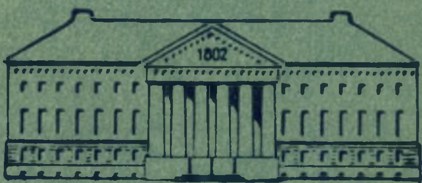
TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 342 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XIV



TARTU 1974

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 342 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XIV

TARTU 1974

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА Г. КАНГРО

Выдающемуся эстонскому математику, заслуженному деятелю науки ЭССР, члену-корреспонденту АН ЭССР, одному из крупнейших специалистов по теории суммируемости, профессору Гуннару Кангро 21 ноября 1973 года исполнилось 60 лет со дня рождения.

Юбиляр в настоящее время руководит кафедрой математического анализа Тартуского государственного университета и является душой всей математической жизни университета и республики. Под его руководством работают сейчас многие аспиранты и студенты в различных областях математики. Его аспирантами защищено 19 кандидатских диссертаций. В 1965 и 1968 годах вышел из печати его двухтомный учебник [32, 42] по математическому анализу, написанный с большим педагогическим мастерством на современном уровне.

Несмотря на большую загруженность педагогической и общественной деятельностью, проф. Г. Кангро продолжает писать оригинальные научные статьи, создавая новые направления исследований по математике, а также активно популяризовать математическую науку [29—31, 33—35, 37—40, 43, 45, 48].

Этапы научной, педагогической и общественной деятельности Г. Кангро освещены в статье «К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро» (Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 3—11).

Рассмотрим основные научные достижения проф. Г. Кангро за прошедшее десятилетие.

1. Общая теория суммируемости со скоростью

В вопросах приближения функций и в теории ортогональных рядов важно знать не только суммируема или несуммируема данная функциональная последовательность, но и оценить скорость приближения преобразованной последовательности Ax к пределу. Такую информацию получаем, применяя теорию суммируемости со скоростью, созданную Г. Кангро в последние годы [44, 46, 49—55]. Приведем относящиеся сюда определения.

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ такова, что $0 < \lambda_n \uparrow$. Сходящуюся к числу ξ последовательность $x = \{\xi_n\}$ Г. Кангро называет (*сходящейся со скоростью* λ или коротко) *λ-сходящейся*, если $\{\beta_n\} \in c$, где $\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \xi)$, и *$\lambda$-ограниченной*, если $\{\beta_n\} \in m$. Множество всех λ-сходящихся (λ-ограниченных) последовательностей обозначается через c^λ (соответственно m^λ). Если $\lambda_n = O(1)$, например, если $\lambda = \{1\}$, то $c^\lambda = m^\lambda = c$. Последовательность x он называет *A^λ-суммируемой* (соответственно *A^λ-ограниченной*), если $Ax \in c^\lambda$ (соответственно $Ax \in m^\lambda$). В частности, ряд

$$\sum u_n \tag{1}$$

является A^λ-суммируемым, т. е. A-суммируемым со скоростью λ, если последовательность $\{U_n\}$ его частичных сумм является A^λ-суммируемой.

Если $\lim \beta_n = 0$, то последовательность x называется *регулярно λ-сходящейся*. Последовательность x называется *регулярно A^λ-суммируемой*, если Ax является регулярно λ-сходящейся.

В статье [44] находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы любая λ-сходящаяся последовательность x была A^μ-суммируемой, т. е. чтобы $A(c^\lambda) \subset c^\mu$, где μ такова, что $0 <_{\!\!\!\!\!\!\;\;\;\;\;} \mu_n \uparrow$. В статье [50] находятся необходимые и достаточные условия для $A(m^\lambda) \subset m^\mu$. В частности, *регулярный метод* $A = (a_{nk})$ *с* $\alpha_{n0} \equiv a_{n0} + a_{n1} + \ldots = 1$ *сохраняет λ-ограниченность*, т. е. $A(m^\lambda) \subset m^\lambda$, *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k |a_{nk}|/\lambda_k = O(1/\lambda_n).$$

В статье [54] доказано: *для того, чтобы регулярный треугольный метод A сохранял λ-ограниченность, достаточно*, а при некоторых ограничениях на величины

$$A_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} |a_{n\nu}|,$$

и необходимо, *выполнение условия*

$$\exists \Theta \in (0, 1): \quad \lambda_n A^\Theta{}_{nk} = O(\lambda_k). \tag{2}$$

Если A — метод взвешенных средних Рисса (R, p_n), это установлено в [53], т. е. *регулярный метод (R, p_n) с $p_n > 0$ и $P_n = O(P_{n-1})$ сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда существует число $\Theta \in (0, 1)$, при котором $\lambda_n/P^\Theta{}_n = O(\lambda_k/P^\Theta{}_k)$ для $k \leqslant n$*. Для метода Зигмунда (Z, α), т. е. в частном случае $p_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, этот результат при $\alpha > 0$ получили Н. К. Бари и С. Б. Стечкин (РЖ Мат, 1957, 6955).

В теории суммируемости видную роль играют совершенные методы суммирования. Напомним, что регулярный метод A называется *совершенным*, если он совместен с любым регулярным методом $B \supset A$. Аналогично при помощи условия $|B| \supset |A|$ определяется абсолютная совершенность абсолютно регулярного метода A. Например, регулярный (абсолютно регулярный) метод (R, p_n) совершенен (абсолютно совершенен). В статье [49] Г. Кангро разрабатывает топологические основы обобщения понятия совершенности на A^λ-суммируемые ряды. Определяется некоторая локально выпуклая топология, так называемая FK-топология, в векторном пространстве $c^\lambda{}_A$ всех A^λ-суммируемых последовательностей, т. е. в

$$c^\lambda{}_A = \{x : Ax \in c^\lambda\},$$

изучаются топологические свойства пространства $c^\lambda{}_A$, относящиеся к слабой сходимости по отрезкам. Потребность в таком обобщении возникает при изучении многих задач теории суммируемости со скоростью, например, множителей суммируемости типа (A^λ, B^μ). В [49] доказывается, что c^λ и m^λ являются FK-пространствами с нормой $\|x\| = \sup\{|\beta_n|, |\xi|\}$, находятся общий вид непрерывного линейного функционала в c^λ и норма такого функционала. Основной результат статьи [49] — это указание точных условий для того, чтобы в точке $x \in c^\lambda{}_A$ имела место слабая сходимость по отрезкам. Пусть

$$e_p = \{\delta_{pk}\}, \quad e = \{1\}, \quad e^\lambda = \{1/\lambda_k\}.$$

Г. Кангро делит все *λ-консервативные* методы (т. е. методы, сохраняющие λ-сходимость) на λ-корегулярные и λ-конулевые. Данный λ-консервативный метод A он называет *λ-конулевым*, если в точке $e^\lambda \in c^\lambda$ имеет место слабая сходимость по отрезкам; в противном случае A называется *λ-корегулярным*. В [49] даются также условия λ-корегулярности методов Рисса (R, p_n), Чезаро (C, α) и Эйлера — Кноппа (E, q). В статье [52] дается следующее определение. Метод A называется *λ-совершенным*, если множество $E = \{e_p, e, e^\lambda\}$ является тотальным в $c^\lambda{}_A$. В этой статье устанавливаются точные (а также более эффективные достаточные) условия для λ-совершенности λ-консервативного и λ-обратимого метода $A = (a_{nk})$ с $a_{n0} = \text{const} \neq 0$. При помощи этих условий в [52] доказывается, что практически самые важные *регулярные методы Чезаро, Рисса и Эйлера — Кноппа являются λ-совершенными, если они λ-консервативны.*

Пусть

$$m^\lambda{}_A = \{x : Ax \in m^\lambda\}.$$

При решении многих задач A^λ-суммируемости часто затруднительно установить включение $c^\lambda{}_A \subset c^\mu{}_B$, зато легче установить включение $c^\lambda{}_A \subset m^\mu{}_B$. Поэтому так важна доказанная в [52] следующая

Теорема 1. *Для λ-совершенного метода A и произвольного матричного метода B импликация $c^\lambda{}_A \subset m^\mu{}_B \Rightarrow c^\lambda{}_A \subset c^\mu{}_B$ справедлива тогда и только тогда, когда Be_p, Be, $Be^\lambda \in c^\mu$.*

2. Теория множителей суммируемости

В статьях [44, 46, 50] проф. Г. Кангро находит эффективные необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ являлась множителем суммируемости типов (P, P^λ), (C, C^λ), $(P^\lambda o, B^\mu o)$ и $(C^\lambda o, B^\mu o)$, где $P = (R, p_n)$ — регулярный метод взвешенных средних Рисса, C — метод Чезаро (C, α) порядка $\alpha = 0, 1, \ldots$, а B — произвольный треугольный метод, удовлетворяющий некоторым ограничениям. Напомним, что ε называется *множителем суммируемости типа* $(A, B^\lambda o)$, если для любого A-суммируемого ряда (1) ряд $\Sigma\, \varepsilon_n u_n$ является B^λ-ограниченным. Аналогично определяются и другие типы множителей суммируемости. Некоторые достаточные условия для множителей суммируемости типа $(Z^\lambda o, Z^\mu o)$ нашел Алянчич (РЖМат, 1964, 4Б85) и применил их для получения оценки скорости убывания модулей непрерывности и гладкости функций f из пространств C и L^p при $p \geqslant 1$. Здесь $Z = (Z, \alpha)$ — метод Зигмунда порядка $\alpha > 0$. В случае $\alpha = 1$, т. е. в случае метода арифметических средних, такие множители суммируемости нашли Алексич и Кралик (РЖ Мат, 1961, 10Б16).

Для нахождения множителей суммируемости проф. Г. Кангро пользуется λ-совершенностью методов суммирования. Например, при помощи теоремы 1 в статье [52] Г. Кангро находит множитель суммируемости типа (A^λ, B^μ), если известны множители типа $(A^\lambda, B^\mu o)$ или $(A^\lambda o, B^\mu o)$. Из этого результата становится ясной причина совпадения разных типов множителей суммируемости.

Продолжая свои исследования по теории обыкновенных множителей суммируемости, в статье [36], используя метод билинейных преобразований, исследуется суммируемость произведения последовательностей, суммируемых нормальными методами, в обратных матрицах которых конечное число ненулевых диагоналей. Эти результаты применяются [36] к нахождению всех основных типов обобщенных множителей суммируемости для названных методов суммирования.

3. Теория тауберовых теорем

Значителен вклад проф. Г. Кангро в теорию тауберовых теорем. Тауберовы теоремы определяются следующим образом.

Пусть A и B — два метода суммирования, где $B \subset A$. Каким достаточным или точным условиям должны удовлетворять члены ряда (1), чтобы A-суммируемость ряда (1) влекла за собой его B-суммируемость (или сходимость, если B — единичный метод) к той же сумме? Такие условия называют *тауберовыми условиями*.

В статье [41] проф. Г. Кангро вводит общее понятие суммируемости элементов векторного пространства и показывает независимость соответствующих точных тауберовых условий от порядка суммирования.

Пусть s — линейный оператор из подпространства L векторного пространства X в векторное пространство Y. Пусть линейный оператор A действует из подпространства $D_A \subset X$ в X. Элемент $x \in D_A$ называется *A-суммируемым* (или *суммируемым оператором A*) *к сумме S относительно L*, если $Ax \in L$ и $S = s(Ax)$. Элемент x называется *A-суммируемым порядка* $\alpha = 0, 1, \ldots$, если x суммируем оператором A^α, где предполагается, что $A^0 = E$ — единичный оператор пространства X и $A^1 = A$.

Пусть метод A является L-регулярным, т. е. $A(L) \subset L$ и $sx = s(Ax)$.

Теорема 2. *Из A-суммируемости порядка α относительно L элемента x следует его E-суммируемость к той же сумме тогда и только тогда, когда элемент x является $(E - A)$-суммируемым к нулю относительно L.*

Этот результат показывает, что точное тауберовс условие в теореме 2 не зависит от порядка α. Оно оказывается зависящим лишь от линейности и регулярности метода A.

Проф. Г. Кангро применяет теорему 2 к матричным методам суммирования обычных и двойных последовательностей, получая в обоих случаях точные тауберовы условия для сходимости. Из этих результатов вытекают, в частности, некоторые результаты Э. Реймерса (РЖ Мат, 1962, 5Б21) и К. М. Слепенчука (РЖ Мат, 1964, 9Б35, 11Б23; 1965, 3Б49, 4Б34, 11Б24, 12Б33; 1966, 3Б37, 10Б31; 1968, 7Б31; 1969, 9Б32).

В качестве применения теории множителей суммируемости Г. Кангро [47] нашел условия, при которых тауберовы условия можно ослабить, т. е. условия, при которых более сильное условие можно заменить более слабым тауберовым условием. Тем самым Г. Кангро установил некоторую связь между теориями множителей суммируемости и тауберовых теорем.

Приведем некоторые следствия из глубоких общих теорем статьи [47]. Пусть A и B — методы суммирования рядов (1), определенные некоторыми аддитивными (например, матричными) преобразованиями с полями суммируемости соответственно A^* и B^*, т. е.

$$A^* = \{x \in D_A : Ax \in L\}, \quad B^* = \{x \in D_B : Bx \in L\},$$

где L — векторное подпространство пространства X всех рядов (1).

Пусть T — некоторое множество рядов. Условие $x \in T$ Г. Кангро называет B-тауберовым для A, если $A^* \cap T \subset B^*$.

Пусть числа $\lambda_n \neq 0$, $\mu_n \neq 0$, причем $\overline{\Delta}\mu_n \neq 0$. Соответственно каждому ряду (1) образуем последовательность $\{\sigma_n\}$ с

$$\sigma_n = \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k.$$

Далее, если ϱ — множество рядов, то через r обозначим соответствующее ϱ множество последовательностей, т. е.

$$r = \{x : \sum \overline{\Delta}\xi_n \in \varrho\}.$$

Теорема 3. *Пусть $A \supset B$ и A совместен с B. Если*

1° $\{\mu_{n-1}/\lambda_n\}$ *является множителем суммируемости типа* (ϱ, B),

2° *условие* $\{\lambda_n u_n/\overline{\Delta}\mu_n\} \in r$ *является B-тауберовым для A, то условие $\{\sigma_n\} \in r$ также B-тауберово для A.*

Из теоремы 3 при $B^* = l$ вытекает

Следствие 1. *Пусть A — абсолютно регулярный аддитивный метод суммирования рядов. Если*[1]

1° $\mu_{n-1} = O(\lambda_n)$,

2° $\lambda_n u_n = a(\overline{\Delta}\mu_n)$ *является l-тауберовым для A, то условие $\sigma_n = a(1)$ также l-тауберово для A.*

Аналогичные теоремы проф. Г. Кангро доказал относительно тауберовых условий для методов суммирования последовательностей и функций с ограниченным изменением.

Частные случаи $B^* = c$ теоремы 3 рассматривали Квий (РЖМат, 1968, 10Б31), а также Мейер-Кёниг и Тийц (РЖМат, 1969, 1Б36, 7Б33; 1971, 8Б15).

Отметим, что, несмотря на большую общность и глубокое содержание теорем статьи [47], доказательства их просты, изящны и вытекают из одной общей леммы (из нее следует и теорема Левьятана (РЖМат, 1973, 4Б31).

Многие математики доказывали тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Рисса $P = (R, p_n)$, т. е. тауберовы теоремы для P^λ-суммируемости. Например, Морделль (1928) для метода $(C, 1)$, т. е. при $p_n = 1$, а для произвольных $p_n > 0$ — Хигаки (1935) и др. Однако все их результаты получены при различных искусственных ограничениях относительно скорости λ, зависящих от метода доказательства. В статье [53] Г. Кангро доказывает следующую тауберову теорему для P^λ-суммируемости в общем случае при естественном предположении относительно λ.

Теорема 4. *Если регулярный метод Рисса P с $p_n > 0$ и $P_n = O(P_{n-1})$ сохраняет λ-сходимость, то из P^λ-суммируемости ряда (1) и тауберова условия $\tau_n P_n u_n = O(p_n)$, где $\{\tau_n\}$ удовлетворяет условиям $1 \leqslant \lambda_n/\tau_n \uparrow$ и $\lambda_n \tau_n \uparrow$, следует μ-сходимость ряда (1) при $\mu_n = \{\lambda_n \tau_n\}^{1/2}$.*

---

[1] Запись $\xi_n = a(\varsigma_n)$ означает, что $\xi_n = o(\varsigma_n)$ и $\Sigma |\overline{\Delta}(\xi_n/\varsigma_n)| < \infty$.

Аналогичная теорема доказана в [53] для μ-ограниченности ряда (1), предполагая его P^λ-ограниченность, и такая же тауберова теорема при одностороннем тауберовом условии. При $\mu = \lambda$ теорема 4 доказана Г. Кангро в [51].

4. Применения к ортогональным рядам

В качестве применения теорем о множителях суммируемости Г. Кангро решает следующие проблемы.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортогональная система функций, определенных на отрезке $e = [a, b]$, а $A = (a_{nk})$ — регулярный метод суммирования, переводящий ортогональный ряд

$$\sum c_n \varphi_n(t) \tag{3}$$

с $\Sigma c^2_n < \infty$ в некоторую функциональную последовательность $\{\eta_n(t)\}$. В случае, когда $w = \{w_n\}$ с $0 < w_n \uparrow$ является множителем Вейля для A-суммируемости ряда (3) на $E \subset e$, т. е. в случае, когда из того, что $\Sigma c^2_n w_n < \infty$ вытекает A-суммируемость ряда (3) почти всюду на $E \subset e$ (например, при $A = (C, \alpha)$ с $\alpha > 0$, по теореме Меньшова — Качмажа $w_n = \ln^2 \ln n$) Г. Кангро [38, 46] получает следующий результат.

Пусть w — множитель Вейля для A-суммируемости ряда (3), *а $f \in L^2_e$ — функция, к которой ряд* (3) *сходится в среднем на E. Если λ такова, что $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ и*

$$\sum c^2_n w_n \lambda^2_n < \infty, \tag{4}$$

причем $\{1/\lambda_n\}$ является множителем суммируемости типа (A, A^λ), то $\{w_n \lambda^2_n\}$ является множителем Вейля для A^λ-суммируемости ряда (3). Таким образом, если $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, имеет место (4) и $\{1/\lambda_n\}$ — множитель суммируемости типа (A, A^λ), то почти всюду на $E \subset e$ ряд (3) является A^λ-суммируемым к функции f, т. е. почти всюду на E существует предел

$$\lim_n \lambda_n [\eta_n(t) - f(t)].$$

Эти вопросы для метода $(C, 1)$ рассматривали Медер (РЖМат, 1959, 10958) и Тандори (РЖМат, 1960, 8781), а также Алексич и Кралик (РЖМат, 1961, 10Б16). Для методов Рисса (R, p_n) и Валле-Пуссена эти вопросы рассматривали Лейндлер (РЖМат, 1964, 7Б73; 1965, 1Б79, 1Б85), для метода сумматорной функции $A(\psi)$, т. е. когда задана такая функция ψ с $\psi(0) = 1$, что

$$a_{nk} = \psi\left(\frac{k}{n+1}\right),$$

— А. В. Ефимов (РЖМат, 1966, 8Б113; 1967, 10Б109, 11Б99; 1969, 6Б110) и В. А. Болгов (РЖМат, 1971, 2Б89), а для методов класса A^p с $p > 1$, матрицы которых треугольны и удовлетворяют условиям

$$(n+1)^{p-1}\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|^p = O(1), \qquad a_{n0}=1,$$

— В. А. Болгов и А. В. Ефимов (РЖМат, 1969, 4Б106; 1972, 4Б111).

Позже [54, 55] оказалось, что требование, чтобы $\{1/\lambda_n\}$ была множителем суммируемости типа (A, A^λ), для широкого класса $\mathfrak{A}$ методов суммирования можно заменить более простым условием, чтобы A удовлетворял условию (2). Основой этого утверждения служит [2]

Теорема 5. *Пусть $\{\nu(n)\}$ — последовательность индексов, построенная для каждого числа $q \in (0, 1)$ по индукции следующим образом:*

$$\nu(0)=0, \qquad A_{\nu(n+1),\nu(n)} \leqslant q A_{\nu(n),\varkappa},$$

где $\varkappa$ — наименьшее значение индекса k, при котором $A_{\nu(n),k} \neq 0$.

Если $A \in \mathfrak{A}$ и скорость λ удовлетворяет условиям (2) *и*

$$\sum c^2{}_n \lambda^2{}_n < \infty, \tag{5}$$

то ряд (3) *регулярно A^λ-суммируем почти всюду тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда* (3) *регулярно сходится почти всюду со скоростью $\{\lambda_{\nu(n)}\}$.*

В класс $\mathfrak{A}$ входят, например, метод Чезаро (C, α) при $\alpha > 0$, разрывный метод Рисса (R^*, p_n, α) при $\alpha > 0$, обобщенный метод Валле-Пуссена (V, ν_n) при $\nu_n \uparrow$ и $\nu_{n+1} - \nu_n \leqslant 1$, метод сумматорной функции $A(\psi)$ с $\psi \in \mathrm{Lip}\, 1$, различные методы Хаусдорфа, метод A^p при $p > 1$ и многие другие.

Теорема 5 содержит в себе решение следующих важнейших проблем теории ортогональных рядов.

I. Пусть w является множителем Вейля для A-суммируемости ортогонального ряда (3). При каких условиях относительно λ последовательность $\{w_n\lambda^2{}_n\}$ является множителем Вейля для регулярной A^λ-суммируемости ряда (3)?

II. При каких условиях относительно λ последовательность $\{\lambda^2{}_n\}$ сама является множителем Вейля для регулярной A^λ-суммируемости ряда (3)?

III. При каких условиях, накладываемых на λ, методы A и B из $\mathfrak{A}$ равносильны относительно регулярной λ-суммируемости ряда (3) почти всюду, если имеет место (5)?

Например, решение проблемы I дается следующим следствием, вытекающим из теоремы 5.

[2] Теорема 5 излагается здесь в несколько упрощенном виде.

Следствие 2. *Пусть* $A \in \mathfrak{A}$ *и* λ *удовлетворяет условию* (2). *Если* $w = \{w_n\}$ *— множитель Вейля для* A*-суммируемости ряда* (3), *то* $\{w_n \lambda^2_n\}$ *— множитель Вейля для регулярной* A^λ*-суммируемости ряда* (3).

Аналогично из теоремы 5 получаются и решения проблем II и III.

Из этих результатов вытекают цитированные выше результаты Медера, Тандори, Алексича и Кралика, Лейндлера, Ефимова и Болгова.

Большая научно-педагогическая деятельность и преданность науке снискали профессору Г. Кангро высокий авторитет и глубокое уважение преподавателей и студентов математического факультета Тартуского государственного университета и математиков других ВУЗов СССР.

Вместе со всеми математиками ЭССР поздравляем проф. Г. Кангро с юбилейной датой и от всей души желаем ему дальнейших творческих радостей и больших успехов в его многогранной деятельности.

С. Барон, Э. Реймерс

Труды проф. Г. Кангро

1—28. См. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 3—11.
29. Kaasaegse algebra küsimustest. Loodus ja matemaatika, 1963, **3**, 85—95.
30. Professor Hermann Jaakson. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **4**, 3—8.
31. Kaasaegse matemaatilise analüüsi mõned iseloomulikud jooned. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **5**, 3—13.
32. Matemaatiline analüüs, I osa. Tallinn, 1965, 468 lk.
33. Bourbaki «Matemaatika elemendid». Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **9**, 3—9.
34. Mõned ridade teooria uurimissuunad. Eesti NSV 25-ndale aastapävale pühendatud III teaduslik-pedagoogilise konverentsi «Täppisteaduste arengu ja metoodika põhiküsimusi ENSV-s» ettekannete resümeed, 1965, 29—32.
35. Проф. Херман Яаксон. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 3—5.
36. Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 80—90 (совм. с Ю. Лампом).
37. Межвузовская летняя научная школа по теории суммируемости. Успехи матем. наук, 1967, **22**, № 1, 195—196.
38. О некоторых исследованиях по теории суммируемости. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1967, **16**, № 3, 255—266.
39. Integraal maailma kohal. Rahvusvaheline matemaatikute kongress Moskvas 1966. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **12**, 3—15 (kaasautorid Ü. Lumiste, O. Prinits, E. Tiit).
40. Jüri Nuudi elu ja teaduslik pärand. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **13**, 95—108 (kaasautorid Ü. Lumiste ja E. Tamme).
41. О независимости тауберовых условий от порядка суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 122—130.
42. Matemaatiline analüüs, II osa. Tallinn, 1968, 524 lk.
43. Järjestuse tähtsus analüüsis. IV teaduslik-pedagoogilise konverentsi «Täppisteadused ja haridus» ettekannete teesid, 1968, 21—23.

44. О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости. I. Изв, АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, **18**, № **2**, 137—146.
45. Summeeruvusteooria-alane suvekool Zaretšnõis. Matemaatika ja kaasaeg, 1968, **15**, 128—129.
46. О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости, II. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, **18**, № 4, 387—395.
47. Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1970, **19**, № 1, 24—33.
48. О развитии математики в Тартуском университете в 1964—1967 годы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 3—25 (совм. с Ю. Лумисте, Э. Тамме и др.)
49. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, **20**, № **2**, 111—120.
50. Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 136—154.
51. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 155—160.
52. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. II. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, **20**, № **4**, 375—385.
53. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 165—166.
54. О скорости суммируемости ортогональных рядов треугольными регулярными методами. I. Изв. ЭстССР. Физ., матем., 1974, **23**, № 1, 3—11.
55. О скорости суммируемости ортогональных рядов треугольными регулярными методами. II. Изв. ЭстССР. Физ., матем., 1974, **23**, № 2, 107—112.

ИГРА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕМАНТИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ БЕТА

А. Таутс

Кафедра математического анализа

В данной статье понятие высказывания, также и интерпретация высказываний в обобщенных моделях Бета понимается в смысле [1].

Игра состоится между двумя лицами, которых мы будем называть *детерминистом* и *индетерминистом*. Цель детерминиста — доказать, что данное высказывание тождественно истинно во всех обобщенных моделях Бета, цель индетерминиста — противоположная. Для этого исходят из предположения, что данное высказывание не имеет места в некотором аспекте некоторой обобщенной модели Бета. Детерминист пытается привести это предположение к противоречию, индетерминист, наоборот, пытается защитить это предположение.

1. Правила игры

В игре применяются следующие символы:

1) все символы, которые нужны для построения формул (см. [1]);

2) символы α, β, ..., которые называются аспектами;

3) символы ξ, η, ..., которые называются цепями;

4) символы $<$, $=:$ и —.

Выражениями называются записи следующих видов:

1) выражение вида $\alpha < \beta$; семантическое значение: «аспект β является конкретизацией аспекта α»;

2) выражение вида $\alpha =: \xi$; семантическое значение: «аспект α принадлежит цепи ξ»;

3) выражение вида $(P)_\alpha$, где P — константа; семантическое значение: «объект P существует в аспекте α»;

4) выражение вида $(\mathfrak{A})_\alpha$; здесь и в двух следующих правилах $\mathfrak{A}$ — высказывание; семантическое значение: «высказывание $\mathfrak{A}$ имеет место в аспекте α»;

5) выражение вида $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$; семантическое значение: «высказывание $\mathfrak{A}$ не имеет места в аспекте α»;

6) выражение вида $(\mathfrak{A})_{-\xi}$; семантическое значение: «высказывание $\mathfrak{A}$ не имеет места ни в одном аспекте цепи ξ».

Ситуацией называется любое множество выражений.

Игра состоит в том, что, начиная с некоторой исходной ситуации, ситуация изменяется по правилам I—XIX, данным ниже. При этом некоторые правила имеют разветвление. Это значит, что после применения данного правила возникает несколько, может быть, бесконечно много ситуаций, а может быть одна или даже ни одной. В ходе игры выбирает правило всегда детерминист, которое применяется в данной обстановке, а также и выражения из данной ситуации, на которые это правило применяется. Роль индетерминиста состоит только в выборе ветви для продолжения игры в случае разветвления.

Правила следующие:

I. Если в ситуации имеется α, то можно прибавить выражение $\alpha =:\xi$, где ξ — цепь, не встречающаяся в ситуации.

II. Если в ситуации имеются выражения $\alpha =:\xi$ и $\beta =:\xi$, то может происходить разветвление на две ветви, где в одной ветви к ситуации прибавлено выражение $\alpha < \beta$, а в другой — выражение $\beta < \alpha$.

III. Если в ситуации имеются выражение $\alpha < \beta$ и множество выражений вида $(P)_\alpha$, то можно прибавить соответствующее множество выражений вида $(P)_\beta$.

IV. Если в ситуации имеются выражения $\alpha < \beta$ и $(\mathfrak{A})_\alpha$, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A})_\beta$.

V. Если в ситуации имеется выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, то одновременно можно прибавить выражения $\alpha =:\xi$ и $(\mathfrak{A})_{-\xi}$, где ξ — цепь, не встречающаяся в ситуации.

VI. Если в ситуации имеются выражения $(\mathfrak{A})_{-\xi}$ и $\alpha =:\xi$, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$.

VII. Если в ситуации имеется выражение $(\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, то можно прибавить любое из выражений $(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$.

VIII. Если в ситуации имеется выражение $(\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, то может происходить разветвление через все значения ι, при этом в каждой ветви к ситуации прибавлено соответствующее выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$.

IX. Если в ситуации имеются выражения $(\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ и $\alpha =:\xi$, то можно прибавить выражение $\beta =:\xi$, где β — аспект, не встречающийся в ситуации, вместе с разветвлением через все значения ι, прибавляя ситуации в каждой ветви соответствующее выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_\beta$.

X. Если в ситуации имеется выражение $(\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, то можно прибавить любое из выражений $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$.

XI. Если в ситуации имеется выражение $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_\alpha$, то может происходить разветвление на две ветви, где в одной ветви к ситуации прибавлено выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, а в другой — выражение $(\mathfrak{B})_{\alpha}$.

XII. Если в ситуации имеется выражение $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})_{-\alpha}$, то одновременно можно прибавить выражения $\alpha<\beta$, $(\mathfrak{A})_{\beta}$ и $(\mathfrak{B})_{-\beta}$, где β — аспект, не встречающийся в ситуации.

XIII. Если в ситуации имеется выражение $(\neg\mathfrak{A})_{\alpha}$, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$.

XIV. Если в ситуации имеется выражение $(\neg\mathfrak{A})_{-\alpha}$, то одновременно можно прибавить к ситуации выражения $\alpha<\beta$ и $(\mathfrak{A})_{\beta}$, где β — аспект, не встречающийся в ситуации.

XV. Если в ситуации имеются выражение $(\forall\langle x'_{\iota}:\iota\in I\rangle\mathfrak{A})_{\alpha}$ и некоторое множество выражений вида $(P)_{\alpha}$ (при том же аспекте α), и если $\langle a'_{\iota}:\iota\in I\rangle$ — такое семейство термов, что каждый a'_{ι} имеет тип переменной x'_{ι}, не содержит свободных переменных и из констант содержит только указанные константы P, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A}')_{\alpha}$, где высказывание $\mathfrak{A}'$ получено из $\mathfrak{A}$ подстановкой термов a'_{ι}, $\iota\in I$, вместо переменных x'_{ι}.

XVI. Если в ситуации имеется выражение $(\forall\langle x'_{\iota}:\iota\in I\rangle\mathfrak{A})_{-\alpha}$, то одновременно можно прибавить выражение $\alpha<\beta$, множество выражений $(P_{\iota})_{\beta}$, $\iota\in I$, и выражение $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, где β — аспект, не встречающийся в ситуации, P_{ι}, $\iota\in I$, — константы типов переменных x'_{ι} и не встречающиеся в ситуации, а $\mathfrak{A}'$ получено из $\mathfrak{A}$ заменой переменных x'_{ι}, $\iota\in I$, константами P_{ι}.

XVII. Если в ситуации имеются выражения $(\exists\langle x'_{\iota}:\iota\in I\rangle\mathfrak{A})_{\alpha}$ и $\alpha=:\xi$, то одновременно можно прибавить выражение $\beta=:\xi$, множество выражений $(P_{\iota})_{\beta}$, $\iota\in I$, и выражение $(\mathfrak{A}')_{\beta}$, где β, P_{ι} при $\iota\in I$ и $\mathfrak{A}'$ такие же, как и в правиле XVI.

XVIII. Если в ситуации имеются $(\exists\langle x'_{\iota}:\iota\in I\rangle\mathfrak{A})_{-\alpha}$ и некоторое множество выражений вида $(P)_{\alpha}$ (при том же аспекте α), и если $\langle a'_{\iota}:\iota\in I\rangle$ — такое семейство термов, как в правиле XV, то можно прибавить $(\mathfrak{A}')_{-\alpha}$, где $\mathfrak{A}'$ получено так, как в правиле XV.

XIX. Если в ситуации имеются выражения $(P\langle a'_{\iota}:\iota\in I\rangle)_{\alpha}$ и $(P\langle b'_{\iota}:\iota\in I\rangle)_{-\alpha}$, где для тех $\iota\in I$, при которых $a'_{\iota}\neq b'_{\iota}$, a'_{ι} есть $\mathsf{d}\,\langle x'^{\iota}_{\eta}:\eta\in I_{\iota}\rangle\mathfrak{A}_{\iota}$, и b'_{ι} есть $\mathsf{d}\,\langle x'^{\iota}_{\eta}:\eta\in I_{\iota}\rangle\mathfrak{B}_{\iota}$, то можно прибавить выражение $\alpha<\beta$, где β — аспект, не встречающийся в ситуации, вместе с разветвлением через все те значения ι, при которых $a'_{\iota}\neq b'_{\iota}$. При этом каждое такое ι дает две ветви, где в обеих к ситуации будет прибавлено множество выражений $\{(c'^{\iota}_{\eta})_{\beta}:\eta\in I_{\iota}\}$, но в одной ветви прибавлены еще $(\mathfrak{A}'_{\iota})_{\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_{\iota})_{-\beta}$, а в другой $(\mathfrak{A}'_{\iota})_{-\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_{\iota})_{\beta}$. Здесь каждое c'^{ι}_{η}, $\eta\in I_{\iota}$, есть константа типа переменной x'^{ι}_{η}, не встречающаяся в ситуации, а $\mathfrak{A}'_{\iota}$ и $\mathfrak{B}'_{\iota}$ получены соответственно из $\mathfrak{A}_{\iota}$ и $\mathfrak{B}_{\iota}$ заменой переменных x'^{ι}_{η}, $\eta\in I_{\iota}$, константами c'^{ι}_{η}.

Цель детерминиста — добиться разветвления с пустым множеством ветвей, цель индетерминиста — избежать этого.

2. Характерные черты стратегий

Из правил I—XIX вытекает, что если в исходной ситуации имеется лишь конечное множество разных аспектов и цепей, то в ходе игры на каждом этапе их будет только конечное множество, так как никакое правило не позволяет прибавить бесконечное множество новых аспектов или цепей. Это имеет место и для множества всех выражений, кроме выражений вида $(P)_\alpha$, последние могут правилами XVI, XVII и XIX прибавляться в бесконечном количестве. В дальнейшем будем иметь в виду только такие ситуации, где аспектов, цепей и всех выражений, кроме выражений вида $(P)_\alpha$, имеется только конечное множество.

Пусть имеются две ситуации, которые будем обозначать через S_1 и S_2. Пусть имеется отображение f, которое каждым аспекту и цепи ситуации S_1 ставит в соответствие некоторый аспект, соответственно некоторую цепь ситуации S_2, и именно так, что для каждого выражения ситуации S_1 имеется в ситуации S_2 выражение, полученное от первого заменой аспектов и цепей их образами. При этом не требуется, чтобы отображение было бы взаимно однозначным. Если теперь начинать игру с исходной ситуации S_1, то каждый шаг этой игры можно дублировать в игре с исходной ситуацией S_2, применяя те же правила аналогичным образом на соответствующие выражения. Для этого надо в ходе игры продолжать отображение f на аспекты и цепи, которые возникают в ходе игры. Поэтому, если детерминист имеет стратегию выигрыша с исходной ситуацией S_1, то он имеет эту и с исходной ситуацией S_2. В случае существования такого f мы будем говорить, что ситуация S_2 сильнее ситуации S_1, а S_1 слабее, чем S_2.

Из этого результата следует, что детерминисту целесообразно применять правила I и V только в таком случае, если в ситуации нет выражения $\alpha = :\xi$ (соответственно пары выражений $\alpha = :\xi$ и $(\mathfrak{A})_{-\xi}$), так как в противном случае мы получили бы еще $\alpha = :\eta$ (соответственно $\alpha = :\eta$ и $(\mathfrak{A})_{-\eta}$) и полученная ситуация была бы слабее (в то же время и сильнее, определяя $f(\xi) = \xi$) исходной, так как можно взять $f(\xi) = \xi$, $f(\eta) = \xi$.

Вторым следствием является, что если в ситуации имеются аспекты α и β и если для каждого выражения, содержащего α, имеется такое же выражение с β — исключением могут быть только выражения $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, то все выражения, содержащие α, можно отбросить, не лишая при этом детерминиста стратегии выигрыша. Действительно, из определения $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \beta$ видно, что полученная ситуация была бы сильнее исходной, если в ней не отсутствовало бы выражение $\beta < \beta$. Но правила III и IV, применяющие выражения такого вида, имеют смысл только в том случае, если символ $<$ стоит между различными аспектами. Кроме того, выражение $\beta < \beta$ можно получить, прибавляя при помощи правила I выражение $\beta =: \xi$ и применяя затем правило II таким образом, что в качестве обоих аспектов будет β.

Теперь уже ясно, что без применения правил VII—XIX игра может продолжаться только конечное число операций, если детерминист не применяет правил, нецелесообразность которых вытекает из полученных здесь результатов. Действительно, правило VI применяется столько раз, сколько имеется пар выражений $(\mathfrak{A})_{-\xi}$ и $\alpha =: \xi$, при которых нет выражения $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$. Также правило V применяется столько раз, сколько есть выражений $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, при которых нет пар выражений $\alpha =: \xi$ и $(\mathfrak{A})_{-\xi}$. Затем применяется правило I для тех аспектов α данной ситуации, для которых пока нет выражения $\alpha =: \xi$. После этого, применяя конечное число раз правило II, получаем конечное число вѐтвей, так что в каждой ветви любые два аспекта одной и той же цепи соединены между собой символом $<$. Отметим, что если $\alpha < \beta$ находится уже в ситуации, то на эту пару применять правило II нет смысла, так как индетерминист все равно не будет выбирать ту ветвь, где еще прибавлено $\beta < \alpha$. После этого остается в любой ветви применить правила III и IV конечное число раз, так как пар аспектов имеется только конечное число.

Так как лишнее применение некоторого правила детерминисту никак не вредит, то можно без ограничения общности предположить, что перед применением некоторого из правил VII—XIX детерминист совершает все указанные применения правил I—VI.

Ситуацию будем называть 1-детерминированной, если детерминист может выиграть, применяя правила I—VI и один раз одно из правил VII—XIX (это может быть только правило VIII, IX или XIX).

Если $\varkappa$ — такой ординал, что для всех $\iota < \varkappa$ понятие ι-детерминированности уже определено, то ситуацию будем называть $\varkappa$-детерминированной, если детерминист может, применяя только правила I—VI и только один раз некоторое из правил VII—XIX, добиться ι-детерминированной ситуации с $\iota < \varkappa$. В случае разветвления значение ординала ι может зависеть от ветви, но во всех ветвях оно должно быть меньше $\varkappa$. Ясно, что стратегия выигрыша существует для детерминиста тогда и только тогда, когда ситуация $\varkappa$-детерминирована при некотором ординале $\varkappa$.

Пусть теперь в ситуации имеются выражения $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Теперь без ограничения общности можно предполагать существующим и $\alpha < \gamma$, так как оно понадобится только для применения правил III и IV. Но использование выражения $\alpha < \gamma$ можно заменить и использованием выражений $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Итак, всегда можно предполагать, что учтена транзитивность отношения $<$.

Предположим, что детерминист применил правило IX или XVII. В результате этого возникает ситуация (в случае правила IX после выбора ветви со стороны индетерминиста), где прибавлены $\beta = :\xi$ и $(\mathfrak{A}_\iota)_\beta$ (соответственно $\beta = :\xi$, $\{(P_\iota)_\beta : \iota \in I\}$ и $(\mathfrak{A}')_\beta$). Пусть γ — произвольный такой аспект, что в ситуации уже было выражение $\gamma = :\xi$ (в роли γ может быть и аспект α, примененный только что правилом IX или XVII). В ходе применений правил I—VI, следующих за применением данного правила, надо применить и правило II, в ходе которого возникают две ветви, содержащие соответственно выражения $\gamma < \beta$ и $\beta < \gamma$. После этого прибавляются применениями правил III и IV в первой ветви такие выражения $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{B})_\beta$, при которых уже имеются $(Q)_\gamma$ и $(\mathfrak{B})_\gamma$, а во второй ветви прибавляется $(\mathfrak{A}_\iota)_\gamma$ в случае правила IX, соответственно $\{(P_\iota)_\gamma : \iota \in I\}$ и $(\mathfrak{A}')_\gamma$ в случае правила XVII. Но теперь, если не считать отсутствие выражения $\gamma < \gamma$, вторая ветвь сильнее первой, так как f можно определить равенствами $f(\beta) = \gamma$, $f(\gamma) = \gamma$. Обратное не верно, так как g с $g(\gamma) = \beta$ и $g(\beta) = \beta$ не удовлетворяет условиям, так как в ситуации может существовать выражение $(\mathfrak{B})_{-\gamma}$, но выражения $(\mathfrak{B})_{-\beta}$ в первой ветви не будет. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что индетерминист выбирает первую ветвь. Значит, всегда стоит исследовать только ту ветвь, где аспект, прибавленный правилом IX или XVII, следует всем тем аспектам данной цепи, которые были в ситуации до применения этого правила.

Случаи возникновения новых ситуаций в результате применения правил VII—XIX можно разделить на следующие пять групп.

В первую группу входят правило VII, вторая ветвь после применения правила XI, и правило XV. Эта группа характеризуется тем, что нового аспекта не возникает, а прибавляется некоторое выражение вида $(\mathfrak{A})_\alpha$, где α — аспект, уже существующий в ситуации. Из правил I—VI следует после этого применить только, может быть, правило IV, а именно, прибавляя $(\mathfrak{A})_\beta$, если имеется выражение $\alpha < \beta$, и, может быть, прибавляя $(\mathfrak{A})_\gamma$, если имеется еще $\beta < \gamma$ и т. д.

Во вторую группу входят правила VIII и X, первая ветвь после применения правила XI, правила XIII и XVIII. Здесь тоже нового аспекта не возникает, а прибавляется выражение вида $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ для аспекта α, уже существующего в ситуации. Из правил I—VI следует после этого применить только правило V, и только один раз.

В третью группу входят правила IX и XVII. В результате применения этих правил прибавляется выражение вида $\beta = :\xi$, где ξ — цепь, уже существующая в ситуации, а β — аспект, входящий только что в игру. Кроме того прибавляется выражение вида $(\mathfrak{A})_\beta$ и, в случае правила XVII, и множество выражений вида $(P)_\beta$. Из правил I—VI следует после этого применить правило II, в результате чего возникают выражения вида $\gamma < \beta$ (ведь мы рассмотрим только эту ветвь), затем правила III и IV, прибавляя выражения вида $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{B})_\beta$, и наконец, может быть, правило VI, прибавляя $(\mathfrak{C})_{-\beta}$, если в ситуации имелось $(\mathfrak{C})_{-\xi}$.

Четвертая группа состоит из правил XII, XVI и XIX. Здесь прибавляются выражения вида $\alpha < \beta$ и $(\mathfrak{B})_{-\beta}$, причем аспект α уже имеется в ситуации, а аспект β — нет. Кроме того может прибавляться выражение вида $(\mathfrak{A})_\beta$ и множество выражений вида $(P)_\beta$. Из правил I—VI следует после этого применить правила III и IV, прибавляя выражения вида $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$, и один раз правило V, прибавляя пару выражений $\beta =\, :\xi$ и $(\mathfrak{B})_{-\xi}$.

Наконец, пятая группа состоит только из правила XIV. В ходе применения этого правила прибавляются выражения $\alpha < \beta$ и $(\mathfrak{A})_\beta$, где аспект α уже имеется в ситуации, а аспект β — нет. Это правило отличается от правил четвертой группы тем, что не возникает выражения вида $(\mathfrak{B})_{-\beta}$. Из правил I—VI следует после применения этого правила применить правила III и IV, прибавляя выражения вида $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$, и один раз правило I, прибавляя выражение $\beta =\, :\xi$.

3. Игра с ограничениями

Теперь определим другую игру, которую будем называть *игрой с ограничениями.* Эта игра отличается от первой только тем, что детерминист имеет право применять правила VII—XIX только в ситуации, которая удовлетворяет следующим ограничениям: ситуация содержит некоторое (может быть, пустое) множество выражений вида $(\mathfrak{A})_\alpha$ и $(P)_\alpha$, кроме того, может быть одно выражение вида $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ и одно выражение вида $\alpha =\, :\xi$, в случае, если оба последних выражения имеются в ситуации, то там может быть и выражение $(\mathfrak{B})_{-\xi}$. Здесь α должен во всех выражениях быть один и тот же аспект, это имеет место также и для ξ и $\mathfrak{B}$ в трех последних выражениях. Для того, чтобы применить некоторое из правил VII—XIX в игре с ограничениями, детерминист должен перед этим из ситуации отбросить некоторые выражения, если это окажется нужным, чтобы удовлетворить ограничениям.

Ясно, что ограничения могут мешать только детерминисту, так как индетерминисту всякое сужение ситуации всегда полезно. Возникает вопрос: насколько существенны эти ограничения? Может ли при некоторой исходной ситуации отсутствовать для детерминиста стратегия выигрыша в игре с ограничениями, хотя она существует в игре без ограничений при той же исходной ситуации. Применяем индукцию по рангу детерминированности.

Для 1-детерминированной ситуации вопрос тривиальный. Ведь перед применением правил VIII, IX или XIX, дающим разветвление с пустым множеством ветвей, можно отбросить все выражения, кроме тех, которые применяет правило. Но остающиеся выражения уже удовлетворяют ограничениям.

Пусть $\varkappa$ — такой ординал, что для всех $\iota < \varkappa$ детерминист может в любой ι-детерминированной ситуации выиграть игру с ограничениями. Пусть у нас имеется некоторая $\varkappa$-детерминированная ситуация. Если к ней применить правила I—VI в вышеуказанном порядке, то после этого каждую ветвь, получившуюся с помощью правила II (ведь в некоторых случаях стоит все-таки исследовать обе ветви), можно превратить в ι-детерминированную ситуацию с $\iota < \varkappa$, применяя некоторые из правил VII—XIX. В случае же правила с разветвлением все ветви должны иметь ранг детерминированности меньше $\varkappa$. Рассмотрим все случаи правил VII—XIX.

Рассмотрим правила VII и XV. Ими прибавляется выражение вида $(\mathfrak{A})_\alpha$. Получается ι-детерминированная ситуация с $\iota < \varkappa$. Теперь, как известно, применяя правило IV, могут прибавиться выражения $(\mathfrak{A})_\beta$, $(\mathfrak{A})_\gamma$ и т. д. Так как теперь уже, по предположению, игра выигрываема для детерминиста уже с ограничениями, то теперь можно ввести ограничения. Конечно, с введением ограничений должно сохраняться одно из выражений $(\mathfrak{A})_\alpha$, $(\mathfrak{A})_\beta$, $(\mathfrak{A})_\gamma$ и т. д., иначе мы тривиальным образом могли бы ввести ограничения и перед применением правила. Пусть сохраняется, например, выражение $(\mathfrak{A})_\beta$. Для получения выражения $(\mathfrak{A})_\alpha$ правилом VII или XV понадобились некоторые выражения вида $(\mathfrak{B})_\alpha$ и $(P)_\alpha$. Но так как в результате применения правил III и IV в нашем распоряжении находятся и выражения $(\mathfrak{B})_\beta$ и $(P)_\beta$, то можно применить ограничения уже до применения правила VII или XV, только с той разницей, что вместо $(\mathfrak{A})_\beta$ сохраняются выражения $(\mathfrak{B})_\beta$ и $(P)_\beta$, а затем применить правило VII или XV с аспектом β вместо α. Значит, имеется стратегия выигрыша для данной $\varkappa$-детерминированной ситуации.

Рассмотрим правила VIII, X, XIII и XVIII. Этими правилами прибавляется выражение вида $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ (в случае разветвления рассмотрим произвольную ветвь), в результате чего получается ι-детерминированная ситуация с $\iota < \varkappa$. Затем с помощью правила V прибавляются выражения $\alpha = :\xi$ и $(\mathfrak{A})_{-\xi}$. Теперь, по предположению, игра выигрываема уже с ограничениями. Конечно, выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ должно сохраниться (в случае разветвления в каждой ветви), иначе игра тривиальным образом была бы выигрываема с ограничениями уже до применения правила VIII, X, XIII или XVIII. Но указанные правила получают выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, используя выражения вида $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ или $(\mathfrak{B})_\alpha$ и еще может быть, некоторое множество выражений вида $(P)_\alpha$. Поэтому можно уже до применения данного правила ввести ограничения, только сохраняя вместо $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ исходные для правила выражения (в случае разветвления надо сохранить все выражения вида $(\mathfrak{C})_\alpha$ и $(P)_\alpha$, которые сохраняются хотя бы в одной ветви), затем применить правило, а после этого вторичным введением ограничений отбросить $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$, если это выражение использовалось правилом. Итак, игра с ограничениями выигрываема и до применения правила.

Рассмотрим правило XI. В ситуации имеется $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})_\alpha$, в ходе применения правила XI прибавляется в первой ветви выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, во второй ветви выражение $(\mathfrak{B})_\alpha$. Первая ветвь ι_1-детерминирована, вторая ι_2-детерминирована с $\iota_1 < \varkappa$, $\iota_2 < \varkappa$. В первой ветви правилом V прибавляются выражения $\alpha = :\xi$ и $(\mathfrak{A})_{-\xi}$, во второй правилом IV — выражения $(\mathfrak{B})_\beta$, $(\mathfrak{B})_\gamma$ и т. д. В обеих ветвях, по предположению, детерминист может выиграть игру с ограничениями. В первой ветви должно сохраниться выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, во второй ветви одно из прибавленных выражений, например $(\mathfrak{A})_\beta$. Имеем в виду, что из-за правила IV в нашем распоряжении находится и выражение $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})_\beta$. Теперь введем до применения правила XI ограничения следующим образом. Оставляем все выражения, которые должны сохраниться во второй ветви, только вместо $(\mathfrak{B})_\beta$ будет $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})_\beta$. Кроме того, для всех выражений вида $(P)_\alpha$ или $(\mathfrak{C})_\alpha$, которые должны сохранятся в первой ветви, теперь оставляем $(P)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$ (ведь эти выражения тоже в нашем распоряжении из-за правил III и IV). Затем применяем правило XI. После этого вторичным ограничением удаляем из первой ветви выражение вида $(\mathfrak{C})_{-\beta}$, которое сохраняется во второй ветви, если такое существует.

Рассмотрим правила IX и XVII. Этими правилами прибавляются (в случае правила IX в каждой ветви) выражения $\beta = :\xi$, $(\mathfrak{A})_\beta$ и, может быть, множество выражений вида $(P)_\beta$. Получается ι-детерминированная ситуация с $\iota < \varkappa$. Потом правилами II, III, IV и VI прибавляются выражения вида $\gamma < \beta$, $(Q)_\beta$, $(\mathfrak{B})_\beta$ и $(\mathfrak{C})_{-\beta}$. По предположению, теперь детерминист может и выиграть игру с ограничениями. Разумеется, в каждой ветви должны сохраняться только прибавленные выражения, иначе проблема была бы тривиальна. Само правило IX или XVII использовало пару выражений вида $(\mathfrak{D})_\alpha$ и $\alpha = :\xi$.

Теперь введем ограничения уже до применения правила IX или XVII. Для этого выбираем из таких аспектов γ, для которых имеется выражение $\gamma = :\xi$ до применения данного правила, такой, который следует в смысле $<$ всем остальным аспектам такого типа. Такой γ существует из-за правила II и учета транзитивности отношения $<$. Для такого γ имеются выражения $(\mathfrak{D})_\gamma$, $(Q)_\gamma$ и $(\mathfrak{B})_\gamma$, благодаря правилам III и IV, и $(\mathfrak{C})_{-\gamma}$ из-за правила VI. Теперь введем ограничения, сохраняя эти выражения, а потом применим правило IX или XVII на $(\mathfrak{D})_\gamma$ вместо $(\mathfrak{D})_\alpha$. Итак, и с данной $\varkappa$-детерминированной ситуацией игра с ограничениями выигрываема для детерминиста.

Рассмотрим правила XII, XVI и XIX. Этими правилами прибавляются выражения вида $\alpha < \beta$ и $(\mathfrak{B})_{-\beta}$ и, может быть, $(\mathfrak{A})_\beta$ и $(P)_\beta$. Потом правилами III, IV и V прибавляются выражения вида $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$ и одна пара выражений $\beta =: \xi$ и $(\mathfrak{B})_{-\xi}$. Теперь уже, по предположению, детерминист может выиграть и с ограничениями. Конечно, сохраняться могут только прибавленные выражения, иначе проблема была бы тривиальна. Указанные правила используют выражение вида $(\mathfrak{D})_{-\alpha}$ (правило XIX, кроме того, выражение вида $(\mathfrak{D}')_\alpha$). Кроме того, в ситуации существуют все выражения $(Q)_\alpha$ и $(\mathfrak{C})_\alpha$. Но теперь можно ввести ограничения уже до применения указанного правила, сохраняя выражения $(\mathfrak{D})_{-\alpha}$, $(\mathfrak{D}')_\alpha$ (в случае правила XIX), $(Q)_\alpha$ и $(\mathfrak{C})_\alpha$. Затем применяем указанное правило. Следовательно, и в этом случае игра с ограничениями выигрываема для детерминиста с данной $\varkappa$-детерминированной ситуацией.

Наконец, рассмотрим правило XIV. В ходе применения этого правила прибавляются выражения $\alpha < \beta$ и $(\mathfrak{A})_\beta$, используя выражение $(\neg\mathfrak{A})_{-\alpha}$. После этого, правилом I прибавляется выражение $\beta =: \xi$ и правилами III и IV — выражения вида $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$, если $(Q)_\alpha$ и $(\mathfrak{C})_\alpha$ уже имеются в ситуации. Теперь, по предположению, игра с ограничениями выигрываема для детерминиста. Если проблема не тривиальна, то сохраняются только выражения $(\mathfrak{A})_\beta$, $(Q)_\beta$ и $(\mathfrak{C})_\beta$. Но теперь можно ввести ограничения уже до применения правила XIV, сохраняя $(\neg\mathfrak{A})_{-\alpha}$ и все выражения вида $(Q)_\alpha$ и $(\mathfrak{C})_\alpha$. После этого применяем правило XIV. Итак, и теперь с данной $\varkappa$-детерминированной ситуацией детерминист может выиграть игру с ограничениями.

Итогом предложенного рассуждения является следующая

Лемма. *Если детерминист имеет стратегию выигрыша для игры без ограничений с данной исходной ситуацией, то он имеет стратегию выигрыша и для игры с ограничениями с той же исходной ситуацией.*

4. Построение вывода при помощи стратегии

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое высказывание. *Исходной ситуацией высказывания* $\mathfrak{A}$ называем ситуацию, состоящую из выражения $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ и множества выражений вида $(P)_\alpha$ (с тем же аспектом α), где P пробегает все константы высказывания $\mathfrak{A}$.

Предположим, что исходная ситуация некоторого высказывания $\mathfrak{A}$ окажется такой, что детерминист имеет стратегию выигрыша. Ставим себе цель: по этой стратегии построить вывод высказывания $\mathfrak{A}$ в смысле [2].

Так как по лемме игры без ограничений и с ограничениями эквивалентны, то мы можем выбирать стратегию выигрыша для игры с ограничениями.

Определим отображение, ставящее каждой ситуации, удовлетворяющей ограничениям, в соответствие некоторую секвенцию.

Если ситуация удовлетворяет ограничениям, то она содержит некоторое множество выражений вида $(\mathfrak{A})_\alpha$ и $(P)_\alpha$ и может быть одно выражение вида $\alpha =: \xi$, одно выражение $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ и одно выражение $(\mathfrak{B})_{-\xi}$. Мы можем еще предполагать, что если некоторое высказывание в ситуации содержит некоторую константу Q, то среди выражений вида $(P)_\alpha$ имеется и $(Q)_\alpha$. Это условие, действительно, выполняется в течение всей игры, если оно выполняется в исходной ситуации и если $(Q)_\alpha$ сохранить введением ограничений. Тогда такой ситуации ставим в соответствие секвенцию $\mu \vdash \mathfrak{B}$, где μ — множество всех указанных высказываний $\mathfrak{A}$. Если выражения $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ нет в ситуации, то секвенция будет иметь вид $\mu \vdash \bigvee \varnothing$. Приложение секвенции состоит из всех указанных констант P.

Мы можем предполагать, что стратегия игры с ограничениями не содержит разветвлений, причиненных правилом II, так как в исходной ситуации высказывания $\mathfrak{A}$ нет пар выражений $\alpha =: \xi$ и $\beta =: \xi$, а в дальнейшем такие пары могут возникнуть только в результате применения правил IX и XVII, а в этом случае, как отмечено, выбор ветви можно считать определенным.

Исходная ситуация высказывания $\mathfrak{A}$ является ситуацией с ограничениями. Такими же являются и ситуации в данной стратегии перед каждым применением любого из правил VII—XIX. Каждой из этих ситуаций соответствует некоторая секвенция. Построим выводы этих секвенций, применяя индукцию по рангу детерминированности.

Пусть у нас имеется 1-детерминированная ситуация. В этом случае в ситуации имеется или выражение вида $(\bigwedge\varnothing)_{-\alpha}$, или $(\bigvee\varnothing)_\alpha$, или пара выражений вида $(P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle)_\alpha$ и $(P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle)_{-\alpha}$. Соответствующая секвенция есть в первом случае $\mu \vdash \bigwedge\varnothing$, во втором случае $\mu \vdash \mathfrak{B}$, где $\bigvee\varnothing \in \mu$, а в третьем случае $\mu \vdash P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle$, где $P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle \in \mu$.

Секвенция $\mu \vdash \bigwedge\varnothing$ выводима при помощи правила 1а), так как в случае пустого I в этом правиле над чертой ничего нет. Секвенцию $\mu \vdash \mathfrak{B}$, где $\bigvee\varnothing \in \mu$, можно выводить следующим образом. Во-первых, $\mu \vdash \bigvee\varnothing$ выводима непосредственно. После этого применяем правило 2б) с пустым множеством I.

Секвенция $\mu \vdash P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle$, где $P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle \in \mu$, выводима непосредственно.

Пусть теперь $\varkappa$ — такой ординал, что все секвенции, соответствующие ситуациям с ограничениями, ранг детерминированности которых меньше $\varkappa$, выводимы. Пусть у нас имеется $\varkappa$-детерминированная ситуация с ограничениями. В этом случае существует некоторое из правил VII—XIX, которое после его применения, а также правил I—VI и после введения ограничений дает ι-детерминированную ситуацию с ограничениями, где $\iota < \varkappa$. В случае разветвления, это имеет место в каждой ветви. По предположению, полученным ситуациям соответствуют выводимые секвенции. Исследуем выводимость секвенции, соответствующей данной $\varkappa$-детерминированной ситуации.

Рассмотрим использование правила VII. Секвенция, соответствующая ситуации до применения правила, имеет вид $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{C}$. После применения правила получаем ситуацию, которой соответствует секвенция $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota, \mathfrak{A}_{\iota_0}\} \vdash \mathfrak{C}$. Приложения обеих секвенций одинаковые. Пусть последняя секвенция выводима. Секвенции $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota$ и $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} \in \nu$, с тем приложением выводимы непосредственно. Тогда по правилу 1б) секвенция $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{A}_{\iota_0}$ с тем же приложением выводима. Применяя правило 0, получаем $\nu \cup \{\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением.

Рассмотрим использование правила VIII. Тогда секвенция, соответствующая ситуации до применения правила, имеет вид $\mu \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota$. После применения правила и введения ограничений в каждой ветви, получаем разветвление через все значения ι, где в каждой ветви имеется ситуация, которой соответствует секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A}_\iota$. Приложения всех этих секвенций совпадают с приложением исходной секвенции $\mu \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota$. Пусть все эти секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}_\iota$ выводимы. Тогда по правилу 1а) и секвенция $\mu \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota$ с тем же приложением выводима.

Рассмотрим использование правила IX. Тогда секвенция, соответствующая ситуации до применения правила, имеет вид $\nu \cup \{\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{C}$. Если теперь применить правило IX, а затем в каждой ветви правила II, III, IV и, может быть, VI и ввести ограничения, то получается разветвление через все значения ι, а в каждой ветви имеется ситуация, которой соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota, \mathfrak{A}_{\iota_0}\} \vdash \mathfrak{C}$. Приложения всех этих секвенций совпадают с приложением исходной секвенции. Пусть все полученные секвенции выводимы. Секвенция $\nu \cup \{\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota$ с тем же приложением выводима непосредственно. Тогда по правилу 2б) секвенция $\nu \cup \{\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением тоже выводима.

Пусть использовано правило X. В этом случае ситуации до применения правила соответствует секвенция вида $\mu \vdash \bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota$. После применения правила X и введения ограничений получается ситуация, которой соответствует секвенция вида $\mu \vdash \mathfrak{A}_{\iota_0}$ с тем же приложением. Пусть эта последняя секвенция выводима. Тогда по правилу 2а) выводима и секвенция $\mu \vdash \bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota$ с тем же приложением.

Пусть использовано правило XI. Тогда ситуации до применения правила соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{C}$. После применения правила возникают две ветви. В первой ветви после введения ограничений возникает ситуация, которой соответствует секвенция $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{A}$, а ситуации во второй ветви соответствует секвенция $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{C}$. Приложения всех трех секвенций совпадают. Пусть две последние из этих трех секвенций выводимы. Секвенции $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{D}$ при всех $\mathfrak{D} \in \nu$ выводимы непосредственно с тем же приложением. По правилу 3б) выводима и секвенция $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{B}$ с тем же приложением. Наконец, применяя правило 0, получим секвенцию $\nu \cup \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением.

В случае правила XII ситуации до применения правила соответствует секвенция вида $\mu \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. После применения правила XII, а затем правил III и IV возникает ситуация, которой соответствует секвенция вида $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}$. Приложения обеих секвенций одинаковые. Пусть последняя секвенция выводима. Тогда по правилу 3а) выводима и секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ с тем же приложением.

В случае правила XIII, до применения правила ситуации соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$. После применения правила и введения ограничений возникает ситуация, которой соответствует секвенция $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{A}$ с тем же приложением. Пусть последняя секвенция выводима. Секвенции $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}\} \vdash$ $\vdash \neg\mathfrak{A}$ и $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}$ при всех $\mathfrak{B} \in \nu$ выводимы непосредственно с тем же приложением. По правилу 4б) получим $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением. Наконец, применяя правило 0, получаем секвенцию $\nu \cup \{\neg\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$.

Пусть использовано правило XIV. До применения правила ситуации соответствует $\mu \vdash \neg\mathfrak{A}$. После применения данного правила, а затем правил III и IV возникает ситуация, которой соответствует секвенция вида $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \bigvee \varnothing$. Приложения обеих секвенций одинаковые. Пусть последняя секвенция выводима. Теперь применим правило 2б) таким образом, что под чертой будет секвенция $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \neg\bigvee\varnothing$, а над чертой секвенция $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \bigvee\varnothing$ и пустое множество секвенций с μ, $\mathfrak{A}$ и дизъюнктивным членом дизъюнкции $\bigvee\varnothing$ на левой стороне, а с $\neg\bigvee\varnothing$ на правой стороне. Приложения секвенций $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \neg\bigvee\varnothing$ и $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \bigvee\varnothing$ совпадают с вышеуказанным приложением. После этого из секвенций $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \neg\bigvee\varnothing$ и $\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \bigvee\varnothing$, применяя правило 4а), получаем секвенцию $\mu \vdash \neg\mathfrak{A}$ с тем же приложением.

Рассмотрим использование правила XV. В этом случае до применения правила ситуации соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$. После применения правила ситуации соответствует секвенция $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением, где высказывание $\mathfrak{A}'$ получено из формулы $\mathfrak{A}$ подстановкой термов, содержащих из констант только константы приложения, вместо переменных $x'_\iota, \iota \in I$. Пусть последняя секвенция выводима. Непосредственно выводимы секвенции $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$ и $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}$ при всех $\mathfrak{B} \in \nu$, а по правилу 5б) и секвенция $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{A}'$, все имеющие вышеуказанное приложение. Тогда по правилу 0 выводима и секвенция $\nu \cup \{\forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$ с тем же приложением.

Рассмотрим использование правила XVI. До применения правила ситуации соответствовала секвенция вида $\mu \vdash \forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$, а после применения данного правила, правил III и IV и введения ограничений ситуации соответствует секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ получено из $\mathfrak{A}$ заменой переменных $x'_\iota, \iota \in I$, константами P_i тех же типов, не входящими ни в секвенцию $\mu \vdash \forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$, ни в ее приложение. Приложение секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}'$ состоит из констант приложения секвенции $\mu \vdash \forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$ и констант $P_i, \iota \in I$. Предположим, что секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A}'$ выводима. То, по правилу 5а) выводима и секвенция $\mu \vdash \forall\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$ со своим приложением, так как в случае правила 5а) допускается такое применение правила, где над чертой имеются константы $P_\iota, \iota \in I$, которых нет под чертой.

В случае использования правила XVII до применения правила ситуации соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$. После применения правила XVII, а затем правил II, III и IV и, может быть, VI возникает ситуация, которой соответствует секвенция вида $\nu \cup \{\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{A}'$ и приложение последней секвенции получены так же, как и в случае с правилом XVI. Пусть последняя секвенция выводима. Секвенция $\nu \cup \{\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$ с первоначальным приложением выводима непосредственно. Тогда по правилу 6б) выводима и секвенция $\nu \cup \{\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{C}$ с первоначальным приложением, так как в случае правила 6б) допускается существование констант P_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, в секвенции $\nu \cup \{\exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{C}$ и в ее приложении, хотя их нет под чертой.

Пусть использовано правило XVIII. До применения правила ситуации соответствует секвенция вида $\mu \vdash \exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$, а после применения правила и введения ограничений — секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ получено из $\mathfrak{A}$ таким же образом, как в случае с правилом XV. Приложения обеих секвенций совпадают. Пусть секвенция $\mu \vdash \mathfrak{A}'$ выводима. Тогда по правилу 6а) и секвенция $\mu \vdash \exists\langle x'_\iota : \iota \in I\rangle\mathfrak{A}$ с тем же приложением выводима.

Пусть, наконец, использовано правило XIX. Тогда до применения правила ситуации соответствует секвенция вида $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle\} \vdash P\langle b'_\iota : \iota \in I\rangle$, где в случае $a'_\iota \neq b'_\iota$ термы a'_ι и b'_ι имеют вид $\mathsf{d}\langle x'^\iota_\eta : \eta \in I_\iota\rangle\mathfrak{A}_\iota$ и $\mathsf{d}\langle x'^\iota_\eta : \eta \in I_\iota\rangle\mathfrak{B}_\iota$ соответственно. После применения правила XIX, а затем применения правил III и IV и введения ограничений в каждой ветви, возникают ситуации, которым соответствуют секвенции $\nu \cup \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle, \mathfrak{A}'_\iota\} \vdash \mathfrak{B}'_\iota$ или $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle, \mathfrak{B}'_\iota\} \vdash \mathfrak{A}'_\iota$, где $\mathfrak{A}'_\iota$ и $\mathfrak{B}'_\iota$, получены из $\mathfrak{A}_\iota$ и $\mathfrak{B}_\iota$, соответственно заменой переменных x'^ι_η, $\eta \in I_\iota$, константами c'^ι_η, $\eta \in I_\iota$, не входящими ни в секвенцию $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle\} \vdash P\langle b'_\iota : \iota \in I\rangle$, ни в ее приложение. Приложения обеих секвенций $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle, \mathfrak{A}'_\iota\} \vdash \mathfrak{B}'_\iota$ и $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle, \mathfrak{B}'_\iota\} \vdash \mathfrak{A}'_\iota$ получены из приложения первоначальной секвенции прибавлением констант c'^ι_η, $\eta \in I_\iota$. Пусть при всех $\iota \in I$ обе последние секвенции выводимы. То по правилу 7 выводима и секвенция $\nu \cup \{P\langle a'_\iota : \iota \in I\rangle\} \vdash P\langle b'_\iota : \iota \in I\rangle$ с первоначальным приложением.

Таким образом, мы доказали, что если для всех $\iota < \varkappa$ каждой ι-детерминированной ситуации с ограничениями соответствует выводимая секвенция, то и $\varkappa$-детерминированной ситуации с ограничениями соответствует выводимая секвенция. Отсюда индукцией по рангу детерминированности вытекает, что если для исходной ситуации данного высказывания детерминист имеет стратегию выигрыша, то секвенция, соответствующая данной исходной ситуации, выводима. Но эта секвенция имеет вид $\vdash \mathfrak{A}$ и ее приложение состоит из всех констант высказывания $\mathfrak{A}$. Кроме того, секвенция $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$ с тем же приложением выводима непосредственно. Если теперь применить правило 0 таким образом, что над чертой будут секвенции $\vdash \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$ с указанным приложением, а под чертой секвенция $\vdash \mathfrak{A}$ с пустым приложением, то и последняя секвенция окажется выводимой, так как высказывание $\mathfrak{A}$ содержит все константы приложения. Итак, имеет место

Теорема. *Если детерминист имеет стратегию выигрыша для исходной ситуации высказывания $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ выводимо.*

Литература

1. Таутс А., Семантическая интерпретация формул в обобщенных моделях Бета и в псевдо-блуевых алгебрах. Уч. зап. Тартсук. ун-та, 1972, **305**, 9—20.
2. Таутс А., Формальный вывод тавтологичных высказываний в псевдобулевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **336**, 3—30.

Поступило
15 III 1973

MÄNG VALEMITE SEMANTIKA KONSTRUEERIMISEKS ÜLDISTATUD BETHI MUDELITES

A. Tauts

Resümee

Artiklis defineeritakse mäng kahe isiku vahel, keda nimetatakse deterministiks ja indeterministiks. Determinist püüab näidata, et antud valem on üldistatud Bethi mudelites tautoloogiline, s. o. kehtib igas aspektis artikli [1] mõttes. Selleks püüab ta oletust, et valem mõne üldistatud Bethi mudeli mõnes aspektis ei kehti, vastuoluni viia. Indeterminist püüab teda selles takistada. Tõestatakse, et kui deterministil on olemas võidustrateegia, siis on valem tuletatav artikli [2] mõttes.

DAS SPIEL ZUM KONSTRUIEREN DER SEMANTIK DER FORMELN IN VERALLGEMEINERTEN BETH-MODELLEN

A. Tauts

Zusammenfassung

In dem Artikel wird ein Spiel zwischen zwei Personen, die Determinist und Indeterminist genannt werden, definiert. Der Determinist will zeigen, daß die gegebene Formel in verallgemeinerten Beth-Modellen tautologisch ist, d. h. sie gilt unter jedem Aspekt im Sinn des Artikels [1]. Dafür versucht er die Annahme, daß die Formel unter irgendeinem Aspekt irgendeiner verallgemeinerten Beth-Modelle nicht gilt, zum Widerspruch zu bringen. Der Indeterminist versucht ihn daran zu verhindern. Es wird bewiesen, daß wenn der Determinist eine Strategie des Sieges hat, ist die Formel im Sinn des Artikels [2] ableitbar.

ДВА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Я. Габович

Эстонская сельскохозяйственная академия

В диофантовом анализе все больше внимания уделяется следующей проблеме. Пусть F — некоторый многочлен с целочислеными коэффициентами и без свободного члена. Если доказано, что на множестве натуральных чисел диофантово уравнение $F = 0$ не имеет нетривиальных решений, то при каких целочисленных k решается уравнение[1] $F = k$? И, в частности, решаются ли уравнения $F = \pm 1$? Для случая $F = x^3 + y^3 - z^3$ последняя задача подробно рассматривалась в работах Морделла [4], Лемера [3] и Подсыпанина [2]. Демьяненко [1] занимался многочленом $F = x^4 - y^4 + z^2$. Он доказал, что уравнение

$$x^4 - y^4 + z^2 = 1 \qquad (1)$$

имеет бесконечное множество нетривиальных решений (здесь тривиальными являются решения $x = y = n$, $z = 1$; $n = 1, 2, \ldots$). В настоящей заметке доказывается, что уравнение

$$x^4 - y^4 + z^2 = -1 \qquad (2)$$

также имеет бесконечное множество решений. Кроме того рассматривается случай $F = x^4 + y^4 - z^2$ и доказывается, что число нетривиальных решений уравнения

$$x^4 + y^4 - z^2 = 1 \qquad (3)$$

бесконечно.[2] Вопрос о решаемости диофантова уравнения

$$x^4 + y^4 - z^2 = -1 \qquad (4)$$

остается открытым.

---

[1] Имеются в виду нетривиальные решения уравнения $F = k$. Тривиальные решения определяются особо в каждой конкретной задаче.

[2] На множестве натуральных чисел уравнение (2) не имеет тривиальных решений. Тривиальными решениями уравнения (3) являются $x = 1$, $y = n$, $z = n^2$, а также $x = n$, $y = 1$, $z = n^2$; $n = 1, 2, \ldots$.

§ 1. Уравнение (2)

В работе [1] найдено решение диофантова уравнения $x^4 = y^4 + z^4 + t^2$, где искомые x, y, z, t выражены через параметры u и v. Ввиду сложности соответствующих формул, мы их здесь не приводим, отсылая читателя к самой статье (в ней эти формулы, к сожалению, не пронумерованы; см. [1], стр. 42).

Проделаем над формулами Демьяненко следующие преобразования. Во-первых, применим подстановку

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ y & t & x & z \end{pmatrix},$$

в результате чего придем к уравнению

$$x^4 - y^4 + z^2 = -t^4. \qquad (5)$$

Во-вторых, пусть в формулах Демьяненко $u = -2$. Тогда получим следующее решение уравнения (5):

$$\begin{aligned} x &= 2v^2 + 26v - 44, \\ y &= 3v^2 + 129, \\ z &= 8v^4 - 44v^3 - 560v^2 - 268v - 16\,528, \\ t &= v^2 - 32v - 1. \end{aligned}$$

В-третьих, применим преобразование $v = 16 + p/q$. После освобождения от знаменателей придем к следующему решению уравнения (5):

$$\begin{aligned} x &= 2p^2 + 90pq + 884q^2, \\ y &= 129q^2 + 3(p + 16q)^2, \\ z &= 4(2p^4 + 117p^3q + 2404p^2q^2 + 19\,773pq^3 + 44\,972q^4), \\ t &= p^2 - 257q^2. \end{aligned}$$

Для получения отсюда решений уравнения (2) достаточно удовлетворить условию $|t| = 1$, т. е. мы должны решить уравнение Пелля

$$|p^2 - 257q^2| = 1. \qquad (6)$$

Последнее, как известно, имеет бесконечную последовательность решений (p_n, q_n), получаемую из формулы

$$(16 + \Theta)^n = p_n + q_n\Theta,$$

где $\Theta = 257^{1/2}$, а n — любое *целое* число. Каждое решение уравнения (6) приводит к одному решению уравнения (2).

Примеры.

$n = 0$, $p_0 = 1$, $q_0 = 0$; $x = 2$, $y = 3$, $z = 8$.

$n = -1$, $p_{-1} = -16$, $q_{-1} = 1$; $x = 44$, $y = 129$, $z = 16\,528$.

$n = 1$, $p_1 = 16$, $q_1 = 1$; $x = 2836$, $y = 3201$, $z = 6\,348\,272$.

§ 2. Уравнение (3)

Будем исходить из легко доказываемого тождества

$$(13u)^4+(13v)^4-(119u^2+120v^2)^2=(120u^2-119v^2)^2. \tag{7}$$

Для доказательства бесконечности числа решений уравнения (3) достаточно показать, что это же обстоятельство имеет место для диофантова уравнения

$$120u^2-119v^2=1. \tag{8}$$

Пусть $\alpha = 120^{1/2}$, $\beta = 119^{1/2}$. При любом натуральном n имеем

$$(\alpha+\beta)^{2n-1}=u_n\alpha+v_n\beta, \tag{9}$$

где u_n и v_n — натуральные числа. Переходя в равенстве (9) к нормам, получаем

$$120u_n^2-119v_n^2=1, \tag{10}$$

т. е. бесконечное множество решений уравнения (8). Если теперь принять

$$x_n=13u_n, \quad y_n=13v_n, \quad z_n=119u_n+120v_n,$$

то из (7) и (10) следует, что

$$x_n^4+y_n^4-z_n^2=1,$$

чем и доказана бесконечность множества решений уравнения (3). Для начальных значений n вычисления приводят к слещим численным данным:

$$u_1=1, \quad v_1=1; \quad x_1=13, \quad y_1=13, \quad z_1=239.$$

$$u_2=477, \ v_2=479; \ x_2=6201, \ y_2=6227, \ z_2=54\,608\,871.$$

Отметим, что наш метод не дает полного решения уравнения (3). Так, например, он не приводит к наименьшему нетривиальному решению $x = 5$, $y = 7$, $z = 55$.

Литература

1. Демьяненко В. А., О гипотезе Л. Эйлера. Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1968, 3(70), 37—42.
2. Подсыпанин В. Д., Об уравнении $x^3+y^3+z^3=1$. Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та. Матем. кафедр., 1968, 4—9.
3. Lehmer, D. H., On the diophantine equation $x^3+y^3+z^3=1$. J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 275—280.
4. Mordell, L. J., On sums of three cubes. J. London Math. Soc., 1942, **17**, № 2, 139—144.

Поступило
11 VI 1973

KAKS NELJANDA ASTME DIOFANTILIST VÕRRANDIT

J. Gabovitš

Resümee

On tõestatud, et diofantilistel võrranditel (2) ja (3) on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid.

TWO DIOPHANTINE EQUATIONS OF DEGREE FOUR

J. Gabovitch

Summary

In view of the fact, that none of the diophantine equations $x^4 - y^4 + z^2 = 0$, $x^4 + y^4 - z^2 = 0$ have solutions in natural numbers it is of interest to investigate the diophantine equations (1) — (4). Demyanenko [1] proved that the equation (1) has infinitely many nontrivial solutions. In the present note the same is proved to be true for the equations (2) and (3). In the case of (2) we proceed from equation (5) and show that it has infinitely many solutions with $|t| = 1$. The proof for equation (3) is based on the identity (7). The question whether or not the equation (4) is solvable remain undecided.

СХОДИМОСТЬ ПРИ ПОМОЩИ НАПРАВЛЕННОСТЕЙ

Т. Кельдер

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение.

1. Один из способов введения топологических понятий является аксиоматическое определение сходимости. Такой подход встречается уже у Куратовского [3]. Из более поздних работ отметим, например, [4, 5, 9]. Во всех этих работах применяются только счетные последовательности, что является существенным ограничением. Фильтры для определения сходимости использовали Фишер [6] и Кент [8]. Однако существует еще одна возможность — определить сходимость при помощи направленностей [1], например, в работах [7, 10]. Настоящая работа является еще одной попыткой определения понятия сходимости при помощи направленностей. Цель работы — получить понятие сходимости, которая была бы наиболее близка понятию сходимости Фишера.

2. Определение 1.1. *Пределом на каком-то множестве X в смысле Фишера называется отображение τ из множества X в множество всех подмножеств множества всех фильтров пространства X такое, чтобы были выполнены следующие условия* (см. [6], § 1, определение 2):

(L'_1) *При любой $x \in X$ множество фильтров τx есть $\wedge$-идеал, т. е. если $\mathfrak{F} \in \tau x$ и $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$, то и $\mathfrak{G} \in \tau x$, а если $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \tau x$, тогда и $\mathfrak{H} \in \tau x$, где $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$.*

(L'_2) *При любой $x \in X$ тривиальный x-ультрафильтр $\dot{x} \in \tau x$.*

Если $\mathfrak{F} \in \tau x$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ *сходится* к точке x. Множество X вместе с пределом τ называется *предельным пространством* (X, τ).

3. Во втором параграфе настоящей работы определяются предельные пространства, они сравниваются с предельными пространствами в смысле Фишера и топологическими пространст-

[1] Вместо слова «направленность» в литературе встречаются также названия «обобщенная последовательность», «направленное семейство», «последовательность Мура — Смита» или «сеть». «Направленность» взята из русского перевода книги Келли [2].

вами, даются некоторые топологические понятия для предельных пространств. В третьем параграфе рассматриваются понятия непрерывного отображения, произведения и факторпространства предельных пространств. В последнем параграфе изучаются предельные группы.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений [2].

Пространства: X, Y, Z; подмножества пространств: A, B, F, G, H, M, N; направленные множества: C, D, E; индексные множества: I, J. Элементы некоторого множества обозначаются соответствующей маленькой буквой. Отображения: α, β, γ, φ, χ; пределы: ω, μ, ν, τ; системы множеств, фильтры: $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$; направленности: $\{\boldsymbol{R}, C\}$, $\{\boldsymbol{S}, D\}$, $\{\boldsymbol{T}, E\}$ или просто $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$.

Множество образов при отображении направленности $\{\boldsymbol{S}, D\}$ обозначим через $\{\boldsymbol{S}d : d \in D\}$. Множество всех подмножеств множества X обозначим через $P(X)$, множество всех фильтров $F(X)$, множество всех направленностей из направленного множества D в множество X через X^D.

§ 2. Предельные пространства

1. *Направленностью* $\{\boldsymbol{S}, D\}$ в множестве X называется отображение из направленного [3] множества D в множество X, т. е. $\boldsymbol{S} : D \to X$. Говорят, что направленность *находится в множестве* $A \subset X$ *с некоторого момента*, если существует $d_0 \in D$ такая, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_0\} \subset A$. Говорят, что направленность *часто встречается с множеством* A, если для каждого $d_0 \in D$ найдется элемент $d_1 \in D$ такой, что $d_1 \geqslant d_0$ и $\boldsymbol{S}d_1 \in A$ (см. [2], стр. 95). Направленность $\{\boldsymbol{T}, E\}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{\boldsymbol{S}, D\}$, если существует отображение $\boldsymbol{N} : E \to D$, где $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{N}$, и при произвольной $d \in D$ найдется $e_1 \in E$ такая, что $e \geqslant e_1$ влечет за собой $\boldsymbol{N}e \geqslant d$ (см. [2], стр. 102).

Определение 2.1. *Направленность* $\{\boldsymbol{T}, E\}$ *называется псевдоподнаправленностью направленности* $\{\boldsymbol{S}, D\}$, *если существует система отображений* $\{\boldsymbol{N}_i\}_{i \in J}$, *где* $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{T}$ *при каждой* $i \in J$ *и при любой* $d \in D$, *найдутся* $e_1 \in E$ *и* $i \in J$ *такие, что из* $e \geqslant e_1$ *вытекает* $\boldsymbol{N}_i e \geqslant d$.

Каждая поднаправленность является и псевдоподнаправленностью, но не наоборот. Направленность часто встречается с некоторым множеством тогда и только тогда, когда у нее найдется поднаправленность, которая находится в этом множестве. Если

[2] Некоторые понятия определяются позднее.

[3] Множество D называется *направленным*, если в нем задано бинарное отношение $\geqslant$, называемое *направлением*, которое рефлексивно, транситивно и удовлетворяет условию:

Если $d_1, d_2 \in D$, то найдется $d_3 \in D$, для которого $d_3 \geqslant d_1$ и $d_3 \geqslant d_2$.

направленность находится с некоторого момента в множестве A, тогда находится с некоторого момента в множестве A и любая ее псевдоподнаправленность.

Определение 2.2. *Направленность $\{\boldsymbol{R}, C\}$ называется наднаправленностью направленностей $\{\boldsymbol{S}, D\}$ и $\{\boldsymbol{T}, E\}$, если выполняются следующие требования:*

1° *Направленности $\{\boldsymbol{S}, D\}$ и $\{\boldsymbol{T}, E\}$ являются псевдоподнаправленностями направленности $\{\boldsymbol{R}, C\}$, т. е. существуют системы отображений $\{\boldsymbol{N}_i\}_{i\in I}$ и $\{\boldsymbol{M}_j\}_{j\in J}$, где $\boldsymbol{N}_i : D\to C$ и $\boldsymbol{M}_j : E\to C$ такие, что выполняется требование псевдоподнаправленности.*

2° $\{\bigcup\limits_{i\in I}\boldsymbol{N}_i(D)\}\cup\{\bigcup\limits_{j\in J}\boldsymbol{M}_j(E)\}=C$.

3° *При любых $e_1\in E$ и $d_1\in D$ найдутся $c_1, c_2\in C$ такие, что из $\boldsymbol{N}_i e\geqslant c_1$ следует $e\geqslant e_1$ и из $\boldsymbol{M}_j d\geqslant c_2$, следует $d\geqslant d_1$ для любых $i\in I$ и $j\in J$, где эти условия выполнены.*

З а м е ч а н и е. Определение псевдоподнаправленности гарантирует, что при любой $c\in C$ найдется некоторая $i\in I$ такое, что $\boldsymbol{N}_i e\geqslant c$ выполнено при некоторой $e\in E$, т. е. множество

$$\bigcup_{i\in I}\{\boldsymbol{N}_i e : \boldsymbol{N}_i e\geqslant c\}\neq\varnothing.$$

Понятие наднаправленности, а также предложение 2.1 можно при помощи индукции обобщить и на произвольное конечное число направленностей.

Предложение 2.1. *Для любых двух направленностей найдется наднаправленность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\boldsymbol{S}, D\}$ и $\{\boldsymbol{T}, E\}$ — две направленности. Рассмотрим множества

$$C'=(D\times E, 1)=\{(d, e, 1) : (d, e)\in D\times E\},$$
$$C''=(D\times E, 2)=\{(d, e, 2) : (d, e)\in D\times E\},$$

где $D\times E$ — декартово произведение направленных множеств D и E.

Очевидно $C'\cap C''=\varnothing$. Обозначим $C=C'\cup C''$, и определим в множестве C направление. Скажем, что $(d_1, e_1, x_1)\geqslant(d_2, e_2, x_2)$, где $x_1, x_2\in\{1, 2\}$, тогда и только тогда, когда $(d_1, e_1)\geqslant(d_2, e_2)$ в смысле произведений $D\times E$. Так как $D\times E$ — направленное множество, то направленным будет и множество C. Положим

$$\boldsymbol{R}(d, e, x)=\begin{cases}\boldsymbol{S}d, & \text{если } (d, e, x)\in C'\\ \boldsymbol{T}e, & \text{если } (d, e, x)\in C''.\end{cases}$$

Покажем, что $\boldsymbol{R}$ и есть наднаправленность направленностей $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$.

Определим отображения $\boldsymbol{N}_e$ и $\boldsymbol{M}_d$:

$$\boldsymbol{N}_e : D\to C,\qquad \boldsymbol{N}_e d=(d, e, 1)$$
$$\boldsymbol{M}_d : E\to C,\qquad \boldsymbol{M}_d e=(d, e, 2)$$

Здесь $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{N}_e=\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{M}_d=\boldsymbol{T}$ при каждом $\boldsymbol{N}_e$ и $\boldsymbol{M}_d$.

Пусть $\{d_1, e_1, x\} \in C$. Тогда найдется $d_1 \in D$ такое, что из $d \geqslant d_1$ следует $N_{e_1}d = (d, e_1, 1) \geqslant (d_1, e_1, x)$. Значит, $\boldsymbol{S}$ — псевдоподнаправленность направленности $\boldsymbol{R}$. Аналогично и $\boldsymbol{T}$ является псевдоподнаправленностью направленности $\boldsymbol{R}$. Пусть, далее, $(d, e, x) \in C$. Для конкретности предположим, что $x = 1$. Тогда найдется N_e такое, что $N_e d = (d, e, 1)$. Наконец, если $d_1 \in D$ — произвольная точка и $N_e d = (d, e, 1) \geqslant (d_1, e_1, 1)$, то и $d \geqslant d_1$ — по определению направления на C. Аналогично проверяется выполнение требования 3° и для $\boldsymbol{T}$, что и завершает доказательство.

2. **Определение 1.3.** *Отображение ω, которое ставит в соответствие каждой $x \in X$ некоторое семейство ωx направленностей в множестве X, называется пределом на множестве X, если выполняются следующие условия:*

(L_1) *При произвольной $x \in X$ и направленном множестве D направленность*[4] *$\{\boldsymbol{S}, D\}$, где $\boldsymbol{S}d = x$ при $d \in D$, принадлежит семейству ωx.*

(L_2) *Если $\boldsymbol{S} \in \omega x$, то любая ее псевдоподнаправленность $\boldsymbol{R} \in \omega x$.*

(L_3) *Если $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \omega x$, то и любая их наднаправленность $\boldsymbol{R} \in \omega x$.*

Если $\boldsymbol{S} \in \omega x$, то говорят, что направленность $\boldsymbol{S}$ *сходится к точке x по пределу ω.* Пара (X, ω) называется *предельным пространством.*

Следствие. *Если $\{\boldsymbol{S}, D\} \in \omega x$, то и $\{\boldsymbol{S}', D \times E\} \in \omega x$, где $\boldsymbol{S}'(d, e) = \boldsymbol{S}d$ при любом направленном множестве E.*

Доказательство. По определению предела $\{\boldsymbol{X}, E\} \in \omega x$ при любом E. Если образовать наднаправленность $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{X}$ по конструкции, приведенной в доказательстве предложении 2.1, то $\boldsymbol{S}'$ является поднаправленностью такой направленности. По условию (L_3) такая направленность сходится к x, значит и $\boldsymbol{S}' \in \omega x$ по (L_2).

3. Для сравнения полученных пределов с пределами в смысле Фишера пригодятся следующие два вспомогательных результата.

Лемма 1. *Если $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{S}, D\}$ — направленность в множестве X, система $\mathfrak{F}$ из всех таких подмножеств множества X, где направленность $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента, есть фильтр.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathfrak{F}$ и $A \supset F$. Тогда и $A \in \mathfrak{F}$, ибо найдется $d_0 \in D$, такая, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_0\} \subset F \subset A$. Пусть, далее, $F, G \in \mathfrak{F}$, т. е. найдутся $d_1, d_2 \in D$ такие, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_1\} \subset F$ и $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_2\} \subset G$. Множество D направленное, значит, найдется d_3, где $d_3 \geqslant d_1$ и $d_3 \geqslant d_2$.

---

[4] В дальнейшем такая направленность называем просто *постоянной направленностью* и обозначаем через $\{\boldsymbol{X}, D\}$ или $\boldsymbol{X}$.

Тогда $\{Sd : d \geqslant d_3\} \subset F$ и $\{Sd : d \geqslant d_3\} \subset G$, откуда $\{Sd : d \geqslant d_3\} \in F \cap G$, и, значит, $F \cap G \in \mathfrak{F}$. Наконец, ни одна направленность не может находится в пустом множестве, т. е. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — фильтр.

Пусть $\mathfrak{F} \in F(X)$ и $D = \{(x, F) : x \in F, \ F \in \mathfrak{F}\}$. Положим $(y, G) \geqslant (x, F)$, если $G \subset F$. Тогда $\geqslant$ является направлением на D, ибо $\mathfrak{F}$ — фильтр. Определим направленность $\{\boldsymbol{S}, D\}$, где $\boldsymbol{S}(x, F) = x$.

Лемма 2. *Фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из тех и только тех множеств, где направленность $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента.*

Доказательство. Пусть A — некоторое множество, где $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента, т. е. найдется $(x_1, F_1) \in D$ такая, что $\{\boldsymbol{S}(x, F) : (x, F) \geqslant (x_1, F_1)\} \subset A$. По определению направленности $\boldsymbol{S}$ отсюда выводим, что $F_1 \subset A$, откуда $A \in \mathfrak{F}$. Пусть, наоборот, $A \in \mathfrak{F}$. Тогда $\{\boldsymbol{S}(x, F) : (x, F) \geqslant (x_1, A)\} \subset A$, где $x_1 \in A$ произвольна. В таком случае $\boldsymbol{S}$ находится в множестве A, начиная с места (x_1, A).

Рассмотрим сейчас отображение ψ, ставящее каждой направленности в соответствие фильтр из всех множеств, где эта направленность находится, начиная с некоторого момента. По леммам 1 и 2 такое отображение найдется и будет сюръективным. Но в общем случае это отображение не инъективно, т. е. одному и тому же фильтру может соответствовать несколько направленностей.

Предложение 2.2. *При любом пределе ω отображение $\psi \circ \omega = \tau$ есть предел в смысле Фишера. Таким путем можно получить каждый предел Фишера.*

Доказательство. 1. Покажем, что $\psi \circ \omega = \tau$ есть предел Фишера.

При любой $x \in X$ и направленном множестве D семейству ωx принадлежит $\{\boldsymbol{X}, D\}$. Система всех множеств, где $\boldsymbol{X}$ находится с некоторого момента есть x-ультрафильтр, т. е. $\dot{x} \in \omega x$ при любой $x \in X$ и, следовательно, удовлетворено (L'_2).

Докажем, что если $\mathfrak{F} \in \tau x$ и $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$, то и $\mathfrak{G} \in \tau x$. Пусть $\mathfrak{F} \in \tau x$ и $\mathfrak{G} \geqslant \mathfrak{F}$. Значит, найдется $S \in \omega x$ такая, что $\psi \circ S = \mathfrak{F}$.

а) Направленность $\boldsymbol{S}$ встречается часто с любым множеством $G \in \mathfrak{G}$. Предположим, наоборот, что найдется множество $G_1 \in \mathfrak{G}$ и $\boldsymbol{S}$ не встречается часто с множеством G_1. Тогда $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента в дополнении $\complement G_1$ множества G_1. А тогда и $\complement G_1 \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Значит, $G_1 \cap \complement G_1 = \varnothing \in \mathfrak{G}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{G}$ — фильтр.

б) Положим $E = \{(d, G) : d \in D, \ G \in \mathfrak{G}, \ Sd \in G\}$. Пусть $(d_1, G_1) \geqslant (d_2, G_2)$, если $d_1 \geqslant d_2$ и $G_1 \subset G_2$. Определим отображение $\boldsymbol{N} : E \to D$ формулой $\boldsymbol{N}(d, G) = d$. Тогда $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{N}$ есть поднаправленность, которая находится с некоторого момента в любом множестве фильтра $\mathfrak{G}$ (см. [2], стр. 102). Фильтр $\mathfrak{G}$ состоит из всех множеств, в которых $\boldsymbol{T}$ находится с некоторого момента. Пусть A — произвольное такое множество. Тогда найдется $(d_1, G_1) \in E$ такая, что $\{\boldsymbol{T}(d, G) : (d, G) \geqslant \geqslant (d_1, G_1)\} \subset A$. По определению

$$\{\boldsymbol{T}(d, G) : (d, G) \geqslant (d_1, G_1)\} \in G_1.$$

Рассмотрим множество

$$F = (A \cap G_1) \cup \{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_1, \ \boldsymbol{S}d \notin G_1\}.$$

Тогда $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_1\} \subset F$ и, значит, $F \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$; тогда и $F \cap G_1 = A \cap G_1 \in \mathfrak{G}$. Так как $A \cap G_1 \subset A$, то получили, что $A \in \mathfrak{G}$ и $\psi \circ \boldsymbol{T} = \mathfrak{G}$. Направленность $\boldsymbol{T} \in \omega x$ как поднаправленность направленности $\boldsymbol{S}$. Отсюда и $\mathfrak{G} \in \tau x$.

Остается доказать, что $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \tau x$ влечет за собой и $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} \in \tau x$. Если $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \tau x$, то найдутся направленности $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \omega x$, где $\psi \circ \boldsymbol{S} = \mathfrak{F}$, и $\psi \circ \boldsymbol{T} = \mathfrak{G}$. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, то $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся с некоторого момента в любом множестве фильтра $\mathfrak{H}$. Легко убедиться, что $\mathfrak{H}$ состоит из всех множеств, где $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся с некоторого момента. Действительно, если $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся с некоторого момента в множестве A, то $A \in \mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{G}$, откуда $A \in \mathfrak{H}$. Пусть $\boldsymbol{R}$ — наднаправленность для $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$. Тогда $\boldsymbol{R} \in \omega x$ и $\psi \circ \boldsymbol{R} \in \tau x$, где фильтр $\psi \circ \boldsymbol{R}$ состоит из всех множеств, где $\boldsymbol{R}$ находится с некоторого момента. Значит, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся с некоторого момента в каждом множестве фильтра $\psi \circ \boldsymbol{R}$. Значит, $\psi \circ \boldsymbol{R} \subset \mathfrak{H}$, откуда по предыдущей части нашего доказательства $\mathfrak{H} \in \tau x$ и τ есть предел в смысле Фишера.

2. Пусть τ — произвольный предел в смысле Фишера. При любой $x \in X$ положим $\omega x = \{\boldsymbol{S} : \psi \circ \boldsymbol{S} \in \tau x\}$. Тогда $\psi \circ \omega = \tau$. Покажем, что ω предел. Для этого проверим выполнение условий (L_1), (L_2) и (L_3).

Так как $\psi \circ \boldsymbol{X} = x^{\cdot}$ при произвольной постоянной направленности и всегда $x^{\cdot} \in \tau x$, то каждая постоянная направленность $\boldsymbol{X} \in \omega x$, т. е. (L_1) выполнено.

Пусть $\boldsymbol{S} \in \omega x$, т. е. найдется фильтр $\mathfrak{F} \in \tau x$, где $\psi \circ \boldsymbol{S} = \mathfrak{F}$. Каждая псевдоподнаправленность $\boldsymbol{T}$ направленности $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента в любом множестве фильтра $\mathfrak{F}$. Фильтр $\psi \circ \boldsymbol{T}$ состоит из всех множеств, где направленность $\boldsymbol{T}$ находится с некоторого момента. Значит, $\mathfrak{F} \leqslant \psi \circ \boldsymbol{T}$ и $\psi \circ \boldsymbol{T} \in \tau x$. А тогда $\boldsymbol{T} \in \omega x$, и, следовательно (L_2) имеет место.

Пусть $\{\boldsymbol{S}, D\}$, $\{\boldsymbol{T}, E\} \in \omega x$, т. е. найдутся фильтры $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \tau x$, где $\psi \circ \boldsymbol{S} = \mathfrak{F}$ и $\psi \circ \boldsymbol{T} = \mathfrak{G}$. Пусть $\{\boldsymbol{R}, C\}$ — произвольная наднаправленность направленностей $\{\boldsymbol{S}, D\}$ и $\{\boldsymbol{T}, E\}$. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \in \tau x$. Пусть $A \in \mathfrak{H}$ — произвольное множество. Направленности $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся в множестве A с некоторого момента. Значит, найдется $d_1 \in D$ такая, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_1\} \subset A$. Так как $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{S}$ при любом $i \in I$, то получим, что $\{\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{N}_i d : d \geqslant d_1\} \subset A$. По определению наднаправленности найдется $c_1 \in C$ такая, что при $\boldsymbol{N}_i d \geqslant c_1$ верно $d \geqslant d_1$ для каждой $i \in I$, для которой это требование имеет смысл. Значит

$$\bigcup_{i \in I} \{\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{N}_i d : \boldsymbol{N}_i d \geqslant c_1\} \subset A.$$

Аналогично найдется c_2 такая, что

$$\bigcup_{j \in J} \{R \circ \boldsymbol{M}_j e : \boldsymbol{M}_j e \geqslant c_2\} \subset A.$$

Так как C — направленное множество, то найдется $c_3 \geqslant c_1$ и $c_3 \geqslant c_2$. Тогда

$$H_1 = \bigcup_{i \in I} \{\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{N}_i d : \boldsymbol{N}_i d \geqslant c_3\} \subset A,$$

$$H_2 = \bigcup_{j \in J} \{\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{M}_j e : \boldsymbol{M}_j e \geqslant c_3\} \subset A.$$

Пусть $\boldsymbol{R}c$ — произвольный элемент множества $\{\boldsymbol{R}c : c \geqslant c_3\}$. По условию 2° в определении 2.2 должен в множествах D или E быть хоть один элемент, отображающийся при отображении некоторой функцией из семейств $\{\boldsymbol{N}_i : i \in I\}$ или $\{\boldsymbol{M}_j : j \in J\}$, в элемент c.

Для конкретности предположим, что $c = \boldsymbol{N}_i d$. Так как $c \geqslant c_3$, то получим, что $\boldsymbol{R}c \in H_1$. Если $c = \boldsymbol{M}_j e$, то $\boldsymbol{R}c \in H_2$. Итак, $\{\boldsymbol{R}c : c \geqslant c_3\} \subset H_1 \cup H_2 \subset A$, и направленность $\boldsymbol{R}$ находится с некоторого момента в любом множестве фильтра $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{H} \subset \psi \circ \boldsymbol{R}$, откуда $\psi \circ \boldsymbol{R} \in \tau x$ и $\boldsymbol{R} \in \omega x$, что и завершает доказательство.

4. **Определение 2.4.** *Пусть (X, ω) — предельное пространство. Множество $A \subset X$ мы называем открытым, если при произвольной $x \in A$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$ направленность $\boldsymbol{S}$ находится в множестве A с некоторого момента.*

Предложение 2.3. *Совокупность всех открытых множеств $\mathfrak{M}_\omega$, при некоторой ω, является топологией. Таким образом можно определить все топологии множества X.*

Доказательство. 1. Очевидно $X \in \mathfrak{M}_\omega$, ибо все направленности находятся в множестве X. В пустом множестве не найдется ни одного элемента, при котором условие открытого множества не выполнено. Поэтому можем считать $\varnothing \in \mathfrak{M}_\omega$. Рассмотрим произвольную систему открытых множеств $\{M_i\}_{i \in I}$. Пусть $x \in M = \bigcup \{M_i : i \in I\}$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$. Тогда найдется $j \in I$ такой, что $x \in M_j$, и, так как M_j — открытое множество, то $\boldsymbol{S}$ находится в множестве M_j с некоторого момента, а тогда и в множестве M. Следовательно, $M \in \mathfrak{M}_\omega$. Пусть, далее, $M, N \in \mathfrak{M}_\omega$ и $M \cap N \neq \varnothing$. Пусть $x \in M \cap N$ и $\{\boldsymbol{S}, D\} \in \omega x$. Тогда найдутся $d_1, d_2 \in D$ такие, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_1\} \subset M$ и $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_2\} \subset N$. Множество D направленное. Значит, найдется d_3, где $d_3 \geqslant d_1$ и $d_3 \geqslant d_2$, причем $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_3\} \subset M \cap N$, откуда $M \cap N \in \mathfrak{M}_\omega$.

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — система открытых множеств некоторой топологии в множестве X. При произвольной $x \in X$ обозначим через ωx совокупность всех направленностей, которые сходятся к x при этой топологии. Легко убедиться, что ω — предел. Действительно, аксиомы (L_1) и (L_2) следуют непосредственно из определения сходимости. Но во второй части доказательства предложения 2.2 мы показывали, что, если направленности $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ находятся в каком-то множестве с некоторого момента, то находится с некоторого момента в этом множестве и любая их наднаправленность. Значит, если $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ сходятся к x в топологии $\mathfrak{M}$, тогда сходится к этой точке и любая их наднаправленность. Остается доказать, что система $\mathfrak{M}$ совпадает с системой открытых множеств при ω. Если $M \subset \mathfrak{M}$, тогда M является окрестностью для всех своих точек, и при любых $x \in M$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$ направленность $\boldsymbol{S}$ находится в множестве M с некоторого момента, т. е. $M \in \mathfrak{M}_\omega$. Пусть, наоборот, $N \in \mathfrak{M}_\omega$. Множество N является открытым относительно топологии $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда ни одна направленность из $\complement N$ не сходится к элементу из множества N. А это требование здесь выполнено. Значит, $N \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\omega$.

Любой предел ω определит нам однозначно какую-нибудь топологию. Предел ω^*, при котором сходимость совпадает со сходимостью в этой топологии, называем *топологией, соответствующей пределу ω.*

Определение 2.5. *Говорят, что предел ω сильнее предела ν и обозначают $\nu \leqslant \omega$, если при любой $x \in X$ семейство $\omega x \subset \nu X$.*

Пусть ω и ν — две топологии, а $\mathfrak{M}_\omega$ и $\mathfrak{M}_\nu$ — соответствующие системы открытых множеств. Пусть $\mathfrak{M}_\omega \supset \mathfrak{M}_\nu$. Если $x \in X$ произвольна и $\boldsymbol{S} \in \omega x$, то при любом $M \in \mathfrak{M}_\omega$, где $x \in M$, найдется d_0 такая, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_0\} \subset M \in \mathfrak{M}_\omega$. А тогда $\boldsymbol{S}$ находится с некоторого момента и в каждом $N \in \mathfrak{M}_\nu$, где $x \in N$. По определению сходимости в топологии это означает, что $\boldsymbol{S} \in \nu x$, и $\omega x \subset \nu x$. Элемент x был произвольный, значит, $\omega \geqslant \nu$.

Пусть сейчас $\omega x \subset \nu x$ при каждой $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_\nu$. Тогда при произвольной $x \in M$ и $\boldsymbol{S} \in \nu x$, направленность $\boldsymbol{S}$ находится в множестве M с некоторого момента. Тогда тем более при произвольной $\boldsymbol{T} \in \omega x$. Значит, $M \in \mathfrak{M}_\omega$ и $\mathfrak{M}_\nu \subset \mathfrak{M}_\omega$. Мы видим, что так определенный порядок согласуется с понятием порядка при топологиях.

Предложение 2.4. *Пусть ω — предел. Тогда $\omega^* \leqslant \omega$, и ω^* является сильнейшей топологией множества X, которая слабее,* чем ω.

Доказательство. 1. Пусть $x \in X$ и $\{\boldsymbol{S}, D\} \in \omega x$. При любом $M \in \mathfrak{M}_\omega$, где $x \in M$, найдется d_0 такая, что $\{\boldsymbol{S}d : d \geqslant d_0\} \subset M$. Так как $\mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{M}_{\omega^*}$, то наша направленность сходится и в топологии ω^*, т. е. $\boldsymbol{S} \in \omega^* x$ и $\omega x \subset \omega^* x$.

2. Пусть ν — какая-то топология на множестве X и $\nu \leqslant \omega$. Из условия $\omega x \subset \nu x$ следует, что каждое ν-открытое множество является ω-открытым, или $\mathfrak{M}_\nu \subset \mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{M}_{\omega^*}$, откуда $\nu \leqslant \omega^*$, что и требовалось доказать.

5. Говорят, что предел ω удовлетворяет *первой аксиоме отделимости*, если выполнено условие:

(T_1) *При любых $x \neq y$ направленность $X \notin \omega y$.*

Говорят, что предел ω удовлетворяет *второй аксиоме отделимости*, если выполнено условие:

(T_2) *При любых $x \neq y$ пересечение $\omega x \cap \omega y = \varnothing$.*

Вторая аксиома отделимости гарантирует однозначность предела направленности. Если выполнена (T_2), то пространство (X, ω) называется *сепаратным* или *хаусдорфовым.*

Определение 2.6. *Пусть ω — предел. Точка x называется точкой накопления направленности $\boldsymbol{S} \in X^D$, если найдется поднаправленность $\boldsymbol{T}$ направленности $\boldsymbol{S}$ такая, что $\boldsymbol{T} \in \omega x$. Множество всех точек накопления направленности $\boldsymbol{S}$ при некотором пределе ω обозначим через $a_\omega(\boldsymbol{S})$.*

Определение 2.7. *Предел ω и пространство (X, ω) называются компактными, если при любых направленном множестве D и $\boldsymbol{S} \in X^D$ множество $a_\omega(\boldsymbol{S}) \neq \varnothing$. Множество $A \subset X$ называется компактным, если при любых направленном множестве D и $\boldsymbol{S} \in A^D$ найдется $x \in A$ такая, что $x \in a_\omega(\boldsymbol{S})$.*

Предложение 2.5. 1. *Если ω сепаратен и $\boldsymbol{S} \in \omega x$, то $a_\omega(\boldsymbol{S}) = \{x\}$.*

2. *Если $\nu \leqslant \omega$, то $a_\nu(\boldsymbol{S}) \supset a_\omega(\boldsymbol{S})$.*

3. *Если ω компактен и $\nu \leqslant \omega$, то ν компактен.*

Доказательство. Пусть ω сепаратен и $\boldsymbol{S} \in \omega x$. Предположим, что найдется $y \in a_\omega(\boldsymbol{S})$ и $x \neq y$. Тогда найдется поднаправленность $\boldsymbol{T}$ направленности $\boldsymbol{S}$ такая, что $\boldsymbol{T} \in \omega y$. Так как $\boldsymbol{T} \in \omega x$ как поднаправленность направленности $\boldsymbol{S}$, то получаем противоречие, которое доказывает первое утверждение. Если $\nu \leqslant \omega$, то $\omega x \subset \nu x$ при каждой x. Отсюда следует и второе утверждение. Третье утверждение следует непосредственно из второго и определения компактности.

6. Определим при произвольном ω отображение, которое ставит множеству $A \subset X$ в соответствие множество $\mathrm{cl} A$ следующим образом: точка $x \in \mathrm{cl} A$, если найдутся D и $\boldsymbol{S} \in A^D$ такие, что $x \in a_\omega(\boldsymbol{S})$; или, что то же самое, $x \in \mathrm{cl} A$, если найдутся D и направленность $\boldsymbol{T} \in \omega x \cap A^D$.

Определение 2.8. *Множество $\mathrm{cl} A$ называется замыканием множества A. Множество A называется замкнутым, если $\mathrm{cl} A = A$.*

Предложение 2.6. *Замыкание обладает следующими свойствами:*

1) $\mathrm{cl}\varnothing = \varnothing$.

2) $A \subset \mathrm{cl} A$ *при любом* $A \subset X$.

3) *Если* $A \subset B$, *то* $\mathrm{cl} A \subset \mathrm{cl} B$.

4) *Если* $A, B \subset X$, *тогда* $\mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl} A \cap \mathrm{cl} B$ и $\mathrm{cl} A \cup \mathrm{cl} B = \mathrm{cl}(A \cup B)$.

Доказательство. Свойство 1) тривиально. Если $x \in A$, то $\boldsymbol{X} \in A^D$ и $\boldsymbol{X} \in \omega x$ при любом D, следовательно, $x \in \mathrm{cl} A$ и $A \subset \mathrm{cl} A$. Если $x \in \mathrm{cl} A$, то найдутся D и $\boldsymbol{S} \in A^D$ такие, что $x \in \alpha_\omega(\boldsymbol{S})$. Если $A \subset B$, то $\boldsymbol{S} \in B^D$ и $\mathrm{cl} A \subset \mathrm{cl} B$. Свойство 4) следует из свойства 3) и ввиду того, что направленность, находясь в $A \cup B$, встречается часто хоть с одним из множеств A или B.

Предложение 2.7. *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\complement A$ открыто.*

Доказательство. 1. Пусть A замкнуто и $x \in \complement A$. Тогда $x \notin \mathrm{cl} A$, т. е. не найдется направленности $\boldsymbol{S} \in A^D$ такой, что $x \in \alpha_\omega(\boldsymbol{S})$. Тем более не найдется направленности $\boldsymbol{S} \in A^D$ такой, что $\boldsymbol{S} \in \omega x$. А это значит, что любая направленность, которая сходится к точке x, находится с некоторого момента в множестве $\complement A$, т. е. $\complement A$ открыто.

2. Пусть $\complement A$ открыто и $x \in \mathrm{cl} A$. Предположим, что $x \notin A$, т. е. $x \in \complement A$. Множество $\complement A$ открыто, значит, если $\boldsymbol{S} \in \omega x$, то $\boldsymbol{S}$ находится в $\complement A$ с некоторого момента. А тогда нельзя найти направленности $\boldsymbol{S} \in A^D$ такой, что $x \in \alpha_\omega(\boldsymbol{S})$, и, значит, $x \notin \mathrm{cl} A$, откуда получаем противоречие. Следовательно, $\mathrm{cl} A \subset A$, отношение $A \subset \mathrm{cl} A$ всегда верно, значит, $\mathrm{cl} A = A$ и A замкнуто. Легко убедиться, что если ω удовлетворяет аксиоме отделимости (T_1), то множество $\{x\}$ замкнуто. Действительно, если $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ и $x \neq y$, то $y \in \alpha_\omega(\boldsymbol{X})$, откуда $\boldsymbol{X} \in \omega y$.

Предложение 2.8. *В компактном предельном пространстве каждое замкнутое множество компактно.*

В сепаратном предельном пространстве каждое компактное множество замкнуто.

Доказательство. Пусть (X, ω) компактно и $A \subset X$ замкнуто. Так как $\alpha_\omega(\boldsymbol{S}) \neq \varnothing$ при любом D и $\boldsymbol{S} \in X^D$, то и $\alpha_\omega(\boldsymbol{S}) \neq \varnothing$ при $\boldsymbol{S} \in A^D$. Значит, найдутся $x \in X$ и поднаправленность $\boldsymbol{T}$ направленности $\boldsymbol{S}$ такие, что $\boldsymbol{T} \in \omega x$, и, так как A замкнуто, то $x \in A$.

Пусть (X, ω) сепаратно и $A \subset X$ компактно. Если $\boldsymbol{S} \in A^D$, то найдется $y \in A$ такая, что $y \in \alpha_\omega(\boldsymbol{S})$. Пусть теперь $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $\boldsymbol{S} \in A^D$, т. е. $x \in \mathrm{cl} A$. Тогда $\alpha_\omega(\boldsymbol{S}) = \{x\}$ (по предложению 2.5), значит, $x = y$ и $x \in A$, откуда A замкнуто.

Определение 2.9. *Пусть (X, ω) — предельное пространство и $A \subset X$. Индуцированным пределом на A мы называем отображение ω_A, определяемое для произвольного $x \in A$ равенством:*

$$\omega_A x = \{\{\boldsymbol{S}, D\} : \boldsymbol{S}d \in A,\ d \in D;\ \boldsymbol{S} \in \omega x\}.$$

Если направленность $\{\boldsymbol{S}, D\}$ такова, что $\{\boldsymbol{S}d : d \in D\} \subset A$, то и при любой ее псевдоподнаправленности $\{\boldsymbol{T}, E\}$ имеем $\{\boldsymbol{T}e : e \in E\} \subset A$, т. е. $\boldsymbol{T} \in A^E$. Если $\boldsymbol{S} \in A^D$ и $\boldsymbol{T} \in A^E$, то и любая их наднаправленность $\{\boldsymbol{R}, C\} \in A^C$. Значит, ω_A действительно является пределом. Непосредственно из определений видно, что, если $x \in A$, то $\omega_A x \subset \omega x$.

Определение 2.10. *Пусть (X, ω) — предельное пространство. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в пространстве X, если $\mathrm{cl} A = X$.*

§ 3. Непрерывные отображения

1. Пусть X и Y — произвольные множества и $\varphi : X \to Y$. Если $\boldsymbol{S}$ — направленность, то и $\varphi \circ \boldsymbol{S}$ — направленность через то же самое направленное множество.

Определение 3.1. *Пусть (X, ω) и (Y, ν) — два предельных пространства. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x \in X$, если при произвольной $\boldsymbol{S} \in \omega x$ направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \nu\varphi(x)$. Если φ непрерывно в каждой точке $x \in A$, то φ называем непрерывным на множестве A. Если $A = X$, то φ называем непрерывным.*

Предложение 3.1. *Пусть (X, ω), (Y, ν) и (Z, μ) — предельные пространства, отображение $\varphi : (X, \omega) \to (Y, \nu)$ непрерывно в точке $x \in X$ и отображение $\chi : (Y, \nu) \to (Z, \mu)$ непрерывно в точке $\varphi(x)$. Тогда $\chi \circ \varphi$ непрерывно в точке x.*

Доказательство. Если $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \nu\varphi(x)$ при произвольной $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $\chi \circ \boldsymbol{T} \mu\chi(\varphi(x))$ при произвольной $\boldsymbol{T} \in \nu\varphi(x)$, то $\chi \circ \varphi \circ \boldsymbol{S} \in \mu\chi(\varphi(x))$ при произвольной $\boldsymbol{S} \in \omega x$.

Следствие. *Композиция двух непрерывных отображений есть непрерывное отображение.*

Предложение 3.2. *Пусть (X, ω) и (Y, ν) — предельные пространства. Если $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение, то при произвольной $\boldsymbol{S} \in X^D$ и $x \in a_\omega(\boldsymbol{S})$ точка $\varphi(x) \in a_\nu(\varphi \circ \boldsymbol{S})$.*

Доказательство. Если $x \in a_\omega(\boldsymbol{S})$, то найдется поднаправленность $\boldsymbol{T} \in \omega x$ и, значит, $\varphi \circ \boldsymbol{T} \in \nu\varphi(x)$. Направленность $\varphi \circ \boldsymbol{T}$ является поднаправленностью направленности $\varphi \circ \boldsymbol{S}$ и, значит, $\varphi(x) \in a_\nu(\varphi \circ \boldsymbol{S})$.

Следствие. *Если (X, ω) компактно и $\varphi : (X, \omega) \to (Y, \nu)$ непрерывно, то $(\varphi(X), \nu_{\varphi(X)})$ компактно.*

Предложение 3.3. *Пусть φ и χ — два непрерывных отображения из пространства (X, ω) в сепаратное пространство (Y, ν). Если $\varphi(x) = \chi(x)$ на всюду плотном подмножестве A пространства X, то $\varphi = \chi$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, т. е. $x \in \mathrm{cl} A$. Тогда найдутся D и $\boldsymbol{S} \in A^D$ такие, что $\boldsymbol{S} \in \omega x$. Отображения φ и χ непрерывны, значит, $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \omega\varphi(x)$, и $\chi \circ \boldsymbol{S} \in \omega\chi(x)$. На множестве A отображения φ и χ равны, значит, $\varphi \circ \boldsymbol{S} = \chi \circ \boldsymbol{S}$. Предел ν сепаратен, откуда $\varphi(x) = \chi(x)$. Ввиду произвольности x отображение $\varphi = \chi$.

Предложение 3.4. *Пусть (X, ω) и (Y, ν) — предельные пространства и $\varphi : (X, \omega) \to (Y, \nu)$ — непрерывное отображение. Если $M \subset Y$ открыто в пространстве Y, то прообраз $\varphi^{-1}(M)$ открыт в пространстве X.*

Доказательство. Пусть $x \in \varphi^{-1}(M)$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$. Тогда $\varphi(x) \in M$ и ввиду непрерывности φ направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \nu\varphi(x)$. Множество M открыто, значит, направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S}$ находится в множестве M с некоторого момента. Тогда направленность $\boldsymbol{S}$ находится в множестве $\varphi^{-1}(M)$ с того же момента.

Определение 3.2. *Пусть (X, ω) и (Y, ν) — предельные пространства и $\varphi : X \to Y$. Отображение φ называется изоморфизмом пространств (X, ω) и (Y, ν), если φ биективно, причем φ и φ^{-1} непрерывны. Предельные пространства, между которыми можно построить изоморфизм, называются изоморфными.*

2. Пусть $(X_i, \omega_i)_{i \in I}$ — семейство предельных пространств, X — некоторое непустое множество и отображения $\varphi_i : X \to X_i$. Для произвольной $x \in X$ положим $\omega x = \{S : \varphi_i \circ S \in \omega_i \varphi_i(x),\ i \in I\}$.

Лемма. *Отображение ω — слабейший предел, при котором все отображения φ_i непрерывны.*

Доказательство. 1. Покажем, что ω есть предел. Для произвольного индекса $i \in I$ направленность $\boldsymbol{X}_i \in \omega_i x_i$ при произвольной x_i и образ постоянной направленности — постоянная направленность. Поэтому $\boldsymbol{X} \in \omega x$. Пусть $\boldsymbol{S} \in \omega x$, т. е. $\varphi_i \circ \boldsymbol{S} \in \omega_i \varphi_i(x)$. Если направленность $\boldsymbol{T}$ является псевдоподнаправленностью направленности $\boldsymbol{S}$, то и $\varphi_i \circ \boldsymbol{T}$ является псевдоподнаправленностью направленности $\varphi_i \circ \boldsymbol{S}$. Значит, $\varphi_i \circ \boldsymbol{T} \in \omega_i \varphi_i(x)$ для каждого индекса $i \in I$, откуда $\boldsymbol{T} \in \omega x$. Пусть $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \omega x$, т. е. $\varphi_i \circ \boldsymbol{S} \in \omega_i \varphi_i(x)$ и $\varphi_i \circ \boldsymbol{T} \in \omega_i \varphi_i(x)$. Если $\boldsymbol{R}$ — наднаправленность $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$, тогда $\varphi_i \circ \boldsymbol{R}$ является наднаправленностью $\varphi_i \circ \boldsymbol{S}$ и $\varphi_i \circ \boldsymbol{T}$, ибо при отображении направленностей свойства, зависящие от направленных множеств, не изменяются. Значит, $\varphi_i \circ \boldsymbol{R} \in \omega_i \varphi_i(x)$ для любого $i \in I$, откуда $\boldsymbol{R} \in \omega x$ и ω действительно есть предел.

