R_{\text{I}})\operatorname{sh}\varphi_1} =$$
$$= \frac{(1+R_{\text{II}})S'_{20} + 2U'_{20}\sqrt{R_{\text{II}}}\cos(2\alpha_2 + \sigma'_{20} - \mu'_{\text{II}} + \nu'_{\text{II}})}{(1-R_{\text{II}})\operatorname{sh}\varphi_2}. \tag{8.90}$$

Наиболее сильно зависят здесь от длины волны оба косинуса. Но так как косинусы в обеих частях равенства входят в члены, остальные множители которых в обеих частях сходны, то, ясно, что, подбирая спектральный ход R_{I} и R_{II} надлежащим образом, нетрудно — в принципе — добиться выполнения условия (8.90) в заданном участке спектра. Конечно, для этого нужно еще решить задачу синтеза прослоек I и II с требуемыми свойствами; но эта задача принципиально разрешима и решается своими особыми методами. Здесь мы ее рассматривать не будем, так как нас интересует только принципиальная сторона проблемы ахроматического просветления.

Иначе обстоит дело с первым условием (8.88) внутреннего просветления. Оно может выполняться точно только при одной длине волны, а участок спектра, в котором оно выполняется приближенно, не может быть широким. Это обусловлено тем, что все члены аргумента косинуса в (8.88) убывают с увеличением длины волны. Относительно $2\alpha_{12}$ это уже известно; чтобы показать то же для σ_1 и σ'_2, вычислим $U_1 e^{i\sigma_1}$ с помощью формул (2.13). Результат таков:

$$U_1 e^{i\eta} = \frac{(1+R_{\text{I}})U_{10}\cos\xi + 2S_{10}\sqrt{R_{\text{I}}}}{1-R_{\text{I}}} + iU_{10}\sin\xi, \tag{8.91}$$

где

$$\xi = 2\alpha_1 + \sigma_{10} - \mu_1 + \nu_1 \tag{8.92}$$

и

$$\eta = \sigma_1 - \mu_1 - \nu_1. \tag{8.93}$$

Из формулы (8.91), так как $R_1 < 1$ и $U_{10} \geqslant 0$, следует, что знаки $\sin\xi$ и $\sin\eta$ всегда совпадают, тогда как $\cos\eta > 0$, если $\cos\xi > 0$, но $\cos\eta \gtrless 0$, если $\cos\xi < 0$. Поэтому можно составить следующую табличку:

Интервал ξ	1 четверть	2 четверть	3 четверть	4 четверть
Интервал η	1 четверть	1 или 2 четверть	3 или 4 четверть	4 четверть

Отсюда видно, что в любом, не слишком малом интервале η изменяется в ту же сторону, что и ξ. Но ξ, как мы видели в предыдущем параграфе, убывает с ростом длины волны; следовательно, η тоже убывает. Далее, $\sigma_1 = \eta + \mu_1 + \nu_1$, а $\mu_1 + \nu_1$, как правило, тоже убывает с ростом длины волны (это можно заключить из формул (4.26) и (4.27)). Следовательно, то же имеет место по отношению к σ_1. Очевидно, этот вывод верен и для σ'_2. Итак, первое условие (8.88) плохо поддается ахроматизации.

Отсюда следует, что внутреннее просветление может быть ахроматично только в узком спектральном интервале. Для внешнего же просветления сохраняют силу выводы предыдущего параграфа. Если остов внутренне просветлен, хотя бы приближенно, то

$$\varphi_{1N} \approx \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N.$$

Так как φ_{1N} согласно этой формуле, может быть не мало, то приближенная формула может оказаться недостаточно точной. Однако, формула (8.79), где (см. (8.87))

$$\xi = 2\alpha_{N,N+1} + \sigma_N - \mu_{N+1} + \nu_{N+1}, \tag{8.94}$$

сохраняет свою силу. Мы можем, следовательно, построить для каждой длины волны диаграмму, подобную показанным на рис. 31—33, и общий вид этой диаграммы будет такой же. А так как ξ, по формуле (8.94), как правило, убывает с ростом длины волны, то полученный в § 33 вывод о невозможности положительного просветления в широком спектральном интервале остается в силе. Фактически возможности ахроматизации просветления оказываются еще более узкими, в силу необходимости удовлетворить условиям внутреннего просветления.

Иначе обстоит дело в случае антипросветления. Как и в слу-

чае одиночного поглощающего слоя $\frac{A}{D}$ можно сделать большим в широкой спектральной области. Уже внутреннее антипросветление может привести к значению φ_{1N}, значительно большему, чем $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N$. Если даже действие внутренних антипросветляющих прослоек недостаточно ахроматично, этот недостаток легко компенсировать применением внешнего антипросветления, для которого, как мы видели, имеются широкие возможности. В детали конкретного осуществления ахроматического антипросветления многослойного остова мы здесь, однако, входить не будем.

§ 35. Применение просветления к светофильтру типа Фабри—Перо

В предыдущих двух параграфах мы нашли, что ахроматизм положительного просветления (ниже будем называть его просто просветлением) недостижим в широком спектральном интервале. В некоторых задачах, однако, ахроматизм просветления ненужен, и даже, наоборот, является нежелательным. Примером могут служить узкополосные светофильтры. Так как здесь просветление необходимо лишь в узком спектральном интервале, то оно может оказаться действенным средством увеличения коэффициента пропускания, т. е. светосилы прибора. В нижеследующем рассмотрим с этой точки зрения светофильтр типа Фабри—Перо с поглощающими (металлическими) зеркалами.

В простейшем случае светофильтр типа Фабри—Перо состоит из двух высокоотражающих зеркальных пленок со включенным между ними промежуточным слоем. Эта система помещается между двумя стеклянными пластинками. Зеркала делаются обычно в виде полупрозрачных металлических слоев. Однако, в общем случае зеркалами являются любые пленки подходящего состава, отделяющие промежуточный слой от ограничивающих сред (стеклянных пластинок). Если зеркалами являются простые металлические слои, то, вследствие поглощения света в них, коэффициент пропускания фильтра в середине полосы пропускания значительно меньше единицы. Это является серьезным недостатком такой простейшей конструкции. Поэтому все чаще металлические зеркала начинают заменяться диэлектрическими многослойными зеркалами, в которых поглощение гораздо меньше (см., например, [70—72]). Наряду с этим представляет интерес исследовать эффект просветления металлических зеркал (см. [21]). Фактически это означает комбинированное применение в составе зеркал металлических и диэлектрических слоев.

Предположим для простоты (как это обычно и бывает на

практике), что фильтр симметричен относительно срединной плоскости, делящей пополам промежуточный слой. Введем следующие обозначения: D — коэффициент пропускания фильтра, D_{12}, A_{12}, R_{12} — коэффициенты пропускания, поглощения и отражения одного зеркала, притом в случае падения света на зеркало изнутри, т. е. из промежуточного слоя. Теми же индексами 12 будем обозначать и другие величины, относящиеся к зеркалу, причем штрихом $'$, как обычно, будем обозначать те же величины в случае падения света в обратном направлении. В частности, μ_{12} и ν_{12} означают фазы величин a_{12} и b_{12}, т. е.

$$a_{12} = \sqrt{\frac{R_{12}}{D_{12}}}\, e^{i\mu_{12}},$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{D_{12}}}\, e^{i\nu_{12}}. \tag{8.95}$$

В этих обозначениях имеет место формула:

$$\frac{1}{D} = \left(1 + \frac{A_{12}}{D_{12}}\right)^2 + \frac{4R_{12}}{D_{12}^2} \sin^2(\alpha - \mu_{12} + \nu_{12}), \tag{8.96}$$

где $\alpha = knh$ относится к промежуточному слою. Из этой формулы вытекает, что в середине полосы пропускания фильтра должно удовлетворяться условие

$$\alpha - \mu_{12} + \nu_{12} = p\pi, \quad p \text{ целое}, \tag{8.97}$$

определяющее необходимую толщину промежуточного слоя. Тогда

$$D_{\max} = \frac{1}{\left(1 + \frac{A_{12}}{D_{12}}\right)^2}. \tag{8.98}$$

Это значит, что чем меньше отношение A_{12}/D_{12}, тем больше $D_{\max}$. Кроме того, из формулы (8.96) следует, что чем больше величина $\frac{R_{12}}{D_{12}^2}$, тем уже полоса пропускания. Обоим требованиям можно удовлетворить, очевидно, лишь компромиссным образом. Чтобы увеличить $D_{\max}$, нужно уменьшить A_{12}/D_{12}, но так как коэффициент поглощения тонкого металлического слоя слабо зависит от его толщины, уменьшение A_{12}/D_{12} возможно только путем увеличения D_{12}, т. е. путем уменьшения толщины слоя; но тогда R_{12}/D_{12}^2 резко уменьшается и ширина полосы пропускания возрастает.

Отсюда вытекает, что уменьшение отношения A_{12}/D_{12}, т. е. просветление металлического зеркала при сохранении на воз-

можно высоком уровне коэффициента отражения R_{12} является весьма актуальной задачей.

Прежде чем приступить к рассмотрению свойств просветленного светофильтра с металлическими слоями, обратим внимание на следующее обстоятельство. Условие просветленности зеркал фильтра (в направлении наружу), т. е. условие минимума отношения A_{12}/D_{12} ничего, на первый взгляд, не говорит о просветленности всего фильтра как целого. Между тем, так как коэффициент пропускания всего фильтра (в середине полосы пропускания) получает (согласно формуле (8.98)) свое максимальное значение в том случае, если A_{12}/D_{12} минимально, то, очевидно, просветление зеркал должно влечь за собой и просветление — и притом как внешнее, так и внутреннее — всего фильтра. Убедимся непосредственным вычислением, что это так и есть на самом деле.

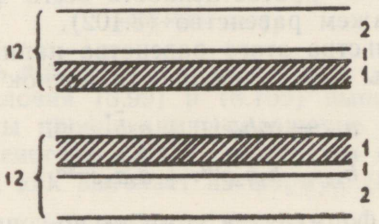

Рис. 35. Схема просветленного светофильтра типа Фабри—Перо.

На рис. 35 показана схема просветленного светофильтра. Как и выше, индексы 12 обозначают одно зеркало. Оно состоит из металлического слоя (индекс 1) и просветляющей прослойки, состоящей из слоя I, прилегающего к металлическому слою, и из остальной части 2. В середине полосы пропускания фильтра выполняется условие (8.97). Кроме того, так как слой 1 просветлен и A_{12}/D_{12} имеет минимальное значение, то должны быть выполнены условия просветления, имеющие в нашем случае следующий вид:

$$\cos(2\alpha_I + \sigma_1 - \mu_2 + \nu_2) = -1 \tag{8.99}$$

и

$$R_2 = \frac{S_1 - \operatorname{sh}\varphi_1}{S_1 + \operatorname{sh}\varphi_1}. \tag{8.100}$$

Если эти условия выполнены, то

$$\frac{A_{12}}{D_{12}} = \left(\frac{A_{12}}{D_{12}}\right)_{\min} = e^{\varphi_1} - 1. \tag{8.101}$$

Убедимся теперь, что из условий (8.97), (8.99) и (8.100) вытекает просветленность всего фильтра как целого. Для этого достаточно показать справедливость лишь одного из условий внутреннего просветления, а именно равенства

$$\cos(2\alpha + 2\sigma'_1) = 1, \tag{8.102}$$

так как другое условие внутреннего просветления выполняется автоматически просто в силу симметричности фильтра. Что же касается условий внешнего просветления, то они, как показано в § 32, эквивалентны условиям просветления второго поглощающего слоя (если, конечно, выполнены условия внутреннего просветления). Именно в таком виде они и записаны в последних равенствах формул (8.60) и (8.61). Поскольку просветленность одного слоя (в силу симметричности безразлично — первого или второго) нами предполагается, то полная — как внешняя, так и внутренняя — просветленность всего фильтра будет доказана, если докажем равенство (8.102).

Для доказательства этого равенства напишем основные рекуррентные формы для совокупности пленок 1 и 2:

$$a_{12} = a_1 b_2 e^{i\alpha_1} + a_2 \tilde{b}_1^* e^{-i\alpha_1},$$
$$b_{12} = b_1 b_2 e^{i\alpha_1} + a_2 \tilde{a}_1^* e^{-i\alpha_1}.$$

Умножая первую формулу на комплексно-сопряженную вторую, находим:

$$\frac{\sqrt{R_{12}}}{D_{12}} e^{i(\mu_{12}-\nu_{12})} = \frac{1}{D_2}[a_1 b_1^* + \tilde{a}_1 \tilde{b}_1^* R_2 +$$
$$+ (a_1 \tilde{a}_1 e^{i(2\alpha_1-\mu_2+\nu_2)} + b_1^* \tilde{b}_1^* e^{-i(2\alpha_1-\mu_2+\nu_2)})\sqrt{R_2}].$$

Подставляя сюда, согласно (8.100),

$$R_2 = \frac{S_1 - \operatorname{sh}\varphi_1}{S_1 + \operatorname{sh}\varphi_1}$$

и

$$D_2 = \frac{2\operatorname{sh}\varphi_1}{S_1 + \operatorname{sh}\varphi_1}$$

и согласно (8.99),

$$e^{i(2\alpha_1-\mu_2+\nu_2)} = -e^{-i\sigma_1},$$

находим:

$$\frac{\sqrt{R_{12}}}{D_{12}} e^{i(\mu_{12}-\nu_{12})} = \frac{1}{2\operatorname{sh}\varphi_1}[S_1(a_1 b_1^* + \tilde{a}_1 \tilde{b}_1^*) +$$
$$+ \operatorname{sh}\varphi_1(a_1 b_1^* - \tilde{a}_1 \tilde{b}_1^*) - U_1 e^{-i\sigma_1} a_1 \tilde{a}_1 - U_1 e^{i\sigma_1} b_1^* \tilde{b}_1^*].$$

Вводя сюда вместо S_1 и $U_1 e^{\pm i\sigma_1}$ выражения этих величин через a_1, b_1 и т. д., раскрывая скобки и перегруппировывая члены, находим:

$$\frac{\sqrt{R_{12}}}{D_{12}} e^{i(\mu_{12}-\nu_{12})} = \frac{e^{\Phi_1}}{2 \operatorname{sh} \varphi_1} (a_1 b_1^* - \tilde{a}_1 \tilde{b}_1^*).$$

Но так как $a'_1 = -\tilde{a}_1^*$ и $b'_1 = b_1$, то

$$\frac{\sqrt{R_{12}}}{D_{12}} e^{i(\mu_{12}-\nu_{12})} = -\frac{U'_1 e^{-i\sigma'_1} e^{\Phi_1}}{2 \operatorname{sh} \varphi_1}. \tag{8.103}$$

Отсюда сразу вытекает:

$$e^{i(\mu_{12}-\nu_{12}+\sigma'_1)} = -1. \tag{8.104}$$

Сопоставляя этот результат с формулой (8.97), находим:

$$e^{i(2\alpha+2\sigma'_1)} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Итак, если условия (8.99) и (8.100) выполнены, то фильтр в середине полосы пропускания, положение которой в спектре определяется равенством (8.97), просветлен как внешне, так и внутренне. Тогда, как вытекает из формул (8.96) и (8.101),

$$D_{\max}^{\text{просв.}} = e^{-2\Phi_1}. \tag{8.105}$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что коэффициент отражения просветленного фильтра в середине полосы пропускания равен нулю. В самом деле, так как при наличии полного — как внешнего, так и внутреннего — просветления, согласно общей теории (см. § 32),

$$\frac{A}{D} = e^{2\Phi_1} - 1,$$

то, с учетом (8.105), $A + D = 1$, т. е. $R = 0$. Этот результат есть частный случай общего свойства двусторонне просветленных пленок. См. теорему 8 § 16.

Нам остается теперь сравнить просветленный фильтр с непросветленным, чтобы определить выгоду просветления. Просветление увеличивает $D_{\max}$; но, кроме того, оно влияет и на ширину полосы пропускания. Поэтому сравним сначала значения $D_{\max}$, а затем значения ширины полосы пропускания у просветленного и непросветленного фильтров.

Коэффициент пропускания непросветленного фильтра в максимуме получим из общей формулы (8.98), если подставим A_1/D_1 вместо A_{12}/D_{12} и учтем, что $A_1/D_1 = \operatorname{ch} \varphi_1 + S_1^0 - 1$. Здесь S_1^0, вообще говоря, отлично от S_1; различие обусловлено отличием показателя преломления n_0 ограничивающей стеклянной

пластинки (являющейся подложкой для слоя I в случае отсутствия просветления) от показателя преломления n_I слоя I. Приближенно, согласно (8.64), имеет место формула:

$$n_0 S_1^0 = n_I S_1. \tag{8.106}$$

Итак, из (8.98) имеем:

$$D_{\max}^{\text{непросв.}} = \frac{1}{(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)^2}. \tag{8.107}$$

Отсюда и из формулы (8.105) вытекает:

$$\frac{D_{\max}^{\text{просв.}}}{D_{\max}^{\text{непросв.}}} = (\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)^2 e^{-2\varphi_1}. \tag{8.108}$$

Это отношение показывает, во сколько раз просветление увеличивает коэффициент пропускания фильтра.

Во-вторых, найдем влияние просветления на ширину полосы пропускания. Из формулы (8.96) вытекает следующая формула для относительной полуширины полосы пропускания:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 + \dfrac{A_{12}}{D_{12}}}{(\pi p + \mu_{12} - \nu_{12}) \cdot \dfrac{2\sqrt{R_{12}}}{D_{12}}}, \tag{8.109}$$

где p — порядок интерференции в промежуточном слое. Эта формула верна в пренебрежении дисперсией величины $\mu_{12} - \nu_{12}$. Так как нам важна здесь лишь качественная оценка и так как мы будем пренебрегать дисперсией $\mu_{12} - \nu_{12}$ в обоих случаях (т. е. без просветления и при наличии просветления), то это пренебрежение не является существенным.

Если фильтр просветлен, то, как вытекает из формулы (8.103) (или из формул (8.15)),

$$\frac{2\sqrt{R_{12}}}{D_{12}} = \frac{U'_1 e^{\varphi_1}}{\operatorname{sh}\varphi_1}; \tag{8.110}$$

следовательно,

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{просв.}} = \frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{U'_1(\pi p + \mu_{12} - \nu_{12})}. \tag{8.111}$$

Если же просветления нет, то в формуле (8.109) следует заменить $\mu_{12} - \nu_{12}$ на $\mu_1^0 - \nu_1^0$ и положить

$$1 + \frac{A_1}{D_1} = \operatorname{ch}\varphi + S_1^0;$$

вместо $\frac{2\sqrt{R_{12}}}{D_{12}}$ в формулу войдет тогда

$$\frac{2\sqrt{R_1}}{D_1} = \frac{2\sqrt{1 - D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}}{D_1}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{непросв.}} = \frac{D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}{(\pi p + \mu_1^0 - \nu_1^0)\cdot 2\sqrt{1 - D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}}. \tag{8.112}$$

Для качественной оценки можно положить

$$\pi p + \mu_{12} - \nu_{12} \approx \pi p + \mu_1^0 - \nu_1^0;$$

это равенство выполняется хорошо в особенности тогда, если p достаточно велико. Тогда

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{просв.}}}{\Delta\lambda_{\text{непросв.}}} = \frac{2\operatorname{sh}\varphi_1\sqrt{1 - D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}}{U'_1 D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}. \tag{8.113}$$

По формулам (8.111)—(8.113) можно судить о влиянии просветления на ширину полосы пропускания.

Рассмотрим, наконец, численный пример для иллюстрации теории. Показатель преломления металлических слоев примем равным $\eta - i\varkappa = 0{,}2 - 3{,}6i$ (серебро); показатель преломления промежуточного (срединного) слоя пусть равен $n = 1{,}35$; возможной малостью этого значения достигается возможное увеличение U'_1, что, по формуле (8.111), влечет за собой сужение полосы пропускания просветленного фильтра (при прочих равных условиях). Показатель преломления стеклянных пластинок сделаем равным $n_0 = 1{,}65$. Наконец, показатель преломления слоя I играет роль только при выборе прослойки 2 (чтобы удовлетворялось условие просветления (8.100)). Так как легче реализуются малые значения R_2, то S_1 должно быть возможно мало. Поэтому n_{I} должно быть возможно велико. Примем $n_{\text{I}} = 2{,}3$.

