

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM
EESTI NSV PEDAGOOGIKA TEADUSLIKU UURIMISE INSTITUUT

**JÄRKJÄRGULISE
LÄHENDAMISE
MEETODIST
KOOLI-
MATEMAATIKAS**

A-23592

EESTI NSV PEDAGOOGIKA TEADUSLIKU UURIMISE
INSTITUUT

A. TELGMAA

JÄRKJÄRGULISE
LÄHENDAMISE MEETODIST
KOOLIMATEMAATIKAS

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM
TALLINN 1965

Toimetaja E. Noor.

Kirjastatakse Eesti NSV Pedagoogika Teadusliku
Uurimise Instituudi Teadusliku Nõukogu otsusel.

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

SISSEJUHATUS

Matemaatika osatähtsus ühiskondliku elu kõigil aladel on viimastel aastatel järsult suurenenud. Kaasajal ei kasutata matemaatilisi meetodeid enam mitte ainult sellistel traditsioonilistel matemaatilist aparatuuri nõudvatel teadusaladel, nagu mehaanika, astronoomia, geodeesia, vaid need tungivad ka majandusteadusesse, keeleteadusesse, ühiskonnateadustesse, meditsiini jne. Matemaatika üha kasvavat tähtsust on rõhutatud ka NLKP programmis:

«**Matemaatika, füüsika, keemia ja bioloogia** kõrge arengutase on tehniliste, meditsiiniliste, põllumajandusteaduste ning teiste teadusharude tõusu ja efektiivsuse vajalik tingimus.»¹

Samas püstitatakse konkreetsed ülesanded keskkoolile:

«Keskharidus peab tagama teaduse aluste kindla tundmise, kommunistliku maailmavaate põhimõtete omandamise (minu sõrendus — A. T.), tööalase ja polütehnilise ettevalmistuse vastavalt teaduse ja tehnika tõusvale tasemele...»²

Nendest kaasaja ühes kõige tähtsamas dokumendis esitatud nõuetest lähtudes tuleb teha õpetamise kohta üldse, eriti aga matemaatika õpetamise kohta järgmised järeldused:

1) Matemaatika osatähtsus üldhariduse süsteemis peab tõusma.

2) Matemaatikat tuleb õpetada nii, et ta tagaks keskkooli lõpetajale tegelikus elus vajaminevad teadmised ja oskused.

¹ Nõukogude Liidu Kommunistliku Partei programm. Tallinn, 1961, lk. 116.

² Samas, lk. 114.

3) Matemaatika õppimine ei tohi olla formaalne, mitte ainult teatavate faktide ja oskuste, vaid ka teaduse aluste kindel omandamine.

4) Kogu õppetöö peab olema kommunistlikult kasvatav.

Nimetatud ülesannete täitmiseks on matemaatika õpetamise ümberkorraldamisel juba paljud korda saadetud. On koostatud uued matemaatika programmid, millede on senistest erinevalt märksa enam arvestatud koolimatemaatika lähendamise nõuet matemaatikateadusele. Uute programmide kohaselt on koostatud ja koostamisel ka uued, ajakohased õpikud.

Matemaatikateaduse aluste kindlaks omandamiseks on vajalik, et õpilane ei omandaks mitte ainult üksikuid spetsiifilisi teadmisi ja oskusi, vaid ka matemaatikas rakendamist leidvaid üldisi meetodeid, üldisi põhiluseid (printsiipe), millest juhindutakse teatava küsimusteriingi uurimisel. Käesolevas töös nimetatakse selliseid üldisi printsiipe hodogeetilisteks¹ printsiipideks.

Hodogeetilise printsiiibi mõistet teaduses selgitatakse töö esimeses peatükis kolme näite varal, milledest üks kuulub pedagoogika valdkonda, kaks matemaatikateadusesse.

Teises osas käsitletakse järkjärgulise lähendamise meetodi olemust ja näidatakse, et see meetod on matemaatikas üheks hodogeetiliseks printsiiibiks.

Kolmandas peatükis vaadeldakse mõningaid järkjärgulise lähendamise meetodi rakendamise võimalusi koolimatemaatikas.

¹ hodogeetiline (kreekakeelsest sõnast *hodos* - tee) — teedjuhatav, teednäitav.

I. HODOGEETILISTE PRINTSIIPIDE VAJADUS

§ 1. Kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiip nõukogude didaktikas

Kaasaegse nõukogude ühiskonna tootlikud jõud on arenenud sellisele tasemele, et me ühiskond elab ja töötab kommunismi laiahaardelise ehitamise ajajärgul. Sel perioodil on ühiskonna materiaalse baasi arendamise kõrval erakordne tähtsus uue inimese kommunistlikul kasvatamisel. Kommunistliku ühiskonna inimene peab olema vaimselt rikas, moraalselt puhas ja füüsiliselt täiuslik. Ta peab olema vaba kõigist igandlikest omadustest, nagu eraomandlikust egoismist, väikekodanlikust mõtte-laadist, individualismist jne. Seega on inimese kommunistlik kasvatamine ühiskonna edasise arengu vajalikuks eelduseks.

Inimese kommunistlikul kasvatamisel on eriti tähtis osa koolil, kus õpilane omandab õppeprotsessis teadmisi, oskusi ja vilumusi.

Nõukogude koolis on õpetamine olnud alati kasvatusliku iseloomuga, ta on kasvatuse peamiseks vahendiks. Kasvatuslik efekt saavutatakse eeskätt õppeaine sisu kaudu: loodus- ja ühiskondlike nähtuste ning nende arenemise seaduspärasuste õige käsitlus peab tagama õpilase materialistliku maailmavaate kujunemise.

Opetuse kasvatuslik mõju oleneb ka sellest, milliste meetoditega õpetatakse. Kui teadmisi pakutakse dogmaatiliselt ja formaalselt, nähtusi omavahel seostamata, siis on õpetuse kasvatuslik mõju endastmõistetavalt minimaalne. Kui aga fakte esitatakse nendevahelistes seostes ja suhetes, teadusalaseid teadmisi seostatakse meie igapäevase elu nähtustega ja pannakse seejuures õpilase mõtte aktiivselt tööle, siis on ka kasvatuslik mõju suurem.

1951. a. tehti ajakirja «Советская педагогика» veergudel kokkuvõtte diskussioonist nõukogude didaktika printsiipide üle. Seal püstitati nõue formuleerida kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiip nõukogude didaktika peamise printsiibina (42).¹

Veel aktuaalsem on nimetatud põhimõtte muutmine juhtivaks printsiibiks kaasajal, kommunistliku ühiskonna laiahaardelise ehitamise perioodil. Nimetatud nõude esitamine on õigustatud seda enam, et õpetuse ja kasvatus ühtsusele ei ole meie koolis pööratud küllaldast tähelepanu. Seda tõsiasja märkis NLKP Keskkomitee 1963. a. juunipleenumil ka sm. L. F. Iljitšov, öeldes:

«Teatav õpetuse ja kasvatus lahusesimine on tõsine puudus, millest kool ei ole veel jagu saanud» (2, lk. 43).

Kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiibist tuleb juhinduda kõigi didaktikasse puutuvate probleemide lahendamisel:

- 1) õppeainete valikul²;
- 2) õppemeetodite valikul;
- 3) õppeplaanide ja -programmide koostamisel;
- 4) õpikute koostamisel ja muude õppevahendite valmistamisel;
- 5) õppekabinettide sisustamisel;
- 6) pedagoogilise kaadri valikul ja ettevalmistamisel.

Kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiibist peab juhinduma iga õpetaja, sõltumata sellest, missugust ainet ta õpetab.

Didaktika kõik teised printsiibid (näitlikkus, teadlikkus ja aktiivsus, teaduslikkus ja süstemaatilisus jt.) on kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiibi teenistuses, sest nende maksimaalne järgimine tagab edukama kommunistliku kasvatus.

Kõigist ülalloodud põhjustest lähtudes nimetabki autor kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiipi nõukogude didaktika hodgeetiliseks printsiibiks.

¹ Siin ja edaspidi vt. kirjanduse loetelu.

² Kommunistlikult kasvatava õpetuse nõue tingis näiteks ühiskonnaõpetuse lülitamise keskkooli õppeainete hulka, samuti suurema tähelepanu omistamise õpilaste praktilisele tööle.

§ 2. Erlangeni programm

1872. a. ilmus tuntud teadlase ja pädagoogi F. Kleini¹ sulest erinevaid geomeetrialiike käsitlev uurimus «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» («Uuemate geomeetriliste uurimuste võrdlev ülevaade»).

See uurimus on muutunud geomeetria-aläseks programm dokumendiks ja matemaatikas tuntaksegi seda tema ilmumiskoha — Erlangeni linna järgi «Erlangeni programmi» nime all.

F. Klein märgib, et ühtsest geomeetriast on viimasel ajal hakanud eralduma iseseisvad geomeetriad; eriti tähelepanuväärselt on viimase 50 aasta jooksul arenenud projektiivne geomeetria. Ta viitab siinjuures inglise geomeetritele A. Cayley'le, kes väljendas 1859. a. mõtte «projective geometry is all geometry» («projektiivne geomeetria on kogu geomeetria»), kinriitades sellega, et nii afiinne kui ka meetriline geomeetria on projektiivse geomeetria erijuhud (44, lk. 224).

F. Klein püstitab probleemi: kas ei leidu üldist printsiipi, millest tuleneksid geomeetria erinevad meetodid.

Küsimuse lahendamisel lähtub F. Klein geomeetriliste teisenduste rühma² mõistest (10, lk. 462).

Olgu antud geomeetriliste teisenduste rühm G ja mingi kujund A . Teisendugu antud kujund A selle rühma teisen-

¹ Feliks Klein (1849—1925) — saksa teadlane-matemaatik, pedagoog; oli Rahvusvahelise Matemaatika Õpetamise Komisjoni esimees.

² Geomeetriliseks teisenduseks nimetatakse üksühest vastavust, mille põhjal teatava punktidehulga iga punktiga seatakse vastavusse sama punktidehulga teatav punkt.

Teisenduste hulk G moodustab rühma, kui on täidetud järgmised tingimused:

a) hulgas G on defineeritud teisenduste korrutis, s. o. kaks järjestikku teostatud teisendust annavad samasse hulka G kuuluva teisenduse;

b) teisenduste korrutis on assotsiatiivne;

c) hulgas G on olemas samasusteisendus, s. o. teisendus, millega korrutamine jätab teisenduse endiseks;

d) hulgas G on olemas pöördteisendus, s. o. teisendus, millega korrutamine annab samasusteisenduse.

duste tagajärjel kujundiks A' . Kui rühma G moodustavate teisenduste hulk koosneb (44, lk. 74):

a) paralleellüketest

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= y + b \\z' &= z + c,\end{aligned}$$

b) pööretest

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z,\end{aligned}$$

c) sümmeetriatest koordinaatide alguspunkti suhtes

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= -y \\z' &= -z\end{aligned}$$

või sümmeetriatest mingi koordinaattasapinna suhtes (näiteks xy -tasapinna suhtes)

$$x' = x; y' = y; z' = -z,$$

d) mastaabi teisendustest

$$x' = kx; y' = ky; z' = kz,$$

siis nimetab F. Klein sellist rühma geomeetriliste teisenduste pearühmaks (die Hauptgruppe) (10, lk. 463; 44, lk. 221).

Kujundi geomeetrilised omadused ei muutu pearühma teisenduste tagajärjel ehk kujundi geomeetrilised omadused on pearühma teisenduste invariantideks. See tähendab, et mingi kujundi geomeetrilised omadused peavad väljenduma selliste valemitega, mis ei muutu koordinaatide süsteemi muutmisel eespool antud eeskirjade järgi. Ja vastupidi: iga valem, mis on vaadeldud teisenduste suhtes invariantne, peab väljendama mingit geomeetrilist omadust (44, lk. 52). Näiteks kui on valitud mõõtühik, siis saab alati määrata geomeetrilise kujundi mingisuguse kahe punkti vahelise kauguse, mida saab väljendada nende punktide koordinaatide $(x_1; y_1; z_1)$ ja $(x_2; y_2; z_2)$ kaudu ka avaldisena

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Äsjaavaldatud seisukoht tähendab, et see avaldis jääb pearühma teisenduste korral muutumatuks, või teda tuleb korrutada mingi teguriga, mis ei olene valitud punktide asukohast.

Seega, kui kujundile A rakendada pearühma teisendusi, siis kujundid A ja A' on ühesuguste geometriliste omadustega.

Elementaargeomeetria uuribki neid geometrilisi omadusi, mis on invariantid pearühma teisenduste suhtes. F. Klein nimetab seda geometriat ka meetriliseks geometriaks (44, lk. 219).

Seega meetriline geomeetria uurib pearühma teisenduste invariante.

Kui rakendame kujundi A teisendamiseks teisendusi mingist teisest teisenduste rühmast H, mille suhtes pearühm on alarühmaks, siis teisendusel säilivate geometriliste omaduste arv väheneb. Jõuame uue, rühma H teisenduste invariante uuriva geomeetria juurde.

Toodud mõtet võib edasi arendada, s. t. võttes aluseks eelnevast laiema teisenduste rühma F, mille suhtes eelmine on alarühmaks, saame jällegi uue geomeetria, mis uurib rühma F teisenduste invariante.

Vaatleme näiteks afiinseid teisendusi, mida kolmemõõtmelises ruumis saab analüütiliselt esitada järgmise valemite süsteemiga:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3.\end{aligned}$$

Need teisendused moodustavad rühma, mille alarühmaks on teisenduste pearühm. Afiinsete teisenduste invariante uuriv geomeetria on afiinne geomeetria. Afiinsete teisenduste invariantideks on näiteks kahe sirge paralleelsus, koonuslõigete liigitus ellipsiteks, hüperboolideks, paraboolideks. Ringi ja ellipsi erinevus aga kaob. Samuti ei ole invariantiks punktidevaheline kaugus.

Afiinsete teisenduste rühm kui alarühm kuulub projektiivsete teisenduste rühma. Viimaseid saab analüütiliselt esitada valemite süsteemiga:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \\y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \\z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}.\end{aligned}$$

Teatav hulk afiinsete teisenduste invariante jääb ka projektiivsete teisenduste invariantideks. Projektiivsete teisenduste invariantide uurimine on projektiivse geomeetria ülesanne.

Siit selgub, et vastavalt sellele, millise teisenduste rühma aluseks valime, saame erinevad geomeetriad.¹

Loobudes matemaatilises mõttes mitteolulisest meelelisest kujutlusest, s. t. siirdudes kolmemõõtmelisest ruumist mistahes mõõtmete arvuga ruumi, formuleerib F. Klein järgmise ulatusliku probleemi:

«On antud mingi hulk (Mannigfaltigkeit) ja teisenduste rühm selles; on vaja uurida sellesse hulka kuuluvate kujundite omadusi, mis ei muutu selle rühma teisenduste tagajärjel» (10, lk. 463).

F. Klein nimetab seda üldiseks probleemiks, «mis ei haara mitte ainult tavalist geomeetriat, vaid ka edaspidi nimetatavaid (s. o. Erlangeni programmis vaatluse alla tulevaid — A. T.) uuemaid geomeetrilisi meetodeid...» (10, lk. 464).

Toodu põhjal võime anda geomeetria üldise määrangu: geomeetria on teadus, mis uurib geomeetriliste kujundite invariante teatava teisenduste rühma suhtes (60, lk. 17).

Aluseks võetud geomeetriliste teisenduste rühm määrab erinevate geomeetria uurimisvaldkonna.

See ongi selleks hodogeetiliseks printsiibiks, mille alusel toimub erinevate geomeetriliste meetodite (meetrilise geomeetria, afiinse geomeetria, projektiivse geomeetria jt.) süstematiseerimine ja klassifitseerimine.

Prantsuse matemaatik Ely Cartan nimetab oma artiklis «Rühmade teooria ja geomeetria» (1927) F. Kleini poolt arendatud ideed juhtivaks printsiibiks, märkides ühtlasi, et

«...ei ole ühtegi matemaikut, kes ei teaks Kleini poolt 1872. a. Erlangeni programmis arendatud ideede sügavat mõju geomeetria arengule» (41, lk. 485).

¹ Omaette geomeetriaena on võimalik vaadelda ka geomeetriad, mis uurivad pearühma alarühma teisenduste invariante, näiteks «rööplükete geomeetria», «liikumiste geomeetria» jne.

§ 3. Formaalsete seaduste permanentsuse printsiip

Matemaatilisi operatsioone võib sooritada mitte ainult arvudega, vaid väga mitmesuguste objektidega, nagu hulkiikmete, vektorite, maatriksitega jne.

Paljudele neile erinevate objektidega teostatavatele ja erinevatena näivatele, kuid samade nimetustega (liitmine, lahutamine, korrutamine jm.) operatsioonidele on ühiseks omaduseks see, et nad alluvad samadele seadustele, mis kehtivad arvudega teostatavate operatsioonide hulgas (37, lk. 190).

Arvu mõiste on teinud ajaloos läbi pika arengu-tee. Naturaalarvud kui teatavate objektide hulga loendamise aparatuur olid inimesele tuttavad juba väga kauges minevikus. Antiik-Kreeka matemaatikud kasutasid naturaalarvude kõrval ka positiivseid murdarve, kuid nad ei tundnud negatiivseid arve. Esimesed teated negatiivse arvu kohta pärinevad 5. sajandi Indiast, kus nende interpretatsiooniks oli varandus ja võlg (58, lk. 157).¹

Negatiivsete arvude täielik tunnustamine leidis aset alles 17. sajandil.

Kompleksarvud lülitati matemaatilistesse operatsioonidesse veelgi hiljem, nimelt siis, kui neile oli antud geometriline interpretatsioon (18. saj. lõpul, 19. saj. algul) (51).

Nagu selgub, tekkisid ajalooliselt esimesena naturaalarvud. Ka loogiliselt rangelt arvu mõiste deduktiivsel arendamisel lähtutakse naturaalarvude hulgast, kus kehtivad järgmised arvutamise põhiseadused:

1) Liitmise kommutatiivsus:

$$a + b = b + a.$$

2) Liitmise assotsiatiivsus:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

3) Korrutamise kommutatiivsus:

$$ab = ba.$$

4) Korrutamise assotsiatiivsus:

$$a(bc) = (ab)c.$$

5) Korrutamise distributiivsus liitmise suhtes:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

¹ V. N. Molodši andmetel tekkis negatiivse arvu mõiste kõigepealt Hiinas 3. sajandil (51, lk. 105).

Loogiliselt rangel alusel toimuva arvu mõiste laiendamise formaalseks põhjuseks¹ on üksikute arvutusoperatsioonide piiratus teatavas arvude hulgas. Näiteks ei ole naturaalarvude hulgas kõikidel juhtudel teostatav lahutamine. Täisarvude hulgas on see alati võimalik. Viimases omakorda ei saa igakord leida kahe arvu jagatist, kuid ratsionaalarvude hulgas on see alati leitav (välja arvatud jagamine nulliga).

Vaatleme lähemalt naturaalarvude hulga laiendamist täisarvude hulga.

Seame iga naturaalarvuga a vastavusse mingi esialgu tundmatu objekti ($-a$), mida nimetame negatiivseks arvuks absoluutväärtusega a .

Negatiivseid arve saab lugeda arvudeks selle sõna otse-ses tähenduses alles siis, kui nendega osatakse teostada arvutusoperatsioone ja kui tuntakse, missugustele seadustele need operatsioonid alluvad.

Täisarvude hulga uurimisel, eriti 18. sajandil, on tehtud hulgaliselt katseid tõestada täisarvudega teostatavate operatsioonide eeskirju, nagu $a + b = -(|a| - |b|)$, kui $a < 0$, $b > 0$ ja $|a| > |b|$, või $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$, kui $a < 0$ ja $b > 0$. Seejuures eeldati ilma põhjendamata, et naturaalarvude hulgas kehtivad arvutamise seadused on maksivad ka uues arvudehulgas (51, lk. 131).

Tuleb kohe märkida, et operatsioonide eeskirjade tõestamisest ei saa olla juttu, sest nad ei ole loogiliselt paratamatud (43, lk. 39). Täisarvude hulgas teostatavad operatsioonid defineeritakse ja pärast seda tõestatakse, et need operatsioonid alluvad samadele arvutamise põhiseadustele, millele alluvad tehted naturaalarvudega. Seega võime kõnelda operatsioonide loogilisest lubatavusest (mitte paratamatusest), sest nad ei ole vastuolus endiste arvutamise põhiseadustega ja tagavad nende seaduste kehtivuse ka uues arvuvallas.

Niisiis on kaasaegsel matemaatikul täisarvude aritmeetika põhjendamise lõppeesmärgiks tõestus, et laiendatud arvudehulgas jäävad kehtima samad põhiseadused, mis kehtisid lähtehulgas. 18. sajandi matemaatikute enamikule oli aga põhiseaduste kehtivus laiendatud arvudehulgas tõestust mittevajavaks lähtepunktiks ja täisarvude aritmeetikas teostatavad operatsioonid tõestati (51, lk. 131).

¹ Jätame siinjuures vaatluse alt välja arvu mõiste laiendamise põhjused, mis kasvavad välja praktikast.

Laiendatud arvudehulgas tehtavate operatsioonide kohta ütlevad matemaatikud R. Courant ja G. Robins:

«Nad luuakse või deklareeritakse (minu sõrendus — A. T.) meie endi poolt eesmärgiga kindlustada operatsioonide vabadus ilma aritmeetika põhiseadusi rikkumata. Mida võib ja peabki tõestama, on ainult see, et kui operatsioonid on defineeritud, siis säilivad ka aritmeetika põhiseadused — kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus» (46, lk. 93).

Täisarvude hulga laiendamine ratsionaalarvude hulga on tingitud jagamisoperatsiooni piiratusest täisarvude hulgas. Jagatis $a : b$ on täisarvulise a ja b korral ($b \neq 0$) võrrandi $bx = a$ lahend ja ta eksisteerib ainult siis, kui a jagub b -ga. Vastasel juhul vaadeldakse jagatist $a : b$ kui uut sümbolit, nii et $b(a : b) = a$. Seega on jagatis $a : b$ võrrandi $bx = a$ lahend definitsiooni kohaselt. Uus sümbol omandab arvu tähenduse alles siis, kui temaga saab teostada arvutusoperatsioone. Need operatsioonid defineeritakse. Nimelt:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Pärast defineerimist tõestatakse, et selliste definitsioonide korral jäävad täisarvude hulgas maksivad arvutamise põhiseadused kehtima ka ratsionaalarvude hulgas.

Saksa matemaatik H. Hankel nimetab seda printsiipi, mille kohaselt esialgu mõtet mitteomavaid operatsioone defineeritakse nii, et vastavate operatsioonide kohta läte-hulgas kehtinud seadused jäävad kehtima ka uues, laiendatud arvudehulgas, formaalsete seaduste permanentsuse printsiibiks. Nimetatud printsiip on esmakordselt formuleeritud H. Hankeli töös «Theorie der komplexen Zahlensysteme» (1867).

Hankel märgib, et kui $b > c$, siis võrrandil $x + b = c$ ei ole naturaalarvude hulgas lahendit. Edasi ütleb ta:

«Kuid miski ei sega meid sel juhul vaatamast vahele ($c - b$) kui sümbolile, mis on selle ülesande lahendiks ja millega tuleb opereerida samuti, nagu ta oleks ritta 1, 2, 3, ... kuuluv arv» (34, lk. 13).

Hankel rõhutab, et just sel juhul, kui antud hulgas teostatava operatsiooni pöördoperatsioon ei vii antud hulga elementidele,

«... astubki tegevusse meie permanentsuse printsiip. Juhindudes (minu sõrendus — A. T.) sellest, defineerime uued operatsioonid sel tingimusel, et nad alluksid formaalselt samadele seadustele, millega olid seotud operatsioonid esialgsete elementide vahel» (34, lk. 36).

A. Voss nimetab formaalsete seaduste permanentsuse printsiipi hodgeeetiliseks printsiibiks¹, mis

«... moodustab sellest ajast (s. o. Hankeli ajast — A. T.) alates puhtaritmeetiliste teooriate aluse (minu sõrendus — A. T.)» (17, lk. 39—40).

Mõiste järkjärguline laiendamine permanentsuse printsiibi kohaselt ei leia matemaatikas rakendamist mitte ainult arvu mõiste laiendamisel. Mingi hulga laiendamine uute elementide sissetoomise teel nii, et esialgses hulgas maksivad seadused kehtivad ka laiendatud hulgas, on üldse iseloomulik matemaatikas tehtavatele üldistustele. Üldiselt tähendab formaalsete seaduste permanentsuse printsiip järgmiste nõuete täitmist:

1) Esialgne hulk peab moodustama laiendatud hulga alahulga.

2) Laiendatud hulgas defineeritud operatsioonid on alahulgas defineeritud operatsioonide üldistused.

3) Laiendatud hulgas teostatavad operatsioonid alluvad samadele seadustele kui vastavad operatsioonid alahulgas.