2. По определению предела ω все отображения φ_i непрерывны. Пусть ν — некоторый другой такой предел. Если $\boldsymbol{S} \in \nu x$, то $\varphi_i \circ \boldsymbol{S} \in \omega_i \varphi_i(x)$ для любого $i \in I$. Значит, $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $\nu x \subset \omega x$, что и завершает доказательство.

Рассмотрим семейство предельных пространств $(X_i, \omega_i)_{i \in I}$. Пусть $X = \Pi X_i$. Канонические проекции обозначим через π_i.

Определение 3.3. *Слабейший предел ω на множестве X, при котором все канонические проекции непрерывны, называется произведением пределов ω_i. Предельное пространство $(X, \omega) = \Pi(X_i, \omega_i)$ называется произведением пространств (X_i, ω_i).*

Предложение 3.5. *Пусть (Y, ν) — предельное пространство и $(X, \omega) = \Pi(X_i, \omega_i)$. Отображение $\varphi : Y \to X$ непрерывно в точке $y \in Y$ тогда и только тогда, когда все отображения $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ являются непрерывными в точке y, где $\varphi_i : Y \to X_i$.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 3.1. Пусть все φ_i непрерывны в точке y, и пусть $\boldsymbol{S} \in \nu y$. Тогда $\varphi_i \circ \boldsymbol{S} = \pi_i \circ \varphi \circ \boldsymbol{S} \in \omega_i \varphi_i(y) = \omega_i \pi_i(\varphi(y))$ для любого $i \in I$. По определению предела ω направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \omega\varphi(y)$ и φ непрерывно.

Предложение 3.6. *Пусть* $(X_i, \omega_i)_{i\in I}$ *— семейство предельных пространств. Произведение* $\Pi(X_i, \omega_i)$ *сепаратно тогда и только тогда, когда все пространства* (X_i, ω_i) *являются сепаратными.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $\boldsymbol{S} \in \omega y$, где $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$. Тогда найдется хоть один индекс $j \in I$ такой, что $x_j \neq y_j$. А тогда $\pi_j \circ \boldsymbol{S} \in \omega_j x_j \cap \omega_j y_j$, и пространство (X_j, ω_j) не сепаратно.

Необходимость. Пусть $\{\boldsymbol{S}_j, D\} \in \omega_j x_j \cap \omega_j y_j$, где $x_j \neq y_j$. Определим направленности $\{\boldsymbol{S}_i, D\} = \{\boldsymbol{X}_i, D\}$ для всех $i \in I$ при $i \neq j$. Рассмотрим направленность $\boldsymbol{S}$, где $\pi_i \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_i$ для каждого индекса $i \in I$. Тогда по определению предела ω направленность $\boldsymbol{S} \in \omega x$, где $x = \{x_i\}$, и $\boldsymbol{S} \in \omega y$, где $y = \{y_i\}$ и $y_i = x_i$ при $i \neq j$, а $y_j \neq x_j$. Значит, пространство (X, ω) не сепаратно.

3. Лемма. *Пусть* (X, ω) *— предельное пространство,* Y *— некоторое непустое множество и* $\varphi: X \to Y$ *— сюръективное. Тогда на множестве* Y *существует сильнейший предел, для которого* φ *непрерывно.*

Доказательство. Для любой $y \in Y$ положим

$$\nu' y = \{\boldsymbol{T} : \exists x \in X,\ S \in \omega x,\ \varphi(x) = y,\ \varphi \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\}.$$

Так как $\{\boldsymbol{Y}, D\} = \{\varphi \circ \boldsymbol{X}, D\}$ и $\{\boldsymbol{X}, D\} \in \omega x$, направленность $\boldsymbol{Y} \in \nu' y$. Дополним семейство $\nu' y$ так, чтобы получился предел. Для этого нужно в $\nu' y$ добавить наднаправленности всевозможных конечных наборов направленностей из $\nu' y$ и их псевдоподнаправленности. В результате получим предел ν. Отображение $\varphi: (X, \omega) \to (Y, \nu)$ непрерывно. Пусть μ — какой-то другой такой предел, т. е. для любой $x \in X$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$ направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \mu\varphi(x)$. Семейство $\mu\varphi(x)$ содержит и все псевдоподнаправленности и наднаправленности конечных наборов направленностей типа $\varphi \circ \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S} \in \omega x$. Предел ν состоит только из таких направленностей. Следовательно, $\nu\varphi(x) \subset \mu\varphi(x)$, и, учитывая сюръективность φ, получим $\mu \leqslant \nu$, что и требовалось доказать.

Пусть (X, ω) — предельное пространство и ϱ — отношение эквивалентности на множестве X. Множество всех классов эквивалентности обозначим через X/ϱ; класс, который соответствует элементу x обозначим через x_ρ, а канонические отображение через γ_ρ, где $\gamma_\rho: X \to X/\varrho$ и $\gamma_\rho(x) = x_\rho$

Определение 3.4. *Сильнейший предел на множестве* X/ϱ, *для которого* γ_ρ *непрерывно, называется факторпределом* ω_ρ *предела* ω *по отношению эквивалентности* ϱ. *Пространства* $(X/\varrho, \omega_\rho)$, *называется факторпространством пространства* (X, ω).

Предложение 3.7. *Пусть* (X, ω) *и* (Y, ν) — *предельные пространства,* (X_ρ, ω_ρ) — *факторпространство пространства* (X, ω). *Пусть* γ_ρ — *каноническое отображение и* $\chi : X/\varrho \to Y$. *Отображение* χ *непрерывно тогда и только тогда, когда* $\varphi = \chi \circ \gamma_\rho$ *непрерывно.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 3.1.

Достаточность. Пусть φ непрерывно, т. е. при произвольной $x \in X$ и $\boldsymbol{S} \in \omega x$ направленность $\varphi \circ \boldsymbol{S} \in \nu\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \chi(\gamma_\rho(x))$. Мы должны показать, что если $\boldsymbol{S}_\rho \in \omega_\rho x_\rho$, то $\chi \circ \boldsymbol{S}_\rho \in \gamma\chi(x_\rho) = \nu\chi(\gamma_\rho(x))$. Если $\boldsymbol{S}_\rho \in \omega_\rho x_\rho$, то существует конечная система $\{\boldsymbol{T}_k\}$ направленностей $\boldsymbol{T}_k \in \bigcup\{\omega y : y \in x_\rho\}$ при любом $k = 1, 2, \ldots, n$, такая, что $\boldsymbol{S}_\rho$ — псевдоподнаправленность наднаправленности направленностей $\gamma_\rho \circ \boldsymbol{T}_k$, при $k = 1, 2, \ldots n$. А тогда и $\chi \circ \boldsymbol{S}_\rho$ является псевдоподнаправленностью наднаправленности направленностей $\chi \circ \gamma_\rho \circ \boldsymbol{T}_k$, при $k = 1, 2, \ldots n$. Отображение $\varphi = \chi \circ \gamma_\rho$ непрерывно и $\varphi(y) = \varphi(x)$ при любой $y \in x_\rho$, значит, $\chi \circ \gamma_\rho \circ \boldsymbol{T}_k \in \nu\chi(\gamma_\rho(x))$ при $k = 1, 2, \ldots n$, а так как ν есть предел, отсюда выводим, что $\chi \circ \boldsymbol{S}_\rho \in \nu\chi(\gamma_\rho(x)) = \nu\chi(x_\rho)$, что и требовалось доказать.

§ 4. Предельные группы

1. Пусть X — группа, т. е. множество, наделенное групповыми операциями $\sigma : X \times X \to X$ и $\delta : X \to X$, где $\sigma(x, y) = x \cdot y$ и $\delta(x) = x^{-1}$. Если $\{\boldsymbol{S}, D\}$ — направленность, то и $\delta \circ \boldsymbol{S}$ — направленность через направленное множество D. Эту направленность обозначим через $[\boldsymbol{S}]^{-1}$ и называем *обратной направленностью* направленности $\boldsymbol{S}$. Если $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ — направленности через направленное множество D, то $\{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}, D \times D\}$ — направленность $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} : D \times D \to X \times X$. Рассмотрим поднаправленность направленности $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}$, определяемую формулой $(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N} : D \to D \times D$ и $\boldsymbol{N}d = (d, d)$. Тогда $\sigma \circ (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{N}$ является направленностью $D \to X$. Эту направленность называем *произведением* направленностей $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ и обозначим $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}$. Легко убедиться, что если e — единица группы X и $\boldsymbol{E}$ — направленность $\{\boldsymbol{E}, D\}$, где $\boldsymbol{E}d = e$ для любой $d \in D$, то $[\boldsymbol{S}]^{-1} * \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}$, также $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}$ и $[\boldsymbol{E}]^{-1} = \boldsymbol{E}$.

Определение 4.1. *Множество* X *называется предельной группой, если* X — *группа и одновременно предельное пространство, а операции группы* $\sigma : X \times X \to X$ *и* $\delta : X \to X$ *непрерывны. Если предел* ω *удовлетворяет этому требованию, то* ω *называется допустимым в группе* X.

Непрерывность операции σ означает, что если $(x, y) \in X \times X$ и $\{\boldsymbol{S}, D\} \in \omega(x, y)$, то $\sigma \circ \boldsymbol{S} \in \omega\delta(x, y) = \omega(x \cdot y)$. По определению предела произведения $\boldsymbol{S} \in \omega(x, y)$ тогда и только тогда, если координатные направленности $\boldsymbol{S}_1 \in \omega x$ и $\boldsymbol{S}_2 \in \omega y$. Значит, σ непрерывно тогда и только тогда, когда из $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $\boldsymbol{T} \in \omega y$ следует $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \in \omega(x \cdot y)$ или $\omega x * \omega y \subset \omega(x \cdot y)$, где $\omega x * \omega y = \{\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} \in \omega x,\ \boldsymbol{T} \in \omega y\}$. Непрерывность δ означает, что $[\omega x]^{-1} \subset \omega x^{-1}$, где $[\omega x]^{-1} = \{[\boldsymbol{S}]^{-1} : \boldsymbol{S} \in \omega x\}$.

Пусть $a \in X$. Определим операторы сдвига $a(x) = a \cdot x$, $'a^{-1}(x) = x \cdot a^{-1}$. Произведение однозначно и непрерывно. Поэтому операторы сдвига являются изоморфизмами предельного пространства (X, ω). Если предел ω допустимый, то $\boldsymbol{S} \in \omega e$ тогда и только тогда, когда $a \circ \boldsymbol{S} \in \omega(a \cdot e)$, и, значит, если нам даны направленности, которые сходятся в точке e, то мы знаем и направленности, сходящиеся к любой точке. В дальнейшем будем $a \circ \boldsymbol{S}$ и $'a^{-1} \circ \boldsymbol{S}$ обозначать просто через $a \cdot \boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S} \,.\, a^{-1}$. Из непрерывности оператора сдвига получим, что $a \cdot (\omega x) \,.\, a^{-1} \subset \omega(a \cdot x \,.\, a^{-1})$, где $a \cdot (\omega x) \cdot a^{-1} = \{a \cdot \boldsymbol{S} \cdot a^{-1} : \boldsymbol{S} \in \omega x\}$.

Предложение 4.1. *Пусть дано семейство направленностей ωe, которое удовлетворяет аксиомам* (L_1)—(L_3). *Если выполнены условия.*

1° $\omega e * \omega e \subset \omega e$,

2° $[\omega e]^{-1} \subset \omega e$,

3° $a(\omega e) a^{-1} \subset \omega e$ *при произвольной* $a \in X$,

то существует один и только один допустимый предел ω такой, что ωe является семейством направленностей, сходящееся к e относительно этого предела.

Доказательство. Условия 1°—3°, как мы видели, необходимы. Если такой предел ω найдется, тогда он единственный, ибо сдвиг является изоморфизмом. Остается доказать существование такого предела. Положим при $x \in X$ семейство направленностей $\omega x = x \cdot \omega e$. Очевидно, ω есть предел. Действительно, $x \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{X}$, значит, $\boldsymbol{X} \in \omega x$, а аксиомы ($\mathrm{L}_2$) и ($\mathrm{L}_3$) используют только свойства направленных множеств, которые при отображении не изменяются. Покажем, что ω допустим. Во-первых, отметим, что $[x \cdot \boldsymbol{S}]^{-1} = [\boldsymbol{S}]^{-1} \cdot x^{-1}$, так как для произвольной $d \in D$ верно $([x \cdot \boldsymbol{S}]^{-1}) d = (\delta \circ x \circ \boldsymbol{S}) d = (x \cdot \boldsymbol{S}d)^{-1} = \boldsymbol{S}d^{-1} \cdot x^{-1} = ('x^{-1} \circ \delta \circ \boldsymbol{S}) d = ([\boldsymbol{S}]^{-1} \cdot x^{-1}) d$. Пусть $[\boldsymbol{S}]^{-1} \in [\omega x]^{-1}$, т. е. $\boldsymbol{S} \in \omega x$ и $x^{-1} \cdot \boldsymbol{S} \in \omega e$ по определению предела ω. А тогда $[x^{-1} \cdot \boldsymbol{S}]^{-1} = [\boldsymbol{S}]^{-1} \cdot x \in [\omega e]^{-1} \subset \omega e$, ввиду 2°. По условию 3° имеем $x \cdot [\boldsymbol{S}]^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x \cdot [\boldsymbol{S}]^{-1} \in \omega e$, а по определению предела ω получим $x^{-1} \cdot x [\boldsymbol{S}]^{-1} = [\boldsymbol{S}]^{-1} \in \omega x^{-1}$. Значит, $[\omega x]^{-1} \subset \omega x^{-1}$ и операция δ непрерывна. Пусть $\{\boldsymbol{S}, D\} \in \omega x$ и $\{\boldsymbol{T}, D\} \in \omega y$. Тогда $x^{-1} \cdot \boldsymbol{S} \in \omega e$ и $y^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \in \omega e$. Из условия 3° выводим $y \cdot y^{-1} \cdot \boldsymbol{T} y^{-1} \in \omega e$, т. е. $\boldsymbol{T} \cdot y^{-1} \in \omega e$. Из условия 1° вытекает $x^{-1} \cdot \boldsymbol{S} * T \cdot y^{-1} \in \omega e$, и, наконец, $y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \cdot y^{-1} \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1} \boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \in \omega e$ по условию 3°. Из определения ω получим, что $x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} * T \in \omega(x \cdot y)$, откуда $\omega x * \omega y \subset \omega(x \cdot y)$, и операция σ непрерывна, что и завершает наше доказательство.

2. Предложение 4.2. *Замыкание произвольной подгруппы предельной группы (X, ω) является подгруппой.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа предельной группы (X, ω). По определению замыкания 2.8 элемент $x \in \mathrm{cl} H$ тогда и только тогда, когда найдутся D и $\boldsymbol{S} \in \omega x \cap H^D$. Нам нужно показать, что если $x \in \mathrm{cl} H$, то и $x^{-1} \in \mathrm{cl} H$, и, если $x, y \in \mathrm{cl} H$, то и $x \cdot y \in \mathrm{cl} H$. Пусть $x \in \mathrm{cl} H$, т. е. найдутся D и $\boldsymbol{S} \in \omega x \cap H^D$. Так как H — подгруппа, и $[\boldsymbol{S}]^{-1} \in H^D$. Операция δ непрерывна. Значит, $[\boldsymbol{S}]^{-1} \in \omega x^{-1}$, откуда $x^{-1} \in \mathrm{cl} H$. Пусть дальше $x, y \in \mathrm{cl} H$. По определению найдутся D и $\boldsymbol{S} \in \omega x \cap H^D$, аналогично E и $\boldsymbol{T} \in \omega y \cap H^E$. Рассматривая эти направленности через направленное множество $D \times E$ как в следствии из определения предела, получим $\{\boldsymbol{S}', D \times E\} \in \omega x \cap H^{D \times E}$ и $\{\boldsymbol{T}', D \times E\} \in \omega y \cap H^{D \times E}$. Тогда и $\boldsymbol{S}' * \boldsymbol{T}' \in H^{D \times E}$, и в силу непрерывности σ, получим $\boldsymbol{S}' * \boldsymbol{T}' \in \omega(x \cdot y)$, откуда $x \cdot y \in \mathrm{cl} H$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если N — нормальный делитель, то и $\mathrm{cl} N$ — нормальный делитель.*

Доказательство. В силу предложения 4.2, замыкание $\mathrm{cl} N$ — подгруппа. Остается показать, что $x \cdot \mathrm{cl} N \cdot x^{-1} \subset \mathrm{cl} N$ при произвольной $x \in X$. Пусть $y \in \mathrm{cl} N$, тогда найдутся D и $\boldsymbol{S} \in \omega y \cap N^D$. Направленность $x \cdot \boldsymbol{S} \cdot x^{-1} \in N^D$, так как N есть нормальный делитель. Предел ω допустим, значит, $x \cdot \boldsymbol{S} \cdot x^{-1} \in \omega(x \cdot y \cdot x^{-1})$, откуда $x \cdot y \cdot x^{-1} \in \mathrm{cl} N$, и, в силу произвольности $y \in N$ и $x \in X$, получаем, что $x \cdot \mathrm{cl} N \cdot x^{-1} \in \mathrm{cl} N$.

Предложение 4.3. *Допустимый предел ω на группе X является сепаратным тогда и только тогда, если множество $\{e\}$ замкнуто.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна (см. § 1, п. 6). Пусть ω не сепаратен. Тогда найдутся $x, y \in X$, где $x \neq y$, и $\boldsymbol{S} \in \omega x \cap \omega y$. Следовательно, $[\boldsymbol{S}]^{-1} \in \omega x^{-1}$ и $\boldsymbol{S} * [\boldsymbol{S}]^{-1} \in \omega(y \cdot x^{-1})$, где $y \cdot x^{-1} \neq e$. Так как $\boldsymbol{S} * [\boldsymbol{S}]^{-1} = \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E} \in \{e\}^D$ для любого направленного множества D, то $y \cdot x^{-1} \in \mathrm{cl}\{e\}$ и, значит, $\{e\}$ не замкнуто.

Следствие. *В предельной группе аксиомы отделимости* (T_1) *и* (T_2) *совпадают.*

3. Если N — нормальный делитель в группе X, то смежные классы $x \cdot N$ по этому делителю образуют факторгруппу X/N группы X. Единицей факторгруппы является N, обратным элементом класса $x \cdot N$ — класс $x^{-1}N$, а произведением классов $x \cdot N$ и $y \cdot N$ — класс $(x \cdot y)N$. Каноническое отображение $\gamma_N : X \to X/N$ сопоставляет каждому элементу тот класс, где этот элемент содержится. Обозначим $\gamma_N(x) = x_N$.

Предложение 4.4. *Пусть N — нормальный делитель предельной группы (X, ω). Тогда факторпредел является допустимым в факторгруппе X/N.*

Доказательство. Нам надо доказать, что операции группы являются непрерывными в факторгруппе. Пусть δ_N и σ_N — соответственные операции. Рассмотрим элемент $(\delta_N \circ \gamma_N)(x) = \delta_N(x_N) = (x_N)^{-1} = (x_N{}^{-1}) = \gamma_N(x^{-1}) = (\gamma_N \circ \delta)(x)$, т. е. $\gamma_N \circ \delta = \delta_N \circ \gamma_N$. Так как γ_N и δ непрерывны, то и $\delta_N \circ \gamma_N$ непрерывны и по предложению 3.7 операция δ_N непрерывна. Аналогично доказывается, что и σ_N непрерывна.

Предложение 4.5. *Пусть (X, ω) — предельная группа и N — ее нормальный делитель. Пространство $(X/N,\ \omega_N)$ сепаратно тогда и только тогда, когда N замкнуто в пространстве (X, ω).*

Доказательство. Если $(X/N,\ \omega_N)$ сепаратно, то $\{e_N\}$ замкнуто в пространстве $(X/N,\ \omega_N)$ по определению 4.3. Значит, и его прообраз $\gamma_N{}^{-1}(e_N) = N$ по предложению 3.4 замкнут в пространстве (X, ω).

Пусть $(X/N,\ \omega_N)$ не сепаратно, т. е. $\{e_N\}$ не замкнуто. Тогда существует $x_N \in \mathrm{cl}\{e_N\}$ и $x_N \neq e_N$. Следовательно, $\{\boldsymbol{E}_N, \boldsymbol{D}\} \in \omega_N x_N$ и найдется система направленностей $\{\boldsymbol{T}_k\}$ при $k = 1, \ldots, n$, где $\boldsymbol{E}_N$ является псевдоподнаправленностью наднаправленности направленностей $\gamma_N \circ \boldsymbol{T}_k$ при $k = 1, \ldots, n$. В таком случае найдется хоть один индекс l такой, что $\boldsymbol{E}_N$ — псевдоподнаправленность направленности $\gamma_N \circ \boldsymbol{T}_l$, где $\boldsymbol{T}_l \in \omega x$ и $\gamma_N(x) = x_N$. Следовательно, найдется псевдоподнаправленность $\boldsymbol{R}$ направленности $\boldsymbol{T}_l$, такая, что $\gamma_N \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}_N$, т. е. $\boldsymbol{R}$ находится в множестве N. Так как $x \notin N$ и $\boldsymbol{R} \in \omega x$, то получим, что $x \in \mathrm{cl} N$ и N не замкнуто.

Литература

1. Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. Москва, 1969.
2. Келли Дж. Л., Общая топология. Москва, 1968.
3. Куратовский К., Топология, т. 1. Москва, 1966.
4. Dolcher, M., Topologie e strutture di convergenza. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1960, **14**, № 1, 63—92.
5. Dudley, R. M., On sequential convergence. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, 112, № 3, 483—507.
6. Fischer, H. R., Limesräume. Math. Ann., 1959, **137**, 269—303.
7. Katětov, M., Convergence structures. Gen. topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra, v. 2. Prague, 1967, 207—216.
8. Kent, D. C., A note on pretopologies. Fundam. math., 1968, **62**, № 1, 95—100.
9. Kisynski, J. Convergence du type *L*. Colloq. math. 1960, **7**, № 2, 205—211.
10. Taylor, W., Convergence in relational structures. Math. Ann., 1970, **186**, № 3, 215—227.

Поступило
6 III 1973

KOONDUVUS SUUNATUD PEREDE ABIL

T. Kelder

Resümee

Fischer [6] defineeris koonduvuse aksiomaatiliselt, kasutades selleks filtreid. Käesolevas töös on koonduvuse defineerimiseks kasutatud suunatud peresid. Eesmärgiks on olnud saada koonduvuse mõiste, mis oleks võrdlemisi lähedane Fischeri poolt antud koonduvuse mõistele. Teises paragrahvis defineeritakse koonduvus hulgas X erilise kujutuse — piiri abil, võrreldakse saadud koonduvust koonduvusega Fischeri mõttes ja topoloogilise koonduvusega, antakse rida topoloogilisi mõisteid. Kolmandas kasutatakse saadud koonduvust pideva kujutuse defineerimiseks. Viimases paragrahvis vaadeldakse piirstruktuuri rühmas.

KONVERGENZBEGRIFF MIT DEN VERALLGEMEINERTEN FOLGEN

T. Kelder

Zusammenfassung

Fischer [6] hatte den Konvergenzbegriff durch Filtern aksiomatisch definiert. Im vorliegenden Artikel wird es aber mit verallgemeinerten Folgen gemacht. Das Ziel des Artikels ist das Bekommen eines solchen Konvergenzbegriffes, der möglichst dem Konvergenzbegriff Fischers ähnlich ist. In der Arbeit führt man den Begriff der Konvergenz in die Menge X mit Hilfe einer speziellen Abbildung, die Limitierung heißt, ein. Weiter wird dieser Konvergenzbegriff mit dem Konvergenzbegriff Fischers und mit dem topologischen Konvergenzbegriff verglichen, einige Begriffe und Sätze der Topologie auf die Limitierungen übergetragen und der Begriff der stetigen Abbildung durch Limesräumen untersucht. Zum Schluß untersucht man die limitierte Gruppe.

О СТРОЕНИИ ФОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНГРУЭНЦИЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ $2m$-ПЛОСКОСТЕЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ВНУТРЕННИМИ СВЯЗНОСТЯМИ

А. Парринг

Кафедра алгебры и геометрии

Настоящая статья является продолжением статьи [3]. Рассматривается тот частный случай a-параметрического семейства симплектических $2m$-плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве Sp_{2n}, когда $a+2m=2n$. В этом случае семейство принято называть *конгруэнцией*. Фокальные точки конгруэнции образуют на каждой ее плоскости α алгебраическую гиперповерхность $2(n-m)$-го порядка, которая называется *фокальной поверхностью*. Мы будем ее обозначать здесь через $\Phi(\alpha)$ или просто Φ. В данной статье исследуется строение поверхности $\Phi(\alpha)$ у некоторых классов конгруэнций, внутренняя связность которых обладает некоторыми специальными свойствами. Эти свойства описываются с помощью вектор-формы Ω_M кручения внутренней связности. Заметим, что аналогичные вопросы в случае конгруэнции плоскостей в евклидовом пространстве рассматривались в [1]. В качестве вспомогательного образа там было введено понятие индикатрисы конгруэнции $I(\boldsymbol{M},\boldsymbol{X})$ для фиксированной пары точек, где $\boldsymbol{M}$ начало репера. В [3] понятия вектор-формы кручения и индикатрисы конгруэнции обобщены на случаи конгруэнции симплектических $2m$-плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве Sp_{2n}. Их определения будут и здесь повторены. Главное внимание уделяется ниже изучению строения фокальной поверхности при помощи их. Полученные результаты сформулированы в виде теорем 1—4.

§ 1. Предварительные понятия

1. *Аффинно-симплектическим пространством* Sp_N называется аффинное пространство A_N с регулярной кососимметрической метрикой, которую можно задать матрицей $G=\|g_{JK}\|$ $(J,K,\ldots=1,\ldots,N)$. Из регулярности метрики, т. е. $\det G\neq 0$, вытекает, что $\dim Sp_N = 2n$. Метрика удовлетворяет уравнениям инвариантности

$$dg_{JK}=g_{LK}\omega^L{}_J+g_{JL}\omega^L{}_K. \tag{1.1}$$

Если учитывать (1.1) в формулах перемещения репера

$$d\boldsymbol{M}=\omega^J\boldsymbol{e}_J, \quad d\boldsymbol{e}_J=\omega^K{}_J\boldsymbol{e}_K$$

и в структурных уравнениях

$$d\omega^J=\omega^K\wedge\omega^J{}_K, \; d\omega^J{}_K=\omega^L{}_K\wedge\omega^J{}_L \tag{1.2}$$

аффинного пространства A_{2n}, то получаются соответствующие формулы симплектического пространства Sp_{2n}. *Группу симплектических движений*, т. е. группу автоморфизмов пространства Sp_{2n}, обозначим $T_{2n}*Sp(G)$, где T_{2n} — векторная группа переносов начала репера, а $Sp(G)=\{A\mid A\in GL(2n,\boldsymbol{R}),\ G=A^{\mathrm{T}}GA\}$ — *симплектическая группа*. Часто матрица G задается в виде

$$G=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.3}$$

где E и 0 соответственно единичная и нулевая матрицы порядков n. Реперы, относительно которых G имеет вид (1.3), называются *симплектическими*. Симплектическую группу $Sp(G)$ при выполнении (1.3) обозначим через Sp. В этом случае элемент $\omega=\|\omega^J{}_K\|$ алгебры Ли $'Sp$ группы Sp удовлетворяет условию $\omega^{\mathrm{T}}G=(\omega^{\mathrm{T}}G)^{\mathrm{T}}$, где T — знак транспонирования. Это следует из (1.1). Следовательно, ω имеет следующую структуру

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\omega^T{}_1 \end{Vmatrix}, \tag{1.4}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — матрицы порядков n, из которых ω_2 и ω_3 симметричны.

2. Пусть в Sp_{2n} задано a-параметрическое семейство симплектических $2m$-плоскостей; оно представляет собой a-мерное дифференцируемое подмногообразие $B_a(2m,2n)$ в соответствующем грассмановом многообразии. Если $\{\theta^1, \ldots, \theta^a\}$ — элемент расслоения касательных кобазисов на $B_a(2m,2n)$, то

$$d\theta^\alpha=\theta^\beta\wedge\theta^\alpha{}_\beta \quad (\alpha, \beta, \ldots=1, \ldots, a). \tag{1.5}$$

Рассмотрим наше семейство как расслоение, слоями которого являются симплектические $2m$-плоскости семейства, и базой $B_a(2m,2n)$. В этом расслоении при помощи ортогональных дополнений к слоям естественным образом возникает внутренняя связность. Возьмем в Sp_{2n} репер $\{\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2m}, \boldsymbol{e}_{2m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}\}$, так чтобы $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2m}$ принадлежали слою, а $\boldsymbol{e}_{2m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$ были ортогональны к слою. Относительно такого репера матрица метрического тензора имеет вид

$$G=\begin{Vmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{Vmatrix},$$

где G_1 и G_2 — регулярные матрицы соответственно порядков $2m$

и $2(n-m)$. Условия инвариантности метрики (1.1) имеют теперь вид

$$\begin{gathered} dg_{ij}=g_{kj}\omega^k{}_i+g_{ik}\omega^k{}_j, \\ dg_{pq}=g_{rq}\omega^r{}_p+g_{pr}\omega^r{}_q, \\ g_{pq}\omega^p{}_i+g_{ij}\omega^j{}_q=0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $i, j, \ldots=1, \ldots, 2m$; $p, q, \ldots=2m+1, \ldots, 2n$. Слой расслоения в Sp_{2n} выделяется уравнениями $\omega^p=0$ и $\omega^p{}_i=0$. Следовательно,

$$\omega^p=\Lambda^p{}_\alpha\theta^\alpha, \tag{1.7}$$

$$\omega^p{}_i=\Lambda^p{}_{i\alpha}\theta^\alpha. \tag{1.8}$$

Из (1.2) при помощи (1.7) и (1.8) получим

$$\begin{gathered} d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i{}_j+\Omega^i, \\ d\omega^i{}_j=\omega^k{}_j\wedge\omega^i{}_k+\Omega^i{}_j. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь

$$\Omega^i=\omega^p\wedge\omega^i{}_p=\frac{1}{2}T^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,$$

$$\Omega^i{}_j=\omega^p{}_j\wedge\omega^i{}_p=\frac{1}{2}R^i{}_{j\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,$$

где

$$\begin{gathered} T^i{}_{\alpha\beta}=2g_{pq}g^{ij}\Lambda^p{}_{[\alpha}\Lambda^q{}_{|j|\beta]}, \\ R^i{}_{j\alpha\beta}=2g_{pq}g^{il}\Lambda^p{}_{j[\alpha}\Lambda^q{}_{|l|\beta]}. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Из уравнений (1.9) следует, что в рассматриваемом расслоении возникает связность, называемая его внутренней связностью, а формы Ω^i, $\Omega^i{}_j$ являются *формами кручения* и *кривизны* этой связности. Здесь 2-форма кривизны $\Omega=\|\Omega^i{}_j\|$ удовлетворяет соотношению

$$G_1\Omega=(G_1\Omega)^T.$$

При переносе начала репера $\boldsymbol{M}$ в новую точку слоя 2-формы Ω^i и $\Omega^i{}_j$ преобразуются. Далее, придется пользоваться только законом преобразования Ω^i:

$$'\Omega^i=\Omega^i+x^j\Omega^i{}_j, \tag{1.11}$$

а также вектор-формой кручения $\Omega_M=\Omega^i\boldsymbol{e}_i$.

Точка $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}+x^i\boldsymbol{e}_i$ в некоторой $2m$-плоскости $a\in B_a(2m, 2n)$ конгруэнции называется *фокусом*, если $d\boldsymbol{X}$ принадлежит к плоскости a. Координаты x^i фокуса $\boldsymbol{X}$ удовлетворяют системе

$$(\Lambda^p{}_\alpha+x^i\Lambda^p{}_{i\alpha})\theta^\alpha=0. \tag{1.12}$$

Направления, найденные из системы, называются *фокальными направлениями*. Множество всех фокусов называется *фокальной поверхностью*, мы обозначим ее через $\Phi(a)$ или Φ.

§ 2. Фокальная поверхность и индикатриса конгруэнции

1. Далее, мы будем исследовать семейство симплектических $2m$-плоскостей в Sp_{2n} в том частном случае, когда размерностью базисного многообразия $B_a(2m, 2n)$ является $2(n-m)$. В этом случае семейство, следуя [6], называется *конгруэнцией*. Так как индексы $\alpha, \beta, \ldots$ и $p, q, \ldots$ пробегают здесь одинаковые множества значений, то их можно отождествить. Далее, вместо $\alpha, \beta, \ldots$ всегда пишем $p, q, \ldots$. Если начало репера $\boldsymbol{M}$ не находится на фокальной поверхности, то из (1.12) следует $\det \|\Lambda^p{}_q\| \neq 0$. Этого всегда можно добиться, потому что при переносе начала репера из точки $\boldsymbol{M}$ в точку $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + x^i \boldsymbol{e}_i$, величины $\Lambda^p{}_q$ преобразуются следующим образом:

$$'\Lambda^p{}_q = \Lambda^p{}_q + x^i \Lambda^p{}_{iq},$$

и $'\Lambda^p{}_q = 0$ оказалось бы тождеством относительно x^i только тогда, когда $\Lambda^p{}_q = \Lambda^p{}_{iq} = 0$, что в случае конгруэнции невозможно. На основании (1.7) мы можем формы θ^p заменить формами ω^p. В этом случае у нас $\Lambda^p{}_q = \delta^p{}_q$. После однократного продолжения уравнений (1.8) получим

$$\nabla \Lambda^p{}_{iq} = -\Lambda^p{}_{ir} \Lambda^r{}_{jq} \omega^j + \Lambda^p{}_{iqr} \omega^r, \tag{2.1}$$

где $\Lambda^p{}_{i[qr]} = 0$.

Здесь мы использовали обозначение

$$\nabla \Lambda^p{}_{iq} = d\Lambda^p{}_{iq} - \Lambda^p{}_{jq} \omega^j{}_i - \Lambda^p{}_{ir} \omega^r{}_q + \Lambda^s{}_{iq} \omega^p{}_s. \tag{2.2}$$

Далее, мы будем символ ∇ применять и в других аналогичных случаях, каждый раз явно не выписывая соответствующее выражение, являющее аналогом к (2.2). Например, соотношения (1.6) пишутся в виде $\nabla g_{ij} = 0$ и $\nabla g_{pq} = 0$. Из (2.1) следует, что величины $\Lambda^p{}_{iq}$ при закрепленном начале репера составляют тензор. Система (1.12) для определения фокального направления, соответствующего фокусу $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^i \boldsymbol{e}_i$, имеет теперь вид

$$(\delta^p{}_q + \Lambda^p{}_{jq} x^j) \omega^q = 0.$$

Итак, необходимым и достаточным условием существования фокального направления является

$$\det \|\delta^p{}_q + \Lambda^p{}_{jq} x^j\| = 0. \tag{2.3}$$

Таким образом, у нас получено уравнение фокальной поверхности Φ.

2. Фиксируем в каждой плоскости конгруэнции две точки: начало репера $\boldsymbol{M}$ и еще одну (при этом любую) точку $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^i \boldsymbol{e}_i$, которые описывают гладкие поверхности локальных сечений расслоения. Тогда должно быть $d\boldsymbol{M} = d\boldsymbol{X} = 0 \pmod{\omega^p}$. Так как

$$d\boldsymbol{M} = \omega^i \boldsymbol{e}_i + \omega^p \boldsymbol{e}_p,$$

$$d\boldsymbol{X} = (\omega^i + \nabla x^i) \boldsymbol{e}_i + (\omega^p + x^i \omega^p{}_i) \boldsymbol{e}_p,$$

то это значит, что $\omega^i = \nabla x^i = 0 \pmod{\omega^p}$. Для этой фиксированной пары точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ определим величины

$$L_{pq} = g_{pr} \Lambda^r{}_{iq} x^i.$$

Так как $\nabla L_{pq} = g_{pr} (\nabla \Lambda^r{}_{iq} x^i + \Lambda^r{}_{iq} \nabla x^i)$, то L_{pq} составляет тензор для каждой пары фиксированных точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ данной $2m$-плоскости. Тензором L_{pq}, в свою очередь, определяется некоторая квадратичная форма $L_{pq} \omega^p \omega^q$. Для геометрического истолкования этой квадратичной формы рассмотрим секущие поверхности расслоения, образованные фиксированными точками $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{X}$. Касательные векторы к этим секущим поверхностям имеют следующие компоненты, ортогональные к слою: $\boldsymbol{m} = \omega^p \bar{\boldsymbol{e}}_p$ и $\boldsymbol{x} = (\omega^q + \Lambda^q{}_{jp} x^j \omega^p) \boldsymbol{e}_q$. Так как $(\omega^p \boldsymbol{e}_p, \ \omega^q \boldsymbol{e}_q) = g_{pq} \omega^p \omega^q = 0$, поскольку $g_{pq} + g_{qp} = 0$, то $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x}) = L_{pq} \omega^p \omega^q$. Как известно $|(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x})|$ есть площадь $S(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x})$ параллелограмма, построенного на векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{x}$ (см. например, [5]). Следовательно, для нахождения $S(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x})$ придется использовать симметрическую часть $L_{(pq)}$ тензора L_{pq}. Заметим, что касательная плоскость базисного многообразия $B_a(2m, 2n)$ и плоскость ортогональная к плоскости конгруэнции можно отождествить. Рассмотрим такое смещение точки $\boldsymbol{M}$, так что плоскость в точке $\boldsymbol{M}_1$, натянутая на $\boldsymbol{m}$ и соответствующий $\boldsymbol{x}$ является симплектическим, т. е. $S(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x}) \neq 0$. Здесь $\boldsymbol{M}_1$ — проекция начала репера $\boldsymbol{M}$ на базисное многообразие $B_a(2m, 2n)$. Такое смещение существует всегда, если $S(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x}) = L_{pq} \omega^p \omega^q$ не обращается в нуль тождественно. При каждом таком направлении $\boldsymbol{m}$ на касательной $\boldsymbol{M}_1 + t\boldsymbol{m}$ базисного многообразия $B_a(2m, 2n)$ существуют две точки, координаты которых

$$x^p = \pm \frac{1}{S^{1/2}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{x})} \omega^p$$

удовлетворяют уравнению $L_{pq} x^p x^q = \pm 1$. Множество точек, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^p \boldsymbol{e}_p$ определяемое этим уравнением, назовем *индикатрисой конгруэнции для пары фиксированных точек* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ данной $2m$-плоскости. По каноническим видам симметрической матрицы $L_{(pq)}$ можно найти все типы левой части $L_{pq} x^p x^q$. Эти типы найдены в [4] (они приведены и в [3]).

Наконец объясним, как преобразуется $L = \|L_{pq}\|$, если пары точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ заменить новой парой точек $(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{X}')$ на этой же прямой MX.

Если переходим от точки $\boldsymbol{X}$ к точке $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M} + \lambda x^i \boldsymbol{e}_i$, то $'\Lambda^p{}_{iq} = \Lambda^p{}_{iq}$. Свертывая последнее равенство с $g_{rp} x^i$, получаем $g_{rp} x^{i\prime} \Lambda^p{}_{iq} = L_{rq}$. Так как $'x^i = \lambda x^i$, то при $\lambda \neq 0$ получаем $L_{rq} = 1/\lambda' L_{rq}$, т. е.

$$L = \frac{1}{\lambda} L'. \tag{2.4}$$

Если переходим от точки $\boldsymbol{M}$ к точке $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + \lambda x^i \boldsymbol{e}_i$, тогда $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M}' + (1-\lambda) x^i \boldsymbol{e}_i$. Итак, при $\lambda \neq 1$ получим $x^i = {}'x^i/(1-\lambda)$. Так как $d\boldsymbol{M}' = \ldots + (\omega^p + \lambda x^j \omega^p{}_j)\boldsymbol{e}_p$, то ${}'\omega^p = \omega^p + \lambda x^j \omega^p{}_j$. Отсюда следует, что ${}'\omega^p = (\delta^p{}_q + \lambda x^j \Lambda^p{}_{jq})\omega^q$. Но $\omega^p{}_i = \Lambda^p{}_{iq}\omega^q = {}'\Lambda^p{}_{iq}{}'\omega^q$. Следовательно, $\Lambda^p{}_{is} = (\delta^q{}_s + \lambda x^j \Lambda^q{}_{js}){}'\Lambda^p{}_{iq}$. Свертывая последнее равенство с $g_{tp}x^i$ и применяя $\Lambda^s{}_{iq}x^i = g^{sp}L_{pq}$, получаем

$$L_{st} = \frac{1}{1-\lambda}\,{}'L_{sq}(\delta^q{}_t + \lambda g^{qp}L_{pt}),$$

т. е.

$$L = \frac{1}{1-\lambda}\,{}'L(E + \lambda G^{-1}{}_2L). \qquad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) находят применение в параграфе 3.

§ 3. Исследование фокальной поверхности Φ конгруэнции по вектор-форме Ω_M

1. Допустим, что в рассматриваемом слое α конгруэнции существует такая прямая Δ, которая перпендикулярна к векторной 2-форме кручения $\Omega_M = \Omega^i \boldsymbol{e}_i$ в некоторой своей точке $\boldsymbol{M}$. Выбирая на прямой Δ еще одну точку $\boldsymbol{X}$, отличную от $\boldsymbol{M}$, можно определить величины L_{pq}, соответствующие паре $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$. Направляющий вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{MX}$ удовлетворяет $(\Omega_M, \boldsymbol{x}) = 0$, т. е. после выбора $\boldsymbol{M}$ за начало репера $T^i{}_{pq}x^j g_{ij} = 0$. Так как, в силу (1.10), имеем $T^i{}_{pq} = 2g^{ik}\delta^r{}_{[p}\Lambda^b{}_{|k|q]}g_{ks}$, то $L_{[pq]} = 0$. Следовательно, доказана

Лемма. *Если в слое конгруэнции существует прямая Δ, которая перпендикулярна к векторной 2-форме кручения Ω_M в некоторой своей точке $\boldsymbol{M}$, то тензор L_{pq} для пары $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{X}$ — любая точка прямой Δ, отличная от $\boldsymbol{M}$, симметричен.*

Найдем точки (фокусы) $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M} + \tau x^i \boldsymbol{e}_i$, в которых эта прямая Δ пересекает фокальную поверхность, заданную уравнением (2.3). Число фокусов на прямой Δ в общем случае равно $2(n-m)$. Из (2.3) получаем для их нахождения уравнение

$$\det \|\delta^p{}_q + \tau L^p{}_q\| = 0,$$

где $L^p{}_q = g^{ps}L_{sq}$. В случае симметричного тензора L_{sq} всевозможные канонические виды $L^p{}_q$ найдены в [4] (они перечислены также в [3]). Следовательно, можно охарактеризовать расположение фокусов на прямой Δ при помощи собственных значений $L^p{}_q$, которые, в свою очередь, находятся из уравнения

$$\det \|L^p{}_q - \lambda\delta^p{}_q\| = 0, \qquad (3.1)$$

где $\tau = -1/\lambda$. В зависимости от характера собственных значений возникают следующие возможности расположения соответствующих фокусов на прямой Δ.

a) В случае вещественного собственного значения $\lambda_0 \neq 0$ собственным значением для $L^p{}_q$ является также $-\lambda_0$. Элементарные делители делятся на пары $(\lambda - \lambda_0)^k$ и $(\lambda + \lambda_0)^k$. Каждой такой паре элементарных делителей соответствует на прямой Δ два фокуса, симметричных относительно начала репера. Каждый фокус является k-кратным.

b) В случае собственного значения $\lambda_0 = 0$ имеем $\tau_0 = \infty$, т. е. фокус, соответствующий элементарному делителю λ^k, является бесконечно удаленным k-кратным фокусом.

c) В случае мнимого собственного значения получим картину случая a), так как элементарные делители делятся снова на пары $(\lambda - \lambda_0)^k$ и $(\lambda + \lambda_0)^k$. На этот раз соответствующие фокусы мнимы. Следовательно, таким собственным значениям нет вещественных точек пересечения прямой Δ и фокальной поверхности.

Если мы ищем главные направления $x^p \boldsymbol{e}_p$ индикатрисы конгруэнции, данной для фиксированной пары $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, и фокальные направления $\omega^p \boldsymbol{e}_p$, то находим соответственно из систем

$$(L^p{}_q - \lambda \delta^p{}_q) x^q = 0, \tag{3.2}$$

$$(\delta^p{}_q + \tau L^p{}_q) \omega^q = 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, главные направления индикатрисы конгруэнции для такой пары $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, когда вектор-форма Ω_M в точке $\boldsymbol{M}$ перпендикулярна к $\boldsymbol{MX}$, совпадают с фокальными направлениями. В последних рассуждениях надо иметь в виду, что формулы (2.3) и (3.3) применимы только при условии $\boldsymbol{M} \notin \Phi$. Сформулируем результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если в слое конгруэнции существует прямая Δ, перпендикулярная к Ω в некоторой ее точке $\boldsymbol{M} \notin \Phi$, то она пересекает фокальную поверхность Φ в фокусах, которые симметричны относительно $\boldsymbol{M}$. При этом тип фокуса зависит от типа собственного значения λ матрицы $L^p{}_q$, данную для пары $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{X} \in \Delta$ и отлична от $\boldsymbol{M}$. Фокусы на прямой Δ могут быть вещественными при вещественном $\lambda \neq 0$, бесконечно удаленными при $\lambda = 0$, чисто-мнимыми при $\lambda = i\nu$ с $\nu \neq 0$ и мнимыми при $\lambda = \mu + i\nu$ с $\nu \neq 0$. Главные направления индикатрисы конгруэнции для пары фиксированных точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ при условии $\Omega_M \perp \Delta$ в точке $\boldsymbol{M} \notin \Phi$ совпадают с фокальными направлениями.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. *Если $\Omega_M = 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{M}$ данной $2m$-плоскости α конгруэнции, причем $\boldsymbol{M} \notin \Phi(\alpha)$, то любая прямая Δ проходящая через точку $\boldsymbol{M}$, либо*

a) *не пересекает фокальную поверхность $\Phi(\alpha)$, либо*

b) *пересекает фокальную поверхность $\Phi(\alpha)$ в точках, которые делятся на пары, симметричные относительно $\boldsymbol{M}$.*

Примечание. Если в паре точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, данной в теореме 1, заменить точку $\boldsymbol{X}$ новой точкой $\boldsymbol{X}' \in \Delta$, то по (2.4) главные направления индикатрис конгруэнции для пар $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ и $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}')$ одинаковы, а если заменить точку $\boldsymbol{M}$ новой точкой $\boldsymbol{M}' \in \Delta$, то по (2.5) в общем случае канонический вид $L^p{}_q$ не сохраняется (заметим, что в случае конгруэнции в евклидовом пространстве R_n он в подобной ситуации сохраняется; ср. [1]). Главные направления индикатрис конгруэнции для пар $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ и $(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{X})$ в общем случае не совпадают между собой.

2. В этом пункте докажем три теоремы.

Теорема 2. *Если в двух точках $2m$-плоскостей α конгруэнций, которые не находятся на фокальной поверхности Φ, вектор-форма кручения Ω перпендикулярна к прямой Δ, проходящей через эти точки, то Ω перпендикулярна к прямой Δ во всех точках этой прямой Δ. Индикатрисы для всех пар точек этой прямой имеют одинаковые главные направления, совпадающие с фокальными направлениями. Сама прямая Δ не пересекается с фокальной поверхностью $\Phi(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть Ω в точках $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_1$, где $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{M}_1$, перпендикулярна к прямой Δ, проходящей через $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_1$, т. е. $(\Omega_M, \boldsymbol{MM}_1) = (\Omega_{M_1}, \boldsymbol{MM}_1) = 0$. Из теоремы 1 статьи [3] следует, что в любой точке $\boldsymbol{M}' \in \Delta$ имеем $(\Omega_{M'}, \boldsymbol{MM}_1) = 0$. По теореме 1 конечные точки пересечения прямой Δ с фокальной поверхностью делятся на пары. Точки в каждой такой паре симметричны относительно некоторой точки $\boldsymbol{M}' \in \Delta$, в которой $\Omega_{M'} \perp \boldsymbol{MM}_1$. Если число таких точек $\boldsymbol{M}'$ больше одной (ими может быть вся прямая Δ), то конечных фокусов на прямой Δ нет, так как не удовлетворяется симметрия одновременно относительно всех точек прямой Δ. Следовательно, прямая Δ пепересекается с фокальной поверхностью только в своей бесконечно удаленной точке.

Из леммы следует, что каждой паре $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X} \in \Delta$ и $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{X}$, соответствующие величины L_{pq} симметричны. Следовательно, индикатрисы для всех пар $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X} \in \Delta$, $\boldsymbol{M} \notin \Phi$ и $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{X}$, имеют одинаковые главные направления, так как по теореме 1 главные направления у них совпадают с фокальными направлениями фокальной поверхности. Теорема доказана.

При предположениях теоремы 2 заметим, что фокальная поверхность Φ в $2m$-плоскости α конгруэнции не существует или является в направлении $\boldsymbol{MX}$ цилиндрической.

Примечание. Из теоремы 2 не следует, что при предположениях этой теоремы матрица L — нулевая. Например, если относительно некоторого симплектического базиса $\{\boldsymbol{e}_{2m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}\}$ матрица L имеет вид

$$L = \left\| \begin{matrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где $A = B_1 \dotplus \ldots \dotplus B_k$ и

$$B_\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad (\alpha = 1, \ldots, k),$$

то главные направления матрицы L при преобразовании (2.4) и (2.5) не изменяются.

Теорема 3. *Если при некоторой паре точек* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, *где* $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{M} \notin \Phi$, *матрица* $L = 0$, *то вектор-форма кручения* Ω_K *в любой точке* $\boldsymbol{K} \notin \Phi$ *данной* $2m$*-плоскости* α *перпендикулярна к прямой* Δ, *проходящей через* $\boldsymbol{M}$ *и* $\boldsymbol{X}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы выбираем в слое α симплектический репер $\{\boldsymbol{M}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2m}\}$, причем такой, что $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{MX}$. Так как $L = \|L_{pq}\| = 0$, то последнее равенство теперь дает $\Lambda^p{}_{1q} = 0$, а из (1.10) следует, что $\Omega^{m+1}{}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$. При любой точке $\boldsymbol{K} \in \alpha$, где $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M} + k^i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{K} \notin \Phi$, получим

$$\Omega_K{}^{m+1} = \Omega_M{}^{m+1} + k^j \Omega^{m+1}{}_j = \Omega_M{}^{m+1}.$$

Но $\Omega_M{}^i = g^{ik} \Lambda^q{}_{ks} g_{rq} \omega^r \wedge \omega^s$. Следовательно, $\Omega_M{}^{m+1} = \Omega_K{}^{m+1} = 0$. Так как при любом $\boldsymbol{K} \in \alpha$, причем $\boldsymbol{K} \in \Phi$ имеем

$$(\Omega_K, \boldsymbol{e}_1) = \Omega_K{}^i (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1) = -\Omega_K{}^{m+1} = 0,$$

то теорема доказана.

Теорема 4. *Если при парах* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}_\alpha)$, *где* $\alpha = 1, 2, \ldots, b$ *и* $\boldsymbol{M} \notin \Phi$ *и* $L = 0$, *то* $L = 0$ *и при парах* $(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{X})$, *где* $\boldsymbol{M}'$ *и* $\boldsymbol{X}$ *точки плоскости* π, *натянутой на точки* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_b$. *Плоскость* π *не пересекает фокальную поверхность* Φ. *В любой точке* $\boldsymbol{K}$ *рассматриваемой* $2m$*-плоскости вектор-форма* Ω_K *перпендикулярна к плоскости* π.

Для доказательства теоремы 4 обобщим формулы (2.4) и (2.5). Каждая пара точек $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}_\alpha)$ определяет $L_{(\alpha)pq} = g_{pr} \Lambda^r{}_{iq} x^i{}_{(\alpha)}$, где $\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{M} + x^i{}_{(\alpha)} \boldsymbol{e}_i$. Для пары $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{X} \in \pi$ (т. е. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^i \boldsymbol{e}_i$), выражаются $x^i = a^\alpha x^i{}_{(\alpha)}$ и $L_{pq} = g_{pr} \Lambda^r{}_{iq} x^i$. Подставляя в последнее соотношение x^i, получаем

$$L_{pq} = a^\alpha L_{(\alpha)pq}. \tag{3.4}$$

Пусть теперь изменяется начало репера на плоскости π. Если новое начало репера обозначим $\boldsymbol{M}'$, то $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + m^i \boldsymbol{e}_i$ и $m^i = a^\alpha x^i{}_{(\alpha)}$. При новом начале репера $\boldsymbol{M}'$

$$'\omega^p = (\delta^p{}_q + g^{ps} a^\alpha L_{(\alpha)pq}) \omega^q.$$

Так как $\omega^r{}_i = \Lambda^r{}_{iq} \omega^q = {}'\Lambda^r{}_{ip} {}'\omega^p$, то следует

$$\Lambda^r{}_{iq} = {}'\Lambda^r{}_{ip} (\delta^p{}_q + g^{pr} a^\alpha L_{(\alpha)pq}).$$

Свертывая последние соотношения с $g_{sr} m^i$, получаем

$$a^\alpha L_{(\alpha)sq} = {}'L_{sr} (\delta^r{}_q + g^{pr} a^\alpha L_{(\alpha)pq}), \tag{3.5}$$

где ${}'L_{sr} = g_{sr} {}'\Lambda^r{}_{ip} m^i$.

Доказательство теоремы 4. Так как $L_{(\alpha)pq}=0$, то из (3.4) и (3.5) следует $L_{pq}=0$ при любой паре $(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{X})$ точек из плоскости π. По теореме 3 прямая через точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{X}$ из плоскости π не пересекается с фокальной поверхностью. Так как $\boldsymbol{X}$ — любая отличная от $\boldsymbol{M}$ точка плоскости π, то плоскость π не пересекает фокальную плоскость Φ.

При доказательстве последней части теоремы 4 нужно учитывать, что π может быть симплектической плоскостью и симплектической плоскостью с дефектом (см. [5]).

Пусть π — симплектическая плоскость. Тогда ее размерность четна ($\dim \pi = 2k$) и можно направить базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k; \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+k}$ в плоскости π. Определим теперь $2k$ точек $'\boldsymbol{X}_\alpha (\alpha = 1, \ldots, k; \quad m+1, \ldots, m+k)$ формулой $'\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{M} + \delta^i{}_\alpha \boldsymbol{e}_i$ из плоскости π. По доказанной части теоремы 4 для пар точек $(\boldsymbol{M}, '\boldsymbol{X}_\alpha)$ величины $L_{(\alpha)pq} = g_{pr}\Lambda^r{}_{\alpha q} = 0$, т. е. $\Lambda^r{}_{\alpha q} = 0$.

Пусть π — симплектическая плоскость с дефектом. Тогда π имеет подплоскость $\pi_1 \subset \pi$ такую, что каждый вектор из π_1 перпендикулярен ко всем векторам плоскости π. Обозначим размерности плоскостей π и π_1 соответственно через l и l_1. Число l_1 называется *дефектом* плоскости π. При этом разность $l - l_1 = 2k$ (четна). Следовательно, в рассматриваемой $2m$-плоскости конгруэнции существует такой симплектический базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2m}\}$, что $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k+l_1}, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+k}$ находятся в плоскости π. Определим теперь l точек $'\boldsymbol{X}_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, k+l_1, m+1, \ldots, m+k)$ из π (как и в случае симплектической плоскости π) формулой $'\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{M} + \delta^i{}_\alpha \boldsymbol{e}_i$. По доказанной части теоремы 4 для пар точек $(\boldsymbol{M}, '\boldsymbol{X}_\alpha)$ величины $L_{(\alpha)pq} = g_{pr}\Lambda^r{}_{\alpha q}$, т. е. $\Lambda^r{}_{\alpha q} = 0$.

Остальная часть доказательства обоих случаев одинакова, только индексы α изменяются по разному. Поэтому мы выпишем параллельно формулы, полученные при симплектической плоскости и при симплектической плоскости π с дефектом. Учитывая $\Lambda^r{}_{\alpha q} = 0$ и (1.10), получаем, что при симплектической плоскости π

$$\begin{aligned}
&\Omega_M{}^1 = \ldots = \Omega_M{}^k = \Omega_M{}^{m+1} = \ldots = \Omega_M{}^{m+k} = 0,\\
&\Omega^j{}_1 = \ldots = \Omega^j{}_k = \Omega^{m+1}{}_j = \ldots = \Omega^{m+k}{}_j = 0,\\
&\Omega^j{}_{m+1} = \ldots = \Omega^j{}_{m+k} = \Omega^1{}_j = \ldots = \Omega^k{}_j = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

и при симплектической плоскости дефектом π

$$\begin{aligned}
&\Omega_M{}^1 = \ldots = \Omega_M{}^k = \Omega_M{}^{m+1} = \ldots = \Omega_M{}^{m+k+l_1} = 0,\\
&\Omega^j{}_1 = \ldots = \Omega^j{}_{k+l_1} = \Omega^{m+1}{}_j = \ldots = \Omega_j{}^{m+k+l_1} = 0,\\
&\Omega^j{}_{m+1} = \ldots = \Omega^j{}_{m+k} = \Omega^1{}_j = \ldots = \Omega^k{}_j = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как в любой точке $\boldsymbol{X}$ данной $2m$-плоскости $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^i \boldsymbol{e}_i$, то по (1.11) получим $\Omega^i{}_X = \Omega^i{}_M + \Omega^i{}_j x^j$. Следовательно, на основании (3.6) и (3.7) соответственно у векторов-форм Ω_X и Ω_M одинаковые координаты равны нулю. Теперь при любом векторе $\boldsymbol{y}$ из плоскости π скалярное произведение $(\Omega_X, \boldsymbol{y}) = 0$, т. е. Ω_X в любой точке $\boldsymbol{X}$ данной $2m$-плоскости перпендикулярна к плоскости π. Теорема доказана.

При предположениях теоремы 4 заметим, что фокальная поверхность Φ в $2m$-плоскости α конгруэнции в общем случае является в направлениях $\boldsymbol{MX}_\alpha (a = 1, \ldots, b)$ цилиндрической.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 12—46.
2. Мальцев А. И., Основы высшей алгебры, Москва—Ленинград, 1948.
3. Парринг А., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 21—45.
4. Яглом И. М., Квадратичные и кососимметричные билинейные формы в вещественном симплектическом пространстве. Тр. семинара по вектор. и тенз. анализу, 1950, **8**, 364—381.
5. Яглом И. М., О линейных подпространствах симплектического пространства. Тр. семинара по вектор. и тенз. анализу, 1952, **9**, 309—318.
6. Wagner, V., Differential geometry of the family of R_k's in B_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}'s in S_{n-1} of positive curwature. Матем. сб., 1942, **10** (**52**), 165—212.

Поступило
11 XII 1972

SPETSIAALSETE SISEKÕVERUSTEGA SÜMPLEKTILISTE $2m$-TASANDITE KONGRUENTSI FOKAALPINNA EHITUSEST

A. Parring

Resümee

Käesolev artikkel on artikli [3] järg. Afiinses-sümplektilises ruumis vaadeldakse sümplektilist tasandiparve, mil parve parameetrite ja parve tasandi mõõtme summa on võrdne afiinse-sümplektilise ruumi mõõtmega. Sel korral sümplektilist tasandiparve [6] järgi nimetatakse kongruentsiks. Artiklis uuritakse teatud klassi kongruentside fokaalpindu kongruentsi mingil tasandil. Kongruentsi klasside väljaeraldamine toimub väändevektori Ω_M abil. Fokaalpinna iseloomustus saadakse lõikepunktide kaudu, mis tekivad tema lõikamisel erinevate sirgetega.

ÜBER DIE STRUKTUR DER FOKALFLÄCHEN DER KONGRUENZ DER SYMPLEKTISCHEN $2m$-EBENEN MIT SPEZIELLEN INNEREN ZUSAMMENHÄNGEN

A. Parring

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel ist eine Fortsetzung des Artikels [3]. Im affinen symplektischen Raum wird solche Ebenenschar betrachtet, wo die Summe der Parameter der Schar und Dimension der symplektischen Ebene der Schar mit der Dimension des affinen symplektischen Raumes gleich ist. Nach [6] nennt man solche Ebenenschar Kongruenz. Im Artikel untersucht man die Fokalfläche $\Phi(\alpha)$ der Kongruenz gewisser Klassen. Die Forschung der Klassen der Kongruenz findet mit Hilfe des Torsionsvektors Ω_M statt. Die Charakteristik der Fokalfläche bekommt man durch die Schnittpunkte, welche beim Schneiden derer mit verschiedenen Geraden in der Ebene α der Kongruenz entstehen.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ОРБИТЫ В P_3 И ИХ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

А. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

§ 1. Введение

В работе [3] найдены все связные двупараметрические подгруппы Ли проективной группы $GP(3)$, действующие в P_3 таким образом, что пара $(P_3, GP(3))$ имеет коодноролность 1 и максимальные орбиты являются нелинейчатыми поверхностями. Вопрос о линейчатых орбитах остался там вне поля рассмотрения. Настоящая заметка посвящена изучению линейчатых орбит в P_3, а также свойств однородных пространств найденных орбит. Являясь естественным продолжением статьи [3], данная работа имеет с ней общую теоретическую базу и применяются те же самые обозначения.

В работе найдены все линейчатые орбиты пространства P_3 и их уравнения. Для каждой орбиты указано число плоскостей, инвариантных относительно стационарной подгруппы рассматриваемой орбиты. Выяснен вопрос о редуктивности однородных пространств, образованных полученными орбитами.

За реперы первого порядка, связанные с точкой данной линейчатой поверхности, примем такие, у которых плоскость $(E_0E_1E_2)$ касается поверхности в точке E_0. Тогда

$$\omega^3=0. \tag{1.1}$$

Потребуем, чтобы (E_0E_1) сохраняла фиксированное направление вдоль кривых $\omega^2=0$. Тогда необходимо

$$\omega^3{}_1=a\omega^2, \qquad \omega^2{}_1=a'\omega^2. \tag{1.2}$$

После внешнего дифференцирования из (1.1) и применения леммы Картана, учитывая (1.2), получим

$$\omega^3{}_2=a\omega^1+b\omega^2. \tag{1.3}$$

Дифференциальное продолжение уравнений (1.2) и (1.3) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} &[da-a(\omega^1{}_1+\omega^2{}_2-\omega^3{}_3-\omega^0{}_0-2a'\omega^1)]\wedge\omega^2=0,\\ &[da-a(\omega^1{}_1+\omega^2{}_2-\omega^3{}_3-\omega^0{}_0)]\wedge\omega^1+\\ &\quad+[db+b(\omega^0{}_0-2\omega^2{}_2+\omega^3{}_3)-2a\omega^1{}_2+a'b\omega^1]\wedge\omega^2=0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если $a = b = 0$, то $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0$ и дальнейшая канонизация невозможна. Искомая поверхность есть *плоскость.*

Пусть $a \equiv 0$ и $b \neq 0$, тогда всегда можно положить $b = 1$, заменив по мере надобности E_3 на $-E_3$. Этот случай соответствует *развертывающимся поверхностям*, ибо здесь

$$dE_2 = \omega^2{}_0 E_0 + \omega^1{}_2 E_1 + \omega^2{}_2 E_2 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^2),$$

т. е. касательная плоскость $(E_0 E_1 E_2)$ постоянна вдоль образующей $(E_0 E_1)$.

Если же $a \neq 0$, то всегда можем положить $a = 1$ и тогда, за счет формы $\omega^1{}_2$, принять $b = 0$. Геометрическое значение данной фиксации состоит в том, что точки E_1 и E_2 принадлежат асимптотическим направлениям в точке E_0 поверхности. Этот случай соответствует *линейчатым неразвертывающимся поверхностям.*

§ 2. Развертывающиеся орбиты

Известно, что развертывающиеся поверхности в проективном пространстве являются либо поверхностями касательных к некоторой кривой, либо коническими поверхностями. Поэтому естественно, что развертывающиеся орбиты являются либо поверхностями касательных к одномерным орбитам, либо конусами, направляющими которых являются плоские орбиты. Тесная связь развертывающихся орбит с одномерными и плоскими орбитами дает возможность их двоякого рассмотрения. С одной стороны, можно сначала изучить одномерные и плоские орбиты и затем из них уже получить развертывающиеся орбиты. Но развертывающиеся орбиты можно получить и непосредственно — они выделяются при подстановке значений $a = 0$, $b = 1$ в уравнения (1.2) и (1.3). Естественно дополняя исследования, начатые в [3], займемся непосредственным отысканием развертывающихся орбит.

Используя уравнения (1.4), можем записать:

Реперы порядка 2: восемь параметров,

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0, \qquad \omega^3{}_1 = 0, \qquad \omega^3{}_2 = \omega^2, \\ \omega^2{}_1 = a'\omega^2, \qquad \omega^1{}_1 + 3\omega^2{}_2 = a'\omega^1 + b'\omega^2; \end{gathered} \tag{2.1}$$

здесь мы учитывали, что $\omega^0{}_0 + \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^3{}_3 = 0$.

Новое внешнее дифференцирование приводит к уравнениям

$$\delta a' - a'(\pi^1{}_1 - \pi^0{}_0) - \pi^0{}_1 = 0,$$

$$\delta b' - b'(\pi^0{}_0 - \pi^2{}_2) - 3\pi^0{}_2 - 3a'\pi^1{}_2 + 3\pi^2{}_3 = 0.$$

Без ограничения общности можем принять $a' = b' = 0$, тогда

$$\omega^2{}_1 = 0, \quad \omega^1{}_1 + 3\omega^2{}_2 = 0.$$

Репер порядка 3: шесть параметров.

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = 0, \quad \omega^3{}_2 = \omega^2, \quad \omega^2{}_1 = 0, \quad \omega^1{}_1 + 3\omega^2{}_2 = 0, \\ \omega^0{}_1 = 3a''\omega^2, \quad \omega^0{}_2 - \omega^2{}_3 = a''\omega^1 + b''\omega^2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

После дифференцирования последних соотношений получаем

$$[da''+2a''(\omega^0{}_0+\omega^2{}_2)]\wedge\omega^2=0,$$
$$+[da''+2a''(\omega^0{}_0+\omega^2{}_2)]\wedge\omega^1+$$
$$+[db''+2\omega^0{}_3+2b''(\omega^0{}_0-\omega^2{}_2)-4a''\omega^1{}_2]\wedge\omega^2=0,$$

откуда

$$\delta a''+2a''(\pi^0{}_0+\pi^2{}_2)=0,$$
$$\delta b''+2\pi^0{}_3+2b''(\pi^0{}_0-\pi^2{}_2)-4a''\pi^1{}_2=0.$$

I. Пусть $a''\neq 0$ (противный случай будет рассмотрен ниже); тогда можно нормировать $a''=1$, $b''=0$, заменив, если требуется, E_1 на $-E_1$. Получаем:

Репер порядка 4: четыре параметра,

$$\begin{gathered}\omega^3=0,\quad \omega^3{}_1=0,\quad \omega^3{}_2=\omega^2,\quad \omega^2{}_1=0,\quad \omega^1{}_1+3\omega^2{}_2=0,\\ \omega^0{}_1=3\omega^2,\quad \omega^0{}_2-\omega^2{}_3=\omega^1,\\ \omega^0{}_0+\omega^2{}_2=a\omega^2,\quad \omega^0{}_3-2\omega^1{}_2=a\omega^1+\beta\omega^2.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Дифференциальное продолжение системы (2.3) приводит к

$$[da+a(\omega^0{}_0-\omega^2{}_2)+\omega^0{}_2-4\omega^1]\wedge\omega^2=0,$$
$$[da+a(\omega^0{}_0-\omega^2{}_2)+\omega^0{}_2]\wedge\omega^1+$$
$$+[d\beta+\beta(\omega^0{}_0-\omega^2{}_2)-4\beta\omega^2{}_2-2a\omega^0{}_3-a\omega^1{}_2-5\omega^1{}_3]\wedge\omega^2=0,$$

откуда

$$\delta\beta-2\beta\pi^2{}_2+\pi^0{}_2=0,$$
$$\delta\beta-6\beta\pi^2{}_2-3a\pi^0{}_3-5\pi^1{}_3=0,$$

что дает возможность принять $a=\beta=0$. Тогда $\omega^0{}_0+\omega^2{}_2=0$, $\omega^0{}_3-2\omega^1{}_2=0$ и

$$\begin{gathered}\omega^0{}_2=4\omega^1-5\gamma'\omega^2,\\ \omega^1{}_3=\gamma'\omega^1+\lambda'\omega^2.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Внешнее дифференцирование равенств (2.4) приводит к

$$\begin{gathered}[d\gamma'-4\gamma'\omega^2{}_2+\omega^1{}_2]\wedge\omega^2=0,\\ [d\gamma'-4\gamma'\omega^2{}_2+\omega^1{}_2]\wedge\omega^1+[d\lambda'-6\gamma'\omega^1{}_2-8\lambda'\omega^2{}_2]\wedge\omega^2=0,\end{gathered}\tag{2.5}$$

откуда

$$\delta\gamma'-4\gamma'\pi^2{}_2+\pi^1{}_2=0,$$
$$\delta\lambda'-6\gamma'\pi^1{}_2-8\lambda'\pi^2{}_2=0.$$

За счет $\pi^1{}_2$ можно принять $\gamma'=0$.

1. Если $\lambda'\neq 0$, то можно взять $\lambda'=\pm 1$. Тогда $\omega^0{}_2=4\omega^1$, $\omega^1{}_3=\pm\omega^2$, и из уравнений (2.5) имеем

$$\begin{gathered}\omega^1{}_2=8A\omega^2,\\ \mp\omega^2{}_2=A\omega^1+B\omega^2.\end{gathered}\tag{2.6}$$

Канонизация репера закончена, все формы $\omega^j{}_i$ выражаются через главные ω^1 и ω^2.

Рассматриваемая поверхность является орбитой некоторой подгруппы Ли проективных преобразований тогда и только тогда, когда ее инварианты A и B являются постоянными. Из формул (2.6) путем внешнего дифференцирования получаем

$$A=0,\quad 4AB=\pm 1.$$

Возникающее противоречие указывает на то, что среди развертывающихся поверхностей данного типа орбит нет.

2. Орбита $R1$. Рассмотрим случай $\gamma' = \lambda' = 0$. Тогда $\omega^1{}_3 = 0$, $\omega^0{}_2 = 4\omega^1$ и, кроме того, из (2.5) следует уравнение $\omega^1{}_3 = 0$, внешнее дифференцирование которого дает тождество. Следовательно, развертывающаяся поверхность определяется в этом случае вполне интегрируемой системой. Построенный репер зависит в данной точке от одного параметра, так как остается вторичная компонента $\pi^2{}_2$. Перемещения канонического репера определяются уравнениями

$$\begin{aligned} dE_0 &= -\omega^2{}_2 E_0 + \omega^1 E_1 + \omega^2 E_2, \\ dE_1 &= 3\omega^2 E_0 - 3\omega^2{}_2 E_1, \\ dE_2 &= 4\omega^1 E_0 + \omega^2{}_2 E_2 + \omega^2 E_3, \\ dE_3 &= 3\omega^1 E_2 + 3\omega^2{}_2 E_3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Условия интегрируемости:

$$d\omega^2{}_2 = \omega^1 \wedge \omega^2, \qquad d\omega^1 = 2\omega^2{}_2 \wedge \omega^1, \qquad d\omega^2 = -2\omega^2{}_2 \wedge \omega^2.$$

Полученная развертывающая орбита является геометрическим местом касательных к ребру возврата, которое, в свою очередь, должно быть одномерной орбитой.

II. Простой анализ показывает, что случай $a'' = 0$ приводит к коническим орбитам. Любая коническая орбита в P_3 получается из соответствующей плоской орбиты в P_2, рассматриваемой в качестве ее направляющей. Все плоские орбиты найдены в [2].

§ 3. Линейчатые орбиты

Применяя к уравнениям (1.4) при $a = 1$, $b = 0$ лемму Картана, можем записать:

Реперы порядка 2:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = a'\omega^2,$$
$$\omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 = a'\omega^1 + b'\omega^2, \quad \omega^1{}_2 = b'\omega^1 + c'\omega^2.$$

Для вариаций коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} &\delta a' + a'(\pi^0{}_0 - \pi^1{}_1) + \pi^2{}_3 - \pi^0{}_1 = 0, \\ &\delta b' + b'(\pi^0{}_0 - \pi^2{}_2) + \pi^1{}_3 - \pi^0{}_2 = 0, \\ &\delta c' + c'(\pi^0{}_0 + \pi^1{}_1 - 2\pi^2{}_2) = 0, \end{aligned}$$

что дает возможность всегда взять $a' = b' = 0$.

Покажем, что при $a' = b' = c' = 0$ данная орбита является квадрикой. Запишем:

Реперы порядка 3: пять параметров,

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = \omega^1{}_2 = 0,$$
$$\omega^1{}_1 = -\omega^2{}_2, \quad \omega^0{}_0 = -\omega^3{}_3.$$
$$\omega^3{}_2 - \omega^0{}_1 = a''\omega^2, \quad \omega^1{}_3 - \omega^0{}_2 = a''\omega^1.$$

Последние два соотношения, полученные внешним дифференцированием уравнений $\omega^2{}_1 = 0$, $\omega^1{}_2 = 0$, $\omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 = 0$, дают

$$(da'' - 2a''\omega^3{}_3 - 2\omega^0{}_3) \wedge \omega^2 = 0,$$
$$(da'' - 2a''\omega^3{}_3 - 2\omega^0{}_3) \wedge \omega^1 = 0,$$

откуда

$$da'' - 2a''\omega^3{}_3 - 2\omega^0{}_3 = 0.$$

За счет $\omega^0{}_3$ можно положить $a'' = 0$. Тогда

$$\omega^0{}_3 = 0, \quad \omega^2{}_3 = \omega^0{}_1, \quad \omega^1{}_3 = \omega^0{}_2.$$

Дальнейшая канонизация невозможна и полученный репер зависит от четырех параметров.

Реперы порядка 4:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = \omega^1{}_2 = 0,$$
$$\omega^1{}_1 = -\omega^2{}_2, \quad \omega^0{}_0 = -\omega^3{}_3,$$
$$\omega^0{}_3 = 0, \quad \omega^3{}_2 = \omega^0{}_1, \quad \omega^1{}_3 = \omega^0{}_2.$$

Рассматриваемая поверхность является квадрикой с уравнением

$$x^0x^3 = x^1x^2.$$

Это нетрудно показать, ибо уравнения стационарности квадрики $a_{ij}x^ix^j = 0$ в проективном пространстве задаются соотношениями $da_{ij} = a_{ik}\omega^k{}_j + a_{kj}\omega^k{}_i + a_{ij}\theta$, где θ — некоторая дифференциальная форма (см. [1], стр. 359).

Если $c' \neq 0$ при $a' = b' = 0$, то всегда можно нормировать репер, приняв $c' = 1$. В общем случае для линейчатой неразвертывающейся поверхности получаем:

Реперы порядка 3: четыре параметра,

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = 0,$$
$$\omega^1{}_2 = \omega^2, \quad \omega^1{}_1 = -\omega^2{}_2, \quad \omega^0{}_0 = -\omega^3{}_3,$$
$$\omega^2{}_3 - \omega^0{}_1 = a''\omega^2,$$
$$\omega^1{}_3 - \omega^0{}_2 = a''\omega^1 + b''\omega^2,$$
$$\omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = b''\omega^1 + c''\omega^2.$$

Последние три соотношения дают

$$\delta a'' - 2a''\pi^3{}_3 - 2\pi^0{}_3 = 0,$$
$$\delta b'' + 4b''\pi^2{}_2 - 2\pi^2{}_3 = 0,$$
$$\delta c'' + 2c''\pi^2{}_2 + 4\pi^1{}_3 = 0.$$

Можем нормировать реперы третьего порядка, положив $a'' = b'' = c'' = 0$. Дальнейшим внешним дифференцированием находим:

Реперы порядка 4: один параметр,

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = 0,$$
$$\omega^1{}_2 = \omega^2 \quad \omega^1{}_1 = -\omega^2{}_2, \quad \omega^0{}_0 = 3\omega^2{}_2, \quad \omega^3{}_3 = -3\omega^2{}_2,$$
$$\omega^2{}_3 = \omega^0{}_1, \quad \omega^1{}_3 = \omega^0{}_2, \quad \omega^0{}_3 = A\omega^2,$$
$$\omega^0{}_1 = A\omega^1 + 2B\omega^2, \quad \omega^0{}_2 = -B\omega^1 + C\omega^2.$$

Для вариаций коэффициентов отсюда имеем

$$\delta A + 8A\pi^2{}_2 = 0,$$
$$\delta B + 6B\pi^2{}_2 = 0,$$
$$\delta C + 4C\pi^2{}_2 = 0.$$

5*

Таким образом, все коэффициенты определены с точностью до постоянного множителя и, если среди них существует отличный от нуля, то его можно положить равным ± 1. При этом однако всегда удается найти такое преобразование репера, при котором рассматриваемый коэффициент изменит знак на противоположный. Если один из коэффициентов полагаем равным единице, то сразу $\pi^2{}_2 = 0$, и остальные коэффициенты становятся абсолютными инвариантами поверхности. Кроме того,

$$\omega^2{}_2 = D\omega^1 + F\omega^2,$$

так как теперь все вторичные параметры фиксированы.

Орбита $L1$. Пусть $A = B = C = 0$; тогда построенный репер зависит в каждой точке от одного параметра.

Реперы порядка 5: один параметр.

$$\begin{gathered}\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_1 = \omega^2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^1, \quad \omega^2{}_1 = 0,\\ \omega^1{}_2 = \omega^2, \quad \omega^1{}_1 = -\omega^2{}_2, \quad \omega^0{}_0 = 3\omega^2{}_2, \quad \omega^3{}_3 = -3\omega^2{}_2,\\ \omega^0{}_3 = \omega^1{}_3 = \omega^2{}_3 = \omega^0{}_1 = \omega^0{}_2 = 0.\end{gathered}$$

Условия интегрируемости следующие:

$$d\omega^1 = 4\omega^2{}_2 \wedge \omega^1, \quad d\omega^2{}_2 = 2\omega^2{}_2 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2{}_2 = 0. \tag{3.1}$$

Перемещения репера определяются уравнениями

$$\begin{aligned} dE_0 &= 3\omega^2{}_2 E_0 + \omega^1 E_1 + \omega^2 E_2,\\ dE_1 &= -\omega^2{}_2 E_1 + \omega^2 E_3,\\ dE_2 &= \omega^2 E_1 + \omega^2{}_2 E_2 + \omega^1 E_3,\\ dE_3 &= -3\omega^2{}_2 E_3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая (3.1), полагаем

$$\omega^2{}_2 = dt, \quad \omega^1 = e^{4t}\, du, \quad \omega^2 = e^{2t}\, dv.$$

Теперь из (3.2) последовательно находим

$$\begin{aligned} E_3 &= e^{-3t}\mathfrak{B}_1,\\ E_1 &= e^{-t}(\mathfrak{B}_1 v + \mathfrak{B}_2),\\ E_2 &= e^{t}\left[\left(\frac{1}{2}v^2 + u\right)\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 v + \mathfrak{B}_3\right],\\ E_0 &= e^{3t}\left[\left(\frac{1}{6}v^3 + 2vu\right)\mathfrak{B}_1 + \left(\frac{1}{2}v^2 + u\right)\mathfrak{B}_2 + v\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4\right]. \end{aligned}$$

В неоднородных координатах уравнение поверхности можно привести к виду

$$z = xy - \frac{1}{3}y^3.$$

Эта поверхность известна под названием *поверхности Кэли* (см. [2], стр. 420). Отметим, что полученная орбита является орбитой и в аффинном пространстве A_3, так как здесь $\omega^0{}_1 = \omega^0{}_2 = \omega^0{}_3 = 0$.

Пусть теперь не все из коэффициентов A, B, C равны нулю. В этом случае условия интегрируемости принимают вид

$$
\begin{aligned}
&d\omega_1=-4F\omega^1\wedge\omega^2,\\
&d\omega^2=2D\omega^1\wedge\omega^2,\\
&AD=0,\\
&2AF=3BD,\\
&3BF=-2CD,\\
&B=-2DF.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Система из последних четырех уравнений (3.3) имеет два решения:

1) $A=B=D=0$, C и F — произвольные $(C\neq 0)$;
2) $B=D=F=0$, A и C — произвольные $(A^2+C^2\neq 0)$.

При этом один из отличных от нуля коэффициентов всегда может быть приведен к единице. Следовательно, имеются две возможности:

$L2$. $A=B=D=0$, $C=1$, F является инвариантом,
$L3$. $B=D=F=0$, $A=1$, C является инвариантом.

Каждому из полученных решений отвечает определенная подгруппа проективной группы, являющаяся стационарной подгруппой соответствующей орбиты. Перейдем к нахождению конечных уравнений полученных орбит и заодно выясним вопрос о существовании плоскостей, инвариантных относительно стационарной подгруппы рассматриваемой орбиты. Способ отыскания таких плоскостей описан нами подробно в [3].

Орбита $L2$. Преобразуем репер (E_0, E_1, E_2, E_3) с помощью матрицы

$$
\mathfrak{B}=\begin{Vmatrix}-64b^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16b^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},
$$

где b удовлетворяет соотношению

$$
b^2-2Fb-1=0.
$$

Тогда матрица пар коэффициентов разложений форм $\omega^j{}_i$ по формам ω^1, ω^2 примет вид

$$
\mathfrak{A}=\left\Vert\begin{array}{c|cc|cc|cc|c}
0 & F-b & 16b^2 & 0 & 0 & -4b & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -(F+b) & 0 & 0 & 0 & -4b\\
0 & 0 & 0 & -4b & 0 & F+b & 16b^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3F
\end{array}\right\Vert,
$$

то есть выделяются две инвариантных плоскости (при различных b), линия пересечения которых дает инвариантную прямую. Следовательно, возможен переход к аффинному пространству, причем, если положить

$$
\Theta^1=16b^2\omega^1,\qquad \Theta^2=-4b\omega^2,\qquad r=\frac{b-F}{4F},
$$

то, приняв $\Theta^2=dv$, $\Theta^1=e^{(4r-1)v}du$, приходим к следующим уравнениям перемещения канонического репера:

$$dE_0 = \left(3r - \frac{1}{2}\right) dvE_0 + e^{(4r-1)v}\, duE_1 + dvE_2$$

$$dE_1 = \left(\frac{1}{2} - r\right) dvE_1 + dvE_3,$$

$$dE_2 = dvE_1 + \left(r - \frac{1}{2}\right) dvE_2 + e^{(4r-1)v}\, duE_3,$$

$$dE_3 = \left(\frac{1}{2} - 3r\right) dvE_3.$$

Последовательным интегрированием получим

$$E_0 \cdot e^{\left(\frac{1}{2} - 3r\right)v} = -\frac{1}{2r} e^{-2rv}\mathfrak{B}_1 u + u\mathfrak{B}_2 - $$
$$- \frac{1}{2} e^{-2rv}(u\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_3) - \frac{e^{(1-6r)v}}{2r(1-4r)(1-6r)} \mathfrak{B}_1 +$$
$$+ \frac{e^{(1-4r)v}}{(1-2r)(1-4r)} \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_4, \qquad \left(r \neq 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right).$$

Уравнение такой поверхности можно в неоднородных координатах записать в виде

$$x = yz + z^{\frac{6r-1}{2r}} \qquad \left(r \neq 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right).$$

Интегрирование системы в выделившихся случаях не представляет сложности и дает следующие результаты:

$$x = yz + z^2 \ln z \quad \text{при} \quad r = 1/2,$$
$$x = yz + z \ln z \quad \text{при} \quad r = 1/4,$$
$$x = yz + \ln z \quad \text{при} \quad r = 1/6.$$

Орбита $L3$. Здесь $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$, т. е. можно принять $\omega^1 = du$, $\omega^2 = dv$. Уравнения перемещения репера запишутся в виде

$$dE_0 = duE_1 + dvE_2,$$
$$dE_1 = duE_0 + dvE_3,$$
$$dE_2 = C\,dvE_0 + dvE_1 + duE_3,$$
$$dE_3 = dvE_0 + C\,dvE_1 + duE_2,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial u^2} = E_0, \qquad \frac{\partial^2 E_0}{\partial v^2} = CE_0 + \frac{\partial E_0}{\partial u}.$$

Первое из этих уравнений дает

$$E_0 = e^u P(v) + e^{-u} Q(v),$$

а второе — систему для $P(v)$ и $Q(v)$:

$$P''(v) = (C+1)P(v),$$
$$Q''(v) = (C-1)Q(v).$$

В итоге получаем, что

a) при $C>1$

$$E_0=e^u(e^{\sqrt{C+1}v}\mathfrak{V}_1+e^{-\sqrt{C+1}v}\mathfrak{V}_2)+e^{-u}(e^{\sqrt{C-1}v}\mathfrak{V}_3+e^{-\sqrt{C-1}v}\mathfrak{V}_4)$$

или в неоднородных координатах

$$x=yz^{\alpha},\qquad \text{где}\qquad \alpha=\sqrt{\frac{C+1}{C-1}}>1;$$

b) при $C=1$

$$E_0=e^u(e^{\sqrt{2}\,v}\mathfrak{V}_1+e^{-\sqrt{2}\,v}\mathfrak{V}_2)+e^{-u}(v\mathfrak{V}_3+\mathfrak{V}_4),$$

или

$$x=ye^{2\sqrt{2}\,z};$$

c) при $|C|<1$

$$E_0=e^u(e^{\sqrt{C+1}\,v}\mathfrak{V}_1+e^{-\sqrt{C+1}\,v}\mathfrak{V}_2)+$$
$$+e^{-u}(\cos\sqrt{1-C}\,v\mathfrak{V}_3+\sin\sqrt{1-C}\,v\mathfrak{V}_4),$$

или

$$x=e^{-2u+\sqrt{C+1}\,v}\cos\sqrt{1-C}\,v,$$
$$y=e^{-2u+\sqrt{C+1}\,v}\sin\sqrt{1-C}\,v,$$
$$z=e^{2\sqrt{C+1}\,v};$$

d) при $C=-1$

$$E_0=e^u(v\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)+e^{-u}(\cos\sqrt{2}\,v\mathfrak{V}_3+\sin\sqrt{2}\,v\mathfrak{V}_4),$$

или

$$x=e^{-2u}\cos\sqrt{2}\,v,$$
$$y=e^{-2u}\sin\sqrt{2}\,v,$$
$$z=v;$$

полученная поверхность есть проективный образ прямого геликоида;

e) $C<-1$

$$E_0=e^u(\cos\sqrt{-(1+C)}\,v\mathfrak{V}_1+\sin\sqrt{-(1+C)}\,v\mathfrak{V}_2)+$$
$$+e^{-u}(\cos\sqrt{1-C}\,v\mathfrak{V}_3+\sin\sqrt{1-C}\,v\mathfrak{V}_4)$$

или

$$x=e^u\cos\sqrt{-(1+C)}\,v,$$
$$y=e^u\sin\sqrt{-(1+C)}\,v,$$
$$z=e^{-u}\cos\sqrt{1-C}\,v,$$
$$t=e^{-u}\sin\sqrt{1-C}\,v.$$

Стационарная подгруппа данной орбиты оставляет инвариантными и некоторые плоскости. При $C > 1$ выделяются четыре инвариантные плоскости, при $C = 1$ выделяются три инвариантные плоскости, при $|C| < 1$ выделяются две инвариантные плоскости, при $C = -1$ выделяется одна инвариантная плоскость. Если же $C < -1$, то выделение инвариантной плоскости невозможно. Это говорит о том, что данная орбита является чисто проективной орбитой. Все остальные орбиты, получающиеся при $C \geqslant -1$, являются орбитами и в аффинном пространстве A_3.

§ 4. О редуктивности однородных пространств линейчатых орбит

Следуя [3], рассмотрим вопрос редуктивности однородных пространств, полученных выше линейчатых орбит с действующей на них группой проективных преобразований G. Стационарная подгруппа $H \subset G$ «точки» многообразия орбит задается системой дифференциальных уравнений $\Theta^a = 0$. Дополнительное подпространство K, где $g = h \oplus K$ и $[hK] \subset K$, представляется как аннулятор линейно независимых форм $\vartheta^\alpha = \omega^\alpha + p^\alpha{}_a \Theta^a$, где ω^a — формы, дополняющие до полного кобазиса алгебры Ли g систему форм Θ^a, а $p^\alpha{}_a$ — постоянные коэффициенты.

Однородное пространство орбит $R1$. Стационарная подгруппа H рассматриваемой орбиты задается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll}
\Theta^1 \equiv \omega^3 = 0, & \Theta^5 \equiv \omega^1{}_1 + 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_2 = 0, \\
\Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 = 0, & \Theta^6 \equiv \omega^0{}_1 - 3\omega^2 = 0, & \Theta^{10} \equiv \omega^0{}_3 = 0, \\
\Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 + \omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{11} \equiv \omega^0{}_2 - 4\omega^1 = 0, \\
\Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^1{}_3 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^2{}_3 - 3\omega^1 = 0.
\end{array}$$

Однородное пространство орбит $R1$ изоморфно однородному пространству $GP(3)/H$ левых смежных классов проективной группы $GP(3)$ по подгруппе H.

Однородное пространство орбит $R1$ является редуктивным с единственным оснащением K подгруппы H, задаваемым как аннулятор форм

$$\begin{aligned}
\vartheta^1 &= 3\omega^1 + \omega^0{}_2 + \omega^2{}_3, \\
\vartheta^2 &= 4\omega^2 + 3\omega^3{}_2 + \omega^0{}_1, \\
\vartheta^3 &= 2\omega^0{}_0 + 3\omega^1{}_1 + \omega^2{}_2.
\end{aligned}$$

Как показывает исследование, *однородные пространства конических орбит не являются редуктивными.*

Перейдем к рассмотрению однородных пространств линейчатых неразвертывающихся орбит.

Однородное пространство орбит $L1$. Стационарная подгруппа H этой орбиты задается системой:

$$\begin{array}{lll}
\Theta^1 \equiv \omega^3 = 0, & \Theta^5 \equiv \omega^1{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_3 = 0, \\
\Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^6 \equiv \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{10} = \omega^2{}_3 = 0, \\
\Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^1 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{11} \equiv \omega^0{}_1 = 0, \\
\Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^0{}_3 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^0{}_2 = 0.
\end{array}$$

Базис дополнительного к h подпространства K можно представить как аннулятор форм

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a \Theta^a, \quad \vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a \Theta^a, \quad \vartheta^3 = \omega^2{}_2 + p^3{}_a \Theta^a \quad (a = 1, \ldots, 12).$$

Найдя $d\vartheta^1$, сравним коэффициенты при внешних произведениях $\Theta^2 \wedge \vartheta^2$ и $\Theta^5 \wedge \vartheta^2$, откуда сразу получим противоречие: $p^1{}_3 = 0$ и $-1 + 2p^1{}_3 = 0$. Следовательно, *однородное пространство поверхностей Кэли не является редуктивным.*

Однородное пространство орбит $L2$. Стационарная подгруппа H такой орбиты задается в виде

$$\begin{array}{lll}
\Theta^2 = \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^0{}_2 - \omega^2 = 0, \\
\Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^0{}_2 - \omega^2 = 0, \\
\Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^1 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^0{}_3 = 0, & \Theta^{13} \equiv \omega^2{}_2 - F\omega^2 = 0, \\
\Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_3 - \omega^2 = 0, & \\
\Theta^5 \equiv \omega^1{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^{10} \equiv \omega^2{}_3 = 0, &
\end{array}$$

а базис оснащающего подпространства K — как аннулятор форм

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a \Theta^a, \quad \vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a \Theta^a \quad (a = 1, \ldots, 13).$$

Можно сразу принять $F \neq 0$, так как в противном случае противоречие получается немедленно. Найдем $d\vartheta^1$, тогда из коэффициентов при $\Theta^7 \wedge \vartheta^1$ и $\Theta^{13} \wedge \vartheta^1$ следует

$$p^2{}_7 = \frac{1}{4F}, \quad p^2{}_{13} = \frac{1}{F},$$

что противоречит значению коэффициента при $\Theta^{10} \wedge \vartheta^1$ (полученного из $d\vartheta^2$), равного $p^2{}_{13} - 2p^2{}_7$.

Следовательно, *однородное пространство орбит $L2$ не является редуктивным.*

Однородное пространство орбит $L3$. Подгруппа стационарности этой орбиты задается уравнениями:

$$\begin{array}{lll}
\Theta^1 \equiv \omega^3 = 0, & \Theta^6 \equiv \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{11} \equiv \omega^0{}_1 - \omega^1 = 0, \\
\Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^0{}_2 - C\omega^2 = 0, \\
\Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^1 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^0{}_3 - \omega^2 = 0, & \Theta^{13} \equiv \omega^2{}_2 = 0. \\
\Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_3 - C\omega^2 = 0, & \\
\Theta^5 \equiv \omega^1{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^{10} \equiv \omega^2{}_3 - \omega^1 = 0, &
\end{array}$$

Базис оснащающего подпространства K представим как аннулятор форм

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a \Theta^a, \quad \vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a \Theta^a \quad (a = 1, \ldots, 13).$$

1. Пусть $C \neq 0$, тогда система для нахождения неизвестных имеет следующее решение:

$$p^1{}_1 = p^1{}_4 = \frac{C^2 - 1}{C} p^1{}_8, \qquad p^1{}_2 = p^1{}_6 = p^1{}_7 = p^1{}_{13} = 0,$$

$$p^1{}_3 = p^1{}_{10} = p^1{}_{11} = \frac{1}{4}, \qquad p^1{}_5 = p^1{}_8, \qquad p^1{}_9 = p^1{}_{12} = -\frac{1}{C} p^1{}_8;$$

$$p^2{}_1 = p^2{}_4 = \frac{4(C^2 - 1) p^2{}_8 + 1}{4C}, \qquad p^2{}_2 = \frac{1}{4},$$

$$p^2{}_3 = p^2{}_6 = p^2{}_7 = p^2{}_{10} = p^2{}_{11} = p^2{}_{13} = 0, \qquad p^2{}_5 = p^2{}_8, \qquad p^2{}_9 = \frac{1 - 4p^2{}_8}{4C}.$$

2. При $C = 0$ решение имеет вид

$$p^1{}_1 = p^1{}_4 = p^1{}_9 = p^1{}_{12}, \qquad p^1{}_2 = p^1{}_6 = p^1{}_7 = p^1{}_5 = p^1{}_8 = p^1{}_{13} = 0,$$

$$p^1{}_3 = p^1{}_{10} = p^1{}_{11} = \frac{1}{4};$$

$$p^2{}_1 = p^2{}_4 = p^2{}_9 = p^2{}_{10}, \qquad p^2{}_3 = p^2{}_6 = p^2{}_7 = p^2{}_{10} = p^2{}_{11} = p^2{}_{13} = 0,$$

$$p^2{}_2 = p^2{}_5 = p^2{}_8 = \frac{1}{4}.$$

Итак, *однородное пространство орбит L3 всегда редуктивно*, причем в обоих случаях оснащающие подпространства составляют двупараметрическое семейство.

Отметим, что *симметрических однородных пространств орбит среди рассмотренных не существует.*

В заключение хочу поблагодарить проф. Ю. Г. Лумисте, под непосредственным руководством которого была написана данная работа.

Литература

1. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, **2**, 275—382.
2. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва, 1960.
3. Фляйшер А., О двумерных орбитах в действительном P_3 и их однородных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 96—115.

Поступило
16 III 1973

JOONPIND-ORBIIDID RUUMIS P_3 JA NENDE HOMOGEENSED RUUMID

A. Flaišer

Resümee

Käesolevas töös jätkatakse ruumis P_3 kahedimensionaalsete orbiitide ja nendest moodustavate homogeensete ruumide uurimist, mida alustati artiklis [3]. Leitakse kõik joonpindadeks osutuvad orbiidid ja nende võrrandid. Lisaks

uuritakse selliste tasandite olemasolu, mis on kas invariantsed vastavate statsionaarsusalamrühmade suhtes. Selgitatakse millised kõnesolevatest homogeensetest ruumidest on reduktiivsed. Osutub, et sümmeetrilisi ruume nende seas pole.

REGELORBITEN IM P_3 UND IHRE KLEINSCHEN RÄUME

A. Fleischer

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit setzt die Forschung der zweidimensionalen Orbiten des Raums P_3 und ihrer Kleinschen Räume, angefangen in [3], fort. Im Artikel werden alle Regelorbiten und ihre Gleichungen bestimmt. Außerdem ist die Frage der Existenz der Ebenen, welche in Bezug auf entsprechende stationäre Untergruppen invariant bleiben, aufgeklärt. Weiter sind aus allen Kleinschen Räumen der betrachteten Orbiten reduktive Kleinsche Räume ausgesucht. Symmetrische Räume existieren unter den untersuchten nicht.

К РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕИЗОТРОПНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

И. Маазикас

Кафедра алгебры и геометрии

Изучению дифференциальной геометрии грассмановых многообразий m-мерных подпространств n-мерного евклидова или эрмитова векторного пространства положили начало К. Телеман [5] и К. Лейхтвейсс [4]. В [4] найдены все римановы метрики на действительных грассмановых многообразиях $G_{m,n}$, инвариантные относительно ортогональных групп преобразований $SO(n)$ и $O(n)$. Установлено, что так называемые канонические метрики на $G_{m,n}$ превращают $G_{m,n}$ в пространство Эйнштейна постоянной скалярной кривизны и неотрицательной кривизны в двумерных направлениях, и что только на $G_{2,4}$ существуют еще другие римановы метрики, инвариантные относительно $SO(4)$ и $O(4)$; последние не превращают $G_{2,4}$ в пространство Эйнштейна. Ю. Вонг в [6] установил, что риманова кривизна $K(\sigma)$ (так в [1] называется кривизна в 2-направлении σ) действительного грассманова многообразия имеет точные границы $0 \leqslant K(\sigma) \leqslant 2$ и дал характеристику тех 2-направлений σ, в которых $K(\sigma)$ либо минимальна, либо максимальна. В 1965 году Т. Ханган [3] определил с помощью локальной карты риманову структуру на множестве p-плоскостей псевдоевклидова пространства и исследовал подмногообразия, для которых $K(\sigma) = 1$.

В настоящей заметке рассматриваются грассмановы многообразия m-плоскостей ${}^kR_m$ псевдоевклидовых пространств ${}^lR_n$, которые обозначаются через ${}^{k,l}G_{m,n}$. Доказывается существование на ${}^{k,l}G_{m,n}$ инвариантной метрики, которую, следуя Лейхтвейссу, можно называть *канонической*. Выводятся структурные уравнения многообразия ${}^{k,l}G_{m,n}$ как однородного пространства. Показано, что многообразие ${}^{k,l}G_{m,n}$ с канонической метрикой является пространством Эйнштейна постоянной скалярной кривизны и постоянной кривизны Риччи не только при $k = l = 0$, а также при любых допустимых k и l. Кривизна $K(\sigma)$ в случае общего ${}^{k,l}G_{m,n}$ может принимать любые значения и не имеет таких границ, как в случае $G_{m,n}$. Поэтому в § 2 приходится пока довсльствоваться лишь нахождением стационарных кривизн $K(\sigma)$ многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$.

§ 1. Риманова структура на многообразии ${}^{k,l}G_{m,n}$

В псевдоевклидовом векторном пространстве ${}^{l}R_n$, где $n \geqslant 3$, $l \leqslant n$, и где l — число отрицательных коэффициентов в каноническом виде метрической формы этого пространства, рассмотрим множество m-мерных подпространств ${}^{k}R_m$ $(m<n,\ k\leqslant l,\ k\leqslant m)$, которое является, как известно, дифференцируемым многообразием и называется *грассмановым многообразием* ${}^{k,l}G_{m,n}$. Присоединим к каждому подпространству π базис $\{e_a, e_\alpha\}$ пространства ${}^{l}R_n$ так, что первые m векторов e_a $(a, b, \ldots = 1, \ldots, k, l+1, \ldots, l+m-k)$ принадлежит данному m-мерному подпространству π, а остальные $n-m$ векторов e_α $(\alpha, \beta, \ldots = k+1, \ldots, l, l+m-k+1, \ldots, n)$ ортогональны к нему. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения

$$\begin{aligned} de_a &= \omega^b{}_a e_b + \omega^\alpha{}_a e_\alpha, \\ de_\alpha &= \omega^a{}_\alpha e_a + \omega^\beta{}_\alpha e_\beta, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

имеют (в силу инвариантности метрики) место

$$\omega^a{}_\alpha = -g^{ab} g_{\alpha\beta} \omega^\beta{}_b. \qquad (1.2)$$

При фиксации данного π векторы e_a могут вращаться только внутри π, а векторы e_α только в ортогональном $(n-m)$-мерном подпространстве. Возникает расслоение ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m.n} \to {}^{k,l}G_{m;n}$, где ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m,n}$ — многообразие базисов $\{e_a, e_\alpha\}$ с указанными выше свойствами. Пусть δ — дифференцируемое векторное поле на ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m,n}$, вертикальное в этом расслоении. Тогда из (1.1) следует,

$$\delta e_a = \omega^b{}_a(\delta) e_b, \qquad \delta e_\alpha = \omega^\beta{}_\alpha(\delta) e_\beta,$$

т. е.

$$\omega^\alpha{}_a(\delta) = 0, \qquad \omega^a{}_\alpha(\delta) = 0. \qquad (1.3)$$

Поскольку

$$d\omega^\alpha{}_a = \omega^\beta{}_b \wedge (\delta^b{}_a \omega^\alpha{}_\beta - \delta^\alpha{}_\beta \omega^b{}_a), \qquad (1.4)$$

то система $\omega^\alpha{}_a = 0$ является вполне интегрируемой и его первые интегралы могут быть приняты за координаты для $\tau \in {}^{k,l}G_{m,n}$ в некоторой окрестности заданного π, а $\omega^\alpha{}_a$ образуют систему кобазисов в $\tau \in {}^{k,l}G_{m,n}$.

Пусть ∂ — произвольное дифференцируемое векторное поле, заданное на ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m,n}$. Тогда, используя (1.4), получим, что

$$d\omega^\alpha{}_a(\delta, \partial) = -\frac{1}{2}\, \omega^\beta{}_b(\partial)\, [\delta^b{}_a \omega^\alpha{}_\beta(\delta) - \delta^\alpha{}_\beta \omega^b{}_a(\delta)].$$

С другой стороны, для векторных полей δ и ∂, коммутирующихся в рассматриваемой точке многообразия ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m,n}$,

$$2d\omega^\alpha{}_a(\delta, \partial) = \delta\omega^\alpha{}_a(\partial) - \partial\omega^\alpha{}_a(\delta).$$

Из последних двух равенств, учитывая и равенства (1.3), вытекает

$$\delta\omega^\alpha{}_a(\partial) = -\omega^\beta{}_b(\partial)\,[\delta^b{}_a\omega^\alpha{}_\beta(\delta) - \delta^\alpha{}_\beta\omega^b{}_a(\delta)].$$

Поскольку эти соотношения имеют место для всякого дифференцируемого векторного поля ∂ на ${}^{k,l}\mathcal{E}_{m,n}$, то, обозначая $\omega^\alpha{}_\beta(\delta) = \pi^\alpha{}_\beta$ и $\omega^b{}_a(\delta) = \pi^b{}_a$, получим

$$\delta\omega^\alpha{}_a = \omega^\beta{}_b(\delta^\alpha{}_\beta\pi^b{}_a - \delta^b{}_a\pi^\alpha{}_\beta). \tag{1.5}$$

Аналогично можно вывести, что

$$\delta\omega^a{}_\alpha = \omega^b{}_\beta(\delta^a{}_b\pi^\beta{}_\alpha - \delta^\beta{}_\alpha\pi^a{}_b). \tag{1.6}$$

С помощью (1.5) и (1.6) покажем, что квадратичная форма $ds^2 = -\omega^\alpha{}_a\omega^a{}_\alpha$ инвариантно связана с данным подпространством $\pi \in {}^{k,l}G_{m,n}$, т. е. при фиксации π она не меняется. Действительно,

$$\delta(-\omega^\alpha{}_a\omega^a{}_\alpha) = \omega^a{}_\alpha\omega^\beta{}_b(\delta^\alpha{}_\beta\pi^b{}_a - \delta^b{}_a\pi^\alpha{}_\beta) + \\ + \omega^\alpha{}_a\omega^b{}_\beta(\delta^a{}_b\pi^\beta{}_\alpha - \delta^\beta{}_\alpha\pi^a{}_b) = 0.$$

Используя соотношения (1.2), получаем

$$ds^2 = -\omega^\alpha{}_a\omega^a{}_\alpha = g^{\beta b}g_{\alpha\beta}\omega^\alpha{}_a\omega^\beta{}_b \tag{1.7}$$

Форма (1.7) определяет на грассмановом многообразии ${}^{k,l}G_{m,n}$ риманову метрику, поэтому назовем ее *основной метрической формой*, а $g^{ab}g_{\alpha\beta}$ *основным метрическим тензором*. Отметим, что касательные векторные пространства к многообразию ${}^{k,l}G_{m,n}$ обладают метрикой пространства ${}^LR_N$, где $N = m(n-m)$ и $L = (n-l-m+k)k + (l-k)(m-k)$.

Введем обозначения

$$\omega^\alpha{}_a = \Theta^A, \qquad g^{ab}g_{\alpha\beta} = g_{AB}, \\ \delta^b{}_a\omega^\alpha{}_\beta - \delta^\alpha{}_\beta\omega^b{}_a = \Theta^A{}_B.$$

Тогда можем переписать (1.7) в виде

$$ds^2 = g_{AB}\Theta^A\Theta^B, \tag{1.8}$$

и формулы (1.4) в виде

$$d\Theta^A = \Theta^B \wedge \Theta^A{}_B. \tag{1.9}$$

При внешнем дифференцировании выражении $\Theta^A{}_B$ получаем

$$d\Theta^A{}_B = \Theta^C{}_B \wedge \Theta^A{}_C + \Omega^A{}_B, \tag{1.10}$$

где

$$\Theta^A{}_B = R^A{}_{BCD}\Theta^C \wedge \Theta^D \tag{1.11}$$

и

$$R^A{}_{BCD} = \delta^b{}_a\delta^\alpha{}_\delta g^{cd}g_{\beta\gamma} - \delta^c{}_a\delta^\alpha{}_\beta g^{bd}g_{\gamma\delta} - \\ - \delta^b{}_a\delta^\alpha{}_\gamma g^{cd}g_{\beta\delta} + \delta^d{}_a\delta^\alpha{}_\beta g^{bc}g_{\gamma\delta}. \tag{1.12}$$

Формулы (1.9) и (1.10) представляют собой *структурные уравнения грассманова многообразия* ${}^{k,l}G_{m,n}$, формы $\Omega^A{}_B$ являются его *формами кривизны* и $R^A{}_{BCD}$ составляют его *тензор кривизны*. Совершая в тензоре кривизны (1.12) свертку по индексам A и D, получаем тензор Риччи

$$R_{BC} = R^A{}_{BCA} = (n-2)g^{bc}g_{\beta\gamma} = (n-2)g_{BC}. \tag{1.13}$$

Поскольку тензор Риччи R_{BC} пропорционален основному метрическому тензору g_{BC}, то грассманово многообразие ${}^{k,l}G_{m,n}$ является *пространством Эйнштейна.* Умножим тензор Риччи (1.13) на g^{DB}, получаем

$$R^D{}_C = (n-2) g^{DB} g_{BC} = (n-2) \delta^\delta{}_\gamma \delta^c{}_d$$

и после полного свертывания этого тензора получим скалярную кривизну

$$R = R^C{}_C = (n-2) \delta^\gamma{}_\gamma \delta^c{}_c = (n-2)(n-m)m \tag{1.14}$$

грассманова многообразия ${}^{k,l}G_{m,n}$. Из вышесказанного вытекает

Теорема 1. *Грассманово многообразие* ${}^{k,l}G_{m,n}$ *с римановой метрикой* (1.7) *является пространством Эйнштейна постоянной скалярной кривизны* $(n-2)(n-m)m$.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x^A)$ — вектор из касательного пространства к многообразию ${}^{k,l}G_{m,n}$ в точке π. Кривизна Риччи многообразия ${}^{k,l}G_{m,n}$ в направлении этого вектора

$$K(x) = \frac{R_{AB} x^A x^B}{g_{AB} x^A x^B} = (n-2).$$

Следовательно, грассманово многообразие ${}^{k,l}G_{m,n}$ обладает постоянной кривизной Риччи, равной $n-2$.

Пусть теперь $\boldsymbol{x} = (x^A)$ и $\boldsymbol{y} = (y^B)$ — линейно независимые векторы касательного пространства к ${}^{k,l}G_{m,n}$. Они определяют некоторое двумерное направление σ, которое характеризуется простым бивектором $\sigma^{AB} = x^{[A} y^{B]}$,

$$\sigma^{A[B} \sigma^{CD]} = 0. \tag{1.15}$$

Риманова кривизна $K(\sigma)$ многообразия ${}^{k,l}G_{m,n}$ в этом двумерном направлении σ определяется формулой

$$K(\sigma) = \frac{R_{ABCD} \sigma^{AB} \sigma^{CD}}{(g_{AC} g_{BD} - g_{AB} g_{CD}) \sigma^{AB} \sigma^{CD}}, \tag{1.16}$$

где

$$R_{ABCD} = g_{AF} R^F{}_{BCD} = g^{ab} g^{cd} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) + \\ + g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}).$$

Из формулы (1.16) вытекает, что если $m = 1$ или $m = n-1$, то $K(\sigma) = 1$. В итоге получается

Теорема 2. *Грассмановы многообразия* ${}^{0,l}G_{1,n}$, ${}^{1,l}G_{1,n}$ *и* ${}^{k,l}G_{n-1,n}$ *с римановой метрикой* (1.7) *являются пространствами кривизны* 1.

§ 2. Стационарные кривизны многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$

В этом параграфе рассмотрим подробнее риманову кривизну многообразия ${}^{k,l}G_{2,4}$ $(k \leqslant l \leqslant 2)$. Допустим, что базис $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $(i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4)$ в ${}^lR_4$, присоединенный к подпространствам ${}^kR_2$, составляющим многообразие ${}^{k,l}G_{2,4}$, выбран ортонормальный, т. е. $g_{ij} = 0$, как только $i \neq j$ и $g_{ii} = g^{ii} = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Обозначим

$\sigma^{1}{}_{3}{}^{1}{}_{4}=\sigma^{12},\quad \sigma^{1}{}_{3}{}^{2}{}_{3}=\sigma^{13},\quad \sigma^{1}{}_{3}{}^{2}{}_{4}=\sigma^{14},\quad \sigma^{1}{}_{4}{}^{2}{}_{3}=\sigma^{23},\quad \sigma^{1}{}_{4}{}^{2}{}_{4}=\sigma^{24},\quad \sigma^{2}{}_{3}{}^{2}{}_{4}=\sigma^{34}.$

Тогда формула (1.16) принимает вид

$$K(\sigma)=\frac{\varepsilon(\varepsilon_1\sigma^{12}+\varepsilon_2\sigma^{34})^2+\varepsilon'(\varepsilon_3\sigma^{13}+\varepsilon_4\sigma^{24})^2}{\varepsilon\sigma+(\sigma^{14})^2+(\sigma^{23})^2+\varepsilon'\sigma'}, \tag{2.1}$$

где $\sigma=(\sigma^{12})^2+(\sigma^{34})^2$, $\sigma'=(\sigma^{13})^2+(\sigma^{24})^2$ и $\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon'=\varepsilon_3\varepsilon_4$.

Условие (1.15) простоты бивектора σ^{ij} выражается в данном случае одним соотношением

$$\sigma^{13}\sigma^{24}-\sigma^{12}\sigma^{34}-\sigma^{14}\sigma^{23}=0. \tag{2.2}$$

Значения $K(\sigma)$, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial K(\sigma)}{\partial\sigma^{ij}}=0,\qquad i<j,$$

при выполнении условия (2.2), будем называть, следуя А. П. Петрову ([2], § 17), *стационарными кривизнами*. Для их вычисления составляем вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} F(z,\mu,\lambda)=&\,\varepsilon(\varepsilon_1\sigma^{12}+\varepsilon_2\sigma^{34})^2+\varepsilon'(\varepsilon_3\sigma^{13}+\varepsilon_4\sigma^{24})^2+\\ &+\mu[\varepsilon\sigma+(\sigma^{14})^2+(\sigma^{23})^2+\varepsilon'\sigma']+\\ &+2\lambda(\sigma^{13}\sigma^{24}-\sigma^{12}\sigma^{34}-\sigma^{14}\sigma^{23}).\end{aligned}$$

Теперь 2-направления σ, в которых $K(\sigma)$ стационарна, определяются из системы

$$\frac{\partial F(z,\mu,\lambda)}{\partial\sigma^{ij}}=0 \tag{2.3}$$

при дополнительном условии (2.2). Система (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(1+\mu)\sigma^{13}+\ &(1+\lambda)\sigma^{24}=0,\\
\varepsilon(1+\mu)\sigma^{12}+\ &(1-\lambda)\sigma^{34}=0,\\
\mu\sigma^{14}\ &-\lambda\sigma^{23}=0,\\
-\lambda\sigma^{14}\ &+\mu\sigma^{23}=0,\\
(1+\lambda)\sigma^{13}+&\varepsilon'(1+\mu)\sigma^{24}=0,\\
(1-\lambda)\sigma^{12}+\ &\varepsilon(1+\mu)\sigma^{34}=0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Для существования нетривиального решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. чтобы

$$(\mu-\lambda)^2(\mu+\lambda)^2(\mu+\lambda+2)(\mu-\lambda+2)=0.$$

Получим следующие решения:

I. $\sigma^{34}=-\varepsilon\sigma^{12}$, $\sigma^{24}=-\varepsilon'\sigma^{13}$, $\varepsilon(\sigma^{12})^2-\sigma^{14}\sigma^{23}-\varepsilon'(\sigma^{13})^2=0$;

и в этом случае в неизотропных 2-направлениях $K(\sigma)=0$;

II. $\sigma^{12}=\sigma^{34}=0$, $\sigma^{23}=\sigma^{14}$, $\sigma^{13}\sigma^{24}=(\sigma^{14})^2$;

здесь $K(\sigma)=1$;

III. $\sigma^{13}=\sigma^{24}=0$, $\sigma^{23}=-\sigma^{14}$, $\sigma^{12}\sigma^{34}=(\sigma^{14})^2$,

здесь $K(\sigma)=1$.

В зависимости от значений ε_i существуют еще следующие решения системы (2.4):

IV. Если $\varepsilon = \varepsilon'$, то существует решение

$$\sigma^{34} = \varepsilon\sigma^{12}, \quad \sigma^{24} = \varepsilon'\sigma^{13}, \quad \sigma^{14} = \sigma^{23} = 0, \quad (\sigma^{13})^2 = (\sigma^{12})^2;$$

в этом 2-направлении $K(\sigma) = 2$;

V. Если $\varepsilon = -1$, то существует решение

$$\sigma^{34} = \sigma^{12}, \quad \sigma^{13} = \sigma^{24} = 0, \quad \sigma^{23} = -\sigma^{14}, \quad (\sigma^{14})^2 = (\sigma^{12})^2;$$

в этом 2-направлении $K(\sigma)$ неопределена.

VI. Если $\varepsilon' = -1$, то существует решение

$$\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0, \quad \sigma^{24} = \sigma^{13}, \quad \sigma^{23} = \sigma^{14}, \quad (\sigma^{14})^2 = (\sigma^{13})^2;$$

в этом 2-направлении $K(\sigma)$ неопределена.

Отметим, что случаи V и VI содержатся в случае I.

Теорема 3. *В случае грассмановых многообразий $G_{2,4}$, ${}^{0,2}G_{2,4}$, ${}^{2,2}G_{2,4}$ и ${}^{1,2}G_{2,4}$ через любую их точку в каждом из 2-направлений σ со стационарным значением $K(\sigma) = 2$ проходит вполне геодезическое двумерное подмногообразие и эти подмногообразия вполне ортогональны.*

Доказательство. Поскольку бивектор, определяющий некоторое 2-направление, определен до отличного от нуля численного множителя, то можем решение IV системы (2.4) переписать в виде

$$\sigma^{12} = 1, \quad \sigma^{13} = \pm 1, \quad \sigma^{14} = 0, \quad \sigma^{23} = 0, \quad \sigma^{24} = \pm\varepsilon, \quad \sigma^{34} = \varepsilon.$$

Каждое из соответствующих 2-направлений определяется следующей системой

$$\begin{aligned} \Theta^3 &= \omega^4{}_2 \pm \varepsilon\omega^3{}_1 = 0, \\ \Theta^4 &= \omega^3{}_2 \mp \omega^4{}_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем 2-направление, определяемое системой (2.5) с верхними знаками, вполне ортогонально 2-направлению, которое получается из (2.5) при нижних знаках. Дополним формы Θ^3 и Θ^4 до полного базиса формами

$$\Theta^1 = \omega^4{}_2 \mp \varepsilon\omega^3{}_1,$$

$$\Theta^2 = \omega^3{}_2 \pm \omega^4{}_1.$$

Поскольку в силу $\omega^1{}_2 = -\varepsilon\omega^2{}_1$ и $\omega^3{}_4 = -\varepsilon\omega^4{}_3$ имеем

$$d\Theta^3 = (\pm\varepsilon\omega^2{}_1 - \omega^4{}_3) \wedge \Theta^4,$$

$$d\Theta^4 = (\mp \omega^2{}_1 + \varepsilon\omega^4{}_3) \wedge \Theta^3,$$

то пфаффова система (2.5) вполне интегрируема и определяет искомые подмногообразия. Аналогично доказывается

Теорема 4. *Через любую точку многообразия ${}^{1,1}G_{2,4}$ (соответственно ${}^{0,1}G_{2,4}$) в 2-направлении, определяемом решением V (соответственно VI) системы (2.4), проходит вполне геодезическое и вполне изотропное двумерное подмногообразие.*

Литература

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом. Москва, 1971.
2. Петров А. З., Пространства Эйнштейна. Москва, 1961.
3. Hangan, Th., Structures pseudoriemanniennes sur l'ensemble des p-plans d'un espace pesudoeuclidien. Bull. math. Soc. sci. math. RSR., 1965, **9**, № 1, 265—278.
4. Leichtweiss, K., Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z., 1961, **76**, № 4, 334—366.
5. Teleman, C., Sur les variétés de Grassmann. Bull. math. Soc. sci. et phys. RPR., 1958, **2**, № 2, 203—224.
6. Wong Yung-Chow, Sectional curvatures of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1968, **60**, № 1, 75—79.

Поступило
26 III 1973

PSEUDOEUKLEIDILISE RUUMI MITTEISOTROOPSETE ALAMRUUMIDE GRASSMANNI MUUTKONNA RIEMANNI GEOMEETRIAST

I. Maasikas

Resümee

Grassmanni muutkonna diferentsiaalgeomeetria uurimine sai alguse C. Telemani [5] ja K. Leichtweissi [4] töödest. Käesolevas lühiartiklis defineeritakse pseudoeukleidilise ruumi ${}^{l}R_n$ mitteisotroopsete alamruumide ${}^{k}R_m$ Grassmanni muutkonnal ${}^{k,l}G_{m,n}$ kanooniline Riemanni meetrika ja näidatakse, et see meetrika muudab muutkonna ${}^{k,l}G_{m,n}$ konstantse skalaarkõverusega Einsteini ruumiks. Leitakse 2-sihid Grassmanni muutkonna ${}^{k,l}G_{2,4}$ puutujaruumis, milledes Riemanni kõverus $K(\sigma)$ on statsionaarne.

ZUR RIEMANNSCHEN GEOMETRIE DER GRASSMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN VON NICHTISOTROPEN UNTERRÄUME IM PSEUDOEUKLIDISCHEN RAUM

I. Maasikas

Zusammenfassung

Die Untersuchungen der Differentialgeometrie der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten nahmen ihren Anfang in Arbeiten von C. Teleman [5] und K. Leichtweiss [4]. Im vorliegenden Aufsatz wird auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit ${}^{k,l}G_{m,n}$ von nichtisotropen Unterräume ${}^{k}R_m$ im pseudoeuklidischen Raum ${}^{l}R_n$ kanonische Riemannsche Metrik definiert. Man zeigt. daß diese Metrik macht die Mannigfaltigkeit ${}^{k,l}G_{m,n}$ zu einem Einsteinschen Raum mit der konstanten Skalarkrümmung. Es werden diejenige 2-Richtungen σ im Tangentialraum von ${}^{k,l}G_{2,4}$ ausgesucht, in denen die Riemannsche Krümmung $K(\sigma)$ stationär ist.

ПОДГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_5 И ИХ ОРБИТЫ. II

К. Рийвес

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть $\mathfrak{K}^{n,m}$ обозначает класс связных подгрупп Ли движений в вещественном евклидовом пространстве R_n, орбиты максимальной размерности которых m-мерны. Через $K^{n,m}$ обозначим общую подгруппу из класса $\mathfrak{K}^{n,m}$. Подгруппу стационарности флага Φ (см. [2], стр. 13) из класса $\mathfrak{K}^{n,m}$, обозначим через $K^{n,m}(\Phi)$, а r-параметрическую винтовую подгруппу в подгруппе стационарности флага Φ — через $K^{n,m}{}_r(\Phi)$.