Результаты вычислений $D_{\max}^{\text{просв.}} = e^{-2\varphi_1}$ и $D_{\max}^{\text{непросв.}} \equiv D$ приведены в виде графиков на рис. 36 в зависимости от толщины h_1 металлических слоев. На рис. 37 даны графики величин $\frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{U'_1}$ и

$$\frac{D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}{2\sqrt{1 - D_1(\operatorname{ch}\varphi_1 + S_1^0)}} \equiv \sqrt{\Delta},$$

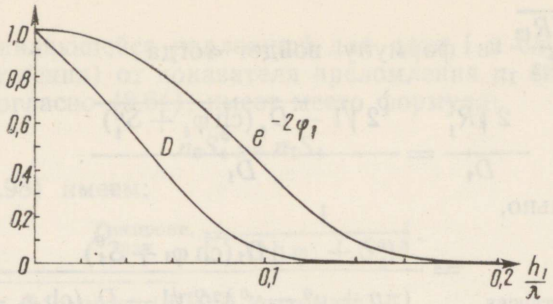

Рис. 36.

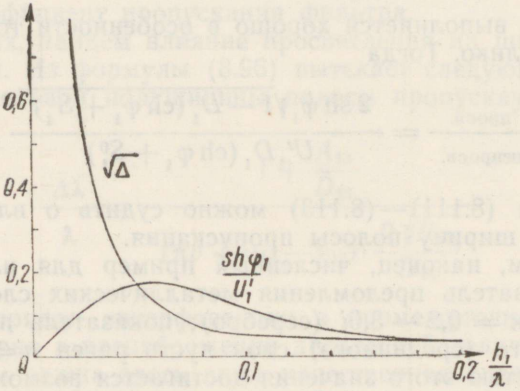

Рис. 37.

пропорциональных, согласно (8.111) и (8.112), ширине полосы пропускания просветленного и непросветленного фильтров. Из этих результатов можно сделать, прежде всего, следующие выводы:

1) Если $\frac{h_1}{\lambda} \leqslant 0{,}0489$, то просветление дает выигрыш в интенсивности и в то же время сужает полосу пропускания. Наибольший выигрыш интенсивности (в 1,75 раз) имеет место при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}0489$; в этом случае $D_{\max}^{\text{просв.}} = 0{,}843$ и $D_{\max}^{\text{непросв.}} = 0{,}482$, а ширина полосы пропускания не изменяется (напомним, что

оценка ширины полосы пропускания у нас приближенна). Если же $\frac{h_1}{\lambda} < 0{,}0489$, то выигрыш интенсивности меньше, но зато имеется выигрыш в ширине полосы пропускания.

2) Если $\frac{h_1}{\lambda} > 0{,}0489$, то просветление дает выигрыш в интенсивности, но ширина полосы пропускания несколько увеличивается. Увеличение ширины полосы пропускания оказывается наибольшим при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}094$, именно, в 2,36 раза. Выигрыш же в интенсивности растет с $\frac{h_1}{\lambda}$ монотонно. При $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}094$ он равен $0{,}457 : 0{,}067 = 6{,}8$.

В связи с приведенными данными может возникнуть следующий вопрос. Если при $\frac{h_1}{\lambda} > 0{,}0489$ ширина полосы пропускания в результате просветления увеличивается, то нельзя ли сделать непросветленный фильтр с такой же (увеличенной) шириной полосы пропускания и с таким же коэффициентом пропускания, взяв для этого более тонкие металлические слои. Если бы это было возможно, то, очевидно, просветление при $\frac{h_1}{\lambda} > 0{,}0489$ было бы бесполезно. Но на самом деле это не так. Если мы путем уменьшения толщины металлических слоев сделаем непросветленный фильтр с такой же шириной полосы пропускания, то, если только толщина h_1 не слишком велика, его коэффициент пропускания будет все же несколько меньше, чем у просветленного фильтра. Например, пусть $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}094$. Тогда $\frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{U'_1} = 0{,}125$. То же значение 0,125 $\sqrt{\Delta}$ имеет при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}0569$. Но при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}094$ $D_{\max}^{\text{просв.}} = 0{,}457$, а при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}0569$ $D_{\max}^{\text{непросв.}} = 0{,}387$. Следовательно, остается выигрыш в интенсивности, равный $0{,}457 : 0{,}387 = 1{,}18$.

Приведем небольшую таблицу, показывающую зависимость эффективности просветления в этом смысле. Очевидно, этот способ оценки эффективности просветления применим не только при $\frac{h_1}{\lambda} > 0{,}0489$, но и при $\frac{h_1}{\lambda} < 0{,}0489$.

$\frac{h_1}{\lambda}$	$\frac{h'_1}{\lambda}$	$\frac{D_{max}^{просв.}(h_1/\lambda)}{D_{max}^{непросв.}(h'_1/\lambda)}$	$D_{max}^{просв.}(h_1/\lambda)$	$D_{max}^{непросв.}\left(\frac{h'_1}{\lambda}\right)$
0,02	0,0669	3,56	0,974	0,274
0,03	0,0560	2,37	0,941	0,397
0,04	0,0510	1,96	0,895	0,458
0,05	0,0487	1,73	0,836	0,484
0,06	0,0484	1,57	0,766	0,488
0,07	0,0496	1,44	0,684	0,474
0,08	0,0519	1,33	0,593	0,446
0,09	0,0553	1,22	0,497	0,406
0,10	0,0595	1,12	0,399	0,356
0,11	0,0645	1,02	0,305	0,299
0,12	0,0703	0,92	0,219	0,238

В этой таблице h'_1/λ зависит от h_1/λ, как описано выше, согласно формуле:

$$\sqrt{\Delta}\left(\frac{h'_1}{\lambda}\right) = \frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{U'_1}\left(\frac{h_1}{\lambda}\right).$$

Из таблицы видно, что наилучший эффект просветление дает при малых толщинах металлических слоев *. Эффективность просветления уменьшается с ростом толщины и при $\frac{h_1}{\lambda} = 0{,}11$ вообще исчезает. Однако, при столь большой толщине коэффициент пропускания падает до $\sim 0{,}3$, так что подобный фильтр вообще мало пригоден.

Чтобы завершить исследование просветления светофильтра типа Фабри—Перо, нам следует рассмотреть еще один вопрос. Для просветления необходима непоглощающая прослойка $I + 2$ (см. рис. 35), причем должно выполняться условие просветления (8.100). Так как, вообще говоря, требуемое значение R_2 оказывается по этому условию довольно большим, то может возникнуть вопрос: нельзя ли в качестве зеркала взять только диэлектрическую прослойку с таким же коэффициентом отражения. Тогда мы имели бы чисто диэлектрический фильтр, коэффициент пропускания которого был бы равен (по крайней мере теоретически) единице, и, может быть, ширина полосы пропускания его тоже была бы достаточно мала.

Однако, это не так. Ширина полосы пропускания такого

* Конечно, здесь нужно иметь в виду, что при очень малых толщинах начинают сильно сказываться неоднородности в структуре слоев, так что наша теория становится вообще в таком виде неприменимой.

фильтра была бы значительно больше *. В самом деле, ширину полосы пропускания чисто диэлектрического фильтра мы получим из общей формулы (8.109), заменив в ней $R_{12} \to R_2$, $D_{12} \to D_2$ и $A_{12} \to 0$, а также $\mu_{12} \to \mu_2$ и $\nu_{12} \to \nu_2$. Сделав это, получим (с учетом (8.100)):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\operatorname{sh}\varphi_1}{U_1(\pi p + \mu_2 - \nu_2)}. \qquad (8.114)$$

Здесь U_1 зависит от показателя преломления n_I слоя I. Чтобы R_2 было возможно мало, следует сделать n_I возможно большим (в нашем примере выше мы положили $n_I = 2{,}3$). Но тогда U_1 будет мало, а $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ в формуле (8.114) велико. Сравнивая эту формулу с формулой (8.111), видим, что ширина полосы пропускания чисто диэлектрического фильтра больше, чем у просветленного металлодиэлектрического, в $\frac{U'_1}{U_1}$ раз. Грубо приближенно (см. формулы (8.64)—(8.68)) можно считать его отношение равным $\frac{n_I}{n}$. Следовательно, чисто диэлектрический фильтр имеет более широкую полосу пропускания.

Конечно, это не значит, что металлодиэлектрический фильтр лучше чисто диэлектрического. Последний имеет более высокий коэффициент пропускания, а если увеличить коэффициент отражения диэлектрических зеркал, то и полоса пропускания его станет гораздо уже. Тем не менее, из вышеизложенных соображений может быть сделан вывод, что оба типа фильтров имеют свои преимущества и оба заслуживают дальнейшего изучения с целью более точного определения их свойств. Тогда может оказаться, что в зависимости от конкретных условий более выгодным явится тот или другой тип. В частности, мы не затрагивали здесь вопроса о влиянии дисперсии фазовых сдвигов на характеристики фильтров. Мы не рассматривали также вообще вопроса о контрастности фильтра. Возможно, что металлодиэлектрический фильтр имеет в этом отношении преимущества по сравнению с диэлектрическим, так как быстрое ухудшение условий просветления при изменении длины волны должно привести к падению прозрачности. Однако, этих вопросов мы касаться не будем, так как нас интересовал здесь только вопрос о принципиальных возможностях просветления. Все остальные связанные с конструированием светофильтров, заслуживают всестороннего рассмотрения в другом месте.

---

* Подчеркнем еще раз, что это заключение не является окончательным, так как мы не учитываем дисперсии фазовых сдвигов μ и ν; однако, нижеследующие соображения являются несомненно полезными и при более детальном изучении этого вопроса.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

СВЕТОФИЛЬТРЫ С НАРУШЕННЫМ ПОЛНЫМ ОТРАЖЕНИЕМ

§ 36. Основные формулы

Основным элементом в любой конструкции узкополосного интерференционного светофильтра являются сильноотражающие зеркала, число которых должно быть не меньше двух. В качестве зеркал используются или простые полупрозрачные металлические слои, или диэлектрические многослойные зеркала. Возможно также, как показано в конце предыдущей главы, применение комбинированных металлодиэлектрических просветленных зеркал.

Особым типом узкополосных светофильтров являются светофильтры, в которых используется нарушенное полное отражение. Зеркалами в таких фильтрах служат тонкие диэлектрические слои, в которых выполнено условие полного отражения, т. е. $n < n_0 \sin \vartheta_0$. Ясно, что, в отличие от светофильтров прочих типов, угол падения должен быть здесь обязательно отличен от нуля. Поэтому ограничивающие среды в таком фильтре оформляются в виде двух стеклянных призм, между которыми нахо-

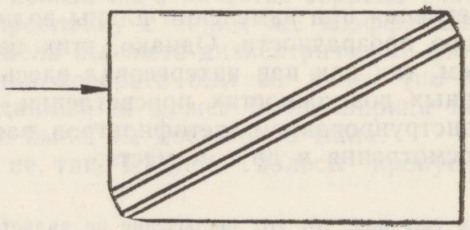

Рис. 38. Схема светофильтра с нарушенным полным отражением.

дится пленка (см. рис. 38). В простейшем случае пленка состоит из трех слоев. Крайние из них являются зеркалами, на которых происходит нарушенное полное отражение.

Впервые светофильтр с нарушенным полным отражением был предложен, по-видимому, в работе [73]. Данные о фильтрах этого типа можно найти также в работах [48] и [74—77]. Обзор см. в книге Г. В. Розенберга ([26], стр. 519—526).

Поскольку все слои в светофильтре с нарушенным полным отражением являются диэлектрическими, то, по крайней мере теоретически, коэффициент пропускания фильтра в максимуме должен быть равен единице. Формулу (8.96) можно для такого фильтра переписать в виде (напомним, что фильтр мы считаем симметричным):

$$\frac{1}{D} = 1 + \frac{4R_1}{D_1^2} \sin^2(\alpha - \mu_1 + \nu_1), \tag{9.1}$$

где индекс 1 относится к одному зеркалу, т. е. в простейшем случае к одному полноотражающему слою *, и притом в случае, когда свет падает на него изнутри, т. е. из промежуточного слоя. Очевидно, полоса пропускания будет тем уже, чем больше коэффициент отражения R_1 и чем меньше коэффициент пропускания $D_1 = 1 - R_1$. Это значит, что чем толще полноотражающие слои, тем уже полоса пропускания.

Отсюда вытекает кажущаяся весьма заманчивой теоретическая возможность получения светофильтра со сколь угодно узкой полосой пропускания при сохранении коэффициента пропускания равным (или, по крайней мере, близким) единице. Практика не оправдала, однако, этих надежд. Оказалось, что коэффициент пропускания получается действительно довольно высоким и близким к единице, но только тогда, если полноотражающие слои не слишком толсты. При дальнейшем увеличении толщины этих слоев ширина полосы пропускания перестает уменьшаться, а коэффициент пропускания резко падает, приближаясь к нулю. Фильтр становится, таким образом, почти совсем непрозрачным. Причина этого явления искалась раньше в неоднородностях толщин слоев. Лишь недавно Л. В. Иогансен в ряде работ [78—83] показал, что основная причина имеет совсем иной характер. Мы имеем дело здесь со своеобразным краевым эффектом, резко ограничивающим пропускание при увеличении толщины полноотражающих слоев выше некоторого предела. Этот эффект имеет принципиальный характер, так что его нельзя устранить никаким усовершенствованием технологии изготовления слоев.

---

* Здесь и в дальнейшем мы называем слой полноотражающим, подразумевая под этим выполнение условия $n_1 < n_0 \sin \vartheta_0$, хотя на самом деле отражение на слое полным не является.

Тем не менее, светофильтры на основе полного отражения имеют немалый практический интерес, так как они могут дать для многих применений достаточно узкие полосы пропускания. В нижеследующем мы будем, предполагая толщину полноотражающих слоев не слишком большой, пренебрегать краевыми эффектами, исследованными Л. В. Иогансеном. Будем также пренебрегать поглощением, вследствие его малости. Тогда $R + D = 1$, и формулу (9.1) можно переписать в виде:

$$\frac{R}{D} = \frac{4R_1}{D_1^2} \sin^2(\alpha - \mu_1 + \nu_1). \qquad (9.2)$$

Независимо от сделанных только что упрощающих предположений фильтр с полным отражением имеет еще один существенный недостаток. Он состоит в том, что коэффициент пропускания зависит от поляризации падающего света. Эта особенность присуща всем вообще интерференционным системам, в которых угол падения отличен от нуля. Величины R_1, D_1, μ_1 и ν_1 в формуле (9.2) зависят от поляризации, и поэтому максимум пропускания фильтра приходится для двух поляризаций на разные длины волн. В результате этого фильтр имеет в спектре вместо одной полосы пропускания две, каждая из которых имеет лишь половинную интенсивность; в одной из них свет поляризован параллельно плоскости падения, а в другой — перпендикулярно плоскости падения. Это явление, называемое дублетной структурой полосы пропускания, очевидно, нежелательно, так как уменьшает вдвое светосилу фильтра, и, кроме того, требует применения анализатора или другого фильтра для подавления ненужной компоненты.

Устранение дублетной структуры полосы пропускания, т. е. сведение обеих компонент в одну полосу, возможно или с помощью анизотропных слоев [77], или путем применения, вместо трехслойной пленки с двумя полноотражающими слоями, более сложной системы слоев, содержащей два или больше полноотражающих слоев. Этот последний метод был обоснован теоретически автором настоящей монографии (см. [4, 5, 8]). В настоящей главе мы изложим эту теорию. Представляется вероятным, что этот способ легче осуществить на практике, чем первый, так как он не требует применения анизотропных слоев.

В нижеследующем будем предполагать для простоты, что срединный промежуточный слой фильтра имеет такой же показатель преломления n, как и ограничивающие призмы. Это условие в принципе легко выполнимо на практике. Оно делает полноотражающий слой в простейшем случае трехслойного фильтра симметричным. Напишем несколько важнейших формул, относящихся к трехслойному фильтру (обладающему, как пояснено выше, дублетной структурой).

Обозначив амплитудный коэффициент отражения на границе призма/полноотражающий слой через $e^{i\rho}$ (ρ — сдвиг фазы при полном отражении), будем иметь амплитудный коэффициент пропускания равным

$$e^{i\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\rho}$$

(см. формулы (1.13) и (1.14)). Отсюда по формулам Власова (2.6) легко находим:

$$a_1 = \frac{i\,\mathrm{sh}\,\gamma}{\sin\rho}, \tag{9.3}$$

$$b_1 = \mathrm{ch}\,\gamma + i\,\mathrm{ctg}\,\rho\,\mathrm{sh}\,\gamma, \tag{9.4}$$

где

$$\gamma = kh_1\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2} \tag{9.5}$$

(напомним, что индекс 1 относится к полноотражающему слою, n означает показатель преломления призм и срединного слоя, а ϑ — угол падения). Формулы (9.3) и (9.4) можно переписать в виде:

$$a_1 = \frac{\mathrm{sh}\,\gamma}{\sin\rho}e^{i\mu_1}, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} \tag{9.6}$$

и

$$b_1 = \frac{\mathrm{ch}\,\gamma}{\cos\nu_1}e^{i\nu_1}, \tag{9.7}$$

где

$$\tan\nu_1 = \mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{ctg}\,\rho, \quad -\frac{\pi}{2} < \nu_1 < \frac{\pi}{2}. \tag{9.8}$$

Теперь из формул (9.6) и (9.7) вытекает:

$$\frac{R_1}{D_1^2} = \frac{\mathrm{sh}^2 2\gamma}{4\sin^2\rho\cos^2\nu_1}. \tag{9.9}$$

Следовательно, подставляя в (9.2), имеем:

$$\frac{R}{D} = \frac{\mathrm{sh}^2 2\gamma\cos^2(\alpha+\nu_1)}{\sin^2\rho\cos^2\nu_1}. \tag{9.10}$$

Наличие дублетной структуры полосы пропускания вытекает из того обстоятельства, что ρ, а, следовательно, и ν_1 зависят от поляризации.

Существует несколько способов устранения дублетной структуры без применения анизотропных слоев. Сначала мы рассмотрим тот из них, где число полноотражающих слоев остается равным двум.

§ 37. Влияние пленок на сдвиг фазы при полном отражении

Результаты этого параграфа найдут себе применение для синтеза светофильтра с двумя полноотражающими слоями, не имеющего дублетной структуры полосы пропускания.

Задача состоит в том, чтобы сделать фазовый сдвиг при полном отражении одинаковым для обеих поляризаций. Отметим, что здесь идет речь о ненарушенном полном отражении. Сделать фазовый сдвиг при полном отражении одинаковым для обеих поляризаций, как впервые показал Лости [84, 85], можно путем помещения на границе, где происходит полное отражение, промежуточного слоя, на котором полное отражение не имеет места. Мы изложим здесь теорию Лости в более простом и более общем виде, как она была опубликована в статье автора [9].

Обозначим коэффициент отражения на границе двух сред через

$$r = e^{i\varrho}, \tag{9.11}$$

где ϱ зависит от поляризации согласно формулам (1.13):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\varrho_{\parallel}}{2} &= \frac{\operatorname{sh} 2\beta}{\sin 2\vartheta_0}, \\ \operatorname{tg}\frac{\varrho_{\perp}}{2} &= \operatorname{th}\beta \operatorname{tg}\vartheta_0 \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

и

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{n_0 \sin\vartheta_0}{n}. \tag{9.13}$$

Здесь индекс 0 относится к первой среде, а вторая среда индекса не имеет.

Пусть теперь между обеими средами помещена одно- или многослойная пленка. Примем, что ни в одном слое этой пленки не выполняется условие полного отражения. Очевидно, отражение остается полным после введения пленки; но амплитудный коэффициент отражения, вообще говоря, изменяется. Вычисление изменившегося сдвига фазы целесообразно вести на основе формулы Власова (2.5) для отражения, преобразовав ее к такому виду, где сдвиг фазы фигурирует явно, как непосредственно вычисляемая величина.