Näiteks astme mõistet defineeritakse esialgu ainult naturaalarvulise astendaja korral:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ tegurit}}$$

¹ Ka H. Hankel ise nimetab seda printsiipi hodgeeetiliseks printsiibiks (34, lk. 5.).

Pärast sellist defineerimist tõestatakse, et operatsioonid astmetega alluvad kindlatele eeskirjadele:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n;$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n;$$

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Ülaltoodud definitsiooni järgi ei oma aga mingit tähendust näiteks a^0 või a^{-m} , kus $m > 0$. Nende sümbolite mõte tuleb uuesti defineerida. Definitsioonid antakse nõnda, et astmetega opereerimise endised eeskirjad jääksid kehtima. See leiab aset siis, kui on defineeritud

$$a^0 = 1 \text{ ja } a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ kus } a \neq 0.$$

Täiesti analoogiliselt toimub astme mõiste üldistamine ratsionaalse astendajaga astmeni.¹

Et formaalsete seaduste permanentsuse printsiibist juhindutakse paljude matemaatiliste mõistete üldistamisel, siis tulebki seda nimetada üheks hodogeetiliseks printsiibiks.

* * *

Eeltoodud analüüs näitab vajadust hodogeetiliste printsiipide loomiseks teatava küsimusteringi käsitlemisel. Hodogeetilisest printsiibist juhindumine võimaldab antud küsimusi süstematiseerida. Paljudel juhtudel näitab hodogeetiline printsiip kätte ka tee, mida mööda liikuda probleemide edaspidisel käsitlemisel.

¹ Arvu ja astme mõiste üldistamise seisukohalt on õpetajal soovitatav tutvuda tööga В. В. Никитин и К. А. Рупасов, Определения математических понятий в курсе средней школы, М., 1963.

§ 4. Hodogeetiliste printsiipide vajadus koolimatemaatika kursuses

Koolimatemaatika üheks ülesandeks on anda õpilastele teatav hulk spetsiifilisi teadmisi — fakte, mõisteid, definitsioone, valemeid jne. — ning oskusi mitmesuguste ülesannete lahendamiseks nende teadmiste abil. Selliseid spetsiifilisi teadmisi ja oskusi on vaja praktikas selliste ülesannete lahendamisel, kus tuleb arvestada küsimuse matemaatilist külge. Peale selle on sellised teadmised ja oskused vajalikud matemaatikas endas uute teadmiste omandamiseks, samuti orienteerumiseks teistes teadustes, nagu füüsikas, astronoomias, keemias, kus on tegemist analoogiliste ülesannetega. Psühholoogid nimetavad sellist spetsiifiliste teadmiste ja oskuste kasutamist «harjutamise spetsiifiliseks ülesandeks» (29, lk. 20).

Koolimatemaatika teiseks ülesandeks on õpilase üldise matemaatilise kultuuri arendamine¹. Ka siin on kahtlemata suur tähtsus spetsiifiliste teadmiste ja oskuste omandamisel. Ainult nende vahenditega ei saa aga seda ülesannet lahendada, sest nii jäävad teadmised isoleerituks, seostamata, üldisesse süsteemi viimata.

Üldise matemaatilise kultuuri tõstmise seisukohalt on väga oluline kasvatada ka arusaamist antud õppeaine sisemisest loogikast, õpetada nägema üksikute spetsiifiliste faktide omavahelisi seoseid.²

Õppeaine struktuuri omandamine on võimalik mitte spetsiifiliste teadmiste ja oskuste omandamise teel, vaid üldiste meetodite õppimise teel. Selleks ongi vaja püstitada hodgeetilised printsiibid, millest tuleb juhendada teatavat hulka üksikküsimusi hõlmava probleemideringi käsitlemisel.

¹ A. I. Markuševitš kasutab väljendit «õpilaste matemaatiline arendamine» (49). Ta peab siin väga tähtsaks oskust abstraherida, skematiseerida, teha deduktiivseid järeldusi, väljendada end täpselt ja konkreetset selt jms.

² J. Bruner nimetab sellist õppimist õppeaine, või laiemas mõttes teaduse struktuuri omandamiseks (lk. 12). Arusaamist õpetatava aine põhilisest struktuurist peab ta minimaalseks nõudeks, «...mille täitmine annab võimaluse kasutada saadud teadmisi õppeprotsessi kõigil etappidel mitmesuguste ülesannete lahendamiseks» (29, lk. 15).

Hinnates kõrgelt üldiste meetodite omandamist, kirjutavad nõukogude matemaatikapedagoogid V. Aškinuze, V. I. Levin ja A. D. Semušin seoses matemaatika õpetamise eesmärkidega keskkoolis, et matemaatikakursus peab

«... sisaldama mitte ainult üksikute faktide õppimist, vaid tutvustama õpilasi ka suurt üldhariduslikku ja rakenduslikku tähtsust omavate matemaatika üldiste teaduslike ideede ja meetoditega» (23, lk. 48).

Hodogeetilistest printsiipidest juhendumine on üldise matemaatilise kultuuri arendamise kõrval ka vahendiks, mis võimaldab vähendada inimese mälu koormust. Seoses sellega märgib J. Bruner:

«Üldiste või põhiliste printsiipide õpetamine soodustab materjali säilimist mälus, aitab reprodutseerida üksikuid detaile, kui see on vajalik. Hea teooria ei ole mitte ainult nähtuste mõistmise, vaid ka nende järgneva mälus reprodutseerimise vahend.» (29, lk. 26).

Käesolevas töös käsitletakse keskkoolimatemaatika ühe hodogeetilise printsiibina **järkjärgulise lähendamise meetodit**. Rõhutame seejuures, et käesolev töö oma mahu piiratuse tõttu ei ammenda kaugeltki kõiki keskkoolimatematika probleeme, mida on võimalik käsitleda järkjärgulise lähendamise meetodist juhindudes.

II. JÄRKJÄRGULISE LÄHENDAMISE MEETODI- OLEMUS

§ 5. Täpsuse mõiste teoorias ja praktikas

1. Reaalarvude kontiinum

Olgu praktiliselt vaja mõõta mingit suurust, näiteks teatava keha massi, mille mõõtarv on seega otsitav. Massi suurust saab määrata kangkaaludel kindlate massidega (kaaluvih tidega) võrdlemise teel. Kui näiteks viht massiga 1 kg on liiga väike, aga viht massiga 2 kg liiga suur, siis on leitud otsitava massi lähendid täpsusega 1 kg. Proovides edasi väiksema massiga kaaluvih te, saab järk-järgult leida otsitava massi uusi ja täpsemaid lähendeid. Proovimine lõpetatakse, kui otsitav suurus on määratud vajaliku täpsusega. Seega toimub sellisel praktilisel mõõtmisel otsitava järkjärguline aproksimeerimine¹ lähendite abil, s. t. moodustatakse otsitava lähendite jada

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Vaatamata sellele, kas mõõdetav suurus ja mõõtühik on ühismõõduga või mitte, on praktilisel mõõtmisel saadav lähendite jada alati lõplik, sest tegelikult ei ole mõõtühikut võimalik lõputult peenestada. Nii on kaaluvih tide karbis alati üks kõige väiksem kaaluvih t. Analoogiline on olukord ka teiste suuruste mõõtmisel. Näiteks pikkuse mõõtmiseks kasutatava mõõdulindi või voolutugevuse mõõtmiseks kasutatava ampermeetri skaalal on ikka olemas üks kõige väiksem kriipsuvahe. Siit järeldub, et praktilisel mõõtmisel on mõõtmistäpsus alati piiratud teatava veatõkkega. Siinjuures tuleb märkida, et kui mõõdetav suurus ja mõõtühik on ühismõõ-

¹ aproksimeerima (ladinakeelsest sõnast *approximare* — lähenema) — lähendama, ligikaudselt esitama.

duga, siis võib saadud mõõtari olla juhuslikult täpne. Kas aga ühismõõt on olemas või mitte, seda ei ole praktiliselt mitte millegagi võimalik selgitada. Pealegi mõjutavad mõõtmise täpsust mitmesugused muud põhjused (mõõdu-riista ehitus, mõõtja vilumus jms.), nii et mõõtari tulleb suhtuda alati kui ligikaudsesse arvesse.

Õeldust järeldub ka, et praktika seisukohalt on piisavaks arvude hulgaks ratsionaalarvude hulk.

Teoreetilistes käsitlustes opereeritakse aga suurustega kui täiesti täpselt mõõdetavatega. Absoluutse täpsusega mõõdetavad suurused on siin vajalikud mõttelised objektid, sest teoreetilise uurimise tulemusi on vaja praktikas rakendada, olenemata mõõtmistäpsusest igal konkreetset juhul. Absoluutselt täpselt mõõdetava suuruseni jõutakse siis, kui abstraheeritakse kõik need tingimused, mis tegelikkuses takistavad otsitava mõõtari järkjärgulist aproksimeerimist lõputult, ja jätkatakse mõõtühiku peenestamist mõttelise eksperimendi teel. Siis tekibki vajadus irratsionaalarvu ja reaalarvude kontiinuumi järele. Reaalarvude teooria aluseks on matemaatikateaduses fundamentaalset tähtsust omav pidevuse aksioom: igale reaalarvule x vastab üks ja ainult üks arvtelje punkt X , ja vastupidi, igale arvtelje punktile X vastab üks ja ainult üks reaalarv x .

Seda aksioomi tunnustamata on võimatu luua eksaktset mõõtmise teooriat. Tõepoolest, kui loobuda pidevuse aksioomist, siis ei ole võimalik mõõdetavat suurust väljendada ühegi arvu abil, juhul kui mõõdetav suurus ja mõõtühik on ühismõõduta. Nii näiteks ei oleks võimalik väljendada ühikulise kaatetiga võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi ühegi arvu abil. Lugesed aga pidevuse aksioomi kehtivaks, saab iga suuruse mõõtmise tulemust väljendada arvu abil ka sel juhul, kui mõõdetaval suurusel ja mõõtühikul puudub ühismõõt. Seejuures tuleb rõhutada, et teoreetilisest seisukohast lähtudes ei ole mõõtmistäpsusel piiri. Põhimõtteliselt on võimalik mõõta iga suurust absoluutselt täpselt.

Sellega seoses märgib A. D. Aleksandrov, et

«...reaalarv peegeldab mõõtmise lõpmatult täpsustatavat protsessi, või natuke teisiti, absoluutset, suuruse lõpmatult täpset väärtust» (50, lk. 29—30).

Seega on suuruste ühismõõdu ning sellega seoses irratsionaalarvu ja reaalarvude kontinuumi probleem puhtal kujul teooria küsimus.

Nagu teada, on reaalarvude teooria seisukohalt võimalik iga reaalarvu esitada üheselt lõputu kümnendmurruna¹, ja vastupidi, iga lõputu kümnendmurd kujutab teatavat reaalarvu. Kui vaadeldav reaalarv on ratsionaalne, siis on vastav kümnendmurd lõputu perioodiline; kui reaalarv on irratsionaalne, siis on vastav kümnendmurd lõputu mittepäädeline, näiteks ratsionaalarv $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$; irratsionaalarv $\pi = 3,14159265\dots$

Sellisel reaalarvude hulga ja lõputute kümnendmurdude hulga üksühesesse vastavusse seadmisel tuleb jällegi rõhutada, et reaalarvude esitamine lõputu kümnendmurruna on absoluutselt täpne, s. t. et tekkivat viga on võimalik suruda allapoole igast kuitahes väikesest tõkkest (9, lk. 3).

2. Reaalmuutuja funktsiooni mõiste

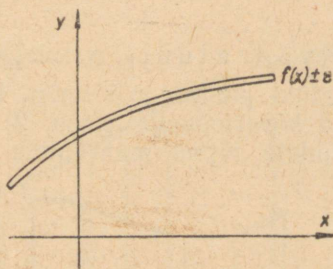
Kahe muutuva suuruse x ja y vahel valitseva sõltuvuse empiirilisel uurimisel (näiteks juhtme takistuse ja läbimõõdu vahelise sõltuvuse uurimisel) saadakse muutuvate suuruste vastavate väärtuste paarid ikka teatavatest katseandmetest, mis on paratamatult ebapäpsed. Seda esiteks. Teiseks, praktiliselt on võimalik saada argumendi väärtusi ainult diskreetse ja lõpliku hulgana, millest tingituna ka funktsiooni vastavate väärtuste hulk on diskreetne ja lõplik. Seega ei ole sõltuvuse praktilisel uurimisel kunagi võimalik täpselt öelda, missuguse funktsiooni väärtus vastab argumendi antud väärtusele. Empiiriliselt saab määrata kahe muutuva suuruse x ja y vahel valitsevat sõltuvust ainult teatava piiratud täpsusega

$$y = f(x) \pm \varepsilon,$$

nii et funktsiooni täpsed väärtused langevad mingisugusesse määramatuse vahemikku. F. Klein tarvitab sellise sõltuvuse iseloomustamiseks terminit «funktsioonriba»

¹ Tingimusel, et lõputu perioodiline kümnendmurd perioodiga 9 on vaatluse alt välistatud ja et lõppevat kümnendmurdu vaadeldakse kui lõputut perioodilist kümnendmurdu perioodiga 0.

(Funktionsstreifen, 11, lk. 253; 9, lk. 17), sest selline sõltuvus realiseerub graafiliselt tõepoolest ribana (joon. 1). Riba laiust määrav ε oleneb sellest, missuguseid vahendeid vastava nähtuse uurimisel kasutati, missugusel otstarbel nähtust uuriti ja milliste uurimiskogemustega oli uurija. Vastavalt sellele, kuidas areneb tehnika ja teadus üldse,



Joon. 1.

on aga võimalik ε väärtust vähendada, s. t. on võimalik realiseerida teatavat funktsioonide jada

$$y_1 = f(x) \pm \varepsilon_1;$$

$$y_2 = f(x) \pm \varepsilon_2;$$

$$y_3 = f(x) \pm \varepsilon_3;$$

.....

kus $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$ ja milles iga järgmine funktsioon määrab uuritava sõltuvuse seega täpsemalt kui eelmine. Nii saab empiirilise meetodiga uuritavat funktsiooni järkjärgult aproksimeerida teatavate lähendfunktsioonidega seda täpsemalt, mida täiuslikumad vahendid on inimese käsutuses vastava nähtuse uurimisel.

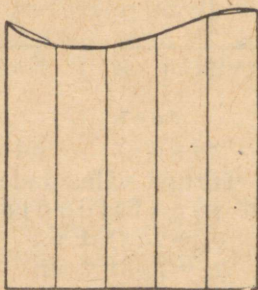
Reaalmuutuja funktsiooni teoreetilise määrangu andmisel abstraheritakse need tingimused, mis praktiliselt ei võimalda teatavat sõltuvust absoluutselt täpselt määrata. Rangel kujul on reaalmuutuja funktsiooni definitsioon antud esmakordselt saksa matemaatiku G. Dirichlet' poolt:

« y on x -i funktsioon antud vahemikus, kui igale x -i väärtusele sellest vahemikust vastab üks kindel (ein wohldefinierter) y -i väärtus (minu sõnendused — A. T.)» (9, lk. 14).

Definitsioonist selgub, et kui argumendi muutumise vahemikust valida argumendi ükskõik milline väärtus, peab see ikka määrama funktsiooni ühe kindla väärtuse. Seega on funktsiooni määramine argumendi antud väärtuse järgi absoluutselt täpne — funktsiooni väärtus ei saa langeda mingisugusesse määramatuse vahemikku $f(x) \pm \varepsilon$, vaid langeb täpselt mingisse kindlasse punkti.

3. Kvadratuuri probleem

Vaatleme maatüki pindala mõõtmist, kui maatüki üks külg on piiratud kõverjoonega (joon. 2). Praktiliselt on selle maatüki pindala täpne määramine võimatu esiteks



Joon. 2.

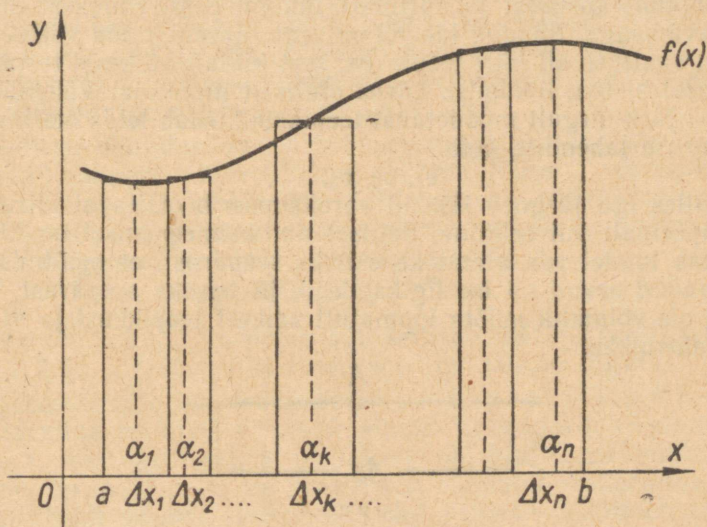
seepärast, et kõvera kaare ühtegi osa ei saa panna ühtima sirglõiguga; teiseks seepärast, et mõõtmistulemused on ebatäpsed. Küll on aga võimalik selle maatüki pindala leida tegelikkuse vajadusi rahuldava täpsusega. Selleks jaotatakse maatükk trapetsiteks ja leitakse nende pindalade summa S_1 , mis lähendab otsitavat pindala teatava täpsusega. Suurendades järk-järgult trapetsite arvu, saab moodustada otsitava pindala lähendite ja da

$$S_1, S_2, S_3, \dots,$$

milles iga järgmine lähend on täpsem kui eelmine. Pindala sellisel aproksimeerimisel on olemas kindel vea alamtõke, mida praktiliselt ei ole võimalik ületada.

Analoogiline pindala ligikaudse määramise ülesanne kerkib tegelikkuses üles paljude küsimuste lahendamisel, näiteks karusnaha mõõtmisel, põletushaavade tagajärjel kahjustatud kehaosa pindala mõõtmisel jms.

Abstraheerime need tingimused, mis ei luba antud kujundi pindala praktiliselt mõõta absoluutselt täpselt, ja vaatleme kujundit, mis on piiratud kõvera $f(x)$ kaarega, kahe ordinaadiga $f(a)$ ja $f(b)$ ning x -telje lõiguga $[a, b]$. Jaotame vahemiku $[a, b]$ n osaks ja fikseerime igas osavahe-
hemikus Δx_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) x -i mingi väärtuse α_k (joon. 3).



Joon. 3.

Summa

$$S' = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta x_k$$

annab vaadeldava kujundi pindala ligikaudse väärtuse. Selle pindala täpsema väärtuse saame, kui vähendame mõttes osavahe-
hemiku Δx_k pikkust (s. t. suurendame n väärtust). Pindala absoluutselt täpse väärtuse annab piirväärtus

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

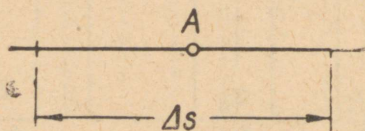
Seega on teoreetiliselt võimalik määrata vaadeldava kujundi pindala absoluutselt täpselt.

4. Kiirus antud punktis

Kui tahame näiteks teada saada, millise kiirusega läbib sprinter punkti A , mis asub lähtekohast 50 m kaugusel, tuleb mõõta teatav teepikkus, millel asetseb see punkt, ja selle teepikkuse läbimiseks kulunud aeg. Nende andmete alusel saab leida keskmise kiiruse vaadeldaval teelõigul. Saadud keskmine kiirus lähendab otsitavat kiirust mõõtmistäpsusest ja sprinteri liikumise kiirendusest ole-
neva veaga. Saadud lähend on seda täpsem, mida väiksem on vaatluse all olev teepikkus, sest küllalt väikesel teepikkusel ei saa liikumise kiirus oluliselt muutuda. Vähendades järk-järgult mõõdetavat teepikkust, saab leida otsitava kiiruse lähendite jada

$$v_1, v_2, v_3, \dots,$$

milles iga järgnev lähend aproksimeerib otsitavat kiirust täpsemalt kui eelmine. Sellisel aproksimeerimisel on olemas kindel vea alamtõke esiteks seepärast, et mõõtmisel saadud arvud on ise ligikaudsed, ja teiseks seepärast, et ei ole võimalik mõõta lõpmatult väikesi teepikkusi ja ajavahemikke.



Joon. 4.

Küsimuse teoreetilisel käsitlemisel abstraheeritakse kõik need tingimused, mis praktiliselt ei võimalda leida kiirust antud punktis absoluutselt täpselt. Olgu vaja määrata keha liikumise kiirus antud punktis A , mis asetseb keha liikumise trajektoori mingis vahemikus Δs (joon. 4). Kui teepikkuse Δs läbimiseks kulub ajavahemik Δt , siis keha liikumise ligikaudne kiirus punktis A saadakse jagatisena $\Delta s : \Delta t$, mis annab keskmise kiiruse vahemikus Δs . Täpsemat väärtust keha liikumise kiirusele punktis A on võimalik saada, kui vähendada ajavahemikku Δt ja sellest sõltuvalt ka teepikkust Δs . Keha liikumise kiiruse täpse väärtuse punktis A annab aga

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Seega on keha liikumise kiirus antud punktis teooria seisukohalt määratav absoluutselt täpselt.

5. Geomeetrilised konstruktsioonid

Geomeetria algmõisted *punkt, sirge, tasapind* (samuti defineeritavad mõisted) kujutavad deduktiivses geomeetrias ideaalseid objekte, mis on tekkinud abstraktsiooniprotsessis materiaalsete objektide vaatlemisel. Selle tõttu punkt ei oma üldse mõõtmeid; sirgel on ainult üks mõõde — pikkus; tasapinnal on vaid kaks mõõdet — pikkus ja laius. Idealiseeringutest tingituna kehtivad abstraktsete geomeetriliste mõistete kohta püstitatud laused absoluutselt täpselt. Näiteks kaks punkti määravad (täpselt) ühe sirge; kolmnurga sisenuurkade summa on eukleidilises geomeetrias (täpselt) 180° .

Sellest lähtudes on paljude geomeetriliste konstruktsioonülesannete¹ lahendamine põhimõtteliselt võimalik absoluutselt täpselt. Sellisteks on näiteks lõigu poolitamine, lõigu keskristsirge ehitamine, nurga poolitamine, ringjoone jaotamine n võrdseks osaks, kui

$$n = 2^r \cdot \prod_k p_k \text{ ja } p_k = 2^m + 1,$$

kus $r = 0, 1, 2, \dots$; m omab aga selliseid väärtusi hulgast $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, et p_k oleks algarv — nn. Gaussi algarv.

Geomeetrilise konstruktsioonülesande praktiline lahendamine on alati võimalik ainult piiratud täpsusega, sest geomeetria ideaalseid objekte, nagu punkt, sirge, tasapind jt. ei ole praktiliselt võimalik realiseerida. Praktiliselt vaadeldakse punkti kui väikeste mõõtmetega materiaalset objekti; iga joon aga realiseerub ribana, mille laius võrreldes pikkusega on väike.

Abstraktse geomeetria seisukohalt on olemas mitmeid klassikalisi konstruktsioone, mida ei ole võimalik täpselt teostada. Sellisteks on ringjoone jaotamise ülesanded (näiteks 7 osaks, 9 osaks); antud nurga jaotamine kolmeks

võrdseks osaks; kuubi kahendamine, s. o. $\sqrt[3]{2}$ konstrueerimine; ringjoone sirgestamine, s. o. π konstrueerimine.

Kuigi viimati loetletud ülesanded ei ole teoreetiliselt täpselt lahendatavad, on nad praktiliselt kõik lahendatavad.

Mitmed praktilised konstruktsioonid põhinevad juba eespool kasutatud printsiibil — otsitava asemel konstrueeritakse tema lähendite jada, kus iga järgnev lähend on täpsem kui eelmine.

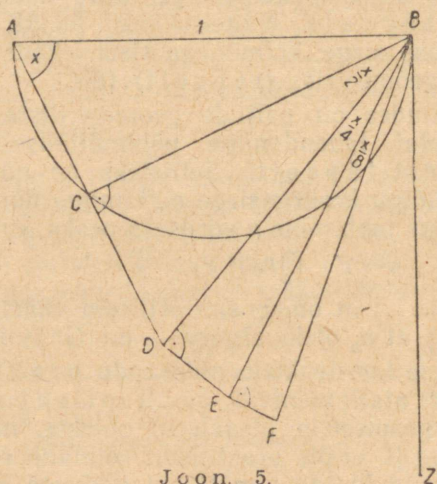
¹ Konstrueerimisvahendite all mõeldakse siin ja edaspidi klassikalisi vahendeid — sirklit ja joonlauda.

Nii näiteks saab ringjoone kaart sirgestada Euleri poolt antud valemi abil (16, lk. 314)

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots,$$

millest

$$x = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots}$$



Joon. 5.

Konstruksioon ilmneb jooniselt 5, kus $AB = 1$, $\angle CAB = x$; $\angle CBD = \frac{x}{2}$; $\angle DBE = \frac{x}{4}$; $\angle EBF = \frac{x}{8}$; ...