Настоящая работа является продолжением статьи [3] Если в [3] рассматривались подгруппы классов $\mathfrak{K}^{5,1}$, $\mathfrak{K}^{5,2}$ и исследовались дифференциально-геометрические свойства их орбит, то теперь перечисляются подгруппы Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$, задавая все подгруппы $K^{5,3} \in \mathfrak{K}^{5,3}$ вполне интегрируемыми пфаффовыми системами и даются геометрические характеристики их орбит V_3 максимальной размерности. Орбиты, как известно ([1], стр. 247), характеризуются тем, что все их дифференциальные инварианты постоянны, а эти инварианты являются коэффициентами в соотношениях между формами инфинитезимального перемещения канонического подвижного репера. Поэтому изложение следует начать с решения задачи канонизации подвижного репера, связанного с точкой поверхности $V_3 \subset R_5$.

§ 1. Канонизация подвижного репера поверхности $V_3 \subset R_5$

Пусть ортонормированный репер $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5\}$ присоединен к точке M поверхности V_3 в R_5 так, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ определяют касательную плоскость, а $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{e}_5$ — нормальную плоскость к V_3 в точке M. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \omega^I \boldsymbol{e}_I, \\ d\boldsymbol{e}_I &= \omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K, \qquad \omega^K{}_I + \omega^I{}_K = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $I, K, \ldots = 1, \ldots, 5$, имеем

$$\omega^4 = \omega^5 = 0 \tag{1.2}$$

и

$$\omega^\alpha{}_i = b^\alpha{}_{ij}\omega^j, \quad b^\alpha{}_{ij} = b^\alpha{}_{ji}, \quad i, j, \ldots = 1, 2, 3; \quad \alpha, \ldots = 4, 5. \tag{1.3}$$

Здесь коэффициенты $b^\alpha{}_{ij}$ образуют фундаментальный объект второго порядка, который определяет пучок асимптотических квадратичных форм $\sigma_4 b^4{}_{ij}x^i x^j + \sigma_5 b^5{}_{ij}x^i x^j$ с двумя базисными формами $\Phi^4 = b^4{}_{ij}x^i x^j$ и $\Phi^5 = b^5{}_{ij}x^i x^j$. Геометрически уравнение $\sigma_4 b^4{}_{ij}x^i x^j + \sigma_5 b^5{}_{ij}x^i x^j = 0$ задает линейную систему асимптотических конусов второго порядка, лежащих в касательной плоскости к поверхности V_3 в точке M. Два направления в касательной плоскости поверхности V_3 называются *сопряженными*, если они полярно сопряжены относительно любого асимптотического конуса.

Для канонизации репера $\{M, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_\alpha\}$ нужно подходящим образом выбрать базисные квадратичные формы, поворачивая $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{e}_5$, а затем максимально упростить матрицы их коэффициентов.

В пучке асимптотических квадратичных форм для V_3 в R_5 всегда существует вырожденная форма. Подходящим поворотом векторов репера $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$ на их плоскости можно добиться, чтобы ею стало Φ^5, т. е. чтобы $\det \|b^5{}_{ij}\| = 0$. Известно ([5], стр. 138—140), что базисным асимптотическим конусом $\Phi^5 = 0$ поверхности может теперь быть:

1) пара пересекающихся действительных плоскостей,
2) пара комплексно-сопряженных плоскостей, пересекающихся по действительной прямой,
3) дважды взятая плоскость,
4) конус неопределен.

В общем случае направления векторов $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{e}_5$ фиксируются, и поэтому форма Φ^4 также вполне определена.

Далее можно матрицы коэффициентов базисных квадратичных форм Φ^4 и Φ^5 упростить путем подходящего выбора репера $\{M, \boldsymbol{e}_i\}$ в касательной плоскости поверхности V_3 в точке M. Вначале отказываемся от требования ортонормированности касательного репера поверхности V_3 в точке M, т. е. будем искать такой аффинный репер $\{M, f_i\}$, в котором матрицы $\|b^4{}_{ij}\|$ и $\|b^5{}_{ij}\|$ принимают простейший (канонический) вид. При нахождении линейно независимых векторов f_i можно использовать классификацию квадрик на плоскостях проективной метрики с вырожденными абсолютами. Именно, уравнения базисных асимптотических конусов $\Phi^4 = 0$, $\Phi^5 = 0$ определяют на бесконечно удаленной 2-плоскости касательной 3-плоскости поверхности V_3 пару квадрик. Пусть вторая из них, $\Phi^5 = 0$, которая по предположению является вырожденной, будет абсолютом. По терминологии работы [4] (см. стр. 270) в случае 1 соответствующей плоскостью проективной метрики будет копсевдоевклидова плоскость ${}^1R_2^*$, в случае 2 — коевклидова плоскость R_2^*.

В случае 3 имеем дело просто с аффинной классификацией квадрик на проективной плоскости P_2, а в случае 4 — проективной классификацией квадрик на P_2 (см. [5], стр. 153, 155, 140).

Существует аффинный репер $\{M, f_i\}$, относительно которого матрица коэффициентов вырожденной асимптотической формы Φ^5 имеет канонический вид ([5], стр. 139)

$$\|b^{5'}{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{Vmatrix}, \tag{1.4}$$

где ε и ε' имеют одно из значений $0, +1, -1$. При этом ранее выделенные случаи для конуса $\Phi^5 = 0$ характеризуются следующими значениями:

$$1)\ \varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon' = \mp 1; \tag{1.4А}$$

$$2)\ \varepsilon = \varepsilon' = 1; \tag{1.4Б}$$

$$3)\ \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon' = 1; \tag{1.4В}$$

$$4)\ \varepsilon = \varepsilon' = 0. \tag{1.4Г}$$

Пусть матрицей коэффициентов второго базисного асимптотического конуса в выбранном репере $\{M, f_i\}$ будет $\|b^{4'}{}_{ij}\|$. Для нахождения ее наиболее простого вида надо воспользоваться всевозможными преобразованиями аффинного репера $\{M, f_i\}$, сохраняющими уже полученный канонический вид (1.4) матриц $\|b^5{}_{ij}\|$ в каждом из случаев 1) — 4). Пусть при таком преобразовании столбец координат $\boldsymbol{x}$ произвольного вектора преобразуется по закону $\boldsymbol{x} = \mathfrak{A}\boldsymbol{x}^*$, где $\det \mathfrak{A} \neq 0$. Матрица $\|b^{4'}{}_{ij}\|$ преобразуется тогда, в силу $(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\|{}^*b^4{}_{ij}\|\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\|b^{4'}{}_{ij}\|\boldsymbol{x}$, по формуле

$$\|{}^*b^4{}_{ij}\| = \mathfrak{A}^{\mathrm{T}}\,\|b^{4'}{}_{ij}\|\,\mathfrak{A}. \tag{1.5}$$

Подходящий выбор матрицы преобразования $\mathfrak{A}$ дает возможность найти всевозможные канонические виды матриц $\|b^{4'}{}_{ij}\|$, соответствующие всевозможным классам квадрик на бесконечно удаленной плоскости P_2 с проективной метрикой, определенной на ней с помощью (1.4).

В литературе нам не удалось найти классификацию квадрик плоскостей ${}^1R_2^*$ и R_2^* и пришлось восполнить этот пробел. На плоскостях ${}^1R_2^*$ и R_2^* матрицами допустимых преобразований будут, соответственно,

$$\mathfrak{A}' = \begin{Vmatrix} \lambda & A & B \\ 0 & \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ 0 & \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{Vmatrix}, \qquad \mathfrak{A}'' = \begin{Vmatrix} \lambda & A & B \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{Vmatrix},$$

где $\lambda \neq 0$, A, B, a являются параметрами преобразований. Подходящим выбором этих параметров можно часть коэффициентов $b^{4'}{}_{ij}$ обратить в нуль, используя (1.5). Рассмотрение всевозможных случаев довольно объемисто и мы его опустим. Приведем здесь только результаты, включая вместе с ними также аффинную и проективную классификацию квадрик плоскости P_2. При этом применяем терминологию касательной 3-плоскости поверхности V_3 и определенных для нее базисных квадратичных форм.

В касательной 3-плоскости в точке M к поверхности $V_3 \subset R_5$ существует аффинный репер $\{M, f_i\}$, в котором базисная квадратичная форма Φ^5 определяется матрицей (1.4) и при этом Φ^4 задается либо матрицей

$$\|b^4{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{Vmatrix}, \tag{1.6}$$

где

$\delta = 0, \ \pm 1;$

$$\begin{array}{lll} b_2, \ b_3 \text{ — произвольные числа,} & \text{если } \varepsilon = \pm 1, \ \varepsilon' = 1; & \\ b_2 \equiv \delta_2 = 0, \ \pm 1, \ b_3 \text{ — произвольное,} & \text{если } \varepsilon = 0, \quad \varepsilon' = 1; & (1.6\text{A}) \\ b_2 \equiv \delta_2, \ b_3 \equiv \delta_3 = 0, \ \pm 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon' = 0; & \end{array}$$

либо матрицей

$$\|b^4{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_3 \end{Vmatrix}, \tag{1.7}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = -\varepsilon' \neq 0, \ \delta = 0, \ \pm 1, \ b_{23} \neq 0, \\ b_2 = b_3 = \pm b_{23} \quad \text{или} \quad b_2 = 0, \ b_3 \text{ — произвольное;} \end{array}\right. \tag{1.7A}$$

либо матрицей

$$\|b^4{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.8}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} b_2 \text{ — произвольное число, если } \varepsilon = \pm 1, \ \varepsilon' = \pm 1; \\ b_2 = \delta_2, \text{ если } \varepsilon = 0, \ \varepsilon' = 1. \end{array}\right. \tag{1.8A}$$

Если в (1.4) имеет место $\varepsilon = -\varepsilon' \neq 0$, то существует еще возможность

$$\|b^4{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \|b^5{}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1.9}$$

Отметим, что если невырожденная матрица $\|b^4{}_{ij}\|$ приводима к диагональному виду (1.6), то поверхность V_3 имеет в точке M три взаимно сопряженных направления f_1, f_2, f_3; в остальных трех случаях взаимно сопряженных направлений будет две пары: при (1.7) направления f_1, f_2 и f_1, f_3, а при (1.8) и (1.9) — направления f_1, f_2 и f_2, f_3.

Из вышеописанного фиксированного аффинного репера $\{M, f_i\}$ можно получить однозначно определенный касательный ортонормированный репер $\{M, e_i\}$ к поверхности V_3 в точке M при помощи преобразования

$$\begin{aligned} e_1 &= a_0 f_1, \\ e_2 &= a_1 f_1 + a_2 f_2, \\ e_3 &= a_3 f_1 + a_4 f_2 + a_5 f_3, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где параметры $a_s (s = 0, \ldots, 5)$ определяются условиями $e_i e_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ и, кроме того,

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_5 > 0. \tag{1.11}$$

Таким образом определенный ортонормированный репер $\{M, e_i\}$ может служить каноническим касательным репером поверхности $V_3 \subset R_5$. Но преобразованию (1.10) касательного репера поверхности V_3 соответствует преобразование компонентов $b^\alpha{}_{ij}$ фундаментального объекта II порядка по тензорному закону. Следовательно, если обозначить матрицу преобразования (1.10) через $\mathfrak{A}_1$, то канонические виды матриц $\|b^\alpha{}_{ij}\|$, т. е. (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.4), преобразуются по формуле

$$b' = \mathfrak{A}_1 b \mathfrak{A}^{\mathrm{T}}{}_1, \tag{1.12}$$

представленной в матричном виде. После указанного преобразования можно опять ввести старые обозначения, т. е. заменить b' на b.

Для краткости изложения удобно пользоваться следующими обозначениями. Пусть каноническим видом $\|b^4{}_{ij}\|$ будет (1.6). Тогда обозначим

$$\begin{gathered} A_{00} \equiv \langle 0 \rangle = a_0^2 \delta, \quad A_{01} = a_0 a_1 \delta, \quad A_{03} = a_0 a_3 \delta, \quad A = a_1 a_3 \delta + a_2 a_4 b_2, \\ \langle 12 \rangle = a_1^2 \delta + a_2^2 b_2, \quad \langle 345 \rangle = a_3^2 \delta + a_4^2 b_2 + a_5^2 b_3. \end{gathered} \tag{1.13}$$

В случае канонического вида (1.7) обозначим

$$'A = a_1 a_3 \delta + a_2 (a_4 b_2 + a_5 b_{23}), \quad \langle 345 \cdot \rangle = a_3^2 \delta + a_4^2 b_2 + a_5^2 b_3 + 2 a_4 a_5 b_{23}, \tag{1.14}$$

сохраняя все обозначения (1.13), кроме A и $\langle 345 \rangle$. При этом, $'A$ и $\langle 345 \cdot \rangle$ переходят соответственно в A и $\langle 345 \rangle$, если $b_{23} = 0$. Если каноническим видом $\|b^4{}_{ij}\|$ будет (1.8), то

$$\begin{aligned} A_{05} &= a_0 a_5, & \langle 2 \rangle &= a_2^2 b_2, \\ ''A &= a_1 a_5 + a_2 a_4 b_2, & \langle 4 \cdot \rangle &= a_4^2 b_2 + 2 a_3 a_5. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Пусть каноническим видом $\|b^5{}_{ij}\|$ является (1.4). Тогда

$$B_{22} \equiv \langle\langle 2 \rangle\rangle = a_2^2 \varepsilon, \quad B_{24} = a_2 a_4 \varepsilon, \quad \langle\langle 45 \rangle\rangle = a_4^2 \varepsilon + a_5^2 \varepsilon'. \tag{1.16}$$

Если же каноническим видом $\|b^5{}_{ij}\|$ будет (1.9), то

$$B_{25} = a_2 a_5, \quad B_{45} = 2 a_4 a_5. \tag{1.17}$$

Вычислим компоненты фундаментального объекта II порядка поверхности $V_3 \subset R_5$ относительно выбранного нами ортонормированного репера в точке $M \in V_3$ по формуле (1.12) и представим результаты с помощью введенных обозначений в виде таблицы.

Тип асимптотических конусов	Канонический вид матриц коэффициентов базисных асимптотических конусов			Условия	Применяемые обозначения
	В аффинном репере	В ортонормированном репере			
		$\|\|b^4{}_{ij}\|\|$	$\|\|b^5{}_{ij}\|\|$		
I	(1.6) (1.4)	$\begin{matrix} A_{00} & A_{01} & A_{03} \\ A_{01} & \langle 12\rangle & A \\ A_{03} & A & \langle 345\rangle \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{24} \\ 0 & B_{24} & «45» \end{matrix}$	(1.6A)	(1.13) (1.16)
II	(1.7) (1.4)	$\begin{matrix} A_{00} & A_{01} & A_{03} \\ A_{01} & \langle 12\rangle & 'A \\ A_{03} & 'A & \langle 345\cdot\rangle \end{matrix}$	—„—	(1.7A)	(1.14) (1.16)
III	(1.8) (1.4)	$\begin{matrix} 0 & 0 & A_{05} \\ 0 & \langle 2\rangle & ''A \\ A_{05} & ''A & \langle 4\cdot\rangle \end{matrix}$	—„—	(1.8A)	(1.15) (1.16)
IV	(1.9)	—„—	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{25} \\ 0 & B_{25} & B_{45} \end{matrix}$	b_2 — произвольное число	(1.15) (1.17)

Если поверхность V_3 является орбитой некоторой подгруппы Ли движений в R_5, то величины $a_0, \ldots, a_5$ и соответствующие b_2, b_3 или b_{23} будут, в силу результата Э. Картана, упомянутого в начале работы, постоянными относительно описанных ортонормированных реперов $\{M, e_i, e_\alpha\}$, являющихся в общем случае каноническими. Следует сразу же отметить, что не во всех случаях репер канонизируется полностью — в некоторых случаях существует определенный произвол выбора векторов f_i.

Существующие типы асимптотических конусов I—IV дают возможность классифицировать поверхности V_3 по типам асимптотических конусов. Дальнейший анализ покажет нам, что все орбиты V_3 подгруппы Ли движений в R_5 имеют тип I и II, т. е. классы, соответствующие типам III и IV не содержат ни одной орбиты V_3.

По типам I—IV определяются разные типы системы (1.3). Дифференциальное продолжение уравнений этой системы с помощью условий интегрируемости

$$\begin{gathered} d\omega^J = \omega^L \wedge \omega^J{}_L, \\ d\omega^K{}_J = \omega^L{}_J \wedge \omega^K{}_L \end{gathered} \tag{1.18}$$

уравнений (1.1) приводит к некоторой продолженной системе. В случае орбиты V_3, когда $a_0, \ldots, a_5$, b_2, b_3, b_{23}, также как и новые коэффициенты в продолженных уравнениях, являются постоянными, мы приходим к следующей линейной системе с постоянными коэффициентами относительно форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^5{}_4$:

$$2b^4{}_{12}\omega^2{}_1+2b^4{}_{13}\omega^3{}_1=A_1\omega^1+A_2\omega^2+A_3\omega^3, \tag{1.19}$$

$$(-b^4{}_{11}+b^4{}_{22})\,\omega^2{}_1+b^4{}_{23}\omega^3{}_1+b^4{}_{13}\omega^3{}_2=A_2\omega^1+A_4\omega^2+A_5\omega^3, \tag{1.20}$$

$$b^4{}_{23}\omega^2{}_1+(-b^4{}_{11}+b^4{}_{33})\,\omega^3{}_1+b^4{}_{13}\omega^3{}_2=A_3\omega^1+A_5\omega^2+A_6\omega^3, \tag{1.21}$$

$$-2b^4{}_{12}\omega^2{}_1+2b^4{}_{23}\omega^3{}_2+b^5{}_{22}\omega^5{}_4=A_4\omega^1+A_7\omega^2+A_8\omega^3, \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}-b^4{}_{13}\omega^2{}_1-b^4{}_{12}\omega^3{}_1+(-b^4{}_{22}+b^4{}_{33})\,\omega^3{}_2+b^5{}_{23}\omega^5{}_4=\\=A_5\omega^1+A_8\omega^2+A_9\omega^3,\end{gathered} \tag{1.23}$$

$$-2b^4{}_{13}\omega^3{}_1-2b^4{}_{23}\omega^3{}_2+b^5{}_{33}\omega^5{}_4=A_6\omega^1+A_9\omega^2+A_{10}\omega^3, \tag{1.24}$$

$$-b^4{}_{11}\omega^5{}_4=B_1\omega^1+B_2\omega^2+B_3\omega^3, \tag{1.25}$$

$$b^5{}_{22}\omega^2{}_1+b^5{}_{23}\omega^3{}_1-b^4{}_{12}\omega^5{}_4=B_2\omega^1+B_4\omega^2+B_5\omega^3, \tag{1.26}$$

$$b^5{}_{23}\omega^2{}_1+b^5{}_{33}\omega^3{}_1-b^4{}_{13}\omega^5{}_4=B_3\omega^1+B_5\omega^2+B_6\omega^3, \tag{1.27}$$

$$2b^5{}_{23}\omega^3{}_2-b^4{}_{22}\omega^5{}_4=B_4\omega^1+B_7\omega^2+B_8\omega^3, \tag{1.28}$$

$$(-b^5{}_{22}+b^5{}_{33})\,\omega^3{}_2-b^4{}_{23}\omega^5{}_4=B_5\omega^1+B_8\omega^2+B_9\omega^3, \tag{1.29}$$

$$-2b^5{}_{23}\omega^3{}_2-b^4{}_{33}\omega^5{}_4=B_6\omega^1+B_9\omega^2+B_{10}\omega^3. \tag{1.30}$$

Совместность этой системы налагает на действительные постоянные

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_5,\ b_2,\ b_3,\ b_{23},\ A_s,\ B_s \qquad (s=1,\ \ldots,\ 10)$$

ряд условий. При этом часть из форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^5{}_4$ выражаются через главные формы

$$\omega^j{}_i=a^j{}_{ik}\omega^k, \qquad \omega^5{}_4=a^5{}_{4k}\omega^k \tag{1.31}$$

с постоянными коэффициентами. Если пфаффовая система (1.2), (1.3), (1.31) является вполне интегрируемой, то она выделяет некоторую подгруппу Ли движений из класса $\mathfrak{K}^{5,3}$. Соответствующие формулы (1.1) определяют действие этой подгруппы в R_5.

Вышеупомянутым разным типам системы (1.3) соответствуют разные системы (1.19)—(1.30). В следующих параграфах решаются эти системы.

§ 2. Подгруппы Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ с орбитами типа I

1. Классификация орбит V_3 типа I по частным случаям асимптотических конусов. Пусть для орбиты V_3 подгруппы Ли движений $K^{5,3}\in\mathfrak{K}^{5,3}$ в каноническом ортонормированном репере $\{M,\ e_i,\ e_\alpha\}$ матрицы $\|b^\alpha{}_{ij}\|$ имеют канонический вид типа I (по таблице 1.1). Такая орбита V_3 имеет по крайней мере три взаимно сопряженных направлений.

Обозначим через C^α конус, определенный с помощью $\|b^\alpha{}_{ij}\|$. Всегда можно предположить, что $0 \leqslant \operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\| \leqslant \operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\| \leqslant \leqslant 3$, так как при $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\| < \operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\|$ после взаимной замены векторов репера e_4, e_5 опять сделанное предположение выполняется. Кроме того, если тип конусов C^α совпадает (при этом $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\| = \operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\|$), то можно предположить, что C^4 и C^5 как множества точек касательной 3-плоскости к V_3 в M различны. Иначе этот случай с помощью подходящего поворота векторов e_4, e_5 приводим к некоторому случаю $\operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\| < < \operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|$.

Чтобы решить систему (1.19)—(1.30) в случае канонических видов матриц $\|b^\alpha{}_{ij}\|$ типа I целесообразно с учетом вышесказанного классифицировать соответствующие орбиты V_3 по типам асимптотических конусов, конкретизируя значения параметров в условиях (1.6А), (1.4). Представим результаты в виде таблицы.

Таблица 2.1.

	rang $\|b^5{}_{ij}\|$	rang $\|b^4{}_{ij}\|$	ε	ε'	δ	b_2	b_3
1° а)	0	0	0	0	0	0	0
б)		1	0	0	0	0	1
в)		2	0	0	0	1	± 1
г)		3	0	0	1	1	± 1
2° а)	1	1	0	1	0	1	0
б)		2	0	1	0	1	$\neq 0$
в)			0	1	1	± 1	0
г)		3	0	1	1	1	$\neq 0$
3° а)	2	2	± 1	1	1	$\neq 0$	0
б)		3	± 1	1	1	$\neq 0$	$\neq 0$

Эти случаи в дальнейшем цитируются по символам первого столбца. Исследование орбит V_3 с разными типами асимптотических конусов покажет, что орбиты и соответствующие им подгруппы Ли $K^{5,3}$ существуют во всех случаях, кроме 2° б) и 3° а—б). Мы рассмотрим подробно случаи, в которых орбиты существуют. Несуществование орбит в этих исключенных случаях доказывается подробно только при 2°б) (см. ниже п. 3). Объемистые доказательства несуществования орбит в случаях 3°а—б) опускаются, так как они вполне аналогичны приведенному. Во всех этих случаях система (1.19)—(1.30), в которой постоянные коэффициенты $b^\alpha{}_{ij}$ определены типом I таблицы 1.1, или дифференциальное продолжение ее решений приводит к противоречиям со сделанными предположениями относительно коэффициентов (1.13), (1.16), A_s, B_s ($s = 1, \ldots, 10$) или, соответственно, 2°б) и 3°а—б).

В ходе исследований естественным образом выделяются подгруппы Ли $K^{5,3}$, орбиты V_3 которых являются гиперповерхностями некоторой гиперплоскости $R_4 \subset R_5$. Для них в (1.3), (1.31) имеет место $\omega^5{}_1 = \omega^5{}_2 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0$. На описании соответствующих орбит V_3 мы подробно останавливаться не будем, так как они исследованы в [2].

Для решения системы (1.19)—(1.30) коэффициенты левых частей ее уравнений нужно заменить их выражениями типа I из таблицы 1.1; учитывая обозначения (1.13) и (1.16). Итак

$$\begin{gathered}
b^4{}_{11} = A_{00} = a_0{}^2\delta, \quad b^4{}_{12} = A_{01} = a_0a_1\delta, \quad b^4{}_{13} = A_{03} = a_0a_3\delta, \\
b^4{}_{22} = \langle 12\rangle = a_1{}^2\delta + a_2{}^2b_2, \quad b^4{}_{23} = A = a_1a_3\delta + a_2a_4b_2, \\
b^4{}_{33} = \langle 345\rangle = a_3{}^2\delta + a_4{}^2b_2 + a_5{}^2b_3, \quad b^5{}_{22} = B_{22} = a_2{}^2\varepsilon, \\
b^5{}_{23} = B_{24} = a_2a_4\varepsilon, \quad b^5{}_{33} = \langle\langle 45\rangle\rangle = a_4{}^2\varepsilon + a_5{}^2\varepsilon'.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Кроме того, для двучленных коэффициентов в уравнениях (1.20), (1.21), (1.23) и (1.29) целесообразно ввести следующие обозначения

$$\begin{gathered}
-b^4{}_{11} + b^4{}_{22} = \langle'012\rangle = -a_0{}^2\delta + a_1{}^2\delta + a_2{}^2b_2, \\
-b^4{}_{11} + b^4{}_{33} = \langle'0345\rangle = -a_0{}^2\delta + a_3{}^2\delta + a_4{}^2b_2 + a_5{}^2b_3, \\
-b^4{}_{22} + b^4{}_{33} = \langle'1'2345\rangle = -a_1{}^2\delta - a_2{}^2b_2 + a_3{}^2\delta + a_4{}^2b_2 + a_5{}^2b_3, \\
-b^5{}_{22} + b^5{}_{33} = \langle\langle'245\rangle\rangle = -a_2{}^2\varepsilon + a_4{}^2\varepsilon + a_5{}^2\varepsilon'.
\end{gathered} \tag{2.1'}$$

2. Нахождение всех подгрупп Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ с орбитами типа I.

1°а) Асимптотические конусы C^α орбит V_3 искомых подгрупп в этом случае не определены. Формы (1.3) обращаются тождественно в нуль. Решение системы (1.19)—(1.30) в совокупности с (1.2), (1.3) определяет подгруппу из класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ только при $\omega^5{}_4 = 0$. Этой подгруппой будет *6-параметрическая подгруппа $K^{5,3}$ $\{3, 4\}$. Ее орбита V_3 представляет собой плоскость $R_3 \subset R_5$, натянутую на M, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Существуют подгруппы Ли движений $K^{5,3}$ $[1; 3, 4\}$, $K^{5,3}$ $[1, 2; 3, 4\}$, $K^{5,3}{}_3$ $[1; 3, 4\}$, транзитивные на плоскостях $R_3 \subset R_5$* (см. [2], стр. 23—25).

1°б) В этом случае из базисных асимптотических конусов орбит V_3 искомых подгрупп $K^{5,3}$ один (т. е. C^4) является парой совпадающих плоскостей, а второй (т. е. C^5) является неопределенным.

По предположению из величин (2.1) и (2.1′) отличны от нуля только $\langle 345\rangle = \langle'0345\rangle = \langle'1'2345\rangle = a_5{}^2$. Если обозначить $B = -a_5{}^{-2}B_{10}$, то решением системы (1.19)—(1.30) будет $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0$, $\omega^5{}_4 = B\omega^3$. Соответствующие 4-параметрические подгруппы Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ выделяются вполне интегрируемыми пфаффовыми системами

$$\omega^4=\omega^5=0,\quad \omega^3{}_1=\omega^3{}_2=\omega^4{}_1=\omega^4{}_2=\omega^4{}_3-a_5{}^2\omega^3=$$
$$=\omega^5{}_1=\omega^5{}_2=\omega^5{}_3=\omega^5{}_4-B\omega^3=0,$$

где либо $B=0$, либо $B\neq 0$. Остается геометрически охарактеризовать орбиты определенных подгрупп. Движение ортонормированного репера под действием этих 4-параметрических подгрупп Ли определяется следующими формулами инфинитезимального перемещения

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{M}&=\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2+du\,\boldsymbol{e}_3,\\
d\boldsymbol{e}_1&=\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_2,\\
d\boldsymbol{e}_2&=-\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_1,\\
d\boldsymbol{e}_3&=a_5{}^2\,du\,\boldsymbol{e}_4,\\
d\boldsymbol{e}_4&=-a_5{}^2\,du\,\boldsymbol{e}_3+B\,du\,\boldsymbol{e}_5,\\
d\boldsymbol{e}_5&=-B\,du\,\boldsymbol{e}_4.
\end{aligned}$$

Здесь $\omega^3=du$, так как $d\omega^3=0$. При $u=\text{const}$ точка M опишет двумерную плоскость, проходящую через точку M в направлении векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Если $B=0$, т. е. $\omega^5{}_4=0$, то $d\boldsymbol{e}_5=0$ и, следовательно, орбиты V_3 исследуемой подгруппы являются гиперповерхностями некоторой гиперплоскости $R_4\subset R_5$. Они будут *цилиндрами с двумерными образующими, построенными на окружностях плоскости* R_2, вполне ортогональной к образующим. Получена подгруппа $K^{5,3}\,\{2,3\}$. *Подгруппа* $K^{5,3}\,\{2,3\}$ *имеет подгруппу Ли движений — 3-параметрическую подгруппу* $K^{5,3}\,[1;2,3\}$, *транзитивную на ее орбитах.*

Если $B\neq 0$, то из формул инфинитезимального перемещения репера следует, что при $\omega^1=\omega^2=\omega^2{}_1=0$ точка M опишет винтовую линию в одной из параллельных трехмерных плоскостей R_3, натянутых на векторы $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$. Соответствующая подгруппа является *винтовой подгруппой* $K^{5,3}{}_4\,[1;3\}$. Действительно, существует трехмерная инвариантная плоскость, направление которой определяется векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{e}_3+a_5{}^2\boldsymbol{e}_5$ и проходящая через точку $\boldsymbol{P}=(a_5{}^4+B^2)\boldsymbol{M}+a_5{}^4\boldsymbol{e}_4$, так как $d\boldsymbol{x}=0$ и $d\boldsymbol{P}=(a_5{}^4+B^2)(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)+B\,du\,\boldsymbol{x}$. Отсюда следует, что *орбитами максимальной размерности будут цилиндры с двумерными образующими, построенные на винтовых линиях плоскости* R_3, *вполне ортогональной к образующим* $R_2\subset R_5$, т. е. направление R_3 определяется векторами $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$.

У подгруппы $K^{5,3}{}_4\,[1;3\}$ существует подгруппа Ли, транзитивная на ее орбитах. Эта подгруппа будет *винтовой подгруппой* $K^{5,3}{}_3\,[1,2;3\}$.

1°в) В этом случае в каждой точке M орбиты V_3 искомых подгрупп $K^{5,3}$ один асимптотический конус (т. е. C^4) является парой пересекающихся плоскостей (действительных или комплексно-сопряженных), а второй (т. е. C^5) неопределен. Коэффициенты (2.1), (2.1′) системы (1.19)—(1.30) имеют следующие выражения:

$$A_{00}=A_{01}=A_{03}=B_{22}=B_{24}=\langle\langle 45\rangle\rangle=\langle\langle '245\rangle\rangle=0,$$
$$A=a_2a_4,\quad \langle '012\rangle=a_2^2,\quad \langle 345\rangle=\langle '0345\rangle=\langle 45\rangle=a_4^2+a_5^2b_3, \qquad (2.2)$$
$$\langle '1'2345\rangle=\langle '245\rangle=-a_2^2+a_4^2+a_5^2b_3.$$

Поэтому из системы (1.19)—(1.30) получаются конечные соотношения $A_1=A_2=A_3=B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=B_6=0$, $A_6=-A_4$, $A_9=-A_7$, $A_{10}=-A_8$ и уравнения

$$\begin{aligned}
a_2^2\omega^2{}_1+A\omega^3{}_1&=A_4\omega^2+A_5\omega^3,\\
A\omega^2{}_1+\langle 45\rangle\omega^3{}_1&=A_5\omega^2-A_4\omega^3,\\
2A\omega^3{}_2&=A_4\omega^1+A_7\omega^2+A_8\omega^3,\\
\langle '245\rangle\omega^3{}_2&=A_5\omega^1+A_8\omega^2-A_7\omega^3,\\
-a_2^2\omega^5{}_4&=B_7\omega^2+B_8\omega^3,\\
-A\omega^5{}_4&=B_8\omega^2+B_9\omega^3,\\
-\langle 45\rangle\omega^5{}_4&=B_9\omega^2+B_{10}\omega^3.
\end{aligned}$$

Из этой системы следует, что $\omega^5{}_4=0$. Действительно, если $A\neq 0$, то $\omega^5{}_4=-A^{-1}(B_8\omega^2+B_9\omega^3)$ и $B_7=a_2^2A^{-1}B_8$, $B_8=a_2^2A^{-1}B_9$, $B_9=\langle 45\rangle A^{-1}B_8$, $B_{10}=\langle 45\rangle A^{-1}B_9$. С учетом (2.2) из выражений для B_8, B_9 следует, что $\pm a_2^2a_5^2B_8=0$. В силу (1.11) имеется только одна возможность — $B_8=0$, т. е. $B_7=B_9=B_{10}=0$ и $\omega^5{}_4=0$. Если же $A=0$, то $B_8=B_9=0$ и $\omega^5{}_4=-a_2^{-2}B_7\omega^2$, $a_2^{-2}a_5^2B_7\omega^2-B_{10}\omega^3=0$. Последнее равенство выполняется при $B_7=B_{10}=0$, т. е. опять $\omega^5{}_4=0$.

Так как в рассматриваемом частном случае $\omega^5{}_1=\omega^5{}_2=\omega^5{}_3=0$, то $de_5=0$ и, как было отмечено выше, орбиты V_3 искомых подгрупп $K^{5,3}$ являются гиперповерхностями в некоторой гиперплоскости $R_4\subset R_5$. Подгруппа $K^{5,3}$ не может быть 6-параметрической, так как для этого необходимо и достаточно, чтобы $a_2^2=A=\langle 45\rangle=\langle '245\rangle=0$, $A_4=A_5=A_7=A_8=0$. Получилось противоречие с условием (1.11). В силу результатов [2] и предыдущего случая 1°б), имеется единственная возможность: соответствующая подгруппа будет 4-параметрической и выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4=\omega^5=0,\quad \omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=\omega^4{}_2-a_2^2\omega^2=$$
$$=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3-a_2^2\omega^3=\omega^5{}_3=\omega^5{}_4=0.$$

Она является *подгруппой* $K^{5,3}\{1,4\}$, так как $d\boldsymbol{P}=d(\boldsymbol{M}+a_2^{-1}\boldsymbol{e}_4)=\omega^1\boldsymbol{e}_1$, $d\boldsymbol{e}_1=0$, и инвариантным 4-мерным направлением будет $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$. *Орбитами максимальной размерности для этой подгруппы будут цилиндры с одномерными образующими, построенные на сферах плоскости* R_3, проходящей через точку P в направлении векторов $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, вполне ортогональных к направлению $\boldsymbol{e}_1$ образующих.

1°г) В этом случае в каждой точке M орбиты V_3 искомых подгрупп класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ один асимптотический конус (C^4) является невырожденным, а второй (C^5) неопределен. Теперь в (2.1) и (2.1′) имеют место $B_{22} = B_{24} = \langle\langle 45\rangle\rangle = \langle\langle '245\rangle\rangle = 0$. В силу этого, система (1.19)—(1.30) разбивается на две части: первые шесть уравнений для определения $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$ и последние — для $\omega^5{}_4$. Оказывается, что $\omega^5{}_4 = 0$. Действительно, из (1.25) можно выразить

$$\omega^5{}_4 = -\frac{B_1}{A_{00}}\omega^1 - \frac{B_2}{A_{00}}\omega^2 - \frac{B_3}{A_{00}}\omega^3.$$

Тогда, с учетом (1.26), (1.27), (1.28), получим $B_2 = A_{00}{}^{-1}A_{01}B_1$, $B_3 = A_{00}{}^{-1}A_{03}B_1$, $B_4 = A_{00}{}^{-2}A_{01}{}^2B_1$ и $B_4 = A_{00}{}^{-1}\langle 12\rangle B_1$. Но последние выражения для B_4 дают $a_0{}^2a_2{}^2B_1 = 0$, откуда в силу (1.11) следует, что $B_1 = 0$ и поэтому также $B_2 = B_3 = 0$, тем самым $\omega^5{}_4 = 0$ и $B_s = 0$ ($s = 4, \ldots, 10$). Также, как раньше, этим доказано, что при сделанных предположениях $de_5 = 0$, и, следовательно, орбиты V_3 искомых подгрупп $K^{5,3}$ являются гиперповерхностями некоторой плоскости $R_4 \subset R_5$. В силу результатов [2] и предыдущих случаев настоящего параграфа имеется единственная возможность. Именно, в системе (1.19)—(1.24) для определения форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$ имеют место $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_0{}^2 = a_2{}^2 = a_5{}^2$, $b_3 = 1$, $A_s = 0$ ($s = 1, \ldots, 10$), и искомые формы остаются параметрическими. Соответствующая 6-параметрическая подгруппа Ли движений выделяется следующей вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4 = \omega^5 = 0, \quad \omega^4{}_1 - a_0{}^2\omega^1 = \omega^5{}_1 = \omega^4{}_2 - a_0{}^2\omega^2 =$$
$$= \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 - a_0{}^2\omega^3 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0.$$

Так как $d(\boldsymbol{M} + a_0{}^{-2}\boldsymbol{e}_4) = 0$ и $d\boldsymbol{e}_5 = 0$, то эта подгруппа $K^{5,3}$ является *подгруппой* $K^{5,3}\{0, 1\}$. *Ее орбитами максимальной размерности будут гиперсферы* S_3 *в параллельных гиперплоскостях* $R_4 \subset R_5$, направление которых определяется векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$. Выделенная подгруппа Ли $K^{5,3}\{0, 1\}$ имеет две подгруппы Ли движений, транзитивные на ее орбитах (см. [2], стр. 25—26), соответственно, $K^{5,3}{}_4\{0, 1\}$ и $K^{5,3}{}_3\{0, 1\}$.

2°а) В каждой точке M орбиты V_3 искомой подгруппы $K^{5,3}$ асимптотические конусы C^4 и C^5 являются различными парами совпадающихся плоскостей. Коэффициенты (2.1), (2.1′) системы (1.19)—(1.30) выражаются теперь в виде

$$A = a_2a_4, \quad \langle '012\rangle = a_2{}^2, \quad \langle 345\rangle = \langle '0345\rangle = a_4{}^2,$$
$$\langle '1'2345\rangle = -a_2{}^2 + a_4{}^2, \langle\langle 45\rangle\rangle = \langle\langle '245\rangle\rangle = a_5{}^2. \tag{2.3}$$

В силу этого из системы (1.19)—(1.30) следуют конечные соотношения

$$A_1=A_2=A_3=A_4=A_5=A_6=0,$$
$$A_7=\frac{2a_4(-a_4B_7+a_2B_8)}{a_5^2},$$
$$A_8=\frac{-2a_4^2(-a_4B_7+a_2B_8)}{a_2a_5^2},$$
$$A_9=\frac{a_4(a_2^2-a_4^2)(-a_4B_7+a_2B_8)}{a_2^2a_5^2},$$
$$A_{10}=\frac{2a_4^2(-a_4B_7+a_2B_8)}{a_2a_5^2}\mp\frac{a_5^2B_8}{a_2^2},$$
$$B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=B_6=0,$$
$$B_9=\frac{a_4^2}{a_2^2}B_7,\qquad B_{10}=\frac{a_4^2}{a_2^2}B_8,$$

где B_7 и B_8 удовлетворяют системе

$$\begin{gathered}(a_2^2-3a_4^2)(-a_4B_7+a_2B_8)=0,\\ a_4(3a_2^2-a_4^2)(-a_4B_7+a_2B_8)+a_5^4B_7=0,\end{gathered}\tag{2.4}$$

и уравнения

$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=0,\qquad \omega^3{}_2=\frac{-a_4B_7+a_2B_8}{a_2a_5^2}\omega^2-\frac{a_4(-a_4B_7+a_2B_8)}{a_2^2a_5^2}\omega^3,$$
$$\omega^5{}_4=-\frac{B_7}{a_2^2}\omega^2-\frac{B_8}{a_2^2}\omega^3.$$

Оказывается, что в системе (2.4) не может выполняться равенство $a_2^2-3a_4^2=0$. Действительно, если $a_2^2=3a_4^2$, то $a_4\neq 0$ в силу (1.11). Кроме того, решением исследуемой системы будет

$$B_8=\frac{8a_4^4-a_5^4}{8a_2a_4^3}B_7,$$
$$\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=0,$$
$$\omega^3{}_2=-a_4^2a_5^2B\omega^2+a_2a_4a_5^2B\omega^3,$$
$$\omega^5{}_4=-8a_2a_4^3B\omega^2-(8a_4^4-a_5^4)B\omega^3,$$

где $B_7=8a_2^3a_4^3B$. Теперь дифференциальное продолжение выражения $\omega^3{}_2$ дает $12a_4^4a_5^4B^2\omega^2\wedge\omega^3=0$, откуда $B=0$, тем самым $\omega^5{}_4=0$. Но это приводит к $a_2a_4a_5^2\omega^2\wedge\omega^3=0$, что противоречит сделанным предположениям.

Если же $-a_4B_7+a_2B_8=0$, то из второго уравнения (2.4) следует, что $B_7=B_8=0$ и соответствующая 3-параметрическая подгруппа $K^{5,3}$ выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4=\omega^5=0,\qquad \omega^2{}_1=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^5{}_1=\omega^3{}_2=$$
$$=\omega^4{}_2-a_2^2\omega^2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3-a_5^2\omega^3=\omega^5{}_4=0.$$

Уравнениями инфинитезимального перемещения репера под действием этой подгруппы будут

$$
\begin{aligned}
dM &= ds\, e_1 + dt\, e_2 + du\, e_3,\\
de_1 &= 0,\\
de_2 &= a_2^2\, dt\, e_4,\\
de_3 &= a_5^2\, du\, e_5,\\
de_4 &= -a_2^2\, dt\, e_2,\\
de_5 &= -a_5^2\, du\, e_3
\end{aligned}
$$

(здесь учтено, что $d\omega^1 = d\omega^2 = d\omega^3 = 0$, в силу которых $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = dt$, $\omega^3 = du$). Отсюда следует, что рассматриваемая подгруппа является *подгруппой* $K^{5,3}\{1,3\}$. Действительно, если $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + a_2^{-2}\boldsymbol{e}_4 + a_5^{-2}\boldsymbol{e}_5$, то легко проверить, что $d\boldsymbol{P} = ds\boldsymbol{e}_1$, $d\boldsymbol{e}_1 = 0$. При этом инвариантная трехмерная плоскость проходит через точку P и определяется векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4$. Таким образом, *орбитами V_3 являются прямые цилиндры, построенные на поверхностях Клиффорда* ([2], стр. 19) *гиперплоскости R_4*, проходящей через точку P в направлении векторов $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$, вполне ортогональных к направлению $\boldsymbol{e}_1$ образующих.

Точки $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{M} + a_2^{-2}\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{M} + a_5^{-2}\boldsymbol{e}_5$ опишут под действием исследуемой подгруппы $K^{5,3}\{1,3\}$ двумерные цилиндры вращения в плоскостях R_3, проходящих через P в направлении, соответственно, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_5$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4$.

2°в—г). В каждой точке M орбиты V_3 искомых подгрупп Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ определены два асимптотических конусов, один из которых (C^4) будет либо парой пересекающихся плоскостей либо является невырожденным, а второй (C^5) — парой совпадающихся плоскостей. Теперь $b^{\alpha}{}_{ij}$, которые могут отличаться от нуля, имеют в обозначениях (2.1), (2.1') вид

$$
\begin{gathered}
A_{00} = a_0^2, \quad A_{01} = a_0 a_1, \quad A_{03} = a_0 a_3, \quad \langle 12\rangle = a_1^2 \pm a_2^2,\\
A = a_1 a_3 \pm a_2 a_4, \quad \langle 345\rangle = a_3^2 \pm a_4^2 + a_5^2 b_3, \quad \langle\langle 5\rangle\rangle = a_5^2.
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

В силу этого, из системы (1.19)—(1.30) следуют конечные соотношения

$$
\begin{aligned}
&B_1 = B_2 = 0, \quad B_3 = A_{00}\langle\langle 5\rangle\rangle B, && B_4 = 0, \quad B_5 = A_{01}\langle\langle 5\rangle\rangle B,\\
&B_6 = B_7 = 0, \quad B_8 = \langle 12\rangle \langle\langle 5\rangle\rangle B, && B_9 = 0, \quad B_{10} = \langle 345\rangle \langle\langle 5\rangle\rangle B,\\
&A_4 = 2(A_{00}A_{03} + A_{01}A)B - A_1, && A_6 = -2(A_{00}A_{03} + A_{01}A)B,\\
&A_7 = 2(A_{01}A_{03} + A\langle 12\rangle)B - A_2, && A_8 = -2(A_{03}^2 + A^2)B - A_3,\\
&A_9 = -2(A_{01}A_{03} + A\langle 12\rangle)B, && A_{10} = [2(A_{03}^2 + A^2) - \langle\langle 5\rangle\rangle^2]B
\end{aligned}
$$

и уравнения

$$
\begin{aligned}
\omega^3{}_1 &= A_{00}B\omega^1 + A_{01}B\omega^2 - A_{03}B\omega^3,\\
\omega^3{}_2 &= A_{01}B\omega^1 + \langle 12\rangle B\omega^2 - AB\omega^3,\\
\omega^5{}_4 &= -\langle\langle 5\rangle\rangle B\omega^3.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Кроме того, форма $\omega^2{}_1$ должна удовлетворять системе, являющейся следствием (1.19), (1.20), (1.21), (1.23) при учете (2.6)

$$2A_{01}\omega^2{}_1=(A_1-2A_{00}A_{03}B)\omega^1+(A_2-2A_{01}A_{03}B)\omega^2+$$
$$+(A_3+2A_{03}{}^2B)\omega^3, \tag{2.7}$$
$$\langle '012\rangle\omega^2{}_1=[A_2-(AA_{00}+A_{01}A_{03})B]\omega^1+$$
$$+[-A_1+\{AA_{01}+A_{03}(2A_{00}-\langle 12\rangle)\}B]\omega^2+[A_5+2AA_{03}B]\omega^3, \tag{2.8}$$
$$A\omega^2{}_1=[A_3+A_{00}\langle 01'3'4'5\rangle B]\omega^1+[A_5+A_{01}\langle 012'3'4'5\rangle B]\omega^2+$$
$$+[A_{03}(-3A_{00}+\langle 345\rangle)-3AA_{01}]B\omega^3, \tag{2.9}$$
$$-A_{03}\omega^2{}_1=[A_5+A_{01}\langle 012'3'4'5\rangle B]\omega^1+$$
$$+[-A_3+\{A_{01}{}^2-2(A_{03}{}^2+A^2)+\langle 12\rangle\langle 12'3'4'5\rangle\}B]\omega^2+$$
$$+[-3A_{01}A_{03}+A(3\langle '1'2\rangle+\langle 345\rangle)]B\omega^3. \tag{2.10}$$

Для решения этой системы рассмотрим отдельно все существующие частные случаи

1°. $A_{01}=A_{03}=A=\langle '02\rangle=0$,
2°. $A_{01}=A_{03}=A=0$, $\langle '02\rangle\neq 0$,
3°. $A_{01}=A_{03}=0$, $A\neq 0$,
4°. $A_{01}=0$, $A_{03}\neq 0$,
5°. $A_{01}\neq 0$.

Оказывается, что во всех случаях, кроме первого, либо уравнения (2.7)—(2.10), либо дифференциальное продолжение их решения $\omega^2{}_1$ и выражений (2.6) приводит к противоречиям со сделанными предположениями, т. е. не существует соответствующих подгрупп Ли группы движений в R_5.

1°. Если $A_{01}=A_{03}=A=\langle '02\rangle=0$, то $\omega^2{}_1$ остается параметрической и следствием системы (2.7)—(2.10) будут соотношения $A_1=A_2=A_3=A_5=0$, $\langle 0'5\rangle B=\langle 2'5\rangle B=0$. В последних не может иметь места $B\neq 0$, так как в этом случае получилось бы $\langle 0'5\rangle=\langle 2'5\rangle=0$, т. е. $a_0{}^2=a_2{}^2b_2=a_5{}^2b_3$ $(b_2=b_3=1)$. Но тогда внешнее дифференцирование уравнения $\omega^3{}_1=a_0{}^2B\omega^1$ с учетом структурных уравнений приводит к $a_0{}^4(B^2+1)=0$, которое противоречит предположению действительности всех встречающихся величин и (1.11).

Если же $B=0$, то соответствующая 4-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений пространства R_5 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4=\omega^5=0,\quad \omega^3{}_1=\omega^4{}_1-a_0{}^2\omega^1=\omega^5{}_1=\omega^3{}_2=$$
$$=\omega^4{}_2-a_0{}^2\omega^2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=\omega^5{}_3-a_5{}^2\omega^3=\omega^5{}_4=0.$$

Движение ортонормированного подвижного репера под действием этой подгруппы определяется следующими формулами инфинитезимального перемещения

$$\begin{aligned}
dM&=\omega^1e_1+\omega^2e_2+ds\,e_3,\\
de_1&=\omega^2{}_1e_2+a_0{}^2\omega^1e_4,\\
de_2&=-\omega^2{}_1e_1+a_0{}^2\omega^2e_4,\\
de_3&=a_5{}^2\,ds\,e_5,\\
de_4&=-a_0{}^2\,\omega^1e_1-a_0{}^2\omega^2e_2,\\
de_5&=-a_5{}^2\,ds\,e_3,
\end{aligned}$$

где в силу того, что $d\omega^3 = 0$, обозначено $\omega^3 = ds$. Отсюда следует, что при $s = \text{const}$ точка M орбиты V_3 опишет сферу S_2 в плоскости $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4\}$, а при $\omega^1 = \omega^2 = \omega^2{}_1 = 0$ — окружность на плоскости R_2, направление которой определяется векторами $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_5$. Соответственно построена и орбита $V_3 \subset R_5$. Она является *поверхностью переноса сферы S_2 по окружности S_1 плоскости R_2 вполне ортогональной к плоскости $R_3 \subset R_5$ сферы* S_2. Отметим, что эту орбиту V_3 можно рассматривать как некоторое обобщение поверхности Клиффорда $V_2 \subset R_4$ для случая $V_3 \subset R_5$, отличное от приведенного Б. А. Розенфельдом в [4] (стр. 96).

Выделенная подгруппа $K^{5,3}$ *является подгруппой* $K^{5,3}\{0,2\}$, так как $d\boldsymbol{P} = d(\boldsymbol{M} + a_0^{-2}\boldsymbol{e}_4 + a_5^{-2}\boldsymbol{e}_5) = 0$, и инвариантной относительно действия $K^{5,3}\{0,2\}$ будет плоскость R_2, проходящая через точку P в направлении векторов $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_5$.

Осталось доказать упомянутую выше противоречивость системы (2.3)—(2.14) в случаях 2°—5°.

2°. Если $A_{01} = A_{03} = A = 0$, $\langle'02\rangle \neq 0$, то уравнения (2.7)—(2.10) будут удовлетворены при $A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = B\langle'05\rangle = B\langle'25\rangle = 0$, $\omega^2{}_1 = 0$. Предполагая $B \neq 0$, мы получим $\langle'05\rangle = \langle'25\rangle = 0$, что противоречит предположению $\langle'02\rangle \neq 0$. Если же $B = 0$, то, в силу (2.6), получим $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^5{}_4 = 0$ и, так как сейчас $\omega^4{}_1 = a_0{}^2\omega^1$, $\omega^4{}_2 = \pm a_2{}^2\omega^2$, то $d\omega^2{}_1 = 0$ приводит к противоречивому равенству $\mp a_0{}^2 a_2{}^2 \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$.

3°. Аналогичное противоречие получается при $A_{01} = A_{03} = 0$, $A \neq 0$, $B = 0$, так как тогда также $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^5{}_4 = 0$. Если же $B \neq 0$, то следствия $A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = 0$, $(-\langle 2\rangle + 3\langle 4\rangle + \langle 5\rangle)B = (-3\langle 2\rangle + \langle 4\rangle + \langle 5\rangle)B = 0$ уравнений (2.7), (2.10) приводят с учетом (2.5) к $2\langle 24\rangle = \pm 2(a_2{}^2 + a_4{}^2) = 0$, которое не может при $A = \pm a_2 a_4 \neq 0$ иметь места.

4°. Если $A_{01} = 0$, $A_{03} \neq 0$, то система (2.7)—(2.10) дает

$$\omega^2{}_1 = \frac{AA_{00}}{\langle 0'2\rangle} B\omega^1 + \frac{\langle 2\rangle(3\langle 4\rangle + \langle'235\rangle)}{A_{03}} B\omega^2 + \frac{A(3\langle 2\rangle - \langle 345\rangle)}{A_{03}} B\omega^3,$$

$$A_1 = 2A_{00}A_{03}B, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -2A_{03}{}^2 B, \quad A_5 = \frac{AA_{00}A_{03}}{\langle 0'2\rangle} B.$$

(Имеет место $\langle'02\rangle \neq 0$, так как следствием $\langle'02\rangle = 0$ будет $B = 0$, т. е. $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^5{}_4 = 0$, $d\omega^3{}_2 = 0$. Последнее выполняется при $A_{03}\langle 2\rangle = 0$, что противоречит предположениям.) Следовательно, $B \neq 0$, и, кроме выписанных соотношений, из решаемой системы получаются еще следующие

$$\begin{aligned}
\langle'02\rangle(3\langle 4\rangle + \langle'235\rangle) + \langle 0\rangle\langle 3\rangle &= 0,\\
A[\langle'02\rangle^2(3\langle 2\rangle - \langle 345\rangle) - \langle 0\rangle\langle 3\rangle(2\langle 2\rangle - \langle 0\rangle)] &= 0,\\
\langle 2\rangle\langle 4\rangle + \langle 0'2\rangle(3\langle 3\rangle + \langle'045\rangle) &= 0,\\
A[\langle 2\rangle\langle'02\rangle(3\langle 4\rangle + \langle'235\rangle) - \langle 0\rangle^2\langle 3\rangle] &= 0,\\
\langle 2\rangle\langle 4\rangle(3\langle 2\rangle - \langle 345\rangle) + \langle 0\rangle\langle 3\rangle(3\langle 0\rangle - \langle 345\rangle) &= 0.
\end{aligned}$$

Так как при сделанных предположениях $A = a_2a_4b_2 = \pm a_2a_4$, то для $A = 0$ (т. е. $a_4 = 0$) третье и пятое уравнение этой системы имеют вид

$$-\langle 0\rangle + 3\langle 3\rangle + \langle 5\rangle = 0,$$
$$3\langle 0\rangle - \langle 3\rangle - \langle 5\rangle = 0.$$

Отсюда получим $2\langle 03\rangle = 0$, т. е. $a_0^2 = -a_3^2$, что не может, в силу (1.11), иметь места.

Если $A \neq 0$, то подстановка первого члена из первого уравнения в четвертое дает $\langle 2\rangle = -\langle 0\rangle$ или, с учетом применяемых обозначений, $b_2 = -1$. Тогда первые три уравнения приводятся к

$$2\langle 0\rangle + \langle 3\rangle + 6\langle 4\rangle + 2\langle 5\rangle = 0,$$
$$10\langle 0\rangle - 2\langle 4\rangle + 2\langle 5\rangle = 0,$$
$$7\langle 3\rangle + 7\langle 4\rangle + 4\langle 5\rangle = 0,$$

откуда получается $\langle 3\rangle = -2\langle 0\rangle - 6\langle 4\rangle - 2\langle 5\rangle$, $\langle 5\rangle = -1{,}4\langle 0\rangle - 3{,}5\langle 4\rangle$ и $\langle 4\rangle = 0{,}8\langle 0\rangle$. Но так как $\langle 4\rangle = a_4^2b_2 = -a_4^2$, то получилось противоречие с предложением вещественности всех встречающихся величин.

5°. Если в системе (2.7)—(2.10) имеет место $A_{01} \neq 0$, то из (2.7) получается выражение для $\omega^2{}_1$ и, в силу линейной независимости форм ω^1, ω^2, ω^3, постоянные коэффициенты рассматриваемой системы удовлетворяют соотношениям

$$A \;-\frac{A}{2A_{01}}A_1 - \frac{\langle 0\rangle}{A_{01}}(AA_{03} + A_{01}\langle 01'3'4'5\rangle)B,$$

$$A_5 = -\frac{A_{03}}{2A_{01}}A_1 + \frac{\langle 0\rangle}{A_{01}}(A_{03}^2 - \langle 1\rangle\langle 012'3'4'5\rangle)B$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\langle '012\rangle A_1 - 2A_{01}A_2 = 2B\langle 0\rangle[A_{03}\langle '02\rangle - AA_{01}],\\ &2A_{01}A_1 + \langle '012\rangle A_2 = 2BA_{01}[A_{03}\langle 0\rangle + AA_{01}];\end{aligned}\right\} \qquad (2.11\text{А})$$

$$\begin{aligned} AA_1 - A_{03}A_2 = 2B[A_{01}(\langle 012\rangle\langle '3'4'5\rangle + \langle 0\rangle^2 + \\ + \langle 12\rangle^2 - 3A_{03}^2 - 2A^2) + AA_{03}\langle 0\rangle],\end{aligned}$$
$$(2.11\text{Б})$$
$$A_{03}A_1 + AA_2 = 2B[2A_{01}^2\langle '1'2\rangle + A_{03}(\langle 0\rangle A_{03} + AA_{01})];$$

$$\begin{aligned} A^2A_1 = 2B\langle 0\rangle[AA_{01}(\langle 0'4'5\rangle - 3\langle 13\rangle) + \\ + A_{03}(A^2 - A_{01}^2 + 2\langle 1\rangle\langle 345\rangle)]; \quad (2.11\text{В})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -A_{03}A_1 = 2B\langle 0\rangle[A_{01}A_{03}(\langle '045\rangle - 5\langle 1\rangle + 3\langle 3\rangle) + \\ + A(2\langle 1\rangle\langle 345\rangle - 6\langle 1\rangle\langle 12\rangle - A_{03}^2)];\end{aligned}$$
$$(2.11\text{Г})$$

$$\begin{aligned} (\langle '012\rangle A + 2A_{01}A_{03})A_1 = 2B\langle 0\rangle[A_{01}(\langle 0\rangle\langle '02\rangle + \langle 01'2\rangle\langle 345\rangle - \\ - 3\langle 1\rangle\langle 12\rangle - 2\langle 3\rangle\langle 12\rangle + 4\langle 0\rangle\langle 3\rangle) + AA_{03}(\langle '0\rangle + 5\langle 1\rangle + \langle 2\rangle)].\end{aligned}$$
$$(2.11\text{Д})$$

Также как в предыдущих случаях здесь $B \neq 0$, потому что при $B = 0$ из (2.11А) следовало бы $A_1 = A_2 = 0$, так как определителем этой системы является

$$d_1 = \langle '012\rangle^2 + 4A_{01}^2 \neq 0.$$

7*

Следовательно, и $A_3 = 0$, и $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^5{}_4 = 0$, что не может иметь места.

Определителем системы (2.11Б) является

$$d_2 = A^2 + A_{03}^2,$$

который отличен от нуля. Действительно, если d_2 равнялся бы нулю, то $A = A_{03} = 0$ (т. е. $a_3 = a_4 = 0$). Но тогда из правых сторон (2.11Б) следовали бы равенства $\langle 12\rangle = \langle '05\rangle = 0$ и из (2.11Д) получилось бы $A_{01}\langle 1\rangle\langle 5\rangle = 0$, что, в силу $\langle 5\rangle = \langle 0\rangle \neq 0$, противоречит условиям (1.11).

Следовательно, $d_2 \neq 0$ и A, A_{03} не могут одновременно обратиться в нуль. Так как во всех случаях (т. е. либо $A_{03} = 0$, либо $A = 0$, либо $A_{03} \neq 0$, $A \neq 0$) противоречивость системы (2.11) доказывается аналогичным образом, мы приводим здесь для краткости изложения только первый из них.

Пусть $A_{03} = 0$, $A \neq 0$. Тогда решением системы (2.11А) будет $A_1 = 2B\langle 0\rangle\langle 01'2\rangle AA_{01}d_1^{-1}$, $A_2 = 2B\langle 0\rangle\langle 1\rangle\langle 012\rangle Ad_1^{-1}$. Подстановка выражения A_2 во второе уравнение (2.11Б) дает $-\langle 012\rangle A^2 = 2d_1\langle 12\rangle$. Здесь $\langle 012\rangle \neq 0$, так как при $\langle 12\rangle = -\langle 0\rangle \neq 0$ мы получили бы противоречие $2d_1\langle 0\rangle = 0$. Следовательно, $A^2 = -2d_1\langle 12\rangle\langle 012\rangle^{-1}$. Легко проверить, что $A^2 > 0$ только при

$$b_2 = -1, \quad a_1^2 < a_2^2, \quad a_0^2 > -a_1^2 + a_2^2. \tag{2.12}$$

В рассматриваемом случае из (2.11Г) получается выражение $\langle 45\rangle = 3\langle 12\rangle$. Если учесть выражения A_1, A^2 и $\langle 45\rangle$ в первом уравнении системы (2.11Б); (2.11В) и (2.11Д), они будут конечными соотношениями между $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$. Обозначим $\lambda = \langle 0\rangle\langle 2\rangle^{-1}$, $\mu = \langle 1\rangle\langle 2\rangle^{-1}$. Тогда, в силу (2.12),

$$-1 < \mu < 0, \quad \lambda < -(\mu+1) < 0. \tag{2.12'}$$

В этих обозначениях упомянутые соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \lambda^3 + 3(\mu+1)\lambda^2 + 2(\mu+1)(2\mu-7)\lambda + 2(\mu+1)^3 = 0, \\ \lambda^2 - 3\mu\lambda - (\mu+1)(4\mu+5) = 0, \\ (3\mu+4)\lambda^2 + (\mu+1)(7\mu-9)\lambda + (\mu+1)^2(4\mu-3) = 0. \end{gathered}$$

Но последнее уравнение не имеет решения, удовлетворяющего условиям (2.12'). Действительно, единственным отрицательным решением его будет

$$\lambda = \frac{\mu+1}{2(3\mu+4)}\left(-7\mu + 9 - \sqrt{\mu^2 - 154\mu + 129}\right).$$

Здесь $\lambda < -(\mu+1)$ выполняется только при $\mu < -4/3$, что противоречит первому условию (2.12'). Противоречивость системы (2.11) доказана.

3. Несуществование орбит типа I 2°б). В случае 2°б) типа I канонический аффинный касательный репер $\{M, f_i\}$ поверхности V_3 выбран так, что $\varepsilon' = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 \neq 0$. Но при вычислениях удобнее пользоваться значениями $\varepsilon' \neq 0$, $b_2 = \pm 1$, $b_3 = 1$, которые получаются с помощью подходящей перенормировки аффинного репера $\{M, f_i\}$. Тогда величины (2.1), (2.1') имеют вид $A_{00}=A_{01}=A_{03}=B_{22}=B_{24}=0$ и $\langle 2\rangle = a_2{}^2 b_2 = \pm a_2{}^2$, $\langle 4\rangle = \pm a_4{}^2$, $\langle 5\rangle = a_5{}^2 b_3 = a_5{}^2$, $\langle\langle 5\rangle\rangle = a_5{}^2\varepsilon'$. Решением системы (1.19)—(1.30) будут уравнения

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1=\omega^3{}_1=0,\\ &\omega^3{}_2=(-AB_7'+\langle 2\rangle B_8')\,\omega^2+(\langle 45\rangle B_7'-AB_8')\,\omega^3, \qquad (2.13)\\ &\omega^5{}_4=-\langle\langle 5\rangle\rangle B_7'\omega^2-\langle\langle 5\rangle\rangle B_8'\omega^3, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено $B_7' = \langle 2\rangle^{-1}\langle\langle 5\rangle\rangle^{-1}B_7$, $B_8' = \langle 2\rangle^{-1}\langle\langle 5\rangle\rangle^{-1}B_8$. Остальные решения дают следующие соотношения между коэффициентами A_s, B_s $(s=1, \ldots, 10)$:

$$\begin{aligned} &A_1=A_2=A_3=A_4=A_5=A_6=0,\\ &A_7=2A(-AB_7'+\langle 2\rangle B_8'), \qquad A_8=2A(\langle 45\rangle B_7'-AB_8'), \qquad (2.14')\\ &A_9=\langle'245\rangle(\langle 45\rangle B_7'-AB_8'), \quad A_{10}=2A\langle 45\rangle B_7'+(2\langle 2\rangle\langle 4\rangle-\langle\langle 5\rangle\rangle^2)B_8',\\ &B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=B_6=0,\ B_9=\langle\langle 5\rangle\rangle\langle 45\rangle B_7',\ B_{10}=\langle\langle 5\rangle\rangle\langle 45\rangle B_8', \end{aligned}$$

и B_7', B_8' удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &A(2\langle 45\rangle+\langle'245\rangle)B_7'-\langle 2\rangle(2\langle 4\rangle+\langle'245\rangle)B_8'=0, \qquad (2.14'')\\ &(\langle'245\rangle\langle 45\rangle-2\langle 2\rangle\langle 4\rangle+(\varepsilon')^2\langle 5\rangle^2)B_7'+A(2\langle 2\rangle+\langle 2'4'5\rangle)B_8'=0. \end{aligned}$$

Эта система не может иметь тривиального решения, так как если бы $B_7'=B_8'=0$, то $\omega^3{}_2=0$ и дифференциальное продолжение последнего уравнения дало бы противоречивое равенство $-\langle 2\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle\omega^2\wedge\omega^3=0$.

Кроме (2.14''), коэффициенты B_7', B_8' должны удовлетворять квадратичным уравнениям, которые являются следствием дифференциального продолжения уравнений (2.13), а именно

$$\begin{aligned} &(\langle 2\rangle\langle 4\rangle+\langle 45\rangle^2)(B_7')^2-2A\langle 245\rangle B_7'B_8'+\langle 2\rangle\langle 24\rangle(B_8')^2=-\langle 2\rangle\langle 5\rangle, \qquad (2.15)\\ &-A(B_7')^2+\langle 245\rangle B_7'B_8'-A(B_8')^2=A. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений может иметь действительные решения только при $b_2=-1$. Но тогда в (2.14'') всегда $A\neq 0$ (т. е. $a_4\neq 0$). Действительно, предполагая $a_4=0$, в силу $(B_7')^2+(B_8')^2\neq 0$, из (2.14'') с учетом $b_2=-1$ получилось бы $\langle'25\rangle(\langle'25\rangle+(\varepsilon')^2\langle 5\rangle)=(a_2{}^2+a_5{}^2)(a_2{}^2+a_5{}^2+(\varepsilon')^2a_5{}^2)=0$, что противоречит предположению (1.11).

Отметим, что в первом уравнении системы (2.14'') коэффициент при B_7' вообще не может обращаться в нуль. Если $2\langle 45\rangle+\langle'245\rangle=0$, то это же уравнение дает $2\langle 2\rangle\langle 5\rangle B_8'=0$, т. е. $B_8'=0$, но тогда второе уравнение системы (2.15) приводит к противоречию $(B_7')^2=-1$.

Обозначим $\lambda=\langle 2\rangle\langle 4\rangle^{-1}$, $\mu=\langle 5\rangle\langle 4\rangle^{-1}$. Тогда, в силу $b_2=-1$,

$$\lambda>0, \qquad \mu<0. \qquad (2.16)$$

Система (2.14″) принимает в этих обозначениях вид

$$\begin{gathered} A(-\lambda+3\mu+3)B_7'-\langle 2\rangle(-\lambda+\mu+3)B_8'=0, \\ [-\lambda(\mu+3)+(\mu+1)^2+(\varepsilon')^2\mu^2]B_7'+A(3\lambda-\mu-1)B_8'=0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

С учетом вышесказанного,

$$B_7'=\frac{\langle 2\rangle(-\lambda+\mu+3)}{A(-\lambda+3\mu+3)}B_8', \tag{2.17}$$

и подстановка этого выражения во второе уравнение дает

$$\lambda^2-[(2+(\varepsilon')^2)\mu-2]\lambda+(\mu+1)^2+(\varepsilon')^2\mu(\mu+3)=0.$$

Кроме того, с учетом (2.17), система (2.15) принимает вид

$$-\mu[\lambda^2-2(\mu-1)\lambda+\ (\mu+1)^2](B_8')^2=(-\lambda+3\mu+3)^2,$$
$$-\mu[\lambda^2+2(\mu-1)\lambda-3(\mu+1)^2](B_8')^2=(-\lambda+3\mu+3)^2.$$

Сравнение коэффициентов при $(B_8')^2$ приводит к $\lambda = (\mu-1)^{-1}(\mu+1)^2$, откуда, в силу $\mu<0$, также $\lambda\leqslant 0$, что противоречит условиям (2.16). Несовместность системы (1.19)—(1.30) при рассматриваемых предположениях доказана. Следовательно, не существует подгруппы Ли с орбитой V_3 типа I 2°б).

Аналогичным путем доказывается несуществование подгрупп Ли $K^{5,3}$ с орбитами типов I 3°а—б); сами доказательства мы здесь опустим (см. п. 1 настоящего параграфа).

§ 3. Подгруппы $\mathfrak{K}^{5,3}$ с орбитами типа II

Если искать подгруппы Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$, асимптотические конусы орбит V_3 которых будут типа II (по таблице 1.1), то коэффициенты системы (1.19)—(1.30) обозначаются с помощью (1.14), (1.16). При этом $\operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\|=2$. Для ранга матрицы $\|b^4{}_{ij}\|$ имеются, в силу условий (1.7А), следующие возможности. Если $\delta=0$, то при $b_2=b_3=\pm b_{23}\neq 0$ будет $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|=1$ и при $b_2=0$, b_3 — произвольный, $b_{23}\neq 0$ будет $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|=2$. Если же $\delta=\pm 1$, то при $b_2=b_3=\pm b_{23}\neq 0$ имеет место $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|=2$, а в другом возможном случае — $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|=3$.

В ходе наших исследований выяснилось, что при сделанных предположениях подгруппа Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$ существует только в случае, когда $\operatorname{rang}\|b^4{}_{ij}\|=3$ и $\operatorname{rang}\|b^5{}_{ij}\|=2$, т. е. когда выполняются условия

$$\delta=\pm 1,\quad b_2=0,\quad b_3 \text{ — произвольный}, \ b_{23}\neq 0. \tag{3.1}$$

В остальных случаях система (1.19)—(1.30) или дифференциальное продолжение ее решений приводит к противоречиям. Доказательство последнего утверждения мы опускаем, так как оно вполне аналогично доказательству, приведенному в п. 3 § 2.

Итак, переходим сразу к случаю (3.1). В этом случае решением уравнения (1.25) будет

$$\omega^5{}_4 = -A_{00}^{-1}B_1\omega^1 - A_{00}^{-1}B_2\omega^2 - A_{00}^{-1}B_3\omega^3, \tag{3.2А}$$

в силу чего из уравнений (1.28), (1.30) следует, что

$$\begin{aligned} B_6 &= A_{00}^{-1}\langle 12345\cdot\rangle B_1 - B_4,\\ B_9 &= A_{00}^{-1}\langle 12345\cdot\rangle B_2 - B_7,\\ B_{10} &= A_{00}^{-1}\langle 12345\cdot\rangle B_3 - B_8. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подстановка выражения формы $\omega^5{}_4$ в уравнения (1.26), (1.27) дает систему для определения форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$:

$$B_{22}\omega^2{}_1 + B_{24}\omega^3{}_1 = A_{00}^{-1}[(-A_{01}B_1 + A_{00}B_2)\omega^1 + (-A_{01}B_2 + A_{00}B_4)\omega^2 + \\ + (-A_{01}B_3 + A_{00}B_5)\omega^3],$$

$$B_{24}\omega^2{}_1 + \langle\langle 45\rangle\rangle\omega^3{}_1 = A_{00}^{-1}[(-A_{03}B_1 + A_{00}B_3)\omega^1 + (-A_{03}B_2 + A_{00}B_5)\omega^2 + \\ + (\langle 12345\cdot\rangle B_1 - A_{03}B_3 - A_{00}B_4)\omega^3].$$

При этом определителем будет $d = \langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle \neq 0$. Следовательно, формы $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$ всегда выражаются через главные формы:

$$\omega^2{}_1 = A_{00}^{-1}d^{-1}\{[(-A_{01}\langle\langle 45\rangle\rangle + A_{03}B_{24})B_1 + A_{00}\langle\langle 45\rangle\rangle B_2 - A_{00}B_{24}B_3]\omega^1 + \\ + [(-A_{01}\langle\langle 45\rangle\rangle + A_{03}B_{24})B_2 + A_{00}\langle\langle 45\rangle\rangle B_4 - A_{00}B_{24}B_5]\omega^2 + \\ + [-\langle 12345\cdot\rangle B_{24}B_1 + (-A_{01}\langle\langle 45\rangle\rangle + A_{03}B_{24})B_3 + \\ + A_{00}B_{24}B_4 + A_{00}\langle\langle 45\rangle\rangle B_5]\omega^3\}, \tag{3.2Б}$$

$$\omega^3{}_1 = A_{00}^{-1}d^{-1}\{[(A_{01}B_{24} - A_{03}B_{22})B_1 - A_{00}B_{24}B_2 + A_{00}B_{22}B_3]\omega^1 + \\ + [(A_{01}B_{24} - A_{03}B_{22})B_2 - A_{00}B_{24}B_4 + A_{00}B_{22}B_5]\omega^2 + \\ + [\langle 12345\cdot\rangle B_{22}B_1 + (A_{01}B_{24} - A_{03}B_{22})B_3 - A_{00}B_{22}B_4 - \\ - A_{00}B_{24}B_5]\omega^3\}. \tag{3.2В}$$

Для определения формы $\omega^3{}_2$ у нас имеются уравнения (1.28), (1.29) в виде

$$\begin{aligned} &2B_{24}\omega^3{}_2 = A_{00}^{-1}[(-\langle 12\rangle B_1 + A_{00}B_4)\omega^1 + (-\langle 12\rangle B_2 + A_{00}B_7)\omega^2 + \\ &\qquad + (-\langle 12\rangle B_3 + A_{00}B_8)\omega^3],\\ &\langle\langle' 245\rangle\rangle\omega^3{}_2 = A_{00}^{-1}[(-'AB_1 + A_{00}B_5)\omega^1 + (-'AB_2 + A_{00}B_8)\omega^2 + \\ &\qquad + (\langle 12345\cdot\rangle B_2 - 'AB_3 - A_{00}B_7)\omega^3]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что форма $\omega^3{}_2$ не может остаться параметрической, так как для этого необходимо $2B_{24} = \langle\langle' 245\rangle\rangle = 0$. Но, в силу (1.16), (1.7А), это условие имеет вид $2a_2a_4\varepsilon = (-a_2{}^2 + a_4{}^2 - a_5{}^2)\varepsilon = 0$. С учетом (1.11) первое из них удовлетворяется только при $a_4 = 0$, а второе сводится к $a_2{}^2 + a_5{}^2 = 0$, что противоречит (1.11). Следовательно, форма $\omega^3{}_2$ также выражается через главные формы. Для получения соответствующего выражения придется рассматривать следующие частные случаи: 1° $a_4 \neq 0$ и 2° $a_4 = 0$. Проведенное нами исследование показало, что пфаффовая система, которую образует выражение формы $\omega^3{}_2$ в совокупности с (3.2А), (3.2Б), (3.2В), (1.2), (1.3), является вполне интегрируемой только при

$$a_4 \neq 0, \qquad a_1 = a_3 = 0. \tag{3.5}$$

Если же $a_4 \neq 0$ и $a_1^2 + a_3^2 \neq 0$ или $a_4 = 0$, то окончательное решение системы (1.19)—(1.30) и дифференциальное продолжение ее решений приводят к противоречиям. Для краткости изложения мы соответствующих доказательств приводить не будем. Рассмотрим подробнее лишь случай, когда в (1.19)—(1.30) выполнены (3.1), (3.5). Так как при сделанных предположениях $\langle 12\rangle = 0$, то из (3.4) получается

$$\omega^3{}_2 = \frac{B_4}{2B_{24}}\omega^1 + \frac{B_7}{2B_{24}}\omega^2 + \frac{B_8}{2B_{24}}\omega^3, \tag{3.2Г}$$

а из (1.19) следует $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Следовательно, в правых частях уравнений (1.20)—(1.21) отсутствуют формы ω^1, а поэтому с учетом (3.2Б), (3.2В) должна удовлетворяться система

$$(\langle 0\rangle \langle\langle 45\rangle\rangle + {}'AB_{24})B_2 - ({}'A\langle\langle 2\rangle\rangle + \langle 0\rangle B_{24})B_3 = 0,$$
$$({}'A\langle\langle 45\rangle\rangle - \langle{}'05\cdot\rangle B_{24})B_2 + (\langle{}'05\cdot\rangle\langle\langle 2\rangle\rangle - {}'AB_{24})B_3 = 0.$$

Эта система имеет тривиальное решение $B_2 = B_3 = 0$ (можно доказать, что при $B_2^2 + B_3^2 \neq 0$ система (1.19)—(1.30) приводит к противоречиям). Подстановка выражений (3.2А), (3.2Г) в (1.29) дает

$$B_1 = \frac{A_{00}}{2B_{24}{}'A}(\langle\langle 2'4'5\rangle\rangle B_4 + 2B_{24}B_5),$$

$$B_8 = \frac{\langle\langle{}'245\rangle\rangle}{2B_{24}}B_7, \qquad B_9 = \frac{\langle\langle{}'245\rangle\rangle}{2B_{24}}B_8.$$

Но так как из (3.3) сейчас следует, что $B_9 = -B_7$, то последние два равенства выполняются, в силу $\langle\langle{}'245\rangle\rangle^2 + 4B_{24}^2 \neq 0$, только при $B_7 = B_8 = 0$. Для B_6 имеем выражение

$$B_6 = (2B_{24}{}'A)^{-1}[(\langle 5\cdot\rangle\langle\langle 2'4'5\rangle\rangle - 2B_{24}{}'A)B_4 + 2B_{24}\langle 5\cdot\rangle B_5]. \tag{3.6А}$$

Следствиями из уравнений (1.22), (1.23), (1.24) будут

$$\left.\begin{aligned}
A_4 &= (2B_{24}{}'A)^{-1}[(2'A^2 + \langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle{}'245\rangle\rangle)B_4 - 2B_{24}\langle\langle 2\rangle\rangle B_5],\\
A_5 &= (2B_{24}{}'A)^{-1}[(2'A\langle 5\cdot\rangle + B_{24}\langle\langle{}'245\rangle\rangle)B_4 - 2B_{24}^2B_5],\\
A_6 &= (2B_{24}{}'A)^{-1}[(-2'A^2 + \langle\langle 45\rangle\rangle\langle\langle{}'245\rangle\rangle)B_4 - 2B_{24}\langle\langle 45\rangle\rangle B_5],\\
A_7 &= A_8 = A_9 = A_{10} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.6Б}$$

При этом B_4, B_5 удовлетворяют системе, которая в силу (3.2Б), (3.2В), (3.2Г) и (3.6Б) является следствием уравнений (1.20), (1.21):

$$[2B_{24}{}'A\,('A\,\langle\langle 45\rangle\rangle - \langle '05\cdot\rangle\, B_{24}) -$$
$$- ('A\,\langle\langle 2\rangle\rangle + \langle 0\rangle\, B_{24})\,(\langle 5\cdot\rangle\,\langle\langle 2'4'5\rangle\rangle - 2B_{24}{}'A)\,]B_4 +$$
$$+2B_{24}['A\,(\langle '05\cdot\rangle\,\langle\langle 2\rangle\rangle + \langle 0\rangle\,\langle\langle 45\rangle\rangle) - \langle 5\cdot\rangle\,('A\,\langle\langle 2\rangle\rangle + \langle 0\rangle\, B_{24})\,]B_5 = 0,$$
$$[2B_{24}{}'A\,(\langle 0\rangle\,\langle\langle 45\rangle\rangle + 'AB_{24}) + \langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle\,(2'A^2 + \langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle '245\rangle\rangle)\,]B_4 -$$
$$-2B_{24}['A\,('A\,\langle\langle 2\rangle\rangle + \langle 0\rangle\, B_{24}) + \langle\langle 2\rangle\rangle^2\,\langle\langle 5\rangle\rangle]B_5 = 0, \qquad (3.7)$$
$$[2B_{24}{}'A\,('A\,\langle\langle 45\rangle\rangle - \langle '05\cdot\rangle\, B_{24}) -$$
$$- \langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 5\rangle\rangle\,(2'A\,\langle 5\cdot\rangle + B_{24}\,\langle\langle '245\rangle\rangle)\,]B_4 +$$
$$+2B_{24}['A\,(\langle '05\cdot\rangle\,\langle\langle 2\rangle\rangle - 'AB_{24}) + B_{24}\,\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 5\rangle\rangle]B_5 = 0,$$
$$[(\langle 5\cdot\rangle\,\langle\langle 2'4'5\rangle\rangle - 2B_{24}{}'A)\,(\langle '05\cdot\rangle\,\langle\langle 2\rangle\rangle - 'AB_{24}) +$$
$$+\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 5\rangle\rangle\,(2'A^2 + \langle\langle 45\rangle\rangle\,\langle\langle 2'4'5\rangle\rangle)\,]B_4 +$$
$$+2B_{24}['A\,('A\,\langle\langle 45\rangle\rangle - \langle '05\cdot\rangle\, B_{24}) + \langle 5\cdot\rangle\,(\langle '05\cdot\rangle\,\langle\langle 2\rangle\rangle - 'AB_{24}) +$$
$$+ \langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle\,\langle\langle 45\rangle\rangle]B_5 = 0.$$

Решением этой системы будет

$$(2B_{24})^{-1}\,\langle\langle '245\rangle\rangle\, B_4 = B_5,$$
$$\langle\langle 2\rangle\rangle\,'A + \langle 0\rangle\, B_{24} = 0, \qquad (3.8)$$
$$\langle 0\rangle\,\langle\langle '245\rangle\rangle + \langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle 5\cdot\rangle = 0.$$

Если обозначить $B = (2B_{24}\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 5\rangle\rangle)^{-1}B_4$, то в силу (3.8), выражения (3.2) для форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^5{}_4$ принимают вид

$$\omega^2{}_1 = B[B_{24}\,\langle\langle 245\rangle\rangle\,\omega^2 + (\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 4'5\rangle\rangle + \langle\langle 45\rangle\rangle^2)\,\omega^3],$$
$$\omega^3{}_1 = B[\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle '2'45\rangle\rangle\,\omega^2 - B_{24}\,\langle\langle 245\rangle\rangle\,\omega^3], \qquad (3.2')$$
$$\omega^3{}_2 = B\,\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 5\rangle\rangle\,\omega^1,$$
$$\omega^5{}_4 = 0.$$

Дифференциальное продолжение последних с учетом структурных уравнений приводит к

$$-2\,\langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle\,\langle\langle '2'45\rangle\rangle = 0,\ 2\,\langle\langle 2\rangle\rangle^2\,\langle\langle 5\rangle\rangle\,\langle\langle 245\rangle\rangle\, B^2 = A_{00}{}^2,$$
$$\langle\langle 2\rangle\rangle^2\,[\langle\langle '2'45\rangle\rangle\,(\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 4\rangle\rangle + \langle\langle 45\rangle\rangle^2) + \langle\langle 4\rangle\rangle\,\langle\langle 245\rangle\rangle^2 +$$
$$+ \langle\langle 5\rangle\rangle\,(\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 4'5\rangle\rangle + 2\,\langle\langle 45\rangle\rangle^2)\,]B^2 = A_{00}{}^2\,\langle\langle '245\rangle\rangle, \qquad (3.9)$$

$$[\langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 5\rangle\rangle\,(\langle\langle 2\rangle\rangle^2 + 2\,\langle\langle 2\rangle\rangle\langle\langle 4'5\rangle\rangle + \langle\langle 45\rangle\rangle^2) + \langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 4\rangle\rangle\,\langle\langle 245\rangle\rangle^2 +$$
$$+ \langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle '2'45\rangle\rangle\,(\langle\langle 2\rangle\rangle\,\langle\langle 4'5\rangle\rangle + \langle\langle 45\rangle\rangle^2)\,]B^2 =$$
$$= \langle\langle 2\rangle\rangle^{-1}\,(\langle\langle 2\rangle\rangle^2\,\langle\langle 5\rangle\rangle - A_{00}{}^2\,\langle\langle 4\rangle\rangle).$$

Решением системы (3.9) будет

$$B=\pm(6A_{00})^{-1}, \quad \langle\langle 2\rangle\rangle=\langle\langle 4\rangle\rangle=0{,}5\,\langle\langle 5\rangle\rangle=\pm\sqrt{3/2}\,A_{00}.$$

Обозначим $a=A_{00}$, тогда соответствующая 3-параметрическая подгруппа Ли движений $K^{5,3}$ выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\begin{aligned}&\omega^4=\omega^5=0, \quad \omega^2{}_1\mp a\omega^2\mp 2a\omega^3=\omega^3{}_1\pm a\omega^3=\\&=\omega^4{}_1-a\omega^1=\omega^5{}_1=\omega^3{}_2\mp 0{,}5a\omega^1=\omega^4{}_2+a\omega^3=\\&=\omega^5{}_2\mp\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+\omega^3)=\omega^4{}_3+a\omega^2+2a\omega^3=\\&=\omega^5{}_3\mp\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+3\omega^3)=\omega^5{}_4=0.\end{aligned}$$

Инфинитезимальное перемещение ортонормированного подвижного репера, присоединенного к точке M орбиты $V_3\subset R_5$, под действием выделенной подгруппы определяется формулами

$$\begin{aligned}&d\boldsymbol{M}=\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2+\omega^3\boldsymbol{e}_3,\\&d\boldsymbol{e}_1=\pm a(\omega^2+2\omega^3)\boldsymbol{e}_2\mp a\omega^3\boldsymbol{e}_3+a\omega^1\boldsymbol{e}_4,\\&d\boldsymbol{e}_2=\mp a(\omega^2+2\omega^3)\boldsymbol{e}_1\pm 0{,}5a\omega^1\boldsymbol{e}_3-a\omega^3\boldsymbol{e}_4\pm\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+\omega^3)\boldsymbol{e}_5,\\&d\boldsymbol{e}_3=\pm a\omega^3\boldsymbol{e}_1\mp 0{,}5a\omega^1\boldsymbol{e}_2-a(\omega^2+2\omega^3)\boldsymbol{e}_4\pm\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+3\omega^3)\boldsymbol{e}_5,\\&d\boldsymbol{e}_4=-a\omega^1\boldsymbol{e}_1+a\omega^3\boldsymbol{e}_2+a(\omega^2+2\omega^3)\boldsymbol{e}_3,\\&d\boldsymbol{e}_5=\mp\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+\omega^3)\boldsymbol{e}_2\mp\sqrt{3/2}\,a(\omega^2+3\omega^3)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что подгруппа является *винтовой подгруппой* $K^{5,3}{}_3\{0\}$, *так как при* $\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{M}+\boldsymbol{e}_4\pm\sqrt{2/3}\,\boldsymbol{e}_5$ *имеет место* $d\boldsymbol{C}=0$. *Ее орбита* V_3 *находится на сфере* $S_4\subset R_5$.

Двумерными орбитами этой подгруппы будут максимально-симметричные поверхности (см. [3], стр. 107), которые опишутся, например, точками прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{P}=a\boldsymbol{M}+\boldsymbol{e}_4$, в направлении вектора $\boldsymbol{e}_5$, потому что

$$d(\boldsymbol{P}+p_5\boldsymbol{e}_5)=a(1\mp p_5\sqrt{3/2})\,[(\omega^2+\omega^3)\boldsymbol{e}_2+(\omega^2+3\omega^3)\boldsymbol{e}_3].$$

§ 4. О несуществовании подгрупп Ли с орбитами типов III или IV

Оказывается, что система (1.19)—(1.30), в которой постоянные коэффициенты определены каноническими видами матриц типа III или IV (по таблице 1.1), приводит к противоречиям. Следовательно, не существует соответствующих подгрупп Ли класса $\mathfrak{K}^{5,3}$. Так как доказательство этого результата в обеих случаях одинаковое и по существу вполне аналогично рассмотренному в п. 3 § 2, то для краткости изложения ограничимся здесь только рассмотрением типа IV.

Итак, пусть в каноническом ортонормированном репере орбиты V_3 матрицы $\|b^\alpha{}_{ij}\|$ типа IV. Если $b_2\neq 0$, то rang $\|b^4{}_{ij}\|=3$, если же $b_2=0$, то имеет место rang $\|b^4{}_{ij}\|=2$.

В первом случае ($b_2 \neq 0$) из системы (1.19)—(1.30) легко получить выражения (S_1) форм $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^5{}_4$ через главные формы ω^1, ω^2, ω^3, аналогичные выражениям (2.13). Тогда подстановка этих выражений (S_1) в неучтенные уравнения системы (1.19)—(1.30) дает линейную относительно коэффициентов A_s, B_s ($s = 1, \ldots, 10$) систему (S_2), т. е. аналог системы (2.14′), (2.14″). Кроме того, дифференциальное продолжение (S_1) приводит с учетом (1.18) к системе (S_3), квадратичной относительно A_s, B_s, т. е. аналог системы (2.15). Как отмечалось выше, либо система (S_2), либо (S_3), либо они в совокупности окажутся противоречивыми.

Покажем противоречивость системы (1.19)—(1.30) во втором случае, когда $b_2 = 0$. Тогда из (1.15) следует, что $\langle 2 \rangle = 0$, а все остальные величины (1.15), (1.17) являются кратными $a_5 \neq 0$. Обозначим для краткости $A_s \equiv a_5{}^{-1}A_s$, $B_s \equiv a_5{}^{-1}B_s$. Из (1.25) следует, что $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Так как, в силу (1.11) имеет место $a_2 \neq 0$, то из (1.26), (1.28) получим

$$\omega^3{}_1 = \frac{B_4}{a_2}\omega^2 + \frac{B_5}{a_2}\omega^3,$$

$$\omega^3{}_2 = \frac{B_4}{2a_2}\omega^1 + \frac{B_7}{2a_2}\omega^2 + \frac{B_8}{2a_2}\omega^3.$$

Если подставить эти выражения в (1.19), (1.20), (1.23), то в силу линейной независимости форм ω^1, ω^2, ω^3 удовлетворяются соотношения

$$A_1 = A_2 = 0, \qquad A_3 = \frac{2a_0}{a_2}B_5, \qquad A_4 = 0,$$

$$A_5 = \frac{a_1}{a_2}B_5 + \frac{a_0}{2a_2}B_8, \qquad A_7 = 0, \qquad A_8 = \frac{a_1}{a_2}B_8, \qquad B_4 = B_7 = 0.$$

В системе (1.19)—(1.30) не может иметь места $a_1 = 0$, так как сейчас $\omega^3{}_2 = (2a_2)^{-1}B_8\omega^3$ и при $a_1 = 0$ из (1.29) следует $B_5 = B_8 = 0$, т. е. $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0$. Но тогда $d\omega^3{}_2 = 0$ дает с учетом структурных уравнений (1.18), что $B_{25}{}^2\omega^2 \wedge \omega^3 = 0$, которое противоречит (1.11).

Если $a_1 \neq 0$, то выражения $\omega^2{}_1$, $\omega^5{}_4$ получаются из (1.21), (1.29) соответственно:

$$\omega^2{}_1 = \frac{2a_0}{a_1 a_2}B_5\omega^1 + \frac{2a_1B_5 + a_0B_8}{2a_1a_2}\omega^2 + \frac{-2a_3B_2 + a_2A_6}{a_1a_2}\omega^3,$$

$$\omega^5{}_4 = -\frac{B_5}{a_1}\omega^1 - \frac{B_8}{a_1}\omega^2 + \frac{a_4B_8 - a_2B_9}{a_1a_2}\omega^3.$$

Но, так как с помощью (1.24), (1.23), (1.30) имеем

$$A_6 = -\frac{2a_4}{a_1}B_5, \qquad B_8 = -\frac{2(2a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2)}{a_0a_1}B_5, \qquad B_9 = \frac{2a_3}{a_1}B_8,$$

а коэффициент при ω^1 в (1.27) равняется нулю, то $3a_0 a_1^{-1} B_5 = 0$, откуда, в силу (1.11), получается $B_5 = 0$. Следовательно, $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^5{}_4 = 0$, что, как и в предыдущем случае при $a_1 = 0$, не может иметь места. Тем самым, противоречивость системы (1.19)—(1.30) в случае $b_2 = 0$ доказана.

В настоящей работе нами найдены все связные подгруппы Ли класса $\mathfrak{R}^{5,3}$. Их 15 типов, среди них 9 типов подгрупп стационарности флагов и остальные шесть — винтовые подгруппы. Орбитами V_3, не принадлежащими некоторой гиперплоскости $R_4 \subset R_5$, являются:

1) цилиндры с двумерными образующими R_2, построенные на винтовых линиях плоскости R_3, вполне ортогональной к $R_2 \subset R_3$;

2) цилиндры, построенные на поверхностях Клиффорда некоторой гиперплоскости R_4, вполне ортогональной к образующим R_1;

3) поверхности переноса сферы S_2 некоторой плоскости R_3 вдоль окружности S_1 плоскости R_2, вполне ортогональной к $R_3 \subset R_5$;

4) поверхности V_3 на гиперсферах S_4 пространства R_5.

Приведем сводку основных результатов в виде нижеследующей таблицы.

Связные подгруппы класса $\mathfrak{R}^{5,3}$

Тип подгруппы	Инвариантный флаг	Число параметров подгруппы	Трехмерные орбиты
подгруппы стационарности	[1, 2; 3, 4}	3	плоскости R_3
	[1; 2, 3}	3	цилиндры вращения с плоскими образующими $(R_2 \times S_1)$
	{1, 3}	3	цилиндры на поверхностях Клиффорда плоскости R_4
	[1; 3, 4}	4	плоскости R_3
	{2, 3}	4	$R_2 \times S_1$
	{1, 4}	4	цилиндры вращения с прямолинейными образующими $(R_1 \times S_2)$
	{0, 2}	4	поверхности переноса $(S_2 \times S_1)$
	{3, 4}	6	плоскости R_3
	{0, 1}	6	сферы $S_3 \subset R_4$
винтовые подгруппы	[1; 3, 4}	3	плоскости R_3
	[1, 2; 3}	3	цилиндры на винтовых линиях с плоскими образующими $(R_2 \times \Gamma_{(3)})$
	{0, 1}	3	сферы $S_3 \subset R_4$
	{0}	3	поверхности V_3 на сферах $S_4 \subset R_5$
	{0, 1}	4	сферы $S_3 \subset R_4$
	[1; 3}	4	$R_2 \times \Gamma_{(3)}$

Литература

1. Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.
2. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 12—30.
3. Рийвес К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства и их орбиты. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 96—126.
4. Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1969.
5. Щербаков Р. Н., Малаховский В. С., Краткий курс аналитической геометрии. Томск, 1964.

Поступило
16 V 1973

EUKLEIDILISE RUUMI R_5 LIIKUMISTE RÜHMA LIE ALAMRÜHMAD JA NENDE ORBIIDID. II

K. Riives

Resümee

Käesolev töö on artikli [3] järg. Leitakse eukleidilise ruumi liikumiste rühma kõik sidusad paarikaupa mittekonjugeeritud intransitiivsed Lie alamrühmad, mille maksimaalse mõõtmega orbiitideks on pinnad V_3 ruumis R_5. Alamrühmad eraldatakse välja orbiitide V_3 uurimise käigus kasutades É. Cartani liikuva ortoreeperi meetodit. Iga alamrühma jaoks näidatakse temale vastav invariantne lipp.

LIE SUBGROUPS IN THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_5 AND THEIR ORBITS. II

K. Riives

Summary

This paper is a continuation of [3]. Here the connected nontransitive Lie subgroups unconjugated in pairs, whose orbits of maximal dimension are surfaces V_3 in space R_5, are established in the group of motions in Euclidean space R_5. The subgroups are separated in the course of studying their orbits V_3 by the É. Cartan method of a moving frame. For each subgroup its invariant flag is pointed out.

ОБ АФФИННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРИЗНАКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_n. II

К. Рийвес

Кафедра математической статистики и программирования

Настоящая работа является продолжением [1], в которой рассматривались признаки и определяющие элементы (вершины и направляющие векторы неограниченных ребер) многогранников U, являющихся пересечением двух замкнутых полупространств. Теперь приводим соответствующие результаты для случая пересечения трех замкнутых полупространств в R_n. Пусть выпуклый многогранник U в R_n задан системой неравенств

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^{\alpha} \leqslant b_i, \qquad i=1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

и для каждого i, по крайней мере, один $a_{i\alpha} \neq 0$. Граничные гиперплоскости Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ многогранника U определены уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^{\alpha} = b_i. \tag{2}$$

1. Приведение n-мерного случая к ϱ-мерному $(0 < \varrho \leqslant 3)$. Пусть ранг ϱ матрицы коэффициентов $\|a_{i\alpha}\|$ системы (1) определяется матрицей, стоящей в левом верхнем углу, т. е.

$$\varrho = \operatorname{rang} \|a_{i\alpha}\| = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно $0 < \varrho \leqslant 3$. Пересечение многогранника U с ϱ-мерной плоскостью R_ρ, определенной уравнениями

$$x^{\rho+1} = \ldots = x^n = 0, \tag{1.1}$$

является выпуклым многогранником U_0 в этой плоскости R_ρ. При этом U_0 задается системой неравенств

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^{\alpha} \leqslant b_i. \tag{1.2}$$

Известно ([2], стр. 118), что тип многогранника U в R_n, задаваемого системой (1), определен типом многогранника U_0 в R_ρ, задаваемого системой (1.2), так как любая точка X из U получается из некоторой точки $X_0 \in U_0$ параллельным переносом на вектор, который принадлежит некоторому подходяще выбранному подпространству $V_{n-\rho} \subset V(R_n)$, где $V(R_n)$ обозначает множество векторов пространства R_n. Пространство $V(R_n)$ разлагается в прямую сумму $V(R_n) = V(R_\rho) \oplus V_{n-\rho}$. В таком случае мы говорим, что U — *прямая сумма* многогранника U_0 и подпространства $V_{n-\rho}$.

С учетом (1.1) легко проверить, что при $\varrho = 3$ базисом V_{n-3} служит система векторов

$$z_t = \left(\frac{\begin{vmatrix} -a_{1t} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{3t} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{d}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{1t} & a_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & -a_{3t} & a_{33} \end{vmatrix}}{d}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & -a_{3t} \end{vmatrix}}{d}, \underbrace{0, \ldots,}_{t-3} 1, \ldots, 0 \right), \tag{1.3А}$$

где $t = 4, \ldots, n$ и

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

Аналогично, при $\varrho = 2$ базисом для V_{n-2} будет

$$z_t = \left(\frac{\begin{vmatrix} -a_{1t} & a_{12} \\ -a_{2t} & a_{22} \end{vmatrix}}{d_{12}}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{1t} \\ a_{21} & -a_{2t} \end{vmatrix}}{d_{12}}, \underbrace{0, \ldots,}_{t-2} 1, \ldots, 0 \right), \tag{1.3Б}$$

где $t = 3, \ldots, n$ и

$$d_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если же $\varrho = 1$, то надо взять

$$z_t = \left(-\frac{a_{1t}}{a_{11}}, \underbrace{0, \ldots,}_{t-1} 1, \ldots, 0 \right), \quad t = 2, \ldots, n, \ a_{11} \neq 0. \tag{1.3В}$$

По вышесказанному достаточно исследовать всевозможные типы многогранников U_0, найти их признаки и определяющие элементы. Последние вместе с векторами (1.3) будут определяющими элементами для многогранника U.

2. Используемые понятия и обозначения. Даем определения разных типов многогранников U в пространстве R_n. Известно ([2], стр. 111—112), что если U задается системой (1) и ранг матрицы ее коэффициентов равняется ϱ, то минимальной размерностью граней многогранника U будет $n-\varrho \geqslant 0$. Это следует из определения грани, данного в [1].

Пусть X_1 — точка в R_n и $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m$ $(1 \leqslant m < n)$ — линейно независимые векторы в R_n. Тогда m-мерная плоскость, точки которой выражаются в виде

$$X = X_1 + \gamma_1 \boldsymbol{z}_1 + \ldots + \gamma_m \boldsymbol{z}_m, \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_m \text{ — произвольные,}$$

называется *плоскостью, проходящей через точку* X_1 *в направлении векторов* $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m$.

Определение 2.1. *Пусть* X_1 *— точка в* R_n *и* $\boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{z}_t$ $(t = 4, \ldots, n)$ *— линейно независимые векторы в* R_n. *Множество точек*

$$U = \{X \mid X = X_1 + \beta_i \boldsymbol{y}_i + \gamma_t \boldsymbol{z}_t, \ \beta_i \geqslant 0, \ \gamma_t \text{ — произвольные}\}$$

называется n-мерным трехгранным углом в R_n.

Трехгранный угол U имеет одну $(n-3)$-мерную грань, проходящую через X_1 в направлении векторов $\boldsymbol{z}_4, \ldots, \boldsymbol{z}_n$; три $(n-2)$-мерные грани соответственно с направляющими векторами $\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_4, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ и три $(n-1)$-мерные грани с направляющими векторами $\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{z}_4, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ $(i \neq j)$, проходящих также через точку X_1.

Определение 2.2. *Пусть* X_i $(i = 1, 2, 3)$ *— три различные точки, не принадлежащие одной прямой в пространстве* R_n, *и* $\boldsymbol{z}_t$ $(t = 3, \ldots n)$ *— линейно независимые векторы. Множество точек*

$$U = \{X \mid X = \alpha_i X_i + \gamma_t \boldsymbol{z}_t, \ \alpha_i \geqslant 0, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \ \gamma_t \text{ — произвольные}\}$$

называется трехгранной призмой в R_n.

Определенная призма U имеет три $(n-2)$-мерные грани с направляющими векторами $\boldsymbol{z}_3, \ldots, \boldsymbol{z}_n$, проходящие соответственно через точки X_i, и три $(n-1)$-мерные грани, проходящие через пару точек X_1, X_2 (или X_1, X_3; X_2, X_3) с направляющими векторами $X_2 - X_1$ (или $X_3 - X_1$; $X_3 - X_2$), $\boldsymbol{z}_3, \ldots, \boldsymbol{z}_n$.

Определение 2.3. *Пусть* X_1, X_2 *— две различные точки в* R_n *и* $\boldsymbol{z}_t$ $(t = 3, \ldots, n)$ *— линейно независимые векторы в* R_n. *По теоремам о представлении многогранников* $U \subset R_n$ ([2], стр. 115, 118) *любая точка многогранника с двумя $(n-2)$-мерными гранями представима в виде*

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \beta_2 \boldsymbol{y}_2 + \gamma_t \boldsymbol{z}_t,$$

где $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ *не зависят линейно от* $\boldsymbol{z}_t$ *и* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, γ_t *— произвольные. При этом, если векторы* $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ *— линейно независимые, и найдется такая точка* X_3, *что* $X_1 = X_3 + \lambda_1 \boldsymbol{y}_1$, $X_2 = X_3 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, *то многогранник* U *на-*

зывается n-мерным усеченным углом. Если $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — линейно зависимые, то U называется n-мерным усеченным слоем. При этом $(n-2)$-мерные грани этих многогранников проходят через точки X_1, X_2 в направлении векторов $\mathbf{z}_3, \ldots, \mathbf{z}_n$.

Определение 2.4. *Пусть X_1 — точка в R_n и $\mathbf{z}_t$ $(t=3, \ldots, n)$ — линейно независимые векторы. По теоремам о представлении многогранников U с одной $(n-2)$-мерной гранью, любая точка X из U представима в виде*

$$X = X_1 + \beta_1 \mathbf{y}_1 + \beta_2 \mathbf{y}_2 + \gamma_t \mathbf{z}_t,$$

где $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ не зависят линейно от $\mathbf{z}_t$ и $\beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, γ_t — произвольные. Если векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — линейно независимые, то U называется n-мерным двугранным углом (ср. [1]). *Если $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — линейно зависимые, то U будет полугиперплоскостью. Если $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = 0$, то U является $(n-2)$-мерной плоскостью, проходящей через точку X_1 в направлении векторов $\mathbf{z}_3, \ldots, \mathbf{z}_n$.*

Определения многогранников U, заданных системой (1) при $\varrho = 1$, даны в [1]. Ими являются n-мерный слой, полупространство, гиперплоскость, пустое множество.

Отметим, что приведенные определения многогранников $U \subset R_n$ дают определения многогранников (многоугольников) U_0 в R_ϱ, если в них предположить все $\gamma_t = 0$.

В дальнейшем для исследования U_0 в R_ϱ нам удобно пользоваться следующими обозначениями. Если $\varrho = 3$, то введем, кроме (1.4), обозначения

$$d^1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Если $\varrho = 2$, то пусть

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & b_i \\ a_{j1} & a_{j2} & b_j \\ a_{k1} & a_{k2} & b_k \end{vmatrix}, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix}, \quad d_{ij}{}^1 = \begin{vmatrix} b_i & a_{i2} \\ b_j & a_{j2} \end{vmatrix}, \quad d_{ij}{}^2 = \begin{vmatrix} a_{i1} & b_i \\ a_{j1} & b_j \end{vmatrix}, \quad i \neq j. \qquad (2.2)$$

Всевозможные шесть d_{ijk} могут отличаться друг от друга только знаком. Среди всех d_{ij} существенно отличных только три, так как $d_{ij} = -d_{ji}$.

Если $\varrho = 1$, то $d_{ij} = 0$ при любых $i \neq j$ и

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \ldots = \frac{a_{in}}{a_{jn}} = \frac{1}{\lambda_{ij}}, \quad \lambda_{ij} \neq 0. \qquad (2.3)$$

Пусть $\varrho = 2$. Мы свяжем тогда с каждой парой индексов i, j $(i \neq j)$ два определителя: d_{ij}, d_{kij}, $k \neq i$, $k \neq j$. Отметим, что в следующих определениях порядок i и j не существенный и определения относятся к неупорядоченным парам, кроме 2.6б).

Определение 2.5. а) *Если* $d_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$, *то пара индексов* (i, j) *называется* 0-*вырожденной* (*коротко* 0В) *при* $d_{kij} \neq 0$ *и* 1-*вырожденной* (1В) *при* $d_{kij} = 0$, $k \neq i$, $k \neq j$.

б) *Если* $d_{ij} = 0$, *то пара индексов* (i, j) *называется* А-*вырожденной* (*коротко* АВ) *при* $(d_{ij}^1)^2 + (d_{ij}^2)^2 \neq 0$ *и* Б-*вырожденной* (*коротко* БВ) *при* $(d_{ij}^1)^2 + (d_{ij}^2)^2 = 0$.

Определение 2.6. а) *Пусть пара* (i, j) *является* 0В. *Пара* (i, j) *называется* 1-*допустимой* (*коротко* 1Д), *если определители* d_{ij}, d_{kij} *одного знака, и* 0-*допустимой* (*коротко* 0Д) *в противном случае.*

б) *Пусть пара* (i, j) *является* 1В. *Упорядоченная пара* (i, j) *называется* 1-*допустимой* (*коротко* 1Д), *если* $d_{ij} > 0$ *и* 0-*допустимой* (*коротко* 0Д), *если* $d_{ij} < 0$.

в) *Если пара* (i, j) *является* БВ, *то она называется* 1-*допустимой* (*коротко* 1Д) *при* $a_{i1}/a_{j1} = a_{i2}/a_{j2} = 1/\lambda_{ij} > 0$ *и* 0-*допустимой* (*коротко* 0Д) *при* $\lambda_{ij} < 0$.

Введенные нами понятия вырожденности используются для задания признаков взаимного расположения трех прямых Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ на плоскости R_2 (предложение 2.1, таблица 1). Типы расположения прямых будут использованы при исследовании пересечений трех замкнутых полуплоскостей. При этом в последнем случае признаки разных типов соответствующих многоугольников U_0 будут заданы с помощью введенных понятий допустимости. (Следует отметить, что введенные понятия вырожденности и допустимости имеют обобщения для случая произвольного числа m индексов i, и тем самым применимы для получения признаков многоугольников $U_0 \subset R_2$, являющихся пересечением произвольного числа замкнутых полуплоскостей.)

Предложение 2.1. *Имеют место следующие утверждения.*

IА. *Для того, чтобы все* Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ *попарно пересекались в различных точках, необходимо и достаточно, чтобы все пары* (i, j), *были* 0В. *Так как существенных пар* (i, j) *существует три, то точек пересечения* $(X_{ij}, X_{ik}, X_{jk}, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$ *также будет три.*

IБ. *Для того, чтобы все прямые* Γ_i $(i \neq 1, 2, 3)$ *пересекались в одной точке* $X_{ij(k)}$, *необходимо и достаточно, чтобы все пары* (i, j), *были* 1В.

IIА. *Для того, чтобы параллельные прямые* Γ_i, Γ_j *пересекались с прямой* Γ_k $(i \neq j \neq k,\ i \neq k)$ *в точках* X_{ik}, X_{jk}, *необходимо и достаточно, чтобы пара* (i, j) *была* АВ, *и* (i, j), (j, k) — *соответственно* 0В.

IIБ. *Для того, чтобы совпадающие прямые* $\Gamma_i \equiv \Gamma_j$ *пересекались с* Γ_k $(i \neq j \neq k,\ i \neq k)$ *в точке* $X_{(i)jk}$, *необходимо и достаточно, чтобы пара* (i, j) *была* БВ *и* (i, k), (j, k) — 0В.

III. *Все прямые* Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ *либо параллельны между собой, либо некоторые из них совпадают, если все пары* (i, j) *суть* АВ, *либо некоторые из них* — АВ, *а остальные* БВ.

Все приведенные утверждения доказываются с помощью известных необходимых и достаточных условий пересечения, параллельности и совпадения прямых на плоскости R_2 и введенных нами понятий.

Представим эти результаты в виде таблицы 1.

Введенные понятия типов допустимости дают возможность определять, принадлежит ли некоторая фиксированная точка исследуемой полуплоскости или нет. Именно, пусть граничные прямые Γ_i, Γ_i $(i \neq j)$ многоугольника U_0, задаваемого системой (1.2), пересекаются в точке $X_{ij} = (x^\alpha{}_{ij})$, $x^\alpha{}_{ij} = d^\alpha{}_{ij}/d_{ij}$, $\alpha = 1, 2$. Тогда, с учетом (2.2), легко проверить, что при $k \neq i$, $k \neq j$, имеет место формула

$$b_k - \sum_{k=1}^{2} a_{k\alpha} x^\alpha{}_{ij} = \frac{d_{kij}}{d_{ij}}. \tag{2.4}$$

Предложение 2.2. *Пусть* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. *Имеют место следующие утверждения.*

а) *Для того, чтобы точка* X_{ij} *принадлежала* k*-ой полуплоскости системы* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы пара* (i, j) *была* 0В *и* 1Д. *Если же пара* (i, j) *является* 0В *и* 0Д, *то точка* X_{ij} *не принадлежит* k*-ой полуплоскости.*

б) *Для того, чтобы* i*-я и* j*-я полуплоскость системы* (1.2) *совпали, необходимо и достаточно, чтобы пара* (i, j) *была* БВ *и* 1Д. *Если же пара* (i, j) *является* БВ *и* 0Д, *то пересечением будет граничная прямая* $\Gamma_i \equiv \Gamma_j$.

Первое утверждение доказывается при помощи формулы (2.4), а второе — с помощью результатов [1], учитывая определение 2.6.

Предложение 2.2 используется для получения признаков типов многоугольников $U_0 \subset R_2$.

3. Пересечения трех замкнутых полупространств в R_ρ $(\rho \leqslant 3)$. Здесь мы приведем признаки и перечислим образующие элементы для всевозможных случаев. При этом применяются обозначения, введенные в пп. 1—2.

Предложение 3.1. *Если в системе* (1.2)

$$\rho = 3, \tag{3.1}$$

то она задает в R_3 *трехгранный угол с вершиной в точке* $X_{123} = (x^\alpha{}_{123}) = (d^\alpha/d)$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ *и с направляющими векторами неограниченных ребер*

$$\mathbf{y}_{ij} = (\operatorname{sgn} d) \left(\begin{vmatrix} a_{j2} & a_{j3} \\ a_{i2} & a_{i3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{j3} & a_{j1} \\ a_{i3} & a_{i1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} \right),$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Имеет место и обратное, для любого трехгранного угла в R_3 *можно указать задающие его неравенства* (1.2), *для которых* $\rho = 3$.

Таблица 1

Случай	Пары указанных типов				Точки пересечения	Параллельные прямые	Совпадающие прямые
	АВ	БВ	0В	1В			
IA	—	—	(i,j), (i,k), (j,k)	—	X_{ij}, X_{ik}, X_{jk}	—	—
Б	—	—	—	(i,j), (i,k), (j,k)	$X_{ij(k)}$	—	—
IIA	(i,j)	—	(i,k), (j,k)	—	X_{ik}, X_{jk}	Γ_i, Γ_j	—
Б	—	(i,j)	(i,k), (j,k)	—	$X_{(i)jk}$	—	Γ_i, Γ_j
IIIA	(i,j), (i,k), (j,k)	—	—	—	—	Γ_i, Γ_j, Γ_k	—
Б	(i,k), (j,k)	(i,j)	—	—	—	Γ_i, Γ_k; Γ_j, Γ_k	Γ_i, Γ_j
В	—	(i,j), (i,k), (j,k)	—	—	—	—	Γ_i, Γ_j, Γ_k

Предложение доказывается при помощи введенных обозначений (1.4), (2.1), аналогично рассмотренным в [1] случаям.

Пусть в системе (1) имеет место $\varrho = 2$, т. е. система (1.2), задающая U_0, определяет на плоскости R_2 многоугольник, являющийся пересечением трех замкнутых полуплоскостей и при этом по крайней мере $d_{12} \neq 0$. Мы даем признаки всевозможных таких U_0, используя введенные понятия типов допустимости (определение 2.6) и предложение 2.2. Признаки для U_0 будут группированы в соответствии с взаимным расположением его граничных прямых (см. таблица 1). Результаты представляются в виде таблицы 2, в последних столбцах которой указываются соответствующие определяющие элементы многоугольника U_0.

Так как многоугольники некоторых типов могут получиться из нескольких типов взаимного расположения граничных прямых Γ_i $(i = 1, 2, 3)$, то такие типы определяются несколькими комплектами признаков.

Каждому случаю из таблицы 2 соответствует предложение, которое доказывается с помощью определений и предложений п. 2 таким же образом, как предложения работы [1]. Сформулируем, например, предложение, соответствующее случаю IA1.

Предложение 3.2. *Если в системе* (1.2) *имеет место* $\varrho = 2$ *и выполнены следующие условия*:

$$\text{все пары } (i, j) \text{ являются } 0\text{В}, \tag{3.2}$$

и, кроме того,

$$\text{все пары } (i, j) \text{ являются } 1\text{Д}, \tag{3.3}$$

то система (1.2) *задает на плоскости* R_2 *треугольник с вершинами* $X_{ij} = (d_{ij}{}^{\alpha}/d_{ij})$, $\alpha = 1, 2$; $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$. *Наоборот, для любого треугольника на плоскости* R_2 *можно указать задающие его неравенства* (1.2) *с* $\varrho = 2$, *удовлетворяющие* (3.2), (3.3).

Пусть в системе (1.2) имеет место $\varrho = 1$. Тогда U_0 является пересечением трех замкнутых полупрямых на прямой R_1, задаваемой уравнениями (1.1), т. е. координаты точек $X \in U_0$ удовлетворяют системе

$$a_{i1}x^1 \leqslant b_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad a_{i1} \neq 0. \tag{3.4}$$

Имеется две возможности: либо все a_{i1} одного знака, либо два из них одного и третий противоположного знака. Обозначим в первом случае

$$m_0 = \min_i (b_i/a_{i1}), \quad i = 1,\ 2\ \ 3.$$

Во втором случае пусть a_{j1}, a_{k1} одного знака, отличающего от знака a_{i1} $(\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$. Если $a_{i1} > 0$, то пусть

$$M = \max(b_j/a_{j1}, b_k/a_{k1}),$$

и при $a_{i1} < 0$ —

$$m = \min(b_j/a_{j1}, b_k/a_{k1}).$$

Таблица 2

Случай	Вз. расп. гр. прямых	Признаки (i, j)	Признаки (j, k)	Признаки (k, i)	Вершины	Напр. векторы неограниченных сторон	Много-угольник
IA1.	IA	1Д	1Д	1Д	X_{ij}, X_{jk}, X_{ki}	—	треугольник
2.		1Д	0Д	1Д	X_{ij}, X_{ki}	$y_j = (\operatorname{sgn} d_{ij})(a_{j2}, -a_{j1})$ $y_k = (\operatorname{sgn} d_{ik})(a_{k2}, -a_{k1})$	усеченный угол
3.		1Д	0Д	0Д	X_{ij}	$y_i = (\operatorname{sgn} d_{ij})(-a_{i2}, a_{i1})$ $y_j = (\operatorname{sgn} d_{ij})(a_{j2}, -a_{j1})$	угол
4.		0Д	0Д	0Д	—	—	пустое множество
IБ1.	IБ	1Д (0Д)	0Д (1Д)	0Д (1Д)	$X_{ij(k)}$	$y_i = (\operatorname{sgn} d_{ij})(-a_{i2}, a_{i1})$ $y_j = (\operatorname{sgn} d_{ij})(a_{j2}, -a_{j1})$	угол
2.		1Д (0Д)	1Д (0Д)	1Д (0Д)	$X_{ij(k)}$	—	точка
IIA1.	IIA	—	1Д	1Д	X_{jk}, X_{ki}	$y_i \equiv y_j = (\operatorname{sgn} d_{ik})(-a_{i2}, a_{i1})$	усеченная полоса
2.		—	0Д	1Д	X_{ki}	$y_i = (\operatorname{sgn} d_{ik})(-a_{i2}, a_{i1})$ $y_k = (\operatorname{sgn} d_{ik})(a_{k2}, -a_{k1})$	угол
3.		—	0Д	0Д	—	—	пустое множество
IIБ1.	IIБ	1Д	—	—	$X_{(i)jk}$	$y_i \equiv y_k = (\operatorname{sgn} d_{jk})(-a_{j2}, a_{j1})$ $y_k = (\operatorname{sgn} d_{jk})(a_{k2}, -a_{k1})$	угол
2.		0Д	—	—	$X_{(i)jk}$	$y_i \equiv y_j = (\operatorname{sgn} d_{jk})(-a_{j2}, a_{j1})$	полупрямая

Таблица 3

Тип многогранника	Признаки типа: ϱ	Признаки типа: Случай таблицы 2	Признаки типа: Признаки для предложений 3.3—3.6	Размерность U	Число граней соотв. разм.: $n-3$	Число граней соотв. разм.: $n-2$	Число граней соотв. разм.: $n-1$
n-мерный трехгранный угол	3	—	—	n	1	3	3
n-мерная трехгранная призма	2	IA1	—	n	—	3	3
n-мерный усеченный угол	2	IA2	—	n	—	2	3
n-мерный усеченный слой	2	IIA1	—	n	—	2	3
n-мерный двугранный угол	2	IA3 IБ1 IIA2 IIБ1	—	n	—	1	2
n-мерный слой	1	—	$\lambda_{ij}<0,\ \lambda_{ik}<0,$ $b_i/a_{i1}>M\,(b_i/a_{i1}<m)$	n	—	—	2
полупространство	1	—	$\lambda_{ij}>0,\ \lambda_{ik}>0$	n	—	—	1
полугиперплоскость	2	IIБ2	—	$n-1$	—	1	1
гиперплоскость	1	—	$\lambda_{ij}<0,\ \lambda_{ik}<0,$ $b_i/a_{i1}=M\,(b_i/a_{i1}=m)$	$n-1$	—	—	1
$(n-2)$-мерная плоскость	2	IБ2	—	$n-2$	—	1	—
пустое множество	2 1	IA4 IIA3 —	— — $\lambda_{ij}<0,\ \lambda_{ik}<0,$ $b_i/a_{i1}<M\,(b_i/a_{i1}>m)$	—	—	—	—

Предложение 3.3. *Если в системе* (1.2) *имеет место* $\varrho = 1$ *и все* a_{i1} $(i = 1, 2, 3)$ *одного знака, то* U_0 *является полупрямой* $x^1 \leqslant m_0$ *первой координатной оси с граничной точкой* $X_0 = (x_0^1) = (m_0)$ *и для любой* $X \in U_0$ *имеет место* $X = X_0 + \beta_1 \boldsymbol{y}_1$, *где* $\beta_1 \geqslant 0$, $\boldsymbol{y}_1 = (\operatorname{sgn} m_0)(-m_0)$.

Предложение 3.4. *Пусть в системе* (1.2) *имеет место* $\varrho = 1$. *Если* $a_{i1} > 0$, a_{j1}, $a_{k1} < 0$, $b_i/a_{i1} > M$, *то* U_0 *является отрезком первой координатной оси с граничными точками* $X_1 = (x_1^1) = (M)$, $X_2 = (x_2^1) = (b_i/a_{i1})$. Если же $a_{i1} < 0$, a_{j1}, $a_{k1} > 0$, $b_i/a_{i1} < m$, *то граничными точками отрезка* U_0 *будут* $X_1' = (x_1^{1\prime}) = (b_i/a_{i1})$, $X_2' = (x_2^{1\prime}) = (m)$.