Перенумеровав слои пленки в направлении падения света, как обычно, индексами 1, 2, ... N, напишем формулу (2.5) в виде:

$$e^{i\varrho_{m-1}} = \frac{r_{m-1,m} + e^{i(\varrho_m - 2\alpha_m)}}{1 + r_{m-1,m} e^{i(\varrho_m - 2\alpha_m)}} \tag{9.14}$$

(здесь для краткости опущен второй индекс $N+1$ у ϱ_{m-1} и ϱ_m). Отсюда

$$\frac{1-e^{i\varrho_{m-1}}}{1+e^{i\varrho_{m-1}}}=\frac{1-r_{m-1,m}}{1+r_{m-1,m}}\cdot\frac{1-e^{i(\varrho_m-2\alpha_m)}}{1+e^{i(\varrho_m-2\alpha_m)}}. \tag{9.15}$$

Первый множитель правой части обозначим через $y_{m-1,m}$, так что, согласно формулам (1.20) и (2.15),

$$y_{m-1,m}=e^{-2v_{m-1,m}}, \tag{9.16}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} y^{\parallel}_{m-1,m}&=\frac{\sin 2\vartheta_m}{\sin 2\vartheta_{m-1}},\\ y^{\perp}_{m-1,m}&=\frac{\tan\vartheta_{m-1}}{\tan\vartheta_m}. \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

Тогда формула (9.15) примет вид:

$$\tan\frac{\varrho_{m-1}}{2}=y_{m-1,m}\tan\left(\frac{\varrho_m}{2}-\alpha_m\right). \tag{9.18}$$

Это и есть преобразованная рекуррентная формула. Вычисляя по ней последовательно ϱ_{N-1}, ϱ_{N-2}, ..., получим наконец ϱ_0, что и является искомым сдвигом фазы при отражении на данной пленке.

Для теории светофильтров нам будет нужен лишь простейший случай, когда пленка однослойна. Потребуем, чтобы

$$\varrho^{\parallel}_0=\varrho^{\perp}_0. \tag{9.19}$$

Это условие удовлетворяется тогда и только тогда, если

$$y^{\parallel}_{01}\tan\left(\frac{\varrho^{\parallel}_1}{2}-\alpha_1\right)=y^{\perp}_{01}\tan\left(\frac{\varrho^{\perp}_1}{2}-\alpha_1\right). \tag{9.20}$$

Подставляя сюда вместо $y^{\parallel}_{01}$ и $y^{\perp}_{01}$ выражения из формул (9.17), находим:

$$\begin{aligned} &\left(n_1^2\tan\frac{\varrho^{\parallel}_1}{2}-n_0^2\tan\frac{\varrho^{\perp}_1}{2}\right)\tan^2\alpha_1-\\ &-(n_0^2-n_1^2)\left(1-\tan\frac{\varrho^{\parallel}_1}{2}\tan\frac{\varrho^{\perp}_1}{2}\right)\tan\alpha_1+\\ &+\left(n_0^2\tan\frac{\varrho^{\parallel}_1}{2}-n_1^2\tan\frac{\varrho^{\perp}_1}{2}\right)=0. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Так как $\tan\alpha_1$ должно быть вещественно, то условие (9.19) выполнимо тогда и только тогда, если

$$(n_0^2-n_1^2)^2\left(1-\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}}{2}\tan\frac{\varrho_1^{\perp}}{2}\right)^2-$$

$$-4\left(n_1^2\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}}{2}-n_0^2\tan\frac{\varrho_1^{\perp}}{2}\right)\left(n_0^2\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}}{2}-n_1^2\tan\frac{\varrho_1^{\perp}}{2}\right)\geqslant 0.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}-\varrho_1^{\perp}}{2}\leqslant\frac{|n_0-n_1|}{2n_0n_1}. \tag{9.22}$$

Здесь

$$\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}-\varrho_1^{\perp}}{2}=\frac{\cos\vartheta_1\sqrt{n_0^2\sin^2\vartheta_0-n^2}}{n_1\sin^2\vartheta_1}. \tag{9.23}$$

При любых значениях n_0, n, n_1 и ϑ_0, удовлетворяющих неравенству (9.22), можно найти из уравнения (9.21) такие два значения α_1, при которых имеет место равенство (9.19).

Наиболее простое решение получается тогда, если один из корней уравнения (9.21) обращается в бесконечность, т. е. если

$$\alpha_1=\frac{\pi}{2}. \tag{9.23}$$

Тогда

$$n_1^2\tan\frac{\varrho_1^{\parallel}}{2}=n_0^2\tan\frac{\varrho_1^{\perp}}{2},$$

как вытекает из (9.21) или непосредственно из (9.20) с учетом (9.17). Отсюда

$$n_1=\sqrt{nn_0}. \tag{9.25}$$

Неравенство (9.22) при этом выборе толщины и показателя преломления слоя приводится к виду:

$$[n_0(n+n_0)\sin^2\vartheta_0-2n^2]^2\geqslant 0, \tag{9.26}$$

откуда видно, что если

$$\sin^2\vartheta_0=\frac{2n^2}{n_0(n+n_0)}, \tag{9.27}$$

то корень $\alpha_1=\dfrac{\pi}{2}$ является двойным. Вообще же выбор угла

падения остается произвольным; он должен только удовлетворять условию полного отражения

$$\sin \vartheta_0 > \frac{n}{n_0} \tag{9.28}$$

и требованию

$$\sin \vartheta_0 < \sqrt{\frac{n}{n_0}}, \tag{9.29}$$

которое гарантирует невыполнение условия полного отражения в слое. Легко убедиться, что выбор (9.27) удовлетворяет обоим этим требованиям.

Из вышеизложенного ясно, что одного слоя достаточно для существенного изменения фазового сдвига при полном отражении (см. также [84, 85]). Еще больше возможностей предоставляет для этого многослойная пленка. Однако, в интересах теории интерференционных светофильтров однослойная пленка является вполне достаточной.

§ 38. Интерференционный светофильтр с нарушенным полным отражением и без дублетной структуры полосы пропускания

Результаты предыдущего параграфа могут найти непосредственное применение для устранения дублетной структуры полосы пропускания светофильтра с нарушенным полным отражением. В самом деле, фазовый сдвиг при полном отражении может быть сделан одинаковым для обеих поляризаций путем введения на границе, где происходит полное отражение, надлежащим образом подобранного слоя. Назовем этот слой корректирующим. Чтобы сделать полосу пропускания светофильтра, содержащего два полноотражающих слоя, независимой от поляризации, нужно ввести в него четыре корректирующих слоя — по одному с обеих сторон каждого из двух полноотражающих слоев. Такой корректированный светофильтр будет, следовательно, содержать семь слоев. Если обозначим по-прежнему показатель преломления ограничивающих призм и центрального промежуточного слоя через n, показатель преломления полноотражающих слоев через n_1, а для показателей преломления корректирующих слоев примем обозначение n_k, то схема фильтра будет иметь вид $(nn_kn_1n_kn n_kn_1n_kn)$. Соответствующий рисунок дан под рис. 39.

Каждое из двух зеркал корректированного фильтра состоит из трех слоев; обозначим такое трехслойное зеркало индексом 3. Тогда, учитывая также симметричность зеркал, следует формулу (9.2) переписать в виде

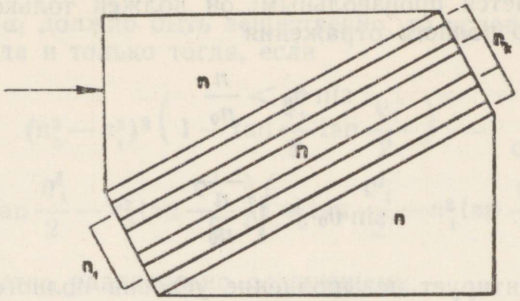

Рис. 39. Схема светофильтра с корректирующими слоями.

$$\frac{R}{D} = \frac{4R_3}{D_3^2}\cos^2(\alpha + \nu_3). \tag{9.30}$$

Чтобы найти $\frac{R_3}{D_3^2}$ и ν_3, нужно вычислить a_3 и b_3. С помощью основной формулы (2.19) находим:

$$a_3 = \frac{i}{\sin \varrho_k}(\operatorname{ch} 2v \operatorname{sh}\gamma + \operatorname{sh} 2v \operatorname{sh}\gamma \cos 2\alpha_k \cos \varrho_k + \\ + \operatorname{sh} 2v \operatorname{ch}\gamma \sin 2\alpha_k \sin \varrho_k) \tag{9.31}$$

и

$$b_3 = \frac{1}{\sin \varrho_k}[\operatorname{ch}\gamma \cos 2\alpha_k \sin \varrho_k - \operatorname{sh}\gamma \sin 2\alpha_k \cos \varrho_k + \\ + i(\operatorname{sh} 2v \operatorname{sh}\gamma + \operatorname{ch} 2v \operatorname{sh}\gamma \cos 2\alpha_k \cos \varrho_k + \operatorname{ch} 2v \operatorname{ch}\gamma \sin 2\alpha_k \sin \varrho_k)]. \tag{9.32}$$

Здесь γ означает величину из формулы (9.5), ϱ_k есть сдвиг фазы при полном отражении из корректирующего слоя на полноотражающем слое, а v определено согласно формулам (1.21) на границе исходной среды и корректирующего слоя. Кроме того,

$$\alpha_k = kn_k h_k \cos \vartheta_k. \tag{9.33}$$

Как мы видели в предыдущем параграфе, наиболее простое решение, уравнивающее сдвиги фаз для обеих поляризаций, получается при $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$. Поэтому положим и здесь

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда формулы (9.31) и (9.32) принимают вид:

$$a_3 = \frac{i \operatorname{sh}\gamma}{\sin \varrho_k}(\operatorname{ch} 2v - \operatorname{sh} 2v \cos \varrho_k) \tag{9.34}$$

и

$$b_3 = \frac{i \operatorname{sh} \gamma}{\sin \varrho_k} (\operatorname{sh} 2v - \operatorname{ch} 2v \cos \varrho_k) - \operatorname{ch} \gamma. \tag{9.35}$$

Отсюда находим прежде всего ν_3:

$$\tan \nu_3 = -\frac{\operatorname{th} \gamma}{\sin \varrho_k} (\operatorname{sh} 2v - \operatorname{ch} 2v \cos \varrho_k), \tag{9.36}$$

$$\frac{\pi}{2} < \nu_3 < \frac{3\pi}{2}.$$

Для упрощения этой формулы положим:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varrho}{2} = -e^{2v} \tan \frac{\varrho_k}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} < \frac{\varrho}{2} < \pi, \tag{9.37}$$

где, согласно формулам (9.16) и (9.18), ϱ есть не что иное, как измененный, благодаря корректирующему слою, сдвиг фазы при полном (не нарушенном) отражении, имеющем место при падении луча из среды с показателем преломления n на среду с показателем преломления n_1. Из (9.37) следует:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} 2v - \operatorname{sh} 2v \cos \varrho_k &= -\frac{\sin \varrho_k}{\sin \varrho}, \\ \operatorname{sh} 2v - \operatorname{ch} 2v \cos \varrho_k &= -\sin \varrho_k \operatorname{ctg} \varrho. \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

Следовательно, формула (9.36) принимает вид:

$$\tan \nu_3 = \operatorname{th} \gamma \operatorname{ctg} \varrho, \qquad \frac{\pi}{2} < \nu_3 < \frac{3\pi}{2}, \tag{9.39}$$

а формулы (9.34) и (9.35) превращаются в следующие:

$$a_3 = -\frac{i \sin \gamma}{\sin \varrho} \tag{9.40}$$

и

$$b_3 = -\operatorname{ch} \gamma - i \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ctg} \varrho = -\frac{\operatorname{ch} \gamma}{\cos \nu_3} \cdot e^{i\nu_3}. \tag{9.41}$$

Из этих формул сразу имеем:

$$\frac{R_3}{D_3^2} = |a_3 b_3|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 2\gamma}{4 \sin^2 \varrho \cos^2 \nu_3}. \tag{9.42}$$

Подставляя это выражение в формулу (9.30), находим:

$$\frac{R}{D} = \frac{\operatorname{sh}^2 2\gamma \cos^2 (\alpha + \nu_3)}{\sin^2 \varrho \cos^2 \nu_3} \tag{9.43}$$

Сравнивая полученный результат с формулой (9.10), видим, что обе формулы имеют совершенно одинаковый вид. Разница состоит только в том, что фаза ν_1 заменилась на ν_3; кроме того, ϱ означает теперь корректированный сдвиг фазы при полном отражении. Соотношение (9.39) между ν_3 и корректированным ϱ в точности совпадает с соотношением (9.8) между ν_1 и некорректированным ϱ (не считая различия в том, что ν_1 может находиться в первой или четвертой, а ν_3 во второй или третьей четверти). Формулы (9.40) и (9.41) также вполне аналогичны формулам (9.6) и (9.7).

Остается сформулировать последнее условие отсутствия дублетной структуры. Для отсутствия дублетной структуры необходимо лишь, чтобы ϱ (и, в силу этого, также ν_3) было одинаковым для обеих поляризаций. Но условием для этого является равенство

$$n_k = \sqrt{nn_1}, \tag{9.44}$$

как вытекает из формулы (9.37) и как было найдено уже в предыдущем параграфе (в других обозначениях). Если это условие выполнено, то формула (9.37) получает вид:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varrho}{2} = -\frac{\cos\vartheta\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}{n_1 - n\sin^2\vartheta}, \tag{9.45}$$

откуда

$$\sin\frac{\varrho}{2} = \frac{n_1 - n\sin^2\vartheta}{(n - n_1)\sin\vartheta}. \tag{9.46}$$

Числитель этого выражения равен $n_1\cos^2\vartheta_k$. Поэтому, если ϑ_k близко к 90°, то $\frac{\varrho}{2}$ близко к 180° и ϱ близко к нулю. Этот случай важен в том отношении, что, согласно формуле (9.43), чем меньше $\sin\varrho$, тем уже полоса пропускания. Некоторое значение имеет тот частный случай, когда решение $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ является двойным (см. 9.27)). В наших теперешних обозначениях это имеет место при

$$\sin^2\vartheta = \frac{2n_1^2}{n(n + n_1)}. \tag{9.47}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\cos\varrho &= \frac{n_1}{n + n_1},\\ \sin\varrho &= -\frac{\sqrt{n(n + 2n_1)}}{n + n_1}.\end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

В следующем параграфе рассмотрим основные характеристики светофильтра описанной конструкции.

§ 39. Основные характеристики корректированного светофильтра с нарушенным полным отражением

В этом параграфе мы продолжим рассмотрение описанного в предыдущем параграфе светофильтра с нарушенным полным отражением, дублетная структура полосы пропускания которого устранена путем введения корректирующих слоев. Рассмотрим следующие вопросы. Найдем, во-первых, ширину полосы пропускания и ее контрастность, а также рассмотрим зависимость этих характеристик от поляризации; во-вторых, исследуем влияние небольших изменений угла падения на полосу пропускания. Последний вопрос важен в том отношении, что чем менее чувствителен фильтр к этим изменениям, тем более он пригоден для широкоугольных пучков.

Найдем прежде всего полуширину полосы пропускания. Исходим из формулы (9.43):

$$\frac{R}{D} = \frac{\operatorname{sh}^2 2\gamma \cos^2(\alpha + \nu_3)}{\sin^2 \varrho \cos^2 \nu_3}.$$

В середине полосы пропускания

$$\alpha + \nu_3 = \frac{(2m+1)\pi}{2}, \tag{9.49}$$

где m — положительное целое число. Для той длины волны, которая удовлетворяет этому равенству, имеет место условие $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ и вытекающие отсюда соотношения (9.37)—(9.39). При изменении длины волны на $\Delta\lambda$ изменяется и α на $\Delta\alpha$, причем

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}; \tag{9.50}$$

пропорционально α изменяются также γ и α_k, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\gamma &= \frac{\gamma\Delta\alpha}{\alpha}, \\ \Delta\alpha_k &= \frac{\alpha_k\Delta\alpha}{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{9.51}$$

Соответствующее изменение ν_3 обозначим через $\Delta\nu_3$. Если $\Delta\lambda$ означает полуширину полосы пропускания, то при таком изме-

нении должно быть $\frac{R}{D} = 1$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sh}^2 2\gamma}{\sin^2 \varrho \cos^2 \nu_3} (\Delta\alpha + \Delta\nu_3)^2 = 1. \tag{9.52}$$

Чтобы вычислить $\Delta\nu_3$, вспомним, что

$$\nu_3 = \arctan \frac{\operatorname{Im}(b_3)}{\operatorname{Re}(b_3)}.$$

Отсюда

$$\Delta\nu_3 = \frac{\operatorname{Re}(b_3)\,\Delta \operatorname{Im}(b_3) - \operatorname{Im}(b_3)\,\Delta \operatorname{Re}(b_3)}{\operatorname{Re}^2(b_3) + \operatorname{Im}^2(b_3)}. \tag{9.53}$$

В эту формулу следует подставить выражения для $\operatorname{Re}(b_3)$ и $\operatorname{Im}(b_3)$ из формулы (9.32), где зависящими от длины волны величинами являются γ и α_k. После дифференцирования следует положить $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$. Таким образом находим:

$$\begin{aligned}\Delta\nu_3 = [\operatorname{ch}^2\gamma \sin^2 \varrho_k + \operatorname{sh}^2\gamma (\operatorname{sh} 2v - \operatorname{ch} 2v \cos \varrho_k)^2]^{-1} \cdot \\ \cdot \{\sin \varrho_k (\cos \varrho_k \operatorname{ch} 2v - \operatorname{sh} 2v)\,\Delta\gamma + 2[\operatorname{sh}^2\gamma (\operatorname{ch} 2v - \cos \varrho_k \operatorname{sh} 2v) + \\ + \sin^2 \varrho_k \operatorname{ch} 2v]\Delta\alpha_k\}\end{aligned} \tag{9.54}$$

Целесообразно исключить отсюда v с помощью (9.37), учитывая также (9.38) и (9.39). Результат таков:

$$\Delta\nu_3 = \frac{\sin 2\nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma} \Delta\gamma - 2\left(\frac{\sin 2\nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma} \operatorname{ctg} \varrho_k + \frac{\cos^2 \nu_3}{\sin \varrho \sin \varrho_k} \right) \Delta\alpha_k. \tag{9.55}$$

Отсюда и из формул (9.50)—(9.52) находим:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left| \frac{\sin \varrho \cos \nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma \left(\alpha - \frac{\pi \cos^2 \nu_3}{\sin \varrho \sin \varrho_k} \right) + \sin 2\nu_3 (\gamma - \pi \operatorname{ctg} \varrho_k)} \right|, \tag{9.56}$$

или, исключая вновь в знаменателе ν_3 с помощью (9.39),

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left| \frac{\sin \varrho \cos \nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma \left[\alpha + \frac{\gamma \sin 2\varrho}{\operatorname{ch} 2\gamma - \cos 2\varrho} - \frac{2\pi \sin \varrho (\operatorname{ch}^2\gamma + \cos \varrho \cos \varrho_k)}{\sin \varrho_k (\operatorname{ch} 2\gamma - \cos 2\varrho)} \right]} \right| \tag{9.57}$$

Из этой формулы видно, что ширина полосы пропускания зависит от поляризации (так как ϱ_k зависит от поляризации). Однако, эта зависимость слаба, так как в формуле (9.57) первый член в квадратных скобках может быть сделан значительно превосходящим остальные два члена. К тому же, так как ϱ находится в четвертой четверти, эти два члена имеют противоположные знаки. Следовательно, в известном приближении,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \left| \frac{\sin\varrho\cos\nu_3}{\alpha\,\mathrm{sh}\,2\gamma} \right| . \tag{9.58}$$

Можно также с помощью надлежащего выбора параметров фильтра совершенно устранить зависимость от поляризации в формуле (9.57). Для этого нужно подставить в последний член знаменателя известные выражения для ϱ_k (для обеих поляризаций), а также ϱ (из формулы (9.46)), и затем приравнять выражение для параллельной поляризации тому же выражению для перпендикулярной поляризации. Не останавливаясь на совершенно элементарных вычислениях, приведем результат:

$$\mathrm{sh}^2\gamma = \frac{2(n^2\sin^2\vartheta - n_1^2)(n_1 - n\sin^2\vartheta)}{(n - n_1)[n(n + n_1)\sin^2\vartheta - 2n_1^2]} . \tag{9.59}$$

Это — условие независимости ширины полосы пропускания от поляризации.

Рассмотрим, далее, вопрос о контрастности фильтра. Вне полосы пропускания положим, как среднее, $\cos^2(\alpha + \nu_3) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{R}{D} = \frac{\mathrm{sh}\,2\gamma}{2\sin^2\varrho\cos^2\nu_3} .$$

Отсюда видно, что хорошая контрастность достигается выбором достаточной толщины полноотражающих слоев. Однако, чрезмерное увеличение толщины этих слоев ведет, как известно, к резкому падению коэффициента пропускания (см. об этом выше, в § 36). Поэтому в интересах контрастности полезно, чтобы $\sin\varrho$ был возможно мал.