Jooniselt näeme, et

$$BC = \sin x;$$

$$BD = \frac{BC}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}};$$

$$BE = \frac{BD}{\cos \frac{x}{4}} = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4}};$$

.....

$$BZ = x.$$

Ringjoone pikkuse ja diameetri suhte π konstrueerimiseks võib kasutada vastava ahelmurru

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

lähendeid $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{106}$; $\frac{355}{113}$; ...

Erilist tähelepanu väärib neist lähenditest

$$\frac{355}{113} = 3,141592 \dots,$$

mille konstrueerimist lihtsustab see, et

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2} \quad (56, \text{ lk. } 310).$$

Eeltoodud arutelu põhjal võib öelda, et küsimus antud konstruktsioonülesande täpsest lahenduvusest on teooria küsimus. Praktiliselt ei ole olemas lahendumatuid konstruktsioonülesandeid.

6. Täpsusmatemaatika ja lähendusmatemaatika

Täpsuse mõiste järgi teoorias ja praktikas jaotab F. Klein kogu matemaatika kahte ossa (9, lk. 5):

- 1) täpsusmatemaatika (Präzisionsmathematik);
- 2) lähendusmatemaatika (Approximationsmathematik¹).

Täpsusmatemaatikas on täpsus piiramatult. Siin on iga otsitav määratav kas absoluutselt täpselt või ta on määratav.

Lähendusmatemaatikas on täpsus alati piiratud; siin opereeritakse otsitavate lähenditega.

Seoses sellise liigitusega kirjutab F. Klein:

«Lähendusmatemaatika on meie teaduse (s. o. matemaatikateaduse — A. T.) see osa, mida rakendus-

¹ F. Klein märgib (9, lk. V), et terminit «Approximationsmathematik» kasutas esimesena K. Heun kogumikus «Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung», Heft I, Bd. 9. (1900—1901).

tes faktiliselt kasutatakse; täpsusmatemaatika on nii öelda kindel telling, millele lähendusmatemaatika tugineb» (9, lk. 5).

Sellest järeldub, et täpsusmatemaatikat ja lähendusmatemaatikat ei saa vaadelda iseseisvate matemaatika osadena, vaid neid tuleb vaadelda ühtsuses. Selles ühtsuses etendab matemaatika rakenduslik külge (aga järelikult ka lähendusmatemaatika) kahesugust osa: 1) lähendusmatemaatika ette kerkivad probleemid ajendavad teooria arendamisele; 2) teoreetiliste uurimiste tulemused rakendatakse praktikasse lähendusmatemaatika kaudu (3, lk. 32).

§ 6. Järkjärgulise lähendamise meetodi määrang

Eelmises paragrahvis nägime, et praktikas on enamikul juhtudest võimalik leida ainult otsitavate lähendeid. Seejuures osutub sageli võimalikuks leida teatava võttega otsitava x lähendite jada

$$x_1, x_2, x_3 \dots,$$

milles jada iga järgnev liige esitab otsitava väärtust täpsemalt kui eelmine. Teoreetiliselt on see jada lõputu ja koondub otsitava täpseks väärtuseks; praktika seisukohalt piisab aga otsitava vajaliku täpsusega ligikaudse väärtuse leidmiseks jada mõne esimese liikme leidmisest.

Lähendite jada moodustamise seadus võib olla vastavalt konkreetsele juhule vägagi erinev. Nii näiteks võib jada olla määratud teatava, analüütilisel kujul antud algoritmiga, nagu eespool vaadeldud ringjoone kaare sirgestamise konstruktsioon valemi

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots$$

järgi; mingi suuruse mõõtarvu lähendite jada määratakse sellega, et mõõtühik peenestatakse ikka väiksemateks ja väiksemateks osadeks.

Vaatamata sellele, millise seaduse järgi saab otsitava lähendite jada moodustada, ütleme, et otsitav on määratav järkjärgulise lähendamise meetodiga. Lähtudes sellest võib anda järkjärgulise lähendamise meetodile järgmise määrangu:

Järkjärgulise lähendamise meetod on selline meetod, mida kasutatakse antud ülesande lahendiks koonduva jada moodustamiseks.

Märgime siinjuures, et definitsioonis kõne all olev jada ei tarvitse alati olla arvude jada; vastavalt konkreetsele ülesandele võib ta olla ka funktsioonide, lõikude, nurkade, pindalade jne. jada.

Tavaliselt käsitatakse järkjärgulise lähendamise meetodit antud määrangust mõnevõrra kitsamana. Nii näiteks loeme «Suurest nõukogude entsüklopeediast», et järkjärgulise lähendamise meetod (последовательных приближений метод)

«on matemaatiliste ülesannete lahendamise meetod lähendite sellise jada abil, mis koondub ülesande lähendiks ja mis koostatakse rekurrentselt (s. t. iga uus lähend arvutatakse lähtudes eelmisest, alglähend valitakse teatavates piirides meelevaldselt)» (minu sõrendused — A. T.) (т. 34, lk. 240—241).

Toodud määrangus iseloomustab järkjärgulise lähendamise meetodit kolm tingimust:

- 1) ülesande lahendi lähendite jada moodustamine;
- 2) saadud jada koondumine ülesande lähendiks;
- 3) lähendite jada moodustamine rekurrentselt.

Kolmanda tingimuse (jada moodustamine rekurrentselt) püstitamine järkjärgulise lähendamise meetodi definitsioonis viib selle meetodi samastamisele koonduva iteratsioonimeetodiga.¹

Sellist järkjärgulise lähendamise meetodi samastamist koonduva iteratsioonimeetodiga esineb kirjanduses mujalgi. Näiteks:

«Iteratsioon (järkjärguline lähendamine, *schrittweise Näherung*; suksessiivne aproksimeerimine, *sukzessive Approximation*) — on meetod, mille korduva rakendamise (minu sõrendus — A. T.) võimaldab tõkestamatult läheneda võrrandi täpselä lähendile, lähtudes selle võrrandi mingist ligikaudsest lähendist»² (5).

¹ Iteratsioon — mingi matemaatilise operatsiooni korduva rakendamise tulemus. Kui $y = f(x) = f_1(x)$, siis funktsioonid $f_2(x) = f[f_1(x)]$, $f_3(x) = f[f_2(x)]$, ..., $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ on funktsiooni $f(x)$ teine, kolmas jne. iteratsioon (40).

² Millegipärast seostatakse siin iteratsiooni ainult võrrandi lähendamisega, kuigi iteratsioon on hoopis laiem mõiste.

Ja veel:

«Järkjärgulise lähendamise meetod on rakendusmatemaatikas kasutatavate võtete kogu tundmata suuruse täpsema väärtuse määramiseks lähtudes (minu sõrendus — A. T.) selle suuruse ligikaudselt teadaolevast väärtusest»¹ (6).

Nagu näha, on järkjärgulise lähendamise meetodi kõigile toodud määrangutele iseloomulik see, et otsitava määramisel lähtutakse tema mingist lähendist. Selline tunnus iseloomustab aga nimelt iteratiivseid protsesse.

Käesolevas töös kasutatakse autori poolt antud järkjärgulise lähendamise meetodi määrangut (lk. 41). Selle kohaselt on võrrandite numbrilisel lahendamisel kasutatav iteratsioonimeetod järkjärgulise lähendamise meetodi erijuhtum: võrrandi lahendiks koonduv lähendite jada koostatakse rekurrentse valemi järgi.

Järkjärgulise lähendamise meetod on üks tähtsamaid meetodeid matemaatikas ja selle rakendustes.²

Nimetatud meetod on suunavaks meetodiks kõigi matemaatikas esinevate konstantide arvutamisel. Näiteks kasutades üldtuntud Machin'i rida (56, lk. 382)

$$\pi = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots \right),$$

võime moodustada π lähendite jada, milles iga järgnev liige on täpsemaks lähendiks kui eelmine.

Arvu e lähendite jada määrab üldtuntud rida

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

¹ Sellest määrangust jääb mulje, et järkjärgulise lähendamise meetod leiab kasutamist ainult rakendusmatemaatikas. Nagu aga allpool selgub, kasutatakse nimetatud meetodit ka teorias mitmete matemaatiliste mõistete loomisel ja nn. «olemasolu tõestuste» juures.

² N. J. Vilenkin iseloomustab seda meetodit järgnevalt: «Võib julgesti öelda, et järkjärgulise lähendamise meetodit kasutamata ei ole võimalik lahendada ühtegi tänapäeval lahendatavat grandioosset füüsika ja tehnika ülesannet.» (32)

Rõhuv enamuse matemaatilistes tabelites olevaid arve on määratavad järkjärgulise lähendamise meetodiga. Näiteks

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(2n+1)^6} + \dots \right];$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Astmefunktsiooni $x^{\frac{1}{k}}$ (k on naturaalarv, $k \neq 1$) väärtuste lähendite arvutamiseks saab kasutada üldtuntud binoomrida (56, lk. 373, 385)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

kus m tähistab nullist ja igast naturaalarvust erinevat mistahes reaalarvu. Binoomrida koondub, kui $|x| < 1$.

Olgu vaja arvutada $x = \sqrt[k]{A}$ eeldusel, et on teada selle juure mingi lähend x_1 , nii et $A \approx x_1^k$ ja

$$\frac{A}{x_1^k} = 1 + h,$$

kus $|h|$ on ühest väiksem murd. Nüüd saame võrduse

$$\sqrt[k]{A} = x_1 (1+h)^{\frac{1}{k}},$$

mille parema poole saab arendada binoomreaks, kui

$$m = \frac{1}{k}.$$

Järkjärgulise lähendamise meetod on suunavaks meetodiks algebraliste, transtsendentsete ja diferentsiaalvõrrandite numbrilisel lahendamisel, funktsioonide lähendamisel, lineaarsel planeerimisel ja paljude teiste suure praktilise tähtsusega probleemide lahendamisel.

Vaadeldav meetod on teenäitajaks ka matemaatikateaduses paljude matemaatiliste mõistete loomisel. Suuruste ühismõõdu leidmise probleem viib järkjärgulise lähendamise meetodi kaudu irratsionaalarvu mõiste tekkimisele.

Määratud integraali, püramiidi ruumala, ringjoone pikkuse ja ringi pindala ning paljude teiste, lõpmatute protsesside kaudu defineeritavate mõistete loomisel on järkjärgulise lähendamise meetod juhtivaks meetodiks (14).

R. Courant ja G. Robins hindavad järkjärgulise lähendamise meetodi erijuhtumit — iteratsiooni — eriti seetõttu, et seda meetodit kasutatakse «olemasolu tõestuste» juures. Nad ütlevad:

«Iteratiivsetel protsessidel on matemaatikas hiiglaslik tähtsus ses mõttes, et nende abil antakse suures osas «olemasolu tõestused»...» (46, lk. 430).

Klassikaliseks näiteks sel alal on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

lahendi olemasolu tõestus, mis esmakordselt anti E. Picardi¹ poolt.

Selleks et näidata antud algtingimusi (x_0, y_0) rahuldava lahendi olemasolu², asendatakse antud diferentsiaalvõrrand integraalvõrrandiga

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Nüüd moodustatakse funktsioonide jada

$$y_{k+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_k) dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ja näidatakse, et see jada koondub ja tema piirväärtus

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x)$$

ongi antud diferentsiaalvõrrandi lahendiks, mis täidab algtingimusi (x_0, y_0) .

Pretendeerimata küsimuse ammendavale käsitlusele, vaatlesime eespool ainult mõningaid näiteid järkjärgulise lähendamise meetodi rakendustest matemaatikas. Kuid siitki juba selgub, et selle meetodi tähtsust matemaatikas on raske ülehinnata. Seetõttu nimetamegi järkjärgulise lähendamise meetodit üheks hodogeetiliseks printsipiiks matemaatikas.

¹ E. Picard (1856—1941) — prantsuse matemaatik.

² Üksikasjalik tõestus leidub raamatus (54).

§ 7. Järkjärgulise lähendamise meetod inimese igapävas elus

Eelmises paragrahvis määratlesime järkjärgulise lähendamise meetodit kui meetodit antud ülesande lahendiks koonduva lähendite jada moodustamiseks. Siit järeldub, et antud ülesande lahendi lähendid moodustavad teatava järjestatud hulga.¹ Nagu märgitud, võib vastavalt konkreetse ülesande sisule olla selleks arvude hulk, funktsioonide hulk, lõikude hulk jms.

Veelgi enam, järkjärgulise lähendamise meetodi määrangus kõne all olev ülesanne ei tarvitse olla hoopiski matemaatilise sisuga ja sellest tingituna võivad lähendite jada liikmed olla matemaatikas mitte-definieeritavad objektid.

Vaatleme mõningaid näiteid.

1. Olgu vaja valmistada silindrikujuline metallist detail diameetriga 35 mm. Selle detaili valmistamiseks saab tööline esmalt oma kätte tooriku, mida võib käsitada kui tulevase detaili esimest lähendit. Toorikule antakse jämeda töötlemise teel silindri kuju, mida vaatleme vajaliku detaili teise lähendina. Selle lahendi sobivust kontrollitakse mõõtmise teel. Mittesobivuse korral töödeldakse detaili peenemate instrumentidega ja saadakse detaili kolmas lähend.

Sellist üha täpsemat töötlemist jätkatakse, kuni on jõutud vajalikke tingimusi rahuldava detailini. Siin on iga töötlemisetapi tulemuseks teatav materiaalne objekt — kindla diameetriga silindrikujuline detail. Nende diameetrite pikkuste järjestatud hulk moodustab vajaliku detaili diameetri pikkuse lähendite jada, nii et detaili valmistamist võib vaadelda kui järkjärgulise lähendamise meetodi rakendust.

Esitatud mõttekäiku võib arendada mitme teisegi töö-

¹ Hulk M on järjestatud, kui tema elementide vahel kehtib seos $a < b$ (a eelneb b -le), millel on järgmised omadused:

1. Mistahes kahe elemendi a ja b vahel kehtib üks ja ainult üks kolmest seosest: $a = b$; $a < b$; $b < a$.

2. Kui mistahes kolme elemendi a , b ja c puhul $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$.

Märkus: Et seos $a = b$ tähendab sisuliselt ühe ja sama elemendi kaht erinevat tähistust, siis võime öelda, et järjestatud hulga iga elemendi a ja b vahel valitseb üks ja ainult üks kahest seosest: $a < b$; $b < a$ (58, lk. 96).

protsessi jälgimisel, seega valmib inimtöö produkt paljudel juhtudel järkjärgulise lähendamise meetodi rakendusena.

2. Suur majanduslik tähtsus on loomade tõuaretustööl. Selle aluseks on Darwini õpetus, et orgaanilise maailma fülogeneetiline¹ areng toimub nende isendite valiku ja säilitamise teel, kes on kõige enam kohanemisvõimelised antud tingimustele. Kui fülogeneetiline areng toimub loomuliku valiku teel, siis tõuaretustöös omab peamist tähtsust kunstlik valik², mille all mõeldakse loomade eraldamist üldisest massist teatavate omaduste kompleksi (üldine konstitutsioon, produktiivsus, pärilikkuse omadused jt.) alusel (26, lk. 244; 25, lk. 21). Valiku tagajärjel toimub väliskeskonna teatud tingimustes organismi pisi-muutuste järkjärguline kuhjumine, mis viib sügavatele kvalitatiivsetele muudatustele ja uute tõugude tekkimisele (25, lk. 9). Siit ilmneb, et soovitud omadustega looma ei ole võimalik leida mitte ühekordse valiku teel, vaid see toimub pikemaajalises arenguprotsessis antud looma ja ta järglaste omaduste järkjärgulise parandamise teel. Esimene valik tehakse teatava vanusega noorloomade seas näiteks üldise konstitutsiooni ja põlvnemise alusel. Sel teel saadakse teatava omadustega loomade grupp G_1 . Kui loomad selles grupis hakkavad andma produktsiooni, siis tehakse teine valik, võttes eelmiste omaduste kõrval arvesse ka produktiivsust. Nii saadakse uus, eelmisest grupist paremate omadustega grupp G_2 . Kui selle grupi loomad on andnud järelkasvu, siis on võimalik teha juba teatavaid järeldusi ka pärilikkuse omaduste kohta. Viimaste põhjal tehakse kolmas valik, mille tulemusena saadakse jällegi uus ja paremate omadustega loomade grupp G_3 .

Analoogilisi valikuid korratakse gruppi G_3 kuuluvate loomade järglaste seas. Valides nii põlvest põlve kõige sobivamaid loomi ja luues neile soodsaid arengutingimusi, muudab inimene järk-järgult loomi vajalikus suunas.

Muidugi on toodud tõuaretuskeem lihtsustatud, kuid ta avab vaatluse all oleva teema seisukohalt tõuaretustöö olemuse.

¹ Fülogenees (kreekakeelsetest sõnadest *phyle* — hõim, sugukond; *genesis* — teke) — teatava looma- või taimeliigi ajalooline areng.

² Ka loomulik valik ei ole seejuures täielikult välistatud (52).

3. Järkjärgulise lähendamise meetod leiab kasutamist kahurväes suurtükiväe juhtimisel. Selleks teostatakse nn. proovilaskmisi. Kui mürsk ei taba märki, siis tehakse plahvatuskoha järgi sihiku parandus ja tulistatakse uuesti. Sihikut parandatakse seni, kui on saavutatud tulistamise vajalik täpsus (32).

Toodud näidetest selgub, et järkjärgulise lähendamise meetod leiab sisulist rakendamist inimese igapäevase elu väga erinevatel aladel.

* * *

Pragrahvis 6 nimetasime järkjärgulise lähendamise meetodit üheks hodogeetiliseks printsiibiks matemaatikas. Ei ole põhjust arvata, et nimetatud meetodi koht on eeskätt matemaatikateaduses ja selle rakendustes. Praegu, kus on eriti aktuaalne kooli ja elu sidemetega tugevdamise probleem, oleks aeg kasutada järkjärgulise lähendamise meetodit ka koolimatemaatikas. Mõningaid võimalusi selleks käsitletakse järgmises peatükis.

III. JÄRKJÄRGULISE LÄHENDAMISE MEETOD KESKKOOLI MATEMAATIKAKURSUSES

§ 8. Proovimine kui järkjärgulise lähendamise meetodi algelisem vorm

Plaanikindlalt läbiviidud proovimine on igapäevases elus laialt kasutatav töömeetod, millega kontrollitakse teatava objekti sobivust antud tingimuste rahuldamiseks. Proovitavad objektid võivad olla vastavalt ülesande sisule väga mitmesugused, näiteks töödeldav detail, mis peab vastama ettenähtud mõõtmetele (§ 7, näide 1); kaaluvihid, millede seast valitakse välja need, mis tasakaalustavad antud koormuse. Televiisori antenni asend, mille korral tekib parim kujutis ekraanil, leitakse samuti proovimise teel.

Objektid, millega teostatakse proovimist, võivad kuuluda ka matemaatika valdkonda. Nendeks võivad olla näiteks arv, lõik, nurk jt. Seepärast ei saa proovimisvõtet matemaatikas ignoreerida. Seda tehakse aga sageli, arvates, et proovimine on vaid hädaabinõuks. Tegelikult on kindla plaani järgi korraldatud proovimine üheks matemaatika töömeetodiks (14), mida tuleb rõhutada ka keskkoolis.

Nii näiteks leitakse kahe täisarvu a ja b jagatise numbrid proovimise teel, kusjuures nende sobivust ei proovita huupi, vaid kindla korra järgi, lähtudes teatavatest kaalutlustest. Proovimist jätkatakse seni, kui on leitud sobiv number.

Kõne all olevat meetodit kasutatakse antud arvu algteguriteks lahutamisel; samuti leitakse praktilises arvutustöös murdude taandajad ja sobivad laiendajad enamikul juhtudest proovimise teel.

Plaanipärasel proovimisel koostatakse alati teatav objektide jada, nii et selle jada iga järgnev liige rahuldab nõutud tingimusi paremini kui eelmine liige. Seepärast

tulebki käsitletavat meetodit vaadelda kui järkjärgulise lähendamise meetodi erivormi ja nimelt kui algelisemat vormi, sest ta ei nõua mingisuguste erivõtete ega algoritmide tundmist.

§ 9. Ruutjuure lähendite arvutamine proovimise teel

1. Küsimuse tähtsusest

Ruutjuure mõiste kujundamisel lähtutakse tavaliselt juhtumitest, kus juuritav arv on mingi täisarvu ruut. Sel korral ei valmista ruutjuure mõiste omandamine õpilastele tavaliselt erilisi raskusi. Metoodiliselt on aga vääri laiendada ruutjuure definitsiooni vahetult mistahes positiivse juuritava kohta, öeldes ainult, et vastavad ruutjuured saab leida sellekohastest tabelitest. Selline käsitlus on formaalne. Ruutjuure mõiste andmisel on oluline viia õpilased veendumusele ruutjuure lähendite numbrilise arvutamise võimalikkuses. Küsimuse põhimõtteline külg, s. t. ruutjuure loomuse küsimus jääb aga siinkohal vaatluse alt välja.

Ruutjuure arvutamise üheks võimaluseks on proovimismeetod.

2. Küsimuse üldine käsitlus

Lähtume võrrandist $x^2 = a$, mille mittenegatiivne lahend on \sqrt{a} , kus a tähistab mingit kindlat positiivset täisarvu. Leiame proovimise teel kaks positiivset järjestikust täisarvu x_0 ja $x_0 + 1$, nii et

$$x_0 < \sqrt{a} < x_0 + 1.$$

Võrrandi lahend on määratud täpsusega 1.

Jaotame saadud vahemiku kümneks võrdseks osavahe-
mikuks arvudega

$$x_0 + \frac{1}{10}; x_0 + \frac{2}{10}; \dots; x_0 + \frac{9}{10}$$

ja proovime nende sobivust antud võrrandi lahendina. Oletame, et

$$x_0 + \frac{x_1}{10} < \sqrt{a} < x_0 + \frac{x_1 + 1}{10},$$

kus x_1 tähistab mingit arvu hulgast $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Antud võrrandi lahend on määratud täpsusega 0,1.

Saadud vahemiku jaotame jälle kümneks osavahemikuks arvudega

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{1}{100}; x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{2}{100}; \dots; x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{9}{100}$$

ja proovime nende sobivust antud võrrandi lahendina. Olgu

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} < \sqrt{a} < x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2 + 1}{100},$$

kus x_2 kuulub hulka $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Võrrandi lahend on määratud täpsusega 0,01.

Mõttekäiku jätkates saame edasi:

$$x_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{10^k} < \sqrt{a} < x_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^3}$$

$$x_0 + \sum_{k=1}^4 \frac{x_k}{10^k} < \sqrt{a} < x_0 + \sum_{k=1}^4 \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^4}$$

.....

$$x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{10^k} < \sqrt{a} < x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

.....

Tõkete vahe

$$\begin{aligned} \Delta &= x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^n} - \left(x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{10^k} \right) = \\ &= 10^{-n} \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Seega on proovimise teel põhimõtteliselt võimalik leida antud võrrandi lahendit kui tahes vajaliku täpsusega. Tegelikku vajaduse rahuldamiseks piisab enamasti 2—3 kümnendkohast, mistõttu ka kasutatavad tabelid on ainult kolmekohalised.

3. Käsitluse meetoodika

Küsimuse koolikäsitluses vaadeldakse tavaliselt kõigepealt juhtumit, kui juuritav on ruutarv.

Olgu vaja leida näiteks $\sqrt{1369}$. Määrame esiteks ligikaudse hindamise teel otsitava juure mingid tõkkes näiteks täpsusega 10. Antud juhul ilmselt

$$30 < \sqrt{1369} < 40.$$

Kuna $35^2 = 1225$, siis

$$35 < \sqrt{1369} < 40.$$

Et juuritava üheliste number on 9, siis peab juure üheliste number olema kas 3 või 7. Et kolmega lõppev arv, s. o. 33, ei kuulu viimasesse vahemikku, siis jääb ainus võimalus: $\sqrt{1369} = 37$.

Kui juuritav ei ole ruutarv, siis on konkretsuse huvides soovitatav lähtuda mõnest ülesandest. Näiteks: Plekitahvlile on märgitud ruut külje pikkusega 1,20 m. Mitu korda tuleks külje pikkust suurendada, et plekitahvlist väljalõigatava ruudu pindala oleks kolm korda suurem märgitud ruudu pindalast?

Tähistades otsitava arvu tähega x , saame võrrandi

$$3 \cdot 1,20^2 = (1,20 x)^2,$$

millest $x^2 = 3$ ja $x = \sqrt{3}$. Otsitava ruudu külje pikkuse leidmiseks tuleb antud ruudu külje pikkus korrutada teguriga $\sqrt{3}$. Ükski täisarv seda tingimust ei rahulda, sest $1^2 = 1 < 3$ ja $2^2 = 4 > 3$, nii et $1 < x < 2$.