Предложение 3.5. *Пусть в системе* (1.2) *имеет место* $\varrho = 1$. *Если* $a_{i1} > 0$, a_{j1}, $a_{k1} < 0$, $b_i/a_{i1} = M$ (*или* $a_{i1} < 0$, a_{j1}, $a_{k1} > 0$, $b_i/a_{i1} = m$), *то* U_0 *является точкой* $X_0 = (x_0^1) = (M)$ (*соответственно* $X_0 = (m)$).

Предложение 3.6. *Пусть в системе* (1.2) *имеет место* $\varrho = 1$. *Если* $a_{i1} > 0$, a_{j1}, $a_{k1} < 0$, $b_i/a_{i1} < M$ (*или* $a_{i1} < 0$, a_{j1}, $a_{k1} > 0$, $b_i/a_{i1} > m$), *то система является противоречивой и тем самым* U_0 — *пустое множество.*

4. Пересечения трех замкнутых полупространств в R_n. Учитывая сделанные в п. 1 замечания и результаты предыдущего пункта, можно теперь дать признаки и указать определяющие элементы многогранников U в R_n, заданных системой (1). В дальнейшем мы сохраняем все ранее введенные обозначения. Кроме того, в силу сделанного нами в начале п. 1 соглашения, можно указать определяющие элементы многогранников U, соответствующих найденным типам многогранников U_0. Ими будут точки (вершины) и направляющие векторы неограниченных ребер с теми же индексами как для U_0, первые ϱ координат которых совпадают с координатами соответствующих элементов U_0, а остальные $n - \varrho$ координаты равняются нулю. Кроме них, определяющими элементами U будут еще векторы (1.3). Представим результаты в виде таблицы 3.

Учитывая свойства аффинных преобразований и используя последние четыре столбца таблицы, можно показать, что приведенная классификация является аффинной, т. е. многогранники одного типа аффинно эквивалентные и многогранники разных типов не могут быть аффинно эквивалентными.

Литература

1. Риийвес К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 116—126.
2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения. Москва, 1969.

Поступило
15 III 1973

EUKLEIDILISE RUUMI R_n KUMERATE HULKTAHUKATE AFIINSEST KLASSIFIKATSIOONIST JA TUNNUSTEST. II

K. Riives

Resümee

Töös antakse ruumi R_n selliste hulktahukate afiinne klassifikatsioon, mis on kolme kinnise poolruumi lõikeks. Näidatakse kõigi üheteistkümne eksisteeriva juhu jaoks vastavad analüütilised tunnused ning hulktahukatega geomeetriliselt seotud afiinsed koordinaatsüsteemid.

ABOUT AFFINE CLASSIFICATION AND CHARACTERS OF CONVEX POLYTOPES IN EUCLIDEAN SPACE R_n. II

K. Riives

Summary

In the paper the affine classification of convex polytopes, intersections of three closed semi-spaces, is given in Euclidean space R_n. There exist eleven types of such polytopes. For each of them corresponding analytic characters and special affine coordinate systems, geometrically determined by the polytope are pointed out.

БЕЗУСЛОВНЫЕ ШАУДЕРОВСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И РЕФЛЕКСИВНОСТЬ БОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Э. Оя

Кафедра математического анализа

Проблематика этой статьи восходит к 1950-ому году, когда Джеймс [5] установил ряд теорем о структуре банаховых пространств с безусловным базисом, среди которых центральным является результат о том, что рефлексивность банахова пространства X с безусловным базисом эквивалентна отсутствию в X подпространств, изоморфных c_0 или l_1. В дальнейшем результаты Джеймса получили развитие в двух направлениях: обобщалось понятие безусловного базиса в банаховом пространстве и рассматривались локально выпуклые пространства с безусловным базисом. Одним из недавних результатов является критерий рефлексивности циклического банахова пространства, который в 1969-ом году установил Цафрири [7]. Говоря о другом направлении, нужно отметить, что в 1970-ом году Калтон [6] обобщил упомянутую теорему Джеймса на полное бочечное пространство.

Настоящая работа принадлежит объединению этих двух направлений. Именно, вводится одно новое обобщение понятия безусловного базиса, анализируются и обобщаются некоторые теоремы, верные в случае безусловного базиса (в том числе критерий рефлексивности из [6]).

Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство над вещественным полем $\mathbf{R}$. Шаудеровским разложением (коротко ШР) пространства X называется такая последовательность непрерывных проекторов[1] (P_n) в пространстве X, что $P_k \circ P_n = 0$, если $k \neq n$, и для каждого $x \in X$

$$x = \sum P_n x,$$

где ряд сходится в топологии пространства X. Шаудеровское разложение (P_n) пространства X называется *ограниченно полным*, если каждая ограниченная последовательность

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то индексы пробегают все значения $1, 2, \ldots$.

$(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_k(X)$, сходится. Если[2] (P_n^*) является ШР пространства X^* в сильной топологии последнего, то ШР (P_n) пространства X называется *натягивающим.* Эти понятия мы ввели, следуя [4].

Пусть Σ — система всех конечных множеств натурального ряда, упорядоченная по включению. Если задан ШР (P_n) пространства X, то через U_σ, где $\sigma \in \Sigma$, обозначим проектор в пространстве X, определяемый соотношением $U_\sigma = \sum_{n\in\sigma} P_n$, причем $U_\varnothing = 0$ для пустого множества $\varnothing$. Если $\sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$, то положим $U_\sigma = U_n$.

Введем следующее обобщение понятия безусловного шаудеровского базиса.

Шаудеровское разложение (P_n) пространства X называем *безусловным шаудеровским разложением* (коротко БШР) пространства X, если для каждого $x \in X$

$$x = \lim_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma x,$$

т. е. ряд $\Sigma P_n x$ сходится безусловно к x.

Если (e_n) — шаудеровский базис пространства X с коэффициентными функционалами (f_n) (см. [3], стр. 619), то последовательность (P_n), где $P_n x = f_n(x) e_n$ $(x \in X)$, является ШР пространства X. Базис (e_n) является ограниченно полным, натягивающим или безусловным тогда и только тогда, когда ШР (P_n) является соответственно ограниченно полным, натягивающим или безусловным.

В ряде случаев нам кажется удобным следующее видоизменение понятия ШР. Именно, последовательность[3] $\varepsilon_k \in \mathfrak{L}(Y_k, X)$, где X и Y_k — отделимые локально выпуклые пространства, называем *разложением* пространства X, если для каждого $x \in X$ существует единственная последовательность $y_k \in Y_k$ такая, что $x = \Sigma\, \varepsilon_k y_k$. Определим линейные операторы $f_n : X \to Y_n$ равенствами $f_n(\Sigma\, \varepsilon_k y_k) = y_n$. Если $f_n \in \mathfrak{L}(X, Y_n)$ при всех n, то $\varepsilon_k \in \mathfrak{L}(Y_k, X)$ называем *ШР* пространства X.

Если (e_n) — базис пространства X, то $\varepsilon_n \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}, X)$, где $\varepsilon_n(\lambda) = \lambda e_n$, является разложением пространства X, причем операторами $f_n : X \to \mathbf{R}$ являются коэффициентные функционалы базиса (e_n).

Если (P_n) есть ШР пространства X, то $\varepsilon_n \in \mathfrak{L}(P_n(X), X)$, где $\varepsilon_n x = x$, является ШР пространства X (согласно второму определению), причем $f_n = P_n$. С другой стороны, если $\varepsilon_n \in \mathfrak{L}(Y_n, X)$ есть ШР пространства X, то проекторы $P_n = \varepsilon_n \circ f_n$ в пространстве X удовлетворяют условию $P_k \circ P_n = 0$ при $k \neq n$.

---

[2] Обозначим сопряженный оператор оператора A через A^* и сопряженное пространство пространства X через X^*.

[3] Всюду $\mathfrak{L}(X, Y)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов из X в Y.

Таким образом, обе понятия ШР по существу равносильны. Мы будем пользоваться обеими видами понятия ШР, но это не вызывает недоразумений.

Приведем примеры пространств с БШР. Для банахова пространства Y положим

$$S(Y)=\{(y_n): y_n\in Y,\ (\|y_n\|)\in S\},$$

где $S=c_0$ или $S=l_p$ $(p\geqslant 1)$. Пространство $S(Y)$, наделенное нормой $\|(y_n)\|=\|(\|y_n\|)\|_S$, является банаховым пространством с БШР, если $\varepsilon_n\in\mathfrak{L}(Y,S(Y))$ определить соотношением $\varepsilon_n y=(\delta_{nk}y)$, где δ_{nk} — символ Кронекера. В случае $Y=m$ получаем пример несепарабельного пространства с БШР. Кроме того, известно (см. [2], стр. 155), что пространство Джеймса J не вкладывается как подпространство в банахово пространство с безусловным базисом. Но пример пространства $S(J)$ показывает, что J можно вложить как подпространство в банахово пространство с БШР.

Известно (см. [2], стр. 151, или [1], стр. 126), что ограниченная полнота безусловного базиса банахова пространства X эквивалентна отсутствию в X подпространств, изоморфных c_0, а натягиваемость эквивалентна отсутствию подпространств, изоморфных l_1. Следующее предложение показывает, что эти эквивалентности в общем случае не сохраняются в случае БШР.

Предложение 1. *Пространство $l_1(Y)$ имеет ограниченно полное БШР, пространство $l_p(Y)$ $(p>1)$ имеет БШР, которое является ограниченно полным и натягивающим, и пространство $c_0(Y)$ имеет натягивающее БШР. Кроме того, $c_0(Y)^*=l_1(Y^*)$ и $l_p(Y)^*=l_q(Y^*)$, где $p>1$ и $p+q=pq$.*

Доказательство. Пусть в $l_p(Y)$ $(p\geqslant 1)$ выполняется соотношение

$$\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k y_k\|=(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^p)^{1/p}\leqslant M$$

при некотором $M>0$ и некоторой последовательности $y_k\in Y$. Тогда ряд $\Sigma\|y_k\|^p$ сходится, т. е. ряд $\Sigma\,\varepsilon_k y_k$ сходится в $l_p(Y)$.

Прежде, чем приступить к доказательству того, что БШР пространства $c_0(Y)$ является натягивающим и $c_0(Y)^*=l_1(Y^*)$, сделаем два замечания. Во-первых, если учитывать связь между обоими видами понятия ШР, то ШР $\varepsilon_n\in\mathfrak{L}(Y_n,X)$ называется натягивающим, когда $f_n^*\in\mathfrak{L}(Y_n^*,X^*)$ является ШР пространства X^*. Во-вторых, при $x=\Sigma\,\varepsilon_k y_k\in S(Y)$ и $\alpha\in S(Y)^*$ выполняется равенство $\alpha(x)=\Sigma\,((f_k^*\beta_k)x)=\Sigma\,\beta_k(y_k)$, где $\beta_k=\varepsilon_k^*\alpha\in Y^*$.

Так как [4]

$$\|\alpha-\sum_{k=0}^{n}f_k^*\beta_k\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\sum_{k=n+1}^{\infty}((f_k^*\beta_k)x)|=$$

$$=\sup_{\|y_k\|\leqslant 1,\ \|y_k\|\to 0}|\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_k(y_k)|=$$

[4] Считаем $f_0^*\beta_0=0$.

$$= \sup_{\|y_k\|\leqslant 1,\ \|y_k\|\to 0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k(y_k) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\|y_k\|\leqslant 1} \sum_{k=n+1}^{m} \beta_k(y_k) = \sum_{k=n+1}^{m} \|\beta_k\|$$

при всех $m = n+1,\ n+2,\ \ldots$ и $\alpha \in c_0(Y)^*$, то

$$\|\alpha - \sum_{k=0}^{n} f_k^* \beta_k\| \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\beta_k\|.$$

С другой стороны,

$$\|\alpha - \sum_{k=0}^{n} f_k^* \beta_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{\|y_k\|\leqslant 1} |\beta_k(y_k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\beta_k\|,$$

так что

$$\|\alpha - \sum_{k=0}^{n} f_k^* \beta_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\beta_k\| \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots);$$

следовательно, $\|\alpha\| = \Sigma \|\beta_k\|$. Таким образом,

$$\|\alpha - \sum_{k=0}^{n} f_k^* \beta_k\| \to 0,$$

т. е. БШР пространства $c_0(Y)$ является натягивающим и $\alpha \in l_1(Y^*)$. Возьмем теперь произвольные $\beta_n \in l_1(Y^*)$ и $x = \Sigma\, \varepsilon_n y_n \in c_0(Y)$. Тогда равенство $\alpha(x) = \Sigma\, \beta_n(y_n)$ определяет непрерывный линейный функционал α на $c_0(Y)$. Итак, можно сказать, что $c_0(Y)^* = l_1(Y^*)$.

Аналогичным образом (с помощью неравенства Гельдера) можно доказать, что $l_p(Y)^* = l_q(Y^*)$, если $p > 1$ и $p+q = pq$, и БШР пространства $l_p(Y)\ (p > 1)$ является натягивающим. Предложение доказано.

Из предложения 1 вытекает, что пространство $l_1(c_0)$, которое содержит подпространство, изоморфное c_0, имеет ограниченно полное БШР, а пространство $c_0(l_1)$, которое содержит подпространство, изоморфное l_1, натягивающее БШР.

Оказывается, что все же можно найти условия, эквивалентные ограниченной полноте и натягиваемости БШР, аналогичные отсутствию подпространств, изоморфных c_0 или l_1. Это осуществляется теоремами 1 и 2.

Лемма. *Если X — отделимое бочечное пространство с БШР, то*

1° *Множество $\{U_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно;*

2° *Топология в пространстве X, определяемая семейством полунорм $\{q_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где*

$$q_\alpha(x) = \sup_{\sigma \in \Sigma} p_\alpha(U_\sigma x) \qquad (x \in X),$$

совпадает с исходной топологией пространства X, определяемой семейством полунорм $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$;

3° *Для каждой полунормы p_α $(\alpha \in \mathfrak{A})$ существуют число $M_\alpha > 0$ и полунорма p_β $(\beta \in \mathfrak{A})$ такие, что выполняется оценка*

$$p_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i U_{\sigma_i} x\Big) \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |t_i| M_\alpha p_\beta\Big(\sum_{i=1}^{n} U_{\sigma_i} x\Big) \qquad (x\in X),$$

где $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *и* (t_i) — *произвольная последовательность вещественных чисел;*

4° *Для каждой полунормы* p_α $(\alpha\in\mathfrak{A})$ *существуют число* $K_\alpha > 0$ *и полунорма* p_γ $(\gamma\in\mathfrak{A})$ *такие, что выполняется оценка*

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |t_i| \cdot \sup_{1\leqslant i\leqslant n} p_\alpha(U_{\sigma_i} x) \leqslant K_\alpha p_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i U_{\sigma_i} x\Big) \qquad (x\in X)$$

в предположениях 3°.

Доказательство. Выберем произвольное $x\in X$. Так как $\lim_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma x = x$, то для каждой окрестности нуля U существует $\sigma_0\in\Sigma$ такое, что

$$\{U_{\sigma_0\cup\sigma} x : \sigma\in\Sigma\} \subset U + x.$$

Кроме того, при каждом $\sigma\in\Sigma$

$$U_{\sigma_0\cup\sigma} x - U_\sigma x \in \bigcup_{\lambda\subset\sigma_0} U_\lambda x,$$

так что

$$\{U_\sigma x : \sigma\in\Sigma\} \subset \bigcup_{\lambda\subset\sigma_0} (U + x - U_\lambda x),$$

т. е. множество $\{U_\sigma x : \sigma\in\Sigma\}$ вполне ограничено и, следовательно, ограничено при каждом $x\in X$. Так как X бочечно, то множество $\{U_\sigma : \sigma\in\Sigma\}$ равностепенно непрерывно (см. [3], стр. 636).

Ввиду 1° для каждой полунормы p_α $(\alpha\in\mathfrak{A})$ существуют p_β $(\beta\in\mathfrak{A})$ и $K_\alpha > 0$ такие, что

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} p_\alpha(U_\sigma x) \leqslant K_\alpha p_\beta(x) \qquad (x\in X).$$

Если каждой полунорме p_α поставить в соответствие полунорму q_α, где $q_\alpha(x) = \sup_{\sigma\in\Sigma} p_\alpha(U_\sigma x)$ $(x\in X)$, то

$$q_\alpha(x) \leqslant K_\alpha p_\beta(x) \qquad (x\in X). \tag{1}$$

Следовательно, q_α — непрерывная полунорма. Пусть A — произвольное конечное множество множества $\mathfrak{A}$ и $p_\gamma(x) = \sup_{\alpha\in A} p_\alpha(x)$. Тогда при некоторых $K_\gamma > 0$ и p_β $(\beta\in\mathfrak{A})$ справедливо

$$\sup_{\alpha\in A} q_\alpha(x) = q_\gamma(x) \leqslant K_\gamma p_\beta(x) \qquad (x\in X),$$

откуда следует, что топология в X, определяемая полунормами $\{q_\alpha : \alpha\in\mathfrak{A}\}$, не сильнее исходной топологии пространства X. Поскольку при каждом p_α выполняется неравенство

$$p_\alpha(x) \leqslant q_\alpha(x) \qquad (x\in X), \tag{2}$$

то топология, определяемая семейством $\{q_\alpha : \alpha\in\mathfrak{A}\}$, совпадает с исходной, т. е. имеет место 2°.

Рассмотрим функцию $g(t) = q_\alpha(U_\lambda x + tU_\mu x)$, где $\lambda \cap \mu = \varnothing$, от вещественного параметра t. Так как g является непрерывной выпуклой функцией, удовлетворяющей условию

$$g(t) \geqslant g(0) \qquad (-\infty < t < +\infty), \tag{3}$$

то она монотонно возрастает при $t > 0$. Поэтому

$$q_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i U_{\sigma_i} x\right) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i|\, q_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} s_i U_{\sigma_i} x\right) \qquad (x \in X), \tag{4}$$

где $s_i = \pm 1$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Поскольку

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i U_{\sigma_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} U_{\sigma_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i U_{\sigma_i} \in \{U_\lambda - U_\mu : \lambda, \mu \in \Sigma\},$$

то

$$q_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} s_i U_{\sigma_i} x\right) \leqslant 2 q_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} U_{\sigma_i} x\right) \qquad (x \in X).$$

Учитывая теперь (2), (4) и (1), получаем оценку 3°, где $M_\alpha = 2K_\alpha$.

Оценка 4° получается из (3), если учитывать (2) и (1).

Следствие 1. *Если натягивающее ШР отделимого бочечного пространства X является безусловным, то и соответствующее ШР пространства X^* безусловное.*

Доказательство. Положим $V_\sigma = I - U_\sigma$, где I — единичное отображение в пространстве X, $\sigma(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $V_n = V_{\sigma(n)}$. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $A \subset X$. Так как, ввиду леммы и определения V_σ, множество $\{V_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ является равностепенно непрерывным, то множество $B = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma(A)$ ограничено. Поскольку при любом $f \in X^*$ справедливо $\lim V_n^* f = 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon)$ такое, что $\sup_{x \in B} |(V_{n(\varepsilon)}^* f) x| < \varepsilon$. Но если $\sigma(n(\varepsilon)) \subset \sigma$, то $V_{n(\varepsilon)} \circ V_\sigma = V_\sigma$ и

$$\sup_{x \in A} |(V_\sigma^* f) x| = \sup_{x \in A} |((V_\sigma^* \circ V_{n(\varepsilon)}^*) f) x| = \sup_{x \in V_\sigma(A)} |(V_{n(\varepsilon)}^* f) x| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in B} |(V_{n(\varepsilon)}^* f) x| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma^* f = 0$, что ввиду произвольности f и доказывает следствие 1.

Введем еще одно понятие. Будем говорить, что c_0 (соответственно l_1) с естественным базисом (e_i) и подпространство Z пространства X с БШР, являются s-изоморфными, если существует такой изоморфизм T пространства c_0 (соответственно l_1) на Z, что

$$Te_i \in U_{\sigma_i}(X),$$

где $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Теорема 1. *Для ограниченной полноты БШР отделимого топологического векторного пространства X необходимо, а если X — секвенциально полное отделимое бочечное пространство, то и достаточно отсутствие в пространстве X подпространств, s-изоморфных пространству c_0. При этом, если подпространство Z секвенциально полного отделимого бочечного пространства X является s-изоморфным пространству c_0, то Z топологически дополняемо.*

Доказательство. Необходимость. Пусть (e_i) — естественный базис в c_0. Предположим, что существует такой изоморфизм $T: c_0 \to X$, что

$$z_i = Te_i \in U_{\sigma_i}(X),$$

где $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$, если $i \neq j$. В силу безусловности базиса (e_i) можем считать, что $\max\{k : k \in \sigma_i\} < \min\{k : k \in \sigma_{i+1}\}$. Так как $e_i \not\to 0$ и последовательность $(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i)$ ограничена, то, ввиду изоморфизма T, последовательность $(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} z_i)$ ограничена в X и $z_i \not\to 0$. Но

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} U_{\sigma_i} z_i$$

представляется в виде $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i$, где $m = \max\{k : k \in \sigma_n\}$, и $x_i \in P_i(X)$ — некоторая последовательность, зависящая от последовательности (z_i). Следовательно, если БШР пространства X ограниченно полное, то ряд Σz_i сходится в противоречие с $z_i \not\to 0$.

Достаточность. Предположим, что ряд Σx_i, где $x_i \in P_i(X)$, не сходится, а последовательность $(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i)$ ограничена в X. Тогда существуют полунорма p_β из определяющего топологию в X семейства полунорм $\{p_\alpha : a \in \mathfrak{A}\}$, число $d > 0$ и последовательность $(\sigma_i) \subset \Sigma$ такие, что $\max\{k : k \in \sigma_i\} < \min\{k : k \in \sigma_{i+1}\}$ и $p_\beta(\sum_{k \in \sigma_i} x_k) \geqslant d$ при всех $i = 1, 2, \ldots$. Положим $z_i = \sum_{k \in \sigma_i} x_k$. Так как последовательность $(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} z_i)$ ограничена, то из оценки 3° (см. лемму) при любых числах (t_i), при любом натуральном n и произвольной полунорме p_α получаем

$$p_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right) \leqslant C_\alpha \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i|, \tag{5}$$

где $C_\alpha > 0$ зависит от p_α. Учитывая оценку 4°, найдем для полунормы p_β полунорму p_γ такую, что выполняется неравенство

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i| \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_\beta(z_i) \leqslant K_\beta p_\gamma\left(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right).$$

Итак, существуют p_γ $(\gamma \in \mathfrak{A})$ и $C = (K_\beta \setminus d) > 0$ такие, что

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i| \leqslant C p_\gamma \left(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right). \qquad (6)$$

Пусть (e_i) — естественный базис пространства c_0 и Z — линейное пространство всех сходящихся в X рядов вида $\Sigma\, t_i z_i$. Непрерывный (ввиду (5)) оператор, переводящий произвольную линейную комбинацию векторов e_i в такую же линейную комбинацию векторов z_i, можно продолжить по непрерывности до непрерывного оператора T, который каждому элементу $\Sigma\, t_i e_i \in c_0$ ставит в соответствие $\Sigma\, t_i z_i \in Z$ (ряд $\Sigma\, t_i z_i$ сходится, так как выполняется (5) и X — секвенциально полное пространство), и который, в силу (6), взаимно однозначен. Но тогда оператор $T^{-1}: Z \to c_0$ замкнут (см. [3], стр. 105). Так как замкнутое отображение бочечного пространства в банахово пространство является непрерывным (см. [3], стр. 734), то остается доказать бочечность пространства Z. Для этого достаточно показать, что Z допускает топологическое дополнение (см. [3], стр. 588).

Учитывая линейную независимость системы (z_i), можем на ее линейной оболочке определить линейные формы g_i соотношением

$$g_i\left(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\right) = t_i.$$

Поскольку, в силу (6), во всех точках $x = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k z_k$ справедливо неравенство

$$|g_i(x)| \leqslant C p_\gamma(x),$$

то из теоремы Хана—Банаха следует, что каждую форму g_i можно продолжить до такой линейной формы G_i на X, что во всех точках $x \in X$ будет выполняться неравенство

$$|G_i(x)| \leqslant C p_\gamma(x),$$

т. е. множество $\{G_i : i = 1, 2, \ldots\} \subset X^*$ равностепенно непрерывно. Определим $h_i \in X^*$ равенством

$$h_i = G_i \circ U_{\sigma_i}.$$

Тогда множество всех h_i тоже равностепенно непрерывно (лемма, 1°) и

$$h_i(z_j) = \delta_{ij}.$$

Введем непрерывные проекторы S_k, отображающие X в Z, соотношением

$$S_k x = \sum_{i=1}^{k} h_i(x) z_i.$$

Последовательность (S_k) ограничена в каждой точке $x \in X$, так как при каждой полунорме p_α и натуральном k (в силу (5)) справедливо неравенство $p_\alpha(S_k x) \leqslant C_\alpha \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} |h_i(x)|$ и множество всех h_i равностепенно непрерывно. Кроме того, ввиду

$$h_i(x) = h_i(U_{\sigma_i} x) \qquad (x \in X),$$

существует $\lim S_k x$ на всюду плотном в X множестве $\{U_\sigma x : x \in X,\ \sigma \in \Sigma\}$. Тогда из теоремы Банаха—Штейнгауза (см. [3], стр. 637) следует, что предел $\lim S_k x = Sx$ существует для всех $x \in X$ и отображение S — непрерывный проектор пространства X на Z, т. е. Z допускает топологическое дополнение.

Наконец, заметим, что c_0 вкладывается в X s-изоморфно, так как $z_i = Te_i \in U_{\sigma_i}(X)$, и если c_0 является s-изоморфным некоторому $Z \subset X$, то можно только что описанным способом построить непрерывный проектор пространства X на Z, т. е. Z топологически дополняемо. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 обобщает результат Калтона (см. [6], теорему 2.1): если безусловный базис полного бочечного пространства E не является ограниченно полным, то E содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное пространству c_0.

Теорема 2. *Для натягиваемости БШР отделимого локально выпуклого пространства X необходимо, а если X — секвенциально полное отделимое бочечное пространство, то и достаточно отсутствие в пространстве X подпространств, s-изоморфных пространству l_1. При этом, если подпространство Z секвенциально полного отделимого бочечного пространства X является s-изоморфным пространству l_1, то Z топологически дополняемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим. что существует такой изоморфизм $T : c_0 \to X$, что

$$z_i = Te_i \in U_{\sigma_i}(X),$$

где $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и (e_i) — естественный базис в c_0. Ввиду безусловности базиса (e_i) можем считать, что $\max\{k : k \in \sigma_i\} < \min\{k : k \in \sigma_{i+1}\}$. Поскольку (e_i) ограничено в l_1, то (z_i) ограничено в X. Выберем функционал $f \in l_1{}^*$ такой, что $f(e_i) \not\to 0$. Тогда $g = f \circ T^{-1} \in (T(c_0))^*$ и $g(z_i) = f(e_i) \not\to 0$. Продолжим g до функционала $h \in X^*$. Так как $h(z_i) \not\to 0$, т. е.

$$h(U_{\sigma_i} z_i) = (U_{\sigma_i}{}^* h) z_i \not\to 0,$$

то последовательность $(U_n{}^* h)$ не сходится равномерно на ограниченном множестве (z_i) и, следовательно, не сходится в сильной топологии пространства X^*.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Заметим, что если X бочечно, то X^* является секвенциально полным, так как в силу теоремы Банаха—Штейнгауза (см. [3], стр. 637) X^* является секвенциально замкнутым подпространством полного (см. [3], стр. 129) пространства ограниченных линейных форм на X. Если БШР ненатягивающее, то существует $f \in X^*$ такое, что последовательность $(U_n{}^* f)$ не сходится в сильной топологии пространства X^*. Ввиду секвенциальной полноты X^* найдутся последовательность $(\sigma_i) \subset \Sigma$, где $\max\{k : k \in \sigma_i\} < \min\{k : k \in \sigma_{i+1}\}$, число $d > 0$ и ограниченное множество $B \subset X$ такие, что

$$\sup_{x \in B} \left|(U_{\sigma_i}{}^* f)\, x\right| > d$$

для всех σ_i. Кроме того, учитывая, что множество $\{U_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно (лемма, 1°), найдем ограниченную последовательность

$$z_i = U_{\sigma_i} z_i$$

такую, что при всех z_i выполняется неравенство

$$f(z_i) \geqslant d. \tag{7}$$

Так как (z_i) ограничено, то при любых числах t_i, любом натуральном n и произвольной непрерывной на X полунорме p_α справедливо

$$p_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\Big) \leqslant M_\alpha \sum_{i=1}^{n} |t_i|,$$

где $M_\alpha > 0$ зависит от p_α. С другой стороны, учитывая (7) и непрерывность функционала f, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} f(|t_i|\, z_i) \leqslant K p_\beta\Big(\sum_{i=1}^{n} |t_i|\, z_i\Big)$$

при некоторых $K > 0$ и непрерывной полунорме p_β. Поскольку

$$z_i = U_{\sigma_i} z_i$$

и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то из оценки 3° (см. лемму) вытекает существование непрерывной полунормы p_γ и $C > 0$ таких, что

$$p_\beta\Big(\sum_{i=1}^{n} |t_i|\, z_i\Big) \leqslant C p_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\Big).$$

Итак, при некоторых $M > 0$ и p_γ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant M p_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\Big),$$

где числа t_i и натуральное n произвольны.

Теперь можем продолжить доказательство совершенно аналогично доказательству достаточности теоремы 1: тем же способом построить непрерывный проектор $S : X \to Z$, где Z — пространство всех сходящихся в X рядов вида $\Sigma\, t_i z_i$. Тем самым, Z является топологически дополняемым подпространством, s-изоморфным l_1. Аналогично получается, что из s-изоморфности $Z \subset X$ и l_1 следует топологическая дополняемость Z. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 обобщает следующий результат Калтона (см. [6], теорему 2.2): если безусловный базис полного бочечного пространства E не является натягивающим, то E содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное l_1.

В случае банахова пространства X с безусловным базисом известно, что натягиваемость базиса эквивалентна сепарабельности пространства X^* (см. [1], стр. 130). Но в случае БШР эта эквивалентность в общем случае нарушается:

Следствие 2. *Для натягиваемости БШР банахова пространства X достаточно, но не необходимо, сепарабельность пространства X^*.*

Доказательство. Поскольку сепарабельное пространство X^* не может иметь своим факторпространством несепарабельное пространство, изоморфное l_1^*, то изоморфизма из l_1 в X не существует, и поэтому, ввиду теоремы 2, БШР является натягивающим. С другой стороны (см. предложение 1), $c_0(l_1)$ имеет натягивающее БШР, но его сопряженное $l_1(l_1^*)$ не сепарабельно. Тем самым наше утверждение доказано.

Не вызывает трудностей доказать, что пространство S, где $S = c_0$ или $S = l_p$ $(p \geqslant 1)$, s-изоморфно вкладывается в $S(Y)$. Именно, выберем элемент $y \in Y$ с $\|y\| = 1$ и положим $z_k = (\delta_{kl} y)$. Поскольку при любых числах t_i и натуральном n справедливо

$$\|\sum_{k=1}^{n} t_h z_k\|_{S(Y)} = \|(t_k)_{k=1}^{n}\|_S,$$

то S изометрично замкнутой линейной оболочке последовательности (z_k), причем каждому z_k ставится в соответствие вектор естественного базиса пространства S.

Учитывая и предложение 1, мы можем с помощью теорем 1 и 2, ввиду только что сделанной заметки, охарактеризовать пространства $S(Y)$ следующим образом.

Предложение 2. *Пространство $c_0(Y)$ имеет натягивающее БШР, которое — не ограниченно полное, пространство $l_1(Y)$ — ограниченно полное БШР, которое — не натягивающее, пространство $l_p(Y)$ $(p > 1)$ имеет БШР, которое — ограниченно полное и натягивающее.*

Рассмотрим рефлексивное отделимое бочечное пространство X с ШР (P_n). Так как полурефлексивность наследуется замкнутыми подпространствами и каждое топологически дополняемое подпространство пространства X является бочечным (см. [3], стр. 588), то каждое топологически дополняемое подпространство пространства X является рефлексивным. Следовательно, X не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных c_0 или l_1, и каждое $P_n(X)$ — рефлексивное пространство (поскольку P_n — непрерывный проектор в X). Кроме того, из теоремы 4 статьи [4] вытекает, что ШР рефлексивного пространства является одновременно натягивающим и ограниченно полным. С другой стороны, если все $P_n(X)$ рефлексивны, ШР пространства X натягивающее и ограниченно полное, то из теоремы 5 статьи [4] следует, что X полурефлексивно, и поэтому, ввиду бочечности, рефлексивно. Таким образом, отделимое бочечное пространство X с ШР (P_n) рефлексивно тогда и только тогда, когда ШР является одновременно ограниченно полным и натягивающим и все пространства $P_n(X)$ рефлексивны. Из этого критерия рефлексивности, теорем 1 и 2 и из того, что для рефлексивности бочечного пространства X необходимо отсутствие в X топологически дополняемых подпространств, изоморфных c_0 или l_1, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *В секвенциально полном отделимом бочечном пространстве X с БШР (P_n) следующие утверждения эквивалентны:*

1° *X рефлексивно;*

2° *Все пространства $P_n(X)$ являются рефлексивными, и X не содержит топологически дополняемых подпространств, изоморфных c_0 или l_1;*

3° *Все пространства $P_n(X)$ являются рефлексивными, и X не содержит (топологически дополняемых) подпространств, s-изоморфных c_0 или l_1.*

Замечание. Теорема 3 обобщает следующий результат Калтона (см. [6], теорему 2.3): рефлексивность полного бочечного пространства E с безусловным базисом эквивалентна отсутствию в пространстве E топологически дополняемых подпространств, изоморфных c_0 или l_1.

В банаховом пространстве X, обладающем безусловным базисом, рефлективность X эквивалентна сепарабельности X^{**}. В случае БШР и эта эквивалентность нарушается. Действительно, пусть H — несепарабельное гильбертово пространство, тогда $l_2(H)$ — рефлексивное несепарабельное банахово пространство с БШР, а $l_2(J)$, где J — пространство Джеймса, нерефлексивное банахово пространство с БШР, второе сопряженное которого сепарабельно. Оба утверждения вытекают из предложения 1 и теоремы 3, при втором нужно также учитывать, что J нерефлексивно, а J^{**} сепарабельно (см. [2], стр. 148). Для сравнения отметим, что для рефлексивности циклического банахова пространства X (это понятие является одним из обобщений понятия банахова пространства с безусловным базисом (см. [7])) достаточно сепарабельность пространства X^{**} (см. [7], следствие 6).

Литература

1. Дэй М., Нормированные линейные пространства. Москва, 1961.
2. Мильман В. Д., Геометрическая теория пространств Банаха, ч. I, Теория базисных и минимальных систем. Успехи матем. наук, 1970, **25**, № 3, 113—173.
3. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Москва, 1969.
4. Cook Thurlow, A., Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann., 1969, **182**, № 3, 232—235.

5. J a m e s. R. C., Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann. Math., 1950 **52,** 518—527.
6. K a l t o n, N. J., Unconditional and normalised bases. Stud. Math. (PRL), 1970, **38,** № 1—5, 243—253.
7. T z a f r i r i, L., Reflexivity of cyclic Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22,** № 1, 61—68.

Поступило
20 IX 1973

TINGIMATUD SCHAUDERI LAHUTUSED JA TÜNNIRUUMIDE REFLEKSIIVSUS

E. Oja

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis tuuakse sisse alljärgnev tingimatu baasi mõiste üldistus. Eralduva lokaalselt kumera ruumi X *tingimatuks Schauderi lahutuseks* nimetame ruumi X pidevate projektorite jada (P_n), mis rahuldab järgmisi tingimusi: $P_k \circ P_n = 0$, kui $k \neq n$, ja rida $\sum P_n x$ koondub tingimatult iga $x \in X$ korral elemendiks x. Üldistatakse mõningad tingimatu baasiga ruumis kehtivad tulemused (vt. näiteks, [6], teoreemid 2.1—2.3) tingimatu Schauderi lahutusega ruumi juhule.

UNCONDITIONAL SCHAUDER DECOMPOSITIONS AND REFLEXIVITY OF BARRELLED SPACES

E. Oja

S u m m a r y

Let X be a locally convex Hausdorff space. The following generalization of the concept of unconditional basis is given. We say that a sequence of continuous projections (P_n) on X is *an unconditional Schauder decomposition of* X iff $P_k \circ P_n = 0$, when $k \neq n$ and for each $x \in X$ the series $\sum P_n x$ unconditionally converges to x. Some examples of the spaces with an unconditional Schauder decomposition are considered and several results concerning uncoditional bases are generalized (for example, [6], Theorems 2.1, 2.2 and 2.3). The next theorem is the main result of the paper. *If X is a sequentially complete barrelled space with an unconditional Schauder decomposition (P_n), then the following are equivalent*:

1° *X is reflexive*;

2° *Each $P_n(X)$ is reflexive and X possesses no complemented subspaces isomorphic to c_0 or l_1*;

3° *Each $P_n(X)$ is reflexive and X possesses no (complemented) subspaces s-isomorphic to c_0 or l_1*.

(Let (e_n) be the unit vector basis for c_0 (resp. l_1). We say that a subspace Z of a space X with an unconditional Schauder decomposition (P_n) is *s-isomorphic* to c_0 (resp. l_1) iff there is an isomorphism T from c_0 (resp. l_1) to Z and a sequence (σ_n) of finite subsets of the set of all positive integers with $\sigma_k \cap \sigma_n = \varnothing$ when $k \neq n$ such that $Te_n \in \sum_{k \in \sigma_n} P_k(X)$.)

РАЗЛОЖИМОСТЬ АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ A-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Абель

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть $C^*(X, A)$ — множество всех ограниченных непрерывных A-значных функций, определенных на топологическом пространстве X. В случае, когда A — комплексная банахова алгебра [1] с единицей, множество $C^*(X, A)$ образует банахову алгебру с единицей относительно обычных алгебраических операций над функциями и sup-нормы. При этом, $C^*(X, A)$ является коммутативной алгеброй тогда и только тогда, когда алгебра A коммутативна.

Пусть $\operatorname{Rad} A$ — радикал алгебры A. Алгебра A называется *разложимой*, если в алгебре A существует такая подалгебра B, изоморфная $A/\operatorname{Rad} A$, что $A = B \oplus \operatorname{Rad} A$, и *сильно разложимой*, если, кроме того, подалгебра B замкнута.

Как известно, существуют такие банаховы алгебры, которые не являются разложимыми (см. [7, 10]), или являются разложимыми, но не сильно разложимыми (см. [7]). Условия разложимости и сильной разложимости банаховых алгебр рассмотрены в статьях [3, 5, 6, 8].

В настоящей статье продолжается изучение радикала алгебры $C^*(X, A)$, начатое в [2]. Во-первых, дается описание множества всех топологически нильпотентных элементов алгебры $C^*(X, A)$ для любого топологического пространства X и любой банаховой алгебры A. Затем, предполагая X топологическим пространством и A банаховой алгеброй, в которой множество всех топологически нильпотентных элементов образует идеал, или A коммутативной банаховой алгеброй, показывается, что равенство [2]

$$\operatorname{Rad} C^*(X, A) = C^*(X, \operatorname{Rad} A) \tag{1}$$

[1] В дальнейшем вместо комплексной банаховой алгебры с единицей будем говорить коротко банахова алгебра или алгебра.

[2] В силу статьи [13], равенство (1) остается справедливым и для алгебры $C(X, A)$ всех определенных на X непрерывных A-значных функций.

имеет место тогда и только тогда, когда алгебра A удовлетворяет условию

(а) *последовательность*

$$\{(\|a^n\|_A)^{1/n}\}$$

сходится равномерно относительно a к нулю на каждом ограниченном подмножестве $A_0 \subset \operatorname{Rad} A$, для которого существует функция $f \in C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию $f(X) = A_0$.

При этом, если X — псевдокомпактное пространство [3], равенство (1) имеет место для любой банаховой алгебры A. Отдельно рассматривается полупростота алгебры $C^*(X, A)$, обобщая теорему 4 из статьи [2] на случай, когда A является некоммутативной банаховой алгеброй.

В § 3 находятся условия для разложимости и сильной разложимости алгебры $C^*(X, A)$ относительно X и A.

В § 4 показывается, что алгебры $C^*(X, A)/\operatorname{Rad} C^*(X, A)$ и $C^*(X, A/\operatorname{Rad} A)$ топологически изоморфны, а пространства [4] $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\operatorname{Rad} A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ гомеоморфны, если X — дискретное топологическое пространство и A — сильно разложимая коммутативная банахова алгебра с ограниченным радикалом, которые удовлетворяют условию (1). Доказывается гомеоморфность пространств [5] $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$, $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\operatorname{Rad} A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ в случае, когда X — дискретное топологическое пространство, а A — коммутативная банахова алгебра с радикалом, удовлетворяющая некоторым условиям. Последнее обобщает результаты автора [1] и Юда [15] на случай, когда A не является полупростой алгеброй.

§ 2. Радикал алгебры $C^*(X, A)$

Пусть $\mathrm{N}(A)$ — множество всех топологически нильпотентных элементов алгебры A, т. е. множество всех таких $a \in A$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} (\|a^n\|_A)^{1/n} = 0.$$

Будем говорить, что алгебра A удовлетворяет условию [6]

(а'), *если последовательность* (2) *сходится равномерно относительно a к нулю на каждом ограниченном подмножестве $N_0 \subset \mathrm{N}(A)$, для которого существует функция $f \in C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию $f(X) = N_0$.*

---

[3] Вполне регулярное пространство X называется *псевдокомпактным пространством*, если каждая определенная на X вещественная непрерывная функция ограничена (см. [11]).

[4] Через $\mathfrak{M}(A)$ обозначается пространство максимальных идеалов алгебры A.

[5] Через βX обозначается стоун-чеховское расширение пространства X.

[6] В случае, когда A — коммутативная банахова алгебра, или A — банахова алгебра, в которой множество $\mathrm{N}(A)$ образует идеал, то $\mathrm{N}(A) = \operatorname{Rad} A$ (см. [14], стр. 57). Тогда условия (а) и (а') совпадают.

Для описания радикала алгебры $C^*(X,A)$, нужна

Лемма 1. *Пусть X — топологическое пространство и A — банахова алгебра. Тогда*

$$\mathrm{N}(C^*(X,A))\subset C^*(X,\mathrm{N}(A)). \tag{3}$$

Для того, чтобы

$$\mathrm{N}(C^*(X,A))=C^*(X,\mathrm{N}(A)), \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (a').

Доказательство. Пусть $f\in\mathrm{N}(C^*(X,A))$. Тогда для всех фиксированных $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}(\|f^n(x)\|_A)^{1/n}=0. \tag{5}$$

Поэтому $f\in C^*(X,\mathrm{N}(A))$ и справедливо включение (3).

Необходимость. Предположим, что алгебра A не удовлетворяет условию (a'), т. е. в $\mathrm{N}(A)$ существует хотя бы одно удовлетворяющее условию (a') ограниченное подмножество N_0, на котором последовательность (2) не сходится равномерно по a к нулю. При этом, пусть f — непрерывная функция, отображающая пространство X на N_0. Тогда $f\in C^*(X,N(A))$, а последовательность

$$\{(\|f^n(x)\|_A)^{1/n}\} \tag{6}$$

не сходится на X равномерно по x к нулю. Поэтому [7]

$$\lim_{n\to\infty}(\|f^n\|_{C^*(X,A)})^{1/n}>0,$$

и, следовательно, функция $f\notin\mathrm{N}(C^*(X,A))$. Значит, для справедливости равенства (4), необходимо выполнение условия (a').

Достаточность. Пусть $f\in C^*(X,\mathrm{N}(A))$, т. е. для всех $x\in X$ условие (5) выполнено. Поскольку $f(X)$ образует ограниченное подмножество в $\mathrm{N}(A)$ и алгебра A удовлетворяет условию (a'), то последовательность (6) сходится на X к нулю равномерно по x. В силу этого, $f\in\mathrm{N}(C^*(X,A))$, и имеет место равенство (4). Лемма доказана.

Пусть $f\in\mathrm{Rad}\,C^*(X,A)$. Тогда (см. [4] стр. 196) для любой функции $g\in C^*(X,A)$ функция [8] $(e+gf)^{-1}\in C^*(X,A)$, где [9] $e(x)\equiv e_A$. В силу этого, $(e_A+g(x)f(x))^{-1}\in A$ для любой функции $g\in C^*(X,A)$ и фиксированной точки $x\in X$. Так как

$$\{g\in C^*(X,A)\colon g(x)\equiv a,\ a\in A\}\subset C^*(X,A),$$

то $(e_A+af(x))^{-1}\in A$ для любого $a\in A$ и фиксированной точки $x\in X$. Поэтому $f\in C^*(X,\mathrm{Rad}\,A)$ для любого топологического пространства X и любой банаховой алгебры A. Следовательно, всегда имеет место включение

$$\mathrm{Rad}\,C^*(X,A)\subset C^*(X,\mathrm{Rad}\,A). \tag{7}$$

---

[7] Как известно (см. [14], стр. 10), для всех $a\in A$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\geqslant 0$.

[8] Здесь рассматриваем только двухсторонние обратные элементы.

[9] Здесь e_A — единица алгебры A.

В случае, когда A коммутативна, справедливость включения (7) показана в [2], стр. 152.

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство и A — такая банахова алгебра, в которой множество $\mathrm{N}(A)$ образует идеал, или A является коммутативной банаховой алгеброй. Для справедливости равенства* (1), *необходимо и достаточно выполнение условия* (а).

В случае, когда X — псевдокомпактное пространство, равенство (1) *верно для любой банаховой алгебры A.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено условие (1). По предположению, $\mathrm{Rad}\, A = \mathrm{N}(A)$. Поэтому, и по лемме 1, выполнено равенство (4). Следовательно, выполнение условия (а) необходимо.

Достаточность. Из предположения теоремы следует, что $C^*(X, \mathrm{N}(A))$ образует идеал в алгебре $C^*(X, A)$. Поэтому, учитывая условие (а), по лемме 1

$$\mathrm{Rad}\, C^*(X,A) = \mathrm{N}(C^*(X,A)) = C^*(X, \mathrm{N}(A)) = C^*(X, \mathrm{Rad}\, A).$$

Пусть теперь X — псевдокомпактное пространство и $f \in C^*(X, \mathrm{Rad}\, A)$, т. е. $(e_A + af(x))^{-1} \in A$ для всех $a \in A$ и любой фиксированной точки $x \in X$. Тогда $(e + gf)^{-1}(x) \in A$ для любой функции $g \in C^*(X, A)$ и любой фиксированной точки $x \in X$. Так как функция $(e + gf)^{-1}$ непрерывна на X, то $(e + gf)^{-1} \in C^*(X, A)$, в силу псевдокомпактности пространства X. Поэтому $f \in \mathrm{Rad}\, C^*(X, A)$ и равенство (1) справедливо для любой банаховой алгебры A. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство и A — банахова алгебра. Для полупростоты алгебры $C^*(X, A)$ достаточна, а если X — псевдокомпактное пространство, то и необходима полупростота алгебры A.*

Доказательство следует из теоремы 1, учитывая то, что включение (7) справедливо независимо от пространства X и алгебры A.

Следствие 1 известно, когда А является коммутативной алгеброй (см. [2], теорема 4).

§ 3. Разложимость алгебры $C^*(X, A)$

Для решения многих задач интересно узнать, когда алгебра $C^*(X, A)$ является разложимой или сильно разложимой. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть X — дискретное топологическое пространство и A — разложимая (сильно разложимая) банахова алгебра с ограниченным радикалом*[10] $\mathrm{Rad}\, A$. *Алгебра $C^*(X, A)$ разложима (соответственно сильно разложима), если выполнено условие* (1).

[10] Т. е. радикал $\mathrm{Rad}\, A$ является ограниченным подмножеством в A.

Доказательство. В силу разложимости (соответственно сильной разложимости) алгебры A, существует такая подалгебра A_0 (соответственно замкнутая подалгебра A_0) алгебры A, что $A = A_0 \oplus \operatorname{Rad} A$, причем

$$A_0 \cap \operatorname{Rad} A = \{\theta_A\}, \tag{8}$$

где θ_A — нулевой элемент алгебры A. Поэтому, если $f \in C^*(X, A)$, то $f(x) \equiv a(x) + r(x)$, где $a(x) \in A_0$ и $r(x) \in \operatorname{Rad} A$ для всех фиксированных $x \in X$. Учитывая дискретность пространства X и ограниченность радикала $\operatorname{Rad} A$, функция $r \in C^*(X, \operatorname{Rad} A)$. В силу этого, функция $a \in C^*(X, A_0)$. Следовательно, каждая функция $f \in C^*(X, A)$ представима в виде

$$f = a + r, \tag{9}$$

где $a \in C^*(X, A_0)$ и $r \in C^*(X, \operatorname{Rad} A)$.

Пусть теперь $g \in C^*(X, A_0) \cap C^*(X, \operatorname{Rad} A)$. Тогда $g(x) \in A_0 \cap \operatorname{Rad} A$ для всех фиксированных $x \in X$. Отсюда по условию (8) следует, что $g = \theta$, т. е. g является нулевой функцией алгебры $C^*(X, A)$. Поэтому

$$C^*(X, A_0) \cap C^*(X, \operatorname{Rad} A) = \{\theta\}. \tag{10}$$

В силу условия (10), представление (9) является единственным. Поэтому, по условию (1), алгебра $C^*(X, A)$ разложима.

В случае, когда A_0 является замкнутой подалгеброй алгебры A, множество $C^*(X, A_0)$ является замкнутой подалгеброй алгебры $C^*(X, A)$. Тогда алгебра $C^*(X, A)$ сильно разложима. Теорема доказана.

Учитывая теоремы 1 и 2 и теоремы 3 из статьи [2], получаем

Следствие 2. *Пусть X — дискретное топологическое пространство, а алгебра A удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) *A — коммутативная банахова алгебра с конечным радикалом;*

б) *A — коммутативная банахова алгебра с ограниченным радикалом, удовлетворяющая условию* (a);

а) *A — банахова алгебра, удовлетворяющая[11] условию* (a), *с ограниченным радикалом, в которой множество идемпотентных элементов образует идеал.*

Тогда из разложимости (сильной разложимости) алгебры A следует разложимость (соответственно сильная разложимость) алгебры $C^*(X, A)$.

---

[11] Здесь алгебра A обязательно не должна быть коммутативной алгеброй.

§ 4. Описание пространства максимальных идеалов алгебры $C^*(X, A)$

Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $\mathfrak{M}(A)$ — пространство максимальных идеалов алгебры A. В статье [1] (теорема 6) показано, что пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ гомеоморфны, если X — вполне регулярное T_1-пространство и A — коммутативная полупростая банахова алгебра, изоморфная алгебре[12] $C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. Оказывается, что пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ являются гомеоморфными и в случае, когда A не является полупростой алгеброй. Чтобы доказать последнее, нам нужна

Лемма 2. *Пусть X — дискретное топологическое пространство и A — сильно разложимая коммутативная банахова алгебра с ограниченным радикалом, удовлетворяющая условию* (1) *Тогда*

а) *алгебры $C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A)$ и $C^*(X, A)/\mathrm{Rad}\, C^*(X, A)$ топологически изоморфны и*

б) *пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ гомеоморфны.*

Доказательство. В силу сильной разложимости алгебры A, существует такая замкнутая подалгебра A_0 алгебры A, которая топологически изоморфна факторалгебре $A/\mathrm{Rad}\, A$ (см. [8], стр. 853). Так как алгебры A_0 и $A/\mathrm{Rad}\, A$ полупросты, то алгебры $C^*(X, A_0)$ и $C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A)$ являются топологически изоморфными (см. [2], теорема 5).

С другой стороны, по теореме 2, алгебра $C^*(X, A)$ сильно разложима, причем $C^*(X, A) = C^*(X, A_0) \oplus \mathrm{Rad}\, C^*(X, A)$. Поэтому алгебры $C^*(X, A_0)$ и $C^*(X, A)/\mathrm{Rad}\, C^*(X, A)$ топологически изоморфны (см. [8], стр. 853). Отсюда следует топологическая изоморфность алгебр $C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A)$ и $C^*(X, A)/\mathrm{Rad}\, C^*(X, A)$. Поэтому пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A)/\mathrm{Rad}\, C^*(X, A))$ гомеоморфны (см. [12], стр. 63). Поскольку пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A)/\mathrm{Rad}\, C^*(X, A))$ также гомеоморфны (см. [14], теорема 2.6.6), то гомеоморфными являются и пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть X — дискретное топологическое пространство и A — коммутативная банахова алгебра, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

а) *A имеет ограниченный нильпотентный*[13] *радикал* $\mathrm{Rad}\, A$ *и вполне несвязное пространство $\mathfrak{M}(A)$ максимальных идеалов;*

б) *A имеет конечномерный ограниченный радикал* $\mathrm{Rad}\, A$ *и удовлетворяет условию* (а).

---

[12] Через $\mathbf{C}$ обозначается поле комплексных чисел.

[13] Радикал $\mathrm{Rad}\, A$ называется *нильпотентным*, если существует такое натуральное число n, что $a^n = \theta_A$ для всех $a \in \mathrm{Rad}\, A$.

Если, кроме того, алгебры $A/\mathrm{Rad}\, A$ *и* $C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ *изоморфны, то пространства* $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$, $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ *и* $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ *гомеоморфны.*

Доказательство. В силу предположений теоремы, условие (1) выполнено. Кроме того, алгебра A сильно разложима (см. [8], теоремы 4.2 и 4.4). Поэтому, по лемме 2, пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ гомеоморфны. Так как алгебра $A/\mathrm{Rad}\, A$ полупроста и изоморфна алгебре $C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$, то пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A/\mathrm{Rad}\, A))$ также гомеоморфны (см. [1], стр. 65).

С другой стороны пространства $\mathfrak{M}(A/\mathrm{Rad}\, A)$ и $\mathfrak{M}(A)$ гомеоморфны (см. [14], теорема 2.6.6). Поэтому пространства $X \times \mathfrak{M}(A/\mathrm{Rad}\, A)$ и $X \times \mathfrak{M}(A)$ являются также гомеоморфными. Отсюда следует и гомеоморфность пространств $\beta(X \times \mathfrak{M}(A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ (см. [9], стр. 243). Следовательно, пространства $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$, $\mathfrak{M}(C^*(X, A/\mathrm{Rad}\, A))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ гомеоморфны.

Литература

1. Абель М., Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 52—77.
2. Абель М., Некоторые свойства алгебры непрерывных ограниченных функций со значениями в банаховой алгебре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 144—155.
3. Горин Е. А., Лин В. Я., Об одном условии на радикал банаховой алгебры, обеспечивающем сильную разложимость. Матем. записки, 1967, **2**, № 6, 589—592.
4. Наймарк М., Нормированные кольца. Москва, 1968.
5. Хелемский А. Я., О коммутативных нормированных кольцах с конечномерным радикалом. Вестн. Москов. ун-та, сер. матем.-мех., 1964, **6**, 7—16.
6. Хелемский А. Я., Об одном аналитическом условии на радикал коммутативной банаховой алгебры и связанных с ним вопросах разложимости. Докл. АН СССР, 1966, **167**, № 3, 525—527.
7. Bade, G. W., Curtis, P. S. Jr., Homomorphisms of commutative Banach algebras. Amer. J. Math., 1960, **82**, 589—608.
8. Bade, G. W., Curtis, P. S. Jr., The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras. Amer. J. Math., 1960, **82**, № 4, 851—866.
9. Dugundji F., Topolgy. Boston, 1966.
10. Feldman, C., The Wedderburn principial theorem in Banach algebras. Proc. Amer, Math., Soc., 1951, **2**, 771—777.
11. Hewitt, E., Rings of real-valued continuous functions I. Trans. Amer. Math., Soc., 1948, **64**, 45—99.
12. Hoffman, K., Fundamentals of Banach algebras. Curitiba, 1962.
13. Kaplansky, I., Topological rings. Amer. J. Math., 1947, **69**, 153—183.
14. Rickart, C. E., General theory of Banach algebras. Princeton, New Jersey — London, 1960.
15. Yood, B., Banach algebras of continuous functions. Amer. J. Math., 1951, **73**, 30—42.

Поступило
21 VI 1973

TÕKESTATUD PIDEVATE A-VÄÄRTUSTEGA FUNKTSIOONIDE ALGEBRA OTSELAHUTUSEST

M. Abel

Resümee

Olgu $C^*(X,A)$ kõigi pidevate tõkestatud A-väärtustega funktsioonide hulk, mis on defineeritud topoloogilisel ruumil X. Juhul, kui A on Banachi algebra ning algebralised operatsioonid hulgas $C^*(X,A)$ defineerida nagu tavaliselt funktsioonide korral, siis hulk $C^*(X,A)$ kujutab endast Banachi algebrat sup-normi suhtes.

Käesolevas artiklis kirjeldatakse algebra $C^*(X,A)$ topoloogiliselt nilpotentsete elementide hulka ning radikali. Leitakse piisavad tingimused selleks, et algebra $C^*(X,A)$ oleks diskreetse topoloogilise ruumi X korral otselahutuv või tugevalt otselahutuv poollihtsa alamalgebra ja radikaali otsesummaks. Uuritakse algebra $C^*(X,A)$ maksimaalsete ideaalide ruumi juhul, kui A on teatud omadustega radikaaliga Banachi algebra ning X on diskreetne topoloogiline ruum.

THE DECOMPOSITION OF THE ALGEBRA OF A-VALUED BOUNDED CONTINUOUS FUNCTIONS

M. Abel

Summary

Let $C^*(X,A)$ denote the set of all bounded continuous A-valued functions defined on a topological space X. In the case when A is a Banach algebra with unit, the algebraic operations in $C^*(X,A)$ we define in the natural "pointwise" manner and norm by sup-norm, then the set $C^*(X,A)$ is a Banach algebra with unit.

In the present paper the set of all topologically nilpotent elements of the algebra $C^*(X,A)$ and the radical of the algebra $C^*(X,A)$ are described. The sufficient conditions are found for the decomposition and the strong decomposition of algebra $C^*(X,A)$ when X is a discrete topological space. The space of maximal ideals of algebra $C^*(X,A)$ is considered when A is the Banach algebra with a radical and X is a discrete topological space.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Кивинукк

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ означает пространство измеримых функций двух переменных 2π-периодических по каждой переменной, для которых

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} < \infty, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{vraisup}_{x,y} |f(x, y)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Для каждой функции $f \in L_p$ с рядом Фурье[1]

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl}, \tag{1.1}$$

где

$$A_{kl}(x, y) = 2^{-\varkappa}(a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly + \\ + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \sin ly)$$

(здесь $\varkappa = 0^k + 0^l$ и условно $0^0 = 1$), можно построить метод приближения

$$U_{mn} f = \sum_{k,l=0}^{\infty} \lambda_{kl}(m, n) A_{kl}. \tag{1.2}$$

Общие условия сходимости методов (1.2) известны (см. [6], стр. 489 и 512). Что касается скорости сходимости, то здесь практически применяемые результаты получены в основном в двух случаях. Именно Ю. А. Пономаренко (см. [5], стр. 25) показал, что случай

$$\lambda_{kl}(m, n) = \lambda_k(m) \cdot \lambda_l(n)$$

приводится к приближению функций одной переменной. В 1939 г. Ю. Марцинкевич [9] начал изучать методы вида

[1] Во всей работе сходимость двойных рядов понимается в обычном смысле, т. е. по Принсгейму.

$$U_n f = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k(n) S_{kk}, \tag{1.3}$$

где $\Lambda_k(n)$ соответствует методу одной переменной и

$$S_{kk} = \sum_{\mu,\nu=0}^{k} A_{\mu\nu}.$$

Последние результаты о методах (1.3) опубликованы в работах Р. Таберского [10] и Г. Гаймназарова — М. Ф. Тимана [1]. Чезаровские средние обоих случаев подробно рассмотрены в книге Л. В. Жижиашвили (см. [2], гл. IV).

В настоящей заметке предлагаем следующий метод:

$$U_r f = \sum_{k,l=0}^{\infty} g_{k*l}(r) A_{kl}; \tag{1.4}$$

где $g_k(r)$ при целом k определяет метод приближения функций одной переменной и (ради краткости записи)

$$k^*l = \left(\frac{k^2+l^2}{2} \right)^{1/2}.$$

В следующих параграфах покажем, что методы (1.4) имеют аналогичные порядки приближения, что и соответственные методы одной переменной. Именно это свойство должно оправдывать введения нового метода приближения (1.4).

§ 2. Метод приближения Зигмунда

Для функции $f \in L_p$ с рядом Фурье (1.1) определяем метод приближения Зигмунда порядка $\lambda = 1, 2, \ldots$ соотношением

$$Z^\lambda{}_n f = \sum_{k,l=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{k^*l}{n} \right)^\lambda \right] A_{kl}. \tag{2.1}$$

Чтобы изучать ограниченность нормы операторов (2.1) в совокупности, но и других операторов вида

$$U_n f = \sum_{k,l=0}^{n} g_{kl}(n) A_{kl}, \tag{2.2}$$

приведем одну лемму, доказательство которой по существу содержится в работе [4] (см. стр. 1114).

Лемма 1. *Пусть существует функция Ψ и последовательность ψ_n такие, что*

$$n = O(\psi_n), \tag{2.3}$$

$$\Psi(k/\psi_n, l/\psi_n) = g_{kl}(n) \tag{2.4}$$

и

$$D^2\Psi(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x\, \partial y} \Psi(x, y) = O(1) \tag{2.5}$$

в некотором квадрате $Q(a) = \{(x, y) : 0 \leqslant x,\ y < a\}$. Тогда операторы (2.2) ограничены в совокупности.

Доказательство. В работе [4] утверждается, что

$$\|U_n\|=O\{n[\sum_{k,l=0}^{n-1}(g_{kl}(n)-g_{k+1,l}(n)-g_{k,l+1}(n)+g_{k+1,l+1}(n))^2]^{1/2}\}. \tag{2.6}$$

По формуле Тейлора, учитывая (2.5), получаем

$$|\Psi(x+h,y+h)-\Psi(x+h,y)-\Psi(x,y+h)+\Psi(x,y)|=$$
$$=|D^2\Psi(x+\theta_1 h,y+\theta_2 h)|\,h^2=O(h^2),$$

где $0<\theta_1,\ \theta_2<1$. Отсюда при $h=1/\psi_n$, ввиду (2.4), следует

$$|g_{k+1,l+1}(n)-g_{k+1,l}(n)-g_{k,l+1}(n)+g_{kl}(n)|=O(1/\psi^2_n).$$

Теперь из (2.6) и (2.3) следует $\|U_n\|=O(1)$.

Для операторов (2.1) условия леммы 1 имеют вид:

$$\psi_n=n,\qquad \Psi(x,y)=1-(x^*y)^\lambda,$$
$$D^2\Psi(x,y)=-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)(x^*y)^{\lambda-4}xy \tag{2.7}$$

при $(x,y)\in Q(1)$. Следовательно, по лемме 1

$$\|Z^\lambda{}_n\|=O_\lambda(1)\qquad\text{при}\qquad \lambda\geqslant 2. \tag{2.8}$$

Замечание 1. Вероятно, что более точным методом можно (2.8) установить и при $\lambda=1$.

Оценим теперь порядок приближения оператора (2.1) через полный модуль гладкости функции двух переменных.

Теорема 1. *Для любой $f\in L_p$ и для четных λ справедлива*

$$\|f-Z^\lambda{}_n f\|_p=O_{\lambda,p}\left\{\omega_\lambda\left(f;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)_p\right\}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть

$$T_n=\sum_{k,l=0}^{n}A_{kl} \tag{2.10}$$

— тригонометрический полином наилучшего приближения двух переменных функции $f\in L_p$ и $E^p{}_n(f)$ — соответствующее наилучшее приближение. Ввиду линейности оператора (2.1) имеем

$$\|f-Z^\lambda{}_n f\|_p\leqslant\|f-T_n\|_p+\|T_n-Z^\lambda{}_n T_n\|_p+\|Z^\lambda{}_n T_n-Z^\lambda{}_n f\|_p\leqslant$$
$$\leqslant(1+\|Z^\lambda{}_n\|)E^p{}_n(f)+\|T_n-Z^\lambda{}_n T_n\|_p. \tag{2.11}$$

Из (2.1) получим

$$T_n-Z^\lambda{}_n T_n=(n\sqrt{2})^{-\lambda}\sum_{k,l=0}^{n}(k^2+l^2)^{\lambda/2}A_{kl},$$

откуда по формуле Ньютона (λ — четное!) и из равенства

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\mu\partial y^\nu}A_{kl}=(-1)^{\lambda/2}k^\mu l^\nu A_{kl}$$

($\lambda=\mu+\nu$; μ,ν — четные) следует

$$T_n-Z^\lambda{}_n T_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda/2}n^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda/2}\binom{\lambda/2}{\nu}\frac{\partial^\lambda}{\partial x^{2\nu}\partial y^{\lambda-2\nu}}T_n.$$

Для нормы получаем

$$\|T_n - Z^\lambda{}_n T_n\|_p \leqslant C_1(\lambda) n^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{\lambda/2} \left\| \frac{\partial^\lambda}{\partial x^{2\nu}\, \partial y^{\lambda-2\nu}} T_n \right\|_p. \tag{2.12}$$

Норму смешанных производных тригонометрического полинома можно оценить через смешанные модули гладкости (см. [6], стр. 126 и 232). Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial^\lambda}{\partial x^{2\nu}\, \partial y^{\lambda-2\nu}} T_n \right\|_p \leqslant C_2(\lambda) n^\lambda \omega_{2\nu,\lambda-2\nu}\left(T_n;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)_p \tag{2.13}$$

и вместо (2.12) получим

$$\|T_n - Z^\lambda{}_n T_n\|_p \leqslant C_3(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\lambda/2} \omega_{2\nu,\lambda-2\nu}\left(T_n;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)_p. \tag{2.14}$$

М. Ф. Тиман [8] показал, что для каждой $f \in L_p$ имеет место порядковое соотношение

$$\omega_\lambda(f;\ \delta_1,\ \delta_2)_p \asymp \sum_{\mu+\nu=\lambda} \omega_{\mu,\nu}(f;\ \delta_1,\ \delta_2)_p, \tag{2.15}$$

в силу чего из (2.14) имеем

$$\|T_n - Z^\lambda{}_n T_n\|_p \leqslant C_4(\lambda)\, \omega_\lambda\left(T_n;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)_p. \tag{2.16}$$

По теореме Джексона (см. [6], стр. 288) для функций двух переменных

$$E^p{}_n(f) \leqslant C_5(\lambda, p) \sum_{\nu=1}^{2} \omega^{(\nu)}{}_\lambda\left(f;\ \frac{1}{n+1}\right)_p,$$

где $\omega^{(\nu)}{}_\lambda(f;\delta)_p$ — частный модуль гладкости. Но имеет место неравенство (см. [6], стр. 126)

$$\omega^{(\nu)}{}_\lambda(f;\ \delta)_p \leqslant \omega_\lambda(f;\ \delta,\ \delta)_p \quad \text{при} \quad \nu = 1,\ 2,$$

и, следовательно,

$$E^p{}_n(f) \leqslant C_6(\lambda, p)\, \omega_\lambda\left(f;\ \frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n+1}\right)_p.$$

По свойству модуля гладкости

$$\omega_\lambda(f;\ \alpha\delta,\ \alpha\delta)_p \leqslant (1+\alpha)^\lambda \omega_\lambda(f;\ \delta,\ \delta)_p \quad \text{при} \quad \alpha > 0 \tag{2.17}$$

получим окончательно

$$E^p{}_n(f) \leqslant C_7(\lambda, p)\, \omega_\lambda\left(f;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)_p. \tag{2.18}$$

Теперь в силу (2.18) для полного модуля гладкости имеем

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(T_n;\ 1/n,\ 1/n)_p &\leqslant \omega_\lambda(f;\ 1/n,\ 1/n)_p + \omega_\lambda(f - T_n;\ 1/n,\ 1/n)_p \leqslant \\ &\leqslant \omega_\lambda(f;\ 1/n,\ 1/n)_p + C_8(\lambda) E^p{}_n(f) \leqslant \\ &\leqslant C_9(\lambda,\ p)\, \omega_\lambda(f;\ 1/n,\ 1/n)_p, \end{aligned}$$

и утверждение теоремы следует из неравенств (2.11), (2.8), (2.18) и (2.16).

Пусть функция $g \in L_p$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{k,l=0}^{\infty}{}' \frac{1}{k^* l} A_{kl}, \tag{2.19}$$

где штрих означает, что $k^* l \neq 0$.

Теорема 2. *Если $f \in L_p$ и существует функция g с рядом Фурье* (2.19), *то для нечетных $\lambda \geqslant 3$ справедлива оценка*

$$\|f - Z^\lambda{}_n f\|_p = O_{\lambda,p}\left\{\omega_{\lambda+1}\left(f; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p + n\omega_{\lambda+1}\left(g; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p\right\}.$$

Доказательство. Непосредственно из определений оператора (2.1) и функции g при нечетных λ следует равенство

$$Z^{\lambda+1}{}_n f - Z^{\lambda+1}{}_n Z^\lambda{}_n f =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{(\lambda+1)/2} n^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{(\lambda+1)/2} \binom{(\lambda+1)/2}{\nu} \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial x^{2\nu}\, \partial y^{\lambda+1-2\nu}} Z^{\lambda+1}{}_n g. \tag{2.20}$$

Ввиду линейности оператора (2.1)

$$\|f - Z^\lambda{}_n f\|_p \leqslant \|f - Z^{\lambda+1}{}_n f\|_p + \|Z^\lambda{}_n (f - Z^{\lambda+1}{}_n f)\|_p +$$
$$+ \|Z^{\lambda+1}{}_n f - Z^\lambda{}_n Z^{\lambda+1}{}_n f\|_p. \tag{2.21}$$

Так как $\lambda + 1$ — четное число, то по теореме 1 и условию (2.8)

$$\|Z^\lambda{}_n (f - Z^{\lambda+1}{}_n f)\|_p \leqslant \|Z^\lambda{}_n\|\, \|f - Z^{\lambda+1}{}_n f\|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_1(\lambda, p)\, \omega_{\lambda+1}\left(f; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p. \tag{2.22}$$

Чтобы оценить последнее слагаемое неравенства (2.21), используем равенство (2.20), оценки (2.13) и (2.15), свойство модуля гладкости и наконец ещё раз теорему 1. Тогда получаем цепь неравенств

$$\|Z^{\lambda+1}{}_n f - Z^\lambda{}_n Z^{\lambda+1}{}_n f\|_p \leqslant C_2(\lambda)\, n^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{(\lambda+1)/2} \left\| \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial x^{2\nu}\, \partial y^{\lambda+1-2\nu}} Z^{\lambda+1}{}_n g \right\|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_3(\lambda)\, n\omega_{\lambda+1}\left(Z^{\lambda+1}{}_n g; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant$$
$$\leqslant C_4(\lambda)\, n \left\{\omega_{\lambda+1}\left(g; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p + \|g - Z^{\lambda+1}{}_n g\|_p\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_5(\lambda, p)\, n\omega_{\lambda+1}\left(g; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_p.$$

Последняя оценка вместе с неравенствами (2.21) и (2.22) завершает доказательство.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 аналогично случаю одной переменной, которое принадлежит М. Ф. Тиману [7].

§ 3. Методы приближения общего вида

В этом параграфе покажем несколько улучшенным методом, по сравнению с работой [3], что и некоторые другие операторы вида (1.4) имеют порядок приближения типа (2.9).

Пусть множество параметров r (вещественное или натуральное) оператора (1.4) имеет точку сгущения ϱ и $V_\rho(k, l)$ — некоторая окрестность точки ϱ (в общем зависимая от k и l). Для функции

$$G(k*l, r) = 1 - g_{k*l}(r) \tag{3.1}$$

сформулируем следующее условие аналитичности.

Условие А. *Пусть существует натуральное число λ и функции $c_\nu(r)$, причем $c_\lambda(r) \neq 0$, такие, что в фиксированной точке $r \in V_\rho(k, l)$ функция (3.1) разложима в степенной ряд.*

$$G(k*l, r) = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\,(k^2+l^2)^\nu \tag{3.2}$$

с бесконечным радиусом сходимости.

Определим функцию

$$|G|(k*l, r) = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)|\,(k^2+l^2)^\nu, \tag{3.3}$$

тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть функция (3.1) удовлетворяет условию А. Тогда для тригонометрических полиномов*

$$T_m = \sum_{k,l=0}^{m} A_{kl} \tag{3.4}$$

и

$$T^G{}_m = \sum_{k,l=0}^{m} G(k*l, r)\,A_{kl}$$

имеет место неравенство

$$\|T^G{}_m\|_p \leqslant |G|(m, r)\,\|T_m - Z^{2\lambda}{}_m T_m\|_p$$

для $r \in V_\rho(m) = \bigcap_{k,l=0}^{m} V_\rho(k, l)$.

Доказательство. Фиксируем $r \in V_\rho(m)$. Из условия А и определения оператора (2.1) следует цепь равенств

$$T^G{}_m = \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r) \sum_{k,l=0}^{m} (k^2+l^2)^\nu A_{kl} =$$
$$= \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\,(2m^2)^\nu \sum_{k,l=0}^{m} \left(\frac{k^2+l^2}{2m^2}\right)^\nu A_{kl} =$$
$$= \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} c_\nu(r)\,(2m^2)^\nu (T_m - Z^{2\nu}{}_m T_m),$$

откуда получим

$$\|T^G{}_m\|_p \leqslant \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} |c_\nu(r)|\,(2m^2)^\nu \|T_m - Z^{2\nu}{}_m T_m\|_p.$$

Установим теперь при $\lambda \leqslant \nu$ неравенство

$$\|T_m - Z^{2\nu}{}_m T_m\|_p \leqslant \|T_m - Z^{2\lambda}{}_m T_m\|_p, \tag{3.5}$$

которое вместе с предыдущим неравенством и с определением (3.3) завершает доказательство.

По определению (2.1) через неравенство

$$\left\| \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^{\mu}\, \partial y^{\nu}} T_m \right\|_p \leqslant m^{\mu+\nu} \| T_m \|_p$$

(см. [6], стр. 232) получаем следующую цепь:

$$\| T_m - Z^{2\nu}{}_m T_m \|_p = \left\| \sum_{k,l=0}^{m} \left(\frac{k^2+l^2}{2m^2} \right)^{\nu} A_{kl} \right\|_p =$$

$$= \frac{1}{2m^2} \left\| \sum_{\mu=0}^{1} \frac{\partial^2}{\partial x^{2\mu}\, \partial y^{2-2\mu}} \left(T_m - Z^{2(\nu-1)}{}_m T_m \right) \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \| T_m - Z^{2(\nu-1)}{}_m T_m \|_p.$$

Отсюда по индукции вытекает (3.5). Лемма доказана.

Предположим, что для оператора (1.4) выполнено условие ограниченности:

$$\| U_r \| = O(1), \tag{3.6}$$

но может и случиться, что условие (3.6) следует из ограниченности соответственного оператора одной переменной.

Докажем теперь теорему, которая обобщает оценку (2.9) для операторов (1.4), удовлетворяющих предположению (3.6) и условию A.

Теорема 3. *Пусть имеет место* (3.6) *и для функции* (3.1) *выполнено условие* A. *Если существует положительная функция* $m(r) \to \infty$ *при* $r \to \varrho$ *такая, что окрестность* $V_\rho(m(r))$ *не зависит от* r *и*

$$|G|(m(r), r) = O(1), \tag{3.7}$$

то для каждой функции $f \in L_p$ *справедлива оценка*

$$\| f - U_r f \|_p = O_{\lambda, p} \left\{ \omega_{2\lambda} \left(f;\ \frac{1}{m(r)},\ \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\} \tag{3.8}$$

при любом r *из множества параметров.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\| f - U_r f \|_p \leqslant (1 + \| U_r \|) E^p{}_m(f) + \| T^G{}_m \|_p,$$

откуда по лемме 2, учитывая (3.6), находим

$$\| f - U_r f \|_p \leqslant C_1 E^p{}_m(f) + |G|(m, r) \, \| T_m - Z^{2\lambda}{}_m T_m \|_p. \tag{3.9}$$

Так как T_m — полином наилучшего приближения, то в силу теоремы Джексона, т. е. (2.18),

$$\omega_\lambda \left(T_m;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m} \right)_p \leqslant C_2(\lambda, p)\, \omega_\lambda \left(f;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m} \right)_p$$

и, следовательно, из теоремы 1

$$\| T_m - Z^{2\lambda}{}_m T_m \|_p \leqslant C_3(\lambda, p)\, \omega_{2\lambda} \left(f;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m} \right)_p .$$

Последнее неравенство подставим в оценку (3.9), применяем еще раз теорему Джексона и наконец, в силу предположений о функции $m(r)$, следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть для функции*

$$G^{0}(k*l,r)=1-g_{k*l}(r)/\{1+O(m^{-2\lambda}(r))\}$$

выполнены условие A *и соотношение* (3.7). *Тогда в предположениях теоремы* 3 *имеет место оценка* (3.8).

Доказательство. Пусть функция $1-G^{0}$ определяет оператор $U^{0}{}_{r}$ вида (1.4). Тогда

$$\|f-U_{r}f\|_{p}\leqslant\|f-U^{0}{}_{r}f\|_{p}+\|U^{0}{}_{r}f-U_{r}f\|_{p}. \tag{3.10}$$

Известно (см. [6], стр. 489), что норма оператора (1.4) имеет вид

$$\|U_{r}\|=\frac{4}{\pi^{2}}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big|\sum_{k,l=0}^{\infty}2^{-\varkappa}g_{k*l}(r)\cos ku\cos lv\Big|\,du\,dv.$$

Следовательно, из (3.6) вытекает

$$\|U^{0}{}_{r}\|=O(1)$$

и для $U^{0}{}_{r}$ имеет место теорема 3.

По определению оператора $U^{0}{}_{r}$ получим

$$\|U^{0}{}_{r}f-U_{r}f\|_{p}=O\{m^{-2\lambda}(r)\|U_{r}f\|_{p}\}. \tag{3.11}$$

Докажем теперь одно свойство модуля гладкости. Пусть $\delta_{1}>\delta_{2}>0$, тогда по свойству (2.17)

$$\omega_{\lambda}(h;\ \delta_{1},\ \delta_{1})_{p}\leqslant(1+\delta_{1}/\delta_{2})^{\lambda}\omega_{\lambda}(h;\ \delta_{2},\ \delta_{2})_{p}\leqslant$$
$$\leqslant2^{\lambda}(\delta_{1}/\delta_{2})^{\lambda}\omega_{\lambda}(h;\ \delta_{2},\ \delta_{2})_{p},$$

откуда

$$(1/\delta_{1})^{\lambda}\omega_{\lambda}(h;\ \delta_{1},\ \delta_{1})_{p}\leqslant2^{\lambda}(1/\delta_{2})^{\lambda}\omega_{\lambda}(h;\ \delta_{2},\ \delta_{2})_{p}.$$

Если $\omega_{\lambda}(h;\ \delta,\ \delta)_{p}\not\equiv0$, то из последнего неравенства видно, что существует такая константа $C_{\lambda}>0$, для которой при $\delta>0$

$$(1/\delta)^{\lambda}\omega_{\lambda}(h;\ \delta,\ \delta)_{p}\geqslant C_{\lambda}.$$

Доказанное свойство допускает для (3.11) при $h=f/\|f\|_{p}$ оценку

$$\|U^{0}{}_{r}f-U_{r}f\|_{p}=O_{\lambda}\left\{\omega_{2\lambda}\left(f;\ \frac{1}{m(r)},\ \frac{1}{m(r)}\right)_{p}\right\},$$

которая вместе (3.10) закончит доказательство.

Пусть теперь операторы U'_{r} и U''_{r} вида (1.4) определены соответственно функциями

$$G'(k*l,r)=\sum_{\nu=\lambda_{1}}^{\infty}c'_{\nu}(r)\,(k^{2}+l^{2})^{\nu} \tag{3.12}$$

и

$$G''(k*l,r)=\sum_{\nu=\lambda_{2}}^{\infty}c''_{\nu}(r)\,(k^{2}+l^{2})^{\nu}, \tag{3.13}$$

причем предполагаем, что множество параметров r для обоих операторов одно и то же. Обозначим через E тождественный оператор.

Следствие 2. *Пусть операторы U'_r и U''_r удовлетворяют условиям теоремы 3 при функции $m(r)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|(U'_r-E)^s(U''_r-E)^t f\|_p = O_{\lambda,p}\left\{\omega_{2\lambda}\left(f, \frac{1}{m(r)}, \frac{1}{m(r)}\right)_p\right\}$$

для всех $f \in L_p$ и где $\lambda = s\lambda_1 + t\lambda_2$, а s, t — любые натуральные числа.

Доказательство. Пусть сперва $s = t = 1$. Произведение Коши рядов (3.12) и (3.13) имеет вид

$$G(k*l,r) = \sum_{\nu=\lambda_1+\lambda_2}^{\infty} c_\nu(r)\,(k^2+l^2)^\nu, \tag{3.14}$$

где

$$c_\nu(r) = \sum_{i=\lambda_1+\lambda_2}^{\nu} c'_{\nu+\lambda_1-i}(r)\cdot c''_{i-\lambda_1}(r), \tag{3.15}$$

и (3.14) определяет оператор $(U'_r-E)(U''_r-E)$, для которого надо проверить выполнение условия теоремы 3.

Разложение в ряд (3.14) имеет место в окрестности $V'_\rho(k,l)\cap V''_\rho(k,l)$, где $V'_\rho(k,l)$ и $V''_\rho(k,l)$ — соответственные окрестности для рядов (3.12) и (3.13), причем радиус сходимости ряда (3.14) бесконечен, так как ряды (3.12) и (3.13) с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, условие А выполнено.

Рассмотрим соотношение (3.7). По определению (3.3) имеем

$$|G|(k*l,r) = \sum_{\nu=\lambda_1+\lambda_2}^{\infty} |c_\nu(r)|\,(k^2+l^2)^\nu$$

и

$$|G'|(k*l,r)\cdot|G''|(k*l,r) = \sum_{\nu=\lambda_1+\lambda_2}^{\infty} c'''_\nu(r)\,(k^2+l^2)^\nu,$$

где

$$c'''_\nu(r) = \sum_{i=\lambda_1+\lambda_2}^{\nu} |c'_{\nu+\lambda_1-i}(r)|\cdot|c''_{i-\lambda_1}(r)|,$$

откуда по (3.15) получаем

$$|G| \leqslant |G'|\cdot|G''|.$$

Последнее неравенство гарантирует справедливость соотношения (3.7) для $|G|$.

Итак, для $\|(U'_r-E)(U''_r-E)f\|_p$ имеет место оценка (3.8) с $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$.

Для любых s и t доказательство проводится аналогично.

Замечание 3. Оказывается, что для обобщения теоремы 2 необходимо доказать следующее неравенство, которое сходно с неравенством Бернштейна для сопряженного полинома.

Пусть T_m — тригонометрический полином вида (3.4) и

$$T^*_m = \sum_{k,l=0}^{m}{}' \frac{1}{k^*l} A_{kl},$$

тогда

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{1} \frac{\partial^2}{\partial x^{2\nu}\, \partial y^{2-2\nu}} T^*_m \right\|_p \leqslant 2m \, \|T_m\|_p.$$

§ 4. Применения

Рассмотрим некоторые методы приближения, для которых применима теорема 3.

1. Метод Рогозинского определяем функцией

$g_{k^*l}(n) = \cos[\pi(k^*l)/(2n+1)]$ при $0 \leqslant k, l \leqslant n$ и $g_{k^*l}(n) = 0$ при $k > n$ или $l > n$.

Ограниченность оператора Рогозинского следует из леммы 1. Положим $\psi_n = 2n+1$ и $\Psi(x, y) = \cos \pi(x^*y)$. Выражение $D^2\Psi$ можно найти непосредственно, но удобнее использовать степенный ряд функции Ψ. Имеем

$$\Psi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu}}{(2\nu)!} (x^*y)^{2\nu}$$

и по формуле (2.7)

$$D^2\Psi(x, y) = xy \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu}}{(2\nu)!} \nu(\nu-1)\,(x^*y)^{2\nu-4},$$

которое ограничено в квадрате $Q(1/2)$.

Условие А имеет вид:

$$G(k^*l, n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2\nu} \frac{(k^2+l^2)^\nu}{2^\nu (2\nu)!}$$

и

$$V_\infty(k, l) = \{n : n \geqslant k, l\}.$$

Следовательно, условия теоремы 3 выполнены для $m(n) = n$ и значит метод Рогозинского имеет порядок приближения $\omega_2(f;\ 1/n,\ 1/n)_p$.

2. Функция $g_0(n) = 1$,

$$g_{k^*l}(n) = \frac{(k^*l)\pi}{2n} \cot \frac{(k^*l)\pi}{2n}$$

при $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$, $k^*l \neq 0$ и $g_{k^*l}(n) = 0$ при $k \geqslant n$ или $l \geqslant n$ определяет метод приближения Фавара.

Ограниченность оператора Фавара доказывается, как и в примере 1.

Рассмотрим условие А, которое здесь в виде:

$$V_\infty(k, l) = \{n : n > k, l\}$$

и

$$G(k^*l, n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\nu} \frac{(k^2+l^2)^\nu}{2^\nu},$$

где B_ν — числа Бернулли. Условия теоремы 3 выполнены для $m(n) = n$ и, следовательно, методы Рогозинского и Фавара имеют одинаковый порядок приближения.

Поскольку ограниченность операторов Стеклова и Гаусса — Вейерштрасса вида (1.4) не известна (лемма 1 не применима, так как множество параметров r непрерывно), то отметим только, что для этих методов условия теоремы 3 выполнены аналогичным образом соответственному методу одной переменной (см. [3], § 3).

Подробнее рассмотрим оператор Валле—Пуссена вида (1.4), хотя и для этого ограниченность не известна.

3. Величина k^*l является нецелым числом, поэтому естественно определить метод Валле—Пуссена через гамма-функцию:

$$g_{k^*l}(n) = \Gamma^2(n) / \{\Gamma(n - k^*l)\,\Gamma(n + k^*l)\} \tag{4.1}$$

при $0 \leqslant k, l < n$ и $g_{k^*l}(n) = 0$ при $k \geqslant n$ или $l \geqslant n$.

По формуле Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{\nu}\right) e^{-\frac{a}{\nu}} \qquad (a > -1),$$

где C — константа Эйлера, получим

$$g_{k^*l}(n) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{k^*l}{n+\nu}\right)^2\right]. \tag{4.2}$$

Последнее выражение допускает установить для (4.1) при $0 \leqslant k,\ l \leqslant n^{1/2}$ асимптотическое равенство

$$g_{k^*l}(n) = \exp\left\{-\frac{(k^*l)^2}{n}\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.3}$$

при помощи которого можно проверить выполнение условия следствия 1 теоремы 3.

Логарифмируя выражение (4.2) и учитывая неравенства

$$\ln(1 - x) = -x + O(x^2) \qquad (0 < x < 1)$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\nu)^4} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(n+x)^4} = \frac{1}{3n^3}$$

получаем

$$\ln g_{k^*l}(n) = -(k^*l)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\nu)^2} + O\left\{\frac{(k^*l)^4}{n^3}\right\}.$$

Имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\nu)^2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(n+x)^2}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+\nu)^2}-\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{(n+x)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{n}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\nu)^2(n+\nu+1)}=$$

$$=\frac{1}{n}+O\left(\int_0^{\infty}\frac{dx}{(n+x)^3}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно,

$$\ln g_{k^*l}(n)=-\frac{(k^*l)^2}{n}+O\left\{\left(\frac{k^*l}{n}\right)^2\right\}+O\left\{\frac{(k^*l)^4}{n^3}\right\}$$

и при $0\leqslant k, l\leqslant n^{1/2}$ имеем

$$\ln g_{k^*l}(n)=-\frac{(k^*l)^2}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда получаем (4.3).

Литература

1. Гаймназаров Г., Тиман М. Ф., Уклонения периодических функций двух переменных от некоторых полиномов. Докл. АН ТаджССР, 1972, **15**, 6—8.
2. Жижиашвили Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси, 1969.
3. Кивинукк А., О порядке приближения периодических функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 238—246.
4. Пономаренко В. Г., Тиман М. Ф., Конструктивные характеристики некоторых классов периодических функций многих переменных. Сиб. матем. ж., 1970, **11**, 1107—1120.
5. Пономаренко Ю. А., Некоторые вопросы суммирования кратных рядов Фурье (Кандидатская диссертация). Днепропетровск, 1965.
6. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
7. Тиман М. Ф., О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда. Докл. АН СССР, 1968, **181**, 29—34.
8. Тиман М. Ф., О разностных свойствах функций многих переменных. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, **33**, 667—676.
9. Marcinkiewicz, J., Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier. Collected Papers, Warszawa, 1964, 527—538.
10. Taberski, R., Approximation of real functions by the double trigonometric polynomials. Roczn. Polsk. towarz. mat., Ser. 1, 1972, **16**, 113—123.

Поступило
22 II 1973

ÜHEST KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONIDE LÄHENDUSMEETODIST

A. Kivinukk

Resümee

Üldtuntud on ühe muutuja funktsioonide lineaarsed lähendusmeetodid, mis on saadud antud funktsiooni Fourier' rea kordajate korrutamisel sobivate koonduvusteguritega.

Käesolevas töös on näidatud, et ühe muutuja funktsiooni lähendusmeetodist võib saada mitme muutuja funktsiooni lähendusmeetodi, kui ühe muutuja funktsiooni Fourier' rea koonduvusteguris summeerimisindeks asendada vastava kordse Fourier' rea indeksite ruutkeskmisega. Saadud lähendusmeetod (1.4) omab analoogilisi lähenduskiirusi vastava ühe muutuja juhuga.

ÜBER EIN APPROXIMATIONSVERFAHREN FÜR FUNKTIONEN VON ZWEI VERÄNDERLICHEN

A. Kivinukk

Zusammenfassung

Die linearen Summierungsverfahren der Fourierreihe als Approximationsverfahren für Funktionen von einer Veränderlichen sind gut bekannt.

Im vorliegenden Artikel ist ein neues Summierungsverfahren (1.4) der Doppelfourierreihe (1.1) gebaut, das aus dem Approximationsverfahren von einer Veränderlichen stammt. Auch ist gezeigt, daß die Methode (1.4) einen ähnlichen Approximationsgrad besitzt, wie das korrespondierende Approximationsverfahren von einer Veränderlichen.

О ПОЛЯХ ПОЧТИ СУММИРУЕМОСТИ

В. Соомер

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

В настоящей статье рассматриваются матричные методы $A=(a_{nk})$ в виде преобразования последовательности в последовательность [1]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k. \tag{1}$$

Линейный непрерывный функционал φ на пространстве ограниченных последовательностей называется *банаховым пределом*, если

1° $\varphi \geqslant 0$,
2° $\varphi(e)=1, \quad e=\{1, 1, 1, \ldots\}$,
3° $\varphi(\sigma x)=\varphi(x), \quad \sigma(x)=\{\xi_{k+1}\}$.

Пусть M — множество всех банаховых пределов.

Ограниченная последовательность $x=\{\xi_k\}$ называется *почти сходящейся к пределу* s, если $\varphi(x)=s$ для любого $\varphi \in M$.

Последовательность $x=\{\xi_k\}$ является почти сходящейся тогда и только тогда, когда (см. [5])

$$\lim_p \frac{1}{p+1}(\xi_n+\ldots+\xi_{n+p})=s$$

равномерно относительно n. Предел в смысле почти сходимости последовательности x обозначается через $f\text{-}\lim x$.

Обозначим через f пространство всех почти сходящихся последовательностей. Множество всех последовательностей $x=\{\xi_k\}$, для которых $y=\{\eta_n\}\in f$, обозначим через f_A и назовем *полем почти суммируемости* метода A. Через c и m обозначим соответственно пространства сходящихся и ограниченных последовательностей, через c_A — поле суммируемости метода A, через m_A — поле ограниченности метода A.

Метод A называется *методом типа* $c\to f$, если $c \subset f_A$, и *методом типа* $f\to f$, если $f\subset f_A$. Достаточные и необходимые усло-

---

[1] Для краткости $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}$, $\sup\limits_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ обозначаются соответственно через $\sum\limits_k$, $\lim\limits_n$, $\sup\limits_n$ (или $\sum_k$, $\lim_n$, $\sup_n$).

вия для того, чтобы метод А являлся методом типа $c \to f$ или $f \to f$, приведены в работе [2].

В настоящей статье изучаются некоторые свойства полей почти суммируемости методов типа $c \to f$.

В § 3 доказывается, что поле почти суммируемости метода A является пересечением полей суммируемости некоторых матричных методов.

В § 4 изучается поле почти суммируемости методов типа $c \to f$. Доказывается аналог теоремы Целлера—Виланского (см. [9]) для методов типа $c \to f$.

§ 2. Некоторые вспомогательные результаты

В статье [8] доказано, что поле почти суммируемости метода A является FK-пространством с полунормами

$$p_0(x) = \sup_n \left|\sum_k a_{nk}\xi_k\right|, \tag{2}$$

$$p_{2n+1}(x) = |\xi_n|, \tag{3}$$

$$p_{2n+2}(x) = \sup_m \left|\sum_{k=0}^m a_{nk}\xi_k\right|, \tag{4}$$

а если в f_A рассматривать метрику, определенную полунормами

$$q_{3r}(x) = |\xi_r|, \tag{5}$$

$$q_{3r+1}(x) = \sup_m \left|\sum_{k=0}^m a_{rk}\xi_k\right|, \tag{6}$$

$$q_{3r+2}(x) = \sup_p \left|\sum_k \left(\frac{1}{p+1}\sum_{i=r}^{r+p} a_{ik}\right)\xi_k\right|, \tag{7}$$

то f_A является линейным метрическим пространством.

Вообще метрика, определенная полунормами p_n сильнее, чем метрика определенная полунормами q_r (см. [8]).

Если последовательность $\psi(r) = (e_0 + \ldots + e_r) - e$, где $e_i = \{\delta_{ik}\}$, слабо сходится к нулю в FK-пространстве X, то пространство X называется *конулевым*; остальные FK-пространства называются *корегулярными*.

Матричный метод суммирования A называем *f-конулевым*, если f_A — конулевое пространство и f-корелугярным, если f_A — корегулярное пространство.

Имеет место следующая (см. [7])

Теорема 1. *Пусть X и Y суть FK-пространства и $X \subset Y$. Тогда*

(i) *если X — конулевое пространство, то и Y — конулевое пространство;*

(ii) *если Y — конуловое пространство и X замкнуто в Y, то X — конулевое пространство.*

Пусть A — матричный метод суммирования, $a_k = f\text{-}\lim a_{nk}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $a = f\text{-}\lim \Sigma_k a_{nk}$.

Число $\varrho(A) = a - \Sigma a_k$ называется *характеристикой* метода A.

Рассмотрим на f_A функционалы

$$g(x) = \tau f\text{-}\lim A_n x + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k,$$

где $\sum_n |\tau_n| < \infty$. Тогда

$$g(\psi(r)) = \tau(f\text{-}\lim \sum_{k=0}^{r} a_{nk} - a) + \sum_n \tau_n \sum_{k=r+1}^{\infty} a_{nk}.$$

Следовательно, получаем

$$\lim_r g(\psi(r)) = \sum_k a_k - a.$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы метод типа $c \to f$ был f-конулевым, необходимо, чтобы*

$$\varrho(A) = 0. \tag{8}$$

§ 3. Поле почти суммируемости как пересечение полей суммируемости

Пусть A — некоторый метод суммирования. Почти суммируемость последовательности x к пределу s методом A можно рассматривать, как суммируемость этой последовательности к тому же пределу матрицами $A(n)$ равномерно относительно n, где

$$A(n) = (a^n{}_{pk}), \qquad a^n{}_{pk} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} a_{ik}. \tag{9}$$

Через $\mathfrak{T}$ обозначим семейство всех матриц $T = (t_{pk})$ таких, что $t_{pk} = a^n{}_{pk}$ при некотором n, т. е. p-ый ряд матрицы T равен p-ому ряду матрицы $A(n)$ при некотором n.

Лемма 1. *Пусть последовательность $x \in m_A$ и M — множество всех банаховых пределов последовательности $y = \{\eta_n\}$ с $\eta_n = \{A_n(x)\}$. Тогда существуют матрицы $T = (t_{pk}) \in \mathfrak{T}$ и $S = (s_{pk}) \in \mathfrak{T}$ такие, что*

$$\sup_{\varphi \in M} \varphi(y) = \lim_p \sum_k t_{pk}\xi_k,$$

$$\inf_{\varphi \in M} \varphi(y) = \lim_p \sum_k s_{pk}\xi_k.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 статьи [3].

Пусть $q_p = \sup_n (p+1)^{-1}(\eta_n + \ldots + \eta_{n+p})$, тогда $\lim_p q_p = \sup_{\varphi \in M} \varphi(y)$ (см. [4]). Соответственно каждому $p = 0, 1, 2, \ldots$ выбираем числа $n(p)$ такие, что

$$\left| q_p - \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \eta_{n(p)+i} \right| < \frac{1}{p+1}.$$

Но

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\eta_{n(p)+i}=\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\sum_{k}a_{n(p)+i}\xi_k=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k}\sum_{i=0}^{p}a_{n(p)+i,k}\xi_k=\sum_{k}\alpha^{n(p)}{}_{pk}\xi_k.$$

Числа t_{pk} выбираем следующим образом: $t_{pk}=\alpha^{n(p)}{}_{pk}$. Очевидно, что $T=(t_{pk})\in\mathfrak{T}$ и

$$\lim_{p}\sum_{k}t_{pk}\xi_k=\sup_{\varphi\in M}\varphi(y).$$

На основании леммы 1 нетрудно доказать, что имеет место

Теорема 3. *Если f_A — поле почти суммируемости метода A и c_T — поля суммируемости методов $T\in\mathfrak{T}$, то*

$$f_A=\bigcap_{T\in\mathfrak{T}}c_T.$$

Доказательство. Если $x\in f_A$, то существует $\lim_p \Sigma_k \alpha^n{}_{pk}\,\xi_k$ равномерно относительно n, где $\alpha^n{}_{pk}$ определены равенством (9). Если теперь $T=(t_{pk})\in\mathfrak{T}$, то для каждого p существует $n(p)$ такой, что $t_{pk}=\alpha^{n(p)}{}_{pk}$, но $\lim_p \Sigma_k \alpha^{n(p)}{}_{pk}$ существует равномерно относительно $n(p)$, значит $x\in c_T$.

Предположим теперь, что $x\in m_A$, а $x\notin f_A$. На основании леммы 1 найдутся методы $T\in\mathfrak{T}$ и $S\in\mathfrak{T}$ такие, что

$$\lim_{p}S_p(x)=\inf_{\varphi\in M}\varphi(y),\qquad \lim_{p}T_p(x)=\sup_{\varphi\in M}\varphi(y),$$

где M — множество всех банаховых пределов последовательности $y=\{A_nx\}$. Определим матрицу $U=(u_{nk})$ следующим образом:

$$u_{2p,k}=t_{pk},\qquad u_{2p+1,k}=s_{pk},$$

Тогда $U\in\mathfrak{T}$, но

$$\liminf_{p\to\infty}U_p(x)=\inf_{\varphi\in M}\varphi(y)<\sup_{\varphi\in M}\varphi(y)=\limsup_{p\to\infty}U_n(x),$$

т. е. $x\notin c_U$.

§ 4. Поле почти суммируемости метода типа $c\to f$

Целлер и Виланский доказали следующую теорему (см. [9]).

Теорема 3. *Пусть метод A консервативен. Следующие условия эквивалентны*

c замкнуто в c_A, (10)

m замкнуто в m_A, (11)

$m\cap c_A=c.$ (12)

Нетрудно доказать аналог этой теоремы для некоторого класса методов типа $c\to f$.

Теорема 4. *Пусть A — метод типа $c \to f$ такой, что существует* $\lim_n a_{nk} = a_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *и* $f_A \cap m \subset \mathrm{cl}\, c$. *Тогда следующие условия эквивалентны*

$$c \text{ замкнуто в } f_A, \tag{13}$$

$$m \text{ замкнуто в } m_A, \tag{14}$$

$$f_A \cap m = c. \tag{15}$$

Замечание 1. Условие $\lim_n a_{nk} = a_k$ применяется при доказательстве (13)$\Rightarrow$(14), условие $f_A \cap m \subset \mathrm{cl}\, c$ — при доказательстве (13)$\Rightarrow$(15); (14)$\Rightarrow$(13) и (15)$\Rightarrow$(13), причем без ограничений для метода A.

Доказательство теоремы. **1.** Покажем, что из (14) вытекает (13). Если m замкнуто m_A, то F-топология в m (топология, определенная полунормами (2)—(4), эквивалентна топологии, определенной нормой

$$\|x\| = \sup |\xi_k|. \tag{16}$$

Но так как $c \subset m$, то это имеет место и для c. Отсюда вытекает, что c замкнуто.

2. (13)$\Rightarrow$(14): Допустим, что m не замкнуто. Если $\lim_n a_{nk} = a_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то можно таким же образом, как при доказательстве теоремы Целлера—Виланского, построить последовательность $s = \{s_k\}$ такую, что

$$\sup_k |s_k| = 1,$$

$p_k(s) < \varepsilon$, $k < b$, b — некоторое число.
Значит, F-топология в c слабее, чем топология, определенная нормой (16), и c также незамкнуто в пространстве f_A.

3. (13)$\Rightarrow$(15): Если A — метод типа $c \to f$ и $m \cap f_A \subset \mathrm{cl}\, c$, то имеет место

$$c \subset m \cap f_A \subset \mathrm{cl}\, c.$$

Но из (13) тогда вытекает

$$m \cap f_A = c.$$

Замечание 2. Рассмотрим единичный матричный метод суммирования $E = (\delta_{pk})$. Тогда $f_E = f$, $c_E = c$. Значит, c замкнуто в f_E, но $f_E \cap m \supset c$. Отсюда вытекает, что для каждого метода типа $c \to f$ условия (13) и (15) не эквивалентны.

4. (15)$\Rightarrow$(13): Пусть c незамкнуто в f_A. Так как f_A является FK-пространством, то из хорошо известной теоремы Мейера—Кенига [6] вытекает, что $c \subset f_A \cap m$, но $c \neq f_A \cap m$.

Следствие 1. *Если A — метод типа $c \to f$ и f-конулевой, то он почти суммирует ограниченную расходящуюся последовательность.*

Доказательство. Пространство f_A конулевое и $c \subset f_A$. Если c замкнуто в f_A, то на основании теоремы 1 вытекает, что

c должно быть тоже конулевым, но это не так. Значит, c незамкнуто в пространстве f_A и из теоремы 4 следует, что $c \subset \subset f_A \cap m$, $\quad c \neq f_A \cap m$.

Следствие 2. *Каждый f-конулевой матричный метод почти суммирует неограниченную последовательность.*

Доказательство. Если f_A конулевое пространство и $f_A \subset m$, то на основании теоремы 1 пространство m должно быть конулевым, но известно, что это не так. Значит, включение $f_A \subset m$ не имеет места.

Матричный метод A называется *сильно регулярным*, если он регулярен и $\lim_n \Sigma_k |a_{nk} - a_{nk+1}| = 0$. В работе [2] доказано, что никакой сильно регулярный метод не может почти суммировать всех ограниченных последовательностей. Этот результат нетрудно обобщить.

Теорема 5. *Метод A является методом типа $m \to f$, т. е. $m \subset f_A$, только тогда, когда $\varrho(A) = 0$.*

Доказательство. Для того, чтобы метод A являлся методом типа $m \to f$, необходимо, чтобы (см. [2])

$$\lim_p \sum_k \left[\frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} a_{ik} - a_k \right] = 0$$

равномерно относительно n. Но

$$\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} a_{ik} = \lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{i=n}^{n+p} \sum_k a_{ik} = a.$$

Приведем еще одну теорему о почти суммировании неограниченной последовательности.

Рассмотрим методы A, при которых в f_A существует не почти сходящаяся последовательность $s = \{s_k\}$ такая, что $s \in m \cap \mathrm{cl}\, f$.

Теорема 6. *Если f — корегулярный матричный метод A почти суммирует ограниченную не почти сходящуюся последовательность $s = \{s_k\}$ и $s \in \mathrm{cl}\, f$ в пространстве f_A, то метод A почти суммирует и неограниченную последовательность.*

Доказательство. Если $s \in \mathrm{cl}\, f$ в f_A, то найдется последовательность $\{s^r\} \subset f$ такая, что

$$\lim_r s^r = s \text{ в пространстве } f_A. \tag{16}$$

Но f_A является FK-пространством и, если верно $f_A \subset m$; то условие (16) выполняется и в пространстве m (в FK-пространствах из сходимости в подпространстве следует сходимость во всем пространстве). Известно, что пространство f замкнуто в пространстве m, т. е. условие (16) в пространстве m не имеет места, значит, включение $f_A \subset m$ неверно.

Эта теорема является аналогом теоремы доказанной Юримяэ [1] о суммировании неограниченной последовательности обобщенным матричным методом суммирования.

Литература

1. Юримяэ, Э., Об обобщений теоремы Мазура—Орлича. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 44—49.
2. Duran, P., Infinite matrices and almost convergence. Math. Z, 1972, **128**, 75—83.
3. Duran, P., Strongly regular matrices and almost convergence. Duke Math. J. 1972, **39**, № 3, 497—502.
4. Jerison, M., The set of all generalized limits of bounded sequences, Canad. J. Math., 1957, **9**, 75—89.
5. Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta. math., 1958, **80**, 167—190.
6. Meyer-Köning, W., Zeller, K., *FK*-Räume und Lückenperfektheit. Math. Z., 1962, **78**, 143—148.
7. Snyder, A., Conull and coregular *FK*-spaces. Math. Z., 1965, **90**, 376—381.
8. Stieglitz, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklärte Konvergenzbegriffe. Stuttgart, 1971.
9. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, 501—509.

Поступило
8 XI 1973

PEAAEGU SUMMEERUVUSVÄLJADEST

V. Soomer

Resümee

Selles artiklis vaadeldakse jada-jada teisenduse (1) kujul antud maatriksmenetlusi. Jada $x = \{\xi_k\}$ nimetatakse *peaaegu summeeruvaks* menetlusega $A = (a_{nk})$, kui valemiga (1) määratud jada $y = \{\eta_n\}$ on peaaegu koonduv. Kõik maatriksmenetlusega A peaaegu summeeruvad jadad moodustavad menetluse A *peaaegu summeeruvusvälja*. On näidatud, et maatriksmenetluse peaaegu summeerimisväli avaldub teatavate maatriksmenetluste summeerimisväljade ühisosana. Teatavate lisaeelduste puhul on tõestatud Wilansky—Zelleri (vt. [8]) teoreemi analoog, samuti on uuritud tõkestamata jada peaaegu summeeruvust.

ON ALMOST SUMMABILITY FIELDS

V. Soomer

Summary

In this note are considered sequences-to-sequences summability methods (1) The sequence $x = \{\xi_k\}$ is called *almost summable* by the matrix method $A = (a_{nk})$ if the sequence $y = \{\eta_n\}$, defined by (1), is almost convergent. The set of all sequences which are almost summable by method A, is called the *almost summability field* of method A. In § 3 it is shown, that the almost summability field of matrix method A is the intersection of summability fields of certain matrix methods. In § 4 an analogue of the well known Wilansky—Zeller theorem is proved and the almost summability of unbounded sequences is considered.

МНОЖИТЕЛИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ПОЧТИ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

В. Соомер

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть m — пространство ограниченных последовательностей. Последовательность $x \in m$ называется *почти сходящейся*, если все банаховы пределы этой последовательности равны между собой (см. [4]).

Лоренц [4] доказал, что необходимым и достаточным условием для почти сходимости последовательности $x = \{x_k\}$ является существование предела [1]

$$u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{k=n}^{n+p} x_k.$$

Следуя [3], обозначим этот предел через $f\text{-}\lim x$ и множество всех почти сходящихся последовательностей через f.

Множество f является замкнутым несепарабельным подпространством пространства m с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

Пусть A — метод суммирования с матрицей (a_{nk}) преобразования

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k \tag{1}$$

ряда Σx_k в последовательность $\{y_n\}$.

Ряд Σx_k называется *A_f-суммируемым* или *почти A-суммируемым*, если существует $f\text{-}\lim y_n$.

Рассмотрим следующие утверждения:

1° ряд Σx_k является A-суммируемым,

2° ряд Σx_k является A_f-суммируемым,

3° ряд $\Sigma \varepsilon_k x_k$ почти сходится,

4° ряд $\Sigma \varepsilon_k x_k$ сходится.

---

[1] Для краткости $\lim\limits_{n\to\infty}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, $\sup\limits_{0\leqslant k<\infty}$ обозначаются соответственно через $\lim_n$, $\sum\limits_k$ $\sup_k$.

Через $u\text{-}\lim_p S_{np}$ обозначаем предел $\lim_p S_{np}$, если S_{np} сходится равномерно относительно n.

Числа ε_k называем *множителями сходимости типа* (A, E_f), если из 1° следует 3°; *множителями сходимости типа* (A_f, E_f), если из 2° следует 3°; и, наконец, *множителями сходимости типа* (A_f, E), если из 2° следует 4°. Множества множителей сходимости изучаемых типов будем обозначать соответственно через (A, E_f), (A_f, E_f), (A_f, E).

В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы числа ε_k были множители сходимости вышеуказанных типов. При некоторых ограничениях на метод A найдены и эффективные достаточные условия для множителей сходимости.

Кроме того, изучается и вопрос о совпадении множителей почти сходимости с множителями сходимости, т. е. множителями типа (A, E) (см. [1], стр. 148).

§ 2. Некоторые вспомогательные теоремы

Пусть $\mathfrak{G} = (g_{nk})$ — матрица преобразования

$$y_n = \sum_k g_{nk} x_k \tag{2}$$

последовательности в последовательность.

Имеют место следующие теоремы (см. [3]).

Теорема 1. *Преобразование* (2) *переводит все сходящиеся последовательности* $\{x_k\}$ *в почти сходящиеся последовательности* $\{y_n\}$ *тогда и только тогда, если*

$$\exists f\text{-}\lim g_{nk} = g_k, \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{3}$$

$$\exists f\text{-}\lim \sum_k g_{nk} = g, \tag{4}$$

$$\sum_k |g_{nk}| = O(1). \tag{5}$$

Теорема 2. *Преобразование* (2) *переводит все почти сходящиеся последовательности в почти сходящиеся последовательности тогда и только тогда, если выполнены условия*[2] (3), (4), (5) *и*,

$$u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_k \Big| \sum_{i=n}^{n+p} \Delta (g_{ik} - g_k) \Big| = 0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Преобразование* (2) *переводит все почти сходящиеся последовательности в сходящиеся последовательности тогда и только тогда, если выполнено условие* (5) *и*

$$\exists \lim_n g_{nk} = g_k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{7}$$

$$\exists \lim_n \sum_k g_{nk} = g, \tag{8}$$

$$\lim_n \sum_k |\Delta (g_{nk} - g_k)| = 0. \tag{9}$$

---

[2] Напомним, что
$\Delta (g_{nk} - g_k) = g_{nk} - g_{nk+1} - g_k + g_{k+1}$.

§ 3. Множители сходимости типов (A, E_f), (A_f, E), (A_f, E_f)

Если метод A обратим, то нетрудно найти множители сходимости изучаемых нами типов. Обозначим поле суммируемости метода A через c_A и поле почти суммируемости метода A через f_A, т. е.

$$f_A = \{x; \{A_n(x)\} \in f\}.$$

Рассмотрим треугольный матричный метод $C = (\gamma_{nk})$, где

$$\gamma_{nk} = \begin{cases} \varepsilon_k, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 4. *Числа ε_n являются множителями сходимости типа (A, E_f) тогда и только тогда, когда $c_A \supset f_C$; типа (A_f, E_f) тогда и только тогда, когда $f_A \supset f_C$; типа (A_f, E) тогда и только тогда, когда $f_A \supset c_C$.*

Пусть теперь A — нормальный матричный метод с $A^{-1} = (\eta_{nk})$ и $\mathfrak{G} = (g_{nk})$ — такой матричный метод, что $g_{nk} = \eta_{kk}\varepsilon_k + \ldots + \eta_{nk}\varepsilon_n$. Аналогично, как в [1], стр. 151—152, доказываются следующие теоремы.

Теорема 5. *Числа ε_n являются множителями сходимости типа (A, E_f) тогда и только тогда, когда матрица $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Теорема 6. *Числа ε_n являются множителями сходимости типа (A_f, E_f) тогда и только тогда, когда матрица $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.

Теорема 7. *Числа ε_n являются множителями сходимости типа (A_f, E) тогда и только тогда, когда матрица $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям теоремы* 3.

З а м е ч а н и е 1. Из условий (3) (или (7)) и (5) вытекает (ср. [1], стр. 13)

$$\sum |g_k| < \infty, \tag{10}$$

где $g_k = f\text{-}\lim_n g_{nk}$ (или соответственно $g_k = \lim_n g_{nk}$). В обоих случаях из (10) получаем необходимое условие

$$\sum |g_n| < \infty, \qquad g_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \eta_{\nu n}\varepsilon_\nu. \tag{11}$$

Положив в условии (5) индекс $k = n$, получаем

$$g_{nn} = \varepsilon_n \eta_{nn} = O(1),$$

откуда, ввиду нормальности метода A

$$\varepsilon_n = O(a_{nn}). \tag{12}$$

Условия (11) и (12) — эффективные необходимые условия.

Далее, находим эффективные необходимые и достаточные условия при некоторых ограничениях для метода A.

Пусть $A = (a_{nk})$ — произвольный нормальный метод, удовлетворяющий условию

$$\sum n D_n < \infty, \tag{13}$$

где $D_n = \sup_k |a_{k+n,k+n}\eta_{k+n,k}|$.

Теорема 8. *Если метод $A=(a_{nk})$ нормален и удовлетворяет условию* (13), *то для того, чтобы числа ε_n были множителями сходимости типа (A, E_f), необходимо и достаточно выполнение условий* (11), (12) *и*

$$\{\sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n \eta_n\} \in f, \qquad \eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}. \tag{14}$$

Доказательство. На основании теоремы 5 надо проверить, удовлетворяет ли матрица $\mathfrak{G}$ условиям (3), (4) и (5).

Из условий (12) и (13) следует

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} |\eta_{\nu k} \varepsilon_\nu| = O(1) \sum D_k < \infty,$$

т. е. g_k существуют.

При помощи аналогичных рассуждений, как в [1], стр. 166, или [2], можно доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} |g_k - g_{nk}| = O(1) \sum_{\nu} \nu D_\nu$$

и

$$|g_{nk}| \leqslant |g_k - g_{nk}| + |g_k|,$$

т. е. из условий (11), (12) и (13) вытекает (5).
И наконец, так как

$$\sum_{k=0}^{n} g_{nk} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu \eta_{\nu k} = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu \eta_\nu$$

условие (4) превращается в (14).

В [2] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы числа ε_n были множителями сходимости типа (A, E), где A — нормальный метод, удовлетворяющий условию (13). Эти условия отличаются от условий теоремы 8 только тем, что вместо почти сходимости ряда $\Sigma \varepsilon_n \eta_n$ требуется сходимость этого ряда.

Имеет место

Следствие 1. *Множители сходимости типа (A, E_f) являются множителями сходимости типа (A, E), если выполнено условие*

$$\varepsilon_n \eta_n = O(c_n), \tag{15}$$

где последовательность $\{c_n\}$ удовлетворяет условию: для любого $\sigma > 0$ найдется последовательность индексов $k_n \uparrow \infty$ с $k_{n+1} - k_n \uparrow \infty$, такая, что $|c_n| < \sigma$ при $n \neq k_n$.

Доказательство сводится к нахождению условий, когда из почти сходимости ряда $\Sigma \varepsilon_n \eta_n$ следует его сходимость. Для этого, как показал Лоренц (см. [4], теорема 6), необходимо и достаточно выполнение условия (15).

Рассмотрим теперь множители сходимости типа (A_f, E). Имеет место

Теорема 9. *Пусть A — нормальный матричный метод, удовлетворяющий условию* (13). *Для того, чтобы числа ε_n были* *множителями сходимости типа* (A_f, E), *необходимо и достаточно выполнение условий* (11) *и*

$$\varepsilon_n a_{nn} = o(1). \tag{16}$$

Доказательство. В [1], стр. 169, показано, что необходимыми достаточными условиями для того, чтобы числа ε_n были множителями сходимости типа (A_0, E) являются именно условия (11) и (16). Так как $f \subset m$, достаточность очевидна.

Необходимость условия (11) доказана замечанием 1. Далее, метод $\mathfrak{G}$ должен удовлетворять условиям теоремы 3. Поэтому, положив в (9) индекс $k = n$, получаем

$$\lim_n |g_{nn} - g_{nn+1} - g_n + g_{n+1}| = 0.$$

Отсюда выводим необходимость условия (16), ибо $g_{n,n+1} = 0$, ввиду труегольности A, и $\lim_n g_n = 0$, ввиду (11).

Следствие 2. *Если A — нормальный матричный метод, удовлетворяющий условию* (13), *то* $(A_f, E) = (A_0, E)$.

Нахождение эффективных условий для того, чтобы числа ε_n были множителями сходимости типа (A_f, E_f) сложнее, чем в предыдущих случаях.

На оснований теорем 6 и 8 можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 10. *Множители сходимости типа* (A, E_f) *являются множителями сходимости типа* (A_f, E_f) *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$u\text{-}\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=n}^{n+p} \sum_{\nu=i+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu \right| = 0. \tag{17}$$

Условие (17) соответствует условию (6), так как

$$\Delta(g_{nk} - g_k) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu.$$

Найти эффективные условия для того, чтобы имело место условие (17), довольно трудно. Далее будут найдены достаточные условия для множителей сходимости типа (A_f, E_f) и рассматриваться множители сходимости типа (A_f, E_f) для некоторых конкретных методов.

Теорема 11. *Для того, чтобы множители сходимости типа* (A, E_f) *были множителями сходимости типа* (A_f, E_f), *достаточно выполнение условия*

$$f\text{-}\lim \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu \right| = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь нормальные матричные методы с

$$\Delta\eta_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad n > k + \varrho, \tag{19}$$

где ϱ — некоторое натуральное число, и

$$\eta_{nk} = O(\eta_{nn}). \tag{20}$$

Имеет место следующая

Теорема 12. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условиям* (13), (19) *и* (20). *Для того, чтобы множители сходимости типа (A, E_f) были множители сходимости типа (A_f, E_f), достаточно выполнение условия*

$$f\text{-}\lim |\varepsilon_n/a_{nn}| = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Из условий (19) и (20) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu = \sum_{k=n+1-\rho}^{n} \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu \Big| =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=n}^{n+\rho} (n-\nu+\varrho+1) |\eta_{\nu\nu}\varepsilon_\nu| \leqslant$$

$$\leqslant O(1)\varrho \sum_{\nu=n}^{n+\rho} |\varepsilon_\nu/a_{\nu\nu}|. \tag{22}$$

Из условий (21) и (22) следует выполнение условия (18).

Если A — метод, удовлетворяющий условию (19), то условие (17) принимает вид

$$u\text{-}\lim_\rho \frac{1}{p+1} \sum_{k=n+1-\rho}^{n} \Big| \sum_{i=n}^{n+\rho} \sum_{\nu=i+1}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu \Big| +$$

$$+ u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big| \sum_{i=k}^{k+\rho} \sum_{\nu=i}^{k+\rho} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu + \sum_{i=n}^{k-1} \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu \Big| = 0. \tag{23}$$

Пусть теперь $A = E$. Тогда условия (11) и (12) принимают соответственно вид

$$\sum |\Delta\varepsilon_n| < \infty, \tag{24}$$

$$\varepsilon_n = O(1). \tag{25}$$

Из (24) вытекает (25).

Так как в данном случае $\varrho = 2$, то условие (23) принимает вид

$$u\text{-}\lim_p \Big[\frac{1}{p+1} 4 |\Delta\varepsilon_{n+1}| + \frac{1}{p+1} \sum_{k=n}^{n+p} \Big| \sum_{i=n}^{k-1} \Delta(\Delta\varepsilon_k) + 2\Delta\varepsilon_{k+1} \Big| \Big] = 0. \tag{26}$$

Если выполнены условия (24) и (25), то из условия (26) вытекает, что

$$u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \big| (k-n)(\Delta\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_{k+1}) \big| = 0. \tag{27}$$

Итак, доказана

Теорема 13. *Для того, чтобы числа ε_n были множителями сходимости типа (E_f, E_f), необходимо и достаточно выполнение условий* (24) *и* (27).

Если A — метод взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ с $P_n \neq 0$, то $\varrho = 3$, и величины η_{nk} известны (см. [1], стр. 108).

Вычисляя $\Delta(g_{nk}-g_k)$, убеждаемся в том, что условия (11), (12) и (23) принимают соответственно вид

$$\sum_n |P_n \Delta (\Delta \varepsilon_n / p_n)| < \infty, \tag{28}$$

$$P_n \varepsilon_n = O(p_n), \tag{29}$$

$$u\text{-}\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| (n-k) \Delta \left(P_k \left(\Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right) + \Delta \left(P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Delta \left(P_k \frac{\varepsilon_{k+2}}{p_{k+1}} \right) \right| = 0. \tag{30}$$

Нетрудно проверить, что условие (15) выполнено. Следовательно, имеет место следующая

Теорема 14. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями сходимости типа* (P_f, E_f), *необходимо и достаточно выполнение условий* (28), (29) *и* (30).

Приведем еще одну теорему о совпадении множителей сходимости типов (A, E_f) и (A, E).