Перейдем, наконец, к рассмотрению вопроса о влиянии, которое оказывают на местоположение полосы пропускания в спектре небольшие отклонения угла падения от главного значения, на которое фильтр рассчитан. Для этого следует положить $\Delta\alpha + \Delta\nu_3 = 0$, где $\Delta\alpha$ и $\Delta\nu_3$ зависят от изменения волнового числа Δk и от изменения угла падения $\Delta\vartheta$.

Найдем прежде всего $\Delta\nu_3$. В отличие от формулы (9.54) мы

должны теперь варьировать не только γ и α_k, но также v и ϱ_k, поскольку эти величины тоже зависят от угла падения. Пользуясь опять общей формулой (9.53) и учитывая выражения (9.34) и (9.35), находим (после исключения v):

$$\Delta\nu_3 = \frac{\sin 2\nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma}\Delta\gamma - 2\left(\frac{\sin 2\nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma}\operatorname{ctg}\varrho_k + \frac{\cos^2\nu_3}{\sin\varrho\sin\varrho_k}\right)\Delta\alpha_k + \\ + \frac{\sin 2\nu_3}{\cos\varrho}\left(\Delta v + \frac{\Delta\varrho_k}{2\sin\varrho_k}\right). \tag{9.60}$$

Первые два члена правой части этой формулы совпадают, конечно, с правой частью формулы (9.55). Далее следует выразить $\Delta\gamma$ и $\Delta\alpha_k$ через Δk и $\Delta\vartheta$, а Δv и $\Delta\varrho_k$ только через $\Delta\vartheta$. Эти формулы таковы (причем учитывается, что $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ и $n_k = \sqrt{nn_1}$):

$$\Delta\gamma = \frac{\gamma\Delta k}{k} + \frac{\gamma n^2\sin\vartheta\cos\vartheta\Delta\vartheta}{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}, \tag{9.61}$$

$$\Delta\alpha_k = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Delta k}{k} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n\sin\vartheta\cos\vartheta\Delta\vartheta}{n_1 - n\sin^2\vartheta}, \tag{9.62}$$

$$\Delta v + \frac{\Delta\varrho_k}{2\sin\varrho_k} = \frac{(n-n_1)^2(n_1 + n\sin^2\vartheta)\tan\vartheta\Delta\vartheta}{2(n_1 - n\sin^2\vartheta)(n^2\sin^2\vartheta - n_1^2)}. \tag{9.63}$$

По поводу последней формулы отметим, что она не зависит от поляризации; поэтому, если выполнено условие (9.59), то изменение угла падения вызывает независимое от поляризации смещение полосы пропускания. Далее, нужно учесть, что

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha\Delta k}{k} - \alpha\tan\vartheta\Delta\vartheta. \tag{9.64}$$

Подставляя все эти выражения в равенство

$$\Delta\alpha + \Delta\nu_3 = 0,$$

получаем следующее соотношение:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\vartheta}{\alpha + A\gamma + B\pi}\left\{-\frac{A\gamma n^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2} + B\pi\cdot\frac{n\sin\vartheta\cos\vartheta}{n_1 - n\sin^2\vartheta} + \right. \\ \left. + C\cdot\frac{(n-n_1)^2(n_1 + n\sin^2\vartheta)\tan\vartheta}{2(n_1 - n\sin^2\vartheta)(n^2\sin^2\vartheta - n_1^2)} + \alpha\tan\vartheta\right\}, \tag{9.65}$$

где для сокращения записи положено:

$$A = \frac{\sin 2\nu_3}{\operatorname{sh} 2\gamma}, \tag{9.66}$$

$$C = -\frac{\sin 2\nu_3}{\cos \varrho}, \tag{9.67}$$

$$B = \frac{C}{2 \operatorname{th} \gamma \sin \varrho_k} - A \operatorname{ctg} \varrho_k. \tag{9.68}$$

Легко видеть, что всегда $C > 0$ и $B > 0$, тогда как A может быть как положительным, так и отрицательным. Из формулы (9.65) видно, что отклонение $\Delta\vartheta$ сильно влияет на положение полосы пропускания, так как все члены в числителе и знаменателе правой части этой формулы положительны, кроме, быть может, члена, содержащего A. Этот член, однако, мал по сравнению с другими, так как A содержит в знаменателе $\operatorname{sh} 2\gamma$.

Итак, наш фильтр мало пригоден для широкоугольных пучков. Полоса пропускания для таких пучков должна заметно расплываться. Это свойство является, повидимому, общим для всех светофильтров, использующих явление полного отражения. Однако, компенсация дублетности, если условие (9.59) выполнено, сохраняется и в случае широкоугольного пучка (конечно, в известных пределах).

§ 40. Другие варианты светофильтров с нарушенным полным отражением

Кроме рассмотренного в предыдущих двух параграфах способа устранения дублетной структуры в светофильтрах с нарушенным полным отражением, изложим здесь кратко еще два возможных метода. В отличие от первого варианта число полноотражающих слоев должно быть в этих вариантах больше двух. Они были предложены впервые в статьях автора [4] и [5].

Рассмотрим сначала второй из них (см. [5]). Фильтр этого типа состоит из m одинаковых полноотражающих слоев (с показателем преломления n_1), разделенных $m-1$ одинаковыми промежуточными слоями, показатель преломления n которых примем для простоты равным показателю преломления ограничивающих призм, между которым заключена вся эта $(2m-1)$ — слойная пленка. Схема такого фильтра с $m = 3$ показана на рис. 40.

Чтобы найти основные характеристики фильтра этого типа, нужно вычислить величину $\frac{R}{D}$. Для этого нужно найти мат-

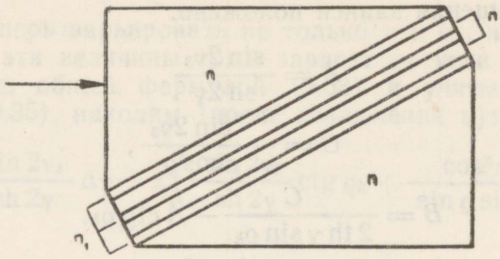

Рис. 40.

рицу F (см. § 4) этой пленки. Удобнее всего провести вычисление F следующим образом.

Добавим мысленно с обеих сторон к пленке по одному слою, выделив их из вещества призм, с толщиной, равной половине толщины промежуточных (не полноотражающих) слоев. Все промежуточные слои разделим каждый на два слоя одинаковой толщины. Тогда наша пленка (вместе с добавленными слоями) окажется состоящей из m одинаковых частей, каждая из которых содержит по одному полноотражающему слою, обрамленному двумя одинаковыми не полноотражающими слоями. Следовательно, согласно основной формуле (2.11), учитывая также, что между упомянутыми частями отсутствуют промежуточные слои, имеем:

$$F = M\left(-\frac{\alpha}{2}\right) F_3^m M\left(-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{9.69}$$

где F_3 относится к одной трехслойной части. Согласно той же основной формуле и формулам (1.12) и (1.14),

$$F_3 = \frac{i}{2\sin\varrho}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\rho}{2}} & e^{\frac{i\rho}{2}} \\ e^{\frac{i\rho}{2}} & e^{-\frac{i\rho}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\rho}{2}} & -e^{\frac{i\rho}{2}} \\ -e^{\frac{i\rho}{2}} & e^{-\frac{i\rho}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{9.70}$$

где, как и ранее, ϱ есть сдвиг фазы при полном отражении на границе сред с показателями преломления n и n_1,

$$\alpha = knh\cos\vartheta, \tag{9.71}$$

$$\gamma = kh_1\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}, \tag{9.72}$$

h и h_1 — толщины слоев и ϑ — угол падения. Перемножая матрицы, находим:

$$F_3 = \frac{1}{\sin\varrho}\begin{pmatrix} e^{i\alpha}(\sin\varrho\,\mathrm{ch}\,\gamma + i\cos\varrho\,\mathrm{sh}\,\gamma) & -i\,\mathrm{sh}\,\gamma \\ i\,\mathrm{sh}\,\gamma & e^{-i\alpha}(\sin\varrho\,\mathrm{ch}\,\gamma - i\cos\varrho\,\mathrm{sh}\,\gamma) \end{pmatrix}. \tag{9.73}$$

Теперь нужно возвести F_3 в m-ую степень. Для этого заметим, что, так как

$$F_3 = \begin{pmatrix} b_3 & \tilde{a}_3^* \\ a_3 & \tilde{b}_3^* \end{pmatrix},$$

то

$$F_3^2 = (b_3 + \tilde{b}_3^*)F_3 - E, \tag{9.74}$$

где E — единичная матрица. Иначе, обозначив

$$\frac{b_3 + \tilde{b}_3^*}{2} = \cos\Theta, \tag{9.75}$$

имеем

$$F_3^2 = 2\cos\Theta \cdot F - E. \tag{9.76}$$

Продолжая умножать на F_3, приходим к формуле:

$$F_3^m = Q_{m-1}(\cos\Theta)F - Q_{m-2}(\cos\Theta)E, \tag{9.77}$$

где, по определению,

$$Q_{m-1}(\cos\Theta) = \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta}, \tag{9.78}$$

причем, как отсюда вытекает,

$$Q_{k+1}(\cos\Theta) = 2\cos\Theta \cdot Q_k(\cos\Theta) - Q_{k-1}(\cos\Theta). \tag{9.79}$$

Формула (9.77) легко доказывается методом полной индукции. Теперь на основании формул (9.69), (9.77) и (9.78) находим:

$$a = \frac{i\,\mathrm{sh}\,\gamma}{\sin\varrho} \cdot \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} \tag{9.80}$$

и

$$b = e^{-i\alpha}\left(\cos m\Theta + i(\mathrm{ch}\,\gamma\sin\alpha + \mathrm{sh}\,\gamma\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varrho)\cdot\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta}\right), \tag{9.81}$$

где

$$\cos\Theta = \mathrm{ch}\,\gamma\cos\alpha - \mathrm{sh}\,\gamma\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varrho. \tag{9.82}$$

Фактически нам нужна для дальнейшего только величина a. Из формулы (9.80) следует:

$$\frac{R}{D} = \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \varrho} \cdot \frac{\sin^2 m\Theta}{\sin^2 \Theta}. \tag{9.83}$$

Для того, чтобы наша система имела свойства фильтра, необходимо, чтобы при некоторой длине волны было $R = 0$. Это возможно только в том случае, если Θ вещественно, т. е. если

$$|\operatorname{ch} \gamma \cos \alpha - \operatorname{sh} \gamma \sin \alpha \operatorname{ctg} \varrho| < 1. \tag{9.84}$$

Пусть это условие выполнено. Тогда необходимым и достаточным условием для $R = 0$ является равенство:

$$\Theta = \frac{l\pi}{m}, \tag{9.85}$$

где l есть любое целое положительное число, не делящееся на m, причем, не ограничивая общности, можно, очевидно, считать, что $l < m$. Итак, должно быть

$$\operatorname{ch} \gamma \cos \alpha - \operatorname{sh} \gamma \sin \alpha \operatorname{ctg} \varrho = \cos \frac{l\pi}{m}, \tag{9.86}$$

$$0 < l < m.$$

Далее, наш фильтр должен иметь полосу пропускания без дублетной структуры. Такая возможность существует, на самом деле, благодаря тому, что условию (9.86) можно удовлетворить при одной и той же длине волны (т. е. при одних и тех же значениях α и γ) для обеих поляризаций. Двум значениям ϱ будут тогда соответствовать два различных значения l. Очевидно, это возможно только при $m \geqslant 3$, так как при $m = 2$ l может иметь только одно значение, именно $l = 1$. Это согласуется с известным фактом, что дублетная структура полосы пропускания простейшего трехслойного фильтра неустранима.

Удобнее всего выбирать два значения l, соответствующие двум различным поляризациям, так, чтобы их сумма была равна m. Тогда, если обозначим два значения ϱ через ϱ_1 и ϱ_2, то из формулы (9.86) получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma \cos \alpha - \operatorname{sh} \gamma \sin \alpha \operatorname{ctg} \varrho_1 &= \cos \frac{l\pi}{m}, \\ \operatorname{ch} \gamma \cos \alpha - \operatorname{sh} \gamma \sin \alpha \operatorname{ctg} \varrho_2 &= -\cos \frac{l\pi}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{9.87}$$

$$0 < l \leqslant \frac{m}{2}.$$

Из этих двух равенств можно получить соотношения, определяющие необходимые толщины слоев (т. е. величины α и γ) при заданных угле падения и показателях преломления слоев. Прежде всего, складывая формулы (9.87), находим

$$\operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 = 2\operatorname{cth}\gamma\operatorname{ctg}\alpha. \tag{9.88}$$

Подставляя сюда вместо $\operatorname{ctg}\varrho_1$ и $\operatorname{ctg}\varrho_2$ выражения

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\varrho^{\parallel} &= \frac{n_1^4\cos^2\vartheta - n^4\sin^2\vartheta + n^2n_1^2}{2n_1^2 n\cos\vartheta\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}\\ \operatorname{ctg}\varrho^{\perp} &= \frac{n^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + n_1}{2n\cos\vartheta\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9.89}$$

имеем:

$$\operatorname{th}\gamma\tan\alpha = \frac{4n_1^2 n\cos\vartheta\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}{(n^2+n_1^2)[2n_1^2 - (n^2+n_1^2)\sin^2\vartheta]}. \tag{9.90}$$

Во-вторых, перемножая формулы (9.87) и учитывая вновь (9.88), находим:

$$\frac{\operatorname{sh}^2\gamma\sin^2\alpha}{\operatorname{ch}^2\gamma\cos^2\alpha - \cos^2\dfrac{l\pi}{m}} =$$

$$= \frac{4n^2n_1^2\cos^2\vartheta(n^2\sin^2\vartheta - n_1^2)}{[(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)n^2 + n_1^2][n_1^4\cos^2\vartheta - n^4\sin^2\vartheta + n^2n_1^2]}. \tag{9.91}$$

Отсюда и из (9.90) нетрудно вычислить:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh}\gamma\sin\alpha &= \pm\frac{4nn_1^2\cos\vartheta\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}{(n^2-n_1^2)^2\sin^2\vartheta}\cdot\cos\frac{l\pi}{m},\\ \operatorname{ch}\gamma\cos\alpha &= \pm\frac{(n^2+n_1^2)[2n_1^2 - (n^2+n_1)\sin^2\vartheta]}{(n^2-n_1^2)^2\sin^2\vartheta}\cdot\cos\frac{l\pi}{m}.\end{aligned}\right\} \tag{9.92}$$

где верхний знак берется в случае $\sin\alpha > 0$, а нижний в случае $\sin\alpha < 0$. Наиболее простой выбор α таков:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}(2p+1), \tag{9.93}$$

где $p \geqslant 0$ — целое число. Этот выбор, согласно формуле (9.90), требует, чтобы

$$\sin^2\vartheta = \frac{2n_1^2}{n^2+n_1^2}. \tag{9.94}$$

В этом случае, согласно (9.88),

$$\varrho^{\parallel} + \varrho^{\perp} = 180°, \tag{9.95}$$

а из формул (9.86) и (9.89) тогда имеем:

$$\operatorname{sh}\gamma = |\operatorname{tan}\varrho| \cos\frac{l\pi}{m} = \frac{2nn_1}{n^2 - n_1^2}\cos\frac{l\pi}{m}. \tag{9.96}$$

Наконец, вычислим полуширину $\Delta\lambda$ полосы пропускания. Из формулы (9.83) следует:

$$|\Delta\Theta| = \frac{\sin\varrho\sin\Theta}{m\operatorname{sh}\gamma}, \tag{9.97}$$

где $\Delta\Theta$ — изменение Θ при изменении λ на $\Delta\lambda$. Из (9.86) следует:

$$|\Delta\Theta| = |\Delta\alpha| \cdot \frac{\operatorname{ch}\gamma}{\sin\Theta}\left|\frac{\gamma|\operatorname{ctg}\varrho|}{\alpha} \pm 1\right|, \tag{9.98}$$

где двойной знак соответствует двум поляризациям. Чтобы полуширина была для обеих поляризаций возможно одинакова, следует сделать

$$\left|\frac{\gamma\operatorname{ctg}\varrho}{\alpha}\right| \ll 1.$$

Для этого нужно сделать p в формуле (9.93) достаточно большим. Так как, согласно (9.96), $|\gamma\operatorname{ctg}\varrho| < 1$, то уже при $p = 3$ можно в (9.98) пренебречь первым членом в скобках по сравнению с ± 1. Тогда

$$|\Delta\Theta| = \frac{\operatorname{ch}\gamma}{\sin\alpha}|\Delta\alpha|$$

и

$$|\Delta\alpha| = \frac{2\sin^2\Theta\sin\varrho}{m\operatorname{sh}2\gamma}. \tag{9.99}$$

Наконец, так как $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, то

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4\sin^2\Theta\sin\varrho}{\pi m(2p+1)\operatorname{sh}2\gamma}. \tag{9.100}$$

Здесь, согласно (9.96),

$$\sin\varrho = \frac{2nn_1}{n^2 + n_1^2}. \tag{9.101}$$

Относительно контрастности светофильтра этого типа следует заметить, что так как множитель $\frac{\sin^2 m\Theta}{\sin^2 \Theta}$ в (9.83) имеет максимумы порядка единицы (кроме m^2), то, в интересах контрастности, $\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\sin\varrho}$ должно быть достаточно велико. Но из (9.94) и (9.96) вытекает, что

$$\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\sin\varrho} = \frac{\cos\frac{l\pi}{m}}{\cos\varrho} = \frac{\cos\frac{l\pi}{m}}{\cos^2\vartheta} \tag{9.102}$$

Следовательно, угол падения должен быть возможно велик, m также возможно велико, а l следует выбирать равным единице. Конечно, слишком большие значения ϑ невыгодны, но, например, при $m = 6$ (одиннадцатислойный фильтр) и $\vartheta = 70°$ получим:

$$\frac{\operatorname{sh}^2\gamma}{\sin^2\varrho} = \frac{\cos^2 30°}{\cos^4 70°} \approx 55,$$

что дает довольно хорошую контрастность.

Переходим ко второму варианту (см. [4]). В этом варианте фильтр состоит из семи слоев, из которых четыре — одинаковые полноотражающие слои. Но в отличие от предыдущего варианта, три промежуточных не полноотражающих слоя неодинаковы. Одинаковы только два крайних, а срединный слой отличен от них. Мы примем здесь все-таки для простоты, что все промежуточные слои имеют одинаковый показатель преломления n, и он равен показателю преломления ограничивающих призм. Но толщина h' срединного слоя отлична от толщины h двух других промежуточных слоев. Схема фильтра показана на рис. 41.

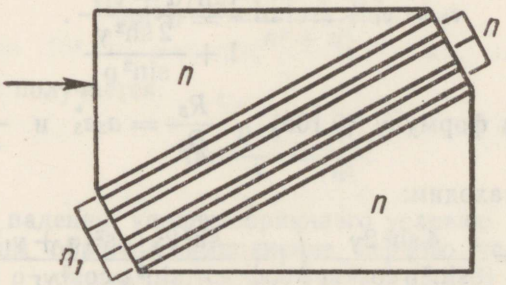

Рис. 41.

Вычислим $\frac{R}{D}$ для фильтра такой конструкции. Ясно, что его можно рассматривать как совокупность двух простейших одинаковых симметричных трехслойных фильтров с промежуточным слоем между ними. Эти трехслойные пленки являются, таким образом, двумя зеркалами для всего семислойного фильтра. Следовательно, согласно формулам (2.13), имеем:

$$a = a_3(b_3 e^{i\alpha'} + b_3^* e^{-i\alpha'}), \tag{9.103}$$

где индекс 3 относится к трехслойному зеркалу,

$$\alpha' = knh' \cos\vartheta \tag{9.104}$$

и ϑ — угол падения.

Из (9.103) следует:

$$\frac{R}{D} = \frac{4R_3}{D_3^2}\cos^2(\alpha' + \nu_3). \tag{9.105}$$

Эта формула по виду совпадает, конечно, с формулой (9.30) (см. § 38), но R_3, D_3 и ν_3 имеют здесь иные значения, поскольку зеркала у нашего семислойного фильтра имеют другой состав.