Rõhutame õpilastele, et iga tegelikkuse poolt seatud ülesanne nõuab probleemi lahendamist vaid teatava piiratud täpsusega, mitte aga absoluutse, piiramatu täpsusega. Seepärast loeme ka antud ülesande lahendamiseks, kui õnnestub leida saadud võrrandi ligikaudseid lahendeid nõutava täpsusega. Sobivaid arve on võimalik leida proovimise teel. Proovime näiteks saadud tõkete keskmist, s. o. 1,5. Kuna $1,5^2 = 2,25$, siis

$$1,5 < x < 2.$$

Otsitav arv on määratud täpsusega 0,5. Jaotame saadud vahemiku viieks osavahemikuks arvudega 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 ja proovime ruutude tabeli abil nende arvude sobivust. Selgub, et

$$1,7 < x < 1,8.$$

Vajalik lahend on määratud täpsusega 0,1. Proovime saadud tõkete keskmist 1,75. Saame

$$1,70 < x < 1,75.$$

Lahend on määratud täpsusega 0,05. Sellist plaanipärast proovimist jätkates leiame, et

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74;$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733.$$

Et andmetes oli antud vaid kolm tüvenumbrit, saame otsitava ruudu küljeks $1,20 \cdot 1,732 \approx 2,08$ (m).

Sellise näite varal veenduvad õpilased, et nii saab otsitavat ruutjuurt leida kuitahes vajaliku täpsusega. Kas sellisel proovimisel ka ükskord lõpp tuleb või on see protsess lõputu, on omaette küsimus, teooria küsimus. Tegelikult elu vajadused ei nõua sellel küsimusel siinjuures peatumist. Tähtis on ainult see, et õpilane saab veenduda otsitava ruutjuure lähendite arvutamise võimalikkuses. Alles pärast seda tuleb õpilastele selgitada, et töö lihtsustamiseks on koostatud ruutjuurte tabelid, mida kasutame edaspidi ruutjuurte leidmiseks.

§ 10. Proovimismeetod geomeetrias

1. Eelmärkusi

Paragrahvis 5 p. 5 käsitlesime juba neid põhjusi, miks ei ole praktiliselt võimalik ühtegi geomeetrilist konstruktsiooni absoluutselt täpselt teostada, olgugi et põhimõtteliselt võib ülesanne olla täpselt lahenduv. Seetõttu kasutatakse paljudel juhtudel, vaatamata sellele, kas konstruktsioon põhimõtteliselt on täpselt teostatav või mitte, täiesti teadlikult mitmesuguseid lähendkonstruktsioone, mis tagavad praktika vajadusi rahuldava täpsuse.

Lihtsaimaks lähendkonstruktsiooni teostamise võtteks on proovimine.

Praktiliselt kasutatakse proovimismeetodit iga geomeetrilise konstruktsiooni tegemisel. Kui näiteks ehitatakse kahe antud punkti järgi sirget, siis tuleb arvestada, et punkt realiseerub praktiliselt väga väikest pindala omava tasapinnalise kujundina (ringina); otsitav sirge paikneb aga teatava laiusena ribas. Selle sirge kõige tõenäosem asend leitakse alati joonlaua sobitamise ja silma järgi, seega proovimise teel.

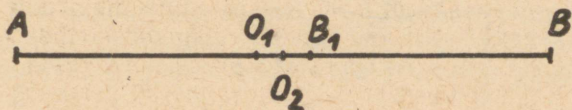
2. Sirglõigu poolitamine proovimise teel

Kuigi lõiku on kerge poolitada sirkli ja joonlaua abil, leiab see praktikas vähe kasutamist. Näiteks ei ole mõeldav, et lõigu poolitamiseks maastikul või liistu pooleks saagimiseks määratakse vajalik keskpunkt sirkli ja joonlaua abil. Mõnel juhul (näiteks tahvlijoonise korral) on otstarbekas poolitada lõiku proovimise teel. See põhineb sellel, et inimese silm määrab lühikese lõigu keskpunkti täpsemalt kui pikema lõigu keskpunkti.

Olgu antud sirglõik AB (joon. 6). Määrame silma järgi lõigu oletatava keskpunkti O_1 ja proovime sirkliga selle punkti sobivust. Kui punkt O_1 ei sobi, siis mõõdame sirkliga $B_1B = O_1A = a$. Nüüd $AB = 2a + O_1B_1$, millest

$$\frac{AB}{2} = a + \frac{O_1B_1}{2}.$$

Leiame silma järgi lõigu O_1B_1 keskpunkti O_2 ja proovime selle punkti sobivust. Kui punkt O_2 ei sobi, siis leiame uue punkti O_3 , korrates selleks sama operatsiooni, mida tegime punkti O_2 leidmisel. Sellist lõigu keskpunkti ligikaudse asendi parandamist kordame, kuni keskpunkt on leitud vajaliku täpsusega. Praktiliselt viib teine või kolmas proovimine peaaegu alati sihile.



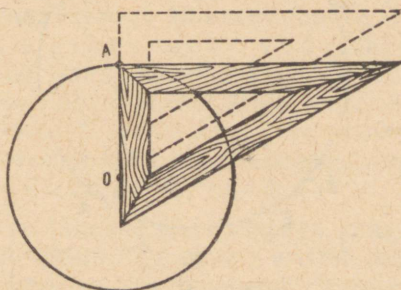
Joon. 6.

Märgime siinjuures, et proovimise teel on otstarbekas lahendada ka näiteks nurga poolitamise ja kolmitamise, samuti lõigu kolmitamise ülesannet.

3. Ringjoone puutuja ehitamine läbi antud punkti

A. Punkt on ringjoonel

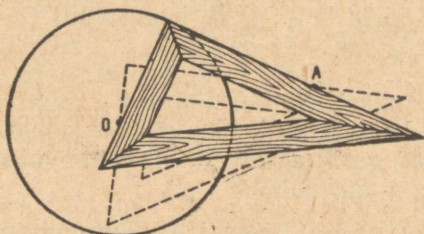
Puutuja joonestamist proovimise teel kolmnurga abiga näitab joonis 7. Proovimise teel sobitatakse kolmnurka nii, et ta täisnurga tipp satuks ringjoonel olevasse punkti A ja kaatet läbiks samal ajal ringi keskpunkti O .



Joon. 7.

B. Punkt asetseb väljaspool ringjoont

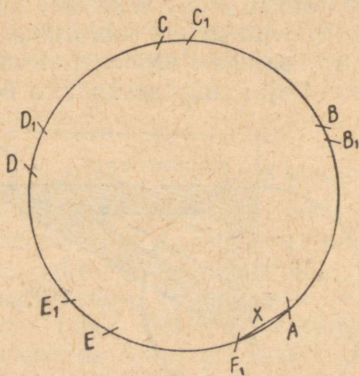
Puutuja joonestamine selgub jooniselt 8, kus proovimise teel sobitatakse kolmnurk nii, et ta kaatedid läbivad punkte A ja O ning täisnurga tipp on samal ajal ringjoonel.



Joon. 8.

4. Ringjoone jaotamine võrdseteks osadeks

Praktiliselt on lihtne jaotada ringjoont sirkli ja joonlaua abil neljaks, kuueks, kolmeks võrdseks osaks. Tunduvat tülikam on aga näiteks korrapärase viisnurga ehitamine, kuigi põhimõtteliselt on seda võimalik teha absoluutselt täpselt. Sel juhul viib kergesti sihile proovimine. Võtame sirklisse antud ringi (joon. 9) raadiusest suurema



Joon. 9.

lõigu a ja proovime, mitu korda saab seda lõiku paigutada kõõluna joonisele. Sel teel saadud punktid ringjoonel on tähistatud tähtedega $A, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$. Selgub, et valitud lõik oli liiga lühike, mille tõttu tekkis jääk kõõlu $F_1A = x$ näol. Seega korrapärase kõõlviisnurga ümbermõõt $q_5 = 5a + x$, millest näeme, et

$$\frac{q_5}{5} = a + \frac{x}{5}.$$

Jaotame silma järgi kaare $F_1A \approx x$ viieks võrdseks osaks, pikendame lõiku a silma järgi $\frac{x}{5}$ võrra ja proovime sel teel saadud lõigu sobivust korrapärase kõõlviisnurga küljeks. Kui saadud lõik ei sobi, siis kordame tehtud mõttekäiku seni, kuni jõuame vajaliku pikkusega kõõluni. Joonisel 9 jaotavad ringjoone viieks võrdseks osaks punktid A, B, C, D, E .

§ 11. Hariliku murru lähendamine lõppeva kümnendmurruga

1. Küsimuse tähtsusest

Praktilises arvutustöös leiavad kümnendmurrud võrratult enam rakendamist kui harilikud murrud, sest kümnendmurdudega opereerimine on märgatavalt lihtsam. Kui arvutuses on vaja näiteks murdu $\frac{4}{5}$, siis asendatakse see ikka kümnendmurruga 0,8. Nagu teada, ei ole aga enamikul juhtudest võimalik asendada harilikku murdu täpselt mingi lõppeva kümnendmurruga. Sel juhul asendatakse harilik murd lõppeva kümnendmurruga, mis on selle hariliku murru ligikaudseks väärtuseks (lähendiks), ehk harilik murd lähendatakse lõppeva kümnendmurruga. Sellisel lähendamisel tekib alati teatav viga. Seega on vaatluse all oleva küsimuse üheks väärtuseks see, et õpilane tutvub siin rakendusmatemaatika tähtsate mõistetega — lähendi ja viga.

Hariliku murru lähendamisel lõppeva kümnendmurruga saab näidata, et tehtud viga oleneb sellest, mitu kümnendkohta võetakse hariliku murru lähendis arvesse: uute küm-

nendkohtade juurdearvutamisel toimub vea järkjärguline vähendamine. Sellest seisukohast lähtudes on käsitletav küsimus teatavaks ettevalmistuseks mõned aastad hiljem õppimisele kuuluva piirväärtuse mõistele. Samuti võimaldab hariliku murru lähendamine lõppeva kümnendmurruga arendada õpilaste arvutusoskust.

2. Küsimuse üldisest käsitlesest¹

Nagu teada, on kõigi harilike murdude (ratsionaalarvude) hulk ühelt poolt ja lõputute perioodiliste kümnendmurdude hulk teiselt poolt identsed.² Samuti on teada, et rõhuval enamikul juhtudel teisendub harilik murd $\frac{p}{q}$ lõputuks perioodiliseks murruks, kus perioodis ei ole kõik numbrid korruga nullid:

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^r \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{r+l}}{10^l}, \text{ kus}$$

r tähistab kümnendkohtade arvu enne perioodi;

s tähistab perioodis olevate numbrite arvu;

a_n ja a_{r+l} kuuluvad hulka $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, kuid iga

$a_{r+l} \neq 0$.

Selline hariliku murru esitamine kümnendmurruna on absoluutselt täpne. Tegelikus arvutustöös ei ole võimalik opereerida lõputute murdudega ja selle järele ei ole ka vajadust, sest kõik tegelikkuse poolt seatud probleemid lahenduvad teatava piiratud täpsusega. Seejärest tuleb hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks teostatav jagamine mingi kümnendkoha juures lõpetada ja anda hariliku murru lähend lõppeva kümnend-

¹ Üldise käsitlese üksikasjad võib leida näiteks raamatust (58, lk. 308).

² Siinjuures vaadeldakse lõppevat kümnendmurdu kui lõputut perioodilist kümnendmurdu, mille perioodiks on null. Vaatluse alt välistatakse juhtum, kui perioodis on ainult üheksa.

murru näol vastavalt ümardamisreeglitele kas puuduga või liiaga, s. t.

$$\frac{p}{q} \approx s_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, & \text{kui } a_{n+1} < 5 \\ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}, & \text{kui } a_{n+1} \geq 5. \end{cases}$$

Sellisel juhul öeldakse, et harilik murd on lähendatud lõppeva kümnendmurruga.¹ Sellisel lähendamisel tekkiv viga ei ületa lähendi s_n viimase koha poolt ühikut, s. t.

$$\left| \frac{p}{q} - s_n \right| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n}$$

Tulemus näitab, et hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks saab moodustada hariliku murru lähendite koonduva jada, milles ilmnebki järkjärgulise lähendamise meetod vaadeldava küsimuse käsitlemisel.

3. Käsitlemise meetodika

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks on vaja anda lähendi ja lähendi vea mõiste ning viia õpilased selle tõe tunnetamisele, et hariliku murru lähendamisel tehtav viga oleneb lähendi kümnendkohtade arvust ja on seda väiksem, mida suurem on kümnendkohtade arv. Seda tuleb teha konkreetsete arvuliste näidete varal, ilma et oleks vaja rääkida piirväärtusest või isegi perioodilisest murrust.

Alljärgnevas tabelis on esitatud kaks näidet. Tabelisse on kantud vea täpsete väärtuse kõrval ka tegelikus töös kasutatavad vea ülemmäärad. Neid näiteid võib siduda ka mõne konkreetse ülesandega.

Näiteks: 1) Salves on 6000 kg vilja. 2000 kg sellest viidi veskisse. Väljendada kümnendmurruga, kui suur osa viljast viidi veskisse.

¹ Hariliku murru lähendiga tuleb opereerida ka siis, kui harilik murd teisendub küll lõppevaks kümnendmurruks, kuid kümnendkohtade arv on vajaliku täpsuse saavutamiseks tarbetult suur.

2) Väljendada kümnendmurruga, kui suure osa nädalast moodustab 4 päeva.

Harilik murd	Lähend	Viga	Vea ülemmäär
$\frac{1}{3}$	0,3	$\frac{1}{30}$	0,05
	0,33	$\frac{1}{300}$	0,005
	0,333	$\frac{1}{3000}$	0,0005
$\frac{4}{7}$	0,6	$\frac{1}{35}$	0,05
	0,57	$\frac{1}{700}$	0,005
	0,571	$\frac{1}{7000}$	0,0005
	0,5714	$\frac{1}{35000}$	0,00005

Et vaadeldava teema õppimisel ei tunta veel absoluutväärtuse mõistet, siis tuleb vea arvutamisel alati lahutada suuremast arvust väiksem, s. t. kui lähend on arvutatud liiaga, siis lahutatakse lähendist antud murd; kui lähend on arvutatud puuduga, siis lahutatakse antud murrust lähend. Siin võib lahendada veel mitmesuguseid ülesandeid, näiteks: 1) Mitu korda on esimese lähendi viga suurem kui teise lähendi viga? 2) Mille võrra on kolmanda lähendi viga väiksem kui esimese lähendi viga? jt. Sel teel veendub õpilane, et lähendi viga on seda väiksem, mida enam numbreid on lähendis pärast koma välja arvutatud. Seega toimub vea järkjärguline vähenemine ja lähendi väärtuse lähenemine antud hariliku murruga väärtusele.

§ 12. Suuruste mõõtmine. Irratsionaalarvu mõiste

1. Küsimuse tähtsusest

Väljapaistev prantsuse matemaatik Henri Lebesgue märkis oma raamatus «Suuruste mõõtmisest»:

«Ei ole enam tähtsamat teemat (s. t. kui suuruste mõõtmine — A. T.): suuruste mõõtmine on

matemaatika kõigi rakenduste lähtepunktiks (minu sõrendus — A. T.)» (47, lk. 18)¹.

Praegu on suuruste mõõtmise õpetamisel keskkoolis üheks tõsiseks puuduseks see, et ei anta üldist printsiipi, mis oleks aluseks kõigi siia kuuluvate küsimuste käsitlemisele. Kui 8-klassilises koolis lähtutakse pikkuse, pindala ja ruumala mõõtmisel konkreetsetest näidetest ja toetutakse õpilaste intuitsioonile, siis ruumala mõõtmisel 11. klassis kasutatakse aksiomaatilist meetodit. Ei ole kahtlust, et aksiomaatiline meetod on tõepoolest üheks selliseks üldiseks printsiibiks, millest saab lähtuda kogu suuruste mõõtmise süsteemi ülesehitamisel, ja nii matemaatikateaduses toimitaksegi. Siinjuures tekib aga küsimus, miks kasutatakse aksiomaatilist meetodit 11. klassis ainult ruumalade mõõtmise süsteemi loomisel, kuid pikkuse ja pindala mõõtmisel jäädakse sellele tasemele, mille andis 8-klassiline kool. Aksiomaatiline meetod vaadeldavate küsimuste käsitlemisel võiks tulla kõne alla siis, kui keskkooli matemaatikakursuse lõppu paigutataks kokkuvõtlik teema, kus kõneldaks geomeetria-kursuse aksiomaatilise ülesehitamise põhimõtetest üldse. Seal võiks näidata võimalusi aksiomaatilise meetodi kasutamiseks ka suuruste mõõtmise süsteemi loomisel.² Aksiomaatilise meetodi kasutamine matemaatiliste mõistete esialgse õppimise käigus on aga ebaotstarbekas, sest täie teadusliku rangusega ei saa seda ikkagi kasutada. Seetõttu jääb vastavate küsimuste käsitlemine poolikuks ja isegi ebateaduslikuks. Nii näiteks A. Kisseljovi planimeetria õpikus (7) algab hulknurga pindala käsitlemise nõudega, et

1) kahe võrdse kujundi pindalade mõõtarvud peavad olema võrdsed;

2) kui antud kujund on tükeldatud mitmeks võrdseks osaks, milledest igaüks on kinnine kujund, siis terve kujundi pindala mõõtarv peab olema võrdne üksikute osade pindalade mõõtarvude summaga.

¹ Kõrgelt hindab vaadeldavat teemat ka nimetatud raamatu venekeelse tõlke toimetaja J. M. Jaglom:

«...mõõtmine on kooligeomeetria kursuse üks põhilisemaid ja ühtlasi õpilaste jaoks raskemaid küsimusi» (47, lk. 6).

² Sellise süsteemi juurde on läinud A. J. Fetissovi oma geomeetria õpikus (55), kus suuruste mõõtmise probleemi käsitletakse stereomeetria kursuse lõpus.

Pärast pindala sellist defineerimist peaks olema küsimuse arendamise loomulikuks jätkuks tõestus, et iga hulknurgaga saab seada vastavusse nõudeid 1 ja 2 rahuldava mõõtarvu. Tõestust aga ei järgne ega saagi järgneda, sest õpilased ei ole selleks ette valmistatud. Selline lähenemine pindala mõõtmise probleemile on täiesti formaalne ja nõuete 1 ja 2 püstitamise mõte jääb õpilasele arusaamatuks. Täiesti analoogiline on olukord ruumala käsitlemisega A. Kisseljovi stereomeetria õpikus (8).

Seoses aksiomaatilise meetodi rakendamisega geomeetria õpetamisel jagab käesoleva töö autor nõukogude matemaatikapedagoogide V. G. Boltjanski, N. J. Vilenkini ja J. M. Jaglomi seisukohta:

«Teaduses ei ole aksiomaatiline meetod olnud kunagi tunnetuse esimeseks etapiks (minu sõrendus — A. T.). Aksiomatiseeritakse alati midagi tuntut» (24, lk. 146).

Prantsuse matemaatik Frechet märgib seoses kaasaegse matemaatika õpetamise probleemidega:

«Aksiomaatiline meetod on suurepärane asi professionaalsete matemaatikute jaoks. Pedagoogilisest seisukohast ei kõlba ta aga kuhugi. Tema kasutamisel on kogu aeg vaja rõhutada talle elu andnud induktiivset evolutsiooni ja kasutatavate terminite konkreetset interpretatsiooni (minu sõrendus — A. T.), mis lubavad seda meetodit kasutada reaalses tegelikkuses» (21, lk. 255).

Suuruste mõõtmine koolimatemaatikas ei ole tähtis mitte ainult seepärast, et ta on lähtepunktiks matemaatika rakendustele, vaid ka seetõttu, et suuruste mõõtmine on tihedalt seotud arvu mõiste arenguga. Kui naturaalarvud on teatava hulga esemete loendamise aluseks, siis naturaalarvude hulga laiendamise vajaduse on tinginud eeskätt mõõtmise probleemid. Laiendamine ratsionaalarvudega on tingitud mõõtmispraktika vajadustest. Ratsionaalarvude hulga laiendamine irratsionaalarvudega on tingitud aga mõõtmisprobleemi teoreetilistest aspektidest; seepärast eeldab siia kuuluvate küsimuste käsitlemine tunduvalt kõrgemat abstraktsiooni, kui on vaja tegelikul mõõtmisel.

Seoses vaadeldava küsimusega kirjutab N. N. Luzin:

«Praktika seisukohalt ei ole mõõtmise teostamiseks meil vaja teada (minu sõrendus — A. T.) mingisuguseid muid arve peale ratsionaalarvude... Kuid ainult ratsionaalarvudest ei piisa enam siis, kui on vaja lahendada geomeetria, mehaanika ja teoreetilise füüsika küsimusi absoluutse täpsusega» (48, lk. 5—6).

Siit järeldus: praktika seisukohalt piisab sellest, kui tuntakse mingisugust meetodit, mis võimaldab leida otsitavaid suurusi praktika vajadusi rahuldava täpsusega. Selliseks meetodiks on järkjärgulise lähendamise meetod.

Sellisel juhul võib kerkida küsimus: kas irratsionaalarvude õpetamine keskkoolis on üldse tarvilik? Selle küsimuse tõstatamine on õigustatud seda enam, et irratsionaalarvu mõiste õpetamine keskkoolis ei ole andnud siiani kuigi märkimisväärseid tulemusi. Seda kinnitavad eelkõige sisseastumiseksamid kõrgematesse koolidesse, mis näitavad selgesti, et õpilased on omandanud küll teatavaid oskusi irratsionaalsete avaldistega töötamiseks, kuid irratsionaalarvu mõiste on jäänud täiesti ebaselgeks. Et keskkooliõpilaste teadmised irratsionaalarvu kohta ei kannata ka kõige tagasihoidlikumat kriitikat, seda tõendavad ka koolidest saadud faktilised andmed. Nimelt esitati autori poolt 9. kl. (5 eri õpetajat), 10. kl. (6 eri õpetajat) ja 11. kl. (6 eri õpetajat) õpilastele muude küsimuste seas ka kaks järgmist küsimust:

- 1) Missuguseid arve nimetatakse irratsionaalarvudeks?
- 2) Miks on vajalik ratsionaalarvude hulka laiendada irratsionaalarvudega?

Tulemustest (vt. tabel lk. 50) selgub, et enamik õpilasi ei tea, mis on irratsionaalarv ja mis põhjustab sellise arvu mõiste loomise. Seega ei ole õpilased sellest mõistest omandanud praktiliselt mitte midagi.

Esitame siinjuures mõned sageli esinenud vastused.

Esimese küsimuse kohta:

Irratsionaalarvudeks nimetatakse murdarve.

Irratsionaalarvudeks nimetatakse lõpmatuseni jaguvaid arve.

Irratsionaalarvud on lõpmatud kümnendmurrud.

Klass	1. küsimus			Kokku	2. küsimus			Kokku
	õige	vale	vastamata		õige	vale	vastamata	
IX	8 5%	113 71%	39 24%	160 100%	7 4%	51 32%	102 64%	160 100%
X	24 15%	87 56%	45 29%	156 100%	3 2%	44 28%	109 70%	156 100%
XI	66 48%	52 37%	21 15%	139 100%	37 23%	51 31%	76 46%	164 100%
Kokku	98 22%	252 55%	105 23%	455 100%	47 10%	146 30%	287 60%	480 100%

Teise küsimuse kohta:

Irratsionaalarve on ratsionaalarvude kõrval vaja sellepärast, et oleks suuremad võimalused tehete teostamisel.

Seepärast et saada laiemat arvude valda.

Irratsionaalarvudega on võimalik arvutada täpsemalt.

Kui loobuda irratsionaalsete suuruste ($\sqrt{5}$, $\log 7$ jt.) olemasolu küsimuse tõstatamisest ja kui arvestada seda, et järkjärgulise lähendamise meetod näitab tee vastavate suuruste lähendite arvutamiseks (millest tuleb juttu allpool), siis on tõepoolest võimalik irratsionaalarvude õpetamisest loobuda. Sel juhul tekib aga põhimõttelist laadi raskus siis, kui keskkooli vanemates klassides hakatakse õpetama matemaatilise analüüsi elemente funktsiooni piirväärtuse, funktsiooni tuletise ja integraali näol. Et reaalarvude teooria on matemaatilise analüüsi vundamendiks, siis irratsionaalarvu mõiste andmiseta keskkoolis muutuksid mitmed matemaatilises analüüsis õpitavad laused mõttetuteks. Nii õpetaksime matemaatilise analüüsi elemente mitteteaduslikel alustel. Sellest seisukohast lähtudes on irratsionaalarvu mõiste andmine keskkoolis tarvilik.

Et see mõiste ei tekitaks õpilastes müstilisi kujutlusi (vastava meelelise kujundi puudumise tõttu), on vaja silmas pidada kahte asjaolu:

1) Irratsionaalarvu mõistet tuleb selgitada võimalikult kõrgemal vanuseastmel. Selle mõiste käsitlemine peaks

uute programmide kohaselt leidma aset vahetult enne funktsiooni piirväärtuse käsitlemist.