Теорема 15. *Если нормальный метод* $A = (a_{nk})$ *таков, что* $a_{n0} = 1$, *то* $(A, E_f) = (A, E)$.

Доказательство. Если $a_{n0} = 1$, то $\eta_n = \delta_{n0}$ (см. [1], стр. 51) и условие (14) выполнено.

Из теоремы 15 вытекает: $(E, E_f) = (E, E)$.

Литература

1. Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
2. Кангро, Г., Об обобщений одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—968.
3. Duran, P., Infinite matrices and almost convergence. Math. Z., **128**, 1972, 75—83.
4. Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math., 1948, **80**, 167—190.
5. Schaefer, P., Matrix transformations of almost convergent sequences. Math. Z., **112**, 1969, 321—325.

Поступило
22 XI 1973

KOONDUVUSTEGURID PEAAEGU KOONDUVATE RIDADE JAOKS

V. Soomer

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse rida-jada teisenduse (1) kujul antud maatriksmenetlusi. Rida $\sum x_k$ nimetatakse peaaegu summeeruvaks maatriksmenetlusega A ehk A_f-summeeruvaks, kui jada (1) on peaaegu koonduv.

Kompleksarve ε_n nimetatakse koonduvusteguriteks tüüpi (A_f, E), kui rea $\sum x_k$ A_f-summeeruvusest järeldub rea $\sum \varepsilon_k x_k$ koonduvus. Analoogiliselt defineeritakse koonduvustegurid tüüpi (A_f, E_f) ja (A, E_f).

Käesolevas artiklis vaadeldakse ülalnimetatud tüüpi koonduvustegureid.

Juhul, kui menetlus A rahuldab tingimust (13), on leitud tarvilikud ja piisavad efektiivsed tingimused, et kompleksarvud ε_n oleksid koonduvustegurid eespool mainitud tüüpidest.

CONVERGENCE FACTORS FOR ALMOST CONVERGENT SERIES

V. Soomer

Summary

In this note are considered series-to-sequence summability methods (1). The series $\sum x_k$ is said to be almost summable by the matrix method A or A_f-summable if the sequence (1) is almost convergent.

The complex numbers ε_n are said to be the convergence factors of (A_f, E) type, if for any A_f-summable series $\sum x_k$ the series $\sum \varepsilon_k x_k$ is almost convergent. The convergence factors of (A_f, A_f) and (A, E_f) types are defined analogically.

In the present paper we have considered all types of the above-mentioned convergence factors.

In the case (13) is fulfilled, the necessary and sufficient conditions for all above-mentioned types of convergence factors were found.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ

Е. Ворошнина

Кружок СНО при кафедре математического анализа

Одной из основных проблем теории интегралов с бесконечными пределами является решение вопроса о том, сходится или расходится данный интеграл. Соответствующая проблема для рядов дала толчок для развития теории множителей суммируемости. Позже, обобщая сходные понятия на случай расходящихся интегралов, появились попытки обобщить теоремы, дающие условия для множителей суммируемости интегралов. Так, например, Харди [13, 14] в 1911, Коссар [12] в 1941 г., Бозанкет (см. [8]) в 1945 г. исследовали множители суммируемости интегралов для метода Чезаро. Позже Боруэйн продолжил исследование суммируемости интегралов методом Чезаро. Так, в [7] им получены условия для множителей ограниченности и абсолютной суммируемости, в [8] обобщены последние для метода Чезаро произвольного порядка, а в [9] получил необходимые и достаточные условия для абсолютной суммируемости. Далее, Боруэйн рассмотрел частный случай [11] и суммируемость [10] интеграла Стилтьеса. Упомянем здесь также Сарджента [16], получившего условия для абсолютной суммируемости того же метода, которые Питерсон [15] обобщил для произвольного метода суммирования интегралов. В 1969 г. Х. Тюрнпу [4] нашел достаточные условия для того, чтобы некоторая функция была множителем суммируемости для метода суммирования интегралов P^λ, введенного ниже.

Пусть a — функция двух вещественных переменных, измеримая по Лебегу на каждом конечном прямоугольнике из $\mathbf{R}^2$, такая, что $a(t, \tau) = 0$ при $\tau > t \geqslant 0$. Интеграл

$$\int_0^\infty x(\tau)\,d\tau \qquad (0.1)$$

называется *абсолютно A-суммируемым* (коротко *A_l-суммируемым*), если

$$\int_0^\infty |(Ax)(t)|\,dt < \infty,$$

где

$$(Ax)(t) \equiv A(x; t) = \int_0^t a(t, \tau)\,x(\tau)\,d\tau. \qquad (0.2)$$

Интеграл (0.1) называется *A-ограниченным*, если

$$\int_0^t (Ax)(s)\,ds = O(1),$$

т. е.

$$\int_0^t \alpha(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = O(1),$$

где

$$\alpha(t,\tau) = \int_\tau^t a(s,\tau)\,ds.$$

Пусть функция P определена на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям:

a) $P(t) > 0$ при любом t;

b) $P(t) \to \infty$ при $t \to \infty$;

c) существует $\dfrac{d^\lambda P(t)}{dt^\lambda}$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant k+1$, где k — фиксированное натуральное число;

d) производная[1] $0 \neq P' \in A_{[0,T]}$.

Метод A суммирования интегралов, определенный функцией $a = \pi^\lambda$, где

$$\pi^\lambda(t,\tau) = \left[1 - \frac{P(\tau)}{P(t)}\right]^\lambda \tag{0.3}$$

и λ — фиксированное натуральное число, называется *методом Рисса порядка* λ и обозначается через P^λ.

Для метода P^λ ввиду (0.2) имеем $\alpha = p^\lambda$, где

$$p^\lambda(t,\tau) = \frac{\lambda P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}\,[P(t) - P(\tau)]^{\lambda-1} P(\tau).$$

Дадим определение множителей суммируемости интегралов (0.1).

Функция ε называется *множителем суммируемости типа* $(P^\lambda{}_l, B_l)$, если для каждого $P^\lambda{}_l$-суммируемого интеграла (0.1) интеграл

$$\int_0^\infty \varepsilon(\tau)\,x(\tau)\,d\tau \tag{0.4}$$

является B_l-суммируемым, и пишут $\varepsilon \in (P^\lambda{}_l, B_l)$.

Функция ε называется *множителем суммируемости типа* $(P^\lambda{}_o, B_l)$, если для каждого P^λ-ограниченного интеграла (0.1) интеграл (0.4) является B_l-суммируемым, и пишут $\varepsilon \in (P^\lambda{}_o, B_l)$.

Заметим, что в [4] были найдены условия для того, чтобы функция ε, удовлетворяющая некоторым условиям, была множителем суммируемости интегралов для метода суммирования P^λ. В настоящей статье доказываются сходные теоремы, не-

---

[1] Через $A[0,T]$ обозначим класс абсолютно непрерывных функций, определенных на $[0,T]$ при любом $T > 0$.

Условие d) выполнено, если, например, $k \geqslant 1$.

сколько ослабляя требования, накладываемые на функцию' ε и избавляясь от некоторых условий для случая $\varepsilon \in (P^{\lambda}{}_{o}, P^{\varkappa}{}_{l})$, когда $\varkappa = \lambda + 1$. Мы доказываем эти теоремы непосредственным методом, так как развитие теории множителей суммируемости рядов показала, что важны не только результаты, но и методы их доказательств. Действительно (см. [1]), в теории множителей суммируемости рядов создано целый ряд новых методов, например, непосредственный метод, метод Шура, метод Пейеримхоффа, метод Мура—Кангро и др.

§ 1. Вспомогательные результаты

1. Пусть v — некоторая функция двух переменных t, τ, имеющая по аргументу τ производную порядка $k+1$. Рассмотрим операторы D_i, введя их рекуррентым соотношением:

$$D_i(v,\tau) = \begin{cases} v(t,\tau) & \text{при} \quad i=0, \\ \dfrac{1}{P'(\tau)} \dfrac{\partial D_{i-1}[v(t,\tau),\tau]}{\partial\tau} & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant k+1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Докажем некоторые нужные нам соотношения.

Лемма 1.1. *Для операторов D_i имеет место формула:*

$$D_i(u\cdot v,\tau) = \sum_{n=0}^{i} C^n{}_i D_{i-n}(u,\tau) D_n(v,\tau).$$

Доказательство нетрудно провести методом математической индукции.

Лемма 1.2. *Пусть B — некоторый метод суммирования интегралов, определенный в виде* (0.2) *функцией b, удовлетворяющей при некотором $s \geqslant 0$ условию*

$$\left.\frac{\partial^s b(t,\tau)}{\partial\tau^s}\right|_{\tau=t} = 0. \tag{1.2}$$

Тогда имеют место равенства:

$$D_s\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]\Big|_{\tau=t} = 0, \tag{1.3}$$

$$D_s[b(t,\tau),\tau]|_{\tau=t} = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Используя определение операторов D_i, можно писать:

$$D_0\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]\Big|_{\tau=t} = \left.\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)}\right|_{\tau=t} = \frac{b(t,t)}{D(t)} = 0.$$

Из равенства

$$D_1[b(t,\tau),\tau] = D_0\left[\frac{\dfrac{\partial b(t,\tau)}{\partial\tau}}{P'(\tau)},\tau\right]$$

следует соотношение

$$D_i[b(t,\tau),\tau]=D_{i-1}\left[\frac{\frac{\partial b(t,\tau)}{\partial\tau}}{P'(\tau)},\ \tau\right].$$

Далее, используя формулу (1.1), лемму 1.1 и последнее равенство, имеем:

$$D_s\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]=\sum_{\nu=0}^{s}C^{\nu}{}_sD_{s-\nu}\left[\frac{1}{P(\tau)},\tau\right]D_\nu[b(t,\tau),\tau]=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{s}C^{\nu}{}_sD_{s-\nu}\left[\frac{1}{P(\tau)},\tau\right]D_{\nu-1}\left[\frac{\frac{\partial b(t,\tau)}{\partial\tau}}{P(\tau)},\tau\right]=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{s}C^{\nu}{}_sD_{s-\nu}\left[\frac{1}{P(\tau)},\tau\right]\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\nu-1}C^{\mu}{}_{\nu-1}D_{\nu-1-\mu}\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]D_\mu\left[\frac{\partial b(t,\tau)}{\partial\tau},\tau\right]=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{s}C^{\nu}{}_sD_{s-\nu}\left[\frac{1}{P(\tau)},\tau\right]\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\nu-1}C^{\mu}{}_{\nu-1}D_{\nu-1-\mu}\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]D_{\mu-1}\left[\frac{\frac{\partial^2 b(t,\tau)}{\partial\tau}}{P'(\tau)}\right].$$

Проделав $s+1$ раз аналогичные действия, получаем следующее

$$D_s\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]=\sum_{\nu=0}^{s}C^{\nu}{}_sD_{s-\nu}\left[\frac{1}{P(\tau)},\tau\right]\sum_{\mu=0}^{\nu-1}C^{\mu}{}_{\nu-1}D_{\nu-1-\mu}\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]\ldots$$

$$\ldots\sum_{\rho=0}^{2}C^{\rho-1}{}_2D_{2-(\rho-1)}\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]\left\{D_1\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]\frac{\partial^{s-1}b(t,\tau)}{\partial\tau^{s-1}}+\right.$$

$$\left.+D_0\left[\frac{1}{P'(\tau)},\tau\right]\frac{\partial^s b(t,\tau)}{\partial\tau^s}\right\}.$$

Ввиду (1.2), имеем далее:

$$D_s\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]\Bigg|_{\tau=t}=0.$$

Равенство (1.4) доказывается аналогично.

Лемма 1.3. *Для метода суммирования* P^λ *при* $0\leqslant i<\lambda$ *имеет место формула:*

$$D_i\left[\frac{p^\lambda(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]=$$

$$=(-1)^i\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-i)\frac{P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-1-i}.$$

Доказательство нетрудно провести методом индукции. Действительно,

$$D_i\left[\frac{p^\lambda(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]=\frac{1}{P'(\tau)}D'_{i-1}\left[\frac{p(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]=$$

$$=(-1)^i\lambda(\lambda-1)\dots$$

$$\dots(\lambda-i)\frac{P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-1-i}.$$

Лемма 1.4. *Для метода суммирования P^λ при $0\leqslant i<\lambda$ имеет место формула:*

$$D_i[p^\lambda(t,\tau),\tau]=$$

$$=\frac{P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}\{(-1)^i\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-i)[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i-1}P(\tau)+$$

$$+(-1)^{i-1}i\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-i+1)[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i}\}.$$

Лемма 1.5. *Для метода суммирования P^λ при $0\leqslant i<\lambda$ имеет место формула:*

$$\int\limits_\tau^\infty\left|D_i\left[\frac{p^\lambda(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]\right|dt=\frac{i!}{P^{i+1}(\tau)}.$$

Доказательство. Используя лемму 1.3, интегрированием по частям, получаем:

$$\int\limits_\tau^\infty\left|D_i\left[\frac{p^\lambda(t,\tau)}{P(\tau)},\tau\right]\right|dt=$$

$$=\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-i)\left\{[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-1-i}\int\limits_\tau^\infty\frac{dP(s)}{P^{\lambda+1}(s)}\right|_\tau^\infty+$$

$$+\frac{\lambda-1-i}{\lambda}\int\limits_\tau^\infty[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i-2}\frac{P'(t)}{P^\lambda(t)}dt\Bigg\}=$$

$$=(\lambda-1)\dots(\lambda-i-1)\int\limits_\tau^\infty[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i-2}\frac{P'(t)}{P^\lambda(t)}dt,$$

где последнее равенство имеет место в силу условий b). Аналогичным образом, проинтегрировав последний интеграл по частям $\lambda-i-1$ раз, получим требуемое.

Лемма 1.6. *Для метода суммирования* P^λ *при* $0 \leqslant i < \lambda$ *имеет место неравенство:*

$$\int_\tau^\infty \left| D_i[p^\lambda(t,\tau),\tau] \right| dt \leqslant \frac{2i!}{P^i(\tau)}.$$

Доказательство. Применяя лемму 1.4 к левой части доказываемого неравенства, имеем:

$$\int_\tau^\infty \left| D_i[p^\lambda(t,\tau),\tau] \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i)\int_\tau^\infty \left| \frac{P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i-1}P(\tau) \right| dt +$$

$$+\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)\,i\int_\tau^\infty \left| \frac{P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}[P(t)-P(\tau)]^{\lambda-i} \right| dt.$$

Интегрируя по частям первый интеграл справа $\lambda - i - 1$ раз, второй $\lambda - i$ раз, получим требуемую формулу.

Лемма 1.7. *Для метода суммирования* P^λ *при* $\lambda > k$ *имеют место равенства:*

$$\left.\frac{\partial^i p^\lambda(t,\tau)}{\partial \tau^i}\right|_{\tau=t} = 0, \qquad \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{1.5}$$

а при $\lambda = k$

$$\left.\frac{\partial^i p^\lambda(t,\tau)}{\partial \tau^i}\right|_{\tau=t} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \\ (-1)^{\lambda-1}\lambda!\,\dfrac{[P'(t)]^\lambda}{P^\lambda(t)}, & \text{если} \quad i = k-1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Доказательство. Утверждения леммы 1.7 очевидны, если рассмотреть вид функции $p^\lambda(t,\tau)$.

2. Введем далее некоторые обозначения.

$$A^\lambda(x,t) = \int_0^t \pi^\lambda(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{A}^\lambda(x,t) = \int_0^t p^\lambda(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{1.8}$$

$$B^\lambda(\varepsilon x; t) = \int_0^t b(t,\tau)\,x(\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau. \tag{1.9}$$

Рекуррентным соотношением введем величины:

$$I_\lambda(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad \lambda = 0, \\ \displaystyle\int_0^t P'(\tau)\,I_{\lambda-1}(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad 0 < \lambda \leqslant k; \end{cases} \tag{1.10}$$

$$J_\lambda(x,t)=\begin{cases}\int\limits_0^t P(\tau)x(\tau)d\tau, & \text{если} \quad \lambda=1,\\ \int\limits_0^t P'(\tau)J_{\lambda-1}(\tau)d\tau, & \text{если} \quad 1<\lambda\leqslant k.\end{cases} \tag{1.11}$$

Далее, пусть функция ε такова, что

$$\exists \frac{d^{\lambda-1}\varepsilon}{dt^{\lambda-1}}\in A_{[0,T]} \qquad (\lambda\leqslant k+1). \tag{1.12}$$

Приведем ниже некоторые соотношения между введенными величинами, которые доказываются применением интегрирования по частям нужное число раз.

Имеют место формулы

$$A^\lambda(x,t)=\frac{\lambda!\,P'(t)}{P^{\lambda+1}(t)}J_\lambda(x,t) \qquad (0<\lambda\leqslant k); \tag{1.13}$$

$$\mathfrak{A}^\lambda(x,t)=\frac{\lambda!}{P^\lambda(t)}I_\lambda(x,t) \qquad (0<\lambda\leqslant k); \tag{1.14}$$

$$B^\lambda(\varepsilon x;t)=\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{n=0}^{i-1}(-1)^{i-1}C^n{}_{i-1}J_i(x,t)D_{i-1-n}\left[\frac{b(t,t)}{P(t)},t\right]\times$$
$$\times D_n[\varepsilon(t),t]+$$
$$+\int\limits_0^t A^\lambda(x;\tau)\delta(t,\tau)d\tau, \tag{1.15}$$

где

$$\delta(t,\tau)=\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}P^{\lambda+1}(\tau)\sum_{n=0}^{\lambda}C^n{}_\lambda D_{\lambda-n}\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)}\right]D_n[\varepsilon(\tau),\tau]; \tag{1.16}$$

$$B^\lambda(\varepsilon x;t)=\sum_{i=0}^{\lambda}\sum_{n=0}^{i}(-1)^i I_i(x,t)C^n{}_iD_{i-n}[b(t,t),t]D_n[\varepsilon(t),t]+$$
$$+\int\limits_0^t \mathfrak{A}^\lambda(x(\tau),t)\gamma(t,\tau)d\tau, \tag{1.17}$$

$$\gamma(t,\tau)=\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda!}P^\lambda(t)P'(t)\sum_{n=0}^{\lambda+1}C^n{}_{\lambda+1}D_{\lambda+1-n}[b(t,\tau),\tau]D_n[\varepsilon(\tau),\tau]. \tag{1.18}$$

§ 2. Множители суммируемости типа ($P^k{}_l$, B_l)

Для исследования вопроса, когда функция ε, для которой верно (1.12), является множителем суммируемости типа ($P^\lambda{}_l$, B_l), необходимо и достаточно выяснить, когда интеграл (0.4) является B_l-суммируемым, что равносильно вопросу, когда интеграл

$$\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_0^t b(t,\tau)\varepsilon(\tau)x(\tau)d\tau\right|dt<\infty. \tag{2.1}$$

В силу обозначения (1.9) имеем:

$$\int_0^\infty |B^\lambda(\varepsilon x; t)|\, dt < \infty, \qquad (2.2)$$

где подинтегральное выражение можно рассмотреть в виде (1.15). Исследование абсолютной сходимости интеграла от двойной суммы из (1.15) затруднено, так как об абсолютной сходимости величин $J_i(x,t)$ при $i < \lambda$ судить трудно. Поэтому наложим некоторые ограничения на метод B.

Пусть метод B удовлетворяет условиям (1.2) при $s = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$. Тогда имеет место лемма 1.2, двойная сумма из (1.15) обращается в нуль и соотношение (1.15) принимает следующий вид:

$$B^\lambda(\varepsilon x; t) = \int_0^t A^\lambda(x,\tau)\,\delta(t,\tau)\, d\tau.$$

Используя последнее выражение, заменим необходимое и достаточное условие (2.2) ему равносильным следующим условием: для любого $M > 0$

$$\int_0^M \left| \int_0^t \mathfrak{A}^\lambda(x,\tau)\,\delta(t,\tau)\, d\tau \right| dt = O(1). \qquad (2.3)$$

В силу абсолютной A-суммируемости интеграла (0.1) и того, что $\varepsilon \in (P^\lambda{}_l,\ B_l)$ интеграл

$$\int_0^M |A^\lambda(x,\tau)|\, d\tau = O(1). \qquad (2.4)$$

Потребуем выполнения соотношнеия:

$$L = \operatorname*{vraisup}_{\tau} \int_\tau^\infty |\delta(t,\tau)|\, dt < \infty. \qquad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает необходимое и достаточное для $\varepsilon \in (P^\lambda{}_l,\ B_l)$ условие (2.2), ибо, применяя теорему Тонелли ([2], стр. 213), для любого $M > 0$ выводим

$$\int_0^M |B^\lambda(\varepsilon x; t)|\, dt \leqslant \int_0^M dt \int_0^t |A^\lambda(x;\tau)\,\delta(t,\tau)\, d\tau| =$$

$$= \int_0^M |A^\lambda(x;\tau)|\, d\tau \int_\tau^M |\delta(t,\tau)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant L \int_0^M |A^\lambda(x;\tau)|\, d\tau = O(1).$$

Используя выражение (1.16) для $\delta(t,\tau)$, преобразуем (2.5). Получаем

$$L \leqslant \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} C^\lambda{}_n L^\lambda{}_n,$$

где для каждого $n \leqslant \lambda$ обозначено

$$L^\lambda{}_n = \operatorname*{vraisup}_{\tau} \int_\tau^\infty \quad P^{\lambda+1}(\tau)\, D_{\lambda-n}\left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)},\ \tau\right] D_n[\varepsilon(\tau),\tau] \Big|\, d\tau.$$

Преобразуя $L^{\lambda}{}_{n}$, получаем

$$L^{\lambda}{}_{n} \leqslant \underset{\tau}{\operatorname{vraisup}} |P^{n}(\tau) D_{n}[\varepsilon(\tau), \tau]| \times$$

$$\times \underset{\tau}{\operatorname{vraisup}} \int_{\tau}^{\infty} \left| P^{\lambda-n+1}(\tau) D_{\lambda-n} \left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)}, \tau \right] dt. \right.$$

Тогда для выполнения условия (2.5) достаточно выполнения при $0 \leqslant s \leqslant \lambda$ условий

$$\underset{\tau}{\operatorname{vraisup}} \int_{\tau}^{\infty} \left| P^{s+1}(\tau) D_{s} \left[\frac{b(t,\tau)}{P(\tau)}, \tau \right] \right| dt < \infty, \tag{2.6}$$

$$\underset{\tau}{\operatorname{vraisup}} |P^{s}(\tau) D_{s}[\varepsilon(\tau), \tau]| = O(1). \tag{2.7}$$

В итоге доказана

Теорема 2.1. *Пусть B — метод суммирования интегралов такой, что выполнены условия (1.2) при $s = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$ и (2.6). Если ε удовлетворяет условиям (1.12) и (2.7), то функция ε является множителем суммируемости интегралов типа $(P^{\lambda}{}_{l}, B_{l})$.*

Следствие 2.1. *Если выполнены условия (1.12) и (2.6), то функция ε является множителем суммируемости типа $(P^{\lambda}{}_{l}, P^{\varkappa}{}_{l})$ при $\varkappa \geqslant \lambda$.*

Доказательство. Для $B = p^{\varkappa}(t, \tau)$ при $\varkappa \geqslant \lambda$ условия (1.2) и (2.6) теоремы 2.1 выполнены.

§ 3. Множители суммируемости $(P^{\lambda}{}_{O}, B_{l})$

Для нахождения множителей суммируемости типа $(P^{\lambda}{}_{O}, B_{l})$, следует проверить выполнение условия (2.1), беря подынтегральное выражение в виде (1.17). Решение вопроса об абсолютной сходимости интеграла от двойной суммы из выражения (1.17) затруднено, так как об абсолютной сходимости выражений $I_{i}(x, t)$ при $i < \lambda$ судить трудно. Потребуем поэтому, чтобы метод B удовлетворял условиям (1.2) при $s = 0, 1, \ldots, \lambda$. Тогда верны равенства (1.4) при $s = 0, 1, \ldots, \lambda$. Тогда необходимое и достаточное условие (2.1) для того, чтобы $\varepsilon \in (P^{\lambda}{}_{O}, B_{l})$, имеем в виде:

$$\int_{0}^{M} |B^{\lambda}(\varepsilon x; t)| \, dt = O(1), \qquad \forall M > 0,$$

или

$$\int_{0}^{M} \left| \int_{0}^{t} \mathfrak{A}^{\lambda}(x(s), \tau) \gamma(t, \tau) d\tau \right| dt = O(1). \tag{3.1}$$

В силу того, что интеграл (0.1) является A-ограниченным и того, что $\varepsilon \in (P^{\lambda}{}_{O}, B_{l})$ имеем

$$\mathfrak{A}^{\lambda}(x, \tau) = O(1). \tag{3.2}$$

По теореме Тонелли и в силу условия (3.2) менять порядок интегрирования в (3.1) можно, если

$$\int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty |\gamma(t,\tau)|\, dt < \infty. \tag{3.3}$$

Левую часть условия (3.3), используя формулу (1.18), можно оценить следующим образом:

$$\int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty \left|\gamma(t,\tau)\right| dt \leqslant \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=0}^{\lambda+1} C^n{}_{\lambda+1} \operatorname*{vraisup}_\tau \int_\tau^\infty \left|P^n(\tau) D_n[b(t,\tau),\tau]\right| dt \times$$
$$\times \int_0^\infty |P^{\lambda-n}(\tau) P'(\tau) D_{\lambda+1-n}[\varepsilon(\tau),\tau]|\, d\tau.$$

Для выполнения (3.3) достаточно при $s=0, 1, \ldots, \lambda+1$ выполнение условий:

$$\operatorname*{vraisup}_\tau \int_\tau^\infty |P^s(\tau) D_s[b(t,\tau)]|\, dt < \infty, \tag{3.4}$$

$$\int_0^\infty |P^{s-1}(\tau) P'(\tau) D_s[\varepsilon(\tau),\tau]|\, d\tau < \infty. \tag{3.5}$$

Так как для любого $M>0$ имеем

$$\int_0^M |B^\lambda(\varepsilon x;\, t)|\, dt = O(1) \int_0^M d\tau \int_\tau^M |\gamma(t,\tau)|\, d\tau = O(1),$$

то для выполнения условия (3.1) достаточно требовать выполнения (3.5). Следовательно, доказана

Теорема 3.1. *Пусть B — произвольный метод суммирования интегралов такой, что выполнены условия* (1.2) *при* $s = 0, 1, \ldots, \lambda$ *и* (3.4). *Если выполнены условия* (1.12) *и* (3.5), *то функция* ε *является множителем суммируемости интегралов типа* $(P^\lambda{}_0, B_l)$.

Следствие 3.1. *Если выполнены условия* (1.12) *и* (3.5), *то функция* ε *является множителем суммируемости типа* $(P^\lambda{}_0, P^\varkappa{}_l)$ *при* $\varkappa > \lambda$.

Примером множителя суммируемости $\varepsilon \in (P^\lambda{}_0,\ P^\varkappa{}_l)$ может служить функция

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{P^\rho(\tau)}, \quad \text{где} \quad \rho > 2.$$

Нетрудно проверить выполнение всех условий теоремы 3.1.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, 1968.
4. Тюрнпу Х. А., Метод исследования абсолютной и безусловной суммируемости. Автореферат. Тарту, 1968.
5. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва, 1966.

6. Х а р д и Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
7. B o r w e i n, D., A summability factor therorem. J. London Math. Soc., 150, 25, 302—315.
8. B o r w e i n, D., On the absolute Cesàro summability of integrals. Proc., London Math. Soc., (3), 1951, 1, № 3, 308—326.
9. B o r w e i n, D., Note on summability factors. J. London Math. Soc., 1954, 29, 113, 198—206.
10. B o r w e i n, D., On the absolute summability of Stieltjes integrals. J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 476—486.
11. B o r w e i n, D., Integration by parts of Cesàro summable integrals. J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 276—292.
12. C o s s a r, J., A theorem on Cesàro summability. J. London Math. Soc., 1941, 16, 56—68.
13. H a r d y, G., Notes on some points in the integral calculus. Mess. Math., 1911, 40, 87—91.
14. H a r d y, G., Notes on some points in the integral calculus. Mess. Math., 1911, 40, 108—112.
15. P e t e r s o n, G., Summability factors for infinite integrals. J. London Math. Soc., 1969, 44, № 1, 149—158.
16. S a r g e n t, W. L., On the summability of infinite integrals. J. London Math. soc., 1952, 27, 401—413.

Поступило
21 II 1973

SUMMEERUVUSTEGURID INTEGRAALIDE JAOKS

J. Vorošnina

R e s ü m e e

Käesolevas töös on uuritud summeeruvustegureid integraalide jaoks. On leitud effektiivsed tingimused selleks, et funktsioon ε, millel on absoluutselt pidev $k-1$ järku tuletis, oleks $(P\lambda_l, B_l)$ ja $(P\lambda_o, B_l)$ tüüpi summeeruvusteguriks, kusjuures integraalide (0,1) summeerimismeetod $P\lambda$ on antud valemiga (0.3).

Peale selle on järeldustena ülaltoodud tulemustest saadud tingimused $(P\lambda_l, P\varkappa_l)$ ja $(P\lambda_o, P\varkappa_l)$ tüüpi summeeruvustegurite jaoks vastavalt juhtudel $\varkappa \geqslant \lambda$ ja $\varkappa > \lambda$.

SUMMABILITY FACTORS FOR INTEGRALS

J. Voroshnina

S u m m a r y

In the paper some types of summability factors for the integrals are investigated. The effective conditions were found for the function ε having an absolutely continuous derivative to be summability factors of $(P\lambda_l, B_l)$ and $(P\lambda_o, B_l)$ types, where the summability method $P\lambda$ for the integrals (0.1) is given by the formula (0.3).

Also the conditions for the summability factors of $(P\lambda_l, P\varkappa_l)$ and $(P\lambda_o, P\varkappa_l)$ types were found for $\varkappa \geqslant \lambda$ and $\varkappa > \lambda$ respectively.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЯДОВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Т. Сырмус

Кафедра математического анализа

В данной статье обобщаются тауберовы теоремы (коротко T-теоремы) статьи [5] на случай рядов[1] Σu_k с членами из некоторого банахова пространства и такие матричные методы суммирования, элементами матриц которых являются линейные ограниченные операторы из одного банахова пространства в другое.

В § 1 вводятся обозначения и доказывается одна лемма. В § 2 рассматриваются T-теоремы для различных видов суммируемости с точными условиями, а в § 3 соответствующие T-теоремы с достаточными условиями.

§ 1. Обозначения и основные понятия

1.1. Обозначения, понятия и условия суммируемости. Пусть X, Y — банаховы пространства, (X, Y) — множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y и $A_{nk} \in (X, Y)$. Для ряда Σu_k, где $u_k \in X$, с последовательностью $\mathfrak{x} = \{x_n\}$ его частичных сумм

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

определяется нижней треугольной матрицей $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ преобразование

$$y_n(\mathfrak{A}) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k. \tag{1}$$

Преобразованием (1) определяется метод суммирования $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ ряда Σu_k или последовательности $\mathfrak{x}$, для которой $\mathfrak{y}(\mathfrak{A}) = \{y_n(\mathfrak{A})\}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lim y_n(\mathfrak{A})$ в смысле сильной сходимости.

---

[1] Всюду, где пределы изменения индексов не указаны, они пробегают все значения 0, 1, 2, ... При этом

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_k u_k = \Sigma u_k.$$

Пусть $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ — другой треугольный метод суммирования с $B_{nk} \in (X, Y)$. Говорят, что метод $\mathfrak{A}$ α_y-включает метод $\mathfrak{B}$ в смысле β_y, где α_y и β_y — любые пространства последовательностей из Y, если $\beta_y\mathfrak{B} \subseteq \alpha_y\mathfrak{A}$. При этом $\alpha_y\mathfrak{A} = \{\mathfrak{x} : \mathfrak{y}(\mathfrak{A}) \in \alpha_y\}$. Пусть матрица $\mathfrak{E} = (E_{nk})$ определена через

$$E_{nk} = \begin{cases} E\colon X \to X \text{ и } Ex = x \quad (\forall x \in X) \text{ при } n = k, \\ O\colon X \to X \text{ и } Ox = \Theta \quad (\forall x \in X) \text{ при } n \neq k, \end{cases} \tag{2}$$

где Θ — нулевой элемент пространства X. При $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ α_y-включение метода $\mathfrak{E}$ в смысле β_x, т. е. $\beta_x\mathfrak{E} = \beta_x \subseteq \alpha_y\mathfrak{A}$ означает, что любая $\mathfrak{x} \in \beta_x$ является $\alpha_y\mathfrak{A}$-суммируемой, а при $\alpha_y = m_y$, где m_y — пространство ограниченных последовательностей, $\mathfrak{A}$-ограниченной. В таком случае будем писать: $\mathfrak{A} \in (\beta_x, \alpha_y)$. Через c_x и c_x^0 обозначим соответственно классы (сильно) сходящихся и к нулю сходящихся последовательностей с элементами из X. Определяя в классах m_x, c_x и c_x^0 норму через $\|\mathfrak{x}\| = \sup \|x_k\|$, они обращаются в банаховы пространства.

Введем следующие условия для метода $\mathfrak{A}$:

$$\sup_{\|x_k\| \leqslant 1} \|\sum_{k=0}^{p} A_{nk}x_k\| = O(1), \tag{3}$$

$$\exists \lim \sum_{k=0}^{n} A_{nk}x = Ax \qquad (\forall x \in X), \tag{4}$$

$$\exists \lim_{n} A_{nk}x = A_kx \qquad (\forall x \in X). \tag{5}$$

Известно [1], что для $\mathfrak{A} \in (c_x, c_y)$ необходимы и достаточны условия (3), (4) и (5), для $\mathfrak{A} \in (m_x, m_y)$ — условие (3), для регулярности метода $\mathfrak{A}$ — условия (3), (4) при $A = E$ и (5) при $A_k = O$, а для $\mathfrak{A} \in (c_x^0, c_y^0)$ (см. [2]) условия (3) и (5) при $A_k = O$.

Теоремы, в которых из предположения $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$ выносится заключение $\mathfrak{x} \in \beta_y\mathfrak{B}$ при определенном условии, наложенном на члены ряда Σu_k, будем называть T-теоремами типа $(\alpha_y\mathfrak{A}, \beta_y\mathfrak{B})$, а соответствующее условие о членах ряда Σu_k тауберовым условием (коротко T-условием). При $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ будем говорить о T-теоремах типа $(\alpha_x\mathfrak{A}, \beta_x)$.

Обозначим далее

$$\mathfrak{C}_{ni} = \sum_{k=0}^{i} A_{nk} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{6}$$

$$\mathfrak{C}_{nn} = \mathfrak{C}_n, \tag{7}$$

$$\mathfrak{A}_{-1}(u) = \Theta, \qquad \mathfrak{A}_{n-1}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{C}_{ni}u_{i+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Аналогичные обозначения применяются и в случае матрицы $\mathfrak{B} = (B_{nk})$.

В случае любого ряда Σu_k и матриц $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ справедливы равенства

$$y_0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}_0 x_0, \quad y_n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}_n x_n - \mathfrak{A}_{n-1}(u) \quad (n=1, 2, \ldots) \quad (9)$$

и

$$y_0(\mathfrak{B}) = \mathfrak{D}_0 x_0, \quad y_n(\mathfrak{B}) = \mathfrak{D}_n x_n - \mathfrak{B}_{n-1}(u) \quad (n=1, 2, \ldots), \quad (10)$$

где $\mathfrak{D}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} B_{nk}$, а $\mathfrak{D}_{nk} = \sum\limits_{i=0}^{k} B_{ni}$ и $\mathfrak{B}_{n-1}(u) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathfrak{D}_{ni} u_{i+1}$.

Равенства (9) и (10) вытекают из соответствующих равенств (1) при помощи преобразования Абеля.

Пусть, далее метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ такой, что для операторов $\mathfrak{C}_n \in (X, Y)$ существуют обратные $\mathfrak{C}_n^{-1} : Y \to X$. Поскольку X, Y — банаховы пространства, то $\mathfrak{C}_n^{-1} \in (Y, X)$. В таком случае, пусть

$$\mathfrak{G}_0(u) = \Theta, \ \mathfrak{G}_n(u) = \mathfrak{D}_n \mathfrak{C}_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}(u) - \mathfrak{B}_{n-1}(u) \quad (n=1, 2, \ldots). \quad (11)$$

Тогда из равенств (9) и (10) следует, что

$$y_0(\mathfrak{B}) = \mathfrak{D}_0 \mathfrak{C}_0^{-1} y_0(\mathfrak{A}), \quad y_n(\mathfrak{B}) = \mathfrak{D}_n \mathfrak{C}_n^{-1} y_n(\mathfrak{A}) + \mathfrak{G}_n(u) \quad (n=1, 2, \ldots). \quad (12)$$

1.2. Одна лемма. Пусть в данном пункте α_y и β_y — некоторые пространства последовательностей $\mathfrak{y} = \{y_n\}$ элементов $y_n \in Y$, а линейные ограниченные операторы $\mathfrak{H}_n : Y \to Y$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть операторы $\mathfrak{H}_n$ удовлетворяют условию:*

а) $\{\mathfrak{H}_n\}$ *— точечно ограниченная последовательность операторов.*

Тогда $\{\mathfrak{H}_n y_n\} \in \beta_y$ для любой $y \in \alpha_y$, если

1° $\alpha_y \subseteq \beta_y = m_y$ *или*

2° $\alpha_y \subseteq \beta_y = c_y^0$, *а если*

3° $\alpha_y \subseteq \beta_y = c_y$, *когда операторы $\mathfrak{H}_n$ удовлетворяют дополнительно условию:*

б) *существует* $\lim \mathfrak{H}_n y$ *на основном множестве пространства Y.*

Доказательство. Справедливость частей 1° и 2° леммы очевидна. Докажем часть 3°. Ввиду теоремы Банаха—Штейнхауса (см. [3], гл. III, § 4) условия а) и б) гарантируют существование такого оператора $\mathfrak{H} \in (Y, Y)$, что

$$\exists \lim \mathfrak{H}_n y = \mathfrak{H} y \quad (\forall y \in Y).$$

Пусть далее $\lim y_n = y$, где $y \in Y$. Поскольку Y — банахово пространство и $\{\mathfrak{H}_n\}$ удовлетворяет условию а), то найдется постоянная $M > 0$, что $\|\mathfrak{H}_n\| \leqslant M$. Поэтому для $\mathfrak{y} \in c_y$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) > 0$ такая, что при $n > N$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{H}_n y_n - \mathfrak{H} y\| \leqslant \|\mathfrak{H}_n y_n - \mathfrak{H}_n y\| + \|\mathfrak{H}_n y - \mathfrak{H} y\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом для любой $\mathfrak{y} \in c_y$ существует $\lim \mathfrak{H}_n y_n = \mathfrak{H} y$, т. е. $\{\mathfrak{H}_n y_n\} \in c_y$.

§ 2. Тауберовы теоремы с точными условиями

2.1. Тауберовы теоремы типа $(\alpha_y\mathfrak{A}, \beta_y\mathfrak{B})$. Наиболее общей из T-теорем типа $(\alpha_y\mathfrak{A}, \beta_y\mathfrak{B})$ при любой паре α_y, β_y пространств последовательностей является

Теорема 1. *Пусть методы $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ и $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ с $A_{nk}, B_{nk} \in (X, Y)$ такие, что для операторов $\mathfrak{C}_n \in (X, Y)$ существуют обратные $\mathfrak{C}_n^{-1}$ и метод $\mathfrak{F} = (E_{nk}\mathfrak{D}_k\mathfrak{C}_k^{-1}) \in (\alpha_y, \beta_y)$.*

Из $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{x} \in \beta_y\mathfrak{B}$ точно тогда, когда $\{\mathfrak{G}_n(u)\} \in \in \beta_y$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{y}(\mathfrak{A}) = = \{y_n(\mathfrak{A})\} \in \alpha_y$. Следовательно $\mathfrak{F}\mathfrak{y}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}y_n(\mathfrak{A})\} \in \beta_y$. Поэтому необходимость и достаточность условия $\{\mathfrak{G}_n(u)\} \in \beta_y$ для того, чтобы $\mathfrak{x} \in \beta_y\mathfrak{B}$ вытекает непосредственно из равенства (12).

Имеет место следующее

Следствие 1.1. *Пусть методы $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ и $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ с $A_{nk}, B_{nk} \in (X, Y)$ такие, что для операторов $\mathfrak{C}_n \in (X, Y)$ существуют обратные $\mathfrak{C}_n^{-1}$ и в случаях 1° $\alpha_y \subseteq \beta_y = m_y$ и 2° $\alpha_y \subseteq \beta_y = c_y^{\circ}$ последовательность операторов $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}$: $: Y \to Y$ удовлетворяет условию* а) *или в случае* 3° $\alpha_y \subseteq \beta_y = c_y$ *условиям* а) *и* б) *из леммы* 1.

Тогда $\{\mathfrak{G}_n(u)\} \in \beta_y$ — точное условие для того, чтобы из $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$ следовало $\mathfrak{x} \in \beta_y\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (E_{nk}\mathfrak{H}_k)$. Тогда для $\mathfrak{y} = = \{y_n(\mathfrak{A})\}$ имеем $\mathfrak{F}\mathfrak{y} = \{\mathfrak{H}_n y_n(\mathfrak{A})\}$. Поэтому на основании частей 1°—3° леммы 1 следует, что $\mathfrak{F}\mathfrak{y} \in \beta_y$ для $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$, если $\alpha_y \subseteq \beta_y = m_y, c_y^0$ или соответственно $\alpha_y \subseteq \beta_y = c_y$. Утверждение следствия о точности условия T-теоремы теперь непосредственно следует из теоремы 1.

Имеет место еще следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1.2. *Пусть методы $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ и $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ с $A_{nk}, B_{nk} \in (X, X)$ такие, что $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{D}_n = E \in (X, X)$.*

Условие

$$\mathfrak{A}_{n-1}(u) - \mathfrak{B}_{n-1}(u) \in \alpha_x$$

есть точное условие для того, чтобы из $\mathfrak{x} \in \alpha_x\mathfrak{A}$ следовало $\mathfrak{x} \in \alpha_x\mathfrak{B}$.

2.2. Теоремы типа $(\alpha_x(\mathfrak{A}), \beta_x)$. Тауберовы теоремы рассматриваемого типа получаются из предыдущих, если в них взять $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} = (E_{nk})$, определенный формулами (2). В таком случае $\mathfrak{D}_n = E$, $\mathfrak{B}_{n-1}(u) = \Theta$, а формула (11) обращается в

$$\mathfrak{G}'_0(u) = \Theta, \qquad \mathfrak{G}'_n(u) = \mathfrak{C}_n^{-1}\mathfrak{A}_{n-1}(u) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому из (12) следует при $y_n(\mathfrak{E}) = x_n$, что

$$x_0 = \mathfrak{C}_0^{-1}y_0(\mathfrak{A}), \qquad x_n = \mathfrak{C}_n^{-1}y_n(\mathfrak{A}) + \mathfrak{G}'_n(u) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а условие $\mathfrak{F} \in (\alpha_x, \beta_x)$ обращается в $\mathfrak{C}_n^{-1} \in (\alpha_x, \beta_x)$. Ввиду этого на основании теоремы 1 и ее следствий получаем следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть метод* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ *с* $A_{nk} \in (X, X)$ *такой, что для оператора* $\mathfrak{C}_n \in (X, X)$ *существуют обратные* $\mathfrak{C}_n^{-1} \in (\alpha_x, \beta_x)$. *Условие* $\{\mathfrak{G}'_n(u)\} \in \beta_x$ — *точное условие для того, чтобы из* $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$ *следовало* $\mathfrak{x} \in \beta_x$.

Следствие 2.1. *Пусть метод* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ *с* $A_{nk} \in (X, X)$ *такой, что для операторов* $\mathfrak{C}_n \in (X, X)$ *существуют обратные* $\mathfrak{C}_n^{-1}$ *и в случаях* 1° $\alpha_x \subseteq \beta_x = m_x$ 2° $\alpha_x \subseteq \beta_x = c_x^0$ *последовательность* $\mathfrak{C}_n^{-1}$ *удовлетворяет условию* а) *в* X *или в случае* 3° $\alpha_x \subseteq \beta_x = c_x$ *условиям* а) *и* б) *из леммы* 1.

Тогда $\{\mathfrak{G}'_n(u)\} \in \beta_x$ — *точное условие для того, чтобы из* $\mathfrak{x} \in \alpha_x\mathfrak{A}$ *следовало* $\mathfrak{x} \in \beta_x$.

Следствие 2.2. *Пусть для метода* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ *с* $A_{nk} \in (X, X)$ *операторы* $\mathfrak{C}_n = E : X \to X$. *Условие* $\{\mathfrak{A}_{n-1}(u)\} \in \alpha_x$ — *точное условие для того, чтобы из* $\mathfrak{x} \in \alpha_x\mathfrak{A}$ *следовало* $\mathfrak{x} \in \alpha_x$.

§ 3. Тауберовы теоремы с достаточными условиями

3.1. Некоторые условия. Пусть ниже последовательность c_k вещественных или комплексных чисел в случае методов $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ и $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{n} \|\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}A_{nk}+B_{nk}\|\,|c_k| = O(1). \tag{13}$$

Для T-теорем типа $(\alpha_y\mathfrak{A}, \beta_y\mathfrak{B})$ достаточными T-условиями являются

$$\|(\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}\mathfrak{C}_{nk} - \mathfrak{D}_{nk})u_{k+1}\| = O(\|\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}A_{nk}+B_{nk}\|c_k) \tag{14}$$

и

$$\|(\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}\mathfrak{C}_{nk} - \mathfrak{D}_{nk})u_{k+1}\| = o(\|\mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}A_{nk}+B_{nk}\|c_k), \tag{15}$$

выполняемые равномерно[2] относительно $n \geqslant k$ в процессе $k \to \infty$. Из условий (14) и (15) при $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} = (E_{nk})$ вытекают достаточные T-условия для T-теорем типа $(\alpha_x\mathfrak{A}, \alpha_x)$

$$\|\mathfrak{C}_{nk}u_{k+1}\| = O(\|A_{nk}\|c_k) \tag{16}$$

и соответственно

$$\|\mathfrak{C}_{nk}u_{k+1}\| = o(\|A_{nk}\|c_k). \tag{17}$$

3.2. Тауберовы теоремы типа $(\alpha_y\mathfrak{A}, \alpha_y\mathfrak{B})$ с достаточными условиями. Из теорем указанного типа приведем следующую.

Теорема 3. *Пусть методы* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ *и* $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ *с* $A_{nk}, B_{nk} \in (X, Y)$ *такие, что для операторов* $\mathfrak{C}_n \in (X, Y)$ *существуют обратные* $\mathfrak{C}_n^{-1}$ *и в случае* 1° *при* $\alpha_y = m_y$ *последовательность операторов* $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{D}_n\mathfrak{C}_n^{-1}$ *удовлетворяет в* Y *условию* а) *из леммы* 1;

2° *при* $\alpha_y = c_y^0$ *или* 3° *при* $\alpha_y = c_y$ *методы* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *удовлетворяют условию* (5) *причем* $A_k = B_k = O$, *а* $\{\mathfrak{H}_n\}$ *в случае* 2° *удовлетворяет условию* а) *в* Y, *в случае же* 3° $\{\mathfrak{H}_n\}$ *выполняет условиям* а) *и* б) *из леммы* 1.

[2] Определение этого понятия дано в статье [4].

Если $\{c_k\}$ удовлетворяет условию (13), *а* $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{A}$ *и в случае* 1° *выполняет условию* (14), *в случаях же* 2° *или* 3° — *условию* (15) *равномерно по* $n \geqslant k$, *то* $\mathfrak{x} \in \alpha_y\mathfrak{B}$ *соответственно при* $\alpha_y = m_y, c_y^0$ *или* c_y.

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательствам теорем 4 и 5 из статьи [5], если воспользоваться следствием 1.1 и показать, что из условий (13), (14) или соответственно (15) вытекает выполнимость точного T-условия $\{\mathfrak{G}_n(u)\} \in \alpha_y$ в следствии 1.1.

Для регулярных методов $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ и $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ с $A_{nk}, B_{nk} \in (X, X)$ из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 3.1. *Пусть методы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *удовлетворяют условиям* (3), (5) *при* $A_k = B_k = O$ *и* $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{D}_n = E$, *а* $\{c_k\}$ *такова, что*

$$\sum_{k=0}^{n} \|A_{nk}+B_{nk}\|\,|c_k| = O(1).$$

Если $\mathfrak{x} \in c_x\mathfrak{A}$ *и выполняет* T-*условию*

$$\|(\mathfrak{C}_{nk} - \mathfrak{D}_{nk})u_{k+1}\| = o(\|A_{nk}+B_{nk}\|c_k)$$

равномерно по $n \geqslant k$, *то* $\mathfrak{x} \in c_x\mathfrak{B}$ *причем* $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{x}$.

T-теорема типа $(\alpha_x\mathfrak{A}, \alpha_x)$ с достаточным условием непосредственно вытекает из теоремы 3, если в ней положить $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, а достаточные условия (14) и (15) заменить соответственно условиями (16) и (17). При этом условие (13) следует заменить через

$$\sum_{k=0}^{n} \|\mathfrak{C}_n^{-1}A_{nk}\|\,|c_k| = O(1). \tag{18}$$

Так, имеет место

Теорема 4. *Пусть метод* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ *с* $A_{nk} \in (X, X)$ *такой, что для операторов* $\mathfrak{C}_n \in (X, X)$ *существуют обратные* $\mathfrak{C}_n^{-1}$ *и в случае* 1° *при* $\alpha_x = m_x$ *последовательность операторов* $\mathfrak{C}_n^{-1}$ *удовлетворяет в* X *условию* а) *из леммы* 1; *в случае* 2° *при* $\alpha_x = c_x^0$ *или* 3° *при* $\alpha_x = c_x$ *метод* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию* (5), *причем* $A_k = O$, *а* $\{\mathfrak{C}_n^{-1}\}$ *в случае* 2° *удовлетворяет условию* а) *в* X, *в случае же* 3° $\{\mathfrak{C}_n^{-1}\}$ — *условиям* а) *и* б) *из леммы* 1.

Если $\{c_k\}$ *удовлетворяет условию* (18), *а* $\mathfrak{x} \in \alpha_x\mathfrak{A}$ *и в случае* 1° — *условию* (16), *в случаях же* 2° *и* 3° — *условию* (17) *равномерно по* $n \geqslant k$, *то* $\mathfrak{x} \in \alpha_x$ *соответственно при* $\alpha_x = m_x$, c_x^0 *или* c_x.

Литература

1. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР, сер. техн. и физ.-мат наук, 1956, 5, № 2, 108—126.
2. Кангро Г., Вихман Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961 **102**, 209—225.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. Москва, 1965.

4. Сырмус Т., Теоремы тауберова типа для различных видов суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 103—117.
5. Сырмус Т. Несколько обобщенных тауберовых теорем. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 167—178.

Поступило
23 III 1973

TAUBERI TEOREEMID BANACHI RUUMI RIDADE JAOKS

T. Sõrmus

Resümee

Olgu $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ ja $\mathfrak{B} = (B_{nk})$ kaks kolmnurkset summeerimismenetlust, kus A_{nk}, B_{nk} on tõkestatud lineaarsed operaatorid Banachi ruumist X Banachi ruumi Y, ja α_y, β_y on kas kaks suvalist jadaruumi Banachi ruumi elementidest, või mingid paarid ruumidest m_y, c_y^0, c_y. Artiklis tõestatakse Tauberi teoreemid nii tarvilike ja piisavate kui ka piisavate Tauberi tingimustega selleks, et rea $\sum u_k$, kus $u_k \in X$, summeeruvusest menetlusega $\mathfrak{A}$ viisil α_y järelduks rea summeeruvus menetlusega $\mathfrak{B}$ viisil β_y. Tuletatud teoreemid on üldistused Tauberi teoreemidele artiklist [5].

TAUBER-SÄTZE FÜR DIE REIHEN AUS BANACH-RÄUMEN

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Es werden zwei B-Räume X und Y vorgelegt. Wir betrachten beliebige dreieckige Matrixverfahren $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ und $\mathfrak{B} = (B_{nk})$, wobei A_{nk}, B_{nk} beschränkte lineare Operationen aus $X \to Y$ seien. Mit den Symbolen α_y und β_y bezeichnen wir beliebige Folgenräume aus B-Raum Y, aber auch einige Paare der Räume m_y, c_y^0, c_y. In der vorliegenden Arbeit werden Tauber-Sätze des Typus $(\alpha_y A, \beta_y B)$ untersucht, in denen aus der α_y-Limitierbarkeit einer Reihe die $\beta_y B$-Limitierbarkeit resultiert. Dabei werden die allgemeinen notwendigen und hinreichenden Tauber-Bedingungen gefunden, aber auch hinreichende Tauber-Bedingungen abgeleitet.

Die Resultate verallgemeinern die in [5] von dem Autor bewiesenen Tauber-Sätze.

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМАМ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

Ф. Шипп

Будапештский Научный университет им. Л. Этвёша

1. Пусть [1] (T, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой и пусть функции $\varphi_k \in M(T, \Sigma, \mu)$, причем

$$M_k \equiv \operatorname{vraisup} |\varphi_k(t)| = O_k(1).$$

Положим $\psi_0(t) \equiv 1$ и

$$\psi_k(t) = \frac{\varphi_{\nu_1+1}(t)\varphi_{\nu_2+1}(t)}{M_{\nu_1+1}M_{\nu_2+1}} \cdots \frac{\varphi_{\nu_k+1}(t)}{M_{\nu_k+1}}$$

для $k = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_k}$. Система $\psi = \{\psi_k\}$ называется *системой произведений системы* $\varphi = \{\varphi_k\}$. Если система ψ удовлетворяет условию

$$\sum \left| \int_T \psi_k(t)\mu(dt) \right| < \infty, \tag{1}$$

то говорят, что система φ является *слабо мультипликативной*. Для слабо мультипликативной ограниченной системы φ Алексич в [4] доказал следующее утверждение.

Теорема А. *Если φ — слабо мультипликативная ограниченная система, то ряд*

$$\sum \xi_k \varphi_k(t) \tag{2}$$

для всех $x = \{\xi_k\} \in l^2$ сходится μ-почти всюду на T.

Для системы произведений ψ слабо мультипликативной системы φ Шиппом [5] доказано следующее утверждение.

Теорема В. *Если φ — слабо мультипликативная система, то ряд*

$$\sum \xi_k \psi_k(t) \tag{3}$$

для всех $x \in l^2$ сходится μ-почти всюду на T.

---

[1] Мы пользуемся определениями и обозначениями из монографии [1]. Кроме того, если индексы у знака Σ не указаны, то они принимают все значения 0, 1, 2, ...

В настоящей заметке мы покажем, что теоремы A и B верны для более широкого класса систем, чем слабо мультипликативные системы.

Мы говорим, что φ является *квадратично слабо мультипликативной системой*, если

$$\sum \left[\int_T \psi_k(t) \mu(dt) \right]^2 < \infty. \tag{4}$$

Очевидно, что каждая слабо мультипликативная система является квадратично слабо мультипликативной системой.

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема C. *Если φ — квадратично слабо мультипликативная система, то ряд* (3) *для всех $x \in l^2$ сходится μ-почти всюду на T.*

Учитывая, что в силу теоремы C частичные суммы

$$S_{2^n-1}(x, t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_k \psi_k(t) \tag{5}$$

ряда (3) для всех $x \in l^2$ сходятся μ-точчи всюду на T и $\psi_{2^n-1}(t) = \varphi_n(t)/M_n$, мы из сходимости μ-почти всюду на T последовательности (5) для всех $x \in l^2$ выводим сходимость μ-почти всюду на T ряда (2) для всех $x \in l^2$. Итак, из теоремы C вытекает следующее

Следствие. *Если φ — квадратично слабо мультипликативная ограниченная система, то ряд* (2) *сходится μ-почти всюду на T для всех $x \in l^2$.*

2. Для доказательства теоремы C мы воспользуемся методикой, разработанной в работах [3, 5]. Рассмотрим систему Уолша $w = \{w_k\}$ (см., например, [2], стр. 155), которая является системой произведений системы Радемахера (см. например, [2], стр. 55). В работе [6] Шьёлиным в частности доказана

Лемма. *Частичные суммы $s_n(x, t)$ ряда*

$$\sum \xi_k w_k(t)$$

для всех $x \in l^2$ при некоторой постоянной $M > 0$ удовлетворяют условию

$$\left\{ \int_0^1 [\sup_n |s_n(x, t)|]^2 dt \right\}^{1/2} \leqslant M \|x\|. \tag{6}$$

Далее, учитывая, что $\operatorname{vraisup} |\psi_k(t)| \leqslant 1$, имеем, что частичные суммы S_n ряда (3) являются непрерывными линейными операторами из l^2 в F-пространство $M(T, \Sigma, \mu)$, причем на всюду плотном в l^2 множестве μ-почти всюду на T существует

$$\lim_n S_n(x, t).$$

Следовательно, в силу теоремы Банаха (см. [1], стр. 361) нам надо для сходимости μ-почти всюду на T ряда (3) для всех $x \in l^2$ лишь установить, что μ-почти всюду на T для всех $x \in l^2$

$$\sup_n |S_n(x, t)| < \infty. \tag{7}$$

В силу леммы 3 из [3], которая легко обобщается на случай произвольного пространства с конечной положительной мерой (T, Σ, μ), мы должны для выполнения условия (7) доказать, что для каждых $\varepsilon > 0$ и $x \in l^2$ найдутся $T_{\varepsilon x} \in \Sigma$ с $\mu(T_{\varepsilon x}) > \mu(T) - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что равномерно относительно всех разбиений $M^{\varepsilon x}{}_{mn} = \{\mathfrak{M}^{\varepsilon x}{}_{mn}\}$ множества $T_{\varepsilon x}$ на произвольное число $m+1$ непересекающихся частей $M^{\varepsilon x}{}_{mn} \in \Sigma$ имеет место неравенство

$$A^{\varepsilon x}{}_m \equiv \left| \int_T \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}{}_{mn}(t) S_n(x, t) \mu(dt) \right| \leqslant M_{\varepsilon x}, \tag{8}$$

где $\chi^{\varepsilon x}{}_{mn}$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{M}^{\varepsilon x}{}_{mn}$.

Из ортогональности системы Уолша вытекает, что

$$A^{\varepsilon x}{}_m = \left| \int_T \int_0^1 \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}{}_{mn}(t) \sum_{k=0}^{n} \xi_k w_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) \psi_\nu(t) d\tau \mu(dt) \right|.$$

Изменяя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}{}_{mn}(t) \right| \leqslant 1,$$

получаем, что

$$A^{\varepsilon x}{}_m \leqslant \int_0^1 \sup_n |s_n(x, \tau)| \int_T \left| \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) \psi_\nu(t) \right| \mu(dt) d\tau.$$

Воспользуясь неравенствами Гельдера и (6), выводим, что

$$A^{\varepsilon x}{}_m \leqslant M \|x\| \left\{ \int_0^1 \left[\int_T \left| \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) \psi_\nu(t) \right| \mu(dt) \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Далее, точно так же, как в [4], можно доказать, что

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} w_k(\tau) \psi_k(t) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$A^{\varepsilon x}{}_m \leqslant M \|x\| \left\{ \int_0 \left[\sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_\nu(\tau) \int_T \psi_\nu(t) \mu(dt) \right]^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

откуда в силу неравенств (6) и (4) вытекает, что

$$A^{\varepsilon x}{}_m \leqslant M \|x\| N,$$

где

$$N^2 = \sup_m \sum_{k=0}^{2^m-1} \left[\int_T \psi_k(t) \mu(dt) \right]^2.$$

Итак, неравенство (8) имеет место и, следовательно, теорема C доказана.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.

3. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 140—151.
4. Alexits, G., Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität. Mitt. Mat. Sem. Giessen, 1971, **92**, 1—10.
5. Schipp, F., Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsystemen. Acta sci. math., 1973, **35**, 13—16.
6. Sjölin, P., An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh-Fourier series. Arkiv mat., 1968, **7**, № 6, 551—570.

Поступило
3 VIII 1973

PRODUKTSÜSTEEMIDEGA MÄÄRATUD FUNKTSIONAALRIDADE KOONDUVUSEST PEAAEGU KÕIKJAL

H. Türnpu ja F. Schipp

Resümee

Olgu (T, Σ, μ) lõpliku positiivse mõõduga mõõduruum ja olgu $\varphi = \{\varphi_n$: vraisup $|\varphi_n(t)| = O_n(1)\}$ mingi funktsioonide süsteem. Öeldakse, et süsteem φ on vastavalt *nõrgalt multiplikatiivne* või *ruutnõrgalt multiplikatiivne*, kui süsteemi φ produktsüsteem Ψ rahuldab vastavalt tingimusi (1) või (4).

Käesolevas töös näidatakse, et read (2) ja (3) koonduvad peaaegu kõikjal iga $x = \{\xi_k\} \in l^2$ ja iga ruutnõrgalt multiplikatiivse süsteemi φ korral. Need väited üldistavad Alexits'i (vt. [4], lk. 4) ja Schipp'i (vt. [5]) tuntud teoreeme.

ÜBER DIE FAST ÜBERALL KONVREGENZ DER FUNKTIONENREIHEN NACH PRODUKTSYSTEMEN

H. Türnpu und F. Schipp

Zusammenfassung

Es sei (T, Σ, μ) ein Massraum mit endlichem, positivem μ-Mass und $\varphi = \{\varphi_n$: vraisup $|\varphi_n(t)| = O_n(1)\}$ ein Funktionensystem. Es bezeichne $\Psi = \{\Psi_n\}$ das Produktsystem des Funktionensystems (s. z. B. [4], S. 2). Das System φ heißt *schwach multiplikativ*, wenn für das System Ψ die Bedingung (1) erfüllt ist, und es heißt *quadratisch schwach multiplikativ*, wenn für das System Ψ die Bedingung (4) erfüllt ist.

In der vorliegenden Arbeit ist bewiesen, daß die Reihen (2) und (3) für jede $x = \{\xi_k\} \in l^2$ und für jedes quadratisch schwach multiplikative System φ fast überall konvergieren. Diese Behauptungen verallgemeinern die bekannten Sätze von Alexits (s. z. B. [4], S. 4) und von Schipp [5].

О СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу, К. Лыхмус и Т. Салуяэр

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть $A=(a_{nk})$ — треугольная матрица положительных чисел, а $B=(\beta_{nk})$ — произвольная треугольная матрица. Пусть система $\varphi=\{\varphi_k\}$ состоит из интегрируемых по Лебегу на отрезке $e=[a,b]$ функций φ_k.

Говорят, что ряд[1]

$$\sum \xi_k\varphi_k(t) \tag{1.1}$$

почти всюду на e является сильно AB_r-суммируемым или $A[B]_r$-суммируемым для $x=\{\xi_k\}\in l^p$, если почти всюду на e

$$\lim_n \tau_n(r,A,B,x,t)=0, \tag{1.2}$$

где

$$\tau_n(r,A,B,x,t)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\,|\beta_k(x,t)-y(t)|^r, \tag{1.3}$$

$$\beta_k(x,t)=\sum_{\nu=0}^{k}\beta_{k\nu}\xi_\nu\varphi_\nu(t),$$

а y — заданная функция.

В дальнейшем мы предположим, что система φ состоит из таких интегрируемых функций, для которых ряд (1.1) сходится для всех $x\in l^p$ в метрике пространства $L_e{}^p$ к функции y. Последнее в силу теоремы Банаха—Штейнгауза равносильно следующему условию

$$\{\int_a^b |S_n(x,t)|^p\,dt\}^{1/p}\leqslant M\,\|x\|, \tag{1.4}$$

где

$$S_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\xi_k\varphi_k(t).$$

---

[1] Через Σ мы обозначаем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, а через M, M_1, M_2, r_1, r_2 — постоянные.

В настоящей статье мы исследуем эквивалентность $A[B]_r$-суммируемости и $C[D]_r$-суммируемости рядов (1.1) почти всюду на e для $x \in l^p$, где A и C — регулярные треугольные матрицы с $a_{nk} \geqslant 0$ и $c_{nk} \geqslant 0$ преобразования последовательности в последовательность, а B и D — регулярные матрицы преобразования ряда в последовательность.

Говорят, что *$A[B]_r$-суммируемость включает $C[D]_r$-суммируемость рядов* (1.1), *если из того, что*

$$\lim_n \tau_n(r, C, D, x, t) = 0$$

почти всюду на $e_1 \subset e$ для $x \in l^p$ следует, что для этого же $x \in l^p$ почти всюду на e_1

$$\lim_n \tau_n(r, A, B, x, t) = 0.$$

Последнее обозначается через $C[D]_r \subset A[B]_r$. Если же, кроме того, $A[B]_r \subset C[D]_r$, то говорят, что $A[B]_r$-суммируемость и $C[D]_r$-суммируемость рядов (1.1) равносильны и пишут $A[B]_r \sim C[D]_r$.

Далее, говорят, что *D-суммируемость включает B-суммируемость* (т. е. $B \subset D$) *рядов* (1.1), если из существования предела

$$\lim_k \beta_k(x, t)$$

почти всюду на $e_1 \subset e$ для $x \in l^p$ вытекает существование предела

$$\lim_k \delta_k(x, t)$$

почти всюду на e_1 для этого же $x \in l^p$, где

$$\delta_k(x, t) = \sum_{\nu=0}^{k} \Delta_{k\nu} \xi_\nu \varphi_\nu(t)$$

и $D = (\Delta_{k\nu})$. Если же $B \subset D$ и $D \subset B$, то говорят, что методы D и B равносильны в классе рядов (1.1) и обозначают $B \sim D$.

Если ряд (1.1) почти всюду на $e_1 \subset e$ является $A[B]_r$-суммируемым, то в силу неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{nk}[\beta_k(x, t) - y(t)]\right| \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\right\}^{(r-1)/r} \tau_n(r, A, B, x, t)$$

получаем, что ряд (1.1) почти всюду на e_1 является AB-суммируемым, т. е. почти всюду на e_1 сходится последовательность

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\beta_k(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk}\beta_{k\nu}\xi_\nu\varphi_\nu(t).$$

С другой стороны, B-суммируемость ряда (1.1) почти всюду на e_1 к функции y в силу регулярности метода A влечет за собой $A[B]_r$-суммируемость почти всюду на e_1 ряда (1.1). Итак, если $AB \sim D$ и $CD \sim B$, то и $A[B]_r \sim C[D]_r$.

Тем самым, проблема эквивалентности $A[B]_r$-суммируемости и $C[D]_r$-суммируемости рядов (1.1) почти всюду на e для $x \in l^p$, сводится к проблеме эквивалентности AB-суммируемости и D-суммируемости почти всюду на e рядов (1.1) для $x \in l^p$. В настоящей статье мы решаем последнюю проблему в случае, когда A, B и D либо методы Рисса $P^\varkappa$ и $R^\varkappa$, порядка $\varkappa$ (в частности методы Чезаро $C^\varkappa$), либо обобщенные методы Гельдера $H^\varkappa$ порядка $\varkappa$, причем методы $P^\varkappa$, $R^\varkappa$ и $H^\varkappa$ задаются соответственно следующими треугольными матрицами преобразования ряда в последовательность:

$$\pi^\varkappa{}_{nk} = (1 - P_{k-1}/P_n)(1 - P_{k-1}/P_{n+1}) \dots (1 - P_{k-1}/P_{n+\varkappa-1}),$$

$$\varrho^\varkappa{}_{nk} = (1 - P_{k-1}/P_n)^\varkappa,$$

$$\gamma^1{}_{nk} = \pi^1{}_{nk} = \varrho^1{}_{nk}, \quad \gamma^\varkappa{}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \gamma^{\varkappa-1}{}_{\nu k} \Delta \gamma^1{}_{n\nu} \qquad (\varkappa > 1),$$

или же

$$\gamma^1{}_{nk} = \bar{\Delta} \pi^1{}_{nk} = \bar{\Delta} \varrho^1{}_{nk},$$

$$\gamma^\lambda{}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \gamma^1{}_{n\nu} \gamma^{\lambda-1}{}_{\nu k} \qquad \text{при} \qquad 2 \leqslant \lambda < \varkappa$$

и

$$\gamma^\varkappa{}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \pi^1{}_{n\nu} \gamma^{\varkappa-1}{}_{\nu k},$$

где $\{P_k\}$ — заданная последовательность с $0 < P_k \uparrow \infty$ и $P_{-1} = 0$.

Мы воспользуемся следующими результатами из работ [7, 3].

Лемма 1. *Для того, чтобы измеримая на e функция g была конечной почти всюду на e, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлось измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ такое, что*

$$\int_{T_\varepsilon} |g(t)|\, dt < \infty.$$

Лемма 2. *Для того, чтобы последовательность измеримых конечных почти всюду на e функций f_n почти всюду на e удовлетворяла условию[2] $f_n(t) = O_t(1)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, чтобы неравенство*

$$\left|\int_a^b \sum_{n=0}^{m} \chi^\varepsilon{}_{mn}(t) f_n(t)\, dt\right| \leqslant M_\varepsilon$$

выполнялось равномерно относительно всех подразделений $\mathfrak{R}^\varepsilon{}_m = \{\mathfrak{R}^\varepsilon{}_{mn}\}$ множества T_ε на произвольное число $m+1$ измеримых непересекающихся частей, где $\chi^\varepsilon{}_{mn}$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{R}^\varepsilon{}_{mn}$.

---

[2] Об обозначении $O_t(1)$ см. [1], стр. 46.

Лемма 3. *Пусть F_n — непрерывные линейные операторы из пространства l^p в пространство M_e всех измеримых конечных почти всюду на e функций. Для того, чтобы почти всюду на e существовал предел*

$$\lim_n F_n(x, t) \tag{1.5}$$

для всех $x \in l^p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1° *предел* (1.5) *существует почти всюду на e для всех x из некоторого тотального в l^p множества,*

2° $F_n(x,t) = O_t(1)$ *почти всюду на e для каждого $x \in l^p$.*

Лемма 4. *Пусть система φ удовлетворяет условию* (1.4). *Тогда найдется постоянная $M_1 > 0$ такая, что для всех чисел c_k*

$$\int_a^b (\max_{n\leqslant m} |\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(t)|)^p\, dt \leqslant M_1 \ln^p m \sum_{k=0}^m |c_k|^p. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (1.6) достаточно показать, что равномерно относительно всех подразделений $\mathfrak{M}_m = \{\mathfrak{M}_{mn}\}$ отрезка e на произвольное число $m+1$ измеримых непересекающихся частей $\mathfrak{M}_{mn}$ имело место неравенство

$$A_m \equiv \int_a^b |\sum_{n=0}^m \chi_{mn}(t) \sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(t)|^p\, dt \leqslant M_1 \ln^p m \sum_{k=0}^m |c_k|^p,$$

где χ_{mn} — характеристическая функция множества $\mathfrak{M}_{mn}$. При помощи формулы (15.11) из [2] получаем

$$\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(t) = \sum_{k=0}^n A^{-1/q}{}_{n-k} \sum_{\nu=0}^k A^{-1/p}{}_{k-\nu} c_\nu\varphi_\nu(t),$$

где $1/p + 1/q = 1$. Следовательно,

$$A_m = \int_a^l |\sum_{k=0}^m \sum_{\nu=0}^k A^{-1/p}{}_{k-\nu} c_\nu\varphi_\nu(t) \sum_{n=k}^m \chi_{mn}(t) A^{-1/q}{}_{n-k}|^p\, dt,$$

откуда при помощи неравенства Гельдера получаем

$$A_m \leqslant \int_a^b P_m(t) Q_m(t)\, dt,$$

где

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m |\sum_{\nu=0}^k A^{-1/p}{}_{k-\nu} c_\nu\varphi_\nu(t)|^p,$$

и

$$Q_m(t) = (\sum_{k=0}^m |\sum_{n=k}^m \chi_{mn}(t) A^{-1/q}{}_{n-k}|^q)^{p/q}.$$

Так как при $t \in \mathfrak{M}_{mi}$ и $i \geqslant k$

$$\sum_{n=k}^m \chi_{mn}(t) A^{-1/q}{}_{n-k} = A^{-1/q}{}_{i-k},$$

то

$$Q_m(t) = (\sum_{k=0}^i |A^{-1/q}{}_{i-k}|^q)^{p/q}.$$

Итак, при некотором $M_2 > 0$

$$\sup_t Q_m(t) \leqslant \max_{i \leqslant m} \left(\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{i-k+1} \right)^{p/q} \leqslant M_2 \ln^{p/q} m,$$

вследствие чего в силу условия (1.4) имеем

$$A_m \leqslant M_2 \ln^{p/q} m M \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{k} |A^{-1/p}{}_{k-\nu}|^p |c_\nu|^p \leqslant$$

$$\leqslant M M_2 \ln^{p/q} m \sum_{\nu=0}^{m} |c_\nu|^p \sum_{k=\nu}^{m} \frac{1}{k-\nu+1} \leqslant$$

$$\leqslant M M^2{}_2 \ln^p m \sum_{\nu=0}^{m} |c_\nu|^p.$$

Лемма 5. *Если система* φ *удовлетворяет условию* (1.4), *то почти всюду на* e *при* $x \in l^p$

$$S_n(x, t) = O_t(\ln n). \tag{1.7}$$

Доказательство. Покажем сначала, что почти всюду на e

$$S_{2^n}(x, t) = O_t(n). \tag{1.8}$$

Для этого в силу леммы 2 мы должны доказать неравенство

$$A^\varepsilon{}_m(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=1}^{m} \chi_{mn}(t) n^{-1} S_{2^n}(x, t)\, dt \right| \leqslant M_{\varepsilon x}.$$

Но при помощи неравенства Гельдера и условия (1.4) получаем

$$A^\varepsilon{}_m(x) \leqslant (b-a)^{1/q} \{\max_{n \leqslant m} \int_a^b |S_{2^n}(x, t)|^p\, dt \sum_{n=1}^{m} n^{-p}\}^{1/p} \leqslant M_{\varepsilon x},$$

т. е. имеет место оценка (1.8).

Покажем теперь, что почти всюду на e

$$B_n(t) \equiv \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \ln^{-1} k \left| S_k(x, t) - S_{2^n}(x, t) \right| = O_t(1). \tag{1.9}$$

Для этого достаточно показать, что почти всюду на e

$$\sum B^p{}_n(t) < \infty.$$

Из неравенства (1.6) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{m} \int_a^b B^p{}_n(t)\, dt \leqslant M_3 \sum_{n=1}^{m} n^{-p} \int_a^b [\max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} | \sum_{\nu=2^n+1}^{k} \xi_\nu \varphi_\nu(t) |]^p\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_3 M_1 \sum_{n=0}^{m} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} |\xi_\nu|^p \leqslant M_x.$$

Итак, имеет место неравенство (1.9). Теперь из неравенства

$$\sup_n \ln^{-1} n \left| S_n(x, t) \right| \leqslant \sup_n \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \ln^{-1} k \left| S_k(x, t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \left| \ln^{-1} k [S_k(x, t) - S_{2^n}(x, t)] \right| + \sup_n n^{-1} \left| S_{2^n}(x, t) \right|$$

и из неравенств (1.9) и (1.8) получаем неравенство (1.7).

Отметим, что лемма 5 сформулирована в работе [8] (см. следствие 1.4), но некорректно доказана, ибо неверна теорема 3 из [8]. Лемма 5 исправляет эту ошибку.

Эквивалентность методов суммирования и сильного суммирования почти всюду на e рядов (1.1) сравнительно мало исследовано. Отметим, что в случае ортогональных рядов известно, что методы Чезаро положительного порядка (см., например, [1], стр. 116), методы Ламберта (см. [6]) и методы Эйлера—Кноппа (см. [5]) равносильны в смысле суммируемости почти всюду на отрезке ортогональности.

Кроме того, известно (см. [1], стр. 102), что $C[C^{\alpha-1}]_2$-суммируемость и C^α-суммируемость ортогональных рядов почти всюду на e равносильны при $\alpha > 1/2$. В следствии 11.3 мы обобщаем этот результат на неортогональные ряды.

Так как операторы τ_n при $r = 2$, определяемые формулой (1.3), не являются линейными операторами из B-пространства l^2 в F-пространство M_e, то мы в этом случае не можем непосредственно воспользоваться методикой, разработанной в работе [7] для исследования суммируемости рядов (1.1) почти всюду. Поэтому мы пользуемся понятием квадратичных операторов (ср. [4], стр. 67) и обобщаем одну теорему Банаха (см. [3], стр. 361) на квадратичные операторы.

Параграфы 1, 2 и 5 написал Х. Тюрнпу, параграф 3 написали К. Лыхмус и Х. Тюрнпу, а параграф 4 написали Т. Салуяэр и Х. Тюрнпу.

§ 2. Квадратичные операторы

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ суть F-пространства. В данном параграфе через $\|x\|$ мы обозначаем F-норму элемента x из $\mathfrak{X}$ (см. [3], стр. 64).

Говорят, что *оператор* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *является квадратичным оператором*, если для произвольных $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ и каждого вещественного числа $\alpha \neq 0$ имеет место равенство

$$f(x_1+x_2) = \frac{\alpha-1}{\alpha} f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) + \frac{1}{\alpha} f(x_1+\alpha x_2). \qquad (2.1)$$

Если в равенстве (2.1) положить $x_1 = x_2 = \Theta$ и $\alpha = -1$, то получаем, что

$$f(\theta) = 3f(\theta),$$

т. е.

$$f(\theta) = \theta. \qquad (2.2)$$

Далее, если в равенстве (2.1) положить $x_1 = \theta$, то в силу равенства (2.2) имеем

$$\alpha^2 f(x_2) = f(\alpha x_2). \qquad (2.3)$$

Итак, квадратичный оператор является квадратично однородным оператором.

Отметим, что класс квадратичных операторов не пустой, так как в него входят, например, все операторы вида

$$f(x)=F(x, x), \tag{2.4}$$

где F — билинейный оператор из $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. На самом деле, так как для всех $\alpha\neq 0$

$$f(x_1+\alpha x_2)=f(x_1)+\alpha^2 f(x_2)+\alpha[F(x_1, x_2)+F(x_2, x_1)], \tag{2.5}$$

то

$$F(x_1, x_2)+F(x_2, x_1)=\frac{1}{\alpha}f(x_1+\alpha x_2)-\frac{1}{\alpha}f(x_1)-\alpha f(x_2),$$

и, следовательно, из равенства (2.5) при $\alpha=1$ вытекает, что

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+\frac{1}{\alpha}f(x_1+\alpha x_2)-\frac{1}{\alpha}f(x_1)-\alpha f(x_2),$$

т. е. f является квадратичным оператором.

Пусть квадратичный оператор $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ непрерывен в точке $\theta\in\mathfrak{X}$. Из равенства (2.1) при $x_2=-x_3$ вытекает, что при $\alpha\neq 1$

$$f(x_1)-\alpha f(x_3)=\frac{\alpha}{\alpha-1}f(x_1-x_3)+\frac{1}{1-\alpha}f(x_1-\alpha x_3).$$

Следовательно,

$$f(x_1)-f(x_3)=\frac{\alpha}{\alpha-1}f(x_1-x_3)+\frac{1}{1-\alpha}f(x_1-\alpha x_3)+(\alpha-1)f(x_3). \tag{2.6}$$

Теперь при $\alpha>1$ в силу равенства (2.3) имеем

$$\|f(x_1)-f(x_3)\|\leqslant\left\|f\left(\frac{\sqrt{\alpha}(x_1-x_3)}{\sqrt{\alpha-1}}\right)\right\|+\left\|f\left(\frac{x_1-\alpha x_3}{\sqrt{\alpha-1}}\right)\right\|+$$

$$+\|f(\sqrt{\alpha-1}\,x_3)\|. \tag{2.7}$$

Так как f непрерывен в точке $\theta\in\mathfrak{X}$, то для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\delta_\varepsilon>0$ такое, что из $\|x_1-x_3\|<\delta_\varepsilon$ следует $\|f(x_1-x_3)\|<\varepsilon/3$. С другой стороны, найдутся числа $\delta'>0$ и $\delta''_\varepsilon>0$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\alpha-1}<\delta' \tag{2.8}$$

влечет $\|\sqrt{\alpha-1}\,x_3\|<\delta_\varepsilon/2$, а неравенство

$$\|x_1-x_3\|<\delta''_\varepsilon \tag{2.9}$$

влечет

$$\left\|\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(x_1-x_3)\right\|<\frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad\text{и}\quad \left\|\frac{x_1-x_3}{\sqrt{\alpha-1}}\right\|<\frac{\delta_\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, из неравенств (2.8) и (2.9) вытекает

$$\left\|\frac{x_1-\alpha x_3}{\sqrt{\alpha-1}}\right\|\leqslant\left\|\frac{x_1-x_3}{\sqrt{\alpha-1}}\right\|+\|x_3\sqrt{\alpha-1}\|<\delta_\varepsilon,$$

вследствие чего имеют место следующие неравенства

$$\left\| f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(x_1 - x_3) \right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\| f\left(\frac{x_1 - \alpha x_3}{\sqrt{\alpha-1}} \right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$\| f(x_3\sqrt{\alpha-1}) \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из неравенства (2.7) заключаем теперь непрерывность оператора в произвольной точке пространства $\mathfrak{X}$.

В дальнейшем нам нужно еще следующее понятие.

Мы говорим, что *оператор* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *является субквадратичным оператором*, если для всех x_1 и x_2 из $\mathfrak{X}$ и всех $\alpha \neq 0$ имеют место

$$\|f(x_1+x_2)\| \leqslant \left\| \frac{\alpha-1}{\alpha} f(x_1) \right\| + \|(\alpha-1)f(x_2)\| + \left\| \frac{1}{\alpha} f(x_1+\alpha x_2) \right\|,$$

$$\|f(\alpha x_1)\| = \|\alpha_2 f(x_1)\|. \tag{2.10}$$

Из (2.1) и (2.3) получаем, что каждый квадратичный оператор является субквадратичным оператором.

Для субквадратичных операторов имеет место следующий принцип равнонепрерывности:

Теорема 1. *Если для последовательности непрерывных субквадратичных операторов* $f_n: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *множество*

$$\{f_n(x)\}$$

точечно ограничено в пространстве $\mathfrak{Y}$, *то равномерно относительно* n

$$\lim_{x \to \Theta} f_n(x) = \Theta.$$

Доказательство. Рассмотрим для фиксированного $\alpha > 1$ и произвольного $\varepsilon > 0$ множества

$$F_k = \left\{ x \in X : \left\| \frac{1}{k} f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\, x \right) \right\| + \left\| \frac{1}{k} f_n(\sqrt{\alpha-1}\, x) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{k} f_n\left(x \frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Из непрерывности операторов f_n вытекает, что множества F_k замкнуты в $\mathfrak{X}$. Кроме того, из точечной ограниченности множества $\{f_n(x)\}$ следует, что

$$\bigcup_k F_k = \mathfrak{X}.$$

Теперь по теореме Бэра о категориях найдутся шар $S(x_0, \delta)$ и индекс $\varkappa$ такие, что $F_\varkappa \supset S(x_0, \delta)$. Следовательно, если $x \in S(x_0, \delta)$, то

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\, x\right)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.11}$$

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n(\sqrt{\alpha-1}\, x) \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.12}$$

и

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n\left(x \frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.13}$$

Найдем теперь $\delta' \in (0, \delta]$ такое, что из $\|x\| < \delta'$ следует $\|x/(1-\alpha)\| < \delta$ и

$$x_1 = x_0 + x \in S(x_0, \delta). \tag{2.14}$$

Тогда из неравенства (2.11) получаем, что

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n\left((x_0+x)\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ввиду (2.14)

$$x_2 = \frac{1}{1-\alpha}(x_0 + x - \alpha x_0) \in S(x_0, \delta).$$

Следовательно, учитывая равенство

$$\left\| f_n\left(\frac{x_0+x-\alpha x_0}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\| = \left\| f_n\left(\frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}} x_2\right)\right\|,$$

из неравенства (2.13) получаем, что

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n\left(\frac{x_0+x-\alpha x_0}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, из неравенства (2.12) вытекает, что

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} f_n(x_0\sqrt{\alpha-1}) \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда ввиду $x = x_1 - x_0$, из неравенства (2.10) заключаем, что $\|x\| < \delta'$ влечет

$$\left\| f_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right\| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Так как отображение $x \to x/\sqrt{\varkappa}$ — геоморфизм пространства $\mathfrak{X}$ на себя, то теорема доказана.

При помощи теоремы 1 мы можем доказать следующее утверждение, обозначая $f_n(x, t) = y_n(t)$ и $y_n = f_n(x)$.

Теорема 2. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных квадратичных операторов из F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространство M_e. Для того, чтобы последовательность $\{y_n(t)\}$ сходилась почти всюду на отрезке e для всех $x \in \mathfrak{X}$, необходимо и достаточно, чтобы*

1° *последовательность $\{y_n(t)\}$ сходилась почти всюду на отрезке e для всех x из всюду плотного подмножества $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$.*

2° *функция* $\sup|y_n(t)| < \infty$ *для всех* $x \in \mathfrak{X}$ *и почти всех* $t \in e$.

Доказательство. Необходимость выполнения условии 1° и 2° очевидна.

Достаточность. Определим операторы V_n, V и W из F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространстве M_e соответственно равенствами:

$$V_n(x, t) \equiv v_n(x, t) = \max_{m \leqslant n} |f_m(x, t)|,$$

$$V(x, t) \equiv v(x, t) = \sup_n |f_n(x, t)|,$$

$$W(x, t) \equiv w(x, t) = \lim_n \sup_{m, p > n} |f_m(x, t) - f_p(x, t)|.$$

Из определения следует, что V_n — непрерывные субквадратичные операторы из $\mathfrak{X}$ в M_e, причем для всех вещественных λ имеет место неравенство

$$\|\lambda v_n(x)\| \leqslant \|\lambda v(x)\|. \tag{2.15}$$

Так как в силу условия 2° в пространстве M_e для всех $x \in \mathfrak{X}$

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda v(x) = \theta,$$

то из неравенства (2.15) вытекает, что множество $\{V_n(x)\}$ точечно ограничено в пространстве M_e. По теореме 1 тогда $V_n(x) \to \hat{\theta}$ при $x \to \theta$ равномерно относительно n. Так как $V(\hat{\theta}) = \theta$ и $V_n(x, t) \to V(x, t)$ при $n \to \infty$ почти всюду на e, то и подавно $V_n(x) \to V(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве M_e. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_\varepsilon > 0$ и $N_{\varepsilon x} > 0$ такие, что $\|x\| < \delta_\varepsilon$ влечет $\|V_n(x)\| < \varepsilon/2$ равномерно относительно n, а $n > N_{\varepsilon x}$ влечет $\|V_n(x) - V(x)\| < \varepsilon/2$. Отсюда вытекает, что $V(x) \to \hat{\theta}$ при $x \to \theta$, т. е. оператор V является непрерывным в точке $\theta \in \mathfrak{X}$. Но, так как почти всюду на e имеем $W(x, t) \leqslant 2V(x, t)$, то подавно $\|W(x)\| \leqslant \|2V(x)\|$. Следовательно, оператор W непрерывен в точке $\theta \in \mathfrak{X}$. Поскольку ввиду (2.6)

$$|w(x_1, t) - w(x_2, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \sup_{m, p > n} |[f_m(x_1, t) - f_p(x_1, t)] - [f_m(x_2, t) - f_p(x_2, t)]| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \sup_{m, p > n} \left| f_m\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}(x_1 - x_2), t\right) - f_p\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}(x_1 - x_2), t\right)\right| +$$

$$+ \lim_n \sup_{m, p > n} \left| f_m\left(\frac{x_1 - ax_2}{\sqrt{a-1}}, t\right) - f_p\left(\frac{x_1 - ax_2}{\sqrt{a-1}}, t\right)\right| +$$

$$+ \lim_n \sup_{m, p > n} |f_m(\sqrt{a-1}\, x_2, t) - f_p(\sqrt{a-1}\, x_2, t)| =$$

$$= w\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}(x_1 - x_2), t\right) + w\left(\frac{x_1 - ax_2}{\sqrt{a-1}}, t\right) + w(\sqrt{a-1}\, x_2, t),$$

то подавно

$$\|w(x_1)-w(x_2)\| \leqslant \left\|w\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}(x_1-x_2)\right)\right\| +$$
$$+\left\|w\left(\frac{x_1-ax_2}{\sqrt{a-1}}\right)\right\| + \|w(\sqrt{a-1}x_2)\|.$$

Сравнивая последнее с (2.7), обнаруживаем, что непрерывность всюду на $\mathfrak{X}$ оператора W можем получить таким же рассуждением, как при доказательстве непрерывности всюду на $\mathfrak{X}$ квадратичного оператора f. Так как $W(x)=\theta$ для всех $x \in \mathfrak{X}_1$ с $[\mathfrak{X}_1]=\mathfrak{X}$ по условию 1° теоремы 2, то в силу непрерывности оператора W всюду на $\mathfrak{X}$ получаем, что $W(x)=\theta$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Итак, последовательность $\{y_n(t)\}$ фундаментальна для почти всех $t \in e$, откуда и получаем сходимость последовательности $\{y_n(t)\}$ для всех $x \in \mathfrak{X}$ почти всюду на e.

Если мы в доказательстве теоремы 2 положим

$$w(x,t)=\lim_n \sup_{m>n} |f_m(x,t)-f(x,t)|,$$

где f — заданный квадратичный оператор, то получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных квадратичных операторов из F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространство M_e, а f — заданный непрерывный квадратичный оператор. Для того, чтобы последовательность $y_n(t)$ точечно сходилась на $\mathfrak{X}$ к $f(x,t)$ для почти всех $t \in e$, необходимо и достаточно, чтобы*

1° $\lim y_n(t)=f(x,t)$ *для всех x из всюду плотного подмножества $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ и почти всех $t \in e$,*

2° *функции* $\sup |y_n(t)| < \infty$ *для всех $x \in \mathfrak{X}$ и почти всех $t \in e$.*

§ 3. Эквивалентность методов Рисса

В этом параграфе мы докажем, что для методов Рисса имеет место соотношение $P^\varkappa \sim R^\lambda \sim P^1$. Для этого докажем сперва следующее утверждение.

Теорема 4. *Если система φ удовлетворяет условию* (1.4), *то для того, чтобы ряд* (1.1) *для $x_0 \in l^p$ почти всюду на $e_1 \subset e$ был $R^\varkappa$-суммируемым, необходима и достаточна сходимость почти всюду на e_1 подпоследовательности $\{S_{m(n)}(x_0,t)\}$ с индексами $m(n)$, удовлетворяющими условию*

$$1<r_1 \leqslant P_{m(n+1)}/P_{m(n)} \leqslant r_2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1 является $R^\varkappa$-суммируемым. Тогда существует предел

$$\lim_n \sigma^\varkappa{}_{m(n)}(x_0,t),$$

где

$$\sigma^{\varkappa}{}_{m(n)}(x_0, t) = \sum_{k=0}^{m(n)} \varrho^{\varkappa}{}_{m(n),k} \xi^0{}_k \varphi_k(t).$$

Докажем, что почти всюду на e_1 сходится подпоследовательность $S_{m(n)}(x_0, t)\}$. Для этого достаточно показать, что для всех $x \in l^p$ почти всюду на e существует предел

$$\lim_n \beta^{\varkappa}{}_n(x, t), \tag{3.2}$$

где

$$\beta^{\varkappa}{}_n(x, t) = S_{m(n)}(x, t) - \overset{\varkappa}{\sigma}_{m(n)}(x, t).$$

Так как операторы $\beta^{\varkappa}{}_n$ являются непрерывными линейными операторами из пространства l^p в пространстве M_e, для которых условие 1° леммы 3 выполнено, то по лемме 2 для существование предела (3.2) надо показать, что для всех $\varepsilon > 0$ и $x \in l^p$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, при которых

$$\left|\int_a^b \sum_{n=0}^{s} \chi^{\varepsilon x}{}_{sn}(t) \beta^{\varkappa}{}_n(x, t)\, dt\right| \leqslant M_{\varepsilon x}. \tag{3.3}$$

Но так как

$$\varrho^{\varkappa}{}_{nk} = \sum_{j=0}^{\varkappa} c^j{}_{\varkappa}(-1)^j P^j{}_{k-1} P^{-j}{}_n, \tag{3.4}$$

то достаточно установить существование постоянной $N_{\varepsilon x} > 0$ такой, что

$$C^{\varepsilon}{}_s(x) \equiv \left|\int_a^b \sum_{n=0}^{s} \chi^{\varepsilon x}{}_{sn}(t) \sum_{k=0}^{m(n)} P^j{}_{k-1} P^{-j}{}_{m(n)} \xi_k \varphi_k(t)\, dt\right| \leqslant N_{\varepsilon x},$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant \varkappa$. Далее, в силу неравенства Гельдера имеем

$$C^{\varepsilon}{}_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q} \left\{\int_a^b \sum_{n=0}^{s} \left|\sum_{k=0}^{m(n)} P^{-j}{}_{m(n)} P^j{}_{k-1} \xi_k \varphi_k(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Применяя условие (1.4) и изменяя порядок суммирования, при помощи (3.1) получаем

$$C^2{}_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q} M \left\{\sum_k r_1^{-kp}\right\}^{1/p} \|x\| = N_{\varepsilon x}.$$

Итак, имеет место неравенство (3.3), чем необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Пусть $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ сходится почти всюду на e_1. Тогда по доказанному выше почти всюду на e_1 существует предел

$$\lim_n \sigma^{\varkappa}{}_{m(n)}(x_0, t).$$

Покажем, что всюду на e_1 существует также предел

$$\lim_n \sigma^{\varkappa}{}_n(x_0, t).$$

Для этого достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum D_n, \tag{3.5}$$

где

$$D_n = \int\limits_{e_1 \cap T_\varepsilon} [\max_{m(n)<k<m(n+1)} |\sigma^\varkappa_k(x_0, t) - \sigma^\varkappa_{m(n)}(x_0, t)|]^p\, dt.$$

Но так как

$$D_n \leqslant \int\limits_{e_1 \cap T_\varepsilon} \Big(\sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} |\sigma^\varkappa_\nu(x_0, t) - \sigma^\varkappa_{\nu-1}(x_0, t)|\Big)^p\, dt,$$

то при помощи неравенства Гельдера и условия (3.1) получаем, что

$$D_n \leqslant \Big\{\sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} p_\nu P^{-1}_\nu\Big\}^{p-1} \int\limits_{e_1 \cap T_\varepsilon} \sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} p_\nu^{1-p} P_\nu^{p-1} \times$$

$$\times |\sigma^\varkappa_\nu(x_0, t) - \sigma^\varkappa_{\nu-1}(x_0, t)|^p\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (2r_2)^{p-1} \sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} p_\nu^{1-p} P_\nu^{p-1} \int\limits_{e_1 \cap T_\varepsilon} |\sigma^\varkappa_\nu(x_0, t) - \sigma^\varkappa_{\nu-1}(x_0, t)|^p\, dt.$$

Учитывая (3.4), имеем

$$\sigma^\varkappa_\nu(x_0, t) - \sigma^\varkappa_{\nu-1}(x_0, t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\varkappa} \sum_{i=0}^{j-1} C^j_\varkappa (-1)^j p_\nu P^{-i-1}_\nu P^{i-j}_{\nu-1} \sum_{k=0}^{\nu} P^j_{k-1} \xi_k \varphi_k(t).$$

Следовательно, если найдется постоянная $N_{\varepsilon p \varkappa} > 0$ такая, что для всех $1 \leqslant j \leqslant \varkappa$, $0 \leqslant i \leqslant j-1$ и $s \geqslant 0$

$$E^\varepsilon_\varepsilon(x) \equiv \sum_{n=0}^{s} \sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} p_\nu P_\nu^{-ip-1} P_{\nu-1}^{ip-jp} \int\limits_{e_1 \cap T_\varepsilon} \Big|\sum_{k=0}^{\nu} P^j_{k-1} \xi_k \varphi_k(t)\Big|^p\, dt \leqslant$$

$$\leqslant N_{\varepsilon p \varkappa}, \tag{3.6}$$

то ряд (3.5) сходится.

Но в силу условий (1.4) и (3.1)

$$E^\varepsilon_s(x) \leqslant M_\varepsilon r_2^2 \sum_{n=0}^{s} P^{-pj}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n+1)} P^{pj}_{k-1} |\xi_k|^p \leqslant M_\varepsilon r_2^2 \|x\|^p \sum_\nu r_1^{-jp\nu}.$$

Следовательно, из $r_1 > 1$ заключаем справедливость неравенства (3.6). Теорема доказана.

Отметим, что теорема 4 при $\varkappa = 1$ сформулирована и в работе [7] (см. стр. 208, теорема 4), но доказательство достаточности там неточна. Доказательство теоремы 4 исправляет эту неточность.

Учитывая, что для метода суммирования $P^\varkappa$ справедлива формула

$$\pi^\varkappa_{nk} = 1 - P_{k-1}(P^{-1}_n + \ldots + P^{-1}_{n+\varkappa-1}) +$$
$$+ P^2_{k-1}(P^{-1}_n P^{-1}_{n+1} + \ldots + P^{-1}_{n+\varkappa-2} P^{-1}_{n+\varkappa-1}) +$$
$$+ \ldots + (-1)^\varkappa P^\varkappa_{k-1} P^{-1}_n P^{-1}_{n+1} \ldots P^{-1}_{n+\varkappa-1}, \tag{3.7}$$

то, повторяя доказательство теоремы 4, получается

Теорема 5. *Если система φ удовлетворяет условию (1.4), то для того, чтобы ряд (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на $e_1 \subset e$ был $P^\varkappa$-суммируемым, необходима и достаточна сходимость почти всюду на e_1 подпоследовательности $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ с индексами $m(n)$, удовлетворяющими условию (3.1).*

Из теорем 4 и 5 получаем следующее

Следствие 5.1. *Если система* φ *удовлетворяет условию* (1.4), *то для всех натуральных* $\varkappa$ *и* λ

$$R^{\varkappa} \sim P^{\lambda} \sim P^{1}.$$

§ 4. Эквивалентность методов Гельдера

В настоящем параграфе мы докажем, что в классе рядов (1.1) все методы Гельдера $H^{\varkappa}$ равносильны. Кроме того, мы покажем эквивалентность методов $R^{\varkappa}P^{\lambda}$ и $P^{\varkappa}R^{\lambda}$.

Теорема 6. *Пусть система* φ *удовлетворяет условию* (1.4). *Для того, чтобы ряд* (1.1) *почти всюду* на $e_1 \subset e$ *для* $x_0 \in l^p$ *был* $R^{\varkappa}R^{\lambda}$*-суммируемым, необходима и достаточна сходимость почти всюду на* e_1 *последовательности* $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ *с индексами, удовлетворяющими условию* (3.1).

Доказательство. Необходимость. Как и в доказательстве теоремы 4, мы должны установить справедливость неравенства (3.3), заменив в нем $\beta^{\varkappa}{}_n(x_0, t)$ на

$$\beta^{\varkappa\lambda}{}_n(x_0, t) = S_{m(n)}(x_0, t) - \sum_{k=0}^{m(n)} \gamma^{\varkappa\lambda}{}_{m(n),k}\xi^0{}_k\varphi_k(t),$$

где

$$\gamma^{\varkappa\lambda}{}_{sk} = \sum_{\nu=k}^{s} \bar{\Delta}\varrho^{\lambda}{}_{\nu k}\varrho^{\varkappa}{}_{s\nu}.$$

В силу формулы (3.4) имеем

$$\sum_{k=0}^{m(n)} \gamma^{\varkappa\lambda}{}_{m(n),k}\xi^0{}_k\varphi_k(t) =$$

$$= S_{m(n)}(x_0, t) + \sum_{j=1}^{\lambda} C^j{}_{\lambda}(-1)^j \sum_{k=0}^{m(n)} P^{-j}{}_{m(n)}P^{-j}{}_{k-1}\xi^0{}_k\varphi_k(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\varkappa} C^l{}_{\varkappa}(-1)^l \sum_{k=0}^{m(n)} \xi^0{}_k\varphi_k(t) \sum_{\nu=k}^{m(n)} \Delta\varrho^{\lambda}{}_{\nu k}P^l{}_{\nu-1}P^{-l}{}_{m(n)}.$$

Так как

$$\bar{\Delta}\varrho^{\lambda}{}_{\nu k} = \sum_{j=1}^{\lambda} C^j{}_{\lambda}(-1)^{j+1} \sum_{i=0}^{j-1} P^{i-j}{}_{\nu}P^{-i-1}{}_{\nu-1}p_{\nu}P^j{}_{k-1}, \tag{4.1}$$

то неравенство (3.3) имеет место, когда существует постоянная $L_{\varepsilon x} > 0$ такая, что

$$F^{\varepsilon}{}_s(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{s} \chi^{\varepsilon x}{}_{sn}(t) \sum_{k=0}^{m(n)} P^{-\mu}_{m(n)}P^{\mu}_{k-1}\xi_k\varphi_k(t)\,dt \right| \leqslant L_{\varepsilon x} \tag{4.2}$$

и

$$G^{\varepsilon}{}_s(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{s} \chi^{\varepsilon x}{}_{sn}(t) \sum_{k=0}^{m(n)} \xi_k\varphi_k(t) \sum_{\nu=k} P^{l-i-1}_{\nu-1}P^{i-j}_{\nu}p_{\nu}P^{j}_{k-1}P^{-l}_{m(n)}\,dt \right| \leqslant L_{\varepsilon x}, \tag{4.3}$$

для всех $1 \leqslant \mu \leqslant \varkappa$, $1 \leqslant l \leqslant \varkappa$, $0 \leqslant i \leqslant j-1$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda$ и $s > 0$. Так как $F^{\varepsilon}{}_s(x) = C^{\varepsilon}{}_s(x)$, то найдется $L_{\varepsilon x} > 0$ такая, что неравенство (4.2) имеет место. Далее, применяя неравенство

Гельдера для интеграла и суммы с учетом условия (1.4) и неубывания последовательности $\{P_k\}$, получаем

$$G^\varepsilon_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q}\{\sum_{n=0}^{s} P^{-lp}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n)} |\xi_k|^p P^{jp}_{k-1} (\sum_{\nu=k}^{m(n)} P^{l-i-1}_{\nu-1} P^{i-j}_{\nu} p_\nu)^p\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)^{1/q}\{\sum_{n=0}^{s} P^{-p}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n)} |\xi_k|^p P^p_{k-1} (\sum_{\nu=k}^{m(n)} P^{-1}_\nu p_\nu)^p\}^{1/p}.$$

Но, так как в силу условия (3.1)

$$\sum_{\nu=k}^{m(n)} P^{-1}{}_\nu p_\nu \leqslant M_1 j \ln r_2,$$

где j определяется из соотношения $P_{m(j)-1} < P_{k-1} \leqslant P_{m(j)}$, то

$$G^\varepsilon_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q}\|x\|\{\sum_j r_1^{-pj} j^p\}^{1/p} M_1 \ln r_2 = L_{\varepsilon x}.$$

Достаточность. Как и в доказательстве теоремы 4, мы должны показать, что сходится ряд (3.5), заменяя в нем $\sigma^\varkappa{}_n(x,t)$ на

$$\sigma^{\varkappa\lambda}{}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k}^{n} \bar{\Delta}\varrho^\lambda{}_{\nu k}\varrho^\varkappa{}_{n\nu}\xi_k\varphi_k(t).$$

Учитывая, что теперь

$$D_n = \int_{e_1\cap T_\varepsilon} [\max_{m(n)<k\leqslant m(n+1)} |\sigma^{\varkappa\lambda}{}_k(x,t) - \sigma^{\varkappa\lambda}{}_{m(n)}(x,t)|]^p\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (2r_2)^{p-1} \int_{e_1\cap T_\varepsilon} \sum_{\nu=m(n)+1}^{m(n+1)} P^{p-1}_\nu p^{1-p}_\nu |\sigma^{\varkappa\lambda}{}_\nu(x,t) - \sigma^{\varkappa\lambda}{}_{\nu-1}(x,t)|^p\, dt,$$

мы в силу формул (4.1) и (3.4) получаем, что найдется постоянная $N_\varepsilon > 0$ такая, что

$$D_n \leqslant N_\varepsilon P^{-p}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n+1)} |\xi_k|^p P^p_{k-1}, \tag{4.4}$$

Итак,

$$\sum_n D_n \leqslant N_\varepsilon \sum_n P^{-p}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n+1)} |\xi_k|^p P^p_{k-1} \leqslant N_\varepsilon \|x\| \sum_j r_1^{-jp} < \infty.$$

Теорема доказана.

Учитывая формулы (3.7) и

$$\bar{\Delta}\pi^\varkappa{}_{nk} = P^{-1}{}_{n-1}P^{-1}{}_{n+\varkappa-1}(p_n + \ldots + p_{n+\varkappa-1})P_{k-1}\pi^{\varkappa-1}{}_{nk},$$

мы можем аналогично доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть система φ удовлетворяет условию (1.4). Для того, чтобы ряд (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на $e_1 \subset e$ был $R^\varkappa P^\lambda$-суммируемым (или $P^\varkappa R^\lambda$-суммируемым, или $P^\varkappa P^\lambda$-суммируемым), необходима и достаточна сходимость почти всюду на e_1 подпоследовательности частичных сумм ряда (1.1) $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ с индексами, удовлетворяющими условию (3.1).*

Следствие 7.1. *Если система φ удовлетворяет условию (1.4), то для произвольных натуральных чисел $k_1, \ldots, k_{10}$*

$$R^{k_1}R^{k_2} \sim R^{k_3}P^{k_4} \sim P^{k_5}R^{k_6} \sim P^{k_7}P^{k_8} \sim P^{k_9} \sim R^{k_{10}} \sim P^1.$$

Доказательство вытекает из теорем 7, 6, 5 и 4.

Следствие 7.2. *Если система φ удовлетворяет условию* (1.4), *то* $H^2 \sim P^1$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 7, если в нем положить, например, $\varkappa = \lambda = 1$.

Для методов Гельдера $H^\varkappa$ имеет место следующая

Теорема 8. *Если система φ удовлетворяет условию* (1.4), *то для всех натуральных* $\varkappa$

$$H^\varkappa \sim H^1 = P^1.$$

Доказательство. Так как всегда $P^1 \subset H^\varkappa$, то надо лишь установить, что $H^\varkappa \subset P^1$. Пусть для $x_0 \in l^p$ ряд (1.1) почти всюду на $e_1 \subset e$ является $H^\varkappa$-суммируемым, т. е. почти всюду на e_1 существует предел

$$\lim_n \sigma^\varkappa{}_n (x_0, t),$$

где

$$\sigma^\varkappa{}_n (x_0, t) = \sum_{k=0}^{n} \gamma^\varkappa{}_{nk} \xi^0{}_k \varphi_k (t).$$

Тогда почти всюду на e_1 подавно существует предел

$$\lim_n \sigma^\varkappa{}_{m(n)} (x_0, t),$$

где последовательность $\{m(n)\}$ удовлетворяет условию (3.1). Так как

$$\sigma^\varkappa{}_{m(n)} (x_0, t) = \sigma^{\varkappa-1}{}_{m(n)} (x_0, t) - \delta^\varkappa{}_n (x_0, t),$$

где

$$\delta^\varkappa{}_n = P^{-1}{}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n)} P_{k-1} \xi^0{}_k \varphi_k (t) \Delta^\varkappa{}_{m(n),k},$$

и

$$\Delta^\varkappa{}_{m(n),k} = \sum_{k_{\varkappa-1}=k}^{m(n)} p_{k_{\varkappa-1}} P^{-1}{}_{k_{\varkappa-1}} \dots \sum_{k_1=k}^{k_2} p_{k_1} P^{-1}{}_{k_1},$$

то

$$\sigma^\varkappa{}_{m(n)} (x_0, t) = S_{m(n)} (x_0, t) - \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \delta^\lambda{}_n (x_0, t),$$

где

$$\delta^1{}_n (x_0, t) = P^{-1}{}_{m(n)} \sum_{k=0}^{m(n)} P_{k-1} \xi^0{}_k \varphi_k (t).$$

Следовательно, если мы докажем, что для всех $x \in l^p$ почти всюду на e существуют пределы

$$\lim_n \delta^\lambda{}_n (x, t), \tag{4.5}$$

с $1 \leqslant \lambda \leqslant \varkappa$, то из $H^\varkappa$-суммируемости ряда (1.1) с $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1, следует сходимость почти всюду на e_1 подпоследовательности $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ частичных сумм ряда (1.1) с индексами, удовлетворяющими условию (3.1). В силу теоремы 5 тогда ряд (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1 является P^1-суммируемым.

Мы имеем, что σ^{λ}_n являются непрерывными линейными операторами из пространства l^p в пространство M_e, для которых условие 1° леммы 3 имеет место. Следовательно, чтобы доказать существование предела (4.5) для всех $x \in l^p$ почти всюду на e надо установить лишь, что для каждых $\varepsilon > 0$ и $x \in l^p$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что для всех $1 \leqslant \lambda \leqslant \varkappa$ имело бы место неравенство

$$H^{\varepsilon}{}_s(x) \equiv \left|\int_a^b \sum_{n=0}^{s} \chi^{\varepsilon x}{}_{sn}(t)\, \delta^{\lambda}{}_n(x, t)\, dt\right| \leqslant M_{\varepsilon x}. \tag{4.6}$$

Но, так как в силу условия (1.4)

$$H^{\varepsilon}{}_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q} M\} \sum_{k=0}^{s} P^{p}_{k-1} |\xi_k|^p \sum_{m(n) \geqslant k} P^{-p}_{m(n)} |\Delta^{\lambda}{}_{m(n),k}|^p\}^{1/p},$$

а

$$|\Delta^{\lambda}{}_{m(n),k}| \leqslant \Big(\sum_{\nu=k}^{m(n)} p_\nu P^{-1}{}_\nu\Big)^{\lambda-1},$$

и в силу условия (3.1) для некоторой постоянной $N > 0$ имеем

$$\sum_{\nu=k}^{m(n)} p_\nu P^{-1}{}_\nu \leqslant N \ln (P_{m(n)} P^{-1}{}_{k-1}) \leqslant N j \ln r_2,$$

где число j определяется из неравенства $P_{m(j)-1} < P_{k-1} \leqslant P_{m(j)}$, то

$$H^{\varepsilon}{}_s(x) \leqslant (b-a)^{1/q} M N \ln r_2 \|x\| \{\sum_j j^p r_1^{-pj}\}^{1/p} = M_{\varepsilon x}.$$

Итак, неравенство (4.6) имеет место, и теорема доказана.

§ 5. Эквивалентность методов сильного суммирования

В настоящем параграфе мы исследуем эквивалентность методов сильного суммирования с показателем $r > 1$ рядов (1.1) для $x \in l^p$. В доказательствах первых теорем мы воспользуемся результатами из параграфов 3 и 4. Потом при помощи результатов параграфа 2 мы получаем более сильные утверждения для сильного суммирования с показателем $r = 2$ при $p = 2$.

Теорема 9. *Если система φ удовлетворяет условию* (1.4), *то для всех натуральных чисел $\varkappa$, λ, k, l*

$$H^k[H^l]_r \sim H^{\varkappa}[H^{\lambda}]_r \sim P^1.$$

Доказательство. Из $H^k[H^l]_r$-суммируемости ряда (1.1) почти всюду на $e_1 \subset e$ вытекает его $H^k H^l$-суммируемость почти всюду на e_1. Но, так как по определению метода $H^{\varkappa}$ метод $H^{k+l} = H^k H^l$, а в силу теоремы 6 имеем $H^{k+l} \sim H^{\varkappa}$, то $H^k H^l \sim H^{\varkappa}$. С другой стороны, H^{λ}-суммируемость ряда (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1 влечет за собой $H^{\varkappa}[H^{\lambda}]_r$-суммируемость ряда (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1, т. е. мы получим включение $H^k[H^l]_r \subset H^{\varkappa}[H^{\lambda}]_r$. Так как k, l, $\varkappa$, λ — произвольные натуральные числа, то теорема 9 доказана.

Следствие 9.1. *Для того, чтобы ряд* (1.1) *для* $x_0 \in l^p$ *почти всюду на* $e_1 \subset e$ *был* $H^\varkappa[H^\lambda]_r$*-суммируемым, необходима и достаточна сходимость почти всюду на* e_1 *подпоследовательности* $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ *с индексами, удовлетворяющими условию* (3.1).

Доказательство. Из теоремы 4 получаем, что условие следствия 9.1 является необходимым и достаточным для P_l-суммируемости ряда (1.1) почти всюду на e_1 для $x_0 \in l^p$. Из теоремы 8 вытекает, что это условие необходимо и достаточно и для H^λ-суммируемости и, следовательно, также $H^\varkappa[H^\lambda]_r$-суммируемости ряда (1.1) почти всюду на e_1 для $x_0 \in l^p$.

Для методов $R^\varkappa$ и P^λ мы сформулируем одну общую теорему, доказав его только в одном случае, ибо доказательство других случаев проводится аналогично.

Теорема 10. *Если система* φ *удовлетворяет условию* (1.4), *то для всех натуральных чисел* $\varkappa$, λ, k, l *имеют место*

$$R^\varkappa[R^\lambda]_r \sim R^k[R^l]_r, \qquad P^\varkappa[R^\lambda]_r \sim P^k[R^l]_r,$$
$$P^\varkappa[P^\lambda]_r \sim P^k[P^l]_r, \qquad R^\varkappa[P^\lambda]_r \sim R^k[P^l]_r.$$

Доказательство проведем для первого соотношения. По следствию 7.1 имеем, что $R^\varkappa[R^\lambda]_r \subset R^\varkappa R^\lambda \subset P^1$. Далее, из следствия 5.1 вытекает, что $P^1 \subset R^l$, откуда выводим, что $P^1 \subset R^k[R^l]_r$. Итак, $R^\varkappa[R^\lambda]_r \subset R^k[R^l]_r$. Ввиду произвольности $\varkappa$, λ, k, l, теорема доказана.

Следствие 10.1. *Если система* φ *удовлетворяет условию* (1.4), *то для произвольных натуральных чисел* $k_1, \ldots, k_{10}$

$$R^{k_1}[R^{k_2}]_r \sim P^{k_3}[P^{k_4}]_r \sim P^{k_5}[R^{k_6}]_r \sim R^{k_7}[P^{k_8}]_r \sim H^{k_9}[H^{k_{10}}]_r \sim P^1.$$

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 9 и 10.

Следствие 10.2. *Пусть система* φ *удовлетворяет условию* (1.4). *Для того, чтобы почти всюду на* $e_1 \subset e$ *ряд* (1.1) *для* $x_0 \in l^p$ *был* $R^\varkappa[R^\lambda]_r$*-суммируемым (или* $P^\varkappa[P^\lambda]_r$*-суммируемым, или* $R^\varkappa[P^\lambda]_r$*-суммируемым, или* $P^\varkappa[R^\lambda]_r$*-суммируемым, или* $H^\varkappa[H^\lambda]_r$*-суммируемым), необходима и достаточна сходимость подпоследовательности частичных сумм* $\{S_{m(n)}(x_0, t)\}$ *ряда* (1.1) *почти всюду на* e_1 *с индексами, удовлетворяющими условию* (3.1).

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 10.1, следствия 9.1 и теоремы 4.

Теперь мы покажем, как при помощи теоремы 3 можно получить более сильные результаты при $r = p = 2$. Пусть ряд (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на $e_1 \subset e$ является $A[B]_2$-суммируемым. Из неравенства

$$\tau_n(2, A, C, x, t) \leqslant 2\tau_n(2, A, C - B, x, t) + 2\tau_n(2, A, B, x, t),$$

где τ_n определены формулой (1.3) с $r = 2$, а

$$\tau_n(2, A, C - B, x, t) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}[\gamma_k(x, t) - \beta_k(x, t)]^2,$$

получаем, что $A[B]_2 \subset A[C]_2$, если почти всюду на e

$$\lim_n \tau_n(2, A, C - B, x, t) = 0. \tag{4.7}$$

Покажем, что τ_n — квадратичный оператор из B-пространства l^2 в F-пространство M_e. Рассмотрим билинейный оператор F_n из пространства $l^2 \times l^2$ в пространство M_e, где

$$F_n(x_1, x_2, t) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}[\gamma_k(x_1, t) - \beta_k(x_1, t)][\gamma_k(x_2, t) - \beta_k(x_2, t)].$$

Так как $F_n(x, x) = \tau_n(2, A, C—B, x)$, то, как мы отметили в § 2, τ_n — квадратичный оператор из пространства l^2 в пространство M_e. Покажем непрерывность операторов τ_n. Пусть $x \to \theta$ в пространстве l^2, тогда из неравенства

$$\tau_n(2, A, C - B, x, t) \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\{\sum_{\nu=0}^{k} (\gamma_{k\nu} - \beta_{k\nu})^2 \varphi^2{}_\nu(t)\} \|x\|^2$$

в силу конечности почти всюду функций φ_k получаем, что $\tau_n(2, A, C—B, x, t) \to 0$ почти всюду на e, и, тем более $\tau_n(2, A, C—B, x) \to \theta$ в пространстве M_e. Следовательно, операторы τ_n непрерывны всюду в пространстве l^2.

Кроме того, имеем, что при $x_i = \{\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, 0, \ldots\}$

$$\lim_n \tau_n(2, A, C - B, x_i, t) = 0 \tag{4.8}$$

почти всюду на e. На самом деле, из регулярности методов B и C выводим, что почти всюду на e

$$\lim_k \sum_{\nu=0}^{i} (\gamma_{k\nu} - \beta_{k\nu}) \xi_\nu \varphi_\nu(t) = 0,$$

вследствие чего из регулярности метода A получаем, что почти всюду на e имеет место равенство (4.8).

Итак, учитывая, что множество $\{x_i\}$ всюду плотно в l^2, выводим, что выполнено условие 1° теоремы 3. Следовательно, из теоремы 3 и леммы 2 получаем, что, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с mes $T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что имеет место

$$|I^\varepsilon{}_m(x)| \equiv |\int_a^b \sum_{n=0}^{m} \chi^{\varepsilon x}{}_{mn}(t) \tau_n(2, A, C - B, x, t)\, dt| \leqslant M_{\varepsilon x}, \tag{4.9}$$

то почти всюду на e для всех $x \in l^2$ имеет место (4.7). Но

$$I^\varepsilon{}_m(x) = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} [\sum_{\nu=0}^{k} (\gamma_{k\nu} - \beta_{k\nu}) \xi_\nu \varphi_\nu(t)]^2 \sum_{n=k}^{m} \chi^{\varepsilon x}{}_{mn}(t) a_{nk}\, dt.$$

Обозначая

$$a^m{}_k = \max_{k \leqslant n \leqslant m} |a_{nk}|$$

и применяя условие (1.4) при $p = 2$, получаем, что

$$|I^\varepsilon{}_m(x)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} \xi^2{}_\nu \sum_{k=\nu}^{m} a^m{}_k (\gamma_{k\nu} - \beta_{k\nu})^2,$$

Итак, если

$$\sup_\nu \sum_{k=\nu}^{m} a^m{}_k (\gamma_{k\nu} - \beta_{k\nu})^2 \leqslant M, \tag{4.10}$$

то

$$|I^\varepsilon{}_m(x)| \leqslant M \|x\|^2.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 11. *Если методы A, B и C удовлетворяют условию (4.10), и система φ удовлетворяет условию (1.4) с $p=2$, то $A[B]_2 \sim A[C]_2$.*

Мы не будем формулировать всех следствий, вытекающих из теоремы 11. Мы приведем лишь те, которые на наш взгляд являются интересными.

Следствие 11.1. *Если система φ при $p=2$ удовлетворяет условию (1.4), то $P^1[P^1]_2 \sim P^1[E]_2$, где E — метод сходимости.*

Доказательство. Покажем, что условие (4.10) выполнено при $\gamma_{k\nu} = (1-P_{\nu-1}/P_k)$, $\beta_{k\nu} \equiv 1$ и $a_{nk} = p_k/P_n$. На самом деле, тогда $a^m{}_k = p_k P^{-1}{}_k$ и $(\gamma_{k\nu}-\beta_{k\nu})^2 = P^2{}_{\nu-1}P^{-2}{}_k$, вследствие чего

$$\sum_{k=\nu}^{m} a^m{}_k(\gamma_{k\nu}-\beta_{k\nu})^2 = P^2{}_{\nu-1}\sum_{k=\nu}^{m} p_k P^{-3}{}_k \leqslant P_{\nu-1}\sum_{k=\nu}^{\infty} p_k P^{-1}{}_k P^{-1}{}_{k-1} \equiv 1,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что методом, использованным при доказательстве теорем 9 и 10 мы могли бы только установить, что $P^1[E]_2$-суммируемость ряда (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на $e_1 \subset e$ влечет за собой $P^1[P^1]_2$-суммируемость ряда (1.1) для $x_0 \in l^p$ почти всюду на e_1. При помощи теоремы 11 мы можем показать и обратное. Итак, комбинируя результаты теорем 7—9 и следствия 11.1, мы получим следующее

Следствие 11.2. *Если система φ удовлетворяет условию (1.4) с $p=2$, то для произвольных натуральных чисел $k_1, \ldots, k_{10}$*

$$P^{k_1}[P^{k_2}]_2 \sim R^{k_3}[R^{k_4}]_2 \sim R^{k_5}[P^{k_6}]_2 \sim P^{k_7}[R^{k_8}]_2 \sim H^{k_9}[H^{k_{10}}]_2 \sim P^1[E]_2 \sim P^1.$$

Следствие 11.3. *Если система φ удовлетворяет условию (1.4) с $p=2$, то $C^1[C^{\alpha-1}]_2 \sim C^1[C^\alpha]_2$ при $\alpha > 1/2$.*

Доказательство. Так как теперь $a^m{}_k = k^{-1}$ и

$$(\gamma_{k\nu}-\beta_{k\nu})^2 = \alpha^{-2}\nu^2 (A^{\alpha-1}{}_{k-\nu})^2 (A^\alpha{}_k)^{-2},$$

то учитывая неравенство

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} (A^{\alpha-1}{}_{k-\nu})^2 (A^\alpha{}_k)^{-2} = O(\nu^{-1}),$$

получаем, что

$$\sum_{k=\nu}^{m} a^m{}_k(\gamma_{k\nu}-\beta_{k\nu})^2 \leqslant \nu^2\alpha^{-2}\sum_{k=\nu}^{\infty} (A^{\alpha-1}{}_{k-\nu})^2 k^{-1}(A^\alpha{}_k)^{-2} = O(1).$$

Следствие 10.1 доказана.