Для a_3 и b_3, согласно тем же основным формулам (2.13), легко находим:

$$a_3 = \frac{i \operatorname{sh} 2\gamma \cos(\alpha + \nu_1)}{\sin\varrho \cos\nu_1} \tag{9.106}$$

и

$$b_3 = \left[(\operatorname{ch}^2\gamma + \operatorname{sh}^2\gamma \operatorname{ctg}^2\varrho)\, e^{i(\alpha+\nu_1)} + \frac{\operatorname{sh}^2\gamma}{\sin^2\varrho} e^{-i(\alpha+\nu_1)}\right] e^{i\nu_1}, \tag{9.107}$$

где

$$\tan\nu_1 = \operatorname{th}\gamma \operatorname{ctg}\varrho, \qquad -\frac{\pi}{2} < \nu_1 < \frac{\pi}{2} \tag{9.108}$$

(как и в формуле (9.8)); α, γ и ϱ означают те же величины, как и ранее, в формулах (9.71), (9.72) и (9.89). Из формулы (9.107) вытекает:

$$\nu_3 = \nu_1 + \arctan\frac{\tan(\alpha + \nu_1)}{1 + \dfrac{2\operatorname{sh}^2\gamma}{\sin^2\varrho}}. \tag{9.109}$$

Подставляя в формулу (9.105) $\frac{R_3}{D_3} = a_3 a_3^*$ и $\frac{1}{D_3} = b_3 b_3^* = 1 + a_3 a_3^*$, находим:

$$\frac{R}{D} = \frac{4\operatorname{sh}^2 2\gamma}{\sin^2\varrho\cos^2\nu_1}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2 2\gamma \cos^2(\alpha+\nu_1)}{\sin^2\varrho\cos^2\nu_1}\right) \times \\ \times \cos^2(\alpha+\nu_1)\cos^2(\alpha'+\nu_3). \tag{9.110}$$

Возможность устранения дублетной структуры полосы пропускания явствует по этой формуле из того, что мы можем сделать для одной какой-либо поляризации $\cos(\alpha + \nu_1) = 0$, а для другой $\cos(\alpha' + \nu_3) = 0$ при одной и той же длине волны. Здесь возможны разнообразные варианты. Рассмотрим из них простейший. Пусть в середине полосы пропускания, общей для обеих поляризаций, $\cos\alpha = \cos\alpha' = 0$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (2l+1)\frac{\pi}{2}, \\ \alpha' &= (2l'+1)\frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{9.111}$$

где l и l' — неотрицательные целые числа. Пусть, далее, $\cos(\alpha + \nu_1^{\parallel}) = 0$ и $\cos(\alpha' + \nu_3^{\perp}) = 0$, так что

$$\begin{aligned} \tan\nu_1^{\parallel} &= 0, \\ \tan\nu_3^{\perp} &= 0. \end{aligned} \tag{9.112}$$

Первое из этих условий выполняется, согласно равенству (9.108), тогда и только тогда, если

$$\varrho^{\parallel} = 90°. \tag{9.113}$$

Чтобы найти $\varrho^{\perp}$, воспользуемся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\varrho^{\parallel}}{2} &= \frac{n\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}{n_1^2\cos\vartheta}, \\ \tan\frac{\varrho^{\perp}}{2} &= \frac{\sqrt{n^2\sin^2\vartheta - n_1^2}}{n_1^2\cos\vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{9.114}$$

Первая из них при $\varrho^{\parallel} = 90°$ дает:

$$\sin^2\vartheta = \frac{n_1^2(n^2 + n_1^2)}{n^4 + n_1^4} \tag{9.115}$$

а из второй получается:

$$\tan\frac{\varrho^{\perp}}{2} = \frac{n_1^2}{n^2}. \tag{9.116}$$

Выбор угла падения, удовлетворяющего условию (9.115), гарантирует, таким образом, выполнение первого условия (9.112), причем $\varrho^{\parallel}$ и $\varrho^{\perp}$ определяются формулами (9.113) и (9.116). Далее, посмотрим, что нужно для выполнения второго условия (9.112). Из этого условия и формулы (9.109) следует:

$$\operatorname{tan} \nu_1^{\perp} + \frac{\operatorname{tan}(\alpha + \nu_1^{\perp})}{1 + \dfrac{2 \operatorname{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \varrho^{\perp}}} = 0,$$

а так как, согласно первому условию (9.111),

$$\operatorname{tan}(\alpha + \nu_1^{\perp}) = -\operatorname{ctg} \nu_1^{\perp}, \tag{9.117}$$

то, с учетом (9.108), находим:

$$\left(1 + \frac{2 \operatorname{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \varrho^{\perp}}\right) \operatorname{th}^2 \gamma \operatorname{ctg}^2 \varrho^{\perp} - 1 = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\operatorname{sh} \gamma$, находим:

$$\operatorname{sh} \gamma = \frac{\operatorname{tan} \varrho^{\perp}}{\sqrt{2}}, \tag{9.118}$$

или, согласно (9.116),

$$\operatorname{sh} \gamma = \frac{n^2 n_1^2 \sqrt{2}}{n^4 - n_1^4}. \tag{9.119}$$

Это равенство определяет толщину полноотражающих слоев, необходимую для выполнения второго условия (9.112).

Если оба условия выполнены, то формула (9.110) принимает более простой вид. Чтобы сделать это упрощение, нужно знать еще $\nu_1^{\perp}$ и $\nu_3^{\parallel}$. Эти величины получаются сразу из формул (9.108) и (9.109), с учетом формул (9.118) и (9.119):

$$\operatorname{tan} \nu_1^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \gamma} = \frac{n^4 - n_1^4}{\sqrt{2}\sqrt{n^8 + n_1^8}} \tag{9.120}$$

и

$$\nu_3^{\parallel} = \pm \frac{\pi}{2}. \tag{9.121}$$

Подставляя все эти данные в формулу (9.110), находим:

$$\left(\frac{R}{D}\right)^{\parallel} = \frac{32 n^4 n_1^4 (n^8 + n_1^8)}{(n^4 - n_1^4)^4} \cos^2(\alpha + \nu_1^{\parallel}) =$$

$$= 4 \operatorname{sh}^2 2\gamma \cos^2(\alpha + \nu_1^{\parallel}) \tag{9.122}$$

и

$$\left(\frac{R}{D}\right)^{\perp} = \frac{8(n^4 + n_1^4)^2 (n^8 + n_1^8)}{(n^4 - n_1^4)^4} \cos^2(\alpha' + \nu_3^{\perp}) =$$

$$= 8\,\mathrm{ch}^2\gamma\,\mathrm{ch}\,2\gamma\cos^2(\alpha' + \nu_3^{\perp}). \qquad (9.123)$$

Заметим, однако, что мы могли бы в изложенном варианте переставить поляризации; т. е. положив (9.111), сделать вместо $\cos(\alpha + \nu_1^{\parallel}) = 0$ и $\cos(\alpha' + \nu_3^{\perp}) = 0$ наоборот:

$$\cos(\alpha + \nu_1^{\perp}) = 0,$$
$$\cos(\alpha' + \nu_3^{\parallel}) = 0.$$

Тогда получился бы другой вариант, сходный с вышеизложенным. Именно, вместо формул (9.112), (9.113), (9.115)—(9.118) и (9.120)—(9.123) мы имели бы следующие формулы (приводим их без подробного вывода, так как все выкладки здесь совершенно аналогичны предыдущим):

$$\tan\nu_1^{\perp} = 0,$$
$$\tan\nu_3^{\parallel} = 0; \qquad (9.124)$$

$$\varrho^{\perp} = 90°; \qquad (9.125)$$

$$\sin^2\vartheta = \frac{n^2 + n_1^2}{2n^2}; \qquad (9.126)$$

$$\tan\frac{\varrho^{\parallel}}{2} = \frac{n^2}{n_1^2}; \qquad (9.127)$$

$$\tan(\alpha + \nu_1^{\parallel}) = -\mathrm{ctg}\,\nu_1^{\parallel}; \qquad (9.128)$$

$$\mathrm{sh}\,\gamma = -\frac{\tan\varrho^{\parallel}}{\sqrt{2}} = \frac{n^2 n_1^2\sqrt{2}}{n^4 - n_1^4}; \qquad (9.129)$$

$$\tan\nu_1^{\parallel} = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\gamma} = -\frac{n^4 - n_1^4}{\sqrt{2}\,\sqrt{n^8 + n_1^8}}; \qquad (9.130)$$

$$\nu_3^{\perp} = \pm\frac{\pi}{2}; \qquad (9.131)$$

$$\left(\frac{R}{D}\right)^{\parallel} = \frac{8(n^4 + n_1^4)^2(n^8 + n_1^8)}{(n^4 - n_1^4)^4}\cos^2(\alpha' + \nu_3^{\parallel}) =$$
$$= 8\,\mathrm{ch}^2\gamma\,\mathrm{ch}\,2\gamma\cos^2(\alpha' + \nu_3^{\parallel}); \qquad (9.132)$$

$$\left(\frac{R}{D}\right)^{\perp} = \frac{32n^4n_1^4(n^8 + n_1^8)}{(n^4 - n_1^4)^4}\cos^2(\alpha + \nu_1^{\perp}) =$$

$$= 4 \operatorname{sh}^2 2\gamma \cos^2(\alpha + \nu_1^{\perp}). \qquad (9.133)$$

Таким образом, этот второй вариант кажется равноценным первому. Все-таки он на самом деле несколько хуже, так как в нем угол падения (ср. (9.126) и (9.115)) должен быть больше, а это невыгодно.

Наконец, вычислим полуширину полосы пропускания. Подобно тому, как было сделано в § 39, обозначив временно коэффициент перед $\cos^2(\alpha + \nu)$ в формулах (9.122), (9.123), (9.132) и (9.133) через A^2, находим:

$$A(\Delta\alpha + \Delta\nu) = 1,$$

откуда

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\alpha A\left(1 + \dfrac{d\nu}{d\alpha}\right)}. \qquad (9.134)$$

В этой формуле у α и ν пока отсутствуют индексы. Перейдем к конкретному вычислению.

1-ый вариант. Для параллельной поляризации из формул (9.108) и (9.113) имеем $d\nu_1^{\parallel} = 0$; следовательно,

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{\parallel} = \frac{1}{2\alpha \operatorname{sh}\gamma} = \frac{(n^4 - n_1^4)^2}{2\pi(2l+1)n^2 n_1^2 \sqrt{2(n^8 + n_1^8)}}. \qquad (9.135)$$

Для перпендикулярной поляризации из формулы (9.109) следует:

$$d\nu_3^{\perp} = d\nu_1^{\perp} +$$

$$+ \frac{\left(1 + \dfrac{2\operatorname{sh}^2\gamma}{\sin^2\varrho^{\perp}}\right)[1 + \tan^2(\alpha + \nu_1^{\perp})]\times}{\left(1 + \dfrac{2\operatorname{sh}^2\gamma}{\sin^2\varrho^{\perp}}\right)^2 + \tan^2(\alpha + \nu_1^{\perp})}\cdot$$

$$\frac{\times(d\alpha + d\nu_1^{\perp}) - \dfrac{4\operatorname{sh}\gamma \operatorname{ch}\gamma}{\sin^2\varrho^{\perp}} \tan(\alpha + \nu_1^{\perp})\, d\gamma}{}.$$

Подставляя сюда вытекающее из (9.108) выражение

$$d\nu_1^{\perp} = \frac{\operatorname{ctg}\varrho^{\perp} \cos^2\nu_1^{\perp} d\gamma}{\operatorname{ch}^2\gamma},$$

и учитывая формулы (9.116), (9.117), (9.119) и (9.120), находим после довольно громоздких, но простых выкладок:

$$dv_3^{\perp} = \frac{n^4 - n_1^4}{n^2 n_1^2} d\gamma + d\alpha. \tag{9.136}$$

Отсюда и из формулы (9.134), с учетом (9.111), следует:

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{\perp} = \frac{(n^4 - n_1^4)^2}{2\pi\left(l + l' + 1 + \frac{\gamma}{\pi} \cdot \frac{n^4 - n_1^4}{n^2 n_1^2}\right)(n^4 + n_1^4)\sqrt{2(n^8 + n^8)}}. \tag{9.137}$$

2-ой вариант. Совершенно аналогично, как и в предыдущем варианте, находим: во-первых, вместо (9.136) формулу

$$dv_3^{\parallel} = -\frac{n^4 - n_1^4}{n^2 n_1^2} d\gamma + d\alpha, \tag{9.138}$$

и, во-вторых, вместо (9.135) и (9.137) следующие выражения:

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{\parallel} = \frac{(n^4 - n_1^4)^2}{2\pi\left(l + l' + 1 - \frac{\gamma}{\pi} \cdot \frac{n^4 - n_1^4}{n^2 n_1^2}\right)(n^4 + n_1^4)\sqrt{2(n^8 + n_1^8)}} \tag{9.139}$$

и

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{\perp} = \frac{(n^4 - n_1^4)^2}{2\pi(2l+1)n^2 n_1^2\sqrt{2(n^8 + n_1^8)}}. \tag{9.140}$$

В формулах (9.137) и (9.139) член $\frac{\gamma}{\pi} \cdot \frac{n^4 - n_1^4}{n^2 n_1^2}$ можно считать малым по сравнению с $l + l' + 1$, так как, согласно формуле (9.119), этот член равен $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma} < 1$, , а l и l' целесообразно выбирать не слишком малыми, чтобы получить достаточно узкую полосу пропускания. Если пренебречь этим членом, то сравнение значений полуширины для обеих поляризаций дает в первом варианте

$$\frac{\Delta\lambda^{\parallel}}{\Delta\lambda^{\perp}} = \frac{l + l' + 1}{2l + 1} \cdot \frac{n^4 + n_1^4}{n^2 n_1^2},$$

во втором наоборот. Далее, так как грубо приближенно

$$\frac{n^4 + n_1^4}{n^2 n_1^2} \approx 2,$$

то

$$\left(\frac{\Delta\lambda^{\parallel}}{\Delta\lambda^{\perp}}\right)^{\pm 1} \approx 1 + \frac{2l' + 1}{2l + 1}. \qquad (9.141)$$

Следовательно, чтобы для обеих поляризаций ширина полосы пропускания была возможно одинаковой, необходимо выбирать l' значительно меньшим, чем l.

Что касается контрастности фильтра описанной конструкции, то она, как видно из формул (9.122) и (9.123), тем больше, чем меньше разность $n - n_1$. Вместе с тем, чем меньше эта разность, тем уже полоса пропускания. Однако, уменьшение $n - n_1$ влечет за собой увеличение угла падения, что невыгодно. Это является главным недостатком светофильтров рассматриваемого типа. Для смягчения этого недостатка можно рекомендовать двойной фильтр, т. е. такой, который состоит из двух (некогерентных) фильтров этого типа, причем один из них выполняется в первом варианте, а другой — во втором. Такой двойной фильтр должен, очевидно, иметь повышенную контрастность. Кроме того, он обладает еще двумя преимуществами: 1) ширина полосы пропускания становится одинаковой для обеих поляризаций независимо от выбора l и l'; 2) побочные максимумы пропускания должны в нем эффективно подавляться, так как они для двух компонентов двойного фильтра не совпадают.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПЛЕНОК

§ 41. Интерференционный поляризатор

В течение последних 20—25 лет получили распространение интерференционные поляризаторы, которые, по сравнению с поляризаторами других типов (поляризационные призмы, поляроиды), обладают рядом преимуществ. Главное из них состоит в том, что они могут быть изготовлены не только для видимой, но и для инфракрасной области спектра, где поляризаторы других типов неприменимы (см. обзор в [26] или [86]). Как известно, частичная поляризация света имеет место уже при отражении от простой границы раздела (например, при падении света на поверхность стекла). Если угол падения равен углу Брюстера, то отраженный свет поляризован полностью, а прошедший частично. Интенсивность отраженного света может быть увеличена путем нанесения на поверхность стекла однослойной или многослойной пленки. Чтобы сделать такой поляризатор эффективным также в проходящем свете, берется стопа стеклянных пластинок, покрытых с обеих сторон пленками. Подобные поляризаторы описаны, например, в статье [87]; теорию же поляризаторов этого типа можно найти в статье [88].

Наряду с интерференционными поляризаторами типа стопы употребляются интерференционные поляризаторы другого типа. Они состоят из двух одинаковых (или неодинаковых) равнобедренных треугольных стеклянных призм. На боковую грань, соответствующую основанию треугольника, наносится многослойная пленка, которая затем закрывается другой призмой. Такого типа поляризаторы описаны в статьях [89—91]; обзор дан в [26] и [86]. Достаточно полная и подробная теория поляризаторов типа призмы развита впервые в статье автора [12]. В нижеследующем изложении мы и будем придерживаться этой статьи.

Следует сказать, что между обоими типами интерференционных поляризаторов — типа стопы и типа призмы — нет глубокой принципиальной разницы. Стеклянная пластинка с нанесенной на одну ее сторону (многослойной) пленкой вполне подобна по своему действию поляризатору типа призмы. И в том, и в другом случае существенным является наличие интерференции в слоях пленки. Разница состоит лишь в том, что в поляризаторе типа стопы поверхность стекла покрывается обычно только одним слоем, причем недостаточное поляризующее действие (в проходящем свете) этой пленки компенсируется применением нескольких пленок (несколько пластинок, покрытых пленками с обеих сторон). Интерференция между этими отдельными пленками отсутствует. Наоборот, в поляризаторе типа призмы имеется только одна поляризующая пленка, но, будучи многослойной, она обладает достаточным поляризующим действием. Конечно, ничто не мешает еще более повысить эффективность поляризатора типа призмы, располагая последовательно два или больше таких поляризаторов. Мы имели бы тогда поляризатор в виде «стопы призм», объединяющий в себе оба описанных типа.

Из сказанного вытекает, что излагаемая ниже теория поляризатора типа призмы применима в принципе и к поляризатору типа стопы. Поэтому мы вовсе не будем рассматривать поляризаторы типа стопы. Зато особое внимание обратим на ахроматичность поляризатора.

Примем в качестве исходного условия равенство

$$\alpha_k = k_0 n_k h_k \cos \vartheta_k = \frac{\pi}{2}, \qquad (10.1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

фиксирующее толщины всех слоев. Здесь $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ есть волновое число в середине выбранного интервала спектра. Это условие, как хорошо известно, является обычным в упрощенной задаче синтеза, где толщины слоев фиксируются и поставленную цель стараются достигнуть путем надлежащего выбора показателей преломления слоев. Почти во всех задачах синтеза, рассмотренных в предыдущих главах, мы пользовались таким же выбором толщин слоев. Как будет показано ниже, условие (10.1), действительно, приводит к хорошим результатам, причем, конечно, остается открытым вопрос о варьировании толщин слоев с целью получить еще более эффективный поляризатор.

При $\lambda = \lambda_0$ коэффициенты отражения для компонент, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения, выражаются, как известно, очень простыми формулами. Для их написания целесообразно использовать здесь понятие *эффектив-*

ных показателей преломления слоев и ограничивающих сред. Это понятие использовалось многими авторами; в частности, оно сформулировано в статье [92]. Проще всего оно вытекает из наших формул (3.25) и (3.26). Ясно, что если положим

$$n^{\parallel} = \frac{\cos\vartheta}{n} = \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0}}{n^2},$$
$$n^{\perp} = n\cos\vartheta = \sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0} \tag{10.2}$$

то, заменив показатели преломления n *эффективными* показателями преломления $n^{\parallel}$ и $n^{\perp}$, получим пленку, действующую при нормальном падении света (при тех же значениях α) так же, как данная пленка действует при наклонном падении.