2) Irratsionaalarvu mõiste andmisel tuleb lähtuda praktilisest probleemist — sirglõigu pikkuse mõõtmisest, kuid juba kõrgemal abstraktsiooniastmel, kui seda tehakse kaheksaklassilises koolis.

Suuruste mõõtmine irratsionaalarvu mõiste kujundamise lähtekohana on kooskõlas ka küsimuse ajaloolise arenguga (45, lk. 91). Sellist õpetamisviisi pooldab silmapaiste v nõukogude matemaatik A. N. Kolmogorov, öeldes:

«Matemaatiliste mõistete koolis õpetamise lahusolek nende tekkimisest (minu sõrendus — A. T.) viib täielikule printsiibitusele ja kursuse loogilisele defektsusele» (47, lk. 10)¹.

Küsimuse käsitlemine seoses ajaloolise arenguga väldib ka valet arusaamist, nagu oleks irratsionaalarv alati seotud mingi radikaaliga.

Kokkuvõttes: Keskkooliõpilane peaks jõudma arusaamisele, et irratsionaalarvu mõiste loomine on tingitud vajadusest väljendada mistahes sirglõigu pikkust arvu abil, täpsemalt öeldes, vajadusest väljendada pidevalt muutuva suuruse mistahes väärtust arvu abil. Ilma irratsionaalarvu mõisteta ei ole see ülesanne lahendatav.

Reaalarvude teooria käsitlemine eksaktsel kujul peab kuuluma kõrgema kooli ülesannete hulka.

2. Suuruste mõõtmise küsimuse üldisest käsitlemisest

(sirglõigu mõõtmise näite põhjal)

Geomeetria deduktiivses kursuses tähendab sirglõigu pikkuse mõõtmine seda, et iga sirglõiguga seatakse vastavusse üks reaalarv — sirglõigu pikkuse mõõt arv, nii et oleks täidetud järgmised tingimused:

1. Kongruentsete lõikude mõõt arvud on võrdsed.
2. Sirglõikude summa mõõt arv on võrdne liidetavate sirglõikude mõõt arvude summaga.
3. On valitud mõõtühik, s. t. on olemas sirglõik, mille mõõt arv on 1.

J. S. Dubnov nimetab sirglõigu pikkuse sellist defineerimist deskriptiivseks defineerimiseks (38, lk. 12, 13).

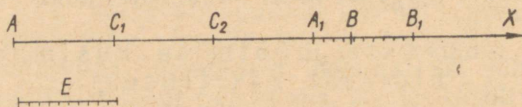
¹ H. Lebesgue'i raamat «Suuruste mõõtmisest» (47) on varustatud A. N. Kolmogorovi eessõnaga.

Nii nagu deskriptiivsed definitsioonid üldse, ei näita ka sirglõigu pikkuse deskriptiivne definitsioon sirglõigu pikkuse mõõtarvu olemasolu. Pärast sellist defineerimist peab olema järgmiseks sammuks sirglõigu pikkuse mõõtarvu olemasolu tõestus. Selle küsimuse range lahendamise eeldab kongruentsuse aksioomide, Archimedese aksioomi, reaalarvude kontiinuumi ja piirväärtuste teooria tundmist (12, lk. 131).

Võttes aluseks eelmises punktis püstitatud nõuded, on ilmne, et keskkooli matemaatikakursuses ei ole mõõtmise teooriat sellisel rangel teaduslikul tasemel üldse võimalik üles ehitada.

Sirglõigu pikkuse mõõtmise teooriat ja koos sellega arvu mõistet on võimalik arendada ka teisest aspektist lähtudes, nimelt võttes aluseks sirglõigu pikkuse nn. konstruktiivse definitsiooni (38, lk. 12, 13), mis näitab kätte ka tegeliku võtte sirglõigu pikkuse leidmiseks.

Sel juhul on küsimuse käsitus otseselt seotud igapäevase mõõtmispraktikaga, kus juhtivaks meetodiks on järkjärgulise lähendamise meetod. Et seda käsitlust saab kohandada ka keskkoolimatemaatika jaoks, siis peatume sellel lähemalt; seejuures peame silmas H. Lebesgue'i seisukohti eespool nimetatud raamatust (47)¹.



Joon. 10.

Olgu vaja mõõta kiirel X valitud sirglõigu AB pikkus, kui mõõtühikuks on lõik E (joon. 10). Paigutame lõigu E järjestikku lõigule AB alates punktist A . Siis saame punktid C_1, C_2, \dots , nii et $AC_1 = C_1C_2 = \dots = E$. Olgu punkt A_1 viimane sel teel saadud punkt, mis asetseb veel lõigul AB ; punkt B_1 olgu kiirel X esimene selliselt saadud punkt, mis ei asetse enam lõigul AB . Kui punkt A_1 ühtib punktiga B , siis lõigu AB pikkus x , mõõdetuna ühikuga E , väljendub

¹ Märkime siinjuures, et H. Lebesgue ei arenda oma käsitlust üldisel kujul, vaid konkreetsete arvuliste näidete varal, lähtudes sirglõigu pikkuse mõõtmise probleemist.

naturaalarvuga. Kui punkt A_1 ei ühti punktiga B , siis leidub ikka kaks naturaalarvu x_0 ja $x_0 + 1$, et lõigu AB pikkus x rahuldab tingimust

$$x_0 < x < x_0 + 1,$$

s. t. lõigu AB pikkus on määratud täpsusega 1. Seega on arvud x_0 ja $x_0 + 1$ pikkuse x lähendid, esimene puuduga, teine liiaga. Nendest lähenditest on võimalik saada täpsemaid lähendeid ehk neid lähendeid on võimalik parandada. Selleks jaotame valitud ühiku E kümneks võrdseks osaks, s. t. võtame lõigu E_1 , nii et ühikulise E_1 korral on lõigu E pikkus 10. Oletame, et pärast seda, kui kordame ühiku E puhul tehtud operatsiooni uueks ühikuks võetud lõiguga E_1 , saame

$$10x_0 + x_1 < x < 10x_0 + (x_1 + 1)$$

ehk
$$x_0 + \frac{x_1}{10} < x < x_0 + \frac{x_1 + 1}{10},$$

kui ühikuks on E . Seega on lõigu AB pikkus määratud täpsusega 0,1, nii et $x_0 + \frac{x_1}{10}$ ja $x_0 + \frac{x_1 + 1}{10}$ on selle pikkuse paremad lähendid kui x_0 ja $x_0 + 1$.

Minnes nii järk-järgult üle eelmiselt mõõtühikult E_k kümme korda väiksemale mõõtühikule E_{k+1} saame leida lõigu AB pikkuse ikka täpsemaid lähendeid. Selles ilmnebki vaadeldava probleemi lahendamise järkjärgulise lähendamise meetodiga.

Nii saame

$$100x_0 + 10x_1 + x_2 < x < 100x_0 + 10x_1 + (x_2 + 1),$$

kui ühikuks on E_2 ;

$$1000x_0 + 100x_1 + 10x_2 + x_3 < x < 1000x_0 + 100x_1 + 10x_2 + (x_3 + 1),$$

kui ühikuks on E_3 ;

....

$$\sum_{m=0}^k 10^{k-m} x_m < x < \sum_{m=0}^k 10^{k-m} x_m + 1,$$

kui ühikuks on E_k . (x_m kuulub hulka $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, kui $m \neq 0$; x_m on mittenegatiivne täisarv, kui $m = 0$.)

Kõik lõigu AB pikkuse sel teel saadud tõkked on täisarvud. Minnes üle esialgselt valitud pikkusühikule E ,

saame selle pikkuse tõketeks lõppeda kümnendmurrud, vastavalt

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} < x < x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{1}{100};$$

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} < x < x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \frac{1}{1000};$$

.....

$$\sum_{m=0}^k \frac{x_m}{10^m} < x < \sum_{m=0}^k \frac{x_m}{10^m} + \frac{1}{10^k}.$$

Arvujadadest

$$a_k = \sum_{m=0}^k \frac{x_m}{10^m} \text{ ja } a'_k = \sum_{m=0}^k \frac{x_m}{10^m}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

esimene on monotoonselt kasvav (eeldusel, et iga $x_m \neq 0$, kui $m \geq N$, kus $N > 0$ tähistab naturaalarvu), teine on monotoonselt kahanev, kusjuures esimese jada iga liige on väiksem teise jada igast liikmest.

Kui $k \rightarrow \infty$, siis need arvujadad¹ määravad ühe reaalarvu α ; lõigu AB pikkuse x all mõistetaksegi seda reaalarvu: $x = \alpha$.

Järgmise sammuna reaalarvude kontiinuumi kujundamisel tuleks saadud reaalarvu mõiste võtta täpse loogilise analüüsi alla.² See tähendab vaadelda summa

$$a_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_m}{10^m}$$

kolme loogiliselt võimalikku juhtumit:

1) On olemas teatav naturaalarv N , et

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0.$$

Sel juhul saame lõppeva kümnendmurrud, mis väljendab ratsionaalarvu.

¹ Kuna teise jada iga liikme viimane number on esimese jada vastava liikme viimasest numbrist alati ühe võrra suurem, siis piisab lõigu pikkuse määramiseks ka ühest jadast, näiteks esimesest.

² H. Lebesgue'il see analüüs puudub, sest ta ei käsitle eraldi ratsionaalarve, vaid jõuab mõõtmise kaudu vahetult «üldiste arvude» (lk. 27) juurde, mille erijuhtumiks on ratsionaalsed murrud.

2) On olemas naturaalarvud r ja s , et

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_m}{10^m} = \sum_{l=0}^r \frac{x_l}{10^l} + \sum_{k=1}^s \frac{x_{r+k}}{10^{r+k}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^{js}}.$$

Sel juhul on murd lõputu perioodiline, seega ka ratsionaalarv.

3) Tekkinud kümnendmurd on lõputu mitteperioodiline. Et selline juhtum üldse võimalik on, näitab ruudu diagonaali mõõtmine, kui ühikuks on ruudu külg. Kõigi lõputute perioodiliste ja lõppevate kümnendmurdu hulga ning ratsionaalarvude hulga identsuse tõttu kujutab lõputu mitteperioodiline kümnendmurd uut arvu, mida nimetatakse irratsionaalarvuks.

Lähtudes sirglõigu pikkuse mõõtmisest oleme nii jõudnud järkjärgulise lähendamise meetodi rakendamisega irratsionaalarvu mõiste juurde.

3. Käsitlemise meetodika 8-klassilises koolis

Suuruste mõõtmise algmetega tegeldakse juba algklassides. Nii näiteks vaadeldakse 1. klassis mõnede konkreetsete suuruste mõõtmist ja seoses sellega antakse ka vastavad mõõtühikud: *meeter*, *sentimeeter*, *kilogramm*, *nädal* ja *päev*. Arvestades mõõtmisoskuse suurt praktilist tähtsust, on nende küsimuste käsitlemise varane algus igati õigustatud. Järgmistes algklassides süvendatakse ja laiendatakse mõõtmisoskust, kusjuures otseste mõõtmiste kõrval vaadeldakse ka kaudseid mõõtmisi pindala ja ruumala arvutamise näol. Selle tulemusena tunneb 4. klassi lõpetaja kõiki tähtsamaid pikkuse, pindala, ruumala ja aja mõõtusid. Neljandas klassis saab õpilane pindala ja ruumala mõõtmise varal elementaarse ettekujutuse ka sellest, et teatava suuruse tegelik mõõtmine antud mõõtühikuga tähendab teha kindlaks, mitu ühikut mahub mõõdetavasse suurusesse.¹

Kõigi mõõtmistulemuste ligikaudsuse küsimus tõuseb täie teravusega päevakorda 5.—7. õppeaastal. Märgime, et aine esitamine sellest aspektist lähtudes ei ole alati kül-

¹ Suuruse mõõtmise sellisest mõistmisest kõneldakse üksikasjalikumalt käesoleva töö järgnevatel lehekülgedel.

lalt järjekindel ja vaieldamatu. Kuskil ei rõhutata tegelikul mõõtmisel saadava mõõtarvu järkjärgulist lähendamist kuni vajaliku täpsuse saavutamiseni; sellest tingituna ei tooda ka täie selgusega esile, miks mõõtmise tulemusel saadud arvusse tuleb suhtuda alati kui ligikaudsesse arvusse.

Hiljemalt 7. klassis tuleks viia õpilased arusaamisele, et suuruste otsene mõõtmine toimub sageli järkjärgulise lähendamise teel kuni vajaliku täpsuse saavutamiseni. Samuti peaks siin kujunema õpilastes arusaamine, et suurust tegelikult mõõta, kas otseselt või kaudselt, tähendab kindlaks teha, mitu korda mahub mõõdetavasse suurusesse mõõtühik või selle osa.

Märgime siinjuures, et kuigi mõõtmise selline mõiste ei ole teaduslikult range, on ta praktilise mõõtmisega täielikult kooskõlas.¹ Käesoleva töö autori poolt teostatud kontroll näitab, et sellise arusaamise mõõtmisest on omandanud suur osa keskkooliõpilasi: 40% 161-st 10.—11. klassi küsitletud õpilastest mõistis mõõtmise all selle kindlaksmääramist, mitu korda mahub mõõtühik mõõdetavasse suurusesse.

Suuruste mõõtmise teoreetilisi aspekte 8-klassilises koolis ei ole vaja puudutada. Sellest olenevalt tuleb küsimust õpilastele selgitada konkreetsete, õpilaste elule lähedaste näidete varal, mitte aga üldisel, abstraktsel kujul. Küsimusteks võivad olla näiteks mõnede suuruste mõõtmine spordivõistlustel. Kui mõõdetakse oda lennukaugust (x) mõõdulindiga, millel kõige väiksem kriipsuvahe on 1 cm, siis kauguse esimesed lähendid saadakse täismetrites, näiteks

$$72 \text{ m} < x < 73 \text{ m};$$

teised lähendid saadakse täpsusega 0,1 m, näiteks

$$72,5 \text{ m} < x < 72,6 \text{ m};$$

kolmandad lähendid saadakse täpsusega 0,01 m, näiteks

$$72,57 \text{ m} < x < 72,58 \text{ m}.$$

¹ J. S. Dubnov iseloomustab vaatluse all olevat küsimust järgmiselt: «Olgugi, et praktiliselt on see juhtum kõige tähtsam, võib isegi öelda, et ainutähtis, on ta teoreetiliselt siiski erandlik...» (38, lk. 24).

Et sellisel mõõtmisel suuremat täpsust ei vajata, siis lõpetatakse lähendamine saadud tulemusega ja antakse vastuseks kas 72,57 m või 72,58 m, vastavalt sellele, kas üle 72,57 m ulatuv jääk on väiksem või suurem (võrdne) kui 0,5 cm.

Toodud näitest ilmneb, et otsese mõõtmise tulemus saadakse siin järkjärgulise lähendamise teel. Seejuures ongi vaja rõhutada, et mõõtmise tulemus on ligikaudne arv, kuna teatav hinnang tuleb ikka anda silma järgi. Ka sel juhul, kui mõõdetava pikkuse lõpppunkt (või mõõduriista osuti) näib olevat kohakuti langenud skaala mõne kriipsuga, on otsus tehtud ikkagi silma järgi. Lisades siia veel mitmeid muid põhjusi, mis tingivad mõõtmistulemuse ligikaudsuse¹, võime konstateerida, et mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

Õpilastele tuleks ka selgitada, et ligikaudse arvu mõiste ei ole matemaatikasse toodud hädavahendina, vaid et täpseid mõõtmistulemusi ei olegi tegelikkuses vaja: esiteks seepärast, et suurused ise on muutuvad ja seetõttu oleks nende täpne fikseerimine mõttetu; teiseks seepärast, et piisab, kui etteantud tingimusi rahuldav objekt on vaid teatava täpsuse piirides (mitte aga absoluutselt täpne).²

Siinjuures on õpilastel huvitav teada saada, millise täpsusega opereeritakse kaasaegses tehnikas (13, lk. 60).

4. Käsitluse metoodika keskkoolis.

Ka keskkooli vanemates klassides lähtume suuruste mõõtmisel puhtpraktilisest mõõtmise probleemist, kuid selle küsimuse arendamise käigus tõuseme kõrgemale abstraktsiooniastmele ja kõrgemale teoreetilisele tasemele kui 8-klassilises koolis. Kui toa põranda pikkus on näiteks 5 m, siis tähendab see, et mõõtühik 1 m mahub põranda pikkusele 5 korda. Abstraktses vormis on siin tegemist kahe sirglõiguga ja ühe arvuga. Üldiselt, kui x ja y tähistavad mingisuguseid sirglõike ja k tähistab mingit arvu (esialgu ratsionaalset), siis võrdus $y = kx$ tähendab, et lõigu y pikkus on k , kui mõõtühikuks on x . Kui ratsionaalarv k on antud, siis,

¹ Mõõtmistulemuste ligikaudsusest vt. näiteks (13, lk. 52).

² Tehnikas määratakse detaili töötlemise täpsuse piirid kindlaks tolerantsiga.

tähistades x -ga mistahes lõigu, on konstruktiivsel teel alati võimalik leida vastavat lõiku y , et $y = kx$. Püstitame vastupidise probleemi: lõigud x ja y on antud; leida arv k , nii et $y = kx$. See probleem tähendabki mõõta lõiku y , kui ühikuks on x . Arvu k leidmine toimub järkjärgulise lähendamise teel.

Järgnevalt tuleks vaadata konkreetse näite varal (üldise käsitluse eeskujul — vt. käesoleva paragrahvi p. 2), kuidas määratakse arvu k lähendeid ikka suurema ja suurema täpsusega, kui on antud sirglõigud x ja y . Rõhutamist väärib selle küsimuse käsitlemisel veel järgmine asjaolu. Arvu k 1—2 esimest lähendit saab leida reaalse eksperimendi teel, s. t. opereerimisel reaalsete objektidega — paberile joonestatud sirglõikude, sirkli, joonlauaga. Arvu täpsemate lähendite leidmine on aga reaalse eksperimendi teel võimatu. Siis toimub üleminek mõttelisele eksperimendile, s. t. opereeritakse tegelikult ainult ligikaudselt peegeldavate ideaalsete objektidega, mille puhul abstraheritakse need põhjused, mis ei luba reaalsel eksperimenti jätkata. Mõtteline eksperiment on teadusliku uurimise võimsaks vahendiks.¹ Nii näiteks jõutakse reaalse eksperimendi teostamist takistavaid tingimusi abstraherides mõttelise eksperimendini selliste ideaalsete objektidega, nagu ideaalne gaas, ideaalne peegel, absoluutselt must keha, ideaalne ringprotsess jt. Vastavad füüsikaseadused (näiteks Boyle-Mariotte'i seadus ideaalse gaasi kohta, Stefan-Boltzmanni seadus absoluutselt musta keha kohta) iseloomustavad meid ümbritsevaid reaalseid nähtusi vaid ligikaudselt, kuid küllaldase täpsusega selleks, et neid tegelikkuses rakendada.² Mõttelist eksperimenti ei saa ignoreerida ka matemaatikas, kus ta on lõputult jätkatavate protsesside (näiteks määratud integraali mõiste juurde jõudmine lähtudes pindala mõõtmise probleemist; π määramine kõõl- ja puutujuhulknurkade übermõõtude kaudu jt.) üheks uurimisvahendiks.

Edasi on õpilastele vaja selgitada, et otsitava arvu k sellisel järkjärgulisel lähendamisel (mõõtühiku kümnendaotamisega) võib realiseeruda üks kahest võimalusest:

¹ Ka marksistlik-leninlikus tunnetusteoorias omistatakse mõttelisele eksperimendile suurt tähtsust (31).

² Füüsikaseaduste aproksimatiivsest kehtivusest kõneleb üksikasjalikult F. Klein (9, lk. 18).

1. Mõõtühiku kümnendjaotamise protsess on lõppev. Sellisel juhul leidub mõõtühiku mingi kümnendosa ($\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; ...), mis mahub antud lõigule mingi täisarv korda. Arv k avaldub lõppeva kümnendmurruna — ratsionaalarvuna: $k = \frac{m}{n}$, nii et $y = \frac{m}{n} \cdot x$.

2. Mõõtühiku kümnendjaotamise protsess jätkub lõputult, mille puhul on mõeldavad omakorda kaks võimalust:

a) Tekib lõputu perioodiline kümnendmurd (puht- või segaperioodiline). Sel juhul on arv k jällegi ratsionaalarv¹; seejuures on olemas mõõtühiku mingi osa, mis on erinev tema kümnendosadest ja mis mahub mõõdetavale lõigule täisarv korda. Näiteks $5,333\dots = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$; siin $\frac{1}{3}$ mõõtühikut mahub mõõdetavale lõigule 16 korda.

b) Tekib lõputu mitteperioodiline kümnendmurd, mis joonealuse märkuse põhjal ei saa olla ratsionaalarv (kahe täisarvu suhe).

Viimasel juhtumil tuleb üksikasjalikumalt peatuda, lähtudes sellest seisukohast, kas lõputu mitteperioodilise kümnendmurru tekkimine on tegelikult üldse võimalik. Sellise võimaluse tekkimise tüüpiliseks näiteks on ruudu diagonaali mõõtmine, kui mõõtühikuks on ruudu külg.² Sama tüüpi näitena võib vaadelda ka võrdhaarse kolmnurga aluse mõõtmist sama kolmnurga haaraga, kui kolmnurga tipunurk on 108° (13, lk. 424).

Sellistest näidetest selgub, et kui tahetakse iga lõigu pikkust väljendada arvu abil, siis on tarvis ratsionaalarvude hulka laiendada uute arvudega. Neid arve nimetatakse irratsionaalarvudeks.³ Toodu põhjal on ka selge, et irratsionaalarvu ei saa väljendada kahe täis-

¹ Siinjuures on eeldatud õpilaste teadmist, et kõigi lõputute perioodiliste ja lõppevate kümnendmurdude hulk on identne ratsionaalarvude hulga.

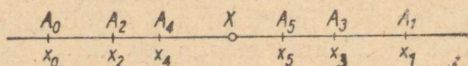
² Selle küsimuse õpilastele jõukohane selgitus leidub näiteks P. S. Aleksandrovi ja A. N. Kolmogorovi meetoodilises artiklis «Irratsionaalarvud». (20)

³ Rangelt võttes saab neid uusi arve nimetada arvudeks selle sõna otseses mõttes alles siis, kui on õpitud tundma nende omadusi ja operatsioone nende arvude hulgas.

arvu suhtena, kuid teda on võimalik väljendada lõputu mitteperioodilise kümnendmurruna.¹

Kui irratsionaalarvu mõiste on nõnda antud, siis tuleb anda õpilastele võimalus ka ise mõningaid irratsionaalarve välja kirjutada. Selleks antakse mingi seaduspärasus, mille järgi on võimalik välja kirjutada irratsionaalarvu kümnendkohti kuitahes palju. Näiteks 8,525225222...

Irratsionaalarvu $\sqrt{2}$ numbrite leidmise sisult lihtsaim tee on proovimine (vt. §8).



Joon. 11.

Eespool selgus, et kui kaks lõiku on antud, siis ühe lõigu mõõtmine teisega kui ühikuga viib irratsionaalarvu mõiste loomisele. Kui pöörata mõttekäiku ja eeldada, et on antud mingi irratsionaalarv, siis saab alati leida sirglõiku, mille mõõtaruks on antud irratsionaalarv. Teiste sõnadega: igale irratsionaalarvule vastab üks arvtelje punkt. Selleks kantakse arvteljele antud irratsionaalarvu kümnendlähendid $x_0, x_1, x_2 \dots$ puuduga ja liiaga täpsusega 1; 0,1; 0,01; ... (joon. 11). Tekib lõikude lõputu jada $A_0A_1; A_2A_3; A_4A_5; \dots$, nii et iga järgmine lõik sisaldub tervenisti eelmises lõigus. Sellisel juhul postuleeritakse, et on olemas üks punkt X , mis kuulub kõigile selle jada lõikudele. See punkt vastabki antud irratsionaalarvule.

Tehete käsitlemisel irratsionaalarvudega defineeritakse tehete tulemus andmete lähendite kaudu, nii et järk-järgult nende lähendite täpsust suurendades toimub ka nõutava tehete tulemuse järkjärguline lähendamine.