Если φ — ортогональная система на e, то при $p=2$ условие (1.4) выполнено, и из следствия 11.3 вытекает, что из C^α-суммируемости с $\alpha > 1/2$ ортогонального ряда почти всюду на e вытекает $C^1[C^{\alpha-1}]_2$-суммируемость ортогонального ряда почти всюду на e. Это известный результат из теории ортогональных рядов (см., например, [1], стр. 116). Следствие 11.3 обобщает и расширяет последний результат на неортогональные ряды.

Еще имеет место следующее

Следствие 11.4. *Если система φ удовлетворяет условию* (1.4) *с $p=2$, то для $P^1[E]_2$-суммируемости почти всюду на $e_1 \subset e$ ряда* (1.1) *для $x_0 \in l^2$ необходимо и достаточно, чтобы подпоследовательность частичных сумм $\{S_{m(n)}(x_0 t)\}$ ряда* (1.1) *сходилась почти всюду на e_1, где $\{m(n)\}$ удовлетворяет условию* (3.1).

Доказательство вытекает из следствия 11.1 и теоремы 4.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Леви Б., Конкретные проблемы функционального анализа. Москва, 1958.
5. Зиза О., О суммировании ортогональных рядов методами Эйлера. Матем. сб., 1965, **66**, 354—377.
6. Степин В., Об одном методе суммирования ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 152—156.
7. Тюрнпу Х., О суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 199—212.
8. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 140—151.

Поступило
23 I 1974

FUNKTSIONAALRIDADE TUGEVAST SUMMEERUVUSEST

H. Türnpu, K. Lõhmus ja T. Saluäär

Resümee

Tähistagu $\varphi=\{\varphi_k\}$ lõigus $e=[a, b]$ Lebesgue' mõttes integreeruvate funktsioonide φ_k süsteemi. Me nimetame rida (1.1) peaaegu kõikjal lõigus e tugevalt AB_r-summeeruvaks $x=\{\xi_k\} \in l^p$ korral, kui peaaegu kõikjal lõigus e eksisteerib piirväärtus (1.2), kus y on rea (1.1) summa ruumi $L_e{}^p$ meetrikas. Käesolevas töös uuritakse summeerimismenetluste ekvivalentsust summeeruvuse ja tugeva summeeruvuse mõttes ridade (1.1) klassis.

ON STRONG SUMMABILITY OF SERIES OF FUNCTIONS

H. Türnpu, K. Lõhmus and T. Saluäär

Summary

Let $\varphi=\{\varphi_k\}$ denote the set of functions φ_k, integrable after Lebesgue, on $e=[a, b]$.

We say that series (1.1) on e is almost everywhere strongly summable when $x \in l^p$, by the method AB_r, ou $A[B]_r$-summable, if almost everywhere on e there exists limit (1.2), where y is the sum of series (1.1) in the $L_e{}^p$ space.

In this paper the equivalence of the methods of summability in the meaning of summability and strong summability in the class of series (1.1) is studied.

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДЛЯ СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Известно ([4], гл. III; [13], стр. 224—227) значение функций Лебега для сходимости и суммируемости простых ортогональных рядов. Недавно Алексич и Шарма [19], а затем и Мориц [22], показали, что функции Лебега играют большую роль также в исследовании вопросов сходимости и суммируемости вообще функциональных рядов.

Пусть[1] $\{f_{mn}\}$ — двойная система L_μ-интегрируемых на конечном прямоугольнике $Q = [a, b] \times [c, d]$ функций двух переменных.

В настоящей статье при помощи функций Лебега для системы $\{f_{mn}\}$ выразим признаки полной сходимости и полной суммируемости методом взвешенных средних Рисса почти всюду на множестве $E \subset Q$ функциональных двойных рядов[2]

$$\sum_{m,n} c_{mn} f_{mn}(x_1, x_2), \tag{1}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m,n} c^2_{mn} < \infty. \tag{2}$$

Мы покажем, что метод доказательства Колмогорова—Селиверстова—Плеснера применим и для двойных функциональных рядов, но, в отличие от простых рядов, нам надо вместо одного привлечь три типа функций Лебега.

В отличие от статьи [8], мы не требуем ортогональности системы $\{f_{mn}\}$ и, следовательно, из наших теорем вытекают теоремы Качмажа [21] о сходимости двойных тригонометрических рядов, Панджакидзе [15] о сходимости двойных ортогональных рядов полиноминального вида и их обобщение на двойные ряды (1).

---

[1] Во всей статье свободные индексы принимают все значения 0, 1, ...

[2] Если у знака Σ пределы индексов суммирования не указаны, то суммирование производится по всем значениям 0, 1, ... до ∞.

§ 1. Введение

Пусть функции μ_1 и μ_2 определены соответственно на отрезках $[a,b]$ и $[c,d]$, на которых $\mu_1(x_1)>0$ и $\mu_2(x_2)>0$, ограничены и монотонно возрастают. Предположим, что существующие почти всюду соответственно на $[a,b]$ и $[c,d]$ неотрицательные производные $\mu'_1(x_1)=0$ и $\mu'_2(x_2)=0$ лишь на множествах, мера Лебега которых равна нулю.

При этих условиях функция μ двух переменных x_1 и x_2, определенная на Q равенством

$$\mu(x_1,x_2)=\mu_1(x_1)\mu_2(x_2),$$

положительна и ограничена, а соответствующая ей аддитивная функция ([16], стр. 101) $X\to\mu(X)$, определенная на борелевской алгебре Σ подмножеств прямоугольника Q, имеет почти всюду (по мере Лебега) на Q неотрицательную обобщенную производную $D\mu$ (см. [8], стр. 166—167), причем $D\mu(X)=0$ лишь на множестве $X\in\Sigma$, мера Лебега которого равна нулю (см. [18], стр. 145, теорема 1).

При названных предположениях относительно функции μ всякое множество μ-меры нуль имеет и меру Лебега нуль (см. [6], стр. 175), а также имеют место следующие леммы — обобщения теоремы Б. Леви. При этом здесь и всюду в дальнейшем точки из Q будем обозначать через $x=(x_1,x_2)$, $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ и $w=(w_1,w_2)$, а соответствующие им множества из Σ — через X, U, V и W.

Пусть $L^p{}_\mu(E)$ — множество всех $L^p{}_\mu$-интегрируемых с $p=1,2$ на $E\subset Q$ функций двух переменных (см. [11], стр. 158 и 270). Будем писать $L^1{}_\mu=L_\mu$. Следовательно, функция $y\in L_\mu(E)$, если двойной интеграл Лебега—Стилтьеса

$$\int_E|y(x)|\,d\mu(X)=\int_E|y(x)|\,\mu(dX)<\infty,$$

функция $y\in L^2{}_\mu(E)$, если она μ-измерима на E и

$$\int_E|y(x)|\,d\mu(X)<\infty.$$

Лемма 1. *Если последовательность $\{y_n\}\subset L_\mu(E)$ монотонно возрастает, то*[3]

$$\lim_n\int_E y_n(x)\,d\mu(X)=\int_E\lim_n y_n(x)\,d\mu(X).$$

Доказательство см. [11], стр. 173.

Лемма 2. *Если двойная последовательность $\{y_{mn}\}\subset L_\mu(E)$ не убывает*[4] *и*

$$\int_E y_{mn}(x)\,d\mu(X)=O(1),$$

---

[3] Под знаком lim указание $\to\infty$ всюду опущено.

[4] Монотонность двойной последовательности означает ее монотонность по каждому индексу при фиксированном другом.

то все предельные функции y, y'_m и y''_n, определенные равенствами

$$y(x) = \lim_{m,n} y_{mn}(x),$$

$$y'_m(x) = \lim_{n} y_{mn}(x),$$

$$y''_n(x) = \lim_{m} y_{mn}(x),$$

почти всюду на E конечны.

Доказательство см. [8], стр. 168—169; [4], стр. 19—20.

Пусть T — некоторый треугольный метод суммирования с матрицей (t_{mnkl}) преобразования последовательности в последовательность и с матрицей (τ_{mnkl}) преобразования ряда в последовательность.

Пусть $P = A \odot B = (R, p_{mn})$ — факторизируемый метод взвешенных средних Рисса. Тогда

$$t_{mnkl} = a_{mk} b_{nl} = a_k b_l/(A_m B_n) = p_{kl}/P_{mn}, \quad A_m = \sum_{k=0}^{m} a_k, \quad B_n = \sum_{l=0}^{n} b_l,$$

где a_k и b_l — вещественные числа такие, что[5] $p_{kl} \neq 0$ и $P_{mn} \neq 0$, а,

$$\tau_{mnkl} = \alpha_{mk} \beta_{nl} = (1 - A_{k-1}/A_m)(1 - B_{l-1}/B_n).$$

Пусть K_{mn}, K'_{mn} и K''_{mn} — ядра метода T для системы $\{f_{mn}\}$, т. е.

$$K_{mn}(u, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl} \, f_{kl}(u) \, f_{kl}(x),$$

$$K'_{mn}(u, x) = \sum_{k=0}^{m} \tau_{mnkn} \, f_{kn}(u) \, f_{kn}(x),$$

$$K''_{mn}(u, x) = \sum_{l=0}^{n} \tau_{mnml} f_{ml}(u) \, f_{ml}(x).$$

Функции L_{mn}, определенные равенством

$$L_{mn}(x) = \int_Q |K_{mn}(u, x)| \, d\mu(U),$$

назовем *функциями Лебега метода T* (для системы $\{f_{mn}\}$).

Если для ядер K'_{mn} и K''_{mn} найдутся последовательности $\{H'_m\}$ и $\{H''_n\}$ неотрицательных L_μ-интегрируемых на Q функций таких, что для всех $(u, x) \in Q^2$

$$|K'_{mn}(u, x)| \leqslant H'_m(u, x), \quad |K''_{mn}(u, x)| \leqslant H''_n(u, x), \tag{3}$$

то функции L'_m и L''_n, определенные равенствами

$$L'_m(x) = \int_Q H'_m(u, x) \, d\mu(U), \quad L''_n(x) = \int_Q H''_n(u, x) \, d\mu(U),$$

также назовем *функциями Лебега метода T* (для системы $\{f_{mn}\}$).

---

[5] Выражения с отрицательными индексами равны нулю.

§ 2. Основная лемма

Обозначим P-средние ряда (1) через σ_{mn}, т. е.

$$\sigma_{mn}(x)=\sum_{k,l=0}^{m,n}\tau_{mnkl}c_{kl}f_{kl}(x).$$

Пусть $\{\varphi_{mn}\}$ — двойная система вещественных функций, ортонормальная на Q по некоторой положительной мере ω. Согласно теореме Рисса—Фишера ([12], стр. 93; [10], стр. 451), определим функцию $h\in L^2{}_\omega(Q)$ (см. [8], стр. 167) условием (2) и ортонормальной системой $\{\varphi_{mn}\}$, положив

$$h(x)\sim\sum_{m,n}c_{mn}\varphi_{mn}(x).$$

Норму в $L^2{}_\omega(Q)$ обозначим через $\|\ \|$, а в $L_\mu(E)$ — через $\|\ \|_L$. Следовательно, по теореме Рисса—Фишера

$$\|h\|^2=\sum_{m,n}c^2{}_{mn}.$$

Рассмотрим две неотрицательные измеримые функции

$$i=i(x),\qquad j=j(x), \tag{4}$$

принимающие соответственно на $[a,b]$ и $[c,d]$ лишь целые значения, причем $0\leqslant i\leqslant m$ и $0\leqslant j\leqslant n$. Пусть

$$s=s(m,x)\leqslant m,\qquad t=t(n,x)\leqslant n$$

— наименьшие индексы, при которых достигается равенство

$$g_{mn}(x)\equiv\sup_{i,j\leqslant m,n}\sigma_{ij}(x)=\sigma_{st}(x), \tag{5}$$

где верхняя грань берется по всем функциям (4).

Не ограничивая общности, можем считать (для удобства записи), что $c_{00}=0$. Тогда $\sigma_{00}(x)=0$, откуда $g_{mn}(x)\geqslant 0$.

Имеет место следующая основная

Лемма 3. *Пусть метод P удовлетворяет условию*[6]

$$\sum_{k,l=0}^{m,n}|p_{kl}|=O(P_{mn}). \tag{6}$$

Пусть, далее, функции Лебега метода P на множестве $E\subset Q$ удовлетворяют условиям

$$L_{mn}(x)=O(1), \tag{7}$$

$$L'_m(x)=O(1),\qquad L''_n(x)=O(1). \tag{8}$$

Тогда при выполнении условия (2) найдется постоянная $C>0$, что имеет неравенство

$$\|g_{mn}\|_L\leqslant C\,\|h\|. \tag{9}$$

---

[6] Условие (6) выполнено, когда факторы A и B сохраняют сходимость (см. [7], стр. 106).

Доказательство. Применим метод Престона [23] использования вспомогательной ортонормальной системы $\{\varphi_{mn}\}$. Обозначим

$$G_{mn}(u, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl}\, \varphi_{kl}(u)\, f_{kl}(x).$$

Тогда, учитывая что c_{kl} — коэффициенты Фурье функции h, можем σ_{mn} представить формулой

$$\sigma_{mn}(x) = \int_Q h(u)\, G_{mn}(u, x)\, d\omega(U).$$

Следовательно,

$$\|g_{mn}\|_L = \int_Q h(u)\, d\omega(U) \int_E G_{st}(u, x)\, d\mu(X).$$

Далее, обозначив

$$\alpha = s(m, v), \quad \beta = t(n, v), \quad \gamma = s(m, w), \quad \delta = t(n, w),$$

и, применяя к последнему интегралу неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\|g_{mn}\|_L \leqslant \sqrt{J_{mn}}\, \|h\|, \tag{10}$$

где

$$J_{mn} = \int_Q \Big[\int_E G_{st}(u, x)\, d\mu(X)\Big]^2 d\omega(U) =$$

$$= \int_E\int_E\int_Q G_{\alpha\beta}(u, v)\, G_{\gamma\delta}(u, w)\, d\omega(U)\, d\mu(V)\, d\mu(W).$$

Наконец, положив

$$q = \min(\alpha, \gamma), \qquad r = \min(\beta, \delta),$$

находим

$$J_{mn} \leqslant \int_E\int_E |\Phi_{qr}(v, w)|\, d\mu(V)\, d\mu(W),$$

где

$$\Phi_{qr}(v, w) = \int_Q G_{\alpha\beta}(u, v)\, G_{\gamma\delta}(u, w)\, d\omega(U).$$

Ввиду ортонормальности системы $\{\varphi_{mn}\} \subset L^2_\omega(Q)$, находим

$$\Phi_{qr}(v, w) = \sum_{k,l=0}^{q,r} \tau_{\alpha\beta kl}\tau_{\gamma\delta kl} f_{kl}(v) f_{kl}(w).$$

Теперь, учитывая выкладки стр. 172—173 статьи [8] или (что проще) стр. 202—203 статьи [17], можем доказать, что

$$\Phi_{qr}(v, w) = O(1) \sum_{k,l=0}^{q,r} e_{\alpha\beta\gamma\delta kl}\, |K_{kl}(v, w)|, \tag{11}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta kl} = e'_{\alpha\gamma k} e''_{\beta\delta l}$ с

$$e'_{\alpha\gamma k} = \begin{cases} |A_\alpha A_\gamma|^{-1}\, |A_q(a_k + a_{k+1})| & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant q-1, \\ 1 & \text{при} \quad k = q, \end{cases}$$

$$e''_{\beta\delta l} = \begin{cases} |B_\beta B_\delta|^{-1}\, |B_r(b_l + b_{l+1})| & \text{при} \quad 0 \leqslant l \leqslant r-1, \\ 1 & \text{при} \quad l = r, \end{cases}$$

вследствие чего $J_{mn} = O(1)$, что ввиду (10) дает искомую оценку (9). Действительно, как и на стр. 174 статьи [8], ввиду (11) получаем

$$\iint_{M_1} |\Phi_{qr}(v, w)|\, d\mu(V)\, d\mu(W) \leqslant \int_E d\mu(W) \int_Q |\Phi_{\gamma\delta}(v, w)|\, d\mu(V) = O(1).$$

Интеграл по множеству M_4 оценивается аналогично.

Чтобы оценить интеграл по множеству M_2, нам надо рассмотреть функцию $\Phi_{\alpha\delta}$. Предыдущее рассуждение здесь неприменимо, ибо δ зависит от переменных w. Поэтому, пользуясь формулой (11), представим $\Phi_{\alpha\delta}$ в виде

$$\Phi_{\alpha\delta}(v, w) = O(1) \sum_{k,l=0}^{\alpha,\delta-1} e_{\alpha\beta\gamma\delta kl} |K_{kl}(v, w)| +$$

$$+ O(1) \sum_{k=0}^{\alpha} e'_{\alpha\gamma k} |K'_{k\delta}(v, w)|.$$

Учитывая, что на M_2 индекс $\gamma > \alpha$, а главное $\beta \geqslant \delta$, и применяя ко второй сумме первое из условий (3), убеждаемся в справедливости оценки

$$\Phi_{\alpha\delta}(v, w) = O(1) \sum_{k,l=0}^{\alpha,\beta-1} e_{\alpha\beta\alpha\beta kl} |K_{kl}(v, w)| +$$

$$+ O(1) \sum_{k=0}^{\alpha} e'_{\alpha\alpha k} H'_k(v, w).$$

Отсюда при помощи условия (7) и первого из условий (8) выводим

$$\iint_{M_2} |\Phi_{\alpha\delta}(v, w)|\, d\mu(V) d\mu(W) =$$

$$= O(1) \int_E \Big\{ \sum_{k,l=0}^{\alpha,\beta-1} e_{\alpha\beta\alpha\beta kl} L_{kl}(v) + \sum_{k=0}^{\alpha} e'_{\alpha\alpha k} L'_k(v) \Big\} d\mu(V) =$$

$$= O(1) \int_E \Big\{ \sum_{k,l=0}^{\alpha,\beta-1} e_{\alpha\beta\alpha\beta kl} + \sum_{k=0}^{\alpha} e'_{\alpha\alpha k} \Big\} d\mu(V) = O(1),$$

ввиду условия (6).

Интеграл по множеству M_3 оценивается аналогично.

Лемма 3 доказана.

В статье [8], стр. 171, мы, полагая $i = i(x_1)$ и $j = j(x_2)$, считали, что $s = s(m, x_1)$ и $t = t(n, x_2)$. Однако, как сообщил автору студент Р. Рийспере, это не так. Следовательно, доказательства теорем 1 и 4 статьи [8] неубедительны. Отметим, что доказательства и других известных аналогичных теорем для двойных ортогональных рядов также неубедительны, ибо в них не говорится, как оценить соответствующие интегралы по множествам M_2 и M_3 (см., например, [21], стр. 93; [1], стр. 13—14 и 22—23; [2], стр. 161; [3], стр. 168 и 173; [15], лемма 2).

§ 3. Теоремы о суммируемости и сходимости почти всюду

При помощи основной леммы 3 легко доказать оценку [7]

$$\sigma_{mn}(x)=O_x(1) \tag{12}$$

при условиях (7) и (8).

Действительно, так как по определению (5) двойная последовательность $\{g_{mn}\}$ не убывает, то ее предельная функция S, т. е.

$$S(x)=\lim_{m,n} g_{mn}(x),$$

по лемме 2 конечна почти всюду на E.

Заменив в (5) последовательность $\{\sigma_{ij}\}$ на $\{-\sigma_{ij}\}$, учитывая доказательство основной леммы 3, придем к почти всюду на E конечной функции S^*, где

$$S^*(x)=\lim_{m,n} g^*_{mn}(x), \qquad g^*_{mn}(x)=\sup_{i,j\leqslant m,n}[-\sigma_{ij}(x)]\geqslant 0,$$

ибо считаем $c_{00}=0$.

Следовательно, почти всюду на E

$$|\sigma_{mn}(x)|\leqslant S(x)+S^*(x).$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть метод P удовлетворяет условию* (6). *Пусть, далее, на $E\subset Q$ функции Лебега метода P удовлетворяют условиям* (7) *и* (8). *Тогда при выполнении условия* (2) *для P-средних двойного функционального ряда* (1) *почти всюду на E имеет место оценка* (12).

Определим на множестве $E\subset Q$ функцию Ω, положив

$$\Omega(x)=\sup_{m,n,k,l}|\sigma_{m+k,n+l}(x)-\sigma_{mn}(x)|.$$

Считая как и раньше (для удобства записи) $c_{00}=0$, получаем $S(x)\geqslant 0$ и $S^*(x)\geqslant 0$. Следовательно,

$$\Omega(x)\leqslant S(x)+S^*(x),$$

а, применив к (9) дважды [4] лемму 1, заключаем

$$\|S\|_L\leqslant C\,\|h\|, \qquad \|S^*\|_L\leqslant C\,\|h\|,$$

то

$$\|\Omega\|_L\leqslant 2C\|h\|. \tag{13}$$

Аналогично как в [9], стр. 252, для любого натурального N и $x\in E$ положим

$$\Omega_N(x)=\sup_{m,n\geqslant N;\ k,l\geqslant 0}|\sigma_{m+k,\,n+l}(x)-\sigma_{mn}(x)|.$$

---

[7] Запись $y_{mn}(x)=O_x(1)$ означает существование неотрицательной почти всюду конечной функции S такой, что $|y_{mn}(x)|\leqslant S(x)$.

Согласно теореме Рисса—Фишера условием (2) и двойной ортонормальной системой $\{\varphi_{mn}\}$ определим функции $h_N \in L^2_\omega(Q)$, положив

$$h_N(x) \sim \left(\sum_{m,n=N+1}^{\infty} + \sum_{m,n=0,\ N+1}^{N,\infty} + \sum_{m,n=N+1,\ 0}^{\infty,N} \right) c_{mn}\varphi_{mn}(x).$$

Ввиду (13) имеем

$$\|\Omega_N\|_L \leqslant 2C\|h_N\|. \tag{14}$$

Так как ввиду равенства Парсеваля—Стеклова

$$\|h_N\|^2 = \left(\sum_{m,n=N+1}^{\infty} + \sum_{m,n=0,\ N+1}^{N,\infty} + \sum_{m,n=N+1,\ 0}^{\infty,N} \right) c^2_{mn},$$

то условие (2) ввиду неравенства (14) влечет за собой

$$\lim_N \|\Omega_N\|_L = 0.$$

Так как $\Omega_N(x) \uparrow$ при $N \uparrow$, то по лемме 1

$$\|\lim_N \Omega_N\| = 0,$$

и, следовательно (см. [11], стр. 171, теорема j),

$$\lim_N \Omega_N(x) = 0$$

μ-почти всюду на E, откуда, в силу наших предположений относительно μ, следует, что $\{\sigma_{mn}(x)\}$ сходится при $m, n \to \infty$ почти всюду на E по критерию Штольца ([25], стр. 158).

Что касается сходимости $\{\sigma_{mn}(x)\}$ при $n \to \infty$ и при $m \to \infty$, то это можно доказать при помощи теоремы 1 и леммы 2, как это указано в [8], стр. 181, для простых рядов. То же самое можно доказать также при помощи неравенств (13) и (14), если вместо функций Ω_N и h_N, например, для процесса $n \to \infty$, применять функции Ω_{mN} и h_{mN}, положив

$$\Omega_{mN}(x) = \sup_{n \geqslant N,\ l \geqslant 0} |\sigma_{m,n+l}(x) - \sigma_{mn}(x)|, \qquad h_{mN}(x) \sim \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{mn}\varphi_{mn}(x).$$

Итак, доказана основная

Теорема 2. *Пусть метод P удовлетворяет условию* (6). *Пусть, далее, функции Лебега метода P удовлетворяют на множестве $E \subset Q$ условиям* (7) *и* (8). *Тогда при выполнении условия* (2) *двойной функциональный ряд* (1) *вполне P-суммируем почти всюду на E.*

Доказанная теорема 2 обобщает и улучшает теорему 3 из [8], ибо из условий последней теоремы вытекает (7).

В статье [1] в случае $P = (C, 1, 1)$, т. е. в случае $p_{mn} = 1$, утверждается более общий результат, но его доказательство неубедительно, так как остается неясным, почему суммы (59) и (60) этой статьи равномерно сходятся к нулю.

Из теоремы 2 можем легко получить теоремы о сходимости ряда (1) почти всюду на E. Для этого возьмем P таким, чтобы $P_{mn} = O(p_{mn})$, например, $p_{mn} = 2^{m+n}$. Тогда, если D_{mn} — ядро системы $\{f_{mn}\}$ для метода сходимости, то, обозначая $(\xi_{mnkl}) = (t_{mnkl})^{-1}$, по формулам

$$K_{mn}(u,x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} t_{mnkl} D_{kl}(u,x), \qquad D_{mn}(u,x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \xi_{mnkl} K_{kl}(u,x),$$

получаем, что функции Лебега для методов P и сходимости одновременно удовлетворяют условиям (7) и (8). Это видно из доказательства следствия 1 статьи [8]. Следовательно, из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Если функции Лебега метода сходимости на множестве $E \subset Q$ удовлетворяют условиям* (7) *и* (8), *то при выполнении условия* (2) *двойной функциональный ряд* (1) *вполне сходится почти всюду на E.*

Покажем, как из следствия 1 можно вывести теоремы Панджакидзе [15] и Качмажа [21].

Пусть мера μ имеет абсолютно непрерывные факторы μ_1 и μ_2. Обозначим

$$\varrho(x) = \mu'_1(x_1)\ \mu'_2(x_2).$$

Возьмем

$$\varphi_{mn}(x) = \varphi_m(x_1)\ \psi_n(x_2),$$

где $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_n\}$ — ортонормальные системы полиномиального вида (см. [4], стр. 183), причем на прямоугольнике $Q' = [a', b'] \times [c', d']$, где $[a', b'] \subset (a, b)$ и $[c', d'] \subset (c, d)$,

$$\varphi_{mn}(x) = O(1) \tag{15}$$

и

$$\varrho(x) = O(1). \tag{16}$$

Рассмотрим ортогональный двойной ряд

$$\sum_{m,n} a_{mn} \varphi_{mn}(x). \tag{17}$$

Тогда (см. [4], стр. 185) почти всюду на Q' для системы $\{\varphi_{mn}\}$ функции Лебега метода сходимости удовлетворяют условиям

$$L_{mn}(x) = O(\varkappa_{mn}), \quad L'_m(x) = O(\varkappa_{m0}), \quad L''_n(x) = O(\varkappa_{0n}), \tag{18}$$

где (здесь и в дальнейшем) обозначено

$$\varkappa_{mn} = \ln(m+2) \ln(n+2).$$

Возьмем систему $\{f_{mn}\}$, положив $f_{mn}(x) = (\varkappa_{mn})^{-1/2} \varphi_{mn}(x)$. В таком случае, как следует из доказательства Панджакидзе ([15], стр. 13; для тригонометрической системы см. Бари [5], стр. 102—103), функции Лебега метода сходимости для системы $\{f_{mn}\}$ удовлетворяют условиям (7) и (8). Обозначив $c_{mn} = (\varkappa_{mn})^{1/2} a_{mn}$, получаем $a_{mn}\varphi_{mn}(x) = c_{mn} f_{mn}(x)$ и $a^2_{mn}\varkappa_{mn} = c^2_{mn}$. Таким образом, из следствия 1 выводим следующую теорему Панджакидзе [15].

Следствие 2. *Если* $\{\varphi_m\}$ *и* $\{\psi_n\}$ *— ортонормальные системы полиномиального вида, удовлетворяющие условиям* (15) *и* (16), *то при выполнении условия*

$$\sum_{m,n} a^2{}_{mn}\varkappa_{mn} < \infty \tag{19}$$

двойной ортогональный ряд (17) *вполне сходится почти всюду на* Q'.

Так как тригонометрическая система имеет полиномиальный вид ([4], стр. 183), а условия (18) выполнены всюду на $[-\pi, \pi]^2$, то из следствия 2 получаем следующую теорему Качмажа [21].

Следствие 3. *Если*

$$\sum_{m,n} \lambda^2{}_{mn}(a^2{}_{mn}+b^2{}_{mn}+c^2{}_{mn}+d^2{}_{mn})\varkappa_{mn} < \infty, \tag{20}$$

то двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m,n} \lambda_{mn}(a_{mn}\cos mx_1\cos nx_2+b_{mn}\sin mx_1\cos nx_2+$$
$$+c_{mn}\cos mx_1\sin nx_2+d_{mn}\sin mx_1\sin nx_2)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]^2$ *вполне сходится.*

Как показал Феферман ([20], стр. 194) условие (20) в следствии 3 (и, следовательно, также (19) в следствии 2) нельзя улучшить. Из результатов Шьёлина ([24], теорема 7.2) и Никишина ([14], теорема 4) следует, что в следствии 3 можно множитель Вейля $\varkappa_{mn}$ заменить на $\ln^2\min(m+2,\ n+2)$.

Литература

1. Абдулгамидов А. Р., Некоторые вопросы сходимости и суммируемости ортогональных разложений функций двух переменных. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1969, **129**, № 3, 3—29.
2. Абдулгамидов А. Р., О суммируемости двойных ортогональных рядов. Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1969, № 20, 155—163.
3. Абдулгамидов А. Р., О (C, α, β)-суммируемости двойных ортогональных рядов. Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1969, № 20, 164—177.
4. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
5. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
6. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 165—181.
7. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
8. Барон С., Функции Лебега для суммируемости двойных ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 166—189.
9. Зигмунд А., Тригонометрические ряды. Москва—Ленинград, 1939.
10. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. II. Москва, 1965.
11. Камке Э., Интеграл Лебега—Стилтьеса. Москва, 1959.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
13. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
14. Никишин Е. М., Множители Вейля для кратных рядов Фурье. Матем. сб., 1972, **89**, № 2, 340—348.
15. Панджакидзе Ш. П., О сходимости двойного ряда Фурье. Сообщ. АН ГрузССР, 1965, **39**, № 1, 11—14.

16. Сакс С., Теория интеграла. Москва, 1949.
17. Тюрнпу Х., О суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 199—212.
18. Халмош П., Теория меры. Москва, 1953.
19. Alexits, G., Sharma, A., The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series. Acta sci. math., 1972, 33, № 1—2, 1—10.
20. Fefferman, C., On the divergence of multiple Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, 77, № 2, 191—195.
21. Kaczmarz, S., Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihen. Studia math., 1930, 2, 91—96.
22. Moricz, F., The order of magnitude of the Lebesgue functions and summability of function series. Acta sci. math., 1973, 34, 289—296.
23. Preston, C. J., On the convergence of multiplicatively orthogonal series. Proc. Amer. Math., Soc., 1971, 28, №2, 453—455.
24. Sjölin, P., Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series. Arkiw mat., 1971, 9, № 1, 65—90.
25. Stolz, O., Ueber unendliche Doppelreihen. Math. Ann., 1884, 24, 157—171.

Поступило
5 II 1974

KAHEKORDSETE FUNKTSIONAALRIDADE LEBESGUE'I FUNKTSIOONID KOONDUVUSE JA SUMMEERUVUSE PUHUL

S. Baron

Resümee

Olgu Q lõplik ristkülik ja $\{f_{mn}\}$ sellel ristkülikul L_μ-intergreeruvate kahe-muutuja funktsioonide kahekordne süsteem. Olgu $P=(R, p_{mn})$ faktoriseeruv Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, mis rahuldab tingimust (6).

Töös tõestatakse järgmine lause (teoreem 2 ja järeldus 1). *Kui menetluse P (koonduvusmenetluse) Lebesgue'i funktsioonid rahuldavad hulgal $E \subset Q$ tingimusi (7) ja (8), siis tingimuse (2) kehtivuse korral kahekordne funktsionaalrida (1) on regulaarselt P-summeeruv (vastavalt koonduv) peaaegu kõikjal hulgal E.*

Siit saame kergesti järeldada Kaczmarzi [21], Pandžakidze [15] jt. tulemusi (järeldused 2 ja 3).

DIE LEBESGUESCHEN FUNKTIONEN BEI DER KONVERGENZ UND DER SUMMIERBARKEIT DER DOPPELFUNKTIONALREIHEN

S. Baron

Zusammenfassung

Es sei $\{f_{mn}\}$ — ein Doppelsystem von L_μ-integrierbaren Funktionen zweier Variablen auf dem endlichen Rechteck Q. Es werde mit P das faktorisierende Verfahren der bewichteten Mittel (R, p_{mn}) von Riesz, welches die Bedingung (6) erfüllt, bezeichnet. In diesem Artikel wird der folgende Satz bewiesen (Satz 2 und Folgerung 1): *Wenn für die Lebesgueschen Funktionen des Verfahrens P (des Konvergenzverfahrens) auf einer Menge $E \subset Q$ die Beziehungen (7) und (8) bestehen, so ist die Doppelfunktionalreihe (1) unter der Bedingung (2) fast überall auf E regulär P-summierbar (bzw. konvergent).*

Aus diesem Satz lassen sich die bekannten Ergebnisse von Kaczmarz [21], Pandžakidze [15] u. a. leicht folgern (Folgerungen 2 und 3).

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Вайникко

Кафедра вычислительной математики

Введение

Ряд дискретизационных методов решения интегральных и дифференциальных уравнений обладают некоторым общим свойством, которое в [3—5] было положено в основу определения компактной аппроксимации операторов. Было установлено, что при компактной аппроксимации сохраняется вращение вполне непрерывных векторных полей (имеется в виду вращение в смысле М. А. Красносельского [6]). На основании этого результата была доказана сходимость приближенных решений нелинейных уравнений.

В данной статье указанные результаты обобщаются. Банахово пространство E, в котором действует приближаемый оператор, аппроксимируется в смысле Ф. Штуммеля [8, 9]. Эта аппроксимация включает в себя как частные случаи аппроксимацию E подпространствами и факторпространствами. Указанные два вида аппроксимации E использовались соответственно в [3, 5] и [4, 5]. Приводимые ниже рассуждедния более близки к рассуждениям из второго цикла работ.

Н. А. Бобылев [1, 2] исследовал возможность компактной аппроксимации данного оператора операторами, действующими в факторпространствах. Оказалось, что в случае сепарабельного пространства E каждый вполне непрерывный в нем оператор допускает компактную аппроксимацию, а в случае несепарабельного E это не обязательно так.

Первые два параграфа статьи вспомогательные: в § 1 напоминаются некоторые понятия, связанные с аппроксимацией пространств по Ф. Штуммелю, а в § 2 — результаты о вращении вполне непрерывных векторных полей. Основные результаты статьи формулируются в § 3 и доказываются в § 4. Некоторые дополнения и замечания к результатам § 3 приведены в § 5.

Договоримся насчет некоторых обозначений. Через N обозначается множество натуральных чисел

$$N=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\},$$

через N', N'' и т. д. — его бесконечные подмножества. Выражение $a_n \to a$ $(n \in N')$ означает, что (числовая) последовательность a_n при $n \to \infty$ сходится к a, причем индекс n пробегает множество N'. Такая запись удобна, когда из данной последовательности приходится несколько раз извлекать подпоследовательности.

Ниже встречаются банаховы пространства E и E_n $(n \in N)$. Элементы пространства E_n обозначаем x_n, y_n, ... ; элементы пространства E обозначаем x, $x^{(n)}$, x^k, y, ...

§ 1. Понятия P-сходимости и P-компактности

Пусть E и E_n $(n \in N)$ — банаховы пространства. Рассмотрим всевозможные ограниченные по норме последовательности $\{x_n\}$ с $x_n \in E_n$ $(n \in N)$. Две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ назовем эквивалентными, если

$$\|x_n - x'_n\|_{E_n} \to 0 \qquad (n \in N).$$

Обозначим через $\mathfrak{E}$ множество классов эквивалентности. В $\mathfrak{E}$ введем естественную линейную структуру: для $\xi, \eta \in \mathfrak{E}$, $\alpha, \beta = \mathrm{const}$ элемент $\alpha\xi + \beta\eta$ является классом эквивалентности, содержащим последовательность $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, где $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — любые последовательности из классов ξ и η соответственно.

В дальнейшем будем считать, что задано отображение $P: E \to \mathfrak{E}$ со следующими свойствами:

$$P(\alpha x+\beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y) \quad (\forall x, y \in E;\ \alpha, \beta = \mathrm{const}), \tag{1}$$

$$\|x_n\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad \text{для} \quad \forall x \in E, \quad \{x_n\} \in P(x). \tag{2}$$

Первое из этих требований означает линейность отображения P; второе дает изометричность P, если в $\mathfrak{E}$ ввести факторнорму

$$\|\xi\|_{\mathfrak{E}} = \inf_{\{x_n\} \in \xi} \sup_{n \in N} \|x_n\|_{E_n}.$$

Дадим следующие определения.

Последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in E_n,\ n \in N)$ называется *P-сходящейся к $x \in E$*, если $\{x_n\} \in P(x)$; записывать будем это обычным образом: $x_n \to x$ $(n \in N)$. Последовательность $\{x'_n\}$ $(x'_n \in E_n,\ n \in N' \subset N)$ называется *P-сходящейся к $x \in E$*, если ее можно дополнить до последовательности $\{x_n\}_{n \in N}$, $x'_n = x_n$ $(n \in N')$ так, что $\{x_n\} \in P(x)$.

Последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in E_n,\ n \in N')$ называется *P-компактной*, если для любого (бесконечного) подмножества $N'' \subset N'$ существует такое (бесконечное) подмножество $N''' \subset N''$, что последовательность $\{x_n\}_{n \in N'''}$ является P-сходящейся.

P-сходимость обладает рядом «привычных» свойств:

$$
\begin{aligned}
&x_n \to O_E \quad (n \in N') \iff \|x_n\|_{E_n} \to 0 \qquad (n \in N'),\\
&x_n \to x \quad (n \in N') \;\Rightarrow\; \|x_n\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad (n \in N'),\\
&x_n \to x \quad (n \in N'),\; N'' \subset N' \;\Rightarrow\; x_n \to x \quad (n \in N''),\\
&x_n \to x,\; x_n \to x' \quad (n \in N') \;\Rightarrow\; x = x',\\
&x_n \to x,\; y_n \to y \quad (n \in N') \;\Rightarrow\; \alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y \quad (n \in N'),\\
&\forall x \in E \;\; \exists \{x_n\}_{n \in N} : x_n \to x \quad (n \in N).
\end{aligned}
$$

Доказательства этих утверждений несложно и можно найти в [8].

Некоторыми «привычными» свойствами обладает и P-компактность: P-компактная последовательность ограничена по норме; в случае сепарабельного пространства E множество Р-предельных точек P-компактной последовательности компактно в E. В случае несепарабельного E последнее утверждение верно не всегда. Доказательства этих утверждений публикуются в другой работе автора. Ниже эти утверждения не используются.

Приведем два примера P-аппроксимации.

Аппроксимация подпространствами. Пусть E_n $(n \in N)$ подпространства E, причем

$$\varrho(x, E_n) \equiv \inf_{x_n \in E_n} \|x - x_n\| \to 0 \quad (n \in N) \quad \text{для } \forall x \in E.$$

Тогда можно определить отображение $P : E \to \mathfrak{E}$ следующим образом: $P(x)$ — это класс, содержащий последовательность $\{x_n\}$, $\|x - x_n\| \to 0$ $(x_n \in E_n,\ n \in N)$. Условия (1) и (2) выполнены; P-сходимость последовательности $\{x_n\}$ к $x \in E$ в этом примере означает сходимость по норме E.

Аппроксимация факторпространствами. Пусть $E_n = E/E^{(n)}$ $(n \in N)$ — факторпространства E по замкнутым подпространствам $E^{(n)}$, снабженные естественной факторнормой, и пусть $p_n : E \to E/E^{(n)}$ — канонические отображения, переводящие $x \in E$ в классы $p_n x = x + E^{(n)}$. Допустим, что

$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad (n \in N) \quad \text{для} \quad \forall x \in E. \tag{3}$$

Тогда можно определить отображение $P : E \to \mathfrak{E}$ следующим образом: $P(x)$ — это класс, содержащий последовательность $\{p_n x\}_{n \in N}$. Условия (1) и (2) выполнены; P-сходимость последовательности $\{x_n\}$ к $x \in E$ в данном случае означает, что $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \to 0$.

Эти два вида аппроксимации и близкие им виды аппроксимации пространств использовались в [1—5]. Второй пример допускает расширение. В нем существенно лишь то, что операторы $p_n : E \to E_n$ линейные и обладают свойством (3); при этом E_n могут быть произвольными банаховыми пространствами (не обязаны быть факторпространствами).

§ 2. Вращение вполне непрерывного векторного поля

Здесь мы напомним некоторые свойства вращения вполне непрерывного векторного поля; их доказательства можно найти в [6]. В дальнейшем перечисляемые свойства будут использованы как аксиомы, не прибегая к содержательному пониманию вращения.

Пусть E — вещественное банахово пространство, Ω — непустое открытое ограниченное множество в E, $\partial\Omega$ — граница Ω, $c\Omega$ — замыкание Ω. Пусть оператор $A : c\Omega \to E$ вполне непрерывен и не имеет неподвижных точек на границе $\partial\Omega$. Тогда определено вращение $\gamma(I-A;\ \partial\Omega)$ вполне непрерывного векторного поля $x - Ax$ на $\partial\Omega$. Вращение — это некоторая целочисленная характеристика оператора A на Ω, обладающая, в частности, следующими свойствами.

1° Если $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) \neq 0$, то A имеет в Ω хотя бы одну неподвижную точку.

2° $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = \gamma(I-A;\ \partial\Omega')$, где $\Omega' \subset \Omega$ любое такое открытое подмножество в Ω, что A не имеет в $\Omega \setminus \Omega'$ неподвижных точек.

3° $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = \gamma(I-A_1;\ \partial\Omega)$, если операторы $tA + (1-t)A_1$ не имеют при $0 \leqslant t \leqslant 1$ неподвижных точек на $\partial\Omega$, $A_1 : c\Omega \to E$ тоже вполне непрерывен.

4° $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = \gamma(I-A_1;\ \partial\Omega)$, если

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|A_1x - Ax\| < \inf_{x\in\partial\Omega} \|x - Ax\|.$$

5° Пусть $A\Omega \subset E_0$, где E_0 — замкнутое подпространство E. Тогда $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = \gamma(I-A_0;\ \partial\Omega_0)$, где $A_0 : c\Omega_0 \to E_0$ — сужение оператора A, $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. (Может случиться, что Ω_0 пусто. В этом случае $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = 0$, и утверждение остается в силе, если по определению положить $\gamma(I-A;\ \partial\varnothing) = 0$.)

6° $\gamma(I-A;\ \partial\Omega) = \gamma(I-B^{-1}AB;\ \partial(B^{-1}\Omega))$, где $B : F \to E$ линейный ограниченный оператор из некоторого другого банахова пространства F в E, имеющий ограниченный обратный $B^{-1} : E \to F$.

Для приложений существенно знать как можно больше признаков отличия от нуля вращения. Они представлены в монографии [6]; см. также [7].

§ 3. Теорема сходимости

Пусть E и E_n $(n \in N)$ — вещественные банаховы пространства, Ω и Ω_n — непустые открытые ограниченные множества соответственно в E и E_n, $T : c\Omega \to E$ и $T_n : c\Omega_n \to E_n$ — вполне непрерывные операторы. Будем также считать, что задано отображение $P : E \to \mathfrak{E}$ со свойствами (1) и (2). Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *области* $\Omega \subset E$ *и* $\Omega_n \subset E_n$ *асимптотически близки в том смысле, что*

$$x \in c\Omega \Rightarrow \exists x_n \in c\Omega_n, \ x_n \to x \ (n \in N), \tag{4}$$

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow \exists x_n \in \partial\Omega_n, \ x_n \to x \ (n \in N), \tag{4'}$$

$$x_n \in c\Omega_n, \ x_n \to x \ (n \in N' \subset N) \Rightarrow x \in c\Omega, \tag{5}$$

$$x_n \in \partial\Omega_n, \ x_n \to x \ (n \in N' \subset N) \Rightarrow x \in \partial\Omega; \tag{5'}$$

2) *последовательность вполне непрерывных операторов* $T_n : c\Omega_n \to E_n$ *P-сходится к вполне непрерывному оператору* $T : c\Omega \to E$ *в том смысле, что*

$$x_n \in c\Omega_n, \ x_n \to x \ (n \in N) \Rightarrow T_n x_n \to Tx \ (n \in N); \tag{6}$$

3) *для любой последовательности* $\{x_n\}$ *с* $x_n \in c\Omega_n$ *последовательность* $\{T_n x_n\}$ *P-компактна и множество ее P-предельных точек компактно в* E;

4) *оператор* T *не имеет неподвижных точек на границе* $\partial\Omega$.

Тогда при достаточно больших n *оператор* T_n *не имеет неподвижных точек на границе* $\partial\Omega_n$, *и имеет место равенство вращений:*

$$\gamma(I - T_n; \ \partial\Omega_n) = \gamma(I - T; \ \partial\Omega) \quad (n \in N, \ n \geqslant n_0). \tag{7}$$

Доказательство леммы берет на себя основные тяжести данной работы и приводится в следующем параграфе.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы и пусть, кроме того,* $\gamma(I - T; \ \partial\Omega) \neq 0$. *Тогда при достаточно больших* n *множество* $X_n \subset \Omega_n$ *неподвижных точек оператора* T_n *непусто, любая последовательность* $\{x_n\}$ *с* $x_n \in X_n$ $(n \in N, \ n \geqslant n_0)$ *является P-компактной и ее P-предельные точки — неподвижные точки оператора* T.

Доказательство. Согласно утверждению леммы и условию теоремы имеем

$$\gamma(I - T_n; \ \partial\Omega_n) = \gamma(I - T; \ \partial\Omega) \neq 0 \quad (n \in N, \ n \geqslant n_0),$$

и X_n непусто при этих n (см. свойство 1° вращения). Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in X_n$, $x_n = T_n x_n$ $(n \geqslant n_0)$. В силу условия 3) леммы она P-компактна; пусть $x_n \to x'$ $(n \in N')$. Тогда $x' \in c\Omega$ и $x_n = T_n x_n \to Tx'$ (см. (5) и (6)). Ввиду единственности P-предела имеем $x' = Tx'$, т. е. предельные точки последовательности $\{x_n\}$ являются неподвижными точками оператора T. Теорема доказана.

В случае аппроксимации E подпространствами подобная теорема была доказана в [3, 5], а в случае аппроксимации фактор-пространствами или изоморфными им пространствами — в [4, 5]. В [3—5] использовалась несколько иная терминология: условиям 2) и 3) леммы соответствует понятие компактной аппроксимации [3—5].

Вопросы об ослаблении условий теоремы обсуждаются в § 5.

§ 4. Доказательство леммы

Доказательство леммы разобьем на ряд частей.

1) Обозначим через $Y \subset E$ множество P-предельных точек всевозможных последовательностей $\{T_n x_n\}$ с $x_n \in c\Omega_n$. Для любого $x \in c\Omega$ по условию (4) существует последовательность $x_n \in c\Omega_n$, $x_n \to x$; тогда $T_n x_n \to Tx$ и $Tx \in Y$. Таким образом,

$$T(c\Omega) \subset \mathbf{Y}. \tag{8}$$

Покажем, что

$$\textit{множество } Y \textit{ компактно в } E. \tag{9}$$

Действительно, рассмотрим произвольную последовательность $y^{(k)} \in Y$ $(k = 1, 2, \ldots)$. По определению Y для каждого $y^{(k)}$ существует последовательность $x_n^{(k)} \in c\Omega_n$ $(n \in N)$ такая, что $\{T_n x_n^{(k)}\}$ имеет в качестве одной из своих P-предельных точек точку $y^{(k)}$. Из двойной последовательности $\{x_n^{(k)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots;$ $k = 1, 2, \ldots)$ выделим простую последовательность $z_n = x_n^{(k_n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}, \ldots$ остаются P-предельными точками последовательности $\{T_n z_n\}$. Но ввиду условия 3) леммы, множество P-предельных точек последовательности $\{T_n z_n\}$ компактно в E, и, в частности, из последовательности $\{y^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что и доказывает (9).

2) Покажем, что

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|x - Tx\| \geqslant \alpha, \quad \varliminf_{n \to \infty} \inf_{x_n \in \partial\Omega_n} \|x_n - T_n x_n\| \geqslant \alpha \tag{10}$$

с некоторым положительным α. Первое из этих соотношений вытекает из полной непрерывности T и отсутствия у T неподвижных точек на $\partial\Omega$. Рассуждая от противного, допустим, что второе из соотношений (10) неверно: $\|x_n - T_n x_n\| \to 0$, $x_n \in \partial\Omega_n$, $n \in N' \subset N$. Ввиду P-компактности последовательности $\{T_n x_n\}_{n \in N'}$, некоторая ее подпоследовательность $\{T_n x_n\}_{n \in N''}$ P-сходится: $T_n x_n \to x'$ $(n \in N'')$. Но тогда и $x_n \to x'$ $(n \in N'')$, и из условия (5') вытекает, что $x' \in \partial\Omega$. Далее, из $x_n \to x'$ вытекает, что $T_n x_n \to Tx'$ $(n \in N'')$ и, в силу единственности предела, $x' = Tx'$, т. е. оператор T имеет на $\partial\Omega$ неподвижную точку. Это противоречие с условиями леммы и доказывает второе из соотношений (10).

3) Пусть $K = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}\}$ — конечная ε-сеть компактного множества Y, $\varepsilon = \alpha/4$, т. е.

$$\sup_{y \in Y} \varrho(y, K) \leqslant \frac{\alpha}{4}. \tag{11}$$

Выберем для каждого $y^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant r$, какую-нибудь P-сходящуюся последовательность $y_n^{(k)} \in E_n$, $y_n^{(k)} \to y^{(k)}$ $(n \in N)$. Тогда при достаточно больших n множество $K_n = \{y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(r)}\} \subset$ $\subset E_n$ будет ε-сетью множества $T_n(\mathrm{c}\Omega_n)$, $\varepsilon > \alpha/4$. Точнее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x_n \in \mathrm{c}\Omega_n} \varrho(T_n x_n, K_n) \leqslant \frac{\alpha}{4}. \tag{12}$$

Действительно, в противном случае найдутся такое $\delta > 0$ и такая последовательность $x_n \in \mathrm{c}\Omega_n$ $(n \in N' \subset N)$, что

$$\|T_n x_n - y_n^{(k)}\| \geqslant \frac{\alpha}{4} + \delta \qquad (n \in N',\ k = 1, \ldots, r).$$

Последовательность $\{T_n x_n\}$ P-компактна, пусть $T_n x_n \to y$ $(n \in N'' \subset N)$. Тогда $y \in Y$, и из сходимости

$$T_n x_n - y_n^{(k)} \to y - y^{(k)} \qquad (n \in N'')$$

вытекает, что, вопреки (11),

$$\|y - y^{(k)}\| \geqslant \frac{\alpha}{4} + \delta \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

4) Наложим на элементы $y_n^{(k)}$ $(n \in N,\ k = 1, \ldots, r)$ одно дополнительное условие: если среди $y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$ линейно независимы лишь какие-нибудь r' $(r' \leqslant r)$ элемента, то при каждом n $(n \geqslant n_0)$ линейно независимыми являются соответствующие r' элемента из $y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(r)}$, а остальные выражаются их такими же линейными комбинациями, что и соответствующие элементы из $y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$. Введем следующие подпространства и обратимые операторы:

$E^0 \subset E$ — линейная оболочка элементов $y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$;

$E_n{}^0 \subset E_n$ — линейная оболочка элементов $y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(r)}$;

$$\varphi_n \in L(E^0, E_n{}^0), \qquad \varphi_n y^{(k)} = y_n^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

(последние равенства и условие линейности однозначно определяют операторы φ_n). Таким образом, $\dim E^0 = \dim E_n{}^0 = r'$ $(n \geqslant n_0)$; из соотношения

$$\|\varphi_n x\| \to \|x\| \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для} \quad \forall x \in E^0$$

вытекает, что

$$\|\varphi_n\| \to 1, \quad \|\varphi_n^{-1}\| \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

5) Определим операторы $Q: Y \to E^0 \subset E$ и $Q_n: T_n(\mathrm{c}\Omega_n) \to$ $\to E_n{}^0 \subset E_n$ $(n \in N)$, действующие по формулам

$$Qy = \sum_{k=1}^{r} \mu^{(k)}(y)\, y^{(k)} \Big/ \sum_{k=1}^{r} \mu^{(k)}(y) \qquad (y \in Y),$$

$$Q_n y_n = \sum_{k=1}^{r} \mu_n^{(k)}(y_n)\, y_n^{(k)} \Big/ \sum_{k=1}^{r} \mu_n^{(k)}(y_n) \qquad (y_n \in T_n(\mathrm{c}\Omega_n)),$$

где

$$\mu^{(k)}(y)=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}-\|y-y^{(k)}\| & \text{при} \quad \|y-y^{(k)}\|\leqslant\frac{\alpha}{2},\\ 0 & \text{при} \quad \|y-y^{(k)}\|\geqslant\frac{\alpha}{2},\end{cases}$$

$$\mu_n^{(k)}(y_n)=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}-\|y_n-y_n^{(k)}\| & \text{при} \quad \|y_n-y_n^{(k)}\|\leqslant\frac{\alpha}{2},\\ 0 & \text{при} \quad \|y_n-y_n^{(k)}\|\geqslant\frac{\alpha}{2}.\end{cases}$$

Операторы Q и Q_n непрерывны соответственно на Y и $T_n(\mathrm{c}\Omega_n)$ (см. (11) и (12)); из их определения вытекают неравенства

$$\sup_{x\in\mathrm{c}\Omega}\|Tx-QTx\|\leqslant\frac{\alpha}{2}, \qquad \sup_{x_n\in\mathrm{c}\Omega_n}\|T_nx_n-Q_nT_nx_n\|\leqslant\frac{\alpha}{2}. \tag{14}$$

Последовательность операторов $Q_n:T_n(\mathrm{c}\Omega_n)\to E_n$ P-сходится к оператору $Q:Y\to E$, т. е.

$$y_n\to y \quad (y_n\in T_n(\mathrm{c}\Omega_n))\Rightarrow Q_ny_n\to Qy. \tag{15}$$

6) Ввиду (10) операторы T_n не имеют при достаточно больших n неподвижных точек на границе $\partial\Omega_n$, и вращение $\gamma(I-T_n;\,\partial\Omega_n)$ определено. Из (10) и (14) вытекает (см. свойство 4° вращения), что

$$\gamma(I-T_n;\partial\Omega_n)=\gamma(I-\Omega_nT_n;\partial\Omega_n),$$

где $Q_nT_n:\mathrm{c}\Omega_n\to E_n^0\subset E_n$ рассматриваем как оператор со значениями в E_n. Принимая во внимание, что значения Q_nT_n в действительности лежат подпространстве E_n^0, имеем (см. 5°)

$$\gamma(I-Q_nT_n;\,\partial\Omega_n)=\gamma(I-Q_nT_n;\,\partial\Omega_n^0),$$

где $\Omega_n^0=\Omega_n\cap E_n^0$. Далее, привлекая определенный выше изоморфизм $\varphi_n\in L(E^0,\,E_n^0)$, имеем (см. 6°)

$$\gamma(I-Q_nT_n;\,\partial\Omega_n^0)=\gamma(I-\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n;\,\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0)).$$

В седьмой части доказательства будет установлено, что операторы $\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n$ не имеют при достаточно больших n неподвижных точек в множестве $\varphi_n^{-1}\Omega_n^0\setminus(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0\cap\Omega^0)$, где $\Omega^0=\Omega\cap E^0$, поэтому (см. 2°)

$$\gamma(I-\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n;\,\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0))=$$
$$=\gamma(I-\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n;\,\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0\cap\Omega^0)).$$

В восьмой части доказательства установим, что

$$\gamma(I-\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n;\,\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0\cap\Omega^0))=$$
$$=\gamma(I-QT;\,\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0\cap\Omega^0)). \tag{16}$$

С помощью рассуждений, вполне аналогичных приведенным в седьмой части доказательства, устанавливается, что оператор QT не имеет при достаточно больших n неподвижных точек в множестве $\Omega^0 \setminus (\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)$, поэтому

$$\gamma(I - QT; \partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)) = \gamma(I - QT; \partial\Omega^0).$$

Рассматривая $QT : c\Omega \to E^0 \subset E$ как оператор со значениями в E, имеем (см. 5°)

$$\gamma(I - QT; \partial\Omega^0) = \gamma(I - QT; \partial\Omega).$$

Наконец, из (10) и (14) вытекает, что

$$\gamma(I - QT; \partial\Omega) = \gamma(I - T; \partial\Omega).$$

Из приведенной цепочки равенств вращений и вытекает утверждение доказываемой леммы — равенство (7). Остается устранить отмеченные выше два пробела.

7) Покажем, что при достаточно больших n операторы $\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n$ не имеют неподвижных точек в множестве $\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \setminus (\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)$. Рассуждая от противного, допустим, что существует последовательность $x^{(n)} \in \varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \subset E^0$, $x^{(n)} \notin \Omega^0$, такая, что

$$x^{(n)} = \varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n x^{(n)} \qquad (n \in N' \subset N). \tag{17}$$

Из (13) и конечномерности подпространства E^0 вытекает, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ компактна в E; пусть $x^{(n)} \to x' \in E^0$ $(n \in N'' \subset N')$. Тогда $x' \notin \Omega$, а из P-сходимости последовательности $\varphi_n x^{(n)} \in \Omega_n^0 \subset \Omega_n$ к x' вытекает, что $x' \in c\Omega$, т. е. $x' \in \partial\Omega$. Переход к пределу в равенствах (17) дает $x' = QTx'$. Но тогда (см. 14))

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|x - Tx\| \leqslant \|x' - Tx'\| = \|QTx' - Tx'\| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \tag{18}$$

что противоречит (10) и доказывает наше утверждение.

8) Докажем равенство (16). Достаточно установить (см. 3°), что операторы $tQT + (1-t)\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n$ не имеют при достаточно больших n неподвижных точек на $\partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)$ ни при одном значении параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Рассуждая от противного, допустим существование таких последовательностей $x^{(n)} \in \in \partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)$ и $t_n \in [0, 1]$, что

$$x^{(n)} = t_nQTx^{(n)} + (1 - t_n)\varphi_n^{-1}Q_nT_n\varphi_n x^{(n)} \qquad (n \in N' \subset N). \tag{19}$$

Ввиду конечномерности и ограниченности Ω^0 последовательность $\{x^{(n)}\}$ компактна. Пусть $t_n \to t \in [0, 1]$, $x^{(n)} \to x' \in E^0$ $(n \in N'' \subset N')$; заметим, что из условий $x^{(n)} \in \partial(\varphi_n^{-1}\Omega_n^0 \cap \Omega^0)$ вытекает, что $x' \in \partial\Omega$. Предельный переход в равенствах (19) дает $x' = QTx'$. Отсюда снова получаем противоречивое неравенство (18), и (16) доказано.

Вместе с тем завершено доказательство леммы 1.

§ 5. Дополнения и замечания

1. Если E несепарабельно, то не для каждого вполне непрерывного оператора $T: c\Omega \to E$ существует P-сходящаяся к нему последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: c\Omega_n \to E_n$ (действующих в заданных наперед пространствах E_n). Соответствующий пример построен Н. А. Бобылевым [2]. В связи с этим обстоятельством представляют интерес усиления леммы и теоремы, в которых условие 2) заменено подходящим более слабым условием. Приведенные выше доказательства леммы и теоремы проходят без существенных изменений, если вместо условия 2) леммы ввести следующие два условия:

$$x_n \in c\Omega_n,\ x_n \to x,\ \|x_n - T_n x_n\| \to 0 \qquad (n \in N' \subset N) \Rightarrow \Rightarrow T_n x_n \to Tx \qquad (n \in N'); \tag{20}$$

$$x_n \in c\Omega_n,\ x_n \to x \in \partial\Omega \cap \mathfrak{L} \qquad (n \in N' \subset N) \Rightarrow \Rightarrow T_n x_n \to Tx \qquad (n \in N'), \tag{21}$$

где $\mathfrak{L}$ — линейная оболочка множества $Y \cup T(c\Omega)$, а Y — множество P-предельных точек всевозможных последовательностей $\{T_n x_n\}$ с $x_n \in c\Omega_n$. Заметим, что включение (8) теперь может, вообще говоря, быть нарушено, поэтому в третьей части доказательства леммы следует $(\alpha/4)$-сеть $K = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}\}$ построить не для Y, а для (компактного) множества $Y \cup T(c\Omega)$. Выбрав при этом $y^{(k)} \in Y \cup T(c\Omega)$ $(k = 1, \ldots, r)$, имеем $E^0 \subset \mathfrak{L}$ и, в силу (21),

$$x_n \in c\Omega_n, \qquad x_n \to x' \in \partial\Omega^0 \Rightarrow T_n x_n \to Tx',$$

чего достаточно в седьмой и восьмой части доказательства леммы. Остальные части доказательства либо не изменяются, либо вместо (6) нужно привлекать (20).

Отметим, что условия (20) и (21) соблюдаются для операторов специального вида $T_n = P_n T Q_n$, изученных в [1,2]. В этом частном случае приходим к результатам, весьма близким к результатам [1,2] о правильной аппроксимации операторов.

2. Вместо (2) достаточно потребовать, чтобы

$$c_1 \|x\| \leqslant \liminf \|x_n\| \leqslant \limsup \|x_n\| \leqslant c_2 \|x\|$$

для каждого $x \in E$ и $\{x_n\} \in P(x)$, где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные. Учет этого замечания требует, однако, довольно многих переделок в доказательстве леммы, и оно еще более осложняется.

3. Если Ω совпадает с внутренностью своего замыкания, то условие (4′) является следствием из условий (4) и (5). Действительно, пусть $x \in \partial\Omega$. Тогда ввиду (4) найдется последовательность $x'_n \in c\Omega_n$, $x'_n \to x$ $(n \in N)$. Рассуждая от противного, допустим, что последовательности $x_n \in \partial\Omega_n$, $x_n \to x$ $(n \in N)$, не существует. Тогда найдутся такие $\delta > 0$ и $N' \subset N$, что при $\|y_n\| \leqslant \delta$ имеем $x'_n + y_n \in \Omega_n$ $(n \in N')$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in E$, $\|y\| < \delta$, и последовательность $y_n \in E_n$, $y_n \to y$ $(n \in N)$. Тогда $\|y_n\| < \delta$ при достаточно больших n и значит $x'_n + y_n \in \Omega_n$ $(n \in N', n \geqslant n_0)$. Из сходимости $x'_n + y_n \to \to x + y$ $(n \in N')$ и условия (5) теперь заключаем, что $x + y \in \in c\Omega$. Итак, δ-окрестность точки x оказывается подмножеством $c\Omega$. Значит, x — внутренняя точка $c\Omega$, и $x \in \Omega$, вопреки условию $x \in \partial\Omega$. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Впрочем, условие (4′) можно в формулировке леммы вообще отбросить: мы можем всегда расширить Ω до внутренности $c\Omega$ — при этом $\partial\Omega$ сужается и вращение $\gamma(I - T;\ \partial\Omega)$ не изменяется.

От условия (5′) освободиться не удается, и ради симметрии мы сохранили и условие (4′).

Литература

1. Бобылев Н. А., К теории фактор-методов приближенного решения нелинейных задач. Докл. АН СССР. 1971, **199**, № 1, 9—12.
2. Бобылев Н. А., К теории фактор-методов решения нелинейных операторных уравнений. Диссертация, Тарту, 1972.
3. Вайникко Г. М., Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 4, 739—761.
4. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1969, **189**, № 2, 237—240.
5. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
6. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва, 1956.
7. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
8. Stummel, F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I. Math. Ann., 1970, **190**, 45—92.
9. Stummel, F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren II. Math. Z., 1971, **120**, 231—264.

Поступило
15 I 1973

TÄIELIKULT PIDEVATE OPERAATORITE PÜSIPUNKTIDE LÄHENDAMISEST

G. Vainikko

Resümee

Artiklis üldistatakse autori tulemused [3—5] vektorvälja pöörlemise säilimisest ja mittelineaarse võrrandi lähislahendite koondumisest kompaktse aproksimatsiooni korral. On kasutatud ruumide aproksimatsiooni F. Stummeli [8] mõttes. Artikli põhitulemused on esitatud paragrahvis 3.

ÜBER APPROXIMATION DER FIXPUNKTE VOLLSTETIGER OPERATOREN

G. Vainikko

Zusammenfassung

Es seien E und E_n ($n \in N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$) reelle Banachräume und $\mathfrak{E}$ sei der Raum der Äquivalenzklassen der Folgen $\{x_n\}_n \in N$ mit $x_n \in E_n$, d. h. $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$ gehören zu einer Klasse $\xi \in \mathfrak{E}$, falls $\|x_n - x'_n\|_E \to 0$. Es sei ein Operator $P : E \to \mathfrak{E}$ mit Eigenschaften (1) und (2) gegeben. Wir benutzen folgende Definition [8]: die Folge $\{x_n\}$ P-konvergiert gegen $x \in E$ (und wir schreiben dann $x_n \to x$), falls $\{x_n\} \in P(x)$. Die Folge $\{x_n\}$ wird P-kompakt genannt, falls für jedes $N' \subset N$ es ein $N'' \subset N'$ gibt, so daß die Teilfolge $\{x_n\}_{n \in N''}$ P-konvergierend ist.

Es seien $\Omega \subset E$, $\Omega_n \subset E_n$ ($n \in N$) nichtleere offene beschränkte Teilmengen mit den Rändern $\partial\Omega$, $\partial\Omega_n$ und Abschließungen $c\Omega$, $c\Omega_n$. Betrachten wir die vollstetigen nichtlinearen Operatoren $T : c\Omega \to E$ und $T_n : c\Omega_n \to E_n$ ($n \in N$). Die Hauptergebnisse des Artikels:

Lemma. *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

1) *die Mengen Ω und Ω_n genügen* (4), (4′), (5), (5′);

2) *die Operatoren T und T_n genügen* (6);

3) *für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in c\Omega_n$ ist die Folge $\{T_n x_n\}$ P-kompakt und ihre Häufungspunktmenge ist kompakt in E;*

4) *der Operator T hat keinen Fixpunkt auf dem Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es ein $n_0 \in N$ so, daß T_n für alle $n \geqslant n_0$ keinen Fixpunkt auf dem Rand $\partial\Omega_n$ hat, und die Gleichheiten* (7) *gelten, wobei $\gamma(I - T;\ \partial\Omega)$ die Rotation* [6] *des Vektorfeldes $x - Tx$ auf dem Rand $\partial\Omega$ ist.*

Theorem. *Es seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, und es sei $\gamma(I - T;\ \partial\Omega) \neq 0$. Dann ist die Fixpunktmenge $X_n \in c\Omega_n$ des Operators T_n für alle $n \geqslant n_0$ nicht leer, jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in X_n$ ist P-kompakt und ihre Häufungspunkte sind die Fixpunkte des Operators T.*

Diese Ergebnisse verallgemeinern entsprechende Ergebnisse aus [3—5], wo engere Konvergenzbegriffe benutzt werden.

О РЕШЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

П. Оя

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

В настоящей статье исследуется сходимость метода Галеркина для эволюционных уравнений. Используется методика, разработана в [1] при исследовании существования и единственности решений эволюционных уравнений. Другой подход при изучении метода Галеркина, основывающийся на теории полугрупп, разработан в работах [2, 4, 5].

§ 1. Постановка задачи

Введем используемые в статье понятия и обозначения.

Обозначим через $L_2(0,T;X)$ гильбертово пространство (классов) функций с интегрируемым квадратом, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения в гильбертовом пространстве X. Скалярное произведение в пространстве $L_2(0,T;X)$ определяется формулой

$$(u,v)_{L_2(0,T;X)}=\int_0^T (u(t),v(t))_X\,dt.$$

Через $C([0,T];X)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,T]$ со значениями в X, с нормой

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_X.$$

Пусть V и H — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства, причем V непрерывно вложено в H и плотно в нем. Отождествляя H с его двойственным пространством и обозначая через V' пространство, двойственное к V, получаем

$$V\subset H\subset V',$$

где каждое пространство плотно в последующем. Если $f\in V'$ и $v\in V$, то (f,v) обозначает значение функционала f на v и совпадает со скалярным произведением в H, если $f\in H$.

Пусть задано семейство непрерывных линейных операторов $A(t) \in \mathfrak{L}(V, V')$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим задачу

$$u'(t) + A(t) u(t) = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = \xi, \tag{2}$$

где $u'(t) = \dfrac{du}{dt}$ означает производную в смысле распределений, $f \in L_2(0, T; V')$ и $\xi \in H$ заданы.

На семейство $A(t)$ наложим следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l} \forall u, v \in V \text{ функция } t \to (A(t)u, v) \text{ измерима и} \\ |(A(t)u, v)| \leqslant M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V; \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\text{что} \quad \left.\begin{array}{l} \text{существуют } \alpha > 0 \text{ и } \lambda \text{ такие,} \\ (A(t)v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Известно (см. [1], стр. 268), что при условиях (3)—(4) задача (1)—(2) имеет единственное решение $u \in L_2(0, T; V)$ при любых $f \in L_2(0, T; V')$, $\xi \in H$.

Заметим, что из (1) и из включения $u \in L_2(0, T; V)$ следует включение $u' \in L_2(0, T; V')$. Из последних двух, в свою очередь, следуют (см. [1], стр. 33) включение $u \in C([0, T]; H)$ и неравенство

$$\|u\|_{C([0,T];H)} \leqslant K(\|u\|_{L_2(0,T;V)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V')}), \tag{5}$$

где K — постоянная, не зависящая от u, следовательно, $u(0)$ имеет смысл.

Выберем в пространстве V полную систему $\{e_k\}_1^\infty$; тогда она полная также в пространствах H и V'; пусть она ортонормальная в H. Рассмотрим линейную оболочку первых n элементов $e_1, \ldots, e_n$, которая образует векторное подпространство в пространствах V, H, V'. Снабженные соответствующими нормами подпространства обозначим через V_n, H_n, V'_n. Ту же линейную оболочку можно рассматривать как пространство, двойственное к V_n; обозначим это пространство через $(V_n)'$. Так как

$$\sup_{v \in V_n, \|v\|_V = 1} (f, v) \leqslant \sup_{v \in V, \|v\|_V = 1} (f, v),$$

то

$$\|u\|_{(V_n)'} \leqslant \|u\|_{V'_n} \quad \forall u \in V_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В силу конечномерности рассматриваемых пространств, существуют константы c_n (пусть они будут минимальными) такие, что

$$\|u\|_{V'_n} \leqslant c_n \|u\|_{(V_n)'} \quad \forall u \in V_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Определим проекторы P_n следующим образом:

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \qquad \forall x \in V'.$$

В пространстве H проектор P_n является ортопроектором.

Перейдем от задачи (1)—(2) к задаче

$$u_n'(t) + P_n A(t) u_n(t) = P_n f(t), \tag{7}$$

$$u_n(0) = P_n \xi \tag{8}$$

(метод Галеркина). Для каждого n задача (7)—(8) имеет единственное решение $u_n \in L_2(0, T; V_n)$. Действительно, из условий (3) и (4) и из равенства

$$(P_n A(t) u_n, v_n) = (A(t) u_n, v_n) \qquad \forall u_n, v_n \in V_n$$

вытекают такие же условия для семейства операторов $P_n A(t) : V_n \to V'_n$.

Будем изучать, при каких условиях и в каком смысле последовательность решений u_n приближенных задач (7)—(8) сходится к решению u задачи (1)—(2).

§ 2. Оценки обратных операторов

Введем множества

$$L_2'(0,T; V) = \{u : u \in L_2(0,T; V),\ u' \in L_2(0,T; V')\},$$

$$L_2'(0,T; V_n) = \{u : u \in L_2(0,T; V_n), u' \in L_2(0,T; (V_n)')\}$$

и рассмотрим их нормированными пространствами относительно норм из $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V_n)$ соответственно. Рассмотрим операторы

$$B : u(t) \to \{u'(t) + A(t) u(t), u(0)\} : L_2'(0,T; V) \to L_2(0,T; V') \times H,$$

$$B_n : u(t) \to \{u'(t) + P_n A(t) u(t), u(0)\} : L_2'(0,T; V_n) \to$$
$$\to L_2(0,T; (V_n)') \times H_n.$$

Нормируем пространство $L_2(0, T; V') \times H$ следующим образом:

$$\|\{v, \xi\}\|_{L_2(0,T;V') \times H} = \|v\|_{L_2(0,T;V')} + \|\xi\|_H .$$

Аналогично нормируем и пространства $L_2(0, T; (V_n)') \times H_n$.

Задачи (1)—(2) и (7)—(8) можно теперь представить в виде

$$Bu = \{f, \xi\}$$

и

$$B_n u_n = \{P_n f, P_n \xi\}.$$

Из однозначной разрешимости этих задач при любых $f \in L_2(0, T; V')$ и $\xi \in H$ следует существование обратных операторов B^{-1} и B_n^{-1}.

Лемма 1. *Операторы B_n^{-1} равномерно ограничены.*

Доказательство. Предположим сначала, что условие (4) выполнено с $\lambda = 0$.

Пусть $u \in L_2'(0, T; V)$ дифференцируемая функция, т. е. существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} = u'(t) \qquad \forall t \in [0, T].$$

Тогда из соотношения

$$(u(t), u(t))' = 2(u'(t), u(t))$$

получаем равенство

$$\int_0^T (u'(t), u(t))\, dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2. \tag{9}$$

Это равенство распространяется на функции из $L_2'(0, T; V)$, так как для каждой функции $u \in L_2'(0, T; V)$ можем найти дифференцируемую функцию φ такую, чтобы величины

$$\|u - \varphi\|_{L_2(0,T;V)} \quad \text{и} \quad \|u' - \varphi'\|_{L_2(0,T;V')},$$

а в силу неравенства (5) и величина

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t) - \varphi(t)\|_H$$

были сколь угодно малыми (см. [1], стр. 24). Из (4) и (9) получаем оценку

$$\int_0^T (u'(t) + A(t)u(t), u(t))\, dt + \|u(0)\|_H^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2 + \alpha \|u\|^2_{L_2'(0,T;V)} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \alpha\right\} (\|u(0)\|_H^2 + \|u\|^2_{L_2'(0,T;V)}).$$

Оценим ту же норму в обратную сторону:

$$\int_0^T (u'(t) + A(t)u(t), u(t))\, dt + \|u(0)\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^T \|u'(t) + A(t)u(t)\|_{V'}^2\, dt}\, \sqrt{\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt} + \|u(0)\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\|u' + Au\|_{L_2(0,T;V')} + \|u(0)\|_H)\, (\|u\|_{L_2'(0,T;V)} + \|u(0)\|_H).$$

Учитывая соотношение

$$(P_n A(t) u_n(t), u_n(t)) = (A(t) u_n(t), u_n(t)) \qquad \forall u_n \in L_2'(0,T; V_n),$$

устанавливаем таким же методом неравенство

$$(\|u_n' + P_n A u_n\|_{L_2(0,T;(V_n)')} + \|u_n(0)\|_{H_n}) \times$$

$$\times (\|u_n\|_{L_2'(0,T;V_n)} + \|u_n(0)\|_{H_n}) \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, a\right\} (\|u_n(0)\|_H^2 + \|u_n\|^2_{L_2'(0,T;V_n)}) \qquad \forall u_n \in L_2'(0,T;V_n).$$

Следовательно,

$$(\|u_n' + P_n A u_n\|_{L_2(0,T;(V_n)')} + \|u_n(0)\|_{H_n}) \times$$

$$\times \sqrt{\|u_n\|^2_{L'_2(0,T;V_n)} + \|u_n(0)\|^2_{H_n}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \min\left\{\frac{1}{2}, a\right\} (\|u_n(0)\|^2_{H_n} + \|u_n\|^2_{L'_2(0,T;V_n)}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \min\left\{\frac{1}{2}, a\right\} \sqrt{\|u_n(0)\|^2_{H_n} + \|u_n\|^2_{L'_2(0,T;V_n)}}\, \|u_n\|_{L_2'(0,T;V_n)}.$$

Итак,

$$\|B_n^{-1}\|_{L_2(0,T;(V_n)')\times H_n \to L_2'(0,T;V_n)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\min\left\{\frac{1}{2}, a\right\}}.$$

Вернемся к общему случаю, когда условие (4) выполнено при некотором положительном $\lambda = \lambda_0$. Заменой неизвестной функции

$$u_n(t) = e^{\lambda_0 t} v_n(t)$$

задача (7)—(8) преобразуется к виду

$$v_n'(t) + P_n A(t) v_n(t) + \lambda_0 P_n v_n(t) = e^{-\lambda_0 t} P_n f(t), \quad v_n(0) = P_n \xi.$$

Для семейства операторов[1] $A(t) + \lambda_0 I$ выполнены условия (3)—(4), причем условие (4) выполняется с $\lambda = 0$. Следовательно, для v_n справедливы найденные выше оценки, а вместе с тем

$$\|u_n\|_{L_2'(0,T;V_n)} \leqslant e^{\lambda_0 T} \|v_n\|_{L'_2(0,T;V_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\, e^{\lambda_0 T}}{\min\left\{\frac{1}{2}, a\right\}} (\|P_n f\|_{L_2(0,T;(V_n)')} + \|P_n \xi\|_{H_n}).$$

Итак, в общем случае

$$\|B_n^{-1}\|_{L_2(0,T;(V_n)')\times H_n \to L_2'(0,T;V_n)} \leqslant \frac{\sqrt{2}\, e^{\lambda T}}{\min\left\{\frac{1}{2}, a\right\}}. \tag{10}$$

Лемма доказана.

---

[1] Здесь «единичный» оператор $I = I_{V \to V'}$ рассматривается как оператор вложения V в V'.

§ 3. Дальнейшие вспомогательные результаты

Лемма 2. *Оператор дифференцирования коммутирует с проекторами* P_n.

Доказательство. Пусть $u \in L_2'(0,T;V)$. Производную функции $u(t)$ в смысле распределений можно определить как единственную функцию $u'(t)$, которая удовлетворяет равенству

$$\int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt + \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = 0$$

для каждой бесконечно дифференцируемой функции φ с компактным носителем в промежутке $(0,T)$. Из соотношения

$$\left(\int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt + \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt, e_k\right) = 0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

получаем

$$\int_0^T (u'(t), e_k)\varphi(t)\,dt + \int_0^T (u(t), e_k)\varphi'(t)\,dt = 0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots;$$

мы учли, что можно поменять порядок интегрирования и применения линейного непрерывного оператора (в данном случае, функционала).

Еще раз поменяв порядок интегрирования и применения функционалов $(\cdot,\ e_k) : V' \to R$, находим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^T (u'(t), e_k)\varphi(t)\,dt + \int_0^T (u(t), e_k)\varphi'(t)\,dt\right)e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^T (u'(t), e_k)e_k\varphi(t)\,dt + \int_0^T (u(t), e_k)e_k\varphi'(t)\,dt\right) =$$

$$= \int_0^T P_n(u'(t))\varphi(t)\,dt + \int_0^T P_n(u(t))\varphi'(t)\,dt = 0,$$

т. е.

$$P_n u'(t) = (P_n u(t))' \qquad \forall u \in L_2'(0,T;\ V).$$

Лемма 3. *Для решений* u *и* u_n *задач* (1)—(2) *и* (7)—(8) *соответственно справедлива оценка*

$$\|u_n - u\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}\,e^{\lambda T}}{\min\left\{\frac{1}{2},\ a\right\}}M+1\right)\|P_n u - u\|_{L_2(0,T;V)}; \tag{11}$$

Доказательство. В неравенстве

$$\|u_n - P_n u\|_{L_2(0,T;V_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \|B_n^{-1}\|_{L_2(0,T;(V_n)')\times H_n \to L_2'(0,T;V_n)}\|B_n(u_n - P_n u)\|_{L_2(0,T;(V_n)')\times H_n}$$

будем оценивать правую часть. Непосредственно получаем

$$\|B_n(u_n - P_n u)\|_{L_2(0,T;(V_n)')\times H_n} =$$

$$= \|P_n f - (P_n u)' - P_n A P_n u\|_{L_2(0,T;(V_n)')} + \|u_n(0) - P_n u(0)\|_{H_n},$$

при этом

$$\|u_n(0) - P_n u(0)\|_{H_n} = 0.$$

При помощи леммы 2 получаем

$$\|P_n f(t) - (P_n u(t))' - P_n A(t) P_n u(t)\|_{(V_n)'} =$$

$$= \|P_n f(t) - P_n(u'(t) + A(t)u(t)) + P_n A(t) u(t) -$$

$$- P_n A(t) P_n u(t)\|_{(V_n)'} =$$

$$= \|P_n A(t)(I - P_n) u(t)\|_{(V_n)'} =$$

$$= \sup_{v \in V_n,\ \|v\|_V = 1} (P_n A(t)(I - P_n) u(t), v) =$$

$$= \sup_{v \in V_n,\ \|v\|_V = 1} (A(t)(I - P_n) u(t), v) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in V,\ \|v\|_V = 1} (A(t)(I - P_n) u(t), v) =$$

$$= \|A(t)(I - P_n) u(t)\|_{V'} \leqslant M \|(I - P_n) u(t)\|_V,$$

следовательно,

$$\|P_n f - (P_n u)' - P_n A P_n u\|_{L_2(0,T;(V_n)')} \leqslant M \|u - P_n u\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Учитывая неравенство (10), получаем при помощи соотношения

$$u_n - u = (u_n - P_n u) + (P_n - I) u$$

требуемую оценку. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если последовательность* c_n *в неравенстве* (6) *ограничена, то для каждой* $f \in L_2(0, T; V')$ *имеет место сходимость* $P_n f \to f$ *в* $L_2(0, T; V')$.

Доказательство. По теореме Банаха—Штейнгауза достаточно показать, что сходимость имеет место на некотором всюду плотном множестве в пространстве $L_2(0, T; V')$ и последовательность $\|P_n\|_{L_2(0,T;V') \to L_2(0,T;V')}$ ограничена.

Всюду плотным множеством выбираем пространство $L_2(0, T; H)$; его плотность в пространстве $L_2(0, T; V')$ следует из плотности множества H в пространстве V'. Для $u \in L_2(0, T; H)$ получаем на основании теоремы Лебега

$$\|P_n u - u\|^2_{L_2(0,T;H)} = \int_0^T \|P_n u(t) - u(t)\|_H^2\, dt \to 0,$$

так как $P_n u(t) \to u(t)$ в H для почти каждого $t \in [0, T]$ и $\|P_n u(t) - u(t)\|_H \leqslant \|u(t)\|_H$. Сходимость $P_n u \to u$ в $L_2(0, T; V')$ следует из сходимости $P_n u \to u$ в $L_2(0, T; H)$ ввиду непрерывного вложения $L_2(0, T; H) \subset L_2(0, T; V')$.

Кроме того, для любого $u \in V'$

$$\|P_n u\|_{V'} = \|P_n u\|_{V'_n} \leqslant c_n \|P_n u\|_{(V_n)'} =$$

$$= c_n \sup_{v \in V_n,\ \|v\|_V = 1} (P_n u, v) =$$

$$= c_n \sup_{v \in V_n,\ \|v\|_V = 1} \left(\sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k, v \right) =$$

$$= c_n \sup_{v \in V_n,\ \|v\|_V = 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k, v \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_n \sup_{v \in V,\ \|v\|_V = 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k, v \right) = c_n \|u\|_{V'}.$$

Следовательно,

$$\|P_n f\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant c_n \|f\|_{L_2(0,T;V')} \qquad \forall f \in L_2(0,T;\ V'),$$

т. е.

$$\|P_n\|_{L_2(0,T;V') \to L_2(0,T;V')} \leqslant c_n \leqslant \text{const} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Лемма доказана.

§ 4. Основная теорема сходимости

Теорема 1. *Пусть последовательность c_n в неравенстве (6) ограничена. Пусть $P_n u \to u$ в $L_2(0, T; V)$, где u — решение задачи (1)—(2). Тогда при $n \to \infty$ решения u_n задачи (7)—(8) сходятся к u в следующем смысле:*

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad L_2(0,T;\ V); \tag{13}$$

$$u_n' \to u' \quad \text{в} \quad L_2(0,T;\ V'); \tag{14}$$

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad C([0,T;];\ H). \tag{15}$$

Справедливы оценки сходимости

$$\|u_n - u\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}\, e^{\lambda T}}{\min\left\{ \frac{1}{2},\ \alpha \right\}} M + 1 \right) \|P_n u - u\|_{L_2(0,T;V)}.$$

$$\|u_n' - u'\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant$$

$$\leqslant c_n M \left(\frac{\sqrt{2}\, e^{\lambda T}}{\min\left\{ \frac{1}{2},\ \alpha \right\}} M + 1 \right) \|P_n u - u\|_{L_2(0,T;V)} +$$

$$+ \|P_n u' - u'\|_{L_2(0,T;V')}; \tag{16}$$

$$\|u_n - u\|_{C([0,T];H)} \leqslant$$

$$\leqslant K(c_n M+1)\left(\frac{\sqrt{2}\,e^{\lambda T}}{\min\left\{\frac{1}{2},\ \alpha\right\}} M+1\right)\|P_n u - u\|_{L_2(0,T;V)} +$$

$$+K\|P_n u' - u'\|_{L_2(0,T;V')}. \tag{17}$$

Доказательство. Оценка (17) следует из (5), (11) и (16), докажем оценку (16).

Пусть u и u_n решения соответствующих задач. Учитывая соотношение

$$u_n' - u' = P_n f - P_n A u_n - u' =$$
$$= P_n u' - u' - (P_n A u_n - P_n A u),$$

получаем оценку

$$\|u_n' - u'\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant \|P_n u' - u'\|_{L_2(0,T;V')} + \|P_n A u_n - P_n A u\|_{L_2(0,T;V')}.$$

Для второго слагаемого в правой части неравенства получаем при помощи (12) оценку

$$\|P_n A(u_n - u)\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant c_n\|A(u_n - u)\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant$$
$$\leqslant c_n M\|u_n - u\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Учитывая (11), можно теперь вывести неравенство (16).

Сходимость (13) следует из оценки (11), сходимости (14) и (15) имеют место в силу оценок (16), (17) и леммы 4.

Теорема доказана.

§ 5. Одна специальная координатная система

Рассмотрим один частный случай выбора системы $\{e_k\}$.

Каждый фиксированный в пространстве V непрерывный линейный функционал можно реализовать по теореме Рисса при помощи однозначно определенного элемента v_0 из пространства V соответствием

$$v \to (v_0, v)_V, \qquad v \in V,$$

где $(v_0, v)_V$ — скалярное произведение в V. Тот же самый функционал можно реализовать соответствием

$$v \to (v_1, v), \qquad v \in V,$$

где v_1 однозначно определенный элемент из пространства V'. Соответствие $A_0 v_0 = v_1$ определяет изометрический изоморфизм между пространствами V и V', причем имеет место равенство

$$(u, v)_V = (A_0 u, v) \qquad \forall u, v \in V.$$

Лемма 5. *Пусть вложение V в H вполне непрерывно. Тогда оператор A_0 имеет счетное множество собственных значений λ_k,*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \qquad (\lambda_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty);$$

система соответствующих собственных элементов φ_k $(A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k)$ *ортогональна в* V, H *и* V' *и полна в каждом из этих пространств.*

Доказательство. В силу полной непрерывности вложения V в H является вполне непрерывным и оператор $A_0^{-1}I_{V\to V'}$, где $I_{V\to V'}$ обозначает оператор вложения пространства V в V'. Оператор $A_0^{-1}I_{V\to V'}$ является самосопряжённым и положительным в пространстве V:

$$\begin{aligned}(A_0^{-1}I_{V\to V'}u, v)_V &= (A_0A_0^{-1}I_{V\to V'}u, v) = (u, v) = \\ &= (u, A_0A_0^{-1}I_{V\to V'}v) = \\ &= (u, A_0^{-1}I_{V\to V'}v)_V \qquad \forall u, v \in V,\\ (A_0^{-1}I_{V\to V'}u, v)_V &= (u, u) > 0 \qquad \forall u \in V,\ u \neq 0.\end{aligned}$$

Для оператора $A_0^{-1}I_{V\to V'}$ найдем собственные значения μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, и собственные элементы φ_k так, что выполняется равенство

$$A_0^{-1}I_{V\to V'}\varphi_k = \mu_k\varphi_k.$$

Ввиду положительности и полной непрерывности оператора $A_0^{-1}I_{V\to V'}$ можно утвердить, что множество собственных значений $\{\mu_k\}$ счетно, все собственные значения положительные, число 0 не является собственным значением, но является единственной точкой накопления множества $\{\mu_k\}$ и система собственных элементов $\{\varphi_k\}$ ортогональна и полна в пространстве V. Обозначим $1/\mu_k = \lambda_k$ (следовательно $\lambda_k \to \infty$); тогда имеет место равенство

$$A_0\varphi_k = \lambda_k\varphi_k.$$

Из соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varphi_k, \varphi_j)_H &= \lambda_k(A_0A_0^{-1}I_{V\to V'}\varphi_k, \varphi_j) = \\ &= (A_0(\lambda_kA_0^{-1}I_{V\to V'}\varphi_k), \varphi_j) = \\ &= (A_0\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_k, \varphi_j)_V\end{aligned}$$

видно, что собственные элементы φ_k ортогональны также в пространстве H. Учитывая изометричность оператора A_0, получаем из равенства

$$(\varphi_k, \varphi_j)_V = (A_0\varphi_k, A_0\varphi_j)_{V'} = \lambda_k\lambda_j(\varphi_k, \varphi_j)_{V'},$$

что система $\{\varphi_k\}$ ортогональна и в пространстве V'.

Лемма доказана.

Будем считать, что система $\{\varphi_k\}$ нормирована в H.

Построим теперь проекторы P_n, положив $e_k = \varphi_k$:

$$P_nv = \sum_{k=1}^{n}(v, e_k)e_k \qquad (v \in V'),$$

$$P_nv = \sum_{k=1}^{n}\left(v, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}e_k\right)_V \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}e_k \qquad (v \in V).$$

Проектор P_n является ортопроектором как в H, так и в V.

Убедимся, что в данном случае неравенство (6) имеет место с $c_n = 1$. Ввиду того, что P_n — ортопроектор в V, имеем $\|v\|_V = (\|P_n v\|_V^2 + \|v - P_n v\|_V^2)^{1/2}$, и последний супремум в цепочке равенств

$$\|f_n\|_{V'_n} = \sup_{v \in V,\ \|v\|_V = 1} (f_n, v) = \sup_{v \in V,\ \|v\|_V = 1} (f_n, P_n v) = \|f_n\|_{(V_n)'}$$

достигается на некотором элементе $v \in V_n$, если f_n — элемент из линейной оболочки системы $\{e_k\}_1^n$.

Отметим, что имеет место сходимость

$$P_n u \to u \quad \text{в} \quad L_2(0, T; V) \quad \forall u \in L_2(0, T; V),$$

поскольку P_n ортопроектор в V.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Если использовать в приближенных задачах при определении проекторов P_n систему собственных элементов оператора A_0, то имеют место сходимости $u_n = u$ в $L_2(0, T; V)$, $u'_n \to u'$ в $L_2(0, T; V')$ и $u_n \to u$ в $C([0, T]; H)$ для решений u и u_n задач* (1)—(2) *и* (7)—(8) *соответственно; справедливы оценки* (11), (16) *и* (17) *с $c_n = 1$.*

Например, если взять $H = L_2(\Omega)$ (пространство функций с интегрируемым квадратом на ограниченной области $\Omega \subset R^n$), $V = H_0^1(\Omega)$ (пространство Соболева с нулевыми значениями на границе Γ области Ω), то $V' = H^{-1}(\Omega)$, задача на собственные значения $A_0 \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ приводится к задаче $-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, $\varphi_{k_\Gamma} = 0$, где Δ — оператор Лапласа. Система функций $\{\varphi_k\}$ может быть использована при решении методом Галеркина задачи (1)—(2) с эллиптическими операторами $A(t)$ второго порядка.

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва, 1971.
2. Соболевский П. Е., О приближенных методах решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 6, 240—243.
3. Соболевский П. Е., О дифференциальных уравнениях первого порядка в гильбертовом пространстве с переменным положительно определенным самосопряженным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения. Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 6, 984—987.
4. Соболевский П. Е., О методе Бубнова—Галеркина для параболических уравнений в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1968, **178**, № 6, 548—551.
5. Соболевский П. Е., Исследование разрешимости возмущенных параболических уравнений в банаховом пространстве и обобщенный метод Бубнова—Галеркина их приближенного решения. Диффер. уравнения, 1969, 5, № 8, 1495—1502.

Поступило
20 III 1973

EVOLUTSIOONIVÕRRANDI LAHENDAMISEST GALJORKINI MEETODIGA

P. Oja

Resümee

Artiklis vaadeldakse abstraktsete paraboolset tüüpi võrrandite $u' + A(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$ korral Galjorkini meetodi üldisi koonduvustingimusi Hilberti ruumide juhul. Lähtutakse Lionsi käsitlusest lahendi olemasolu ja ühesuse uurimisel. Näidatakse, et saadud üldised tingimused on täidetud, kui projektorid moodustada operaatoriga $A(t)$ kooskõlas oleva operaatori A_0 omaelementide abil. Tulemusi saab rakendada harilike paraboolset tüüpi võrrandite lahendamisel.

ON THE SOLUTION OF EVOLUTIONAL EQUATIONS BY GALERKIN METHOD

P. Oja

Summary

The article deals with some general conditions of the convergence of Galerkin method for the abstract equations of the parabolic type $u' + A(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$ in the case of Hilbert space. Lions' treatment of the existence and uniqueness of the solution has been taken as a basis. It is shown that the obtained general conditions are satisfied if the projectors are constructed by means of the eigenvectors of the operator A_0, which is associated with the operators $A(t)$. The results are applicable to the parabolic partial differential equations.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

А. Дементьева

Кафедра вычислительной математики

В статье устанавливаются оценки, характеризующие качество двух разностных схем приближенного построения неявной функции. Обе эти схемы основаны на идеях известного метода Ньютона — Канторовича приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Проводится детальный сравнительный анализ найденных оценок. Этот анализ позволяет описать условия, в которых предпочтительно применение каждого метода.

Основные теоремы об оценках погрешностей в изучаеымх разностных схемах без доказательств были приведены в [5].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим операторное уравнение

$$F(x;\lambda)=0. \tag{1.1}$$

Здесь x — точка некоторого банахового пространства E, λ — скалярный параметр, $F(x;\lambda)$ — непрерывный по совокупности переменных оператор со значениями в E.

Пусть уравнение (1.1) задает на полуоси $[0,\infty)$ неявную функцию $x^*(\lambda)$. Нас интересует приближенное построение неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda\geqslant 0$. Для приближенного построения неявной функции могут быть применены дискретные алгоритмы (см., например, [2—4]).

Выберем на полуоси $0\leqslant\lambda<\infty$ точки $\lambda_k=kh$ $(k=0,1,\ldots)$, где h — некоторое положительное число, и будем отыскивать приближенные значения

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots \tag{1.2}$$

неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_k$.

Последовательность (1.2) будем строить следующим образом. Предположим, что нам удалось каким-либо способом найти удовлетворительное приближенное значение x_0 неявной функции

$x^*(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Если оператор $F(x; \lambda)$ достаточно гладок и шаг h достаточно мал, то значение x_0 будет близко и к значению неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_1$. Поэтому можно, считая x_0 приближенным значением решения уравнения $F(x; \lambda_1) = 0$, уточнить это значение x_0 при помощи конечного числа итераций какого-либо из известных методов и получить удовлетворяющее нас приближенное значение x_1 неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$. По x_1 аналогичным образом можно построить x_2 и т. д.

Таким образом, выбрав метод, при помощи которого мы будем, уточняя приближенное значение x_k неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$, получать приближенное значение x_{k+1} неявной функции $x^*(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_{k+1}$, мы получим некоторый алгоритм построения последовательности (1.2). Этот алгоритм зависит, конечно, от оператора $F(x; \lambda)$, от величины шага h; точки всей последовательности зависят, как правило, от начальной точки x_0; однако, они могут этой точкой однозначно не определяться в условиях, когда способ построения последовательности связан со случайными ошибками.

Будем говорить, что алгоритм построения последовательности (1.2) является $[r_1, r_2]$-*устойчивым*, если выполнены следующие требования:

1°. Из $\|x_0 - x^*(\lambda_0)\| \leqslant r$, где $r \in [r_1, r_2]$ следует, что $\|x_k - x^*(\lambda_k)\| \leqslant r$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, а из $\|x_0 - x^*(\lambda_0)\| < r_2$ следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|x_k - x^*(\lambda_k)\| \leqslant r_1.$$

2°. Из справедливости при некотором k неравенств $r_1 < \|x_k - x^*(\lambda_k)\| < r_2$ вытекает, что

$$\|x_{k+1} - x^*(\lambda_{k+1})\| < \|x_k - x^*(\lambda_k)\|.$$

3°. Из $\|x_0 - x^*(\lambda_0)\| \leqslant r_2$ следует, что при каждом фиксированном k точка x_k лежит в области притяжения решения $x^*(\lambda_k)$ уравнения $F(x; \lambda_k) = 0$ по отношению к методу Ньютона—Канторовича (см. [1—2]).

Непосредственно из определения вытекает, что каждый $[r_1, r_2]$-устойчивый алгоритм будет $[s_1, s_2]$-устойчив, если $r \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant r_2$. Этим замечанием в дальнейшем будем пользоваться без специальных ссылок.

Ниже исследованы два алгоритма построения последовательности (1.2); для каждого из алгоритмов установлены специальные оценки, которые, с одной стороны, позволяют по заданным r_1 и r_2 определить те h, при которых алгоритм $[r_1, r_2]$-устойчив, а, с другой стороны, — при заданном h позволяют найти такие r_1 и r_2, что метод $[r_1, r_2]$-устойчив.

Всюду ниже предполагается, что в рассматриваемой области изменения переменных оператор $F(x; \lambda)$ дифференцируем по x и λ.

Будем считать, что при рассматриваемых значениях переменных производные $F'_x(x;\lambda)$ и $F'_\lambda(x;\lambda)$ равномерно ограничены

$$\|F'_x(x;\lambda)\| \leqslant M_1, \tag{1.3}$$

$$\|F'_\lambda(x;\lambda)\| \leqslant M_2. \tag{1.4}$$

Кроме этого, будем считать, что производная $F'_x(x;\lambda)$ по переменной x удовлетворяет условию Липшица

$$\|F'_x(x;\lambda) - F'_x(y;\lambda)\| \leqslant M_{11}\|x-y\|. \tag{1.5}$$

Самое существенное ограничение заключается в том, что в рассматриваемой области изменения переменных x и λ производная $F'_x(x;\lambda)$ является непрерывно обратимым оператором, причем нормы обратных операторов предполагаются равномерно ограниченными

$$\|[F'_x(x;\lambda)]^{-1}\| \leqslant N. \tag{1.6}$$

Мы не дали полного описания области, в которой выполнены оценки (1.3)—(1.6). Достаточно, например, чтобы они были выполнены в «трубке», выделяемой неравенствами $\|x - x^*(\lambda)\| < 2/NM_{11}$.

§ 2. Метод простых поправок

2.1. Как уже говорилось, для отыскания x_{k+1} по x_k будем считать x_k начальным приближением решения $x^*(\lambda_{k+1})$ уравнения

$$F(x;\lambda_{k+1}) = 0 \tag{2.1}$$

и уточним x_k при помощи конечного числа итераций какого-либо из известных методов. В этой работе в качестве такого метода взят метод Ньютона—Канторовича [1].

В этом параграфе для отыскания точки x_{k+1} применяется одна итерация метода Ньютона—Канторовича решения уравнения (2.1) при начальном приближении x_k; при этом получается следующий алгоритм

$$x_{k+1} = x_k - [F'_x(x_k;\lambda_{k+1})]^{-1}F(x_k;\lambda_{k+1}). \tag{2.2}$$

При реализации вычислений по формулам (2.2) неизбежны случайные ошибки, поэтому фактически вычисления проводятся по формулам

$$x_{k+1} = x_k - [F'_x(x_k;\lambda_{k+1})]^{-1}F(x_k;\lambda_k) + \delta_k \quad (k=0,\,1,\,\ldots), \tag{2.3}$$

где δ_k — некоторый случайный элемент пространства E. Мы будем считать, что известна оценка норм векторов δ_k:

$$\|\delta_k\| \leqslant \delta. \tag{2.4}$$

Метод построения точек (1.2) по формулам (2.3) будем называть методом простых поправок.

Для реализации вычислений нужно, конечно, знать начальную точку x_0.

2.2. Лемма 2.1. *Неявная функция $x^*(\lambda)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|x^*(\lambda)-x^*(\mu)\|\leqslant NM_2|\lambda-\mu|. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из общих теорем о неявных функциях вытекает, что $x^*(\lambda)$ непрерывно дифференцируема. При этом

$$\frac{dx^*(\lambda)}{d\lambda}=-\{F'_x[x^*(\lambda);\lambda]\}^{-1}F'_\lambda[x^*(\lambda);\lambda].$$

Поэтому из

$$x^*(\lambda)-x^*(\mu)=\int\limits_\mu^\lambda\frac{dx^*(\nu)}{d\nu}d\nu$$

вытекает, что

$$\|x^*(\lambda)-x^*(\mu)\|\leqslant\left|\int\limits_\mu^\lambda\|\{F'_x[x^*(\nu);\nu]\}^{-1}\|\cdot\|F'_\lambda[x^*(\nu);\nu]\|d\nu\right|.$$

После этого для получения (2.5) остается сослаться на (1.6) и (1.4).

Лемма доказана.

2.3. Лемма 2.2. *Пусть y_0 удовлетворяет неравенству*

$$\|y_0-x^*(\lambda^*)\|<\frac{2}{NM_{11}}.$$

Тогда точка y_0 принадлежит области притяжения решения $x^*(\lambda^*)$ уравнения $F(x;\lambda^*)=0$ по отношению к методу Ньютона—Канторовича.

Доказательство. В методе Ньютона—Канторовича последовательные приближения определяются равенством

$$y_{n+1}=y_n-[F'_x(y_n;\lambda^*)]^{-1}F(y_n;\lambda^*).$$

Поэтому из (1.6) вытекает оценка

$$\|y_{n+1}-x^*(\lambda^*)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|[F'_x(y_n;\lambda^*)]^{-1}\|\cdot\|F'_x(y_n;\lambda^*)[y_n-x^*(\lambda^*)]-F(y_n;\lambda^*)\|\leqslant$$
$$\leqslant N\left\|\int\limits_0^1\{F'_x(y_n;\lambda^*)-F'_x[\theta y_n+(1-\theta)x^*(\lambda^*);\lambda^*]\}d\theta\right\|\times$$
$$\times\|y_n-x^*(\lambda^*)\|$$

и, в силу (1.5),

$$\|y_{n+1}-x^*(\lambda^*)\|\leqslant\frac{NM_{11}}{2}\|y_n-x^*(\lambda^*)\|^2.$$

Из этой оценки непосредственно вытекает утверждение леммы.

2.4. Лемма 2.3. *Пусть точки* (1.2) *найдены методом* (2.3). *Тогда при каждом $k=0,1,\ldots$ справедлива оценка*

$$\|x_{k+1}-x^*(\lambda_{k+1})\|\leqslant\frac{NM_{11}}{2}[\|x_k-x^*(\lambda_k)\|+NM_2h]^2+\delta. \tag{2.6}$$

Доказательство. Установим вначале оценку

$$\|x_{k+1}-x^*(\lambda_{k+1})\|\leqslant\frac{NM_{11}}{2}\|x_k-x^*(\lambda_{k+1})\|^2+\delta. \tag{2.7}$$

Так как

$$F(x_k;\lambda_{k+1})=F(x_k;\lambda_{k+1})-F[x^*(\lambda_{k+1});\lambda_{k+1}]=$$
$$=\int_0^1 F'_x[\theta x_k+(1-\theta)x^*(\lambda_{k+1});\lambda_{k+1}]\,[x_k-x^*(\lambda_{k+1})]d\theta,$$

то

$$F'_x(x_k;\lambda_{k+1})[x_k-x^*(\lambda_{k+1})]-F(x_k;\lambda_{k+1})=$$
$$=\int_0^1\{F'_x(x_k;\lambda_{k+1})-F'_x[\theta x_k+(1-\theta)x^*(\lambda_{k+1});\lambda_{k+1}]\}\times$$
$$\times[x_k-x^*(\lambda_{k+1})]d\theta$$

и, в силу (1.5),

$$\|F'_x;\lambda_{k+1})[x_k-x^*(\lambda_{k+1})]-F(x_k;\lambda_{k+1})\|\leqslant$$
$$\leqslant M_{11}\int_0^1\theta\,d\theta\|x_k-x^*(\lambda_{k+1})\|^2=\frac{M_{11}}{2}\|x_k-x^*(\lambda_{k+1})\|^2$$

Но

$$x_{k+1}-x^*(\lambda_{k+1})=$$
$$=[F'_x(x_k;\lambda_{k+1})]^{-1}\{F'_x(x_k;\lambda_{k+1})[x_k-x^*(\lambda_{k+1})]-F(x_k;\lambda_{k+1})\}+\delta_k.$$

Поэтому из предыдущей оценки, из (1.6) и (2.4) вытекает (2.7).

Из (2.7) вытекает (2.6), так как

$$\|x_k-x^*(\lambda_{k+1})\|\leqslant\|x_k-x^*(\lambda_k)\|+\|x^*(\lambda_k)-x^*(\lambda_{k+1})\|$$

и, в силу леммы 2.1,

$$\|x^*(\lambda_k)-x^*(\lambda_{k+1})\|\leqslant NM_2h.$$

Лемма доказана.

2.5. Приведем простую лемму общего характера о числовых последовательностях.

Пусть на полуоси $0\leqslant s<\infty$ задана непрерывная неотрицательная и неубывающая функция $\varphi(s)$. Будем считать, что у уравнения

$$\varphi(s)=s \tag{2.8}$$

есть два решения r_1 и r_2 (которые могут и совпадать) и что выполнены неравенства

$$\varphi(s)<s\qquad(r_1<s<r_2)$$

и

$$\varphi(s)\geqslant s\qquad(0\leqslant s\leqslant r_1,\ r_2\leqslant s).$$

Рассмотрим числовую последовательность

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_k,\ \ldots. \tag{2.9}$$

Лемма 2.4. *Пусть числа последовательности* (2.9) *удовлетворяют неравенствам*

$$s_{k+1}\leqslant\varphi(s_k)\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Из* $s_0 \leqslant r$ (*где* $r \in [r_1, r_2]$) *вытекает, что* $s_k \leqslant r$ ($k = 1, 2, \ldots$), *а из* $s_0 < r_2$ *вытекает, что* $\limsup s_k \leqslant r_1$.

2°. *Из* $r_1 < s_k < r_2$ *вытекает, что* $s_{k+1} < s_k$.

Оба утверждения леммы очевидны.

2.6. Вернемся к анализу метода (2.3) простых поправок. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(s; h, \delta) = \frac{NM_{11}}{2}(s + NM_2 h)^2 + \delta. \tag{2.10}$$

При фиксированных h и δ функция (2.10) возрастает при увеличении $s \geqslant 0$. Составим для функции (2.10) уравнение (2.8)

$$\frac{NM_{11}}{2}(s + NM_2 h)^2 + \delta = s. \tag{2.11}$$

Для того, чтобы у уравнения (2.11) были вещественные корни, необходима и достаточна неотрицательность дискриминанта уравнения. После преобразований это условие имеет вид

$$2NM_{11}\delta + 2N^2 M_2 M_{11} h \leqslant 1. \tag{2.12}$$

Если параметры δ и h удовлетворяют условию (2.12), то корни $r_1(\delta, h)$ и $r_2(\delta, h)$ уравнения (2.11) определяются формулами

$$r_1(\delta, h) = \frac{1}{NM_{11}} - NM_2 h - \sqrt{\frac{1}{(NM_{11})^2} - \frac{2\delta}{NM_{11}} - \frac{2M_2 h}{M_{11}}} \tag{2.13}$$

и

$$r_2(\delta, h) = \frac{1}{NM_{11}} - NM_2 h + \sqrt{\frac{1}{(NM_{11})^2} - \frac{2\delta}{NM_{11}} - \frac{2M_2 h}{M_{11}}}. \tag{2.14}$$

При этом корни $r_1(\delta, h)$ и $r_2(\delta, h)$ положительны; они совпадают при $2NM_{11}\delta + 2N^2 M_2 M_{11} h = 1$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (2.12).

Тогда метод (2.3) *простых поправок приближенного построения неявной функции* $[r_1(\delta, h), r_2(\delta, h)]$*-устойчив.*

Доказательство. Функция $\varphi(s; h, \delta)$ при h и δ, удовлетворяющих условию (2.12), очевидным образом удовлетворяет требованиям, предъявленным к функции $\varphi(s)$, фигурирующей в условиях леммы 2.4. Введем обозначение

$$s_k = \|x_k - x^*(\lambda_k)\| \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Из леммы 2.3 вытекают неравенства

$$s_{k+1} \leqslant \frac{NM_{11}}{2}(s_k + NM_2 h)^2 + \delta$$

или, что то же,

$$s_{k+1} \leqslant \varphi(s_k; h, \delta).$$

Поэтому из леммы 2.4 вытекает, что метод простых поправок обладает свойствами 1° и 2°, участвующими в определении $[r_1(\delta, h), r_2(\delta, h)$-устойчивости.

Остается доказать, что в условиях теоремы метод простых поправок обладает свойством 3°. В силу леммы 2.2 для этого достаточно показать справедливость неравенства

$$r_2(\delta, h) < \frac{2}{NM_{11}},$$

которое очевидно.

Теорема доказана.

Из условия (2.12) ясно, что теорема 2.1 позволяет обосновывать метод простых поправок лишь в случаях, когда оценка δ ошибок δ_k удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \delta < \frac{1}{2NM_{11}}. \tag{2.15}$$

При каждом δ, удовлетворяющем (2.15), метод простых поправок применим с шагом h, для которого

$$0 < h \leqslant \frac{1 - 2NM_{11}\delta}{2N^2M_2M_{11}}. \tag{2.16}$$

Теорема 2.2. *Пусть δ удовлетворяет условию* (2.15). *Пусть* числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам

$$\frac{2\delta}{1+\sqrt{1-2NM_{11}\delta}} < r_1 \leqslant r_2 < \frac{1+\sqrt{1-2NM_{11}\delta}}{NM_{11}}. \tag{2.17}$$

Тогда при

$$0 < h \leqslant h_0(\delta; r_1, r_2), \tag{2.18}$$

где

$$h_0(\delta; r_1, r_2) = \frac{1}{NM_2} \min\left\{ \sqrt{\frac{2(r_1-\delta)}{NM_{11}}} - r_1, \sqrt{\frac{2(r_2-\delta)}{NM_{11}}} - r_2 \right\}, \tag{2.19}$$

метод простых поправок $[r_1, r_2]$-устойчив.

Доказательство. Рассмотрим равенство (2.11) как уравнение относительно h. Очевидно, это уравнение имеет единственный положительный корень $h = \psi(s; \delta)$;

$$\psi(s; \delta) = \frac{1}{NM_2}\left[\sqrt{\frac{2(s-\delta)}{NM_{11}}} - s\right], \tag{2.20}$$

при

$$r_1(\delta, 0) < s < r_2(\delta, 0), \tag{2.21}$$

где $r_1(\delta, h)$ и $r_2(\delta, h)$ определяются равенствами (2.13) и (2.14). После простых преобразований получаем

$$r_1(\delta, 0) = \frac{2\delta}{1+\sqrt{1-2NM_{11}\delta}},$$

$$r_2(\delta, 0) = \frac{1+\sqrt{1-2NM_{11}\delta}}{NM_{11}}.$$

Равенство (2.19) можно переписать в виде

$$h_0(\delta; r_1, r_2) = \min\{\psi(r_1, \delta),\ \psi(r_2, \delta)\}, \tag{2.22}$$

а условие (2.17) — в виде

$$r_1(\delta, 0) < r_1 \leqslant r_2 < r_2(\delta, 0). \tag{2.23}$$

Покажем, что число $h = h_0(\delta, r_1, r_2)$ удовлетворяет условию (2.12). Для этого достаточно установить неравенство

$$2NM_{11}\delta + 2N^2M_2M_{11}\psi(s; \delta) \leqslant 1 \tag{2.24}$$

при всех s, удовлетворяющих (2.21). Для доказательства (2.24) можно заменить его эквивалентным неравенством

$$\sqrt{\frac{2(s-\delta)}{NM_{11}}} \leqslant \frac{1}{2NM_{11}} + s - \delta$$

или, что то же, очевидным неравенством

$$\left[\sqrt{s-\delta} - \sqrt{\frac{1}{2NM_{11}}}\right]^2 \geqslant 0.$$

Из того, что число $h_0(\delta; r_1, r_2)$ удовлетворяет условию (2.12) следует, что определены числа $r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]$ и $r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]$.

Установим теперь справедливость неравенств

$$r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)] \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]. \tag{2.25}$$

Из определения функций (2.13), (2.14) и (2.20) вытекают тождества

$$\psi[r_1(\delta, h), \delta] \equiv h, \qquad \psi[r_2(\delta, h), \delta] \equiv h. \tag{2.26}$$

Допустим, что неравенства (2.25) неверны. Предположим вначале, что

$$r_1 < r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)];$$

из этого неравенства, так как $\psi(s; \delta)$ возрастает на промежутке $[r_1(\delta, 0),\ r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]]$, следует неравенство

$$\psi(r_1; \delta) < \psi\{r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]; \delta\},$$

которое, в силу (2.26), можно переписать в виде $\psi(r_1; \delta) < h_0(\delta; r_1, r_2)$ — это противоречит (2.22). Аналогично, если

$$r_2 > r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)],$$

то

$$\psi(r_2; \delta) < \psi\{r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]; \delta\},$$

так как $\psi(s, \delta)$ убывает на промежутке $[r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)], r_2(\delta, 0)]$; последнее неравенство в силу (2.26) можно переписать в виде $\psi(r_2; \delta) < h_0(\delta; r_1, r_2)$ — мы снова получили противоречие определению (2.22). Итак, неравенства (2.25) доказаны.

Из того, что число $h_0(\delta; r_1, r_2)$ удовлетворяет неравенству (2.12), следует, что неравенство (2.12) выполнено при всех h, удовлетворяющих (2.18). Но при этих h

$$r_1(\delta, h) \leqslant r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)], \quad r_2(\delta, h) \geqslant r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]$$

и поэтому в силу теоремы 2.1 метод простых поправок будет $[r_1[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)], \ r_2[\delta, h_0(\delta; r_1, r_2)]]$-устойчивым. Отсюда и из (2.25) вытекает $[r_1, r_2]$-устойчивость метода простых поправок при всех h, удовлетворяющих (2.18).

Теорема доказана.

§ 3. Метод простой двойной поправки

3.1. При построении метода (2.2) точка x_{k+1} находилась при помощи одной итерации метода Ньютона—Канторовича решения уравнения $F(x; \lambda_{k+1}) = 0$; в качестве начального приближения бралась точка x_k. Если определить точку x_{k+1} как вторую итерацию метода Ньютона—Канторовича решения этого уравнения, то для ее определения получим формулы

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= x_k - [F'_x(x_k; \lambda_{k+1})]^{-1} F(x_k; \lambda_{k+1}), \\ x_{k+1} &= z_{k+1} - [F'_x(z_{k+1}; \lambda_{k+1})]^{-1} F(z_{k+1}; \lambda_{k+1}) \\ &\qquad (k = 0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Метод отыскания последовательности (1.2) при помощи формул (3.1) будем называть методом двойной простой поправки. Для реализации вычислений по этому методу, как и в предыдущем методе, нужно знать начальную точку x_0.

3.2. Из леммы 2.3 вытекают оценки

$$\|z_{k+1} - x^*(\lambda_{k+1})\| \leqslant \frac{NM_{11}}{2} [\|x_k - x^*(\lambda_k)\| + NM_2 h]^2$$

и

$$\|x_{k+1} - x^*(\lambda_{k+1})\| \leqslant \frac{NM_{11}}{2} \|z_{k+1} - x^*(\lambda_{k+1})\|^2.$$

Поэтому верна

Лемма 3.1. *Пусть точка x_{k+1} определяется по точке x_k методом* (3.1) *двойной простой поправки.*

Тогда справедлива оценка

$$\|x_{k+1} - x^*(\lambda_{k+1})\| \leqslant \frac{N^3 M_{11}^3}{8} [\|x_k - x^*(\lambda_k)\| + NM_2 h]^4. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_1(s; h) = \frac{N^3 M_{11}^3}{8} (s + NM_2 h)^4 \tag{3.3}$$

и покажем, что она является функцией типа, фигурирующего в лемме 2.4, при значениях h из некоторого промежутка

$(0, h_{\max})$. Так как функция (3.3) при каждом фиксированном $h > 0$ выпукла и монотонно возрастает при увеличении s ($s \geqslant 0$), то нужно лишь найти те значения h, при которых у уравнения

$$\frac{N^3 M_{11}^3}{8}(s + NM_2 h)^4 = s \tag{3.4}$$

(уравнения (2.8) для функции $\varphi_1(s; h)$) есть положительные корни.

При $h = 0$ у уравнения (3.4) есть кроме нулевого один положительный корень

$$s_{\max} = \frac{2}{NM_{11}}. \tag{3.5}$$

Графики функций $\varphi = \varphi_1(s; h)$ можно получить из графика функции $\varphi = \varphi_1(s; 0)$ сдвигом влево на величину NM_2h.

Обозначим через $h_{\max}$ такое значение h, которому соответствует график функции $\varphi = \varphi_1(s; h)$, обладающий тем свойством, что прямая $\varphi = s$ касательна к нему в некоторой точке с абсциссой ϱ^*. Ясно, что при $0 < h < h_{\max}$ график функции $\varphi = \varphi_1(s; h)$ пересекает прямую $\varphi = s$ в двух точках, абсциссы которых обозначим через $\varrho_1(h)$ и $\varrho_2(h)$. При $h > h_{\max}$ графики функций $\varphi = \varphi_1(s; h)$ не имеют общих точек с прямой $\varphi = s$.

Очевидно, что функция $\varrho_1(h)$ при возрастании $h \in \in (0, h_{\max}]$ возрастает, а функция $\varrho_2(h)$ убывает. Очевидны оценки

$$0 < \varrho_1(h) \leqslant \varrho^* \leqslant \varrho_2(h) < s_{\max} = \frac{2}{NM_{11}}. \tag{3.6}$$

Вычислим $h_{\max}$. Нам известно, что прямая $\varphi = s$ касательна к графику функции

$$\varphi = \frac{N^3 M_{11}^3}{8}(s + NM_2 h_{\max})^4$$

в некоторой точке $\{\varrho^*, \varrho^*\}$. Поэтому

$$\varrho^* = \frac{N^3 M_{11}^3}{8}(\varrho^* + NM_2 h_{\max})^4$$

и

$$1 = \frac{N^3 M_{11}^3}{2}(\varrho^* + NM_2 h_{\max})^3.$$

Из этих уравнений вытекает, что

$$h_{\max} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4N^2 M_2 M_{11}} \tag{3.7}$$

и

$$\varrho^* = \frac{\sqrt[3]{2}}{4NM_{11}}. \tag{3.8}$$

Теорема 3.1. *Пусть шаг h удовлетворяет неравенствам*

$$0<h\leqslant h_{\max}. \tag{3.9}$$

Тогда метод (3.1) *двойной простой поправки* $[\varrho_1(h), \varrho_2(h)]$-*устойчив, где* $\varrho_1(h)$ *и* $\varrho_2(h)$ — *положительные корни уравнения* (3.4).

Доказательство. Как мы показали, при $0<h\leqslant h_{\max}$ функция $\varphi_1(s; h)$ — функция типа, фигурирующего в лемме 2.4.

Введем обозначение

$$s_k=\|x_k-x^*(\lambda_k)\| \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Из леммы 3.1 вытекает оценка

$$s_{k+1}\leqslant\varphi_1(s_k; h) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Поэтому из леммы 2.4 вытекает, что метод (3.1) обладает свойствами 1° и 2°, участвующими в определении $[\varrho_1(h),\ \varrho_2(h)]$-устойчивости. Свойство 3° вытекает из леммы 2.2, так как

$$\varrho_2(h)<\frac{2}{NM_{11}}$$

(см. (3.6)).

Теорема доказана.