Формулы для $R^{\parallel}$ и $R^{\perp}$ имеют (при $\lambda = \lambda_0$, т. е. когда все α равны $\frac{\pi}{2}$) следующий вид:

$$R^{\parallel}_{2m+1} = \left[\frac{(n_1^{\parallel}n_3^{\parallel}\ldots n_{2m+1}^{\parallel})^2 - n^{\parallel}n_0^{\parallel}(n_2^{\parallel}n_4^{\parallel}\ldots n_{2m}^{\parallel})^2}{(n_1^{\parallel}n_3^{\parallel}\ldots n_{2m+1}^{\parallel})^2 + n^{\parallel}n_0^{\parallel}(n_2^{\parallel}n_4^{\parallel}\ldots n_{2m}^{\parallel})^2}\right]^2 \tag{10.3}$$

$$R^{\perp}_{2m+1} = \left[\frac{(n_1^{\perp}n_3^{\perp}\ldots n_{2m+1}^{\perp})^2 - n^{\perp}n_0^{\perp}(n_2^{\perp}n_4^{\perp}\ldots n_{2m}^{\perp})^2}{(n_1^{\perp}n_3^{\perp}\ldots n_{2m+1}^{\perp})^2 + n^{\perp}n_0^{\perp}(n_2^{\perp}n_4^{\perp}\ldots n_{2m}^{\perp})^2}\right]^2, \tag{10.4}$$

$$R^{\parallel}_{2m} = \left[\frac{n^{\parallel}(n_1^{\parallel}n_3^{\parallel}\ldots n_{2m-1}^{\parallel})^2 - n_0^{\parallel}(n_2^{\parallel}n_4^{\parallel}\ldots n_{2m}^{\parallel})^2}{n^{\parallel}(n_1^{\parallel}n_3^{\parallel}\ldots n_{2m-1}^{\parallel})^2 + n_0^{\parallel}(n_2^{\parallel}n_4^{\parallel}\ldots n_{2m}^{\parallel})^2}\right]^2, \tag{10.5}$$

$$R^{\perp}_{2m} = \left[\frac{n^{\perp}(n_1^{\perp}n_3^{\perp}\ldots n_{2m-1}^{\perp})^2 - n_0^{\perp}(n_2^{\perp}n_4^{\perp}\ldots n_{2m}^{\perp})^2}{n^{\perp}(n_1^{\perp}n_3^{\perp}\ldots n_{2m-1}^{\perp})^2 + n_0^{\perp}(n_2^{\perp}n_4^{\perp}\ldots n_{2m}^{\perp})^2}\right]^2, \tag{10.6}$$

где $n \equiv n_{N+1}$ и $N = 2m+1$ в первых двух и $N = 2m$ в последних двух формулах, а N, как и везде, означает число слоев.

Потребуем, чтобы $R^{\parallel} = 0$ и $R^{\perp} \approx 1$. Из первого условия, согласно первой формуле (10.2), находим:

$$\frac{(n_2^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)(n_4^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)\ldots(n_{2m}^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)}{(n_1^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)(n_3^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)\ldots(n_{2m+1}^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0)} =$$
$$= \frac{n_0 n^2 (n_2 n_4\ldots n_{2m})^4}{(n_1 n_3\ldots n_{2m+1})^4\cos\vartheta_0\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\vartheta_0}}, \tag{10.7}$$

если $N = 2m+1$ и

$$\frac{(n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)(n_4^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0) \ldots (n_{2m}^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)}{(n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)(n_3^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0) \ldots (n_{2m-1}^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)} =$$

$$= \frac{n_0 (n_2 n_4 \ldots n_{2m})^4 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0}}{n^2 \cos \vartheta_0 (n_1 n_3 \ldots n_{2m-1})^4} \qquad (10.8)$$

если $N = 2m$.

Выражения (10.4) и (10.6) для $R^{\perp}$ приводятся с помощью этих формул и второй формулы (10.2) к виду:

$$R_{2m+1}^{\perp} = \left[\frac{(n_1 n_3 \ldots n_{2m+1})^4 - n_0^2 n^2 (n_2 n_4 \ldots n_{2m})^4}{(n_1 n_3 \ldots n_{2m+1})^4 + n_0^2 n^2 (n_2 n_4 \ldots n_{2m})^4} \right]^2, \qquad (10.9)$$

$$R_{2m}^{\perp} = \left[\frac{n^2 (n_1 n_3 \ldots n_{2m-1})^4 - n_0^2 (n_2 n_4 \ldots n_{2m})^4}{n^2 (n_1 n_3 \ldots n_{2m-1})^4 + n_0^2 (n_2 n_4 \ldots n_{2m})^4} \right]^2. \qquad (10.10)$$

Для выполнения условия $R^{\perp} \approx 1$ нужно, чтобы все n с нечетным индексом были возможно велики, а все n с четным индексом возможно малы, или же наоборот. Отсюда вытекает, что наиболее выгодно иметь двухкомпонентную пленку, т. е.

$$n_1 = n_3 = \ldots \quad \text{и} \quad n_2 = n_4 = \ldots$$

Тогда условия (10.7) и (10.8) перепишутся в следующей форме:

$$\frac{(n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)^m}{(n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)^{m+1}} = \frac{n_0 n^2 n_2^{4m}}{n_1^{4m+4} \cos \vartheta_0 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0}} \qquad (10.11)$$

$$N = 2m + 1,$$

$$\frac{(n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)^m}{(n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0)^m} = \frac{n_0 n_2^{4m} \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0}}{n^2 n_1^{4m} \cos \vartheta_0}, \qquad (10.12)$$

$$N = 2m,$$

а формулы (10.9) и (10.10) примут вид:

$$R_{2m+1}^{\perp} = \left(\frac{n_1^{4m+4} - n_0^2 n^2 n_2^{4m}}{n_1^{4m+4} + n_0^2 n^2 n_2^{4m}} \right)^2, \qquad (10.13)$$

$$R_{2m}^{\perp} = \left(\frac{n^2 n_1^{4m} - n_0^2 n_2^{4m}}{n^2 n_1^{4m} + n_0^2 n_2^{4m}} \right)^2. \qquad (10.14)$$

Условие $R^{\perp} \approx 1$ требует, очевидно, чтобы $n_1 \ll n_2$ или $n_1 \gg n_2$. Таким образом, имеем всего четыре основных варианта: 1) $n_1 \ll n_2$, $N = 2m + 1$; 2) $n_1 \gg n_2$, $N = 2m + 1$; 3) $n_1 \ll n_2$, $N = 2m$; 4) $n_1 \gg n_2$, $N = 2m$.

Выведенные условия достаточны для того, чтобы пленка действовала как эффективный поляризатор при определенной длине волны, $\lambda = \lambda_0$, при которой, согласно (10.1), все α равны $\frac{\pi}{2}$. Однако, от поляризатора обычно требуется, чтобы он был применим в некотором более или менее широком спектральном интервале. Можно убедиться, что поляризатор, синтезированный с выполнением условия (10.11) или (10.12), имеет, в самом деле, хорошую ахроматичность. Для этого достаточно рассмотреть численный пример.

Выберем первый вариант из четырех упомянутых выше. Он представляется наиболее выгодным, хотя остальные мало ему уступают. Пусть $n = n_0$ и $\vartheta_0 = 45°$. Выберем, далее, $n_1 = 1{,}35$ и $n_2 = 2{,}3$. Возьмем девятислойную пленку, т. е. положим $m = 4$. Тогда формула (10.11) дает:

$$\frac{(2n_2^2 - n^2)^4}{(2n_1^2 - n^2)^5} = \frac{n^2 n_2^{16}}{n_1^{20}}. \tag{10.15}$$

Решая это уравнение относительно n, находим:

$$n = 1{,}627. \tag{10.16}$$

Таков должен быть показатель преломления призм.

Для вычисления коэффициентов отражения и пропускания $R^{\perp}$ и $D^{\parallel}$ в зависимости от спектральной переменной α воспользуемся формулами:

$$\frac{R^{\parallel}}{D^{\parallel}} = 0{,}0132(\sin 9\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha)^2 \tag{10.17}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^{\perp}} = {} & 369{,}2 - 696{,}2\cos 2\alpha + 587{,}1\cos 4\alpha - \\ & - 439{,}3\cos 6\alpha + 288{,}5\cos 8\alpha - 163{,}2\cos 10\alpha + \\ & + 77{,}0\cos 12\alpha - 28{,}6\cos 14\alpha + 7{,}48\cos 16\alpha - \\ & - 1{,}01\cos 18\alpha,\end{aligned} \tag{10.18}$$

которые можно получить с помощью любой из расчетных формул § 8. Результаты вычислений даны в нижеследующей таблице:

α^0	$R^{\perp}\%$	$D^{\parallel}\%$	β_R	β_D
90	99,96	100,00	1,000	0,999
85;95	99,96	99.94	0,999	0,999
80;100	99,94	99,34	0,987	0,999
75;105	99,89	98,35	0,968	0,998
70;110	99,70	98,35	0,967	0,994
65;115	98,75	99,52	0,990	0,975
60;120	88,02	99,94	0,999	0,786

Величины β_R и β_D означают здесь степени поляризации, т. е.

$$\beta_R = \frac{R^{\perp} - R^{\parallel}}{R^{\perp} + R^{\parallel}}, \qquad \beta_D = \frac{D^{\parallel} - D^{\perp}}{D^{\parallel} + D^{\perp}}. \tag{10.19}$$

Из таблицы видно, что в интервале $65° \leqslant \alpha \leqslant 115°$, соответствующим интервалу 700 nm $\geqslant \lambda \geqslant$ 395 nm, т. е. всему видимому спектру, степень поляризации в отраженном свете отклоняется от единицы не более чем на 0,032, а степень поляризации в проходящем свете не более чем на 0,025. Понятно, что тот же интервал значений α соответствует почти полной октаве и в любой другой спектральной области.

Как было уже отмечено выше, дальнейшее повышение эффективности поляризатора в проходящем свете возможно путем пропускания света через две последовательно расположенные поляризующие прослойки. Аналогично, чтобы повысить степень поляризации отраженного света, целесообразно поставить на пути отраженного света второй поляризатор, работающий на отражение, или, еще лучше, на пропускание.

Если бы мы выбрали вместо первого второй вариант, т. е. положили бы в формуле (10.15) $n_1 = 2{,}3$ и $n_2 = 1{,}35$, то нашли бы $n = 1{,}666$. В этом случае значения $D^{\parallel}$ были бы несколько ниже приведенных в таблице (кроме $D^{\parallel} = 100\%$ при $\alpha = 90°$), а значения $R^{\perp}$ были бы еще ближе к единице, чем в первом варианте (так, при $\alpha = 90°$ было бы $R^{\perp} = 99{,}98\%$). Поэтому второй вариант был бы предпочтительнее лишь в том случае, если поляризатор предназначается для более узкой области спектра.

Заметим, наконец, что, согласно формулам (10.11) и (10.12), значения показателей преломления призм нужно выбирать в зависимости от угла падения. В предыдущем примере мы выбрали $n = n_0$ и $\vartheta_0 = 45°$. Очевидно, можно выбрать также $n \neq n_0$ и $\vartheta_0 \neq 45°$. Таким образом, наша теория допускает боль-

шое количество частных вариантов. Все они дают фактически сходные результаты, и выбор того или другого зависит во многом от конкретных условий.

§ 42. Несимметричные зеркала

В качестве последнего применения интерференционных пленок рассмотрим в этом параграфе вопрос о синтезе несимметричных зеркал (см. [17], [25]). Несимметричным зеркалом называется такое двустороннее зеркало, коэффициент пропускания которого отличен от нуля, а коэффициент отражения с обеих сторон неодинаков, т. е. $R \neq R'$. Соответственно, коэффициент поглощения имеет также с обеих сторон неодинаковые значения, причем всегда

$$R' - R = A - A'. \tag{10.20}$$

Так как при отсутствии поглощения $R = R'$, то несимметричное зеркало должно содержать в своем составе хотя бы один поглощающий слой.

Несимметричные зеркала могут найти применение для имитации несимметричного пропускания. Хотя на самом деле всегда $D = D'$, при неодинаковой и отчасти даже при одинаковой освещенности с обеих сторон неодинаковость отражательной способности может создать иллюзию прозрачности зеркала в одном и непрозрачности его в обратном направлении. Кроме того, с помощью несимметричных зеркал можно изготовить узкополосные отражательные светофильтры. Некоторые результаты, относящиеся к таким фильтрам, содержатся в статьях [68], [93] и [94]. Ряд общих данных о несимметричных зеркалах можно найти также в работах [67], [95] и [96]. Однако, во всех этих работах отсутствует полная количественная теория. Впервые такая теория была развита в статьях автора [17] и [25]. Ее мы образно рассматривать состоящей из трех частей, из которых здесь с некоторыми дополнениями и изложим.

Так как многослойная пленка, представляющая собой несимметричное зеркало, должна быть поглощающей, то ее целесотолько средняя является поглощающей *.

Обозначим ограничивающие среды индексами 0 и 3, а два непоглощающих промежуточных слоя, разделяющих упомянутые части, индексами 1 и 2. Тогда эти три части можно обозначить индексами 01, 12 и 23. Подобное же двухиндексное обозначение применимо и для частей 02 и 13, объединяющих по две

* Средняя часть может, конечно, содержать и непоглощающие слои, а поглощающих слоев может быть более одного; важно только то, чтобы вне этой части поглощающих слоев не было.

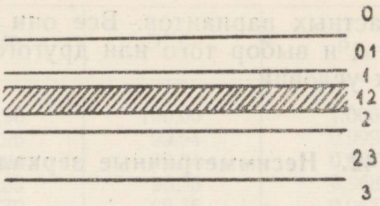

Рис. 42. Схема несимметричного зеркала.

вышеупомянутых части. Схема пленки показана на рис. 42. Для обозначения обратного направления падения света мы будем вместо штриха пользоваться здесь теми же индексами, написанными в обратном порядке (например, 20 и т. д.).

Итак, задача заключается в синтезе тонкой пленки, такой, чтобы, положим, R_{03} и A_{30} были возможно малы, а R_{30} и A_{03} возможно велики. К решению этой задачи можно подойти двумя путями. Мы можем потребовать, во-первых, минимума A_{30}, или, во-вторых, минимума R_{03}. Фактически, как увидим ниже, второй подход дает лучший результат.

Рассмотрим сначала все-таки первый вариант. Минимум A_{30} (при заданном коэффициенте пропускания $D_{03} = D_{30} \equiv D$) означает просветленность пленки в направлении $3 \to 0$. Для этого, как известно (см. §§ 29 и 30), должны быть выполнены следующие условия:

$$\cos(2\alpha_1 + \sigma_{21} - \mu_{10} + \nu_{10}) = -1 \tag{10.21}$$

и

$$R_{10} = \frac{S_{21} - \operatorname{sh}\varphi}{S_{21} + \operatorname{sh}\varphi}. \tag{10.22}$$

(здесь $\varphi_{12} = \varphi_{21} = \varphi_{03} = \varphi_{30} \equiv \varphi$). Первое из этих условий требует (при заданной прослойке 12) надлежащего выбора первого промежуточного слоя, а второе — надлежащего выбора непоглощающей прослойки 10. Заметим, что на второй промежуточный слой и на прослойку 23 пока никаких условий не накладывается.

Формулы для коэффициентов отражения, пропускания и поглощения получим следующим образом. Из наличия просветления в силу теоремы 7 из § 16 вытекает:

$$\tilde{a}_{30} = a_{30} e^{-\varphi},$$

откуда

$$a_{03} = -\overset{*}{a}_{30} e^{-\varphi}.$$

Это дает:

$$\frac{R_{03}}{D_{03}} = \frac{R_{30}}{D_{30}} e^{-2\varphi},$$

а так как $D_{03} = D_{30}$, то

$$R_{03} = R_{30} e^{-2\varphi}. \tag{10.23}$$

Затем, из формулы (8.15) (учитывая также теорему 1 из § 16), имеем:

$$R_{30} = \frac{S_{13} - \operatorname{sh}\varphi}{S_{13} + \operatorname{sh}\varphi}, \tag{10.24}$$

$$D = \frac{1 - e^{-2\varphi}}{S_{13} + \operatorname{sh}\varphi} \tag{10.25}$$

и

$$A_{30} = \frac{2\operatorname{sh}\varphi(1 - e^{-\varphi})}{S_{13} + \operatorname{sh}\varphi}. \tag{10.26}$$

Далее, формулы (10.23) и (10.24) дают:

$$R_{03} = \frac{(S_{13} - \operatorname{sh}\varphi) e^{-2\varphi}}{S_{13} + \operatorname{sh}\varphi}, \tag{10.27}$$

а отсюда и из (10.25) получили

$$A_{03} = \frac{\operatorname{sh}\varphi[(1 - e^{-\varphi})^2 + 2S_{13}e^{-\varphi}]}{S_{13} + \operatorname{sh}\varphi}. \tag{10.28}$$

Величина φ, входящая в эти формулы, зависит только от поглощающей прослойки 12, а S_{13} зависит, кроме того, еще от второго промежуточного слоя и от непоглощающей прослойки 23. Но к этим частям пленки до сих пор никаких требований не предъявлялось; поэтому мы можем воспользоваться этой свободой для того, чтобы коэффициент пропускания D зеркала имел заданное значение. Для S_{13} можно написать формулу (ср. (8.89)):

$$S_{13} = \frac{(1 + R_{23})S_{12} + 2U_{12}\sqrt{R_{23}}\cos(2\alpha_2 + \sigma_{12} - \mu_{23} + \nu_{23})}{1 - R_{23}}. \tag{10.29}$$

Из этой формулы видно, что, подбирая надлежащим образом α_2 и R_{23}, можно (по крайней мере теоретически) реализовать любое, сколь угодно большое значение S_{13} (но, конечно, не меньшее $\operatorname{sh}\varphi$). Поэтому целесообразно, рассматривая D как основную заданную величину, исключить S_{13}, и выразить коэффициенты отражения и поглощения только через φ и D. Прежде всего, из (10.25) следует:

$$S_{13} = \frac{\operatorname{sh}\varphi(2e^{-\varphi} - D)}{D} \tag{10.30}$$

Подставляя это выражение в формулы (10.24) и (10.26)—(10.28), находим:

$$\left.\begin{aligned} R_{03} &= e^{-\varphi}(e^{-\varphi} - D), \\ R_{30} &= e^{\varphi}(e^{-\varphi} - D), \\ A_{03} &= (1 - e^{-\varphi})(1 + e^{-\varphi} - D), \\ A_{30} &= D(e^{\varphi} - 1). \end{aligned}\right\} \tag{10.31}$$

Подчеркнем вновь, что величина φ задается здесь произвольно путем надлежащего выбора поглощающей прослойки 12; коэффициент пропускания D тоже задается произвольно, независимо от φ, причем заданное значение определяет, согласно формуле (10.30), необходимое для этого значение S_{13}, последнее же реализуется на основе формулы (10.29) путем надлежащего подбора слоя 2 и прослойки 23. Возможные значения D, однако, ограничиваются неравенством

$$D < e^{-\varphi}, \tag{10.32}$$

так как при $D > e^{-\varphi}$ было бы $S_{13} < \operatorname{sh}\varphi$, что невозможно, а при $D = e^{-\varphi}$ было бы $R_{03} = R_{30} = 0$, т. е. несимметричность исчезла бы.

Степень несимметричности зеркала можно охарактеризовать отношениями R_{30}/R_{03} и A_{03}/A_{30}. Чем больше они, тем сильнее несимметричность. Обозначая их через q_r и q_a, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} q_r &\equiv \frac{R_{30}}{R_{03}} = e^{2\varphi}, \\ q_a &\equiv \frac{A_{03}}{A_{30}} = \frac{1 + e^{-\varphi} - D}{De^{\varphi}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.33}$$

Очевидно, что вместо того, чтобы задать φ и D, можно задать q_r и q_a и определить по ним φ и D. Для этого служит обращение формул (10.33):

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}\ln q_r, \\ D &= \frac{\sqrt{q_r} + 1}{\sqrt{q_r}(1 + q_a\sqrt{q_r})}. \end{aligned}\right\} \tag{10.34}$$

Рассмотрим поближе зависимость между φ и D с одной и q_r и q_a с другой стороны, с целью узнать, какой выбор φ и D дает возможно большую несимметричность. Из второй формулы (10.33) видно, что q_a тем больше, чем меньше D. Зависимость же q_r и q_a от φ такова, что с ростом φ q_r растет, а q_a убывает.

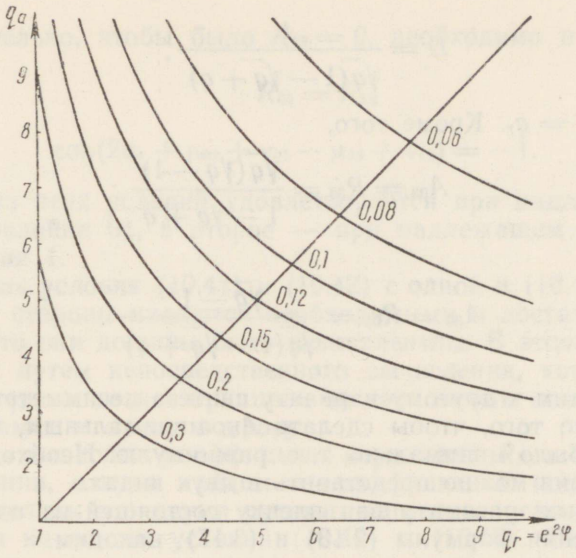

Рис. 43.