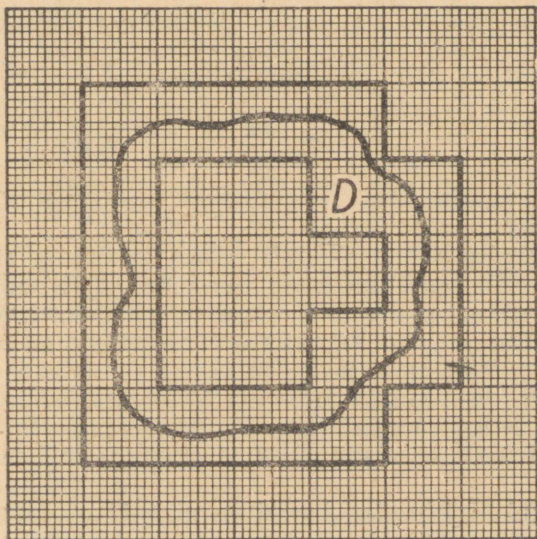
¹ Autor ei poolda sageli kasutatavat määrangut «Irratsionaalarvuks nimetatakse lõputut mitteperioodilist kümnendmurrud», sest see loob väära arusaama, nagu oleks lõputu mitteperioodiline kümnendmurd ainsaks irratsionaalarvu esitamise vahendiks, samal ajal kui irratsionaalarvu saab väljendada näiteks ahelmurruna, lõputu korrutisena jne. Seepärast pooldab autor järgmist definitsiooni: «Irratsionaalarvuks nimetatakse arvu, mida on võimalik väljendada lõputu mitteperioodilise kümnendmurruna». Sellega ei välistata võimalust irratsionaalarvu teisiti väljendada.

Õpilaste tähelepanu on vaja juhtida sellele, et tegelikult arvutustöös ei saa opereerida lõputute murdudega. Seepärast kasutatakse praktilisel arvutamisel ikka irratsionaalarvu lähendeid lõppevate kümnendmurdude (harvemini harilike murdude) näol sellise täpsusega, nagu seda nõuab tegelikkusest pärinev ülesanne või teadlikult püstitatud teoreetiline probleem.

Näiteks on rõhuv enamik trigonomeetriliste funktsioonide, logaritmfunktsiooni, ruutjuure jt. väärtustest irratsionaalsed, kuid matemaatilistest tabelitest leiame ikka ainult nende ratsionaalsed lähendid lõppevate kümnendmurdudena kas suurema või väiksema täpsusega vastavalt tabelite otstarbele. Seega järeldeb ka siit, nagu juba eespoolgi märkisime, et praktiline arvutustöö ei vaja irratsionaalarve.

Nagu sirglõigu pikkuse mõõtmine, toimub ka pindala otsene mõõtmine järkjärgulise lähendamise teel. Selleks kasutatakse ruutkatet.

Olgu vaja mõõta kujundi D pindala (joon. 12), kui mõõtühikuks on $U = 1 \text{ cm}^2$. Olgu antud kujundisse terve-



Joon. 12.

nisti kuuluvate ühikruutude arv x_0 . Oletame, et kui arvule x_0 lisada veei kujundist D osaliselt väljaulatuvate ühikruutude arv, siis saame arvu y_0 . Arvud x_0 ja y_0 on kujundi pindala S lähendid, nii et

$$x_0 < S < y_0.$$

Järkjärgulise lähendamise teel on võimalik leida saadud lähenditest täpsemaid lähendeid. Selleks hakkame ühikruudu U külge mõttes jaotama järk-järgult 10-ks, 100-ks, ... võrdseks osaks. Ühikruut U tükeldub siis väiksemateks ruutudeks, millede pindalad on vastavalt $U_1 = \frac{1}{100}$; $U_2 = \frac{1}{100^2}$; ... Korrates ruutudega U_1, U_2, \dots sedasama operatsiooni mis ühikruudu U korral ja minnes igakord tagasi esialgsele mõõtühikule, saame pindala S tõketeks vastavalt

$$\frac{x_1}{100} < S < \frac{y_1}{100};$$

$$\frac{x_2}{100^2} < S < \frac{y_2}{100^2};$$

....

kus x_1, x_2, \dots ja y_1, y_2, \dots tähistavad naturaalarve. Mõttekäiku jätkates saame pindala S jaoks kaks lähendite jada:

$$x_0 < \frac{x_1}{100} < \frac{x_2}{100^2} < \frac{x_3}{100^3} < \dots < S < \dots < \frac{y_3}{100^3} < \dots < \frac{y_2}{100^2} < \frac{y_1}{100} < y_0.$$

Nende jadade ühist piirväärtust loetaksegi pindala S väärtuseks.

Rakendades sellist pindala otsesest mõõtmist ristküliku pindala määramiseks ilmneb otsekohe, et ristküliku pindala on võimalik arvutada kaudsel teel tema kahe lähiskülje pikkuse a ja b korrutisena, olenemata sellest, mis liiki reaalarvud on a ja b . Ristküliku pindala on aluseks aga kõigi teiste hulknurkade pindalade arvutamisele.

Analoogiline järkjärgulise lähendamise meetodile tuginev mõttekäik on rakendatav ka ruumala mõiste käsitlemisel.

Esitatud käsitusviisi korral on nii pikkuse, pindala kui ka ruumala mõõtmise lähtekohaks üks ja sama printsiip — mõõdetava suuruse järkjärguline lähendamine.

§ 13. Ruutjuure ja kuupjuure numbriline käsitlemine

1. Küsimuse tähtsusest

Ruutjuure ja kuupjuure täpse väärtuse avaldamine künnendsüsteemi lõpliku arvuna ei ole teatavasti üldiselt võimalik. Seetõttu kerkib arvutustöös õpilase ette paratamatus otsida juure täpse väärtuse asemel tema ligikaudset väärtust — lähendit. Lähendi mõiste on matemaatika rakendustes erakordselt tähtis, sest seal opereeritaksegi peamiselt lähenditega. Teatava suuruse mingi lähendi leidmine ja selle parandamine järjest uute ja täpsemate lähendite leidmise teel on matemaatikas laialt kasutamist leidnud töömeetod. Ruutjuure ja kuupjuure arvutamisel on suurepärase võimalus tutvustada seda meetodit ka keskkooliõpilasele.

Seoses sellega võib tekkida küsimus, kas toimiti õigesti, kui ruutjuure algoritm keskkooliprogrammist kustutati. Autor on seisukohal, et ruutjuure algoritmi väljajätmine keskkooli matemaatikakursusest on põhjendatud, sest selle küsimuse õpetamine ei õigusta end järgmistel põhjustel.

Esiteks, ruutjuure algoritmi põhjendamine on õpilastele raskesti mõistetav, mistõttu selle teema õpetamine on alati olnud formaalse õpetamise tüüpiliseks näiteks. Ta püsib keskkooliprogrammis enam ajalooliste traditsioonide tõttu kui tegeliku elu vajadustest tingituna. See on teema, mis pärineb koolist, kus peamiseks eesmärgiks oli formaalsete teadmiste omandamine ja kus õppematerjali sisust arusaamisele ja õpitu rakendamisele tegelikus elus pöörati vähe tähelepanu. Milliste mõttetute ülesannetega õpilasi koormati, selle kohta leidub küllaldaselt näiteid vanemates õpikutes ja ülesannetekogudes. Nii leiame F. Bõtškovi ülesannetekogust (30, lk. 217) ülesanded: $\sqrt{8244821601}$; $\sqrt{8152292406682116}$; $\sqrt{0,010779215329}$ jt.

Teiseks, ruutjuure algoritm on võte, mida koolis saab rakendada ainult ruutjuure arvutamiseks. Tema üldistamine koolis kuupjuure ja veel enam kõrgema astme juurte arvutamiseks on võimatu. Seega jääb kuupjuure ja kõrgema astme juurte arvutamine kuni logaritmidel õppimiseni ikkagi selgusetuks.

Kolmandaks, et ruutjuure algoritm on suhteliselt lihtne võrreldes näiteks kuupjuure algoritmiga, siis on see põhjustanud ruutjuure muutumise keskkoolimatemaatika üheks fetišiks. See on kaheldamatult väär, sest elus esilekerkivad

ülesanded nõuavad ruutjuure rakendamise kõrval ka kuupjuure rakendamist. Ei saa ju väita, et näiteks ruudu külje arvutamine ruudu pindala kaudu on olulisem kui kuubi serva arvutamine kuubi ruumala kaudu. Ka kuupjuur peaks leidma keskkoolimatemaatikas kindla koha, sest teda on vaja tegelikkuse poolt seatud probleemide lahendamisel. Samuti tuleks anda ühtne võte, mis võimaldab arvutada nii ruutjuure kui ka kuupjuure lähendeid tegelikuks tööks vajaliku täpsusega. Kõrgema kui kolmanda astme juurte õpetamisel tuleks anda ainult vastava juure mõiste ja näidata, et ruut- ning kuupjuure lähendite arvutamisel kasutatud võte laseb end üldistada ka n -nda juure lähendite arvutamiseks. Vähem tähelepanu tuleks koolis omistada keeruliste juuravaldiste teisendustele, sest need on tegeliku arvutustöö seisukohalt väikese väärtusega. Nii saaks õpilasi vabastada väsitavatest, aeganõudvatest ja tarbetutest harjutustest; samal ajal aga oleks võimalik tõsta õpilaste arvutuskultuuri.

2. Küsimuse üldisest käsitlusest

Küsimuse üldise käsitluse kohta märgime siinjuures vaid niipalju, et ruutjuure ja kuupjuure lähendite numbriline arvutamine taandub Newtoni meetodi rakendamisele võrrandite $x^2 - a = 0$ ja $x^3 - a = 0$ lahendamisel, kus $a > 0$. Seega on küsimus ka heaks ettevalmistuseks hiljem vaatluse alla tulevale võrrandite numbrilisele lahendamisele Newtoni meetodiga.¹

Nagu teada, toimub Newtoni meetodi kasutamisel võrrandi $f(x) = 0$ lahendi lähendite leidmine algoritmi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

järgi. Rakendades seda algoritmi eeltoodud võrrandite $x^2 - a = 0$ ja $x^3 - a = 0$ lahendamiseks, saame vastavalt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k};$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}.$$

¹ Newtoni meetodist võrrandite numbrilisel lahendamisel kõneldatakse üksikasjalikult järgmises paragrahvis.

Saadud valemid võtamegi aluseks ruutjuure ja kuupjuure lähendite arvutamisel keskkoolis.

3. Käsitlemise meetodika

Ruutjuure ja kuupjuure numbriline käsitlemine võiks toimuda 9. klassis.¹

Teema käsitlemisel juhindume nõudest, et praktika poolt seatud ülesanded, mis võimaldavad vaatluse alla tuleva teema käsitlemist motiveerida, tuleb siingi ära kasutada. Konkreetseteks probleemideks võivad olla: ruudu külje arvutamine antud pindala järgi, ringi raadiuse arvutamine antud pindala järgi, kuubi serva arvutamine antud ruumala kaudu jt.

Näide: Projekteerimisel tehtud arvutused näitasid, et konstruktsioonis tekkivatele pingetele vastupidamiseks peab ruudukujulise ristlõikega tala ristlõike pindala olema 11 cm^2 . Leida tala ristlõike külje pikkus täpsusega $0,01 \text{ cm}$.

Tähistades otsitava pikkuse tähega x , saame, et $x^2 = 11$, millest $x = \sqrt{11}$. Ruutude tabelist leiame, et

$$3,3 < x < 3,4.$$

Võtame otsitava ruutjuure lähteväärtuseks² nende tõkete keskmise: $x_1 = 3,35$. Siis $x = 3,35 + \alpha$, kus α tähistab lähteväärtuse parandust. Nüüd peab kehtima võrdus

$$(3,35 + \alpha)^2 = 11$$

ehk
$$3,35^2 + 2 \cdot 3,35 \alpha + \alpha^2 = 11.$$

Kuna $\alpha < 1$, siis on α^2 vasakul pool oleva summa teistest liidetavatest tunduvalt väiksem (joon. 13). Seepärast jäta ta arvestamata. Nii saame ligikaudse võrduse $11,22 + 6,7\alpha \approx 11$, mis on α suhtes lineaarne võrrand. Sellest võrrandist³

$$\alpha \approx -\frac{0,22}{6,7} \approx -0,033,$$

mille tõttu

$$x = 3,35 + \alpha \approx 3,317 \approx 3,32.$$

¹ Katseliselt on ruutjuure numbrilist käsitlemist õpetatud ka 8. klassis, kuid ühtse süsteemi mõttes oleks otstarbekas seda tööd alustada 9. klassis.

² Lähteväärtuse võib leida ka funktsiooni $y = x^2$ graafikult, samuti võib teda leida proovimise teel.

³ Paranduse ümardame nii, et temas oleks üks varunumber võrreldes ruutjuure väärtuse nõutava täpsusega.

Ruutjuure leitud lähendi 3,32 võtame teiseks lähendiks, nii et $x = 3,32 + \beta$, kus β on teise lähendi parandus. Saame

$$(3,32 + \beta)^2 = 11,$$

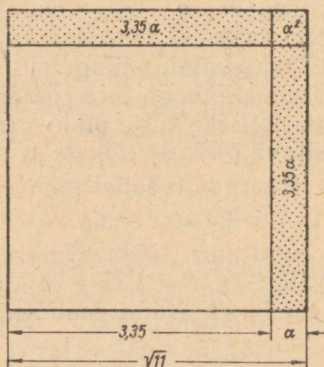
millest pärast β^2 arvestamata jätmist saame

$$11,02 + 6,64\beta \approx 11;$$

$$\beta \approx -0,003;$$

$$x = 3,32 + \beta \approx 3,32 - 0,003 \approx 3,32.$$

Et kaks järjestikust lähendit langesid nõutava täpsuse piirides kokku, siis on $\sqrt{11} \approx 3,32$.



Joon. 13.

Pärast mõne näite tundmaõppimist vaatleme küsimust üldisest aspektist. Selleks tähistame $\sqrt{a} = x$, kus $a > 1$ tähistab naturaalarvu¹.

Tähistame otsitava ruutjuure ühe lähendi tähega x_k , mille parandus olgu h , nii et $x = x_k + h$. Siis

$$(x_k + h)^2 = a;$$

$$x_k^2 + 2x_k h + h^2 = a,$$

millest pärast h^2 arvestamata jätmist saame

$$h \approx \frac{a - x_k^2}{2x_k}$$

¹ Praktilist tähtsust omavadki ainult need juhud, kus a on naturaalarv, sest kui $a > 0$ ei ole naturaalarv, siis taandub küsimus ikkagi vastava järguühiku ja naturaalarvu juurimisele.

ja

$$x = x_k + \frac{a - x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}.$$

Viimase tulemuse võtame otsitava ruutjuure uueks lähendiks x_{k+1} :

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right). \quad (13-1)$$

Saadud lähendi suhtes võime arutleda täpselt samuti kui lähendi x_k suhtes. Seepärast võime valemit (13-1) vaadelda kui ruutjuure arvutamise üht algoritmi, mis on aga palju üldisema väärtusega kui koolis varem käsitletud olnud ruutjuure algoritm.

Allpool käsitleme ka valemi (13-1) abil leitud lähendi veahinnangut. Kui seda valemit kasutatakse ilma veahinnanguta, on vajaliku täpsuse saavutamiseks tarvis teostada arvutusi seni, kuni kaks naaberlähendit annavad nõutava täpsuse piirides sama tulemuse (vt. eelpool esitatud näide $x = \sqrt{11}$.)

Lähendi vea uurimine on heaks harjutusmaterjaliks seoses võrratuste õppimisega. Ühtlasi on ta sobivaks näiteks selle kohta, et ka võrratustega opereerimisel on suur rakenduslik väärtus.

Tuletame võrratuse, mis võimaldab hinnata lähendi x_{k+1} viga.

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} - \sqrt{a} = \frac{x_k^2 - 2x_k\sqrt{a} + a}{2x_k}$$

ehk

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{2x_k}. \quad (13-2)$$

Tulemusest selgub, et olenemata sellest, kas $x_k > \sqrt{a}$ või $x_k < \sqrt{a}$, on ikka $x_{k+1} - \sqrt{a} > 0$ ehk $x_{k+1} > \sqrt{a}$. Seega kujutavad kõik lähendid alates teisest (juhul kui esimene lähend on valitud puuduga) \sqrt{a} väärtusi liiga. Eeldusel, et $x_k > 1$, saame võrdusest (13-2)

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{2}. \quad (13-3)$$

Siit selgub, et iga järgneva lähendi viga on väiksem kui eelmise lähendi vea pool ruutu. Eeldusel, et $x_k - \sqrt{a} < 1$ järeldub võrratusest (13-3), et ruutjuure lähendite jada koondub.¹ Samuti järeldub sellest võrratusest, et kui lähendil x_k on m õiget kümnendkohta, siis lähendil x_{k+1} on vähemalt $2m$ õiget kümnendkohta.

Võrratusest (13-3) järeldub vahetult väiksema rangusega võrratus, kui $x_k - \sqrt{a} < 1$. Nimelt

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < \frac{x_k - \sqrt{a}}{2}.$$

Lahutades viimase võrratuse mõlemast poolest $\frac{x_{k+1}}{2}$, saame

$$\frac{x_{k+1}}{2} - \sqrt{a} < \frac{x_k}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{x_{k+1}}{2},$$

millest

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < x_k - x_{k+1}. \quad (13-4)$$

Et lähendid x_k ja x_{k+1} on tuntud, siis on võrratust (13-4) võimalik kasutada lähendi x_{k+1} vea hindamiseks.

Elementaarsel teel saab näidata, et vea hindamiseks kehtib siiski rangem võrratus:

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < (x_k - x_{k+1})^2.$$

Tõepoolest, eeldades viimase võrratuse kehtivust, saame

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < x_k^2 - 2x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2,$$

millest (13-1) tõttu

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < x_k^2 - x_k^2 - a + x_{k+1}^2$$

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < x_{k+1}^2 - a$$

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < (x_{k+1} + \sqrt{a})(x_{k+1} - \sqrt{a}).$$

¹ On võimalik näidata, et ruutjuure lähendite jada koondub alglähendi valikust sõltumata (32).

Et $x_{k+1} - \sqrt{a} > 0$, siis saame pärast taandamist võrratuse $x_{k+1} + \sqrt{a} > 1$, mille samane kehtivus on ilmne. Liikudes äsjatehtud järelduste ahelas vastupidises suunas, jõuamegi tulemusele, et

$$x_{k+1} - \sqrt{a} < (x_k - x_{k+1})^2. \quad (13-5)$$

Rakendades saadud võrratust eespool vaadeldud $\sqrt{11}$ teise lähendi $x_2 = 3,317$ vea hindamisel, saame

$x_2 - \sqrt{11} < (x_1 - x_2)^2 = (3,35 - 3,317)^2 = 0,033^2 < 0,001$, millest ilmneb, et lähendi sajandike number on kindlasti õige. Seega ei ole võrratuse (13-5) kasutamise korral nõutava täpsuse saavutamiseks kolmandat lähendit enam vaja arvutada.

Siirdudes kuupjuure numbrilise käsitlemise juurde, on oluline rõhutada, et sama printsiip, mida kasutatakse ruutjuure lähendite arvutamisel, leiab kasutamist ka kuupjuure lähendite arvutamisel.

Olgu vaja leida $\sqrt[3]{15}$ täpsusega 0,001. Tähistanud kuupjuure otsitava väärtuse tähega x , selgub kuupide tabelist, et

$$2,4 < x < 2,5.$$

Võtame x -i esimeseks lähendiks $x_1 = 2,45$, nii et

$$x = 2,45 + \alpha,$$

kus α on esimese lähendi parandus. Edasi saame

$$(2,45 + \alpha)^3 = 15;$$

$$2,45^3 + 3 \cdot 2,45^2 \alpha + 3 \cdot 2,45 \alpha^2 + \alpha^3 = 15.$$

Jättes viimase võrduses α^2 ja α^3 arvestamata, saame neljakohaliste tabelite kasutamisel:

$$14,71 + 3 \cdot 6,003 \alpha \approx 15;$$

$$\alpha \approx 0,016;$$

$$x = 2,45 + \alpha \approx 2,45 + 0,016 = 2,466.$$

Leiame teise paranduse.

$$x = 2,466 + \beta;$$

$$2,466^3 + 3 \cdot 2,466^2 \beta \approx 15;$$

$$15,00 + 3 \cdot 2,466^2 \beta \approx 15;$$

$$\beta \approx 0.$$

Vajaliku täpsuse piirides on

$$\sqrt[3]{15} = 2,466.$$

Vaadeldes küsimust üldisest aspektist, viib sama mõttekäärik, mida kasutasime ruutjuure algoritmi (13-1) leidmisel, ka kuupjuure algoritmile

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}, \quad (13-6)$$

kus $a > 1$ tähistab juuritavat naturaalarvu.

Näitame, et siingi kehtib võrratus

$$x_{k+1} > \sqrt[3]{a}$$

olenemata sellest, kas $x_k > \sqrt[3]{a}$ või $x_k < \sqrt[3]{a}$.

Tõepoolest, kui $x = \sqrt[3]{a} = x_k + h$, siis

$$(x_k + h)^3 = a;$$

$$x_k^3 + 3x_k^2h + 3x_kh^2 + h^3 = a;$$

$$h = \frac{a - x_k^3 - (3x_kh^2 + h^3)}{3x_k^2};$$

$$\begin{aligned} x = x_k + h &= x_k + \frac{a - x_k^3 - (3x_kh^2 + h^3)}{3x_k^2} = \\ &= \frac{2x_k^3 + a - q}{3x_k^2}, \end{aligned}$$

kus $q = 3x_kh^2 + h^3 > 0$. Tõepoolest, kui $h > 0$, siis on viimase võrratuse kehtivus ilmne. Kui $h < 0$, siis on ikka võimalik leida x_k , nii et $3x_k > |h|$, millest ilmselt

$$3x_kh^2 > |h^3| \text{ ja } 3x_kh^2 + h^3 > 0.$$

Et uue lähendi saamisel jäetaks positiivne suurus q arvestamata, siis

$$\sqrt[3]{a} = x = \frac{2x_k^3 + a - q}{3x_k^2} < \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2} = x_{k+1}.$$

Seega

$$x_{k+1} > \sqrt[3]{a}.$$

Viimase võrratuse põhjal võime öelda, et kuupjuure iga lähend alates teisest (juhul, kui esimene lähend on võetud puuduga) kujutab kuupjuure väärtust liiaga. Seega võime üldist kitsendamata alati eeldada, et $x_k > \sqrt[3]{a}$.

Edasi näeme, et

$$x_{k+1} - x_k = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2} - x_k = \frac{a - x_k^3}{3x_k^2},$$

millest ilmneb, et

$$x_{k+1} - x_k < 0$$

ja seega

$$\sqrt[3]{a} < x_{k+1} < x_k.$$

Iga järgnev lähend kujutab $\sqrt[3]{a}$ väärtust täpsemalt kui eelmine.

Võib kergesti veenduda, et $\sqrt[3]{a}$ lähendite jada piirväärtus on $\sqrt[3]{a}$. Tõepoolest, eeltoodu põhjal

$$a < x_k^2 \sqrt[3]{a}.$$

Et aga $a = 3x_k^2 x_{k+1} - 2x_k^3$, siis

$$3x_k^2 x_{k+1} - 2x_k^3 < x_k^2 \sqrt[3]{a};$$

$$3x_{k+1} - 2x_k < \sqrt[3]{a};$$

$$x_{k+1} - \sqrt[3]{a} < 2(x_k - x_{k+1});$$

$$x_{k+1} - \sqrt[3]{a} < 2 \left[(x_k - \sqrt[3]{a}) - (x_{k+1} - \sqrt[3]{a}) \right];$$

$$3(x_{k+1} - \sqrt[3]{a}) < 2(x_k - \sqrt[3]{a});$$

$$x_{k+1} - \sqrt[3]{a} < \frac{2}{3}(x_k - \sqrt[3]{a}).$$

Viimasest võrratusest tulenebki eeltoodud väite õigsus.

On võimalik näidata, et kuupjuure lähendite vea hindamisel kehtib sama võrratus mis ruutjuure lähendite vea hindamiselgi:

$$x_{k+1} - \sqrt[3]{a} < (x_k - x_{k+1})^2.$$

§ 14. Võrrandite numbriline lahendamine

1. Küsimuse tähtsusest

Keskkoolimatemaatikas kuulub tähtis koht võrranditele ja nende süsteemidele: ligikaudu 13% matemaatikatundide üldarvust 5.—11. kl. pühendatakse otseselt nimetatud küsimusele. Sellele lisandub võrrandite rakendamine mitme teema juures geomeetrias, trigonomeetrias ja füüsikas. Peamiseks võrrandi (või võrrandisüsteemi) lahendamise meetodiks on tundmatu avaldamine võrrandi kordajate kaudu, s. t. lahendamine lahendivalemi abil või mingi kätteõpitud skeemi järgi, mida saab kasutada ainult üksikute võrranditüüpide lahendamisel. Illustratsiooniks kasutatakse üksikutel juhtudel ka graafilist meetodit.

Matemaatikateaduses tõestatakse, et algebralise võrrandi lahendivalemi andmine üldkujul on võimalik ainult nende võrrandite korral, mille aste ei ole kõrgem kui 4. Lahendivalemi andmine kõrgema astme algebraliste võrrandite lahendamiseks on võimalik ainult üksikutel erandjuhtudel; üldjuhul on see aga võimatu. Võimatu on anda lahendivalemit ka mitmesuguste transsendentsete võrrandite, näiteks $a \log x + bx = c$; $a \sin x + bx = c$, lahendamiseks.