3.3. Рассмотрим теперь равенство (3.4) как уравнение относительно h. Это уравнение имеет единственное положительное решение, очевидно, при значениях s, удовлетворяющих неравенствам

$$0<s<s_{\max}=\frac{2}{NM_{11}}. \tag{3.10}$$

Корень $h(s)$ уравнения (3.4) определится равенством

$$h(s)=\frac{1}{NM_2}\left(\sqrt[4]{\frac{8s}{N^3M_{11}^3}}-s\right). \tag{3.11}$$

Аналогично тому, как была доказана теорема 2.2, доказывается следующее утверждение

Теорема 3.2. *Пусть числа* r_1 *и* r_2 *удовлетворяют неравенствам*

$$0<r_1\leqslant r_2<\frac{2}{NM_{11}}. \tag{3.12}$$

Тогда при

$$0<h\leqslant h_0(r_1, r_2), \tag{3.13}$$

где

$$h_0(r_1, r_2)=\frac{1}{NM_2}\min\left\{\sqrt[4]{\frac{8r_1}{N^3M_{11}^3}}-r_1,\ \sqrt[4]{\frac{8r_2}{N^3M_{11}^3}}-r_2\right\}, \tag{3.14}$$

метод (3.1) *будет* $[r_1, r_2]$-*устойчивым.*

§ 4. Сравнение метода простых поправок с методом двойной простой поправки

При переходе от вектора x_k к вектору x_{k+1} по методу двойной простой поправки нужно провести вычисления такого же объема, как при вычислении двух последовательных векторов по методу простых поправок. Поэтому при сравнении метода (3.1) с методом простых поправок его нужно фактически сравнивать с рекуррентным процессом, который описывается формулами

$$\begin{gathered} z_{k+1}=x_k-\left[F'_x\left(x_k;\lambda_k+\frac{1}{2}h\right)\right]^{-1}F\left(x_k;\lambda_k+\frac{1}{2}h\right), \\ x_{k+1}=z_{k+1}-[F'_x(z_{k+1};\lambda_{k+1})]^{-1}F(z_{k+1};\lambda_{k+1}) \\ (k=0,1,\ldots). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекают следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть*

$$0<h\leqslant\frac{1}{N^2M_2M_{11}}. \tag{4.2}$$

Тогда метод (4.1) *является* $[\varrho_1^0(h),\ \varrho_2^0(h)]$*-устойчивым, где*

$$\varrho_1^0(h)=\frac{1}{NM_{11}}-\frac{NM_2h}{2}-\sqrt{\frac{1}{N^2M_{11}^2}-\frac{M_2h}{M_{11}}} \tag{4.3}$$

и

$$\varrho_2^0(h)=\frac{1}{NM_{11}}-\frac{NM_2h}{2}+\sqrt{\frac{1}{N^2M_{11}^2}-\frac{M_2h}{M_{11}}}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Пусть числа* r_1 *и* r_2 *удовлетворяют неравенствам* (3.12). *Тогда метод* (4.1) *будет* $[r_1, r_2]$*-устойчивым при*

$$0<h\leqslant h_{00}(r_1,r_2), \tag{4.5}$$

где

$$h_{00}(r_1,r_2)=\frac{2}{NM_2}\min\left\{\sqrt{\frac{2r_1}{NM_{11}}}-r_1,\ \sqrt{\frac{2r_2}{NM_{11}}}-r_2\right\}. \tag{4.6}$$

Для сравнения методов (3.1) и (4.1) мы сопоставим различные оценки из теорем 3.1 и 3.2 с соответствующими оценками из теорем 4.1 и 4.2.

Теорема 3.1 гарантирует применимость метода (3.1) при

$$0<h\leqslant\frac{3\sqrt[3]{2}}{4N^2M_2M_{11}};$$

эти неравенства более ограничительны, чем (4.2), так как $3\cdot 2^{1/3}<4$. Таким образом, если нас интересует в первую очередь не точность отыскания неявной функции, а возможность ее приближенного построения при больших значениях λ, то с точки зрения уменьшения объема вычислений предпочтительнее метод простых поправок.

Зададимся теперь некоторым h, которое удовлетворяет условиям теоремы 3.1 тогда, конечно, h удовлетворяет и условиям теоремы 4.1. Если окажется, что при этом значении h справедливы неравенства

$$\varrho_1{}^0(h) \leqslant \varrho_1(h) \leqslant \varrho_2(h) \leqslant \varrho_2{}^0(h), \tag{4.7}$$

то это будет означать, что метод простых поправок предпочтительнее метода (3.1) — неравенства (4.7) означают, что в методе простых поправок допускается большая величина $x_0 - x^*(\lambda_0)$, а при одном и том же x_0 теорема 4.1 гарантирует лучшую оценку для разностей $\|x_k - x^*(\lambda_k)\|$ при больших k в методе простых поправок, чем та, которую гарантирует теорема 3.1 для метода (3.1). Аналогично, если верны неравенства

$$\varrho_1(h) \leqslant \varrho_1{}^0(h) \leqslant \varrho_2{}^0(h) \leqslant \varrho_2(h), \tag{4.8}$$

то можно считать, что метод (3.1) предпочтительнее метода простых поправок. Пусть вначале

$$h = h_{\max} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4N^2M_2M_{11}}. \tag{4.9}$$

Тогда

$$\varrho_1(h_{\max}) = \varrho_2(h_{\max}) = \varrho^* = \frac{\sqrt[3]{2}}{4NM_{11}},$$

$$\varrho_1{}^0(h_{\max}) = \frac{1}{NM_{11}}\left[1 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} - \left(1 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)^{1/2}\right],$$

$$\varrho_2{}^0(h_{\max}) = \frac{1}{NM_{11}}\left[1 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} - \left(1 + \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)^{1/2}\right].$$

Простая проверка показывает справедливость неравенств

$$\varrho_1{}^0(h_{\max}) < \varrho_1(h_{\max}) = \varrho_2(h_{\max}) < \varrho_2{}^0(h_{\max}). \tag{4.10}$$

Все четыре функции $\varrho_1{}^0(h)$, $\varrho_2{}^0(h)$, $\varrho_1(h)$, $\varrho_2(h)$ очевидным образом непрерывны. Поэтому из (4.10) вытекает существование такого неотрицательного h^*, что при $h^* < h \leqslant h_{\max}$ метод простых поправок в описанном выше смысле предпочтительнее метода (3.1).

Оказывается, что при малых h картина другая — предпочтительнее метод (3.1). Для доказательства достаточно установить справедливость неравенств (4.8) при малых h. Пользуясь разложением по формуле Тейлора, легко получить следующие представления для функций (4.3) и (4.4) при малых h:

$$\varrho_1{}^0(h) = \frac{1}{8} N^3M_2{}^2M_{11}h^2 + o(h^2),$$

$$\varrho_2{}^0(h) = \frac{2}{NM_{11}} - NM_2h + o(h).$$

Функции $\varrho_1(h)$ и $\varrho_2(h)$ — это решения уравнения (3.4), обращающиеся при $h=0$ соответственно в 0 и $2/(NM_{11})$; определяя их как неявные функции, получим

$$\varrho_1(h)=\frac{1}{8}N^7M_2^4M_{11}h^4+o(h^4)$$

$$\varrho_2(h)=\frac{2}{NM_{11}}-\frac{NM_2h}{3}+o(h).$$

Поэтому при малых h выполнены неравенства (4.8).

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
3. Рыбашов М. В., Решение на модели методом градиента алгебраических и трансцендентных уравнений. Автоматика и телемеханика, 1961, **22**, № 1, 77—88.
4. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах. Москва, 1968.
5. Дементьева А. М., О разностных схемах построения неявной функции. Докл. АН СССР, 1971, **201**, № 4, 774—777.

Поступило
24 XI 1972

KAHE MEETODI VÕRDLUS ILMUTAMATA FUNKTSIOONI LIGIKAUDSEKS KONSTRUEERIMISEKS

A. Dementjeva

Resümee

Artiklis tuletatakse hinnangud, mis iseloomustavad kahe diferentsskeemi kvaliteeti ilmutamata funktsiooni ligikaudseks konstrueerimiseks. Mõlemad skeemid tuginevad tuntud Newton-Kantorovitši meetodi ideedel mittelineaarsete operaatorvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks. Viiakse läbi leitud hinnangute detailne võrdlev analüüs. See analüüs võimaldab kirjeldada tingimusi, millal on otstarbekohasem kasutada ühte või teist meetodit.

COMPARISON OF TWO METHODS OF APPROXIMATE CONSTRUCTING OF IMPLICIT FUNCTION

A. Dement'eva

Summary

The evaluations defining the quality of two difference schemes of approximate constructing of implicit function are established. Both of these schemes are based on the ideas of a well-known Newton-Kantorovich method of approximate solving of nonlinear operator equations. A detailed comparative analysis of the evaluations established is given. This analysis gives the possibility to describe the conditions in which the application of each method is preferable.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНО-УТИЛИТАРНОГО ЯЗЫКА

М. Койт

Кафедра математической статистики и программирования

В данной статье применяется один из возможных способов моделирования семантики. Вводятся понятия семантики, утилитарной семантики и элементарно-утилитарного языка. В качестве примера рассматриваются, между прочим, множество десятичных чисел алгоритмического языка АЛГОЛ и множество простых индексов универсальной десятичной классификации (УДК), оказывающиеся элементарно-утилитарными языками.

Пусть заданы непересекающиеся между собой конечные непустые множества символов

$$\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

и

$$\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\},$$

объединение которых обозначим через $\mathfrak{D}$.

Рассматриваем (конечное) множество всевозможных кортежей (цепочек) вида $R_iA_jA_k$, где $R_i \in \mathfrak{R}$ и A_j, $A_k \in \mathfrak{S}$. Выделим некоторое (пустое или непустое) подмножество $\mathfrak{G}$ этого множества.

Определение 1. *Множество $\mathfrak{M}$ кортежей, составленных из элементов монжества (алфавита) $\mathfrak{D}$, называем семантикой, если выполняются следующие условия:*

1) *любой элемент множества $\mathfrak{S}$ входит в $\mathfrak{M}$,*
2) *любой элемент множества $\mathfrak{G}$ входит в $\mathfrak{M}$,*
3) *если $PMN \in \mathfrak{M}$, $M \in \mathfrak{M}$, $P \in \mathfrak{R}$ и $S \in \mathfrak{R}$, то*
   a) *из $SMT \in \mathfrak{M}$ следует, что $PSMTN \in \mathfrak{M}$,*
   b) *из $SNT \in \mathfrak{M}$ следует, что $PMSNT \in \mathfrak{M}$,*
4) *$\mathfrak{M}$ — минимальное множество, удовлетворяющее условиям 1—3.*

Если $\mathfrak{G}$ — пустое множество, то $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{S}$.

Выделим в множестве $\mathfrak{S}$ некоторое непустое подмножество $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}$ и в множестве $\mathfrak{G}$ максимальное подмножество $\mathfrak{G}^*$ такое, что $A_j \in \mathfrak{S}^*$ для каждого $R_iA_jA_k$ из $\mathfrak{G}^*$.

Определение 2. *Подмножество* $\mathfrak{M}^*$ *семантики* $\mathfrak{M}$ *называем утилитарной семантикой, если выполняются следующие условия:*

1) *любой элемент множества* $\mathfrak{S}^*$ *входит в* $\mathfrak{M}^*$,
2) *любой элемент множества* $\mathfrak{G}^*$ *входит в* $\mathfrak{M}^*$,
3) *пункт* 3 *определения* 1, с $\mathfrak{M}^*$ *вместо* $\mathfrak{M}$,
4) *пункт* 4 *определения* 1, *с* $\mathfrak{M}^*$ *вместо* $\mathfrak{M}$.

Всякая семантика тривиальным образом оказывается утилитарной семантикой, если взять $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$. Обратное, вообще говоря, не имеет места.

Элементы утилитарной семантики будем называть *понятиями*, в частности, элементы множества $\mathfrak{S}^*$ — *простыми понятиями*. Элементы множества $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^*$ будем называть *парапонятиями* и элементы множества $\mathfrak{R}$ — *метапонятиями*.

Рассматриваем алгоритм Z (нормальный алгоритм Маркова)

$$Z = > X^1 \to Y^1 > X^2 \to Y^2 \ldots > X^s \to Y^s.$$

Здесь $> X^i \to Y^i$ ($i = 1, 2, \ldots s$) есть i-тая (простая) формула подстановки алгоритма Z; X^i и Y^i — соответственно, левая и правая части i-той формулы подстановки (см. [1]).

Будем говорить, что кортеж M *не изменяем* алгоритмом Z, и обозначим это обстоятельство $Z : M \urcorner$, если в алгоритме Z нет формулы подстановки, левая часть которой содержалась бы в кортеже M.

Будем говорить, что алгоритм Z *заменит* кортеж M кортежом N, и обозначим это обстоятельство $Z : M \to N$, если $M = M_1 X^i M_2$, $N = N_1 Y^i N_2$ и $> X^i \to Y^i$ — первая по порядку формула подстановки в алгоритме Z, левая часть X^i которой содержится в кортеже M.

Вместо $Z : M \to N$, $Z : N \to P$ будем в дальнейшем писать $Z : M \to N \to P$. Вместо $Z : M \to N$, $Z : N \urcorner$ будем писать $Z : M \to N \urcorner$.

Будем говорить, что алгоритм Z *заменит* (через p шагов, $p \geqslant 1$) кортеж M кортежом $N = M_p$, и обозначим это обстоятельство $Z : M \mapsto_p N$ или просто $Z : M \mapsto N$, если существуют кортежи $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$ такие, что $Z : M \to M_1 \to \to M_2 \to \ldots \to M_{p-1} \to N$.

Будем говорить. что алгоритм Z *превращает* кортеж M в кортеж N, и обозначим это обстоятельство $N = Z(M)$, если $Z : M \to N \urcorner$.

Будем говорить, что алгоритм Z *применим* к кортежу M, если существует кортеж $N = Z(M)$.

Ниже будет построен алгоритм Z, удовлетворяющий следующим условиям:

1° Z не применим к пустому кортежу Λ;

2° Z применим к любому непустому кортежу алфавита $\mathfrak{D}$ и превращает его в (пустой или непустой) кортеж некоторого наперед заданного алфавита $\mathfrak{A}$ с $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \varnothing$;

3° $Z(M) \neq \Lambda$ тогда и только тогда, когда $M \in \mathfrak{M}^*$.

Существование алгоритма, удовлетворяющего условиям 1°—3°, означает, что $\mathfrak{M}^*$ — разрешимое множество.

Алфавиты $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{A}$ будем называть, соответственно, *входным* и *выходным алфавитами* алгоритма Z. Алгоритм Z, входной и выходной алфавиты которого $\mathfrak{D}$ и, соответственно, $\mathfrak{A}$, будем обозначать через $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$.

Определение 3. *Алгоритм* $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$, *удовлетворяющий условиям* 1°—3°, *называем элементарным, если при любом понятии* M *имеет место следующее: для любых* A_i *и* A_j, *входящих в* M, *образы* $Z(A_i)$ *и* $Z(A_j)$ *входят в* $Z(M)$, *как непересекающиеся между собой подкортежи.*

Определение 4. *Пару* $(\mathfrak{M}^*, Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}])$, *где* $\mathfrak{M}^*$ — *утилитарная семантика и* $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ — *элементарный алгоритм, называем элементарно-утилитарным языком.*

Ниже в качестве примера будет построено несколько утилитарных семантик, в том числе утилитарная семантика $\mathfrak{M}^2$ множества десятичных чисел алгоритмического языка АЛГОЛ и утилитарная семантика $\mathfrak{M}^3$ множества простых индексов универсальной десятичной классификации (УДК). Будут указаны элементарные алгоритмы, соответственно, $Z_0^2[\mathfrak{D}^2, \mathfrak{A}^2]$ и $Z_0^3[\mathfrak{D}^3, \mathfrak{A}^3]$, превращающие утилитарные семантики $\mathfrak{M}^2$ и $\mathfrak{M}^3$ в соответствующие множества десятичных чисел АЛГОЛа и простых индексов УДК. Нетрудно, далее, построить утилитарные семантики, моделирующие весь язык АЛГОЛ или весь язык УДК, однако, не удается указывать соответствующих элементарных алгоритмов. Тем не менее, можно построить алгоритмы с более слабыми ограничениями, чем условие элементарности, так что АЛГОЛ и УДК, не являющиеся элементарно-утилитарными языками, окажутся т. н. утилитарными языками. Исследование таких языков, однако, не входит в рамки данной статьи.

Докажем несколько утверждений относительно утилитарной семантики.

Лемма 1. *Для всякого* $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ *найдутся кортежи* M^0, M^1 *и* M^2 *такие, что*

$$M = M^0 M^1 M^2, \text{ где } M^0 \in \mathfrak{R},\ M^1 \in \mathfrak{M}^*,\ M^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}.$$

Доказательство. Если $M \in \mathfrak{S}^*$, то утверждение очевидно. Предположим по индукции, что для $N, P \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ имеем $N = N^0 N^1 N^2$ и, соответственно, $P = P^0 P^1 P^2$.

Пусть $N^1 = P^1$ и $M = N^0 P N^2$ (здесь $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ по определению 2). Тогда $M = M^0 M^1 M^2$, где $M^0 = N^0 \in \mathfrak{R}$, $M^1 = P \in \mathfrak{M}^*$ и $M^2 = N^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$.

Пусть $N^2 = P^1$ и $M = N^0 N^1 P$ (здесь $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ по определению 2). Тогда $M = M^0 M^1 M^2$, где $M^0 = N^0 \in \mathfrak{R}$, $M^1 = N^1 \in \mathfrak{M}^*$, $M^2 = P \in \mathfrak{M}^*$.

Следовательно, $M = M^0 M^1 M^2$ для любого M, входящего в $\mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ при $M^0 \in \mathfrak{R}$, $M^1 \in \mathfrak{M}^*$, $M^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$.

Будем называть *длиной* кортежа M алфавита $\mathfrak{D}$ количество символов алфавита $\mathfrak{D}$, входящих в M. Длину M обозначим $p(M)$.

Лемма 2. *Для любого $M \in \mathfrak{M}^*$ длина $p(M) = 2n + 1$, причем M содержит n метапонятий и $n + 1$ простое или парапонятие.*

Доказательство. Если $M \in \mathfrak{S}^*$ или $M \in \mathfrak{G}^*$, то утверждение очевидно.

Пусть $p(M) = m > 3$. Предположим по индукции, что утверждение выполняется для всех понятий N, для которых $p(N) < m$. По лемме 1 имеем $M = M^0M^1M^2$, где $M^0 \in \mathfrak{R}$, $M^1 \in \mathfrak{M}^*$, $M^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$.

Если $M^2 \in \mathfrak{M}^*$, то по индуктивному допущению $p(M) = p(M^0) + p(M^1) + p(M^2) = 1 + 2m_1 + 1 + 2m_2 + 1 = 2(m_1 + m_2 + 1) + 1$, причем M содержит $m_1 + m_2 + 1$ метапонятие и $m_1 + 1 + m_2 + 1 = m_1 + m_2 + 2$ простых или парапонятия.

Если $M^2 \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^*$, то $p(M^2) = 1$ и $p(M) = p(M^0) + p(M^1) + p(M^2) = 1 + 2m_1 + 1 + 1 = 2(m_1 + 1) + 1$, причем M содержит $m_1 + 1$ метапонятие и $(m_1 + 1) + 1$ простое или парапонятие.

Следовательно, $p(M) = 2n + 1$ для любого $M \in \mathfrak{M}^*$.

Лемма 3. *Если $M = NT$, $T \neq \Lambda$, $M \in \mathfrak{M}^*$ и T содержит t метапонятий, то $p(T) \geqslant 2t + 1$.*

Доказательство. Если $M \in \mathfrak{S}^*$, то $T = M$ и утверждение очевидно.

Пусть $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ и пусть утверждение доказано для всех $P \in \mathfrak{M}^*$ таких, что $p(P) < p(M)$. По лемме 1 получаем, что $M = M^0M^1M^2$. Мы имеем три возможности:

1) $p(T) = p(M)$,
2) $p(M^2) < p(T) \leqslant p(M^1M^2)$,
3) $p(T) \leqslant p(M^2)$.

В первом случае утверждение очевидно.

Во втором случае $M^1M^2 = ST$ и $T = T_1M^2$, т. е. $M^1 = ST_1$. Пусть T_1 содержит t_1 метапонятий и $p(M^2) = 2m_2 + 1$. Тогда T содержит $t_1 + m_2$ метапонятий. По индуктивному допущению $p(T_1) \geqslant 2t_1 + 1$; следовательно, $p(T) = p(T_1) + p(M^2) \geqslant 2t_1 + 1 + 2m_2 + 1 > 2(t_1 + m_2) + 1$.

В третьем случае утверждение выполняется в силу индуктивного допущения, так как $p(M^2) < p(M)$.

Следовательно, $p(T) \geqslant 2t + 1$.

Теорема 1. *Любое понятие $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ единственным образом представимо в виде $M = M^0M^1M^2$, где $M^0 \in \mathfrak{R}$, $M^1 \in \mathfrak{M}^*$ и $M^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$.*

Доказательство. В силу леммы 1 остается доказать единственность утверждаемого представления. Докажем это от противного.

Пусть $M = M^0M^1M^2 = N^0N^1N^2$, где M^0, $N^0 \in \mathfrak{R}$; $M^1, N^1 \in \mathfrak{M}^*$ и $M^2, N^2 \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$. Так как $M^0 = N^0$, то $M^1M^2 = N^1N^2$. Без ограничения общности можно предполагать, что $M^1 = N^1T$, где $T \neq \Lambda$. Пусть $p(M^1) = 2m_1 + 1$, $p(N^1) = 2n + 1$ и T содержит t метапонятий. Тогда по лемме 3 находим, что $p(M^1) = p(N^1) + p(T) \geqslant 2n_1 + 1 + 2t + 1 > 2(n_1 + t) + 1$. С другой стороны, $p(M^1) = 2m_1 + 1 = 2(n_1 + t) + 1$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Если $M^i \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ $(i = 1, 2)$, то, по теореме 1, его можно представить в виде $M^i = (M^i)^0(M^i)^1(M^i)^2 = M^{i0}M^{i1}M^{i2}$, где $M^{i0} \in \mathfrak{R}$, $M^{i1} \in \mathfrak{M}^*$ и $M^{i2} \in \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{S}$. В общем, можно рассматривать «подкомпоненты» произвольного понятия M вида $(M^{j(1)j(2)\cdots j(k-1)})^{j(k)} = M^{j(1)j(2)\cdots j(k)}$, где

$$j(i) = 1,\ 2;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ j(k) = 0,\ 1,\ 2.$$

Для случая $j(i) = 1$ при $1 \leqslant h + 1 \leqslant i \leqslant k$ введем специальное обозначение $M^{j(1)j(2)\ldots j(h)1(k-h)}$. Дополнительно, пусть $M^{j(1)j(2)\cdots j(h)1(0)} = M^{j(1)j(2)\cdots j(h)}$.

Из этого следует, что $M^{1(m)1(n)} = M^{1(m+n)}$.

Пример 1. Пусть
$$\mathfrak{S}^1 = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\},$$
$$\mathfrak{S}^{1*} = \mathfrak{S}^1 \setminus \{A_0\},$$
$$\mathfrak{R}^1 = \{R_1, R_2\},$$
$$\mathfrak{G}^1 = \{R_1A_iA_0,\ R_2A_iA_j \mid i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Множество $\mathfrak{M}^{1*}$, построенное при помощи заданных множеств согласно определению 2, есть утилитарная семантика.

Например, $R_1R_2A_iA_jA_0 \in \mathfrak{M}^{1*}$ и $R_2A_iA_jA_k \in \mathfrak{M}^{1*}$.

Обозначим $M = R_1R_2A_iA_jA_0$ и $N = R_2A_iR_2A_jA_k$. Тогда

$$\begin{array}{llll}
M^0 = R_1, & M^1 = R_2A_iA_j, & M^2 = A_0, & \\
& M^{10} = R_2, & M^{11} = A_i, & M^{12} = A_j; \\
N^0 = R_2, & N^1 = A_i, & N^2 = R_2A_jA_k, & \\
& & N^{20} = R_2, \quad N^{21} = A_j, & N^{22} = A_k.
\end{array}$$

Пример 2. Пусть
$$\mathfrak{S}^0 = \{1\},$$
$$\mathfrak{S}^{0*} = \mathfrak{S}^0,$$
$$\mathfrak{R}^0 = \{0\},$$
$$\mathfrak{G}^0 = \{011\}.$$

Множество $\mathfrak{M}^0$, построенное при помощи заданных множеств согласно определениям 1 и 2, есть семантика.

Например, $0011001101011 \in \mathfrak{M}^0$.

Обозначим $M = 0011001101011$. Тогда

$$\begin{array}{lllll}
M^0 = 0, & M^1 = 011, & M^2 = 001101011, & & \\
& M^{10} = 0, & M^{11} = 1, & M^{12} = 1, & \\
& M^{20} = 0, & M^{21} = 011, & M^{22} = 01011, & \\
& & M^{210} = 0, & M^{211} = 1, & M^{212} = 1, \\
& & M^{220} = 0, & M^{221} = 1, & M^{222} = 011, \\
& & M^{2220} = 0, & M^{2221} = 1, & M^{2222} = 1,
\end{array}$$

Некоторые свойства семантики $\mathfrak{M}^0$ изучены в статье [2].

Определение 5. *Если* $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$, $N \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ *и*

a) $N^0 = M^0$, $N^1 = R_i M^1 P$, $N^2 = M^2$

или

b) $N^0 = M^0$, $N^1 = M^1$, $N^2 = R_i M^2 P$,

где $R_i \in \mathfrak{R}$,

то будем говорить, что понятие N *непосредственно порождаемо понятием* M, *и обозначим это* $M -\!< N$.

Определение 6. *Будем говорить, что понятие* $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ *порождаемо понятием* N, *и обозначим это через* $M =\!< N$, *если*

1) *или* $M = N$,

2) *или найдутся понятия* $N_0 = M, N_1, N_2, \ldots, N_k = N$ *такие, что* $N_i -\!< N_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Лемма 4. *Понятие* $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ *тогда и только тогда, когда найдется* $M_0 \in \mathfrak{G}^*$ *такое, что* $M_0 =\!< M$.

Доказательство. Достаточность следует из определения.

Необходимость. Пусть $M \in \mathfrak{G}^*$. Тогда $M_0 = M$.

Пусть теперь $M \in (\mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*)\backslash\mathfrak{G}^*$ и пусть утверждение доказано для всех N таких, что $p(N) < p(M)$. По теореме 1 находим, что $M = M^0 M^1 M^2$. По крайней мере один из кортежей $M^0 M^{11} M^2$ и $M^0 M^1 M^{21}$ имеет смысл и является понятием (пусть оно обозначено через N), причем $N -\!< M$ (иначе M не понятие). По индуктивному допущению найдется $N_0 \in \mathfrak{G}^*$ такое, что $N_0 =\!< N$, откуда $M_0 = N_0$.

Итак, для любого $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ найдется такое M_0, что $M_0 \in \mathfrak{G}^*$ и $M_0 =\!< M$.

Лемма 5. *Если* $M =\!< N$, *то найдутся однозначно определенные числа* n_1 *и* n_2 *такие, что* $M = M^0 N^{11(n_1)} N^{21(n_2)}$.

Доказательство. Если $M =\!< N$, то найдутся понятия $M_0 = M, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = N$ такие, что $M_i -\!< M_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Пусть $n = 0$. Тогда $M = N$ и $M = M^0 M^1 M^2 = M^0 N^{11(0)} N^{21(0)}$, т. е., $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, где n_1 и n_2 однозначно определены.

Пусть теперь утверждение доказано для $n \leqslant k$ и пусть $n = k+1$. Тогда найдутся понятия $M_0 = M, M_1, M_2, \ldots, M_k, M_{k+1} = N$ такие, что $M_i -\!< M_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$. По индуктивному предположению $M = M^0 N^{11(n_1)} N^{21(n_2)}$, где p_1 и p_2 однозначно определены. Но $M_k -\!< M_{k+1}$, значит, найдется однозначно определенное число $q = 1$ или $q = 2$ такое, что $M_k{}^0 = M_{k+1}{}^0$, $M_k{}^q = M_{k+1}{}^{q1}$, $M_k{}^r = M_{k+r}{}^r$, где $r = 1$ или $r = 2$, причем $r \neq q$.

Обозначим

$$s_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t = q, \\ 0, & \text{если } t = r. \end{cases} \qquad (t = 1, 2).$$

Тогда
$$M_k = M_k^0 M_k^1 M_k^2 = M_k^0 M_{k+1}^{11(s_1)} M_{k+1}^{21(s_2)}$$
и
$$M = M_k^0 M_k^{11(p_1)} M_k^{21(p_2)} = M_k^0 (M_{k+1}^{11(s_1)})^{1(p_1)} (M_{k+1}^{21(s_2)})^{1(p_2)} = \\ = M^0 M_{k+1}^{11(s_1+p_1)} M_{k+1}^{21(s_2+p_2)}.$$
Числа $n_1 = s_1 + p_1$ и $n_2 = s_2 + p_2$ однозначно определены.

Следовательно, $M = M^0 N^{11(n_1)} N^{21(n_2)}$, где $M = \prec N$, для любого $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$,

Следствие 1. *Для любого $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ найдется однозначно определенное $M_0 \in \mathfrak{G}^*$ такое, что $M_0 = \prec M$.*

Доказательство. В силу леммы 4 остается доказать единственность понятия M_0. Допустим, противоположно к утверждению, что $M_0 = \prec M$, $N = \prec M$, $M_0 \neq N$, где $(M_0, N \in \mathfrak{G}^*)$. Из леммы 5 следует, что $M_0 = M^0 M^{11(m_1)} M^{21(m_2)}$ и $N = M^0 M^{11(n_1)} M^{21(n_2)}$, где $M^{11(m_1)}, M^{11(n_1)} \in \mathfrak{S}^*$ и $M^{21(m_2)}, M^{21(n_2)} \in \mathfrak{S}$. Но тогда $M^{11(m_1)} = M^{11(n_1)}$, $M^{21(m_2)} = M^{21(n_2)}$ и $M_0 = N$.

Понятие M_0 такое, что $M_0 = \prec M$ и $M_0 \in \mathfrak{G}^*$, называем *базой* понятия M.

Обозначим $n(N, M) = n_1(N, M) + n_2(N, M)$, где $M = \prec N$ и $M = M^0 N^{11(n_1(N,M))} N^{21(n_2(N,M))}$.

Очевидно, что

1) если $n(N, M) = 0$, то $M = N$,

2) $n(N, M) \geqslant n_k(N, M) \qquad (k = 1, 2)$,

3) если $M = \prec N = \prec P$, то
$$n_k(P, M) = n_k(N, M) + n_k(P, N) \qquad (k = 1, 2)$$
и
$$n(P, M) = n(N, M) + n(P, N),$$

4) если $M = \prec N$, то $n(N, M) = 1$.

Пример 3. В утилитарной семантике $\mathfrak{M}^{1*}$ (см. пример 1)
$$R_1 A_i A_0 - \prec R_1 R_1 A_i A_0 A_0 - \prec R_1 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 A_0 - \prec \\ - \prec R_1 R_2 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 R_1 A_i A_0 A_0.$$
Понятие $R_1 A_i A_0$ является базой для понятий $R_1 R_1 A_i A_0 A_0$, $R_1 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 A_0$, $R_1 R_2 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 R_1 A_i A_0 A_0$.
Здесь
$$R_1 A_i A_0 = \prec R_1 R_2 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 R_1 A_i A_0 A_0;$$
$$n(R_1 R_1 A_i A_0 A_0, R_1 A_i A_0) = n_1(R_1 R_1 A_i A_0 A_0, R_1 A_i A_0) = 1$$
и
$$n(R_1 R_2 R_1 A_i A_0 A_0 R_1 A_i A_0 A_0, R_1 A_i A_0) = \\ = n_1(R_1 R_2 R_1 R_1 A_i A_0 A_0 R_1 A_i A_0 A_0, R_1 A_i A_0) = 3.$$
Далее, например, $R_2 A_i A_j = \prec R_2 R_2 A_i A_j R_1 A_j A_0$ и
$$n(R_2 R_2 A_i A_j R_1 A_j A_0, R_2 A_i A_j) = 1 + 1 = 2.$$

Пример 4. В семантике $\mathfrak{M}^0$ (см. пример 2) каждое понятие $M \in \mathfrak{M}^0 \setminus \mathfrak{S}^0$ имеет базу 011.

Одним и тем же понятием непосредственно порождаемыми может оказаться несколько понятий, например,
$$00111 - \prec 0011011, \qquad 00111 - \prec 000110111.$$

Одно и то же понятие может оказаться непосредственно порожаемым более чем одним понятием, например,

$$0011011 -\!< 0011011011, \qquad 000110111 -\!< 00011011011.$$

Далее, $00111 = \!< 00011011011$; $n_1(00011011011, 00111) = 1$, $n_2(00011011011, 00111) = 1$ и $n(00011011011, 00111) = 2$.

Следствие 2. *Если $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ и кортеж $M^{(1)} = M^0M^{11}M^2$ имеет смысл, то $M^{(1)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$, где $M^1 \in \mathfrak{S}^*$ и $M^2 \in \mathfrak{S}$. Тогда $M^{(1)} = M^0M^{11}M^2$, где $M^{11} \in \mathfrak{S}^*$. Если бы $M^{(1)} \notin \mathfrak{M}^*$, то и $M \notin \mathfrak{M}^*$, следовательно, $M^{(1)} \in \mathfrak{M}^*$ и $M^{(1)} -\!< M$.

Пусть $M -\!< N$ и пусть для M уже доказано, что $M^{(1)} = M^0M^{11}M^2 \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$. Тогда $n(N, M) = 1$ и имеет место одно из двух — либо $n_1(N, M) = 0$, $n_2(N, M) = 1$, либо $n_1(N, M) = 1$, $n_2(N, M) = 0$.

a) Если $n_1(N, M) = 0$ и $n_2(N, M) = 1$, то $N = N^0N^1N^2$, где $N^0 = M^0$, $N^1 = M^1$, $N^{21} = M^2$. По индуктивному предположению, $M^{(1)} = M^0M^{11}M^2 \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$. Так как $N^{21} = M^2$, то по определению 2 будет $N^{(1)} = N^0N^{11}N^2 = M^0M^{11}N^2 \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

b) Если $n_1(N, M) = 1$ и $n_2(N, M) = 0$, то $N = N^0N^1N^2$, где $N = M^0$, $N^{11} = M^1$, $N^2 = M^2$, следовательно, $N^{(1)} = M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

Итак, если $M^{(1)}$ имеет смысл, то $M^{(1)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ для любого $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

Следствие 3. *Если $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ и кортеж $M^{(2)} = M^0M^1M^{21}$ имеет смысл, то $M^{(2)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$, где $M^1 \in \mathfrak{S}^*$ и $M^2 \in \mathfrak{S}^*$. Тогда $M^{(2)} = M^0M^1M^{21}$, где $M^{21} \in \mathfrak{S}^*$. Если бы $M^{(2)} \notin \mathfrak{M}^*$, то и $M \notin \mathfrak{M}^*$, значит, $M^{(2)} \in \mathfrak{M}^*$ и $M^{(2)} -\!< M$.

Пусть $M -\!< N$ и пусть для M уже доказано, что $M^{(2)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$. Тогда $n(N, M) = 1$ и имеет место одно из двух — или $n_1(N, M) = 0$, $n_2(N, M) = 1$, или $n_1(N, M) = 1$, $n_2(N, M) = 0$.

a) Если $n_1(N, M) = 0$ и $n_2(N, M) = 1$, то $N = N^0N^1N^2$, где $N^0 = M^0$, $N^1 = M^1$, $N^{21} = M^2$ и $N^{(2)} = N^0N^1N^{21} = M^0M^1M^2 = M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

b) Если $n_1(N, M) = 1$ и $n_2(N, M) = 0$, то $N = N^0N^1N^2$, где $N^0 = M^0$, $N^{11} = M^1$, $N^2 = M^2$. По индуктивному предположению, $M^0M^1M^{21} = M^{(2)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$. Так как $N^1 \in \mathfrak{M}^*$ и $N^{11} = M^1$, то по определению 2 будет $N^{(2)} = N^0N^1N^{21} = M^0N^1M^{21} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

Следовательно, если $M^{(2)}$ имеет смысл, то $M^{(2)} \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ для любого $M \in \mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$.

Лемма 6. *Если $M_1, M_2, \ldots, M_p \in \mathfrak{M}^*$ и $M_i{}^1 = M_j{}^1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, то*

$$M_{i(k)}{}^0 M_{i(k-1)}{}^0 \ldots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \ldots M_{i(k-1)}{}^2 M_{i(k)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*$$

при любом k $(k = 1, 2, \ldots; i(1), i(2), \ldots, i(k) = 1, 2, \ldots, p)$.

Доказательство. При $k = 1$ имеем

$$M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 = M_{i(1)}, \; M_{i(1)} \in \mathfrak{M}^*.$$

Пусть утверждение доказано для $k=n$. Образуем кортеж
$$M = M_{i(n+1)}{}^0 M_{i(n)}{}^0 M_{i(n-1)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n-1)}{}^2 M_{i(n)}{}^2 M_{i(n+1)}{}^2$$
$$(1 \leqslant i(n+1) \leqslant p).$$
По индуктивному допущению
$$M_{i(n+1)}{}^0 M_{i(n-1)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n-1)}{}^2 M_{i(n+1)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*$$
и
$$M_{i(n)}{}^0 M_{i(n-1)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n-1)}{}^2 M_{i(n)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*.$$
Отсюда по определению 2 получим, что $M \in \mathfrak{M}^*$.

Следовательно, утверждение леммы выполняется при любом $k \geqslant 1$.

Лемма 7. *Если* $M_1, M_2, \dots, M_p \in \mathfrak{M}^*$ *и* $M_i{}^1 = M_p{}^2$ $(i = 1, 2, \dots, p-1)$, *то*
$$M_p{}^0 M_p{}^1 M_{i(k)}{}^0 M_{i(k-1)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(k-1)} M_{i(k)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*$$
при любом $k = 1, 2, \dots$ $(i(1), i(2), \dots, i(k) = 1, 2, \dots, p-1)$.

Доказательство. При $k=1$ заключаем, что $M_p{}^0 M_p{}^1 M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2.

Пусть утверждение доказано для $k=n$. Образуем кортеж
$$M = M_p{}^0 M_p{}^1 M_{i(n+1)}{}^0 M_{i(n)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n)}{}^2 M_{i(n+1)}{}^2$$
при $1 \leqslant i_{(n+1)} \leqslant p-1$. По индуктивному допущению,
$$M_p{}^0 M_p{}^1 M_{i(n)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*.$$
По лемме 6 тогда
$$M_{i(n+1)}{}^0 M_{i(n)}{}^0 \dots M_{i(1)}{}^0 M_{i(1)}{}^1 M_{i(1)}{}^2 \dots M_{i(n)}{}^2 M_{i(n+1)}{}^2 \in \mathfrak{M}^*.$$
Применяя определение 2, получим, что $M \in \mathfrak{M}^*$.

Следовательно, утверждение леммы выполняется при любом $k \geqslant 1$.

Утилитарная семантика $\mathfrak{M}^*$ частично упорядочена в смысле отношения $M = < N$. Будем исследовать это частичное упорядочение.

Выделим в множестве $\mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ некоторые подмножества.

Пусть для $B \in \mathfrak{S}^*$
$$\mathfrak{M}_i{}^{B1} = \{B^0 M B^2 \mid M^{1(i)} = B^1\},$$
$$\mathfrak{M}_j{}^{B2} = \{B^0 B^1 N \mid N^{1(j)} = B^2\},$$
$$\mathfrak{M}_{ij}{}^{B} = \{B^0 M N \mid M^{1(i)} = B^1, \quad N^{1(j)} = B^2\} \qquad (i, j = 0, 1, \dots).$$

Легко видеть, что
$$\mathfrak{M}_0{}^{B1} = \{B\},$$
$$\mathfrak{M}_0{}^{B2} = \{B\},$$
$$\mathfrak{M}_{00}{}^{B} = \{B\},$$
$$\mathfrak{M}_{i0}{}^{B} = M_i{}^{B1} \qquad (i = 0, 1, \dots),$$

$$\mathfrak{M}_{0j}{}^{B}=\mathfrak{M}_j{}^{B2} \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots),$$
$$\mathfrak{M}_i{}^{Bk}\cap\mathfrak{M}_j{}^{Bk}=\varnothing \qquad (k=1,\ 2;\ i,\ j=0,\ 1,\ \ldots),$$
$$\mathfrak{M}_i{}^{B1}\cap\mathfrak{M}_j{}^{B2}=\varnothing \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots),$$
$$\mathfrak{M}_{ij}{}^{B}\cap\mathfrak{M}_{kl}{}^{B}=\varnothing \qquad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2,\ \ldots;\ i\neq k \text{ или } j\neq l).$$

Каждое понятие из $\mathfrak{M}_i{}^{B1}$ (или $\mathfrak{M}_j{}^{B2}$) непосредственно порождаемо некоторым понятием в множестве $\mathfrak{M}^{B1}{}_{i-1}$ (или $\mathfrak{M}^{B2}{}_{j-1}$), где $i=1,2,\ \ldots$ (соответственно $j=1,2,\ \ldots$).

Если $M\in\mathfrak{M}_i{}^{B1}$, то
$$n(M,B)=n_1(M,B)=i \qquad (i=0;\ 1,\ \ldots);$$
если $M\in\mathfrak{M}_j{}^{B2}$, то
$$n(M,B)=n_2(M,B)=j \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots);$$
если $M\in\mathfrak{M}_{ij}{}^{B}$, то
$$n_1(M,B)=i, \qquad n_2(M,B)=j, \qquad n(M,B)=i+j,\ (i,\ j=0,\ 1,\ \ldots).$$

Пусть еще
$$\mathfrak{M}^{B1}=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i{}^{B1},$$
$$\mathfrak{M}^{B2}=\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathfrak{M}_j{}^{B2},$$
$$\mathfrak{M}^{B}=\bigcup_{i,j=0}^{\infty}\mathfrak{M}_i{}^{jB}.$$

Из этого следует, что

если $M\in\mathfrak{M}^{B1}$, то $n(M,B)=n_1(M,B)$;
если $M\in\mathfrak{M}^{B2}$, то $n(M,B)=n_2(M,B)$;
если $M\in\mathfrak{M}^{B}$ и $M\neq B$, то $n_1(M,B)\neq 0$ или $n_2(M,B)\neq 0$.

Множество $\mathfrak{M}^{B}$ состоит из всех понятий, порождаемых понятием B; понятие B является их базой.

Лемма 8. *При $B\neq C$ и $B, C\in\mathfrak{G}^*$ множество $\mathfrak{M}^{B}\cap\mathfrak{M}^{C}=\varnothing$.*

Доказательство. Как известно,
$$\mathfrak{M}^{B}=\bigcup_{i,j=0}^{\infty}\mathfrak{M}^{B}{}_{ij},$$
$$\mathfrak{M}^{C}=\bigcup_{i,j=0}^{\infty}\mathfrak{M}^{C}{}_{ij},$$
$$\mathfrak{M}^{B}{}_{ij}=\{B^0MN\mid M^{1(i)}=B^1,\ N^{1(j)}=B^2\}$$
$$\mathfrak{M}^{C}{}_{ij}=\{C^0PQ\mid P^{1(i)}=C^1,\ Q^{1(j)}=C^2\}:$$

Здесь мы имеем три возможности:

1) $B^0\neq C^0$,
2) $B^0=C^0$, но $B^1\neq C^1$,
3) $B^0=C^0$, $B^1=C^1$, но $B^2\neq C^2$.

Во всех случаях утверждение очевидно.

Из единственности базы следует, что если $M\in\mathfrak{M}^{B}$ и $N\in\mathfrak{M}^{C}$ (причем $B, C\in\mathfrak{G}^*$ и $B\neq C$), то ни $M=\,<N$, ни $N=\,<M$. Значит, множество $\mathfrak{M}^*\backslash\mathfrak{S}^*$ распадается на конечное число подмножеств $\mathfrak{M}^{B}$, где $B\in\mathfrak{G}^*$, причем любые два понятия, взятые из

различных подмножеств, не упорядочены относительно друг друга в смысле отношения порождаемости.

Лемма 9. *Множества* $\mathfrak{M}_i^{B^1} \neq \varnothing$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}^{B^1}{}_0 = \{B\} \neq \varnothing$. Далее, по лемме 6,

$$\underbrace{B^0B^0 \ldots B^0}_{i} B \underbrace{B^2 \ldots B^2B^2}_{i} \in \mathfrak{M}^*,$$

следовательно

$$\underbrace{B^0B^0 \ldots B^0}_{i} B \underbrace{B^2 \ldots B^2B^2}_{i} \in \mathfrak{M}^{B^1}{}_i.$$

Значит, $\mathfrak{M}_i^{B^1} \neq \varnothing$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 10. *Для любого* $M \in \mathfrak{M}^B$ *найдется* $N \in \mathfrak{M}^B$ *такое, что* $M -\!\!< N$.

Доказательство. Так как $M \in \mathfrak{M}^B$, то $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$, где $i, j \geqslant 0$, $M^0 = B^0$, $M^{11(i)} = B^1$, $M^{21(j)} = B^2$.

Пусть $i \geqslant 0$, $j = 0$. Кортеж $N = M^0MM^2$ — понятие, $N \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,0}$ и $M -\!\!< N$.

Пусть $i \geqslant 0$, $j > 0$. Кортежи $N_1 = M^0MM^2$ и $N_2 = M^0M^1M^{20}M^2M^{22}$ — понятия, причем $N_1 \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,j}$, $N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i,j+1}$ и $M -\!\!< N_1$, $M -\!\!< N_2$.

Следствие 1. *Если* $M \in \mathfrak{M}^B{}_{i0}$ $(i \geqslant 0)$, *то найдется* $N \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,0}$ *такое, что* $M -\!\!< N$.

Следствие 2. Если $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$ $(i \geqslant 0,\ j > 0)$, *то найдутся* $N \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,j}$ *и* $N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i,j+1}$ *такие, что* $M -\!\!< N_1$ *и* $M -\!\!< N_2$.

Следствие 3. *Если* $\mathfrak{M}^B{}_{10}$ *бесконечно, то множества* $\mathfrak{M}^B{}_{i0} (i > 1)$ *бесконечны.*

Доказательство. Для любых $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{10}$ найдутся $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{20}$ такие, что $M_1 -\!\!< N_1$, $M_2 -\!\!< N_2$ (по следствию 1) Притом, если $M_1 \neq M_2$, то $N_1 \neq N_2$. Следовательно, $\mathfrak{M}^B{}_{20}$ бесконечно.

Предположим по индукции, что $\mathfrak{M}^B{}_{i0}$ бесконечно $(i > 1)$. Для любых $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i0}$ найдутся $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,0}$ такие, что $M_1 -\!\!< N_1$ и $M_2 -\!\!< N_2$, причем $N_1 \neq N_2$ при $M_1 \neq M_2$. Следовательно, $\mathfrak{M}^B{}_{i+1,0}$ содержит бесконечное число различных понятий.

Итак, $\mathfrak{M}^B{}_{i0}$ бесконечно для любого $i > 1$.

Лемма 11. *Для любого* $M \in \mathfrak{M}^B$, *где* $M \neq B$, *найдется* $N \in \mathfrak{M}^B$ *такое, что* $N -\!\!< M$.

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^B$, $M \neq B$. Тогда найдутся числа $i, j \geqslant 0$; $i^2 + j^2 > 0$, такие, что $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$, т. е. $M^0 = B^0$, $M^{11(i)} = B^1$ и $M^{21(j)} = B^2$.

Если $i > 0$, то кортеж $N_1 = M^0M^{11}M^2$ имеет смысл и по следствию 2 из леммы 5 является понятием. Так как $N^0{}_1 = M^0 = B^0$, $N_1{}^{11(i-1)} = M^{11(i)} = B^1$ и $N_1{}^{21(j)} = M^{21(j)} = B^2$, то $N_1 \in \mathfrak{M}^B{}_{i-1,j} \subset \mathfrak{M}^B$. По определению 5, понятие $N_1 -\!\!< M$.

Если $j > 0$, то кортеж $N_2 = M^0M^1M^{21}$ существует и по следствию 3 из леммы 5 является понятием. Так как $N^0{}_2 = M^0 = B^0$, $N_2^{11(i)} = M^{11(i)} = B^1$, $N_2^{21(j-1)} = M^{21(j)} = B^2$, то $N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i,j-1} \subset \mathfrak{M}^B$. По определению 5, отсюда заключаем, что $N_2 -\!\!< M$.

Следствие 1. *Если $M \in \mathfrak{M}^B{}_{i0}$ $(i > 0)$, то найдется единственное $N \in \mathfrak{M}^B{}_{i-1,0}$ такое, что $N -\!\!< M$.*

Следствие 2. *Если $M \in \mathfrak{M}^B{}_{0j}$ $(j < 0)$, то найдется единственное $N \in \mathfrak{M}^B{}_{0,j-1}$ такое, что $N -\!\!< M$.*

Следствие 3. *Если $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$ $(i, j > 0)$, то найдутся однозначно определенные $N_1 \in \mathfrak{M}^B{}_{i-1,j}$ и $N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i,j-1}$ такие, что $N_1 -\!\!< M$ и $N_2 -\!\!< M$.*

Лемма 12. *Если $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$ и найдется $N \in \mathfrak{M}^*$ такое, что $N^1 = M^{12}$, или найдется $P \in \mathfrak{M}^*$ такое, что $P^1 = M^{22}$, то $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно $(i, j \geqslant 0;\ i^2 + j^2 > 0)$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$ и $N^1 = M^{12}$. Тогда

$$M^0M^{10}M^{11}\underbrace{N^0N^0\ldots N^0}_{k}N\underbrace{N^2\ldots N^2N^2}_{k}M^2 \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$$

(по лемме 7, следствию 2 из леммы 5, определению 2 и определению множества $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$), $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно.

Пусть теперь $M \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$ и $P^1 = M^{22}$. Тогда

$$M^0M^1M^{20}M^{21}\underbrace{P^0P^0\ldots P^0}_{k}P\underbrace{P^2\ldots P^2P^2}_{k} \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$$

(по лемме 7, следствию 3 из леммы 5, определению 2 и определению множества $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$), $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно.

Следствие 1. *Если $B^1 = C^2$, где $B, C \in \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{M}^{C1}{}_1$ бесконечно и $\mathfrak{M}^{C2}{}_1 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Так как $C^0CC^2 \in \mathfrak{M}^{C1}{}_1$ и $B^1 = C^2$, то множество $\mathfrak{M}^{C1}{}_1$ бесконечно. Множество $\mathfrak{M}^{C2}{}_1$ не пусто, потому что $C^0C^1B \in \mathfrak{M}^{C2}{}_1$.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{M}^{B2}{}_1 \neq \varnothing$, то $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно $(i>0,\ j\geqslant 0)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}^{B2}{}_1 \neq \varnothing$, т. е. найдется $M = B^0B^1C \in \mathfrak{M}^B{}_{01}$, где $C \in \mathfrak{S}^*$ и $C^1 = B^2$. Тогда $B^0MB^2 \in \mathfrak{M}^B{}_{10}$, причем $(C^0CC^2)^1 = (B^0MB^2)^{12}$, и $\mathfrak{M}^B{}_{10}$ бесконечно по лемме 12. Далее, множества $\mathfrak{M}^B{}_{i0}$ $(i > 1)$ бесконечны по следствию 3 из леммы 10. Так как $B^0MC \in \mathfrak{M}^B{}_{11}$, то $\mathfrak{M}^B{}_{11}$ бесконечно по лемме 12.

Пусть, по индукции, уже доказано, что $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно $(i, j \geqslant 1)$. Докажем, что тогда множества $\mathfrak{M}^B{}_{i+1,j}$ и $\mathfrak{M}^B{}_{i,j+1}$ бесконечны. Для любых несовпадающих $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{ij}$, по следствию 2 из леммы 10, найдутся несовпадающие $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}^B{}_{i+1,j}$ такие, что $M_1 -\!\!< N_1$ и $M_2 -\!\!< N_2$. Следовательно, $\mathfrak{M}^B{}_{i+1,j}$ бесконечно.

Аналогично доказывается бесконечность множества $\mathfrak{M}^B{}_{i,j+1}$. Итак, $\mathfrak{M}^B{}_{ij}$ бесконечно при любых $i > 0$, $j \geqslant 0$.

Следствие 3. *Если* $\mathfrak{M}^{B1}{}_1$ *состоит из конечного числа понятий, то* $\mathfrak{M}^{B2}{}_1 = \varnothing$.

Доказательство следует из следствия 2.

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Лемма 13. *Если* $\mathfrak{M}^{Bl}{}_1$ *состоит из* p *понятий, то* $\mathfrak{M}^{Bl}{}_i$ $(i > 1)$ *состоит из* p^i *понятий* $(l = 1, 2)$.

Доказательство. Пусть $l = 1$ и пусть
$\mathfrak{M}_1{}^{B1} = \{B^0B^0B^1B^2B^2, B^0M_iB^2 \mid M_i{}^1 = B^1, M_i \in \mathfrak{M}^*, \ i = 1, 2, \ldots, p-1\}$. В силу конечности $M_1{}^{B1}$, для любого понятия $N \in \mathfrak{G}^*$ будет $N^1 \neq M_i{}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ и $N^1 \neq B^2$. Обозначим B через M_p. Каждым понятием $M_p{}^0M_iM_p{}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ непосредственно порождаемы p понятий $M_p{}^0M_j{}^0M_i{}^0M_i{}^1M_i{}^2M_j{}^2M_p{}^2$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ входящих в множество $\mathfrak{M}^{B1}{}_2$. Так как $M_i \neq M_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, то $\mathfrak{M}_2{}^{B1}$ состоит из $p \cdot p = p^2$ различных понятий.

Предположим по индукции, что

$$\mathfrak{M}^{B1}{}_k = \{M_p{}^0M_{i(k)}{}^0M_{i(k-1)}{}^0 \ldots M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(1)}{}^2 \ldots$$
$$\ldots M_{i(k-1)}{}^2M_{i(k)}{}^2M_p{}^2 \mid i(1), i(2), \ldots, i(k) = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Каждым понятием

$$M_p{}^0M_{i(k)}{}^0M_{i(k-1)}{}^0 \ldots M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(1)}{}^2 \ldots M_{i(k)}{}^2M_{i(k+1)}{}^2M_p{}^2$$

непосредственно порождаемы p понятий

$$M_p{}^0M_{i(k+1)}{}^0M_{i(k)}{}^0 \ldots M_{i(2)}{}^0M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(1)}{}^2 \ldots M_{i(k)}{}^2M_{i(k+1)}{}^2M_p{}^2$$

$(i(k+1) = 1, 2, \ldots, p)$, входящих в множество $\mathfrak{M}^{B1}{}_{k+1}$ (по лемме 6 такие кортежи — понятия). Следовательно, $\mathfrak{M}^{B1}{}_{k+1}$ состоит из p^{k+1} различных понятий.

Итак, при любом i множество $\mathfrak{M}^{B1}{}_i$ состоит из p^i различных понятий $(i = 2, 3, \ldots)$.

Пусть теперь $l = 2$ и

$$\mathfrak{M}_1{}^{B2} = \{B^0B^1M_i \mid M_i \in \mathfrak{M}^*, \quad M_i{}^1 = B^2; \quad i = 1, 2, \ldots, p\}.$$

В силу конечности $\mathfrak{M}^{B2}{}_1$, для любого $N \in \mathfrak{G}^*$ получаем $N^1 \neq M_i{}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Каждым понятием $B^0B^1M_i$ непосредственно порождаемы p различных понятий $B^0B^1M_j{}^0M_i{}^0M_i{}^1M_i{}^2M_j{}^2$, входящих в множество $\mathfrak{M}^{B2}{}_2$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$. Так как $M_i \neq M_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, то $\mathfrak{M}^{B2}{}_1$ состоит из p^2 различных понятий.

Предположим по индукции, что

$$\mathfrak{M}^{B2}{}_k = \{B^0B^1M_{i(k)}{}^0M_{i(k-1)}{}^0 \ldots M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(1)}{}^2 \ldots$$
$$\ldots M_{i(k-1)}{}^2M_{i(k)}{}^2 \mid i(1), i(2), \ldots, i(k) = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Каждым $B^0B^1M_{i(k)}{}^0M_{i(k-1)}{}^0 \ldots M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(1)}{}^2 \ldots M_{i(k-1)}{}^2M_{i(k)}{}^2$ непосредственно порождаемы p различных понятий

$$B^0B^1M_{i(k+1)}{}^0M_{i(k)}{}^0 \ldots M_{i(2)}{}^0M_{i(1)}{}^0M_{i(1)}{}^1M_{i(2)}{}^2 \ldots M_{(i)k}{}^2M_{i(k+1)}{}^2$$
$$(i(k+1) = 1, 2, \ldots, p),$$

входящих в множество $\mathfrak{M}^{B2}{}_{k+1}$ (по лемме 7 такие кортежи — понятия). Следовательно, $\mathfrak{M}^{B2}{}_{k+1}$ состоит из p^i различных понятий.

Итак, при любом i множество $\mathfrak{M}^{B2}{}_i$ состоит из p^i различных понятий $(i = 2, 3, \ldots)$.

Следствие. *Множество* $\mathfrak{M}^{B2} = \{B\}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}^{B2}{}_1 = \varnothing$.

Пример 5. Множество $\mathfrak{G}^1$ (см. пример 1) содержит $n + n^2$ понятий. Следовательно, $\mathfrak{M}^{1*} \backslash \mathfrak{S}^{1*}$ распадается на $n + n^2$ непересекающихся между собой подмножеств $(M^1)^B$, где $B \in \mathfrak{G}^1$, причем понятия, взятые из различных подмножеств, не сравнимы между собой в смысле отношения порождаемости. Подмножества $(\mathfrak{M}^1)_1{}^{R_1A_iA_01}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ состоят из бесконечного числа понятий. Так как $(\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_02}{}_1 = \varnothing$, то $(\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_02} = \{R_1A_iA_0\}$ и $(\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_0}{}_{kl} = (\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_0}{}_k$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$.

В подмножество $(\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_01}{}_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входят, например, понятия $R_1R_1A_iA_0A_0$, $R_1R_2A_iA_jA_0$, $R_1R_2A_iR_2A_jA_kA_0$, $R_1R_2A_iR_2R_2A_jA_kA_lA_0$ и т. д. $(j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$.

В подмножество $(\mathfrak{M}^1)^{R_1A_iA_01}{}_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входят, например, понятия $R_1R_1R_1A_iA_0A_0A_0$, $R_1R_2R_1A_iA_0A_jA_0$, $R_1R_2R_1A_0A_0R_2A_jA_kA_0$, $R_1R_2R_1A_iA_0R_2R_2A_jA_lA_kA_0$ и т. д. $(j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$.

Все подмножества $(\mathfrak{M}^1)^{R_2A_iA_j}{}_{kl}$, $(\mathfrak{M}^1)^{R_2A_iA_j2}{}_l$, $(\mathfrak{M}^1)^{R_2A_iA_j1}{}_k$ $(k, l > 0)$ бесконечны.

Лемма 14. *Если* $M = NA_iP \in \mathfrak{M}^* \backslash \mathfrak{S}^*$ *и* $A_i \in \mathfrak{S}^*$, *то найдутся однозначно определенные числа* $j(1), j(2), \ldots, j(k) = 1, 2$ *такие, что* $A_i = M^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$ $(k \geqslant 1)$.

Доказательство. Если $M \in \mathfrak{G}^*$, то $A_i = M^1$ или $A_i = M^2$.

Пусть теперь $M \in (\mathfrak{M}^* \backslash \mathfrak{S}^*) \backslash \mathfrak{G}^*$ и пусть утверждение леммы выполняется для всех понятий, с длиной меньше, чем $p(M)$. Мы имеем следующие возможности: 1) $A_i = M^1$, 2) $A_i = M^2$, 3) A_i входит в M^1, как собственный подкортеж, 4) A_i входит в M^2, как собственный подкортеж. В первых двух случаях $k = 1$ и, соответственно $j(k) = 1$ или $j(k) = 2$.

Рассматриваем случай 3. Так как $p(M^1) < p(M)$, то по индуктивному допущению однозначно найдутся такие числа $h(1), h(2), \ldots, h(l) = 1,2$; $l \geqslant 1$; что $(M^1)^{h(1)h(2)\ldots h(l)} = A_i$. Следовательно, $k = l + 1$, $j(1) = 1$, $j(2) = h(1)$, $j(3) = h(2), \ldots, j(k) = h(l)$ и $A_i = M^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$.

Выполнимость утверждения в случае 4 доказывается аналогично случаю 3.

Итак, $A_i = M^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$, где $k \geqslant 1$ и $j(1), j(2), \ldots, j(k)$ однозначно определены.

Лемма 15. *Если* $M = NR_iP \in \mathfrak{M}^*$ *и* $N \neq \Lambda$, *то найдутся единственный кортеж* P_1 *и однозначно определенные числа* $j(1), j(2), \ldots, j(k) = 1, 2$; $k \geqslant 1$, *такие, что* $R_iP_1 = M^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$.

Доказательство. Так как $N \neq \Lambda$, то $R_i \neq M^0$. Следовательно, мы имеем две возможности относительно рассматриваемого вхождения R_i; именно: R_i входит в M^1, или R_i входит в M^2.

Если $M^1 = R_iP_1$, то $k = 1$, $j(k) = 1$ и, по теореме 1, кортеж P_1 однозначно определен.

Если $M^2 = R_iP$, то $k = 1$, $j(k) = 2$ и, по теореме 1, кортеж P однозначно определен.

Допустим, по индукции, что утверждение леммы выполняется для всех понятий, с длиной меньше, чем $p(M)$.

Пусть R_i входит в M^1, не являясь его началом: $M^1 = N_1R_iQ$. Так как $p(M^1) < p(M)$, то $(M^1)^{h(1)h(2)\ldots h(l)} = R_iQ_1$, где числа $h(1), h(2), \ldots, h(l)$ и кортеж Q_1 однозначно определены. Следовательно, $k = l + 1$, $j(1) = 1$, $j(2) = h(1)$, $j(3) = h(2), \ldots, j(k) = h(l)$ и $P_1 = Q_1$.

Случай, когда R_i входит в M^2, рассматривается аналогичным образом.

Следовательно, $R_iP_1 = M^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$ (числа $j(1), j(2), \ldots, j(k) = 1, 2$; $k \geqslant 1$; и кортеж P_1 однозначно определены).

Следствие. *Если $M = NR_iA_jA_kQ$ и $R_iA_jA_k \notin \mathfrak{G}^*$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$.*

Доказательство. Допустим, противоположно к утверждению, что $M \in \mathfrak{M}^*$. Так как $M = NR_iP$, то по лемме 15 найдутся единственный кортеж P_1 и однозначно определенные числа $j(1), j(2), \ldots, j(k)$ такие, что $M^{j(1)j(2)\ldots j(k)} = R_iP_1$. Отсюда $M^{j(1)j(2)\ldots j(k)0} = R_i$. Следовательно, $M^{j(1)j(2)\ldots j(k)1} = A_j$ и, $M^{j(1)j(2)\ldots j(k)2} = A_k$, по теореме 1. Итак, $M^{j(1)j(2)\ldots j(k)} = R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^*$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Теорема 2. *Если $M_1A_iM_2 \in \mathfrak{M}^*$ и $R_jA_iA_k \in \mathfrak{G}^*$, то $M_1R_jA_iA_kM_2 \in \mathfrak{M}^*$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $N = M_1A_iM_2$ и $N^+ = M_1R_jA_iA_kM_2$.

Пусть сначала $M_1 = \Lambda$. Тогда $N = A_i$ и $N^+ = R_jA_iA_k \in \mathfrak{G}^* \subset \mathfrak{M}^*$.

Пусть теперь $M_1 \neq \Lambda$. Следовательно, $N \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$ и по лемме 14 найдутся однозначно определенные числа $j(1), j(2), \ldots, j(k) = 1, 2$; $k \geqslant 1$; такие, что $A_i = N^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$.

Если $k = 1$, то $A_i = N^{j(1)}$ и $N^+ \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2.

Пусть утверждение доказано для $k = l \geqslant 1$. Докажем, что оно выполняется и для $k = l + 1$. По индуктивному допущению, $(N^{j(1)})^+ \in \mathfrak{M}^*$. По следствию 2 или 3 из леммы 5 вытекает $N^{(j(1))} \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$. Если $j(2) = 1$, то $(N^{(j(1))})^+ \in \mathfrak{M}^*$ по индуктивному допущению и $N^+ \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2. Если $j(2) = 2$, то $((N^{j(1)})^+)^1 = N^{j(1)1}$ и $N^+ \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2.

Следовательно, $N^+ \in \mathfrak{M}^*$ для любого N.

Теорема 3. *Если $M_1PM_2 \in \mathfrak{M}^*$ и $P \in \mathfrak{G}^*$, то $M_1P^1M_2 \in \mathfrak{M}^*$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $N = M_1PM_2$ и $N^- = M_1P^1M_2$.

Пусть сначала $M_1 = \Lambda$. Тогда $N = P$ и $N^- = P^1 \in \mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{M}^*$.

Пусть теперь $M_1 \neq \Lambda$. По лемме 15 найдутся однозначно определенные числа $j(1), j(2), \ldots, j(k) = 1, 2$; $k \geqslant 1$ такие, что $P = N^{j(1)j(2)\ldots j(k)}$.

Если $k = 1$, то $P = N^{j(1)}$ и $N^- = N^{(j(1))} \in \mathfrak{M}^*$ по следствию 2 или 3 леммы 5.

Пусть утверждение доказано для $k = l \geqslant 1$. Докажем, что оно выполняется и для $k = l + 1$.

По индуктивному допущению, $(N^{j(1)})^- \in \mathfrak{M}^*$. По следствию 2 или 3 из леммы 5 выводим, что $N^{(j(1))} \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$.

Если $j(2) = 1$, то $(N^{(j(1))})^- \in \mathfrak{M}^*$ по индуктивному допущению и $N^- \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2.

Если $j(2) = 2$, то $N^- \in \mathfrak{M}^*$ по определению 2.

Следовательно, $N^- \in \mathfrak{M}^*$ для любого N.

Следствие. *Для любого понятия M можно найти множество $M_0, M_1, \ldots, M_n = M$ такое, что*

1) $M_0 \in \mathfrak{S}^*$,

2) $M_i = M_{1i}P_i{}^1M_{2i}$ *и* $M_{i+1} = M_{1i}P_iM_{2i}$, *где* $P_i \in \mathfrak{G}^*$ *и* M_{2i} — *кортеж алфавита* $\mathfrak{S}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Доказательство. Если $M \in \mathfrak{S}^*$, то $M_0 = M$ — искомое множество.

Если $M \notin \mathfrak{S}^*$, то построим сначала вспомогательное множество $N_0, N_1, \ldots, N_n$.

Пусть $N_0 = M$. Если $N_0 \in \mathfrak{G}^*$, то пусть $N_1 = N_0{}^1$. В противном случае $N_0 = N_{01}Q_1N_{02}$, где $Q_1 \in \mathfrak{G}^*$ и N_{02} — пустой или непустой кортеж алфавита $\mathfrak{S}$. Тогда пусть $N_1 = N_{01}Q_1{}^1N_{02}$, причем $p(N_1) = p(N_0) - 2 = p(M) - 2$.

Предположим, что уже построен k-тый член N_k вспомогательного множества, причем $p(N_k) = p(N_{k-1}) - 2 = p(M) - 2k$. Если $N_k \in \mathfrak{G}^*$, то пусть $N_{k+1} = N_k{}^1$. В противном случае $N_k = N_{k1}Q_kN_{k2}$, где $Q_k \in \mathfrak{G}^*$ и N_{k2} — кортеж алфавита $\mathfrak{S}$. Тогда пусть $N_{k+1} = N_{k1}Q_k{}^1N_{k2}$, где $p(N_{k+1}) = p(N_k) - 2 = p(M) - 2(k+1)$.

Процесс кончится, когда найден $N_n \in \mathfrak{S}^*$ с $n = (p(M) - 1)/2$ и $p(N_n) = 1$.

Возьмем $M_i = N_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Здесь $M_0 \in \mathfrak{S}^*$ и если $M_i = N_{n-i} = N_{n-i,1}Q_{n-i}N_{n-i,2} = N_{n-i,1}Q_{n-(i+1)}{}^1N_{n-i,2} = M_{i1}P_i{}^1M_{i2}$, то $M_{i+1} = N_{n-(i+1),1} = N_{n-(i+1),1}Q_{n-(i+1)}N_{n-(i+1),2} = M_{i1}P_iM_{i2}$.

Следовательно, $M_0, M_1 \ldots, M_n = M$ — искомое множество.

Найденное множество будем называть *разложением* понятия M.

Приводим здесь алгоритм $Z_1[\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \cup \{\alpha, \beta\}]$, превращающий любое понятие в его разложение (в алфавите $\mathfrak{D}'$).

Алгоритм $Z_1[\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \cup \{\alpha, \beta\}]$

Входной алфавит алгоритма:

$$\mathfrak{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n; R_1, R_2, \ldots, R_m\},$$

выходной алфавит:

$$\mathfrak{D}' \cup \{\alpha, \beta\} = \{A_1', A_2', \ldots, A_n'; R_1', R_2', \ldots, R_m', \alpha, \beta\},$$

вспомогательный алфавит:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D}'' \cup \{\gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu\} =$$
$$= \{A_1'', A_2'', \ldots, A_n''; R_1'', R_2'', \ldots, R_m''; \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu\}.$$

Схема алгоритма:

$$\left\{ \begin{array}{l} > R_i''\gamma A_j''A_k'' \to \mu\nu A_j'' \\ \qquad (R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^*) \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} > R_i''\gamma A_j''A_k'' \to \lambda \\ \qquad (R_iA_jA_k \notin \mathfrak{G}^*) \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} > R_i''\gamma A_j'' \to \lambda \\ > A_j''\gamma \to \gamma A_j'' \\ > R_i \to R_i''R_i' \\ > A_j \to A_j''A_j' \\ > \delta R_i'' \to R_i''R_i'\delta \\ > \delta A_j'' \to A_j''A_j'\delta \\ \qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array} \right.$$
$$> \delta\nu \to \alpha\delta \quad > \delta \to \Lambda$$
$$\left\{ \begin{array}{l} > \lambda R_i' \to \lambda \\ > \lambda A_j' \to \lambda \\ \qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array} \right.$$
$$> \lambda\alpha \to \lambda$$
$$> \lambda\beta \to \lambda$$
$$\left\{ \begin{array}{l} > R_i''\lambda \to \lambda \\ > A_j''\lambda \to \lambda \\ \qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array} \right.$$
$$> \lambda \to \Lambda$$
$$\begin{array}{ll} \{> \alpha A_j'' \to A_j''\alpha & (A_j \in \mathfrak{S}) \\ \{> R_i'R_j'' \to R_j''R_i' & (R_i, R_j \in \mathfrak{R}) \\ \{> R_i'A_j'' \to A_j''R_i' & (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \\ \{> A_i'R_j'' \to R_j''A_i' & (R_j \in \mathfrak{R}, A_i \in \mathfrak{S}) \\ \{> A_i'A_j'' \to A_j''A_i' & (A_i, A_j \in \mathfrak{S}) \\ \{> A_i''R_j' \to A_i''\gamma\beta R_j' & (R_j \in \mathfrak{R}, A_i \in \mathfrak{S}) \\ \{> R_i''R_j' \to \lambda & (R_i, R_j \in \mathfrak{R}) \\ \{> R_i''A_j' \to \lambda & (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} > R_i''\mu \to \mu R_i'' \\ > A_j''\mu \to \mu A_j'' \\ \qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array} \right.$$
$$> \mu \to \delta$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} > A_i''\alpha A_i'\beta \to \alpha A_i'\beta & \\ > A_i''A_i' \to \lambda A_i' & (A_i \in \mathfrak{S}^*) \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} > A_i''A_j' \to \lambda & \\ > A_i''\alpha A_j' \to \lambda & (A_i, A_j \in \mathfrak{S}) \end{array} \right.$$
$$\{> R_i''\alpha A_j' \to \lambda \qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S})$$

Проекцией кортежа P алфавита $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B}$ на (произвольный) алфавит $\mathfrak{C}$ называем кортеж $P(\mathfrak{C})$, полученный из кортежа P вычеркиванием всех букв алфавита $\mathfrak{B}$.

Пусть D — произвольный кортеж алфавита $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{B}$. Обозначим через D'' (и, соответственно, D') кортеж, полученный из кортежа D заменой всех букв алфавита $\mathfrak{D}$ их дубликатами в алфавите $\mathfrak{D}''$ (соответственно, в $\mathfrak{D}'$).

Теорема 4. *Алгоритм* $Z_1[\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \cup \{\alpha, \beta\}]$

1) *не применим к пустому кортежу,*

2) *применим к любому непустому кортежу входного алфавита* $\mathfrak{D}$,

3) $Z_1(M) \neq \Lambda$ *тогда и только тогда, когда* $M \in \mathfrak{M}^*$,

4) *если* $M \in \mathfrak{M}^*$, *то* $(Z_1(M))(\mathfrak{D} \cup \{\alpha, \beta\}) = M_0'\beta M_1'\beta M_2' \ldots \beta M_n'$, *где* $M_0(\mathfrak{D})$, $M_1(\mathfrak{D})$, $M_2(\mathfrak{D})$, $\ldots$, $M_n(\mathfrak{D})$ — *разложение понятия* M *и* $n \geqslant 0$.

Доказательство. **1.** Алгоритм Z_1 не применим к Λ, так как среди формул подстановки нет ни одной, левая часть которой была бы пуста.

2. Пусть $M = A_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}$ и $q \geqslant 1$.

a) Если $M = A_{j(1)}$ и $A_{j(1)} \in \mathfrak{S}^*$, то $M = \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \rightarrow A_{j(1)}''A_{j(1)}' \rightarrow \alpha A_{j(1)}' \urcorner$, причем $(\alpha A_{j(1)}')(\mathfrak{D} \cup \{\alpha, \beta\}) = A_{j(1)}'$, где $A_{j(1)}$ — разложение понятия $A_{j(1)}$.

b) Если $M = A_{j(1)}$ и $A_{j(1)} \in \mathfrak{S} \backslash \mathfrak{S}^*$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \rightarrow A_{j(1)}''A_{j(1)}' \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

c) Если $M = A_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}$, где $q \geqslant 2$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \mapsto A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''A_{j(1)}'A_{j(2)}' \ldots A_{j(q)}' \mapsto \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

3. Пусть $M = A_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}R_iC$ и $q \geqslant 1$. Тогда $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \mapsto A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''R_i''C''A_{j(1)}'A_{j(2)}' \ldots A_{j(q)}'R_i'C' \mapsto \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

4. Пусть $M = R_iC$, где в M имеются $p \geqslant 1$ вхождений метапонятий.

a) Если $M = R_i$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \rightarrow R_i''R_i' \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

b) Пусть $M = R_iA_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}$ и $q \geqslant 1$.

Если $M = R_iA_j$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \mapsto M''M' \mapsto \lambda\beta R_i'A_j' \mapsto \Lambda \urcorner$.

Если $M = R_iA_{j(1)}A_{j(2)}$ и $R_iA_{j(1)}A_{j(2)} \notin \mathfrak{S}^*$, то $Z_1: M \mapsto M''M' \mapsto \lambda\beta M' \mapsto \Lambda \urcorner$.

Если $M = R_iA_{j(1)}A_{j(2)}$ и $R_iA_{j(1)}A_{j(2)} \in \mathfrak{S}^*$, то $Z_1: M \mapsto R_i''A_{j(1)}''A_{j(2)}''R_i'A_{j(1)}'A_{j(2)}' \mapsto R_i''\gamma A_{j(1)}''A_{j(2)}''\beta R_i'A_{j(1)}'A_{j(2)}' \rightarrow \mu\nu A_{j(1)}''\beta M' \rightarrow \delta\nu A_{j(1)}''\beta M' \rightarrow \alpha\delta A_{j(1)}''\beta M' \mapsto A_{j(1)}''\alpha A_{j(1)}'\beta M' \rightarrow \alpha A_{j(1)}'\beta R_i'A_{j(1)}'A_{j(2)}' \urcorner$.

Если $M = R_iA_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}$ и $q > 2$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \mapsto M''M' \mapsto R_i''\gamma A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''\beta M' \mapsto \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

c) Если $M = R_iC_1R_j$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1: M \mapsto R_i''C_1''R_j''R_i'C_1'R_j' \mapsto \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

d) Пусть теперь $M = R_iC_1R_{h(1)}A_{j(1)}A_{j(2)} \ldots A_{j(q)}$ и $q \geqslant 1$.

Если $q=1$, то $M\notin\mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \mapsto$

$\mapsto R_i''C_1''R_{h(1)}''A_{j(1)}''R_i'C_1'R_{h(1)}'A_{(j)1}' \to$

$\to R_i''C_1''R_{h(1)}''A_{j(1)}''\gamma\beta R_i'C_1'R_{h(1)}'A_{j(1)}' \to$

$\to R_i''C_1''R_{h(1)}''\gamma A_{j(1)}''\beta R_i'C_1'R_{h(1)}'A_{j(1)}' \to$

$\to R_i''C_1''\lambda\beta R_i'C_1'R_{h(1)}'A_{j(1)}' \mapsto \lambda \to \Lambda$ ⅂.

Если $q\geqslant 2$, то $Z_1 : M \mapsto$

$\mapsto R_i''C_1''R_{h(1)}''A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''R_i'C_1'R_{h(1)}'A_{j(1)}'A_{j(2)}' \ldots A_{j(q)}' \to$

(кортеж M дублирован в алфавитах $\mathfrak{D}''$ и $\mathfrak{D}'$)

$\to R_i''C_1''R_{h(1)}''A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''\gamma\beta M' \mapsto$

$\mapsto R_i''C_1''R_{h(1)}''\gamma A_{j(1)}''A_{j(2)}'' \ldots A_{j(q)}''\beta M'$.

Если $R_{h(1)}A_{j(1)}A_{j(2)} \notin \mathfrak{S}^*$, то $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \mapsto \lambda \to \Lambda$ ⅂.

Если $R_{h(1)}A_{j(1)}A_{j(2)} \in \mathfrak{S}^*$, то $Z_1 : M \mapsto$

$\mapsto R_i''C_1''\mu\nu A_{j(1)}''A_{j(3)}'' \ldots A_{j(q)}''\beta M' \mapsto$

(самое правое вхождение в кортеже M'' некоторого $R_{h(1)}''A_{j(1)}''A_{j(2)}$, где $R_{h(1)}A_{j(1)}A_{j(2)} \in \mathfrak{S}^*$, заменено на $\mu\nu A_{j1}''$)

$\mapsto \mu R_i''C_1''\nu A_{j(1)}''A_{j(3)}'' \ldots A_{j(q)}''\beta M' \to$

(буква μ перемещена в начало кортежа)

$\to \delta R_i''C_1''\nu A_{j(1)}''A_{j(3)}'' \ldots A_{j(q)}''\beta M' \mapsto$

$$\mapsto \underbrace{R_i''C_1''A_{j(1)}''A_{j(3)}'' \ldots A_{j(q)}''}_{P_1''}\gamma\beta \underbrace{R_i'C_1'\alpha A_{j(1)}'A_{j(3)}' \ldots A_{j(q)}'}_{N_1'}\beta M'$$

(кортеж алфавита $\mathfrak{D}''$ дублирован в алфавите $\mathfrak{D}'$; буква ν, замененная на α, входит только во второй дубликат; конец обрабатываемого кортежа — кортеж $\beta M'$ алфавита $\mathfrak{D} \cup \{\beta\}$ — оставлен без изменения).

Здесь N_1 и P_1 содержат $p-1$ вхождение метапонятий ($p\geqslant 2$). Кроме того, если M — понятие, то $N_1(\mathfrak{D})$ — понятие (по теореме 3).

Допустим по индукции, что, применяя алгоритм Z_1 к кортежу M, мы или получим пустой кортеж (чем работа алгоритма окончена), или некоторый промежуточный результат

$$\underbrace{R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''}_{P_l''}\gamma\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M'$$

($1\leqslant l\leqslant p-2$), где

1) N_k ($k=1, 2, \ldots, l$) содержит $p-k$ вхождений метапонятий и одно вхождение буквы α, причем

$$N_l = R_iC_{l+1}R_{h(l+1)}A_{u(1)} \ldots \alpha A_{u(s)} \ldots A_{u(t)}, \quad 1\leqslant s\leqslant t,$$

2) $N_{k+1}(\mathfrak{D})$ отличается от $N_k(\mathfrak{D})$ тем и только тем, что самое правое вхождение в $N_k(\mathfrak{D})$ некоторого подкортежа $R_hA_{j(1)}A_{j(2)}$ заменено в $N_{k+1}(\mathfrak{D})$ на $A_{j(1)}$, причем в N_{k+1} перед этим вхождением $A_{j(1)}$ стоит α,

3) P_l содержит $p-l$ вхождений метапонятий.

Докажем, что утверждение выполняется и для $r=l+1$, где $2\leqslant r\leqslant p-1$.

Если $t=1$, то $N_l(\mathfrak{D})=P_l \notin \mathfrak{M}^*$, $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''A_{u1}''\gamma\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''\gamma A_{u(1)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow R_i''C_{l+1}''\lambda\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

Если $t>1$ и $R_{h(l+1)}A_{u(1)}A_{u(2)} \notin \mathfrak{G}^*$, то $N_l(\mathfrak{D})=P_l \notin \mathfrak{M}^*$, $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\gamma\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''\gamma A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\rightarrow R_i''C_{l+1}''\lambda A_{u(3)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

Если $R_{h(l+1)}A_{u(1)}A_{u(2)} \in \mathfrak{G}^*$, то $Z_1 : M \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\gamma\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''R_{h(l+1)}''\gamma A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''C_{l+1}''\mu\nu A_{u(1)}''A_{u(3)} \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow \mu R_i''C_{l+1}''\nu A_{u(1)}''A_{u(3)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow \delta R_i''C_{l+1}''\nu A_{u(1)}''A_{u(3)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_l'\beta N_{l-1}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow \underbrace{R_i''C_{l+1}''A_{u(1)}''A_{u(3)}'' \ldots A_{u(t)}''}_{P_{l+1}''}\gamma\beta \underbrace{R_i'C_{l+1}'\alpha A_{u(1)}'A_{u(3)}' \ldots A_{u(t)}'}_{N_{l+1}'}\beta N_l' \ldots$

$\ldots \beta N_1'\beta M'$.

Здесь N_{l+1} содержит $p-(l+1)$ вхождение метапонятий и одно вхождение буквы α; кортеж $N_{l+1}(\mathfrak{D})$ отличается от $N_l(\mathfrak{D})$ тем и только тем, что самое правое вхождение в $N_l(\mathfrak{D})$ некоторого подкортежа $R_{h(l+1)}A_{u(1)}A_{u(2)}$ заменено на $A_{u(1)}$, причем в N_{l+1} перед этим вхождением $A_{u(1)}$ стоит α; кортеж P_{l+1} содержит $p-(l+1)$ вхождение метапонятий.

Следовательно, применяя алгоритм Z_1 к кортежу $M = R_iC_1R_{h(1)}A_{j(1)} \ldots A_{j(q)}$, где $q \geqslant 1$, мы или получим Λ, или промежуточный результат

$$\underbrace{R_i''A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''}_{P_{n-1}''}\gamma\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M',$$

где $t \geqslant 1$, $n \leqslant (p(M)-1)/2$.

Если теперь $t=1$, то $N_{n-1}(\mathfrak{D})=P_{n-1} \notin \mathfrak{M}^*$, $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \models\!\!\rightarrow R_i''A_{u(1)}''\gamma\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow R_i''\gamma A_{u(1)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow \lambda\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

Если $t>2$, то $N_{n-1}(\mathfrak{D})=P_{n-1} \notin \mathfrak{M}^*$, $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \rightarrow$

$\rightarrow R_i''A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\gamma\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\rightarrow R_i''\gamma A_{u(1)}''A_{u(2)}'' \ldots A_{u(t)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow \rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

Если $t=2$ и $R_iA_{u(1)}A_{u(2)} \notin \mathfrak{G}^*$, то $N_{n-1}(\mathfrak{D})=P_{n-1} \notin \mathfrak{M}^*$, $M \notin \mathfrak{M}^*$ и $Z_1 : M \models\!\!\rightarrow R_i''A_{u(1)}''A_{u(2)}''\gamma\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow R_i''\gamma A_{u(1)}''A_{u(2)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \rightarrow$

$\models\!\!\rightarrow \lambda\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}' \ldots \beta N_1'\beta M' \models\!\!\rightarrow \lambda \rightarrow \Lambda \urcorner$.

Если $t=2$ и $R_iA_{u(1)}A_{u(2)}\in\mathfrak{G}^*$, то $N_{n-1}(\mathfrak{D})=P_{n-1}\in\mathfrak{M}^*$, $N_k(\mathfrak{D})\in\mathfrak{M}^*$ ($k=n-2,\ n-3,\ \ldots,\ 1$), $M\in\mathfrak{M}^*$ (по теореме 2) и $Z_1: M \mapsto R_i''A_{u(1)}''A_{u(2)}''\gamma\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \mapsto$

$$\mapsto R_i''\gamma A_{u(1)}''A_{u(2)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \to$$
$$\to \mu\nu A_{u(1)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \to$$
$$\to \delta\nu A_{u(1)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \to$$
$$\to \alpha\delta A_{u(1)}''\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \mapsto$$
$$\mapsto \alpha A_{u(1)}''A_{u(1)}'\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \to$$
$$\to A_{u(1)}''\alpha A_{u(1)}'\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \to$$
$$\to \alpha A_{u(1)}'\beta N_{n-1}'\beta N_{n-2}'\ldots\beta N_1'\beta M' \urcorner.$$

Получен кортеж выходного алфавита $\mathfrak{D}'\cup\{\alpha,\beta\}$. Множество проекций $M_0=N_0(\mathfrak{D})$, $M_1=N_{n-1}(\mathfrak{D})$, $\ldots$, $M_{n-1}=N_1(\mathfrak{D})$, $M_n=M$ — разложение понятия M.

Алгоритм Z_1, однако, не элементарен, потому что, например, в $Z_1(R_iA_jA_k)=\alpha A_j'\beta R_i'A_j'A_k'$ (где $R_iA_jA_k\in\mathfrak{G}^*$ и $A_k\in\mathfrak{S}^*$) не входит в качестве подкортежа $Z_1(A_k)=\alpha A_k'$.

П р и м е р 6. В утилитарной семантике $\mathfrak{M}^{1*}$ (см. пример 1) имеем

$$Z_1(R_1R_2A_iR_2R_2A_jA_kA_lA_0)=$$
$$=\alpha A_i'\beta R_1'\alpha A_i'A_0'\beta R_1'R_2'A_i'\alpha A_j'A_0'\beta R_1'R_2'A_i'R_2'\alpha A_j'A_l'A_0'\times$$
$$\times\beta R_1'R_2'A_i'R_2'R_2'A_j'A_k'A_l'A_0'.$$

Разложением понятия $R_1R_2A_iR_2R_2A_jA_kA_lA_0$ является множество понятий A_i, $R_1A_iA_0$, $R_1R_2A_iA_jA_0$, $R_1R_2A_iR_2A_jA_lA_0$, $R_1R_2A_iR_2R_2A_jA_kA_lA_0$. Для кортежа $R_1R_2A_iR_2R_2A_0A_kA_lA_0$, не входящего в множество $\mathfrak{M}^*$, однако, $Z_1: R_1R_2A_iR_2R_2A_0A_kA_lA_0 \mapsto_{46}$ $\mapsto_{46} R_1''R_2''A_i''R_2''R_2''A_0''A_k''A_l''A_0''\gamma\beta R_1'R_2'A_i'R_2'R_2'A_0'A_k'A_l'A_0' \mapsto_4$ $\mapsto_4 R_1''R_2''A_i''R_2''R_2''\gamma A_j''A_k''A_l''A_0''\beta R_1'R_2'A_i'R_2'R_2'A_0'A_k'A_l'A_0' \to$ $\to R_1''R_2''A_i''R_2''\lambda A_l''A_0''\beta R_1'R_2'A_i'R_2'R_2'A_0'A_k'A_l'A_0' \mapsto_{16} \lambda \to \Lambda \urcorner$.

П р и м е р 7. В семантике $\mathfrak{M}^0$ (см. пример 2) имеем $Z_1(00011011011)=\alpha 1'\beta 0'\alpha 1'1'\beta 0'0'\alpha 1'1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'\times$ $\times 1'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1'0'1'1'$.

Разложение понятия 00011011011 — множество 1, 011, 00111, 0001111, 000110111, 00011011011.

С другой стороны, для кортежа 00011011, не являющего понятием,

$$Z_1: 00011011 \mapsto_{36}$$
$$\mapsto_{36} 0''0''0''1''1''0''1''1''0'0'0'1'1'0'1'1' \mapsto_3$$
$$\mapsto_3 0''0''0''1''1''0''\gamma 1''1''\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$$
$$\to 0''0''0''1''1''\mu\nu 1''\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mapsto_6$$
$$\mapsto_6 \delta 0''0''0''1''1''\nu 1''\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mapsto_{25}$$
$$\mapsto_{25} 0''0''0''1''1''1''\gamma\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mapsto_3$$
$$\mapsto_3 0''0''0''\gamma 1''1''1''\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$$
$$\to 0''0''\mu\nu 1''1''\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mapsto_2$$
$$\mapsto_2 \mu 0''0''\nu 1''1''\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$$

$\to \delta 0''0''\nu 1''1''\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mid\!\to_{15}$
$\mid\!\to_{15} 0''0''1''1''\gamma\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mid\!\to_{2}$
$\mid\!\to_{0} 0''0''\gamma 1''1''\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to 0''\mu\nu 1''\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to \mu 0''\nu 1''\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to \delta 0''\nu 1''\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mid\!\to_{4}$
$\mid\!\to_{4} 0''0'\alpha 1''1'\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mid\!\to_{2}$
$\mid\!\to_{2} 0''1''0'\alpha 1'\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to 0''1''\gamma\beta 0'\alpha 1'\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to 0''\gamma 1''\beta 0'\alpha 1'\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \to$
$\to \lambda\beta 0'\alpha 1'\beta 0'0'\alpha 1'1'\beta 0'0'0'1'1'\alpha 1'\beta 0'0'0'1'1'0'1'1' \mid\!\to_{27} \lambda \to \Lambda \urcorner.$

Перейдем к рассмотрению алгоритма Z_0, являющегося элементарным.

Алгоритм $Z_0[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$

Входной алфавит алгоритма Z_0:

$$\mathfrak{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n; R_1, R_2, \ldots, R_m\},$$

выходной алфавит:

$$\mathfrak{A} = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = \varnothing,$$

вспомогательный алфавит:

$$\mathfrak{B}_0 = \underbrace{\mathfrak{D}' \cup \{\gamma_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1\}}_{\mathfrak{B}_1} \cup \mathfrak{D}'' \cup$$
$$\cup \{\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu_2, \nu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \cup$$
$$\cup \mathfrak{A}' \cup \mathfrak{D}''' \cup \{\alpha, \beta\},$$

где через $\mathfrak{B}_1$ обозначен вспомогательный алфавит алгоритма $Z_1[\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \cup \{\alpha, \beta\}]$.

Для каждого $A_j \in \mathfrak{S}^*$ пусть задан некоторый кортеж $K_{j(1)}K_{j(2)} \ldots K_{j(a(j))}$ алфавита $\mathfrak{A}$. Для каждого $B \in \mathfrak{G}^*$ пусть задан специальный кортеж алфавита $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{S}'''$ такой, что если $A_j \in \mathfrak{S}$ входит в кортеж B один раз (два раза), то A_j''' входит в заданный кортеж один раз (соответственно два раза).

Кортеж, поставленный в соответствие понятию $R_i A_j A_k$, обозначим через $Z_{0i}'(A_j''', A_k''')$. Кортеж, полученный из кортежа $Z_{0i}'(A_j''', A_k''')$ путем замены A_j''' на Y (или, соответственно, A_k''' на Y), где Y — некоторый кортеж алфавита $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}_0$, обозначим через $Z_{0i}'(Y, A_k''')$ (соответственно, через $Z_{0i}'(A_j''', Y)$. Кортеж, полученный из кортежа $Z_{0i}'(A_j''', A_k''')$ путем замены подкортежей алфавита $\mathfrak{A}''$ их дубликатами в алфавите $\mathfrak{A}$, обозначим через $Z_{0i}(A_j''', A_k''')$. Кортеж, полученный из кортежа $Z_{0i}(A_j''', A_k''')$ путем замены A_j''' и A_k''' соответственно на $K_{j(1)}K_{j(2)} \ldots K_{j(a(j))}$ и $K_{k(1)}K_{k(2)} \ldots K_{k(a(k))}$ (где $K_{j(1)}K_{j(2)} \ldots K_{j(a(j))}$ и $K_{k(1)}K_{k(2)} \ldots K_{k(a(k))}$ — кортежи, поставленные в соответствие понятиям A_j и A_k; если $A_k \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^*$, то A_k''' заменится на пустой кортеж), обозначим через $Z_{0i}(j, k)$.

Введенные обозначения нужны для описания алгоритма Z_0.

Схема алгоритма:

$$Z_1[\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}' \cup \{\alpha,\ \beta\}]$$

$$\left\{\begin{array}{l} > R_i'\gamma_3 A_j' A_k' \to \sigma_1 Z_{0i}'(A_j''',\ A_k''')\sigma_1 \\ > R_i'\gamma_3 \alpha A_j' A_k' \to \lambda_3 Z_{0i}'(A_j''',\ \nu_3,\ \gamma_5,\ A_k''')\lambda_3 \\ > R_i'\gamma_3 A_j' \alpha A_k' \to \lambda_3 Z_{0i}'(A_j''',\ A_k''',\ \nu_3\gamma_5)\lambda_3 \end{array}\right. \qquad (R_i A_j A_k \in \mathfrak{S}^*)$$

$$> \beta\beta \to \beta$$

$$> \gamma_2 \alpha A_i' \to A_i' \nu_2 \gamma_2 \qquad (A_i \in \mathfrak{S}^*)$$

$$> \gamma_2 \to \gamma_4$$

$$\{ > \gamma_4 K_i \to K_i \gamma_4 \qquad (K_i \in \mathfrak{A})$$

$$\{ > \gamma_4 R_i' \to R_i' \gamma_4 \qquad (R_i \in \mathfrak{R})$$

$$\{ > \gamma_4 A_j' \to A_j' \gamma_4 \qquad (A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \gamma_4 \beta \to \beta \gamma_4$$

$$> \gamma_4 \lambda_2 \to \lambda_2 \gamma_4$$

$$> \gamma_4 \to \gamma_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} > A_j'\gamma_3 \to \gamma_3 A_j' \\ > \sigma_1 A_j' \to A_j' \sigma_1 \\ > \sigma_1 \alpha A_j' \to \sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_4 \\ > K_i'\sigma_2 \to \sigma_2 K_i' \\ > A_j'''\sigma_2 \to \sigma_2 A_j''' \end{array}\right. \qquad (A_j \in \mathfrak{S},\quad K_i \in \mathfrak{A})$$

$$> \sigma_1\sigma_2 \to \sigma_2\sigma_1$$

$$\left\{\begin{array}{l} > A_j'\sigma_2 \to \sigma_2\sigma_2 \\ > R_i'\sigma_2\sigma_2\sigma_1 \to \sigma_3\sigma_1 \\ > R_i'\sigma_2 \to \Lambda \\ > A_j'\sigma_3 \to \sigma_3 \\ > R_i'\sigma_3 \to \sigma_3\sigma_3 \end{array}\right. \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\quad A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \sigma_1 \to \lambda_3$$

$$> \sigma_3\lambda_3 \to \lambda_3\sigma_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \sigma_3 K_i' \to K_i'\sigma_3 \\ > \sigma_3 A_j''' \to A_j'''\sigma_3 \end{array}\right. \qquad (K_i \in \mathfrak{A},\quad A_j \in \mathfrak{S})$$

$$\left\{\begin{array}{l} > R_i'\lambda_3 \to \lambda_3 \\ > A_j'\lambda_3 \to \lambda_3 \\ > \lambda_3 A_j' \to \lambda_3 \end{array}\right. \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\quad A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \lambda_3 \to \lambda_4$$

$$> \beta\lambda_4 \to \lambda_4\beta$$

$$\{ > \beta A_j''' \to A_j'''\beta \qquad (A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \beta\gamma_5 \to \gamma_5\beta$$

$$> \beta\nu_3 \to \nu_3\beta$$

$$> \beta K_i' \to K_i'\beta$$

$$\left\{\begin{array}{l} > A_j'\lambda_4 \to \lambda_4 A_j' \\ > A_j' A_k''' \to A_k''' A_j' \\ > A_j'\gamma_3 \to \nu_3 A_j' \\ > A_j'\gamma_5 \to \gamma_5 A_j' \\ > A_j' K_i' \to K_i' A_j' \\ > K_i\lambda_4 \to \lambda_4 K_i \\ > K_i A_j''' \to A_j''' K_i \\ > K_i\nu_3 \to \nu_3 K_i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}>K_i\gamma_5\to\gamma_5K_i\\ >K_iK_j'\to K_j'K_i\end{array}\right.\qquad\begin{array}{r}(K_i\in\mathfrak{A};\ A_j,\ A_k\in\mathfrak{S})\\ (K_i,\ \ K_j\in\mathfrak{A})\end{array}$$

$$>\lambda_2\lambda_4\to\lambda_4\lambda_2$$

$$\{>\lambda_2A_j'''\to A_j'''\lambda_2\qquad(A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\lambda_2\nu_3\to\nu_3\lambda_2$$

$$>\lambda_2\gamma_5\to\gamma_5\lambda_2$$

$$\left\{\begin{array}{l}>\lambda_2K_i'\to K_i'\lambda_2\\ >A_j'\nu_2\lambda_4\to\lambda_5\\ >A_j'''\to A_j'\\ >K_i'\to K_i\end{array}\right.\qquad(K_i\in\mathfrak{A},\ A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\lambda_4\to\lambda_2$$

$$>\lambda_5\to\lambda_2$$

$$>\nu_3\to\nu_2$$

$$>\alpha\gamma_5\to\gamma_5\alpha$$

$$\{>R_i'\gamma_5\to\gamma_5R_i'\qquad(R_i\in\mathfrak{R})$$

$$>\gamma_5\to\gamma_2$$

$$>\sigma_3\to\mu_2$$

$$>\beta\mu_2\to\mu_2$$

$$\{>\sigma_4A_j'\to\sigma_4\qquad(A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\sigma_4\to\delta_2$$

$$>\lambda_2\mu_2\delta_2\to\mu_3\delta_3\lambda_6$$

$$>\mu_3\mu_2\to\mu_2\mu_3$$

$$>\mu_3\delta_2\to\delta_2\mu_3$$

$$>\lambda_6\delta_2\to\delta_2\lambda_6$$

$$\left\{\begin{array}{l}>K_i\delta_2\to\delta_2K_i\\ >A_j'\delta_2\to\delta_2A_j'\end{array}\right.\qquad(K_i\in\mathfrak{A},\ A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\lambda_6\mu_2\to\mu_2\lambda_6$$

$$\left\{\begin{array}{l}>K_i\mu_2\to\mu_2K_i\\ >A_j'\mu_2\to\mu_2A_j'\end{array}\right.\qquad(K_i\in\mathfrak{A},\ A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\lambda_2\mu_2\to\lambda_6\mu_3$$

$$\{>K_i\mu_3\delta_3\to\mu_3\delta_3K_i\qquad(K_i\in\mathfrak{A})$$

$$\{>A_j'\mu_3\delta_3\to A_j'\nu_2\gamma_2\delta_3\qquad(A_j\in\mathfrak{S}^*)$$

$$>\gamma_2\delta_3\to\gamma_2\delta_4$$

$$\left\{\begin{array}{l}>\delta_4K_i\to K_i\delta_4\\ >\delta_4A_j'\to A_j'\delta_4\end{array}\right.\qquad(K_i\in\mathfrak{A},\ A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\delta_4\lambda_6\mu_3\to\lambda_2\delta_4$$

$$>\delta_4\lambda_6\to\lambda_2\delta_4$$

$$>\delta_4\to\Lambda$$

$$>\mu_3\delta_3\to\delta_3\mu_3$$

$$>\lambda_2\delta_3\to\delta_3\lambda_2$$

$$\{>K_i\delta_3\to\delta_3K_i\qquad(K_i\in\mathfrak{A})$$

$$\{>A_j'\delta_3\to\delta_3A_j'\qquad(A_j\in\mathfrak{S})$$

$$>\lambda_6\mu_3\to\mu_3\lambda_6$$

$$>\lambda_2\mu_3\to\mu_3\lambda_2$$

$$\{>K_i\mu_3\to\mu_3K_i\qquad(K_i\in\mathfrak{A})$$

$$\{>A_j'\mu_3\to\mu_3A_j'\qquad(A_j\in\mathfrak{S})$$

$$
\begin{array}{ll}
\quad > \mu_3 \to \mu_4 & \\
\quad > \delta_3 \to \delta_5 & \\
\quad > \delta_5 \mu_4 \lambda_2 \to \lambda_2 \delta_6 & \\
\quad > \delta_5 \lambda_6 \to \lambda_6 \delta_5 & \\
\{ > \delta_5 K_i \to K_i \delta_5 & (K_i \in \mathfrak{A}) \\
\{ > \delta_5 A_j' \to A_j' \delta_5 & (A_j \in \mathfrak{S}) \\
\quad > \mu_4 \lambda_6 \to \lambda_6 \mu_4 & \\
\{ > \mu_4 K_i \to K_i \mu_4 & (K_i \in \mathfrak{A}) \\
\{ > \mu_4 A_j' \to A_j' \mu_4 & (A_j \in \mathfrak{S}) \\
\quad > \mu_4 \lambda_2 \to \lambda_6 & \\
\{ > \delta_6 K_i \to K_i \delta_6 & (K_i \in \mathfrak{A}) \\
\quad > \lambda_6 \to \lambda_2 & \\
\{ > \delta_6 A_j' \to A_j' \nu_2 \gamma_2 & (A_j \in \mathfrak{S}^*) \\
\{ > R_i \to R_i' \gamma_5 & (R_i \in \mathfrak{R}) \\
\{ > A_j' \to K_{j(1)} K_{j(2)} \ldots K_{j(a(j))} & (A_j \in \mathfrak{S}^*; \\
\qquad\qquad K_{j(1)},\ K_{j(2)},\ \ldots,\ K_{j(a(j))} \in \mathfrak{A}) & \\
\{ > A_j' \to \Lambda & (A_j \in \mathfrak{S} \backslash \mathfrak{S}^*) \\
\quad > \nu_2 \to \Lambda & \\
\quad > \gamma_2 \to \Lambda & \\
\quad > \lambda_2 \to \Lambda & \\
\quad > \beta \to \Lambda & \\
\quad > \alpha \to \Lambda &
\end{array}
$$

Теорема 5. *Алгоритм Z_0 элементарен.*

Доказательство. 1. Алгоритм Z_0 не применим к пустому кортежу, так как не содержит формулы подстановки, левая часть которой была бы пуста.

2. Если $M \notin \mathfrak{M}^*$, то $Z_0(M) = Z_1(M) = \Lambda$.

3. Пусть теперь $M \in \mathfrak{M}^*$. Если $M = A_i$, то $Z_0(M) = K_{i(1)} K_{i(2)} \ldots K_{i(a(i))}$. Пусть $M = R_i A_j A_k$. Тогда $Z_0 : M \mapsto \alpha A_j' \beta M_1' \mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_k') \lambda_2 \mapsto Z_{0i}(j, k) \urcorner$.

Результат применения алгоритма Z_0 к понятию $R_i A_j A_k$ содержит непересекающиеся подкортежи $Z_0(A_j)$ и $Z_0(A_k)$.

Пусть $M \in (\mathfrak{M}^* \backslash \mathfrak{S}^*) \backslash \mathfrak{G}^*$. Тогда $Z_0 : M \mapsto \alpha A_i' \beta M_1' \beta \ldots M_n$.

Если $M_1' = R_i' \alpha A_j' A_k'$, то $Z_0 : M \mapsto$
$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j' \nu_2,\ A_k') \lambda_2 \beta M_2'^{\mathrm{V}} \beta M_3' \ldots \beta M_n'$,
где

a) $Z_{0i}(A_j' \nu_2, A_k') = C_1 A_j' \nu_2 C_2 A_k' C_3$

или

b) $Z_{0i}(A_j' \nu_2, A_k') = C_1 A_k' C_2 A_j' \nu_2 C_3$

(C_1, C_2, C_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A}$) и $M_2'^{\mathrm{V}}$ отличается от M_2' тем и только тем, что содержит дополнительную букву γ_3 за самым правым вхождением буквы из алфавита $\mathfrak{R}'$.

Если $M_1' = R_i' A_j' \alpha A_k'$, то $Z_0 : M \mapsto$
$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j',\ A_k' \nu_2) \lambda_2 \beta M_2'^{\mathrm{V}} \beta M_3' \ldots \beta M_n'$,
где

a) $Z_{0i}(A_j',\ A_k' \nu_2) = C_1 A_j' C_2 A_k' \nu_2 C_3$

или

b) $Z_{0i}(A_j', A_k'\nu_2) = C_1A_k'\nu_2C_2A_j'C_3$
(C_1, C_2, C_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A}$) и $M_2'^{\mathrm{V}}$ отличается от M_2' тем и только тем, что содержит дополнительно букву γ_3 за самым правым вхождением буквы из алфавита $\mathfrak{R}'$.

Для M_2' мы имеем следующие возможности:

$$M_2' = \begin{cases} R_i'R_h'\alpha A_j'A_l'A_k', & (1)\\ R_i'R_h'A_j'\alpha A_l'A_k', & (2)\\ R_i'R_h'A_j'A_l'\alpha A_k', & (3)\\ R_i'R_h'A_j'A_l'A_k', & (4)\end{cases}$$

или

$$M_2' = \begin{cases} R_i'A_j'R_h'\alpha A_k'A_l', & (5)\\ R_i'A_j'R_h'A_k'\alpha A_l', & (6)\\ R_i'A_j'R_h'A_k'A_l'. & (7)\end{cases}$$

В случае (1) имеем $Z_0 : M \mapsto$

$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_k')\lambda_2\beta R_i'R_h'\gamma_3\alpha A_j'A_l'A_k'\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(\lambda_2 Z_{0h}(A_j'\nu_2, A_l')\lambda_2, A_k')\lambda_2\beta M_3'^{\mathrm{V}}\dots\beta M_n',$$

где $M_3'^{\mathrm{V}}$ отличается от M_3' тем и только тем, что за самым правым вхождением буквы из алфавита $\mathfrak{R}'$ стоит буква γ_3.

В случае (2) имеем $Z_0 : M \mapsto$

$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_k')\lambda_2\beta R_i'R_h'\gamma_3A_j'\alpha A_l'A_k'\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(\lambda_2 Z_{0h}(A_j', A_l'\nu_2)\lambda_2, A_k')\lambda_2\beta M_3'^{\mathrm{V}}\dots\beta M_n'.$$

В случае (3) имеем $Z_0 : M \to$

$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_k')\lambda_2\beta R_i'R_h'\gamma_3A_j'A_l'\alpha A_k'\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2 Z_{0i}(\lambda_2 Z_{0h}(A_j', A_l')\lambda_2, A_k')\lambda_2\beta\mu_2\sigma_4\beta M_3'\dots\beta M_n'.$$

Здесь следующие возможности:

$$\left.\begin{aligned} Z_{0i}(A_j', A_k') &= C_1A_j'C_2A_k'C_3,\\ Z_{0h}(A_j', A_l') &= D_1A_j'D_2A_l'D_3;\end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{0i}(A_j', A_k') &= C_1A_k'C_2A_j'C_3,\\ Z_{0h}(A_j', A_l') &= D_1A_j'D_2A_l'D_3;\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{0i}(A_j', A_k') &= C_1A_j'C_2A_k'C_3,\\ Z_{0h}(A_j', A_l') &= D_1A_l'D_2A_j'D_3;\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{0i}(A_j', A_k') &= C_1A_k'C_2A_j'C_3,\\ Z_{0h}(A_j', A_l') &= D_1A_l'D_2A_j'D_3\end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

(C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A}$).

Рассматриваем подслучай (3.1).

$$Z_0 : M \mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3\lambda_2C_2A_k'C_3\lambda_2\beta\mu_2\sigma_4\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3\lambda_2C_2A_k'C_3\lambda_2\mu_2\delta_2\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3\lambda_2C_2A_k'C_3\mu_3\delta_3\lambda_6\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3\lambda_2C_2A_k'\mu_3\delta_3C_3\lambda_6\beta M_3'\dots\beta M_n' \to$$
$$\to \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2\gamma_2\delta_3C_3\lambda_6\beta M_3'\dots\beta M_n' \to$$
$$\to \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2\gamma_2\delta_4C_3\lambda_6\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2\gamma_2C_3\delta_4\lambda_6\beta M_3'\dots\beta M_n' \to$$
$$\to \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2\gamma_2C_3\lambda_2\delta_4\beta M_3'\dots\beta M_n' \to$$
$$\to \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2\gamma_2C_3\lambda_2\beta M_3'\dots\beta M_n' \mapsto$$
$$\mapsto \lambda_2C_1\lambda_2D_1A_j'D_2A_l'D_3C_2A_k'\nu_2C_3\lambda_2\beta M_3'^{\mathrm{V}}\dots\beta M_n'.$$

Рассматриваем подслучай (3.2).

$$\begin{aligned}
Z_0 : M \mapsto\ & \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_2 \beta \mu_2 \sigma_4 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \to \\
\to\ & \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_2 \mu_2 \sigma_4 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 C_1 A_k' \nu_2 \gamma_2 C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \delta_3 \mu_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \delta_3 \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \mu_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \mu_3 \delta_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \delta_3 \mu_3 \lambda_2 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 \delta_6 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 \delta_6 C_1 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 C_1 \delta_6 A_k' C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_6 \beta M_3' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 C_1 A_k' \nu_2 C_2 \lambda_2 D_1 A_j' D_2 A_l' D_3 \lambda_2 C_3 \lambda_2 \beta M_3'^{\mathrm{V}} \ldots \beta M_n'.
\end{aligned}$$

Подслучаи (3.3) и (3.4) рассматриваются аналогично подслучаям (3.1) и (3.2).

В случае (4) имеем

$$\begin{aligned}
Z_0 : M \to\ & \lambda_2 Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_k') \lambda_2 \beta R_i' R_h' \gamma_3 A_j' A_l' A_k' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 Z_{0i}(\lambda_2 Z_{0h}(A_j', A_l') \lambda_2, A_k') \lambda_2 \beta \mapsto Z_{0i}(Z_0 h(j, l), k) \urcorner.
\end{aligned}$$

Полученный кортеж $Z_0(M)$ алфавита $\mathfrak{A}$ содержит в качестве подкортежей кортежи $Z_0(A_j)$, $Z_0(A_l)$ и $Z_0(A_k)$.

Случаи (5), (6) и (7) рассматриваются аналогично случаям (1), (2) и (4).

Допустим по индукции, что

$$Z_0 : M \mapsto \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta M_s'^{\mathrm{V}} \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n',$$

где P_1 и P_2 — кортежи алфавита $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{S}' \cup \{\lambda_2\}$, причем проекция $(P_1 A_j' P_2)(\mathfrak{S}')$ состоит из букв кортежа $M_{s-1}'(\mathfrak{S}')$, и докажем, что тогда $Z_0 : M \mapsto \lambda_2 Q_1 A_k' \nu_2 Q_2 \lambda_2 \beta M_{s+1}'^{\mathrm{V}} \beta M_{s+2}' \ldots \beta M_n'$, где Q_1 и Q_2 — кортежи алфавита $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{S}' \cup \{\lambda_2\}$, причем проекция $(Q_1 A_k' Q_2)(\mathfrak{S}')$ состоит из букв кортежа $M_s'(\mathfrak{S}')$ при $s < n$ и $A_k \in \mathfrak{S}^*$.

Здесь возможны следующие подслучаи:

1) $Z_0 : M \mapsto \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta N' R_i' \gamma_3 \alpha A_j' A_l' A_{k(1)}' \ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n'$,
2) $Z_0 : M \mapsto \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta N' R_i' \gamma_3 A_j' \alpha A_l' A_{k(1)}' \ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n'$,
3) $Z_0 : M \mapsto \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta H' R_{i(s)}' \gamma_3 A_j' A_l' A_{k(1)}' \ldots \alpha A_{k(h)}' \ldots$
$\ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n'$, где N', H' — кортежи алфавита $\mathfrak{D}$, $H = R_{i(1)} N_1 \ldots R_{i(t)} N_t$, $h \geqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant s-1$, $R_{i(t)} N_t R_{i(s)} A_j A_l A_{k(1)} \ldots A_{k(h)} \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$.

В случае 1 имеем

$$\begin{aligned}
Z_0 : M \mapsto\ & \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta N'' R_i' \gamma_3 \alpha A_j' A_l' A_{k(1)}' \ldots A_{h(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j' \nu_2 \gamma_2, A_l') \lambda_2 P_2 \lambda_2 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mapsto \\
\mapsto\ & \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j' \nu_2, A_l') \lambda_2 P_2 \lambda_2 \beta M_{s+1}'^{\mathrm{V}} \ldots \beta M_n'.
\end{aligned}$$

Если $Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_l') = C_1 A_j' \nu_2 C_2 A_l' C_3$, то $Q_1 = P_1 \lambda_2 C_1$,
$Q_2 = C_2 A_l' C_3 \lambda_2 P_2$;
если $Z_{0i}(A_j'\nu_2, A_l') = C_1 A_l' C_2 A_j' \nu_2 C_3$, то $Q_1 = P_1 \lambda_2 C_1 A_l' C_2$,
$Q_2 = C_3 \lambda_2 P_2$,
причем проекция $(Q_1 A_j' Q_2)(\mathfrak{S}')$ состоит из букв $M_s'(\mathfrak{S}')$.

В случае 2 имеем

$$Z_0: M \mid\!\!\rightarrow \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta N' R_i' \gamma_3 A_j' \alpha A_l' A_{k(1)}' \ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_l' \nu_2 \gamma_2) \lambda_2 P_2 \lambda_2 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_l' \nu_2) \lambda_2 P_2 \lambda_2 \beta M_{s+1}'^{\mathrm{V}} \ldots \beta M_n'.$$

Если $Z_{0i}(A_j', A_l'\nu_2) = C_1 A_j' C_2 A_l' \nu_2 C_3$, то $Q_1 = P_1 \lambda_2 C_1 A_j' C_2$ и $Q_2 = C_3 \lambda_2 P_2$;
если $Z_{0i}(A_j', A_l'\nu_2) = C_1 A_l' \nu_2 C_2 A_j' C_3$, то $Q_1 = P_1 \lambda_2 C_1$ и $Q_2 = C_2 A_j' C_3 \lambda_2 P_2$;
проекция $(Q_1 A_l' Q_2)(\mathfrak{S}')$ состоит из букв $M_s'(\mathfrak{S}')$.

В случае 3 имеем

$$Z_0: M \mid\!\!\rightarrow \lambda_2 P_1 A_j' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta H' R_{i(s)}' \gamma_3 A_j' A_l' A_{k(1)}' \ldots \alpha A_{k(h)}' \ldots$$
$$\ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_l') \lambda_2 P_2 \lambda_2 \underbrace{\mu_2 \ldots \mu_2}_{t} \sigma_4 A_{k(h+1)} \ldots$$
$$\ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n'.$$

Здесь следующие возможности:

a) $\lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_l') \lambda_2 P_2 \lambda_2 = \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_2$,
b) $\lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j', A_l') \lambda_2 P_2 \lambda_2 = \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_2$,
где или α) : $t = 1$,

вместо $\lambda_2 T_1$, T_2 и $T_3 \lambda_2$ — пустые кортежи;
S_1 и S_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A}$;
S_2 — кортеж алфавита $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{S}' \cup \{\lambda_2\}$, $S_2(\mathfrak{S}') \neq \Lambda$;

или β): $t > 1$,

T_1, T_2 и T_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A}$;
S_1 и S_3 — кортежи алфавита $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{S}' \cup \{\lambda_2\}$, причем в оба кортежа буква λ_2 входит $t - 2$ раза;
S_2 — кортеж алфавита $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{S}' \cup \{\lambda_2\}$, причем $S_2(\mathfrak{S}') \neq \Lambda$.

Рассматриваем подслучай a). Имеем

$$Z_0: M \mid\!\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_2 \underbrace{\mu_2 \ldots \mu_2}_{t} \sigma_4 A_{k(h+1)}' \ldots$$
$$\ldots A_{k(q)}' \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_2 \underbrace{\mu_2 \mu_2 \ldots \mu_2}_{t} \delta_2 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_6 \underbrace{\mu_2 \ldots \mu_2}_{t-1} \delta_2 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \ \lambda_2 \mu_2 \delta_2 S_3^{\mathrm{V}} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \rightarrow$$

(S_3^{V} отличается от S_3 тем и только тем, что вместо λ_2 всюду $\lambda_6 \mu_3$)

$$\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' T_3 \mu_3 \delta_3 \ \lambda_6 S_3^{\mathrm{V}} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \mid\!\!\rightarrow$$
$$\mid\!\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' \mu_3 \delta_3 T_3 \ \lambda_6 S_3^{\mathrm{V}} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' \nu_2 \gamma_2 \delta_3 T_3 \ \lambda_6 S_3^{\mathrm{V}} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' \nu_2 \gamma_2 \delta_4 T_3 \ \lambda_6 S_3^{\mathrm{V}} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}' \ldots \beta M_n' \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2 A_{k(h)}' \nu_2 T_3 \ \lambda_2 S_3 \lambda_2 \beta M_{s+1}'^{\mathrm{V}} \beta M_{s+2}' \ldots \beta M_n'.$$

Итак, $Q_1 = S_1 \lambda_2 T_1 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_2$ и $Q_2 = T_3 \lambda_2 S_3 \lambda_2$, причем $(Q_1 A_{k(h+1)}' Q_2)(\mathfrak{S}')$ состоит из букв $M_s'(\mathfrak{S}')$.

Рассматриваем подслучай b). Имеем

$$Z_0 : M \mid\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3\, \lambda_2 S_3 \lambda_2 \underbrace{\mu_2 \ldots \mu_2}_{t} \sigma_4 A_{k(h+1)}{}' \ldots$$

$$\ldots A_{k(q)}{}' \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \mu_3 \delta_3\, \lambda_6 S_3{}^{\vee} \lambda_6 \mu_3 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \underbrace{\delta_3 \mu_3 \ldots \mu_3}_{t} \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

($S_3{}^{\vee\vee}$ отличается от S_3 тем и только тем, что вместо λ_2 везде λ_6)

$$\mid\!\rightarrow \delta_5 \underbrace{\mu_4 \ldots \mu_4}_{t} \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 \delta_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \rightarrow$$

$$\rightarrow \delta_5 \underbrace{\mu_4 \ldots \mu_4}_{t-1} \lambda_6 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \delta_5 \lambda_6 \mu_4 S_1{}^{\vee\vee} \lambda_2 T_1 A_{k(h)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3\, \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \rightarrow$$

($S_1{}^{\vee\vee}$ отличается от S_1 тем и только тем, что вместо λ_2 везде стоит λ_6)

$$\rightarrow \lambda_6 \delta_5 \mu_4 S_1{}^{\vee\vee} \lambda_2 T_1 A_{k(h+1)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \lambda_6 S_1{}^{\vee\vee} \delta_5 \mu_4 \lambda_2 T_1 A_{k(h+1)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \lambda_6 S_1{}^{\vee\vee} \lambda_2 T_1 \delta_6 A_{k(h+1)}{}' T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}' \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \lambda_2 S_1 \lambda_2 T_1 A_{k(h+1)}{}' \nu_2 T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \delta_3 \lambda_6 S_3{}^{\vee\vee} \lambda_6 \beta M_{s+1}{}' \ldots \beta M_n{}'.$$

Итак, $Q_1 = S_1 \lambda_2 T_1$ и $Q_2 = T_2 \lambda_2 S_2 \lambda_2 T_3 \lambda_2 S_3 \lambda_2$; причем $(Q_1 A_{h(k+1)}{}' Q_2)(\mathfrak{S})$ состоит из букв $M_s{}'(\mathfrak{S}')$.

Следовательно, при $s = n$

$$Z_0 : M \mid\!\rightarrow \lambda_2 P_1 A_j{}' \nu_2 P_2 \lambda_2 \beta N' R_i{}' \gamma^3 A_j{}' A_l{}' A_{k(1)}{}' \ldots A_{k(q)} \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow \lambda_2 P_1 \lambda_2 Z_{0i}(A_j{}', A_l{}') \lambda_2 P_2 \lambda_2 \beta \mid\!\rightarrow$$

$$\mid\!\rightarrow N_1 Z_{0i}(j, l) N_2 \urcorner.$$

Здесь N_k получен из $P_k(\mathfrak{S}')$ $(k = 1, 2)$ заменой $A_i{}'$ на кортеж $Z_0(A_i) = K_{i(1)} K_{i(2)} \ldots K_{i(a(i))}$ алфавита $\mathfrak{A}$. Результатом является кортеж $Z_0(M)$ алфавита $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий условию: для любых A_i и A_j, входящих в M, кортежи $Z_0(A_i)$ и $Z_0(A_j)$ входят в $Z_0(M)$ как непересекающиеся подкортежи.

Следовательно, алгоритм Z_0 элементарен, и пара $(\mathfrak{M}^*, Z_0[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}])$, где $\mathfrak{M}^*$ — утилитарная семантика, — элементарно-утилитарный язык.