Поэтому значение φ приходится выбирать компромиссным образом, с учетом выбранного значения D. Компромисс достигается, очевидно, тем легче, чем меньше значение D. Для иллюстрации сказанного на рис. 43 приведены графики q_a в зависимости от $q_r = e^{2\varphi}$, причем параметром служит D. Соответствующая формула получается из (10.33) в виде:

$$q_a = \frac{1 + (1 - D)\sqrt{q_r}}{D q_r}, \tag{10.35}$$

Гиперболообразная форма кривых $D = \text{const}$. наглядно иллюстрирует необходимость компромисса при выборе φ.

Отношения q_a и q_r определяют также отношения A_{03}/R_{03} и R_{30}/A_{30}, которые тоже характеризуют степень несимметричности. Именно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_{03}}{R_{03}} &= \frac{(q_r - 1) q_a}{q_a - 1}, \\ \frac{R_{30}}{A_{30}} &= \frac{(q_a - 1) q_r}{q_r - 1} \end{aligned}\right\}. \tag{10.36}$$

Ясно, что при $q_a = q_r$ («симметричная несимметричность») $A_{03} = R_{30}$ и $R_{03} = A_{30}$. В этом случае, как вытекает из (10.34),

$$D = \frac{1}{\sqrt{q}(1-\sqrt{q}+q)}, \tag{10.37}$$

где $q \equiv q_a = q_r$. Кроме того,

$$A_{03} = R_{30} = \frac{\sqrt{q}(\sqrt{q}-1)}{1-\sqrt{q}+q} \tag{10.38}$$

и

$$A_{30} = R_{03} = \frac{\sqrt{q}-1}{\sqrt{q}(1-\sqrt{q}+q)}. \tag{10.39}$$

Переходим к другому варианту синтеза несимметричных зеркал. Вместо того, чтобы сделать A_{30} минимальным, потребуем, чтобы R_{03} было минимально, т. е. равно нулю. Необходимые для этого условия можно представить в двух видах.

Во-первых, рассматривая пленку состоящей из пленок 02 и 23 и применяя формулы (2.13) и (3.17), находим:

$$a_{03} = -\tilde{a}^*_{20} b_{32} e^{i\alpha_2} - a^*_{32} \tilde{b}^*_{20} e^{-i\alpha_2},$$

откуда следует:

$$\frac{R_{03}}{D_{03}} = \frac{1}{D_{32}\tilde{D}_{20}} [\tilde{R}_{20} + R_{32} + 2\sqrt{\tilde{R}_{20} R_{32}} \cos(2\alpha_2 + \mu_{32} + \nu_{32} - \tilde{\mu}_{20} + \tilde{\nu}_{20})]. \tag{10.40}$$

Следовательно, для $R_{03} = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{32} = \tilde{R}_{20} \tag{10.41}$$

и

$$\cos(2\alpha_2 + \mu_{32} + \nu_{32} - \tilde{\mu}_{20} + \tilde{\nu}_{20}) = -1. \tag{10.42}$$

Первое из этих условий выполняется путем надлежащего выбора прослойки 32, а второе — путем надлежащего выбора толщины слоя 2.

Во-вторых, мы можем рассматривать пленку 03 как совокупность пленок 01 и 13. Тогда

$$a_{03} = a_{01} b_{13} e^{i\alpha_1} + a_{13} b^*_{01} e^{-i\alpha_1},$$

откуда

$$\frac{R_{03}}{D_{03}} = \frac{1}{D_{01} D_{13}} [R_{01} + R_{13} + 2\sqrt{R_{01} R_{13}} \cos(2\alpha_1 + \mu_{01} + \nu_{01} - \mu_{13} + \nu_{13})]. \tag{10.43}$$

Следовательно, чтобы было $R_{03} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{01} = R_{13} \tag{10.44}$$

и

$$\cos(2\alpha_1 + \mu_{01} + \nu_{01} - \mu_{13} + \nu_{13}) = -1. \tag{10.45}$$

Первое из этих условий удовлетворяется при надлежащем выборе прослойки 01, а второе — при надлежащем выборе толщины слоя 1.

Так как условия (10.41) и (10.42) с одной и (10.44) и (10.45) с другой стороны являются необходимыми и достаточными для $R_{03} = 0$, то они должны быть эквивалентны. В этом можно убедиться и путем непосредственного вычисления, которое не лишено интереса, хотя в принципе не дает ничего нового. В конце мы вернемся к этому вопросу.

Теперь вычислим коэффициент отражения R_{30} и коэффициент пропускания, откуда найдем и коэффициенты поглощения A_{03} и A_{30}. Сделаем это двумя путями: на основе условий (10.41) и (10.42) и на основе условий (10.44) и (10.45). Окончательные результаты должны совпасть, в силу эквивалентности тех и других условий. Тем не менее, в промежуточных вычислениях получаются различные по форме результаты, хотя они тоже, конечно, эквивалентны. В практических задачах может оказаться полезным знание обоих этих представлений.

Итак, будем, во-первых, исходить из условий (10.41) и (10.42). Рассматривая по-прежнему пленку как совокупность пленок 02 и 23, находим:

$$a_{30} = a_{32}b_{20}e^{i\alpha_2} + a_{20}b_{32}^{*}e^{-i\alpha_2},$$

откуда

$$\frac{R_{30}}{D_{30}} = \frac{1}{D_{32}D_{20}}[R_{32} + R_{20} +$$

$$+ 2\sqrt{R_{32}R_{20}}\cos(2\alpha_2 + \mu_{32} + \nu_{32} - \mu_{20} + \nu_{20})].$$

Подставляя сюда $\tilde{R}_{20}$ вместо R_{32} из (10.41) и учитывая (10.42), находим:

$$\frac{R_{30}}{D_{30}} = \frac{1}{D_{20}(1 - \tilde{R}_{20})}[\tilde{R}_{20} + R_{20} -$$

$$- 2\sqrt{R_{20}\tilde{R}_{20}}\cos(\tilde{\mu}_{20} - \mu_{20} + \nu_{20} - \tilde{\nu}_{20})].$$

Отсюда

$$\frac{R_{30}}{D_{30}} = \frac{1}{1 + \dfrac{A_{20}}{\tilde{D}_{20}}}|\tilde{a}_{20}b_{20} - a_{20}\tilde{b}_{20}|^2,$$

или

$$\frac{R_{30}}{D_{30}} = \frac{U_{20}^2}{\operatorname{ch}\varphi - S_{20}}. \tag{10.46}$$

Далее,

$$b_{30} = b_{32}b_{20}e^{i\alpha_2} + a_{20}\overset{\bullet}{a}_{32}e^{-i\alpha_2},$$

откуда

$$\frac{1}{D_{30}} = \frac{1}{D_{32}D_{20}}[1 + R_{20}R_{32} +$$

$$+ 2\sqrt{R_{32}R_{20}}\cos(2\alpha_2 + \mu_{32} + \nu_{32} - \mu_{20} + \nu_{20})].$$

Поступая аналогичным образом, находим:

$$\frac{1}{D_{30}} = \frac{1}{1 + \dfrac{A_{20}}{D_{20}}}\left|b_{20}\tilde{b}_{20}^{\bullet} - a_{20}\tilde{a}_{20}^{\bullet}\right|^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{D_{30}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi - S_{20}}. \tag{10.47}$$

Отсюда и из формулы (10.46) находим:

$$R_{30} = U_{20}^2 = S_{20}^2 - \operatorname{sh}^2\varphi, \tag{10.48}$$

$$D \equiv D_{30} = D_{03} = \operatorname{ch}\varphi - S_{20}, \tag{10.49}$$

и, учитывая, что $R_{03} = 0$,

$$A_{03} = 1 + S_{20} - \operatorname{ch}\varphi, \tag{10.50}$$

$$A_{30} = (\operatorname{ch}\varphi - S_{20})(\operatorname{ch}\varphi + S_{20} - 1). \tag{10.51}$$

Входящая в эти формулы величина S_{20} зависит, кроме поглощающей части 12, еще только от непоглощающей части 01 и от промежуточного слоя 1. Аналогично (10.29) для S_{20} можно написать формулу:

$$S_{20} = \frac{(1 + R_{10})S_{21} + 2U_{21}\sqrt{R_{10}}\cos(2\alpha_1 + \sigma_{21} - \mu_{10} + \nu_{10})}{1 - R_{10}}, \tag{10.52}$$

откуда видно, что S_{20} может иметь сколь угодно большие значения, в зависимости от выбора α_1 и R_{10}. Эти последние величины можно выбирать произвольно, так как условия (10.41) и (10.42) их не затрагивают. Впрочем, к условию (10.41) принадлежит добавочное условие

$$\tilde{R}_{20} < 1, \tag{10.53}$$

без которого (10.41) выполняться не может. Из этого условия следует, что $\tilde{A}_{20}+\tilde{D}_{20}>0$, откуда

$$S_{20}<\operatorname{ch}\varphi. \tag{10.54}$$

Только этому условию и должен удовлетворять выбор α_1 и R_{10}, в остальном же они произвольны. Условие (10.54) гарантирует также положительность D в формуле (10.49) и неравенство $R_{30}<1$ в формуле (10.48), так как, если $S_{20}<\operatorname{ch}\varphi$, то $S_{20}^2-\operatorname{sh}^2\varphi<1$. Положительность A_{03} и A_{30} вытекает отсюда же, с учетом того, что $S_{20}>\operatorname{sh}\varphi$.

Исключая S_{20}, можно привести формулы (10.48)—(10.51) к виду:

$$\left.\begin{aligned} R_{03}&=0,\\ R_{30}&=1-2D\operatorname{ch}\varphi+D^2,\\ A_{03}&=1-D,\\ A_{30}&=D(2\operatorname{ch}\varphi-1-D), \end{aligned}\right\} \tag{10.55}$$

где φ и D задаются независимо друг от друга (φ зависит только от поглощающей части 12, а D, через S_{20}, также от части 10 и от промежуточного слоя 1). На D накладывается только одно ограничение, вытекающее из формулы (10.49), а именно:

$$D<e^{-\varphi}. \tag{10.56}$$

Перейдем ко второму способу, в котором за основу принимаются условия (10.44) и (10.45). Заметим, что эти условия выполнимы без всяких дополнительных условий типа (10.54). Рассматривая пленку состоящей из частей 01 и 13, находим:

$$a_{30}=-\tilde{a}_{13}^{*}b_{01}e^{i\alpha_1}-a_{01}^{*}\tilde{b}_{13}^{*}e^{-i\alpha_1},$$

откуда

$$\frac{R_{30}}{D_{30}}=\frac{1}{D_{01}\tilde{D}_{13}}\Big[R_{01}+\tilde{R}_{13}+$$

$$+2\sqrt{R_{01}\tilde{R}_{13}}\cos(2\alpha_1+\mu_{01}+\nu_{01}-\tilde{\mu}_{13}+\tilde{\nu}_{13})\Big].$$

Применяя условия (10.44) и (10.45), находим:

$$\frac{R_{30}}{D_{30}}=\frac{1}{1+\dfrac{A_{13}}{D_{13}}}\left|\tilde{a}_{13}b_{13}-a_{13}\tilde{b}_{13}\right|^2,$$

т. е.

$$\frac{R_{30}}{D_{30}}=\frac{U_{13}^2}{\operatorname{ch}\varphi+S_{13}}. \tag{10.57}$$

Во-вторых,

$$b_{03} = b_{01}b_{13}e^{i\alpha_1} + a_{13}a_{01}^{*}e^{-i\alpha_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{D_{03}} = \frac{1}{D_{01}D_{13}}\left[1 + R_{01}R_{13} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{R_{01}R_{13}}\cos(2\alpha_1 + \mu_{01} + \nu_{01} - \mu_{13} + \nu_{13})\right].$$

Учет условий (10.44) и (10.45) дает:

$$\frac{1}{D_{03}} = \frac{1 - R_{13}}{D_{13}},$$

т. е.

$$\frac{1}{D_{03}} = \operatorname{ch}\varphi + S_{13}. \tag{10.58}$$

Следовательно,

$$R_{30} = \frac{U_{13}^2}{(\operatorname{ch}\varphi + S_{13})^2} = \frac{S_{13}^2 - \operatorname{sh}^2\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi + S_{13})^2}, \tag{10.59}$$

$$D \equiv D_{03} = D_{30} = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi + S_{13}}, \tag{10.60}$$

$$A_{03} = \frac{\operatorname{ch}\varphi + S_{13} - 1}{\operatorname{ch}\varphi + S_{13}} \tag{10.61}$$

и

$$A_{30} = \frac{2\operatorname{ch}\varphi - 1}{\operatorname{ch}\varphi + S_{13}} - \frac{1}{(\operatorname{ch}\varphi + S_{13})^2}. \tag{10.62}$$

Входящая в эти формулы величина S_{13} зависит от промежуточного слоя 2 и от части 23 пленки по формуле:

$$S_{13} = \frac{(1 + R_{23})S_{12} + 2U_{12}\sqrt{R_{23}}\cos(2\alpha_2 + \sigma_{12} - \mu_{23} + \nu_{23})}{1 - R_{23}}; \tag{10.63}$$

а так как условия (10.44) и (10.45) оставляют слой 2 и часть 23 произвольными, то S_{13} тоже может иметь любое, сколь угодно большое значение.

Если теперь исключим S_{13} из формул (10.59)—(10.62), то получим в точности те же формулы (10.55), что мы получили уже по первому способу. Этим подтверждается эквивалентность обоих результатов.

Но так как исходные условия (10.41), (10.42) и (10.44), (10.45), а также формулы (10.48)—(10.52) с одной и (10.59)—(10.63) с другой стороны имеют различный вид, то представ-

ляется нелишним обнаружить непосредственным вычислением эту эквивалентность, так сказать, в явном виде. На первый взгляд может показаться, что условия (10.41), (10.42) и (10.44), (10.45) не только не эквивалентны, но даже противоречат друг другу. В самом деле, условие (10.42) заставляет выбрать определенным образом толщину второго промежуточного слоя, тогда как толщина первого остается произвольной и определяет, согласно (10.52), только S_{20}. По условию (10.45) и равенству (10.63) дело обстоит как раз наоборот: толщина первого промежуточного слоя фиксируется, а второго остается произвольной. Однако, это противоречие является кажущимся, так как в условия (10.42) и (10.45) входят также величины μ_{13}, ν_{13}, $\tilde{\mu}_{20}$ и $\tilde{\nu}_{20}$. Поэтому толщины обоих промежуточных слоев на самом деле соопределяются условиями несимметричности. Толщину одного из них можно выбирать произвольно, и тогда толщина другого определяется условием несимметричности, но притом именно так, что если мы эту толщину выберем как произвольную, то толщина первого определится такой, какой она была принята произвольно сначала. То же относится и к коэффициентам отражения крайних частей 01 и 23, соопределяемых условиями (10.41) и (10.44).

Чтобы убедиться в эквивалентности тех и других условий прямым вычислением, примем, что условия (10.41) и (10.42) выполнены, и покажем, что тогда должны выполняться также условия (10.44) и (10.45).

Вычислим сначала R_{13}. По известным формулам с учетом формул (10.41) и (10.42) находим:

$$R_{13} = \frac{R_{13}/D_{13}}{1/D_{13}} = \frac{|a_{12}b_{23}e^{i\alpha_2} + a_{23}\tilde{b}^*_{12}e^{-i\alpha_2}|^2}{|b_{12}b_{23}e^{i\alpha_2} + a_{23}\tilde{a}^*_{12}e^{-i\alpha_2}|^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{D_{23}}\left(\frac{R_{12}}{D_{12}} + \frac{R_{23}}{\tilde{D}_{12}} + 2\sqrt{\frac{R_{12}R_{23}}{D_{12}\tilde{D}_{12}}}\cos(2\alpha_2 + \mu_{12} + \tilde{\nu}_{12} - \mu_{23} + \nu_{23})\right)}{\frac{1}{D_{23}}\left(\frac{1}{D_{12}} + \frac{R_{23}\tilde{R}_{12}}{\tilde{D}_{12}} + 2\sqrt{\frac{\tilde{R}_{12}R_{23}}{D_{12}\tilde{D}_{12}}}\cos(2\alpha_2 + \tilde{\mu}_{12} + \nu_{12} - \mu_{23} + \nu_{23})\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\tilde{D}_{20}}\left(\frac{R_{12}}{D_{12}} + \frac{\tilde{R}_{20}}{\tilde{D}_{12}} - 2\sqrt{\frac{R_{12}\tilde{R}_{20}}{D_{12}\tilde{D}_{12}}}\cos(\mu_{12} + \tilde{\nu}_{12} + \tilde{\mu}_{20} - \tilde{\nu}_{20} - \mu_{23} - \mu_{32})\right)}{\frac{1}{\tilde{D}_{20}}\left(\frac{1}{D_{12}} + \frac{\tilde{R}_{20}\tilde{R}_{12}}{\tilde{D}_{12}} - 2\sqrt{\frac{\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{20}}{D_{12}\tilde{D}_{12}}}\cos(\tilde{\mu}_{12} + \nu_{12} + \tilde{\mu}_{20} - \tilde{\nu}_{20} - \mu_{23} - \mu_{32})\right)}$$

Но так как $a_{32} = -a_{23}^{*}$, то $\mu_{23} + \mu_{32} = \pi$. Следовательно,

$$R_{13} = \frac{|a_{12}^{*}\tilde{b}_{20} + \tilde{a}_{20}\tilde{b}_{12}|^2}{|b_{12}^{*}\tilde{b}_{20} + \tilde{a}_{20}\tilde{a}_{12}|^2}.$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{20} &= -a_{12}^{*}b_{01}e^{i\alpha_1} - a_{01}^{*}b_{12}^{*}e^{-i\alpha_1}, \\ \tilde{b}_{20} &= b_{01}\tilde{b}_{12}e^{i\alpha_1} + \tilde{a}_{12}a_{01}^{*}e^{-i\alpha_1}, \end{aligned} \tag{10.64}$$

находим после несложных преобразований:

$$R_{13} = \frac{a_{01}a_{01}^{*}}{b_{01}b_{01}^{*}} = R_{01},$$

что и совпадает с (10.44).

Во-вторых найдем

$$\cos(2\alpha_1 + \mu_{01} + \nu_{01} - \mu_{13} + \nu_{13}).$$

Для этого напишем

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{R_{13}}}{D_{13}} e^{i(-\mu_{13}+\nu_{13})} = a_{13}^{*}b_{13} = \\ &= (a_{12}^{*}b_{23}^{*}e^{-i\alpha_2} + a_{23}^{*}\tilde{b}_{12}e^{i\alpha_2})(b_{12}b_{23}e^{i\alpha_2} + a_{23}\tilde{a}_{12}^{*}e^{-i\alpha_2}) = \\ &= a_{12}^{*}b_{12}b_{23}b_{23} + \tilde{a}_{12}^{*}\tilde{b}_{12}a_{23}a_{23}^{*} + \\ &+ a_{23}^{*}b_{23}b_{12}\tilde{b}_{12}e^{2i\alpha_2} + a_{23}b_{23}^{*}a_{12}^{*}\tilde{a}_{12}^{*}e^{-2i\alpha_2}. \end{aligned}$$

Согласно (10.42) отсюда следует:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{R_{13}}}{D_{13}} e^{i(-\mu_{13}+\nu_{13})} = \\ &= \frac{1}{D_{23}}[a_{12}^{*}b_{12} + R_{23}\tilde{a}_{12}^{*}\tilde{b}_{12} + \sqrt{R_{23}}(b_{12}\tilde{b}_{12}e^{i(\tilde{\mu}_{20}-\tilde{\nu}_{20})} + \\ &+ a_{12}^{*}\tilde{a}_{12}^{*}e^{-i(\tilde{\mu}_{20}-\tilde{\nu}_{20})})]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\tilde{R}_{20}$ вместо R_{23}, находим:

$$\frac{D_{23}\sqrt{R_{13}}}{\tilde{D}_{20}D_{13}} e^{i(-\mu_{13}+\nu_{13})} = (a_{12}^{*}\tilde{b}_{20} + \tilde{a}_{20}\tilde{b}_{12})(b_{12}\tilde{b}_{20}^{*} + \tilde{a}_{20}^{*}\tilde{a}_{12}^{*}).$$

Подставляя, далее, вместо $\tilde{a}_{20}$ и $\tilde{b}_{20}$ выражения из формул (10.64), имеем:

$$\frac{D_{23}\sqrt{R_{13}}}{\tilde{D}_{20}D_{13}}e^{i(-\mu_{13}+\nu_{13})} = -\dot{a}_{01}\dot{b}_{01}e^{-2i\alpha_1}.$$

Отсюда с учетом (10.44) находим:

$$\frac{D_{01}D_{23}}{D_{13}\tilde{D}_{20}}\exp[i(2\alpha_1+\mu_{01}+\nu_{01}-\mu_{13}+\nu_{13})]=-1 \qquad (10.65)$$

откуда и вытекает требуемое равенство (10.45). Вдобавок (10.65) дает еще:

$$\frac{D_{01}D_{23}}{D_{13}\tilde{D}_{20}}=1,$$

или, учитывая, что $D_{23}=1-R_{23}=1-\tilde{R}_{20}=\tilde{D}_{20}+\tilde{A}_{20}$ и $D_{01}=$ $=1-R_{01}=1-R_{13}=D_{13}+A_{13}$,

$$(\operatorname{ch}\varphi+S_{13})(\operatorname{ch}\varphi-S_{20})=1. \qquad (10.66)$$

Этот результат согласуется с формулами (10.49) и (10.60), так как в обеих этих формулах D есть одна и та же величина.