Siit selgub, et võrrandi lahendamise võimalus lahendivalemi abil on piiratud. Viimane väide on õigustatud seda enam, et ka kolmanda ja neljanda astme võrrandi lahendivalemeid numbrilise töö korral ei kasutata ja nad on seega praktiliselt väärtusetud.

Ülaltoodust järeldub, et ka keskkooliõpilasele õpetatavad võrrandi lahendamise võtted pakuvad väga piiratud võimalusi võrrandite tegelikuks lahendamiseks. Selle tulemuseks on, et praegune keskkooli lõpetaja seisab nõutult järgmise, lihtsale kuupvõrrandile viiva ülesande ees:

Klassiruumi kõrgus on 3 m võrra laiuusest väiksem, kuid ta pikkus on 3 m võrra laiuusest suurem. Arvutada klassiruumi mõõtmed, kui ta ruumala on 160 m^3 .

Või näiteks keerulisem ülesanne:

Palgi otste läbimõõdud on 30 cm ja 20 cm. Palgi pikkus on 8 m. Kui kaugel palgi jämedamast otsast tuleb palk katki saagida, et palgis olev puiduhulk poolituks?

Küllaldaselt võib leida ka puhtteoreetilist huvi pakkuvaid ülesandeid, mida keskkooliõpilane lahendada ei oska, kuid mida ta võiks lahendada pärast vastava meetodika väljatöötamist.

Näiteks Euleri ülesanne:

Leida sektori kesknurk, kui sektori kaare otspunkte ühendav kõõl poolitab sektori pindala.

Või Archimedese ülesanne:¹

Kui kaugel kera keskpunktist on kera lõikav tasapind, mis eraldab $\frac{1}{n}$ osa kera ruumalast.

Autor ei taha sellega rõhutada, et keskkooliõpilased peaksid õppima kuupvõrrandi või neljanda astme võrrandi lahendivalemit. Nimetatud nõude püstitamine on seda mõtetum, et need valemid on praktika seisukohalt väärtusetud. Oluline on aga selliste võrrandite praktilise lahendamise meetod ja selle tunnetuslik väärtus. Sellega seoses kirjutab A. P. Domorjad:

«Tunduvalt kasulikum on sellistel juhtudel tutvustada õpilasi võrrandite lahendamise üldiste võtete olemasoluga, mis võimaldavad arvutada nii algebralise kui transtsendentse võrrandi mistahes reaalarvulist lahendit mistahes täpsusega. Tuleb märkida, et neid üldisi võtteid ei saa lugeda vähem seaduslikeks kui näiteks võrrandi lahendamist radikaalides (minu sõrendused — A. T.)» (59, lk. 313).

Käesoleval ajal arenevad kiiresti numbrilised arvutusmeetodid, s. o. sellised ligikaudsed meetodid, mis võimaldavad arvudega teostatavate elementaarsete operatsioonide abil lahendada antud ülesannet vajaliku täpsusega; teostatud operatsioonide arv on seejuures lõplik (57). Ligikaudsetele numbrilistele meetoditele, s. o. tegeliku elu seisukohalt suure rakendusliku väärtusega matemaatilistele meetoditele ei pöörata praegu keskkoolis üldse tähelepanu. Edukalt on võimalik neid meetodeid aga demonstreerida võrrandite numbrilisel lahendamisel.

¹ Euleri ja Archimedese ülesanne on võetud raamatust (59, lk. 314).

Kõik võrrandite lahendamise numbrilised meetodid põhinevad ühel ja samal printsiibil: leitakse võrrandi lahendi mingi lähend; seda lähendit parandatakse teatava kindla algoritmi järgi, kuni on saavutatud nõutav täpsus.

Autor on välja töötanud meetodika võrrandi numbrilise lahendamise kolme võtte kohta keskkoolis. Neist esimene on numbrilis-graafiline meetod võrrandi ligikaudse lahendi parandamiseks. Nimetatud meetodit on üksikasjalikumalt käsitletud artiklis, mis ilmus ajakirjas «Nõukogude Kool» nr. 6, 1964.

Teine meetod on Newtoni meetod, mida siinkohal on kasutatud ainult algebralise võrrandi lahendamiseks.

Kolmas meetod on kõõlumeetod (regula falsi), mida on rakendatud ka lihtsamate transtsendentsete võrrandite lahendamiseks.

2. Küsimuse üldine käsitus

A. Newtoni meetod

Olgu vaja leida võrrandi $f(x) = 0$ üks reaallahend x_0 , mis asetseb vahemikus $[a, b]$; selles vahemikus olgu veel täidetud tingimused $f'(x) \neq 0$ ja $f''(x) \neq 0$. Tähistame antud võrrandi lahendi x_0 mingi lähendi tähega x_k , kus $a \leq x_k \leq b$, nii et $x_0 = x_k + h$, kus h tähistab selle lähendi parandust. Arendades funktsiooni $f(x_k + h)$ Taylori reaks, saame

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2!} h^2 + \dots$$

Arvestades, et $f(x_k + h) = 0$ ja jättes arvesse võtmata kõik liikmed, milles h astendaja on suurem kui üks, saame

$$h \approx - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

ja

$$x_0 \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Lahendi ligikaudse väärtuse

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

võtame uueks lähendiks x_{k+1} , millega võime teha täpselt sama arutelu mis lähendiga x_k . Seega annab valem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (14-1)$$

võrrandi $f(x) = 0$ lahendamise algoritmi. Selle algoritmiga määratud lähendite jada on monotoonselt kasvav, kui $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, ja monotoonselt kahanev, kui $f'(x) \cdot f''(x) > 0$. Kui esimese lähendi korral on täidetud tingimus $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$ ($a \leq x_1 \leq b$), siis lähendite jada koondub ja tema piirväärtus on x_0 (39, lk. 124).

Newtoni meetodiga määratud lähendi vea hindamiseks kehtib võrratus¹

$$|x_0 - x_{k+1}| \leq \frac{M}{2m} (x_{k+1} - x_k)^2, \quad (14-2)$$

kus $M = \max |f''(x)|$ ja $m = \min |f'(x)|$, ($a \leq x \leq b$).

Kui $\frac{M}{2m} \leq 1$, siis

$$|x_0 - x_{k+1}| \leq (x_{k+1} - x_k)^2. \quad (14-3)$$

¹ Taylori valemi põhjal

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(u)(x_{k+1} - x_k)^2,$$

kus u on arvude x_k ja x_{k+1} vahel. Valemi (14-1) põhjal on

$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$, mistõttu

$$f(x_{k+1}) = \frac{1}{2}f''(u)(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Lagrange'i teoreemi põhjal saame veel:

$$f(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) - f(x_0) = (x_{k+1} - x_0)f'(v),$$

kus x_0 on funktsiooni $f(x)$ nullkoht ja v on arv, mis asetseb x_{k+1} ja x_0 vahel. Järelikult

$$(x_{k+1} - x_0)f'(v) = \frac{1}{2}f''(u)(x_{k+1} - x_k)^2,$$

millest tulenebki (14-2).

Võrratuse (14-2) teisendamisel saame veel

$$|x_0 - x_{k+1}| \leq \frac{M}{2m} (x_{k+1} + x_0 - x_0 - x_k)^2;$$

$$|x_0 - x_{k+1}| \leq \frac{M}{2m} [(x_0 - x_k) - (x_0 - x_{k+1})]^2;$$

$$|x_0 - x_{k+1}| \leq \frac{M}{2m} [(x_0 - x_k)^2 - 2(x_0 - x_k)(x_0 - x_{k+1}) + (x_0 - x_{k+1})^2].$$

Lähendite jada monotoonsuse tõttu on

$$-2(x_0 - x_k)(x_0 - x_{k+1}) + (x_0 - x_{k+1})^2 < 0$$

ja seega

$$|x_0 - x_{k+1}| < \frac{M}{2m} (x_0 - x_k)^2. \quad (14-4)$$

Kui $\frac{M}{2m} \ll 1$, siis

$$|x_0 - x_{k+1}| < (x_0 - x_k)^2, \quad (14-5)$$

millest selgub, et kui teatavas lähendis on p õiget kümnendkohta, siis järgnevas lähendis on $2p$ õiget kümnendkohta.¹

Rakendades Newtoni meetodit algebralise võrrandi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

lahendamiseks, saame

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \dots + a_1 x_k + a_0}{n a_n x_k^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x_k^{n-2} + \dots + a_1}. \quad (14-6)$$

Kui algebralises võrrandis $a_0 = -a$ ($a > 0$); $a_n = 1$ ja $a_m = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots, n-1$), siis saame võrrandi

$$x^n - a = 0,$$

mille kohta Newtoni meetodi rakendamine annab

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}}$$

ehk

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{n x_k^{n-1}}. \quad (14-7)$$

¹ Teistsuguse aruteluga on sama tulemus esitatud näiteks raamatutes (39, lk. 126; 36, lk. 127-128; 53, lk. 182).

Et võrrandi $x^n - a = 0$ lahendamine tähendab $\sqrt[n]{a}$ arvutamist, siis annab rekurrentne valem (14-7) n -nda juure arvutamise algoritmi. Rakendades seda valemit juhtumitele, kui $n = 2$ ja $n = 3$, jõuame eelmises paragrahvis elementaarsel teel saadud algoritmidele ruutjuure ja kuupjuure arvutamiseks.

Algebralise võrrandi numbrilise lahendamise algoritmi (14-6), mille eespool saime tuletise mõiste abil, võib leida ka teisel viisil. Nimelt kui on leitud antud võrrandi lahendi x_0 mingi lähend x_k , nii et $x_0 = x_k + h$, kus h on selle lähendi parandus, siis

$$a_n (x_k + h)^n + a_{n-1} (x_k + h)^{n-1} + \dots + a_1 (x_k + h) + a_0 = 0.$$

Kui viimases võrrandis peale binoomi $(x_k + h)$ astendamist jätta arvestamata kõik liikmed, milles on $h^m (m \geq 2)$, siis saame

$$h \approx - \frac{a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \dots + a_1 x_k + a_0}{n a_n x_k^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x_k^{n-2} + \dots + a_1}.$$

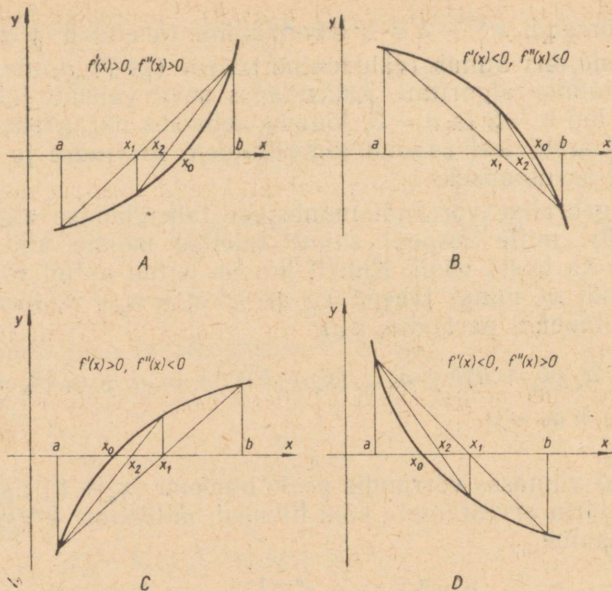
Pärast selle paranduse liitmist lähendiga x_k ja saadud summa tähistamist tähega x_{k+1} saamegi sama tulemuse, mis on antud valemiga (14-6).

Viimane mõttekäik on aluseks vastava metoodika väljatöötamisele.

B. Kõõlumeetod

Olgu antud võrrand $f(x) = 0$, mille üks lahend x_0 rahuldab tingimust $a < x_0 < b$. Funktsioon $f(x)$ olgu vahemikus $[a, b]$ pidev, monotoonne ja tema graafik olgu ilma käänupunktita. See tähendab, et $f(a) \cdot f(b) < 0$ ja et igal konkreetset juhul leiab aset üks neljast võimalikust juhtumist:

$f'(x) > 0$ ja $f''(x) > 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$ (joon. 14).



Joon. 14.

Vaadeldavas vahemikus asendatakse funktsioon $f(x)$ lineaarse funktsiooniga $g_1(x)$, nii et $f(a) = g_1(a)$ ja $f(b) = g_1(b)$. Selliseks lineaarseks funktsiooniks on

$$g_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Antud funktsiooni täpse nullkoha x_0 asemel leitakse tema lähend lineaarse funktsiooni $g_1(x)$ nullkoha x_1 näol:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)},$$

kus $a < x_1 < b$. Nüüd leiab aset üks kahest võimalusest: kas $f(x_1) \cdot f(a) < 0$ või $f(x_1) \cdot f(b) < 0$. Konkreetsuse mõttes olgu $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ (joon. 14 A ja B)¹.

Sel juhul peitub võrrandi täpne lahend juba kitsamas vahemikus (x_1, b) . Nüüd asendatakse antud funktsioon selles uues vahemikus jälle lineaarse funktsiooniga $g_2(x)$,

¹ Kui $f(x_1) \cdot f(a) < 0$, siis järgnev mõttekäik ei erine põhimõtteliselt sellest, kui $f(x_1) \cdot f(b) < 0$.

nii et $f(x_1) = g_2(x_1)$ ja $f(b) = g_2(b)$, ja leitakse selle nullkoht x_2 , kus $x_1 < x_2 < b$. On ilmne, et selleks tuleb eelmise lähendi arvutamise valemis võtta $a = x_1$. Seega

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Mõttekäiku samas suunas jätkates tekib rekurretno valem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)}, \quad (14-8)$$

mis on võrrandi $f(x) = 0$ lähendi lähendite arvutamise algoritmiks. Selle algoritmiga määratud lähendite jada piirväärtus on x_0 (39, lk. 122, 123).

Kõõlumeetodiga saadud lähendi x_{k+1} viga võimaldab hinnata võrratus¹

$$|x_0 - x_{k+1}| \ll \frac{M - m}{m} |x_{k+1} - x_k|, \quad (14-9)$$

kus $M = \max |f'(x)|$ ja $m = \min |f'(x)|$, ($a \ll x \ll b$).

Erijuhul, kui $M \ll 2m$, siis

$$|x_0 - x_{k+1}| \ll |x_{k+1} - x_k|. \quad (14-10)$$

¹ Lähtume samasusest

$$x_0 - x_{k+1} = (x_k - x_{k+1}) + (x_0 - x_k). \quad (\alpha)$$

Lagrange'i teoreemi põhjal

$$f(x_k) = f(x_k) - f(x_0) = (x_k - x_0)f'(u), \quad (\beta)$$

kus x_0 on funktsiooni $f(x)$ nullkoht ja u asetseb arvude x_k ja x_0 vahel. Kasutades veelkordselt Lagrange'i teoreemi, saame valemi (14-8) põhjal, et

$$f(x_k) = \frac{f(b) - f(x_k)}{b - x_k} (x_k - x_{k+1}) = (x_k - x_{k+1})f'(v), \quad (\gamma)$$

kus v on arvude b ja x_k vahel. Valemitest (β) ja (γ) leiame, et

$$x_k - x_0 = \frac{f'(v)}{f'(u)} (x_k - x_{k+1}).$$

Tehes asenduse valemis (α), saame

$$x_0 - x_{k+1} = \frac{f'(u) - f'(v)}{f'(u)} (x_k - x_{k+1}),$$

millest tulenebki (14-9).

3. Käsitlemise meetoodika

Võrrandite numbrilise lahendamise meetoodika väljatöötamisel ja vastavate küsimuste katselisel õpetamisel (9. ja 10. klassis) ei käsitletud küsimust üldisest aspektist ega antud seega ka vastavate võtete rekurrentseid valemeid, sest valemi võib õpilane pähe õppida ja seda täiesti mehaaniliselt kasutada ilma meetodist aru saamata. Sellist olukorda ei tohi aga matemaatika õppimisel lasta tekkida.

Enne küsimuse käsitlemist selgitatakse õpilastele, et mingi võrrandi, näiteks lineaarse võrrandi $ax + b = 0$ lahendivalem

$$x = -\frac{b}{a}$$

või ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on võrdus, mis seob võrrandi lahendit x selle võrrandi kordajatega kindlate matemaatiliste operatsioonide (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine) kaudu. Õpilastele tuleb öelda ka seda, milliseid võrrandeid saab põhimõtteliselt lahendivalemi abil lahendada ja milliste võrrandite puhul ei ole võimalik lahendivalemit anda. See aga ei tähenda, et neid võrrandeid, millel lahendivalem puudub, ei saa üldse lahendada. Tuleb rõhutada, et võrrandid, millele viivad praktikast tulenevad ülesanded, on alati numbriliste kordajatega. Numbriliste kordajatega võrrandi lahendamine on aga alati võimalik, kusjuures põhimõtteliselt saab lahendit leida mistahes täpsusega.

Lahendame Newtoni meetodiga kuupvõrrandi

$$x^3 - 2x^2 - 70 = 0.$$

Leiame proovimise teel kaks järjestikust täisarvu, mille vahel asetseb selle võrrandi üks lahend. Proovimisel arvestame, et antud võrrandi lahendamine tähendab funktsiooni

$$y = x^3 - 2x^2 - 70$$

nullkoha leidmist, s. o. x -i sellise väärtuse leidmist, mille puhul $y = 0$. Graafiliselt tähendab see selle funktsiooni graafiku ja x -telje lõikepunkti abstsissi leidmist. Kui selline pilt on õpilastele loodud, siis ei ole neil raske aru saada,

et argumendi läbiminekul nullkohast toimub funktsiooni väärtuse märgi muutus (eeldusel, et jutt on pidevatest funktsioonidest). Seega on vaja leida kaks järjestikust täisarvu, nii et ühe arvu asetamisel võrrandi vasakusse poolde muutub see negatiivseks ja teise arvu asetamisel positiivseks.

Antud juhul näeme, et kui $x = 4$, siis $y = -38 < 0$, ja kui $x = 5$, siis $y = 5 > 0$. Võrrandi lahend x_0 rahuldab seega võrratust

$$4 < x_0 < 5.$$

Et arv 5 erineb nullist märksa vähem kui -38 , siis võib arvata, et võrrandi lahend on viiele lähemal kui neljale. Võtame lahendi ligikaudseks väärtuseks $x_1 = 4,8$, mida nimetame antud võrrandi lahendi esimeseks lähendiks.¹

Siis

$$x_0 = 4,8 + \alpha,$$

kus α tähendab esimese lähendi parandust. Asendame antud võrrandis x -i avaldisega $4,8 + \alpha$:

$$(4,8 + \alpha)^3 - 2(4,8 + \alpha)^2 - 70 = 0.$$

Kuna $\alpha < 1$, siis α^2 ja α^3 on veelgi väiksemad. Seepärast võib need jätta viimases võrrandis pärast sulgude avamist arvestamata. Siis saame α suhtes lineaarse võrrandi

$$110,6 + 69,12\alpha - 19,2\alpha - 46,08 - 70 \approx 0,$$

millest $\alpha \approx 0,110$ ja seega $x_0 \approx 4,8 + 0,110 \approx 4,91$. Saadud arvu 4,91 võtame võrrandi lahendi teiseks lähendiks parandusega β . Siis

$$x_0 = 4,91 + \beta.$$

Korrates esimese lähendi puhul tehtud arutelu, saame, et $\beta \approx -0,003$ ja $x_0 \approx 4,91 - 0,003 = 4,907 \approx 4,91$. Et kaks järjestikust lähendit, ümardatud sajandikeni, langevad kokku, siis võib öelda, et täpsusega² 0,01 on $x_0 = 4,91$.

Kõõlumetodi rakendamisel tuleb samuti eeldada õpilaste teadmist, et iga võrrandi lahendamine on teatava

¹ Esimest lähendit on otstarbekas leida ka graafikult, mille skitseerimiseks tuleb anda x -le mõned väärtused 4 ja 5 vahelt.

² Tegelikult on viimases ümardamata väärtuses $x_0 \approx 4,907$ õigeid numbreid enam (vt. käesoleva paragrahvi p. 2, A), kuid veahinnangu mittekasutamisel selgub see alles järgneva paranduse määramisega.

funktsiooni nullkoha leidmine. Ka on vaja eelnevalt anda funktsiooni üldtähis, sest see lihtsustab tunduvalt tööd.

Leiame kõõlumeetodiga kuupvõrrandi

$$x^3 - 4x - 10 = 0$$

ühe lahendi täpsusega 0,01.

Ligikaudne hinnang näitab, et funktsiooni $f(x) = x^3 - 4x - 10$ nullkoht x_0 rahuldab võrratust $2 < x_0 < 3$.

Funktsiooni graafiku skitseerimiseks anname x -le veel mõned väärtused sellest vahemikust.¹

Kõik vajalikud arvutused teeme arvutuskeemis-tabelis.

x	x^3	$4x$	$x^3 - 4x$	$f(x) = x^3 - 4x - 10$
2	8	8	0	-10
3	27	12	15	5
2,2	10,65	8,8	2,85	- 8,15
2,5	15,62	10	5,62	- 4,28
2,8	21,95	11,2	10,75	0,75
2,7	19,68	10,8	8,88	- 1,12
2,76	21,02	11,04	9,98	- 0,02

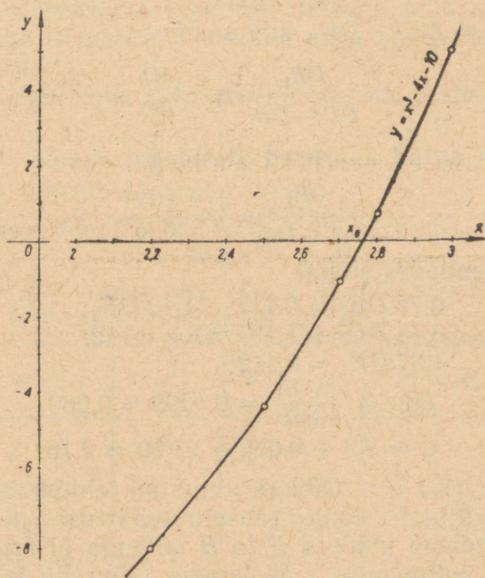
Punktide (2; -10), (2,2; -8), (2,5; -4), (2,8; 1), (3; 5) järgi joonestame funktsiooni graafiku. Et argumendi muutudes funktsioon muutub väga kiiresti, siis valime ordinaatteljel ühikuks 1 cm, abstsissiteljel aga 10 cm. Abstsissitelje nullpunkti joonisele ei kanna (joon. 15).

Joonise 15 järgi võib öelda, et antud võrrandi lahend x_0 on 2,7 ja 2,8 vahel, s. t. me võime mõlemat vaadelda kui lahendi lähendit täpsusega 0,1. Lähendi täpsustamiseks kõõlumeetodil teeme funktsiooni graafikust nullkoha ümbruses veel ühe joonise² (joon. 16). Ühendame kaare AB otspunktid kõõluga AB . Võrrandi täpse lahendi, s. o.

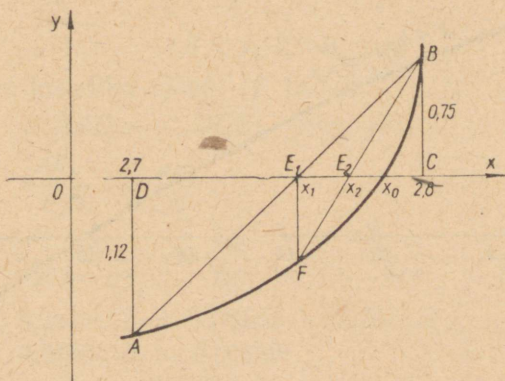
¹ Graafikult peab selguma peale ligikaudse nullkoha ka see, kas graafik on nõgus või kumer, tõusev või langev.

² Selguse mõttes on joonisel 16 kujutatud kõver teadlikult moonutatud. Tegelikul arvutamisel võib seda joonist skitseerida vabal käel.

kaare AB ja x -telje lõikepunkti abstsissi x_0 asemel leiame kõõlu AB ja x -telje lõikepunkti abstsissi x_1 . See on ilmselt parem lähend kui 2,7.



Joon. 15.