Пример 8. Исходим из утилитарной семантики $\mathfrak{M}^{1*}$ (см. пример 1).

Построим алгоритм $Z_0{}^1[\{A_1, A_2, \ldots, A_n, A_0; R_1, R_2\}, \mathfrak{A}^1]$, где $\mathfrak{A}^1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \sim, \&, (,)\}$], на основе только что рассмотренного Z_0, вводя небольшие уточнения в формулы подстановки. В частности, вместо элементов множеств $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}^*$ и $\mathfrak{S}^*$ нужно подставить элементы множеств $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{G}^1$ и $\mathfrak{S}^{1*}$. Далее, вместо элементов множества $\mathfrak{A}$ нужно подставить элементы множества $\mathfrak{A}^1$. Для каждого A_j зададим однобуквенный кортеж $x_j \in \mathfrak{A}^1$. Элементам множества $\mathfrak{G}^{1*}$ поставим в соответствие следующие кортежи:

$$Z_{01}{}^{1\prime}(A_i{}''', A_0{}''') = \sim A_i{}''' A_0{}''',\quad Z_{02}{}^{1\prime}(A_i{}''', A_j{}''') = ('A_i{}''' \& 'A_j{}''')'.$$

Тем самым, $Z_0(A_j) = x_j$,

$$Z_0(R_1A_jA_0) = \sim x_j,$$
$$Z_0(R_2A_jA_k) = (x_j \,\&\, x_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$Z_0(A_0) = \Lambda.$$

Пара $(\mathfrak{M}^{1*}, Z_0{}^1[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^1])$ — элементарно-утилитарный язык.

Если истолковывать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ записями атомарных формул исчисления высказываний, то множество $\{Z_0{}^1(M) \mid M \in \mathfrak{M}^{1*}\}$ совпадает с множеством формул, построенных из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи логических операций отрицания и конъюнкции.

Например,

$$Z_0{}^1(R_1R_2A_iA_jA_k) = \sim (x_i \,\&\, x_j),$$
$$Z_0{}^1(R_2R_1A_iA_0A_j) = (\sim x_i \,\&\, x_j),$$
$$Z_0{}^1(R_2R_2A_iA_jA_k) = ((x_i \,\&\, x_j) \,\&\, x_k),$$
$$Z_0{}^1(R_2A_iR_2A_jA_k) = (x_i \,\&\, (x_j \,\&\, x_k)),$$
$$Z_0{}^1(R_1R_1A_iA_0A_0) = \sim \sim x_i,$$
$$Z_0{}^1(R_1R_2A_iR_1A_iA_0A_0) = \sim (x_i \,\& \sim x_i),$$
$$Z_0{}^1(R_1R_2R_1R_1A_iA_0A_0R_1A_iA_0A_0) = \sim (\sim \sim x_i \,\& \sim x_i).$$

Пример 9. Пусть

$\mathfrak{S}^2 = \{A_1, A_2, \ldots, A_{20}\}, \quad \mathfrak{S}^{2*} = \mathfrak{S}^2,$

$\mathfrak{R}^2 = \{R_1, R_2\},$

$\mathfrak{G}^2 = \{R_1A_iA_j,\ R_2A_hA_j \mid i = 1, 2, \ldots, 20;\ j = 1, 2, \ldots, 10;\ h = 11, 12, \ldots, 20\},$

$\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{S}^2 \cup \mathfrak{R}^2.$

Множество $\mathfrak{M}^2$, построенное при помощи заданных множеств по определениям 1 и 2 — семантика.

Построим алгоритм $Z_0{}^2[\mathfrak{D}^2, \mathfrak{A}^2]$, где $\mathfrak{A}^2 = \{1, 2, \ldots, 9, 0, .\}$, как в предыдущем примере. При этом для каждого A_i, $R_1A_iA_j$ и $R_2A_hA_j$ зададим соответствующие кортежи следующим образом:

для $\quad A_1 — 1,\ \ A_2 — 2,\ \ \ldots,\ \ A_9 — 9,\ \ A_{10} — 0,$

$\quad A_{11} — .1,\ \ A_{12} — .2,\ \ \ldots,\ \ A_{19} — .9,\ \ A_{20} — .0;$

$Z_{01}{}^{2\prime}(A_i{}''', A_j{}''') = A_i{}'''A_j{}''' \quad (i = 1, 2, \ldots, 20;\ j = 1, 2, \ldots, 10),$

$Z_{01}{}^{2\prime}(A_h{}''', A_j{}''') = A_j{}'''A_h{}''' \quad (h = 11, 12, \ldots, 20;\ j = 1, 2, \ldots, 10).$

Тем самым, $Z_0{}^2(A_1) = 1$, $Z_0{}^2(A_2) = 2, \ldots, Z_0{}^2(A_9) = 9$, $Z_0{}^2(A_{10}) = 0$, $Z_0{}^2(A_{11}) = 1$, $Z_0{}^2(A_{12}) = 2, \ldots, Z_0{}^2(A_{19}) = 9$, $Z_0{}^2(A_{20}) = 0$; $Z_0{}^2(R_1A_iA_j) = Z_0{}^2(A_i)Z_0{}^2(A_j)$, $Z_0{}^2(R_2A_hA_j) = Z_0{}^2(A_j)Z_0{}^2(A_h)$.

Пара $(\mathfrak{M}^2, Z_0{}^2[\mathfrak{D}^2, \mathfrak{A}^2])$ — элементарно-утилитарный язык.

Множество $\{Z_0{}^2(M) \mid M \in \mathfrak{M}^2\}$ совпадает с множеством десятичных чисел в алгоритмическом языке АЛГОЛ.

Например,

$$Z_0{}^2(R_2R_2R_1R_1A_{18}A_7A_{10}A_{10}A_{10}) = 00.870,$$
$$Z_0{}^2(R_2R_1R_1A_{18}A_7A_{10}R_1A_{10}A_{10}) = 00.870,$$
$$Z_0{}^2(R_1R_1R_1A_1A_1A_1A_1) = 1111,$$
$$Z_0{}^2(R_1R_1R_1A_{11}A_1A_1A_1) = .1111,$$
$$Z_0{}^2(R_2R_2R_2A_{11}A_1A_1A_1) = 111.1,$$
$$Z_0{}^2(R_2A_{11}R_1R_1A_1A_1A_1) = 111.1.$$

Пример 10. Пусть $\mathfrak{S}^3 = \{A_1, A_2, \ldots, A_{10}\}$, $\mathfrak{S}^{3*} = \mathfrak{S}^3$, $\mathfrak{R}^3 = \{R\}$, $\mathfrak{G}^3 = \{RA_iA_j \| i, j = 1, 2, \ldots, 10\}$, $\mathfrak{D}^3 = \mathfrak{S}^3 \cup \mathfrak{R}^3$.

Множество $\mathfrak{M}^3$, построенное при помощи заданных множеств по определениям 1 и 2, есть семантика.

Построим алгоритм $Z_0{}^3[\mathfrak{D}^3, \mathfrak{A}^3]$, где $\mathfrak{A}^3 = \{1, 2, \ldots, 9, 0, .\}$, на основе алгоритма Z_0. Для A_j и RA_jA_k, где $A_j \in \mathfrak{S}^3$ и $RA_jA_k \in \mathfrak{G}^3$, зададим следующие кортежи:
для $A_1 - 1'''$, $A_2 - 2'''$, ..., $A_9 - 9'''$, $A_{10} - 0'''$;
$Z_{01}{}^{3\prime}(A_j''', A_k''') = A_j'''A_k'''$ $\quad (j, k = 1, 2, \ldots, 10)$.
Далее, припишем к заданным формулам подстановки следующее множество формул подстановки:

$$\left\{\begin{array}{l} > K_i'''\varphi \to \varphi K_i''' \\ > \varphi K_{j(1)}'''K_{j(2)}'''K_{j(3)}'''K_{j(4)}''' \to K_{j(1)}K_{j(2)}K_{j(3)}\cdot\varphi K_{j(4)}''' \\ > \varphi K_i''' \to K_i\varphi \\ > \varphi \to \Lambda \\ > K_i''' \to \varphi K_i''' \end{array}\right. \tag{8}$$

$$(K_i,\ K_{j(1)},\ K_{j(2)},\ K_{j(3)},\ K_{j(4)} \in \{1, 2, \ldots, 9, 0\}).$$

Алгоритм, построенный таким образом, элементарен.

При этом $Z_0{}^3(A_1) = 1$, $Z_0{}^3(A_2) = 2$, ..., $Z_0{}^3(A_9) = 9$, $Z_0{}^3(A_{10}) = 0$; $Z_0{}^3(RA_iA_j) = Z_0{}^3(A_i)Z_0{}^3(A_j)$.

Итак, пара $(\mathfrak{M}^3, Z_0{}^3[\mathfrak{D}^3, \mathfrak{A}^3])$ — элементарно-утилитарный язык.

Множество $\{Z_0{}^3(M) \mid M \in \mathfrak{M}^3\}$ совпадает с множеством всевозможных простых индексов универсальной десятичной классификации (УДК). Применением формул (8), приписанных к алгоритму Z_0 при построении алгоритма $Z_0{}^3$, вставят точки в нужные места за тройками цифр в индексах УДК.

Например (см. [3]),
$Z_0{}^3(RRA_5A_3A_1) = 531$ (общая механика, механика твердых тел),
$Z_0{}^3(RRA_5A_1A_3) = 513$ (геометрия),
$Z_0{}^3(RA_5RA_1A_3) = 513$,
$Z_0{}^3(RA_5RA_1RA_3A_3) = 513.3$ (стереометрия),
$Z_0{}^3(RA_5RA_1RA_3RA_3A_4) = 513.34$ (многогранники).

Литература

1. Марков А. А., Теория алгоритмов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1954, 42, 1—374.
2. Койт М., О синтезе эстонского текста. Тр. Вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1969, 18, 3—68.
3. Универсальная десятичная классификация. Среднее издание. Москва, 1969.

Поступило
3 V 1973

ELEMENTAAR-UTILITAARSE KEELE OMADUSI

M. Koit

Resümee

Artiklis vaadeldakse üht meetodit semantika modelleerimiseks. Defineeritakse utilitaarne semantika ning seejärel elementaar-utilitaarne keel kui utilitaarsest semantikast ja nn. elementaarsest algoritmist koosnev paar. Tõestatakse rida elementaar-utilitaarse keele omadusi. Selleks esitatakse kaks normaalalgoritmi, millest teine on elementaarne. Elementaar-utilitaarsete keelte näiteks on muuhulgas algoritmikeele ALGOL kümnendarvude hulk ja universaalse kümnendklassifikatsiooni UDK lihtindeksite hulk.

VON DER BESCHAFFENHEIT DER ELEMENTAR-UTILITAREN SPRACHE

M. Koit

Zusammenfassung

In dem Artikel wird eine Methode zum Modellieren der Semantik angeführt.

Es seien gegeben zwei endliche, nicht leere Mengen $\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ und $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$, wobei $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \varnothing$. Betrachtet werden die Wörter im Alphabet $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{R}$ (d. h. die Kortegen von Elementen dieser Menge). Es sei ferner gegeben eine nicht leere Menge $\mathfrak{G}$ der Wörter von Art $R_iA_jA_k$, wo $R_i \in \mathfrak{R}$ und A_j, $A_k \in \mathfrak{S}$.

Definition 1. *Die Wörtermenge* $\mathfrak{M}$ *heißt Semantik, wenn für sie die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *jedes Element der Menge* $\mathfrak{S}$ *gehört der Menge* $\mathfrak{M}$ *zu,*
2) *jedes Element der Menge* $\mathfrak{G}$ *gehört der Menge* $\mathfrak{M}$ *zu,*
3) *wenn* $PMN \in \mathfrak{M}$, $M \in \mathfrak{M}$, $P \in \mathfrak{R}$, $S \in \mathfrak{R}$, *dann*
   a) *ergibt sich aus* $SMT \in \mathfrak{M}$, *daß* $PSMTN \in \mathfrak{M}$,
   b) *ergibt sich aus* $SNT \in \mathfrak{M}$, *daß* $PMSNT \in \mathfrak{M}$,
4) $\mathfrak{M}$ *ist die geringste Menge, die den Bedingungen 1—3 entspricht.*

Die utilitare Semantik wird als eine bestimmte, nicht leere Teilmenge der Semantik, und *der elementare Algorithmus* als ein Sonderfall des normalen (Markowschen) Algorithmus definiert (Definitionen 2 und 3).

Definition 4. *Das Paar* ($\mathfrak{M}^*$, $Z[\mathfrak{S} \cup \mathfrak{R}$, A]) *heißt die elementar-utilitare Sprache, wenn* $\mathfrak{M}^*$ *eine utilitare Semantik,* $Z[\mathfrak{S} \cup \mathfrak{R}$, A] *ein elementarer Algorithmus und* A *eine endliche, nicht leere Menge,* $A \cap (\mathfrak{S} \cup \mathfrak{R}) = \varnothing$, *ist.*

Im folgenden werden die Eigenschaften der elementar-utilitaren Sprache untersucht. Dazu werden die beiden Algorithmen Z_0 und Z_1 konstruiert, und es wird bewiesen, daß der Algorithmus Z_0 elementar ist (Satz 5).

Als Beispiele für eine elementar-utilitare Sprache gelten unter anderem die Menge der Dezimalzahlen der algorithmischen Sprache ALGOL, oder die Menge der einfachen Indexe der universalen Dezimalklassifikation UDK.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л. С. ПОНТРЯГИНА

Э. Пунгар

Кафедра теоретической механики

Среди обширной литературы о проблемах оптимального проектирования конструкций уже имеется ряд работ, в которых применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина. Здесь упоминается только статья К. А. Одишвили [1], так как эта работа имеет некоторые черты, общие с данной. В этой работе рассматривается оптимальное проектирование пологих оболочек вращения. Материал жестко-пластичный, условием текучести служит условие Мизеса, которое разделено на мембранную и моментную части. Предполагают, что усилия равные и постоянные. Критерий оптимальности проекта имеет вид мин $\int_\Omega h^2 d\Omega$, где h — толщина оболочки. Задача сводится к задаче оптимального управления с параметром, для решения которой применяют принцип максимума Л. С. Понтрягина.

В данной статье исследуют оптимальное проектирование трехслойных оболочек вращения. Материал жестко-пластичный, подчиняется условию текучести Мизеса. Предполагают, что переход в стадию пластичного течения происходит мгновенно и одновременно в обоих несущих слоях. В таком случае условие текучести имеет единую форму, в которую входят и усилия, и моменты.

Критерий оптимальности проекта имеет вид

$$\min \int_0^1 r^2 B h^2 \, dr,$$

где $z = z(r)$ — уравнение вращающего меридиана, $B = 1 + (z')^2$, где штрих обозначает дифференцирование по r и h — толщина несущего слоя.

Поставленную задачу тоже можно истолковывать как задачу оптимального управления и применить для ее решения принцип максимума Л. С. Понтрягина. Она сводится к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений, которая может быть решена численно. В частном случае пологих оболочек удалось найти аналитическое решение этой краевой задачи.

1. Постановка задачи

Рассматриваем тонкую оболочку вращения, элемент которой изображен на рис. 1. Условия нагружения и опирания осесимметричны. Система координат (r, Φ, Θ) цилиндрическая. Для описания поведения такой оболочки употребляются соотношения, приведенные в книге [3].

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{gathered}(rN_\Phi)' - N_\Theta - z''B^{-1}rS + rAB^{0,5}P_\Phi = 0,\\ (rS)' + z'N_\Theta + z''B^{-1}rN_\Phi + rAB^{0,5}P_n = 0,\\ (rM_\Phi)' - M_\Theta - rAB^{0,5}S = 0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Оболочка жестко-пластичная, условием текучести служит условие Мизеса в виде:

$$F = N_\Phi^2 + N_\Theta^2 - N_\Phi N_\Theta + (M_\Phi^2 + M_\Theta^2 - M_\Phi M_\Theta) H^{-2} = 4\sigma_0^2 h^2, \tag{1.2}$$

где σ_0 — предел текучести материала при простом растяжении, $2H$ — толщина легкого заполнителя, h — толщина несущих слоев, $h \ll H$.

Ставим целью оптимизации определение $h = h(r)$ на

$$\min \int_0^1 r^2Bh^2\, dr \tag{1.3}$$

при заданных нагрузках и геометрических показателях оболочки. Критерий оптимальности проекта (1.3) связан с задачей оптимального проектирования на

$$\min \int_0^1 rB^{0,5}h\, dr, \tag{1.4}$$

который пропорционален объему оболочки. По определению

$$2y_c \int_0^1 rB^{0,5}h\, dr = \int_0^1 r^2Bh^2\, dr, \tag{1.5}$$

где y_c — координата центра тяжести куска плоскости, ограниченного линиями $r = 0$, $r = 1$, $y = 0$ и $y = rB^{0,5}h$. Учитывая

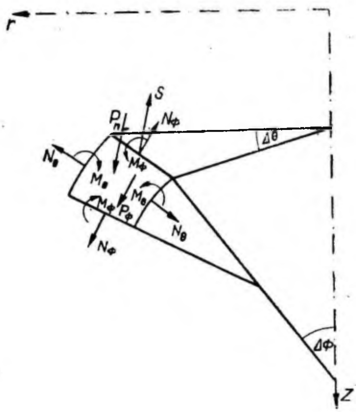


Рис. 1.

(1.5), критерий оптимальности (1.3) обеспечивает оптимальный проект в смысле критерия (1.4), если при всех остальных равных условиях считать наилучшим проект, который дает наименьший y_c.

Такая задача имеет смысл в качестве оценки для более реальных в техническом смысле проектов.

Таким образом, надо решить задачу Лагранжа с целевой функцией (1.3) и при ограничениях (1.1) и (1.2). Кроме того, должны быть удовлетворены граничные условия, зависящие от типа нагружения и опирания.

По ассоциированному закону течения имеем

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_\Phi = a\frac{\partial F}{\partial N_\Phi}, \qquad &\dot{\varepsilon}_\Theta = a\frac{\partial F}{\partial N_\Theta}, \\ &\dot{k}_\Phi = a\frac{\partial F}{\partial M_\Phi}, \qquad &\dot{k}_\Theta = a\frac{\partial F}{\partial M_\Theta}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где a — положительный множитель.

Мощность диссипаций на единицу площади срединной поверхности оболочки выражает формула

$$D = N_\Phi\dot{\varepsilon}_\Phi + N_\Theta\dot{\varepsilon}_\Theta + M_\Phi\dot{k}_\Theta + M_\Theta\dot{k}_\Theta. \tag{1.7}$$

Учитывая (1.6), при условии текучести (1.2) вместо (1.7) найдем, что

$$D = 2aF.$$

Условие оптимальности проекта трехслойной оболочки с изменяющимися толщинами несущих слоев имеет вид $D/h = k$, где k — положительная постоянная. Учитывая (1.2) и (1.8) оказывается, что (1.9) выполнено лишь тогда, когда

$$a = \frac{k}{8\sigma_0^2 h}.$$

Решение кинематически допустимо, если $D > 0$.

2. Решение с помощью принципа максимума

Выбираем за фазовые переменные $x_1 = N_\Phi$, $x_2 = M_\Phi H^{-1}$, $x_3 = S$, и за управления $u_1 = N_\Theta$ и $u_2 = M_\Theta H^{-1}$. Перепишем поставленную задачу в новых обозначениях:

$$\min \int_0^1 (x_1^2 + u_1^2 - x_1u_1 + x_2^2 + u_2^2 - x_2u_2)Br^2\,dr, \tag{2.1}$$

так, чтобы

$$\begin{aligned} x_1' &= (u_1 - x_1)r^{-1} + z''B^{-1}x_3 - AB^{0,5}P_\Phi, \\ x_2' &= (u_2 - x_2)r^{-1} + AB^{0,5}H^{-1}x_3, \\ x_3' &= -x_3r^{-1} - z''B^{-1}x_1 - z'r^{-1}u_1 - AB^{0,5}P_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

при заданных z, A, H, P_Φ, P_n и граничных условиях.

Следуя книге [2], образуем функционал

$$K=\psi_0(x_1^2+u_1^2-x_1u_1+x_2^2+u_2^2-x_2u_2)Br^2+$$
$$+\psi_1[(u_1-x_1)r^{-1}+z''B^{-1}x_3-AB^{0,5}P_\Phi]+$$
$$+\psi_2[(u_2-x_2)r^{-1}+AB^{0,5}H^{-1}x_3]+$$
$$+\psi_3(-x_3r^{-1}-z''B^{-1}x_1-z'r^{-1}u_1-AB^{0,5}P_n), \qquad (2.3)$$

где по [2] можем принимать, что $\psi_0=-1$, и для определения вспомогательных функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 составим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\psi_1'=-\frac{\partial K}{\partial x_1}=r^2B(2x_1-u_1)+\psi_1r^{-1}+z''B^{-1}\psi_3,$$
$$\psi_2'=-\frac{\partial K}{\partial x_2}=r^2B(2x_2-u_2)+\psi_2r^{-1}, \qquad (2.4)$$
$$\psi_3'=-\frac{\partial K}{\partial x_3}=\psi_3r^{-1}-z''B^{-1}\psi_1-AB^{0,5}H^{-1}\psi_2.$$

Оптимальные управления должны дать $\sup\limits_{\{u_1,u_2\}} K$. Этому требованию соответствуют

$$u_1=0,5[(\psi_1-z'\psi_3)r^{-3}B^{-1}+x_1],$$
$$u_2=0,5(\psi_2r^{-3}B^{-1}+x_2). \qquad (2.5)$$

Подставляя из (2.5) в (2.2) и (2.4) получаем следующую краевую задачу:

$$x_1'=-(2r)^{-1}x_1+z''B^{-1}x_3+(\psi_1-z'\psi_3)(2r^4B)^{-1}-AB^{0,5}P_\Phi,$$
$$x_2'=-(2r)^{-1}x_2+(2r^4B)^{-1}\psi_2+AB^{0,5}H^{-1}x_3,$$
$$x_3'=-r^{-1}x_3-[z''B^{-1}+z'(2r)^{-1}]x_1-$$
$$-z'(\psi_1-z'\psi_3)(2r^4B)^{-1}-AB^{0,5}P_n, \qquad (2.6)$$
$$\psi_1'=1,5r^2Bx_1+0,5r^{-1}\psi_1+[z'(2r)^{-1}+z''B^{-1}]\psi_3,$$
$$\psi_2'=1,5r^2Bx_2+0,5r^{-1}\psi_2,$$
$$\psi_3'=r^{-1}\psi_3-z''B^{-1}\psi_1-AB^{0,5}H^{-1}\psi_2.$$

Условия нагружения и опирания определяют краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.6). Решение этой задачи может быть проведено с помощью численных методов. Лишь в некоторых частных случаях можно найти аналитические решения.

Вспомогательные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 имеют физический смысл. Учитывая (1.6), можно найти из (2.4) и условия оптимальности управлений следующие соотношения:

$$\dot\varepsilon_\Phi=\alpha(\psi_1'-r^{-1}\psi_1-z''B^{-1}\psi_3)(r^2B)^{-1},$$
$$\dot k_\Phi=\alpha(\psi_2'-r^{-1}\psi_2)(r^2BH)^{-1}, \qquad (2.7)$$
$$\dot\varepsilon_\Theta=\alpha(\psi_1-z'\psi_3)(r^3B)^{-1},$$
$$\dot k_\Theta=\alpha\psi_2(r^3BH)^{-1}.$$

Сопоставляя (2.7) с (1.5), можно найти перемещения точек срединной поверхности оболочки.

3. Краевая задача в случае равномерного давления

Если оболочка находится под равномерным давлением с интенсивностью $P = \mathrm{const}$, то вместо системы (1.1) имеем следующую:

$$N_\Theta = (rN_\Phi)' + z'z''rB^{-1}N_\Phi + 0{,}5PAz''r^2B^{-0,5}$$
$$M_\Theta = (rM_\Phi)' + A(0{,}5PABr^2 + rz'B^{0,5}N_\Phi). \tag{3.1}$$

В этом случае $x_1 = N_\Phi$, $x_2 = M_\Phi H^{-1}$, $u_1 = N_\Theta$, $u_2 = M_\Theta H^{-1}$ и функционал K имеет вид

$$K = \psi_0 r^2 B(x_1^2 + u_1^2 - x_1u_1 + x_2^2 + u_2^2 - x_2u_2) +$$
$$+ \psi_1[u_1r^{-1} - (r^{-1} + 0{,}5B'B^{-1})x_1 - prz''B^{-0,5}] +$$
$$+ \psi_2[(u_2 - x_2)r^{-1} - (prB + x_1z'B^{0,5})AH^{-1}], \tag{3.2}$$

где $p = 0{,}5\,PA$. Оптимальные управления есть

$$u_1 = 0{,}5[x_1 + \psi_1(r^3B)^{-1}],$$
$$u_2 = 0{,}5[x_2 + \psi_2(r^3B)^{-1}]. \tag{3.3}$$

Учитывая (3.3), составим по (3.1) и по соображениям, аналогичным тем, которые были использованы при составлении системы (2.4), для дополнительных функций ψ_1, ψ_2, следующую систему дифференциальных уравнений:

$$x_1' = 0{,}5\psi_1(r^4B)^{-1} - 0{,}5(r^{-1} + B'B^{-1})x_1 - prz''B^{-0,5},$$
$$x_2' = 0{,}5\psi_2(r^4B)^{-1} - 0{,}5x_2r^{-1} - (prB + x_1z'B^{0,5})AH^{-1},$$
$$\psi_1' = 1{,}5x_1r^2B + 0{,}5(r^{-1} + B'B^{-1})\psi_1 + Az'B^{0,5}H^{-1}\psi_2,$$
$$\psi'_2 = 1{,}5x_2r^2B + 0{,}5r^{-1}\psi_2. \tag{3.4}$$

Краевые условия зависят от типа опирания. Вместо (2.7) можем найти соотношения:

$$\dot\varepsilon_\Phi = \alpha[\psi_1' - (r^{-1} + 0{,}5B'B^{-1})\psi_1 - A\psi_2z'B^{0,5}H^{-1}](r^2B)^{-1},$$
$$\dot k_\Phi = \alpha(\psi_2' - \psi_2r^{-1})(r^2BH)^{-1},$$
$$\dot\varepsilon_\Theta = \alpha\psi_1(r^3B)^{-1},$$
$$\dot k_\Theta = \alpha\psi_2(r^3BH)^{-1}. \tag{3.5}$$

По формулам (3.5) хорошо виден физический смысл функций ψ_1, ψ_2.

4. Аналитическое решение для пологих оболочек вращения под равномерным давлением

Рассматриваем пологие оболочки вращения, уравнение вращающего меридиана которых имеет вид $z = cn^{-1}r^n$, $n \geqslant 1$, c — заданная постоянная. Так как оболочка пологая, можно считать, что $B = 1$, и системе (3.4) приобретает вид

$$x_1' + 0{,}5r^{-1}x_1 = 0{,}5r^{-4}\psi_1 - pr^{n-1}c(n-1),$$
$$x_2' + 0{,}5r^{-1}x_2 = 0{,}5r^{-4}\psi_2 - (pr + cr^{n-1}x_1)AH^{-1},$$
$$\psi_1' - 0{,}5r^{-1}\psi_1 = 1{,}5r^2x_1 + AH^{-1}cr^{n-1}\psi_2,$$
$$\psi_2' - 0{,}5r^{-1}\psi_2 = 1{,}5r^2x_2. \tag{4.1}$$

Система (4.1) может быть решена аналитически, она сводится к неоднородному уравнению Эйлера четвертого порядка, если только $3A^2c^2H^{-2}r^{2n}$ — достаточно малая величина.

Выпишем результаты:

$$x_1 = C_1r^{\alpha-1,5} + C_2r^{-\alpha-1,5} + C_3r^{n+\alpha-1,5} + C_4r^{n-\alpha-1,5} + [(5-3n-2n^2)Dr^n + Er^{n+2}],$$

$$x_2 = [(2n^2+\sqrt{7}n^2+7n+2\sqrt{7}n)2C_3r^{\alpha-1,5} + (2n^2-\sqrt{7}n^2+7n-2\sqrt{7}n)2C_4r^{-\alpha-1,5} + (18n^2+126n+189)Er^2]H(3Ac)^{-1},$$

$$u_1 = (\alpha-0,5)C_1r^{\alpha-1,5} - (\alpha+0,5)C_2r^{-\alpha-1,5} + C_3(n-0,5+\alpha)r^{n-1,5+\alpha} + C_4(n-0,5-\alpha)r^{n-1,5-\alpha} + [(4-3n-n^2)Dr^n + (n+3)Er^{n+2}]pc,$$

$$u_2 = [(5n^2+\sqrt{7}n^2+7n+5\sqrt{7}n)C_3r^{\alpha-1,5} + (5n^2-\sqrt{7}n^2+7n-5\sqrt{7}n)C_4r^{\alpha-1,5} + (12n^2+84n+126)Er^2]H(3Ac)^{-1},$$

$$\psi_1 = (\alpha-1)2C_1r^{\alpha+1,5} - (\alpha+1)2C_2r^{1,5-\alpha} + (n+\alpha-1)2C_3r^{n+\alpha+1,5} + (n-\alpha-1)2C_4r^{n-\alpha+1,5} + [(1-n)3Dr^{n+3} + (2n+5)Er^{n+5}]pc,$$

$$\psi_2 = [(n^2+\sqrt{7}n)2C_3r^{\alpha+1,5} + (n^2-\sqrt{7}n)2C_4r^{1,5-\alpha} + (2n^2+14n+21)Er^5]H(Ac)^{-1}.$$

Здесь $\alpha = 0,5\sqrt{7}$, $D = (2n^2+6n+1)^{-1}$ и $E = -3A^2H^{-2}(42n^2+294n+441)^{-1}$. Постоянные интегрирования $C_1, \ldots, C_4$ определяют по граничным условиям.

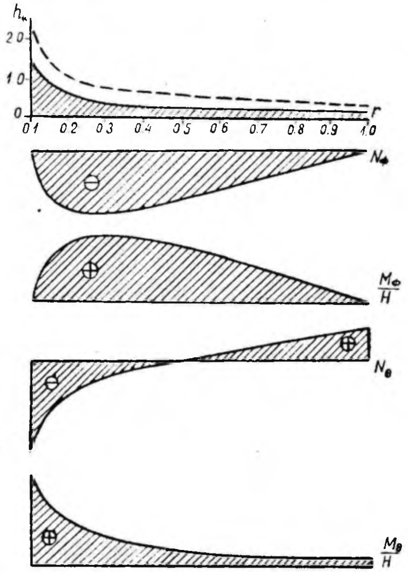


Рис. 2.

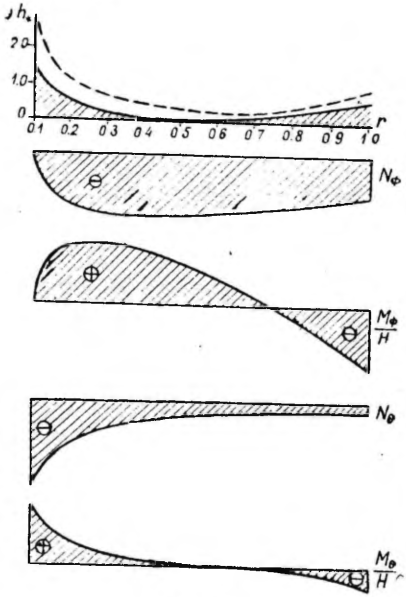


Рис. 3.

5. Численный пример

Вычисления проведены для пологой оболочки, которая имеет в центре отверстие с безразмерным радиусом b. Внешний край оболочки $r = 1$ свободно оперт, внутренний $r = b$ свободен. Граничные условия в таком случае имеют вид:

$$x_1(b) = x_2(b) = x_1(1) = x_2(1) = 0.$$

На рис. 2 и рис. 4 изображены распределения толщин несущих слоев при таких граничных условиях. Если внешний край оболочки защемлен, а внутренний свободен, то граничные условия имеют вид:

$$x_1(b) = x_2(b) = \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0.$$

Этому случаю отвечают данные на рис. 3 и рис. 5. Эпюры моментов и усилий на всех рисунках даны при $AH^{-1} = 200$, $h_* = 0{,}5\,PAch\sigma_0^{-1}10^{-4}$.

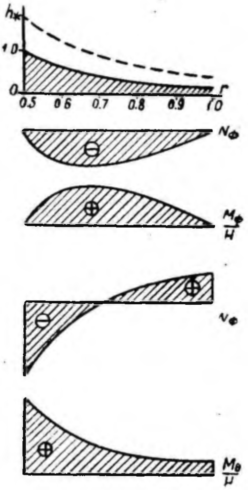


Рис. 4.

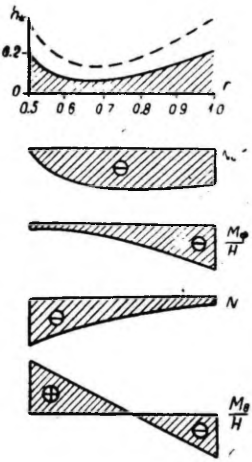


Рис. 5.

Выпишем значения параметров для всех графиков:

1) рис. 2, $n = 2$, $c = 0{,}0025$, $b = 0{,}1$,
   $AH^{-1} = 200$ — сплошная линия,
   $AH^{-1} = 400$ — штриховая линия,
2) рис. 3, $n = 3$, $c = 0{,}0025$, $b = 0{,}1$,
   $AH^{-1} = 200$ — сплошная линия,
   $AH^{-1} = 400$ — штриховая линия,
3) рис. 4, $n = 1$, $c = 0{,}0025$, $b = 0{,}5$,
   $AH^{-1} = 200$ — сплошная линия,
   $AH^{-1} = 400$ — штриховая линия,

4) рис. 5, $n = 3$, $c = 0{,}0025$, $b = 0{,}5$,

$AH^{-1} = 200$ — сплошная линия,

$AH^{-1} = 400$ — штриховая линия.

Для вычислений была составлена программа на языке МАЛГОЛ для ЭВМ Минск 22.

Литература

1. Одишвили К. А., Оптимальный закон изменения толщины пологой оболочки вращения. «Тр. ЦНИИ строит. конструкций», 1971, **19**, 113—118.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. Москва, 1969.
3. Hodge P. G., Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells. New Yersey, 1963.

Поступило
19 III 1973

PÖÖRDKOORIKUTE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE L. S. PONTRJAGINI MAKSIMUMPRINTSIIBI ABIL

E. Pungar

Resümee

Vaadeldakse jäik-plastsete kolmekihiliste pöördkoorikute optimaalse projekteerimise ülesannet kandvate kihtide ruumala miinimumile. Kasutatakse Misese voolamistingimust. Lahend saadakse maksimumprintsiibi abil teatava rajaülesandena. Selle rajaülesande õnnestub analüütiliselt lahendada kui käsitleda lamedaid koorikuid ühtlase rõhu all. On läbi viidud ka arvutusi.

THE OPTIMUM DESIGN OF REVOLUTION SHELLS BY MEANS OF PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE

E. Pungar

Summary

This paper finds the conditions for the optimal projects of sandwich revolution shells in case the material of the shell satisfies the Mises yield condition. This problem has been solved by means of Pontryagin's Maximum Principle. The solution has the form of a linear non-homogenous boundary-value problem. It has been solved analytically in the case of the shallow shells. Some numerical results for the shallow shells under the uniform pressure have been found too.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗОК ЛОКАЛЬНОГО ТИПА

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

Задачи о динамическом изгибе пластических пластин и оболочек являются математически настолько сложными, что точные решения удалось пока получить лишь для некоторых более простых случаев. По этому в последнее время резко вырос интерес к приближенным методам решения. Из многочисленных работ такого характера упоминаем здесь лишь работу С. Калиского [3], в которой дается новый метод определения остаточного прогиба конструкций. Этот метод является математически очень простым, но, несмотря на это, обеспечивает достаточную точность полученных результатов.

В данной статье метод Калиского применяется для расчета конструкций, подверженных действию локальных нагрузок. В таком случае пластические деформации охватывают лишь некоторую область конструкции, а остальная часть остается жесткой. Выработана методика определения границы деформированной области. В качестве примера решена задача о динамическом изгибе пологой сферической оболочки.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим оболочку под действием локальной динамической нагрузки. Материал оболочки будем считать идеально-жестко-пластическим. Вблизи нагруженной части оболочки возникает некоторая область, где происходит пластическое деформирование, а остальная часть остается жесткой. Обозначим пересечение срединной поверхности с границей деформированной области символом L. Допустим, что размеры оболочки настолько большие, что кривая L не доходит до края. В таком случае оболочку можно считать заделанной по кривой L. Пусть вид кривой L известен из эксперимента или из решения соответствующей статической задачи. Размеры деформированной области будем характеризовать при помощи некоторого численного параметра x.

Этот параметр фактически изменяется в процессе деформирования, но проведенные нами вычисления показывали, что этот эффект не очень существенен [1]. Поэтому вполне приемлемы решения можно получить, считая величину x постоянной. Так мы и поступаем в дальнейшем; для величины x выбираем некоторое «среднее значение» в данном процессе деформирования.

Следуя Калискому [3], задаем скорости перемещений в форме

$$\dot{u}_i = \dot{u}_0(t)\,\dot{u}_i^c \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{u}_i^c$ — некоторое кинематически допустимое, не зависящее от времени поле скоростей.

Обозначим символом (S) — множество точек поверхности оболочки, в которых действует внешняя нагрузка. Под символом (Σ) подразумеваем множество точек срединной поверхности оболочек, где происходит пластическое деформирование. Пусть нагрузка задана в форме

$$p_i = p(t)\,T_i^0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1.2}$$

Множители T_i^0 зависят только от координат поверхности оболочки, причем вне множества (S) они тождественно равны нулю.

Как показано в работе [3], ускорение $\ddot{u}_0(t)$ можно определить из уравнения

$$\ddot{u}_0(t) = Kp(t) - L. \tag{1.3}$$

Здесь введены следующие обозначения: (μ — масса оболочки на единицу площади срединной поверхности, $D(\dot{u}_i^c)$ — мощность диссипации, соответствующая полю скоростей $\dot{u}_i^c$):

$$K = \frac{\int\limits_{(S)} T_i^0 \dot{u}_i^c\,dS}{\mu \int\limits_{(\Sigma)} \dot{u}_i^c \dot{u}_i^c\,dS}, \qquad L = \frac{D(\dot{u}_i^c)}{\mu \int\limits_{(\Sigma)} \dot{u}_i^c \dot{u}_i^c\,dS}. \tag{1.4}$$

Оба коэффициента K и L, по-видимому, зависят от характерного размера деформированной области x; т. е. $K = K(x)$, $L = L(x)$. В случае постоянной величины x уравнение (1.3) нетрудно интегрировать. Определяя постоянные интегрирования из начальных данных $\dot{u}_0(t_0) = u_0(t_0) = 0$, находим

$$u_0(x,t) = K(x)\int\limits_{t_0}^{t} dt \int\limits_{t_0}^{t} p(t)\,dt - \frac{1}{2}L(x)\,(t-t_0)^2. \tag{1.5}$$

Пусть движение прекращается в момент времени t_*, тогда величина $u_0(x, t_*)$ выражает остаточный прогиб. Из (1.5) вытекает, что эта величина также зависит от величины x. Из всех решений, соответствующих разным значениям x, самым опасным следует считать то, для которого остаточный прогиб $u_0(x, t_*)$ является наибольшим. Это значение параметра x найдем из условия экстремума функции $u_0(x, t_*)$:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial t_*}\,\frac{\partial t_*}{\partial x} = 0. \tag{1.6}$$

Так как $\dot{u}_0(x, t_*) = \partial u_0/\partial t_* = 0$, то условие (1.6) примет вид $\partial u_0/\partial x = 0$. Таким образом, для определения величин x и t_* имеем уравнения

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = K'(x)\varphi(t_*) - \frac{1}{2}L'(x)(t_* - t_0)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial t_*} = K(x)\psi(t_*) - L(x)(t_* - t_0) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt, \qquad \psi(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt. \tag{1.8}$$

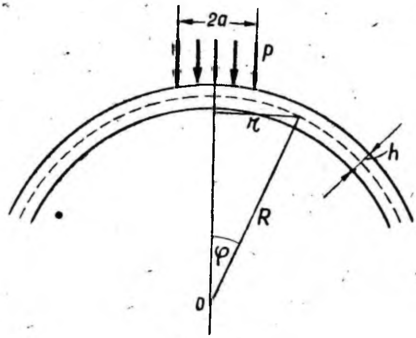
Если x и t_* определены, то уже нетрудно найти остаточный прогиб по формулам (1.5) и

$$u_i(x, t_*) = u_0(x, t_*)\,\dot{u}_i^c.$$

Отметим еще, что метод применим для любой зависимости $p = p(t)$.

2. Динамический изгиб пологой сферической оболочки

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. На сферическую оболочку радиуса R и толщины h приложена локальная нагрузка $p(t)$, которая действует на часть оболочки, ограниченную окружность с радиусом a (фиг. 1). Считаем оболочку настолько пологой, что можно взять $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Предположим, что деформированная оболочка сохраняет осевую симметрию. В таком случае кривая L, разделяющая жесткие и деформированные области, является окружностью с радиусом ϱ.



Фиг. 1.

Посмотрим, как целесообразно выбирать поле кинематически допустимых скоростей. Для этого исследуем вначале статическую задачу, считая край оболочки $r = \varrho$ жестко-заделанным (величину ϱ считаем известной). Обозначим скорости перемещений в радиальном и поперечном направлениях символами $\dot{u}$ и $\dot{w}$.

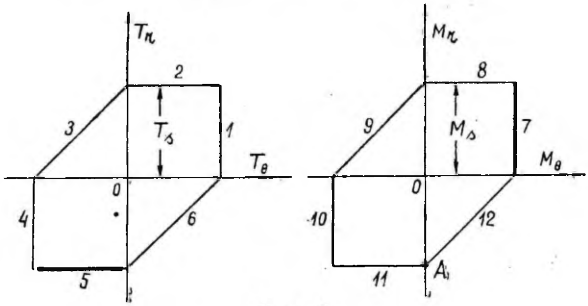
При $r=\varrho$ имеем:

$$\dot{u}=\dot{w}=\frac{d\dot{w}}{dr}=0. \tag{2.1}$$

Усилия, моменты и скорости деформации определим методом Ходжа [2], согласно которого пренебрегаем взаимосвязью между мембранными усилиями T_r, T_Θ и изгибающими моментами M_r, M_Θ. При этом учитываются лишь соотношения между моментами $F_1(M_r, M_\Theta)=0$, а также между усилиями $F_2(T_r, T_\Theta)=0$. В случае условия текучести Треска гиперповерхность текучести распадается на два шестиугольника, которые представлены на фиг. 2; символами T_s и M_s обозначено (σ_s — предел текучести):

$$T_s=\sigma_s h, \qquad M_s=\frac{1}{4}\sigma_s h^2.$$

Как показано Ходжем [2], напряженное состояние закрепленного сферического купола характеризуется сторонами 5—7 при $0\leqslant r<r_0$ и 5—12 при $r_0<r<\varrho$. Упростим немного это решение допуская, что на всем промежутке $0<r<\varrho$ реализуется режим 5—7, а при $r=\varrho$ осуществляется переход из режима 7 в угловую точку A нами выбраны пластические режимы, отмеченные на фиг. 2 жирными линиями).



Фиг. 2.

Скорости удлинений и искривлений срединной поверхности оболочки определим из уравнений

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{d\dot{u}}{dr}-\frac{\dot{w}}{R}, \qquad \dot{\varepsilon}_\Theta=\frac{\dot{u}}{r}-\frac{\dot{w}}{R}, \tag{2.2}$$

$$\dot{\varkappa}_r=-\frac{d\dot{w}}{dr^2}, \qquad \dot{\varkappa}_\Theta=-\frac{1}{r}\frac{d\dot{w}}{dr}. \tag{2.3}$$

Ассоциированным законом к поверхности текучести $F_1(T_r, T_\Theta)=0$ является $\dot{\varepsilon}_\Theta=0$, что дает

$$\dot{u}=\dot{w}\frac{r}{R}. \tag{2.4}$$

Имея еще в виду, что для режима 7 будет $\varkappa_r = 0$, получим

$$\dot{u} = \frac{\dot{w}_0 r}{R}\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right), \qquad \dot{w} = \dot{w}_0\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right). \tag{2.5}$$

Символом $\dot{w}_0$ обозначена скорость прогиба в центре $r = 0$.

Учитывая (2.5), из (2.2) находим,

$$\dot{\varepsilon}_r = -\frac{\dot{w}_0}{R}\frac{r}{\varrho} < 0, \qquad \dot{\varkappa}_\Theta = \frac{\dot{w}_0}{r\varrho} > 0.$$

Следовательно, четырехразмерный вектор скорости деформаций $(\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\Theta, \dot{\varkappa}_r, \dot{\varkappa}_\Theta)$ направлен вне гиперповерхности текучести, как это и должно быть.

Так как кинематическое граничное условие $d\dot{w}/dr = 0$ при $r = 0$ и $r = \varrho$ не удовлетворяется, то при $r = 0$ и $r = \varrho$ должны появляться шарнирные окружности.

Несущую способность оболочки определим кинематическим методом. Мощность диссипации внутренних сил для кинематически допустимого поля скоростей перемещений (3.5) вычислим по формуле

$$D = \pi\sigma_s h^2 \dot{w}_0\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\varrho^2}{hR}\right). \tag{2.6}$$

Мощность внешних сил для нагрузки $p = p_{st}$ равняется

$$A = \pi p_{st}\dot{w}_0 a^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{a}{\varrho}\right). \tag{2.7}$$

Приравнивая выражения (2.6), (2.7), получим для предельной нагрузки формулу

$$p_{st} = \frac{\sigma_s h^2}{a^2}\frac{1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{\varrho^2}{hR}}{1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{a}{\varrho}}. \tag{2.8}$$

С целью сравнения этого результата с результатами Ходжа принимаем $\varrho = a$ и переходим к безразмерным величинам

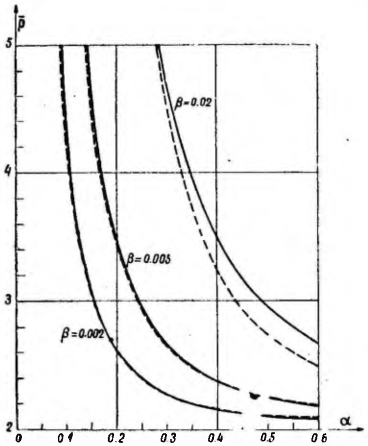
$$\bar{p} = \frac{p_{st}R}{\sigma_s h}, \qquad \beta = \frac{h}{4R}, \qquad \alpha = \frac{a}{R}. \tag{2.9}$$

Формула (2.8) приобретает теперь вид

$$\bar{p} = 2 + 12\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2. \tag{2.10}$$

Этот результат представлен на фиг. 3; для параметра β выбраны значения 0,002; 0005; 0,02. Сплошные линии соответствуют решению (2.10), пунктирные линия — решению Ходжа ([2], фиг. 7.3). Из фиг. 3 вытекает, что при $\beta = 0{,}002$ и $\beta = 0{,}005$ оба решения практически совпадают, небольшие отклонения появляются лишь при[1] $\beta = 0{,}02$. Отсюда можно сделать вывод,

[1] Здесь следует иметь в виду, что кривые Ходжа соответствуют непологовой оболочке, а наши кривые — пологой оболочке.



Фиг. 3.

что кинематически допустимое поле скоростей перемещений (2.5) можно считать достаточно надежным основанием для построения решения соответствующей динамической задачи.

Переходим теперь к решению задачи динамического изгиба оболочки. В качестве параметра x возьмем $x = a/\varrho$. Вычисляя на основании (2.5) интегралы в формулах (1.4), находим

$$K(x) = \frac{2x^2}{\mu}(3-2x), \qquad L(x) = \frac{2\sigma_s h^2}{\mu a^2}\left(3x^2 + \frac{2a^2}{Rh}\right).$$

Система (1.7) получает теперь вид

$$\begin{gathered} 2(1-x)\varphi(t_*) - \frac{\sigma_s h^2}{a^2}(t_* - t_0)^2 = 0, \\ x^2(3-2x)\psi(t_*) - \frac{\sigma_s h^2}{a^2}\left(3x^2 + \frac{2a^2}{Rh}\right)(t_* - t_0) = 0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Конкретные вычисления проведены при

$$p(t) = p_0 e^{-\beta t}, \tag{2.12}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{p_0}{\beta}\left[t_* - \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t_*}\right)\right],$$

$$\psi(t) = \frac{p_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t_*}\right).$$

Учитывая, что $t_0 = 0$, и введя безразмерные величины

$$\tau = \beta t_*, \qquad \lambda = \frac{\sigma_s h^2}{a^2 p_0}, \qquad \delta = \frac{2a^2}{hR}, \tag{2.13}$$

можно систему (2.11) написать в форме

$$\begin{gathered} 2(1-x)(\tau - 1 + e^{-\tau}) = \lambda\tau^2, \\ x^2(3-2x)(1 - e^{-\tau}) = \lambda\tau(3x^2 + \delta). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Определяя из этой системы величины x и τ, вычислим остаточный прогиб $w_0(t_f)$ в точке $r=0$ по формуле (1.5), которая примет вид

$$\nu=\frac{\mu\beta^2}{p_0}w_0(t_f)=2x^2(3-2x)(\tau-1+e^{-\tau})-\lambda(3x^2+\delta)\tau^2. \qquad (2.15)$$

Таблица

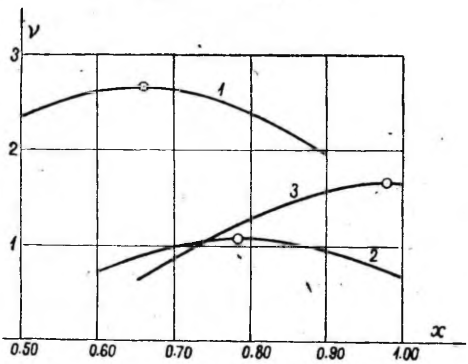
δ	λ	x	τ	ν	p_0/p_{st}
0	0,10 0,25 0,50	0,66 0,52 0,32	5,57 2,37 0,98	2,64 0,41 0,02	5,60 2,61 1,57
1	0,05 0,10 0,20	0,82 0,78 0,73	6,05 2,93 1,00	3,72 1,05 0,08	6,07 3,10 1,58
10	0,010 0,025 0,050	0,96 0,95 0,93	7,80 2,97 0,98	5,77 1,21 0,10	7,81 3,13 1,53
25	0,0050 0,0075 0,0100 0,0200	0,970 0,979 0,978 0,976	7,16 4,74 3,47 1,31	5,16 2,79 1,64 0,20	7,17 4,78 3,58 1,79

Посмотрим сколько раз наибольшая динамическая нагрузка p_0 превосходит статическую предельную нагрузку p_{st}. На основании формул (2.8) и (2.13) имеем

$$\frac{p_0}{p_{st}}=\frac{(3-2x)x^2}{\lambda(3x^2+\delta)}.$$

В силу второй формулы из)2.14) это переходит в

$$\frac{p_0}{p_{st}}=\frac{\tau}{1-e^{-\tau}}. \qquad (2.16)$$



Фиг. 4.

Таким образом, отношение p_0/p_{st} зависит только от безразмерной времени деформирования.

В таблице представлены результаты вычислений, проведенных для некоторых значений параметров λ и δ.

Интересно посмотреть еще как зависит безразмерный прогиб ν от выбора параметра x. Такие вычисления проводились для некоторых значений параметров, они представлены на фиг. 4, где кривая 1 соответствует параметрам $\lambda = 0{,}1$, $\delta = 0$; кривая 2 — параметрам $\lambda = 0{,}1$, $\delta = 1$, а кривая 3 — параметрам $\lambda = 0{,}01$, $\delta = 25$.

Литература

1. Лепик Ю. Р., К приближенному решению задач динамического изгиба жестко-пластических пластин. Прикл. механика, 1974, № 5, 33—39.
2. Hodge P. G., Plastic analysis of structures. New-York, 1959.
3. Kaliszky, S., Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua. Int. J. Non-Linear Mech., 1970, 5, 143—158.

Поступило
22 III 1973

LIGIKAUDNE MEETOD JÄIK-PLASTSETE LOKAALSELT KOORMATUD KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

Ü. Lepik

Resümee

Uuritakse jäik-plastsete plaatide ja koorikute dünaamilist painet lokaalset tüüpi koormuste puhul. Ülesanne lahendatakse S. Kaliszky poolt soovitatud meetodil [3]. Deformeerunud osa suurus määratakse nõudest, et jääkläbipaine oleks maksimaalne. Näitena lahendatakse ülesanne lameda sfäärilise kooriku dünaamilisest paindest telgsümmeetrilise koormuse korral.

AN APPROXIMATE METHOD FOR DESIGNING OF RIGID-PLASTIC CONSTRUCTIONS UNDER LOCAL DYNAMIC LOADS

Ü. Lepik

Summary

Dynamic bending of rigid-plastic plates and shells under local loadings is considered. The problem in question is solved with the aid of an approximate method, which was proposed by S. Kaliszky [3]. In the case of a local loading only a part of the construction deforms plastically and the part which is left over remains rigid. It is suggested to calculate the size of the deformed region from the maximum condition for permanent deflections. For a sample a problem of dynamic bending of shallow spherical shells under axisymmetric loading is solved. Formulae for calculation of the size of the deformed region and permanent deflections are derived. Some numerical results are given in the Table.

О ПОВЕДЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

К. Соонетс

Кафедра теоретической механики

1. В статье приводятся результаты расчета цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным радиальным давлением q. Основные уравнения в геометрически и физически нелинейных постановках выведены на базе деформационной теории пластичности с использованием условия Мизеса. Основные соотношения изложены в статье [1].

2. Приводим основные уравнения, по которым был проведен численный расчет на ЭВЦМ «Урал 4» ВЦ Тартуского госуниверситета.

Геометрия и физические свойства оболочки характеризуются параметрами

$$\alpha=\frac{l^2}{rh}, \quad \mu=\sqrt{3}\, e_s\left(\frac{l}{h}\right)^2,$$

где l, r, h — соответственно длина, радиус и толщина оболочки, e_s — интенсивность деформаций на пределе пропорциональности. Вместо интенсивности деформаций e_i используется параметр $e = e_i/e_s$; модуль упругости обозначен через E.

Основное дифференциальное уравнение имеет вид

$$w^{\mathrm{IV}}+9\alpha^2 w=1{,}5p+P.$$

Здесь w означает прогиб, отнесенный к толщине оболочки, дифференцирование производится по безразмерной длине $0 \leqslant x \leqslant 1$. Параметр нагрузки p и безразмерные усилия введены следующим образом:

$$p=\frac{6q}{E}\left(\frac{l}{h}\right)^4; \qquad T_{1,2}=\frac{6l^2}{Eh^3}\,T_{\xi,\varphi}; \qquad M=\frac{6l^2}{Eh^4}\,M_{\xi}.$$

Слагаемое P имеет вид

$$\frac{2}{3}P=T_1\left[\frac{R_1}{2(R_0-2)}\right]''-\left(\frac{R_1}{R_0-2}\,\varkappa\right)''+3\alpha^2 R_0 w;$$

$$R_i=\int\limits_{-1}^{t_1}\omega t^i\,dt+\int\limits_{t_2}^{1}\omega t^i\,dt \qquad (i=0,1,2),$$

где $\omega = 1 - \sigma_i/e_i$ — функция пластичности, $t = 2z/h$, и $t_{1,2}$ — граничные поверхности между упругими и пластическими зонами в безразмерных координатах. В случае идеальной пластичности ($\lambda = 1$) или линейного упрочнения ($\lambda < 1$) величины R_i выражаются в элементарных функциях.

Приводим еще некоторые формулы, явно не заданные в [1], но по которым вычислялись разные характеристики оболочки (все в безразмерных величинах):

относительное удлинение и искривление

$$\varepsilon = 0{,}5aw + \frac{T_1}{4(2 - R_0)} - \frac{R_1}{2(R_0 - 2)}\varkappa; \qquad \varkappa = -w'';$$

положение поверхности наименьшей интенсивности деформаций

$$t_0 = \frac{T_1}{2(R_0 - 2)}\varkappa + \frac{R_1}{R_0 - 2};$$

нормальное напряжение

$$\sigma = (1 - \omega)(2\varepsilon - aw + t\varkappa),$$

$$\omega = \begin{cases} 0, & e \leqslant 1 \\ \lambda\left(1 - \dfrac{1}{e}\right), & e \geqslant 1; \end{cases}$$

граничные поверхности между упругими и пластическими зонами,

если $\varkappa \neq 0$, то

$$t_{1,2} = t_0 \mp \frac{1}{|\varkappa|}\sqrt{\mu^2 - 3a^2w^2};$$

если $\varkappa = 0$, то

$$t_1 = -1, \quad t_2 = +1 \quad \text{при} \quad P_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 + aw(aw - \varepsilon) < \frac{1}{4}\mu^2,$$

$$t_1 = t_2 = \pm 1 \qquad \text{при} \quad P_\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}\mu^2;$$

если $\mu^2 - 3a^2w^2 < 0$, то

$$t_1 = t_2 = t_0 \qquad \text{при} \quad |t_0| \leqslant 1,$$
$$t_1 = t_2 = \operatorname{sgn} t_0 \quad \text{при} \quad |t_0| > 1.$$

3. Оболочка под внутренним давлением. Расчеты были проведены для оболочек со скользящей и нескользящей заделкой (варианты с обозначениями *сж* и *ж*) и скользящим и нескользящим шарнирным опиранием (варианты *сш* и *ш*). Длина оболочки была разделена на $2n = 24$ шага.

Упругое решение при варианте сж сравнивалось с точным упругим решением. В случае короткой оболочки ($a = 2$) расхождение в нагрузке не превышало 3%, в $\max M$ не превышало 4%, а при $a \geqslant 4$ соответственно 2% и 3%.

Часть результатов численного расчета приведена в таблицах при некоторых комбинациях параметров (λ, α, μ). Индексы -1 и $+1$ означают соответственно внешнюю и внутреннюю поверхности оболочки, в скобках указано сечение по длине оболочки (0 — кромка, 0,5 — середина оболочки).

О характере зависимости между прогибом $f = w\,(0{,}5)$ и нагрузкой p можно судить по рисункам 1, 2 и таблицам. При неучете упрочнения ($\lambda = 1$) после достижения предела текучести в опасном сечении скорость роста нагрузки замедляется при свободно смещающихся кромках. У средних оболочек ($\alpha = 4$—8) происходит это замедление сравнительно плавно и при развитых пластических деформациях почти прекращается. Зато у длинных оболочек имеется на графике $p - f$ резкий поворот вскоре после начала пластических деформаций. Это объясняется тем, что у длинных оболочек происходит образование чисто пластических сечений около середины оболочки гораздо быстрее. Главную роль в этом играет интенсивный рост T_2.

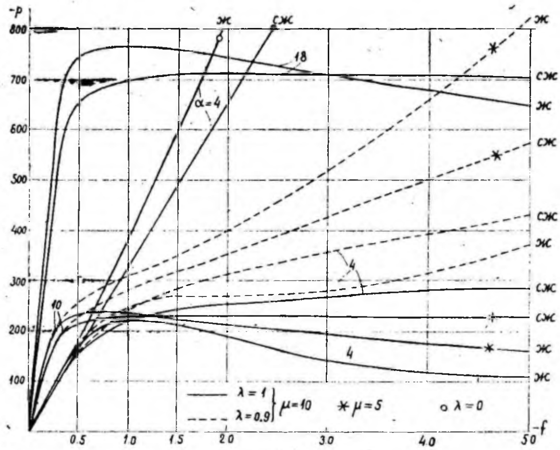


Рис. 1.

Закон изменения нагрузки качественно иной в случае несмещающихся кромок. При $\lambda = 1$ нагрузка достигает $\max p$, после чего рост прогибов происходит при уменьшающейся нагрузке. Максимальная нагрузка достигается почти при равных стрелах прогиба независимо от параметра α, (если $\mu = \mathrm{const}$). Связь между $\max p$ и α для средних и длинных оболочек линейна.

В случае оболочек средней длины величина нагрузки сильно зависит от вида опирания концов (заделка или свободное опирание). С ростом параметра α влияние граничных условий ослабевает. Роль граничных условий несущественна и для средних оболочек при малых μ, так как тогда жесткая заделка стремится быстрее к пластическому шарниру.

Таблица 1

Нескользящая заделка

$\alpha = 10$; $\mu = 5$

Верхняя строка при $\lambda = 0{,}9$; нижняя — $\lambda = 1$.

$-f$	$-p$	T_1	$M(0)$	$-M(0{,}5)$	$T_2(0)$	$T_2(0{,}5)$	$e_{-1}(0)$	$e_1(0)$	$e_{-1}(0{,}5)$	$e_1(0{,}5)$	$\varepsilon(0)$	$\varepsilon(0{,}5)$
0,3	220,9	7,11	4,99	2,10	3,55	18,8	22,2	3,89	1,71	1,11	2,08	—0,31
	215,3	6,93	4,32	2,00	3,47	18,4	2,29	4,23	1,71	1,11	2,43	—0,29
0,5	257,8	9,69	5,71	2,24	4,85	20,7	3,54	7,12	3,13	1,81	4,47	0,10
	233,6	8,88	4,02	1,89	4,44	18,6	3,77	9,15	3,22	1,80	6,72	0,27
1,0	307,9	14,5	6,84	2,49	7,27	25,6	5,51	12,9	6,70	3,50	9,24	1,57
	233,5	11,5	3,36	1,53	5,75	18,7	6,20	22,2	7,37	3,48	20,0	2,78
1,5	354,4	19,6	7,63	2,71	9,81	30,6	6,61	18,0	10,4	5,20	14,2	3,91
	224,3	13,3	2,79	1,20	6,67	18,6	7,26	35,3	12,1	5,23	35,1	6,95
2,0	404,2	25,4	8,39	2,92	12,7	35,9	7,33	23,4	14,4	7,02	20,1	7,30
	213,3	14,7	2,27	0,91	7,40	18,3	7,38	48,1	17,5	7,28	50,9	13,0
3,0	519,3	38,9	10,2	3,49	19,5	47,5	8,39	36,3	23,7	11,3	34,9	17,3
	192,6	16,7	1,48	0,47	8,36	17,4	5,46	66,5	29,7	13,3	76,3	30,3

Нескользящий шарнир

$-f$	$-p$	T_1	$M(0)$	$-M(0{,}5)$	$T_2(0)$	$T_2(0{,}5)$	$e_{-1}(0)$	$e_1(0)$	$e_{-1}(0{,}5)$	$e_1(0{,}5)$	$\varepsilon(0)$	$\varepsilon(0{,}5)$
0,3	195,5	9,02	0	—1,06	4,51	20,2	0,45	1,40	1,04	1,04	1,24	—0,16
	193,6	8,91		—1,01	4,46	19,9	0,45	0,45	1,40	1,04	1,24	—0,26
0,5	216,0	11,8		—1,12	5,91	21,8	0,59	0,59	2,71	1,75	1,48	0,43
	198,2	10,9		—1,05	5,46	19,5	0,55		2,82	1,75	1,37	0,60
1,0	258,8	17,4		—1,20	8,72	26,5	0,87	0,87	5,84	3,72	2,18	2,58
	197,0	13,5		—0,77	6,78	19,1	0,69	0,69	6,62	3,72	1,69	3,76
1,5	302,8	22,8		—1,23	11,4	31,5	2,02	2,02	9,11	5,98	4,83	5,55
	190,6	15,1		—0,55	7,57	18,6	0,76	0,76	11,0	6,14	1,89	8,74
2,0	351,4	28,8		—1,33	14,4	36,8	5,33	5,33	12,7	8,51	13,2	9,52
	183,7	16,2		—0,40	8,11	18,0	0,81	0,81	16,1	9,12	2,03	15,5
3,0	464,0	43,4		—1,67	21,7	48,9	12,6	12,6	21,5	14,6	30,8	21,4
	170,7	17,6		—0,19	8,78	16,8	1,12	1,12	27,9	17,7	3,17	35,4

Таблица 1а

Нескользящая заделка

$\mu = 10,\ \lambda = 1$

α	$-p_{max}$	$-f$	T_1	$M(0)$	$-M(0{,}5)$	$e_{-1}(0)$	$e_1(0)$	$\sigma_{-1}(0{,}5)$	$\sigma_1(0{,}5)$	$e_{-1}(0{,}5)$	$e_1(0{,}5)$	$\varepsilon(0)$	$\varepsilon(0{,}5)$	$t_0(0)$
2	163,8	1,0	16,2	8,36	6,74	4,59	10,3	9,88	—8,83	2,18	0,95	14,2	2,17	—0,38
4	221,9	1,1	20,5	7,42	5,49	4,27	12,4	9,57	—7,27	2,83	1,06	20,3	2,75	—0,40
6	299,8	1,1	22,1	6,98	4,29	3,91	12,7	9,34	—4,14	3,18	1,26	22,1	2,81	—0,53
10	456,1	1,0	22,2	6,99	3,08	3,44	11,5	8,72	—0,85	3,52	1,74	20,1	2,29	—0,54
14	611,8	1,0	22,4	6,83	2,39	3,31	11,6	8,27	0,91	4,30	2,44	20,2	2,42	—0,55
18	767,1	0,9	21,7	7,00	2,01	3,05	10,1	7,81	1,69	4,48	2,85	17,6	1,81	—0,54
22	921,9	0,3	21,7	7,00	1,69	3,03	10,1	7,50	2,38	5,17	3,53	17,6	1,85	—0,54

$\mu = 5,\ \lambda = 1$

4	124,5	0,9	10,0	3,77	—2,87	7,08	20,0	4,80	—3,20	4,84	1,83	16,1	2,37	—0,47
10	236,4	0,7	10,1	3,73	—1,75	4,93	14,3	4,29	—1,20	4,82	2,48	11,7	1,09	—0,42

Нескользящий шарнир

$\lambda = 1$

α	μ	$-p_{max}$	$-f$	T_1	$e_{\pm 1}(0)$	$e_{-1}(0{,}5)$	$e_1(0{,}5)$	$T_2(0)$	$T_2(0{,}5)$	$\varepsilon(0)$	$\varepsilon(0{,}5)$	$-M(0{,}5)$
4	10	149,8	1,2	29,5	0,74	2,80	0,831	14,7	34,2	3,69	4,30	2,62
4	1	18,04	0,3	1,93	0,48	5,62	2,49	0,96	3,44	0,241	0,363	0,50
10	5	199,3	0,7	12,2	0,61	4,28	2,50	0,61	19,4	1,52	1,66	0,94

Таблица 2

Скользящая заделка ($\mu = 10$)

$-f$	$-p$	$\max e(0)$	$\max e(0{,}5)$	$M(0)$	$-M(0{,}5)$	$\max \sigma(0{,}5)$	$T_2(0{,}5)$
$\lambda = 1,\ \alpha = 2$							
0,4	107,4	1,27	0,645	7,94	4,20	6,30	
0,7	151,8	4,11	1,02	9,80	6,62	9,71	8,40
1,0	172,2	8,07	1,47	9,95	8,15	9,72	
1,5	188,0	14,0	2,47	9,98	9,03	9,78	
2,0	194,5	19,7	3,63	9,99	9,28	9,82	14,5
3,0	211,0	26,4	5,71	10,0	9,35	9,85	15,3
$\lambda = 1,\ \alpha = 4$							
0,4	129,7	1,30	0,68	8,04	4,14		9,60
0,7	189,3	4,32	1,09	9,82	6,45		16,7
1,0	221,6	7,85	1,63	9,95	7,58		21,3
1,5	224,0	13,8	2,65	9,98	7,98		23,5
2,0	253,2	19,4	3,64	9,99	8,07		23,1
3,0	277,3	24,8	5,52	10,0	8,10		22,9
$\lambda = 1,\ \alpha = 14$							
0,4	470,7	2,11	1,09	9,25	3,14	4,51	
0,7	543,2	4,71	2,01	9,85	3,80	5,35	
1,0	564,1	7,28	2,93	9,94	4,02	5,62	
1,5	578,0	11,8	4,45	10,0	4,14	5,76	
2,0	581,0	16,4	5,96		4,18	5,81	
3,0	583,3	21,4	8,72		3,93	5,51	
$\lambda = 0{,}9,\ \alpha = 4$							
0,4	129,8	1,30	0,68	8,10	4,14		16,7
0,7	198,4	3,58	1,13	11,1	6,64		21,3
1,0	240,1	5,96	1,69	12,9	7,96		24,5
1,5	283,1	8,85	2,71	14,9	8,91		9,60
2,0	311,0	11,3	3,69	16,5	9,57		25,5
3,0	359,3	14,9	5,44	18,9	10,6		28,0

Таблица 3

Скользящий шарнир ($\lambda = 1$; $\mu = 10$)

$-f$	$-p$	$\max e(0{,}5)$	$-M(0{,}5)$	$-f$	$-p$	$\max e(0{,}5)$	$-M(0{,}5)$
$\alpha = 4$				$\alpha = 8$			
1,0	126,0	1,17	5,99	0,8	263,2	1,33	3,92
1,3	147,3	1,62	6,68	1,0	275,0	1,72	3,26
1,5	154,4	1,94	6,87	1,5	286,5	2,66	4,56
2,0	162,0	2,74	7,11	2,0	291,1	3,59	4,66
3,0	168,2	4,00	7,00	3,0	292,7	5,25	4,43

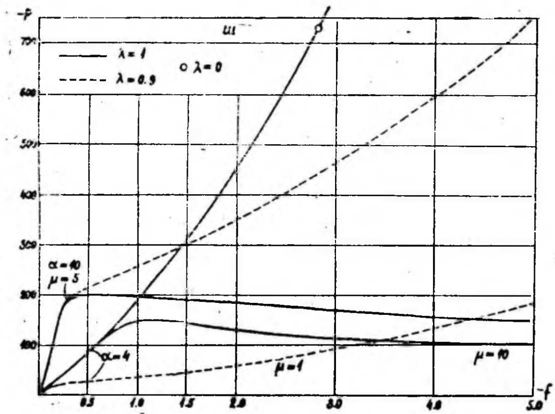


Рис. 2.

Результаты работы автора сравнивались с результатами И. В. Ширко [3, 4]. И. В. Ширко использовал условие Треска — Сен-Венана при изучении изгиба длинной гибкой оболочки со скользящей заделкой ($T_1 = 0$). Отношение нагрузок при появлении текучести на концах оболочки, полученных И. В. Ширко и автором данной статьи, колеблется в пределах 1,10—1,18 в зависимости от параметра $10 \leqslant \alpha \leqslant 22$. По условию Мизеса получены завышенные нагрузки. Отношение изгибающих моментов на концах оболочки не превышает 1,05.

На рис. 3 и 4 представлена зависимость изгибающего момента от стрелы соответственно для заделанной оболочки $M(0)$ и для шарнирно опертой оболочки $M(0{,}5)$. Некоторые численные результаты приведены и в таблицах. В случае заделки проявляется ярко краевой эффект. С увеличением длины оболочки $|M(0{,}5)|$ составляет все меньшую долю от $M(0)$. Зато у короткой оболочки происходит сближение $|M(0{,}5)|$ к $M(0)$ с расшире-

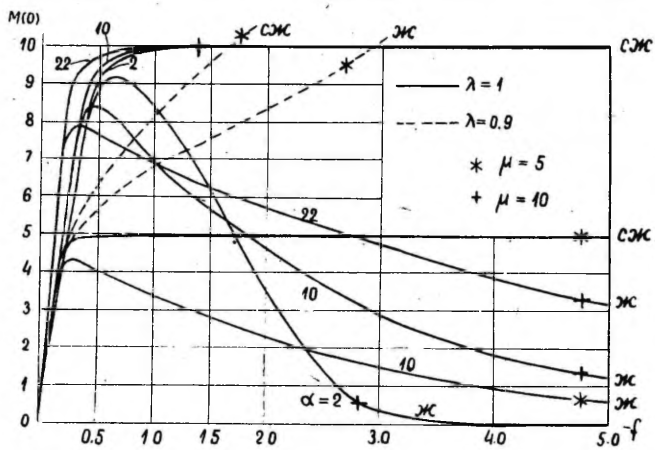


Рис. 3.

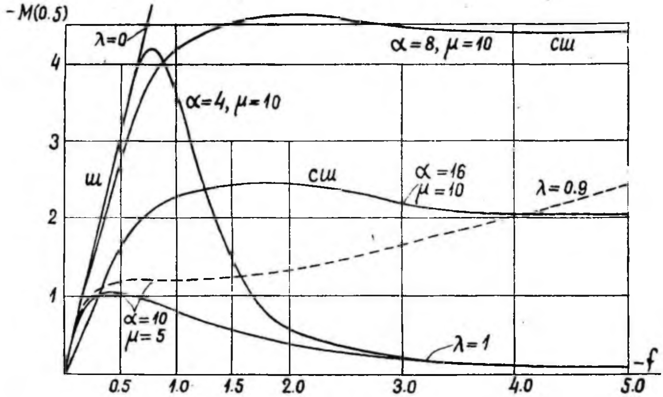


Рис. 4.

нием пластических областей. Если обозначить высоту упругого ядра над срединной поверхностью через η_0, то в случае скользящей заделки предельный момент $M(0) \to \mu$ при $\eta_0 \to 0$ для идеально пластического материала. Учет упрочнения приводит к продолжающемуся росту изгибающего момента. Совсем иной характер изменения момента при жесткой заделке. При $\lambda = 1$ на графиках $M - f$ резко вычерченный максимум вскоре после появления пластических зон. Учет упрочнения причиняет рост изгибающего момента, хотя значительно медленнее, чем в случае скользящей заделки.

Шарнирно опертая оболочка короткой и средней длины имеет максимальный изгибающий момент в середине. У длинных упругих оболочек достигается $\max M(x)$ до середины. При появлении пластических областей сечение с $\max M(x)$ перемещается в сторону середины и даже до середины, пока вся оболочка переходит в пластическое состояние.

При значениях $\alpha = 41$; 45; 130 оказалось, что изгибными напряжениями можно пренебречь по сравнению с напряжениями в краевой зоне независимо от вида закрепления кромок. Сечение с максимальным прогибом перемещается в сторону кромок, оболочка как бы «выпучивается» в удаленной от центра части. При сильно развитых пластических деформациях в концевом сечении заделенная оболочка по форме прогиба приближается к шарнирно опертой оболочке. В случае несмещающихся кромок нагрузка $p_ж(f)$ сближается $p_ш(f)$.

Относительное удлинение в срединной поверхности ε меняется для оболочки со свободно скользящимися краями по закону $\varepsilon(x) = 0{,}5\alpha w(x)$ и в центре $\varepsilon(0{,}5) = 0{,}5\alpha f$.

В случае нескользящих кромок закон изменения $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon(0{,}5)$ нелинейный — влияние осевого усилия T_1 сказывается сильно (рис. 5).

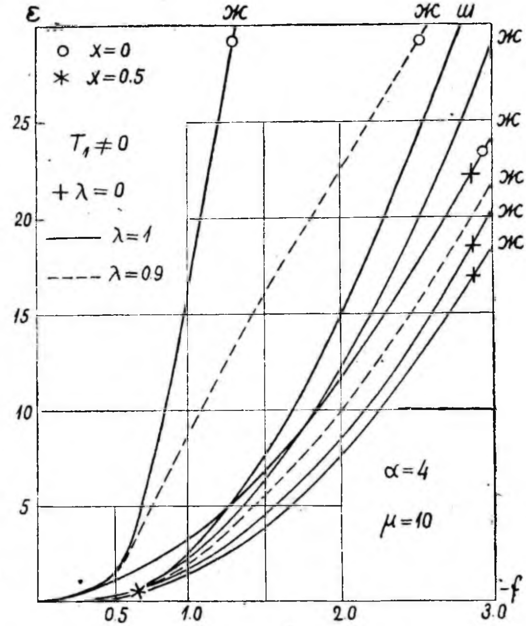


Рис. 5.

Чисто пластические сечения возникают раньше всего в серединной части оболочки, охватывая сразу интервал конечной длины.

Окружное усилие T_2 достигает максимального значения на середине оболочки в упругой стадии. Расширением пластических областей сопутствует перемещение максимума в распределении $T_2(x)$ в сторону кромок оболочки. Это проявляется сильнее у заделанных оболочек. Например, при параметрах $\alpha = 4$, $\mu = 10$, для $f = 1{,}6$ при нескользящей заделке:

$T_2(0{,}5) = 33{,}03$, $\max T_2 = 35{,}68$ в сечении $x \approx 0{,}3$; при скользящей заделке:

$T_2(0{,}5) = 23{,}36$, $\max T_2 = 28{,}06$ в сечении $x \approx 0{,}33$.

По рис. 6 можно проследить за распределением нормального напряжения σ и интенсивности деформаций e в двух сечениях $x = 0$; 0,5. При численном расчете была толщина оболочки разбита на 10 интервалов.

4. Оболочка под внешним радиальным давлением. Было изучено и докритическое напряженно деформационное состояние оболочек, нагруженных внешним радиальным давлением. Оценкой для критической нагрузки свободно опертой упругой оболочки служила формула

$$q_{kp} = \frac{\sqrt{6}\,\pi}{9\sqrt[4]{(1-\nu)^3}} \frac{Er}{l} \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^5},$$

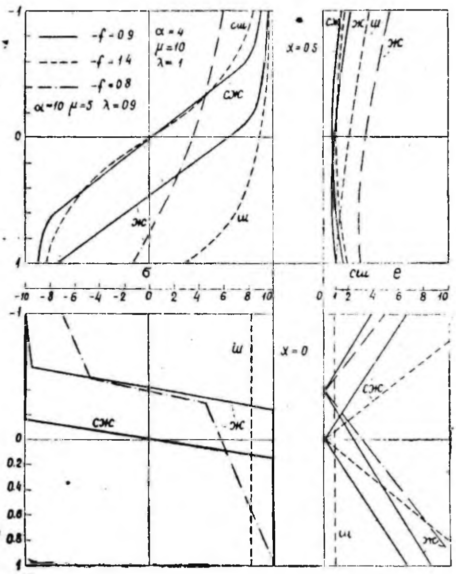


Рис. 6.

которая в безразмерном виде и при $\nu = 0{,}5$ приобретает вид

$$p_{kp} = 6{,}37\alpha\sqrt{\alpha}.$$

В случае скользящей заделки p_{kp} увеличивается, примерно, в 1,5 раза. Для оболочки с несмещающимися кромками критическая нагрузка около 1,5 раза больше соответствующей нагрузки в случае скользящих кромок. Рассматривались только такие оболочки, в которых пластические деформации возникли до достижения упругой критической нагрузки и материал считался идеально пластическим.

Характер изменения нагрузки p зависит существенно от того, могут ли кромки оболочки перемещаться или нет. При нескользящих кромках (варианты *ш* и *ж*) нагрузка доходит до определенного $\max p$, после чего начинается спад. С ростом длины оболочки влияние типа закрепления на величину нагрузки p уменьшается. При скользящих кромках (варианты *сш* и *сж*) нагрузка достигает определенного значения p^*, после чего рост прогибов происходит при неизменной нагрузке. Эту нагрузку p^* можно принимать за предельную.

Таблица 4 содержит некоторые значения $\max p$ и p^*. Для сравнения приведена и предельная нагрузка P, вычисленная на основе жестко-пластического анализа [2]. В символах настоящей работы

при варианте *сш* нагрузка $P = 2\cdot 3^{1/2}\mu(2+\alpha)$,

при варианте *сж* нагрузка $P = 2\cdot 3^{1/2}\mu(4+\alpha)$.

Таблица 4

a	μ	max p	
		ж	*ш*
2	5	37,5	91,1
	5	11,2	23,0
4	1	71,5	122
	1	17,7	28,9
10	1	40,3	49,4
17	1,3	86,7	96,7
34,3	1,17	154	157

a	μ	*сш*		*сж*	
		p^*	P	p^*	P
7	0,193	5,0	6,02	7,30	7,35
7,26	0,214	5,7	6,86	8,20	8,35
12,2	0,367	15,4	18,1	19,4	20,6
17	1,3	75,4	85,7	88,0	94,6
34,3	1,3	147	165	154	174
76,5	3,26	843	887	861	909

В таблице 5 приведены данные экспериментов по [5] на определение предельной нагрузки p_M (в таблице $p_M = 6l^4 q_M | (Eh^4)$), предельная нагрузка $P = 2 \cdot 3^{1/3} \mu a$ на основе жестко-пластического анализа для оболочки со свободными концами и результаты расчетов автора для вариантов *сш* и *сж*.

Таблица 5

l	r	$h \cdot 10^2$	p	P	p^* (*сш*)	p^* (*сж*)
4	2,685	7,8	985	864	843	861
3	2,68	9,8	164	139	131	137
2	2,66	12,3	18	14,0	13,9	17,5
1,5	2,663	12,1	5,9	4,68	5,0	7,3
41,5	2,7	4,9	75	68,3	67	78

$$E = 29{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{фунтов}}{\text{дюйм}^2}, \quad \sigma_s = 21{,}3 \cdot 10^3 \frac{\text{фунтов}}{\text{дюйм}^2}, \quad e_s = 7{,}22 \cdot 10^{-4}.$$

Чисто пластические сечения возникают прежде всего в серединной части оболочки независимо от вида закрепления кромок. Форма прогиба оболочки зависит от параметра a. В случае скользящих кромок при меньших значениях a прогибы увеличивались плавно до максимального значения на середине, при больших a образовалась до середины оболочки вмятина вовнутрь (например, при $a = 34{,}3$; $76{,}5$; 100). Вмятина образовалась уже до достижения предельной нагрузки. В [5] обращается также внимание на две формы разрушения оболочки.

Литература

1. Соонетс К., Об осесимметричном упруго-пластическом изгибе круговых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 336—344.
2. Ходж Ф. Г., Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. Москва, 1963.
3. Ширко И. В., Упруго-пластический изгиб цилиндрической оболочки. Прикл. механика, 1968, 4, № 12, 66—74.

4. Ширко И. В., Упруго-пластический изгиб гибкой цилиндрической оболочки. Изв. АН СССР. Мех. твер. тела, 1969, № 6, 90—100.
5. Montague, P., Experimental behaviour of thin-walled cylindrical shells subjected to external pressure. J. Mech. Engn. Sci., 1969, **11**, № 1, 40—56.

Поступило
20 III 1973

TELGSÜMMEETRILISELT KOORMATUD SILINDRILISE KOORIKU ELASTSEST-PLASTSEST KÄITUMISEST

K. Soonets

Resümee

Töö esitatakse ühtlase sise- või välisrõhuga koormatud elastse-plastse silindrilise kooriku jaoks autori poolt töös [1] esitatud põhivõrrandite numbrilisel lahendamisel saadud tulemusi. Arvutustulemused on esitatud tabeltes ja graafiliselt parameetrite mitmesuguste kombinatsoonide jaoks ning on analüüsitud saadud tulemusi. Ühtlase välisrõhuga koormatud kooriku puhul võrreldakse leitud piirkoormuse väärtusi töödes [2] ja [5] esitatutega.

ELASTISCH-PLASTISCHE BIEGUNG DER KREISZYLINDERSCHALEN

K. Soonets

Zusammenfassung

Es wird die Durchbiegung der Kreiszylinderschalen im Falle einer gleichmässigen inneren oder äusseren Druckwirkung betrachtet. In dem vorliegenden Artikel werden die Resultate der Lösung der Gleichungen aus dem Artikel [1] gegeben. Es werden die gefundenen kritischen Werte des äusseren Normaldrucks den Werten von F. Hodge [2] und P. Montague [5] gegenübergestellt.

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО НЕУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Я. Леллеп

Кафедра теоретической механики

Установившаяся ползучесть равномерно нагруженных круглых пластин исследовалось впервые с помощью критерия Треска — Сен-Венана и ассоциированного закона течения в работе [6]. С тех пор большую популярность получило применение кусочно-линейных критериев текучести при расчете конструкций в условиях ползучести. Развивая идеи работы [6], установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин при различных условиях нагружения и закрепления рассматривалась в работах [1, 7, 8]. Эти исследования базируются на кусочно-линейном условии текучести Треска — Сен-Венана, причем используются степенные и экспоненциальные законы ползучести.

О. В. Сосниным [4] обобщен критерий Треска — Сен-Венана на случай анизотропной ползучести. Поведение анизотропного материала в условиях ползучести описывается уравнением

$$e_k = B(\lambda_k \sigma)^n \qquad (k=1,2,3).$$

Здесь σ — напряжение, e_k — скорости деформаций, а B, n и λ_k — экспериментальные константы, характеризующие ползучесть материала вдоль главных осей анизотропии.

В работе О. В. Соснина [5] исследуется ползучесть материалов, поведение которых является различным при растяжении и сжатии. Экспериментальные данные показывают, что поведение материала при растяжении и сжатии может описываться одинаковыми соотношениями, содержащими различные экспериментальные постоянные соответственно при растяжении и сжатии.

Ниже рассматривается установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала, подчиняющегося условию текучести Прагера [2].

§ 1. Основные уравнения и предположения

Рассмотрим кольцевую пластину радиуса a с вырезом радиуса b (в случае круглой пластины $b = 0$) и толщины h. Интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки обозначим через P. Пусть r — координата в радиальном направлении, z — координата по толщине пластины, а начало координат в центре пластины.

Для удобства введем следующие величины:

$$\varrho=\frac{r}{a};\quad \beta=\frac{b}{a};\quad \eta=\frac{2z}{h};\quad p=\frac{4a^2}{h^2}P;$$
$$t_1=\frac{T_r}{h};\quad t_2=\frac{T_\varphi}{h};\quad m_1=\frac{4M_r}{h^2};\quad m_2=\frac{4M_\varphi}{h^2}. \tag{1.1}$$

Здесь T_r, T_φ — мембранные усилия, а M_r, M_φ — изгибающие моменты в радиальном и касательном направлениях. Пусть σ_1 и σ_2 обозначают главные напряжения. Тогда

$$t_i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_i\,d\eta;\quad m_i=\int_{-1}^{1}\sigma_i\eta\,d\eta;\quad (i=1,\ 2). \tag{1.2}$$

В переменных (1.1) уравнения равновесия имеют вид

$$(\varrho t_1)'=t_2;\quad (\varrho m_1)'-m_2=\frac{p}{2}(\beta^2-\varrho^2), \tag{1.3}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ϱ.

Скорости деформаций определяем по формулам

$$e_i=\varepsilon_i+\eta\varkappa_i\quad (i=1,\ 2), \tag{1.4}$$

причем

$$\varepsilon_1=u';\quad \varepsilon_2=\frac{u}{\varrho};\quad \varkappa_1=-w'';\quad \varkappa_2=-\frac{w'}{\varrho} \tag{1.5}$$

(u и w — скорости перемещений, отнесенные к a и $2a^2/h$ соответственно).

Предположим, что пластина изготовлена из материала, подчиняющегося условию текучести Прагера [2], которое изображено на рис. 1. Угловые точки шестиугольника Прагера имеют следующие координаты: $A(\gamma\sigma_c,\ (\gamma-1)\sigma_c)$; $B(\gamma\sigma_c,\ \gamma\sigma_c)$; $C((\gamma-1)\sigma_c,\ \gamma\sigma_c)$; $D(-\sigma_c, 0)$; $E(-\sigma_c,\ -\sigma_c)$; $F(0,\ -\sigma_c)$; при этом $\gamma=\sigma_t/\sigma_c$, а σ_t — предел текучести при растяжении, σ_c — предел текучести при сжатии. Для конкретности ограничимся случаем $0<\gamma<1$ (если $\gamma=1$, то условие Прагера совпадает с критерием Треска—Сен-Венана).

Отметим, что изгиб пластин при пластических деформациях и установившаяся ползучесть пластин при изгибе происходят в некотором смысле аналогично. Различие между ними состоит в следующем. Пластическое течение происходит, если напряженное состояние сечения пластины соответствует ребрам или угловым точкам шестиугольника текучести (рис. 1). Изгиб при ползучести имеет место, если напряженное состояние соответствует ребрам или угловым точкам некоторых шестиугольников, остающихся подобными первоначальному шестиугольнику

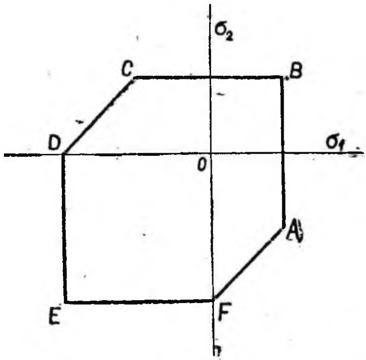


Рис. 1.

текучести (рис. 2). При этом величина σ_c является параметром, показывающим размеры каждого шестиугольника (для каждого значения σ_c получим новый шестиугольник). Очевидно, что σ_c может иметь также бесконечно малые значения. В случае жестко-пластического материала величина σ_c постоянна для данного материала.

Допустим, что поведение разномодульного материала при растяжении и сжатии (аналогично к анизотропному материалу) описывается уравнениями

$$e=\begin{cases} B(\lambda\sigma)^n, & \sigma\geqslant 0,\\ B(\sigma)^n, & \sigma\leqslant 0,\end{cases}$$

где B и n — некоторые постоянные, определяемые экспериментально. При этом параметр λ характеризует различное поведение материала при растяжении и сжатии, а $n>1$ — нечетное положительное число. Обозначим скорость рассеяния механической энергии через D, т. е.

$$D=\sigma_1 e_1+\sigma_2 e_2, \tag{1.6}$$

и допустим, что остается в силе ассоциированный закон течения.

В дальнейшем придется различать два типа режимов ползучести. Оказывается, что соотношения между напряжениями и скоростями деформаций являются различными в областях $OABC$ и $OCDEFA$ (рис. 2). Запишем их в виде

$$D=\begin{cases} \sigma B(\sigma)^n, & (OCDEFA),\\ \sigma B(\lambda\sigma)^n, & (OABC).\end{cases} \tag{1.7}$$

В формулах (1.7) вместо σ в зависимости от конкретного режима ползучести придется взять $\pm\sigma_1$, $\pm\sigma_2$ или $\pm(\sigma_1-\sigma_2)$.

Рассмотрим конкретно случай, когда напряженное состояние в сечении пластины соответствует области ODE. Согласно ассоциированному закону течения

$$e_1\leqslant 0, \qquad e_2=0. \tag{1.8}$$

Из формул (1.6)—(1.8) выясняется, что $\sigma_1 e_1=\sigma B(\sigma)^n$, откуда

$$\sigma=\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant 0; \qquad e_1=B(\sigma_1)^n. \tag{1.9}$$

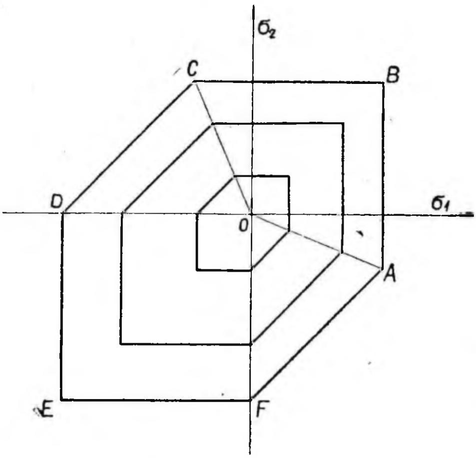


Рис. 2.

В случае углового режима (угловые точки шестиугольников) вектор скорости деформации направлен внутрь угла, образуемого перпендикулярами к соседним сторонам угловых точек. Например, при OE, имеем

$$\sigma=\sigma_1=\sigma_2; \qquad e_1=\nu B(\sigma)^n; \qquad e_2=(1-\nu)B(\sigma)^n, \qquad (1.10)$$

причем $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Значение параметра ν зависит от направления вектора скорости деформации. Если вектор скорости деформации перпендикулярен к стороне ED, то $\nu=1$, а если к EF, то $\nu=0$. Складывая последние два равенства в (1.10), получим

$$e_1+e_2=B(\sigma)^n; \qquad \sigma=\sigma_1=\sigma_2. \qquad (1.11)$$

Таблица 1

Режим	Напряжения	Скорости деформаций	
AOB	$\sigma=\sigma_1>\sigma_2>0$	$e_1\geqslant 0;\ e_2=0$	$e_1=B(\lambda\sigma_1)^n$
OB	$\sigma=\sigma_1=\sigma_2>0$	$e_1\geqslant 0;\ e_2\geqslant 0$	$e_1+e_2=B(\lambda\sigma_1)^n$
BOC	$\sigma=\sigma_2>\sigma_1$	$e_1=0;\ e_2\geqslant 0$	$e_2=B(\lambda\sigma_2)^n$
OC	$\sigma=\sigma_2>\sigma_1$	$e_1\leqslant 0;\ e_1+e_2\geqslant 0$	$\dfrac{\gamma-1}{\gamma}e_1+e_2=B(\lambda\sigma_2)^n$
COD	$\sigma=\sigma_2-\sigma_1$	$e_1+e_2=0;\ e_2-e_1\geqslant 0$	$e_2=B(\sigma_2-\sigma_1)^n$
OD	$\sigma=\sigma_1<\sigma_2=0$	$e_1+e_2\leqslant 0;\ e_2\geqslant 0$	$e_1=B(\sigma_1)^n$
DOE	$\sigma=\sigma_1<\sigma_2<0$	$e_1\leqslant 0;\ e_2=0$	$e_1=B(\sigma_1)^n$
OE	$\sigma=\sigma_1=\sigma_2<0$	$e_1\leqslant 0;\ e_2\leqslant 0$	$e_1+e_2=B(\sigma_1)^n$
EOF	$\sigma=\sigma_2<\sigma_1<0$	$e_1=0;\ e_2\leqslant 0$	$e_2=B(\sigma_2)^n$
OF	$\sigma=\sigma_2<\sigma_1=0$	$e_1\geqslant 0;\ e_1+e_2\leqslant 0$	$e_2=B(\sigma_2)^n$
FOA	$\sigma=\sigma_1-\sigma_2$	$e_1+e_2=0;\ e_1-e_2\geqslant 0$	$e_1=B(\sigma_1-\sigma_2)^n$
OA	$\sigma=\sigma_1>\sigma_2$	$e_1+e_2\geqslant 0;\ e_2\leqslant 0$	$e_1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma}e_2=B(\lambda\sigma_1)^n$

Рассмотрим теперь область $OABC$. Здесь связь между напряжениями и скоростями деформации определяется с помощью (1.6) и второй строки в формуле (1.7). Наличие коэффициента λ в нем объясняется тем, что начало координат не находится в центре шестиугольников ползучести (рис. 2). Допустим, что все шестиугольники остаются подобными между собой. Тогда при заданной скорости рассеяния механической энергии связь между напряжениями и скоростями деформации должна быть различной в различных направлениях. Например, при OBC

$$e_1=0; \qquad e_2=B(\lambda\sigma_2)^n; \qquad \sigma=\sigma_2\geqslant\sigma_1\geqslant 0. \tag{1.12}$$

Таким же путем, как получены формулы (1.9), (1.11) и (1.12), можно найти соотношения между скоростями деформации и напряжениями для всех режимов ползучести. Проанализируя все режимы, приходим к таблице 1.

§ 2. Кольцевая пластина, нагружена моментом, распределенным по внешнему контуру

Обозначим изгибающий момент, действующий на внешнем контуре, через $M = mh^2/4$. Внутренний край пластины считаем свободным, внешний свободно опертым. Различаем два случая.

1. Если

$$\beta\geqslant n^{-\frac{n}{n+1}}, \tag{2.1}$$

то при $-1\leqslant\eta<\eta_1$ в пластине реализуется режим ползучести OEF, а при $\eta_1<\eta\leqslant 1$ — режим OBC. При этом η_1 так называемая координата «нейтральной поверхности», которая определяется из уравнения $e_2(\eta_1, \varrho) = 0$. Согласно (1.4), (1.5) и ассоциированному закону течения, $e_1 = 0$, $\eta_1 = -\varepsilon_2/\varkappa_2$, откуда следует, что $u = \mathrm{const}$, $w' = -\Theta = \mathrm{const}$, $\eta_1 = \mathrm{const}$,

$$e_2=\frac{\theta}{\varrho}(\eta-\eta_1). \tag{2.2}$$

С помощью табл. 1 и формулы (2.2) получим

$$\sigma_2=\begin{cases} \left[\dfrac{\theta}{\varrho B}(\eta-\eta_1)\right]^{\frac{1}{n}}, & -1\leqslant\eta<\eta_1,\\[2ex] \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{\theta}{\varrho B}(\eta-\eta_1)\right]^{\frac{1}{n}}, & \eta_1<\eta\leqslant 1.\end{cases} \tag{2.3}$$

Для определения величины λ в (2.3) используем условие $\sigma_2(1,\varrho) = -\gamma\sigma_2(-1,\varrho)$, которое дает

$$\lambda=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.4}$$

Применяя формулы (1.2) и (2.3) вычислим величины

$$t_2=\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{\theta}{\varrho B}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{\lambda}(1-\eta_1)^{\frac{n+1}{n}}-(1+\eta_1)^{\frac{n+1}{n}}\right];$$

$$m_2=\left(\frac{\theta}{\varrho B}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{n}{2n+1}\left[(1+\eta_1)^{\frac{2n+1}{n}}+\frac{1}{\lambda}(1-\eta_1)^{\frac{2n+1}{n}}\right]+\right. \tag{2.5}$$

$$\left.+\frac{n\eta_1}{n+1}\left[\frac{1}{\lambda}(1-\eta_1)^{\frac{n+1}{n}}-(1-\eta_1)^{\frac{n+1}{n}}\right]\right\}.$$

Соотношения (2.5) позволяют интегрировать уравнения равновесия (1.3), где в данном случае придется взять $p=0$. Сделав это и удовлетворяя граничным условиям

$$t_1(\beta)=0,\qquad t_1(1)=0,\qquad m_1(\beta)=0,\qquad m_1(1)=m, \tag{2.6}$$

найдем:

$$\lambda=\left(\frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}; \tag{2.7}$$

$$t_1=t_2=0;\qquad m_1=\frac{m}{1-\beta^{\frac{n-1}{n}}}\cdot\frac{\varrho^{\frac{n-1}{n}}-\beta^{\frac{n-1}{n}}}{\varrho};$$

$$m_2=\frac{m(n-1)}{n\varrho^{\frac{1}{n}}\left(1-\beta^{\frac{n-1}{n}}\right)}; \tag{2.8}$$

$$\theta=2B\left[\frac{m(n-1)(2n+1)}{n^2\left(1-\beta^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right]^n\left(\frac{1+\gamma}{4\gamma}\right)^{n+1}. \tag{2.9}$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.4), имеем

$$\eta_1=\frac{\gamma-1}{1+\gamma};\qquad \lambda=\gamma^{-\frac{n+1}{n}}. \tag{2.10}$$

Интегрируя уравнение (2.9) по ϱ и удовлетворяя граничному условию $w(1)=0$, получим

$$w=2B\left[\frac{m(n-1)(2n+1)}{n^2\left(1-\beta^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right]^n\left(\frac{1+\gamma}{4\gamma}\right)^{n+1}(1-\varrho).$$

Интересно отметить, что обобщенные напряжения t_1, t_2, m_1 и m_2 не зависят от величины γ, но от γ зависит скорость прогиба w.

Так как величины t_1 и m_1 определены из уравнений равновесия, то придется еще проверить, является ли найденное поле напряжений статически допустимым. Для проверки покажем существование распределения напряжения σ_1, которое удовлетворяет статическим требованиям. Допустим, что

$$\sigma_1 = \begin{cases} k_1(\varrho)\,(\eta-\eta_1)^{\frac{1}{n}}, & -1 \leqslant \eta < \eta_1, \\ k_2(\varrho)\,(\eta-\eta_1)^{\frac{1}{n}}, & \eta_1 < \eta \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $k_1(\varrho)$ и $k_2(\varrho)$ — некоторые функции, зависящие только от ϱ. Статическими ограничениями являются неравенства

$$\sigma_2 \leqslant \sigma_1 \leqslant 0, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant \eta < \eta_1,$$
$$(\gamma-1)\,\sigma_2 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2, \quad \text{если} \quad \eta_1 < \eta \leqslant 1,$$

которые с помощью формул (2.3), (2.10) и (2.11) представим в виде

$$\begin{gathered} 0 \leqslant k_1 \leqslant \left(\frac{\theta}{\varrho B}\right)^{\frac{1}{n}}; \\ (\gamma-1)\left(\frac{\theta\gamma^{n+1}}{\varrho B}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant k_2 \leqslant \left(\frac{\theta\gamma^{n+1}}{\varrho B}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Вычислим величины t_1 и m_1 согласно формулам (1.2) и (2.11). Учитывая при этом соотношения (2.8), имеем

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{n}{n-1}\left(\frac{\theta}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\varrho^{\frac{n-1}{n}} - \beta^{\frac{n-1}{n}}}{\varrho}; \\ k_2 &= \gamma^{\frac{n+1}{n}} k_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

С помощью формул (2.13) нетрудно проверить, что неравенства (2.12) удовлетворены, если только выполнено неравенство (2.1).

2. Если $\beta < n^{-n/(n-1)}$, то при $\beta \leqslant \varrho < \varrho_1$ в пластине реализуются режимы ползучести OEF и OBC, а при $\varrho_1 < \varrho \leqslant 1$ — режимы OE и OB. Величина ϱ_1 обозначает безразмерный радиус окружности, при котором происходит переход от одного режима к другому. В области $\beta \leqslant \varrho < \varrho_1$ остаются в силе формулы (2.3)—(2.5), а в зоне $\varrho_1 < \varrho \leqslant 1$ имеем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \begin{cases} \left[\dfrac{(\varkappa_1+\varkappa_2)}{B}(\eta-\eta_2)\right]^{\frac{1}{n}}, & -1 \leqslant \eta < \eta_2, \\ \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{(\varkappa_1+\varkappa_2)}{B}(\eta-\eta_2)\right]^{\frac{1}{n}}, & \eta_2 < \eta \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Здесь

$$\eta_2 = -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varkappa_1+\varkappa_2} = \frac{\varrho u' + u}{\varrho w'' + w'}.$$

Из формул (2.14) с помощью (1.2) вытекает, что при $\varrho_1 < \varrho \leqslant 1$

$$t_1 = t_2 = \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{\lambda}(1-\eta_2)^{\frac{n+1}{n}} - (1+\eta_2)^{\frac{n+1}{n}} \right];$$

$$m_1 = m_2 = \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{n}{2n+1} \left[(1+\eta_2)^{\frac{2n+1}{n}} + \frac{1}{\lambda}(1-\eta_2)^{\frac{2n+1}{n}} \right] + \right. \tag{2.15}$$

$$\left. + \frac{n\eta_2}{n+1} \left[\frac{1}{\lambda}(1-\eta_2)^{\frac{n+1}{n}} - (1+\eta_2)^{\frac{n+1}{n}} \right] \right\}.$$

Интегрируя уравнения равновесия (1.3) с учетом (2.5), (2.15) и удовлетворяя граничным условиям (2.6), а также условиям непрерывности величин t_1, m_1, m_1' в точке ϱ_1, найдем

$$t_1 = t_2 = 0; \qquad \eta_1 = \eta_2 = \frac{\gamma - 1}{1+\gamma}; \qquad \varrho_1 = \beta(n)^{\frac{n}{n-1}};$$

$$m_1 = \begin{cases} \dfrac{m\varrho_1}{\varrho} \dfrac{\varrho^{\frac{n-1}{n}} - \beta^{\frac{n-1}{n}}}{\varrho_1^{\frac{n-1}{n}} - \beta^{\frac{n-1}{n}}} & \beta \leqslant \varrho < \varrho_1; \\ m, & \varrho_1 < \varrho \leqslant 1; \end{cases} \tag{2.16}$$

$$m_2 = \begin{cases} \dfrac{m\varrho_1}{n\varrho^{\frac{1}{n}} \beta^{\frac{n-1}{n}}}, & \beta \leqslant \varrho < \varrho_1; \\ m, & \varrho_1 < \varrho \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю найдем дифференциальные уравнения для определения скоростей прогиба

$$w' = -B\varrho_1 \left[\frac{m(2n+1)}{2n} \right]^n \left(\frac{1+\gamma}{2\gamma} \right)^{n+1}, \qquad \beta \leqslant \varrho < \varrho_1;$$

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = B \left[\frac{m(2n+1)}{2n} \right]^n \left(\frac{1+\gamma}{2\gamma} \right)^{n+1}, \qquad \varrho_1 < \varrho \leqslant 1. \tag{2.17}$$

Так как согласно (1.5) сумма $\varkappa_1 + \varkappa_2 = -(\varrho w')'/\varrho$, то в (2.17) можно интегрировать оба уравнения. Проводя интегрирование и удовлетворяя граничному условию $w(1) = 0$ и условиям непрерывности величин w, w' в точке ϱ_1, получим

$$w = \frac{B}{2} \left[\frac{m(2n+1)}{n} \right]^n \left(\frac{1+\gamma}{4\gamma} \right)^{n+1} \times$$

$$\times \begin{cases} (1 - 4\varrho\varrho_1 + 3\varrho_1^2 - 2\varrho_1^2 \ln \varrho_1), & \beta \leqslant \varrho < \varrho_1; \\ (1 - \varrho^2 - 2\varrho_1^2 \ln \varrho), & \varrho_1 < \varrho \leqslant 1. \end{cases}$$

С помощью (2.11), (2.13) нетрудно проверить, что полученное решение является статистически допустимым.

§ 3. Свободно опертая круглая пластина под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки

В данном случае пластина разделяется на две зоны: вблизи центра $0 \leqslant \varrho < \varrho_1$ реализуются режимы ползучести OE и OB, а при $\varrho_1 < \varrho \leqslant 1$ режимы OEF и OBC. Вблизи края $\varrho_1 < \varrho \leqslant 1$ остаются в силе формулы (2.2)—(2.5), а в центре $0 \leqslant \varrho < \varrho_1$ формулы (2.14) и (2.15).

Интегрируем первое уравнение системы (1.3) с помощью соотношений (2.5) и (2.15). Удовлетворяя при этом граничному условию $t_1(1) = 0$, условию симметрии $t_1(0) = t_2(0)$ и условию непрерывности величины t_1 в точке ϱ_1, приходим опять к выводу, что

$$t_1 = t_2 = 0; \qquad \eta_1 = \eta_2 = \frac{\gamma - 1}{1+\gamma}; \qquad \lambda = \gamma^{-\frac{n+1}{n}} \tag{3.1}$$

во всей пластине.

Второе уравнение системы (1.3) с учетом (2.5) и (3.1) дает после интегрирования при условиях $m_1(1) = 0$, $m_1(\varrho_1) = m_2(\varrho_1)$

$$m_1 = \frac{p}{6\varrho}(1 - \varrho^3) + \frac{2n^2}{(n-1)(2n+1)}\left(\frac{\Theta}{B}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{\varrho^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\varrho}; \tag{3.2}$$

$$\Theta = 2B\left[\frac{p(n-1)(1-\varrho_1)}{6\left(n - \varrho_1^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right]^n \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1+\gamma}{4\gamma}\right)^{n+1}. \tag{3.3}$$

Из формул (1.3) и (2.15) вытекает, что в центральной зоне

$$m_1 = m_2 = C - \frac{p}{4}\varrho^2, \tag{3.4}$$

где C — постоянная интегрирования. С другой стороны, из (2.15) и (3.1) следует

$$m_1 = m_2 = -\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{(\varrho w')'}{\varrho B}\right]^n, \qquad 0 \leqslant \varrho < \varrho_1. \tag{3.5}$$

Удовлетворяя условиям непрерывности величин m_1, m_2 в точке ϱ_1, имеем

$$C = \frac{p}{4}\varrho_1^2 + \frac{p(n-1)(1-\varrho_1^3)}{6\varrho^{\frac{1}{n}}\left(n - \varrho_1^{\frac{n-1}{n}}\right)}. \tag{3.6}$$

Заменяя левую сторону соотношения (3.5) выражением (3.4) и интегрируя затем при условии $w'(0)=0$, приходим к уравнению

$$w'=-\frac{4B}{(n+1)p\varrho}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n\left[\frac{(1+\gamma)C}{4\gamma}\right]^{n+1}\left[1-\left(1-\frac{p\varrho^2}{4C}\right)^{n+1}\right]. \tag{3.7}$$

Так как $w'(\varrho_1)=\Theta$, то с помощью (3.3), (3.6) и (3.7) получим следующее соотношение

$$(2n+1)(1-z)^{n+1}-2(n+1)(1-z)^n+1=0, \tag{3.8}$$

где обозначено

$$z=\frac{p\varrho_1^2}{4C}. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.8) можно для каждого n вычислить z. Отметим, что к такому же уравнению приходим, исходя из критерия Треска—Сен-Венана (см., например, [3]). С помощью (3.6) и (3.9) получим трансцендентное уравнение для определения величины ϱ_1:

$$3\varrho_1^2(n\varrho_1^{\frac{1}{n}}-\varrho_1)(1-z)=2z(n-1)(1-\varrho_1^3), \tag{3.10}$$

которое также не зависит от γ.

Скорости прогиба найдем из уравнений (3.3) и (3.7).

Постулируя в пластине распределение напряжения σ_1 согласно (2.11), нетрудно проверить, что полученное решение является статически допустимым, если только

$$n^*=\frac{1-z}{2z}\leqslant n. \tag{3.11}$$

В таблице 2 представлены величины z и n^* при некоторых значениях величины n. Из таблицы 2 выясняется, что неравенство (3.11) удовлетворено.

Таблица 2

n	z	n^*
3	0,3281	1,0240
5	0,2160	1,8150
7	0,1608	2,6087
9	0,1281	3,4034
11	0,1064	4,1985
13	0,0910	4,9939
15	0,0795	5,7894
17	0,0706	6,5850
19	0,0634	7,3806
21	0,0576	8,1763
23	0,0528	8,9721
25	0.0487	9,7670

Наконец, отметим, что при $\gamma=1$ найденные решения совпадают с результатами, полученными при решении соответствующих задач с помощью критерия Треска—Сен-Венана [3].

Литература

1. Малинин Н. Н., Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин. В сб. «Расчеты на прочность». Вып. 9, Машгиз, 1963, 173—195.
2. Прагер В., О пластическом анализе слоистых конструкций. В сб. «Проб. механики сплошн. среды». М., АН СССР, 1961, 302—309.
3. Работнов Ю. Н., Ползучесть элементов конструкций. Москва, 1966.
4. Соснин О. В., Установившаяся анизотропная ползучесть дисков. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1963, № 4, 128—131.
5. Соснин О. В., О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1970, № 5, 136—139.
6. Venkatraman, B., Hodge, P., Creep behaviour of circular plates. J. Mech. and Phys. Solids, 1958, 6. № 3, 163—176.
7. Venkatraman, B., Hodge, P., A further note on the creep behaviour of circular plates. J. Mech. and Phys. Solids, 1964, 12, № 3, 191—197.
8. Venkatraman, B., Patel, S. A., Creep analysis of annular plates. J. Franklin Inst., 1963, 275, № 1, 13—23.

Поступило
20 II 1973

ERINEVATE VOOLAVUSPIIRIDEGA MATERJALIST VALMISTATUD ÜMAR- JA RÕNGASPLAATIDE STATSIONAARNE ROOMAVUS

J. Lellep

Resümee

Vaadeldakse ümar- ja rõngasplaatide painet statsionaarse roomavuse korral lähtudes Prageri voolavustingimusest. Eeldatakse, et pingete ja deformatsioonikiiruste vahelist seost kirjeldab astmefunktsioon, millel on erinevad kordajad lihttõmbe ja -surve korral. Lahendades tasakaaluvõrrandid ja rahuldades vastavad rajatingimused leitakse üldistatud pingete jaotus välisserva mööda vabalt toetatud rõngasplaadi jaoks, millele mõjub painutav moment, ning vabalt toetatud ümmarguse plaadi jaoks, millele mõjub ühtlaselt jaotatud ristkoormus. Konstrueerides mittelineaarse radiaalsuunaliste pingete jaotuse näidatakse, et leitud lahendid on staatiliselt ja kinemaatiliselt lubatavad.

STEADY CREEP OF CIRCULAR AND ANNULAR PLATES MADE FROM DIFFERENT-MODULUS MATERIAL

J. Lellep

Summary

Using Prager's yield criterion and associated flow rule the creep bending of circular and annular plates is studied. It is assumed that the creep rate is the product of a constant and a power function of a stress which consists of different parametres in tension and compression. The stresses and deformations of a simply supported annular plate, which is loaded by distributed bending moments, are obtained. The bending of a uniformly loaded and simply supported circular plate is studied.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

С. Барон, Э. Реймерс. К шестидесятилетию профессора Г. Кангро 3

А. Таутс. Игра для построения семантики высказываний в обобщенных моделях бета 13

A. Tauts. Mäng valemite semantika konstrueerimiseks üldistatud Bethi mudelites. *Resümee* 28

A. Tauts. Das Spiel zum konstruieren der Semantik der Formeln in verallgemeinerten Beth-Modellen. *Zusammenfassung* 28

Я. Габович. Два диафантовых уравнения четвертой степени . . . 29

J. Gabovitš. Kaks neljanda astme diofantilist võrrandit. *Resümee* . 32

J. Gabovitch. Two diophantine equations of degree four. *Summary* . 32

Т. Кельдер. Сходимость при помощи направленностей 33

T. Kelder. Koonduvus suunatud perede abil. *Resümee* 50

T. Kelder. Konvergenzbegriff mit den verallgemeinerten Folgen. *Zusammenfassung* 50

А. Парринг. О строении фокальных поверхностей конгруэнций симплектических $2m$-плоскостей со специальными внутренними связностями 51

A. Parring. Spetsiaalsete sisekõverustega sümplektiliste $2m$-tasandite kongruentsi fokaalpinna ehitusest. *Resümee* 61

A. Parring. Über die Struktur der Fokalflächen der Kongruenz der symplektischen $2m$-Ebenen mit speziellen inneren Zusammenhängen. *Zusammenfassung* 62

А. Фляйшер. Линейчатые орбиты в P_3 и их однородные пространства 63

A. Flaišer. Joonpind-orbiidid ruumis P_3 ja nende homogeensed ruumid. *Resümee* 74

A. Fleischer. Regelorbiten im P_3 und ihre Kleinschen Räume. *Zusammenfassung* 75

И. Маазикас. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства . . 76

I. Maasikas. Pseudoeukleidilise ruumi mitteisotroopsete alamruumide Grassmanni muutkonna Riemanni geomeetriast. *Resümee* . . . 82

I. Maasikas. Zur Riemannschen Geometrie der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten von nichtisotropen Unterräume im pseudoeuklidischen Raum. *Zusammenfassung* 82

К. Рийвес. Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. II 83

K. Riives. Eukleidilise ruumi R_5 liikumiste rühma Lie alamrühmad ja nende orbiidid. II. *Resümee* 109

K. Riives. Lie subgroups in the group of motions in Euclidean space R_5 and their orbits. II. *Summary* 109

К. Рийвес. Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. II 110

K. Riives. Eukleidilise ruumi R_n kumerate hulktahukate afiinsest klassifikatsioonist ja tunnustest. II. *Resümee* 121

K. Riives. About affine classification and characters of convex polytopes in Euclidean space R_n. II. *Summary* 121

Э. Оя. Безусловные шаудеровские разложения и рефлексивность бочечных пространств . . . 122
E. Oja. Tingimatud Schauderi lahutused ja tünniruumide refleksiivsus. *Resümee* . . . 134
E. Oja. Unconditional Schauder decompositions and reflexivity of barrelled spaces. *Summary* . . . 134
М. Абель. Разложимость алгебры ограниченных непрерывных *А*-значных функций . . . 135
M. Abel. Tõkestatud pidevate *A*-väärtustega funktsioonide algebra otselahutusest. *Resümee* . . . 142
M. Abel. The decomposition of the algebra of *A*-valued bounded continuous functions. *Summary* . . . 142
А. Кивинукк. Об одном методе приближения функций двух переменных . . . 143
A. Kivinukk. Ühest kahe muutuja funktsioonide lähendusmeetodist. *Resümee* . . . 155
A. Kivinukk. Über ein Approximationsverfahren für Funktionen von zwei Veränderlichen. *Zusammenfassung* . . . 155
В. Соомер. О полях почти суммируемости . . . 156
V. Soomer. Peaaegu summeeruvusväljadest. *Resümee* . . . 162
V. Soomer. On almost summability fields. *Summary* . . . 162
В. Соомер. Множители сходимости для почти сходящихся рядов . . . 163
V. Soomer Koonduvustegurid peaaegu koonduvate ridade jaoks. *Resümee* . . . 169
V. Soomer. Convergence factors for almost convergent series. *Summary* . . . 170
Е. Ворошнина. Множители суммируемости для интегралов . . . 171
J. Vorošnina. Summeeruvustegurid integraalide jaoks. *Resümee* . . . 181
J. Voroshnina. Summability factors for integrals. *Summary* . . . 181
Т. Сырмус. Тауберовы теоремы для рядов банахова пространства . 182
T. Sõrmus. Tauberi teoreemid Banachi ruumi ridade jaoks. *Resümee* . 188
T. Sõrmus. Tauber-Sätze für die Reihen aus Banach-Räumen. *Zusammenfassung* . . . 188
Х. Тюрнпу и Ф. Шипп. Сходимость почти всюду функциональных рядов по системам произведений . . . 189
H. Türnpu ja F. Schipp. Produktsüsteemidega määratud funktsionaalridade koonduvusest peaaegu kõikjal. *Resümee* . . . 192
H. Türnpu und F. Schipp. Über die fast überall Konvergenz der Funktionenreihen nach Produktsystemen. *Zusammenfassung* . . 192
Х. Тюрнпу, К. Лыхмус и Т. Салуяэр. О сильной суммируемости функциональных рядов почти всюду . . . 193
H. Türnpu, K. Lõhmus ja T. Saluäär. Funktsionaalridade tugevast summeeruvusest. *Resümee* . . . 213
H. Türnpu, K. Lõhmus and T. Saluäär. On strong summability of series of functions. *Summary* . . . 213
С. Барон. Функции Лебега для сходимости и суммируемости двойных функциональных рядов . . . 214
S. Baron. Kahekordsete funktsionaalridade Lebesgue'i funktsioonid koonduvuse ja summeeruvuse puhul. *Resümee* . . . 224
S. Baron. Die Lebesgueschen Funktionen bei der Konvergenz und der Summierbarkeit der Doppelfunktionalreihen. *Zusammenfassung* . 224
Г. Вайникко. О приближении неподвижных точек вполне непрерывных операторов . . . 225
G. Vainikko. Täielikult pidevate operaatorite püsipunktide lähendamisest. *Resümee* . . . 235
G. Vainikko. Über Approximation der Fixpunkte vollstetigen Operatoren. *Zusammenfassung* . . . 236
П. Оя. О решении эволюционных уравнений методом Галеркина . . 237

P. O j a. Evolutsioonivõrrandi lahendamisest Galjorkini meetodiga. *Resümee* 248
P. O j a. On the solution of evolutional equations by Galerkin method. *Summary* 248
А. Д е м е н т ь е в а. Сравнение двух методов приближенного построения неявной функции 249
A. D e m e n t j e v a. Kahe meetodi võrdlus ilmutamata funktsiooni ligikaudseks konstrueerimiseks. *Resümee* 262
A. D e m e n t'e v a. Comparison of two methods of approximate constructing of implicit function. *Summary* 262
М. К о й т. Некоторые свойства элементарно-утилитарного языка . . 263
M. K o i t. Elementaar-utilitaarse keele omadusi. *Resümee* 294
M. K o i t. Von der Beschaffenheit der elementar-utilitaren Sprache. *Zusammenfassung* 294
Э. П у н г а р. Оптимальное проектирование оболочек вращения с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина 295
E. P u n g a r. Pöördkoorikute optimaalne projekteerimine L. S. Pontrjagini maksimumprintsiibi abil. *Resümee* 302
E. P u n g a r. The optimum design of revolution shells by means of Pontryagin's maximum principle. *Summary* 302
Ю. Л е п и к. Приближенный метод решения задач динамики жестко-пластических конструкций под действием нагрузок локального типа 303
Ü. L e p i k. Ligikaudne meetod jäik-plastsete lokaalselt koormatud konstruktsioonide dünaamika ülesannete lahendamiseks. *Resümee* . . **310**
Ü. L e p i k. An approximate method for designing of rigid-plastic constructions under local dynamic loads. *Summary* 310
К. С о о н е т с. О поведении осесимметрично нагруженных круговых цилиндрических оболочек с учетом упруго-пластических деформаций 311
K. S o o n e t s. Telgsümmeetriliselt koormatud silindrilise kooriku elastsest-plastsest käitumisest. *Resümee* 322
K. S o o n e t s. Elastisch-plastische Biegung der Kreiszylinderschalen. *Zusammenfassung* 322
Я. Л е л л е п. Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала . 323
J. L e l l e p. Erinevate voolavuspiiridega materjalist valmistatud ümarja rõngasplaatide statsionaarne roomavus. *Resümee* 333
J. L e l l e p. Steady creep of circular and annular plates made from different-modulus material. *Summary* 333

Труды по математике и механике
XIV
На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ответственный редактор С. Барон
Корректоры Г. Ноппель, О. Мутт, К. Усталу

Сдано в набор 22 VI 1973. Подписано к печати 9 IX 1974. Бумага типографская № 1, 60×90¹/₁₆. Печ. листов 21,0+1 вклейка. Учетно-издат. листов 19,95. Тираж 500. МВ-07561. Зак. № 3873. Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 2 руб.

2—2

Цена 2 руб.