Формулу (10.66) можно вывести еще другим способом. Из формулы (10.52) с учетом (10.44) и (10.45), следует:

$$\operatorname{ch}\varphi-S_{20}=\operatorname{ch}\varphi-\frac{1+R_{13}}{1-R_{13}}S_{21}-$$

$$-2U_{21}\frac{\sqrt{R_{13}}}{1-R_{13}}\cos(\sigma_{21}+\mu_{13}-\nu_{13})=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\varphi-S_{21}-R_{13}(\operatorname{ch}\varphi+S_{21})-2U_{21}\sqrt{R_{13}}\cos(\sigma_{21}+\mu_{13}-\nu_{13})}{A_{13}+\tilde{D}_{13}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{D_{13}}\left(1+\dfrac{\tilde{A}_{21}}{D_{21}}\right)-\dfrac{R_{13}}{D_{13}}\left(1+\dfrac{A_{21}}{D_{21}}\right)-\dfrac{2U_{21}\sqrt{R_{13}}}{D_{13}}\cos(\sigma_{21}+\mu_{13}-\nu_{13})}{\operatorname{ch}\varphi+S_{13}}=$$

$$=(\operatorname{ch}\varphi+S_{13})^{-1}[b_{13}\dot{b}_{13}(\tilde{b}_{21}\dot{\tilde{b}}_{21}-\tilde{a}_{21}\dot{\tilde{a}}_{21})-a_{13}\dot{a}_{13}(b_{21}\dot{b}_{21}-a_{21}\dot{a}_{21})-$$

$$-a_{13}\dot{b}_{13}(\tilde{a}_{21}b_{21}-a_{21}\tilde{b}_{21})-\dot{a}_{13}b_{13}(\dot{\tilde{a}}_{21}b_{21}-\dot{a}_{21}\tilde{b}_{21})].$$

Чтобы получить отсюда формулу (10.66), нужно показать, что числитель последнего выражения равен единице. В самом деле, раскрывая скобки и перегруппировывая члены, получаем выражение:

$$(b_{13}^{*}\tilde{b}_{12} - a_{13}^{*}\tilde{a}_{12})\,(b_{13}\tilde{b}_{12}^{*} - a_{13}\tilde{a}_{12}^{*}) -$$
$$-(b_{13}a_{12} - a_{13}b_{12})\,(b_{13}^{*}a_{12}^{*} - a_{13}^{*}b_{12}^{*}).$$

Если подставим сюда

$$a_{13} = a_{01}b_{12}e^{i\alpha_1} + a_{12}b_{01}^{*}e^{-i\alpha_1},$$
$$b_{13} = b_{01}b_{12}e^{i\alpha_1} + a_{12}a_{01}^{*}e^{-i\alpha_1},$$

то это выражение примет вид: $b_{23}b_{23}^{*} - a_{23}a_{23}^{*}$, что равно единице.

Этим показ эквивалентности условий (10.41), (10.42) и (10.44), (10.45) закончен.

Вернемся к формулам (10.55). Они представляют собой основной результат, аналогичный формулам (10.31) для первого варианта. Степень несимметричности зеркала выражается теперь только одним отношением

$$q \equiv \frac{A_{03}}{A_{30}} = \frac{1 - D}{D(2\operatorname{ch}\varphi - 1 - D)}, \qquad (10.67)$$

так как $\dfrac{R_{30}}{R_{03}}$ обращается в бесконечность. Из формулы (10.67) сразу видно, что q тем больше, чем меньше φ. Зависимость q от D характеризуется производной

$$\frac{\partial q}{\partial D} = \frac{1 + 2D - D^2 - 2\operatorname{ch}\varphi}{D^2(2\operatorname{ch}\varphi - 1 - D)^2}, \qquad (10.68)$$

которая всегда отрицательна. В самом деле, при $D = e^{-\varphi}$ числитель этого выражения равен $-2\operatorname{sh}\varphi(1 - e^{-\varphi}) < 0$, а так как $e^{-\varphi}$ есть максимальное значение D, и

$$\frac{\partial}{\partial D}(1 + 2D - D^2 - 2\operatorname{ch}\varphi) = 2 - 2D > 0,$$

то $1 + 2D - D^2 - 2\operatorname{ch}\varphi < 0$ при всех значениях D. Отсюда вытекает, что $\dfrac{\partial q}{\partial D} < 0$. Это значит, что q тем больше, чем меньше D. Наше зеркало, следовательно, тем эффективнее, чем меньше φ и чем меньше D. Этим рассматриваемый вариант несимметричного зеркала выгодно отличается от первого варианта, где характер зависимости несимметричности от φ требует компромиссного решения. Более выгодным является и то, что во втором варианте $q_r \to \infty$. На рис. 44 приведены графики D и R_{30} в зависимости от D (абсцисса) и φ (параметр), иллюстрирующие зависимость степени несимметричности от D и φ. Диаго-

наль квадрата есть график D в зависимости от D, причем значения D отсчитываются по ординате снизу. Кривые линии (параболы) являются графиками R_{30} в зависимости от D и параметра φ. Значения R_{30} отсчитываются по ординате сверху. Таким образом, проведенная в любом месте графика вертикальная прямая линия делится внутри квадрата диагональю и какой-либо параболой на три части, изображающие значения D_{30}, A_{30} и R_{30} (снизу вверх). Максимальным значениям D, равным, согласно (10.56), $e^{-\varphi}$, соответствуют точки пересечения парабол с верхней горизонтальной стороной квадрата. При $D = e^{-\varphi}$ становится $R_{30} = 0$, т. е. несимметричность исчезает. В этом случае пленка становится двусторонне просветленной, так как согласно (10.48) и (10.59), $U_{20} = U_{13} = 0$.

В дополнение к рис. 44 на рис. 45 приведены графики q в зависимости от $\operatorname{ch}\varphi$ и D (формула (10.67)).

В заключение отметим следующее замечательное обстоятельство. Если φ очень мало, то можно и D независимо от φ сделать столь малым, что A_{03} будет близко к единице (так как $R_{03} = 0$). Но малость φ означает, что поглощающие слои в пленке 12 очень тонки. Тем не менее, эта пленка, даже если она содержит только один предельно тонкий поглощающий слой, поглощает падающий свет (в направлении $0 \to 3$) почти полностью. Правда, для этого, согласно формулам (10.58) и (10.63),

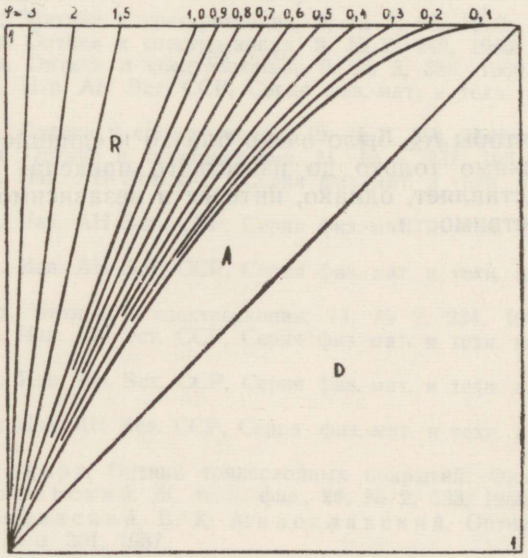

Рис. 44.

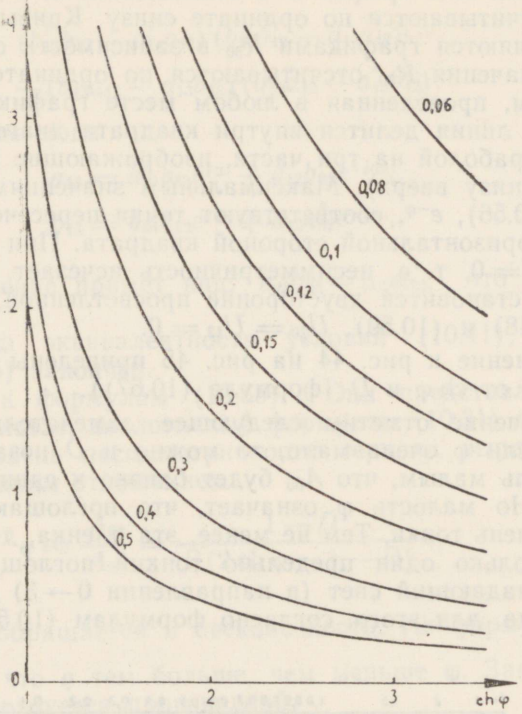

Рис. 45.

требуется, чтобы R_{23} было очень близко к единице, что на практике достижимо только до известного предела. Теоретический вывод представляет, однако, интерес и независимо от практической осуществимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Кард. Докл. АН СССР, **108**, № 1, 60, 1956.
2. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **2**, № 2, 236, 1957.
3. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **2**, № 2, 245, 1957.
4. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия техн. и физ.-мат. наук, **6**, № 4, 344, 1957.
5. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **4**, № 5, 643, 1958.
6. П. Г. Кард. Уч. записки Тартуского гос. ун-та, **62**, 169, 1958.
7. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия техн. и физ.-мат. наук, **7**, № 4, 283, 1958.
8. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **6**, № 3, 389, 1959.
9. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **6**, № 4, 533, 1959.
10. P. Kard. Loodus ja matemaatika, **1**, 67, 1959.
11. П. Г. Кард. Уч. записки Тартуского гос. ун-та, **74**, 56, 1959.
12. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия техн. и физ.-мат. наук, **9**, № 1, 26, 1960.
13. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **9**, № 1, 95, 1960.
14. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **9**, № 2, 248, 1960.
15. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **9**, № 3, 386, 1960.
16. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **9**, № 3, 250, 1960.
17. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **10**, № 3, 384, 1961.
18. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **11**, № 2, 237, 1961.
19. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **10**, № 4, 340, 1961.
20. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **11**, № 1, 10, 1962.
21. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **11**, № 3, 159, 1962.
22. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **14**, № 2, 234, 1963.
23. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **12**, № 1, 3, 1963.
24. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **12**, № 2, 115, 1963.
25. П. Г. Кард. Изв. АН Эст. ССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, **12**, № 4, 359, 1964.
26. Г. В. Розенберг. Оптика тонкослойных покрытий. Физматгиз, 1958.
27. И. Н. Шкляревский. Ж. техн. физ., **26**, № 2, 333, 1956.
28. И. Н. Шкляревский, В. К. Милославский. Оптика и спектроскопия, **3**, № 3, 361, 1957.
29. М. П. Лисица. Оптика и спектроскопия, **9**, № 1, 130, 1960.
30. И. Н. Шкляревский, Н. А. Власенко, В. К. Милославский, Н. А. Носуленко. Оптика и спектроскопия, **9**, № 5, 640, 1960.

31. Н. Я. Горбань, И. А. Шайкевич. Оптика и спектроскопия, **11**, № 6, 750, 1961.
32. Л. Дунайски. Чехосл. физич. ж., **12B**, № 10, 742, 1962.
33. Л. Дунайски. Оптика и спектроскопия, **12**, № 6, 792, 1962.
34. И. Н. Шкляревский, В. К. Милославский. Оптика и спектроскопия, **12**, № 6, 793, 1962.
35. И. Н. Шкляревский, Н. А. Носуленко. Оптика и спектроскопия, **14**, № 2, 247, 1963.
36. А. В. Соколов. Оптические свойства металлов. Физматгиз, 1961.
37. Z. Knittl. Czechosl. Journ. Phys., **7**, No. 4, 427, 1957.
38. I. Santavý. Optica Acta, **8**, No. 4, 301, 1961.
39. А. Г. Власов (и др.). Просветление оптики. Гостехиздат, 1946.
40. F. Abelès. Ann. de phys., **3**, No. 4, 504, 1948.
41. F. Abelès. Ann. de phys., **5**, No. 5, 596, 1950.
42. F. Abelès. Ann. de phys., **5**, No. 6, 706, 1950.
43. K. Ishiguro, T. Kato. Journ. phys. soc. Japan, **8**, No. 1, 77, 1953.
44. А. П. Хапалюк. Диссертация. Минск, 1962.
45. А. П. Хапалюк. Инж.-физ. журнал, **3**, № 3, 59, 1960.
46. А. П. Хапалюк, Б. И. Степанов, Б. А. Сотский. Оптика и спектроскопия, **13**, № 2, 282, 1962.
47. Z. Knittl. Optica Acta, **9**, No. 1, 33, 1962.
48. A. F. Turner. Journ. phys. et radium, **11**, No. 7, 444, 1950.
49. P. H. Berning. J. Opt. Soc. America, **46**, No. 10, 779, 1956.
50. C. Dufour, A. Herpin. Revue d'opt. théor. et instr., **32**, No. 6, 321, 1953.
51. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Том III, часть 1. ГИТТЛ, 1949.
52. Г. В. Розенберг. Успехи физ. наук, **56**, № 1, 77, 1955.
53. И. Н. Шкляревский, А. А. Авдеенко. Оптика и спектроскопия, **6**, № 5, 678, 1959.
54. Г. Димитров, Д. Бэкер. Телескопы. Гостехиздат, 1947.
55. Т. Н. Крылова, Р. С. Соколова. Оптика и спектроскопия, **2**, № 2, 254, 1957.
56. G. H. Godfrey. Australian Journ. Phys., **10**, No. 1, 1, 1957.
57. З. В. Широкшина, Н. В. Суйковская. Оптика и спектроскопия, **4**, № 1, 82, 1958.
58. H. Pohlack. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau, **3**, No. 3—4, 277, 1957.
59. H. Pohlack. Jenaer Jahrbuch, 1952, 181.
60. H. Pohlack. Jenaer Jahrbuch, 1956, 79.
61. R. J. Pegis. J. Opt. Soc. America. **51**, No. 11, 1255, 1961.
62. К. И. Тарасов. Оптика и спектроскопия, **6**, № 1, 94, 1959.
63. P. H. Berning, A. F. Turner. J. Opt. Soc. America, **47**, No. 3, 230, 1957.
64. H. Pohlack. Jenaer Jahrbuch, 1953, 241.
65. H. Pohlack. Jenaer Jahrbuch, 1954, I, 76.
66. H. Pohlack, Jenaer Jahrbuch, 1954, II, 430.
67. H. Pohlack. Optik und Spektroskopie aller Wellenlängen. Akademie-Verlag, Berlin, 1962, 93.
68. H. Koch. Optik und Spektroskopie aller Wellenlängen. Akademie-Verlag, Berlin, 1962, 139.
69. R. C. Faust. Phil. Mag., **41**, No. 323, 1238, 1950.
70. P. W. Baumeister, F. A. Jenkins, M. A. Jeppesen, J. Opt. Soc. America, **49**, No. 12, 1188, 1959.
71. Ф. А. Королев. Вестн. Моск. ун-та. Серия матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 3, 97.
72. Ф. А. Королев, А. Ю. Клементьева, Т. Ф. Мещерякова. Инж.-физ. журнал, **3**, № 1, 55, 1960.
73. P. Leurgans, A. F. Turner, J. Opt. Soc. America, **37**, No. 12, 983, 1947.

74. B. H. Billings, M. A. Pittman. J. Opt. Soc. America, **39**, No. 12, 978, 1949.
75. H. D. Polster. J. Opt. Soc. America, **39**, No. 12, 1038, 1949.
76. B. H. Billings. J. Opt. Soc. America, **39**, No. 7, 634, 1949.
77. B. H. Billings. J. Opt. Soc. America, **40**, No. 7, 471, 1950.
78. Л. В. Иогансен. Оптика и спектроскопия, **11**, № 4, 542, 1961.
79. Л. В. Иогансен. Оптика и спектроскопия, **12**, № 2, 318, 1962.
80. Л. В. Иогансен. Оптика и спектроскопия, **13**, № 2, 266, 1962.
81. Л. В. Иогансен. Оптика и спектроскопия, **14**, № 1, 131, 1963.
82. Л. В. Иогансен. Ж. эксп. и теор. физики, **40**, № 6, 1838, 1961.
83. Л. В. Иогансен. Ж. техн. физики, **32**, № 4, 406, 1962.
84. P. Lostis. Journ. phys. et radium, **18**, No. 11, S51, 1957.
85. P. Lostis. Revue optique, **38**, No. 1, 1, 1959.
86. Г. В. Розенберг. Успехи физ. наук, **47**, № 1, 3, 1952.
87. F. Abelès. Journ. phys. et radium, **11**, No. 7, 403, 1950.
88. R. Messner. Feinwerktechnik, **57**, No. 5, 142, 1953.
89. M. Banning. J. Opt. Soc. America, **37**, No. 10, 792, 1947.
90. H. Schröder, R. Schlafer. Zs. f. Naturforschung, **4a**, No. 10, 576, 1948.
91. Ф. А. Маковский. Ж. техн. физики, **24**, № 10, 1859, 1954.
92. П. Г. Кард. Труды Инст. физ. и астр. АН Эст. ССР, № 5, 54, 1957.
93. A. R. Cownie. J. Opt. Soc. America, **53**, No. 4, 425, 1963.
94. П. Г. Кард. Оптика и спектроскопия, **18**, № 4, 684, 1965.
95. H. Pohlack. Optik aller Wellenlängen. Berlin, 1959, 363.
96. A. R. Cownie. J. Opt. Soc. America, **47**, No. 2, 132, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5
Часть первая. Общая теория анализа многослойных интерференционных пленок 11
Глава первая. Общие предпосылки 11
Глава вторая. Метод рекуррентных формул 20
Глава третья. Матричный метод 25
Глава четвертая. Дальнейшее развитие теории 36
Глава пятая. Общие свойства поглощающих пленок 56
Часть вторая. Проблема синтеза пленок 79
Глава шестая. Теория просветления оптических поверхностей . . 79
Глава седьмая. Синтез нейтральных диэлектрических светоделителей 110
Глава восьмая. Теория просветления поглощающих пленок . . . 138
Глава девятая. Светофильтры с нарушенным полным отражением 180
Глава десятая. Некоторые другие применения интерференционных пленок 209
Литература 231

Пауль Георгиевич Кард. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МНОГОСЛОЙНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПЛЕНОК. На русском языке. Художественное оформление Т. Ару. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10. Редактор А. Ларетей. Художественный редактор А. Сяде. Технический редактор Х. Коху. Корректоры Е. Ракеева, Х. Ууспылд. Сдано в набор 27 X 1969. Подписано к печати 1 VI 1971. Бумага 60×90/16. Печатных листов 14.75. Учётно-издательских листов 11.9. Тираж 1000 экз. МВ-05342. № заказа 6384. Типография им. Ханса Хейдеманна. Тарту, Юликооли, 17/19. II.

Цена руб. 1.44

X
1 A 18 029
504 992