Joon. 16.

$$\triangle ADE_1 \sim \triangle BCE_1;$$

$$\frac{DE_1}{CE_1} = \frac{AD}{BC}.$$

Kuna $CE_1 = DC - DE_1$, siis saame

$$\frac{DE_1}{DC - DE_1} = \frac{AD}{BC}.$$

Asendades antud suurused arvudega, saame

$$\frac{DE_1}{0,1 - DE_1} = \frac{1,12}{0,75}.$$

Edasi lahendades saame

$$0,75 DE_1 = 0,112 - 1,12 DE_1;$$

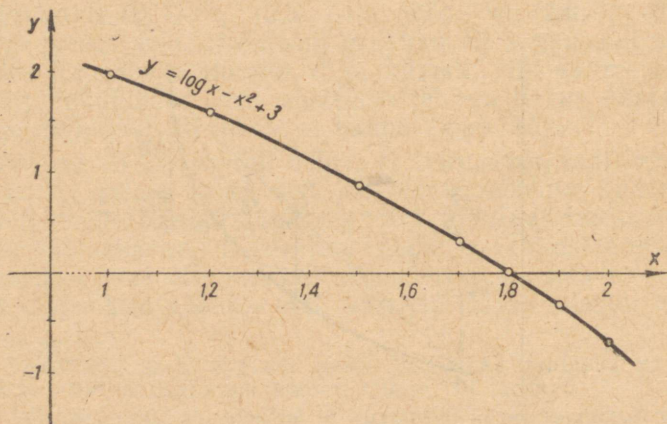
$$0,75 DE_1 + 1,12 DE_1 = 0,112;$$

$$1,87 DE_1 = 0,112;$$

$$DE_1 = \frac{0,112}{1,87} = 0,0599 \approx 0,060;$$

$$x_1 = 2,7 + 0,060 = 2,760 \approx 2,76.$$

Leiame $f(x_1) = -0,22$ (arvutus on tehtud tabelis). Joonisel 16 kujutab seda (absoluutväärtuse poolest) lõik E_1F . Ühendame punktid F ja B kõõluga ja arutleme analoogiliselt eeltooduga, s. o. leiame kõõlu BF ja x -telje lõikepunkti abstsissi x_2 , mis on ilmselt parem lähend kui x_1 .



Joon. 17.

Täheldades, et $\triangle FE_1E_2 \sim \triangle BCE_2$, ja korrates eelmise lähendi leidmisel tehtud arutelu, leiame, et $E_1E_2 = 0,001$ ja $x_2 = 2,76 + 0,001 = 2,761 \approx 2,76$.

Et kaks järjestikust lähendit annavad nõutava täpsuse piirides sama tulemuse, siis võime anda vastuseks $x_0 = 2,76$ (täpsusega 0,01).

Lõpuks lahendame kõõlumeetodiga veel transtsendentse võrrandi

$$\log x = x^2 - 3,$$

leides tema lähendi täpsusega 0,01.

Funktsioon, mille nullkoht on vaja leida, on

$$f(x) = \log x - x^2 + 3.$$

Veendunud proovimise teel, et $1 < x_0 < 2$, koostame selles vahemikus funktsiooni väärtuste tabeli.

x	$\log x$	x^2	$\log x - x^2$	$f(x) = \log x - x^2 + 3$
1	0	1	-1	2
2	0,3010	4	-3,6990	-0,6990
1,2	0,0792	1,44	-1,3608	1,6392
1,5	0,1761	2,25	-2,0739	0,9261
1,7	0,2304	2,89	-2,6596	0,3404
1,8	0,2553	3,24	-2,9847	0,0153
1,9	0,2788	3,61	-3,3312	-0,3312

$$1,8 < x_0 < 1,9.$$

Ehitame graafiku (joon. 17 ja 18).

$\triangle ABE_1 \sim \triangle DCE_1$ (joon. 18);

$$\frac{AE_1}{E_1D} = \frac{AB}{DC};$$

$$\frac{AE_1}{AD - AE_1} = \frac{AB}{DC}; \quad \frac{AE_1}{0,1 - AE_1} = \frac{0,0153}{0,3312};$$

$$0,3312 AE_1 = 0,00153 - 0,0153 AE_1;$$

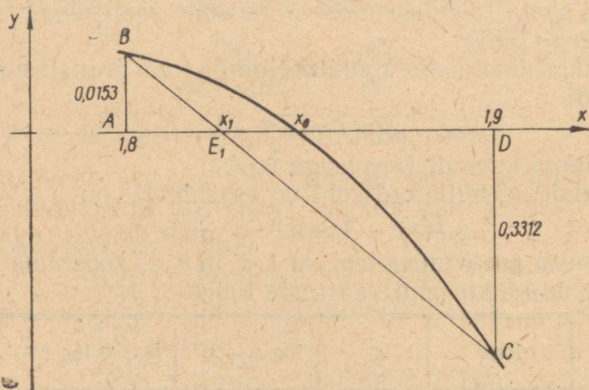
$$0,3465 AE_1 = 0,00153;$$

$$AE_1 = \frac{0,00153}{0,3465} = 0,0044 \approx 0,004;$$

$$x_1 = 1,8 + 0,0044 + 0,0044 = 1,8044.$$

Et leitud parandus 0,004 ei mõjuta enam sajandikke, siis on nõutava täpsusega lahend

$$x_1 = 1,80.$$



Joon. 18.

Pärast mõne näite vaatlemist muutub kõõlumetod õpilastele täiesti arusaadavaks ja jõukohaseks lahendusvõtteks.

РЕЗЮМЕ

О методе последовательных приближений в школьной математике

К преподаванию математики нельзя подходить с формальной точки зрения, по которой учащийся должен приобрести только определенные факты и умения, при обучении надо обеспечить и твердое усвоение основ науки. Для этого необходимо усвоение учащимися применяемых в математике общих методов, общих основ (принципов), которыми руководствуются при исследовании определенного круга вопросов. Автор называет такие общие принципы гедонетическими принципами.¹

В исследовании приведены некоторые примеры гедонетических принципов:

1. Автор показывает, что принцип коммунистически воспитывающего обучения надо рассматривать как гедонетический принцип советской дидактики, так как по существу именно им следует руководствоваться при решении всех связанных с дидактикой вопросов, таких, как выбор учебных предметов, методов обучения, составление учебных планов, программ и т. д. Остальные принципы дидактики (наглядность, научность, систематичность и т. д.) также служат принципу коммунистически воспитывающего обучения, ибо максимальное соблюдение их способствует осуществлению более успешного коммунистического воспитания.

2. В 1872 году было издано исследование известного ученого и педагога Ф. Клейна, в котором рассматривались различные виды геометрии — «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen»².

¹ Греч. «*hodos*» — путь, дорога; гедонетический — указывающий путь, направляющий на путь.

² В литературе это исследование известно по месту его публикации — город Эрланген также под названием «Эрлангенской программы».

В исследовании ставится проблема: можно ли найти общий принцип, который послужил бы основой для различных геометрических методов. Приняв за основу понятие группы геометрических преобразований, Ф. Клейн приходит к выводу, что геометрия исследует инварианты геометрических фигур по отношению к определенной группе преобразований. Это и является гомогенным принципом классифицирования различных геометрий.

3. При расширении понятия числа гомогенным принципом является сформулированный впервые Г. Ганкелем принцип перманентности формальных законов.

В математической науке и в её применении широко используется метод последовательных приближений. Для определения этого метода автор резюмируемой работы рассматривает понятие точности в теории и практике. В работе показывается, что при решении всех практических проблем точность всегда ограничена, хотя теоретически эта задача и может быть решена с абсолютной точностью. В этом аспекте и рассматривается вопрос континуума действительных чисел и объясняется, что практика (действительное численное вычисление, измерение величин) не нуждается в создании континуума действительных чисел. При прямом практическом измерении величин (например, массы тела), несмотря на то, соизмеримы ли измеряемая величина и единица измерения или нет, всегда устанавливается, сколько раз входит в данную величину принятая единица измерения или какая-нибудь её часть. В зависимости от того, насколько мы при прямом измерении раздробляем единицу измерения (например, при выборе подходящих гирь), возникает последовательность приближений искомой величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

в которой каждый по следующий член является лучшим приближением, чем предшествующий. Практически эта последовательность всегда конечна. Но поднимаясь на высшую ступень абстракции, единицу измерения можно раздроблять до бесконечности. Таким путём получаем бесконечную последовательность приближений

искомой величины и доходим до необходимости создания континуума действительных чисел.

С аспекта точности рассматривается также эмпирическое определение зависимости между двумя переменными величинами, и оно сравнивается с определением функции действительной переменной, которое дано Дирихле. Выясняется, что при эмпирическом исследовании зависимости можно определить зависимость между двумя переменными величинами x и y только с ограниченной точностью

$$y = f(x) \pm \varepsilon$$

и, таким образом, точные величины функции остаются в каком-то промежутке неопределённости. В соответствии с развитием техники и науки вообще, величину ε можно уменьшить, т. е. реализовать некоторую последовательность функций

$$y_1 = f(x) \pm \varepsilon_1$$

$$y_2 = f(x) \pm \varepsilon_2$$

где тем самым $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ и каждая последующая функция определяет исследуемую зависимость с большей точностью, чем предыдущая.

Понятие точности в теории и практике объясняется ещё в связи с мгновенной скоростью, проблемой квадратуры и геометрическими конструкциями.

На основании вышеизложенного автор пришёл к выводу, что в практике в большинстве случаев можно найти только приближения неизвестных. При этом часто оказывается возможным при помощи определённого приёма найти последовательность приближений неизвестного x :

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

где каждый по следующему член показывает величину неизвестного точнее, чем предыдущий. С точки зрения теории эта последовательность бесконечна и сходится к точной величине неизвестного; с точки же зрения практики для определения с необходимой точностью приближённой величины неизвестного достаточно найти некоторые первые члены последовательности.

В зависимости от конкретного случая закон образования последовательности приближений может быть весьма различным. Он может быть определен алгоритмом, данным аналитическим путём; последовательность приближений какой-либо измеряемой величины определяется тем, как единицу измерения раздробляют на всё меньшие и меньшие части. Независимо от того, по какому закону можно образовать последовательность приближений неизвестного, мы говорим, что неизвестное определяется при помощи метода последовательных приближений. Исходя из этой точки зрения, в резюмируемой работе даётся следующее определение метода последовательных приближений: Методом последовательных приближений называется такой метод, который применяется для образования последовательности, сходящейся к решению данной задачи.

В работе отмечается, что приведённое определение шире, чем обычные определения, по которым последовательность приближений образуется по рекуррентному закону. В резюмируемой работе мы отказались от условия рекуррентности, так как оно приведет к отождествлению метода последовательных приближений с методом итерации.

По приведённому в работе определению можно сказать, что каждая задача, при которой находится сходящаяся последовательность приближений решения, может быть решена при помощи метода последовательных приближений. Тем самым, метод последовательных приближений приводит к таким понятиям, как, например, длина окружности и площадь круга, объём пирамиды, определённый интеграл и др. Метод итерации, применяемый при численном решении уравнений, а также метод Ньютона и метод хорд являются частными случаями метода последовательных приближений, где последовательность приближений составляется по рекуррентному закону.

Последовательность, упомянутая в определении метода последовательных приближений, не всегда должна быть последовательностью чисел. В соответствии с конкретной задачей она (т. е. последовательность) может быть, например, последовательностью отрезков,

последовательностью углов, последовательностью площадей, последовательностью функций и т. д. И даже больше, задача, упомянутая в определении рассматриваемого метода, не всегда должна иметь математическое содержание, и вследствие этого члены последовательности приближений могут быть в математике неопределяемыми элементами некоторого множества. Исходя из этой точки зрения, метод последовательных приближений находит применение и в повседневной жизни человека.

Метод последовательных приближений является одним из важнейших методов математики. Названный метод является направляющим методом при вычислении всех константов, встречающихся в математике; подавляющее большинство чисел в математических таблицах определяется при помощи метода последовательных приближений. Рассматриваемый метод является направляющим методом при решении алгебраических и трансцендентных уравнений, а также при численном решении дифференциальных уравнений, приближении функций, линейном планировании и при решении многих других проблем, имеющих большое практическое значение.

Частный случай метода последовательных приближений — итерация — применяется при «доказательствах существования». Классическим примером здесь является доказательство существования решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Метод последовательных приближений можно применять также и в школьной математике. В настоящей работе рассматриваются некоторые такие возможности.

1. Простейшей формой метода последовательных приближений является планомерно проводимая проба. Это широко применяемый метод работы, при помощи которого практически проверяется пригодность определённого объекта для удовлетворения данных условий.

При планомерном использовании пробований всегда составляется определенная последовательность объектов так, что каждый следующий член этой последовательности выполняет требуемые условия лучше, чем

предыдущий. Поэтому и надо этот метод рассматривать как особую форму метода последовательных приближений, а именно, как простейшую форму, так как он не требует знания каких-нибудь особых приёмов или алгоритмов. В резюмируемой работе рассматривается применение метода проб при вычислении приближений квадратного корня и при выполнении некоторых геометрических конструкций (деление отрезка пополам, деление окружности на равные части, построение касательной к окружности). В том числе обращается внимание и на то, что практически метод проб применяется при выполнении любой геометрической конструкции. Например, при построении прямой по двум данным точкам надо учитывать, что точка реализуется плоской фигурой (кругом), имеющей практически очень малую площадь; искомая же прямая находится в полосе известной ширины. Самое вероятное положение этой прямой всегда находится путём пробного накладывания линейки на глаз, иными словами, пробой.

2. Если обыкновенная дробь не преобразуется в конечную десятичную дробь (или преобразуется в конечную десятичную дробь, в которой число десятичных знаков слишком велико), то обыкновенную дробь приближаем десятичной дробью, имеющей подходящее число десятичных знаков. При таком приближении получается некоторая погрешность, которая зависит от числа десятичных знаков дроби: чем больше десятичных знаков будет учтено, тем меньше погрешность. Величина десятичной дроби постепенно приближается к величине обыкновенной дроби.

3. Одним из главнейших вопросов в школьной математике является измерение величин. Названный вопрос имеет большое значение не только потому, что он является исходной точкой для применения математики, но и потому, что измерение величин тесно связано с развитием понятия числа. Если натуральные числа являются основой перечисления элементов некоторого множества, то необходимость расширения множества натуральных чисел обусловлена прежде всего проблемами измерения. Расширение рациональными числами обусловлено потребностью практики измерения. Расширение же множества рациональных чисел иррациональными числами обусловлено теоретиче-

скими аспектами проблемы измерения, поэтому рассмотрение относящихся сюда вопросов предполагает значительно более высокую абстракцию, чем это необходимо при действительном измерении. В резюмируемой работе показывается, что прямое измерение любой величины часто происходит путём последовательного приближения, причём приближение прекращается тогда, когда достигнута необходимая точность. В работе показывается, что к результату измерения надо всегда относиться как к приближённому числу. При практическом измерении процесс приближения измеряемой величины всегда окончательный. Если же абстрагировать те условия, которые при практическом измерении мешают дальнейшему приближению, и дальше произвести мысленный эксперимент с идеальными объектами, то приходим непосредственно к необходимости расширения множества рациональных чисел.

4. В современной школьной математике недопустимо мало времени уделяется численным методам, играющим центральную роль в прикладной математике. В резюмируемой работе рассматривается применение численных методов при вычислении приближений квадратного и кубического корней. При этом автор исходит из конкретных примеров и в конце концов элементарным путём приходит к рекуррентным формулам

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} \quad \text{и} \quad x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2},$$

где a обозначает число, из которого извлекается корень. Элементарным путём можно доказать, что последовательности приближений, определённые при помощи этих формул, сходятся. Для приближений квадратного корня выводится формула оценки погрешности.

$$x_{k+1} - \sqrt{a} \leq (x_k - x_{k+1})^2,$$

которая применяется и для оценки погрешности приближений кубического корня.

5. Применение численных методов рассматривается также при решении некоторых алгебраических и трансцендентных уравнений. Рассматриваются метод Ньютона, который применяется только при решении алгебраического уравнения, и метод хорд

(*regula falsi*), который применяется также и при решении некоторых трансцендентных уравнений. При разработке методики анализа соответствующих вопросов и при экспериментальном обучении вопрос не был рассмотрен из общего аспекта, и тем самым не были даны и рекуррентные формулы соответствующих приёмов, так как ученик может выучить формулу, но применять ее совершенно механически, не понимая сущности метода. Такого положения при обучении математике не должно возникнуть.

В резюмируемой работе отмечается, что рассмотренные вопросы далеко не исчерпывают всех возможностей для применения метода последовательных приближений в школьной математике.

Kirjandus

1. Nõukogude Liidu Kommunistliku Partei programm, Tallinn, 1961.
2. Iljitšov, L. F., Partei ideoloogilise töö järjekordsed ülesanded, Tallinn, 1963.
3. Höfler, A., Didaktik des mathematischen Unterrichts, Leipzig-Berlin, 1910.
4. Hölder, O., Die mathematische Methode, Berlin, 1924.
5. Iteration, Naas, J., Schmid, H. L. Mathematisches Wörterbuch, Band I, Berlin-Leipzig, 1961, lk. 858—859.
6. Järkjärgulise lähendamise meetod. — Eesti entsüklopeedia IV, lk. 197.
7. Kisseļjov, A., Geomeetria. Planimeetria VIII ja IX klassile, Tallinn, 1958.
8. Kisseļjov, A., Geomeetria. Stereomeetria keskkooli XI klassile, Tallinn, 1958.
9. Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. III. Präzisions- und Approximationsmathematik, Berlin, 1928.
10. Klein, F., Gesammelte mathematische Abhandlungen. Erster Band. Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlangener Programm, Berlin, 1921.
11. Klein, F., Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve. «Mathematische Annalen», Bd. XXII. Leipzig, 1883, lk. 249—259.
12. Perepjolkin, D. I., Elementaargeomeetria kursus. Esi-mene osa. Tasapinnaline geomeetria, Tallinn, 1951.
13. Rägo, G., Kõrgem matemaatika I, Tallinn, 1962.
14. Rägo, G., Kõrgem matemaatika III (käsikirjas).
15. Sanden, H. von, Praktische Analysis, Leipzig-Berlin, 1923.
16. Vahlen, T., Konstruktionen und Approximationen, Leipzig-Berlin, 1911.
17. Voss, A., Über das Wesen der Mathematik, Leipzig-Berlin, 1913.
18. Werkmeister, P., Praktische Zahlenrechnen, Berlin-Leipzig, 1929.
19. Аккерманн, С. И., Принципы и правила обучения в советской школе, Владимир, 1955.

20. Александров, П. С., Колмогоров, А. Н., Иррациональные числа. — Вопросы преподавания математики в средней школе, сборник статей, М., 1961, стр. 28—63.
21. Анкета журнала «Cahiers Pédagogiques» на тему «Современная математика и её преподавание» (ответы французских математиков). Математическое просвещение, 1957, № 2, стр. 253—260.
22. Ашкинуге, В. Г., Изучение квадратных уравнений и неравенств в IX классе по новой программе. — Математика в школе, 1963, № 4, стр. 34—43.
23. Ашкинуге, В. Г., Левин, В. И., Семушин, А. Д., О перестройке программ по математике в свете новых задач средней школы. — Математика в школе, 1959, № 1, стр. 40—51.
24. Болтянский, В. Г., Виленкин, Н. Я., Яглом, И. М., О содержании курса математики в средней школе. — Математическое просвещение, 1959, № 4, стр. 131—143.
25. Борисенко, Е. Я., Основы организации племенного дела, М., 1961.
26. Борисенко, Е. Я., Разведение сельскохозяйственных животных, М., 1957.
27. Брадис, В. М., Извлечение квадратного и кубического корней из чисел. — Математика в школе, 1961, № 1, стр. 18—24.
28. Брадис, В. М., Методика преподавания математики в средней школе, М., 1954.
29. Брунер, Д., Процесс обучения, М., 1962.
30. Бычков, Ф., Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры, СПб, 1913.
31. Вальт, Л. О., Мысленный эксперимент. — Уч. зап. Тартуского государственного университета, вып. 124, Труды по философии VI, Тарту, 1962.
32. Виленкин, Н. Я., Метод последовательных приближений, М., 1961.
33. Виленкин, Н. Я., Шварцбурд, С. И., О преподавании пределов переменных величин и функции в средней школе. — Математика в школе, 1961, № 1, стр. 24—34.
34. Ганкель, Г., Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием, Казань, 1912.
35. Гастева, С. А., Крельштейн, Б. И., Ляпин, С. Е., Шидловская, М. М., Методика преподавания математики под общей редакцией С. Е. Ляпина. Часть I, Л., 1955. Часть II, Л., 1956.
36. Демидович, Б. М., Марон, И. А., Основы вычислительной математики, М., 1963.

37. Детская Энциклопедия, т. 3, М., 1959.
38. Дубнов, Я. С., Измерение отрезков, М., 1962.
39. Загускин, В. Л., Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, М., 1960.
40. Итерация. — БСЭ, т. 19, стр. 151.
41. Картан, Э., Теория групп и геометрия. Об основаниях геометрии, М., 1956, стр. 485—507.
42. К итогам дискуссии о принципах обучения. — Советская педагогика, 1951, № 4, стр. 48—56.
43. Клейн, Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I. Арифметика, алгебра, анализ, М.-Л., 1933.
44. Клейн, Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II. Геометрия, М.-Л., 1934.
45. Кольман, Э., История математики в древности, М., 1961.
46. Курант, Р., Роббинс, Г., Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов, М.-Л., 1947.
47. Лебег, А., Об измерении величин, М., 1960.
48. Лузин, Н. Н., Дифференциальное исчисление, М., 1961.
49. Маркушевич, А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе. — Математика в школе, 1962, № 2, стр. 3—14.
50. Математика, её содержание, методы и значение, т. I, М., 1956.
51. Молодший, В. Н., Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века, М., 1963.
52. Отбор в животноводстве. — БСЭ, т. 33, стр. 379.
53. Скарборо, Д., Численные методы математического анализа, М.-Л., 1934.
54. Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, М., 1950.
55. Фетисов, А. И., Геометрия, М., 1963.
56. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., 1959.
57. Численные методы. МСЭ, т. 10, стр. 448.
58. Энциклопедия элементарной математики. Книга первая, М.-Л., 1951.
59. Энциклопедия элементарной математики. Книга вторая, М.-Л., 1951.
60. Яглом, И. М., Ашкинуде, В. Г., Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, I, М., 1962.

SISUKORD

Sissejuhatus	3
------------------------	---

I. Hodogeetiliste printsiipide vajadus

§ 1. Kommunistlikult kasvatava õpetuse printsiip nõukogude didaktikas	5
§ 2. Erlangeni programm	7
§ 3. Formaalseste seaduste permanentsuse printsiip	11
§ 4. Hodogeetiliste printsiipide vajadus koolimatemaatika kursuses	16

II. Järkjärgulise lähendamise meetodi olemus

§ 5. Täpsuse mõiste teorias ja praktikas	18
1. Reaalarvude kontiinum	18
2. Reaalmuutuja funktsiooni mõiste	20
3. Kvadratuuri probleem	22
4. Kiirus antud punktis	24
5. Geomeetrilised konstruktsioonid	25
6. Täpsusmatemaatika ja lähendusmatemaatika	27
§ 6. Järkjärgulise lähendamise meetodi määrang	28
§ 7. Järkjärgulise lähendamise meetod inimese igapäevases elus	33

III. Järkjärgulise lähendamise meetod keskkooli matemaatikakursuses

§ 8. Proovimine kui järkjärgulise lähendamise meetodi algelisem vorm	36
§ 9. Ruutjuure lähendite arvutamine proovimise teel	37
1. Küsimuse tähtsusest	37
2. Küsimuse üldine käsitlus	37
3. Käsitluse meetodika	38
§ 10. Proovimismeetod geomeetrias	40
1. Eelmärkusi	40
2. Sirglõigu poolitamine proovimise teel	40
3. Ringjoone puutuja ehitamine läbi antud punkti	41
A. Punkt on ringjoonel	41
B. Punkt asetseb väljaspool ringjoont	42
4. Ringjoone jaotamine võrdseteks osadeks	42

§ 11.	Hariliku murru lähendamine lõpliku kümnendmurruga	43
	1. Küsimuse tähtsusest	43
	2. Küsimuse üldisest käsitlusest	44
	3. Käsitluse meetodika	45
§ 12.	Suuruste mõõtmine. Irratsionaalarvu mõiste	46
	3. Suuruste mõõtmise küsimuse üldisest käsitlusest (sirglõigu mõõtmise näitel)	51
	3. Käsitluse meetodika 8-klassilises koolis	55
	4. Käsitluse meetodika keskkoolis	57
§ 13.	Ruutjuure ja kuupjuure numbriline käsitlemine	63
	1. Küsimuse tähtsusest	63
	2. Küsimuse üldisest käsitlusest	64
	3. Käsitluse meetodika	65
§ 14.	Võrrandite numbriline lahendamine	72
	1. Küsimuse tähtsusest	72
	2. Küsimuse üldisest käsitlusest	74
	A. Newtoni meetod	74
	B. Kõõlumeetod	77
	3. Käsitluse meetodika	80
	Resümee (vene keeles)	87
	Kirjandus	95

Теллмаа Аксел Эдуардович
О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

На эстонском языке

Keeleline toimetaja V. MAANSO

Ladumisele antud 3. XI 1964. Trükkimisele antud 18. II 1965. Paber 54×84, 1/16.
Trükipoognaid 6,25. Tingtrükipoognaid 5,25. Trükiarv 500.
Tell. nr. 2887. MB-02379.

Trükikoda «Kiir», Viljandi, V. Kingissepa 26/31.

Hind 20 kop.

TÜ RAAMATUKOGU



10300015224753

Hind 20 kop.

A-23592

17.